СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Академик А. А. МАРКОВ

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ПЕРЕРАБОТАННОЕ АВТОРОМ
ЧЕТВЕРТОЕ, ПОСМЕРТНОЕ ИЗДАНИЕ

С ПОРТРЕТОМ АВТОРА и БИОГРАФИЧЕСКИМ
ОЧЕРКОМ ПРОФ. А. С. БЕЗИКОВИЧА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА :: 1924

А. Марковъ

ГРАФИЧЕСКИЕ
МАСТЕРСКИЕ

АКАДЕМИЧЕСКОГО
ИЗДАТЕЛЬСТВА
КОВЕНСКИЙ, 2

Настоящее издание исполнено для Главного Управления Государственного Издательства „Научным Книгоиздательством“ в Ленинграде

Ленинградский Гублит № 5478. Гиз. № 3455 Тираж 5000

БИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Андрей Андреевич Марков родился 14 июня 1856 г. в Рязанской губ. Отец его получил образование в духовной семинарии и был сельским дьяконом, но затем с семьей переехал в Петербург, где, получив звание частного поверенного, успешно занимался частной практикой; при этом он удивлял знавших его своей способностью легко и быстро разрешать тонкие и трудные дела юридического характера. Он был женат дважды. От первого брака имел сына А. А. и от второго В. А., также весьма талантливого математика. А. А. получил среднее образование в 5-ой гимназии, где рано и обнаружил свои блестящие дарования; А. А. не относился, однако, к числу лучших учеников; напротив, отцу А. А. поступали из гимназии жалобы на плохие его успехи по всем предметам, кроме математики, с предостережением, что это может повести к исключению из гимназии. В последних классах гимназические занятия (особенно латинский язык) были столь тягостны для А. А., что он собирался отказаться от гимназического образования и перейти в специальное техническое учебное заведение. К этому времени относится знакомство А. А. с А. Н. Коркиным и Е. И. Золотаревым. Знакомство завязалось в результате занятий А. А. высшей математикой. А. А. сообщил им письменно о новом, как он думал, приеме интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (это был один из известных приемов, которого тогда не знал А. А.). А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев отнеслись весьма внимательно к А. А., и впоследствии А. А. с большой теплотой и благодарностью вспоминал о своих учителях. Гимназическое образование А. А. окончил в 1874 году и в том же году поступил в Петербургский Университет. В Университете в то время А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев помимо лекций вели с лучшими студентами еще и кружковые занятия. А. А. сразу же стал одним из самых талантливых участников в этих занятиях, решая с большой быстротой трудные задачи, которые там ставились. В то время в университете читал лекции и П. Л. Чебышев; глубокие следы его влияния остались почти на всей научной деятельности А. А.

Кончил университет А. А. в 1878 году, получив золотую медаль за сочинение „Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей“.

В 1880 году А. А. уже защитил магистерскую диссертацию: „О бинарных квадратичных формах положительного определителя“, а в 1884 году докторскую диссертацию: „О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей“.

К преподаванию в университете А. А. приступил в 1880 году в качестве приват-доцента, а с 1886 года в качестве профессора. Преподавания в университете А. А. не прерывал до самой смерти, сократившии, правда, свое преподавание с 1905 года, выйдя в отставку и читая в качестве приват-доцента.

С 1886 года А. А. по предложению П. Л. Чебышева был избран за свои крупные научные заслуги членом Академии Наук (сначала адъюнктом, а в 1890 году экстраординарным академиком и затем в 1896 году ординарным).

Основным свойством в преподавательской деятельности А. А. было стремление дать слушателям весь материал курса в безупречно-строгом виде, при этом А. А. не стремился к нагромождению обильного материала, но к заложению прочного фундамента, на котором у его учеников строилось строгое критическое отношение к изучаемому материалу и к своей работе у тех из них, кто пошел по пути самостоятельного научного творчества.

В лекциях А. А. всегда видна была живая деятельность его острой мысли, несмотря на то, что материал для лекций был тщательно всегда обработан и подготовлен. Это особенно ценное свойство лектора, так как это больше всего вызывает также работу мысли и у слушателей.

Научные заслуги А. А. велики и разнообразны. А. А. оставил после себя около семидесяти работ, относящихся к разнообразным отделам математики, именно: к дифференциальным уравнениям, к теории чисел, к вопросам о функциях, наименее уклоняющихся от нуля, к вопросам о предельных величинах интегралов и к непрерывным дробям, к вопросам о приближенном вычислении определенных интегралов и медленно сходящихся рядов, и, наконец, к теории вероятностей. Мы укажем здесь только важнейшие работы, не имея в виду давать исчерпывающего обзора научной деятельности А. А.

Самые блестящие результаты в теории чисел достигнуты А. А. в его работах о точных верхних границах для minima неопределенных квадратичных форм. Этот вопрос для бинарных форм А. А. решил в его магистерской диссертации: „О бинарных квадратичных формах положительного определителя" 1880 г. Задача состоит в определении верхней границы minima форм

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

с данным положительным определителем

$$D = b^2 - ac$$

и с произвольными вещественными коэффициентами при целых значениях x и y. Задача получает следующее замечательное решение: существует бесконечный ряд чисел

$$\sqrt{N_1 D};\ \sqrt{N_2 D};\ \sqrt{N_3 D}; \ldots$$

такой, что первое из них является точной верхней границей minima всех рассматриваемых форм и достигается для форм эквивалентных некоторой одной форме; по исключении этих последних форм, точной верхней границей для minima оставшихся форм является второй член ряда; эта граница опять-таки достигается для форм, эквивалентных некоторой второй форме. По исключении этих форм верхней границей для minima оставшихся форм является третий член ряда и т. д.

Подобные результаты получены в позднейших работах также для квадратичных форм от трех и четырех переменных.

В теории чисел помимо этих работ важна работа „Sur les nombres entiers dépendants d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire", которая была началом целого ряда русских работ, относящихся к исследованию кубических областей; затем работа „О псевдо-эллиптических интегралах вида

$$\int \frac{x\,dx}{(x^3+c)\sqrt[3]{x^3+\partial}}\text{"},$$

где определяются случаи, когда интеграл выражается в логарифмах, и некоторые другие работы.

Следующая группа весьма важных и значительных работ А. А. относится к вопросам о предельных величинах интегралов при некоторых данных, относящихся к подынтегральной функции. Основная задача такова: даны значения интегралов

$$\int_a^b f(y)\,dy,\quad \int_a^b yf(y)\,dy,\ \ldots,\ \int_a^b y^n f(y)\,dy;$$

определить точный высший и точный низший предел интеграла

$$\int_a^x f(y)\,dy$$

при

$$a < x < b,$$

при условии $f(y) \geqq 0$ при всех значениях y.

В дальнейшем дается обобщение этой задачи путем ограничения $f(y)$ условиями вида

$$0 \leqq f(y) \leqq C$$

и другое обобщение, состоящее в замене данных значений вышеприведенных интегралов значениями интегралов

$$\int_a^b \lambda_0(y) f(y)\,dy,\quad \int_a^b \lambda_1(y) f(y)\,dy,\ \ldots,\quad \int_a^b \lambda_n(y) f(y)\,dy,$$

где $\lambda_0(y)$, $\lambda_1(y)$, ... известного вида функции.

С этими же работами связана работа об определении не отрицательной функции $f(y)$ по значениям всех интегралов

$$\int_0^\infty f(y)\,dy,\quad \int_0^\infty yf(y)\,dy,\quad \int_0^\infty y^2 f(y)\,dy,\ \ldots.$$

Эти вопросы решены в докторской диссертации: „О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей“ 1884 г. и в ряде работ, напечатанных в „Acta Mathematica“ (за 1886 г., 1902 г.) и в Изданиях Академии Наук.

В непрерывных дробях работы А. А. относятся к вопросам об их сходимости и о корнях знаменателей подходящих дробей, при чем, как частные случаи, получаются важные и интересные теоремы о распределении корней функций Ламе и полиномов Лежандра. Здесь во многих вопросах работы А. А. идут параллельно работам T. J. Stieltjes'a, иногда опережая их, иногда отставая от них.

Из довольно значительного числа работ, относящихся к разнообразным вопросам о функциях, наименее уклоняющихся от нуля, наиболее интересна „Об одном вопросе Д. И. Менделеева“, где получает полное решение вопрос об определении верхней границы значений производной полинома n'ой степени по данной верхней границе значений самого полинома.

Далее имеется небольшое число работ, посвященных некоторым частным вопросам относительно дифференциальных уравнений. Из них упомянем работу „К вопросу о черчении карт“, где решается задача о разыскании всех изображений сферы на плоскости, при которых всякий большой круг изображается кругом или прямой.

Занятия А. А. приближенными вычислениями относятся к определению остаточных членов в некоторых приближенных формулах и к преобразованию медленно сходящихся рядов в ряды быстро сходящиеся. Весьма ценным вкладом в эту область науки является его классическая книга „Исчисление конечных разностей“.

Труды А. А. в теории вероятностей выразились приблизительно в 25-ти отдельных работах и в его книге „Исчисление вероятностей“.

Научная деятельность А. А. Маркова привела к полному и завершенному решению основных вопросов исчисления вероятностей:

предельных теорем вероятностей,
закона больших чисел и
способа наименьших квадратов, —

вопросов, трудность которых не могла быть преодолена в науке до А. А. в течение многих десятилетий.

Помимо этих вопросов в некоторых из последних работ рассматриваются вопросы, связанные с математической статистикой. Есть, наконец, несколько работ, посвященных некоторым изолированным вопросам. Самым крупным достижением А. А. следует считать осуществление идей Чебышева о методе моментов. Метод моментов есть одно из самых высоких созданий русской науки. Основная его идея как-будто бы чрезвычайно естественна: сделать заключение о вероятности величине A заключаться в интервале (z_1, z_2) из того обстоятельства, что математические ожидания последовательных степеней A стремятся последовательно к интегралам

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} z^m \, dz$$

при всех целых и положительных значениях m.

Однако, к осуществлению этого плана пришлось итти по пути обходному, на котором каждый шаг был связан с необыкновенными трудностями.

Выводы основаны на рассмотрении непрерывных дробей, в которые разлагается интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{z-t}$$

и суммы

$$\sum \frac{f_n(t)}{z-t} \text{ (суммирование по различным значениям } t\text{)},$$

где

$$\sum_{n \to \infty} f_n(t)\, t^m \, dt \quad \longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^m \, dt.$$

Обозначая через

$$\frac{\overline{\Psi}_m(z)}{\overline{\omega}_m(z)} \text{ и } \frac{\Psi_m(z)}{\omega_m(z)}$$

m'ые подходящие дроби интеграла и суммы, будем иметь

$$\overline{\omega}_m(z) = e^{z^2} \frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m}.$$

Коэффициенты полиномов числителя и знаменателя дроби

$$\frac{\overline{\Psi}_m(z)}{\overline{\omega}_m(z)}$$

выражаются через некоторое число первых моментов функции e^{-t^2}, и подобным же образом для дроби

$$\frac{\Psi_m(z)}{\omega_m(z)}$$

через моменты функции $f_n(t)$.

В силу предположений относительно моментов, коэффициенты второй дроби имеют пределами коэффициенты первой. То же самое относится к непрерывным функциям от коэффициентов или корней второй и первой дроби.

Разлагая теперь подходящие дроби на простейшие

$$\frac{\Psi_m(z)}{\omega_m(z)} = \sum \frac{\rho_i}{z-\xi_i}, \qquad \frac{\overline{\Psi}_m(z)}{\overline{\omega}_m(z)} = \sum \frac{\overline{\rho}_i}{z-\overline{\xi}_i}$$

устанавливаем основное тождество

$$\sum_t f_n(t)\,\Omega(t) = \sum \rho_i\,\Omega(\xi_i)$$

при произвольной функции $\Omega(t)$ степени $\leqslant 2m-1$.

Это тождество приводит к так называемым неравенствам Чебышева

$$\sum^{t\leq\alpha} f_n(t) > \sum^{\xi_i<\alpha} \rho_i$$

$$< \sum^{\xi_{i-1}<\alpha} \rho_i$$

подобные неравенства для интеграла

$$\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-t^2}\,dt > \sum^{\xi_i < \alpha} \bar{\rho}_i$$

$$< \sum^{\xi_{i-1} < \alpha} \bar{\rho}_i$$

и указанные выше предельные свойства позволяют произвольно приблизить верхний и нижний пределы для сумм к пределам для интеграла.

К предельному равенству

$$\sum^{t < \alpha} f_n(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-t^2}\,dt$$

можно прийти двумя путями: или устанавливая надлежащую густоту распределения корней функции $\omega_m(z)$, или бесконечную малость величины $\bar{\rho}_i$ при беспредельно растущих значениях m. Первый путь пройден А. А. Марковым в его работе „Sur les racines de l'equation

$$e^{z^2} \frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m} = 0 \text{“}.$$

Второй — в его книге. В этом сущность метода моментов.

Имея в виду приложения к теории вероятностей, необходимо установить асимптотические равенства относительно математических ожиданий степеней рассматриваемых величин (математические ожидания в данном случае соответствуют моментам).

Рассматривая сумму независимых величин при некоторых ограничительных условиях, А. А. доказывает „теорему о математических ожиданиях“. Доказательство совершенно прямое и ясное: в разложении по формуле Ньютона выделяется некоторая симметрическая функция, значения которой превалируют над значениями всех остальных членов, и которая имеет довольно явно выраженное предельное значение.

Таким образом был решен труднейший вопрос теории вероятностей.

Однако, в 1900 и 1902 году появились две работы Ляпунова, где прямым путем были не только достигнуты, но и превзойдены результаты А. А.

И вот в течение целого ряда лет (около 8) А. А. не перестает думать о применении метода моментов к вновь открытым случаям, что он и выполняет блестяще в 1908 году в работе „О некоторых случаях теоремы о пределе вероятностей“. Условия Ляпунова относятся к тем случаям, когда для рассматриваемых величин возможны такие значения, при которых математические ожидания степеней, начиная с 3-ей, могут и не существовать. А. А. показывает возможность рассматривать только значения, не превосходящие некоторого предела, что дает возможность применения метода моментов.

Приблизительно с этого времени, немного раньше, Андрей Андреевич начинает применение метода моментов к случаю зависимых испытаний.

В 1907 году появляется работа: „Исследование замечательного случая зависимых испытаний“. В этой работе, как и во всех дальнейших работах, посвященных распространению предельной теоремы, вопрос ставится об установлении предельных соотношений математических ожиданий различных степеней рассматриваемой величины. Это достигается двумя путями: первый путь — это изучение производящих функций в виде ряда по степеням t с коэффициентами, равными математическим ожиданиям различных степеней.

Эти функции оказываются обыкновенно рациональными; разлагая их на простейшие, часто оказывается возможным выбрать только одну, которая затем при новом разложении в ряд и дает асимптотическое выражение математических ожиданий.

Второй путь — это непосредственное рассмотрение математических ожиданий степеней суммы. Идея здесь та же, что и в теореме о математических ожиданиях суммы независимых величин, но осуществление здесь сопряжено с большими трудностями.

В некоторых случаях Андрей Андреевич ограничивается только рассмотрением математических ожиданий квадрата суммы.

Указанная выше работа и работа „Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин связанных в цепь“ (1910 г.) и „Об одном случае испытаний, связанных в сложную цепь“ (1911 г.) посвящены таким связанным испытаниям, в которых вероятность результатов одного испытания после того, как известны результаты одного (простая цепь) или двух предыдущих (сложная цепь), делается независимой от результатов прочих из предшествующих испытаний.

При этом в трех из этих работ вероятности возможных случаев одинаковы при всех испытаниях (однородные цепи); в четвертой же они меняются от одного испытания к другому (цепь разнородная). Подобного рода зависимости весьма часты в статистике, и А. А. наблюдал их, считая буквы в „Евгении Онегине“ и „Детских годах Багрова внука“.

„Если мы рассматриваем буквы какого-нибудь текста, то вероятность гласной и согласной изменяется в зависимости от характера одной или двух предыдущих букв.

Подобного рода связи наблюдаются и в явлениях массового характера, с которыми имеет дело практическая статистика: погода, урожай, смертность и т. д.

Работы: „О связанных величинах, не образующих настоящей цепи“ (1911 г.) и „Об испытаниях, связанных в цепь не наблюдаемыми событиями“ (1912 г.) довольно близки к предыдущим; однако в первой зависимость хотя в основном близка к предыдущим, но отличается от них тем, что испытания, удаленные одно от другого, независимы, хотя результаты промежуточных неизвестны, и обращаются в зависимые, когда эти результаты выясняются. Во второй работе рассматриваются испытания, приводящие, помимо непосредственно наблюдаемых событий, еще к другому ряду событий. События этого последнего ряда связаны в цепь. Эта связь передается и на наблюдаемые события, но приобретает здесь иной характер.

Подобного рода связи играют весьма большую роль в статистике.

Дальнейшие работы: „Применение способа математических ожиданий к связанным рядам величин“ (1915 г.). „Обобщение задачи о последовательном обмене шаров“ (1918 г.). „Несколько задач исчисления вероятностей“ (1919 г.) относятся к более сложным зависимостям в нескольких одновременно наблюдаемых рядах событий.

К этим работам по методу и содержанию весьма близка работа „Об одной задаче Лапласа“ (1915 г.).

Совокупность рассмотренных работ дает разностороннее и глубокое исследование области зависимых испытаний. Относительно этой области нужно сказать, что научно обработана она единственно трудами А. А., при этом исключительно путем применения метода моментов. Таким образом из эскиза, набросанного Чебышевым, метод моментов обратился в самое мощное орудие теории вероятностей.

Метод моментов является одним из самых блестящих и самых характерных отражений научной деятельности А. А.: здесь ярко проявилось свойство его таланта давать решение вопроса до конца; не останавливаясь перед трудностями, как бы велики они ни были, а также свойство исчерпывающе и всесторонне изучать область, взятую им для исследования. Эти свойства проникают через всю научную деятельность А. А. Этими самыми чертами характеризуются его работы о законе больших чисел, где он показывает возможность далеко распространить пределы приложимости этого закона, а также и указывает области, в которых этот закон не господствует.

Проведение метода наименьших квадратов есть также труд, до конца завершенный. В нем, осуществляя идеи Гаусса, Андрей Андреевич совершенно выявил всю произвольность основ метода и разграничил области допущений от тех его частей, где уже имеется вполне определенно поставленная задача математического анализа.

В рассмотренных выше работах о зависимых испытаниях приходится наблюдать величину, называемую в статистике коэффициентом дисперсии.

В работе: „О коэффициенте дисперсии“ (1916 г.) доказывается равенство единице математического ожидания коэффициента дисперсии в случае однородных независимых испытаний.

В двух работах: „О вероятности a posteriori“ — 1900 и 1914 г. — дается вероятность различных предположений о значении вероятности, определенной по наблюдениям. Здесь также появляется известный интеграл Laplace'a, который позволяет сделать определенные предельные заключения.

Чтобы заключить обзор научной деятельности А. А., я обращусь теперь специально к его книге „Исчисление вероятностей“ — 1913 г. Многие стороны научной деятельности А. А. нашли свое завершенное развитие именно в этой книге; поэтому научный материал ее уже получил отражение в моем обзоре, и я имею в виду только отметить общие черты этого замечательного произведения.

Основная черта книги, как и всех научных работ А. А., есть полная строгость во всем построении теории, при этом, однако, в книге нет того, что можно было бы назвать аксиоматикой теории вероятностей, — к аксиоматике А. А. относился отрицательно, а кроме того А. А. считал, что понятия усваиваются не путем их формального определения, а „нашим отношением к ним, которое выясняется постепенно“.

Весьма ценным свойством книги является то, что на ряду с чертами, которые делают книгу весьма крупным научным произведением, материал ее чрезвычайно тщательно обработан в интересах начинающего читателя. Очень много внимания уделяется простейшим численным примерам, разобранным необыкновенно подробно. Доказательства проводятся с исчерпывающей полнотою, не упускается ни один пункт, который мог бы вызвать сомнение или непонимание у читателя. Характерно далее в книге одинаково строгое отношение автора к самым простым и самым тонким вопросам: как нельзя сделать ни одного упрека в нестрогости доказательства, так точно нельзя, повидимому, разыскать ни одной вычислительной ошибки.

При решении вопросов прикладного характера всегда дается оценка решения с точки зрения практических приложений. При этом не делается ни одного строго не обоснованного заключения, которые так соблазнительны в теории вероятностей.

Самым ценным свойством книги является то, что она дает не обезличенный сглаженный научный материал, а вся проникнута чертами непосредственного исследования. Эти черты дают книге характер редкого классического произведения, равного которому нет в теории вероятностей.

Настоящее четвертое издание выходит вновь переработанным и очень значительно дополненным — более чем на половину по сравнению с предыдущими.

Особенно большое внимание посвящено развитию метода наименьших квадратов в применении к математической статистике. При проведении метода наименьших квадратов выясняется значение коэффициента дисперсии. Теория корреляций получает совершенно новое развитие из метода наименьших квадратов, а ее результаты получают новую оценку.

Занятиям по теории вероятностей А. А. посвятил вторую половину своей жизни, научное творчество не покидало его даже в последние тяжелые годы русской жизни.

Кончил научную деятельность А. А. уже прикованный к постели смертельной болезнью, ясно сознавая свое положение.

Последняя работа А. А. была представлена в заседании Академии Наук в феврале 1922 г.: „Трудность метода моментов, два примера неполного разрешения ее".

Это единственная работа А. А., в которой нет полного решения поставленной задачи, и на опубликование ее в таком виде А. А. решился только из опасений не успеть довести ее до конца.

После этого А. А. прожил всего несколько месяцев. Здоровье его, с некоторыми колебаниями, неуклонно ухудшалось. Трудно указать определенно болезнь, сведшую А. А. в могилу: врачи устанавливали последовательно ряд болезней, которым А. А. был подвержен в течение 8 — 10 последних месяцев своей жизни.

Смерть наступила от процесса заражения крови, который ясно обнаружился в последнюю неделю жизни. Последние дни температура превышала 40°, при этом, однако, А. А. сохранял полное сознание и острую восприимчивость и память, как в здоровом состоянии. Близость смерти была ясна ему и не страшила его до самых последних минут его сознательного существования. За $1^1/_2$ дня до смерти А. А. впал в бессознательное состояние и умер в $10^1/_2$ час. веч. 20 июля 1922 г.

Проф. *А. С. Безикович.*

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГЛАВА I

Основные понятия и теоремы

§ 1. Прежде всего необходимо ввести ряд выражений (терминов), которыми мы постоянно будем пользоваться в разнообразных случаях.

Понятие о вероятности связано с теми вопросами, на которые мы * можем отвечать только так: должно быть

либо A, либо B, либо $C, \ldots\ldots$, либо F, либо G.

Для однообразия и краткости условимся называть

$$A,\ B,\ C, \ldots\ldots,\ F,\ G,$$

появляющиеся в ответе на какой-нибудь вопрос, *событиями* или *случаями*, независимо от содержания вопроса. Совокупность же условий, при которых вопрос получает определенное решение, будем называть *испытанием*. Понятие об этой совокупности по существу дела заключает в себе нечто неопределенное. Мы считаем ее известною с того момента, когда ответом на поставленный вопрос служит уже указание одного из вышеперечисленных событий. И обратно, если бы эта совокупность была известна, то было бы известно, какое именно из событий

$$A,\ B,\ C, \ldots\ldots,\ F,\ G$$

имеет место. Но вместо нее известны только некоторые условия испытания.

Заметим, что известные условия часто можно рассматривать как постоянные для многих испытаний, а неизвестные как переменные, отличаю-

* Слово „мы" общеупотребительно в математике и не сообщает исчислению вероятностей никакой особой субъективности.

щие испытания друг от друга. Тогда наши суждения, основанные только на известных условиях, будут одинаково относиться к каждому из этих испытаний, которые могут сопровождаться совершенно различными результатами. Иногда испытание может определяться только принадлежностью к известной группе испытаний.

События

$$A, B, C, \ldots\ldots, F, G$$

мы называем *единственно возможными*, если одно из них наверно должно быть. Соблюдение этого условия, конечно, необходимо для того, чтобы наш ответ, состоящий в перечислении событий, можно было признать правильным.

Мы будем называть события

$$A, B, C, \ldots\ldots, F, G$$

несовместимыми, если каждое из них исключает остальные, так что невозможно одновременное существование каких бы то ни было двух из этих событий.

Эти термины не возбуждают никаких сомнений, хотя мы не имеем верных способов для решения вопроса о совместимости или несовместимости событий во всех случаях.

Для установления понятия о вероятности, как о числе, необходим еще один термин, который не возбуждает сомнения только в чисто теоретических вопросах.

Два события мы называем *равновозможными*, если нет никаких оснований ожидать одного из них предпочтительно перед другим. Несколько событий мы называем равновозможными, если каждые два из них равновозможны *. Это определение можно считать недостаточно ясным или неполным, но едва ли возможно заменить его лучшим; в дополнение к нему скажем сейчас только, что равновозможность событий сохраняется до тех пор, пока мы в ней не сомневаемся и признаем ее.

В известных теоретических вопросах равновозможность рассматриваемых событий представляется нашему уму вполне ясно; в других мы условливаемся, какие именно события считаем равновозможными. В практи-

* По моему мнению, различные понятия определяются не столько словами, каждое из которых может, в свою очередь, потребовать определения как нашим отношением к ним, которое выясняется постепенно.

ческих же вопросах мы можем быть вынуждены считать равновозможными и такие события, равновозможность которых весьма сомнительна.

Положим теперь, что события

$$A, B, C, \ldots\ldots, F, G$$

единственно возможны, несовместимы и равновозможны. Тогда вероятностью каждого из этих событий называется дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель числу их.

От этого простейшего случая перейдем к более сложному.

Положим, что единственно возможные и несовместимые события

$$A, B, C, \ldots\ldots, F, G$$

не равновозможны, но могут быть разбиты на равновозможные, представляющие частные виды их. Пусть

$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\alpha$ частные виды события A,
$b_1, b_2, \ldots\ldots, b_\beta$ частные виды события B,
. . . .
$g_1, g_2, \ldots\ldots, g_\omega$ частные виды события G;

так что при существовании A должно быть одно и только одно из событий

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\alpha,$$

при существовании B должно быть одно и только одно из событий

$$b_1, b_2, \ldots\ldots, b_\beta$$

и т. д.

События

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\alpha, b_1, b_2, \ldots\ldots, b_\beta, \ldots\ldots, g_1, g_2, \ldots\ldots, g_\omega,$$

конечно, несовместимы; кроме того, мы предполагаем их, как было уже сказано, равновозможными.

При таких предположениях мы назовем *вероятностями* событий

$$A, B, C, \ldots\ldots, G$$

соответственно дроби

$$(1)\qquad \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\ldots+\omega},\ \frac{\beta}{\alpha+\beta+\ldots+\omega},\ \ldots\ldots,\ \frac{\omega}{\alpha+\beta+\ldots+\omega}.$$

Некоторые ученые различают несколько видов вероятности, напр., объективную и субъективную, но с математической точки зрения нет необходимости в таком различии, так как оно сводится к различию в данных.

Условимся называть события

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_\alpha,$$

при которых имеет место A, *благоприятными* для A, события

$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ b_\beta$$

благоприятными для B и т. д.; все же равновозможные события

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\alpha,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_\beta,\ \ldots,\ g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_\omega$$

будем называть событиями или случаями, соответствующими вопросу. Установив эти названия, мы можем формулировать данное нами определение вероятности следующим образом.

Вероятностью события называется дробь, числитель которой представляет число равновозможных случаев, благоприятных этому событию, а знаменатель — число всех равновозможных случаев, соответствующих вопросу.

На этом определении вероятности и будут основаны дальнейшие выводы. Приведение событий к равновозможным не представляет, конечно, вполне определенной операции, но, напротив, допускает значительное разнообразие, так как мы можем увеличивать число равновозможных случаев, разбивая их на более частные виды, и можем уменьшать число равновозможных случаев, соединяя по несколько случаев в один. Поэтому для одного и того же события мы можем получить несколько выражений вероятности его. Чтобы все эти выражения приводились к одному числу, важно строго соблюдать следующие основные положения.

Два события равновозможны, если они разбиваются на одинаковое число равновозможных событий; два события неравновозможны, если *они разбиваются на неодинаковое число равновозможных случаев: при* $\alpha = \beta$ *события A и B равновозможны, а при* $\alpha > \beta$ *и при* $\alpha < \beta$ *неравновозможны. И наоборот, если два равновозможных события разбиваются на неодинаковое число различных событий, то эти последние не могут быть равновозможными.*

Всякую же замену одних равновозможных случаев другими, не удовлетворяющую этому условию, необходимо рассматривать как изменение данных.

И соответственно этому можно признать теоретически правильно поставленными только те вопросы исчисления вероятностей, которые, не оставляя искомых вероятностей неопределенными, не допускают изменения их без ясного указания на изменение данных.

Неправильно поставленные задачи, часто весьма интересные и важные, с практической точки зрения, не могут быть, конечно, предметом строгого математического анализа, пока теми или иными добавочными данными они не превращены в правильно поставленные.

По установленному нами определению вероятность представляется рациональным числом, лежащим между нулем и единицей. Определяя же вероятности некоторых событий, как пределы вероятностей других событий, мы введем иррациональные числа. О введении в исчисление вероятностей иррациональных чисел будем говорить подробнее впоследствии.

Предельными величинами вероятности различных событий служат единица и нуль. Вероятность достигает единицы для событий достоверных, которым благоприятствуют все случаи, и обращается в нуль для событий невозможных, которым не благоприятствует ни один случай.

И мы можем утверждать, что вероятность единица указывает на достоверность события, а вероятность нуль на невозможность его, по крайней мере, тогда, когда эта вероятность установлена прямым счетом равновозможных случаев.

§ 2. Для выяснения понятия о вероятности, как о числе, обратимся к следующему примеру, которым будем пользоваться и далее.

Пусть взят сосуд, содержащий a белых шаров с № 1, b белых шаров с № 2, c черных шаров с № 1, ∂ черных шаров с № 2 и не содержащий никаких других шаров.

Из этого сосуда вынут один шар, и поставлен вопрос о цвете или о нумере его, или, наконец, о цвете и нумере.

В данном случае испытание состоит в том, что из сосуда вынимают некоторый определенный шар.

Если мы видели этот шар, то можем дать на поставленный вопрос определенный ответ. Если же вынутого шара мы не видели и известны нам только вышеуказанные обстоятельства, то на вопрос о цвете шара мы ответим:

либо белый, либо черный,

указывая таким образом два возможных события; на вопрос о нумере шара перечислим также два события:

№ 1 и № 2;

наконец, наш ответ о цвете и нумере шара будет состоять в перечислении четырех событий:

белый с № 1, белый с № 2, черный с № 1, черный с № 2.

Останавливаясь на последнем вопросе, предположим сначала, что все наши данные состоят только в том, что сосуд, из которого вынут шар, не содержит других шаров, кроме белых и черных с нумерами 1 и 2.

Тогда перечисленные нами четыре несовместимых события, белый с № 1, белый с № 2, черный с № 1, черный с № 2, будут не только единственно возможными, но и равновозможными, и соответственно этому вероятность каждого из них будет выражаться дробью $\frac{1}{4}$ и останется этой дробью до тех пор, пока нет никаких указаний на их неравновозможность.

При тех же данных вероятность, что шар белый, будет $\frac{1}{2}$, так как появление белого шара и появление черного шара будут также событиями несовместными, единственно возможными и равновозможными.

Положим теперь, что нам известны неравенства

$$a > b > c > \partial.$$

В таком случае, придавая значение указанию на эти неравенства, мы имеем основание ожидать белого шара с № 1, предпочтительно перед белым шаром с № 2; мы имеем также основание ожидать белого шара с № 2, предпочтительно перед черным шаром с № 1.

Поэтому, если известны неравенства

$$a > b > c > \partial,$$

то четыре события,

$$\text{белый с № 1, белый с № 2, черный с № 1, черный с № 2,}$$

перестают быть равновозможными.

И мы лишены возможности разбить их на равновозможные, если только нам ничего неизвестно кроме неравенств

$$a > b > c > \partial.$$

При таких условиях мы вынуждены отказаться от представления вероятностей наших событий определенными числами.

Пусть, наконец, нам известны числа

$$a, \; b, \; c, \; \partial.$$

Тогда для получения равновозможных событий мы можем разбить рассматриваемые четыре события на более частные.

С этою целью отличим мысленно все шары друг от друга какими-нибудь значками, например, новыми нумерами.

Итак, вообразим, что белые шары с № 1 отличаются друг от друга и от прочих шаров нумерами

$$1, \; 2, \; 3, \; \ldots, \; a,$$

белые шары с № 2 отличаются нумерами

$$a+1, \; a+2, \; \ldots, \; a+b,$$

черные с № 1 отличаются нумерами

$$a+b+1, \; a+b+2, \; \ldots, \; a+b+c$$

и, наконец, черные с № 2 отличаются нумерами

$$a+b+c+1, \; a+b+c+2, \; \ldots, \; a+b+c+\partial.$$

Различив все шары друг от друга, мы можем разбить рассматриваемые четыре события на

$$a+b+c+\partial$$

событий, каждое из которых состоит в появлении шара с определенным нумером

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ a+b+c+\partial.$$

Эти новые события равновозможны, так как в сосуде находится по одному шару с каждым нумером

$$1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ a+b+c+\partial,$$

и потому нет никаких оснований ожидать появления одного из этих нумеров предпочтительно перед каким-либо другим из них.

Из них a событий, состоящие в появлении нумеров

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ a,$$

благоприятствуют появлению белого шара с № 1, так как они представляют частные случаи последнего события.

Поэтому, согласно определению, вероятность появления белого шара с № 1 выразится дробью

$$\frac{a}{a+b+c+\partial}.$$

На том же основании дробь

$$\frac{b}{a+b+c+\partial}$$

будет выражать вероятность выхода белого шара с № 2, дробь

$$\frac{c}{a+b+c+\partial}$$

будет выражать вероятность выхода черного шара с № 1 и, наконец, дробь

$$\frac{\partial}{a+b+c+\partial}$$

будет вероятностью выхода черного шара с № 2.

Если же вместо четырех событий мы различим только два, из которых одно состоит в появлении белого шара, а другое в появлении черного шара, то их вероятности соответственно выразятся дробями

$$\frac{a+b}{a+b+c+\partial} \quad \text{и} \quad \frac{c+\partial}{a+b+c+\partial}.$$

Положим теперь, что к указанным прежде данным прибавлено еще одно; именно, стало известным, какой из двух нумеров, 1 и 2, стоит на вынутом шаре.

Это новое данное изменяет величину вероятности вынутому шару быть белым. Именно, если известно, что на вынутом шаре стоит № 1, то на основании соображений, подобных прежним, мы должны выразить вероятность, что этот шар белый, дробью

$$\frac{a}{a+c},$$

а вероятность, что он черный, дробью

$$\frac{c}{a+c}.$$

Если же известно, что на вынутом шаре стоит № 2, то вероятность, что он белый, выразится дробью

$$\frac{b}{b+\partial}$$

и вероятность, что он черный, — дробью

$$\frac{\partial}{b+\partial}.$$

Приведенный нами пример может служить для пояснения следующей аксиомы *. *Если, при известных данных, события*

$$p, q, r, \ldots, u, v$$

равновозможны и делятся по отношению к событию A на благоприятные и неблагоприятные ему, то по присоединении к этим данным указания на появление события A те из событий

$$p, q, r, \ldots, u, v,$$

которые не благоприятствуют событию A, становятся невозможными и, следовательно, отпадают, остальные же из них остаются попрежнему равновозможными.

Приведенный нами пример показал также, что далеко не во всех случаях можно рассматривать вероятность, как определенное число.

Не останавливаясь на других примерах несуществования вероятности, как определенного числа, заметим, что не одно исчисление вероятностей, но и другие науки занимаются приближенным разысканием таких чисел, существование которых не установлено и не может быть установлено с математическою строгостью. Науки, основанные на опытах, стремятся, конечно, к возможной степени строгости, но не могут иметь в виду математическую строгость.

Опытным наукам следует уподобить и некоторые отделы исчисления вероятностей, непосредственно переходящие в ее приложения к практике. Но в теоретических, правильно поставленных, вопросах исчисление вероятностей прямо примыкает к алгебре.

В виду важности надлежащего выяснения основных понятий о равновозможных случаях и вероятности, приведем еще два простых, но поучительных примера.

Д'Аламбер (*Encyclopédie méthodique. Mathématiques*. T. I. *Croix ou pile*), говоря об игре в орлянку (croix ou pile) и приведя общепринятое перечисление равновозможных случаев при двух бросаниях монеты

1) орел, орел
2) решетка, орел
3) орел, решетка
4) решетка, решетка,

* Аксиомой мы называем такое положение, которое устанавливается без доказательства, как основание наших рассуждений.

выражает сомнение в правильности такого перечисления равновозможных случаев и вытекающей из него величины $\frac{3}{4}$ для вероятности появления орла при однократном или двукратном бросании монеты, на том основании, что в случае появления орла при первом бросании второе излишне, и потому вместо указанных четырех случаев следует различать только три

1) орел,
2) решетка, орел,
3) решетка, решетка.

(„Cependant, cela est il bien exact? Car pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup? Car, dès qu'une fois croix est venu, le jeu est fini et le second coup est compté pour rien. Ainsi, il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles: Croix, premier coup. Pile, croix, premier et second coup. Pile, pile, premier et second coup. Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier"). Не касаясь вопроса о равновозможности или неравновозможности перечисленных им случаев, он получает таким образом для искомой вероятности число $\frac{2}{3}$. На том же основании для трех бросаний он перечисляет только четыре случая:

1) орел,
2) решетка, орел,
3) решетка, решетка, орел,
4) решетка, решетка, решетка,

что доставляет ему для вероятности появления орла число $\frac{3}{4}$ вместо $\frac{7}{8}$. Эти выводы д'Аламбера, которые он сопровождает словами: „Ceci est digne, ce me semble, de l'attention des calculateurs, et irait a réformer bien des regles unanimement reçues sur les jeux de hasard", основаны на смешении равновозможных случаев с неравновозможными и, конечно, не могут быть признаны правильными.

Бертран в своем *Calcul des probabilités,* а за ним и Пуанкаре, между прочим, останавливаются на таком вопросе. Три ящика одинаковы по виду и имеют каждый по два отделения. Один из них содержит в каждом отделении по золотой медали, другой по серебряной, а третий — в одном золотую, а в другом — серебряную. Взят один из них. Спрашивается, как велика вероятность найти в его отделениях различные медали? Ответ очень прост: $\frac{1}{3}$, так как соответственно трем ящикам имеем три равновозможных случая.

Тот же ответ, очевидно, останется в силе и по вскрытии одного отделения взятого ящика. Но, как указывает Бертран, зная, что во вскрытом отделении находится, например, золотая медаль, и что медаль другого отделения либо золотая, либо серебряная, мы для той же вероятности можем получить значение $\frac{1}{2}$, если признаем оба предположения о металле неизвестной медали равновозможными.

