СПРАВОЧНИК
ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ, МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

Издание пятое

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО БССР
Редакция научно-технической литературы
МИНСК 1935

В составлении «Справочника» принимали участие Е. Я. Березовский (отделы «Математика» и «Некоторые справочные сведения»), И. Н. Веселовский (отдел «Механика» и «Простой способ извлечения квадратного корня» в отделе «Математика»), А. Я. Модестов (отдел «Физика»), В. Л. Левкович («Комплексные числа» в отделе «Математика»).

* * *

Печатается по тексту: «Справочник по элементарной математике, механике и физике», издание четвертое исправленное, издательство Академии наук БССР, Минск 1952 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Стр.

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

ФИЗИКА

НЕКОТОРЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

I. ЛАТИНСКИЙ И ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТЫ

Латинский				Греческий			
Буквы	Названия букв	Буквы	Названия букв	Буквы	Названия букв	Буквы	Названия букв
Aa	а	Nn	эн	Αα	альфа	Νν	ни(ню[1])
Bb	бэ	Oo	о	Ββ	бэта	Ξξ	кси
Cc	цэ	Pp	пэ	Γγ	гамма	Οο	омикрон
Dd	дэ	Qq	ку	Δδ	дэльта	Ππ	пи
Ee	е	Rr	эр	Εε	эпсилон	Ρρ	ро
Ff	эф	Ss	эс	Ζζ	дзэта	Σσ	сигма
Gg	гэ(же[1])	Tt	тэ	Ηη	эта	Ττ	тау
Hh	ха(аш[1])	Uu	у	Θϑ(θ[2])	тэта	Υυ	ипсилон
Ii	и	Vv	вэ	Ιι	иота	Φφ	фи
Jj	йот(жи[1])	Ww	дубль-вэ	Κκ	каппа	Χχ	хи
Kk	ка	Xx	икс	Λλ	ламбда	Ψψ	пси
Ll	эль	Yy	игрек	Μμ	ми(мю[1])	Ωω	омега
Mm	эм	Zz	зэт				

[1]) В скобках дано другое название этих же букв.
[2]) Другое начертание буквы.

II. МЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА МЕР

1. Свойство метрической системы

Метрическая система мер, принятая почти во всех странах[1]), удобна тем, что для каждой измеряемой величины (длина, вместимость, вес) вводится одна *основная мера* (метр, литр, грамм). Остальные меры—*производные*—в 10, 100, 1000 раз больше или меньше основных; почти все их названия образуются прибавлением к основным следующих приставок:

кило	(тысяча)	деци	(одна десятая)
гекто . . .	(сто)	санти . . .	(одна сотая)
дека	(десять)	милли . . .	(одна тысячная)

Например: километр — тысяча метров,
гектолитр — сто литров,
миллиграмм — одна тысячная грамма.

При такой системе очень просто производить раздробление и превращение именованных чисел, что облегчает все вычисления с этими числами.

2. Основная мера длины — метр

За образец *метра* принята длина металлического стержня (эталона), хранящегося в Международном бюро мер и весов в Париже. Сначала предполагалось, что 1 метр будет

---

[1]) В СССР метрическая система введена к обязательному применению с 1924 года.

составлять ровно одну десятимиллионную часть четверти земного меридиана; позже выяснилось, что это не совсем так: $^1/_4$ земного меридиана равна 10 000 869 метрам.

3. Основная мера веса — грамм

1 *грамм* есть вес 1 кубического сантиметра воды при температуре 4° С на широте Парижа. За образец 1 килограмма принят вес платинового эталона, также хранящегося в Париже.

4. Основная мера вместимости — литр

1 *литр* есть объем, занимаемый массой в 1 килограмм чистой воды при ее наибольшей плотности и под нормальным атмосферным давлением. 1 кубический дециметр = = 1 литру (точнее 0,999 973 литра).

5. Производные меры

Правило образования производных мер дано на стр. 16. Некоторые названия (гектометр, декаметр) на практике не употребляются; вместо «кв. гектометр» и «кв. декаметр» говорят «гектар» и «ар». Имеются и особые названия: 1 микрон = $^1/_{1000}$ миллиметра, 1 тонна = 1000 килограммам, 1 центнер = 100 килограммам. Подробнее см. таблицу на страницах 18—19.

5. Таблица метрических мер

Сокращ. обознач.	Меры длины: Название	Меры длины: Раздробление и превращение	Сокращ. обознач.	Меры поверхности: Название	Меры поверхности: Раздробление и превращение
км	километр	=1000 *м*	*км*²	кв. километр	=100 *га*=10000 *а*
гм	гектометр	=100 *м*=0,1 *км*	*га*	гектар	=100 *а*=10000 *м*²
дкм	декаметр	=10 *м*=0,01 *км*	*а*	ар	=100 *м*²=0,01 *га*
м	метр	=10 *дм*=100 *см*	*м*²	кв. метр	=100 *дм*²
дм	дециметр	=0,1 *м*=10 *см*=100 *мм*	*дм*²	кв. дециметр	=0,01 *м*²=100 *см*²
см	сантиметр	=0,01 *м*=0,1 *дм*=10 *мм*	*см*²	кв. сантиметр	=0,01 *дм*²=100 *мм*²
мм	миллиметр	=0,001 *м*=0,1 *см*=1000 μ	*мм*²	кв. миллиметр	=0,01 *см*²
μ	микрон	=0,001 *мм*			

Продолжение

Меры объема			Меры вместимости			Меры веса		
Сокращенное обозначение	Название	Раздробл. и превращ.	Сокращенное обозначение	Название	Раздробл. и превращ.	Сокращенное обозначение	Название	Раздробл. и превращ.
*м*³	куб. метр	=1000 *дм*³	*кл*	килолитр	=1000 *л*	*т*	тонна	=1000 *кг*
			гл	гектолитр	=100 *л*	*ц*	центнер	=100 *кг*
			дкл	декалитр	=10 *л*			
*дм*³	куб. дециметр	=1000 *см*³	*л*	литр	=1000 *мл*	*кг*	кило-грамм	=1000 *г*
*см*³	куб. сантиметр	=0,001 *дм*³	*мл*	миллилитр	=0,001 *л*	*г*	грамм	=0,001 *кг*
*мм*³	куб. миллиметр	=0,001 *см*³				*мг*	милли-грамм	=0,001 *г*

III. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ В МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

7. Физические величины и их единицы

Одна и та же физическая величина может измеряться различными единицами. В этой таблице приведены наиболее употребительные единицы и даны соотношения между ними. В теоретических вопросах принята т. наз. *система* CGS («це-же-эс»), в которой за единицу длины берется с а н т и м е т р, за единицу массы — г р а м м, а за единицу времени — с е к у н д а; единицы же остальных величин выражаются через эти три (напр. скорость — в *см/сек*).

Название величины	Единица: Название	Единица: Сокращенное обозначение	Соотношения между различными единицами
Время . . .	Секунда	*сек*	
Длина . . .	Сантиметр	*см*	
	Метр	*м*	
Скорость . .	1 сант. в сек. . .	*см/сек*	
	1 метр в сек. . .	*м/сек*	
Ускорение .	1 сант. в сек^2 . .	*см/сек*^{2}	
	1 метр в сек^2 . .	*м/сек*^{2}	

Название величины	Единица: Название	Единица: Сокращенное обозначение	Соотношения между различными единицами
Масса	Грамм	*г*	1 *г*=0,001 *кг*
	Килограмм	*кг*	1 *кг*=1000 *г*
	Тонна	*т*	1 *т*=1000 *кг*
Сила	Стен	*сн*	1 *сн*=10^8 *дн*=102 *кГ*=$102\cdot10^3$ *Г*
	Дина	*дн*	1 *дн*=10^{-8} *сн*=$102\cdot10^{-3}$ *кГ*=$102\cdot10^{-5}$ *Г*
	Килограмм (сила)	*кГ*	1 *кГ*=10^3 *Г*=$981\cdot10^{-5}$ *сн*=$981\cdot10^3$ *дн*
	Грамм (сила)	*Г*	1 *Г*=10^{-3} *кГ*=981 *дн*
Работа и энергия	Килоджоуль (стенметр)	*кдж*	1 *кдж*=10^3 *дж*=102 *кГм*
	Джоуль	*дж*	1 *дж*=10^7 *э*=0,102 *кГм*
	Эрг	*э*	1 *э*=10^{-7} *дж*=10^{-10} *кдж*=$102\cdot10^{-10}$ *кГм*
	Килограмм (сила)-метр	*кГм*	1 *кГм*=9,81 *дж*=0,00981 *кдж*=$981\cdot10^5$ *э*
			1 *кГм* = $\frac{1}{427}$ *ккал* (термический эквивалент работы)

Продолжение

Название величины	Единица: Название	Единица: Сокращенное обозначение	Соотношения между различными единицами
Мощность	Киловатт (килоджоуль в сек., стенметр в сек.)	*квт*	1 *квт* = 1000 *вт* = 10^{10} *э/сек* = 102 *кГм/сек*
	Ватт (джоуль в сек.)	*вт*	1 *вт* = 10^{7} *э/сек* = 0,102 *кГм/сек*
	Эрг в сек.	*э/сек*	1 *э/сек* = 10^{-10} *квт* = 10^{-7} *вт* = $102 \cdot 10^{-10}$ *кГм/сек*
	Килограмм (сила)-метр в сек.	*кГм/сек*	1 *кГм/сек* = $981 \cdot 10^{-5}$ *квт* = $\frac{1}{75}$ *ЛС (HP)*
	Лошадиная сила	*ЛС (HP*[1]*)*	1 *ЛС (HP)* = 0,736 *квт*

[1]) Другое обозначение лошадиной силы, принятое в иностранной и отчасти в русской литературе.

Продолжение

Название величины	Единица: Название	Единица: Сокращенное обозначение	Соотношения между различными единицами
Механическое напряжение (давление, растяжение, касательное напряжение)	Бар	*Б*	1 *Б*$=10^6$ *б*$=100$ *сн/м*$^2=$ $=10200$ *кГ/м*$^2=1{,}02$ *ат*
	Бария	*б*	1 *б*$=10^{-3}$ *Б*$=10^{-4}$ *сн/м*$^2=$ $=102\cdot10^{-4}$ *кГ/м*$^2=102\cdot10^{-8}$ *ат*
	Килограмм (сила) на квадр. сантиметр (атмосфера технич.)	*кГ/см*^{2} (*ат*)	1 *кГ/см*$^2=1$ *ат*$=10^4$ *кГ/м*$^2=$ $=0{,}981$ *Б*$=981000$ *б*
Количество теплоты . .	Килоджоуль . .	*кдж*	1 *кдж*$=1000$ *дж*
	Джоуль	*дж*	
	Килокалория (большая калория)	*ккал*	1 *ккал*$=1000$ *кал*$=4{,}188$ *кдж*$=$ $=427$ *кГм* (механич. эквивалент тепла)
	Калория (малая калория)	*кал*	1 *кал*$=4{,}188$ *дж*

Продолжение

Название величины	Единица: Название	Единица: Сокращенное обозначение	Соотношения между различными единицами
Электрическое сопротивление	Ом	*ом*	
Сила тока	Ампер	*а*	
Электрическое напряжение и электродвижущая сила	Киловольт	*кв*	1 *кв* = 1030 *в*
	Вольт	*в*	
Электрическая мощность	Киловатт	*квт*	1 *квт* = 1000 *вт* = 10^{10} *э/сек* = 102 *кГм/сек*
	Ватт	*вт*	1 *вт* = 10^{7} *э/сек* = 0,102 *кГм/сек*

Продолжение

Название величины	Единица: Название	Единица: Сокращенное обозначение	Соотношения между различными единицами
Работа электрического тока . . .	Киловатт-час . . .	*квт-ч*	1 *квт-ч*=1000 *вт-ч*
	Ватт-час	*вт-ч*	1 *вт-ч*=3600 *вт-с*
	Ватт-секунда (джоуль)	*вт-с* (*дж*)	1 *вт-с*=1 *дж*=0,102 *кГм*=10^7 *э*
Количество электричества	Кулон (ампер-секунда)	*к*	
	Ампер-час	*а-ч*	1 *а-ч*=3600 *к*
Электрическая емкость	Фарада	*F*	
Самоиндукция	Генри	*гн*	

8. Алфавитный список единиц и их обозначения

Сокращ. обозн.	Название единицы	Название величины
А	Ампер	Сила тока
ат	Атмосфера нормальная .	Давление
в	Вольт	Электрическое напряжение и электродвиж. сила
вт	Ватт (джоуль в сек.) . .	Мощность
вт-сек	Ватт-секунда	Работа электрического тока
вт-ч	Ватт-час	Работа электрического тока
гвт-ч	Гектоватт-час	Работа электрического тока
г	Грамм-масса	Масса
Г	Грамм-сила	Сила
дж	Джоуль	Работа, энергия
дн	Дина	Сила
к	Кулон (ампер-секунда) . .	Количество электричества
кал	Калория (малая калория)	Количество теплоты
кв	Киловольт	Электрическое напряжение и электродвижущая сила

Продолжение

Сокращ. обозн.	Название единицы	Название величины
квт	Киловатт (кило-джоуль в сек.)	Мощность
квт-ч	Киловатт-час	Работа электрического тока
кг	Килограмм-масса	Масса
кГ	Килограмм-сила	Сила
ккал	Килокалория (большая калория)	Количество теплоты
км	Километр	Длина
кГм	Килограмм-метр	Работа, энергия
кГм/сек	Килограмм-метр в секунду	Мощность
ЛС (HP)	Лошадиная сила	Мощность
лк	Люкс	Освещенность
м	Метр	Длина
м/сек	Метр в сек.	Скорость
м/сек²	Метр в сек. кв.	Ускорение
св	Междунар. свеча	Сила света
ом (Ω)	Ом	Электрическое сопротивление
сек	Секунда	Время
см	Сантиметр	Длина
см/сек	Сантиметр в сек.	Скорость
см/сек²	Сантиметр в сек. кв. . .	Ускорение
э	Эрг	Работа
э/сек	Эрг в сек.	Мощность

МАТЕМАТИКА

I. КВАДРАТЫ, КУБЫ, КВ. И КУБ. КОРНИ, πn, $\frac{\pi}{4}n^2$, $\frac{1}{n}$

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\frac{\pi}{4}n^2$	$\frac{1}{n}$
0	0	0	0	0	0	0	$+\infty$
1	1	1	1,0000	1,0000	3,142	0,7854	1,00000
2	4	8	1,4142	1,2599	6,283	3,1416	0,50000
3	9	27	1,7321	1,4422	9,425	7,0686	0,33333
4	16	64	2,0000	1,5874	12,57	12,566	0,25000
5	25	125	2,2361	1,7100	15,71	19,635	0,20000
6	36	216	2,4495	1,8171	18,85	28,274	0,16667
7	49	343	2,6458	1,9129	21,99	38,485	0,14286
8	64	512	2,8284	2,0000	25,13	50,266	0,12500
9	81	729	3,0000	2,0801	28,27	63,617	0,11111
10	100	1 000	3,1623	2,1544	31,42	78,540	0,10000
11	121	1 331	3,3166	2,2240	34,56	95,033	0,09091
12	144	1 728	3,4641	2,2894	37,70	113,10	0,08333
13	169	2 197	3,6056	2,3513	40,84	132,73	0,07692
14	196	2 744	3,7417	2,4101	43,98	153,94	0,07143
15	225	3 375	3,8730	2,4662	47,12	176,72	0,06667
16	256	4 096	4,0000	2,5198	50,27	201,06	0,06250
17	289	4 913	4,1231	2,5713	53,41	226,98	0,05882
18	324	5 832	4,2426	2,6207	56,55	254,47	0,05556
19	361	6 859	4,3589	2,6684	59,69	283,53	0,05263
20	400	8 000	4,4721	2,7144	62,83	314,16	0,05000
21	441	9 261	4,5826	2,7589	65,97	346,36	0,04762
22	484	10 648	4,6904	2,8020	69,12	380,13	0,04545
23	529	12 167	4,7958	2,8439	72,26	415,48	0,04348
24	576	13 824	4,8990	2,8845	75,40	452,39	0,04167
25	625	15 625	5,0000	2,9240	78,54	490,87	0,04000
26	676	17 576	5,0990	2,9625	81,68	530,93	0,03846
27	729	19 683	5,1962	3,0000	84,82	572,56	0,03704
28	784	21 952	5,2915	3,0366	87,97	615,75	0,03571
29	841	24 389	5,3852	3,0723	91,11	660,52	0,03448
30	900	27 000	5,4772	3,1072	94,25	706,86	0,03333

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\frac{\pi}{4} n^2$	$\frac{1}{n}$
31	961	29 791	5,5678	3,1414	97,39	754,77	0,03226
32	1 024	32 768	5,6569	3,1748	100,5	804,25	0,03125
33	1 089	35 937	5,7446	3,2075	103,7	855,30	0,03030
34	1 156	39 304	5,8310	3,2396	106,8	907,92	0,02941
35	1 225	42 875	5,9161	3,2711	110,0	962,11	0,02857
36	1 296	46 656	6,0000	3,3019	113,1	1 017,9	0,02778
37	1 369	50 653	6,0828	3,3322	116,2	1 075,2	0,02703
38	1 444	54 872	6,1644	3,3620	119,4	1 134,1	0,02632
39	1 521	59 319	6,2450	3,3912	122,5	1 194,6	0,02564
40	1 600	64 000	6,3246	3,4200	125,7	1 256,6	0,02500
41	1 681	68 921	6,4031	3,4482	128,8	1 320,3	0,02439
42	1 764	74 088	6,4807	3,4760	131,9	1 385,4	0,02381
43	1 849	79 507	6,5574	3,5034	135,1	1 452,2	0,02326
44	1 936	85 184	6,6332	3,5303	138,2	1 520,5	0,02273
45	2 025	91 125	6,7082	3,5569	141,4	1 590,4	0,02222
46	2 116	97 336	6,7823	3,5830	144,5	1 661,9	0,02174
47	2 209	103 823	6,8557	3,6088	147,7	1 734,9	0,02128
48	2 304	110 592	6,9282	3,6342	150,8	1 809,6	0,02083
49	2 401	117 649	7,0000	3,6593	153,9	1 885,7	0,02041
50	2 500	125 000	7,0711	3,6840	157,1	1 963,5	0,02000
51	2 601	132 651	7,1414	3,7084	160,2	2 042,8	0,01961
52	2 704	140 608	7,2111	3,7325	163,4	2 123,7	0,01923
53	2 809	148 877	7,2801	3,7563	166,5	2 206,2	0,01887
54	2 916	157 464	7,3485	3,7798	169,7	2 290,2	0,01852
55	3 025	166 375	7,4162	3,8030	172,8	2 375,8	0,01818
56	3 136	175 616	7,4833	3,8259	175,9	2 463,0	0,01786
57	3 249	185 193	7,5498	3,8485	179,1	2 551,8	0,01754
58	3 364	195 112	7,6158	3,8709	182,2	2 642,1	0,01724
59	3 481	205 379	7,6811	3,8930	185,4	2 734,0	0,01695
60	3 600	216 000	7,7460	3,9149	188,5	2 827,4	0,01667
61	3 721	226 981	7,8102	3,9365	191,6	2 922,5	0,01639
62	3 844	238 328	7,8740	3,9579	194,8	3 019,1	0,01613
63	3 969	250 047	7,9373	3,9791	197,9	3 117,3	0,01587
64	4 096	262 144	8,0000	4,0000	201,1	3 217,0	0,01563
65	4 225	274 625	8,0623	4,0207	204,2	3 318,3	0,01538

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\frac{\pi}{4} n^2$	$\frac{1}{n}$
66	4 356	287 496	8,1240	4,0412	207,4	3 421,2	0,01515
67	4 489	300 763	8,1854	4,0615	210,5	3 525,7	0,01493
68	4 624	314 432	8,2462	4,0817	213,6	3 631,7	0,01471
69	4 761	328 509	8,3066	4,1016	216,8	3 739,3	0,01449
70	4 900	343 000	8,3666	4,1213	219,9	3 848,5	0,01429
71	5 041	357 911	8,4261	4,1408	223,1	3 959,2	0,01408
72	5 184	373 248	8,4853	4,1602	226,2	4 071,5	0,01389
73	5 329	389 017	8,5440	4,1793	229,3	4 185,4	0,01370
74	5 476	405 224	8,6023	4,1983	232,5	4 300,8	0,01351
75	5 625	421 875	8,6603	4,2172	235,6	4 417,9	0,01333
76	5 776	438 976	8,7178	4,2358	238,8	4 536,5	0,01316
77	5 929	456 533	8,7750	4,2543	241,9	4 656,6	0,01299
78	6 084	474 552	8,8318	4,2727	245,0	4 778,4	0,01282
79	6 241	493 039	8,8882	4,2908	248,2	4 901,7	0,01266
80	6 400	512 000	8,9443	4,3089	251,3	5 026,5	0,01250
81	6 561	531 441	9,0000	4,3267	254,5	5 153,0	0,01235
82	6 724	551 368	9,0554	4,3445	257,6	5 281,0	0,01220
83	6 889	571 787	9,1104	4,3621	260,8	5 410,6	0,01205
84	7 056	592 704	9,1652	4,3795	263,9	5 541,8	0,01190
85	7 225	614 125	9,2195	4,3968	267,0	5 674,5	0,01176
86	7 396	636 056	9,2736	4,4140	270,2	5 808,8	0,01163
87	7 569	658 503	9,3274	4,4310	273,3	5 944,7	0,01149
88	7 744	681 472	9,3808	4,4480	276,5	6 082,1	0,01136
89	7 921	704 969	9,4340	4,4647	279,6	6 221,1	0,01124
90	8 100	729 000	9,4868	4,4814	282,7	6 361,7	0,01111
91	8 281	753 571	9,5394	4,4979	285,9	6 503,9	0,01099
92	8 464	778 688	9,5917	4,5144	289,0	6 647,6	0,01087
93	8 649	804 357	9,6437	4,5307	292,2	6 792,9	0,01075
94	8 836	830 584	9,6954	4,5468	295,3	6 939,8	0,01064
95	9 025	857 375	9,7468	4,5629	298,5	7 088,2	0,01053
96	9 216	884 736	9,7980	4,5789	301,6	7 238,2	0,01042
97	9 409	912 673	9,8489	4,5947	304,7	7 389,8	0,01031
98	9 604	941 192	9,8995	4,6104	307,9	7 543,0	0,01020
99	9 801	970 299	9,9499	4,6261	311,0	7 697,7	0,01010
100	10 000	1000 000	10,0000	4,6416	314,2	7 854,0	0,01000

II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ [1]

$=$	равно	например	$a = b$
$\neq$	не равно	»	$a \neq b$
$\approx$	приближенно равно	»	$a \approx b$
$>$	больше	»	$a > b$
$<$	меньше	»	$a < b$
$\geqslant$	больше или равно	»	$a \geqslant b$
$\leqslant$	меньше или равно	»	$a \leqslant b$
$\lvert\ \rvert$	абсолютная величина	»	$\lvert a \rvert$
$\log_b$	логарифм при основании b	»	$\log_2 8 = 3$
$\lg$	логарифм десятичный	»	$\lg 100 = 2$
$\lim$	предел		
const	постоянная величина		
Σ	сумма		
$\triangle$	треугольник	например	$\triangle ABC$
$\angle$	угол	»	$\angle ABC$
$\smile$ или $\frown$	дуга	»	$\smile AB$ или $\frown AB$
$\parallel$	параллельно	»	$AB \parallel CD$
$\perp$	перпендикулярно	»	$AB \perp CD$
$\sim$	подобно	»	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$
∞	бесконечность		
π	отношение длины окружности к диаметру		
sin	синус		
cos	косинус		
tg	тангенс		
ctg	котангенс		
$^\circ$	градус		
$'$	минута	например	$10^\circ 30' 25''$
$''$	секунда		

[1]) Здесь приведены лишь обозначения, наиболее часто встречающиеся в элементарной математике.

III. АЛГЕБРА

1. Сложение и вычитание относительных чисел

Пример:

$$(+8)+(+5)+(-7)-(+2)-(-3).$$

Сначала раскрывают скобки. При этом одинаковые знаки дают $+$, а разные знаки дают $-$. После раскрытия скобок складывают абсолютные значения отдельно всех положительных чисел, ставя перед результатом знак $+$, и отдельно всех отрицательных чисел, ставя перед результатом знак $-$. После этого находят разность абсолютных значений двух полученных чисел и ставят перед ней знак того из этих двух чисел, у которого абсолютное значение больше.

Запись в указанном примере ведется так:

$$(+8)+(+5)+(-7)-(+2)-(-3)=$$
$$=+8+5-7-2+3=+16-9=+7.$$

2. Умножение и деление относительных чисел

При умножении или делении двух относительных чисел умножаются или делятся их абсолютные значения и ставится перед результатом знак $+$, если у данных чисел одинаковые знаки, и знак $-$, если у них разные знаки.

Примеры:

$$(+8)\cdot(+2)=+16,\quad (-8)\cdot(-2)=+16,$$
$$(-8)\cdot(+2)=-16,$$
$$(+14):(+7)=+2,\quad (-14):(-7)=+2,$$
$$(-14):(+7)=-2.$$

Если нужно умножить и делить более двух относительных чисел, то производят действия над их абсолютными значениями; перед результатом ставят знак $+$, если среди данных чисел содержится четное число отрицательных чисел, и знак —, если их число нечетное.

П р и м е р:

$$\frac{(+45)\cdot(-5)\cdot(+2)\cdot(-1)}{(+3)\cdot(-6)} = -25.$$

3. Умножение многочленов

При умножении многочленов каждый член одного многочлена умножают на каждый член другого и полученные произведения складывают.

П р и м е р:

$$(a+b-c+d)\cdot(m-n+p) = am+bm-cm+dm- \\ -an-bn+cn-dn+ap+bp-cp+dp.$$

Если в результате имеются подобные члены, то делают их приведение.

П р и м е р:

$$(3x^3-12x^2y+5xy^2-y^3)(x^2+xy-2y^2)= \\ =3x^5-12x^4y+5x^3y^2-x^2y^3+ \\ +3x^4y-12x^3y^2+5x^2y^3-xy^4-6x^3y^2+ \\ +24x^2y^3-10xy^4+2y^5=3x^5-9x^4y- \\ -13x^3y^2+28x^2y^3-11xy^4+2y^5.$$

4. Формулы сокращенного умножения и разложения на множители

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (квадрат суммы)
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (квадрат разности)
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (куб суммы)
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (куб разности)

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

(произведение суммы на разность = разности квадратов)

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

(разложение на множители суммы кубов)

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

(разложение на множители разности кубов)

5. Основное свойство дробей

Величина дроби не изменяется, если числитель и знаменатель умножить (или разделить) на одно и то же число:

$$\frac{A}{B}=\frac{Am}{Bm} \text{ и } \frac{A}{B}=\frac{\frac{A}{m}}{\frac{B}{m}}.$$

На этом свойстве основано приведение дробей к одному знаменателю и сокращение дробей.

6. Сложение и вычитание дробей

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

(Дроби приводят к общему знаменателю, производят сложение или вычитание числителей и подписывают общий знаменатель).

7. Умножение дробей

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

(Умножают числитель на числитель и знаменатель на знаменатель и первое произведение берут числителем, а второе — знаменателем искомой дроби).

8. Деление дробей

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

(Умножают числитель первой дроби на знаменатель второй и это произведение берут числителем; умножают знаменатель первой дроби на числитель второй и это произведение берут знаменателем искомой дроби. Деление на дробь $\frac{c}{d}$ можно также заменить умножением на обратную ей дробь $\frac{d}{c}$).

9. Пропорция

Если между четырьмя числами существует такая зависимость, что отношение двух из них равно отношению двух других ($a : b = c : d$), то такая зависимость называется *пропорцией*. Основное свойство пропорции: *произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов:* $ad = bc$.

Производные пропорции

Из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ можно получить следующие *производные пропорции:*

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}, \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}, \quad \frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}.$$

10. Арифметическое и геометрическое средние

Полусумма $\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ двух величин a_1 и a_2 называется их *арифметическим средним*, арифметическим средним n величин: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется их сумма, деленная на их число $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, Квадратный корень из произведения ($\sqrt{a_1a_2}$) двух величин a_1 и a_2 называется их *геометрическим средним;* геометрическим средним n величин называется корень n-й степени из их произведения: $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$

11. Уравнение 1-й степени с одним неизвестным

Решение уравнения 1-й степени с одним неизвестным проводим следующим образом:

Путь решения	Пример $\dfrac{9x+7}{2}+\dfrac{x-2}{7}=36+x$
Освобождаемся от знаменателей	$(9x+7)\cdot 7+(x-2)\cdot 2=$ $=(36+x)\cdot 2\cdot 7$
Раскрываем скобки	$63x+49+2x-4=504+14x$
Собираем члены, содержащие неизвестное (x), в левой части, а остальные — в правой части уравнения	$63x+2x-14x=504-49+4$
Делаем приведение подобных членов	$51x=459$
Делим обе части уравнения на коэффициент при неизвестном	$x=\dfrac{459}{51}=9$

Полученное значение неизвестного (x) называется *корнем* или *решением* данного уравнения. При подстановке этого значения в уравнение вместо неизвестного уравнение превращается в тождество.

В нашем примере:

$$\frac{9\cdot 9+7}{2}+\frac{9-2}{7}=36+9.$$

12. Система уравнений 1-й степени

Всякое уравнение 1-й степени с двумя неизвестными можно после упрощений привести к виду

$$ax+by=c$$

(«нормальный вид»).

Одно уравнение с двумя неизвестными x и y не имеет определенных решений. Решение *системы двух уравнений* с двумя неизвестными x и y заключается в нахождении значений, которые при подстановке в оба уравнения вместо x и y превращают оба уравнения в тождества.

Система двух уравнений решается путем исключения одного из двух неизвестных, что приводит систему к одному уравнению с одним неизвестным.

Наиболее часто применяемыми способами исключения неизвестных являются: а) *способ уравнивания коэффициентов* и б) *способ подстановки.* Те же способы исключения неизвестных применяются и для решения системы трех и более уравнений.

а) Решение способом уравнивания коэффициентов

Путь решения	Пример: $\begin{cases} 5x + 14y = 24 \\ 19x - 21y = 17 \end{cases}$
Уравниваем коэффициенты при каком-нибудь из неизвестных[1]), для чего умножаем каждое уравнение на некоторый множитель	1-е уравнение умножаем на 3, а 2-е — на 2. Тогда уравниваются коэффициенты при y: $\begin{array}{l\|c\|l} 5x+14y=24 & 3 & 15x+42y=72 \\ 19x-21y=17 & 2 & 38x-42y=34 \end{array}$
Складываем почленно оба уравнения (или вычитаем одно из другого) для исключения одного неизвестного	Складывая уравнения, исключаем y: $+\begin{array}{l} 15x + 42y = 72 \\ 38x - 42y = 34 \\ \hline 53x \qquad = 106 \end{array}$
Решаем полученное уравнение с одним неизвестным	Находим корень x: $x = \frac{106}{53} = 2$
Подставляем найденное значение одного неизвестного в одно из данных уравнений и находим значение другого неизвестного	Подставляем $x = 2$ в первое уравнение и решаем его относительно y: $5 \cdot 2 + 14y = 24,$ $14y = 14, \quad y = 1$ Решение системы: $x = 2, \quad y = 1$

---

[1]) Вернее сказать — уравниваем абсолютные значения коэффициентов: они могут после „уравнивания“ отличаться знаками, как это и имеет место в приведенном примере.

б) Решение способом подстановки

Путь решения	Пример: $\begin{cases} 5x + 14y = 24 \\ 19x - 21y = 17 \end{cases}$
Решаем одно из двух уравнений относительно какого-нибудь из неизвестных, рассматривая другое как известное	Решаем 1-е уравнение относительно y: $$y = \frac{24 - 5x}{14} \qquad (*)$$
Подставляем найденное выражение для этого неизвестного в другое уравнение и тем самым исключаем из него это неизвестное	Это выражение подставляем во 2-е уравнение: $$19x - 21 \cdot \frac{24 - 5x}{14} = 17$$
Решаем полученное уравнение с одним оставшимся неизвестным	Решаем это уравнение относительно x: $$19x - \frac{3(24 - 5x)}{2} = 17,$$ $$38x - 72 + 15x = 34,$$ $$53x = 106, \quad x = 2$$
Подставляя найденное значение второго неизвестного в выражение для первого, находим значение первого неизвестного	Подставляя $x = 2$ в (*), находим: $$y = \frac{24 - 5x}{14} = \frac{24 - 5 \cdot 2}{14} = 1$$ Решение системы: $$x = 2, \quad y = 1$$

13. Возведение в степень

Произведение n одинаковых множителей: $a \cdot a \ldots a$ называется *n-й степенью* числа a и обозначается символом a^n (читается: «a в n-й степени»). Нахождение n-й степени числа называется *возведением в степень*.

Пример: Возвести 2 в 5-ю степень. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Число a, которое берется несколько раз множителем, называется *основанием степени*, а число n, показывающее, сколько раз повторяется основание, — *показателем степени*. Так, в данном примере ($2^5 = 32$) число 2 — основание, число 5 — показатель, число 32 — степень.

2-я степень (a^2) иначе называется *квадратом* числа a (читается «a квадрат»); 3-я степень (a^3) — *кубом* числа a (читается «a куб»).

14. Извлечение корня

Извлечение корня есть действие, посредством которого по данной степени и данному показателю степени находится основание степени. Так, если $2^5 = 32$, то извлечение корня 5-й степени из 32 есть действие, посредством которого по данной степени (32) и данному показателю степени (5) находится основание степени (2). Для обозначения действия извлечения корня служит знак $\sqrt{}$, называемый *знаком корня*, или *радикалом*, а самое действие обозначается для нашего примера так: $\sqrt[5]{32} = 2$; при этом число 32 называется *подкоренным числом*, число 5 — *показателем корня*.