Для устранения противоречия необходимо выяснить неравновозможность их и затем свести к равновозможным случаям, чего нет у Бертрана, но что делает Пуанкаре. Изменяя рассуждения последнего, соответственно установленному выше, мы предположим, что отделения каждого ящика как-нибудь отличаются друг от друга, например: назовем одно из них правым, а другое левым, а ящики назовем первым, вторым и третьим.

Пусть в обоих отделениях первого ящика золотые медали, в обоих отделениях третьего ящика серебряные медали, в левом отделении второго ящика золотая медаль и, наконец, в правом его отделении серебряная медаль. В таком случае, не зная ни ящика, ни вскрываемого отделения, ни находящейся в нем медали, мы можем прежние три равновозможных случая разбить на шесть равновозможных случаев

1) правое отделение 1-го ящика,
2) правое отделение 2-го ящика,
3) правое отделение 3-го ящика,
4) левое отделение 1-го ящика,
5) левое отделение 2-го ящика,
6) левое отделение 3-го ящика.

Из них 2-й и 5-й благоприятствуют нахождению в ящике медалей из различного металла, и потому рассматриваемая вероятность равна $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

А коль скоро нам известен металл медали во вскрытом отделении, но остается неизвестным: правое оно или левое, то из указанных шести случаев три отпадают, как невозможные, другие же три, согласно аксиоме, остаются равновозможными. Если эта медаль золотая, равновозможными случаями будут тогда 1-й, 2-й и 4-й, из которых только последний благоприятствует нахождению в ящике медалей из разного металла; если же она серебряная, то останутся 3-й, 5-й и 6-й случаи, из которых рассматриваемому событию благоприятствует только 5-й. Таким образом, вероятность его попрежнему остается равною $\frac{1}{3}$. Дело изменяется, коль скоро известен не только металл медали, но и отделение, из которого она вынута. Если известно, что вскрыто правое отделение и в нем оказалась золотая медаль, то наверно можно сказать, что медаль другого отделения также золотая, и вероятность рассматриваемого события оказывается нулем.

Наконец, вероятность того же события приводится к $\frac{1}{2}$, когда известно, что вскрыто левое отделение, и в нем оказалась золотая медаль, ибо тогда остаются только 4-й и 5-й случаи.

§ 3. Основанием исчисления вероятностей служит идея о равновозможных случаях; однако, это исчисление не существовало бы, как особая дисциплина, если бы во всех вопросах необходимо было достигать таких случаев и заниматься счетом их.

Необходимость в каждом частном случае обращаться для определения вероятностей к счету равновозможных случаев устраняется основными теоремами исчисления вероятностей, которые известны под названием *теоремы сложения* и *теоремы умножения вероятностей*.

Доказательство этих теорем не представляет затруднений, но соединено с упомянутым выше допущением, что все события можно приводить к равновозможным.

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность случиться одному из несовместимых событий, без указания, какому именно, равна сумме вероятностей этих событий.

Доказательство.

Пусть будут

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_k$$

несовместимые события. Пусть далее

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$$

означают случаи единственно возможные, несовместимые и равновозможные, из которых m_1 случаев благоприятствуют событию E_1, остальные же не благоприятствуют ему, m_2 случаев благоприятствуют событию E_2, остальные же не благоприятствуют ему и т. д., наконец, m_k случаев благоприятствуют событию E_k, а остальные не благоприятствуют ему.

При таких предположениях вероятности событий

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_k$$

выражаются, согласно определению, дробями:

$$\frac{m_1}{n},\ \frac{m_2}{n},\ \ldots,\ \frac{m_k}{n}.$$

В виду несовместимости событий

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_k$$

все случаи, благоприятные для определенного из них, не благоприятствуют остальным из этих событий.

Поэтому, если к m_1 случаям, благоприятным для E_1, мы присоединим m_2 случаев, благоприятных для E_2, m_3 случаев, благоприятных для E_3 и т. д., наконец, m_k случаев, благоприятных для E_k, то среди полученных нами таким образом

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k$$

случаев не будет одинаковых.

Эти различные между собою случаи, число которых равно $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$, благоприятствуют появлению того или другого из событий

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_k,$$

остальные же из рассматриваемых нами n случаев

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$$

не благоприятствуют ни одному из событий

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_k.$$

Следовательно, вероятность появления одного из событий

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_k,$$

без указания, какого именно, выразится, согласно определению, дробью

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n}$$

Остается заметить, что последняя дробь равна сумме

$$\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \ldots + \frac{m_k}{n},$$

и теорема доказана.

Примечание. Рассуждая подобно предыдущему, не трудно заметить, что сумма вероятностей событий совместимых представляет величину бо́льшую, чем вероятность случиться одному из них.

Рассматривая события

$$E_1,\ E_2, \ldots E_k,$$

как различные виды одного события E, мы можем выразить теорему сложения вероятностей еще следующим образом:

Если некоторое событие E разбивается на несколько несовместимых видов, то его вероятность равна сумме вероятностей всех этих видов.

Для пояснения теоремы сложения вероятностей обратимся к прежнему примеру.

Вероятности появления белого шара с № 1, белого с № 2, черного с № 1 и черного с № 2 выражались у нас соответственно дробями

$$\frac{a}{a+b+c+\partial},\ \frac{b}{a+b+c+\partial},\ \frac{c}{a+b+c+\partial},\ \frac{\partial}{a+b+c+\partial}.$$

Складывая первые две из этих дробей, получаем в сумме дробь

$$\frac{a+b}{a+b+c+\partial},$$

равную вероятности появления белого шара с № 1 или белого же с № 2, т. е. вероятность, что вынут шар белого цвета.

Подобным же образом сумма

$$\frac{a}{a+b+c+\partial}+\frac{c}{a+b+c+\partial}=\frac{a+c}{a+b+c+\partial}$$

представляют вероятность, что на вынутом шаре стоит № 1.

Одним из следствий теоремы сложения вероятностей можно считать такое положение:

Сумма вероятностей событий единственно возможных и несовместимых равна единице.

В справедливости этого положения можно убедиться непосредственно; для вывода же его из теоремы сложения вероятностей достаточно заметить, что появление одного из единственно возможных событий представляет событие достоверное, вероятность которого равна единице.

Особенно важен случай двух единственно возможных и несовместимых событий; такие события мы будем называть *противоположными*.

Каждому событию соответствует противоположное, состоящее в непоявлении первого.

В прежнем примере белый и черный цвет вынутого шара будут два противоположных события. Для появления же белого шара с № 1 противоположным событием будет появление черного шара или белого с № 2.

Сумма вероятностей двух противоположных событий составляет единицу; поэтому, имея вероятность p одного из них, мы получим вероятность q другого, вычтя первую вероятность из единицы:

$$p+q=1,\ q=1-p,\ p=1-q.$$

Если событие A достоверно, то противоположное ему невозможно; тогда вероятность события A равна единице, а вероятность противоположного ему равна нулю. Если же событие A невозможно, то противоположное ему достоверно; тогда вероятность события A равна нулю, а вероятность противоположного равна единице.

Чем ближе вероятность события к единице, тем больше имеем мы оснований ожидать появления такого события и не ожидать противоположного события.

В вопросах же практического характера мы можем быть вынуждены рассматривать события, вероятность которых более или менее близка к единице, как достоверные, и события, вероятность которых мала, как невозможные.

Соответственно этому, одна из важнейших задач исчисления вероятностей состоит в разыскании таких событий, вероятности которых близки к единице или к нулю.

Примечание. Известный естествоиспытатель Бюффон в своем *Essai d'arithmétique morale* (Oeuvres complètes de M. le C-te de Buffon, 1778 (малый октав). Tome dixième, p. 67—216; Oeuvres complètes de Buffon (большой октав), révues sur l'édition in 4°, de l'Imprimerie Royale et annotées par M. Flourens, Tome XII, p. 154—208) нашел даже возможным установить, что вероятности, не превосходящие 0,0001, следует рассматривать как равные нулю, на том основании, что каждый здоровый человек 56-ти лет с уверенностью расчитывает прожить 24 часа, хотя, согласно статистическим данным, приводимым Бюффоном, вероятность его смерти за такой промежуток времени равна 0,0001: „En consultant les Tables de mortalité, je vois qu'on en peut déduire qu'il n'y a que dix mille cent quatre-vingt-neuf à parier, qu'un homme de cinquante-six ans vivra plus d'un jour. Or comme tout homme de cet âge, ou la raison a acquis toute sa maturité et l'expérience toute sa force, n'a néanmoins nulle crainte de la mort dans les vingt-quatre heures, quoiqu'il n'y ait que dix mille cent quatre-vingt-neuf à parier contre un qu'il ne mourra dans ce court intervalle de temps, j'en conclus que toute probabilité égale ou plus petite, doit être regardée comme nulle, et que toute crainte ou toute espérance qui se trouve au-dessous de dix mille, ne doit ni nous affecter ni même nous occuper un seul instant le coeur ou la tête". Однако в примечании к своим словам он приводит письмо Даниила Бернулли, от 19-го марта 1762 года, который хотя и признает рассуждения Бюффона правильными, но указывает, что в статистических данных здоровые не отделены от больных и что потому для здоровых вероятность умереть надо значительно изменить: „J'approuve fort, Monsieur, votre manière d'estimer les limites des probabilités morales... C'est sans doute raisonner en Mathématicien Philosophe; mais ce principe ingénieux semble conduire à une quantité plus petite, car l'exemption de frayer n'est assurément pas dans ceux qui sont déjà malades. Je ne combats pas votre principe, mais il paroît plutôt à $\frac{1}{100000}$ qu'à $\frac{1}{10000}$".

Соглашаясь с указанием Д. Бернулли, Бюффон допускает, что число 10000, быть-может, следует немного увеличить. По этому поводу заметим сейчас же, что та самая вероятность, которая по отношению к отдельному случаю или отдельному лицу представляется ничтожной, может играть довольно значительную роль для совокупности многих случаев или большой группы лиц.

§ 4. Теорема умножения вероятностей.

Вероятность случиться двум событиям вместе равна произведению вероятности одного из них на вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое имеет место.

Доказательство.

Пусть из n единственно возможных, несовместимых и равновозможных случаев

$$C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}, \ldots, C_{m_1}, C_{m_1+1}, \ldots, C_n$$

благоприятствуют некоторому событию A первые m_1 случаев

$$C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}, \ldots, C_{m_1},$$

остальные же ему не благоприятствуют.

Пусть далее из случаев

$$C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}, \ldots, C_{m_1}$$

первые m случаев

$$C_1, C_2, \ldots, C_m$$

благоприятствуют другому событию B, остальные же ему не благоприятствуют.

При таких условиях вероятность события A выражается дробью

$$\frac{m_1}{n}.$$

Вероятность же события B, когда известно существование события A, выражается дробью

$$\frac{m}{m_1},$$

так как при существовании события A случаи

$$C_{m_1+1}, C_{m_1+2}, \ldots, C_n$$

невозможны, а случаи

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{m_1}$$

остаются попрежнему равновозможными.

Наконец, вероятность появления обоих событий A и B выражается дробью

$$\frac{m}{n},$$

так как оба события A и B появляются только при случаях

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_m.$$

Замечая, что дробь

$$\frac{m}{n}$$

равна произведению

$$\frac{m_1}{n}\cdot\frac{m}{m_1},$$

мы можем признать теорему умножения вероятностей доказанною.

Для пояснения ее может служить прежний пример.

В этом примере речь шла о шаре, вынутом из сосуда, который содержит a белых шаров с № 1, b белых с № 2, c черных с № 1, ∂ черных с № 2 и не содержит никаких других шаров.

Предполагая a, b, c, ∂ числами данными, мы установили для вероятности выхода белого шара величину

$$\frac{a+b}{a+b+c+\partial}.$$

Затем вероятность выхода шара с № 1 выражается дробью

$$\frac{a+c}{a+b+c+\partial};$$

вероятность же выхода шара с № 1, когда известно, что он белый, выражается дробью

$$\frac{a}{a+b}.$$

Помножая последнюю дробь на $\frac{a+b}{a+b+c+\partial}$, получаем величину

$$\frac{a+b}{a+b+c+\partial}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{a}{a+b+c+\partial},$$

равную вероятности, что вынутый шар белый и с № 1.

Ту же величину $\frac{a}{a+b+c+\partial}$ мы получим, если помножим дробь

$$\frac{a+c}{a+b+c+\partial},$$

равную вероятности выхода шара с № 1, на дробь

$$\frac{a}{a+c},$$

которая выражает вероятность, что вынутый шар белого цвета, когда известно, что на нем стоит № 1.

Считаем не лишним выразить теорему умножения вероятностей формулою:

$$(AB)=(A)\ (B,A)=(B)\ (A,B), \tag{2}$$

где (AB) означает вероятность появления двух событий A и B вместе, (A) и (B) означают соответственно вероятности событий A и B, наконец, (B,A) означает вероятность события B, когда известно существование A, и (A,B) означает вероятность события A, когда известно существование B.

Следует помнить, что никаких исключений теорема умножения вероятностей, как и теорема сложения вероятностей, не допускает, и все примеры противного представляют плод заблуждения и неправильного отношения к основным положениям исчисления вероятностей. Приведем один из подобных примеров. Лоран на стр. 85—87 своего *Traité du calcul des probabilités* (1873 г.) останавливается на такой задаче.

Пруд содержит определенное число n рыб равных размеров и одного вида; определить вероятность, при двукратном бросании сети поймать сначала a, потом b рыб.

Эта задача принадлежит к числу названных мною дурно поставленными и притом таких, которые невозможно хорошо поставить. Лоран считает вероятность поймать при первом бросании сети a рыб равною

$$P_{a,n}=\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots a\,1.2\ldots(n-a)}\cdot\frac{1}{2^n}=C_n^a:2^n,$$

принимая таким образом за равновозможные случаи, что не будет поймано ни одной рыбы, или все, или, наконец, a определенных рыб. При таком же условии, которое сохраним и мы, вероятность поймать второю сетью b рыб, когда первою поймано a рыб, а следовательно в пруде остается $n-a$ рыб, выражается числом

$$P_{b,n-a}=\frac{1.2.3\ldots(n-a)}{1.2\ldots b.1.2\ldots(n-a-b)}\cdot\frac{1}{2^{n-a}}=$$

$$=\frac{1}{2^{n-a}}C_{n-a}^b\cdot$$

и искомая вероятность поймать сначала a рыб и затем b рыб, на основании теоремы умножения вероятностей, должна выразиться произведением

$$P_{a,n}\cdot P_{b,n-a}=\frac{1}{2^{2n-a}}C_n^a\;C_{n-a}^b=$$

$$=\frac{1.2.3\ldots n}{2^{2n-a}\,1.2\ldots a\,1.2\ldots b\,1.2\ldots(n-a-b)}.$$

Придя к такому результату, Лоран признает, однако, его неправильным: „Mais il est facile de voir que le principe de la probabilité composée ne s'applique pas à ce problème, parce qu'à chaque cas possible de la première épreuve ne correspond pas toujours le même nombre de cas possibles de la seconde épreuve“. Все случаи, которые были приняты за равновозможные для первого бросания сети, Лоран, обращаясь ко второму бросанию сети, разбивает на неодинаковое число новых случаев и принимает эти последние также за равновозможные; сообразно возможным результатам второй сети он разбивает: случай, когда первою сетью не поймано ни одной рыбы, на 2^n случаев, каждый из n случаев, когда в первую сеть попала одна рыба, на 2^{n-1} случаев; каждый из $\frac{n(n-1)}{2}$ случаев, когда в первую сеть попали две рыбы, на 2^{n-2} случаев, и т. д., что дает в общем

$$2^n + n2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\, 2^{n-2} + \ldots + n.2 + 1 =$$
$$= 3^n \text{ случаев.}$$

Число случаев, благоприятствующих рассматриваемому событию, остается попрежнему равным $C_n^a\, C_{n-a}^b$; разделив его на 3^n, Лоран получает для искомой вероятности вместо прежней другую величину

$$C_n^a\, C_{n-a}^b : 3^n,$$

которую он признает за верную.

Не трудно видеть, что мы имеем здесь не исключение из теоремы умножения вероятностей, а заблуждение Лорана, который при переходе ко второй сети превратил равновозможные случаи первой сети в неравновозможные, разбив их на неодинаковое число случаев и признав последние равновозможными.

Теорема умножения вероятностей может быть следующим образом распространена на случай многих событий:

Если, расположив несколько событий в любом порядке, мы возьмем вероятность каждого из них в предположении, что предыдущие имеют место, то произведение всех этих вероятностей будет выражать вероятность случиться всем рассматриваемым событиям вместе.

Соответственно этому можем написать формулу

$$(E_1 E_2 \ldots E_k) = (E_1)(E_2, E_1)(E_3, E_1 E_2) \ldots$$
$$\ldots (E_k, E_1 E_2 \ldots E_{k-1}),$$

где $(E_1 E_2 \ldots E_k)$ означает вероятность случиться всем событиям E_1, $E_2, \ldots E_k$ вместе, символ (E_1) означает вероятность события E_1, и наконец под $(E_i, E_1 E_2 \ldots E_{i-1})$, при $i=2, 3 \ldots k$, мы подразумеваем вероятность события E_i, когда известно существование событий $E_1, E_2, \ldots E_{i-1}$.

К указанному обобщению теоремы умножения вероятностей мы можем придти, переходя последовательно от случая двух событий к случаю трех, от случая трех к случаю четырех событий и т. д.

Для выяснения хода рассуждений достаточно показать, каким образом случай трех событий сводится к случаю двух событий, так как подобным же путем случай четырех событий сводится к случаю трех событий и т. д.

Для того, чтобы существовали три события

$$E_1, E_2, E_3,$$

необходимо существование двух из них.

Если рассматривать затем существование двух событий E_1 и E_2, как одно событие F, то существование трех событий E_1, E_2, E_3 будет тождественно существованию двух событий F и E_3.

Поэтому, применяя два раза теорему умножения вероятностей для рассмотренного уже случая двух событий, можем установить два равенства

$$(E_1 E_2 E_3) = (E_1 E_2)\ (E_3, E_1 E_2)$$

$$\text{и } (E_1 E_2) = (E_1)\ (E_2, E_1),$$

из которых тотчас выводим

$$(E_1 E_2 E_3) = (E_1)\ (E_2, E_1)\ (E_3, E_1 E_2).$$

Теорема умножения вероятностей упрощается в одном важном случае, когда дело идет о событиях *независимых*.

Несколько событий

$$E_1, E_2, \ldots, E_k$$

мы называем *независимыми* друг от друга, если вероятность каждого из них не зависит от существования или несуществования остальных, так что никакое указание на существование или несуществование какихнибудь из событий

$$E_1, E_2, \ldots, E_k$$

не меняет вероятностей прочих.

Если события

$$E_1, E_2, \ldots, E_k$$

не зависят друг от друга, то вероятность каждого из них при существовании предыдущих, рассматриваемая в теореме, совпадает с вероятностью *того же события, определенною независимо* от существования или несуществования других.

Соответственно этому, применяя теорему умножения вероятностей к независимым событиям, мы можем придать ей следующее более простое выражение: *вероятность случиться нескольким независимым событиям вместе равна произведению их вероятностей.*

Примечание 1. Понятие о независимых событиях можно считать вполне ясным в известных теоретических вопросах; в других же вопросах это понятие, конечно, может совершенно затемняться вместе с затемнением основного понятия о вероятности.

Примечание 2. Во многих случаях зависимость или независимость событий друг от друга может обусловливаться не только сущностью этих событий, но и данными, при которых рассматриваются их вероятности.

Такие случаи будут приведены в шестой главе.

Теоремы о сложении и умножении вероятностей, в связи с вышеуказанной аксиомой, служат незыблемым основанием для исчисления вероятностей, как отдела чистой математики.

В одних случаях они дают нам искомые вероятности непосредственно; в других же случаях доставляют уравнение для разыскания вероятностей, существование которых, как известных величин, мы должны предварительно допустить.

ЛИТЕРАТУРА.

Laplace. Théorie analytique des probabilités. 1812. 1886.

Lacroix. Traité élémentaire du calcul des probabilités. 1808.

Poisson. Recherches sur la probabilité des jugements, en matière criminelle et en matière civile. 1837.

Чебышев. Опыт элементарного анализа теории вероятностей. 1845.

Буняковский. Основания математической теории вероятностей. 1846.

Bertrand. Calcul des probabilités. 1889. 1907.

Poincaré. Calcul des probabilités. 1896. 1912.

Kries. Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. Freiburg, 1896.

Stumpf. Über den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit. (Berichte der bayrischen Akademie. 1892).

Goldschmidt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik. 1897..

Czuber. Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. 1899.

Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2-te Auflage. 1910.

Bruns. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. 1906.

А. А. Чупров. Очерки по теории статистики. 1910.

М. Волков. Учение о вероятностях. 1913.

ГЛАВА II

О повторении испытаний

§ 5. Одна из важных задач исчисления вероятностей состоит в рассмотрении возможных результатов нескольких испытаний, при каждом из которых может случиться некоторое событие E.

Условимся отличать эти испытания друг от друга нумерами

$$1, 2, 3, \ldots .$$

и будем обозначать буквою F, для каждого из них, событие, противоположное событию E.

Останавливаясь сначала на двух испытаниях, мы можем различить четыре случая:

$$EE, \ EF, \ FE, \ FF.$$

Первый из этих случаев состоит в появлении события E при обоих испытаниях; второй — в появлении E при первом испытании и непоявлении E при втором испытании и т. д.

Прежде чем приступить к рассмотрению вероятностей указанных нами четырех случаев, установим понятие о независимых испытаниях, которыми и будем исключительно заниматься.

Несколько испытаний мы называем *независимыми* по отношению к событию E, если вероятность события E при каждом из них не зависит от результатов прочих (эти вероятности мы предполагаем, конечно, установленными соответственно некоторым данным, остающимся неизменными).

В противном случае мы назовем испытания *связанными*.

Предполагая рассматриваемые два испытания независимыми, обозначим через p_1 вероятность события E при первом испытании, а через p_2 вероятность события E при втором испытании.

Тогда вероятность F при первом испытании будет выражаться разностью $1-p_1$, которую мы обозначим через q_1; вероятность же события F при втором испытании выразится разностью $1-p_2$, которую мы обозначим через q_2.

При таких предположениях и обозначениях, пользуясь теоремой умножения вероятностей, находим для вышеупомянутых четырех случаев

$$EE,\ EF,\ FE,\ FF$$

соответственно следующие вероятности

$$p_1p_2,\ p_1q_2,\ q_1p_2,\ q_1q_2.$$

Рассматривая затем второй и третий случаи как частные виды одного события, состоящего в однократном появлении события E, заключаем, что вероятность однократного появления события E, при рассматриваемых нами двух испытаниях, выражается суммою

$$p_1q_2+q_1p_2.$$

Итак, различая при двух испытаниях три случая, из которых первый состоит в двукратном появлении события E, второй в однократном его появлении и третий в совершенном непоявлении события E, мы находим для этих случаев такие вероятности:

$$p_1p_2,\ p_1q_2+q_1p_2,\ q_1q_2.$$

Заметим, что эти три числа представляют соответственно коэффициенты при ξ^2, ξ и ξ^0 в разложении произведения

$$(p_1\xi+q_1)(p_2\xi+q_2)$$

по степеням произвольного числа ξ.

Не трудно также видеть, что сумма найденных нами вероятностей

$$p_1 p_2,\ p_1 q_2 + q_1 p_2,\ q_1 q_2$$

составляет единицу, как и должно быть для вероятностей единственно возможных и несовместимых событий.

Обращаясь к трем испытаниям, мы можем различить восемь случаев, которые, подобно прежним четырем, представим так:

$$EEE,\ EEF,\ EFE,\ FEE,\ EFF,\ FEF,\ FFE,\ FFF.$$

Предполагая три испытания независимыми, присоединим к прежним обозначениям

$$p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2,$$

которые относятся к первым двум испытаниям, соответственные обозначения

$$p_3,\ q_3$$

для вероятностей события E и события F при третьем испытании.

При таких условиях вероятности вышеуказанных восьми случаев выражаются, на основании теоремы умножения вероятностей, произведениями

$$p_1 p_2 p_3,\ p_1 p_2 q_3,\ p_1 q_2 p_3,\ q_1 p_2 p_3,\ p_1 q_2 q_3,\ q_1 p_2 q_3,\ q_1 q_2 p_3,\ q_1 q_2 q_3.$$

Затем мы можем рассматривать случаи 2-й, 3-й и 4-й как частные виды одного события, состоящего в двукратном появлении события E; мы можем также рассматривать случаи 5-й, 6-й и 7-й как частные виды другого события, состоящего в однократном появлении события E.

Тогда при помощи теоремы сложения вероятностей найдем, что при трех испытаниях вероятность событию E случиться два раза, а противоположному один, представляется суммою

$$p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3;$$

вероятность же событию E случиться один раз, а противоположному два раза, представляется суммою

$$p_1 q_2 q_3 + q_1 p_3 q_3 + q_1 q_2 p_3.$$

Итак, различив при трех испытаниях четыре случая, из которых первый состоит в трехкратном появлении события E, второй в двукратном, третий в однократном его появлении и, наконец, четвертый в непоявлении того же события E, мы находим для этих четырех случаев соответственно следующие вероятности:

$$p_1 p_2 p_3, \quad p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3,$$
$$p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3, \quad q_1 q_2 q_3.$$

Заметим, что полученные нами четыре числа равны коэффициентам при ξ^3, ξ^2, ξ, ξ^0 в разложении произведения

$$(p_1 \xi + q_1)(p_2 \xi + q_2)(p_3 \xi + q_3)$$

по степеням произвольного числа ξ; сумма же их составляет единицу.

Прежде чем перейти к общим формулам для любого числа независимых испытаний, поясним частным примером разницу между независимыми и связанными испытаниями.

Положим, что мы вынимаем несколько шаров из сосуда, содержащего a белых и b черных шаров и не содержащего никаких других шаров.

Рассматривая затем вынимание каждого шара, как отдельное испытание, различим столько испытаний, сколько мы вынем шаров. Каждое испытание приводит к появлению одного шара определенного цвета; белый цвет шара мы назовем событием E, а черный событием F.

Различим теперь два предположения.

Сначала, чтобы иметь пример независимых испытаний, положим, что каждый вынутый шар тотчас возвращается обратно в сосуд для сохранения неизменным как числа белых, так и числа черных шаров в сосуде.

Тогда вероятность события E сохраняет для каждого испытания одну и ту же величину

$$\frac{a}{a+b},$$

независимо от результатов прочих испытаний; так как каждый шар мы вынимаем из сосуда, содержащего a белых и b черных шаров.

Перейдем к другому предположению, при котором рассматриваемые нами испытания будут уже связанными, именно, положим, что вынутые шары не возвращаются обратно в сосуд. При таком предположении вероятность события E для каждого испытания сохраняет прежнюю величину

$$\frac{a}{a+b}$$

до тех пор, пока результаты прочих остаются неопределенными. И не трудно определить, как изменяется эта вероятность по мере выяснения результатов некоторых испытаний.

Например, если известно, что вынут один белый шар, то вероятность вынуть другой белый шар выразится дробью

$$\frac{a-1}{a+b-1},$$

так как этот другой шар должен принадлежать к совокупности $a+b-1$ шаров, содержащей $a-1$ белых и b черных шаров. Если же известно, что вынут один черный шар, то вероятность, что какой-нибудь другой из вынутых нами шаров белый, выразится дробью

$$\frac{a}{a+b-1},$$

так как этот другой шар должен принадлежать к совокупности $a+b-1$ шаров, содержащей a белых и $b-1$ черных шаров.

И вообще, если среди вынутых нами шаров известно α белых и β черных, то для каждого из остальных вероятность, что он белый, выразится дробью

$$\frac{a-\alpha}{a+b-\alpha-\beta},$$

так как этот шар должен принадлежать к совокупности $a+b-\alpha-\beta$ шаров, содержащей $a-\alpha$ белых и $b-\beta$ черных шаров.

§ 6. Обратимся к общим формулам.

Теорема. *Если для n независимых испытаний, которые мы отличим друг от друга нумерами*

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

вероятности события E выражаются соответственно числами

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,$$

то вероятность, что событие E появится в эти n испытаний ровно m раз, может быть определена, как коэффициент при ξ^m в разложении произведения

$$(p_1\xi+q_1)\,(p_2\xi+q_2)\,\ldots\,(p_n\xi+q_n)$$

по степеням произвольного числа ξ, при чем

$$q_1=1-p_1,\ q_2=1-p_2,\ \ldots,\ q_n=1-p_n.$$

Для ознакомления с приемами исчисления вероятностей мы дадим два доказательства этой теоремы

Первое доказательство.

Событие, вероятность которого мы ищем и которое состоит в появлении E ровно m раз при n испытаниях, можно разбить на несколько несовместимых видов. Каждый из этих видов состоит в появлении события E при m определенных испытаниях и непоявлении E при остальных $n-m$ испытаниях.

Вероятность, что событие E появится при m определенных испытаниях и не появится при остальных $n-m$ испытаниях, определяется по теореме умножения вероятностей.

Именно, в силу этой теоремы вероятность, что событие E появится при испытаниях, обозначенных нумерами

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m,$$

и не появится при остальных $n-m$ испытаниях, выражается произведением

$$p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}\ldots p_{\alpha_m}q_{\beta_1}q_{\beta_2}\ldots q_{\beta_{n-m}}$$

где

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-m}$$

нумера остальных испытаний. Заметим, что произведение

$$p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \ldots p_{\alpha_m} q_{\beta_1} q_{\beta_2} \ldots q_{\beta_{n-m}}$$

можно получить из произведения

$$q_1 q_2 \ldots q_n$$

через замену множителей

$$q_{\alpha_1}, q_{\alpha_2}, \ldots, q_{\alpha_m}$$

множителями

$$p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_m}.$$

Определив вероятности каждого из упомянутых нами видов и сложив их, согласно теореме сложения вероятностей, получим искомую вероятность событию E появиться ровно m раз.

Итак, вероятность, что в рассматриваемые нами n испытаний событие E появится ровно m раз, выражается суммою всех произведений, которые можно получить из одного

$$q_1 q_2 q_3 \ldots q_n$$

через замену в m местах буквы q буквою p.

Тою же суммою, как известно, выражается коэффициент при ξ_m в разложении произведения

$$(p_1 \xi + q_1)(p_2 \xi + q_2) \ldots (p_n \xi + q_n)$$

по степеням произвольного числа ξ.

Таким образом теорема доказана.

Второе доказательство.

Подразумевая под буквою k любое из чисел

$$1, 2, \ldots, n,$$

а под буквою i любое из чисел

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

обозначим символом

$$P_{i,k}$$

вероятность, что в k испытаний, отмеченных нумерами

$$1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

событие E появится ровно i раз.

Затем, вводя произвольное число ξ, положим

$$\varphi_k(\xi) = P_{0,k} + P_{1,k}\xi + P_{2,k}\xi^2 + \ldots + P_{k,k}\xi^k$$

и рассмотрим ряд функций

$$\varphi_1(\xi),\ \varphi_2(\xi),\ \ldots,\ \varphi_{n-1}(\xi),\ \varphi_n(\xi).$$

Первая из них $\varphi_1(\xi)$, очевидно, равна

$$p_1\xi + q_1.$$

Остальные же можно определить последовательно на основании такой общей формулы

$$\varphi_{k+1}(\xi) = (p_{k+1}\xi + q_{k+1})\ \varphi_k(\xi),$$

которую мы сейчас установим.

Для намеченной цели выясним связь между

$$P_{i,k+1},\ P_{i,k} \text{ и } P_{i-1,k}$$

при

$$0 < i < k+1$$

и обратим внимание на равенства

$$P_{k+1, k+1} = p_{k+1} P_{k,k} \text{ и } P_{0, k+1} = q_{k+1} P_{0,k}.$$

При

$$0 < i < k+1$$

событие, вероятность которого обозначена символом

$$P_{i, k+1},$$

можно разбить на два вида в зависимости от результата $k+1$-го испытания, которое может сопровождаться появлением или непоявлением события E.

Если при $k+1$-м испытании событие E имеет место, то для того, чтобы общее число его появлений при $k+1$ испытаниях, обозначенных нумерами

$$1, 2, \ldots, k, k+1,$$

равнялось i, это событие E должно появиться при k испытаниях, обозначенных нумерами

$$1, 2, \ldots, k,$$

ровно $i-1$ раз. Если же при $k+1$-м испытании событие E не имеет места, то для того, чтобы общее число его появлений при $k+1$ испытаниях, обозначенных нумерами

$$1, 2, \ldots, k, k+1,$$

равнялось i, это событие должно появиться при k испытаниях, обозначенных нумерами

$$1, 2, \ldots, k$$

ровно i раз.

По теореме умножения вероятностей вероятность первого вида выражается произведением

$$p_{k+1} P_{i-1,k},$$

а вероятность второго — произведением

$$q_{k+1} P_{i,k}.$$

Следовательно, в силу теоремы сложения вероятностей, имеем

$$P_{i,k+1} = p_{k+1} P_{i-1,k} + q_{k+1} P_{i,k}.$$

Что касается равенств

$$P_{k+1,k+1} = p_{k+1} P_{k,k}$$

и

$$P_{0,k+1} = q_{k+1} P_{0,k},$$

то для их вывода достаточно одной теоремы умножения вероятностей.

Действительно, появление события E при первых $k+1$ испытаниях $k+1$ раз можно рассматривать, как существование двух событий, из которых одно состоит в появлении E при $k+1$-м испытании и имеет вероятность p_{k+1}, а другое состоит в появлении E при первых k испытаниях k раз и имеет вероятность $P_{k,k}$. Поэтому произведение

$$p_{k+1} P_{k,k}$$

должно выражать вероятность событию E случиться в первые $k+1$ испытаний $k+1$ раз, которая обозначена символом $P_{k+1,k+1}$. Произведение же

$$q_{k+1} P_{0,k}$$

выражает вероятность, что событие E не имеет места при $k+1$-м испытании и не появляется ни разу при первых k испытаниях; а эта вероятность совпадает с вероятностью $P_{0,k+1}$, что в первые $k+1$ испытаний событие E вовсе не появится.

Применяя указанные нами формулы к каждому из коэффициентов выражения

$$\varphi_{k+1}(\xi) = P_{0,k+1} + P_{1,k+1}\xi + P_{2,k+1}\xi^2 + \ldots + P_{k+1,k+1}\xi^{k+1},$$

получаем

$$\varphi_{k+1}(\xi)=\begin{cases} q_{k+1}P_{0,k}+q_{k+1}P_{1,k}\xi+\ldots\ldots+q_{k+1}P_{k,k}\xi^k \\ \qquad +p_{k+1}P_{0,k}\xi+\ldots\ldots+p_{k+1}P_{k-1,k}\xi^{k}+ \\ \qquad +p_{k+1}P_{k,k}\xi^{k+1}, \end{cases}$$

откуда тотчас выводим

$$\varphi_{k+1}(\xi)=(q_{k+1}+p_{k+1}\xi)(P_{0,k}+P_{1,k}\xi+\ldots\ldots+P_{k,k}\xi^k),$$

что дает нам вышеуказанную формулу

$$\varphi_{k+1}(\xi)=(p_{k+1}\xi+q_{k+1})\varphi_k(\xi),$$

так как, согласно принятым обозначениям, имеем

$$P_{0,k}+P_{1,k}\xi+P_{2,k}\xi^2+\ldots\ldots+P_{k,k}\xi^k=\varphi_k(\xi).$$

Полагая k последовательно равным

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n-1,$$

получаем ряд равенств

$$\begin{aligned} &\varphi_2(\xi)=(p_2\xi+q_2)\ \varphi_1(\xi)=(p_2\xi+q_2)\ (p_1\xi+q_1),\\ &\varphi_3(\xi)=(p_3\xi+q_3)\ \varphi_2(\xi),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_n(\xi)=(p_n\xi+q_n)\ \varphi_{n-1}(\xi), \end{aligned}$$

откуда посредством умножения или простых последовательных подстановок выводим формулу

(3) $$\varphi_n(\xi)=(p_1\xi+q_1)\ (p_2\xi+q_2)\ \ldots\ldots\ (p_n\xi+q_n),$$

равносильную теореме.

§ 7. Остановимся на важном частном случае доказанной нами теоремы; именно, на том случае, когда известные нам условия для всех испытаний одинаковы и когда соответственно этому все вероятности

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ldots,\ p_n$$

имеют одну и ту же величину, которую мы обозначим просто буквою p. Тогда произведение

$$(p_1\xi+q_1)\,(p_2\xi+q_2)\,\ldots\,(p_n\xi+q_n)$$

обращается в степень двучлена

$$(p\xi+q)^n,$$

где

$$q=1-p.$$

И, в силу известной формулы Ньютона, имеем

$$P_{m,n}=\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}p^m q^{n-m}. \tag{4}$$

Так выражается вероятность, что в n независимых испытаний событие E появится ровно m раз, если для каждого испытания, в отдельности, вероятность этого события равна p.

Выражение $P_{m,n}$, определенное формулою (4), мы будем рассматривать при всех возможных значениях m.

Таким образом получим ряд чисел

$$P_{0,n}=q^n,\ P_{1,n}=\frac{n}{1}pq^{n-1},\ P_{2,n}=$$

$$=\frac{n(n-1)}{1.2}p^2q^{n-2},\ \ldots\ P_{n,n}=p^n,$$

которые последовательно представляют вероятности, что число появлений события E, при n испытаниях, имеет значения

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

При произвольно заданных величинах p и n поставим себе целью найти, для какого значения m выражение

$$P_{m,n}=\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}p^m q^{n-m}$$

достигает своей наибольшей величины?

Это значение m мы назовем *наивероятнейшим* числом появлений события E, так как ему соответствует наибольшая вероятность $P_{m,n}$.

Для разыскания наивероятнейшего числа появлений события E сравним между собою каждые два смежных члена ряда

$$P_{0,n},\ P_{1,n},\ P_{2,n},\ \ldots\ldots,\ P_{n,n},$$

рассматривая их отношение друг к другу.

Простое деление дает нам равенство

$$\frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}}=\frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{p}{q},$$

которое показывает, что отношение

$$\frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}}$$

убывает при возрастании числа m; отсюда вытекают неравенства

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}}>\frac{P_{2,n}}{P_{1,n}}>\ldots\ldots>\frac{P_{n-1,n}}{P_{n-2,n}}>\frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}}.$$

Выделим теперь два частных предположения. Пусть сначала

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}}\leqq 1.$$

Тогда в силу указанных нами неравенств каждая из дробей

$$\frac{P_{2,n}}{P_{1,n}},\ \frac{P_{3,n}}{P_{2,n}},\ \ldots\ldots,\ \frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}}$$

меньше единицы, и потому

$$P_{0,n}\geqq P_{1,n}>P_{2,n}>\ldots\ldots>P_{n-1,n}>P_{n,n}.$$

С другой стороны, не трудно заметить, что неравенство

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}}\leqq 1$$

равносильно неравенству

$$\frac{np}{q} \leqq 1,$$

а это последнее приводится к неравенству

$$n+1 \leqq \frac{1}{p}$$

посредством простой замены числа q разностью $1-p$.

Таким образом мы убеждаемся, что при

$$n+1 < \frac{1}{p},$$

наивероятнейшим числом появлений события E, для рассматриваемых нами n испытаний, будет 0. Если же

$$n+1 = \frac{1}{p},$$

то для рассматриваемых нами n испытаний наивероятнейшим числом появлений события E будет не только 0, но и 1, так как в этом случае имеем

$$P_{0,n} = P_{1,n} > P_{2,n} > \ldots > P_{n,n}.$$

Подобным же образом, предполагая

$$(n+1)q \leqq 1,$$

приходим к неравенству

$$\frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}} \geqq 1,$$

а затем выводим ряд неравенств

$$P_{0,n} < P_{1,n} < P_{2,n} < \ldots < P_{n-1,n} \leqq P_{n,n}.$$

Этот ряд неравенств показывает, что при

$$n+1 < \frac{1}{q}$$

наивероятнейшим числом появлений события E, для рассматриваемых нами n испытаний, будет n. Если же

$$n+1=\frac{1}{q},$$

то наивероятнейшим числом появлений события E будет не только n, но и $n-1$, так как в этом случае имеем

$$P_{0,n}<P_{1,n}<\ldots<P_{n-1,n}=P_{n,n}.$$

Исключая указанные два предположения, положим теперь

$$n+1>\frac{1}{p} \quad \text{и} \quad n+1>\frac{1}{q}.$$

Тогда

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}}>1, \quad \text{а} \quad \frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}}<1,$$

и следовательно ряд убывающих дробей

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}}, \frac{P_{2,n}}{P_{1,n}}, \ldots, \frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}}$$

содержит как числа большие единицы, так и числа меньшие единицы. Отмечая переход от чисел больших единицы к числам меньшим ее, положим

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}}>\frac{P_{2,n}}{P_{1,n}}>\ldots>\frac{P_{\mu,n}}{P_{\mu-1,n}}>1$$

$$1\geqq\frac{P_{\mu+1,n}}{P_{\mu,n}}>\frac{P_{\mu+2,n}}{P_{\mu+1,n}}>\ldots>\frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}}.$$

Эти неравенства равносильны следующим:

$$P_{0,n}<P_{1,n}<P_{2,n}<\ldots<P_{\mu-1,n}<P_{\mu,n}$$

и

$$P_{\mu,n}\geqq P_{\mu+1,n}>P_{\mu+2,n}>\ldots>P_{n,n},$$

которые обнаруживают, что введенное нами число μ представляет наивероятнейшее число появлений события E при рассматриваемых нами n испытаниях.

Наивероятнейшим числом появлений события E может, кроме μ, быть и $\mu+1$, так как возможно равенство

$$P_{\mu,n}=P_{\mu+1,n}.$$

Для определения числа μ имеем неравенства

$$\frac{P_{\mu,n}}{P_{\mu-1,n}}=\frac{n-\mu+1}{\mu}\frac{p}{q}>1$$

и

$$\frac{P_{\mu+1,n}}{P_{\mu,n}}=\frac{n-\mu}{\mu+1}\frac{p}{q}\leqq 1,$$

из которых выводим

$$(n-\mu+1)p>\mu q,\ (n+1)p>\mu(p+q)=\mu$$

и

$$(n-\mu)p\leqq(\mu+1)q,\ np-q\leqq\mu(p+q)=\mu;$$

следовательно,

$$np+p>\mu\geqq np-q.$$

Числа $np+p$ и $np-q$ отличаются друг от друга только на одну единицу. Поэтому, если $np+p$ число дробное, то $np-q$ также число дробное и в промежутке

от $np-q$ до $np+p$

заключается только одно целое число.

Тогда наивероятнейшим числом появлений события E будет одно число μ, определяемое неравенствами

$$np+p>\mu>np-q,$$

как целое число, лежащее в промежутке

от $np-q$ до $np+p$.

Если же $np+p$ число целое, то $np-q$ также число целое, и нет никакого целого числа μ, которое удовлетворяло бы неравенствам

$$np+p>\mu>np-q.$$

Следовательно, в этом случае мы должны положить

$$\mu=np-q,$$

и наивероятнейшим числом появления события E будет, кроме μ, также и число $\mu+1$, равное $np+p$, так как при существовании равенства

$$\mu=np-q$$

должно быть

$$P_{\mu, n}=P_{\mu+1\, n}.$$

Для примера положим

$$p=\frac{2}{5}$$

и дадим n последовательно два значения:

$$n=4,\ n=5.$$

При $n=4$ сумма $np+p$ обращается в целое число 2, и потому мы должны иметь не одно наивероятнейшее число появлений события E, а два таких числа, одинаково вероятные: $np+p=2$ и $np-q=1$; действительно, имеем

$$P_{0,4}=\frac{81}{625},\quad P_{1,4}=P_{2,4}=\frac{216}{625},\quad P_{3,4}=\frac{96}{625},\quad P_{4,4}=\frac{16}{625}.$$

При $n=5$ сумма $np+p$ принимает дробное значение $2+\frac{2}{5}$, и целое число μ, определяемое неравенствами

$$np+p=2+\frac{2}{5}>\mu>np-q=2-\frac{3}{5},$$

равно 2. Соответственно этому наивероятнейшим числом появления события E при $n=5$ должно быть 2; действительно имеем

$$P_{0,5}=\frac{243}{3125},\quad P_{1,5}=\frac{810}{3125},\quad P_{2,5}=\frac{1080}{3125},\quad P_{3,5}=\frac{720}{3125},$$

$$P_{4,5}=\frac{240}{3125},\quad P_{5,5}=\frac{32}{3125}.$$

§ 8. В дальнейших выводах мы будем предполагать число p постоянным, а n переменным, которое можно увеличивать беспредельно.

И прежде всего заметим, что при таком предположении отношение наивероятнейшего числа появлений события E к соответствующему числу испытаний должно приближаться к пределу p, когда число испытаний n возрастает беспредельно.

В самом деле, наивероятнейшее число появлений события E при n испытаниях, по доказанному, не меньше $np-q$ и не больше $np+p$. Поэтому его отношение к числу испытаний не меньше $p-\frac{q}{n}$ и не больше $p+\frac{p}{n}$. Числа же

$$p-\frac{q}{n} \quad \text{и} \quad p+\frac{p}{n}$$

оба приближаются к одному и тому же пределу p, когда n возрастает беспредельно.

Следовательно, при беспредельном возрастании числа испытаний, отношение наивероятнейшего числа появлений события E к числу испытаний должно приближаться к тому же пределу p.

Полученный нами вывод относительно наивероятнейшего числа появлений события E не может служить, отдельно взятый, основанием для серьезных заключений о том, чего должно ожидать при многократном повторении испытаний, так как вероятность, что число появлений события E точно равно своей наивероятнейшей величине μ или $\mu+1$, приближается к пределу нуль, когда число испытаний возрастает беспредельно.

Рассматривая же вместе с наивероятнейшим и смежные значения числа появлений события E и исследуя их вероятности, мы установим весьма важную *теорему Якова Бернулли*.

§ 9. **Теорема Бернулли.**

Если имеем неограниченный ряд независимых испытаний и для всех их, в отдельности, вероятность некоторого события E одинакова, то *при достаточно большом числе этих испытаний будет сколь угодно близка к достоверности, т. е. к единице, вероятность, что отношение числа появлений события E к числу испытаний сколь угодно мало отличается от вероятности события E для каждого из них в отдельности.*

Иначе сказать, если p означает вероятность события E для каждого испытания, n — число их и m — число появлений события E, то при достаточно больших значениях n вероятность неравенств

$$-\varepsilon \leqq \frac{m}{n} - p \leqq +\varepsilon$$

будет больше $1-\eta$, каковы бы ни были данные положительные числа ε и η.

Теорема эта и ее доказательство находятся в конце 4-й части труда Якова Бернулли *Ars conjectandi,* который был выпущен в свет восемь лет спустя после смерти Якова Бернулли * его племянником Николаем Бернулли; полного перевода *Ars conjectandi* на русский язык нет, но 4-я часть его, которую можно считать первым серьезным научным трудом по теории вероятностей, переведена по поручению Академии Наук Я. В. Успенским в 1913 году, ровно 200 лет спустя после появления ее в свет. В виду важного значения теоремы Я. Бернулли мы приведем три различных доказательства ее, начиная с доказательства самого Я. Бернулли, который, как можно заключить из его слов: „Hoc igitur est illud Problema, quod evalgandum hoc loco proposui, postquam jam per vicennium pressi, et cujus tum novitas, tum summa utilitas cum pari conjuncta difficultate omnibus reliquis hujus doctrinae capitibus pondus et pretium superaddere potest“ — много посвятил ей времени и, по справедливости, высоко ставил ее.

Доказательство Бернулли.

Прежде всего, вводя два целых числа r, s, полагаем

$$\varepsilon = \frac{1}{r+s}, \quad p = \frac{r}{r+s}, \quad q = \frac{s}{r+s}, \quad n = (r+s)\,l = lt,$$

где l означает также некоторое целое число. При таких условиях и обозначениях наивероятнейшим числом m появлений события E при n испытаниях будет rl и вероятность выполнения неравенств

$$-\frac{1}{r+s} \leqq \frac{m}{n} - p \leqq \frac{1}{r+s}$$

* Родился в 1654 г., скончался в 1705 г.

выразится суммою

$$B+P_{rl}+A,$$

где

$$A=P_{rl+1}+P_{rl+2}+\ldots+P_{rl+l},\quad B=P_{rl-1}+P_{rl-2}+\ldots+P_{rl-l},$$

противоположная же вероятность нарушения тех же неравенств выразится суммою $M+N$ двух величин, определяемых формулами

$$\begin{array}{ll}
M=A_1+A_2+\ldots+A_{s-1}, & N=B_1+B_2+\ldots+B_{r-1},\\
A_1=P_{(r+1)l+1}+\ldots+P_{(r+2)l}, & B_1=P_{(r-1)l-1}+\ldots+P_{(r-2)l},\\
A_2=P_{(r+2)l+1}+\ldots+P_{(r+3)l}, & B_2=P_{(r-2)l-1}+\ldots+P_{(r-3)l},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{s-1}=P_{(r+s-1)l+1}+\ldots+P_{(r+s)l}, & B_{r-1}=P_{l-1}+\ldots+P_0.
\end{array}$$

Вместе с тем, в силу установленного выше, имеем

$$A_1<Ac,\ A_2<A_1c,\ldots,\quad B_1<B\partial,\ B_2<B_1\partial,\ldots$$

$$M<A(c+c^2+\ldots+c^{s-1})<\frac{Ac}{1-c},$$

$$N<B(\partial+\partial^2+\ldots+\partial^{r-1})<\frac{B\partial}{1-\partial}\,*$$

при

$$c=\frac{P_{rl+l}}{P_{rl}}=\frac{sl}{rl+1}\cdot\frac{r}{s}\cdot\frac{sl-1}{rl+2}\cdot\frac{r}{s}\cdot\ldots\ldots\frac{sl-l+1}{rl+l}\cdot\frac{r}{s}$$

$$<\left(\frac{sl-l+\alpha}{rl+l-\alpha+1}\cdot\frac{r}{s}\right)^{\alpha}$$

и

$$\partial=\frac{P_{rl-l}}{P_{r\cdot}}=\frac{rl}{sl+1}\cdot\frac{s}{r}\cdot\frac{rl-1}{sl+2}\cdot\frac{s}{r}\cdot\ldots\ldots\frac{rl-l+1}{sl+l}\cdot\frac{s}{r}$$

$$<\left(\frac{rl-l+\beta}{sl+l-\beta+1}\,\frac{s}{r}\right)^{\beta}$$

* Вместо этих неравенств Бернулли пользуется такими: $M<Ac(s-1)$, $N<B\partial(r-1)$.

для любых целых чисел α и β меньших числа l. Давая же числам α, β, l достаточно большие значения, мы можем удовлетворить одновременно неравенствам

$$\frac{sl-l+\alpha}{rl+l-\alpha+1}\cdot\frac{r}{s}<\frac{r}{r+1} \quad \text{и} \quad \left(\frac{r}{r+1}\right)^{\alpha}\leqq\eta,$$

$$\frac{rl-l+\beta}{sl+l-\beta+1}\cdot\frac{s}{r}<\frac{s}{s+1} \quad \text{и} \quad \left(\frac{s}{s+1}\right)^{\beta}\leqq\eta,$$

которые приводят к таким *

$$\alpha\geqq\frac{\log\frac{1}{\eta}}{\log(r+1)-\log r}, \qquad l>\alpha+\frac{s(\alpha-1)}{r+1}$$

$$\beta\geqq\frac{\log\frac{1}{\eta}}{\log(s+1)-\log s}, \qquad l>\beta+\frac{r(\beta-1)}{s+1}.$$

При соблюдении указанных неравенств будет:

$$P_{rl}+\left(A+B\right)\left(1+\frac{\eta}{1-\eta}\right)>1$$

и потому

$$P_{rl}+A+B>1-\eta;$$

иначе сказать, вероятность выполнения неравенств

$$-\frac{1}{r+s}\leqq\frac{m}{n}-p\leqq\frac{1}{r+s}$$

будет тогда превосходить $1-\eta$, в чем и состоит теорема Я. Бернулли.

Единственным существенным недостатком этого вполне строгого доказательства можно признать ограничительное условие, что число испытаний делится на $r+s$. Нетрудно, однако, устранить его.

* Исходя из неравенств $M<Ac(s-1)$ и $N<B\partial(r-1)$, Бернулли получает для α и β большие числа:

$$\frac{\log\frac{1}{\eta}+\log(s-1)}{\log(r+1)-\log r} \quad \text{и} \quad \frac{\log\frac{1}{\eta}+\log(r-1)}{\log(s+1)-\log s},$$

в силу чего увеличивается и число l.

Сохраняя наши обозначения p, q, n, m, ε, η, P_m, но устраняя ограничительные равенства

$$p=\frac{r}{r+s},\ q=\frac{s}{r+s},\ \varepsilon=\frac{1}{r+s},\ n=(r+s)\,l,$$

разобьем, подобно прежнему, вероятность рассматриваемых неравенств

$$-\varepsilon\leqq\frac{m}{n}-p\leqq+\varepsilon$$

на две суммы последовательных значений P_m:

$$\text{вероятность}\left(-\varepsilon\leqq\frac{m}{n}-p\leqq+\varepsilon\right)=A+B,$$

при

$$A=P_{np+\lambda}+P_{np+\lambda+1}+\ldots+P_{np+\lambda+g-1},\ 0\leqq\lambda<1^*,$$
$$n\varepsilon<\lambda+g\leqq n\varepsilon+1,$$
$$B=P_{np-\mu}+P_{np-\mu-1}+\ldots+P_{np-\mu-h+1},\ 0<\mu\leqq1^*,$$
$$n\varepsilon<\mu+h\leqq n\varepsilon+1.$$

Вместе с тем, вероятности M и N противоположных неравенств

$$\frac{m}{n}-p>\varepsilon \quad\text{и}\quad \frac{m}{n}-p<-\varepsilon,$$

разобьем также на суммы g и h последовательных значений P_m:

$$M=A_1+A_2+A_3+\ldots,\quad N=B_1+B_2+B_3+\ldots,$$
$$A_1=P_{np+\lambda+g}+P_{np+\lambda+g+1}+\ldots+P_{np+\lambda+2g-1},$$
$$A_2=P_{np+\lambda+2g}+P_{np+\lambda+2g+1}+\ldots+P_{np+\lambda+3g-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_1=P_{np-\mu-h}+P_{np-\mu-h-1}+\ldots+P_{np-\mu-2h+1},$$
$$B_2=P_{np+\mu-2h}+P_{np-\mu-2h-1}+\ldots+P_{np-\mu-3h+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

* Равенства $\lambda=0$, $\mu=1$ соответствуют случаю, когда np число целое, вместо них мы можем также положить $\lambda=1$, $\mu=0$, причисляя P_{np} не к сумме A, а к B.

Последние из этих сумм A_i, B_j, с наибольшими значками i, j, могут закончиться одним или несколькими нулями, т. е. содержать менее g и h членов отличных от нуля; но это обстоятельство никакого значения для наших выводов не имеет. Такое разложение M и N на слагаемые A_i, B_j дает нам возможность, в силу вышеприведенных объяснений, установить неравенства

$$M<\frac{Ac}{1-c}, \quad N<\frac{B\partial}{1-\partial}$$

при

$$c=\left(\frac{qn-\lambda-g+\alpha}{pn+\lambda+g-\alpha+1}\cdot\frac{p}{q}\right)^{\alpha} \text{ и } \partial=\left(\frac{pn-\mu-h+\beta}{qn+\mu+h-\beta+1}\cdot\frac{q}{p}\right)^{\beta}$$

для любых целых чисел α и β соответственно меньших g и h. Давая же числам α, β, n достаточно большие значения, мы можем удовлетворить как неравенствам

$$g\geqq\alpha, \quad h\geqq\beta,$$

так и неравенствам

$$\frac{qn-\lambda-g+\alpha}{pn+\lambda+g-\alpha+1}\cdot\frac{p}{q}<\frac{p}{p+\varepsilon}, \quad \left(\frac{p}{p+\varepsilon}\right)^{\alpha}\leqq\eta,$$

$$\frac{pn-\mu-h+\beta}{qn+\mu+h-\beta+1}\cdot\frac{q}{p}<\frac{q}{q+\varepsilon}, \quad \left(\frac{q}{q+\varepsilon}\right)^{\beta}\leqq\eta.$$

В самом деле, неравенства

$$\left(\frac{p}{p+\varepsilon}\right)^{\alpha}\leqq\eta, \quad \left(\frac{q}{q+\varepsilon}\right)^{\beta}\leqq\eta$$

доставляют для α и β такие конечные пределы:

$$\alpha\geqq\frac{\log\frac{1}{\eta}}{\log\frac{p+\varepsilon}{p}}, \quad \beta\geqq\frac{\log\frac{1}{\eta}}{\log\frac{q+\varepsilon}{q}}.$$

Принимая затем во внимание неравенства

$$\lambda+g>n\varepsilon, \quad \mu+h>n\varepsilon,$$

замечаем, что требуемые неравенства

$$\frac{qn-\lambda-g+\alpha}{pn+\lambda+g-\alpha+1}\cdot\frac{p}{q}\leqq\frac{p}{p+\varepsilon},\quad \frac{pn-\mu-h+\beta}{qn+\mu+h-\beta+1}\cdot\frac{q}{p}\leqq\frac{q}{q+\varepsilon}$$

будут выполнены, коль скоро будут выполнены следующие:

$$(qn-n\varepsilon+\alpha)(p+\varepsilon)\leqq q(pn+n\varepsilon-\alpha+1),\ (pn-n\varepsilon+\beta)(q+\varepsilon)\leqq$$
$$\leqq p(qn+n\varepsilon-\beta+1),$$

которые после простых выкладок устанавливают для n такие низшие пределы:

$$n\geqq\frac{\alpha(1+\varepsilon)-q}{\varepsilon(p+\varepsilon)},\quad n\geqq\frac{\beta(1+\varepsilon)-p}{\varepsilon(q+\varepsilon)}.$$

Для всех значений n, не меньших наибольшего из чисел

$$\frac{\alpha(1+\varepsilon)-q}{\varepsilon(p+\varepsilon)},\quad \frac{\beta(1+\varepsilon)-p}{\varepsilon(q+\varepsilon)}$$

рассматриваемая вероятность неравенств

$$-\varepsilon\leqq\frac{m}{n}-p\leqq\varepsilon$$

наверно будет превосходить $1-\eta$, при чем за α и β мы можем взять соответственно какие угодно целые числа, удовлетворяющие вышеустановленным неравенствам

$$\alpha\geqq\frac{\log\frac{1}{\eta}}{\log\frac{p+\varepsilon}{p}},\quad \beta\geqq\frac{\log\frac{1}{\eta}}{\log\frac{q+\varepsilon}{q}}.$$

По нашему выводу необходимо еще удовлетворить неравенствам

$$g\geqq\alpha,\quad h\geqq\beta;$$

но указанные нами значения n им уже удовлетворяют, ибо по условию

$$g > n\varepsilon - \lambda > n\varepsilon - 1 \quad \text{и} \quad h > n\varepsilon - \mu \geqq n\varepsilon - 1,$$

откуда при $n \geqq \frac{\alpha(1+\varepsilon)-q}{\varepsilon(p+\varepsilon)}$ и $n \geqq \frac{\beta(1+\varepsilon)-p}{\varepsilon(q+\varepsilon)}$ получаем

$$g \geqq n\varepsilon - 1 \geqq \frac{\alpha(1+\varepsilon)-q}{p+\varepsilon} - 1 = \alpha + \frac{(\alpha-1)q}{p+\varepsilon} - 1 \text{ и потому } g \geqq \alpha,$$

$$h \geqq n\varepsilon - 1 \geqq \frac{\beta(1+\varepsilon)-p}{q+\varepsilon} - 1 = \beta + \frac{(\beta-1)p}{q+\varepsilon} - 1 \text{ и потому } h \geqq \beta.$$

За α и β следует взять, конечно, возможно малые числа, так как с увеличением их возрастает и получаемый нами низший предел числа n. Вместо дробей $\frac{p}{p+\varepsilon}$ и $\frac{q}{q+\varepsilon}$ можно взять какие-нибудь дроби $\frac{1}{1+\delta}$, близкие к единице, что вместо вышеустановленных неравенств доставит нам нижеследующие:

$$\alpha \geqq \frac{\log \frac{1}{\eta}}{\log(1+\delta')}, \quad \beta \geqq \frac{\log \frac{1}{\eta}}{\log(1+\delta'')},$$

$$(pn + n\varepsilon - \alpha + 1)q \geqq (qn - n\varepsilon + \alpha)p(1+\delta'),$$

$$n \geqq \frac{\alpha(1+p\delta') - q}{\varepsilon(1+p\delta') - pq\delta'},$$

$$(qn + n\varepsilon - \beta + 1)p \geqq (pn - n\varepsilon + \beta)q(1+\delta''),$$

$$n \geqq \frac{\beta(1+q\delta'') - p}{\varepsilon(1+q\delta'') - pq\delta''}.$$

При надлежащем выборе чисел δ' и δ'' можно таким образом еще несколько уменьшить низший предел числа n, что мы покажем на частном примере.

Численный пример. Я. Бернулли значение своей теоремы, особенно для разыскания вероятности по наблюдениям — a posteriori, поясняет таким примером. В сосуде перемешаны белые и черные шары. Отношение числа белых шаров к числу всех шаров равно $\frac{2}{5}$, а для черных подобное же отношение равно $\frac{3}{5}$. Положим теперь, что нам эти отношения, иначе сказать, эти вероятности не известны; а мы можем только производить в неограниченном числе испытания, состоящие в вынимании одного шара. Цвета вынутых шаров записываются для памяти и подсчета, а сами шары постоянно возвращаются обратно в сосуд, чтобы сохранялось неизменным как число белых, так и число черных шаров в сосуде. Спрашивается, можем ли мы расчитывать по этим записям, составляя отношение числа вынутых белых шаров к соответствующему числу всех вынутых шаров, подойти сколь угодно близко к неизвестной нам вероятности, $\frac{2}{5}$, белого шара. Утвердительный ответ на этот вопрос дается теоремой Бернулли. В частности, согласно вычислениям Бернулли, тот, кто знает, что белые составляют $\frac{2}{5}$ всех шаров в сосуде, может с вероятностью, отличающеюся от достоверности менее чем на 0,001, утверждать, что при 25.550 записях, т.-е. когда будет вынуто и отмечено столько шаров, отношение числа вынутых белых к числу всех вынутых шаров не выйдет из пределов $\frac{19}{50}$ и $\frac{21}{50}$ — иначе сказать, будет отклоняться от $\frac{2}{5}$ не более, как на $\frac{1}{50}$. А приведенное нами изменение вычислений Бернулли позволяет еще уменьшить требуемое число записей. В самом деле, при

$$p=\frac{2}{5},\ q=\frac{3}{5},\ \varepsilon=\frac{1}{50},\ \eta=0{,}001$$

получаем

$$\frac{\log\dfrac{1}{\eta}}{\log\dfrac{p+\varepsilon}{p}}=\frac{3}{\log\ 1{,}05}=\frac{3}{0{,}021189\ldots}=141,\ldots$$

$$\frac{\log\frac{1}{\eta}}{\log\frac{q+\varepsilon}{q}}=\frac{3}{\log\ 1{,}0333\ldots}=\frac{3}{0{,}01424\ldots}=210,\ldots$$

и потому можем положить $\alpha=142$ и $\beta=211$, после чего для числа n оказываются достаточными следующие неравенства:

$$n\geqq\frac{142\,.\,1{,}02-0{,}6}{0{,}02\,.\,0{,}42}=\frac{144{,}24}{0{,}0084}=17243,\ldots$$

$$n\geqq\frac{211\,.\,1{,}02-0{,}4}{0{,}02\,.\,0{,}62}=\frac{214{,}82}{0{,}0124}=17324,\ldots$$

Применяя к тому же примеру более общие неравенства и полагая в них

$$\delta'=0{,}045,\quad \delta''=0{,}04,$$

получаем

$$\frac{\log\frac{1}{\eta}}{\log(1+\delta')}=\frac{3}{0{,}019116\ldots}=156,\ldots,\quad \alpha=157,$$

$$\frac{\log\frac{1}{\eta}}{\log(1+\delta'')}=\frac{3}{0{,}017033\ldots}=176,\ldots,\quad \beta=177,$$

$$\frac{\alpha(1+p\delta')-q}{\varepsilon(1+p\delta')-pq\delta'}=\frac{159{,}226}{0{,}00956}=16655,\ldots$$

$$\frac{\alpha(1+q\delta'')-p}{\varepsilon(1+q\delta'')-pq\delta''}=\frac{180{,}848}{0{,}01088}=16622,\ldots$$

Следовательно, мы можем утверждать, что при

$$n>16655$$

рассматриваемая вероятность неравенств

$$-\frac{1}{50} \leqq \frac{m}{n} - \frac{2}{5} \leqq \frac{1}{50}$$

больше 0,999.

§ 10. Другое доказательство теоремы Якова Бернулли связано с замечательною формулою для приближенного вычисления вероятности, что разность $\frac{m}{n} - p$ не выйдет из некоторых пределов при большом числе испытаний. Эта формула найдена, по крайней мере, для случая $p = q = \frac{1}{2}$ Моавром (Miscellanea analytica, MDCCXXX. Liber V. *De Binomio $a+b$ ad Potestatem per magnam evecto.* Miscellaneis Analyticis Supplementum. *Approximatio ad Summam Ferminoram Binomii $(a+b)^n$ in seriem exponsi.* Nov. 12. 1733) при содействии Стирлинга (*Methodus Differentialis: sive Tractatus de Summatione et Interpolatione serierum infinitarum.* MDCCXXX). Proposito XXVIII. *Invenire summam quotcunque Logarithmorum, quorum numeri sunt in progressione Arithmetica)* и установлена Лапласом, в силу чего ее можно назвать формулой Моавра-Лапласа. Имея в виду строгость выводов, мы заменим ее *предельной* теоремой.

Теорема (формула) Моавра-Лапласа.

Пусть n означает число независимых испытаний, p — вероятность события E для каждого из них, $q = 1 - p$ вероятность противоположного события, m — число появлений события E при всех этих испытаниях, наконец, t_1 и t_2 — какие-нибудь два числа, при чем для определенности положим $t_2 > t_1$.

Если p, t_1 и t_2 остаются без изменения, а n возрастает беспредельно, то вероятность выполнения неравенств

$$np + t_1\sqrt{2npq} < m < np + t_2\sqrt{2npq}\ *$$

приближается к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt.$$

* Не изменяя существа дела и доказательства, можно к знакам $<$ присоединить и знак $=$, ибо вероятность каждого отдельного значения m стремится к пределу нуль, когда n растет беспредельно.

Доказательство теоремы Моавра - Лапласа.

Вероятность выполнения неравенств

$$np+t_1\sqrt{2npq}<m<np+t_2\sqrt{2npq}$$

не что иное, как вероятность, что число появлений события E имеет одно из значений, лежащих в промежутке

$$\text{от } np+t_1\sqrt{2npq} \text{ до } np+t_2\sqrt{2npq}.$$

Поэтому ее вычисление, в силу теоремы сложения вероятностей, сводится к определению всех возможных значений целого числа m, лежащих в указанном промежутке, затем к вычислению для каждого из этих значений m соответствующей вероятности, что число появлений события E имеет именно такое значение, и, наконец, к сложению всех этих вероятностей.

С другой стороны мы знаем, что вероятность каждого определенного значения m выражается, согласно формуле (4), произведением

$$\frac{1.2.3\ldots.n}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.(n-m)}p^m q^{n-m}.$$

Следовательно, обозначив вероятность неравенств

$$np+t_1\sqrt{2npq}<m<np+t_2\sqrt{2npq}$$

символом

$$\underset{np+t_1\sqrt{2npq}}{\overset{np+t_2\sqrt{2npq}}{Q}},$$

имеем

$$\underset{np+t_1\sqrt{2npq}}{\overset{np+t_2\sqrt{2npq}}{Q}}=\Sigma P_{m,n},$$

где

$$P_{m,n}=\frac{1.2.3\ldots.n}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.(n-m)}p^m q^{n-m},$$

а суммирование Σ распространяется на все значения целого числа m, удовлетворяющие неравенствам

$$np + t_1\sqrt{2npq} < m < np + t_2\sqrt{2npq}.$$

Приступая к рассмотрению суммы

$$\Sigma P_{m,n},$$

положим

$$m = np + z\sqrt{2npq}$$

и таким образом введем вместо целого числа m новое переменное z, которое ограничено неравенствами

$$t_1 < z < t_2$$

и условием, что $np + z\sqrt{2npq}$ должно быть числом целым.

При беспредельном возрастании n все значения m, на которые распространяется рассматриваемая нами сумма, возрастают беспредельно вместе с соответствующими величинами

$$n - m = nq - z\sqrt{2npq}.$$

Поэтому, при отыскании предела суммы

$$\Sigma P_{m,n}$$

мы можем к каждому из трех произведений

$$1.2\ldots.n,\ 1.2\ldots.m,\ 1.2\ldots.(n-m)$$

применить известную формулу Моавра-Стирлинга *, в силу которой имеем

$$\text{предел}\left\{\frac{1.2\ldots.x}{\sqrt{2\pi x}\,x^x\,e^{-x}}\right\}_{x=\infty} = 1.$$

* Вывод ее приведен в конце главы. Обычно ее называют формулой Стирлинга, что я считаю несправедливым, так как первый пришел к ней Моавр, не установив только точной величины постоянного, а Стирлинг выразил это постоянное через π.

Заменяя в выражении

$$P_{m,n} = \frac{1.2.3\ldots.n}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.(n-m)}\, p^m q^{n-m}$$

произведения

$$1.2\ldots.n,\ 1.2\ldots.m,\ 1.2\ldots.(n-m),$$

согласно формуле Стирлинга, произведениями

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n},\ \sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m},\ \sqrt{2\pi(n-m)}\,(n-m)^{n-m} e^{-n+m},$$

получаем новое выражение

$$P'_{m,n} = \sqrt{\frac{2\pi n}{2\pi m.2\pi(n-m)}} \cdot \frac{n^n e^{-n} p^m q^{n-m}}{m^m e^{-m}(n-m)^{n-m} e^{-n+m}}$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}$$

и таким образом приходим к новой сумме

$$\Sigma P'_{m,n},$$

которая распространяется на те же значения m, как и сумма

$$\Sigma P_{m,n}.$$

При достаточно больших значениях n, все отношения слагаемых $P_{m,n}$ одной суммы к соответствующим слагаемым $P'_{m,n}$ другой будут сколь угодно близки к единице. Поэтому

$$\text{предел} \left(\frac{\Sigma P_{m,n}}{\Sigma P'_{m,n}}\right)_{n=\infty} = 1$$

и, следовательно,

$$\underset{n=\infty}{\text{предел}}\ \Sigma P_{m,n} = \underset{n=\infty}{\text{предел}}\ \Sigma P'_{m,n},$$

если только можно установить существование предела одной из этих сумм, что и будет нами выполнено относительно $\Sigma P'_{m,n}$.

Выражение $P'_{m,n}$ можно рассматривать, как произведение двух множителей

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \text{ и } \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}.$$

Останавливаясь сначала на втором из этих множителей, положим

$$\left(\frac{m}{np}\right)^m \left(\frac{n-m}{nq}\right)^{n-m} = W$$

и рассмотрим $\log W$ с целью доказать равенство

$$\underset{n=\infty}{\text{предел}}\ (\log W - z^2) = 0.$$

В силу равенств

$$m = np + z\sqrt{2npq} \text{ и } n - m = nq - z\sqrt{2npq}$$

имеем

$$\frac{m}{np} = 1 + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}} \text{ и } \frac{n-m}{nq} = 1 - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}}.$$

Подставляя в W эти выражения $\frac{m}{np}$ и $\frac{n-m}{nq}$ через z и принимая во внимание, что при достаточно больших значениях n все значения произведений

$$\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}} \text{ и } \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}}$$

будут сколь угодно малыми, последовательно получаем

$$\log W = m \log\left(1 + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}}\right) + (n-m)\log\left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}}\right) =$$

$$= (np + z\sqrt{2npq})\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}} - \frac{qz^2}{np} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{\sqrt{n^3}}\sqrt{\frac{8q^3}{p^3}} \cdots \ldots\right) -$$

$$-(nq - z\sqrt{2npq})\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}} + \frac{pz^2}{nq} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{\sqrt{n^3}}\sqrt{\frac{8p^3}{q^3}} + \ldots\right) =$$

$$= z\sqrt{2npq} - qz^2 + 2qz^2 + \ldots -$$

$$- z\sqrt{2npq} - pz^2 + 2pz^2 + \ldots$$

и, наконец,

$$\log W - z^2 = \frac{\alpha z^3}{\sqrt{n}} + \frac{\beta z^4}{n} + \frac{\gamma z^5}{\sqrt{n^3}} + \ldots,$$

так как

$$-q + 2q - p + 2p = q + p = 1.$$

Не составляя коэффициентов

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \ldots$$

намеченного нами разложения

$$\log W - z^2$$

в ряд по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$, мы по одному виду ряда можем заключить, что сумма его

$$\frac{\alpha z^3}{\sqrt{n}}+\frac{\beta z^4}{n}+\frac{\gamma z^5}{\sqrt{n^3}}+\ldots$$

должна приближаться к пределу нуль, когда n возрастает беспредельно, а z остается в данном промежутке.

Итак, при беспредельном возрастании n разность

$$\log W - z^2$$

действительно приближается к пределу нуль, и потому отношение

$$\frac{e^{z^2}}{W}$$

приближается к пределу единица.

Обращаясь к другому множителю выражения $P'_{m,n}$, заметим, что разность каждых двух смежных значений z имеет одну и ту же величину, и условимся обозначать ее символом Δz.

Величина Δz определяется тем соображением, что смежным значениям z должны соответствовать смежные же значения m, которые отличаются друг от друга на единицу.

Соответственно этому имеем

$$m = np + z\sqrt{2npq},$$

$$m+1 = np + (z+\Delta z)\sqrt{2npq},$$

$$m-1 = np + (z-\Delta z)\sqrt{2npq},$$

и отсюда выводим

$$\Delta z = \frac{1}{\sqrt{2npq}}.$$

Рассматривая затем отношение

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{n}} \text{ к } \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}},$$

последовательно получаем

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} : \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} = \sqrt{\frac{m}{np} \cdot \frac{n-m}{nq}} =$$

$$= \left(1 + \frac{z}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2q}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2p}{q}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и отсюда заключаем, что при достаточно больших значениях n это отношение будет сколь угодно близко к единице, при всех рассматриваемых нами величинах z.

Из доказанного нами следует, что при разыскании предела суммы

$$\Sigma P'_{m,n}$$

мы можем вместо

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \text{ и } \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} = \frac{1}{W}$$

соответственно взять

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} \text{ и } e^{-z^2}.$$

Мы получим таким образом вместо $P'_{m,n}$ новое выражение

$$P''_{m,n} = \frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2},$$

отношение которого к $P'_{m,n}$, при достаточно больших значениях n, будет сколь угодно близко к единице для всех рассматриваемых нами значений z. И подобно равенству

$$\text{предел}_{n=\infty} \Sigma P_{m,n} = \text{предел}_{n=\infty} \Sigma P'_{m,n}$$

можем установить другое

$$\text{предел}_{n=\infty} \Sigma P'_{m,n} = \text{предел}_{n=\infty} \Sigma P''_{m,n},$$

при чем все суммирования распространяются на одни и те же значения z. Обращаясь к сумме

$$\Sigma P''_{m,n},$$

положим, что наименьшим возможным значением z будет z_1, а наибольшим z_2. Тогда должно быть

$$z_1 - \Delta z < t_1 < z_1, \quad z_2 < t_2 < z_2 + \Delta z,$$

и совокупность рассматриваемых нами значений z представится арифметическою прогрессиею

$$z_1,\ z_1 + \Delta z,\ z_1 + 2\Delta z, \ldots,\ z_2 - \Delta z,\ z_2.$$

При беспредельном возрастании n разность

$$\Delta z = \frac{1}{\sqrt{2npq}},$$

каждых двух смежных значений z, приближается к пределу нуль, равно как и разности

$$z_1 - t_1 \text{ и } t_2 - z_2,$$

которые меньше, чем Δz, так что

$$\text{предел}_{n=\infty} \Delta z = 0, \quad \text{предел}_{n=\infty} z_1 = t_1, \quad \text{предел}_{n=\infty} z_2 = t_2.$$

На этом основании, в силу известных предложений об определенных интегралах, не трудно заключить, что при беспредельном возрастании n сумма

$$\Sigma P''_{m,n},$$

равная

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-z_1^2}+e^{-(z_1+\Delta z)}+e^{-(z_1+2\Delta z)^2}+\ldots+e^{-z_2^2}\right],$$

приближается к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int^{t_2} e^{-z^2}\,dz,$$

а вместе с нею к тому же пределу должны приближаться и другие две суммы:

$$\Sigma P'_{m,n} \text{ и } \Sigma P_{m,n}.$$

Таким образом, теорема Лапласа доказана.