а результат действия (2) — *корнем* (корнем 5-й степени из 32).

Корень 2-й степени $\left(\sqrt[2]{a}\right)$ иначе называется *квадратным корнем* из a; корень 3-й степени $\left(\sqrt[3]{a}\right)$ — *кубическим корнем* из a. Вместо $\sqrt[2]{a}$ всегда пишут просто $\sqrt{a}$, опуская показатель (2), который подразумевается.

15. Знак перед корнем

При извлечении корня нечетной степени из числа a полученный корень имеет тот же знак, что и подкоренное число. Так, $\sqrt[3]{125}=5$, $\sqrt[5]{-32}=-2$. При извлечении же корня четной степени из положительного числа получаем два решения с разными знаками. Так, $\sqrt{16}=+4$ и $\sqrt{16}=-4$ (сокращенно записывают: $\sqrt{16}=\pm 4$). Корня же четной степени из отрицательного числа извлечь невозможно (в этом случае говорят, что значение такого корня *мнимое*).

16. Действия со степенями и корнями

Действие	Правило
Степень произведения . .	$(abc\ldots)^n = a^n b^n c^n\ldots$
Степень частного (дроби) .	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
Умножение степеней с одинаковыми показателями	$a^n b^n c^n\ldots = (abc\ldots)^n$

Продолжение

Действие	Правило
Деление степеней с одинаковыми показателями	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Умножение степеней с одинаковыми основаниями	$a^m a^n = a^{m+n}$
Деление степеней с одинаковыми основаниями	$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Возведение степени в степень	$(a^m)^n = a^{mn}$
Корень из произведения .	$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}$
Корень из частного (дроби)	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Умножение корней с одинаковыми показателями . . .	$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$
Деление корней с одинаковыми показателями	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
Возведение корня в степень	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$
Извлечение корня из степени	$\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$
Извлечение корня из корня	$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$

17. Первая, нулевая, отрицательная и дробная степени

Для таких степеней приняты следующие условия:

$a^1 = a$ (Напр. $3^1 = 3$).

$a^0 = 1$ (Напр. $3^0 = 1$. «Всякое число в нулевой степени дает единицу».)

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \left(\text{Напр. } 3^{-2} = \frac{1}{3^2}\right)$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt{a} \qquad \left(\text{Напр. } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\right)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \left(\text{Напр. } 3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}\right)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad \left(\text{Напр. } 3^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}\right)$$

18. Извлечение квадратного корня из чисел

Пример: Извлечь квадратный корень из 123904.

Решение:

$$\sqrt{12'\ 39'\ 04} = 352$$

	9
65	33'9
5	325
702	1404
2	1404
	0

Разбиваем данное число на грани (справа, по две цифры): 12'39'04. Из первой грани (12) извлекаем корень точно или приближенно ($\sqrt{12} \approx 3$); полученное число (3) есть 1-я цифра искомого корня. Из 12 вычитаем

3^2 и к остатку (3) приписываем следующую грань (39). Затем удвоенную 1-ю цифру (6) приписываем слева от полученного числа (399), оставляя между обоими числами свободное место для еще одной цифры; оба числа отделяются друг от друга вертикальной черточкой. Деля число десятков (33) полученного числа (339) на 6, получаем 2-ю цифру (5) искомого корня (она может быть и нулем). Ее записывают в трех местах — в ответе, рядом с цифрой 6 и ниже; полученные слева от черты два числа перемножаются ($65 \cdot 5 = 325$) и складываются ($65+5=70$). Произведение вычитаем из 339 и к остатку (14) приписываем следующую грань (04). (Если окажется, что вычитаемое больше уменьшаемого, то вторую цифру корня берут на единицу меньше). Для нахождения третьей цифры делим число десятков (140) полученного числа (1404) на предыдущую сумму ($65 + 5 = 70$); в данном примере 3-я цифра — 2, а в последнем остатке мы получили нуль. Таким образом, число 352 является точным значением квадратного корня из 123904. В других примерах корень может заключать и больше цифр; нахождение дальнейших цифр происходит подобным же образом.

Если бы получился остаток, не равный нулю, то это означало бы, что подкоренное число не представляет точного квадрата. Так, если извлечь квадратный корень из 123 909, то получим остаток 5, а потому 352 будет не точным, а приближенным значением $\sqrt{123\,909}$, что записывается так: $\sqrt{123\,909} \approx 352$.

19. Извлечение квадратного корня с заданной точностью

Пример: Вычислить $\sqrt{9\,511\,956}$ с точностью до 0,01.

Решение:

$$\sqrt{9'51'19'56} = 3084{,}14$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 9 \\
\hline
608 & 511'9 \\
8 & 4864 \\
\hline
6164 & 2555'6 \\
4 & 24656 \\
\hline
61681 & 9000'0 \\
1 & 61681 \\
\hline
616824 & 283190'0 \\
4 & 2467296 \\
\hline
 & 364604
\end{array}$$

20. Простой способ извлечения квадратного корня

Пусть требуется извлечь корень из какого-нибудь числа, например 10. Нетрудно видеть, что искомый корень будет больше 3. Так как подкоренное количество равно произведению двух своих квадратных корней, то если один из них x будет по недостатку, то другой y будет по избытку:

$$xy = 10.$$

В нашем случае $x = 3$, следовательно

$$y = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

Истинный корень заключается между обоими этими значениями; положим, что он будет равен среднему арифметическому от них; тогда:

$$\sqrt{10} = \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}\left(3 + 3\,\frac{1}{3}\right) = 3^1/_6.$$

Если мы хотим получить еще более точное значение, то поступаем с найденным значением точно так же:

$$\sqrt{10} = \frac{1}{2}\left(3\,\frac{1}{6} + \frac{10}{3^1/_6}\right) = \frac{1}{2}\left(3\,\frac{1}{6} + 3\,\frac{3}{19}\right) = 3{,}162.$$

Для инженерных расчетов первое приближение бывает, однако, вполне достаточным.

21. Квадратные уравнения

Квадратное уравнение с одним неизвестным после алгебраических преобразований может быть представлено в виде

$$ax^2 + bx + c = 0$$

или в так называемой *приведенной форме* (если $a = 1$):

$$x^2 + px + q = 0.$$

Если коэффициенты b или c равны нулю, квадратное уравнение называется *неполным*.

Квадратное уравнение может иметь два решения, одно (в этом случае говорят, что оба решения совпадают) или — ни одного (в этом случае говорят, что решения мнимые).

22. Формулы решения квадратных уравнений

Вид уравнения	Формула решения
Полные квадратные уравнения: $ax^2 + bx + c = 0$ (общий вид)	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ или $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$ (Эту формулу удобно применять, если b — четное число).
$x^2 + px + q = 0$ (приведенное уравнение)	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (Эту формулу удобно применять если p — четное число).
Неполные квадратные уравнения: $ax^2 + c = 0$	$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$

23. Действительные и мнимые решения квадратных уравнений

а) Для полного квадратного уравнения.

Если $b^2 - 4ac > 0$, то квадратное уравнение имеет два действительных различных решения.

Например: $2x^2 + x - 1 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}; \; x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1.$$

Если $b^2 - 4ac = 0$, то квадратное уравнение имеет два действительных одинаковых решения («два решения совпадают»).

Например: $x^2 - 6x + 9 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3.$$

Если $b^2 - 4ac < 0$, то квадратное уравнение имеет два мнимых решения.

Например: $3x^2 - x + 5 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 60}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{-59}}{6}.$$

б) Для неполного квадратного уравнения I-го рода ($ax^2 + c = 0$). Если a и c разных знаков, то оба решения действительные.

Например:

$$4x^2 - 9 = 0; \; x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}.$$

Если a и c одинаковых знаков, то оба решения мнимые.

Например: $4x^2+9=0$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{9}{4}}$.

в) Неполное квадратное уравнение 2-го рода ($ax^2+bx=0$) имеет всегда два действительных решения, одно из них — нуль.

24. Свойства корней квадратного уравнения

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

и

$$x_1\cdot x_2=+\frac{c}{a}.$$

В частном случае, если $a=1$ (приведенная форма $x^2+px+q=0$), то

$$x_1+x_2=-p$$

и

$$x_1\cdot x_2=+q.$$

Этими формулами удобно пользоваться для проверки решения квадратного уравнения, а также для составления квадратного уравнения по заданным его корням.

25. Разложение трехчлена 2-й степени на множители

Если x_1 и x_2 — корни трехчлена 2-й степени ax^2+bx+c (т. е. корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$), то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Пример: Разложить на множители трехчлен $3x^2 - 5x - 2$.

Решение. Находим корни данного трехчлена, т. е. корни квадратного уравнения $3x^2 - 5x - 2 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Представляем данный трехчлен в виде произведения:

$$3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right)\cdot$$

Теперь результат можно упростить:

$$3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1).$$

26. Комплексные числа

а) *Мнимые числа.* Мнимым числом называется корень четной степени из отрицательного числа. Если взять отрицательное число $-m$, то $\sqrt{-m}$ будет мнимое число, которое можно представить так:

$$\sqrt{-m} = \sqrt{(-1)m} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{m}.$$

Введем новое число: $i = \sqrt{-1}$. Это число i назовем мнимой единицей. Числу i приписываем свойство, выражаемое равенством: $i^2 = -1$. Теперь мнимое число $\sqrt{-m}$ представим так:

$$\sqrt{-m} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{m} = i\sqrt{m}.$$

Действия над мнимыми числами производятся по тем же правилам, что и над числами вещественными.

б) *Степени числа i.* При производстве действий над мнимыми числами приходится иметь дело с различными степенями числа i. Находим эти степени:

$$i^1 = i; \; i^2 = -1; \; i^3 = i^2 \cdot i = -i;$$

$$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1;$$

$$i^5 = i^{4+1} = i; \; i^6 = i^{4+2} = i^2 = -1;$$

$$i^7 = i^{4+3} = i^3 = -i \text{ и т. д.}$$

Вообще, если показатель степени числа i есть целое число n, большее 4-х, то его можно представить так: $n = 4k$ или же $n = 4k + p$, где p может равняться 1, 2, 3. Если $n = 4k$, тогда

$$i^n = i^{4k} = 1. \text{ Если } n = 4k+p, \text{ то } i^n = i^{4k+p} = i^p.$$

Примеры:

$$i^{36} = i^{4 \cdot 9} = 1; \; i^{23} = i^{4 \cdot 5+3} = i^3 = -i;$$

$$(2i)^4 = 16i^4 = 16; \; (2i)^3 = 8i^3 = -8i; \; (3i)\,(5i) = -15.$$

в) *Понятие о комплексных числах.* Числа вида $a + bi$ называются комплексными. Такие числа могут получиться при решении квадратных уравнений. Возьмем в качестве примера уравнение:

$$x^2 - 2x + 10 = 0.$$

Решаем это уравнение:

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 10} = 1 \pm 3i; \; x_1 = 1 + 3i; \; x_2 = 1 - 3i.$$

г) *Алгебраическая форма комплексного числа.* Комплексное число вида $a + bi$ представляет *алгебраическую форму комплексного числа.* Число a называется вещественной частью комплексного числа, а bi — его мнимой частью. Два комплексных числа $a+bi$, $a-bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Два комплексных числа считаются равными между собою, если отдельно равны вещественные части и отдельно равны коэффициенты при i; так, если $a+bi=c+di$, то $a=c$; $b=d$. Отсюда следует, что комплексное число равняется нулю тогда, когда равны нулю его вещественная часть и коэффициент при i. Так, если $x+yi=0$, то $x=0$ и $y=0$. Вещественные и мнимые числа являются частными случаями чисел комплексных. Так, если $b=0$, то получим вещественное число a; если $a=0$, то получим мнимое число bi.

д) *Действия над комплексными числами.* Действия над комплексными числами производятся по тем же правилам, что и над алгебраическими двучленами.

27. Сложение комплексных чисел

Возьмем два комплексных числа: $m=a+bi$, $n=c+di$. Находим их сумму: $m+n=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i$, т. е. сумма есть число комплексное.

28. Вычитание комплексных чисел

Пусть $m=a+bi$; $n=c+di$. Находим разность: $m-n=a+bi-c-di=(a-c)+(b-d)i$, т. е. разность есть число комплексное.

29. Умножение комплексных чисел

Перемножим два комплексных числа: $m=a+bi$, $n=c+di$. Находим: $mn=(a+bi)(c+di)=ac+cbi+adi+bdi^2=(ac-bd)+(cb+ad)i$, т. е. произведение есть число комплексное. Перемножим два сопряженных комплексных числа $a+bi$ и $a-bi$, находим: $(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$, т. е. *произведение двух сопряженных комплексных чисел есть* число вещественное и положительное.

30. Деление комплексных чисел

Найдем частное двух комплексных чисел $m=a+bi$ и

$$n=c+di;\ \frac{m}{n}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=$$

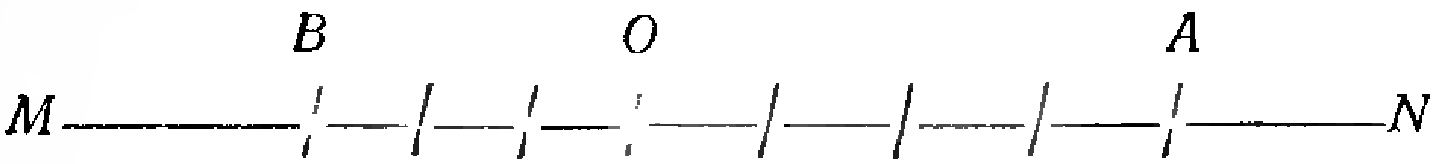
$$\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$

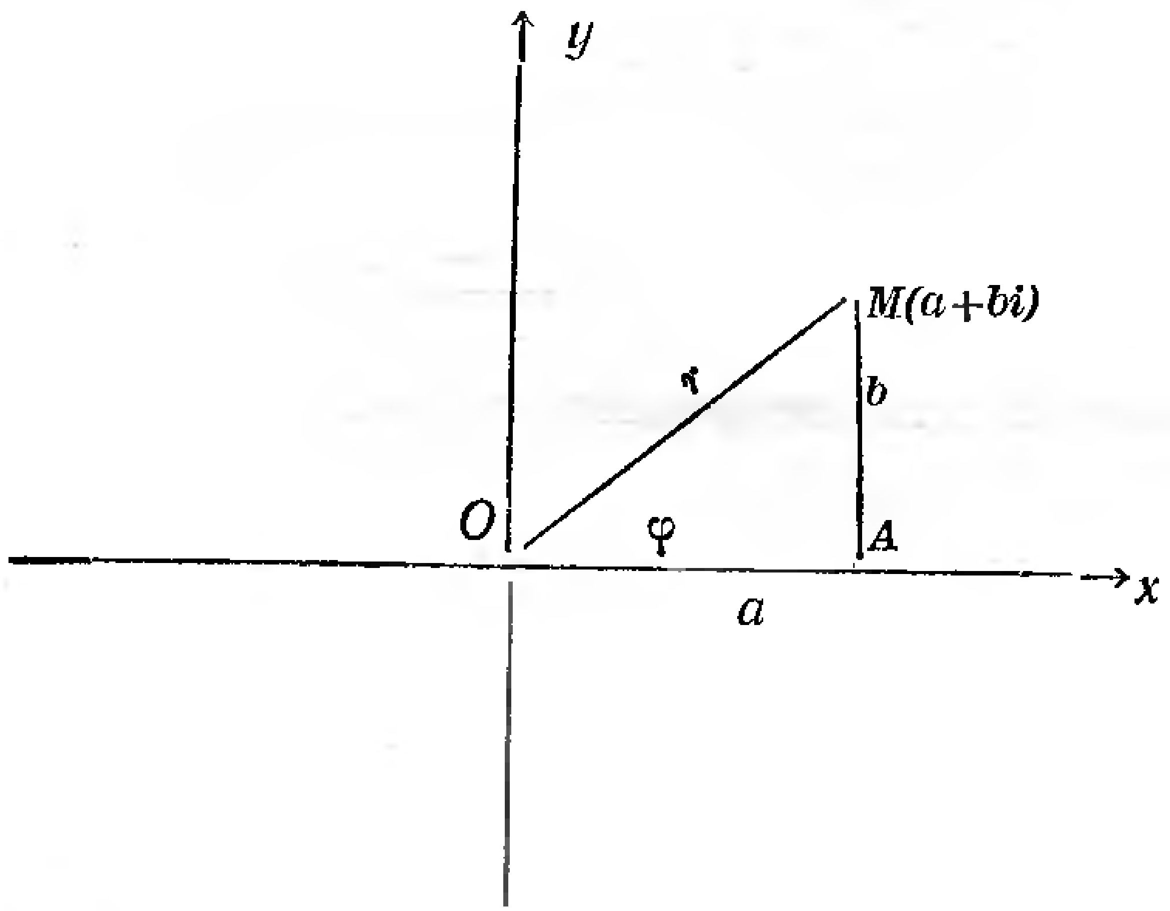
т. е. частное есть число комплексное.

31. Геометрическое представление комплексного числа

Возьмем прямую MN и на ней определенную точку O.



Точки, соответствующие положительным числам, расположены на прямой направо от точки O; точки же, соответствующие отрицательным числам, расположены налево от точки O. Так, чтобы найти на этой прямой точку, соответствующую числу 4, откладываем направо от точки O 4 раза отрезок, принятый за единицу. Точка A и будет являться изображением числа 4. Как видно из чертежа, точка B соответствует числу -3. Прямая MN называется числовой осью. Аналогично этому можно показать, что всякому комплексному числу $a+bi$ соответствует определенная точка плоскости. Для этого возьмем две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy, называемые осями.



Пусть a и b положительны. На оси Ox от точки O откладываем отрезок OA, численно равный a; из точки A перпендикулярно к оси Ox проводим отрезок AM, численно равный b. Точка M и является изображением комплексного числа $a+bi$.

32. Тригонометрическая форма комплексного числа

Число, выражающее длину отрезка OM, обозначается через r; число r называется *модулем* комплексного числа $a + bi$. Как видно из чертежа, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Угол xOM обозначается через φ; этот угол отсчитывается от оси Ox против часовой стрелки; угол φ называется аргументом или амплитудой комплексного числа. Из чертежа определяем a и b:

$$a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi. \tag{1}$$

Отсюда:

$$a + bi = r\cos\varphi + ri\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Выражение (2) и есть тригонометрическая форма комплексного числа.

Чтобы перейти от алгебраической формы $a + bi$ к тригонометрической, надо по заданным a и b определить r и φ. Имеем: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; из формул (1) находим:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r};\ \sin\varphi = \frac{b}{r}. \tag{3}$$

Из формул (3) определяем φ; к φ можно прибавить $2k\pi$, где k — целое число.

Примеры: Представить в тригонометрической форме числа:

$$4 + 4i,\ 1,\ i.$$

1) $4 + 4i$; $r = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$;

$$\cos\varphi = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \sin\varphi = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда:

$$\varphi = \frac{\pi}{4};\quad 4 + 4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

2) 1; $1 = 1 + 0i$; $r = \sqrt{1 + 0} = 1$; $\cos\varphi = \frac{1}{1} = 1$;

$$\sin\varphi = \frac{0}{1} = 0;$$

откуда:

$$\varphi = 0 + 2k\pi;\quad 1 = 1\,(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi).$$

3) i; $i = 0 + i$; $r = \sqrt{0 + 1} = 1$; $\cos\varphi = \frac{0}{1} = 0$;

$$\sin\varphi = \frac{1}{1} = 1;$$

откуда:

$$\varphi = \frac{\pi}{2};\quad i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

33. Действия над комплексными числами, выраженными в тригонометрической форме

1. *Умножение*. Даны числа: $m = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $n = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Перемножим их:

$$mn = r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\ldots$$

вообще:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\ldots r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) = r_1 r_2 \ldots r_n\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_n)], \quad (4)$$

т. е. при перемножении нескольких комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.

2) *Возвышение в степень.* При возвышении комплексного числа в степень воспользуемся формулой (4):

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \overbrace{rr\ldots r}^{n}\,[\cos(\overbrace{\varphi + \varphi + \ldots + \varphi}^{n}) + i\sin(\overbrace{\varphi + \varphi + \ldots + \varphi}^{n})] = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (5)$$

3) *Формула Моавра.* Положив в формуле (5) $r = 1$, получим формулу Моавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \quad (6)$$

При помощи формулы Моавра легко получить выражения синусов и косинусов кратных углов. Для примера найдем $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$. Положив в формуле (6) $n = 3$, получим:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi \cdot i\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi. \quad (7)$$

Приравняв в равенстве (7) отдельно вещественные части и коэффициенты при i, получим:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

4) *Деление.* Исходя из правила умножения, получим:

$$\frac{m}{n} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

5) *Извлечение корня.* Положим, что:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = R(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Возвышаем обе части этого равенства в n-ную степень:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = R^n(\cos n\psi + i\sin n\psi). \quad (8)$$

У равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на $2k\pi$, где k — целое число.

Следовательно:

$$R^n = r, \; n\psi = \varphi + 2k\pi,$$

откуда:

$$R = \sqrt[n]{r}; \qquad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Получим:

$$\sqrt[n]{r\cos\varphi + i\sin\varphi} =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right]. \qquad (9)$$

Для получения n различных значений корня полагаем, $k = 0, 1, 2, \dots n - 1$. При помощи формулы (9) легко решаются двучленные уравнения.

Пример: Решить уравнение $x^3 - 5 = 0$.

Находим: $x^3 = 5$; $x = \sqrt[3]{5}$;

$$5 = 5(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi);$$

$$x = \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)} =$$

$$= \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right);$$

$$k = 0,\ 1,\ 2;\ x_1 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{0}{3} + i\sin\frac{0}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{5}(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt[3]{5};$$

$$x_2 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}(-1 + i\sqrt{3});$$

$$x_3 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right).$$

34. Арифметическая прогрессия

Арифметическая (или *разностная*) *прогрессия* есть последовательность чисел (a_1, a_2, a_3,...), в которой разность (d) любых двух последовательных чисел («последующее» минус «предыдущее») есть величина постоянная; эта величина называется *разностью прогрессии*.

Например: 2, 5, 8, 11, ... (разность $d = 3$), числа возрастают, прогрессия *возрастающая;* 10, 6, 2, —2, ... (разность $d = -4$), числа убывают, прогрессия *убывающая.*

35. Формулы арифметической прогрессии

Для определения любого (n-го) члена прогрессии по заданному ее первому члену (a_1) и ее разности (d) имеем формулу:

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1).$$

Сумма всех членов арифметической прогрессии подряд от 1-го до n-го члена определяется формулой:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2},$$

т. е. сумма n первых членов прогрессии равна полусумме первого и последнего членов, умноженной на n.

36. Геометрическая прогрессия

Геометрическая (или *кратная*) *прогрессия* есть последовательность чисел (a_1 a_2 a_3 , . . .), в которой отношение (q) любых двух последовательных чисел («последующее», деленное на «предыдущее») есть величина постоянная; эта величина q называется *знаменателем прогрессии.*

Например: 2, 6, 18, 54, ...(знаменатель $q = 3$), числа возрастают, прогрессия *возрастающая;* 12, 6, 3, $1^1/_2$, . . . (знаменатель $q = {}^1/_2$), числа убывают, прогрессия *убывающая.*

37. Формулы геометрической прогрессии

Для определения любого (n-го) члена прогрессии по заданному ее первому члену (a_1) и ее знаменателю (q) имеем формулу:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Сумма всех членов геометрической прогрессии подряд от 1-го до n-го члена определяется формулой:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$ (Эту формулу удобно применять, если прогрессия возрастающая).

или формулой:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$ (Эту формулу удобно применять, если прогрессия убывающая).

38. Бескоиечно убывающая геометрическая прогрессия

Если в убывающей геометрической прогрессии не ограничиваться несколькими членами, а представлять себе число членов все время увеличивающимся, то величина этих членов будет приближаться к нулю.

Например: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ (знаменатель $q = \frac{1}{2}$) или 0,3; 0,03; 0,003; ... (знаменатель $q = 0{,}1$).

Такая прогрессия называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией.*

39. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Замечательное, важное свойство бесконечно убывающей геометрической прогрессии: сумма ее членов от 1-го до n-го при безграничном увеличении числа членов (n) не растет беспредельно, а приближается к определенной «предельной» величине. Этот предел называется *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии* и вычисляется по формуле:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Например: сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ приближается к числу

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2;$$

сумма $0{,}3+0{,}03+0{,}003+0{,}0003+\ldots$

или

$$0{,}3333\ldots$$

приближается к числу

$$S=\frac{0{,}3}{1-0{,}1}=\frac{1}{3}.$$

40. Понятие логарифма

Логарифмирование есть действие, посредством которого по данной степени и по данному основанию степени находится показатель степени.

Если, например, по данной степени (32) и основанию степени (2) нужно найти показатель степени (в которую надо возвести 2, чтобы получить 32), то действие (логарифмирование) обозначается так: $\log_2 32=5$ (читается «логарифм 32 при основании 2 равен 5»). При этом число 2 называется *основанием логарифма*, а результат действия (5) — *логарифмом* числа 32 при основании 2.

[Сопоставляя действия возведения в степень, извлечения корня и логарифмирования, видим, что эти действия связаны друг с другом — три соотношения: $a^n=N$,

$\sqrt[n]{N} = a$ и $\log_a N = n$ представляют одну и ту же зависимость между величинами a, n и N, причем искомыми являются в первом случае N (степень), во втором a (корень) и в третьем — n (логарифм)].

41 Правила логарифмирования

Логарифм произведения:

$$\log (ab) = \log a + \log b.$$

Логарифм частного:

$$\log (a : b) = \log a - \log b.$$

Логарифм степени:

$$\log a^n = n \log a.$$

Логарифм корня:

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a.$$

(Все логарифмы в этих формулах берутся при одном и том же основании).

42. Десятичные логарифмы

Логарифмы при основании 10 называются *десятичными.* Целая часть такого логарифма называется его *характеристикой*, а дробная часть — его *мантиссой.* Мантисса логарифма разыскивается в таблицах логарифмов, а характеристика определяется по следующему правилу: если число больше 1, то число единиц в характеристике равно числу знаков в целой части числа, уменьшенному на 1; если число меньше 1, то число отрицательных единиц в характеристике равно числу нулей, стоящих слева от первой значащей цифры числа (включая и «нуль целых»).

Так, $\lg 375{,}85 = 2, \ldots$; $\lg 0{,}000245 = \bar{4}, \ldots$ (точки «...» проставлены вместо мантиссы, которая находится в таблицах логарифмов; lg — обозначает десятичный логарифм).

Ниже приведены четырехзначные таблицы мантисс для чисел, имеющих не более трех значащих цифр подряд (напр. 21; 3,04; 121; 0,0129; 90,1; 12 000 и т. п.). Для нахождения мантиссы можно не обращать внимания на положение запятой и на нули слева и справа, а искать мантиссы чисел: 21; 304; 121; 129; 901; 12.

В таблице а) даны мантиссы чисел от 1 до 10; в таблице б) — от 10 до 1000. Таблица б) имеет 10 столбцов, обозначенных наверху цифрами от 0 до 9. Для чисел от 10 до 99, расположенных в столбце N, мантиссы даются в столбце 0; для трехзначного же числа (например 285) мантисса находится так: первые две его цифры (28) в столбце N указывают с т р о к у, в которой находится мантисса, а третья цифра (5) указывает с т о л б е ц; мантиссу находят на пересечении полученных строки и столбца. В данном случае мантисса будет 4548, а $\lg 285 = 2{,}4548$, $\lg 2{,}85 = 0{,}4548$.

Наибольшим распространением у нас пользуются четырехзначные таблицы (Брадиса) и пятизначные (Пржевальского).

43. Таблица логарифмов

а) от 1 до 10

1	0000	6	7782
2	3010	7	8451
3	4771	8	9031
4	6021	9	9542
5	6990	10	0000

б) от 10 до 1000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	10
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	11
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	12
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	13
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	14
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	15
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	16
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	17
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	18
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	20
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	21
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	22
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	23
24	3800	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	24
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	25

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	25
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	26
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	27
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	28
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	29
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	30
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	31
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	32
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	33
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	34
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	35
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	36
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	37
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	38
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	39
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	40
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	41
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	42
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	43
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	44
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	45
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	46
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	47
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	48
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	49
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	50

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	50
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	51
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	52
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	53
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	54
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	55
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	56
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	57
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	58
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	59
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	60
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	61
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	62
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	63
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	64
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	65
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	66
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	67
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	68
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	69
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	70
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	71
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	72
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	73
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	74
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	75

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	75
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	76
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	77
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	78
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	79
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	80
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	81
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	82
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	83
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	84
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	85
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	86
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	87
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	88
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	89
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	90
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	91
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	92
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	93
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	94
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	95
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	96
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	97
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	98
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	99

44. Логарифмы с отрицательной характеристикой

В случае десятичного логарифма дробного числа, его характеристика отрицательна, но мантисса, отыскиваемая в таблицах, положительна. Поэтому в таком логарифме знак «—» (минус) ставится не перед, а над характеристикой, и логарифм имеет такой вид:

$$\lg 0{,}000245 = \bar{4}{,}3892.$$

Здесь 4 — отрицательно, а 0,3892 — положительно. Такая форма записи называется *неполным отрицательным логарифмом* или *искусственной формой логарифма* и читается не «минус 4,3892», а «четыре с минусом, 3892». При сложении и вычитании логарифмов удобно иметь дело с неполными отрицательными логарифмами; при умножении и делении иногда необходимо временно перейти к обычной «*полной*» форме: $\bar{4}{,}3892 = -3{,}6108$.

Правила перехода: 1) абсолютная величина характеристики у неполного отрицательного логарифма на единицу больше, чем у полного; 2) все цифры мантиссы при переходе от одной формы логарифма к другой вычитаются из 9, а последняя значащая цифра — из 10; нули в конце остаются.

В указанном примере — вместо	3	ставится	$9 - 3 = 6$
„	8	„	$9 - 8 = 1$
„	9	„	$9 - 9 = 0$
„	2	„	$10 - 2 = 8$

45. Пример вычисления при помощи логарифмов

Вычислить $x = \dfrac{\sqrt[4]{3854} \cdot 0{,}8987^7}{\sqrt{4444} \cdot 0{,}0003875}$ [1].

Здесь $\lg x = \dfrac{1}{4} \lg 3854 + 7 \lg 0{,}8987 -$

$$- \frac{1}{2} \lg 4444 - \lg 0{,}0003875.$$

Вычисления удобно располагать по схеме:

$\frac{1}{4} \lg 3854$ $+ 7 \lg 0{,}8987$	$\frac{1}{4} \cdot 3{,}5860$ $7 \cdot \bar{1}{,}9536$	$0{,}8965$ $\bar{1}{,}6752$	$0{,}5717$
$\frac{1}{2} \lg 4444$ $+ \lg 0{,}0003875$	$\frac{1}{2}\, 3{,}6478$ $\bar{4}{,}5883$	$1{,}8239$ $\bar{4}{,}5883$	$\bar{2}{,}4122$
$\lg x$	—		$2{,}1595$
x	—		$144{,}4$

46. Размещения

Размещениями из n элементов по k называются соединения, которые можно образовать из этих n элементов, собирая в каждое соединение по k элементов, при этом соединения могут отличаться друг от друга как самими элементами, так и порядком их расположения.

Например, из 3 элементов (a, b, c) по 2 можно образовать следующие размещения: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

[1]) Использованы четырехзначные таблицы Брадиса; там же имеются пояснения, как этими таблицами пользоваться.

47. Число размещений

Число всех возможных размещений, которые можно образовать из n элементов по k, обозначается символом A_n^k и вычисляется по формуле:

$A_n^k = n \quad (n-1) \quad (n-2) \quad . \quad . \quad . \quad (n-k+1)$. (Всего k множителей).

Пример: $A_8^5 = 8 \cdot 7 \ldots (8-5+1) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$.

48. Перестановки

Перестановками из n элементов называются соединения, каждое из которых содержит все n элементов, отличающихся поэтому друг от друга только порядком расположения элементов.

Например, из 3 элементов (a, b, c) можно образовать следующие перестановки: abc, bac, cab, acb, bca, cba.

49. Число перестановок

Число всех возможных перестановок, которые можно образовать из n элементов, обозначается символом P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ . \ . \ . \ n = n!$$

(Произведение n первых целых чисел обозначается символом «$n!$» и читается «n *факториал*»).

Пример: $P_5 = 5! = 120$.

50. Сочетания

Сочетаниями из n элементов по k называются соединения, которые можно образовать из этих n элементов, собирая в каждое по k элементов; при этом соединения отличаются друг от друга **только** самими элементами (различие порядка их расположения во внимание не принимается).

Например, из 3 элементов $(a,\ b,\ c)$ по 2 можно образовать следующие сочетания: ab, ac, bc.

51. Число сочетаний

Число всех возможных сочетаний, которые можно образовать из n элементов по k, обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

(В числителе и в знаменателе по k множителей).

Пример: $C_8^5 = \dfrac{A_8^5}{P_5} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56.$

Полезная формула: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Например: $C_8^5 = C_8^3$.

52. Бином Ньютона

Возведение двучлена $a+b$ в степень n может быть произведено по формуле, называемой разложением *бинома Ньютона:*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots$$
$$\dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

или (после подстановки выражений C_n^k с учетом формулы $C_n^k = C_n^{n-k}$):

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^{n-2} b^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k} a^{n-k} b^k + \dots$$
$$\dots + nab^{n-1} + b^n.$$

Пример: $(a+b)^5 =$

$$= a^5 + C_5^1 a^4b + C_5^2 a^3b^2 + C_5^3 a^2b^3 + C_5^4 ab^4 + C_5^5 b^5 =$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

53. Свойства бинома Ньютона

1) Разложение бинома $(a+b)^n$ представляет собой многочлен, расположенный по убывающим степеням a (от n-ой до нулевой) и по возрастающим степеням b (от нулевой до n-й); сумма показателей a и b в каждом члене разложения равна показателю степени бинома. Число членов разложения на единицу больше показателя степени бинома.