Принимая же предел вероятности за приближенную ее величину, получаем приближенную формулу

$$(5)\qquad \mathop{Q}\limits_{np+t_1\sqrt{2npq}}^{np+t_2\sqrt{2npq}} \neq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-z^2}\,dz\ ^*.$$

В частности при

$$-t_1=+t_2=t$$

имеем

$$(6)\qquad \mathop{Q}\limits_{np-t\sqrt{2npq}}^{np+t\sqrt{2npq}} \neq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t} e^{-z^2}\,dz.$$

Примечание. Если $np-t\sqrt{2npq}$ и $np+t\sqrt{2npq}$ принадлежат к числу возможных значений m, то для уменьшения погрешности при вычислении вероятности неравенств

$$np-t\sqrt{2npq}\leqq m\leqq np+t\sqrt{2npq}$$

* Для отличия приближенных равенств от точных мы перечеркиваем обыкновенный знак равенства.

с присоединением знаков $=$, выгодно, согласно Лапласу, прибавить к интегралу $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-z^2}dz$, образующему правую часть формулы (6), приближенную величину

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-t^2}$$

вероятности каждого из равенств

$$m = np - t\sqrt{2npq} \quad \text{и} \quad m = np + t\sqrt{2npq};$$

напротив, в случае устранения этих равенств, выгодно от интеграла отнять ту же величину. В предельной же формуле эта добавочная величина исчезает, приближаясь к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$.

§ 11. Второе доказательство теоремы Бернулли *.

Задав по произволу два положительных числа ε и η, покажем, что при достаточно больших значениях n вероятность неравенств

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon$$

больше $1 - \eta$. Для этой цели станем, при некоторой величине t, рассматривать вероятность неравенств

$$np - t\sqrt{2npq} < m < np + t\sqrt{2npq},$$

равносильных неравенствам

$$-\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} < \frac{m}{n} - p < \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}.$$

* Из новейших доказательств теоремы Бернулли особого внимания заслуживает данное Валле-Пуссеном (Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, T. XXXI, 1-re Partie. *C. de la Vallée-Poussin, Démonstration nouvelle du Théorème de Bernoulli*).

По доказанному эта вероятность

$$\underset{np - t\sqrt{2npq}}{\overset{np + t\sqrt{2npq}}{Q}}$$

должна приближаться к пределу

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}\,dz,$$

если t остается без изменения, а n возрастает беспредельно.

С другой стороны, известно равенство

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

которое показывает, что при достаточно больших значениях t разность

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}\,dz$$

будет сколь угодно мала. Поэтому, разбив η на два положительных слагаемых η' и η'', т. е., положив

$$\eta = \eta' + \eta'' \text{ при } \eta' > 0 \text{ и } \eta'' > 0,$$

мы можем распорядиться числом t так, что будет

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}\,dz = 1 - \eta'$$

и затем назначить число n_0 настолько большим, чтобы для всех значений n, удовлетворяющих неравенству $n > n_0$, разность

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}\,dz - \underset{np - t\sqrt{2npq}}{\overset{np + t\sqrt{2npq}}{Q}}$$

была по абсолютному значению меньше η''.

Придав таким образом числу t определенное значение, установим кроме неравенства $n > n_0$ еще следующее

$$n > \frac{2pqt^2}{\varepsilon^2}.$$

Тогда вероятность неравенств

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < +\varepsilon$$

будет больше вероятности неравенств

$$-\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} < \frac{m}{n} - p < \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}},$$

так как

$$\varepsilon > \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}$$

и поэтому все значения m, удовлетворяющие неравенствам

$$-\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} < \frac{m}{n} - p < \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}},$$

удовлетворяют и неравенствам

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon.$$

Вероятность же неравенств

$$-\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}<\frac{m}{n}-p<\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}},$$

обозначенная символом

$$\underset{np-t\sqrt{2npq}}{\overset{np+t\sqrt{2npq}}{Q}},$$

больше

$$1-\eta'-\eta''=1-\eta.$$

Следовательно, при всех значениях n, превосходящих

$$n_0 \text{ и } \frac{2pqt^2}{\varepsilon^2},$$

вероятность неравенств

$$-\varepsilon<\frac{m}{n}-p<+\varepsilon$$

больше

$$1-\eta.$$

Таким образом теорема Бернулли доказана.

Примечание. Изложенное нами доказательство теоремы Бернулли основано, между прочим, на существовании такого числа n_0, что при всех превосходящих его значениях n разность

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt-\underset{np-t\sqrt{2npq}}{\overset{np+t\sqrt{2npq}}{Q}}$$

по абсолютному значению меньше выбранного нами числа η''.

Существование числа n_0 установлено теоремою Лапласа о пределе вероятности. Но мы не можем придать этому числу определенного значения, пока погрешность приближенных формул (5) и (6) остается неисследованной.

§ 12. Из теоремы Бернулли обыкновенно заключают, что при беспредельном возрастании числа испытаний отношение числа появлений события к числу испытаний приближается к вероятности события при отдельных испытаниях. Подобное заключение нельзя однако признать безусловно правильным не только для тех случаев, когда условия теоремы Бернулли не выполнены, но и для тех случаев, к которым эта теорема вполне применима.

Условия теоремы Бернулли состоят в независимости испытаний и в постоянстве величины вероятности события.

При этих условиях теорема Бернулли обнаруживает невероятность значительных отклонений отношения $\frac{m}{n}$ от p, при больших n. Но она не устраняет окончательно возможности таких отклонений; и эти невероятные отклонения могут оказаться действительными.

Считаем полезным заметить также, что из теоремы Бернулли нельзя выводить необходимости компенсации результатов одних испытаний результатами других.

Именно, если для наблюденных нами испытаний отношение числа появлений события к числу испытаний значительно отклоняется от величины вероятности события, то отсюда нельзя заключать, что для последующих испытаний подобное же отношение отклонится от той же вероятности в другую сторону. Подобное заключение противоречило бы предположению о независимости испытаний друг от друга.

В силу этой независимости, каковы бы ни были известные нам результаты одних испытаний, они не могут изменить наших заключений о возможных результатах других испытаний. Например, если вероятность события равна $\frac{1}{2}$ и при двадцати испытаниях оно не появилось ни разу, то при двадцать первом испытании мы имеем одинаковое основание как ожидать, так и не ожидать появления этого события до тех пор, пока нет сомнения в независимости этих испытаний и в правильности принятой нами величины вероятности $\frac{1}{2}$. Но, конечно, такое сомнение может возникнуть при многократном появлении одного события и сравнительно редком появлении противоположного события. Например, если при бросаниях монеты двадцать раз под ряд появился орел, то естественно сомнение, не представляет ли эта монета каких-нибудь особенностей, или нет ли каких других обстоятельств, в силу которых вероятность орла становится близкою к единице или даже равною единице.

§ 13. Вывод формулы Моавра-Стирлинга.

Полагая

$$\varphi(x)=\frac{1.2.3\ldots x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}},$$

имеем

$$\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}=\frac{(x+1)\,x^{x+\frac{1}{2}}e}{(x+1)^{x+\frac{3}{2}}}=e\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}=e\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

и затем

$$\log\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}=1+\left(x+1-\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=$$

$$=1-\left(x+1-\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+\ldots\right\}=$$

$$=1-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(x+1)}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{(x+1)^2}-$$

$$-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{(x+1)^3}-\ldots=$$

$$=-\frac{1}{12(x+1)^2}-\frac{1}{12(x+1)^3}-\frac{3}{40(x+1)^4}-\ldots-$$

$$-\ldots-\frac{(k-1)}{2k(k+1)(x+1)^k}-\ldots-$$

Следовательно, при всех возможных значениях x, логарифм отношения $\varphi(x+1):\varphi(x)$ число отрицательное, что указывает на убывание $\varphi(x)$ с возрастанием x:

$$\varphi(x+1)<\varphi(x)$$

Если же вместо $\varphi(x)$ возьмем функцию

$$\psi(x)=\frac{1.2.3\dots x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}}=\varphi(x)e^{-\frac{1}{12x}},$$

то для нее получим такое разложение по степеням $\frac{1}{x+1}$

$$\log\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)}=\left(\frac{1}{12}-\frac{3}{40}\right)\frac{1}{(x+1)^4}+\dots+$$

$$+\dots+\left\{\frac{1}{12}-\frac{k-1}{2k(k+1)}\right\}\frac{1}{(x+1)^k}+\dots$$

$$=\Sigma\frac{(k-2)(k-3)}{12k(k+1)(x+1)^k}\qquad(k=4,\ 5,\ 6\dots),$$

которое показывает, что $\psi(x)$ возрастает вместе с x:

$$\psi(x+1)>\psi(x).$$

А так как $\psi(x)$ постоянно меньше $\varphi(x)$ и отношение $\varphi(x)$ к $\psi(x)$, равное $e^{\frac{1}{12x}}$, стремится к пределу единица, когда x возрастает беспредельно, то на основании установленных нами неравенств

$$\varphi(x)>\varphi(x+1)$$

и

$$\psi(x+1)>\psi(x)$$

можно заключить о существовании некоторого числа C, к которому, при беспредельном возрастании числа x, стремятся, как к пределу, обе функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, при чем постоянно

$$\varphi(x) > C > \psi(x).$$

Для определения C может служить известная формула Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots,$$

вытекающая из разложения $\sin x$ в бесконечное произведение

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots$$

при $x = \frac{\pi}{2}$. Придав ей такой вид

$$\frac{\pi}{2} = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{(2.4.6\ldots 2n)^2}{(1.3.5\ldots.2n-1)^2(2n+1)} =$$

$$= \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{(2.4.6\ldots 2n)^4}{(1.2.3\ldots 2n)^2(2n+1)} =$$

$$= \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{2^{4n}(1.2.3\ldots n)^4}{(1.2.3\ldots 2n)^2(2n+1)}$$

и принимая во внимание, что в силу доказанного отношения

$$\frac{1.2.3\ldots n}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$$

и

$$\frac{1.2.3\ldots 2n}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}$$

при $n = \infty$ имеют общий предел C, получаем

$$\frac{\pi}{2} = C^2 \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{2^{4n} n^{4n+2}}{(2n)^{4n+1}(2n+1)} = \frac{1}{4} C^2$$

и потому

$$C = \sqrt{2\pi}.$$

Итак,

$$\underset{x=\infty}{\text{пред.}} \frac{1.2.3\ldots x}{\sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}} = 1,$$

что и известно под именем формулы Стирлинга (Моавра). Вместе с тем можем установить неравенства

$$\sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x} < 1.2.3\ldots x < \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x+\frac{1}{12x}},$$

и связанные с ними формулы

$$\log 1.2.3\ldots x = \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=\infty} \log\frac{\varphi(x+i-1)}{\varphi(x+i)},$$

$$\log 1.2.3\ldots x = \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{12x} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=\infty} \log\frac{\psi(x+i-1)}{\psi(x+i)},$$

$$\log\frac{\varphi(x+i-1)}{\varphi(x+i)}=\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{k-1}{2k(k+1)(x+i)^k},$$

$$\log\frac{\psi(x+i-1)}{\psi(x+i)}=-\sum_{k=4}^{k=\infty}\frac{(k-2)(k-3)}{2k(k+1)(x+i)^k}.$$

Давая в последних формулах числу x три различных значения m, n, l и рассматривая дробь

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots l},$$

находим

$$\log\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots l}=\log\sqrt{\frac{n}{2\pi ml}}\cdot\frac{n^n e^{m+l-n}}{m^m l^l}+$$

$$+\sum_{i=1}^{i=\infty}\log\frac{\varphi(n+i-1)\varphi(m+i)\varphi(l+i)}{\varphi(n+i)\varphi(m+i-1)\varphi(l+i-1)}$$

$$\log\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots l}=\log\sqrt{\frac{n}{2\pi ml}}\cdot\frac{n^n e^{m+l-n}}{m^m l^l}+$$

$$+\frac{1}{12n}-\frac{1}{12m}-\frac{1}{12l}+\sum_{i=1}^{i=\infty}\log\frac{\psi(n+i-1)\psi(m+i)\psi(l+i)}{\psi(n+i)\psi(m+i-1)\psi(l+i-1)},$$

$$\log\frac{\varphi(n+i-1)\varphi(m+i)\varphi(l+i)}{\varphi(n+i)\varphi(m+i-1)\varphi(l+i-1)}=$$

$$=\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{k-1}{2k(k+1)}\left\{\frac{1}{(n+i)^k}-\frac{1}{(m+i)^k}-\frac{1}{(l+i)^k}\right\},$$

$$\log \frac{\psi(n+i-1)\,\psi(m+i)\,\psi(l+i)}{\psi(n+i)\,\psi(m+i-1)\,\psi(l+i-1)} =$$

$$= -\sum_{k=4}^{k=\infty} \frac{(k-2)(k-3)}{2k(k+1)} \left\{ \frac{1}{(n+i)^k} - \frac{1}{(m+i)^k} - \frac{1}{(l+i)^k} \right\}$$

и отсюда при n большем одного из чисел m, l, или хотя бы одного из них, выводим неравенства

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m l}} \cdot \frac{n^n}{m^m l^l} > \frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots l} >$$

$$> \sqrt{\frac{n}{2\pi m l}} \cdot \frac{n^n}{m^m l^l} e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{l}-\frac{1}{m}\right)}.$$

ГЛАВА III

Закон больших чисел

§ 14. Приступая к важным обобщениям предыдущих выводов, мы должны ввести новые определения и понятия.

Положим, что значение некоторой величины X совпадает с одним из чисел определенной системы, и что каждому числу этой системы соответствует определенная вероятность совпадения с ним значения X. Пусть

$$x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_l$$

все возможные значения X и

$$p_1, p_2, \ldots, p_\lambda, \ldots, p_l$$

их вероятности; так что p_λ представляет вероятность, что X имеет значение x_λ.

При таких предположениях и обозначениях мы будем называть *математическим ожиданием* величины X сумму

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_\lambda x_\lambda + \ldots + p_l x_l. \tag{7}$$

Итак, математическим ожиданием величины мы называем сумму произведений каждого из возможных ее значений на соответствующую вероятность.

При установлении этого определения можно предполагать, что все возможные значения X различны друг от друга.

Нетрудно, однако, заметить, что такое предположение может быть заменено другим более общего характера; так как ничто не мешает нам каждый случай, которому соответствует то или другое определенное значение X, разбить на несколько несовместимых между собой случаев, отличающихся друг от друга не величиною X, а другими обстоятельствами.

Поэтому, определяя математическое ожидание X как сумму

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_l x_l$$

произведений каждого из возможных значений X на его вероятность, мы должны предполагать только, что эти значения определяются единственно возможными и несовместимыми случаями; так что каждому числу x_λ системы

$$x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots x_l$$

соответствует свой особый случай, вероятность которого p_λ мы называем вероятностью значения x_λ. Это простое замечание послужит впоследствии для сокращения вычислений.

Для примера положим, что мы бросаем на горизонтальную плоскость две обыкновенные шестигранные игральные кости, на гранях которых поставлены нумера 1, 2, 3, 4, 5, 6, и рассматриваем сумму вскрывшихся нумеров. Назвав одну кость первою, а другую второю и обозначив буквою Y вскрывшийся нумер первой кости, буквою Z вскрывшийся нумер второй кости и буквою X рассматриваемую нами сумму $Y+Z$, мы можем различить 36 единственно возможных и несовместимых случаев, которые ясно представлены в таблице:

$$\begin{array}{lll}
X=1+1=2, & X=1+2=3, & X=1+3=4, \\
X=1+4=5, & X=1+5=6, & X=1+6=7, \\
X=2+1=3, & X=2+2=4, & X=2+3=5, \\
X=2+4=6, & X=2+5=7, & X=2+6=8, \\
X=3+1=4, & X=3+2=5, & X=3+3=6, \\
X=3+4=7, & X=3+5=8, & X=3+6=9, \\
X=4+1=5, & X=4+2=6, & X=4+3=7, \\
X=4+4=8, & X=4+5=9, & X=4+6=10, \\
X=5+1=6, & X=5+2=7, & X=5+3=8, \\
X=5+4=9, & X=5+5=10, & X=5+6=11, \\
X=6+1=7, & X=6+2=8, & X=6+3=9, \\
X=6+4=10, & X=6+5=11, & X=6+6=12:
\end{array}$$

Так как все эти случаи равновозможны, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{36}$ и математическое ожидание рассматриваемой суммы $Y+Z$ выражается, согласно определению, суммою

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}\\
&+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}\\
&+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}\\
&+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}\\
&+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}+\frac{11}{36}\\
&+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}+\frac{11}{36}+\frac{12}{36},
\end{aligned}
$$

которая равна 7. Вместо 36 равновозможных случаев мы можем различить, по величине суммы X, 11 случаев:

$$X=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,$$

которым соответствуют такие вероятности

$$\frac{1}{36},\ \frac{2}{36},\ \frac{3}{36},\ \frac{4}{36},\ \frac{5}{36},\ \frac{6}{36},\ \frac{5}{36},\ \frac{4}{36},\ \frac{3}{36},\ \frac{2}{36},\ \frac{1}{36}.$$

Определяя на этом основании математическое ожидание X, получаем то же число 7 под видом суммы

$$\frac{2}{36}+\frac{2.3}{36}+\frac{3.4}{36}+\frac{4.5}{36}+\frac{5.6}{36}+\frac{6.7}{36}+\frac{5.8}{36}+\frac{4.9}{36}+\frac{3.10}{36}+\frac{2.11}{36}+\frac{12}{36}.$$

Нам придется рассматривать не одну величину X, а несколько подобных величин, при чем для большей ясности мы будем предполагать, что для каждой из них совокупность возможных ее значений состоит из конечного числа различных чисел. Подобно тому, как раньше важно было установить понятие о независимых событиях и независимых испытаниях, так теперь важно установить понятие *о независимых величинах*.

Несколько величин

$$X,\ Y,\ Z, \ldots .\ W$$

мы будем называть *независимыми,* если для каждой из них вероятность иметь каждое определенное значение не зависит от значения прочих величин. В противном случае мы будем называть величины *связанными*.

Останавливаясь на случае двух величин, положим, что

$$x_1,\ x_2, \ldots ,\ x_\gamma, \ldots ,\ x_l$$

все возможные, различные между собой, значения X, а

$$y_1,\ y_2, \ldots ,\ y_\mu, \ldots ,\ y_m$$

все возможные, различные между собой, значения Y.

Если величины X и Y не зависят друг от друга, то каждому числу x_λ системы

$$x_1,\ x_2, \ldots ,\ x_\lambda, \ldots ,\ x_l$$

должно соответствовать определенное число p_λ, представляющее вероятность, что X равно x_λ, каково бы ни было известное или неизвестное значение Y, и каждому числу y_μ системы

$$y_1,\ y_2, \ldots ,\ y_m$$

должно соответствовать определенное число q_μ, представляющее вероятность, что Y равно y_μ, каково бы ни было известное или неизвестное значение X.

Примечание. Во избежание недоразумений заметим, что из независимости величин X и Y не вытекает независимость X и какой-нибудь функции обеих величин X и Y, например $X + Y$.

Для пояснения положим, что каждая из независимых величин X и Y может иметь два равновероятных значения:

$$-1 \text{ и } +1.$$

Тогда сумма

$$X+Y$$

может иметь три различных значения:

$$-2,\ 0,\ +2,$$

вероятности которых представляются дробями

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},$$

пока значения X и Y остаются неизвестными.

Если же при неизвестном значении Y дано значение X, то из трех значений суммы $X+Y$ остаются только два и эти два равновероятны. При $X=+1$ сумма $X+Y$ не может иметь значения -2, другие же два возможные ее значения, 0 и $+2$, равновероятны; а при $X=-1$ сумма $X+Y$ не может иметь значения $+2$, другие же два возможные ее значения, -2 и 0, равновероятны.

Примечание 2. Заметим также, что независимость величин может быть обусловлена теми данными, при которых рассматриваются вероятности их возможных значений, так что при изменении данных зависимые величины могут сделаться независимыми и обратно.

Для пояснения этого замечания приведем пример, который покажет также, что независимость нескольких величин не равносильна независимости каждых двух из них.

Пусть будут

$$X,\ Y,\ Z$$

три числа, связанные равенством

$$XY=Z.$$

Положим далее, что

$$X \text{ и } Y$$

не зависят друг от друга, пока Z остается неопределенным, и что для каждой из этих величин представляется два и только два равновозможных значения: $+1$ и -1.

В этом случае независимые величины X и Y перестанут быть независимыми, как только будет определено значение Z: при $Z=+1$ должно быть $X=Y$, а при $Z=-1$ должно быть $X+Y=0$. Нетрудно видеть также, что при неопределенном значении X величины Y и Z будут независимыми, а при неопределенном значении Y будут независимыми X и Z.

Итак, если ни одна из величин

$$X,\ Y,\ Z,$$

не определена, то каждые две из них не зависят друг от друга; рассматриваемые же вместе

$$X,\ Y,\ Z$$

не представляют трех независимых величин, так как они связаны равенством

$$Z=XY.$$

§ 15. Важное значение математического ожидания обнаружится при рассмотрении суммы многих независимых величин.

Предварительно мы докажем несколько простых предложений.

Теорема. *Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых.*

Эта теорема относится к каким угодно величинам, как к независимым, так и к связанным.

Для доказательства ее положим, что значения каких-нибудь величин

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,\ W$$

определяются единственно возможными и несовместимыми случаями

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_n.$$

Пусть вероятности этих случаев соответственно будут

$$p_1, p_2, \ldots, p_n;$$

пусть, наконец, система

$$x_k, y_k, z_k, \ldots, w_k$$

представляет значения X, Y, $Z, \ldots, W$ для случая E_k, так что X, Y, $Z, \ldots, W$ принимают соответственно значения

$$x_1, y_1, z_1, \ldots, w_1,$$

если появляется E_1, значения

$$x_2, y_2, z_2, \ldots, w_2,$$

если появляется E_2, — и т. д.

При таких условиях и обозначениях математические ожидания величин X, $Y, \ldots, W$ выражаются соответственно суммами

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n, p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, p_1 w_1 + p_2 w_2 + \ldots + p_n w_n.$$

Затем относительно суммы

$$X + Y + Z + \ldots + W$$

замечаем, что сообразно появлению событий

$$E_1, E_2, \ldots, E_n$$

она принимает значения

$$x_1 + y_1 + \ldots + w_1, x_2 + y_2 + \ldots + w_2, \ldots, x_n + y_n + \ldots + w_n.$$

Поэтому ее математическое ожидание выражается суммою

$$p_1(x_1+y_1+\ldots+w_1)+p_2(x_2+y_2+\ldots+w_2)+\ldots+$$
$$+p_n(x_n+y_n+\ldots+w_n),$$

которая, очевидно, равна сумме

$$(p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n)+(p_1y_1+p_2y_2+\ldots+p_ny_n)+\ldots+$$
$$+(p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_nw_n).$$

Итак, математическое ожидание суммы

$$X+Y+Z+\ldots+W$$

равно сумме математических ожиданий слагаемых

$$X,\ Y,\ Z,\ldots,\ W.$$

Употребляя для обозначения математического ожидания буквы м. о., можем выразить установленную теорему формулою

(8) $\quad$ м. о. $(X+Y+\ldots W)=$ м. о. $X+$ м. о. $Y+\ldots+$ м. о. W.

Пример применения этой теоремы может доставить рассмотренная раньше сумма

$$Y+Z$$

вскрывшихся нумеров двух, брошенных на удачу, шестигранных костей с нумерами

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

В данном случае математическое ожидание каждой из величин Y и Z равно

$$1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2},$$

и потому математическое ожидание их суммы $Y+Z$ должно приводиться к 7, как и было найдено раньше.

Теорема. *Математическое ожидание произведения независимых величин равно произведению их математических ожиданий.*

Эта теорема относится к произведению любого числа независимых величин. Мы ограничимся рассмотрением произведения двух множителей, так как от произведения двух множителей нетрудно перейти к произведению любого числа множителей, посредством последовательного прибавления одного множителя за другим. Пусть система

$$x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_l$$

представляет все возможные различные значения величины X, а система

$$y_1, y_2, \ldots, y_\mu, \ldots, y_m$$

представляет все возможные различные значения величины Y.

Если X и Y, как мы предполагаем, не зависят друг от друга, то должны быть еще две определенные системы чисел

$$p_1, p_2, \ldots, p_\lambda, \ldots p_l$$

и

$$q_1, q_2, \ldots, q_\mu, \ldots, q_m,$$

где вообще p_λ представляет вероятность величине X иметь значение x_λ, как при известном, так и при неизвестном значении Y, число же q_μ представляет вероятность величине Y иметь значение y_μ, как при известном, так и при неизвестном значении X. Затем сумма

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots, + p_\lambda x_\lambda + \ldots + p_l x_l$$

будет математическим ожиданием X, а сумма

$$q_1 y_1 + q_2 y_2 + \ldots + q_\mu y_\mu + \ldots + q_m y_m$$

будет математическим ожиданием Y.

Приступая же к определению математического ожидания XY, мы можем различить lm единственно возможных и несовместимых случаев, каждый из которых определяется совокупностью значений обеих величин X и Y. Следующая таблица представляет наглядное перечисление этих случаев:

$X=x_1,\ Y=y_1$	$X=x_2,\ Y=y_1$	...	$X=x_\lambda,\ Y=y_1$	...	$X=x_l,\ Y=y_1$
$X=x_1,\ Y=y_2$	$X=x_2,\ Y=y_2$	...	$X=x_\lambda,\ Y=y_2$	...	$X=x_l,\ Y=y_2$
. . . .	. . . .	...	. . . .	...	. . . .
. . . .	. . . .	...	. . . .	...	. . . .
$X=x_1,\ Y=y_\mu$	$X=x_2,\ Y=y_\mu$	...	$X=x_\lambda,\ Y=y_\mu$	...	$X=x_l,\ Y=y_\mu$
. . . .	. . . .	...	. . . .	...	. . . .
. . . .	. . . .	...	. . . .	...	. . . .
$X=x_1,\ Y=y_m$	$X=x_2,\ Y=y_m$	...	$X=x_\lambda,\ Y=y_m$	...	$X=x_l,\ Y=y_m.$

Возьмем любой из этих случаев:

$$X=x_\lambda,\ Y=y_\mu.$$

Его вероятность равна

$$p_\lambda\, q_\mu,$$

по теореме умножения вероятностей; произведение же

$$XY$$

принимает в этом случае значение

$$x_\lambda\, y_\mu.$$

Поэтому, согласно определению, математическое ожидание произведения XY может быть выражено суммою всех произведений

$$p_\lambda\, q_\mu\, x_\lambda\, y_\mu,$$

где

$$\lambda=1,\ 2,\ldots,\ l \text{ и } \mu=1,\ 2,\ldots,\ m.$$

Соединяя в этой сумме те слагаемые, где λ имеет одно и то же значение, можем разбить ее на l отдельных сумм вида

$$p_\lambda\, q_1\, x_\lambda\, y_1 + p_\lambda\, q_2\, x_\lambda\, y_2 + \ldots . + p_\lambda\, q_m\, x_\lambda\, y_m,$$

для получения которых надо давать λ значения

$$1,\ 2, \ldots . ,\ l.$$

Сумма же

$$p_\lambda\, q_1\, x_\lambda\, y_1 + p_\lambda\, q_2\, x_\lambda\, y_2 + \ldots . + p_\lambda\, q_m\, x_\lambda\, y_m,$$

очевидно, равна произведению $p_\lambda\ x_\lambda$ на сумму

$$q_1\, y_1 + q_2\, x_2 + \ldots . , + q_m\, y_m,$$

представляющую математическое ожидание Y. Следовательно, рассматриваемое нами математическое ожидание равно сумме

$$\begin{aligned} & p_1\, x_1\, (q_1\, y_1 + q_2\, y_2 + \ldots . + q_m\, y_m) \\ & + p_2\, x_2\, (q_1\, y_1 + q_2\, y_2 + \ldots . + q_m\, y_m) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + p_l\, x_l\, (q_1\, y_1 + q_2\, y_2 + \ldots . + q_m\, y_m), \end{aligned}$$

которая тотчас приводится к произведению двух сумм

$$p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \ldots . + p_l\, x_l \text{ и } q_1\, y_1 + q_2\, y_2 + \ldots . + q_m\, y_m,$$

соответственно равных математическому ожиданию X и математическому ожиданию Y. Итак, математическое ожидание произведения двух независимых величин равно произведению их математических ожиданий:

$$\text{(9)} \qquad \text{м. о. } XY = \text{м. о. } X \times \text{м. о. } Y.$$

Отсюда уже не трудно заключить для любого числа независимых величин, что математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий этих величин.

В частности, математическое ожидание произведения независимых величин должно приводиться к нулю, если равно нулю математическое ожидание одной или некоторых из них.

Относительно связанных величин нетрудно установить следующее предложение.

Математическое ожидание произведения двух величин равно сумме всех различных значений одной из них, помноженных на вероятности этих значений и на соответствующие им математические ожидания другой:

$$\text{м. о. } XY = \Sigma p_i x_i b_i;\ p_i = \text{вер. равенства } X = x_i;$$
$$b_i = \text{м. о.}\,(Y, \text{ при } X = x_i).$$

Для доказательства, возвращаясь к основным рассуждениям первой главы, предположим, что перечислены все равновозможные случаи

$$C',\ C'',\ C'''\dots,\ C^{(m)},\ C^{(m+1)},\ C^{(m+2)},\dots C^{(n)},$$

определяющие пары значений X и Y

$$x', y';\ x'', y'';\dots;\ x^{(m)}, y^{(m)};\dots\dots;\ x^{(n)}, y^{(n)}.$$

Пусть далее $x', x'', \dots, x^{(m)}$ равны одному и тому же значению X

$$x' = x'' = \dots = x^{(m)} = x_i,$$

а случаям $C^{(m+1)}, C^{(m+2)}, \dots, C^{(n)}$ соответствуют иные значения X. При таких предположениях математическое ожидание XY представится суммою

$$\frac{1}{n}x'y' + \frac{1}{n}x''y'' + \dots + \frac{1}{n}x^{(m)}y^{(m)} + \dots + \frac{1}{n}x^{(n)}y^{(n)},$$

которая разбивается на слагаемые

$$\frac{m}{n}x_i\left(\frac{1}{m}y' + \frac{1}{m}y'' + \dots + \frac{1}{m}y^{(m)}\right),$$

где $\frac{m}{n}$ равно вероятности p_i, что $X = x_i$, а сумма, стоящая в скобках, представляет математическое ожидание Y при $X = x_i$, когда в силу аксиомы первой главы случаи $C^{(m+1)}, \ldots, C^{(n)}$ отпадают, а случаи C', C'', ..., $C^{(m)}$ остаются равновозможными и потому вероятность каждого из этих последних приводится к $\frac{1}{m}$. Следовательно, математическое ожидание рассматриваемого произведений действительно можно представить в виде указанной нами суммы

$$\Sigma p_i x_i b_i .$$

Лемма. *Если A означает математическое ожидание величины U, все значения которой числа положительные*), а t число произвольное, то вероятность неравенства*

$$U \leqq At^2$$

больше

$$1 - \frac{1}{t^2}.$$

Доказательство.

Пусть два ряда чисел

$$u_1,\ u_2, \ldots, u_\sigma, \ldots, u_s$$

и

$$\omega_1,\ \omega_2, \ldots, \omega_\sigma, \ldots, \omega_s$$

представляют, соответственно, совокупность всех возможных значений U и вероятности этих значений, так что вероятность величине U иметь значение u_σ равна ω_σ. Одни из чисел

$$u_1,\ u_2, \ldots, u_s$$

больше At^2, другие меньше At^2 или равны этому числу.

*) Мы не рассматриваем мнимых чисел.

Для определенности положим, что числа

$$u_1, u_2, \ldots, u_i$$

не больше At^2, остальные же

$$u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_s$$

больше At^2. Тогда вероятность неравенства

$$U \leqq At^2$$

выразится суммою

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots, \omega_i,$$

согласно теореме сложения вероятностей, так как событие, выражаемое этим неравенством, можно разбить на несовместимые виды, выражаемые равенствами

$$U = u_1,\ U = u_2, \ldots,\ U = u_i.$$

Согласно той же теореме сложения вероятностей сумма

$$\omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \ldots + \omega_s$$

представит вероятность неравенства

$$U > At^2.$$

Вместе с тем имеем

$$A = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \ldots + \omega_i u_i + \omega_{i+1} u_{i+1} + \ldots + \omega_s u_s$$

и

$$1 = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_i + \omega_{i+1} + \ldots + \omega_s,$$

так как, во-первых, буквою A мы обозначили математическое ожидание величины U и, во-вторых, сумма вероятностей событий, единственно возможных и несовместимых, должна приводиться к единице. Принимая же во внимание, что между значениями U, как и между числами

$$\omega_1,\ \omega_2, \ldots, \omega_s,$$

нет отрицательных чисел, согласно одному из условий леммы, и что все числа

$$u_{i+1},\ u_{i+2}, \ldots, u_s$$

больше At^2, из равенства

$$A = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \ldots + \omega_i u_i + \omega_{i+1} u_{i+1} + \ldots + \omega_s u_s$$

выводим последовательно неравенства

$$A \geqq \omega_{i+1} u_{i+1} + \omega_{i+2} u_{i+2} + \ldots + \omega_s u_s,$$

$$A > At^2 (\omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \ldots + \omega_s)$$

и, наконец,

$$\frac{1}{t^2} > \omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \ldots + \omega_s.$$

Последнее неравенство показывает, что вероятность неравенства

$$U > At^2,$$

выражаемая суммою

$$\omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \ldots + \omega_s,$$

меньше $\frac{1}{t^2}$. Следовательно, вероятность неравенства

$$U \leqq At^2$$

больше

$$1-\frac{1}{t^2},$$

ибо эта последняя вероятность выражается суммою

$$\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_i,$$

которая равна

$$1-(\omega_{i+1}+\omega_{i+2}+\ldots+\omega_s).$$

Основываясь на доказанной лемме, нетрудно установить следующее замечательное неравенство.

Неравенство Бьенэме — Чебышева.

Если для каких-нибудь независимых величин

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,\ W$$

мы обозначим, соответственно, их математические ожидания буквами

$$a,\ b,\ c, \ldots,\ l$$

и математические ожидания их квадратов теми же буквами со значком $_1$, *т. е. символами*

$$a_1,\ b_1,\ c_1, \ldots,\ l_1,$$

то при произвольном значении числа t *разность*

$$1-\frac{1}{t^2}$$

будет меньше вероятности, что сумма

$$X+Y+Z+\ldots+W$$

не выходит из пределов

$$a+b+c+\ldots+l-t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\ldots+l_1-l^2}$$

и

$$a+b+c+\ldots+l+t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\ldots+l_1-l^2}.$$

Доказательство.

Полагая

$$U=(X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c\ldots-l)^2$$

и обозначив буквою A математическое ожидание U, мы можем на основании только-что доказанной леммы заключить, что при любом значении числа t разность

$$1-\frac{1}{t^2}$$

меньше вероятности неравенства

$$(X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l)^2\leqq At^2,$$

которое равносильно совокупности двух неравенств

$$-t\sqrt{A}\leqq X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l\leqq t\sqrt{A}.$$

С другой стороны имеем,

$$U=(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2+\ldots+(W-l)^2+$$
$$+2(X-a)(Y-b)+2(X-a)(Z-c)+\ldots,$$

откуда выводим

$$\text{м. о. } U=A=\text{м. о. }(X-a)^2+\text{м. о. }(Y-b)^2+\ldots+\text{м. о. }(W-l)^2+$$
$$+2\,\text{м. о. }(X-a)(Y-b)+2\,\text{м. о. }(X-a)(Z-c)+\ldots$$

Рассматривая же в отдельности слагаемые последней суммы, получаем

$$\text{м. о.}\,(X-a)^2=\text{м. о.}\,(X^2-2aX+a^2)=\text{м. о.}\,X^2-2a\times\text{м. о.}\,X+a^2=$$
$$=a_1-2aa+a^2=a_1-a^2$$

$$\text{м. о.}\,(Y-b)^2=b_1-b^2,\ldots,\ \text{м. о.}\,(W-l)^2=l_1-l^2,$$
$$\text{м. о.}\,(X-a)(Y-b)=\text{м. о.}\,(X-a)\times\text{м. о.}\,(Y-b)=0,$$
$$\text{м. о.}\,(X-a)(Z-c)=\text{м. о.}\,(X-a)\times\text{м. о.}\,(Z-c)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

так как величины

$$X-a,\ Y-b,\ Z-c,\ldots,\ W-l$$

не зависят друг от друга и математические ожидания их равны нулю. И на этом основании находим

$$A=\text{м. о.}\ U=a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\ldots+l_1-l^2.$$

Наконец, по замене A суммою

$$a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\ldots+l_1-l^2$$

легко обнаружить, что неравенства

$$-t\sqrt{A}<X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c\ldots-l<t\sqrt{A}$$

выполняются в тех и только в тех случаях, когда

$$X+Y+Z+\ldots+W$$

заключается между

$$a+b+c+\ldots+l-t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+\ldots+l_1-l^2}$$

и

$$a+b+c+\ldots+l+t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+\ldots+l_1-l^2}.$$

Следовательно, вероятность, что сумма

$$X+Y+Z+\ldots+W$$

заключается в указанных нами пределах

$$a+b+c+\ldots+l-t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+\ldots+l_1-l^2}$$

и

$$a+b+c+\ldots+l+t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+\ldots+l_1-l^2},$$

равна вероятности неравенства

$$(X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l)^2 \leqq$$
$$\leqq t^2\,(a_1-a^2+b_1-b^2+\ldots+l_1-l^2)$$

и больше чем

$$1-\frac{1}{t^2}.$$

Таким образом неравенство Бьенэме — Чебышева доказано.

Мы соединяем с этим замечательным, простым, неравенством два имени Бьенэме и Чебышева по той причине, что оно впервые ясно высказано и доказано Чебышевым, но основная идея доказательства была значительно раньше указана Бьенэме, в мемуаре которого „Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés" (Compt. Rend., XXXVII, 1853. Jour. de Liouv. 2 serie, XII, 1867) можно найти и самое неравенство, обставленное только некоторыми частными предположениями.

§ 16. **Обобщенная теорема Бернулли. Случаи Чебышева.** *Если математические ожидания квадратов независимых величин*

$$X,\ Y,\ Z,\ldots,\ W,$$

число которых можно увеличивать беспредельно, все не превосходят одного и того же числа, то при достаточно большом числе этих величин будет сколь угодно близкою к достоверности вероятность, что их средняя арифметическая отличается произвольно мало от средней арифметической их математических ожиданий.

Доказательство.