2) Коэффициенты членов разложения (*«биномиальные коэффициенты»*) возрастают до середины разложения и затем убывают; коэффициенты каждой пары членов,

равноотстоящих от начала и конца разложения, равны между собой. Если n четное, то имеется один средний наибольший коэффициент; если n нечетное, то — два наибольших.

3) При возведении в n-ю степень **разности** $a-b$ все четные члены разложения имеют знак «минус»:

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 - \ldots$$

54. Таблица биномиальных коэффициентов

Коэффициенты бинома Ньютона могут быть получены из так наз. *«треугольника Паскаля»*:

Бином	Треугольник Паскаля
$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
. . . .	. . . .

Каждый элемент образуется сложением двух элементов, стоящих над ним (слева и справа); таким же образом можно продолжать эту таблицу и дальше.

IV. ГЕОМЕТРИЯ

А. ПЛАНИМЕТРИЯ

(ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ)

55. Треугольники

Точки A, B, C — вершины тр-ка, углы при вершинах (углы тр-ка) обозначаются соответственно $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$; стороны тр-ка обычно обозначаются строчными буквами a, b, c соответственно противолежащим углам. Сумма длин всех сторон треугольника: $a+b+c$ (а также и всякого

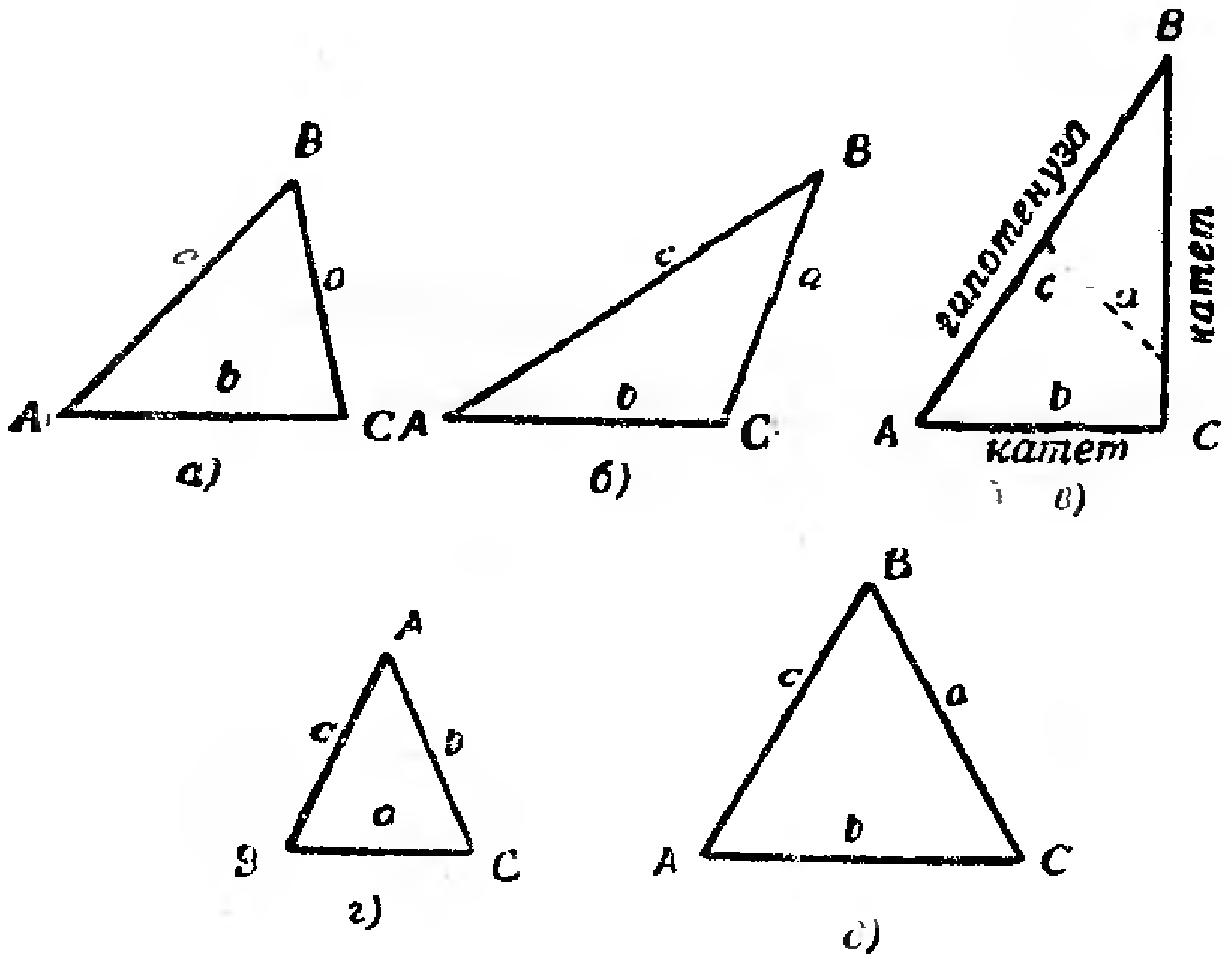


Рис. 1.

многоугольника) называется его *периметром* и обычно обозначается $2p$: $a+b+c=2p$.

На рис. 1, *а*) — тр-к *остроугольный* (все углы острые).

На рис. 1, *б*) — тр-к *тупоугольный:* один угол ($\angle C$) — тупой.

На рис. 1, *в*) — тр-к *прямоугольный*: один угол ($\angle C$) — прямой, $\angle A$ и $\angle B$ — острые углы, сторона *c* — *гипотенуза*, стороны *a*, *b* — *катеты.*

На рис. 1, *г*) — тр-к *равнобедренный*: две стороны равны ($b = c$). При этом равны и противолежащие углы: $\angle B = \angle C$.

На рис. 1, *д*) — тр-к *равносторонний*: все стороны равны ($a = b = c$). При этом равны и все углы: $\angle A = \angle B = \angle C$.

Площадь треугольника и других фигур см. стр. 82; основные формулы для треугольника см. стр. 81.

56. Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат

В *параллелограмме* (рис. 2) стороны попарно параллельны ($AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$). Основные свойства: $AB = DC$, $AD = BC$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$; точка (O) пересечения диагоналей (AC и BD) есть середина каждой из них.

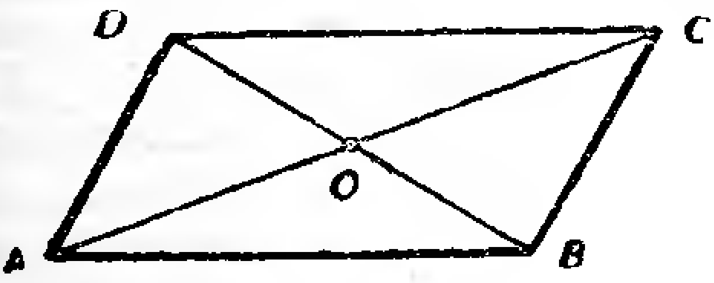


Рис. 2.

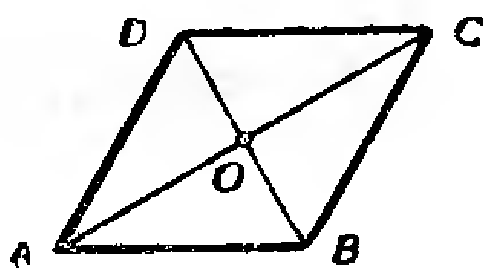


Рис. 3.

Важнейшие частные случаи параллелограмма:

а) *Ромб* (рис. 3). Все стороны равны. Имеет все свойства параллелограмма. Кроме того, диагонали взаимно перпендикулярны ($AC \perp BD$) и являются биссектрисами углов ромба[1]). б) *Прямоугольник* (рис. 4). Все углы прямые. Имеет все свойства параллелограмма. Кроме того, диагонали равны. в) *Квадрат* (рис. 5).

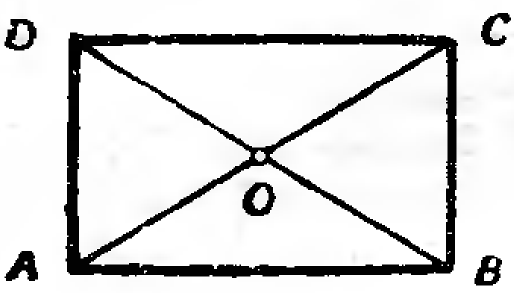


Рис. 4.

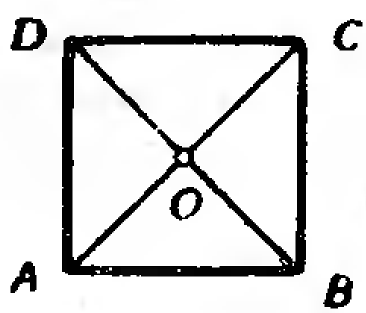


Рис. 5.

Все стороны равны и все углы прямые. Имеет все свойства прямоугольника и ромба.

57. Трапеция

Трапецией называется четырехугольник с двумя параллельными сторонами (рис. 6; $AB \parallel CD$). Стороны AB и DC — *основания*: AB — нижнее и DC — верхнее основание. Стороны BC и AD — *боковые стороны*. Отрезок EF, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией* трапеции; средняя линия трапеции параллельна обоим основаниям, и длина ее равна полусумме длин оснований:

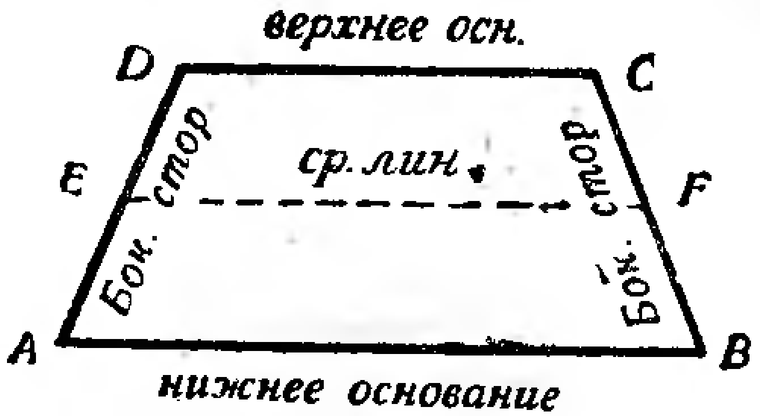


Рис. 6.

$$EF = {}^1/_2\,(AB + DC).$$

[1]) Определение биссектрисы см. ниже. стр. 79.

Если у трапеции боковые стороны равны, она называется равнобочной (рис. 7). Ее характерные свойства: углы при каждом основании равны между собой ($\angle A = \angle B$ и $\angle C = \angle D$); если продолжить боковые стороны до их пересечения в точке E, то образуются равнобедренные треугольники EAB и EDC.

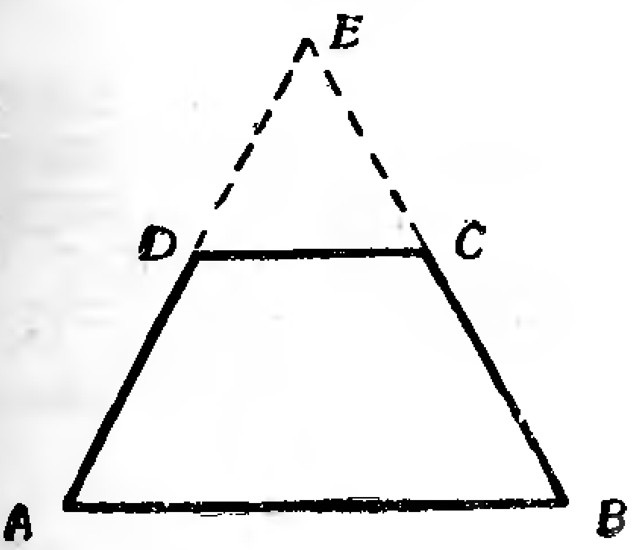


Рис. 7.

58. Высота, медиана, биссектриса треугольника

Перпендикуляр, опущенный из любой вершины тр-ка на противолежащую сторону или на ее продолжение, называется *высотой* тр-ка (рис. 8. BD — высота). Отрезок прямой, соединяющий любую вершину тр-ка с серединой противолежащей стороны, называется *медианой* тр-ка (BE — медиана). Отрезок прямой, делящей пополам любой угол тр-ка, от вершины угла до противолежащей стороны, называется *биссектрисой* тр-ка (BF — биссектриса), а сама прямая, делящая пополам угол, — *биссектрисой* этого угла.

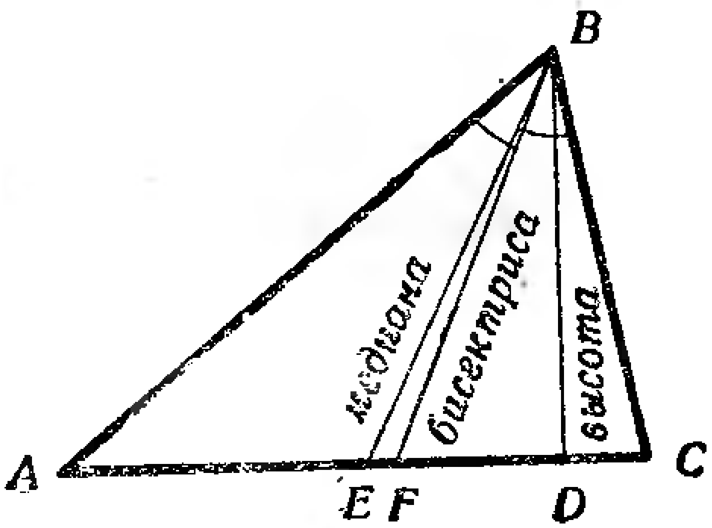


Рис. 8.

Биссектриса разделяет сторону тр-ка на части, пропорциональные двум другим сторонам:

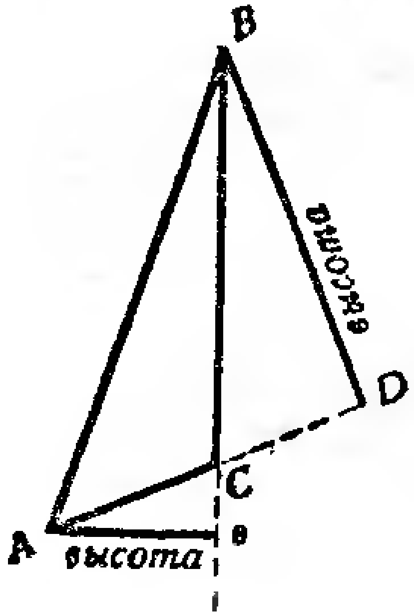


Рис. 9.

$$AF : FC = BA : BC.$$

В тупоугольном тр-ке все медианы и биссектрисы лежат внутри тр-ка, но две высоты, выходящие из острых углов, проходят вне его и падают на продолжения противолежащих сторон (рис. 9).

59. Четыре замечательные точки в тр-ке

а) Все три высоты каждого тр-ка пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром* тр-ка (рис. 10, *а*);

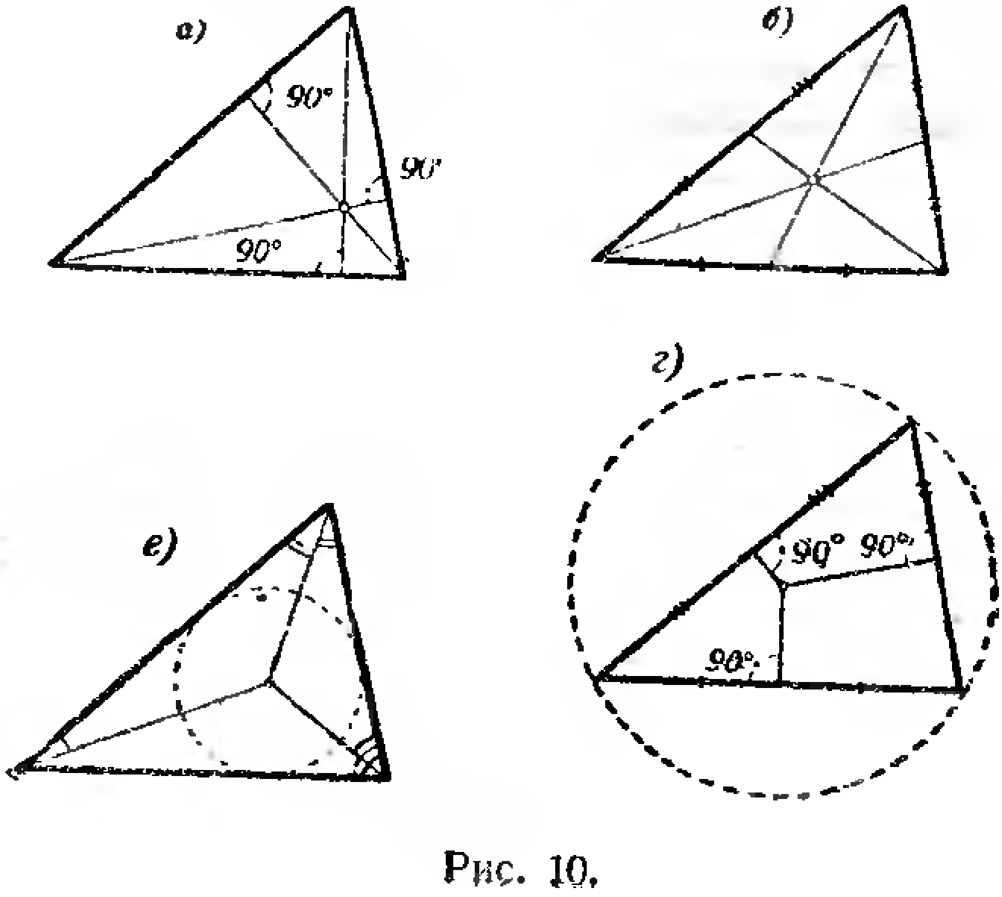


Рис. 10.

б) все три медианы пересекаются в одной точке, являющейся *центром тяжести* тр-ка, он лежит на медиане, на расстоянии двух третей ее от соответствующей вершины (рис. 10, *б*); в) все три биссектрисы тр-ка пересекаются в одной точке, являющейся *центром вписанного круга* (рис. 10, *в*); г) все три перпендикуляра, восстановленные из середин сторон тр-ка, пересекаются в одной точке, являющейся *центром описанного круга* (рис. 10, *г*). В случае тупоугольного треугольника ортоцентр и центр описанного круга находятся не внутри, а вне треугольника.

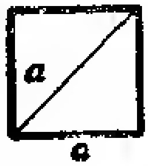
60. Основные формулы для треугольника [1]

Соотношение	Формула
Сумма углов	$\angle A + \angle B + \angle C = 2d$ (d — прямой угол)
Зависимость между сторонами тр-ка	$a + b > c$, $a - b < c$ (a, b, c — любые стороны тр-ка)
Зависимость между сторонами прямоугольного тр-ка	*Теорема Пифагора:* $c^2 = a^2 + b^2$ (c — гипотенуза, a и b — катеты)

[1]) Тригонометрические формулы приведены систематически в разделе „Тригонометрия" (стр. 98 и 104 — 105).

61. Площади многоугольников

Квадрат



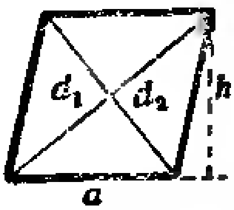
$S=a^2$

$S=\frac{1}{2}d^2$

Прямоугольник

$S=ah$

Ромб

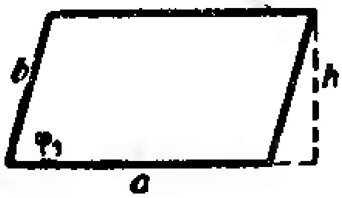


$S=ah$

$S=a^2\sin\alpha$

$S=\frac{d_1d_2}{2}$

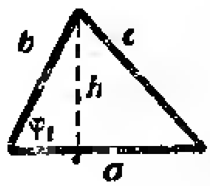
Параллелограмм



$S=ah$

$S=ab\sin\varphi$

Треугольник

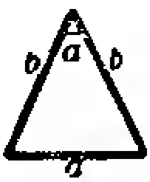


$S=\frac{1}{2}ah,\quad S=\frac{1}{2}ab\sin\varphi$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$

(формула Герона)

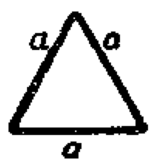
Равнобедренный тр-к



$S=\frac{a}{4}\sqrt{4b^2-a^2}$

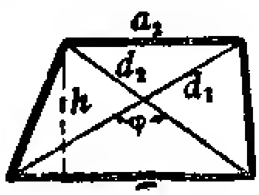
$S=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha$

Равносторонний тр-к



$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

Трапеция



$S=\frac{(a_1+a_2)h}{2}$

$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$

Таблица — рис. 11.

62. Правильные многоугольники

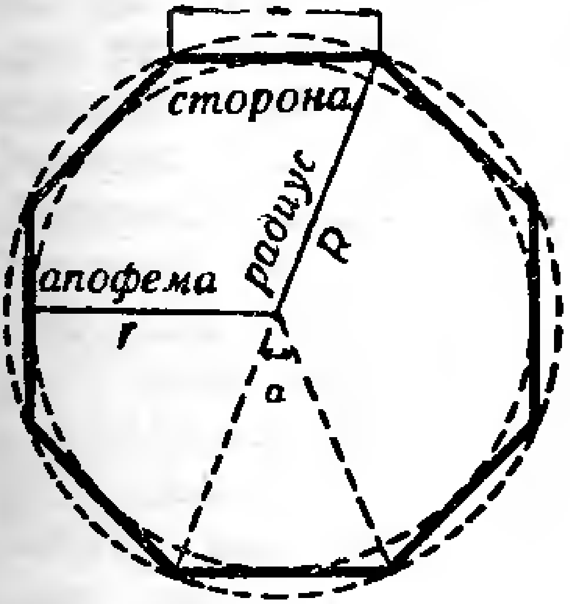


Рис. 12.

Обозначения (рис. 12): a — сторона многоугольника, R — радиус описанного около него круга, r — радиус вписанного в него круга (*апофема*), $2p$ — *периметр* и S — площадь многоугольника, α — угол между двумя соседними радиусами описанного круга $\left(\alpha = \frac{360^\circ}{n}\right.$, где n — число сторон многоугольника$\left.\right)$.

Название мн-ка	Длина стороны a	Площадь S
а) Правильный треугольник (равносторонний тр-к)	$R\sqrt{3}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = 3r^2\sqrt{3}$
б) Правильный четырехугольник (квадрат)	$R\sqrt{2}$	$a^2 = 2R^2 = 4r^2$
в) Правильный шестиугольник	R	$\frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3} = 2r^2\sqrt{3}$
г) Правильный n-угольник	$2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$	$\frac{1}{2}nR^2\sin\alpha = nr^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

63. Окружность и линии в окружности

Отрезок, соединяющий любую точку окружности с центром, наз. *радиусом* окружности (OD, рис. 13). Все радиусы окружности равны. Прямая, пересекающая окружность, наз. *секущей* (MN). Часть секущей, заключенная внутри окружности, наз. *хордой* (AB). Хорда, проходящая через центр, наз. *диаметром* (CD). Диаметр составлен из двух радиусов ($CD = OC + OD$). Прямая, имеющая одну общую точку с окружностью, наз. *касательной* к окружности (KL), T — *точка касания*.

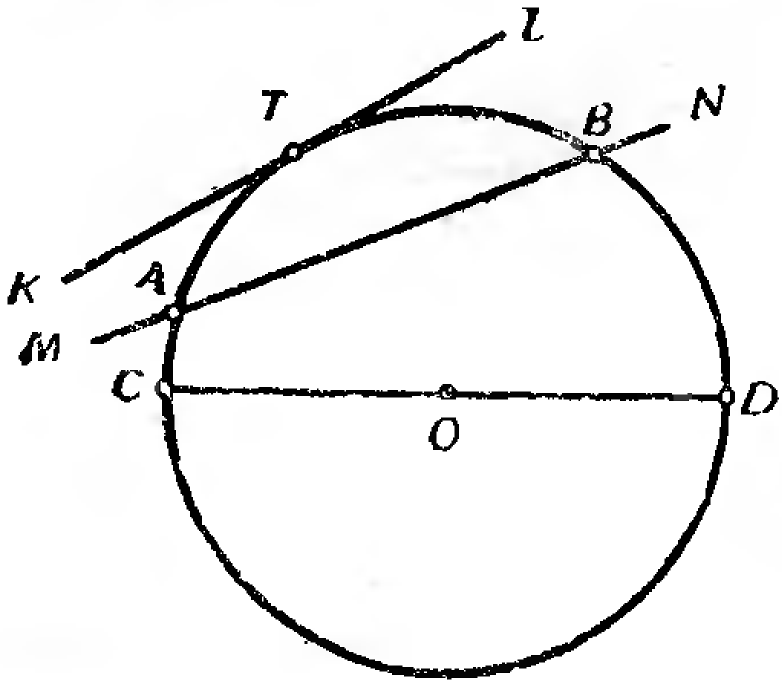


Рис. 13.

64. Круг и части круга

Кругом наз. часть плоскости, ограниченная окружностью. Всякая секущая делит круг на две части, назы-

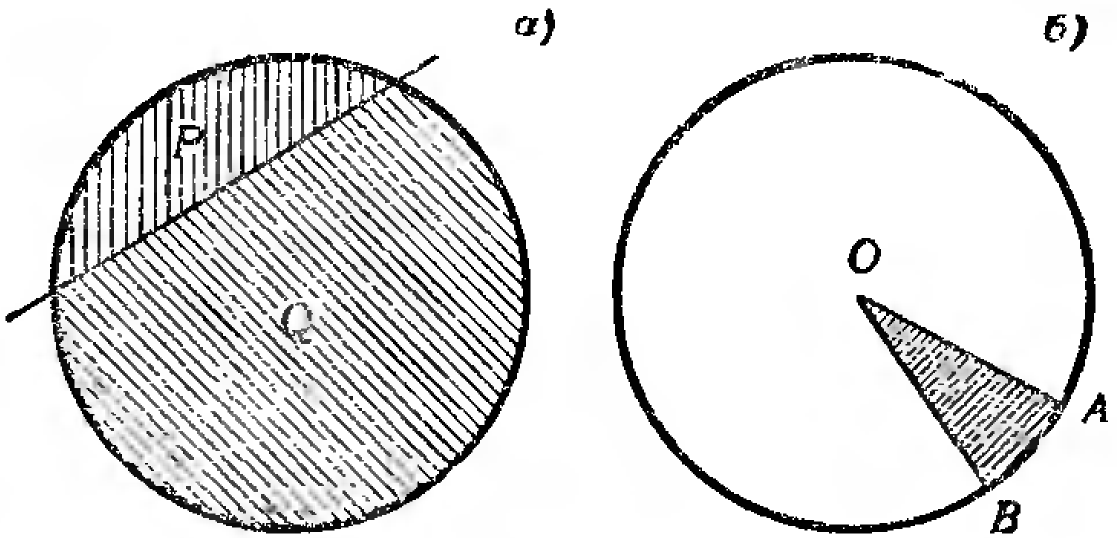


Рис. 14.

ваемые *сегментами* круга (P и Q, рис. 14, *а*). Диаметр делит круг на два равных сегмента. Часть круга, отсекаемая двумя радиусами, называется *сектором* круга (AOB, рис. 14, *б*). $\angle AOB$ — угол сектора, или *центральный угол*.

65. Расположение двух кругов

Взаимные положения двух кругов изображены на рис. 15. Круги могут находиться — один вне другого, один — внутри другого (при этом, если центры обоих кругов совпадают, окружности наз. *концентрическими*); они

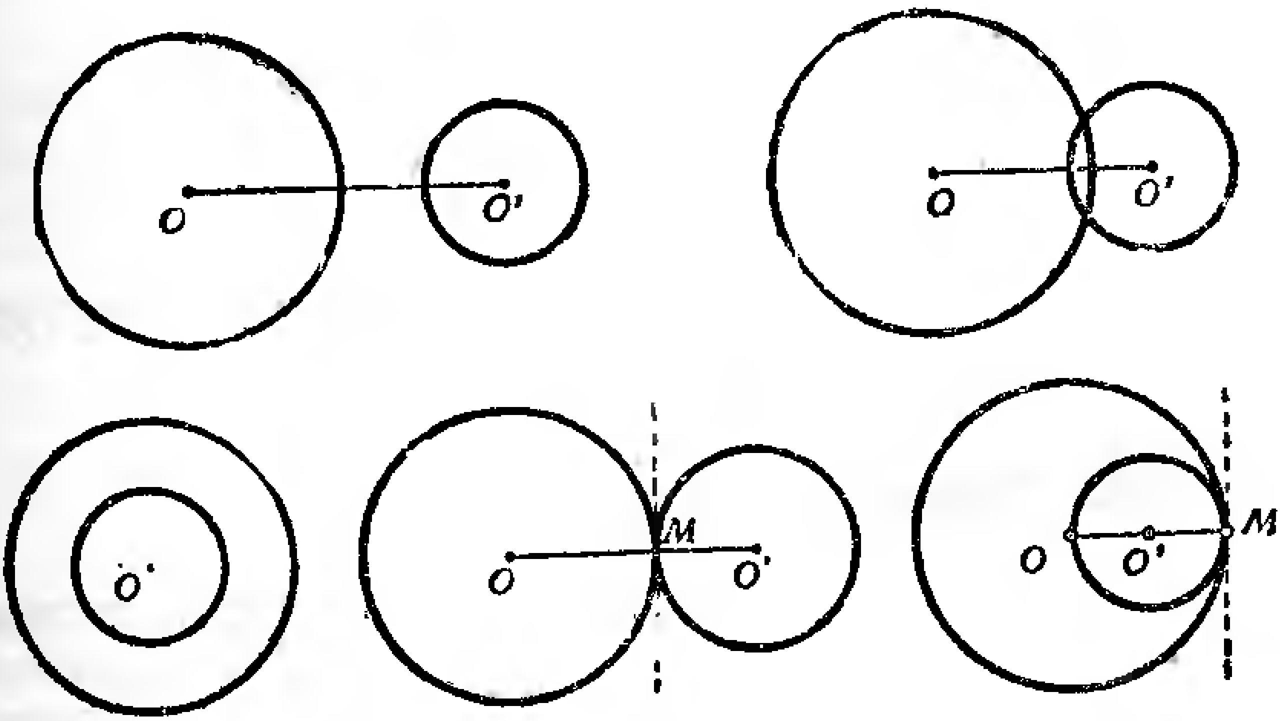


Рис. 15.

могут пересекаться в двух точках и, наконец, касаться друг друга в одной точке внешним или внутренним образом При внешнем и внутреннем касании *линия центров* (OO') проходит через точку касания (M).

Если два круга лежат целиком один вне другого (рис. 16), то можно к ним провести четыре общих касательных — две внешних и две внутренних. Точка пересе-

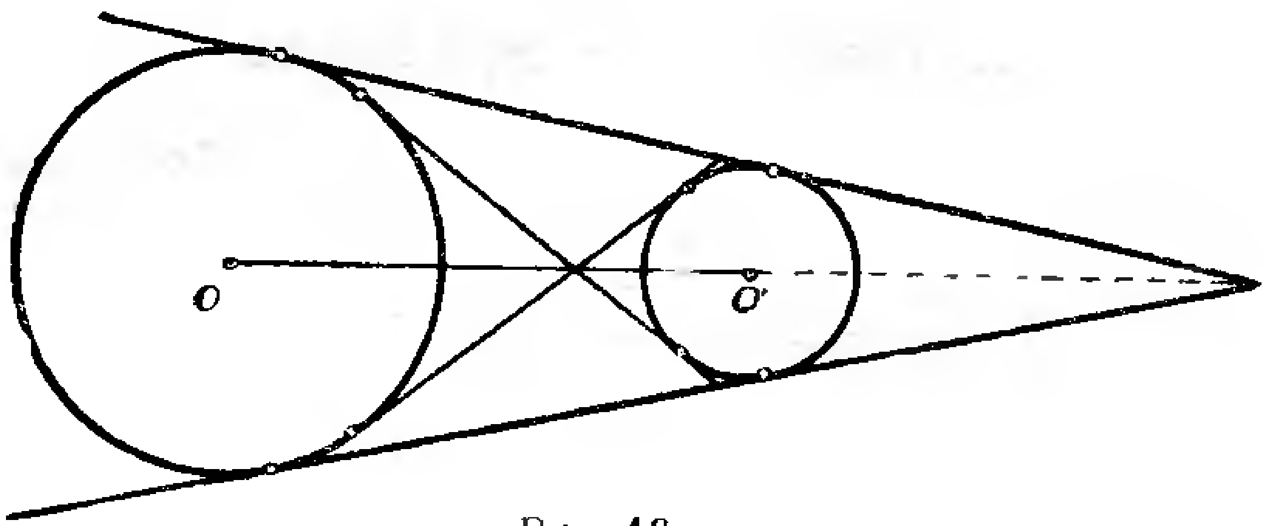


Рис. 16.

чения внешних касательных и точка пересечения внутренних касательных лежат на линии центров.

66. Градусное измерение углов и дуг

$^1/_{90}$ часть прямого угла (т. е. $^1/_{360}$ часть полного оборота) служит единицей измерения углов и называется *угловым градусом;* $^1/_{60}$ часть градуса называется *угловой минутой*; $^1/_{60}$ часть минуты называется *угловой секундой*. Если угол содержит, например, 15 градусов 30 минут 14 секунд, то это записывают так: $15°30'14''$. Дуга, соответствующая центральному углу в один градус, есть *дуговой градус.* Дуговой градус также разделяется на *минуты и секунды*. Обозначения дуговых градусов, минут и секунд такие же, как и угловых.

67. Число π

Длина окружности C всякого круга больше его диаметра D в определенное число раз, или, иначе, отношение $\frac{C}{D}$ длины окружности к диаметру — постоянное число. Это число приблизительно равно 3,14 или $\frac{22}{7}$, более точное его значение: 3,14159[1]). Оно обозначается греческой буквой π.

68. Основные формулы для круга (длины и площади)

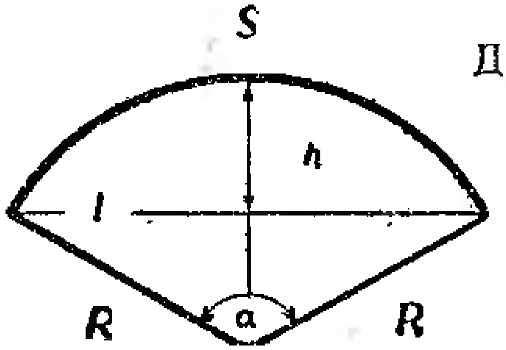
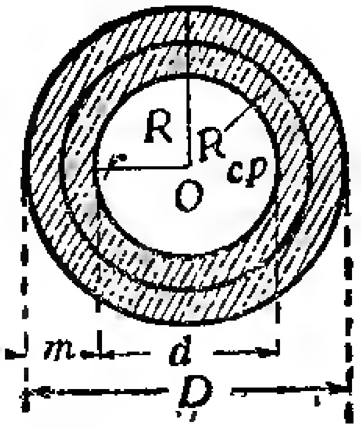
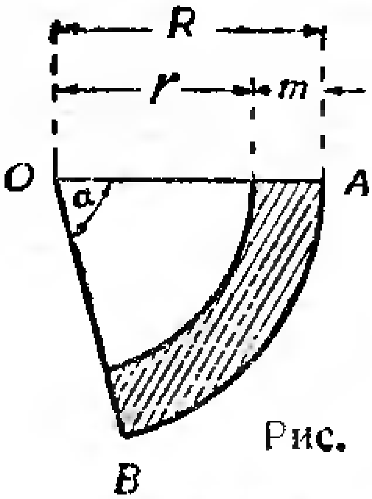
Длины и площади, рассматриваемые в круге, приведены в следующей таблице (R — радиус круга, D — диаметр):

Название	Формула
Длина окружности	$C = \pi D = 2\pi R$
Длина дуги в α°	$s = \frac{\pi D\alpha}{360} = \frac{\pi R\alpha}{180}$
Площадь круга	$S_{кр} = \frac{1}{4}\pi D^2 = \pi R^2$
Площадь сектора с углом в α°	$S_{сект} = \frac{\pi R^2\alpha}{360}$

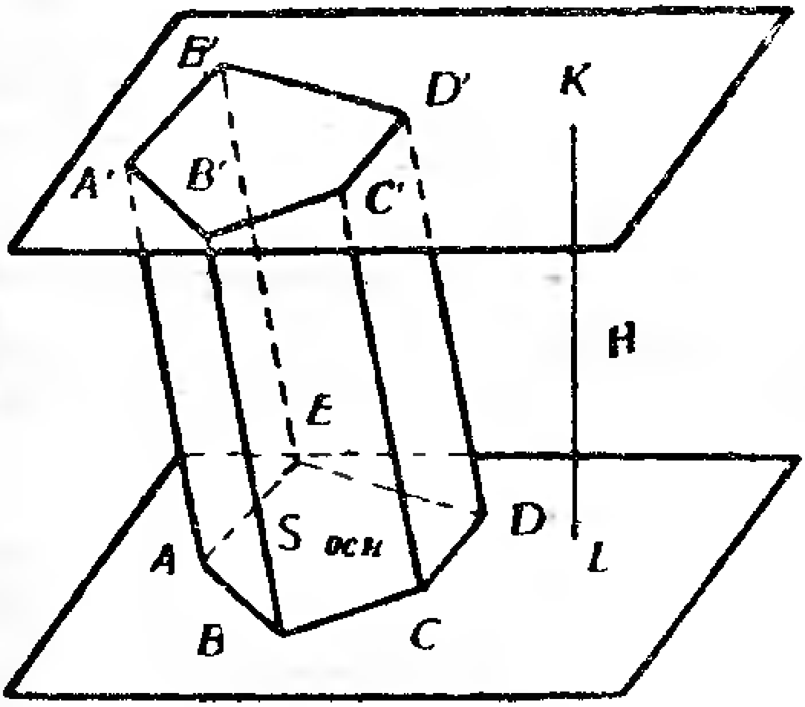
(продолжение на об.)

[1]) Это значение также не является совершенно точным, π — число иррациональное, его нельзя точно выразить никакой дробью.

Продолжение

Название	Формула
Элементы сегмента с центральным углом α (рис. 17). Длина хорды .	$l = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$
Длина дуги	$s = \frac{\pi R\alpha}{180}$ (α — в градусах)
Радиус круга . . .	$R = \frac{l^2 + 4h^2}{8h}$
 Рис. 17.	
Центральный угол	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \frac{2h}{l}$
Длина стрелки (высота сегмента) .	$h = 2R\sin^2\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{2}\,l\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$
Площадь кольца (рис. 18) .	$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r) = 2\pi R_{\text{ср}}\, m$, где $R_{\text{ср}}$ — средний радиус, равный $\frac{R + r}{2}$, а $m = \frac{D - d}{2}$ — ширина кольца
 Рис. 18.	
Площадь части кольца (рис. 19) .	$S = \frac{\pi(R^2 - r^2)\,\alpha}{360} = \frac{\pi(R + r)(R - r)\,\alpha}{360} = \frac{\pi R_{\text{ср}}\, m\alpha}{180}$, где α — угол AOB в градусах, а $R_{\text{ср}}$ и m имеют те же значения, что и выше
 Рис. 19.	

Б. СТЕРЕОМЕТРИЯ
(ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ)
69. Многогранники



Призма. Основания $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ параллельны и равны. Боковые грани (напр. $ABB'A'$) — параллелограммы. Боковые ребра (AA', BB' и т. д.) параллельны и равны, $KL = H$ — высота.

Рис. 20.

Прямая призма. Боковые грани — прямоугольники. Высота равна боковому ребру.

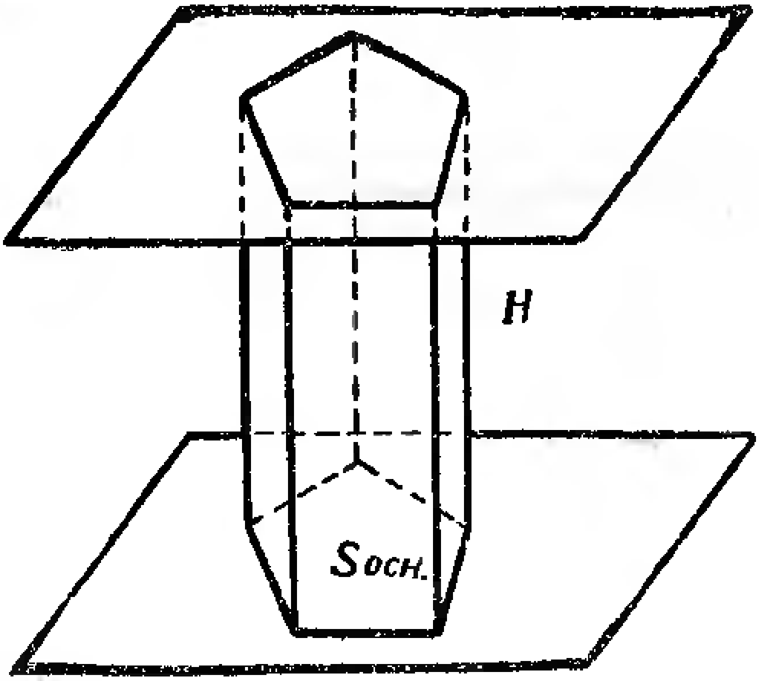
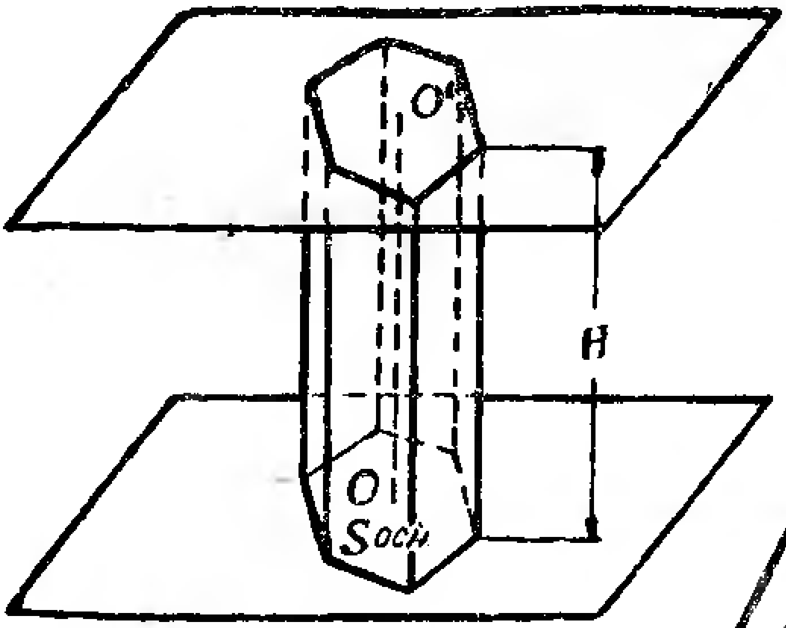


Рис. 21.



Правильная призма. Прямая призма, основания которой — правильные многоугольники.

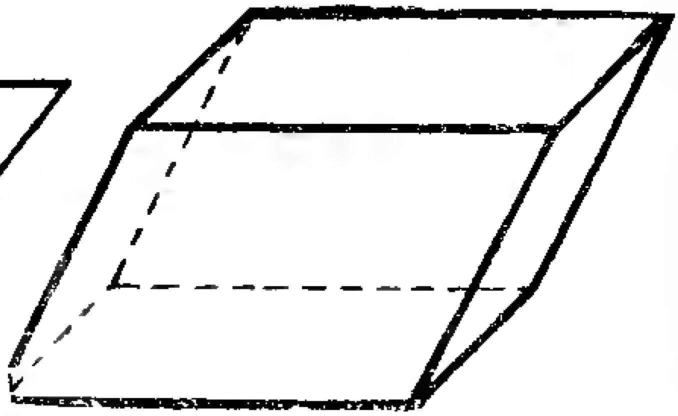


Рис. 22.

Рис. 23

Параллелепипед. Частный случай призмы: все грани (в том числе и основания) — параллелограммы.

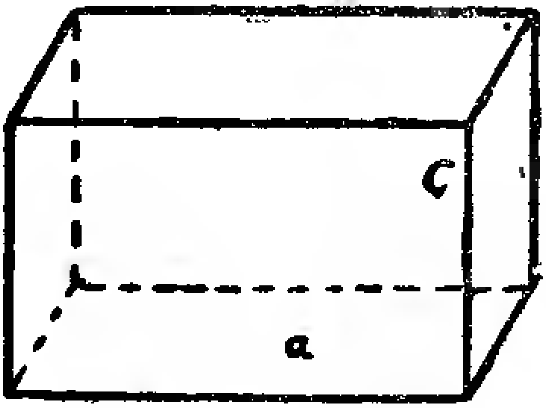


Рис. 24.

Прямоугольный параллелепипед. Все грани — прямоугольники.

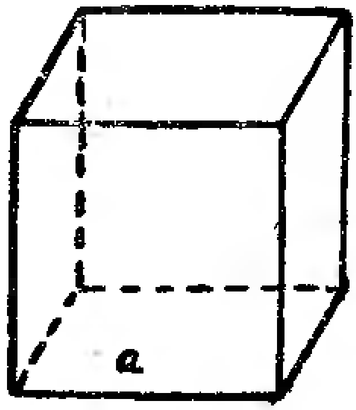


Рис. 25.

Куб. Все грани — квадраты.

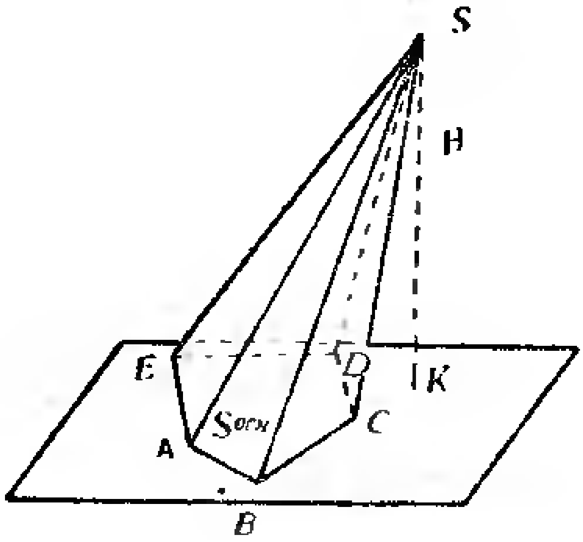


Рис. 26.

Пирамида. В основании — многоугольник ($ABCDE$). Боковые грани (например SAB) — треугольники. Высота — $SK = H$.

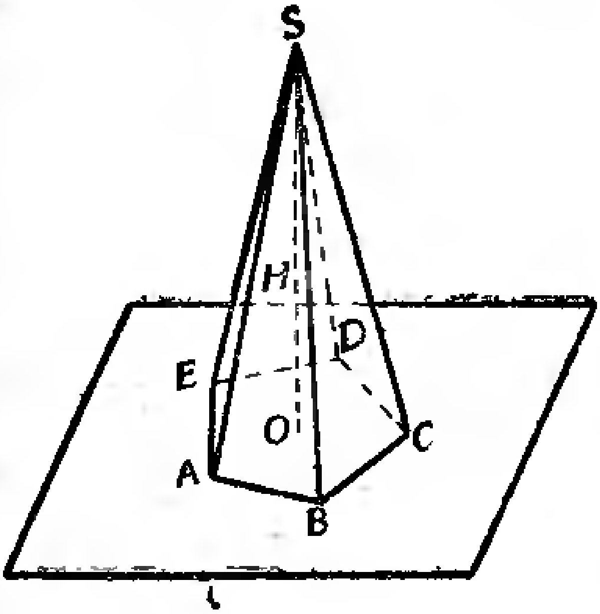


Рис. 27.

Правильная пирамида. В основании — правильный многоугольник; боковые грани — равнобедренные тр-ки. Высота, опущенная из вершины S, проходит через центр O основания.

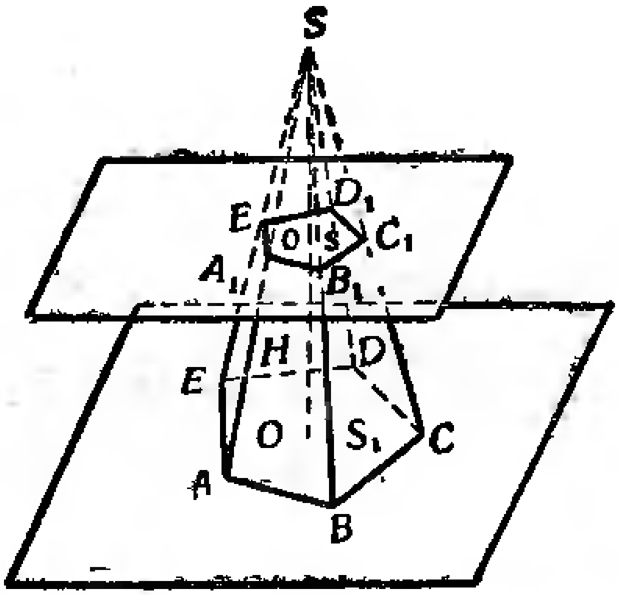


Рис. 28.

Правильная усеченная пирамида. Правильная пирамида, часть которой с вершиной S срезана плоскостью, параллельной основанию.

70. Поверхности и объемы многогранников

Обозначения: p — периметр основания призмы или пирамиды, R — радиус описанного около основания круга, H — высота и l — боковое ребро призмы или пирамиды, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $S_{\text{бок}}$ — боковая поверхность, $S_{\text{полн}}$ — полная поверхность, V — объем.

а) *Призма:* $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, $S_{\text{бок}} = p'l$, где p' — периметр сечения призмы перпендикулярно боковому ребру.

б) *Прямая призма:* $S_{\text{бок}} = pH$, $V = S_{\text{осн}} \cdot H$.

в) *Прямоугольный параллелепипед:* $S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ca)$, $V = abc$, где a, b, c — измерения параллелепипеда: длина, ширина, высота.

г) *Куб:* $S_{\text{полн}} = 6a^2$, $V = a^3$.

д) *Пирамида:* $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$.

е) *Правильная пирамида:* $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} pA$, где A — *апофема пирамиды* (высота равнобедренного тр-ка, являющегося боковой гранью пирамиды); $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$.

ж) *Правильная усеченная пирамида:* $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) A$, где p_1 и p_2 — периметры оснований, A — *апофема усеченной пирамиды* (высота трапеции, являющейся боковой гранью пирамиды). $V = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) H$, где S_1, S_2 — площади оснований.

71. Поверхности и объемы круглых тел (цилиндра, конуса, шара и его частей)

Цилиндр (рис. 29):

$$S_{бок} = 2\pi R H, \quad S_{полн} = 2\pi R (H + R).$$

$$V = \pi R^2 H.$$

Конус (рис. 30):

$S_{бок} = \pi R l$[1]), $S_{полн} = \pi R (l + R)$,

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Усеченный конус (рис. 31):

$S_{бок} = \pi (R_1 + R_2) l$[1]),

$$S_{полн} = \pi R_1 (l + R_1) + \pi R_2 (l + R_2),$$

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2).$$

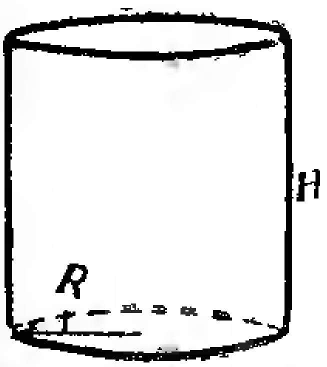


Рис. 29.

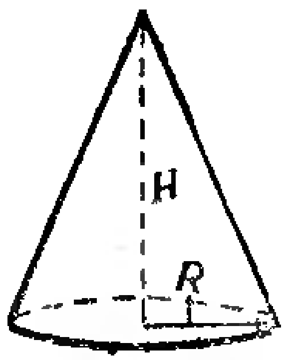


Рис. 30.

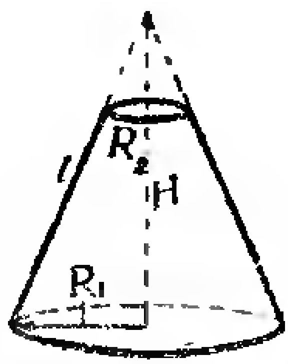


Рис. 31.

Шар (рис. 32):

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2,$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3$$

(D — диаметр шара).

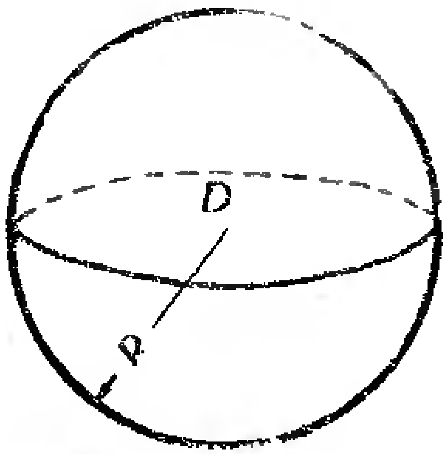


Рис. 32.

[1]) l — *образующая* конуса или усеченного конуса.

Шаровой сегмент (рис. 33):

$S = 2\pi Rh$ [поверхность кривой части, без основания],

$V = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2)$, где r — радиус основания, h — высота сегмента. $= \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right)$

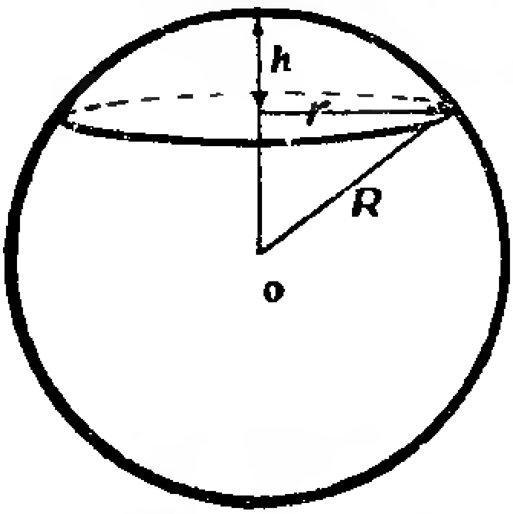


Рис. 33.

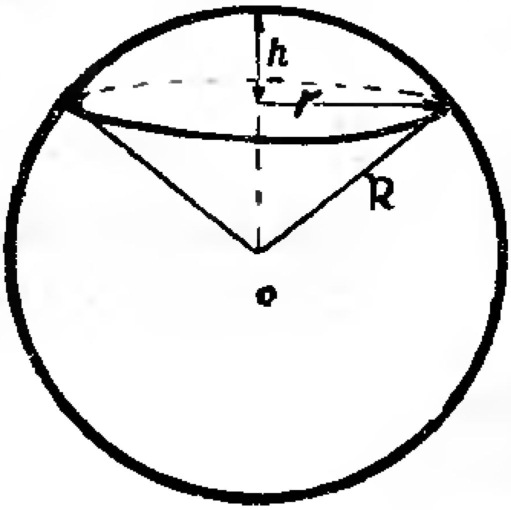


Рис. 34.

Шаровой сектор (рис. 34):

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок конуса}} + S_{\text{сегмента}} = \pi R(2h + r),$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

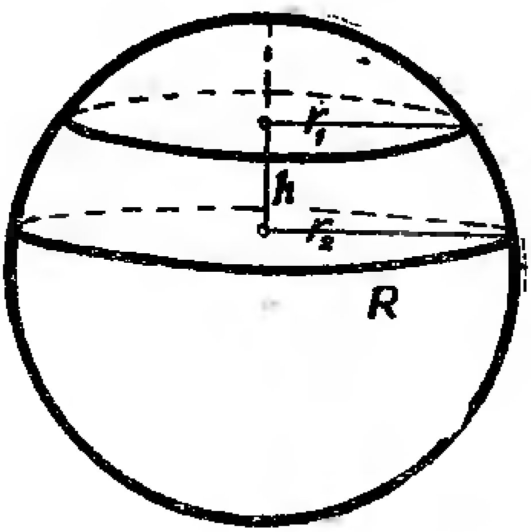


Рис. 35.

Шаровой слой (рис. 35): $S = 2\pi Rh$ [поверхность кривой части, без верхнего и нижнего оснований],

$$V = \frac{1}{6}\pi h\left[3\left(r_1^2 + r_2^2\right) + h^2\right],$$

где r_1 и r_2 — радиусы оснований, h — высота слоя.

V. ТРИГОНОМЕТРИЯ

72. Тригонометрические функции острого угла

Отношение катета a к гипотенузе c прямоугольного треугольника ABC (рис. 36) есть *синус* угла A: $\frac{a}{c} = \sin A$; отношение катета b к гипотенузе c есть *косинус* угла A: $\frac{b}{c} = \cos A$; отношение катета a к катету b есть *тангенс* угла A:

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A.$$ [1]

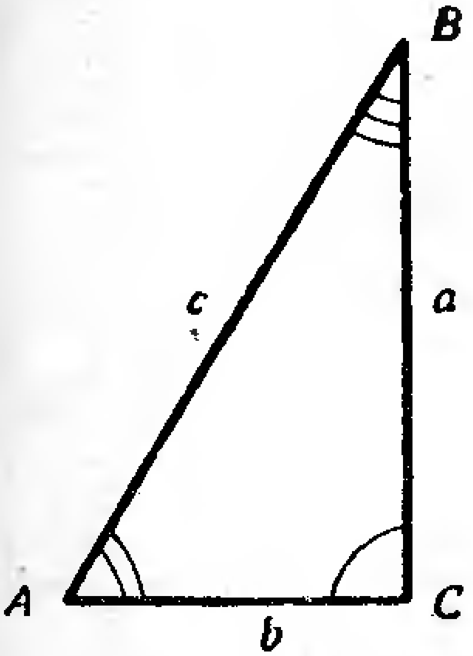


Рис. 36.

73. Тригонометрические функции важнейших углов

Угол	Синус	Косинус	Тангенс
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	∞ (бесконечность)

[1] Более редко употребляются три другие тригонометрические функции: $b/a = \operatorname{ctg} A$ *(котангенс)*, $c/b = \sec A$ *(секанс)*, $c/a = \operatorname{cosec} A$ *(косеканс)*.

74. Таблицы тригонометрических функций

Угол	Синус	Косинус	Тангенс	Угол	Синус	Косинус	Тангенс	Угол	Синус	Косинус	Тангенс
0°	0,0000	1,0000	0,0000	15°	0,2588	0,9659	0,2679	30°	0,5000	0,8660	0,5774
1	0,0175	0,9998	0,0175	16	0,2756	0,9613	0,2867	31	0,5150	0,8572	0,6009
2	0,0349	0,9994	0,0349	17	0,2924	0,9563	0,3057	32	0,5299	0,8480	0,6249
3	0,0523	0,9986	0,0524	18	0,3090	0,9511	0,3249	33	0,5446	0,8387	0,6494
4	0,0698	0,9976	0,0699	19	0,3256	0,9455	0,3443	34	0,5592	0,8290	0,6745
5	0,0872	0,9962	0,0875	20	0,3420	0,9397	0,3640	35	0,5736	0,8192	0,7002
6	0,1045	0,9945	0,1051	21	0,3584	0,9336	0,3839	36	0,5878	0,8090	0,7265
7	0,1219	0,9925	0,1228	22	0,3746	0,9272	0,4040	37	0,6018	0,7986	0,7536
8	0,1392	0,9903	0,1405	23	0,3907	0,9205	0,4245	38	0,6157	0,7880	0,7813
9	0,1564	0,9877	0,1584	24	0,4067	0,9135	0,4452	39	0,6293	0,7771	0,8098
10	0,1736	0,9848	0,1763	25	0,4226	0,9063	0,4663	40	0,6428	0,7660	0,8391
11	0,1908	0,9816	0,1944	26	0,4384	0,8988	0,4877	41	0,6561	0,7547	0,8693
12	0,2079	0,9781	0,2126	27	0,4540	0,8910	0,5095	42	0,6691	0,7431	0,9004
13	0,2250	0,9744	0,2309	28	0,4695	0,8829	0,5317	43	0,6820	0,7314	0,9325
14	0,2419	0,9703	0,2493	29	0,4848	0,8746	0,5543	44	0,6947	0,7193	0,9657
15°	0,2588	0,9659	0,2679	30°	0,5000	0,8660	0,5774	45°	0,7071	0,7071	1,0000

Продолжение

Угол	Синус	Коси-нус	Тан-генс	Угол	Синус	Коси-нус	Таи-генс	Угол	Сннус	Коси-иус	Таи-генс
45°	0,7071	0,7071	1,000	60°	0,8660	0,5000	1,732	75°	0,9659	0,2588	3,732
46	0,7193	0,6947	1,0355	61	0,8746	0,4848	1,804	76	0,9703	0,2419	4,011
47	0,7314	0,6820	1,0724	62	0,8829	0,4695	1,881	77	0,9744	0,2250	4,331
48	0,7431	0,6691	1,1106	63	0,8910	0,4540	1,963	78	0,9781	0,2079	4,705
49	0,7547	0,6561	1,1504	64	0,8988	0,4384	2,050	79	0,9816	0,1908	5,145
50	0,7660	0,6428	1,1918	65	0,9063	0,4226	2,145	80	0,9848	0,1736	5,671
51	0,7771	0,6293	1,2349	66	0,9135	0,4067	2,246	81	0,9877	0,1564	6,314
52	0,7880	0,6157	1,2799	67	0,9205	0,3907	2,356	82	0,9903	0,1392	7,115
53	0,7986	0,6018	1,3270	68	0,9272	0,3746	2,475	83	0,9925	0,1219	8,144
54	0,8090	0,5878	1,3764	69	0,9336	0,3584	2,605	84	0,9945	0,1045	9,514
55	0,8192	0,5736	1,4281	70	0,9397	0,3420	2,747	85	0,9962	0,0872	11,43
56	0,8290	0,5592	1,4826	71	0,9455	0,3256	2,904	86	0,9976	0,0698	14,30
57	0,8387	0,5446	1,5399	72	0,9511	0,3090	3,078	87	0,9986	0,0523	19,08
58	0,8480	0,5299	1,6003	73	0,9563	0,2924	3,271	88	0,9994	0,0349	28,64
59	0,8572	0,5150	1,6643	74	0,9613	0,2756	3,487	89	0,9998	0,0175	57,29
60°	0,8660	0,5000	1,732	75°	0,9659	0,2588	3,732	90°	1,0000	0,0000	∞

75. Формулы прямоугольных треугольников

Основные формулы для *решения прямоугольного треугольника* (кроме формул $\angle A + \angle B = 90°$ и $a^2 + b^2 = c^2$):

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A, \quad a = b \operatorname{tg} A;$$

$$b = c \sin B, \quad a = c \cos B, \quad b = a \operatorname{tg} B.$$

Умея по данному углу находить из таблиц значения его тригонометрических функций или по значению какой-нибудь функции находить из таблиц величину угла, можно при помощи этих формул по данному острому углу и одной из сторон прямоугольного треугольника находить другие стороны и по данным двум сторонам находить углы и третью сторону.

76. Решение прямоугольных треугольников

Данные	Решение
c, A	$B = 90° - A;\ a = c \cdot \sin A;\ b = c \cdot \cos A$
a, A	$B = 90° - A;\ b = a \cdot \operatorname{tg} B;\ c = \dfrac{a}{\sin A}$
c, a	$\sin A = \dfrac{a}{c};\ B = 90° - A;\ b = c \cdot \cos A$
a, b	$\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b};\ B = 90° - A;\ c = \dfrac{a}{\sin \cdot A}$

77. Тригонометрические функции углов, превышающих 90°

Если угол больше 90°, но меньше 360°, то его синус, косинус и тангенс определяются следующим образом:

1) Находится разность между данным углом и ближайшим к нему из углов 180° или 360° и вычисляется соответствующая функция от этой разности.

2) Перед результатом ставится знак «+» или «—» по таблице:

Функция	2-я четверть (от 90° до 180°)	3-я четверть (от 180° до 270°)	4-я четверть (от 270° до 360°)
Синус	+	—	—
Косинус . . .	—	—	+
Тангенс . . .	—	+	—

Например:

$$\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -0{,}8660$$
$$[360^\circ - 300^\circ = 60^\circ]$$
$$\cos 140^\circ = -\cos 40^\circ = -0{,}7660$$
$$[180^\circ - 140^\circ = 40^\circ]$$
$$\operatorname{tg} 200^\circ = +\operatorname{tg} 20^\circ = +0{,}3640$$
$$[200^\circ - 180^\circ = 20^\circ]$$

Если же угол больше 360°, то из его величины вычитается целое число «полных оборотов» по 360° и рассматривается только величина остатка, меньшего 360°.

Например:

$$\sin 1000° = \sin 280° = -\sin 80° = -0{,}9848$$

$$[1000° - 2\cdot 360° = 280°;\ 360° - 280° = 80°]$$

78. Основные формулы тригонометрии

а) Основные *соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла:*

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1, \quad \operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

б) Свойство *дополнительных углов* (дающих в сумме 90°):

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha;\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

в) Формулы *суммы и разности углов:*

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}.$$

г) Формулы *двойных углов*:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$[\text{или: } \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1],$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$$

д) Формулы *половинных углов:*

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$$
$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

(знак + или — определяется по таблице на стр. 99).

Употребительны также формулы:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x},$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

е) Формулы преобразования алгебраических сумм тригонометрических функций в произведения («приведение к виду, удобному для логарифмирования»):

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2} =$$

$$= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y},$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}.$$

ж) Формулы преобразования произведений тригонометрических функций в алгебраические суммы:

$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)],$$

$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)],$$

$$\sin x\cdot\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)].$$

79. Формулы косоугольных треугольников

а) *Теорема синусов:* $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

б) *Теорема косинусов:* $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

в) *Теорема тангенсов:* $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

г) Выражение углов треугольника через его стороны [1]):

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

д) Выражение *радиуса описанного круга* через стороны и углы треугольника:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C},$$

$$R=\frac{a+b+c}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

или

$$R=\frac{p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

---

[1]) p — здесь и дальше — полупериметр треугольника $\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$.

е) Выражение *радиуса вписанного круга* через стороны и углы треугольника:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

или

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

ж) Выражение *площади треугольника* через его стороны и углы:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C \text{ и } S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

80. Решение косоугольных треугольников

Данные	Решение
a, b, c	$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$, $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

Продолжение

$a,\ b,\ C$	$\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=$ $=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$ (по найденным значениям $\frac{A+B}{2}$ и $\frac{A-B}{2}$ вычисляем углы A и B); $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$
$a,\ B,\ C$	$A=180^\circ-(B+C)$; $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$; $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$
$a,\ b,\ A$	$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$ [1]; $C=180^\circ-(A+B)$; $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$

[1] Если $a>b$, то B имеет одно значение, меньшее 90°.

Если $a<b$, но $a>b\sin A$, то B имеет два значения: $B_1<90^\circ$ и $B_2=180^\circ-B_1$, и каждое из них дает свое значение для C и c. В этом случае задача допускает два решения (остроугольный и тупоугольный тр-кн).

Если $a<b$ и $a=b\sin A$, то $B=90^\circ$ (треугольник прямоугольный).

Если $a<b$ и $a<b\sin A$, то $\sin B>1$, что невозможно, и треугольника, удовлетворяющего условиям задачи, не существует.

МЕХАНИ́КА

1. Предмет механики и ее части

Механика — наука о движении и силах. Она разделяется на: 1) *кинематику*, изучающую только само движение, не интересуясь силами, которые его вызывают; 2) *статику*, изучающую силы, действующие так, что они не производят движения («взаимно уравновешиваются»), и 3) *динамику*, занимающуюся изучением взаимной связи между силами и производимыми ими движениями.