Сохраняя для математических ожиданий величин

$$X,\ Y,\ Z, \ldots, W$$

и для математических ожиданий их квадратов

$$X^2,\ Y^2\ Z^2, \ldots, W^2$$

прежние обозначения

$$a,\ b,\ c, \ldots, l$$

и

$$a_1,\ b_1,\ c_1, \ldots, l_1,$$

назовем число величин

$$X,\ Y,\ Z, \ldots, W$$

буквою S; так что их средняя арифметическая выразится дробью

$$\frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S},$$

средняя же арифметическая их математических ожиданий выразится дробью

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{S}.$$

Затем обозначим буквою L то число, которого не превосходят математические ожидания квадратов величин $X, Y, Z, \ldots, W$, так что

$$a_1 \leqq L,\ b_1 \leqq L,\ c_1 \leqq L, \ldots, l_1 \leqq L_1.$$

Взяв, наконец, любые два положительных числа

$$\varepsilon \text{ и } \eta,$$

покажем, что при достаточно больших значениях S вероятность неравенств

$$-\varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < \varepsilon$$

будет больше

$$1-\eta.$$

Для этой цели нам послужит только-что установленное неравенство Чебышева. При

$$t^2 = \frac{1}{\eta}$$

неравенство Чебышева показывает, что разность

$$1-\eta$$

меньше вероятности неравенств

$$-\sqrt{\frac{A}{\eta}} \leqq X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l \leqq \sqrt{\frac{A}{\eta}},$$

равносильных неравенствам

$$\frac{-1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}} \leqq \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} \leqq \frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}},$$

где

$$A = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2.$$

Но каждая из разностей

$$a_1 - a^2,\ b_1 - b^2,\ c_1 - c^2, \ldots,\ l_1 - l^2$$

не превосходит числа L, поэтому и отношение

$$\frac{A}{S}$$

не превосходит того же числа L, произведение же

$$\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}}$$

не может превосходить

$$\sqrt{\frac{L}{S\eta}}.$$

Следовательно, если распорядимся числом S так, чтобы было

$$\sqrt{\frac{L}{S\eta}} < \varepsilon,$$

то числа

$$-\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}} \text{ и } +\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}}$$

будут заключаться между

$$-\varepsilon \text{ и } +\varepsilon$$

и потому во всех случаях, когда оправдываются неравенства

$$-\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}} \leqq \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} -$$

$$-\frac{a+b+c+\ldots+l}{S} \leqq \frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}},$$

будут иметь место и неравенства

$$-\varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < +\varepsilon.$$

При таких условиях вероятность неравенств

$$-\varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < +\varepsilon$$

будет, конечно, не меньше вероятности неравенств

$$-\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S}} \leqq \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < \frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}},$$

которая по доказанному больше, чем $1-\eta$.

Итак, вероятность неравенств

$$-\varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < +\varepsilon$$

будет больше, чем $1-\eta$, при всех значениях S, удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{\frac{L}{S\eta}} < \varepsilon,$$

т. е. при

$$S > \frac{L}{\eta\varepsilon^2}.$$

Доказав таким образом обобщенную теорему Бернулли, обратим внимание на одно важное следствие ее.

Если математические ожидания квадратов независимых величин

$$X, Y, Z, \ldots, W,$$

число которых можно увеличивать беспредельно, все не больше одного и того же числа, а математические ожидания самих величин

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,\ W,$$

напротив, все не меньше одного и того же положительного числа, то при достаточно большом числе этих величин, с вероятностью сколь угодно близкою к достоверности, мы должны ожидать, что сумма их

$$X+Y+Z+\ldots+W$$

превзойдет любое данное число.

Пусть, в самом деле, кроме прежних неравенств

$$a_1 \leqq L,\ b_1 \leqq L;\ c_1 \leqq L, \ldots,\ l_1 \leqq L$$

имеем

$$a > C,\ b > C,\ c > C, \ldots,\ l > C,\ C > 0.$$

По доказанному, какие бы два положительных числа ε и η мы ни взяли, при

$$S > \frac{L}{\eta\varepsilon^2}$$

вероятность неравенств

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{S} - \varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} <$$

$$< \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} + \varepsilon$$

будет больше $1-\eta$. Вместе с тем, конечно, будет больше $1-\eta$ и вероятность одного неравенства

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{S} - \varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S},$$

которое вполне равносильно следующему

$$X+Y+Z+\ldots+W>a+b+c+\ldots+l-S\varepsilon.$$

В силу неравенств

$$a>C,\ b>C,\ c>C,\ldots,\ l>C$$

сумма

$$a+b+c+\ldots+l$$

больше SC и потому во всех случаях, когда оправдывается неравенство

$$X+Y+Z+\ldots+W>a+b+c+\ldots+l-S\varepsilon$$

должно быть также

$$X+Y+Z+\ldots+W>S\ (C-\varepsilon).$$

Следовательно, вероятность последнего неравенства также больше $1-\eta$. Остается принять во внимание, что при

$$\varepsilon<C$$

и при достаточно больших значениях S произведение

$$S(C-\varepsilon)$$

будет больше любого числа, и мы тотчас придем к следствию обобщенной теоремы Бернулли, высказанному выше.

§ 17. Нетрудно показать, что установленная ранее теорема Бернулли представляет частный случай обобщенной.

Желая предварительно вывести предложение, известное под именем *теоремы Пуассона* или *закона больших чисел* *), положим, что рассматривается неограниченный ряд независимых испытаний, обозначенных нумерами

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

* По моему мнению *законом больших чисел* следует называть совокупность всех обобщений теоремы Бернулли (см. § 19).

и что вероятности события E при этих испытаниях соответственно имеют значения

$$p_1,\ p_2,\ p_3, \ldots .$$

Далее свяжем с рассматриваемыми испытаниями количества

$$X_1,\ X_2,\ X_3, \ldots .$$

так, чтобы сумма

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots . + X_n$$

при всяком n выражала число появлений события E, при испытаниях с нумерами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots .,\ n.$$

Для этого, очевидно, следует для всякого числа k системы натуральных чисел

$$1,\ 2,\ 3, \ldots .$$

положить

$$X_k = 1,$$

если при испытании с нумером k появляется событие E, и

$$X_k = 0$$

в противном случае. При таких условиях отношение

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots . + X_n}{n},$$

представляющее среднюю арифметическую величин

$$X_1,\ X_2, \ldots . X_n,$$

будет совпадать с отношением числа появлений события E при испытаниях с нумерами

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

к числу этих испытаний. С другой стороны, нетрудно видеть, что математические ожидания

$$X_k \text{ и } X_k{}^2$$

имеют одно и то же значение

$$p_k \cdot 1 + (1 - p_k) \cdot 0 = p_k,$$

которое не больше единицы для всех значений k.

Поэтому мы можем приложить к величинам

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

обобщенную теорему Бернулли, заменяя их среднюю арифметическую равною ей величиною отношения числа появлений события E к числу испытаний. Принимая, наконец, во внимание, что средняя арифметическая математических ожиданий величин

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$$

равна средней арифметической соответственных вероятностей события E, приходим к упомянутой нами *теореме Пуассона*, * иначе называемой *законом больших чисел*.

При достаточно большом числе независимых испытаний следует с вероятностью, сколь угодно близкою к достоверности, ожидать, что отношение числа появлений события к числу испытаний будет сколь угодно близко к средней арифметической вероятностей события.

И неравенство Чебышева обнаруживает, что при

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2 \eta}$$

* Первое строгое ее доказательство дано Чебышевым в 1846 году (Crelle's Journal, B. 33. Oeuvres (Сочинения) de P. Z. Tchebychef. T. I. *Demonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités*).

вероятность неравенств

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} < \varepsilon$$

будет больше

$$1 - \eta,$$

где m означает число появлений события E при рассматриваемых n испытаниях, а ε и η любые два положительных числа. Указанный нами предел для n можно уменьшить еще в четыре раза, если принять во внимание, что ни одна из разностей

$$p_1 - p_1^2, p_2 - p_2^2, \ldots, p_n - p_n^2$$

не больше $\frac{1}{4}$. В частном случае, когда все вероятности

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

имеют одну и ту же величину p, закон больших чисел обращается в теорему Бернулли.

Получив таким образом теорему Бернулли, как частный случай других, мы вместе с тем можем установить нижеследующее простое неравенство. Если n означает число независимых испытаний, p вероятность события E для каждого испытания и m число появлений события E, то вероятность неравенств

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon$$

будет больше

$$1 - \eta$$

при всех значениях n превосходящих

$$\frac{p - p^2}{\varepsilon^2 \eta} = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 \eta},$$

каковы бы ни были положительные числа ε и η. Взяв, например,

$$p=\frac{3}{5},\ \varepsilon=\frac{1}{50},\ \eta=0{,}001,$$

находим, что при

$$n>\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\left(\frac{1}{50}\right)^2\cdot\frac{1}{1000}}=600000$$

вероятность неравенств

$$-\frac{1}{50}<\frac{m}{n}-\frac{3}{5}<\frac{1}{50}$$

будет наверно больше

$$0{,}999.$$

Найденное нами число

$$600000,$$

конечно, слишком велико; в действительности же вероятность неравенств

$$-\frac{1}{50}<\frac{m}{n}-\frac{3}{5}<\frac{1}{50}$$

превосходит 0,999 при величинах n во много раз меньших, чем 600000.

Яков Бернулли, рассматривая в Ars conjectandi тот же пример, получил вместо 600000 число 25550. Вывод Бернулли соединен с предположением, что n делится на 50; нетрудно, однако, устранить это предположение, и небольшое видоизменение вычислений Бернулли дает возможность не только сохранить число 25550 для всех значений n, но и несколько уменьшить его, как показано в конце § 9. Если же мы будем считать за истинную величину вероятности ее приближенное значение, определенное по формуле (6), то для разыскания тех значений n, при которых вероятность неравенств

$$-\frac{1}{50}<\frac{m}{n}-\frac{3}{5}<\frac{1}{50}$$

больше 0,999, надо будет поступать следующим образом.

Посредством таблицы значений интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}dz,$$

которая приложена в конце книги, находим t по условию

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}dz=0{,}999;$$

это значение t будет

$$2{,}3268$$

с точностью до $\frac{1}{10000}$. Затем рассматриваем неравенство

$$t\sqrt{\frac{2pq}{n}}<\varepsilon=\frac{1}{50}$$

и отсюда получаем

$$n>\frac{2pqt^2}{\varepsilon^2}\doteq 1200\times(2{,}3268)^2\doteq 6497.$$

Этот результат не дает нам права утверждать, что при

$$n>6497$$

вероятность неравенств

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - p < \frac{1}{50}$$

будет наверно больше 0,999. Но он может служить указанием, что рассматриваемая нами вероятность неравенств

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - p < \frac{1}{50}$$

будет больше 0,999 уже при величинах n, незначительно превосходящих 6497. Например, при

$$n = 6520$$

вероятность неравенств

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - \frac{3}{5} < \frac{1}{50}$$

действительно превосходит 0,999, как показывают вычисления следующего параграфа.

§ 18. Обозначив число испытаний буквою n и предположив, что при каждом из них вероятность события E равна p, мы нашли, что вероятность появления события E ровно m раз при этих n испытаниях выражается произведением

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots . n}{1 . 2 \ldots . m . 1 . 2 \ldots . (n-m)} p^m q^{n-m},$$

где

$$q = 1 - p.$$

Поэтому вероятность, что событие E появится при рассматриваемых n испытаниях более l раз, представится суммою

$$\frac{1.2\ldots.np^{l+1}q^{n-l-1}}{1.2\ldots.(l+1)\,1.2\ldots.(n-l-1)}+$$

$$+\frac{1.2\ldots.np^{l+2}q^{n-l-2}}{1.2\ldots.(l+2)\,1.2\ldots.(n-l-2)}+\ldots.,$$

которая приводится к произведению выражения

$$P=\frac{1.2\ldots.n}{1.2\ldots.(l+1)\,1.2\ldots.(n-l-1)}p^{l+1}q^{n-l-1}$$

на сумму

$$S=1+\frac{n-l-1}{l+2}\,\frac{p}{q}+\frac{(n-l-1)(n-l-2)}{(l+2)(l+3)}\left(\frac{p}{q}\right)^2+\ldots.$$

Для приближенного вычисления P при больших значениях n, $l+1$ и $n-l-1$ может служить формула Стирлинга, доставляющая ряд неравенств, из которых мы укажем здесь только два простейших *

$$P<P_1=\sqrt{\frac{n}{2\pi(l+1)(n-l-1)}}\left(\frac{np}{l+1}\right)^{l+1}\left(\frac{nq}{n-l-1}\right)^{n-l-1}$$

и

$$\frac{P}{P_1}>H=e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(l+1)}-\frac{1}{12(n-l-1)}}$$

* См. § 13.

Обращаясь к сумме S, мы покажем теперь, что для ее вычисления можно с успехом воспользоваться разложением в непрерывную дробь, которое вытекает как частный случай из формулы Гаусса

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{ax}{1-\cfrac{bx}{1-\cfrac{cx}{1-\cfrac{dx}{1-\ddots}}}}}$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ и $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$ означают *гипергеометрические* ряды

$$1+\frac{\alpha \, . \, \beta}{1 \, . \, \gamma} x+\frac{\alpha(\alpha+1) \beta(\beta+1)}{1 \, . \, 2 \gamma(\gamma+1)} x^2+\ldots .$$

и

$$1+\frac{\alpha(\beta+1)}{1 \, . \,(\gamma+1)} x+\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)(\beta+2)}{1 \, . \, 2(\gamma+1)(\gamma+2)} x^2+\ldots,$$

коэффициенты же

$$a, b, c, d, \ldots,$$

определяются равенствами

$$a=\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}, \quad b=\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

$$c=\frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \quad d=\frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Относительно вывода формулы Гаусса заметим, что она вытекает из следующих простых связей между различными гипергеометрическими рядами:

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) = axF(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x),$$

$$F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x) - F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) = \\ = bxF(\alpha+1, \beta+2, \gamma+3, x),$$

$$F(\alpha+1, \beta+2, \gamma+3, x) - F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x) = \\ = cxF(\alpha+2, \beta+2, \gamma+4, x),$$

. . . .

Для применения формулы Гаусса к разложению S в непрерывную дробь следует положить

$$\alpha = -n+l+1, \beta = 0, \gamma = l+1, x = -\frac{p}{q},$$

что дает нам такое равенство

$$S = \cfrac{1}{1 - \cfrac{c_1}{1 + \cfrac{d_1}{1 - \cfrac{c_2}{1 + \cfrac{d_2}{1 - \ldots}}}}}$$

где вообще

$$c_k = \frac{(n-k-l)(l+k)p}{(l+2k-1)(l+2k)q}, \quad d_k = \frac{k(n+k)p}{(l+2k)(l+2k+1)q}.$$

Мы имеем здесь не бесконечную, а конечную непрерывную дробь, последним звеном которой будет

$$\frac{d_{n-l-1}}{1},$$

так как $c_{n-l}=0$. Нетрудно также убедиться, что каждое из чисел c_k меньше единицы, если только

$$\frac{n-l-1}{l+2}\,\frac{p}{q}>1,$$

как мы и будем предполагать в дальнейших рассуждениях. Поэтому, обозначив для краткости непрерывную дробь

$$\cfrac{c_k}{1+\cfrac{d_k}{1-\cfrac{c_{k+1}}{1+\cdots}}}$$

символом ω_k, имеем

$$0<\omega_k<c_k$$

и затем можем установить ряд неравенств

$$S=\frac{1}{1-\omega_1}<\frac{1}{1-c_1},\quad S>\cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{1+\cfrac{d_1}{1-c_2}}}$$

$$S<\cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{1+\cfrac{d_1}{1-\cfrac{c_2}{1+\cfrac{d_2}{1-c_3}}}}}$$

. . . .

Остается сопоставить последние неравенства с теми, которым удовлетворяет P, и которые были указаны выше; и мы будем иметь возможность образовать ряд приближенных значений вероятности появления события E, в рассматриваемые n испытаний, более l раз, при чем о каждом из этих приближенных значений будем знать, превосходит ли оно вероятность или, напротив, меньше ее.

На основании тех же неравенств, переставив p с q и заменив l на $n-l'$, найдем ряд приближенных значений вероятности появления события E, в рассматриваемые n испытаний, менее l' раз, при чем о каждом из полученных нами приближенных значений этой новой вероятности также будем знать, превосходит ли оно вероятность или меньше ее.

А по приближенным величинам вероятности появления события E более l раз и вероятности появления события E менее l' раз нетрудно, при $l>l'$, получить и приближенную величину вероятности появления события E не более l раз и не менее l' раз, так как сумма всех этих трех вероятностей должна составлять единицу.

Для примера положим

$$p=\frac{3}{5},\ q=\frac{2}{5},\ n=6520$$

и будем искать вероятность, что отношение числа появлений события E к числу испытаний будет отличаться от $\frac{3}{5}$ менее чем на $\frac{1}{50}$. Иначе сказать, будем искать вероятность, что событие E появится не более 4042 раз, а противоположное ему событие не более 2738 раз.

Согласно только-что сделанному замечанию, вычисление искомой вероятности сводится к вычислению вероятности, что событие E появится более 4042, и вероятности, что противоположное событие появится более 2738 раз.

Обращаясь к вероятности, что событие E появится более 4042 раз, мы должны положить в вышеуказанных формулах и неравенствах

$$p=\frac{3}{5},\ q=\frac{2}{5},\ n=6520,\ l=4042.$$

Тогда

$$P_1 = \sqrt{\frac{3260}{\pi \,.\, 4043 \,.\, 2477}} \left(\frac{3912}{4043}\right)^{4043} \left(\frac{2608}{2477}\right)^{2477},$$

$$H = e^{\frac{1}{12\,.\,6520} - \frac{1}{12\,.\,4043} - \frac{1}{12\,.\,2477}}$$

и посредством логарифмических таблиц находим

$$\begin{array}{r}
\mathrm{Log}\ 4043 \doteq 3{,}6067037413 \\
\mathrm{Log}\ 3912 \doteq \underline{3{,}5923988461} \\
143048952 \\
\underline{\times\ 4043} \\
57{,}2195808 \\
5721958 \\
\underline{429147} \\
57{,}8346913 \\
\underline{-55{,}4391749} \\
2{,}3955164
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\mathrm{Log}\ 2608 \doteq 3{,}4163075871 \\
\mathrm{Log}\ 2477 \doteq \underline{3{,}3939260066} \\
0{,}0223815805 \\
\underline{\times\ 2477} \\
44{,}7631610 \\
8{,}9526322 \\
1{,}5667106 \\
\underline{1566711} \\
55{,}4391749
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2}\mathrm{Log}\ 4043 \doteq 1{,}8033519 \\
\frac{1}{2}\mathrm{Log}\ 2477 \doteq 1{,}6969630 \\
\frac{1}{2}\mathrm{Log}\ \pi \quad \doteq \underline{0{,}2485749} \\
6{,}1444062
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\frac{1}{2}\mathrm{Log}\ 3260 \doteq 1{,}7566088 \\
\underline{-6{,}1444062} \\
5{,}6122026-10 \\
\mathrm{Log}\, H > -0{,}00002 \\
0{,}00004094 < P < 0{,}00004095
\end{array}$$

С другой стороны имеем

$$c_1 = \frac{2477}{4044} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7431}{8088}, \quad d_1 = \frac{6521}{4044\,.\,4045} \cdot \frac{3}{2} = \frac{19563}{32715960},$$

$$c_2 = \frac{2476\,.\,4044}{4045\,.\,4046} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7509708}{8183035}, \quad d_2 = \frac{6522\,.\,3}{4046\,.\,4047} = \frac{3261}{2729027},$$

$$c_3 = \frac{2475\,.\,4045}{4047\,.\,4048} \cdot \frac{3}{2} = \left(1 - \frac{2}{4047}\right)\frac{7425}{8096}$$

и производя простые выкладки, последовательно получаем

$$c_3 < 0{,}9167, \quad \frac{d_2}{1-\omega_3} < \frac{3261}{0{,}0833 \times 2729027} < 0{,}01435,$$

$$0{,}918 > c_2 > \omega_2 > \frac{c_2}{1{,}01435} > 0{,}9047,$$

$$0{,}0074 > \frac{d_1}{0{,}082} > \frac{d_1}{1-\omega_2} > \frac{d_1}{0{,}0953} > 0{,}00626,$$

$$0{,}912 < \frac{c_1}{1{,}0074} < \omega_1 < \frac{c_1}{1{,}00626} < 0{,}9131$$

$$11{,}36 < \frac{1}{0{,}088} < S < \frac{1}{0{,}0869} < 11{,}508;$$

следовательно,

$$SP < \frac{0{,}4095}{869} < 0{,}0004713, \text{ но } SP > \frac{0{,}4094}{880} > 0{,}000465.$$

Переходя к вероятности, что событие противоположное E появится более 2738 раз, мы должны положить

$$p = \frac{2}{5}, \quad q = \frac{3}{5}, \quad n = 6520, \quad l = 2738.$$

При таких значениях p, q, n, l получаем

$$P_1 = \sqrt{\frac{3260}{\pi \,.\, 2739 \,.\, 3781}} \left(\frac{2608}{2739}\right)^{2739} \left(\frac{3912}{3781}\right)^{3781},$$

$$H = e^{\frac{1}{12.6520} - \frac{1}{12.2739} - \frac{1}{12.3781}}$$

и посредством логарифмических таблиц находим

$$\begin{array}{rr}
\text{Log } 2739 \doteq 3{,}4375920323 & \text{Log } 3912 \doteq 3{,}5923988461 \\
\text{Log } 2608 \doteq 3{,}4163075871 & \text{Log } 3781 \doteq 3{,}5776066774 \\
\hline
212844452 & 147921687 \\
\times 2739 & \times 3781 \\
\hline
42{,}5688904 & 44{,}3765061 \\
14{,}8991116 & 10{,}3545181 \\
6385334 & 1{,}1833735 \\
1915600 & 147922 \\
\hline
58{,}2980954 & 55{,}9291899 \\
-55{,}9291899 & \\
\hline
2{,}3689055 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\frac{1}{2}\text{Log } 2739 \doteq 1{,}7187960 & \frac{1}{2}\text{Log } 3260 \doteq 1{,}7566088 \\
\frac{1}{2}\text{Log } 3781 \doteq 1{,}7888033 & -6{,}1250797 \\
\frac{1}{2}\text{Log } \pi \doteq 0{,}2485749 & 5{,}6315291-10 \\
\hline
6{,}1250797 & \text{Log } H > -0{,}00002 \\
 & 0{,}00004280 < P < 0{,}00004281.
\end{array}$$

Вместе с тем имеем

$$c_1 = \frac{3781}{2740} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3781}{4110},\ d_1 = \frac{6521}{2740 \cdot 2741} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6521}{11265510},$$

$$c_2 = \frac{3780 \cdot 2740}{2741 \cdot 2742} \cdot \frac{2}{3} = \frac{420}{457} \cdot \frac{2740}{2741},\ d_2 = \frac{2 \cdot 6522}{2742 \cdot 2743} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4348}{3760653},$$

$$c_3 = \frac{3779 \cdot 2741}{2743 \cdot 2744} \cdot \frac{2}{3} = \left(1 - \frac{2}{2743}\right)\frac{7558}{8232},$$

откуда последовательно выводим неравенства

$$c_3 < 0{,}9175, \quad \frac{d_2}{1-\omega_2} < \frac{4348}{0{,}0825 \times 3760653} < 0{,}01402,$$

$$0{,}919 > c_2 > \omega_2 > \frac{c_2}{1{,}01402} > 0{,}9059,$$

$$0{,}0072 > \frac{d_1}{0{,}081} > \frac{d_1}{1-\omega_2} > \frac{d_1}{0{,}0941} > 0{,}00615,$$

$$0{,}913 < \frac{c_1}{1{,}0072} < \omega_1 < \frac{c_1}{1{,}00615} < 0{,}9144,$$

$$11{,}49 < \frac{1}{0{,}087} < S < \frac{1}{0{,}0856} < 11{,}69;$$

следовательно,

$$SP < \frac{0{,}4281}{856} < 0{,}0005002,$$

но

$$SP > \frac{0{,}428}{870} > 0{,}000491.$$

Итак, вероятность, что в рассматриваемые нами 6520 испытаний событие E появится более 4042 раз, заключается между

$$0{,}0004713 \text{ и } 0{,}000465,$$

а вероятность, что в те же испытания событие E появится менее 3782 раз, заключается между

$$0{,}0005002 \text{ и } 0{,}000491.$$

И потому вероятность, что событие E появится в эти испытания не менее 3782 раз и не более 4042 раз, лежит между

$$1-0{,}000972=0{,}999028$$

и

$$1-0{,}000956=0{,}999044.$$

Посмотрим, что даст нам в рассматриваемом примере приближенная формула (6). Равенство

$$t\sqrt{2npq}=\varepsilon n$$

при

$$n=6520,\ p=\frac{3}{5},\ q=\frac{2}{5},\ \varepsilon=\frac{1}{50}$$

доставляет для числа t такую величину

$$t=\frac{130{,}4}{\sqrt{2\,.\,6520\,.\,0{,}6\,.\,0{,}4}}=\frac{130{,}4}{\sqrt{3129{,}6}}\doteq 2{,}331,$$

которой соответствует

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-t^2}\,dt=0{,}999021.$$

Если же, принимая во внимание, что $3912-130{,}4$ и $3912+130{,}4$ числа дробные, мы заменим их числами 3912 ∓ 130 и станем рассматривать вероятность неравенств

$$3912-130\leqq m\leqq 3912+130$$

с присоединением знаков равенства, то найдем

$$t = \frac{130}{\sqrt{3129,6}} \doteq 2,3238$$

и

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-t^2}\,dt = 0,998985$$

Эта приближенная величина вероятности меньше 0,999; но согласно Лапласу к ней для уменьшения погрешности следует прибавить

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-t^2}.$$

Приводим выкладки

$$\begin{array}{rr}
\log 130 = 2,1139434 & \log 2\,npq = \log 3129,6 = 3,4954888 \\
\frac{1}{2}\log 3129,6 = \underline{1,7477444} & t = 2,3238, \quad t^2 = 5,40005 \\
\log t = 0,3661990 & \log e^{t^2} = 2,3452119 \\
\log t^2 = 0,7323980 & \frac{1}{2}\log 2\,npq = 1,7477444 \\
 & \frac{1}{2}\log \pi = \underline{0,2485749} \\
0,998985 & \log \sqrt{2\pi npq}\, e^{t^2} = 4,3415312 \\
\underline{0,000046} & \log 0,0000455 = 5,6584688 - 10 \\
0,999031 &
\end{array}$$

Найденная таким образом приближенная величина 0,999031 вероятности лежит между установленными нами границами ее 0,999028 и 0,999044.

§ 19. Возможность дальнейших обобщений.

Условия, которыми мы обставили, по примеру Чебышева, обобщенную теорему Бернулли, называемую нами *законом больших чисел*, достаточны для ее существования, но не необходимы.

Разыскание необходимых и достаточных условий, в данном случае, как и во многих других, едва ли может увенчаться успехом. Но я считаю важным вполне выяснить возможность распространения закона больших чисел на многие ряды величин

$$X,\ Y,\ Z \ldots,$$

не удовлетворяющие тому или другому из вышеприведенных условий Чебышева. Закон этот гласит: *при беспредельном возрастании числа величин*

$$X,\ Y, \ldots, W$$

вероятность, что отклонение среднего арифметического

$$\frac{X+Y+\ldots+W}{S},$$

величин $X,\ Y, \ldots,\ W$, *от среднего арифметического*

$$\frac{a+b+\ldots+l}{S},$$

их математических ожиданий, меньше любого данного положительного числа, приближается к пределу, равному единице. И прежде всего не трудно видеть, что он имеет место для всякого неограниченного ряда величин

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,$$

удовлетворяющего условию

$$\text{пред.}_{S=\infty} \frac{\text{м. о.}\,(X+Y+\ldots+W-a-b-\ldots-l)^2}{S^2}=0.$$

В самом деле, если для достаточно больших значений S имеем

$$\frac{\text{м. о. }(X+Y+\ldots+W-a-b-\ldots-l)^2}{S^2}<\omega^2$$

и число ω можем брать сколь угодно малым, то вероятность неравенств

$$-\varepsilon<\frac{X+Y+\ldots+W}{S}-\frac{a+b+\ldots+l}{S}<+\varepsilon$$

будет, при тех же значениях S, больше

$$1-\frac{\omega^2}{\varepsilon^2},$$

в силу леммы § 13, и вместе с тем мы можем приравнять ω^2 произведению

$$\varepsilon^2\eta,$$

как бы малы ни были данные положительные числа ε и η.

Таким образом мы легко выясняем, что для достаточно больших значений S вероятность неравенств

$$-\varepsilon<\frac{X+Y+\ldots+W}{S}-\frac{a+b+\ldots+l}{S}<+\varepsilon,$$

при вышеприведенном условии, будет больше

$$1-\eta,$$

как бы малы ни были заданные положительные числа ε и η.

В этом и состоит закон больших чисел, приложимость которого к рассматриваемому нами ряду величин

$$X,\ Y,\ Z,\ldots$$

мы желали установить.

Если ряд

$$X,\ Y,\ Z, \ldots.$$

состоит из независимых величин, то

$$\text{мат. ож. } (X + Y + \ldots. + W - a - b - \ldots. - l)^2,$$

как известно, приводится к сумме

$$\text{м. ож. } (X - a)^2 + \text{м. ож. } (Y - b)^2 + \ldots. + \text{м. ож. } (W - l)^2.$$

Отношение же последней суммы к S^2 имеет пределом нуль во всех случаях, указанных Чебышевым, для которых в ряду

$$\text{м. о. } (X - a)^2,\ \text{м. о. } (Y - b)^2,\ \text{м. о. } (Z - c)^2, \ldots.$$

нет произвольно больших чисел. Но не только в этих случаях, а и во многих других; например, если нет произвольно больших чисел в ряду

$$\text{м. ож. } (X - a)^2, \frac{\text{м. ож. } (Y - b)^2}{2^{1-\delta}}, \frac{\text{м. ож. } (Z - c)^2}{3^{1-\delta}}, \ldots.,$$

где δ какое-нибудь положительное число, меньшее единицы. Действительно, если при неизменном A имеем

$$\text{м. ож. } (X - a)^2 < A$$

$$\text{м. ож. } (Y - b)^2 < A \,.\, 2^{1-\delta}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{м. ож. } (W - l)^2 < AS^{1-\delta},$$

то

$$\text{м. о. } (X - a)^2 + \text{м. о. } (Y - b)^2 + \ldots. + \text{м. о. } (W - l)^2 < AS^{2-\delta}$$

и, следовательно,

$$\text{пред.}_{S=\infty} \frac{\text{м. о. } (X-a)^2 + \ldots + \text{м. о. } (W-l)^2}{S^2} \leqq \text{пред.}_{S=\infty} \frac{A}{S^3} = 0.$$

Если же ряд

$$X,\ Y,\ Z, \ldots$$

не состоит исключительно из независимых величин, то

$$\text{м. о. } (X + Y \ldots + W - a - b - \ldots - l)^2,$$

вообще говоря, не приводится к сумме S слагаемых

$$\text{м. о. } (X-a)^2 + \text{м. о. } (Y-b)^2 + \ldots + \text{м. о. } (W-l)^2,$$

но разнится от нее суммою $\frac{S(S-1)}{2}$ членов

$$2 \text{ м. о. } (X-a)(Y-b) + \ldots + 2 \text{ м. о. } (X-a)(W-l) + \ldots,$$

к которым нельзя применять теорему о равенстве математического ожидания произведения произведению математических ожиданий, установленную только для независимых величин.

Поэтому отношение

$$\frac{\text{мат. ож. } (X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l)^2}{S^2}$$

может не приближаться к пределу нуль, при беспредельном возрастании S, даже в тех случаях, когда числовые величины всех разностей

$$X-a,\ Y-b,\ Z-c, \ldots,$$

не превосходят одного и того же постоянного числа, и следовательно, математические ожидания всех выражений

$$(X-a)^2,\ (X-a)\ (Y-b),\ (Y-b)^2,\ (X-a)\ (Z-c), \ldots$$

не превосходят квадрата того же числа. К таким случаям закон больших чисел не применяется. В самом деле, если для всех S отношение

$$\frac{\text{мат. ож. } (X+Y+\ldots+W-a-b-\ldots-l)^2}{S^2}$$

остается больше одного и того же положительного числа G, числовые же величины разностей

$$X-a,\ Y-b,\ Z-c,\ldots$$

не превосходят другого положительного числа H, то, обозначив буквою p вероятность выполнения неравенства

$$\left\{\frac{X+Y+\ldots+W}{S}-\frac{a+b+\ldots+l}{S}\right\}^2>\varepsilon^2,$$

для любого данного числа ε, мы легко можем установить неравенство

$$G<\varepsilon^2+H^2p.$$

Отсюда же, при

$$\varepsilon^2<G,$$

следует, что вероятность невыполнения неравенств

$$-\varepsilon\leqq\frac{X+Y+\ldots+W}{S}-\frac{a+b+\ldots+l}{S}\leqq+\varepsilon$$

всегда остается больше положительного числа

$$\frac{G-\varepsilon^2}{H^2}$$

и потому не может быть сколь угодно малою.

Отметив таким образом существование рядов связанных величин

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,$$

к которым закон больших чисел не применяется, мы не станем на них останавливаться *, а перейдем к указанию других рядов, к которым он, напротив, применяется.

Мы можем указать здесь три категории подобных рядов. Первую категорию мы образуем из рядов, каждый член которых связан только с определенным, повсюду одним и тем же, числом ближайших членов, так что любые два члена представляют независимые величины, если они стоят в ряду достаточно далеко друг от друга. Для рядов, принадлежащих к этой категории, большая часть слагаемых суммы

$$2 \text{ м. о. } (X-a)(Y-b)+\ldots+2 \text{ м. о. } (X-a)(W-l)+\ldots$$

приводится к нулю и отношение числа слагаемых ее, отличных от нуля, к S должно оставаться конечным.

Поэтому достаточно всем математическим ожиданиям квадратов разностей

$$X-a,\ Y-b,\ Z-c, \ldots$$

и произведений тех же разностей, взятых по две, быть меньшими одного неизменного числа, чтобы отношение

$$\frac{\text{мат. ож. } (X+Y+\ldots+W-a-b-\ldots-l)^2}{S^2}$$

стремилось к пределу нуль, вместе с $\frac{1}{S}$, и применимость закона больших чисел к рассматриваемому ряду величин

$$X,\ Y,\ Z, \ldots$$

не подлежала сомнению.

* Один подобный пример дан нами в конце § 24.

Приведем простой пример. Положим, что производится неограниченный ряд испытаний, независимых по отношению к некоторому событию E; пусть вероятность E при первом испытании равна p_1, при втором p_2, при третьем p_3 и т. д.: ряд чисел

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

дан. Пусть, наконец, число X связано с результатами первых двух испытаний так, что

$$X = 1,$$

если оба эти испытания сопровождаются появлением события E, и

$$X = 0$$

в противном случае, когда по крайней мере одно из первых двух испытаний не сопровождается появлением события E; также связано число Y со вторым и третьим испытанием, число Z с третьим и четвертым и т. д.

Иначе сказать, сумма

$$X + Y + \ldots + W$$

выражает у нас число комбинаций

$$EE,$$

появляющихся при $S+1$ последовательных испытаний.

В данном случае каждый член ряда

$$X, Y, Z \ldots$$

связан только с непосредственно смежными: X только с Y, Y только с X и Z и т. д. Соответственно этому в сумме

$$2 \text{ м. о. } (X-a)(Y-b) + \ldots + 2 \text{ м. о. } (X-a)(W-l) + \ldots,$$

состоящей из $\frac{S(S-1)}{2}$ слагаемых, только $S-1$ слагаемых не равны нулю.

Для вычисления этих $S-1$ слагаемых и их суммы останавливаемся на первом из них

$$2 \text{ м. о. } (X-a)\ (Y-b).$$

На основании простого тождества

$$(X-a)\ (Y-b) = XY - aY - bX + ab$$

имеем

$$\text{м. о. } (X-a)\ (Y-b) = \text{м. о. } XY - ab;$$

это равенство относится ко всяким величинам X и Y.

Принимая же во внимание, что рассматриваемые нами теперь величины

$$X \text{ и } Y$$

не имеют других значений, кроме единицы и нуля, и что равенства

$$X=1 \text{ и } Y=1$$

соответствуют появлению комбинации

$$EE$$

в результате первой пары и второй пары испытаний, а равенство

$$XY=1$$

соответствует результату

$$EEE$$

первых трех испытаний, находим

$$a = \text{м. о. } X = p_1 p_2,\ b = \text{м. о. } Y = p_2 p_3$$

$$\text{м. о. } XY = p_1 p_2 p_2.$$

Следовательно,

$$\text{м. о. } (X-a)\,(Y-b) = p_1 p_2 p_3 (1-p_2) = p_1 p_2 q_2 p_3$$

и на основании этого результата мы можем заключить, что рассматриваемая нами сумма

$$2 \text{ м. о. } (X-a)\,(Y-b) + \ldots\ldots + 2 \text{ м. о. } (X-a)\,(W-l) + \ldots\ldots$$

выражается суммою первых $S-1$ членов ряда

$$2p_1 p_2 q_2 p_3,\ 2p_2 p_3 q_3 p_4,\ 2p_3 p_4 q_4 p_5, \ldots\ldots$$

и потому не может превосходить

$$\frac{1}{2}(S-1).$$

Что же касается суммы

$$\text{м. о. } (X-a)^2 + \text{м. о. } (Y-b)^2 + \ldots\ldots + \text{м. о. } (W-l)^2,$$

то, как не трудно видеть, она выражается суммою первых S членов ряда

$$p_1 p_2 (1-p_1 p_2),\ p_2 p_3 (1-p_2 p_3), \ldots\ldots$$

и не может превосходить

$$\frac{1}{4} S.$$

Таким образом мы убеждаемся, что к данному ряду

$$X,\ Y,\ Z, \ldots\ldots$$

закон больших чисел применяется, хотя этот ряд не состоит исключительно из независимых величин. В частности, если все числа

$$p_1,\ p_2,\ p_3, \ldots\ldots$$

равны одному числу p, можно написать для нашего примера такую простую формулу

$$\text{м. о. } (X+Y+\ldots+W-Sp^2)^2 = Sp^2(1-p^2)+(S-1)p^3 q.$$

Вторую категорию мы образуем из тех рядов

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,\ V,\ W, \ldots,$$

для которых математические ожидания всех произведений

$$XY,\ XZ,\ YZ, \ldots$$

или только математические ожидания произведений

$$XY,\ (X+Y)Z, \ldots,\ (X+Y+\ldots+V)W, \ldots$$

меньше соответствующих произведений математических ожиданий. В этих случаях

$$\text{м. о. } (X+Y+\ldots+W-a-b-\ldots-l)^2$$

меньше суммы

$$\text{м. о. } (X-a)^2+\text{м. о. } (Y-b)^2+\ldots+\text{м. о. } (W-l)^2$$

в силу простого равенства

$$\text{м. о. } (X-a)(Y-b) = \text{м. о. } XY - ab$$

и потому для применимости к ним закона больших чисел достаточно, чтобы отношение

$$\frac{\text{м. о. } (X-a)^2+\text{м. о. } (Y-b)^2+\ldots+\text{м. о. } (W-l)^2}{S^2}$$

стремилось к пределу нуль при беспредельном возрастании числа S.