Кроме того, механика разделяется на: 1) механику абсолютно твердого тела, т. е. такого тела, которое ни при каких условиях не деформируется; 2) механику изменяемого твердого тела (*сопротивление материалов*) и 3) механику жидкого и газообразного тела.

I. КИНЕМАТИКА

2. Поступательное движение

Движение тела называется *поступательным*, если все его точки движутся совершенно одинаково, так что вполне достаточно изучить движение одной точки для того, чтобы знать и движение всего тела. В поступательном движении всякая прямая, соединяющая любые две точки тела, во все время движения остается параллельной самой себе (см. рис. 37).

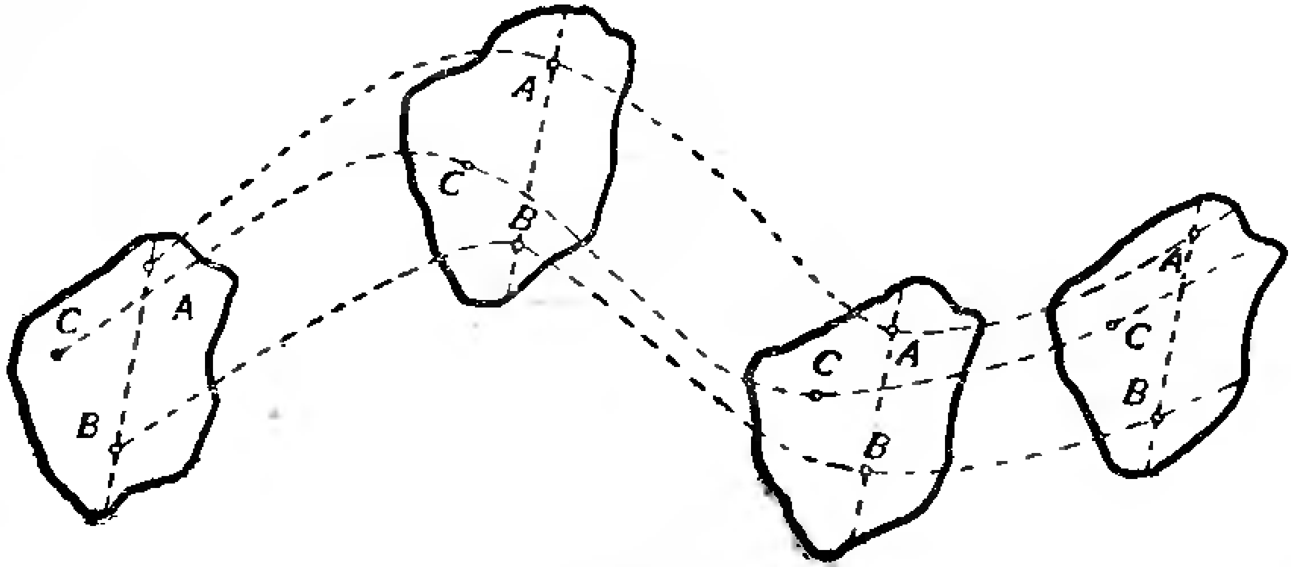


Рис. 37.

3. Траектория

Линия, которую описывает движущаяся точка, называется ее *траекторией*. Движения точки разделяются на *прямолинейные* и *криволинейные* в зависимости от вида траектории.

4. Закон движения

Движение точки вполне определяется, если известна траектория движущейся точки и задан *закон* ее *движения*, дающий в зависимости от времени расстояние движущейся точки от некоторой неподвижной начальной точки на траектории, причем расстояние измеряется по траектории. Это может быть сделано при помощи таблицы (например расписание поездов), формулы или графика.

5. Равномерное движение

Движение называется *равномерным*, если в любые равные промежутки времени точка проходит одинаковые отрезки траектории. *Скорость равномерного движения* является постоянной и измеряется отношением пройденного пути s к тому времени t, в течение которого путь был пройден:

$$v = \frac{s}{t}, \tag{1}$$

откуда следует

$$s = vt \tag{1a}$$

(закон равномерного движения).

За единицу скорости принимается скорость такого равномерного движения, в котором в единицу времени проходится единица расстояния (метр в секунду — *м/сек*, километр в час — *км/час* и т. д.). В системе *CGS*[1]) единица скорости 1 *см/сек*.

6. Вращательное движение

Вращательным движением или *вращением* называется такое движение твердого тела, при котором две его точки остаются во все время движения неподвижными; эти две неподвижные точки определяют проходящую через них прямую — *ось вращения*. Вращение наз. *равномерным*, если в равные промежутки времени тело поворачивается вокруг оси на равные углы. Отношение угла

---

[1]) См. стр. 20.

поворота к соответствующему времени измеряет *угловую скорость* вращения.

За единицу угловой скорости на практике принимают *оборот в секунду* или *оборот в минуту*, т. е. угловую скорость такого равномерного вращения, в котором тело за единицу времени (секунду или минуту) делает один полный оборот вокруг оси. В системе *CGS* единицей угловой скорости является *радиан в секунду (1/сек.)*. Она представляет угловую скорость, при которой каждая точка тела за 1 секунду проходит путь, равный ее расстоянию от оси вращения. При этом все тело поворачивается на угол, равный приблизительно 57°17′ (один *радиан*).

Формулы, выражающие угловую скорость вращения:

$$\omega = 2\pi n \ (2), \ \omega = \frac{\pi N}{30} \approx 0{,}1N, \qquad (2a)$$

где ω — угловая скорость в $1/сек$, n — число оборотов в секунду, N — число оборотов в минуту.

Если T — *период вращения* (время, за которое тело совершает полный оборот), то $T = \frac{1}{n}$ и формула (2) принимает вид:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (3)$$

7. Линейная скорость при вращении

Скорость, с которой движется отдельная точка вращающегося тела, наз. ее *линейной скоростью*. Она выражается формулами:

$$v = \omega r \, (4), \quad v = 2\pi r n \, (4a), \quad v = \frac{2\pi r}{T}, \qquad (4б)$$

где ω — угловая скорость вращения в $1/сек.$, r — расстояние точки от оси вращения. Линейная скорость точек, лежащих на окружности вала или шкива, называется *окружной скоростью* вала или шкива.

8. Законы ременных передач и зубчатых колес

Окружные скорости двух шкивов, соединенных *ременной передачей* (см. рис. 38), или двух соприкасающихся

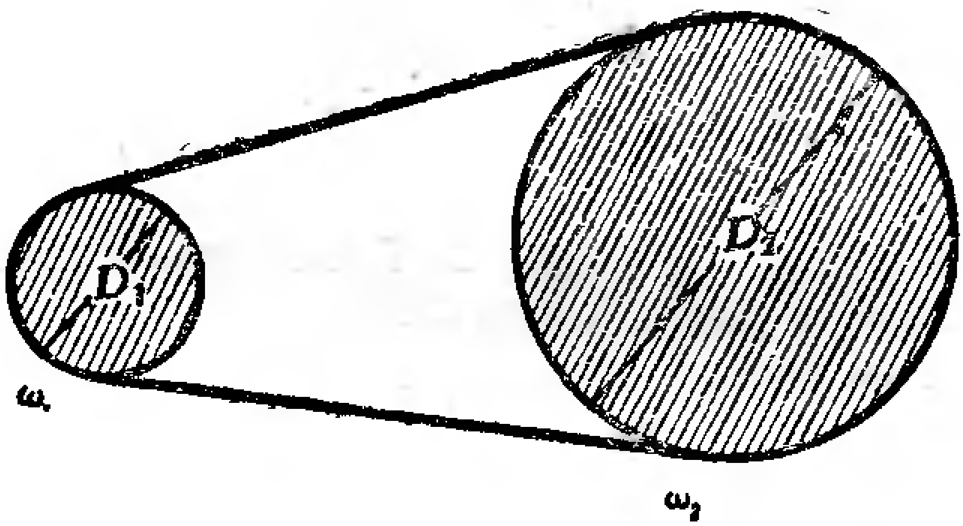


Рис. 38.

зубчатых колес должны быть равны, откуда следует:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \qquad (5)$$

или

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}, \qquad (5a)$$

где ω_1 и ω_2, r_1 и r_2 соответственно угловые скорости и радиусы двух соединенных шкивов или колес. Таким образом, угловые скорости шкивов или колес обратно пропорциональны их радиусам или диаметрам D_1, D_2.

Отношение числа оборотов ведомого колеса (N_2) к числу оборотов ведущего (N_1) называется *передаточным числом:*

$$k = \frac{N_2}{N_1}. \tag{6}$$

Передаточное число равняется отношению диаметров D_1 и D_2 или чисел зубцов z_1 и z_2 ведущего и ведомого колес:

$$k = \frac{D_1}{D_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{7}$$

9. Винтовое движение

Равномерным *винтовым движением* называется такое движение твердого тела, в котором оно равномерно вращается вокруг некоторой оси и в то же время совершает вдоль этой оси равномерное поступательное движение (см. рис. 39). Такое движение, например, мы придаем винту при его ввинчивании. *Шагом* h винта называется расстояние, на которое винт передвигается по оси за один оборот. Если v — скорость поступательного движения винта, n — число оборотов в секунду и ω — угловая скорость в радианах в секунду, то

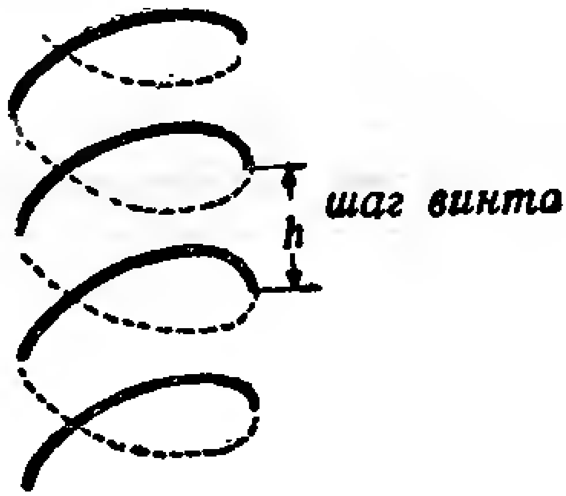


Рис. 39.

$$v = nh \ (8), \quad v = \frac{h}{2\pi}\omega. \tag{8a}$$

10. Равноускоренное движение

Равноускоренным движением называется такое движение, в котором величина скорости все время увеличивается, и это увеличение пропорционально времени. Получающееся при этом приращение скорости за каждую секунду называется *ускорением* (w). Ускорение измеряется на практике в метрах на квадрат секунды (*м/сек*^{2}), в системе CGS — в *см/сек*^{2}. В случае равноускоренного движения с начальной скоростью v_0 и ускорением w скорость v и путь s по истечении времени t выражаются формулами:

$$v = v_0 + wt, \tag{9}$$

$$s = v_0 t + \frac{wt^2}{2} \tag{10}$$

11. Законы падения тел

Свободное падение тела под действием силы тяжести является равноускоренным движением; в этом случае ускорение обозначается буквой g (*ускорение силы тяжести*) и равняется

$$g = 9{,}81 \ \textit{м/сек}^2 = 981 \ \textit{см/сек}^2.$$

В свободном падении без начальной скорости ($v_0 = 0$) формулы (9) и (10) имеют вид:

$$v = gt, \tag{11}$$

$$s = \frac{gt^2}{2}. \tag{12}$$

12. Нормальное ускорение при вращении

При равномерном движении точки по окружности имеет место *центростремительное*, или *нормальное ускорение*, в результате которого точка, отклоняясь от движения по направлению касательной, получает равноускоренное движение по направлению к центру. Без этого ускорения тело продолжало бы двигаться прямолинейно (см. стр. 122).

Центростремительное ускорение равно:

$$w_n = \frac{v^2}{r}, \tag{13}$$

где v — линейная скорость точки, а r — ее расстояние от центра окружности (радиус вращения). Из формул (4) и (13) следует:

$$w_n = \omega^2 r. \tag{14}$$

13. Гармоническое колебание

Гармоническим колебанием называется движение, которое совершает по диаметру окружности основание перпендикуляра, опущенного на этот диаметр из точки, равномерно движущейся по окружности. *Периодом гармонического колебания* называется промежуток времени, в течение которого эта последняя точка опишет всю окружность; по истечении периода совершающая гармоническое колебание точка вернется в исходное положение и будет иметь ту же самую скорость, что в момент, соответствующий началу периода. Если ω — угловая скорость вращения радиуса, соединяющего центр окружности с движущейся по этой окружности точкой, то период колебания T равен $\frac{2\pi}{\omega}$.

II. СТАТИКА

14. Сила и ее изображение

По первому закону Ньютона (см. стр. 122) тело предоставленное самому себе, находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. Всякая причина, изменяющая это состояние, называется *силой*. Сила определяется своей величиной, направлением и точкой приложения. Величина силы практически измеряется в весовых единицах (граммах, килограммах, тоннах)[1]); направление совпадает с направлением того движения, которое данная сила сообщила бы телу, находившемуся до приложения силы в состоянии покоя. Сила графически изображается *вектором* — отрезком, начало которого находится в точке приложения силы; указываемое стрелкой направление совпадает с направлением силы, и длина представляет в некотором масштабе величину силы (AB на рис. 40). Точка приложения силы, действующей на твердое тело, может быть без изменения действия силы взята где угодно на прямой, совпадающей с направлением силы (так наз. *линии действия силы*).

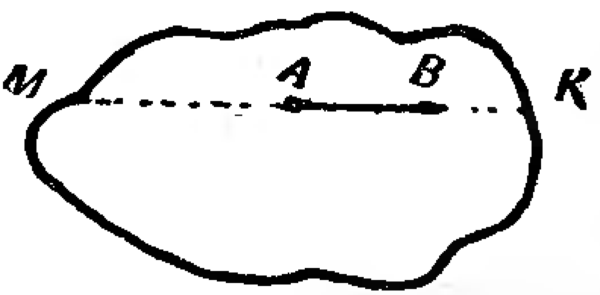


Рис. 40.

15. Равнодействующая сила

Равнодействующей силой двух или нескольких сил называется сила, могущая одна полностью заменить эти *составляющие силы*, т. е. произвести такое же изменение

[1]) О единице силы в системе CGS — дине см. стр. 122.

в состоянии равновесия или движения тела, что и все составляющие. Замена нескольких сил одной равнодействующей называется *сложением сил*. Если равнодействующая нескольких сил оказывается равной нулю, то эти силы не производят никакого действия — не изменяют состояния покоя или прямолинейного и равномерного движения — эти силы находятся в *равновесии*.

16. Правила сложения сил и законы их равновесия

1) Если силы *действуют по одной прямой* (имеют общую *линию действия*, рис. 41), то равнодействующая сила имеет ту же линию действия; по величине она равна разности между суммой величин сил, действующих в одну сторону, и суммой величин сил, действующих в другую сторону; направлена она в ту сторону, где эта сумма больше.

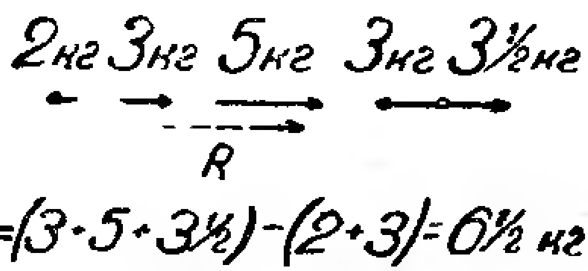


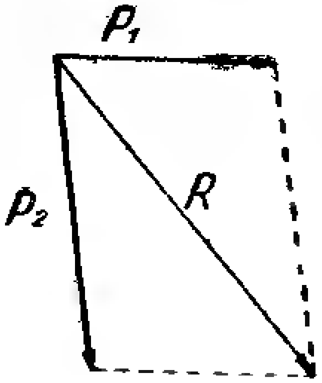
Рис. 41.

Для равновесия таких сил необходимо, чтобы суммы величин сил, действующих в одну сторону, равнялась сумме величин сил, действующих в другую сторону; если таких сил две, то они только тогда находятся в равновесии, когда равны по величине и направлены в противоположные стороны.

2) Если две силы приложены в одной точке и *расположены под углом* друг к другу (рис. 42), то равнодействующая по величине и направлению изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах,

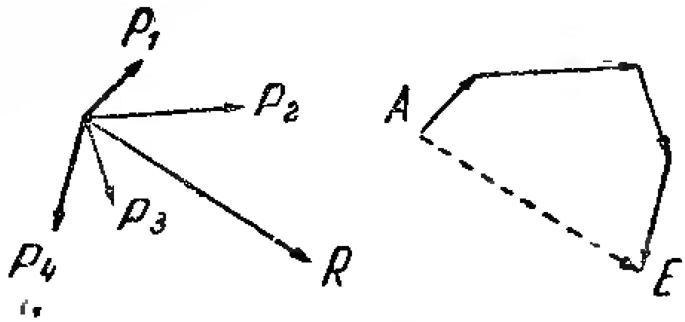
изображающих складываемые силы (закон *параллелограмма сил*).

Такие две силы никогда не могут быть в равновесии.



R-равнод P_1 и P_2

Рис. 42.



Р-равнод P_1, P_2, P_3 и P_4

Рис. 43.

3) Если в одной точке приложены три и больше силы (рис. 43), то для получения их равнодействующей следует из векторов составляющих сил P_1, P_2, P_3, P_4... построить ломаную линию; ее замыкающая (AE на рис. 43) представит по величине и направлению равнодействующую силу.

Для равновесия таких сил ломаная должна замкнуться («замыкающая должна равняться нулю»). В случае трех сил они должны образовать треугольник (рис. 44).

Рис 44.

4) Если две силы *параллельны* и направлены в *одну сторону* (рис. 46), то равнодействующая сила по величине равна сумме величин составляющих сил, направлена в ту же сторону и делит прямую, соединяющую точки приложения составляющих сил, обратно пропорционально их величинам.

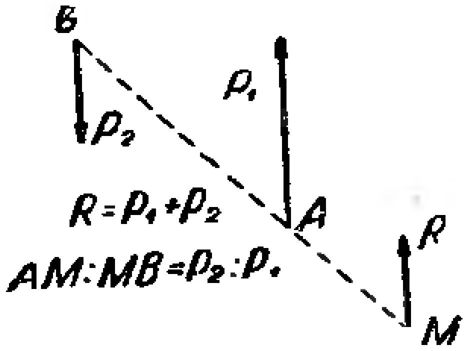


Рис 45.

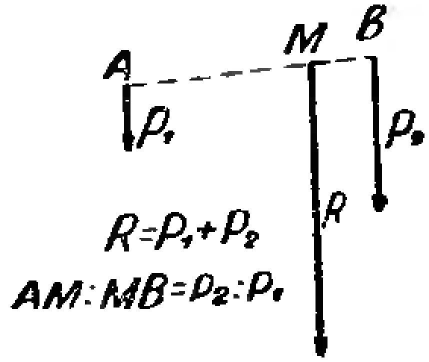


Рис. 46.

Такие силы никогда не могут быть в равновесии.

5) Если две силы *параллельны* и направлены *в противоположные стороны* (рис. 45), то равнодействующая сила по величине равна разности величин составляющих сил, направлена в сторону большей и делит прямую, соединяющую точки приложения составляющих сил, внешним образом обратно пропорционально их величинам.

Такие силы также никогда не могут быть в равновесии. Если силы P_1 и P_2 равны по величине и противоположно направлены, то они не имеют равнодействующей, но производят вращательное движение тела. Такие две силы образуют так называемую *пару сил*.

6) Если имеется несколько параллельных сил (рис. 47), то их равнодействующая будет также параллельна им и по величине равна разности между суммой сил, действующих в одну сторону, и суммой сил, действующих в другую сторону (как и в случае 1). Она приложена в такой точке, относительно которой сумма моментов[1]) всех составляющих сил равна нулю.

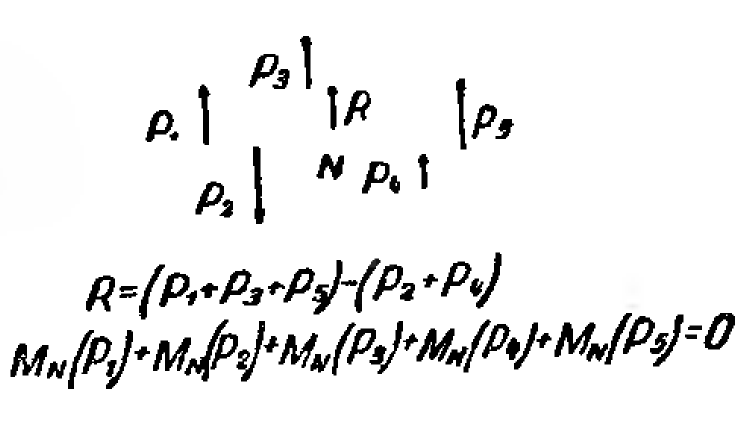


Рис. 47.

[1]) О моментах сил см. стр. 118.

Для равновесия таких сил необходимо, чтобы сумма величин сил, действующих в одну сторону, равнялась сумме величин сил, действующих в другую сторону, и кроме того, чтобы сумма их моментов относительно любого центра равнялась нулю; в противном случае они могут образовать пару сил.

17. Момент силы

Моментом силы около данной точки (*центра моментов*) называется произведение величины P этой силы на длину перпендикуляра p (*плечо*), опущенного из центра моментов на линию действия этой силы (рис. 48):

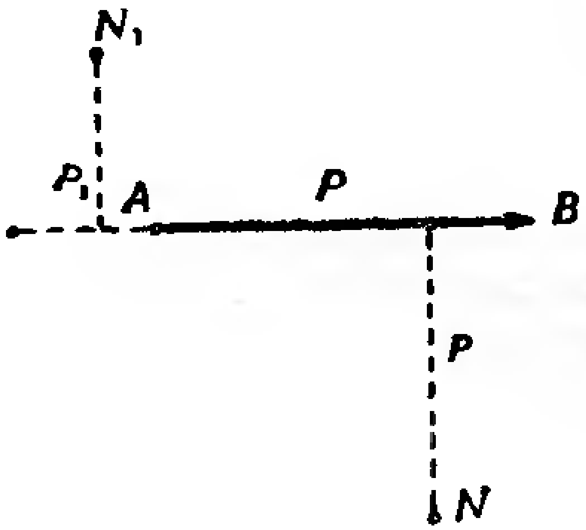


Рис. 48.

$$M = P \cdot p \tag{15}$$

Момент измеряет вращательное действие данной силы P вокруг закрепленного центра моментов и имеет положительный или отрицательный знак в зависимости от того, стремится ли он вращать вокруг центра моментов по стрелке часов (как, например, около точки N) или против стрелки часов (как, например, около точки N_1).

18. Теоремы о моментах

Момент равнодействующей силы равняется сумме моментов составляющих сил (*теорема Вариньона*). Для того чтобы твердое тело с одной неподвижной точкой опоры находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно этой точки равнялась нулю.

19. Центр тяжести

Центром тяжести данного тела называется точка приложения равнодействующей весов всех частиц, составляющих данное тело (точнее — точка пересечения линий действия равнодействующих сил веса при различных положениях тела относительно вертикали). Если $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — веса этих частиц, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — расстояния их до некоторой плоскости, то расстояние x_0 центра тяжести тела до той же плоскости выразится формулой:

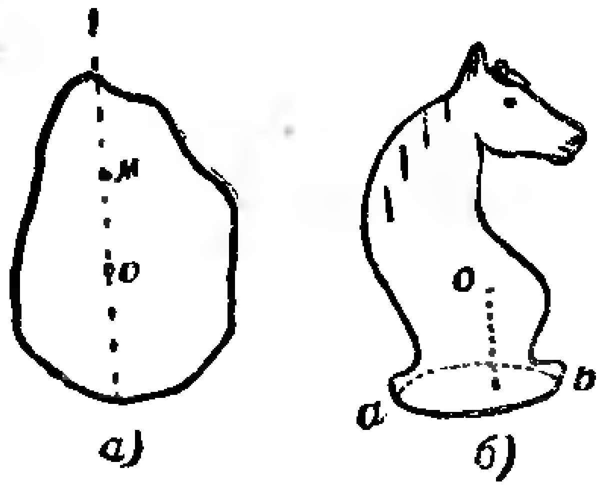


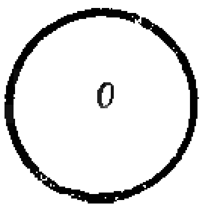
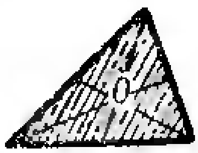
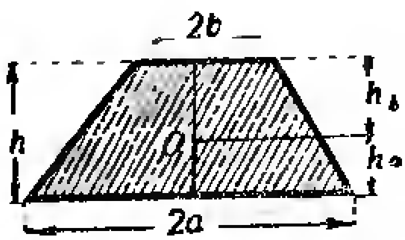
Рис. 49.

$$x_0 = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}. \tag{16}$$

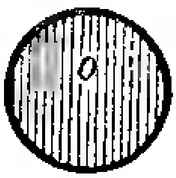
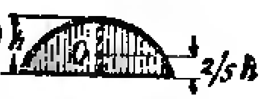
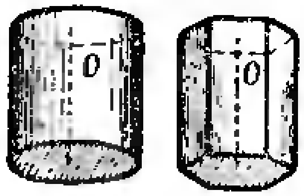
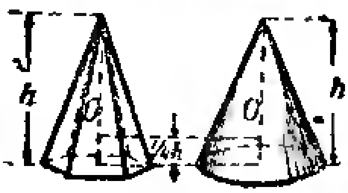
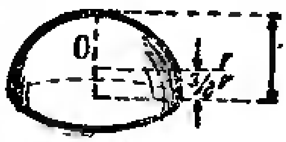
В случае равновесия тяжелого тела вертикаль, проведенная через центр тяжести, должна пройти через точку опоры M (рис. 49, *а*) или внутри контура, образованного крайними точками опоры тела (рис. 49, *б*).

Если в положении равновесия центр тяжести занимает наивысшее положение, то равновесие будет *неустойчивым*, если наинизшее, то — *устойчивым*; наконец, если при небольших отклонениях от положения равновесия высота центра тяжести не меняется, то равновесие будет *безразличным*. Пример: равновесие шара на выпуклой поверхности, на вогнутой и на плоскости.

20. Центры тяжести простых геометрических фигур и тел

Чертеж	Положение центра тяжести (0)
а) 	*а) Отрезка прямой* — в его середине.
б) 	*б) Окружности* — в ее центре.
в) 	*в) Треугольника* — в точке пересечения его медиан.
г) 	*г) Параллелограмма*—в точке пересечения его диагоналей.
 д) Рис.50. *(а — д).*	*д) Трапеции* — 1) на прямой, соединяющей середины оснований, 2) на расстоянии $h_a = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$ от основания a и на расстоянии $h_b = \frac{h}{3} \cdot \frac{b+2a}{a+b}$ от основания b.

Продолжение

Чертеж	Положение центра тяжести (0)
е) 	*е) Круга* — в его центре.
ж) 	*ж)* Небольшого *сегмента* — на оси его симметрии, на расстоянии $^2/_5\ h$ от основания.
з) 	*з) Призмы* и *цилиндра* — на середине прямой, соединяющей центры тяжести верхнего и нижнего оснований.
и) 	*и) Пирамиды* и *конуса* — на прямой, соединяющей центр тяжести основания с вершиной на расстоянии $^1/_4$ этой прямой от основания.
к) 	*к) Шара* — в его центре.
л)  Рис. 50 *(е — л)*.	*л) Полушария* — на оси его симметрии, на расстоянии $^3/_8$ радиуса от центра шара.

III. ДИНАМИКА

21. Основные законы динамики (законы Ньютона)

1) Всякое тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока этому не воспрепятствуют внешние действующие на тело силы (*закон инерции*).

2) Ускорение, сообщаемое телу данной силой, прямо пропорционально величине этой силы и обратно пропорционально массе тела.

3) Всякое действие одного тела на другое равно по величине и прямо противоположно по направлению противодействию второго тела, приложенному к первому (*закон равенства действия и противодействия*).

22. Основное уравнение динамики

Сила (F) равна произведению массы (m) на ускорение (w)

$$F = mw \tag{17}$$

23. Единицы силы

Из формулы (17) вытекает определение единицы силы в системе CGS. За единицу силы — 1 *дину* — принимается сила, которая придает массе = 1 грамму ускорение, равное 1 *см/сек*^{2}. Если в формуле (17) m выражено в граммах, а w в *см/сек*^{2}, то сила F будет выражаться в динах.

Другая, практическая единица силы — 1 *грамм-сила* или 1 *грамм-вес* (обозначение $Г$) есть сила, с которой масса, равная 1 грамму, притягивается к земле (иначе —

сила веса). При этом ускорение равно $g = 981$ *см/сек²*. Отсюда следует, что обе единицы силы — грамм-сила и дина — могут быть выражены одна через другую соотношением:

$$1\,Г = 981 \text{ дине.}$$

24. Центростремительная сила

Центростремительной силой называется сила (F), необходимая для равномерного движения по окружности радиуса R со скоростью v. Если масса движущегося тела равна m, то

$$F = \frac{mv^2}{R}. \tag{18}$$

25. Работа

Сила F, передвигающая тело по некоторому пути s, производит работу. В простейшем случае, если направления силы F и перемещения s совпадают, работа A является просто произведением силы на путь:

$$A = Fs. \tag{19}$$

26. Единицы работы

Если сила F выражена в килограммах, а путь s — в метрах, то работа A выражается в *килограммометрах (кГм)*. 1 *кГм* принимается за практическую единицу работы. Это — работа, которую нужно затратить, чтобы поднять груз в 1 *кГ* на высоту 1 *м*.

Единицей работы в системе *CGS* является *эрг*, равный работе одной дины на перемещении в один *см*. На практике пользуются еще *джоулем* $= 10^7$ *эргов* или $^1/_{10}$ (точнее $^1/_{9,81}$) *кГм*.

27. Выражение работы, если направление силы не совпадает с направлением пути

Если сила F действует не по направлению пути s, по которому передвигается тело, а образует с ним угол α, то величина работы определяется формулой

$$A = Fs \cos \alpha. \tag{20}$$

(Величина работы равна произведению величины силы на путь и на косинус угла между направлением пути и направлением силы.)

28. Живая сила

Кинетической энергией или *живой силой* движущегося тела называется произведение половины массы тела на квадрат его скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{21}$$

(Следует помнить, что эта величина не является силой — здесь может ввести в заблуждение сходство названий!)

Приращение кинетической энергии движущегося тела равно работе действующих на это тело сил (*теорема живых сил*):

$$\frac{mv_2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A. \qquad (22)$$

29. Мощность

Способность двигателя произвести определенную работу в некоторый промежуток времени определяется его *мощностью*. Мощность измеряется отношением выполненной работы к соответствующему промежутку времени (работа в единицу времени):

$$W=\frac{A}{t}. \qquad (23)$$

30. Единицы мощности

Практическими единицами мощности являются: *лошадиная сила* — 1 *ЛС* (или 1 *HP*) (также не путать с силой!), производящая в одну секунду работу в 75 *кГм*, *ватт* (джоуль в секунду) и *киловатт* (*квт*) = 1 000 *ватт*. Эти единицы связаны между собой соотношением:

$$1\ ЛС\ (1\ HP)=0{,}736\ квт.$$

Единица мощности в системе *CGS* — 1 *эрг в секунду* — специального названия не имеет.

31 Коэффициент полезного действия

В каждом двигателе значительная часть мощности уходит не на полезную работу, а на преодоление внутреннего сопротивления двигателя (трение и т. п.). Таким образом, полезная мощность двигателя всегда меньше его полной мощности. *Коэффициентом полезного действия* η называется отношение полезной мощности $W_{\text{пол}}$ к общей величине затраченной мощности W:

$$\eta = \frac{W_{\text{пол}}}{W}. \tag{24}$$

32. Момент инерции

При изучении вращения тела вокруг некоторой оси большое значение имеет *момент инерции* этого тела. Моментом инерции тела относительно данной оси ab называется сумма произведений масс $m_1, m_2, m_3 \ldots$ всех частиц этого тела на квадраты расстояний $r_1, r_2, r_3 \ldots$ этих частиц до оси ab:

$$I_{ab} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots \tag{25}$$

В формуле (25) слагаемых — бесконечное множество, и такая сумма вычисляется методами высшей математики (интегральное исчисление).

33. Моменты инерции простейших тел

Момент инерции *прямоугольника* (рис. 51) относительно оси симметрии $AB = 2a$ равен $\frac{mb^2}{3}$ [1]), где $2b$ — длина другой оси CD.

Момент инерции *круга* (рис. 52) радиуса R относительно его диаметра AB равен $\frac{mR^2}{4}$, а относительно оси

---

[1]) m здесь и ниже — масса тела.

CD, перпендикулярной к плоскости круга и проходящей через его центр, равен $\frac{mR^2}{2}$.

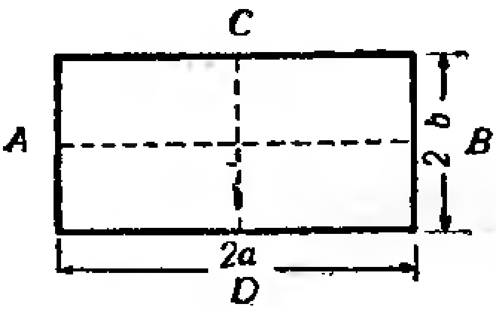


Рис. 51.

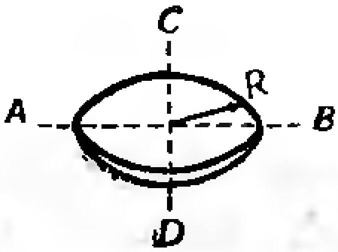


Рис. 52.

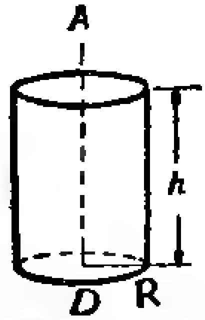


Рис. 53.

Момент инерции *цилиндра* (рис. 53) относительно его оси равен $\frac{mR^2}{2}$.

34. Живая сила при вращении

Живая сила вращающегося тела вычисляется по формуле

$$T = \frac{I\omega^2}{2}, \tag{26}$$

где ω — угловая скорость вращения, а I — момент инерции тела относительно оси вращения.

35. Законы трения

1) Трение, возникающее при скольжении одного тела по другому (*трение скольжения* или *трение* I *рода*), значительно больше трения при перекатывании одного тела по другому (*трение качения* или *трение* II *рода*).

2) Сила трения I рода F не зависит от величины трущихся поверхностей, а только от качества поверхностей трущихся тел и от силы, сжимающей трущиеся поверхности (*нормальной реакции*) и направленной перпендикулярно к ним (см. рис. 54, *а*):

$$F = kN, \tag{27}$$

где F — сила трения, N — величина нормальной реакции и k — *коэффициент трения при скольжении (коэффициент трения I рода)*.

3) Сила трения II рода F прямо пропорциональна нормальному давлению P и обратно пропорциональна радиусу r перекатываемого круглого тела (рис. 54, *б*), если движущая сила горизонтально направлена и приложена к центру круглого тела:

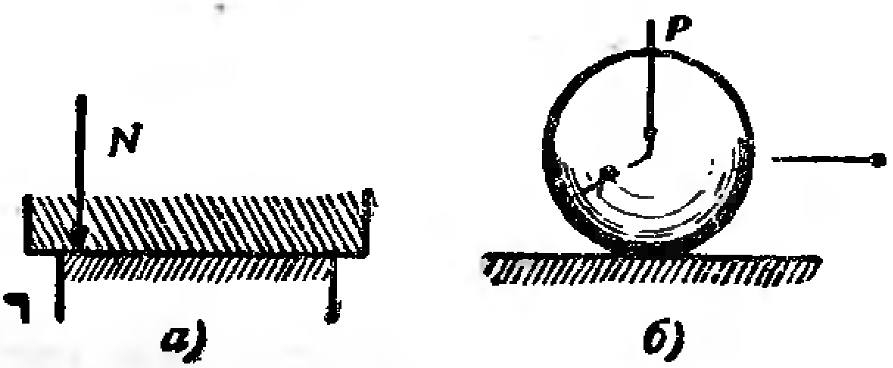


Рис. 54.

$$F = \frac{fP}{r}, \tag{28}$$

где F — сила трения, P — нормальное давление, r — радиус перекатываемого тела, а f — *коэффициент трения при качении*.

4) Для трения I рода в момент начала движения величина силы трения (*трение покоя*) несколько больше силы трения при уже установившемся движении.

36. Коэффициенты трения некоторых тел

1) Коэффициенты трения при скольжении

а) В движении

Название трущихся веществ	k
Чугун по чугуну	0,21
Чугун по железу	0,18
Железо по железу	0,44
Дуб по дубу (параллельно волокнам)	0,34
Дуб по дубу (перпендикулярно волокнам)	0,48
Ремень по дубовому шкиву	0,27
Ремень по чугунному шкиву	0,30
Сталь по льду	0,014

б) В покое

Название трущихся веществ	k
Чугун по железу	0,28 до 0,33
Дуб по дубу (параллельно волокнам)	0,54
Дуб по дубу (перпендикулярно волокнам)	0,62
Ремень по дубовому шкиву	0,47
Сталь по льду	0,027

2) Коэффициенты трения при качении

Название трущихся веществ	f — в *см*
Чугун по дереву	0,046
Железо по железу	0,05
Резиновая шина по шоссе	0,24

ФИЗИКА[1])

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Масса и вес

О *массе* тела, как мере количества заключающегося в нем вещества, судят по весу: для данного места Земли масса пропорциональна весу. За единицу массы принимают 1 *грамм* — массу 1 *см*^{3} воды при 4°C.

Вес тела — сила, с которой Земля притягивает к себе тело; эту силу определяют посредством пружинных весов.

2. Удельный вес

Удельным весом (d) вещества называется вес этого вещества (в *Г*) в объеме одного кубического сантиметра. Так как 1 *см*^{3} воды весит 1 *Г*, то за единицу удельного веса принимают удельный вес воды.

3. Плотность

Плотностью вещества называется масса этого вещества (в *г*) в объеме одного кубического сантиметра. Так как 1 *см*^{3} воды имеет массу 1 *г*, то за единицу плотности принимают плотность воды.

---

[1]) Вопросы механики выделены в специальный отдел „Справочника“ (стр. 106—130).

4. Таблицы удельных весов (плотностей) употребительных веществ

А. Удельный вес (плотность) (d) твердых веществ (в $Г/см^3$ или $г/см^3$)

Вещество	Среднее значение d	Вещество	Среднее значение d
Алмаз	3,52	Медь литая	8,8
Алюминий (химически чистый)	2,58	Медь вальцованная или кованая	8,95
Асбест	2,3	Медь электролитическая	8,92
Асфальт	1,2	Мел	2,4
Баббит белый	7,1	Мрамор	2,7
Береза сухая	0,72	Нейзильбер	8,55
Бетон	2,25	Никелин	8,77
Бронза (медь+олово, от 22 до 4% олова)	8,8	Никель	8,8
Бук сухой	0,73	Олово литое	7,23
Бумага писчая	0,92	Парафин	0,9
Глина сухая	1,38	Песок сухой	1,5
Гранит	2,65	Платина	21,5
Графит	2,10	Пробка	0,24
Дуб сухой	0,80	Свинец	11,4
Ель сухая	0,60	Сера	2,0
Железо (химически чистое)	7,86	Серебро	10,5
Золото	19,3	Сосна сухая	0,48
Каменный уголь (в кусках)	1,35	Сталь литая	7,86
Кирпич	1,5	Стекло оконное	2,55
Латунь литая	8,45	Строительные камни	2,5
Латунь кованая	8,55	Фарфор	2,32
Лед	0,9	Цемент	1,38
Липа сухая	0,45	Цинк	7,05
Масло коровье	0,91	Чугун	7,0
		Эбонит	1,5

Б. Удельный вес жидкостей

Вещество	При температуре °C	d в $г/см^3$
Азотная кислота (91% HNO_3)	15	1,50
Бензин	15	0,68—0,70
Вода чистая	4	1
Вода морская	15	1,02—1,03
Древесный спирт	0	0,80
Керосин	15	0,79—0,82
Масло минеральное (смазочн.)	20	0,90—0,93
Молоко коровье цельное	15	1,032
Молоко коровье снятое	15	1,028
Нефть	19	0,76
Раствор медного купороса с 15% соли	15	1,10
Ртуть	0	13,59
Серная кислота 30%	15	1,20
Скипидар	15	0,855
Соляная кислота 10%	15	1,05
Спирт этиловый безводный	18	0,791
Эфир этиловый	20	0,714

В. Плотность газов

Вещество	Плотность в $г/см^3$ при 0°C и 760 *мм*	Плотность по отношению к воздуху
Воздух	0,001293	1
Водород	0,00008988	0,069
Гелий	0,0001785	0,138
Кислород	0,001429	1,11
Углекислота (угольный ангидрид)	0,001977	1,53

II. ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ

5. Давление

Отношение $\frac{Q}{S}$, где Q нормальная к поверхности S и равномерно по ней распределенная давящая сила, называется *давлением* (p); численно отношение $\frac{Q}{S}$ соответствует силе, приходящейся на единицу поверхности:

$$p = \frac{Q}{S}, \tag{1}$$

$$Q = p \cdot S. \tag{1a}$$

За единицу давления на практике принимают 1 $кГ/см^2$, т. е. давление силы в 1 $кГ$, действующей на площадку в 1 $см^2$.

Давление выражают также в *нормальных атмосферах* (см. стр. 138).

6. Закон Паскаля

Для жидкостей и газов имеет место следующий *закон Паскаля.*

«Если оказывать извне давление на жидкость или газ, то это давление передается во все стороны одинаково», т. е. каждый $см^2$ площадки, как бы она ни была расположена внутри жидкости или газа, будет испытывать с обеих сторон равные давления p (рис. 55).

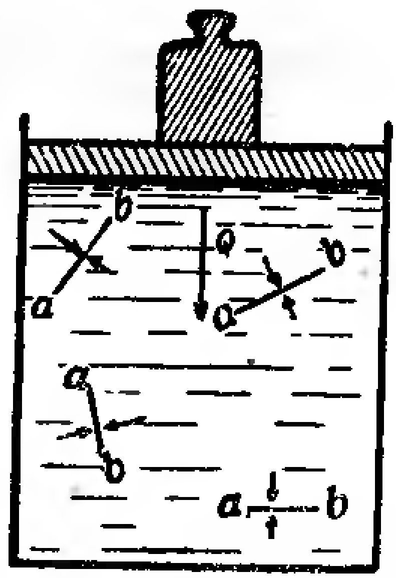


Рис. 55.

7. Давление жидкости на дно сосуда

На основании закона Паскаля, жидкость благодаря своему весу будет давить как на дно сосуда, в который налита, так и на его боковые стенки перпендикулярно к ним. Давление на дно сосуда зависит от глубины h дна (глубина отсчитывается по вертикали от уровня жидкости) и от удельного веса d жидкости и выражается формулой:

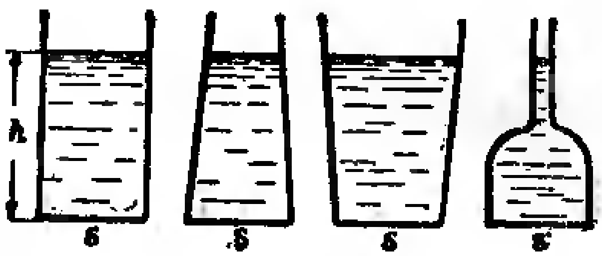


Рис. 56.

$$p = h \cdot d. \qquad (2)$$

Если площадь дна равна S кв. единицам, то давящая на него сила Q выразится [см. формулу (1а)] так:

$$Q = p \cdot S = h \cdot S \cdot d. \qquad (3)$$

Эта сила зависит только от высоты уровня жидкости, площади дна и удельного веса жидкости и не зависит от формы сосуда. Таким образом, давления одной и той же жидкости на дно сосудов, изображенных на рис. 56, одинаковы.

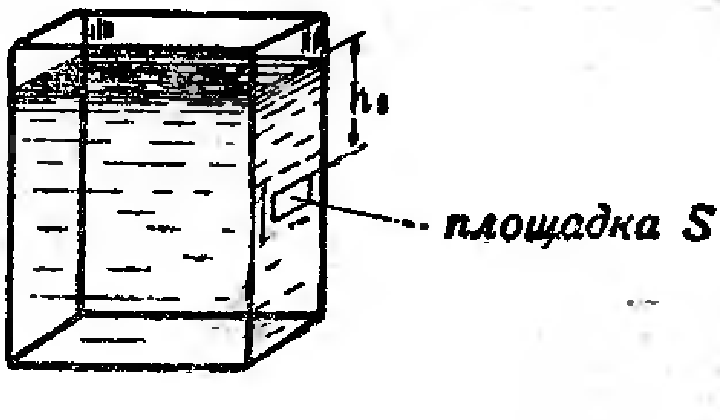


Рис. 57.

8. Давление жидкости иа боковую стеику

Тот же закон имеет место и для *давления на площадку боковой стенки* сосуда (рис. 57):

$$Q = h_1 \cdot S \cdot d, \qquad (3а)$$

где h_1 — средняя глубина площадки.

9. Законы сообщающихся сосудов

В *сообщающихся сосудах* независимо от их формы однородная жидкость устанавливается на одном уровне mn (рис. 58, *а*), высоты же h_1 и h_2 уровней разнородных жидкостей (считая от общего уровня их касания) (рис. 58,*б*)

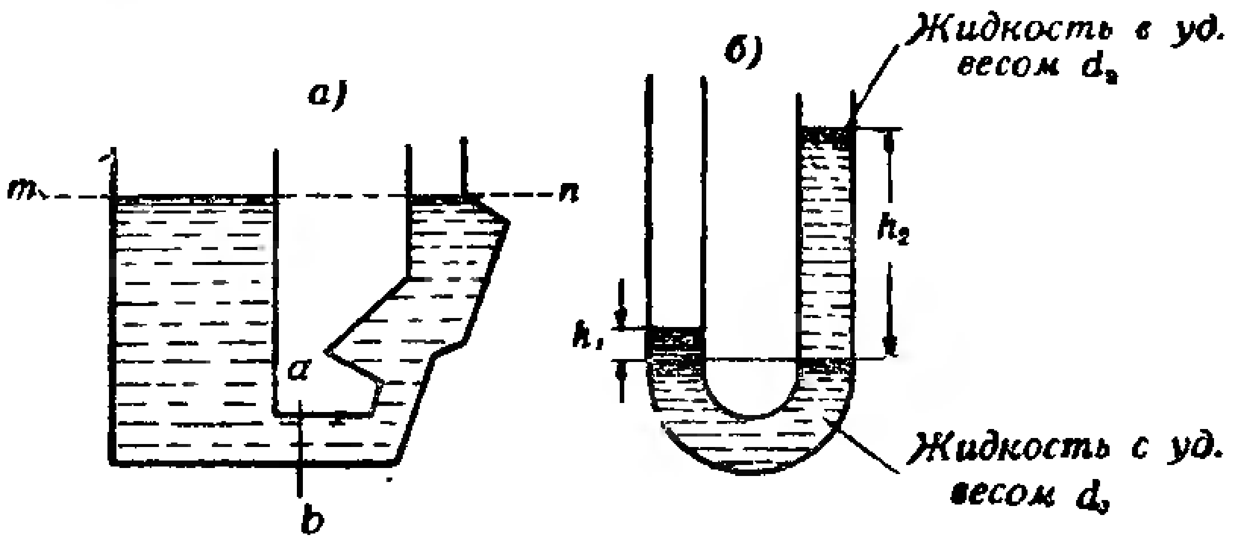


Рис. 58.

обратно пропорциональны их удельным весам d_1 и d_2, т. е.

$$h_1 : h_2 = d_2 : d_1. \tag{4}$$

10. Закон Архимеда

Так как любая площадка внутри жидкости испытывает давление по нормали (перпендикуляру) к ней, то и тело, погруженное в жидкость, будет также испытывать со стороны прилегающей к нему жидкости нормальное давление со всех сторон: с боков и сверху вниз, и снизу вверх (рис. 59). Но давление h_1d снизу больше давления h_2d сверху; поэтому всякое погруженное в жидкость тело будет последней выталкиваться снизу вверх с некоторой

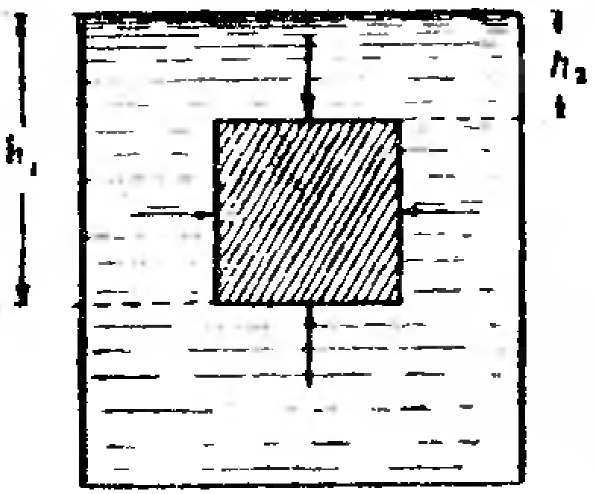


Рис. 59.

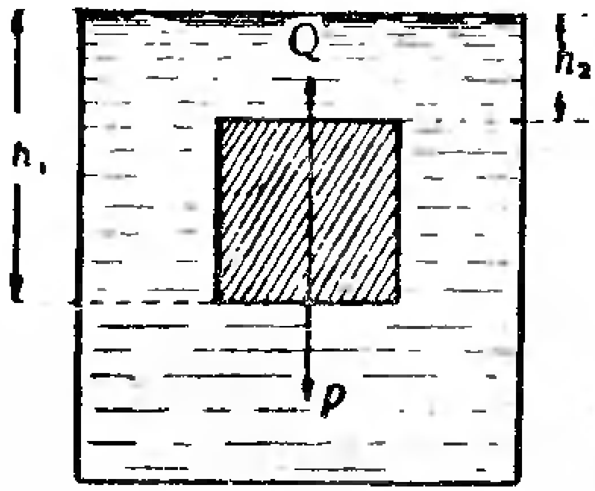


Рис. 60.

силой Q; эта сила равна весу вытесненной телом жидкости (*закон Архимеда*):

$$Q = vd, \tag{5}$$

где v — объем тела.

11. Плавание тел

На тело в жидкости будут действовать две силы (рис. 60); сила веса тела P, направленная вертикально вниз, и сила давления Q жидкости, направленная вертикально вверх; равнодействующая R этих сил равна их разности и направлена в сторону большей. Поэтому находящееся в жидкости тело может тонуть, если $P > Q$, всплывать на поверхность, если $P < Q$, и быть в равновесии, если $P = Q$. Плавающее тело погружено некоторой своей частью в жидкость; погруженная часть вытесняет по весу жидкости столько, сколько весит все тело.

12. Закон Паскаля для газов

Так как закон Паскаля применим и к *газам*, то к газам применимы и все указанные выше следствия из этого закона, в частности закон Архимеда.

13. Давление атмосферы

Окружающая Землю воздушная оболочка (*атмосфера*) благодаря своему весу давит на тело по закону Паскаля со всех сторон одинаково. Величина давления атмосферы с высотой уменьшается. Давление атмосферы на уровне моря называется *нормальным*, если оно уравновешивает вертикальный столб ртути высотой в 76 *см*.

Если удельный вес ртути $d = 13{,}6\ Г/см^3$, то величина нормального давления

$$p = 13{,}6\ Г/см^3 \cdot 76\ см = 1033\ Г/см^2$$

или

$$p = 1{,}033\ кГ/см^2.$$

Полученную величину называют *нормальной атмосферой*.

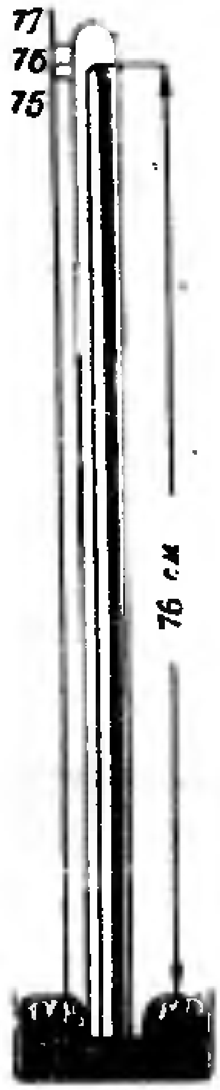


Рис. 61.

14. Барометр

Атмосферное давление измеряется *барометром*. Простейшая схема ртутного барометра изображена на рис. 61.

15. Закон Бойля-Мариотта

Газы подчиняются следующему *закону Бойля-Мариотта*: «объем, занимаемый одной и той же массой газа при неизменной температуре, обратно пропорционален давлению, под которым газ находится»:

$$v_1 : v_2 = p_2 : p_1, \tag{6}$$

или: «для данного количества газа при одной и той же температуре произведения их объемов газа на соответствующие им давления будут равны между собой, т. е. эти произведения дадут постоянную (одну и ту же) величину»:

$$v_1 p_1 = v_2 p_2 = \text{const}, \tag{6a}$$

где v_1 и v_2 — объемы газа, а p_1 и p_2 — соответствующие им давления. Так как объемы v_1 и v_2 одной и той же массы газа при неизменной температуре обратно пропорциональны удельным весам газа d_1 и d_2, т. е. $v_1 : v_2 = d_2 : d_1$, то

$$p_2 : p_1 = d_2 : d_1, \tag{7}$$

т. е. удельные веса одного и того же газа при одной и той же температуре, но при различных давлениях пропорциональны давлениям.

III. ТЕПЛОТА

16. Измерение температуры

Для измерения степени нагретости тела (или иначе, *температуры* тела) в подавляющем большинстве стран принят термометр со *шкалой Цельсия* (С). Постоянными точками этой шкалы являются: точка таяния льда — обозначена 0° — и точка кипения воды при нормальном давлении — обозначена 100°. В Англии и в Америке принята *шкала Фаренгейта* (F): точка таяния льда обозначена цифрой 32°, точка кипения воды цифрой 212°. Шкала между точками таяния льда и кипения воды у Цельсия разделена на 100 равных частей — градусов, у Фаренгейта на 212—32=180 частей[1]). Градусы Цельсия и Фаренгейта переводятся друг в друга по следующим формулам:

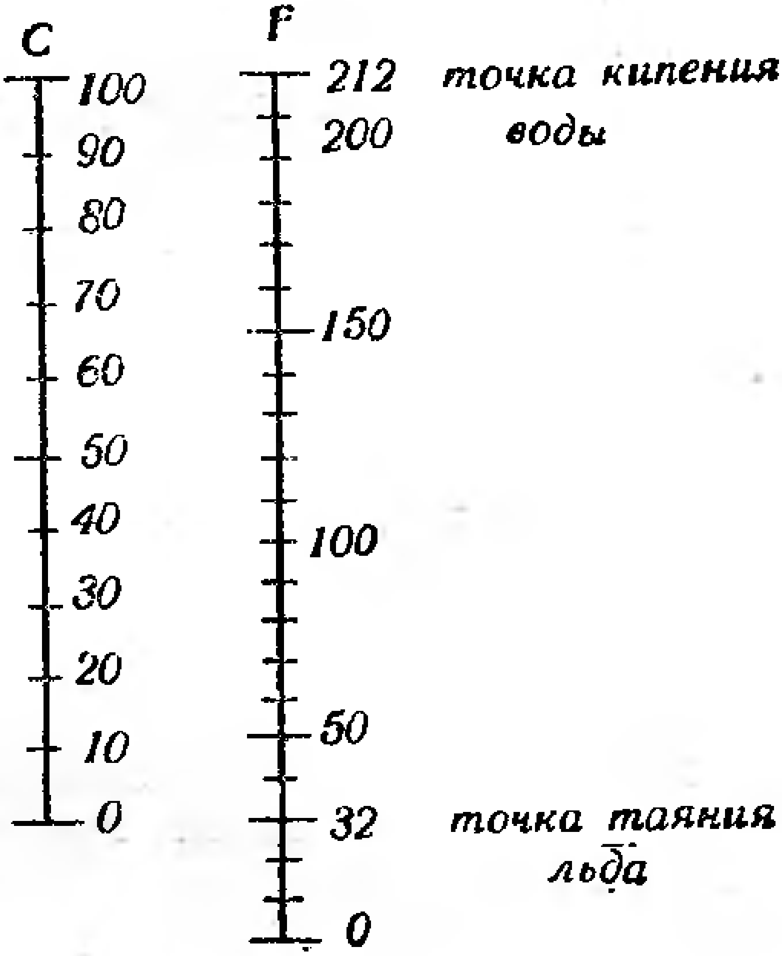


Рис. 62.

$$t^\circ \text{ Цельсия} = \left(\frac{9}{5}t + 32\right)^\circ \text{F} \qquad (8)$$

---

[1]) Реже встречается *шкала Реомюра (R)*, в которой точка таяния льда обозначена через 0°, но промежуток между точками таяния льда и кипения воды разделен на 80°.

$$t^\circ \text{ Реомюра} = \frac{5}{4}\, t^\circ C = \left(\frac{9}{4}\, t + 32\right)^\circ F.$$

и

$$t^\circ \text{ Фаренгейта} = (t - 32)\frac{5}{9}\,^\circ\text{C}. \qquad (8a)$$

Сравнительные шкалы обеих систем изображены на рис. 62.

17. Линейное расширение при нагревании

Коэффициент линейного расширения (α) какого-либо вещества определяет, на какую долю увеличивается единица длины этого вещества, если его нагревать на один градус С. Поэтому полное удлинение k стержня, нагретого на t°, выразится формулой $k = \alpha l_0 t$, а вся длина стержня:

$$l = l_0\,(1 + \alpha t), \qquad (9)$$

где l_0 — начальная длина стержня.

18. Объемное расширение при нагревании

Прирост единицы объема вещества, когда оно нагревается на один градус С, называется *объемным* (или *кубическим*) *коэффициентом расширения* (β). Формула, выражающая объем v какого-либо тела, нагретого на t°, имеет вид:

$$v = v_0\,(1 + \beta t), \qquad (10)$$

где v_0 — начальный объем тела.

Коэффициент β объемного расширения вещества в три раза больше коэффициента линейного расширения:

$$\beta = 3\alpha. \qquad (11)$$

При определении расширения жидкостей и газов принимают во внимание только объемный коэффициент.

19. Таблицы коэффициентов расширения

а) Коэффициенты расширения твердых веществ (большею частью между температурами 0° и 100°)

Вещество	Коэффициент линейного расширения (α)	Коэффициент объемного расширеиия (β)
Алюминий	0,0000238	0,0000714
Бронза	0,0000175	0,0000525
Железо		
„ литое	0,0000120	0,0000360
Золото	0,0000142	0,0000426
Инвар [1]	0,0000015	0,0000045
Латунь	0,0000184	0,0000552
Медь	0,0000165	0,0000495
Никель	0,0000128	0,0000384
Олово	0,0000267	0,0000801
Платина	0,0000090	0,0000270
Свинец	0,0000292	0,0000876
Серебро	0,0000197	0,0000591
Сталь	0,000011	0,000033
Стекло различных сортов	от 0,000004 до 0,00001	от 0,000012 до 0,00003
Фарфор	0,000003	0,000009
Цемент	0,000014	0,000042
Цинк	0,0000286	0,0000858
Чугун	0,0000104	0,0000312

[1] Никелевая сталь, содержащая 36,1% никеля, 0,39% углерода, 0,39% марганца. Замечательна среди металлов малостью коэффициента расширения.

б) Коэффициенты расширения жидкостей (большей частью при обыкновенной температуре)

Вещество	Коэффициент объемного расширения (β)
Керосин	0,0010
Ртуть	0,000182
Серная кислота	0,00056
Спирт	0,00110
Эфир	0,00166

20. Закон Гей-Люссака

Все газы имеют при постоянном давлении один и тот же коэффициент расширения: при нагревании на 1°С газы расширяются при неизменном давлении примерно на $\frac{1}{273}$ часть того объема, какой они занимали при 0°С (*закон Гей-Люссака*):

$$v_1 = v_0\left(1 + \frac{1}{273}t_1\right), \tag{12}$$

где v_1 — объем газа при температуре t_1°С, v_0 — объем при 0°С, t_1 — температура, до которой нагрет газ.

21. Зависимость давления от температуры

Если газ нагревать в закрытом сосуде, т. е. при неизменном объеме, то давление газа увеличивается примерно также на $\frac{1}{273}$ долю того давления, какое имел бы газ при 0°С. Давление газа p_1 при температуре t_1 выразится формулой

$$p_1 = p_0\left(1 + \frac{1}{273}t_1\right), \qquad (13)$$

где p_0 — давление данной массы газа при 0°С

22. Абсолютная температура

Если температура газа будет понижаться, то давление газа будет делаться меньше. Если бы газ был охлажден до — 273°С, то по формуле (13) давление газа равнялось бы нулю. Такая температура носит название *абсолютного нуля;* абсолютный нуль лежит на 273° (точнее, на 273° 16′) ниже условного нуля — точки таяния льда (0°С).

Температура T, отсчитанная не от точки таяния льда, а от абсолютного нуля равна

$$T = 273 + t \qquad (14)$$

(где t — в градусах С) и носит название *абсолютной температуры* тела.

23. Закон Бойля-Мариотта — Гей-Люссака

Если газ, занимавший при 0° объем v_0 под давлением p_0, будет нагрет до t_1°С и будет занимать некоторый объем v_1 под давлением p_1, то имеет место следующий *закон Бойля-Мариотта — Гей-Люссака:*

$$\frac{v_1 p_1}{1 + \beta t_1} = v_0 p_0 = \text{const}, \qquad \mathbf{(15)}$$

т. е. «для данной массы газа произведение его объема на давление, деленное на соответствующее выражение $1 + \beta t_1$ *(бином расширения)*, есть величина постоянная».

24. Уравнение Клапейрона

Если температуру t по шкале Цельсия в формуле (15) заменить температурой T по абсолютной шкале, то формула (15) примет вид:

$$\frac{v_1 p_1}{T_1} = \frac{v_0 p_0}{T_0} = \text{const}, \tag{16}$$

это — *уравнение Клапейрона:* «для данной массы газа произведение его объема на давление, деленное на абсолютную температуру газа, есть величина постоянная».

25. Единицы теплоты

Количество теплоты измеряется в *больших калориях*, или *килокалориях (ккал)* и в *малых калориях*, или просто *калориях (кал)*. Килокалория — количество теплоты, необходимое для нагревания одного килограмма воды на 1°C (от 14,5°C до 15,5°C); калория — количество теплоты, необходимое для нагревания одного грамма воды на 1°C:

$$1 \textit{ ккал} = 1000 \textit{ кал}.$$

26. Теплоемкость

Теплоемкостью данного тела называется количество теплоты, необходимое для нагревания этого тела на 1°C.

Удельной теплоемкостью вещества называется количество теплоты в *ккал*, необходимое для нагревания одного *кг* вещества на 1°C (или — количество теплоты в *кал*, необходимое для нагревания 1 *г* вещества на 1°C).

27. Таблица теплоемкостей употребительных веществ

Из определения килокалории и калории следует, что удельная теплоемкость воды равна 1 *кал/г-град*. Удельные теплоемкости наиболее употребительных твердых и жидких веществ указаны в таблице[1]):

Вещество	Удельная теплоемкость (c)	Вещество	Удельная теплоемкость (c)
Алюминий . .	0,21	Платина	0,032
Графит	0,2	Пробка	0,49
Железо	0,11	Ртуть	0,033
Золото	0,031	Свинец	0,031
Керосин . . .	0,51	Серебро	0,055
Кирпич . . . . (между 0° и 100°)	0,19—0,24	Спирт	0,58
Латунь	0,093	Сталь	0,11
Лед (от — 40° до 0°)	0,43	Стекло	0,20
Медь	0,091	Цемент . . . (около 35°) .	0,19
Олово	0,052	Цинк	0,092
Парафин . . .	0,77	Чугун (от 0° до 100°) . . .	0,13

1) Удельные теплоемкости немного изменяются (незначительно) при изменении температуры тела. В таблице, кроме случаев, где температура указана в скобках, удельная теплоемкость везде дается при 18°C.

28. Формула теплоты, необходимой для нагревания тела

Количество теплоты q, необходимое для нагревания массы m вещества с удельной теплоемкостью c от $t_1°$ до $t_2°$С, выражается формулой

$$q = mc(t_2 - t_1); \tag{17}$$

для воды

$$q = m(t_2 - t_1). \tag{17a}$$

29. Связь между теплотой и работой

Затрачивая теплоту, мы получаем работу (например в двигателях) и, обратно, затрачивая работу (например, при трении двух поверхностей одна о другую), мы получаем теплоту. Между теплотой и работой существует вполне определенное соотношение: затрачивая 427 *кГм* работы, мы вместо этого можем получить 1 килокалорию тепла; 1 килокалория равноценна (эквивалентна) 427 *кГм* работы. Эта величина работы носит название *механического эквивалента тепла* и обозначается буквой I. Обратная величина $\frac{1}{427}$ *ккал* = 1 *кГм* называется *термическим эквивалентом работы*. Таким образом соотношение между теплотой и работой выразится формулой

$$A = I \cdot Q, \tag{18}$$

где A — работа, Q — количество тепла в *ккал*.

Если работа выражается в джоулях, а теплота в калориях, то

$$I = 4{,}2 \text{ дж/кал} \text{ и } A = 0{,}24 \text{ кал/дж}. \tag{18a}$$

30. Температура плавления и отвердевания

Для кристаллических веществ (к ним относятся и металлы) температура плавления (*точка плавления*) и температура отвердевания (*точка отвердевания*) совпадают; для некристаллических веществ, например смолы, стекла и т. п., постоянной точки плавления нет. В следующей таблице указаны температуры плавления (и отвердевания) наиболее употребительных кристаллических веществ:

Вещество	Температура плавления (°C)	Вещество	Температура плавления (°C)
Алюминий . .	658	Раствор поваренной соли (насыщенный)	—18
Железо	1520	Ртуть	—38,9
Золото	1064	Свинец	327
Иридий . . .	2350	Серебро . . .	960
Латунь	около 1000	Спирт	—114
Медь	1083	Сталь	1300—1400
Олово	232	Цинк	419
Парафин . . .	около 54	Чугун	1100—1200
Платина . . .	1764	Эфир	—123
Припой мягкий . . .	135—200		

31. Теплота плавления

Количество тепла в *ккал*, необходимое для того, чтобы 1 *кг* какого-нибудь твердого вещества, нагретого до температуры его плавления, превратить в жидкое состояние при той же температуре, называется *теплотой плавления* этого вещества. Эта теплота не повышает температуры вещества, а тратится на то, чтобы превратить его из твердого состояния в жидкое.

32. Таблица теплоты плавления

Теплота плавления для наиболее употребительных веществ дана в следующей таблице:

Вещество	Теплота плавления	Вещество	Теплота плавления
Алюминий . .	около 80—90	Ртуть	2,8
Железо	49	Свинец	5
Золото	16	Серебро	24
Лед	80	Цинк	28
Медь	42	Чугун белый	33
Олово	14	Чугун серый	23
Парафин . . .	35		
Платина . . .	27		

33. Формула теплоты, необходимой для плавления тела

Количество тепла Q, необходимое для того, чтобы расплавить массу вещества m с удельной теплоемкостью c, начальной температурой t_1 и температурой плавления t_2, выражается формулой

$$Q = mc\,(t_2 - t_1) + \lambda m, \tag{19}$$

где λ — теплота плавления вещества. Если масса m дана в *кг*, то формула (19) дает Q в *ккал;* если же m в *г*, то Q — в *кал*.