Такому условию удовлетворяют ряды

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,\ V,\ W.$$

в которых математическое ожидание каждого члена уменьшается при увеличении предыдущих членов или только их суммы и увеличивается при уменьшении их или их суммы. Действительно, согласно доказанному в § 13, математическое ожидание произведения XY может быть представлено суммою $\Sigma p_i x_i b_i$, где x_i означает все различные значения X, p_i их вероятности, а b_i соответствующие им математические ожидания Y. Вместе с тем имеем

$$\text{м. о. } X = \Sigma p_i x_i,\ \text{м. о. } Y = \Sigma p\ b_i,\ \Sigma p_i = 1$$

и потому

$$\text{м. о. } XY - (\text{м. о. } X) \times (\text{м. о. } Y) = \Sigma p_i \times \Sigma p_i x_i b_i - \Sigma p_i x_i \Sigma p_i b_i,$$

последнюю же разность мы можем следующим образом разложить на слагаемые:

$$\Sigma p_i \Sigma p_i x_i b_i - \Sigma p_i x_i \Sigma p_i b_i = \frac{1}{2} \Sigma p_i p_j (x_i - x_j)\ (b_i - b_j),$$

вводя кроме i новый значек j, получающий то же значение, как i.

А так как при нашем предположении, что b_i убывает при возрастании x_i, разность

$$(x_i - x_j)\ (b_i - b_j)$$

для всякой пары значков i, j оказывается числом отрицательным, то сумма их, равная удвоенной разности м. о. XY — (м. о. X) (м. о. Y) должна быть числом отрицательным, что и требовалось доказать. Из тех же формул видно, что математическое ожидание произведения XY больше произведения математических ожиданий X и Y в отдельности, если возрастание X влечет за собой возрастание математического ожидания Y. Положим для примера, что из сосуда, содержащего $2a$ белых, $2b$ шаров иного цвета извлекают шар за шаром, не возвращая вынутых обратно, но прибавляя в него после извлечения каждой серии $a+b$ шаров снова a белых и b шаров иного цвета, чтобы нельзя было исчерпать всех шаров.

Вопрос идет о вероятности различных предположений на счет числа m белых шаров, которое может оказаться среди числа n извлеченных таким образом шаров. Это число m можно представить, как и в случае независимых испытаний, суммою n величин

$$X+Y+\ldots+W,$$

равных соответственно результатам отдельных извлечений 1 или 0. Нетрудно видеть, что математические ожидания всех величин

$$X, Y\ldots W$$

в данном случае равны одному числу

$$\frac{a}{a+b}$$

вероятности вынуть из сосуда белый шар, пока неизвестен цвет ни одного из извлеченных шаров. Но наши величины связаны другом с другом, в силу чего вероятность того же события становится другим числом по выяснении, сколько было уже вынуто белых и иного цвета шаров: если известно, что сверх

$$2a+2b$$

шаров в сосуд было положено ia белых и ib шаров иного цвета, а вынуто из него g белых, h шаров иного цвета, то вероятность извлечения из него белого шара равна

$$\frac{(i+2)\,a-g}{(i+2)\,(a+b)-g-h}.$$

Так выражается математическое ожидание каждого из членов суммы

$$X+Y+\ldots W,$$

когда известно число $g+h$ предшествующих ему членов и сумма их g, при чем целое число i определяется неравенствами

$$0 \geqq i(a+b)-g-h>-a-b.$$

С увеличением суммы g это математическое ожидание убывает; следовательно, к нашему примеру закон больших чисел должен применяться. Впрочем, достаточно следующих простых соображений, чтобы не только установить применимость к данному случаю закона больших чисел, но и придти к более определенному заключению. Пусть число n извлеченных шаров состоит из l полных серий u, быть-может, одной неполной, так что

$$l\ (a+b) \leqq n < (l+1)\ (a+b).$$

Тогда сумма числа m вынутых белых шаров с числом m' оставшихся в сосуде белых шаров равна $(l+2)a$; и так как m' менее $2a+2b$, то m должно удовлетворять неравенствам

$$(l+2)a > m > la-2b,$$

сопоставляя которые с неравенствами для u, получаем

$$\frac{(l+2)a}{l(a+b)} > \frac{m}{n} > \frac{la-2b}{(l+1)}.$$

Следовательно, при достаточно больших n отношение $\frac{m}{n}$ будет, наверно, сколь угодно близким к

$$\frac{a}{a+b},$$

имея пределом это число для $n=\infty$. Подобного заключения нельзя сделать, а закон больших чисел остается применимым, если число шаров, прибавляемых после каждой серии, мы увеличим вдвое, что повлечет за собой безграничное возрастание числа шаров, остающихся в сосуде после безгранично возрастающего числа извлечений.

Но наиболее заслуживают внимания ряды, которые мы причисляем к третьей категории и характеризуем следующим свойством: с увеличением расстояния между величинами ряда связь их, не прекращаясь совершенно, быстро убывает, так что сумма S слагаемых

$$\text{м. о. } (W-l)\,(W-l)+\ldots+\text{м. о. } (W-l)\,(Y-b)+$$
$$+\text{м. о. } (W-l)\,(X-a),$$

при беспредельном возрастании числа S, не может становиться произвольно большим положительным числом, хотя бы число положительных слагаемых возрастало в ней беспредельно вместе с S. Сюда принадлежат, между прочим, ряды, называемые мною *связанными в цепь*, которым посвящено несколько моих статей *.

Закон больших чисел может иметь место и в тех случаях, когда отношение

$$\frac{\text{мат. ож. } (X+Y+\ldots+W-a-b\ldots-l)^2}{S^2}$$

не стремится к нулю, при беспредельном возрастании числа S, и даже когда

$$\text{мат. ож. } (X+Y+\ldots+W-a-b-\ldots-l)^2$$

оказывается бесконечным, при конечных значениях S.

Для выяснения этого положения остановимся на случае независимых величин, которые для удобства рассуждений будем отличать друг от друга не буквами, а нумерами.

Итак, пусть будет

$$X_1,\ X_2, \ldots,\ X_k, \ldots,\ X_n, \ldots$$

неограниченный ряд независимых величин. Введем такие обозначения

$$\text{м. о. } X_k=a_k,\ X_k-a_k=Z_k, \text{ численное значение } Z_k=(Z_k).$$

* См. прибавление к этой книге „Приложение метода моментов", „Замечательный случай испытаний, связанных в цепь".

Положим затем, что для некоторого положительного числа δ, меньшего единицы, существают математические ожидания величин

$$(Z_1)^{1+\delta},\ (Z_2)^{1+\delta}, \ldots,\ (Z_n)^{1+\delta}, \ldots$$

и что все эти математические ожидания меньше одного и того же числа c. Установив такие условия и введя два произвольно заданных положительных числа

$$\varepsilon \text{ и } \eta,$$

мы докажем, что вероятность неравенств

$$-\varepsilon < \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) < +\varepsilon,$$

равносильных неравенству

$$(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)^2 < n^2 \varepsilon^2,$$

будет больше

$$1 - \eta,$$

при достаточно больших значениях n.

Для этой цели введем еще следующие обозначения. Различные значения Z_k будем обозначать символом z_k, числовые их величины символом (z_k), а вероятность равенства

$$Z_k = z_k$$

символом p_k, вероятность же совокупности равенств

$$Z_1 = z_1,\ Z_2 = z_2, \ldots,\ Z_n = z_n$$

равную произведению $p_1 p_2 \ldots p_n$ одною буквою P.

Наконец, нам придется различать суммы, распространенные на все значения

$$z_1,\ z_2, \ldots,\ z_n,$$

от сумм, распространенных только на значения тех же количеств, ограниченные некоторыми добавочными условиями.

Употребляя для обозначения всех этих сумм одну и ту же букву Σ, мы в необходимых случаях будем указывать над ней ограничивающие условия, при чем для краткости совокупность неравенств

$$z_1^2 < \nu^2,\ z_2^2 < \nu^2, \ldots . z_n^2 < \nu^2$$

будем изображать так

$$\ldots . z_k^2 \ldots . < \nu^2,$$

требование же нарушения, по крайней мере, одного из этих неравенств условимся представлять так

$$(\ldots . z_k^2 \ldots .) \geqq \nu^2.$$

При таких обозначениях имеем

$$\sum P = \sum^{\ldots . z_k^2 \ldots . < \nu^2} P + \sum^{(\ldots . z_k^2 \ldots .) \geqq \nu^2} P = 1$$

$$\sum^{z_k^2 < \nu^2} p_k z_k = - \sum^{z_k^2 \geqq \nu^2} p_k z_k$$

$$\sum p_k (z_k)^{1+\delta} = \sum^{z_k^2 < \nu^2} p_k (z_k)^{1+\delta} + \sum^{z_k^2 \geqq \nu^2} p_k (z_k)^{1+\delta},$$

где ν вспомогательное число, которое мы будем увеличивать беспредельно вместе с n.

Затем не трудно установить ряд простых неравенств

$$\sum^{(\ldots . z_k^2 \ldots .) \geqq \nu^2} P \leqq \sum^{z_1^2 \geqq \nu^2} p_1 + \sum^{z_2^2 \geqq \nu^2} p_2 + \ldots . + \sum^{z_n^2 \geqq \nu^2} p_n$$

$$\sum^{z_k^2 \geqq \nu^2} p_k \leqq \frac{1}{\nu^{1+\delta}} \sum^{z_k^2 \geqq \nu^2} p_k (z_k)^{1+\delta} \leqq \frac{c}{\nu^{1+\delta}}.$$

$$\sum^{z_k^2 < \nu^2} p_k z_k^2 < \nu^{1-\delta} \sum^{z_k^2 < \nu^2} p_k (z_k)^{1+\delta} < c\nu^{1-\delta}$$

$$\text{числ. знач.} \sum^{z_k^2 < \nu^2} p_k z_k = \text{числ. знач.} \sum^{z_k^2 \geqq \nu^2} p_k z_k \leqq \frac{c}{\nu^\delta},$$

откуда выводим, что сумма

$$\sum^{\ldots . z_k^2 \ldots . < \nu^2} P(z_1 + z_2 + \ldots . + z_n)^2,$$

не превосходящая

$$\sum^{z_1^2 < \nu^2} p_1 z_1^2 + \sum^{z_2^2 < \nu^2} p_2 z_2^2 + \ldots . + \sum^{z_n^2 < \nu^2} p_n z_n^2$$

$$+ 2 \text{ числ. зн.} \sum^{z_1^2 < \nu^2} p_1 z_1 \cdot \sum^{z_2^2 < \nu^2} p_2 z_2 + \ldots . ,$$

меньше

$$n c \nu^{1-\delta} + \frac{n^2 c^2}{\nu^{2\delta}}.$$

Следовательно, вероятность выполнения неравенства

$$(Z_1 + Z_2 + \ldots . + Z_n)^2 \geqq n^2 \varepsilon^2,$$

вместе с совокупностью неравенств

$$Z_1^2 < \nu^2,\ Z_2^2 < \nu^2, \ldots . ,\ Z_n^2 < \nu^2,$$

выражаемая суммою соответствующих значений P, меньше

$$\frac{c\nu^{1-\delta}}{n\varepsilon^2}+\frac{c^2}{\nu^{2\delta}\,\varepsilon^2}.$$

А так как, с другой стороны, из приведенных нами неравенств видно, что вероятность нарушения, по крайней мере, одного из неравенств

$$Z_1^2<\nu^2,\ Z_2^2<\nu^2,\ldots,\ Z_n^2<\nu^2$$

меньше

$$\frac{nc}{\nu^{1+\delta}},$$

то мы можем заключить, что вероятность одного неравенства

$$(Z_1+Z_2+\ldots+Z_n)^2>n^2\varepsilon^2,$$

без обязательности неравенств

$$Z_1^2<\nu^2,\ Z_2^2<\nu^2,\ldots,\ Z_n^2<\nu^2,$$

меньше суммы

$$\frac{c\nu^{1-\delta}}{n\varepsilon^2}+\frac{c^2}{\nu^{2\delta}\,\varepsilon^2}+\frac{nc}{\nu^{1+\delta}}.$$

Последняя же сумма будет меньше любого данного числа η, при достаточно больших значениях n, если только мы распорядимся вспомогательным числом ν так, чтоб оба отношения

$$\frac{\nu}{n}\quad\text{и}\quad\frac{n}{\nu}$$

не превосходили заданной величины.

Полагая, например,

$$\nu=n,$$

находим, что вероятность неравенства

$$(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)^2 \geq n^2 \varepsilon^2$$

должна быть меньше η, для всех значений n, удовлетворяющих неравенству

$$\left\{ \frac{c}{\varepsilon^2} + \frac{c^2}{n^\delta \varepsilon} + c \right\} \frac{1}{n^\delta} < \eta.$$

Таким образом нами доказано, что к рассматриваемому сейчас ряду величин

$$X_1,\ X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

закон больших чисел применяется, хотя бы математическое ожидание известного квадрата

$$\frac{1}{n^2}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n - a_1 - a_2 \ldots - a_n)^2$$

имело произвольно большие значения или даже обращалось в бесконечность при конечных значениях n.

§ 20. Возвращаясь к сумме

$$X + Y + Z + \ldots + W$$

каких-нибудь независимых величин

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,\ W,$$

займемся выводом приближенного выражения для вероятности, что эта сумма заключается в пределах

$$a + b + c + \ldots + l + t_1 \sqrt{2(a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \ldots + l_1 - l^2)}$$

и

$$a + b + c + \ldots + l + t_2 \sqrt{2(a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \ldots + l_1 - l^2)},$$

где

$$a,\ b,\ c, \ldots,\ l \text{ и } a_1,\ b_1,\ c_1, \ldots,\ l_1$$

имеют тот же смысл, как и прежде, а t_1 и t_2 два произвольных числа, при чем $t_2 > t_1$. Это замечательное выражение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-z^2} dz$$

нами было уже указано при доказательстве теоремы Бернулли.

Тогда оно было получено для частного случая, соответствующего теореме Бернулли; а теперь мы выведем то же приближенное выражение вероятности для всех случаев.

Обозначим для краткости:

все возможные различные значения X одною буквою x,

———————————— Y ———— y,

———————————— Z ———— z,

. . . .

———————————— W ———— w,

а вероятности этих значений буквами

$$\rho,\ \sigma,\ \tau, \ldots,\ \omega.$$

Затем условимся обозначать буквою Σ такие суммы, которые распространяются на все значения

$$x,\ y,\ z, \ldots,\ w$$

и соответствующие им величины

$$\rho,\ \sigma,\ \tau, \ldots,\ \omega;$$

для обозначения же одной суммы, распространенной не на все значения

$$x, y, z, \ldots, w,$$

употребим символ Σ'. При таких условиях имеем

$$\Sigma\rho = \Sigma\sigma = \Sigma\tau = \ldots = \Sigma\omega = 1,$$

$$\Sigma\rho x = a,\ \Sigma\sigma y = b,\ \Sigma\tau z = c, \ldots,\ \Sigma\omega w = l,$$

$$\Sigma\rho x^2 = a_1,\ \Sigma\sigma y^2 = b_1,\ \Sigma\tau z^2 = c_1, \ldots, \Sigma\omega w^2 = l_1,$$

и для каждой возможной системы чисел

$$x, y, z, \ldots, w$$

соответствующее произведение

$$\rho\sigma\tau \ldots \omega$$

будет выражать вероятность совокупности равенств

$$X = x,\ Y = y,\ Z = z, \ldots,\ W = w,$$

в силу теоремы умножения вероятностей, примененной к независимым событиям. А из теоремы сложения вероятностей нетрудно заключить, что вероятность неравенств

$$a + b + \ldots + l + t_1\sqrt{2A} < X + Y + \ldots + W < a + b \ldots + \\ + l + t_2\sqrt{2A},$$

где

$$A = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2,$$

представится суммою

$$\Sigma'\rho\sigma\tau \ldots \omega,$$

распространенною на те значения

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ w,$$

которые удовлетворяют неравенствам

$$t_1\sqrt{2A} < x + y + z + \ldots + w - a - b - c - \ldots - l < t_2\sqrt{2A},$$

или, что все равно, неравенствам

$$\frac{t_1 - t_2}{2}\sqrt{2A} < x + y + \ldots + W$$

$$- a - b \ldots - l - \frac{t_1 + t_2}{2}\sqrt{2A} < \frac{t_2 - t_1}{2}\sqrt{2A}.$$

При помощи замечательного множителя Дирихле мы сведем эту сумму

$$\Sigma' \rho\sigma\tau \ldots \omega$$

к другой, которая распространяется уже на все значения

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ w.$$

Для получения множителя Дирихле прежде всего заметим, что интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin} \alpha\xi}{\xi}\, d\xi,$$

где α число постоянное, имеет значение $+1$ при $\alpha > 0$, значение -1 при $\alpha < 0$, и значение 0 при $\alpha = 0$.

Поэтому простое равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin} \beta\xi \operatorname{Cos} \gamma\xi}{\xi}\, d\xi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin}(\beta + \gamma)\xi}{\xi}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin}(\beta - \gamma)\xi}{\xi}\, d\xi$$

обнаруживает, что интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi\cdot\operatorname{Cos}\gamma\xi}{\xi}\,d\xi,$$

где β и γ числа постоянные и $\beta>0$, имеет значение 1, если

$$-\beta<\gamma<\beta,$$

значение 0, если γ лежит вне пределов

$$-\beta \text{ и } +\beta,$$

и, наконец, значение $\frac{1}{2}$, если γ совпадает с одним из чисел $-\beta$ и $+\beta$.

В силу же равенств

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi\operatorname{Sin}\gamma\xi}{\xi}\,d\xi=0 \text{ и } e^{\gamma i\xi}=\operatorname{Cos}\gamma\xi+i\operatorname{Sin}\gamma\xi,$$

где $i=\sqrt{-1}$, имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi\cdot\operatorname{Cos}\gamma\xi}{\xi}\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi}e^{\gamma i\xi}\,d\xi.$$

Следовательно, при $\beta>0$ должно быть:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi}e^{i\gamma\xi}\,d\xi=1, \qquad \text{если} -\beta<\gamma<\beta,$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi}e^{i\gamma\xi}\,d\xi=0, \qquad \text{если } \gamma<-\beta \text{ или } \gamma>\beta,$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi}e^{i\gamma\xi}\,d\xi=\frac{1}{2}, \qquad \text{если } \gamma=-\beta \text{ или } \gamma=\beta.$$

Приняв это во внимание, прибавим к каждому произведению $\rho\sigma\tau\ldots\omega$ соответственный множитель

$$H=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi}e^{i\gamma\xi}d\xi,$$

где

$$\beta=\frac{t_2-t_1}{2}\sqrt{2A}$$

и

$$\gamma=x+y+\ldots+w-a-b-\ldots-l-\frac{t_2+t_1}{2}\sqrt{2A},$$

и рассмотрим сумму

$$\Sigma H\rho\sigma\tau\ldots\omega.$$

Если ни одно из двух чисел

$$a+b+c+\ldots+l+t_1\sqrt{2A} \text{ и } a+b+c+\ldots+l+t_2\sqrt{2A}$$

не принадлежит к числу значений

$$x+y+z+\ldots+w,$$

то множитель H будет нулем для всех членов суммы

$$\Sigma H\rho\sigma\tau\ldots\omega$$

кроме тех, которым соответствуют неравенства

$$t_1\sqrt{2A}<x+y+z+\ldots+w-a-b-c-\ldots-l<t_2\sqrt{2A}.$$

Для этих последних

$$H=1,$$

и потому сумма

$$\Sigma H\rho\sigma\tau\ldots\omega$$

приводится к той именно сумме

$$\Sigma' \rho\sigma\tau \ldots \omega,$$

которая выражает вероятность неравенств

$$t_1\sqrt{2A} < X + Y + Z + \ldots + W - a - b - c - \ldots - l < t_2\sqrt{2A}.$$

Если же сумма

$$x + y + z + \ldots + w$$

может равняться

$$a + b + c + \ldots + l + t_1\sqrt{2A} \text{ или } a + b + c + \ldots + l + t_2\sqrt{2A},$$

то множитель H может получать значение $\frac{1}{2}$.

Тогда, как нетрудно видеть, сумма

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \ldots \omega$$

будет среднею арифметическою двух сумм, из которых одна выражает вероятность неравенств

$$t_1\sqrt{2A} < X + Y + Z + \ldots + W - a - b - c - \ldots - l < t_2\sqrt{2A},$$

а другая вероятность тех же неравенств с присоединением случаев равенства

$$X + Y + Z + \ldots + W - a - b - c - \ldots - l = t_1\sqrt{2A}$$

и

$$X + Y + Z + \ldots + W - a - b - c - \ldots - l = t_2\sqrt{2A}.$$

Другими словами, сумма

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \ldots \omega$$

отличается от

$$\Sigma' \rho\sigma\tau \ldots . \omega$$

только половиною вероятности выполнения одного из равенств

$$X+Y+Z+\ldots.+W-a-b-c-\ldots.-l=t_1\sqrt{2A}$$

и

$$X+Y+Z+\ldots.+W-a-b-c-\ldots.-l=t_2\sqrt{2A}.$$

Следовательно, если пренебречь вероятностью последних равенств, считая их невозможными или маловероятными, то можно рассматривать сумму

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \ldots . \omega$$

как вероятность, что

$$X+Y+Z+\ldots.+W$$

лежит в пределах

$$a+b+c+\ldots.+l+t_1\sqrt{2A} \text{ и } a+b+c+\ldots.+l+t_2\sqrt{2A}.$$

Обращаясь к сумме

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \ldots . \omega$$

и заменяя в ней H соответствующим выражением

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin} \frac{t_2-t_1}{2}\xi\sqrt{2A}}{\xi} e^{i\left(x+y+\ldots.+w-a-b-\ldots.-l-\frac{t_1+t_2}{2}\sqrt{2A}\right)\xi} d\xi,$$

получаем

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \ldots . \omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega \frac{\operatorname{Sin} \frac{t_2-t_1}{2}\xi\sqrt{2A}}{\xi} e^{-\frac{t_1+t_2}{2}i\xi\sqrt{2A}} d\xi,$$

где

$$\Omega = \Sigma \rho \sigma \tau \ldots \omega e^{i(x+y+z+\ldots+w-a-b-c-\ldots-l)\xi}$$

$$= \left\{\Sigma \rho e^{i(x-a)\xi}\right\} \left\{\Sigma \sigma e^{i(y-b)\xi}\right\} \ldots \left\{\Sigma \omega e^{i(w-l)\xi}\right\}.$$

Относительно сумм

$$\Sigma \rho e^{i(x-a)\xi}, \ \Sigma \sigma e^{i(y-b)\xi}, \ldots, \ \Sigma \omega e^{i(w-l)\xi}$$

прежде всего заметим, что их модули, вообще говоря, меньше единицы

$$\text{мод. } \Sigma \rho e^{i(x-a)\xi} \leqq \Sigma \text{ мод. } \rho e^{i(x-a)\xi} = \Sigma \rho = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{мод. } \Sigma \omega e^{i(w-l)\xi} \leqq \Sigma \text{ мод. } \omega e^{i(w-l)\xi} = \Sigma \omega = 1.$$

На этом основании, при большом числе величин

$$X, \ Y, \ Z, \ldots, \ W,$$

мы будем считать модуль Ω таким малым числом, которым можно пренебречь для всех значений ξ кроме смежных с нулем. Рассматривая разложение Ω в ряд по возрастающим степеням ξ и ограничиваясь первыми членами этого ряда, мы заменим Ω более простым выражением, которое также близко к нулю при всех значениях ξ, кроме смежных с нулем, и дает, при разложении по возрастающим степеням ξ, те же первые члены. Для указанной цели разлагаем в ряд, по известной формуле, каждое из выражений

$$e^{i(x-a)\xi}, \ e^{i(y-b)\xi}, \ldots, \ e^{i(w-l)\xi}$$

и подставляем эти разложения в суммы

$$\Sigma \rho e^{i(x-a)\xi}, \ \Sigma \sigma e^{i(y-b)\xi}, \ldots, \ \Sigma \omega e^{i(w-l)\xi}.$$

Таким образом получаем

$$\Sigma p e^{i(x-a)\xi} = \Sigma p + i\xi \Sigma p (x-a) - \frac{\xi^2}{2} \Sigma p (x-a)^2 + \ldots.$$

$$= 1 - \frac{a_1 - a^2}{2} \xi^2 + \ldots.,$$

$$\Sigma q e^{i(y-b)\xi} = 1 - \frac{b_1 - b^2}{2} \xi^2 + \ldots.,$$

. . . .

$$\Sigma \omega e^{i(w-l)\xi} = 1 - \frac{l_1 - l^2}{2} \xi^2 + \ldots.,$$

и затем посредством умножения рядов находим

$$\Omega = 1 - \frac{A\xi^2}{2} + \ldots.,$$

где A имеет прежнее значение:

$$A = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots. + l_1 - l^2.$$

Теми же членами

$$1 - \frac{A}{2} \xi^2$$

начинается и разложение в ряд по степеням ξ показательной функции

$$e^{-\frac{A}{2}\xi^2},$$

которая при всех значениях ξ кроме смежных с нулем близка к нулю, если A число большое. Подставляя эту функцию на место Ω, получаем для вероятности неравенств

$$t_1\sqrt{2A} < X + Y + Z + \ldots. + W - a - b - c - \ldots. - l < t_2\sqrt{2A}$$

приближенную величину в виде интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\frac{t_2-t_1}{2}\xi\sqrt{2A}}{\xi}\,e^{-\frac{t_1+t_2}{2}i\xi\sqrt{2A}-\frac{1}{2}A\xi^2}\,d\xi,$$

который равен

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}\frac{t_2-t_1}{2}\xi\sqrt{2A}\cdot\operatorname{Cos}\frac{t_1+t_2}{2}\xi\sqrt{2A}}{\xi}\,e^{-\frac{1}{2}A\xi^2}\,d\xi$$

и легко приводится к разности

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}t_2\zeta}{\zeta}\,e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}t_1\zeta}{\zeta}\,e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\,d\zeta,$$

если положить

$$2A\xi^2=\zeta^2.$$

С другой стороны, нетрудно доказать, что интеграл

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}t\zeta}{\zeta}\,e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\,d\zeta,$$

где t не зависит от ζ, равен

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{t}e^{-t^2}\,dt.$$

Действительно, положив для краткости

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}t\zeta}{\zeta}\,e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\,d\zeta=V$$

и рассматривая V как функцию переменного числа t, посредством дифференцирования под знаком интеграла получаем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \operatorname{Cos} t\zeta d\zeta.$$

Второе же дифференцирование дает

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta \operatorname{Sin} t\zeta d\zeta = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{Sin} t\zeta\, d\left(e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\right),$$

откуда посредством интегрирования по частям выводим

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -\frac{4t}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \operatorname{Cos} t\zeta d\zeta = -2t\frac{dV}{dt}$$

и затем

$$d\left\{\log\frac{dV}{dt}\right\} = d(-t^2).$$

Следовательно,

$$\frac{dV}{dt} = Ee^{-t^2},$$

где E означает число постоянное, и

$$V = E\int_0^t e^{-t^2} dt,$$

ибо при $t = 0$ должно быть

$$V = 0.$$

Остается определить постоянное E. Число E совпадает со значением производной $\frac{dV}{dt}$ при $t=0$. Давая же t значение 0, находим, что соответствующее значение $\frac{dV}{dt}$ выражается интегралом

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\,d\zeta,$$

который равен

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Итак,

$$E=\frac{2}{\sqrt{\pi}},\quad V=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

и, наконец,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} t_2\zeta}{\zeta}e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} t_1\zeta}{\zeta}e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\,d\zeta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt.$$

Изложенный нами вывод приближенной величины вероятности неравенств

$$t_1\sqrt{2A}<X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l<t_2\sqrt{2A}$$

не дает никаких указаний относительно размера погрешности этой приближенной величины. И только по аналогии с тем, что было установлено при доказательстве теоремы Бернулли, можно догадываться, что интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt$$

будет при некоторых условиях пределом вероятности вышеприведенных неравенств, что я называю *теоремой о пределе вероятности*. Этой теореме посвящено особое приложение в конце книги, а здесь мы изложим только простое доказательство нижеследующей теоремы о математических ожиданиях, которая может служить для вывода предложения о пределе вероятности при определенных условиях.

§ 21. Теорема о математических ожиданиях.

Если для неограниченного ряда независимых величин

$$X_1, \quad X_2, \dots, \quad X_n, \dots$$

имеем

м. о. $X_k = a_k$, м. о. $(X_k - a_k)^2 = c_k$, чис. знач. м. о. $(X_k - a_k)^\alpha = c_k^{(\alpha)}$ *и числа* c_k, $c_k^{(\alpha)}$ *удовлетворяют условию, что оба отношения*

$$\frac{c_1^{(\alpha)} + c_2^{(\alpha)} + \dots + c_n^{(\alpha)}}{(c_1 + c_2 + \dots + c_n)^{\frac{\alpha}{2}}} \quad \text{и} \quad \frac{c_1^{\alpha-1} + c_2^{\alpha-1} + \dots + c_n^{\alpha-1}}{(c_1 + c_2 + \dots + c_n)^{\alpha-1}},$$

при

$$\alpha = 3, \ 4, \ 5, \dots,$$

стремятся к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$, *то математическое ожидание степени*

$$\left\{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - a_1 - a_2 - \dots - a_n}{\sqrt{2(c_1 + c_2 + \dots + c_n)}}\right\}^m,$$

показатель m *которой любое целое положительное число, приближается к пределу*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2} dt,$$

когда n *возрастает беспредельно.*

Доказательство.

Согласно известному обобщению формулы Ньютона имеем

$$(X_1+X_2+\ldots+X_n-a_1-a_2-\ldots-a_n)^m=$$
$$=\sum\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}S^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda},$$

где $S^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ означает симметрическую функцию разностей

$$X_1-a_1,\ X_2-a_2,\ldots,\ X_n-a_n,$$

для определения которой может служить один ее член

$$(X_1-a_1)^\alpha(X_2-a_2)^\beta\ldots(X_i-a_i)^\lambda,$$

и суммирование, обозначенное символом Σ, должно быть распространено на все совокупности целых положительных чисел α, $\beta,\ldots,\lambda$, удовлетворяющие условию

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=m.$$

Отсюда в силу установленных ранее теорем о математических ожиданиях сумм и произведений выводим

$$\text{м. о. }(X_1+X_2+\ldots+X_n-a_1-a_2-\ldots a_n)^m=$$
$$=\sum\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda},$$

где $G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ означает математическое ожидание суммы $S^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ и получается из этой суммы через замену степеней разностей

$$X_1-a_1,\ X_2-a_2,\ldots,\ X_n-a_n$$

математическими ожиданиями тех же степеней. И так как математические ожидания первых степеней разностей

$$X_1 - a_1,\ X_2 - a_2, \ldots,\ X_n - a_n$$

равны нулю, то из выражений

$$G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$$

только те могут быть отличными от нуля, для которых каждое из чисел

$$\alpha,\ \beta, \ldots,\ \lambda$$

больше единицы.

Вместе с тем мы без большого труда можем установить неравенство

$$\frac{\text{чис. зн. } G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}}{(c_1+c_2+\ldots+c_n)^{\frac{m}{2}}} <$$

$$< \frac{c_1^{(\alpha)}+\ldots+c_n^{(\alpha)}}{(c_1+\ldots+c_n)^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{c_1^{(\beta)}+\ldots+c_n^{(\beta)}}{(c_1+\ldots+c_n)^{\frac{\beta}{2}}} \cdots \frac{c_1^{(\lambda)}+\ldots+c_n^{(\lambda)}}{(c_1+\ldots+c_n)^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

А это неравенство обнаруживает, что при условиях теоремы отношение

$$\frac{G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}}{(c_1+c_2+\ldots+c_n)^{\frac{m}{2}}},$$

где

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda = m,$$

должно приближаться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$, если только среди чисел α, $\beta, \ldots, \lambda$ встречаются отличные от 2.

При m нечетном числа $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, сумма которых равна m, не могут быть все равными 2 и потому для всех возможных совокупностей $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ отношение

$$\frac{G^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{m}{2}}}$$

должно приближаться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$.

При четном же m существует одна и только одна совокупность чисел $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, для которой отношение

$$\frac{G^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{m}{2}}}$$

может не приближаться к нулю вместе с $\frac{1}{n}$: эта единственная совокупность состоит из $\frac{m}{2}$ чисел равных 2.

Следовательно, при m нечетном должно быть

$$\text{пред. м. о.} \left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{\sqrt{2(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)}}\right\}^m_{n=\infty} = 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2}\, dt;$$

а при m четном к пределу нуль должна приближаться разность

$$\text{м. о.} \left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{\sqrt{2(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)}}\right\}^m -$$

$$- \frac{m!}{2^m} \frac{G^{2, 2, \ldots, 2}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{m}{2}}},$$

где $G^{2,2,\ldots,2}$ означает симметрическую функцию величин

$$c_1, c_2, \ldots, c_n,$$

которая вполне определяется одним своим членом

$$c_1, c_2, \ldots, c_{\frac{m}{2}}.$$

С другой стороны, согласно той же формуле Ньютона, при m четном имеем

$$(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{m}{2}} = \sum \frac{\frac{m}{2}!}{\mu!\,\nu!\ldots\omega!} H^{\mu,\nu,\ldots,\omega},$$

где $H^{\mu,\nu,\ldots,\omega}$ означает симметрическую функцию величин $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которая определяется одним ее членом

$$c_1^{\mu} c_2^{\nu} \ldots c_j^{\omega},$$

а суммирование, обозначенное буквою Σ, распространяется на все совокупности целых положительных чисел $\mu, \nu, \ldots, \omega$, удовлетворяющие условию

$$\mu + \nu + \ldots + \omega = \frac{m}{2}.$$

И нетрудно установить неравенство

$$H^{\mu,\nu,\ldots,\omega} <$$
$$< (c_1^{\mu} + c_2^{\mu} + \ldots + c_n^{\mu})(c_1^{\nu} + c_2^{\nu} + \ldots + c_n^{\nu}) \ldots (c_1^{\omega} + c_2^{\omega} + \ldots + c_n^{\omega}),$$

которое обнаруживает, что при наших предположениях отношение

$$\frac{H^{\mu,\nu,\ldots,\omega}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{m}{2}}}$$

должно приближаться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$, если только не все числа $\mu, \nu, \ldots, \omega$ равны единице.

На этом основании заключаем, что разность

$$\left(\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{c_1+c_2+\ldots+c_n}\right)^{\frac{m}{2}}-\left(\frac{m}{2}!\right)\frac{G^{2,2,\ldots,2}}{(c_1+c_2+\ldots+c_n)^{\frac{m}{2}}}$$

должна приближаться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$.

Сопоставляя этот же результат с найденным выше, заключаем, что при беспредельном возрастании числа n математическое ожидание степени

$$\left\{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n-a_1-a_2-\ldots-a_n}{\sqrt{2(c_1+c_2+\ldots+c_n)}}\right\}^m,$$

где m четное положительное число приближается к пределу, равному числу

$$\frac{m!}{2^m\left(\frac{m}{2}!\right)}=\frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2^{\frac{m}{2}}},$$

которому равен и интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2}\,dt.$$

Таким образом теорема о математических ожиданиях доказана вполне.

Примечание. При формулировке теоремы можно не упоминать о втором из приведенных нами двух отношений

$$\frac{c_1^{(\alpha)}+c_2^{(\alpha)}+\ldots+c_n^{(\alpha)}}{(c_1+c_2+\ldots+c_n)^{\frac{\alpha}{2}}} \quad \text{и} \quad \frac{c_1^{\alpha-1}+c_2^{\alpha-1}+\ldots+c_n^{\alpha-1}}{(c_1+c_2+\ldots+c_n)^{\alpha-1}},$$

так как в силу неравенства

$$c_k^{\alpha-1} < c_k^{(2\alpha-2)},$$

доказательство которого не представляет больших затруднений, оно должно стремиться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$, если к такому пределу стремится первое отношение, при всех указанных нами значениях α. С другой стороны, из приведенного нами доказательства можно заключить, что теорема о математических ожиданиях не приложима к тем случаям, когда отношения

$$\frac{c_1^{\alpha-1}+c_2^{\alpha-1}+\ldots+c_n^{\alpha-1}}{(c_1+c_2+\ldots c_n)^{\alpha-1}},$$

стремятся к нулю вместе с $\frac{1}{n}$, а отношения

$$\frac{c_1^{(\alpha)}+c_2^{(\alpha)}+\ldots+c_n^{(\alpha)}}{(c_1+c_2+\ldots+c_n)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

не приближаются к нулю.

§ 22. Остановимся теперь на приложении исчисления вероятностей, вообще, и обобщенной теоремы Бернулли, в частности, к вопросу о выгодности и невыгодности более или менее рискованных предприятий.

Предполагая, что все капиталы можно выразить числами при одной определенной единице меры, мы будем рассматривать каждое предприятие только с точки зрения увеличения или уменьшения капиталов разных лиц. Понятие о выгодности или невыгодности предприятия для данного лица представляется вполне ясным только в тех случаях, когда нет сомнения в том, должно ли это предприятие увеличить капитал лица или, напротив, уменьшить: выгодны все предприятия, которые несомненно увеличивают капитал, и не выгодны все, которые несомненно уменьшают капитал. Совершенно иначе представляется дело для предприятий рискованных, т. е. для таких, которые могут как увеличить, так и уменьшить капиталы участвующих лиц. Заметим, что с математической точки зрения едва ли не все предприятия следует признать более или менее рискованными. Для рискованных предприятий понятие о выгодности или невыгодности их не имеет уже вполне определенного смысла.

Можно, конечно, сказать, что выгодны все предприятия, от которых с большою вероятностью следует ожидать значительного приращения капитала, если притом возможный убыток представляется не только маловероятным, но и незначительным. Едва ли кто-нибудь станет спорить против подобного утверждения. Но по своей неопределенности оно не может служить общим основанием для различия выгодных предприятий от убыточных. Сверх того условие незначительности возможного убытка напрасно исключает из числа выгодных предприятий многократное повторение одного и того же предприятия, каким бы выгодным ни представлялось это предприятие.

Стараясь провести границу между выгодными и невыгодными предприятиями, мы вынуждены причислить к выгодным и такие предприятия, которые с обыденной точки зрения едва ли можно считать выгодными, в виду сопряженного с ними риска. Для предприятий, которые допускают перечисление всех возможных результатов с указанием их вероятностей, основанием деления на выгодные и невыгодные нам послужит математическое ожидание приращения капитала.

Именно мы назовем предприятие выгодным, убыточным или неопределенным, смотря по тому, будет ли математическое ожидание приращения капитала от этого предприятия числом положительным, отрицательным или нулем.

Такое деление оправдывается ссылкой на обобщенную теорему Бернулли, если допустить возможность повторения каждого предприятия неограниченное число раз.