34. Особенность воды при охлаждении

При отвердевании большинства веществ объем их уменьшается; когда же замерзает вода, то объем ее, наоборот, увеличивается (так наз. «*аномалия воды*»); так же ведут себя чугун и несколько других веществ.

35. Испарение и насыщенные пары

При всякой температуре между точками кипения и замерзания жидкость *испаряется:* отдельные частицы жидкости отрываются от ее поверхности и вылетают в окружающую среду. Если жидкость заключена в закрытый со всех сторон сосуд, то может наступить момент, когда испарение как бы прекратится. В таком случае пространство над жидкостью называется пространством, *насыщенным парами*, а самые пары — *насыщенными*, или *насыщающими пространство;* пока этого не произойдет, пары называются *ненасыщенными*, или *не насыщающими пространства*.

36. Давление паров

При одной и той же температуре *давление насыщенных паров* больше, чем ненасыщенных. Давление насыщенных паров различных жидкостей при одной и той же температуре различно; наибольшим давлением будут обладать насыщенные пары наиболее испаряющихся или летучих жидкостей, как эфир, спирт и т. п. Давление насыщенных паров любой жидкости будет увеличиваться с увеличением температуры паров.

37. Таблица давления насыщенных паров

В следующей таблице указаны давления насыщенных паров различных жидкостей при различных температурах (в *мм* ртутного столба):

Температура (°С)	Эфир	Спирт	Вода	Ртуть
—20	66	3,3	0,8	—
0	185	12	4,6	0,0004
20	440	44	17,5	0,0018
40	921	134	55	0,008
60	1734	350	149	0,025
80	2974	813	355	0,09
100	4855	1698	760	0,28

38. Таблица давления и плотности водяного пара

Плотность насыщенных паров при данной температуре наибольшая и растет с увеличением температуры. В следующей таблице даны величины давления и плотности насыщенного *водяного пара* в зависимости от температуры.

(Температуры даны в °С; давление p выражено в *мм* ртутного столба; m — масса 1 $м^3$ пара, выраженная в граммах. При температурах ниже 0° в столбцах p и m даны давления и массы насыщенного пара над льдом.)

°C	p	m	°C	p	m
—2	3,88	4,13	15	12,79	12,8
—1	4,22	4,47	20	17,54	17,3
0	4,58	4,84	25	23,76	23,0
1	4,93	5,22	30	31,82	30,3
2	5,29	5,60	35	42,18	39,6
3	5,69	5,98	40	55,32	51,2
4	6,10	6,40	50	92,5	83,0
5	6,54	6,84	60	149,4	130
6	7,01	7,3	70	233,7	198
7	7,51	7,8	80	355,1	293
8	8,05	8,3	90	625,8	424
9	8,61	8,8	100	760,0	598
10	9,21	9,4			

39. Зависимость температуры кипения от давления

Температура кипения жидкости зависит от давления на нее и повышается с увеличением давления. В следующей таблице указаны *температуры кипения* различных веществ под нормальным атмосферным давлением.

Вещество	Точка кипения (°C)	Вещество	Точка кипения (°C)
Алюминий . .	1800	Свинец	1600
Железо	2450	Спирт этиловый (обыкновенный) .	78,3
Золото	2600	Цинк	906
Медь	2300	Эфир	34,6
Олово	2300		
Парафин . . .	300		
Ртуть	357		

40. Конденсация пара

Если пространство, занятое насыщенными парами, охладить или путем сжатия уменьшить, то часть паров превращается обратно в жидкость — конденсируется. Процесс превращения пара в жидкость называется *конденсацией пара*.

Охлаждая ненасыщенные пары или уменьшая объем, занимаемый ими, можно превратить их в насыщенные.

Процесс превращения жидкости в пар идет с поглощением некоторого количества теплоты; наоборот, при конденсации пара теплота выделяется.

41. Зависимость температуры кипения воды от давления

Для кипения воды зависимость температуры от давления выражается следующей таблицей:

Давление в *кг/см*^{2}	Температура кипения (°C)	Давление в *мм* ртутного столба	Температура кипения (°C)
1	99,1	740	99,26
2	119,6	745	99,44
3	132,9	750	99,63
4	142,9	755	99,82
5	151,1	760	100,00
6	158,1	765	100,18
7	164,2	770	100,37
8	169,0	780	100,73
9	174,6		
10	179,1		
20	211,4		
40	249,3		
100	309,7		

42. Теплота парообразования

Количество тепла в *ккал* (или в *кал*), которое надо затратить, чтобы 1 *кг* (или соответственно 1 *г*) жидкости превратить в пар той же температуры, что и у жидкости, называется *теплотой парообразования.* Теплота парообразования затрачивается не на поднятие температуры тела, а на превращение его из жидкого состояния в парообразное.

Теплота парообразования воды при 100°C равна 539, ртути = 68, эфира = 85 *ккал/кг* или *кал/г.*

43. Формула теплоты, необходимой для парообразования

Количество теплоты, необходимое для того, чтобы превратить в пар массу m воды при начальной температуре t, выражается формулой:

$$Q = m(\Theta - t) + \gamma m, \tag{20}$$

где Θ — температура кипения воды при данном давлении (находится из таблицы на стр. 153), γ — теплота парообразования. Если m выражено в *кг*, то Q — теплота в *ккал;* если же m — в *г*, то Q — в *кал.*

44. Теплопроводность

Если теплота постепенно распространяется по веществу тела от мест более нагретых к местам менее нагретым, то такой способ распространения тепла называется *теплопроводностью.* Количество протекшего через стенку тепла при установившемся тепловом потоке определяется формулой

$$Q = kS\frac{t_1 - t_2}{l}\Theta, \tag{21}$$

где S — поверхность стенки (в $м^2$), t_1 и t_2 — установившиеся температуры той и другой поверхности стенки, l — толщина стенки (в $м$), Θ — количество часов, в течение которых перемещалось тепло. Коэффициент k наз. *коэффициентом теплопроводности.*

45. Коэффициент теплопроводности

Коэффициент теплопроводности (k), определяющий теплопроводность данного материала, численно равен количеству калорий, протекших за 1 час через 1 $м^2$ стенки из данного материала толщиной в 1 $м$, если разность температур обеих поверхностей стенки равна 1°C.

46. Таблица коэффициентов теплопроводности

В следующей таблице даны коэффициенты теплопроводности наиболее употребительных материалов:

Коэффициенты теплопроводности $\frac{ккал}{м \cdot час \cdot град}$

Металлы			
Алюминий . . .	175	Никель	50
Железо	40—50	Олово	55
Латунь	75—100	Свинец	30
Медь	300—340	Серебро	360

Продолжение на об.

Продолжение

Строительные материалы	
Бетон . . . . 0,7—1,2	Дерево перпендикулярно к волокнам 0,12—0,17
Бутовая кладка . . . . . . 1,3—2,1	Дерево параллельно к волокнам 0,25—0,35
Гранит . . . . . . 2,7—3,5	Кирпичная кладка . 0,6—0,8
Различные твердые тела	
Лед 1,5	Фарфор 0,9
Стекло . . . . . . 0,5—0,8	
Изолирующие материалы	
Асбест 0,18	Плиты из пробки, войлока, торфа . 0,04—0,08
Вата стеклянная . 0,04—0,10	Шелк 0,04
Вата шлаковая . . 0,08	Шерсть 0,035
Мелочь пробковая . 0,035	Шлаки 0,12
Опилки 0,06	

IV. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

47. Электрическая цепь и ее составные части

Основные части электрической цепи: *генератор* — источник тока (гальванические элементы, аккумуляторы динамомашины и др.), *приемники* (лампочки, нагревательные приборы, моторы и т. п.) и соединительные провода. Приемники с соединительными проводами, измерительными приборами и пр. составляют внешнюю часть цепи или просто внешнюю цепь.

48. Напряжение

Как между конечными точками (*полюсами генератора*) замкнутой внешней цепи, по которой течет ток, так и на концах любого ее участка существует та или иная разность электрических уровней, иначе — *разность электрических потенциалов* или *напряжение* (обозначается буквой V). Наибольшее напряжение, которое образуется на полюсах разомкнутого генератора, называется его *электродвижущей силой* (сокращенно ЭДС) и обозначается буквой E. Как напряжение, так и ЭДС измеряются с помощью *вольтметра* в *вольтах*. ЭДС элементов и аккумуляторов дана в следующей таблице:

Название генератора	ЭДС в вольтах
Элемент Даниэля	1,1
„ Лекланше	1,5
Хромовый элемент	2,0
Железо-никел. аккум. (Эдисона)	1,3
Свинцовый аккумулятор . .	2,1

49. Направление и сила электрического тока

Перемещающиеся по всей замкнутой цепи заряды создают *электрический ток*. Условно принимают: ток во внешней цепи течет от положительного полюса генератора к отрицательному. Количество электричества, протекающего в одну секунду через поперечное сечение проводника, называется *силой тока* (обозначается буквами I или i). Сила тока измеряется *амперметром* в *амперах* (обозначается буквой A; см. стр. 159).

50. Электролиты. Электроды

Химически сложная жидкость (растворы кислот, солей и т. п.), которая разлагается на составные части при прохождении через нее тока, называется *электролитом*; сосуд, в который она налита, — *электролитической ванной*; *электрод* (платиновая или угольная пластина), через который ток входит в электролит, называется *анодом*, второй электрод, через который ток выходит, называется *катодом* (рис. 63).

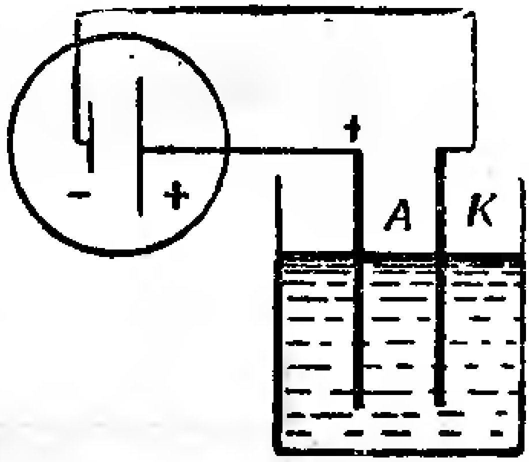


Рис. 63.

51. Закон Фарадея

Количество m вещества, выделившегося при прохождении тока через электролит в течение t *сек*, пропорционально силе тока I (в амперах) и времени t (в секундах) (*закон Фарадея*):

$$m = kIt, \tag{22}$$

где k — постоянная для данного вещества величина, называемая его *электрохимическим эквивалентом*.

Ниже указаны электрохимические эквиваленты некоторых веществ в *мг*; в этом случае m будет выражено в *мг*.

Серебро	1,118 *мг*	Свинец	1,072 *мг*
Медь	0,323 "	Алюминий	0,094 „
Водород	0,01044 *мг*		
Кислород	0,0329 „		

52. Единица силы тока

За единицу силы тока принят *ампер*—сила такого постоянного тока, который, проходя через водный раствор азотнокислого серебра, отлагает в одну секунду 1,118 *мг* чистого серебра.

53. Количество электричества

Q — количество протекшего за t *сек* по цепи электричества может быть определено произведением силы тока I в амперах на время t в секундах; это произведение дает *ампер-секунды*, или, иначе, *кулоны*:

$$Q = I \cdot t \text{ ампер-секунд.} \tag{23}$$

54. Последовательное и параллельное соединения

Генераторы и приемники электрической энергии (см. стр. 156) могут быть включены в цепь *последовательно* и *параллельно*. На рис. 64 даны простейшие схемы соединений элементов и лампочек:

Схемы соединений элементов и лампочек

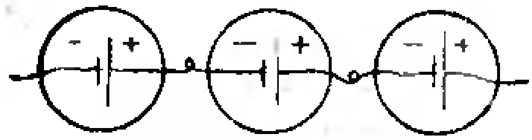
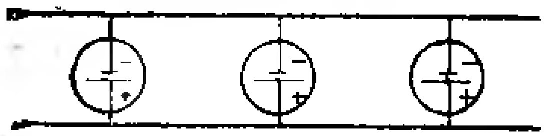
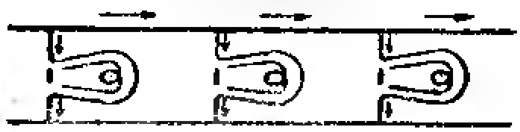
Соединения	*Схематическое изображение*
Последовательное соединение элементов: анод предыдущего элемента соединен с катодом последующего.	
Параллельное соединение элементов: все аноды соединены в один узел, а все катоды — в другой.	
Последовательное соединение лампочек.	
Параллельное соединение лампочек.	

Рис. 64.

55. Закон Ома для участка цепи

Ом установил, что сила тока I на том или ином участке цепи зависит от напряжения V на этом участке цепи и особой величины r, которую Ом назвал *сопротивлением* входящих в этот участок проводников. *Закон Ома* связывает все три величины следующей формулой:

$$I = \frac{V}{r}, \tag{24}$$

т. е. сила тока прямо пропорциональна напряжению V на данном участке цепи и обратно пропорциональна сопротивлению этого участка.

56. Закон Ома для всей цепи

Полная цепь включает сопротивление r внешней цепи и сопротивление r_1 самого генератора; полное сопротивление R всей цепи $R = r + r_1$. Закон Ома для всей цепи, имеющей генератор с ЭДС, равной E:

$$I = \frac{E}{r + r_1} = \frac{E}{R}. \qquad (25)$$

57. Единица сопротивления

За единицу сопротивления принят *ом* (обозначается греческой буквой Ω); это — сопротивление при 0° ртутного столбика длиной в 106,3 *см* и с поперечным сечением в 1 *мм*^{2}. Если в формулах (24) и (25) I выражается в амперах, r или R в омах, то V или E должно быть выражено в вольтах.

58. Закон сопротивления

Сопротивление провода при неизменной температуре прямо пропорционально его длине l и обратно пропорционально площади его поперечного сечения S:

$$r = \rho \frac{l}{S}, \qquad (26)$$

причем величина ρ характеризует вещество проводника и носит название *удельного сопротивления*; это — сопротивление линейного проводника из данного вещества в 1 *м* длины и 1 *мм*² поперечного сечения.

При применении формулы (26) к жидкому проводнику за его длину считается расстояние между электродами, а за площадь поперечного сечения — площадь электрода в жидкости (рис. 65).

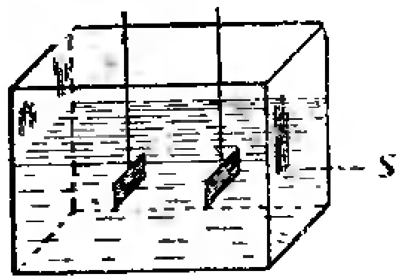


Рис. 65.

59. Проводимость. Изоляторы

Величина, обратная ρ, т. е. $\frac{1}{\rho}$, называется *удельной проводимостью* вещества, а величина, обратная r (сопротивлению проводника), т. е. $\frac{1}{r}$, называется его *проводимостью*.

Вещества, проводимость которых практически близка к нулю: стекло, фарфор, шелк, смола и т. п., называются *изоляторами*.

60. Таблицы сопротивлеиий

В таблицах а и б помещены сведения о сопротивляемости наиболее употребительных проводников и изоляторов.

а) Удельные сопротивления проводников

Вещество	Удельное сопротивление	Вещество	Удельное сопротивление
Металлы		**Сплавы и уголь**	
Алюминий . .	0,029	Константан. . .	0,5
Вольфрам . . .	0,056	Латунь	около 0.03
Железо	0,1—0,15	Манганин . . .	0,45
Медь	0,0162—0,175	Нейзильбер . .	0,2—0,4
Никель	0,08—0,11	Никелин . . .	0,4
Платина . . .	0,1—0,14	Сталь мягкая .	0,1—0,2
Ртуть при 18° .	0,958	Уголь (для дуговых и калильных ламп)	40—60
Свинец	0,21		
Серебро . . .	0,016		
Цинк	0,060		

б) Электрическая сопротивляемость изоляторов (в омах на 1 *см*³)[1])

Вещество	Сопротивление	Вещество	Сопротивление
Шифер	1×10^8	Слюда	от 4×10^{13} до 2×10^{17}
Красная фибра	5×10^9	Сургуч	8×10^{15}
Мрамор	от 1×10^9	Шеллак	1×10^{16}
Целлулоид . .	2×10^{10}	Парафин . . .	1×10^{16}
Обыкновенное стекло . . .	5×10^{13}	Канифоль . . .	5×10^{16}
Фарфор неглазированный	3×10^{14}	Сера	1×10^{17}
		Эбонит	1×10^{18}
		Кварцевое стекло . . .	5×10^{18}

[1]) Эти сведения даны при температуре 22°; сопротивляемость многих изоляторов быстро падает с повышением температуры; при повышении температуры с 20° до 30° она может уменьшиться в $1^1/_2$—3 раза.

61. Реостаты

Реостатами называются приборы, при помощи которых можно изменять сопротивление цепи и тем самым регулировать в ней силу тока.

62. Сопротивление при различных соединениях

При соединении проводников, имеющих различные сопротивления, их общее сопротивление зависит от того, как они соединены: последовательно или параллельно (см. стр. 160).

Рис. 66.

Если проводники соединены последовательно (рис. 66), то их общее сопротивление равно сумме отдельных сопротивлений.

$$R = r_1 + r_2.$$

При параллельном же соединении проводников ACB и ADB (рис. 67) с сопротивлениями r_1 и r_2 их общее сопротивление R выражается формулой

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}. \tag{27}$$

Если в разветвлении участвуют не два проводника, а несколько, то

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots + \frac{1}{r_n}, \tag{27a}$$

т. е. проводимость разветвления равна сумме проводимостей отдельных ветвей; если сопротивления всех n ветвей равны между собой, т. е. $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots$, то

$$\frac{1}{R} = \frac{n}{r} \text{ и } R = \frac{r}{n}. \tag{28}$$

Сопротивление параллельного соединения меньше сопротивления любой ветви.

63. Сила тока при параллельном соединении

Силы токов i_1 и i_2 в параллельно соединенных ветвях ACB и ADB (рис. 67) определяются из соотношения

$$i_1 : i_2 = r_2 : r_1, \tag{29}$$

причем сила тока I, притекающего к точке разветвления A,

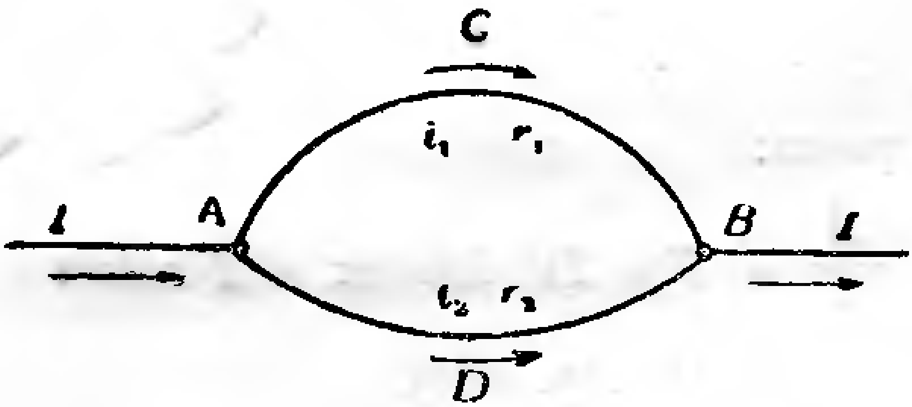


Рис. 67.

равна сумме сил токов, оттекающих от этой точки, т. е.

$$I = i_1 + i_2, \tag{30}$$

или для n ветвей:

$$I = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n. \tag{30a}$$

64. Работа электрического тока

Если Q кулонов за t секунд переместятся по участку цепи, на концах которого приложено напряжение V вольт, то *работа A электрического тока* на этом участке выразится формулой

$$A = QV \text{ джоулей.} \tag{31}$$

Если I — сила тока на данном участке, то $Q = I \cdot t$ и

$$A = ItV \text{ джоулей,} \tag{31а}$$

или, заменив по закону Ома $V = Ir$, имеем третье выражение работы:

$$A = I^2rt \text{ джоулей,} \tag{31б}$$

где I — сила тока в амперах, r — сопротивление участка в омах, t — время в секундах.

65. Мощность тока

Из формулы (31а) следует, что *мощность тока* W (см. стр. 125), т. е. его работа, отнесенная к одной секунде, $\frac{A}{t}$, равна:

$$\frac{A}{t} = W = IV \text{ дж/сек} = I \text{ ватт} \tag{32}$$

(определение ватта см. стр. 125).

66. Закон Джоуля-Ленца

Так как 1 джоуль работы эквивалентен 0,24 калории, то работу тока можно оценить и в калориях, воспользовавшись, например, формулами (31б) и (18а) (стр. 147):

$$Q = 0{,}24\ I^2rt \text{ кал.} \tag{33}$$

формула Джоуля-Ленца, при помощи которой можно оценить *тепловое действие тока*: Q — количество калорий, которое выделяет ток I на данном участке за t *сек*, если он встречает со стороны участка сопротивление r, например, когда ток идет по нагревательному прибору.

67. Единицы работы электрического тока

Так как произведение мощности на время дает работу (см. стр. 125), то единицы мощности: ватт, гектоватт, киловатт, будучи умножены на единицу времени — час, дадут единицы работы электричества:

1 *ватт-час* (*вт-ч*) = 3600 *джоулей*,

1 *гектоватт-час* (*гвт-ч*) = 100 *вт-ч* = = 360 000 *дж*,

1 *киловатт-час* (*квт-ч*) = 1000 *вт-ч* = = 3 600 000 *дж*.

Формула работы тока (31б) даст ватт-часы, если t выражено в часах, а не в секундах.

68. Магнитное поле

Пространство, в котором действуют магнитные силы, называется *магнитным полем*.

69. Магнитные силовые линии

Силовой линией называется линия, указывающая направление, по которому в той или иной точке поля действует на положительный магнитный полюс магнитная сила.

70. Магнитное поле тока. Электромагнит

Вокруг тока возникает магнитное поле. Если ток течет по проволочной спирали, то последняя ведет себя, как магнит. Если смотреть на конец спирали и ток при этом будет обтекать его в направлении обратном движению часовой стрелки (рис. 68), то этот конец будет северным полюсом; для наблюдателя, к которому обращен другой конец спирали (южный полюс), ток будет течь по часовой стрелке. Если внутрь этой спирали поместить стержень из мягкого железа (сердечник), то он намагнитится, а все вместе взятое образует *электромагнит*. Подъемная сила его будет расти с увеличением тока и с увеличением числа оборотов проволоки, приходящихся на 1 *см* длины спирали.

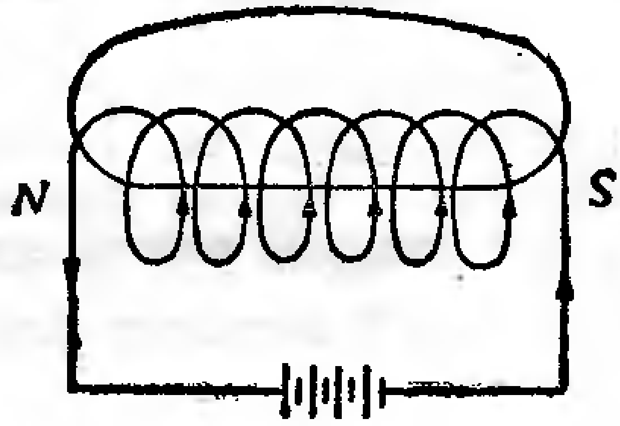


Рис. 68.

71. Действие магнитного поля на ток

Подвижной ток, находясь в магнитном поле, будет перемещаться под действием поля; направление перемещения тока дается *правилом* трех пальцев *левой руки*: три пальца—большой, указательный и средний—располагают в трех взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 69) так, чтобы указательный палец указывал направление силовых линий поля, средний—направление тока, тогда отогнутый большой палец укажет направление, куда будет перемещаться проводник.

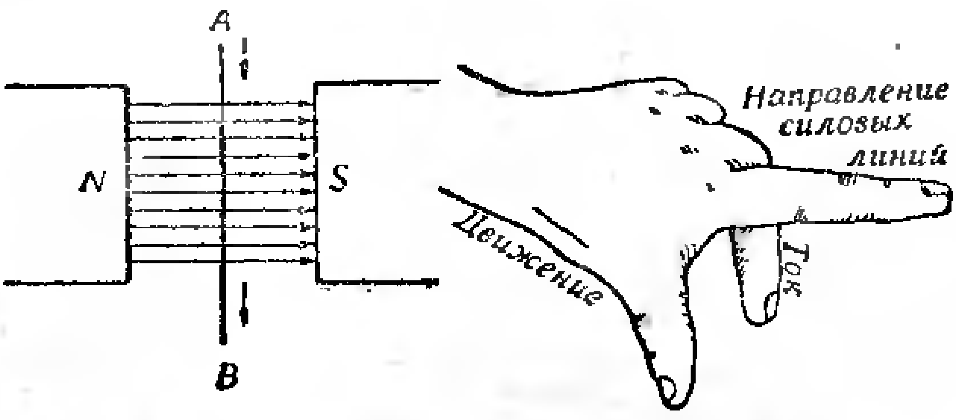


Рис. 69.

72. Действие тока на магнитную стрелку

В свою очередь и ток будет действовать на подвижную магнитную стрелку по *правилу правой руки* (рис. 70): правую руку надо обратить ладонью к магнитной стрелке так, чтобы ток шел от кисти к пальцам; тогда отогнутый большой палец укажет, куда отклонится северный полюс магнитной стрелки.

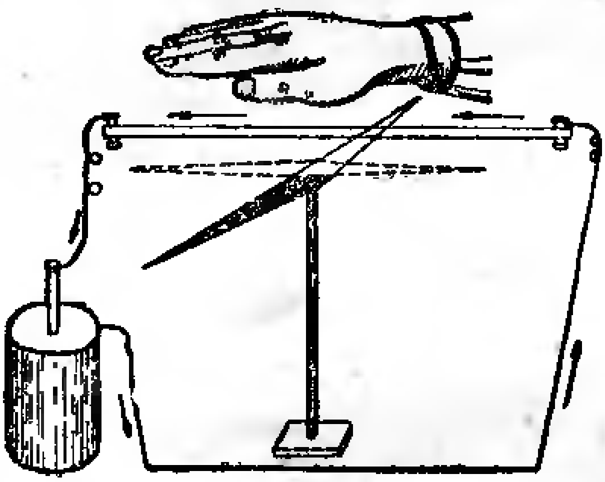


Рис. 70.

73. Электромотор

Действие *электромотора* основывается на действии сильного магнитного поля на подвижный ток. Основные части электромотора: сильные электромагниты, создающие магнитное поле; *якорь*—железный цилиндр, по длине которого вложены катушки, обтекаемые током; ток подводится к катушкам через *щетки* и *коллектор.* На рис. 71 даны модель якоря электромотора и его схема.

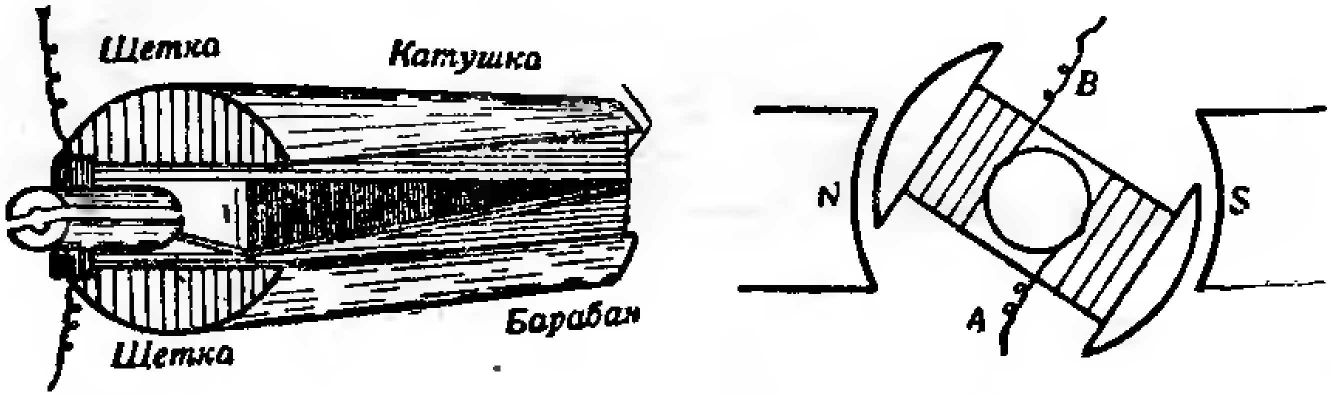


Рис. 71.

74. Электромагнитная индукция

Если проводник или катушка будет перемещаться в магнитном поле и при этом пересекать магнитные силовые линии (рис. 72), то в проводнике или катушке будет возникать *индуктивная* ЭДС, а если проводник или катушка замкнуты, то вместе с этим возникает *индуктивный ток*.

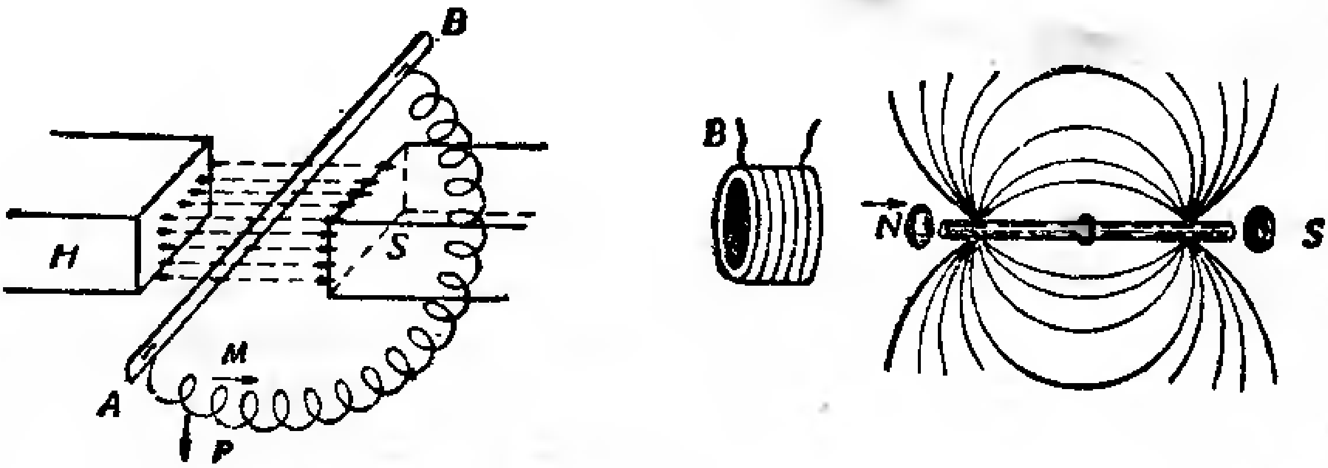


Рис. 72.

Направление индуктивной ЭДС определяется *правилом правой руки*. Правую руку с вытянутыми пальцами надо положить вдоль проводника (рис. 73), движущегося поперек силовых линий так, чтобы силовые линии упирались в ладонь, а отогнутый большой палец указывал направление движения проводника; тогда вытянутые пальцы укажут направление ЭДС.

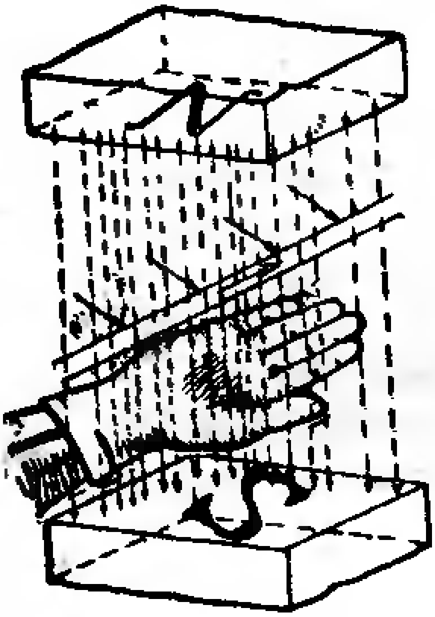


Рис. 73.

75. От чего зависит индуктивная ЭДС

Индуктивная ЭДС будет тем больше, чем сильнее магнитное поле, чем быстрее наперерез силовым линиям движется проводник и чем длиннее сам проводник.

76. Переменный ток

Если в однородном магнитном поле (рис. 74) будет равномерно вращаться контур из проволоки, то с каждым полным оборотом в контуре возникает периодически меняющаяся по величине и направлению ЭДС и сила то-

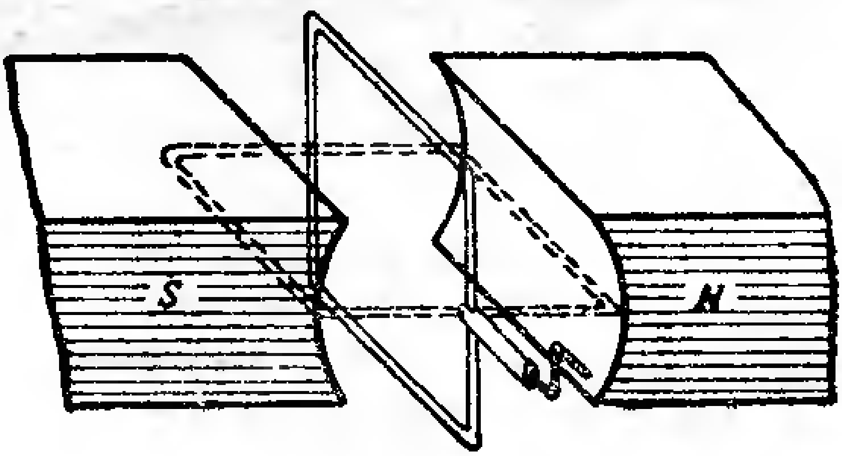


Рис. 74.