В силу обобщенной теоремы Бернулли от повторения предприятия достаточно большое число раз следует, с вероятностью сколь угодно близкою к достоверности, ожидать произвольно большой выгоды, если для этого предприятия математическое ожидание приращения капитала выражается положительным числом. Напротив, если для некоторого предприятия математическое ожидание приращения капитала выражается отрицательным числом, то от его повторения достаточно большое число раз следует, с вероятностью сколь угодно близкою к достоверности, ожидать уменьшения капитала.

Наконец, в третьем случае, когда математическое ожидание приращения капитала равно нулю, обобщенная теорема Бернулли указывает только на большую вероятность малых значений отношения изменения капитала к числу раз выполнения предприятия, если это число достаточно велико. Но остается вполне неопределенным, будет ли это изменение состоять в увеличении или, напротив, в уменьшении капитала: в силу теоремы о пределе вероятностей, разность вероятностей увеличения и уменьшения капитала будет произвольно мала, если предприятие повторится достаточное число раз.

Заметим, что вопрос о выгодности или невыгодности предприятия должно рассматривать для каждого из его участников отдельно, так как интересы различных участников могут быть и часто бывают совершенно противоположными.

Рассмотрение выгодности или невыгодности предприятия, в установленном нами смысле, представляет одно из руководящих оснований для решения вопроса о том, следует ли участвовать в предприятии или нет, так как это рассмотрение дает возможность судить о вероятных результатах многократного повторения предприятия.

Хотя это руководящее основание не может быть признано единственным, но другого столь же определенного нет.

Как при выгодных, так и при невыгодных предприятиях должно иметь в виду не только вероятный результат их многократного повторения, но и возможные результаты их повторения различное число раз. При повторении выгодного предприятия неограниченное число раз обогащение становится крайне вероятным; но такое повторение может встретить разнообразные препятствия, из которых одно состоит в разорении рассматриваемого лица. Поэтому важно определить вероятность предположения, что при повторении предприятия различное число раз убыток не превзойдет данной величины.

Здесь может быть полезным приближенное выражение вероятности в виде определенного интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt,$$

указанное нами как предел вероятности. Окончательное решение вопроса о том, следует или не следует участвовать в предприятии, зависит от чисто субъективного понятия о допустимой степени риска. Теория может только предлагать те или другие меры риска, но она не может установить, какую степень риска должно признавать допустимою. Подобные же замечания относятся и к невыгодным предприятиям.

Все проекты верного обогащения посредством невыгодных предприятий основаны на заблуждении. Однако, выполнение невыгодного предприятия иногда можно считать благоразумным; именно в тех случаях, когда это невыгодное предприятие уменьшает вероятность больших потерь, грозящих разорением.

Поясним сказанное частными примерами. Положим, что некоторое предприятие может представить только два случая, из которых один дает увеличение нашего капитала на десять рублей, а другой, напротив, уменьшение на тысячу двести рублей. Пусть далее вероятность первого случая равна 0,99, а вероятность второго 0,01. Математическое ожидание нашей выгоды от этого предприятия выражается, в рублях, отрицательным числом

$$0{,}99 \times 10 - 0{,}01 \times 1200 = -2{,}1,$$

что указывает на невыгодность предприятия. Выполняя его один раз, мы можем рассчитывать, с довольно большою вероятностью (0,99), приобресть незначительную сумму (10 руб.), но рискуем потерять гораздо бо̀льшую сумму (1200 руб.), хотя и с малою вероятностью (0,01). Если же в видах возможного обогащения мы станем повторять это предприятие неограниченное число раз, то вероятным результатом такого повторения будет не обогащение, а разорение. Так уже при стократном повторении предприятия вероятность прибыли оказывается значительно меньше вероятности убытка; именно вероятность прибыли при стократном повторении предприятия выражается числом

$$(0{,}99)^{100} \doteq 0{,}36603$$

и потому вероятность убытка равна

$$1 - (0{,}99)^{100} \doteq 0{,}63397.$$

Между тем такое стократное повторение предприятия не доводит возможную прибыль даже до величины возможного убытка одного предприятия. При повторении предприятия 10000 раз возможная прибыль достигает 100000 рублей, но вероятность такой прибыли выражается весьма малым числом

$$(0{,}99)^{10000} \doteq \frac{2249}{10^{47}}.$$

И не только вероятность получить прибыль в 100000 рублей, но и вероятность получить прибыль вообще оказывается довольно малою, при повторении предприятия 10000 раз.

Действительно, вероятность получить, при повторении предприятия 10000 раз, какую нибудь прибыль выражается суммою восьмидесяти трех членов

$$(0{,}99)^{10000}+10000\,(0{,}99)^{9999}\,(0{,}01)+\ldots+$$
$$+\frac{1.2.3\ldots.10000}{1.2\ldots.82.12\ldots.9918}\,(0{,}99)^{9918}\,(0{,}01)^{82},$$

из которых последний

$$\frac{1.2.3\ldots.10000}{1.2\ldots.82.12\ldots.9918}\,(0{,}99)^{9918}\,(0{,}01)^{82}$$

меньше числа

$$\sqrt{\frac{10000}{2\pi.82.9918}}\left(\frac{9900}{9918}\right)^{9918}\left(\frac{100}{82}\right)^{82}=0{,}00773\ldots.$$

Отношение же этой суммы к ее последнему члену, как не трудно убедиться, меньше

$$\frac{1}{1-\dfrac{82.99}{9919}}=\frac{9919}{1801}=5{,}5\ldots.$$

Так как произведение чисел

$$0{,}00773\ldots.\ \text{ и }\ 5{,}5\ldots.$$

меньше 0,05, то и рассматриваемая нами вероятность прибыли, при повторении предприятия 10000 раз, меньше 0,05.

Наконец, при повторении предприятия 1000000 раз оказывается весьма малою не только вероятность избежать убытка, но и вероятность, что убыток будет меньше крупной суммы 100000 рублей. Прибегая к приближенным вычислениям, мы можем за последнюю вероятность принять

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t}^{\infty}e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t}e^{-t^2}\,dt,$$

где t определяется уравнением

$$(np + t\sqrt{2npq})A - (nq - t\sqrt{2npq})B = -100000$$

при

$$n = 1000000, \quad p = 0{,}99, \quad q = 0{,}01, \quad A = 10, \quad B = 1200.$$

Указанное уравнение дает для t величину

$$\frac{2000000}{1210\sqrt{19800}} \doteq 11,$$

при которой величина интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

меньше $\frac{1}{10^{50}}$. Мы пользуемся здесь известным неравенством

$$\int_t^{\infty} e^{-t^2}\, dt < \frac{e^{-t^2}}{2t},$$

которое нетрудно установить при помощи интегрирования по частям.

Чтобы иметь затем пример выгодного предприятия, сохраним все условия только-что рассмотренного примера, кроме одного: именно за величину возможной прибыли будем считать не 10, а 20 рублей. Тогда математическое ожидание прибыли выразится, в рублях, положительным числом

$$20 \times 0{,}99 - 1200 \times 0{,}01 \approx 7{,}8,$$

что и указывает на выгодность предприятия.

Однократное выполнение такого предприятия представляет, как и в предыдущем примере, незначительную прибыль (20 руб.), соединенную с риском потерять гораздо большую сумму (1200 руб.). При стократном повторении предприятия вероятность убытка перестает уже быть очень малою величиною: она выражается тогда разностью

$$1-(0{,}99)^{100}\left\{1+\frac{100}{99}\right\}$$

равною

$$0{,}2642$$

с точностью до $\frac{1}{2\,.\,10^4}$.

Если же мы имеем возможность повторить это предприятие произвольное число раз, то можем рассчитывать обогатиться с вероятностью, сколь угодно близкою к достоверности; впрочем, не устранена, окончательно, и возможность разорения.

При повторении предприятия 10000 раз вероятность убытка выразится суммою

$$\frac{1\,.\,2\,\ldots\,10000}{1\,.\,2\,\ldots\,164\,.\,1\,.\,2\,\ldots\,9836}(0{,}99)^{9836}(0{,}01)^{164}+$$
$$+\frac{1\,.\,2\,\ldots\,10000}{1\,.\,2\,\ldots\,165\,.\,1\,.\,2\,\ldots\,9835}(0{,}99)^{9835}(0{,}01)^{165}+\ldots$$

и будет меньше

$$\sqrt{\frac{10000}{2\pi\,.\,164\,.\,9836}}\left(\frac{9900}{9836}\right)^{9836}\left(\frac{100}{164}\right)^{164}\frac{1}{1-\frac{9836}{165\,.\,99}},$$

последнее же произведение меньше $\frac{1}{10^8}$.

Наконец, при повторении предприятия 1000000 раз становится весьма близкою к единице вероятность получить прибыль не меньше 1000000. Именно, прибегая к приближенным вычислениям, мы можем за последнюю вероятность принять

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-t}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t}e^{-t^2}dt=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t}^{\infty}e^{-t^2}dt,$$

где t определяется уравнением

$$(np - t\sqrt{2npq})\,A - (nq + t\sqrt{2npq})\,B = 1000000$$

при

$$n = 1000000,\ p = 0{,}99,\ q = 0{,}01,\ A = 20,\ B = 1200.$$

Указанное уравнение дает для t величину

$$\frac{6800000}{1220\sqrt{19800}} > 30,$$

при которой разность

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

отличается от единицы на величину меньшую

$$\frac{e^{-900}}{60}.$$

Из второго примера мы получим третий, переставив прибыль с убытком. Предприятие, дающее прибыль 1200 рублей с вероятностью 0,01 и убыток 20 рублей с вероятностью 0,99, не выгодно, так как математическое ожидание соответствующей прибыли выражается, в рублях, отрицательным числом

$$1200 \times 0{,}01 - 20 \times 0{,}99 = -7{,}8.$$

Поэтому нельзя рекомендовать многократное повторение одного этого предприятия с целью обогащения. Но повторение его небольшое число раз может быть допущено в виду незначительности убытка. Можно также признать благоразумным присоединение этого предприятия к другим выгодным, но рискованным предприятиям.

Положим, например, что некоторое предприятие представляет убыток 1100 рублей и прибыль в 120 рублей соответственно в тех случаях, когда только-что рассмотренное предприятие дает прибыль 1200 рублей и убыток 20 рублей.

Тогда, присоединяя к этому новому выгодному, но рискованному предприятию рассмотренное нами невыгодное предприятие, мы обеспечиваем себе верную выгоду 100 рублей. На подобных началах основаны различные виды страхования.

§ 23. С понятием о выгодных и невыгодных предприятиях тесно связано понятие о *безобидных* и *небезобидных играх*. *Игрою* мы называем здесь не развлечение, а всякое предприятие, которое представляет возможность различных изменений капитала каждого участника в отдельности, но не изменяет общего их капитала.

Притом, подобно прежнему, мы будем предполагать, что можно перечислить для каждого участника все возможные изменения его капитала и указать их вероятности. Участников игры мы будем называть игроками и, в случае надобности, будем отличать их друг от друга нумерами 1, 2, 3 ...., или буквами A, B, C.... Пусть

$$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

представляют, соответственно, для игроков

$$1, 2, 3, \ldots$$

приращения их капиталов, происходящие от игры.

Так как игра не изменяет общей суммы капиталов всех игроков, то сумма

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots$$

приращений капиталов всех игроков должна приводиться к нулю. Поэтому должна равняться нулю и сумма математических ожиданий тех же приращений:

$$\text{м. о. } X_1 + \text{м. о. } X_2 + \text{м. о. } X_3 + \ldots = 0.$$

И, следовательно, если для некоторых из игроков математические ожидания приращений их капиталов от игры выражаются числами положительными, то должны быть и такие игроки, для которых математические ожидания приращений их капиталов от той же игры выражаются отрицательными числами. Тогда для одних игроков игра будет выгодным предприятием, а для других невыгодным; и при повторении ее неограниченное число раз те игроки, для которых игра выгодна, могут рассчитывать почти наверняка обыграть других, для которых игра невыгодна.

Отсюда вытекает такое условие *безобидности* игр: *математическое ожидание приращения капитала для каждого игрока должно приводиться к нулю.*

Для игр небезобидных можно, почти с уверенностью, предсказывать, кто из игроков обогатится и кто разорится при повторении игры неограниченное число раз.

Относительно же безобидных игр нельзя сделать подобного предсказания. Вместе с тем, однако, нельзя полагать, чтобы безобидные игры при многократном их повторении не производили значительных изменений в капиталах игроков и не разоряли никого из них. Из доказанных нами теорем этого не следует и не может следовать.

Обобщенная теорема Бернулли указывает только на большую вероятность, что будут малыми отношения изменений капиталов игроков к числу повторений безобидной игры; но при малых величинах этих отношений сами изменения могут быть значительными. А теорема о пределе вероятности обнаруживает малость вероятности, что изменения капиталов игроков останутся малыми при многократном повторении безобидной игры. Из той же теоремы о пределе вероятности следует, что для каждого игрока вероятность получить произвольно большую прибыль и вероятность получить произвольно большой убыток стремятся к одному и тому же пределу $\frac{1}{2}$, когда число повторений безобидной игры увеличивается беспредельно.

Условие безобидности игр должно служить руководящим основанием денежных расчетов между участниками таких предприятий, которые подходят под установленное нами понятие игры. Часто допускаются, однако, отступления от этого условия, результат которых выражается в обогащении одних лиц на счет других. Это бывает в тех случаях, когда игра организована, с целью более или менее верной наживы, одними участниками так, чтобы ее можно было повторять иеограниченное число раз при изменении других участников.

Если организаторы игры сохранили бы условие безобидности относительно прочих участников, то их цель не была бы достигнута и они подвергались бы большому риску разорения.

Что же касается прочих участников, из которых каждый участвует в игре только сравнительно небольшое число раз, то они могут считать свое участие в ней благоразумным даже и при некотором, не слишком большом, нарушении условия безобидности, если это предприятие предохраняет их от другого риска, как было уже пояснено на частном примере при рассмотрении выгодных и невыгодных предприятий.

Здесь может возникнуть вопрос о допустимой степени нарушения условия безобидности игр. Но на этот вопрос нельзя дать определенного ответа; подобно тому, как раньше мы отказались установить допустимую степень риска.

Заметим еще, что практические приложения условия безобидности игр обыкновенно затрудняются двумя обстоятельствами: невозможностью точно установить вероятности различных предположений и нарушением условия неизменности общей суммы капиталов.

ЛИТЕРАТУРА.

П. Чебышев. Сочинения. Том I. О средних величинах. Том II. О двух теоремах относительно вероятностей.

А. Марков. Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга (Изв. физ.-мат. общ. при Казанском унив. 2 серия, XV, № 4).

A. Liapounoff. Sur une proposition de la théorie des probabilités (Bull. de l'Acad. de St. Pétersb. V série, XIII).

ГЛАВА IV

Примеры различных приемов вычисления вероятностей

§ 24. *Задача 1-я.* Из сосуда, содержащего a белых и b черных шаров и никаких других, вынимают одновременно или последовательно $\alpha+\beta$ шаров, при чем, в случае последовательного вынимания, ни один из вынутых шаров не возвращают обратно в сосуд и новых туда также не подкладывают.

Требуется определить вероятность, что между вынутыми таким образом шарами будет α белых и β черных.

Первое решение. Положим, что все шары в сосуде отличены друг от друга нумерами, притом таким образом, что на белых стоят нумера

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ a,$$

а на черных нумера

$$a+1,\ a+2, \ldots,\ a+b.$$

Нумера вынутых шаров должны образовать некоторую совокупность $\alpha+\beta$ нумеров из всех $a+b$ нумеров

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ a+b.$$

Число различных совокупностей $\alpha+\beta$ нумеров, которые можно образовать из $a+b$ нумеров, равно

$$\frac{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}$$

Соответственно этому мы можем различить

$$\frac{(a+b)(a+b-1)\ldots.(a+b-\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots.(\alpha+\beta)}$$

равновозможных случаев, каждый из которых состоит в появлении определенных $\alpha+\beta$ нумеров.

Из всех этих случаев, единственно возможных и несовместимых, благоприятствуют появлению α белых и β черных шаров те и только те, при которых появляется какая-нибудь совокупность α нумеров из группы

$$1,\ 2,\ 3,\ldots.,\ a$$

вместе с какою-нибудь совокупностью β нумеров из группы

$$a+1,\ a+2,\ldots.,\ a+b.$$

Число различных совокупностей α нумеров, которые можно образовать из a нумеров, равно

$$\frac{a(a-1)\ldots.(a-\alpha+1)}{1.2\ldots.\alpha},$$

и число различных совокупностей β нумеров, которые можно образовать из b нумеров, равно

$$\frac{b(b-1)\ldots.(b-\beta+1)}{1.2\ldots.\beta}.$$

Поэтому число различных совокупностей $\alpha+\beta$ нумеров, которые получаются от соединения каждой совокупности α нумеров из группы

$$1,\ 2,\ldots.,\ a$$

с каждою совокупностью β нумеров из группы

$$a+1,\ a+2,\ldots.,\ a+b,$$

выразится произведением

$$\frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha}\cdot\frac{b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{1.2\ldots\beta}.$$

Итак, число рассматриваемых нами случаев, которые благоприятствуют появлению α белых и β черных шаров, выражается только-что указанным произведением. И, следовательно, искомая нами вероятность, что среди вынутых $\alpha+\beta$ шаров будет α белых и β черных, выразится отношением

$$\frac{\frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha}\cdot\frac{b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{1.2\ldots\beta}}{\frac{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}},$$

которое после простых преобразований приводится к

$$\frac{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta}\;\frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}.$$

Числовой пример: $a=3$, $b=4$, $\alpha=2$, $\beta=2$.

Предполагаем, что на белых шарах поставлены нумера 1, 2, 3 и на черных нумера 4, 5, 6, 7. Нумера на вынутых четырех шарах могут представлять любую из следующих

$$\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}=35$$

совокупностей:

1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 5	1, 2, 3, 6	1, 2, 3, 7	1, 2, 4, 5	1, 2, 4, 6	1, 2, 4, 7
1, 2, 5, 6	1, 2, 5, 7	1, 2, 6, 7	1, 3, 4, 5	1, 3, 4, 6	1, 3, 4, 7	1, 3, 5, 6
1, 3, 5, 7	1, 3, 6, 7	1, 4, 5, 6	1, 4, 5, 7	1, 4, 6, 7	1, 5, 6, 7	2, 3, 4, 5
2, 3, 4, 6	2, 3, 4, 7	2, 3, 5, 6	2, 3, 5, 7	2, 3, 6, 7	2, 4, 5, 6	2, 4, 5, 7
2, 4, 6, 7	2, 5, 6, 7	3, 4, 5, 6	3, 4, 5, 7	3, 4, 6, 7	3, 5, 6, 7	4, 5, 6, 7

Если же вынуты 2 белых и 2 черных шара, то их нумера образуют одну из следующих

$$\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2} \times \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2} = 18$$

совокупностей:

1, 2, 4, 5	1, 2, 4, 6	1, 2, 4, 7	1, 2, 5, 6	1, 2, 5, 7	1, 2, 6, 7
1, 3, 4, 5	1, 3, 4, 6	1, 3, 4, 7	1, 3, 5, 6	1, 3, 5, 7	1, 3, 6, 7
2, 3, 4, 5	2, 3, 4, 6	2, 3, 4, 7	2, 3, 5, 6	2, 3, 5, 7	2, 3, 6, 7.

Таким образом мы имеем 35 равновозможных случаев, из которых 18 благоприятствуют рассматриваемому событию; следовательно, искомая вероятность, что между вынутыми четырьмя шарами белых и черных будет по два, равна $\frac{18}{35}$.

Второе решение. Для отличия вынутых шаров друг от друга положим, что независимо от цвета они размещены в каком-нибудь порядке и соответственно этому припишем им нумера

$$1,\ 2, \ldots,\ \alpha + \beta.$$

Наши нумера могут указывать порядок появления шаров, если шары вынуты из сосуда последовательно. После этого для определения вероятности рассматриваемого события, которое состоит в появлении α белых и β черных шаров, мы можем разбить его на отдельные виды, отличающиеся друг от друга порядком белых и черных шаров. Число видов равно

$$\frac{1\,.\,2\ldots(\alpha+\beta)}{1\,.\,2\ldots\alpha\,.\,1\,.\,2\ldots\beta}$$

и каждый из них состоит в белом цвете α шаров, отмеченных определенными нумерами, и в черном цвете остальных вынутых шаров. Останавливаясь на любом из этих видов, заметим, что он приводится к одновременному существованию $\alpha + \beta$ событий

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_k, \ldots,\ E_{\alpha+\beta},$$

где E_k означает определенный цвет, белый или черный, шара с нумером k. Вероятность же одновременного существования всех событий

$$E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots, E_{\alpha+\beta}$$

выражается, согласно теореме умножения вероятностей, произведением

$$(E_1)\ (E_2, E_1) \ldots (E_k, E_1 E_2 \ldots E_{k-1}) \ldots$$

$$(E_{\alpha+\beta}, E_1 E_2 \ldots E_{\alpha+\beta-1}),$$

где

$$(E_k, E_1 E_2 \ldots E_{k-1})$$

представляет вероятность события E_k, когда известно существование событий

$$E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}.$$

Чтобы определить последнюю вероятность, надо сосчитать, сколько раз среди событий

$$E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}$$

встречается белый цвет шара и сколько раз черный.

Если среди событий

$$E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}$$

белый цвет встречается i раз, а черный j раз, при чем $i+j=k-1$; то при несомненном их существовании шар с нумером k может быть только одним из

$$a+b-k+1$$

шаров, среди которых $a-i$ белых и $b-j$ черных.

И потому вероятность, что шар с нумером k белый, выразится при таких данных дробью

$$\frac{a-i}{a+b-k+1},$$

а вероятность, что он черный, при тех же данных выразится дробью

$$\frac{b-j}{a+b-k+1}.$$

Таким образом получаем:

$$(E_k,\ E_1 E_2 \ldots . E_{k-1}) = \frac{\sigma_k}{a+b-k+1},$$

где

$$\sigma_k = a-i \text{ или } \sigma_k = b-j,$$

смотря по тому, означает ли E_k белый или черный цвет шара с нумером k; числа же i и j, сообразно сказанному нами, показывают соответственно, сколько раз встречается белый цвет шара и сколько раз встречается черный цвет шара среди событий

$$E_1,\ E_2, \ldots, E_{k-1}.$$

Определяя по указанному правилу каждую из вероятностей

$$(E_2,\ E_1),\ (E_3,\ E_1 E_2), \ldots, (E_{\alpha+\beta},\ E_1\ E_2 \ldots . E_{\alpha+\beta-1})$$

и замечая, что

$$(E_1) = \frac{\sigma_1}{a+b},$$

где

$$\sigma_1 = a \text{ или } \sigma_1 = b,$$

находим для вероятности появления всех событий

$$E_1,\ E_2, \ldots, E_{\alpha+\beta}$$

такое выражение

$$\frac{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{\alpha+\beta}}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}.$$

Числитель

$$\sigma_1\ \sigma_2 \ldots \sigma_{\alpha+\beta}$$

этого выражения состоит из α множителей вида $a-i$ и β множителей вида $b-j$; ибо среди всех событий

$$E_1,\ E_2, \ldots, E_{\alpha+\beta}$$

белый цвет встречается α раз, а черный β раз.

Вместе с тем, нетрудно видеть, что как i в разности $a-i$, так и j в разности $b-j$ означает число тех множителей произведения

$$\sigma_1\ \sigma_2 \ldots \sigma_{\alpha+\beta},$$

которые предшествуют этой разности и имеют одинаковый с нею вид. Следовательно, произведение

$$\sigma_1\ \sigma_2 \ldots \sigma_{\alpha+\beta}$$

состоит из множителей

$$a,\ a-1, \ldots, a-\alpha+1$$

и из множителей

$$b,\ b-1, \ldots, b-\beta+1,$$

и потому оно равно

$$a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)\,b(b-1)\ldots(b-\beta+1).$$

Итак, вероятность любого из указанных нами видов появления, среди вынутых $\alpha+\beta$ шаров, α белых и β черных шаров, имеет одну и ту же величину

$$\frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)\,b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}.$$

Остается вспомнить, что число этих видов равно

$$\frac{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}{1.2.3\ldots\alpha.1.2\ldots\beta},$$

и теорема сложения вероятностей тотчас даст нам для искомой вероятности, что среди вынутых $\alpha+\beta$ шаров будет α белых и β черных шаров, прежнюю величину

$$\frac{1.2\ldots(\alpha+\beta)}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta}\cdot\frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)\,b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}.$$

Числовой пример: $a=3,\ b=4,\ \alpha=2,\ \beta=2.$

Обращая внимание на порядок вынутых шаров, мы можем разбить событие, вероятность которого ищем, на такие виды:

ббчч, бчбч, бччб, чббч, чбчб, ччбб,

где буква *б* указывает на белый цвет, а буква *ч* на черный цвет шара. Число этих видов рассматриваемого события равно

$$\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2}=6,$$

а вероятности их, согласно теореме умножения вероятностей, выражаются произведениями

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4},\quad \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4},\quad \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4},$$

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4},\quad \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4},\quad \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4},$$

которые приводятся к одной и той же дроби

$$\frac{3}{35}.$$

Следовательно, искомая вероятность, что между вынутыми четырьмя шарами белых и черных будет по два, равна $\frac{18}{35}$, как было найдено и другим путем.

Прежде чем перейти к другим задачам на разыскание вероятностей, рассмотрим математическое ожидание $\left(\alpha-(\alpha+\beta)\frac{a}{a+b}\right)^2$, при данных a, b, $\alpha+\beta$, равное сумме всех возможных значений произведения

$$\overset{a,\,b}{\underset{\alpha\,(\alpha+\beta)}{P}}\left(\alpha-(\alpha+\beta)\frac{a}{a+b}\right)^2,$$

где

$$\overset{a,\,b}{\underset{\alpha,\,\alpha+\beta}{P}}=\frac{1\,.\,2\ldots\ldots(\alpha+\beta)\,a\ldots\ldots(a-\alpha+1)\,b\ldots\ldots(b-\beta+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots\alpha\,.\,1\,.\,2\ldots\ldots\beta\,(a+b)\ldots\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}$$

и $\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots\ldots,\ \alpha+\beta$. Исходным пунктом наших выводов послужит очевидное равенство

$$\sum\overset{a,\,b}{\underset{\alpha,\,\alpha+\beta}{P}}=1\quad(\alpha=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \alpha+\beta),$$

справедливое при всех возможных значениях $\alpha+\beta$, a, b.

На основании его получаем

$$\text{м. о. } \alpha = \sum P_{\alpha,\, \alpha+\beta}^{a,\, b}\, \alpha = (\alpha+\beta)\frac{a}{a+b}\sum P_{\alpha-1,\, \alpha+\beta-1}^{a-1,\, b} = (\alpha+\beta)\frac{a}{a+b}$$

и

$$\text{м. о. } \alpha(\alpha-1) = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Затем представляем квадрат

$$\left(\alpha-(\alpha+\beta)\frac{a}{a+b}\right)^2$$

в виде суммы

$$\alpha(\alpha-1)-\left(\frac{2(\alpha+\beta)a}{a+b}-1\right)\alpha+(\alpha+\beta)^2\frac{a^2}{(a+b)^2}$$

и, пользуясь полученными выражениями м. о. α, м. о. $\alpha(\alpha-1)$, находим математическое ожидание его равным сумме

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}-\left(\frac{2(\alpha+\beta)a}{a+b}-1\right)(\alpha+\beta)\frac{a}{a+b}+$$

$$+(\alpha+\beta)^2\frac{a^2}{(a+b)^2},$$

откуда, наконец, простым преобразованием выводим

$$\text{м. о. }\left(\alpha-(\alpha+\beta)\frac{a}{a+b}\right)^2=\frac{ab(a-b-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{(a+b)^2(a+b-1)}.$$

Закон больших чисел к данному примеру не приходится применять, так как, не изменяя первоначального числа $a+b$ шаров в сосуде, нельзя произвольно увеличивать число испытаний. На заключениях, к которым можно придти, увеличивая безгранично оба числа $a+b$, $\alpha+\beta$ и на соответствующих такому увеличению приближенных формулах * мы не останавливаемся. Но мы отметим одно видоизменение задачи, к которому, согласно доказанному в § 19, закон больших чисел вовсе нельзя применять. А именно, мы предположим, что каждый вынутый шар немедленно заменяется двумя шарами того же цвета. При таком изменении задачи вероятность, что среди вынутых $\alpha+\beta$ шаров белых окажется ровно α, будет

$$\overline{P}^{a,b}_{\alpha,\alpha+\beta}=\frac{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta}\cdot\frac{a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)\,b(b+1)\ldots(b+\beta-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\alpha+\beta-1)}.$$

Вместе с тем, подобно прежнему имеем

$$\sum\overline{P}^{a,b}_{\alpha,\alpha+\beta}=1,$$

$$\text{м. о. }\alpha=\sum\overline{P}^{a,b}_{\alpha,\alpha+\beta}\,\alpha=(\alpha+\beta)\frac{a}{a+b}\sum\overline{P}^{a+1,b}_{\alpha-1,\alpha+\beta-1}=(\alpha+\beta)\frac{a}{a+b},$$

$$\text{м. о. }\alpha(\alpha-1)=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1},$$

$$\text{м. о. }\left\{\alpha-(\alpha+\beta)\frac{a}{a+b}\right\}^2=$$

$$=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}-\left(\frac{2(\alpha+\beta)a}{a+b}-1\right)(\alpha+\beta)\frac{a}{a+b}+$$

$$+(\alpha+\beta)^2\frac{a^2}{(a+b)^2}=\frac{ab(a+b+\alpha+\beta)(\alpha+\beta)}{(a+b)^2(a+b+1)}>(\alpha+\beta)^2\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)},$$

что и обнаруживает неприменимость к данному случаю закона больших чисел. В частности, например, при $a=b=1$ все значения α оказываются равновероятными:

$$\overline{P}^{1,1}_{\alpha,\alpha+\beta}=\frac{1.2\ldots(\alpha+\beta)}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta}\cdot\frac{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta}{2.3.4\ldots(\alpha+\beta+1)}=\frac{1}{\alpha+\beta+1}.$$

* *A. Meyer*, „Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung" (deutsch bearbeitet von E. Czuber) 1879. „Anhang III, Ausdehnung des Bernoulli'schen Theorem auf Factoriellen von Binomen"

§ 25. *Задача 2-я.* Из сосуда, содержащего n билетов с нумерами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n$$

и никаких других, вынимают одновременно или последовательно m билетов, при чем, в случае последовательного вынимания, ни один из вынутых билетов не возвращают обратно в сосуд и новых туда также не подкладывают.

Требуется определить вероятность, что между нумерами вынутых билетов появится i нумеров, указанных заранее, напр., $1, 2, 3, \ldots, i$.

Решение. Эту задачу можно рассматривать как тот частный случай предыдущей, когда $a = \alpha$. Именно можно i билетов, нумера которых указаны заранее, уподобить белым шарам, а остальные билеты уподобить черным шарам. Такое уподобление тотчас обнаруживает, что решение поставленной задачи получится из решения предыдущей через замену всех чисел

$$a,\ b,\ \alpha,\ \beta$$

соответственно числами

$$i,\ n-i,\ i,\ m-i.$$

Обращаясь на этом основании к найденному раньше выражению

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (\alpha+\beta)}{1\,.\,2 \ldots \alpha\,.\,1\,.\,2 \ldots \beta}\,\frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)\,b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}$$

и делая в нем указанную замену, получаем величину искомой вероятности в виде произведения

$$\frac{1\,.\,2 \ldots m}{1\,.\,2 \ldots i\,.\,1\,.\,2 \ldots (m-i)}\,\frac{i(i-1)\ldots 1\,(n-i)(n-i-1)\ldots(n-m+1)}{n(n-1)\ldots(n-m+1)},$$

которое после сокращения приводится к

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{n(n-1)\ldots(n-i+1)}.$$

Итак, искомая вероятность, что среди вынутых m нумеров окажутся все указанные наперед i нумеров, выражается дробью

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{n(n-1)\ldots(n-i+1)}.$$

Другое решение. Положим, что на билетах ставятся новые нумера: на вынутых

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ m,$$

а на оставшихся в сосуде

$$m+1,\ m+2,\ldots,\ n.$$

Тогда для указанных наперед i билетов новые их нумера образуют какую-нибудь совокупность i нумеров из всех n нумеров. На этом основании мы можем различать

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i}$$

равновозможных случаев, каждому из которых соответствует определенная совокупность новых нумеров на указанных наперед i билетах. Из всех этих случаев, единственно возможных и несовместимых, благоприятствуют появлению всех указанных наперед i билетов те и только те, при которых вся совокупность новых нумеров на этих билетах составлена из чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ m.$$

Число же различных совокупностей i нумеров, которые можно составить из m нумеров, равно

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots i}.$$

Итак, число всех равновозможных случаев равно

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i},$$

а число благоприятствующих событию равно

$$\frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{1.2\dots i};$$

и, следовательно, искомая вероятность, что среди вынутых m билетов будут все указанные наперед i билетов, выражается дробью

$$\frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{n(n-1)\dots(n-i+1)},$$

согласно прежнему выводу.

Для примера остановимся на Генуэзской лотерее, которая возникла в Генуе уже в начале XVII столетия, если не раньше; во второй половине XVIII столетия разыгрывалась также во Франции и Германии и до 1914 г. продолжала еще существовать в Австрии и Италии *. Она состояла из 90 нумеров, и при каждом ее розыгрыше выходило по 5 нумеров. По условию лотереи можно было ставить ту или другую сумму на любой нумер или на любую совокупность двух, трех, четырех, или, наконец, пяти нумеров, что называлось, соответственно: простой одиночкой (l'extrait simple), амбо (l'ambe), терн (le terne), катерн (le quaterne) и кин (le quine). Если в числе вышедших пяти нумеров находилась совокупность тех, на которые игрок поставил сумму, то администрация лотереи выдавала этому игроку условленную сумму, находящуюся в определенном отношении к величине ставки. Это отношение

для простой одиночки равнялось	15,
для амбо	270,
для терн	5500,
для катерн	75000,
для кин	1000000.

Для вычисления вероятностей появления простой одиночки, амбо, терн, катерн и кин следует в найденном нами выражении

$$\frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{n(n-1)\dots(n-i+1)}$$

положить

$$n=90 \text{ и } m=5$$

* Согласно „Энциклопедическому Словарю" Бр. А. и И. Гранат: в Австрии по бюджету 1913 г. доход от лотереи равнялся 40,1 милл. крон, расход 24,1 милл. крон; в Италии по бюджету 1912—1913 г. доход равнялся 106 милл. лир, расход 25,6 милл. лир.

и давать i последовательно значения

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Таким образом находим, что вероятность появления

простой одиночки равна $\dfrac{5}{90} = \dfrac{1}{18}$,

амбо . . . . $\dfrac{5.4}{90.89} = \dfrac{2}{801}$,

терн . . . . $\dfrac{5.4.3}{90.89.88} = \dfrac{1}{11748}$,

катерн . . . . $\dfrac{5.4.3.2}{90.89.88.87} = \dfrac{1}{511038}$,

кин . . . . $\dfrac{1}{511038} \cdot \dfrac{1}{86} = \dfrac{1}{43949268}$.

Поэтому, если ставка игрока равна M, то математическое ожидание его прибыли от участия в лотерее выражается:

в случае простой одиночки числом $\left(\dfrac{15}{18} - 1\right) M = -\dfrac{1}{6} M$,

в случае амбо . . . . $\left(\dfrac{540}{801} - 1\right) M = -\dfrac{29}{89} M$,

в случае терн . . . . $\left(\dfrac{5500}{11748} - 1\right) M = -\dfrac{1562}{2937} M$

и т. д.

Во всех случаях, как мы видим, это математическое ожидание — число отрицательное; следовательно, лотерея, о которой идет речь, представляет игру далеко не безобидную.

Этому выводу соответствует тот факт, что лотерея приносила значительную выгоду устроителям ее.

Приведем интересные с точки зрения исчисления вероятностей результаты $S = 2854$ лотерей, которые были в Праге за промежуток от 1754 до 1886 года, заимствуя все числа из книги Czuber: „Wahrscheinlichkeitsrechnung" (1903 года).

Приводимая таблица указывает число появлений каждого из 90 нумеров в течение 2854 лотерей. При этом нумера стоят в 1-ом столбце, число появлений их в 3-ем. Нумера, появившиеся одно и то же число раз, стоят в одной строке. Таким образом нумер 6 появился 138 раз, нумера 39 и 65 — 139 раз, и т. д.

Как видно из 3-го столбца, в 1-ом столбце нумера расположены в порядке возрастания числа их появлений. Второй столбец таблицы указывает число нумеров, стоящих в каждой строке 1-го столбца. В 4-ом столбце стоят разности между числом появлений каждого нумера и математическим ожиданием этого числа, равным $\frac{s}{18} = \frac{2854}{18} = 158\frac{5}{9}$ и приравненном в таблице 158. Пятый столбец дает квадраты этих разностей.

№№	Число их i.	Число появлений m.	Разности $m - \frac{s}{18}$.	Квадраты их.
6	1	138	— 20	400
39,65	2	139	— 19	361
16,41,76,87	4	142	— 16	256
2,14,56,79,86	5	143	— 15	225
18,44,47	3	144	— 14	196
72,80	2	145	— 13	169
12	1	146	— 12	144
21,53	2	147	— 11	121
70	1	149	— 9	81
24,32,55,69	4	150	— 8	64
27,64,75	3	151	— 7	49
81	1	152	— 6	36
23,29,85	3	153	— 5	25
19,35,42,74	4	154	— 4	16
7,20,59	3	155	— 3	9
13,34,40,67,88	5	156	— 2	4
19,52,68	3	157	— 1	1
17,82	2	158	0	0
15,90	2	159	1	1
58	1	160	2	4
8,25,36	3	161	3	9
22	1	162	4	16
33,57	2	163	5	25
51	1	164	6	36
3,43,45,48	4	165	7	49
10,26,66	3	166	8	64
1,5,60,84	4	167	9	81

№№	Число их i.	Число появлений m.	Разности $m-\frac{s}{18}$.	Квадраты их.
50,62	2	168	10	100
9,61,63	3	170	12	144
54,73	2	171	13	169
49,71,78	3	172	14	196
28	1	173	15	225
37	1	176	18	324
30,46	2	177	19	361
89	1	178	20	400
31	1	179	21	441
38	1	184	26	676
4	1	185	27	729
77	1	186	28	784
83	1	189	31	961
	Сумма $i=90$	Сумма $im=$ $=14270$	Сумма $i\left(m-\frac{s}{18}\right)^2=13059$	

В течение 2854 лотерей все нумера появились, поэтому сумма чисел 2-го столбца равна 90. Так как при каждой лотерее появляется 5 нумеров, то сумма чисел появлений каждого нумера должна равняться $5 \cdot 2854 = 14270$, что мы и получим, суммируя произведение каждого числа 3-го столбца на соответствующее число 2-го.