ка, если контур замкнут. Такой ток, периодически (через равные промежутки времени) меняющийся по величине и направлению, называется *переменным током.*

77. Эффективное значение ЭДС и силы тока

При равномерном вращении витка в однородном магнитном поле ЭДС, возникающая в витке, является переменной величиной, пропорциональной синусу угла поворота витка; то же самое можно сказать и о силе переменного тока, если сопротивление цепи не меняется. Амперметр и вольтметр, включенные в цепь переменного тока, показывают *эффективные значения,* соответствующие такому постоянному току, который за это же время производит то же самое действие (эффект), например тепловое, что и данный переменный ток. Рис. 75 показывает кривую — *синусоиду,* дающую наглядную картину того, как меняется переменный ток за время одного полного оборота (за один период) витка. На рисунке по вертикали отложены значения силы тока, а по горизонтали — время, соответствующее тому или иному положению витка.

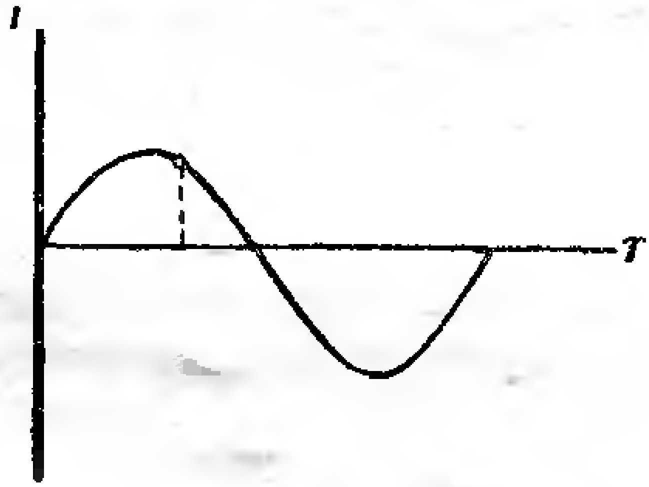


Рис. 75.

В качестве измерительных приборов переменного тока можно пользоваться тепловыми амперметрами и вольтметрами.

78. Мощность переменного тока

Мощность переменного тока в каждое мгновение равна произведению мгновенных значений тока и напряжения. *Эффективная мощность*, однако, не равна произведению эффективных сил тока и напряжения, а отличается от него некоторым постоянным для каждого генератора множителем, меньшим единицы и обозначаемым обычно как $\cos\varphi$:

$$W_{\text{эфф}} = I_{\text{эфф}} V_{\text{эфф}} \cos\varphi.$$

Косинус фи определяется режимом работы и конструкцией машины. Чем больше косинус фи, тем лучше работает машина.

79. Самоиндукция

Изменения магнитного поля при замыкании и размыкании данной цепи или вообще изменения в ней силы тока вызывают в самой же цепи возникновение индуктивной ЭДС; это явление называется *самоиндукцией*.

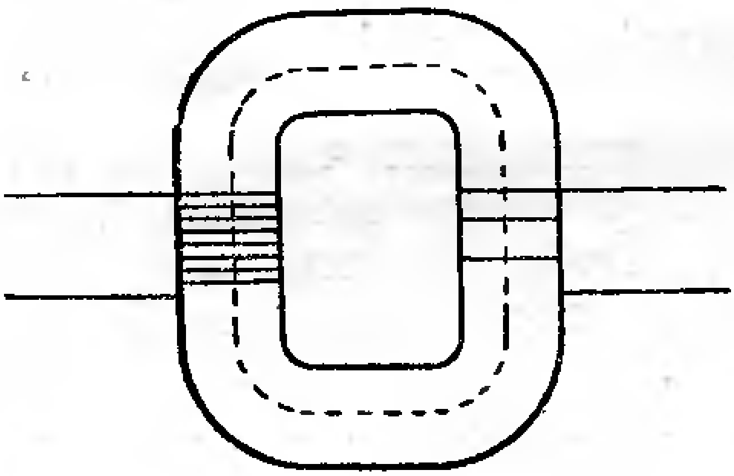


Рис. 76.

Особенно резко самоиндукция сказывается в цепях, включающих значительное число сильных электромагнитов.

80. Трансформирование тока

Имея переменный ток низкого напряжения и большой силы, можно получить ток малой силы, но высокого напряжения, и наоборот (*трансформировать* ток). Это достигается с помощью *трансформаторов*. На рис. 76

дана схема трансформатора: толстая обмотка с небольшим числом витков намотана на замкнутый железный сердечник; с другой стороны намотана тонкая обмотка с большим числом витков. Если по первой обмотке пропустить переменный ток низкого напряжения и большой силы, то по второй пойдет переменный ток высокого напряжения и малой силы.

81. Конденсатор

Два проводника, например, две металлических пластинки A и B (обкладки, рис. 77), между которыми помещен слой изолятора (диэлектрика), например воздух, стекло и т. п., составят *конденсатор*; обкладки конденсатора заряжаются разноименными зарядами. Между заряженными обкладками в диэлектрике возникает *электрическое поле.*

Рис. 77.

82. Емкость конденсатора

Емкостью конденсатора называется численное значение величины заряда (например число кулонов), которое надо сообщить конденсатору, чтобы повысить напряжение между обкладками на 1 вольт. Емкость конденсатора зависит от вещества изолятора и будет тем больше, чем тоньше изолятор и чем больше поверхность обкладок.

83. Единицы емкости

Единицей емкости является *фарада* (обозначается F или $ф$) — емкость конденсатора, у которого заряд в один кулон повышает напряжение на 1 вольт. В практике употребляется *микрофарада* (μF или $\mu ф$), равная 0,000001 F, и емкость в 900 000 раз меньшая микрофарады, называемая *сантиметром* (*см*).

84. Электромагнитные волны

Если заряженные обкладки конденсатора соединить между собой разрядником, то возникнет колебательный разряд, в результате которого в окружающем пространстве образуются *электромагнитные волны*, распространяющиеся во все стороны со скоростью 300 000 *км/сек*. Конденсатор и разрядник являются вместе простейшим колебательным контуром, излучающим *радиоволны*.

V. СВЕТ

85. Скорость света

Свет распространяется в различных прозрачных средах с различной скоростью; *скорость света* в воздухе равна 300 000 *км/сек*, — такая же как радиоволн, так как природа радиоволн и волн света одинакова.

86. Сила света

Сила света того или иного источника в большинстве стран, в том числе и в СССР, выражается в специальных единицах—*международных свечах*; образцы «международной свечи» (эталонные лампы) хранятся в СССР в Главной палате мер и весов.

Приборы, измеряющие силу света источника, называются *фотометрами*.

87. Освещенность

Один и тот же источник света может по-разному освещать предмет, в зависимости от того, на каком расстоянии находится предмет от источника, под какими углами наклонены к лучам света плоскости, ограничивающие предмет. Поэтому, кроме силы света, важно знать также *освещенность* данной поверхности, выражаемую в специальных единицах — *люксах*. Приборы, измеряющие освещенность, называются *люксметрами*.

88. Зависимость освещенности от расстояния

Освещенность небольшой площадки расходящимися лучами, падающими на нее «нормально», т. е. перпендикулярно к ее середине, убывает в 4, 9, 16 и т. д. раз по мере удаления от нее источника света в 2, 3, 4 и т. д. раз, т. е. обратно пропорциональна квадрату расстояния источника до освещаемой площадки.

Рис. 78.

89. Зависимость освещенности от наклона площадки

Освещенность небольшой площадки, образующей с падающими лучами света угол α, пропорциональна синусу этого угла (рис. 78).

90. Законы отражения света

Луч света, падающий на гладкую поверхность (*зеркало*), отражается от нее по следующим законам: 1) угол падения SAB равен углу отражения S_1AB; 2) луч падающий SA и отраженный S_1A лежат в одной плоскости с AB [перпендикуляром к зеркалу в точке падения (рис. 79)].

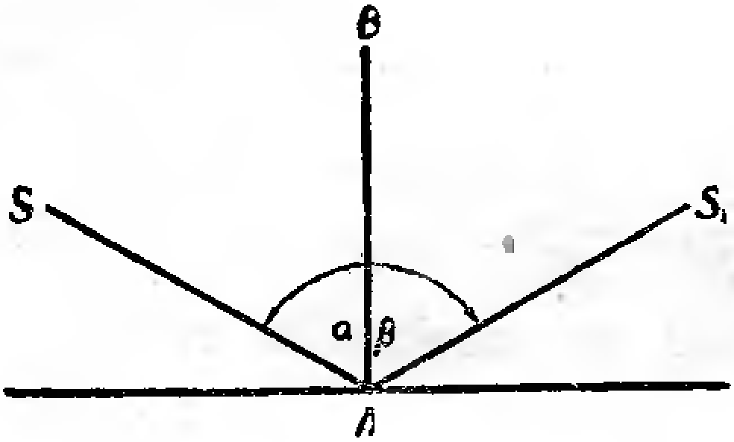


Рис. 79.

91. Сферические зеркала

Сферические зеркала представляют собой небольшую полированную часть сферы (например, металлического шара). Сферическое зеркало называется *выпуклым*, если отражает свет своею выпуклою поверхностью, и *вогнутым*, если вогнутою поверхностью. Ось, проходящая через середину сферического зеркала и центр сферы, называется *главною осью* зеркала.

92. Формула вогнутого зеркала

Если на главной оси AB вогнутого зеркала (рис. 80)

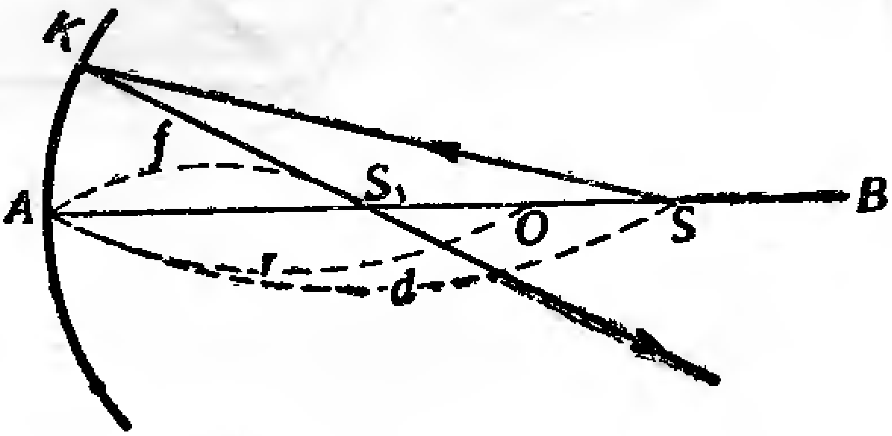


Рис. 80.

помещен точечный источник света S, то любой центральный луч, посылаемый им, после отражения будет проходить через одну определенную точку S_1 — *изображение* точки S.

Расстояния точек S и S_1 от середины зеркала A связаны между собой следующим соотношением (*формула вогнутого зеркала*):

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{r}, \tag{34}$$

где d — расстояние от зеркала до светящейся точки S, f — расстояние до ее изображения S_1, r — радиус зеркала.

93. Фокус вогнутого зеркала

Центральные лучи, идущие параллельно главной оси (рис. 81), пройдут через точку C, которая называется *фокусом* зеркала, причем расстояние

$$AC = F = \frac{r}{2}, \tag{35}$$

и формула (34) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \tag{34a}$$

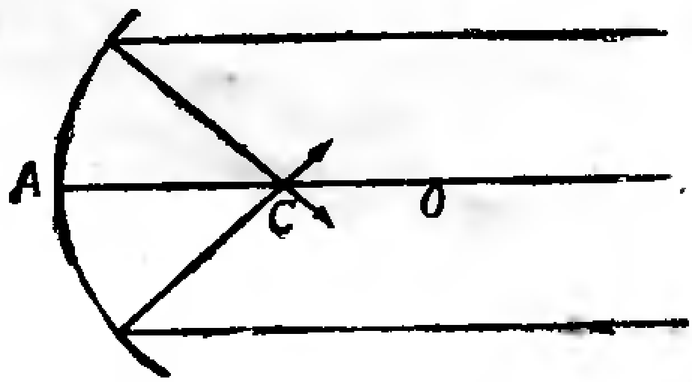


Рис. 81.

94. Показатель преломления

Когда луч света переходит из одной прозрачной среды, например воздуха, в другую, например воду, то на поверхности раздела MN обеих сред он меняет свое направление — преломляется (рис. 82).

Если обозначить через α угол падения, через β угол преломления, то величина

$$m = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

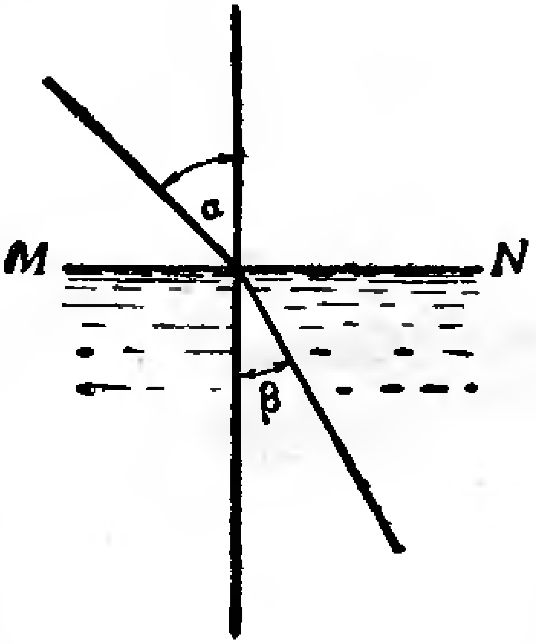


Рис. 82.

называется *показателем преломления* второй среды относительно первой. Показатель преломления m равен отношению скорости света той среды, из которой луч выходит (c_1), к скорости света той среды, в которую луч входит (c_2), т. е.

$$m = \frac{c_1}{c_2}. \qquad (36)$$

Если луч идет из «пустоты» в среду, то $n = \frac{c}{c_2}$, т. е. отношение c — скорости света «в пустоте» — к c_2 — скорости света в данной среде — называется *абсолютным показателем преломления*. Для стекла он равен (округленно) $^3/_2$, для воды $^4/_3$, для воздуха 1,0003 (практически = 1).

95. Отклонения лучей при преломлении

Если луч света проходит сквозь среду, которая ограничена двумя параллельными плоскостями, например оконное стекло, то он дважды преломится и в результате не изменит своего начального направления, а пойдет параллельно ему (рис. 83, *а*). При прохождении через *трехгранную призму* луч отклонится призмой к ее основанию (рис. 83, *б*)).

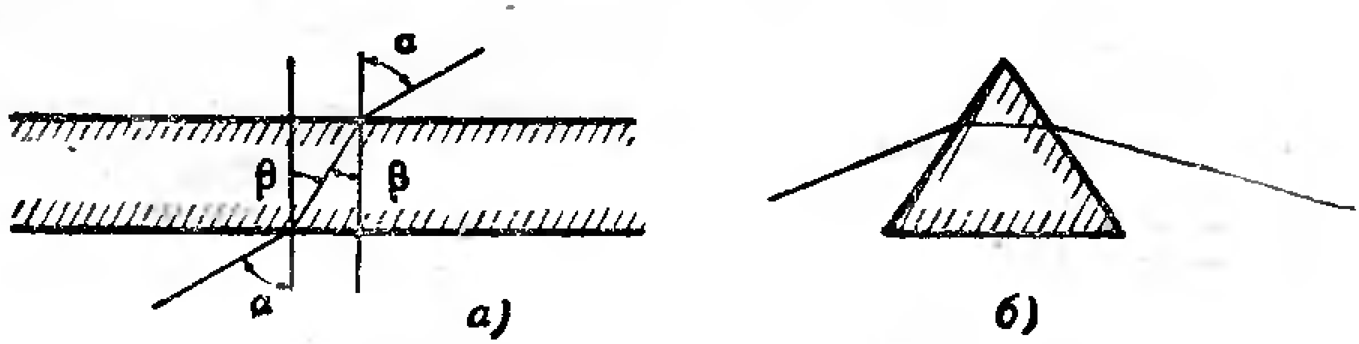


Рис. 83.

96. Линзы

Прозрачная среда (обычно стекло), ограниченная двумя сферическими поверхностями, дает *линзы* той или иной формы, например линзы, собирающие лучи, или *двояко-*

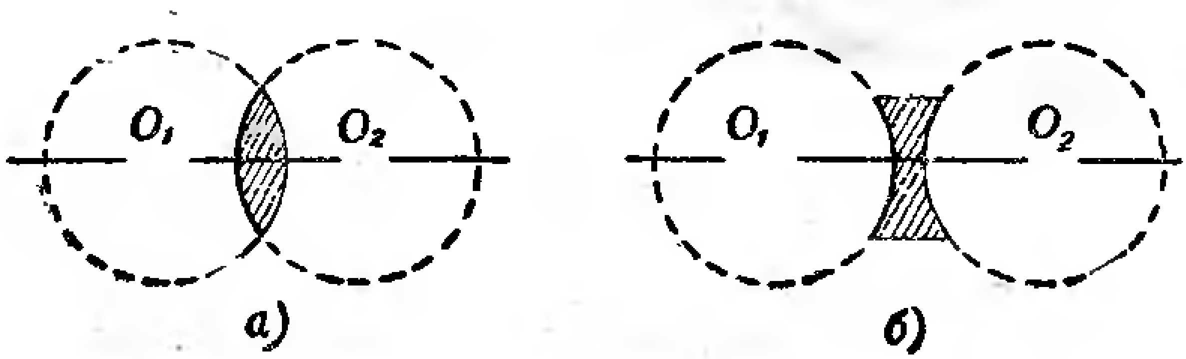


Рис. 84.

выпуклые (рис. 84 *а*), и линзы, рассеивающие лучи, или *двояковогнутые* (рис. 84, *б*). Прямая, соединяющая центры обеих сфер, называется *главной осью линзы.*

97. Фокус двояковыпуклой линзы

Центральные лучи света, идущие параллельно главной оси двояковыпуклой линзы, после преломления собираются в ее *фокусе* C (рис. 85). Фокусное расстояние двояковыпуклой линзы выражается формулой:

$$F = \frac{1}{(m-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}, \qquad (37)$$

где m — показатель преломления вещества линзы, а r_1 и r_2 — радиусы сферических поверхностей, ограничивающих линзу.

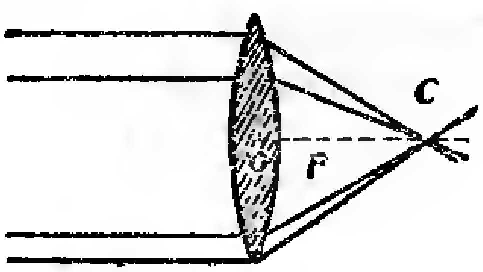


Рис. 85.

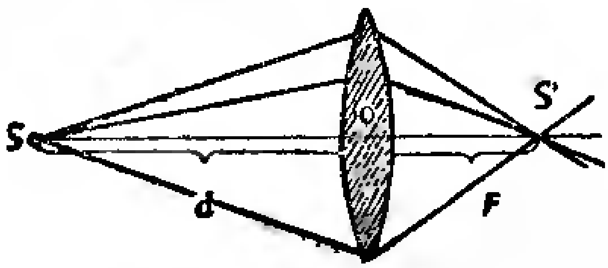


Рис. 86.

98. Формула двояковыпуклой линзы

Расстояние d светящейся точки S до двояковыпуклой линзы связано с расстоянием f ее изображения до линзы (рис. 86) формулой

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \qquad (38)$$

где F — фокусное расстояние (расстояние от фокуса до линзы).

99. Преломление различных лучей. Спектр

Лучи разных цветов преломляются в различной степени. Так, например, красные лучи стеклянная призма в воздухе менее всего отклоняет к своему основанию, фиолетовые — более всего; в порядке увеличивающейся преломляемости идут лучи следующих цветов: красные,

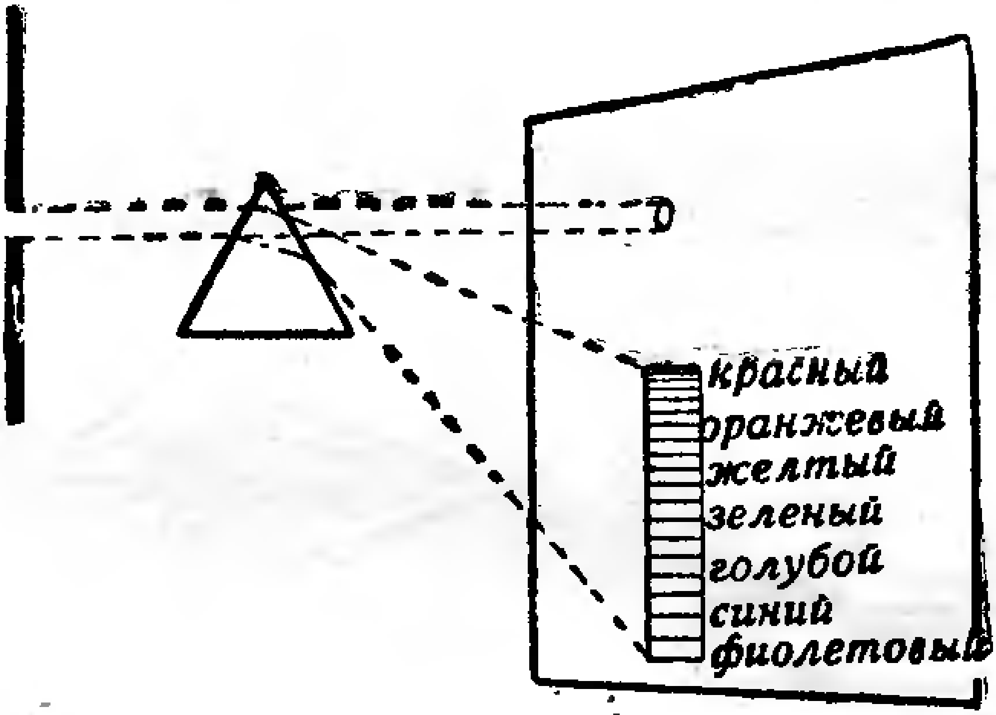


Рис. 87.

оранжевые, желтые, зеленые, голубые, синие и фиолетовые. Если из горизонтальной узкой щели (рисунок 87), освещенной белыми лучами, пропустить через горизонтально расположенную призму пучок белых лучей, то получится вертикальный *спектр*, состоящий из всех цветов. Белый луч содержит в себе все цвета.

100. Различные спектры

Если пучок белого света от раскаленных твердых или жидких тел пропустить через призму, то получится *сплошной спектр;* если же щель осветить лучами от светящихся паров и газов, то прошедший через призму пучок дает *прерывистый (линейчатый)* спектр, состоящий из цветных линий или полос, разделенных темными промежутками; наконец, белый луч, прошедший предварительно через какую-нибудь среду, а затем через призму, даст *спектр поглощения,* так как часть цветных лучей поглощает среда.

101. Невидимые лучи

Глаз не одинаково чувствителен к лучам различной цветности (различной длины волны); наиболее чувствителен он к лучам желтозеленым; к лучам, лежащим за красным и фиолетовым концами сплошного спектра *(инфракрасные и ультрафиолетовые лучи),* глаз вовсе не чувствителен; эти невидимые для глаз лучи действуют, например, на очень чувствительный термометр (инфракрасные), на фотографическую пластинку (ультрафиолетовые), на ряд самосветящихся тел и т. д. К числу невидимых лучей относятся и так называемые *лучи Рентгена,* которые обладают способностью проникать через непрозрачные для видимых лучей тела. Наименее прозрачны для этих лучей тяжелые металлы, наиболее прозрачны — дерево, тело человека. Этими лучами широко пользуются в технике и медицине.

VI. ЗВУК

102. Колебательное движение

Зажатая с одного конца колеблющаяся стальная полоска (рис. 89, *а*), колеблющаяся натянутая струна (рис. 89, *б*), у которых каждая частица A тела качается около своего центрального положения A_0 перпендикулярно длине тела, представляют примеры *поперечных колебаний*. Если к укрепленной с одного конца стальной пружине подвесить небольшую гирьку и несколько ее оттянуть,

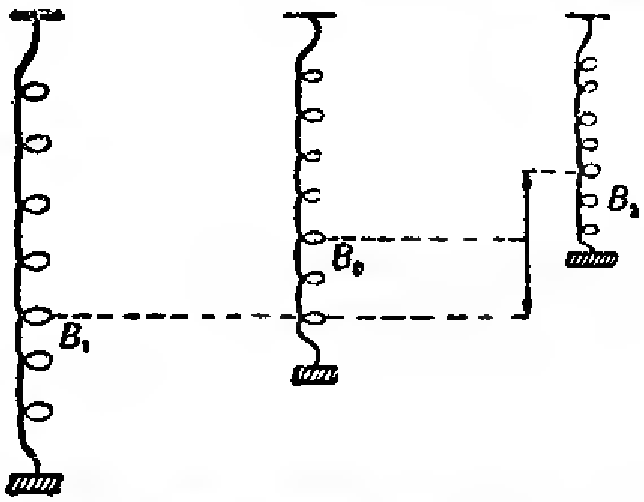


Рис. 88.

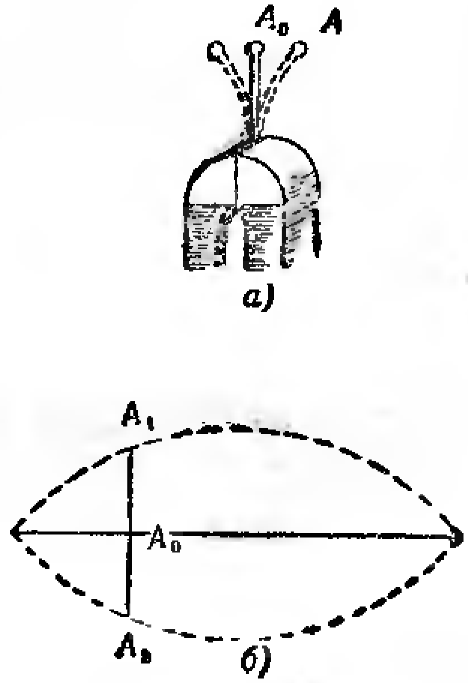


Рис. 89.

а затем предоставить самой себе (рис. 88), то каждая точка B пружины будет совершать колебания вдоль ее длины; это — пример *продольных колебаний*.

103. Период, частота, амплитуда

Время T, в течение которого все частицы A колеблющегося тела (рис. 88), выйдя из крайнего [например, для рис. 89, *а* — правого] положения, снова возвратятся в это же положение, или, иными словами, время, в течение которого каждая точка тела совершит одно полное колебание, называется *периодом колебания*.

Число f полных колебаний, совершаемых частицей или телом в 1 *сек.*, называется *частотой колебания*:

$$T = \frac{1}{f} \text{ или } f = \frac{1}{T}. \qquad (39)$$

Частота измеряется в *герцах* (*гц*): частоту в 1 *гц* имеет тело, совершающее в 1 *сек.* одно колебание.

Расстояние A_1A_0 или B_1B_0 колеблющейся частицы от своего крайнего до среднего положения (положения равновесия) называется *амплитудой колебаний.*

104. Волны на воде

Падая на гладкую поверхность воды, камень заставит частицы воды, лежащие под ним, несколько опуститься; после прохождения камня частицы поднимутся и затем

Рис. 90.

начнут колебаться: от места, куда упал камень, распространится одна поперечная круговая волна, состоящая из *гребня* и *впадины* (рис. 90); расстояние λ, на которое отстоят друг от друга два соседних гребня или две соседних впадины, называется *длиной поперечной волны.*

Аналогичные поперечные волны будут распространяться по натянутой струне, по стержню, зажатому на одном конце, и т. п., если по ним слегка ударить.

105. Волны в воздухе

Всякое колеблющееся тело — струна, камертон[1]), колокольчик и т. п. (рис. 91) — вынуждает колебаться с тем же периодом T и прилегающие к телу слои воздуха: в воздухе возникают продольные волны, состоящие из сгущений и разрежений; расстояние λ, на которое отстоят друг от друга два соседних сгущения или два соседних разрежения, называется *длиной продольной волны*. При частоте от 16 до 20000 колебаний в секунду воздушные волны воспринимаются ухом как *звук*.

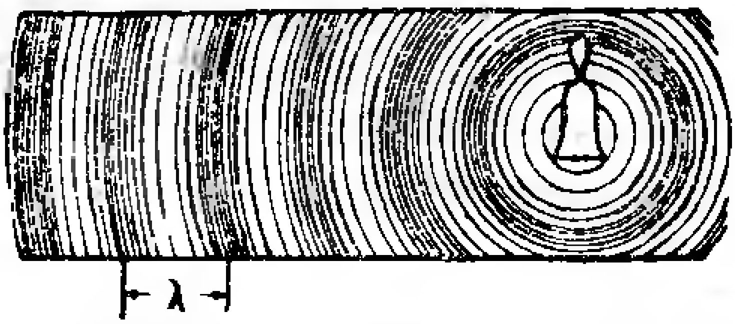


Рис. 91.

106. Скорость распространения волн

Возникшие в упругой среде волны распространяются с определенной для данной среды скоростью v, зависящей от температуры среды. Так, скорость звука при 0°С: в воздухе — 331 *м/сек* (при 16°—340 *м/сек*), в воде — 1450 *м/сек*, в железе—5100 *м/сек*, в стекле—5500 *м/сек*.

107. Зависимость длины волны от периода (частоты) колебания

Если тело колеблется с периодом T (частотой f), то за это время колебание распространится на λ — длину одной волны, т. е.

$$\lambda = vT \text{ или } \lambda = \frac{v}{f}.$$

[1]) Инструмент, служащий для определения высоты тона.

108. Отражения волн

Направление AB, по которому распространяется звук, наз. звуковым лучом. Если линейные размеры упругой поверхности, на которую падает звуковой луч, больше длины падающей волны, то волна отражается, причем угол падения ABC равен углу отражения CBD (рис. 92).

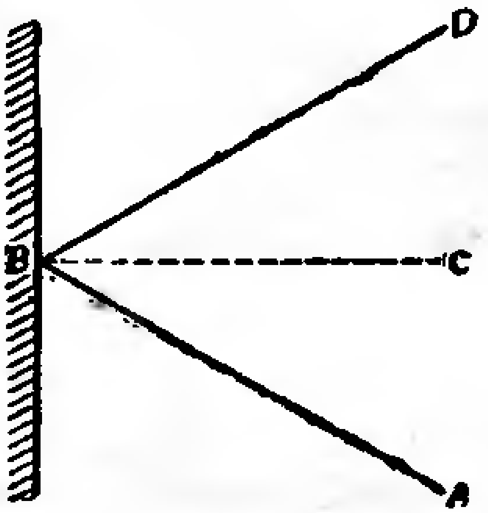


Рис. 92.

Отражение волны ухо воспринимает как *эхо*.

109. Дифракция волн

Если линейные размеры тела, находящегося на пути распространения воздушных волн, не велики сравнительно с длиной волны, то волны огибают препятствие. Это явление называется *дифракцией волн*.

110. Интерференция волн

Если две системы звуковых волн одного и того же периода посылаются в одну точку и в этой точке налагаются друг на друга либо своими сгущениями, либо своими разрежениями, то звук усиливается; если же сгущения одной системы волн налагаются на разрежения другой, то звук в этой точке может либо быть слабее, либо вовсе исчезнуть; явления усиления или ослабления звука при наложении волн называются *интерференцией* звуковых волн.

111. Резонанс

Если частота собственных колебаний двух тел (камертонов, струн и т. п.) одинакова и одно из этих тел приведено в колебание и звучит, то начнет звучать (откликаться) и другое тело: воздушные волны, создаваемые первым телом, своими толчками будут раскачивать второе; явление отклика одного тела на колебания другого называют *акустическим резонансом*.

112. Высота тона

Высота тона определяется его частотой f: у высоких тонов частота большая, у низких — малая. Ухо воспринимает тона в среднем в пределах частот от 16 до 15 000—20 000 в секунду; музыкальные тона заключаются между 30 и 5000 колебаний в секунду. Если звуки очень быстро следуют один за другим и при этом ухо не различает их высоты, то они воспринимаются как *шум*.

113. Сила и громкость звука

Сила звука в данной точке определяется количеством энергии, проходящей в 1 *сек* через площадку в 1 $см^2$, расположенную перпендикулярно к направлению звука; сила звука измеряется единицами: $\frac{эрг}{см \cdot сек}$.

Громкость звука зависит от высоты тона и изменяется приблизительно пропорционально логарифму силы звука.

114. Бинауральный эффект

Звуковые волны обычно подходят к одному уху несколько раньше, чем к другому. Уши способны различать эту разницу по времени, если она не меньше примерно 0,00003 *сек.* Это явление носит название *бинаурального эффекта.* Чтобы определить направление, откуда идет звук, человек поворачивает голову лицом к источнику звука так, чтобы оба уха услышали звук одновременно. Указанным эффектом пользуются при устройстве *звукоулавливателя.*

115. Реверберация

Если в каком-либо помещении источник перестает звучать, то звук благодаря многократному отражению от стен, потолка и т. п. не прекращается в тот же момент, а еще слышится в течение некоторого времени; это время называется временем *реверберации* данного помещения.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Отв. за выпуск *И. Черняк*
Техредактор *А. Труханова*
Корректор *В. Кушнарева*

*

АТ 05717. Подп. к печати. 23 VIII 1955 г.
Тираж 150 000 экз. Формат $60 \times 92^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 6,25.
Уч.-изд. л. 6,5. Цена 2 р. 55 к. Зак. 151.

Типография им. Сталина, Минск,
проспект им. Сталина, 105.

СПРАВОЧНИК
по
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ, МЕХАНИКЕ и ФИЗИКЕ

МИНСК
1955