Суммируя произведения чисел 5-го столбца на соответствующие числа 2-го, получим сумму квадратов отклонений чисел появлений каждого нумера от математического ожидания числа появлений отдельного нумера. Таким образом средняя арифметическая из наблюденных значений квадратов

$$\left(m-\frac{s}{18}\right)^2$$

равна

$$\frac{13059}{90}=145,1.$$

Математическое ожидание того же квадрата для каждого нумера равно

$$2854\frac{1}{18}\cdot\frac{17}{18}=149,7.$$

§ 26. *Задача 3-ья.* Из сосуда, содержащего n билетов с нумерами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots \ldots, n$$

и никаких других, вынимают одновременно m билетов, что мы назовем первым тиражем. Затем вынутые билеты возвращают в сосуд и производят подобный же второй тираж m билетов. По окончании второго тиража вынутые билеты возвращают также в сосуд и производят третий тираж и т. д.

Требуется при k таких тиражах определить:

1) вероятность, что i определенных нумеров не появятся;

2) вероятность, что i определенных нумеров не появятся, а другие l определенных нумеров появятся;

3) вероятность, что l определенных нумеров появятся;

4) вероятность, что появятся только l определенных нумеров;

5) вероятность, что появятся все нумера.

Решение. Положим для краткости

$$\left\{\frac{p(p-1)\ldots\ldots(p-m+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots m}\right\}^k = Z_p,$$

каково бы ни было число p.

При каждом тираже нумера вынутых билетов могут представлять любую совокупность m чисел из всех n чисел

$$1,\ 2, \ldots \ldots, n.$$

Соответственно этому при одном тираже различим

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots m}$$

равновозможных случаев, а при всех k тиражах различим

$$\left\{\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.\,2\ldots\ldots m}\right\}^k = Z_n$$

равновозможных случаев.

Каждый из последних случаев, единственно возможных и несовместимых, состоит в появлении k определенных совокупностей m нумеров, при рассматриваемых нами k тиражах. Установив таким образом те случаи, которые мы будем рассматривать, и указав общее число их, займемся для определения вероятностей событий, упомянутых в задаче, счетом числа благоприятствующих им случаев.

Если i определенных нумеров

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$$

не появляются, то для одного тиража вместо

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$$

остается

$$\frac{(n-i)(n-i-1)\ldots(n-i-m+1)}{1.2\ldots m}$$

случаев, а для k тиражей вместо

$$\left\{\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}\right\}^k = Z_n$$

имеем

$$\left\{\frac{(n-i)(n-i-1)\ldots(n-i-m+1)}{1.2\ldots m}\right\}^k = Z_{n-i}$$

случаев. Следовательно, вероятность, что при k рассматриваемых нами тиражах i определенных нумеров не появятся, выражается дробью

$$\frac{Z_{n-i}}{Z_n} = \left\{\frac{(n-i)(n-i-1)\ldots(n-i-m+1)}{n(n-1)\ldots(n-m+1)}\right\}^k.$$

Затем число случаев, при которых не появляются i определенных нумеров

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$$

и появляется один также определенный нумер β_1, можно выразить разностью

$$\Delta Z_{n-i-1} = Z_{n-i} - Z_{n-i-1},$$

где Z_{n-i}, согласно только-что сказанному, представляет число всех случаев, при которых не появляются нумера

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i,$$

а Z_{n-i-1} число тех из этих случаев, при которых кроме нумеров

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$$

не появляется также и нумер β_1. Подобным же образом число случаев, при которых не появляются l определенных нумеров

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$$

и появляются два определенных нумера, можно выразить второю разностью

$$\Delta^2 Z_{n-i-2} = \Delta Z_{n-i-1} - \Delta Z_{n-i-2},$$

где ΔZ_{n-i-1} представляет число всех случаев, при которых появляется нумер β_1 и не появляются нумера

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i,$$

а ΔZ_{n-i-2} число тех из этих случаев, при которых кроме нумеров

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$$

не появляется также нумер β_2. В виду возможности продолжения подобных рассуждений не трудно заключить, что, вообще, число случаев, при которых не появляются i определенных нумеров и появляются другие l определенных нумеров, можно представить разностью $l^{\text{го}}$ порядка

$$\Delta^l Z_{n-i-l},$$

которая равна

$$Z_{n-i} - \frac{l}{1} Z_{n-i-1} + \frac{l(l-1)}{1.2} Z_{n-i-2} - \ldots \pm Z_{n-i-l}.$$

Итак вероятность, что при k рассматриваемых нами тиражах i определенных нумеров не появится, а другие l определенных нумеров появятся, равна

$$\frac{\Delta^l Z_{n-i-l}}{Z_n}.$$

Прочие вероятности, упомянутые в задаче, представляют три частных случая только-что найденной вероятности и потому могут быть получены из выражения

$$\frac{\Delta^l Z_{n-i-l}}{Z_n}$$

при частных предположениях относительно i и l:

$$1)\ i=0,\quad 2)\ i=n-l,\quad 3)\ i=0,\ l=n.$$

Полагая $i=0$, получаем нижеследующее выражение вероятности появления l определенных нумеров:

$$\frac{\Delta^l Z_{n-l}}{Z_n}=1-\frac{l}{1}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k+\frac{l(l-1)}{1.2}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k-\ldots.$$

Полагая же $i=n-l$, находим, что вероятность появления l определенных нумеров и непоявления остальных равна

$$\frac{\Delta^l Z_0}{Z_n}=\frac{Z_l}{Z_n}-\frac{l}{1}\frac{Z_{l-1}}{Z_n}+$$

$$+\frac{l(l-1)}{1.2}\frac{Z_{l-2}}{Z_n}-\ldots=\left(\frac{n-m}{n}\right)^k\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k\ldots$$

$$\ldots\left(\frac{l-m+1}{l+1}\right)^k\left\{1-\frac{l}{1}\left(\frac{l-m}{l}\right)^k+\ldots\right\}.$$

Наконец, вероятность появления всех n нумеров равна

$$\frac{\Delta^n Z_0}{Z_n} = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k - \ldots .$$

Останавливаясь на последней формуле и замечая, что при больших значениях n она требует утомительных вычислений, выведем из нее две приближенных формулы. Для получения первой приближенной формулы положим, что все числа

$$\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k, \quad \left(\frac{n-m-2}{n-2}\right)^k, \ldots .$$

равны числу

$$\left(\frac{n-m}{n}\right)^k,$$

которое для краткости обозначим буквою t.

При таком допущении указанная формула тотчас дает

$$\frac{\Delta^n Z_0}{Z_n} \doteq (1-t)^n, \quad \text{где} \quad t = \left(\frac{n-m}{n}\right)^k.$$

Для второго приближения заметим, что при небольших значениях отношение

$$\left(\frac{n-m-i}{n-i}\right)^k : \left(\frac{n-m}{n}\right)^k,$$

равное

$$\left\{1 - \frac{im}{(n-i)(n-m)}\right\}^k,$$

мало отличается от

$$1 - \frac{kim}{n(n-m)}$$

и произведение

$$\left(1-\frac{km}{n(n-m)}\right)\left(1-\frac{2km}{n(n-m)}\right)\cdots\left(1-\frac{ikm}{n(n-m)}\right)$$

мало отличается от

$$1-\frac{km(1+2+\ldots+i)}{n(n-m)}=1-\frac{kmi(i+1)}{2n(n-m)}.$$

На этом основании за приближенную величину каждого произведения

$$\left(\frac{n-m}{n}\right)^k\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k\cdots\left(\frac{n-m-i}{n-i}\right)^k$$

мы примем

$$t^{i+1}\left(1-\frac{kmi(i+1)}{2n(n-m)}\right).$$

Подставляя в формулу это приближенное выражение вместо точного, получаем

$$\frac{\Delta^n Z_0}{Z_n}\doteq(1-t)^n-\frac{kmt^2(n-1)}{2(n-m)}(1-t)^{n-2}\doteq(1-t)^n\left\{1-\frac{kmt^2}{2}\right\},$$

так как числа

$$\frac{n-1}{n-m} \text{ и } \frac{1}{(1-t)^2}$$

мы предполагаем близкими к единице.

Приложим наши приближенные формулы к разысканию числа тиражей по условию, чтобы вероятность появления всех нумеров была приблизительно равна данному числу $\frac{1}{C}$.

Первая приближенная формула дает:

$$(1-t)^n \doteq \frac{1}{C},$$

откуда выводим

$$n \log(1-t) \doteq -nt \doteq -\log C;$$

но

$$t = \left(\frac{n-m}{n}\right)^k$$

и потому

$$\log t = k \log\left(1-\frac{m}{n}\right) \doteq -\frac{km}{n}.$$

Сопоставляя же приближенные равенства

$$-nt \doteq -\log C \quad \text{и} \quad \log t \doteq -\frac{km}{n},$$

находим

$$k \doteq \frac{n(\log n - \log\log C)}{m}.$$

В дальнейших вычислениях положим

$$\frac{\log C}{n} = t_0 \quad \text{и} \quad \frac{n(\log n - \log\log C)}{m} = k_0;$$

так что t_0 и k_0 будут приближенными значениями чисел t и k.

Второе приближенное выражение вероятности дает

$$(1-t)^n\left(1-\frac{kmt^2}{2}\right) \doteq \frac{1}{C},$$

откуда, производя приближенные вычисления, выводим

$$\log C \doteq nt + \frac{nt^2}{2} + \frac{kmt^2}{2} \doteq nt + \frac{(n+k_0 m)\, t_0^2}{2},$$

$$t \doteq \frac{\log C}{n}\left[1 - \frac{(n+k_0 m)\, t_0^2}{2\log C}\right]$$

и затем

$$-\log t \doteq \log n - \log\log C + \frac{(n+k_0 m)\, t_0^2}{2\log C}.$$

С другой стороны, имеем

$$-\log t = -k\log\left(1-\frac{m}{n}\right) \doteq \frac{km}{n} + \frac{k_0 m^2}{2n^2}.$$

Приравнивая, наконец, одно приближенное выражение $\log t$ другому, приходим к такому приближенному равенству

$$\frac{km}{n} + \frac{k_0 m^2}{2n^2} \doteq \log n - \log\log C + \frac{(n+k_0 m)\log C}{2n^2},$$

из которого легко выводим

$$k \doteq \frac{n}{m}\left\{\log n - \log\log C + \frac{k_0 m}{2n^2}(\log C - m) + \frac{1}{2n}\log C\right\}$$

$$\doteq \frac{1}{m}\left\{\log n - \log\log C\right)\left(n + \frac{1}{2}\log C - \frac{m}{2}\right) + \frac{1}{2}\log C\right\}.$$

Для примера положим

$$n = 90,\ m = 5,\ C = 2.$$

Тогда

$$\log n = 4{,}4998\ldots, \qquad \log C = 0{,}69314\ldots$$

$$\log\log C = -0{,}3665\ldots, \quad n + \frac{1}{2}\log C - \frac{m}{2} = 87{,}84657\ldots$$

и, произведя простые выкладки, по последней приближенной формуле получаем

$$k = \frac{4{,}8663 \times 87{,}8466 + 0{,}346}{5} = 85{,}5.$$

Соответственно этому результату можно убедиться, что вероятность появления всех 90 нумеров при 85 тиражах несколько меньше половины, а при 86 тиражах уже больше половины.

§ 27. *Задача 4-ая.* Два игрока, которых мы назовем L и M, играют в некоторую игру, состоящую из последовательных партий. Каждая отдельная партия должна окончиться для одного из двух игроков L и M выигрышем ее, а для другого проигрышем, при чем вероятность выиграть ее для L равна p, а для M равна $q = 1 - p$, независимо от результатов других партий. Вся игра окончится, когда L выиграет l партий или M выиграет m партий: в первом случае игру выиграет L, а во втором M. Требуется определить вероятности выиграть игру для игрока L и для игрока M, которые мы обозначим символами (L) и (M).

Примечание. Эта задача известна с половины семнадцатого столетия и заслуживает особого внимания, так как в различных приемах, предложенных Паскалем и Ферматом для ее решения, можно видеть начало исчисления вероятностей *. Первоначальная постановка задачи состояла в том, как следует разделить общую ставку игроков, если им приходится прервать игру до окончания ее. Вопрос о разделении ставки останавливал внимание ученых и значительно раньше, чем Паскаль и Ферматт решили его согласно с условием безобидности игр. Мориц Кантор в своих „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ упоминает, что Люка Пачиоло считал правильным делить ставку пропорционально числам выигранных партий, а Кардан предложил более сложное правило.

* См. их переписку в Oeuvres de Pascal, 1779, T. IV, или в Oeuvres de Fermat, 1894, T. II.

Первое решение. Прежде всего заметим, что игра может быть выиграна игроком L в различное число партий, не меньшее l и не большее $l+m-1$.

Поэтому, в силу теоремы сложения вероятностей, мы можем представить искомую вероятность (L) в виде суммы

$$(L)_l+(L)_{l+1}+\ldots+(L)_{l+i}+\ldots+(L)_{l+m-1},$$

где $(L)_{l+i}$ означает вообще вероятность, что игра окончится в $l+i$ партий выигрышем игрока L.

А для того, чтобы игра была выиграна игроком L в $l+i$ партий, этот игрок должен выиграть $l+i^{\text{ую}}$ партию и из предыдущих $l+i-1$ партий должен выиграть ровно $l-1$ партий. Следовательно, по теореме умножения вероятностей, величина $(L)_{l+i}$ должна равняться произведению вероятности игроку L выиграть $l+i^{\text{ую}}$ партию на вероятность выиграть, тому же игроку L, из $l+i-1$ партий ровно $l-1$ партий.

Последняя вероятность, очевидно, совпадает с вероятностью, что в $l+i-1$ независимых испытаний появится ровно $l-1$ раз такое событие, вероятность которого для каждого испытания равна p. Вероятность же игроку L выиграть $l+i^{\text{ую}}$ партию, как вероятность выиграть ему любую партию, равна p.

Итак,

$$(L)_{l+i}=p\frac{1\,.\,2\,\ldots\,(l+i-1)}{1\,.\,2\,\ldots\,i\,.\,1\,.\,2\,\ldots\,(l-1)}p^{l-1}q^i=$$

$$=\frac{l(l+1)\ldots(l+i-1)}{1\,.\,2\,\ldots\,i}p^lq^i$$

и, наконец,

$$(L)=p^l\left\{1+\frac{l}{1}q+\frac{l(l+1)}{1\,.\,2}q^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{l(l+1)\ldots(l+m-2)}{1\,.\,2\,\ldots\,(m-1)}q^{m-1}\right\}.$$

Подобным же образом найдем

$$(M)=q^m\left\{1+\frac{m}{1}p+\frac{m(m+1)}{1\,.\,2}p^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{m(m+1)\ldots(m+l-2)}{1\,.\,2\ldots(l-1)}p^{l-1}\right\}.$$

Достаточно, впрочем, вычислить одну из этих величин, так как сумма их

$$(L)+(M)$$

должна приводиться к единице.

Второе решение. Замечая, что для окончания игры требуется не более $l+m-1$ партий, положим, что игроки не прекращают ее тотчас по достижении одним из них надлежащего числа выигранных партий, а продолжают играть до тех пор, пока не будет сыграно ровно $l+m-1$ партий.

При таком предположении вероятность выиграть игру для игрока L равняется вероятности выиграть, тому же игроку L, из всех $l+m-1$ партий не менее l партий.

В самом деле, если игра выиграна игроком L, то число выигранных им партий достигает величины l и последующие затем партии могут только увеличить это число, или оставить его без изменения. И обратно, если из $l+m-1$ партий игрок L выиграет не менее l партий, то число партий, выигранных игроком M, будет меньше m; откуда следует, что в этом случае игрок L выиграет l партий, прежде чем игрок M успеет выиграть m партий, и таким образом игра будет выиграна игроком L.

С другой стороны, вероятность игроку L выиграть из $l+m-1$ партий не менее l партий совпадает с вероятностью, что в $l+m-1$ независимых испытаний появится не менее l раз такое событие, вероятность которого при каждом испытании равна p. Последняя же вероятность выражается известною суммою произведений

$$\frac{1\,.\,2\ldots(l+m-1)}{1\,.\,2\ldots(l+i)\,1\,.\,2\ldots(m-i-1)}p^{l+i}q^{m-i-1},$$

где

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1.$$

Итак,

$$(L) = \frac{(l+m-1)\ldots . m}{1.2\ldots . l} p^l q^{m-1} \left\{1 + \frac{m-1}{l+1} \cdot \frac{p}{q} + \right.$$

$$\left. + \frac{m-1}{l+1} \cdot \frac{m-2}{l+2} \cdot \frac{p^2}{q^2} + \ldots \right\};$$

совершенно так же найдем

$$(M) = \frac{(l+m-1)\ldots . l}{1.2\ldots . m} p^{l-1} q^m \left\{1 + \frac{l-1}{m+1} \cdot \frac{q}{p} + \right.$$

$$\left. + \frac{l-1}{m+1} \cdot \frac{l-2}{m+2} \cdot \frac{q^2}{p^2} + \ldots \right\}.$$

Не трудно убедиться, что эти новые выражения (L) и (M) равны найденным прежде.

Численные примеры.

$$1)\ p = q = \frac{1}{2},\ l = 1,\ m = 2.$$

$$(L) = p(1+q) = 2pq\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p}{q}\right) = \frac{3}{4},\ (M) = q^2 = \frac{1}{4}.$$

$$2)\ p = \frac{2}{5},\ q = \frac{3}{5},\ l = 2,\ m = 3.$$

$$(L) = p^2\{1 + 2q + 3q^2\} = 6p^2 q^2 \left\{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{q} + \frac{1}{6}\frac{p^2}{q^2}\right\} = \frac{328}{625}$$

$$(M) = q^3\{1 + 3p\} = 4q^3 p\left\{1 + \frac{1}{4}\frac{q}{p}\right\} = \frac{297}{625}.$$

Задача 5-ая. Три игрока

$$L,\ M,\ N$$

играют в игру, состоящую из последовательных партий.

Каждая партия должна окончиться для одного из них выигрышем, а для двух остальных проигрышем, при чем вероятности выиграть ее для

$$L, M, N$$

соответственно равны

$$p, q, r,$$

независимо от результатов других партий. Вся игра оканчивается выигрышем одного из игроков: именно, игру выигрывает тот, кто прежде других выигрывает назначенное для него число партий. Определить вероятность выиграть игру для каждого из игроков, если для выигрыша игры L должен выиграть l партий, M должен выиграть m партий и N должен выиграть n партий.

Эта задача представляет распространение предыдущей на случай трех игроков.

Решение. Рассматривая различные стадии игры, обозначим символом

$$L_{x, y, z}$$

вероятность, что игру выигрывает L, когда игрокам

$$L, M, N$$

для выигрыша игры остается выиграть соответственно

$$x, y, z$$

партий. Пока игра не окончена, ни одно из чисел x, y, z не нуль. Обращение же одного из них в нуль указывает на окончание игры: при $x = 0$ игра выиграна игроком L и тогда вероятность выигрыша игры для L равна 1; если же $y = 0$ или $z = 0$, то игра выиграна одним из двух других игроков и вероятность выиграть ее для L равна 0.

Соответственно этому имеем

$$L_{0, y, z} = 1, \ L_{x, 0, z} = L_{x, y, 0} = 0,$$

где под x, y, z мы подразумеваем числа неравные нулю, так как выражения

$$L_{0,\,0,\,z},\ L_{0,\,y,\,0},\ L_{x,\,0,\,0},$$

не имеющие смысла, не встречаются в наших вычислениях. Предполагая все три числа x, y, z отличными от нуля, установим теперь простую связь между величинами

$$L_{x,\,y,\,z},\ L_{x-1,\,y,\,z},\ L_{x,\,y-1,\,z},\ L_{x,\,y,\,z-1},$$

которая дает возможность найти $L_{x,\,y,\,z}$, когда значения

$$L_{x-1,\,y,\,z},\ L_{x,\,y-1,\,z} \text{ и } L_{x,\,y,\,z-1}$$

уже известны. Для намеченной цели рассмотрим возможные результаты одной партии, которая непосредственно следует за тем положением игры, когда игрокам

$$L,\ M,\ N$$

для выигрыша игры остается выиграть соответственно

$$x,\ y,\ z$$

партий. Если эта партия будет выиграна игроком L, вероятность чего равна p, то непосредственно по окончании ее вероятность выиграть игру игроку L обратится в

$$L_{x-1,\,y,\,z};$$

если же эта партия будет выиграна игроком M, вероятность чего равна q, то по окончании ее вероятность выиграть игру игроку L обратится в

$$L_{x,\,y-1,\,z};$$

и наконец, если эта партия будет выиграна игроком N, вероятность чего равна r, то по окончании ее вероятность выиграть игру игроку L будет равна

$$L_{x,\,y,\,z-1}.$$

Поэтому выигрыш игры игроком L, когда для окончания игры игрокам

$$L,\ M,\ N$$

остается выиграть соответственно

$$x,\ y,\ z$$

партий, мы можем разбить на три вида, которые отличаются друг от друга результатом одной партии, и вероятности которых равны произведениям

$$pL_{x-1,\,y,\,z},\quad qL_{x,\,y-1,\,z},\quad rL_{x,\,y,\,z-1}.$$

Следовательно, в силу теоремы сложения вероятностей имеем

$$L_{x,\,y,\,z}=pL_{x-1,\,y,\,z}+qL_{x,\,y-1,\,z}+rL_{x,\,y,\,z-1}.$$

Подобным же образом не трудно установить равенства

$$M_{x,\,y,\,z}=pM_{x-1,\,y,\,z}+qM_{x,\,y-1,\,z}+rM_{x,\,y,\,z-1},$$

$$N_{x,\,y,\,z}=pN_{x-1,\,y,\,z}+qN_{x,\,y-1,\,z}+rN_{x,\,y,\,z-1},$$

$$M_{0,\,y,\,z}=M_{x,\,y,\,0}=0,\ M_{x,\,0,\,z}=1,$$

$$N_{0,\,y,\,z}=N_{x,\,0,\,z}=0,\ N_{x,\,y,\,0}=1,$$

где

$$M_{x,\,y,\,z}\quad \text{и}\quad N_{x,\,y,\,z}$$

означают вероятности выиграть игру игрокам M и N, когда для окончания игры игрокам L, M, N остается выиграть соответственно x, y, z партий.

Не останавливаясь затем на составлении общих формул для выражения искомых вероятностей

$$L_{l, m, n}, \; M_{l, m, n}, \; N_{l, m, n}$$

при произвольных значениях l, m, n, заметим только, что указанные нами равенства дают возможность найти эти вероятности для любой данной системы чисел l, m, n. Действительно, при помощи этих равенств, последовательно находим

$$L_{1,1,1}=p, \; M_{1,1,1}=q, \; N_{1,1,1}=r$$

$$L_{1,1,2}=pL_{0,1,2}+qL_{1,0,2}+rL_{1,1,1}=p+rp$$

$$L_{1,2,1}=p+qp, \; L_{2,1,1}=p^2$$

$$M_{1,1,2}=q+rq, \; M_{2,1,1}=q+pq, \; M_{1,2,1}=q^2$$

$$N_{1,1,2}=r^2, \; N_{1,2,1}=r+qr, \; N_{2,1,1}=r+pr$$

$$L_{1,1,3}=pL_{0,1,3}+qL_{1,0,3}+rL_{1,1,2}=p+r(p+rp)$$
$$=p(1+r+r^2)$$

$$L_{1,2,2}=pL_{0,2,2}+qL_{1,1,2}+rL_{1,2,1}=p+q(p+rp)+r(p+qp)$$
$$=p(1+q+r+2qr)$$

$$L_{2,1,2}=pL_{1,1,2}+qL_{2,0,2}+rL_{2,1,1}=p(p+rp)+p^2r=p^2(1+2r)$$

$$L_{1,3,1}=p(1+q+q^2), \; L_{2,2,1}=p^2(1+2q)$$

$$L_{3,1,1}=pL_{2,1,1}+qL_{3,0,1}+rL_{3,1,0}=p^3$$

$$M_{1,1,3}=q(1+r+r^2), \; M_{1,2,2}=q^2(1+2r), \; M_{1,3,1}=q^3$$

$$M_{2,2,1}=q^2(1+2p), \; M_{2,1,2}=q(1+p+r+2pr),$$
$$M_{3,1,1}=q(1+p+p^2)$$

$$N_{1,1,3}=r^3,\ N_{1,2,2}=r^2(1+2q),\ N_{1,3,1}=r(1+q+q^2)$$

$$N_{2,2,1}=r(1+p+q+2pq),\ N_{2,1,2}=r^2(1+2p),$$

$$N_{3,1,1}=r(1+p+p^2)$$

$$L_{1,2,3}=pL_{0,2,3}+qL_{1,1,3}+rL_{1,2,2}$$

$$=p+qp(1+r+r^2)+rp(1+q+r+2qr)$$

$$=p(1+q+r+r^2+2qr+3qr^2)$$

и т. д.

Пример. $l=1,\ m=2,\ n=3,\ p=q=r=\frac{1}{3}$.

Вероятность выиграть игру для игрока L равна

$$L_{1,2,3}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{19}{27};$$

затем вероятность выиграть ее для игрока M равна

$$M_{1,2,3}=qM_{1,1,3}+rM_{1,2,2}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\right)=\frac{6}{27},$$

и, наконец, для третьего игрока вероятность выиграть игру равна

$$1-\frac{19}{27}-\frac{6}{27}=\frac{2}{27}.$$

Ограничиваясь частным случаем, приведем другой вывод искомых вероятностей. Именно, прежде всего заметим, что для окончания игры, при

$$l=1,\ m=2,\ n=3,$$

потребуется не более четырех партий, и затем для установления равновозможных случаев положим, что игроки сыграют четыре партии, хотя бы игра и была уже выиграна раньше тем или другим из них. Тогда, имея в виду порядок этих партий и три возможных результата каждой партии, состоящие в выигрыше ее одним из трех игроков, мы можем различить $3^4 = 81$ равновозможных случаев.

Из этих 81 случаев благоприятствуют выигрышу игры игроком L те, в которых он выигрывает одну партию, прежде чем M выигрывает две партии и прежде чем N выигрывает три партии.

Прямой счет числа таких случаев не представляет затруднений; но еще скорее можно сосчитать число остальных случаев, неблагоприятствующих выигрышу игры игроком L.

Именно, не благоприятствуют выигрышу игры игроком L, кроме $2^4 = 16$ случаев, в которых он не выигрывает ни одной партии, только следующие 8 случаев:

$$NNNL,\ MMML,\ MMNL,\ MNML,$$

$$NMML,\ MMLN,\ MMLM,\ MMLL,$$

в которых игрок L выигрывает первую партию уже после выигрыша игры одним из своих противников.

Отсюда тотчас заключаем, что вероятность выиграть игру для игрока L равна

$$\frac{81-24}{81} = \frac{57}{81} = \frac{19}{27}.$$

Затем не трудно видеть, что игрок N выигрывает игру в шести случаях:

$$NNNN,\ NNNL,\ NNNM,\ NNMN,\ NMNN,\ MNNN;$$

и потому остальные

$$24 - 6 = 18$$

случаев должны благоприятствовать выигрышу игры игроком M. Следовательно, вероятности выиграть игру для игроков M и N соответственно равны

$$\frac{18}{81}=\frac{2}{9} \text{ и } \frac{6}{81}=\frac{2}{27},$$

согласно прежнему выводу.

Интересно заметить, что ложные решения этой старинной задачи встречаются в книгах XIX и XX столетий. Мы находим, например, в книге Лиагра (J. B. J. Liagre) „Calcul des probabilités“, 1879 года, указание на неверное решение задачи для только-что рассмотренного частного случая в математическом лексиконе Монферье, где принято, будто бы игра должна окончиться в 3 партии. Но это справедливое замечание сопровождается новой ошибкой: из вышеперечисленных восьми случаев забыт последний

$$MMLL,$$

в силу чего вместо правильных чисел 57 и 18 получено 58 и 17. А в XX столетии астроном Брунс на 51 странице упомянутой мною книги „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre“, отнесясь слишком легко к этой задаче, дает ошибочное общее решение ее: а именно, он прямо переносит на случай многих игроков то решение, которое у нас названо вторым *.

§ 28. *Задача 6-ая.* Двое

$$L \text{ и } M$$

играют в игру, состоящую из последовательных партий.

Каждая партия должна окончиться для одного из них выигрышем, а для другого проигрышем, при чем вероятности выиграть ее для L и M соответственно равны p и $q=1-p$.

Конец игры определяется разностью между числом партий, выигранных одним игроком, и числом партий, выигранных другим игроком. Именно, игру выигрывает L, как только число выигранных им партий превысит число партий, выигранных игроком M, на a единиц; напротив,

* Неправильность такого переноса отмечена уже Паскалем в его письме к Фермату от 24 августа 1654 года.

игру выигрывает M, как только число выигранных им партий превысит число партий, выигранных игроком L, на b единиц. Требуется вычислить вероятности выиграть игру для L и для M.

Примечание. Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, представим условие окончания игры в другой форме. Пусть капиталы L и M выражаются соответственно числами b и a; пусть вместе с тем за каждую партию выигрывший ее получает от проигравшего одну единицу капитала.

Тогда окончание игры обусловливается разорением одного из игроков, и выигрывает ее тот, кому удастся разорить противника. Действительно, если будет сыграно $i+j$ партий и из них будет выиграно i партий игроком L и j партий игроком M, то в силу установленного нами условия капиталы L и M обратятся соответственно в

$$b+i-j \text{ и } a+j-i$$

единиц капитала. И, если эти $i+j$ партий приведут игру к концу, то должно быть

$$i-j=a, \text{ или } j-i=b$$

и соответственно

$$a+j-i=0, \text{ или } b+i-j=0.$$

Решение. Рассматривая различные стадии игры и имея в виду вторую форму условия окончания ее, обозначим символом y_x вероятность * выиграть игру для игрока L в то время, когда его капитал выражается числом x. Число x, в течение игры, может принимать только такие значения

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ a+b;$$

а в начале игры x равно b, и потому искомая нами вероятность выиграть игру игроку L, пока не сыграно ни одной партии, представляется при установленном нами обозначении символом

$$y_b.$$

* В данном случае, как и во многих других, находя искомую вероятность из уравнения, мы прежде всего должны признать несомненным ее существование как вполне определенной, хотя и неизвестной нам величины.

Заметим, что игра оканчивается при $x=0$ и при $x=a+b$ и что y_0 равно нулю, а y_{a+b} равно единице, так как обращение капитала L в нуль указывает на проигрыш им игры, соединение же у игрока L капиталов обоих игроков влечет за собою выигрыш им игры.

Предполагая затем x отличным от 0 и от $a+b$, установим простую связь между величинами

$$y_x,\ y_{x+1} \text{ и } y_{x-1}.$$

Для этой цели рассмотрим возможные результаты одной партии, которая непосредственно следует за тем положением игры, когда капитал L выражается числом x.

Если эта партия будет выиграна игроком L, вероятность чего равна p, то непосредственно по окончании ее вероятность выиграть игру игроку L обратится в y_{x+1}; если же эта партия будет выиграна игроком M, вероятность чего равна q, то по окончании ее вероятность выиграть игру игроку L обратиться в y_{x-1}. Отсюда не трудно заключить, что в силу теорем сложения и умножения вероятностей должно быть

$$y_x = py_{x+1} + qy_{x-1}.$$

Таким образом разыскание y_x сводится к решению линейного уравнения

$$y_x = py_{x+1} + qy_{x-1}$$

при условиях

$$y_0 = 0 \text{ и } y_{a+b} = 1.$$

Решение подобных уравнений излагается в исчислении конечных разностей. Согласно выводам исчисления конечных разностей, общее решение уравнения

$$y_x = py_{x+1} + qy_{x-1}$$

определяется корнями обыкновенного уравнения второй степени

$$\xi = p\xi^2 + q,$$

при чем следует различить два случая.

В силу равенства

$$p+q=1$$

один из корней уравнения

$$\xi=p\xi^2+q$$

равен единице, а другой $\frac{q}{p}$. Если p не равно q, то числа

$$1 \text{ и } \frac{q}{p}$$

различны между собой и на основании выводов исчисления конечных разностей должно быть

$$y_x=C+D\left(\frac{q}{p}\right)^x,$$

где C и D числа постоянные.

Для определения постоянных имеем два уравнения

$$y_0=0 \quad \text{и} \quad y_{a+b}=1,$$

из которых выводим

$$C=-D=\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}=\frac{p^{a+b}}{p^{a+b}-q^{a+b}}.$$

Итак,

$$y_x=\frac{p^{a+b-x}(p^x-q^x)}{p^{a+b}-q^{a+b}}$$

и

$$y_b=\frac{p^a(p^b-q^b)}{p^{a+b}-q^{a+b}},$$

если только p не равно q. Если же $p=q$, то

$$y_x = A + Bx,$$

где A и B числа постоянные. Для определения постоянных имеем попрежнему два уравнения

$$y_0 = 0 \text{ и } y_{a+b} = 1,$$

из которых выводим

$$A = 0 \text{ и } B = \frac{1}{a+b}.$$

Итак, при $p=q$ находим

$$y_x = \frac{x}{a+b} \text{ и } y_b = \frac{b}{a+b}.$$

Подобным же образом найдем, что для игрока M вероятность выиграть игру, пока не сыграно ни одной партии, равна

$$\frac{q^b(q^a - p^a)}{q^{a+b} - p^{a+b}} = \frac{q^b(p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}},$$

если только p не равно q, и обращается в

$$\frac{a}{a+b}$$

при $p=q$. Сумма вероятностей выиграть игру тому и другому игроку составляет единицу, как и следовало ожидать, так как по предположению игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет ее. Однако в данном случае вероятность, равная единице, не указывает на достоверность выигрыша игры тем или другим из игроков, так как игра может продолжаться без конца.

Каждая партия в отдельности представляет безобидную игру при $p=q$ и не безобидную в противном случае, когда p не равно q. Сообразно этому, найденное нами выражение y_b при $p=q$ приводит к следующему заключению.

Если некто решил повторять безобидную игру до приобретения назначенной наперед суммы или до своего разорения и если к такому повторению нет препятствий, то вероятности приобретения им назначенной суммы и его разорения обратно пропорциональны величине этой суммы и его капиталу.

Это заключение, выведенное нами из рассмотрения одного частного случая, относится ко всем безобидным играм.

В самом деле, если капитал игрока выражается числом a, сумма же, приобретение которой составляет цель многократного повторения им игры, выражается числом b, то при сделанных нами предположениях многократное повторение игры должно дать игроку прибыль, выражаемую числом b, или убыток, величина которого выражается числом a.

И потому математическое ожидание прибыли игрока от такого повторения игры выразится разностью

$$Xb - Ya,$$

где X вероятность приобретения назначенной суммы, Y вероятность разорения игрока. Но повторение безобидной игры само должно представлять также игру безобидную; следовательно,

$$Xb - Ya = 0,$$

откуда находим

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{X+Y}{a+b} = \frac{1}{a+b}.$$

В тех случаях, когда сумма, по приобретении которой игрок решил прекратить игру, велика по сравнению с его капиталом, вероятность разорения игрока близка к единице.

В предельном же случае, когда игрок не довольствуется никакою суммою, должно положить $b = \infty$ и, вероятность разорения обращается в единицу. Итак, если повторение безобидной игры ограничено только разорением игрока, то по найденной нами формуле вероятность разорения равна единице, хотя это разорение может никогда не наступить.

Ж. Бертран и Е. Руше придали задаче о разорении игроков более общий характер, предполагая ставки игроков не одинаковыми.

Выводы этих ученых нельзя признать совершенно правильными, так как они рассматривали трехчленное уравнение высшего порядка как уравнение второго порядка.

На возможность некоторой неточности их выводов указал и сам Бертран в § 91 своей книги *Calcul des probabilités*, но не выяснил во всей полноте сущности этой неточности.

Интересно заметить, что в данном случае допущение некоторой неправильности при решении уравнения оказалось полезным, так как оно дало возможность весьма просто придти к приближенным формулам, которые тем ближе к истинным, чем меньше ставки игроков по сравнению с их капиталами; точное же решение задач Бертрана и Руше сложно и едва ли может представлять большой интерес.

Мы дополним выводы Бертрана и Руше доказательством некоторых неравенств.

Внося указанное изменение в задачу № 6, положим, что игрок L за каждую выигранную партию получает α единиц капитала от M, а за каждую проигранную партию отдает ему β единиц. Числа α и β мы будем считать целыми, подобно числам a и b, предполагая единицу капитала достаточно малою.

Чтобы измененная задача была вполне определенною, необходимо точно установить, когда тот или другой из игроков будет признан разорившимся; другими словами, мы должны установить, при каких условиях оканчивается игра.

В задаче № 6 разорение игрока выражается приведением его капитала к нулю и игра продолжается беспрепятственно, пока капиталы обоих игроков отличны от нуля. В измененной же задаче препятствием к продолжению игры может служить не обращение капитала одного из игроков в нуль, а невозможность, для одного из них, уплатить полностью последний проигрыш или невозможность поставить полную ставку.

Мы остановимся на предположении, что игра прекращается, как только один из игроков не может поставить полной ставки предстоящей партии, и соответственно этому будем считать игрока L выигравшим игру, а игрока M разорившимся, как только капитал последнего сделается меньше α; если же капитал игрока L станет меньше β, то по нашим условиям L должен быть признан проигравшим игру и разорившимся.

Внеся указанное изменение в задачу № 6 и сохраняя прежние обозначения, мы тем же путем, который раньше привел к уравнению второго порядка

$$y_x = p y_{x+1} + q y_{x-1},$$

приходим к линейному уравнению

$$y_x = p y_{x+\alpha} + q y_{x-\beta}$$

порядка $\alpha+\beta$.

Общее решение этого нового линейного уравнения связано с решением алгебраического уравнения

$$p\xi^{\alpha+\beta} - \xi^{\beta} + q = 0$$

и заключает $\alpha+\beta$ произвольных постоянных.

Из общего решения мы получим искомое выражение y_x, давая этим постоянным такие значения, при которых выполняются условия

$$y_{a+b} = y_{a+b-1} = \ldots = y_{a+b-\alpha+1} = 1$$

$$y_0 = y_1 = \ldots = y_{\beta-1} = 0,$$

при чем условия первой строки указывают на разорение игрока M, когда его капитал меньше α, а условия второй строки указывают на разорение L, когда капитал последнего меньше β.

Наша цель состоит, как было уже намечено, в указании двух пределов, между которыми должно заключаться y_b и которые при больших значениях a и b, сравнительно с α и β, немного разнятся друг от друга.

Для этой цели установим относительно нашего уравнения

$$y_x = p y_{x+\alpha} + q y_{x-\beta},$$

что удовлетворяющее ему выражение y_x при рассматриваемых нами значениях x, т. е. при

$$x = 0,\ 1,\ 2, \ldots, a+b,$$

не может быт отрицательным числом, если среди $\alpha+\beta$ чисел

$$y_0,\ y_1, \ldots, y_{\beta-1},\ y_{a+b},\ y_{a+b-1}, \ldots, y_{a+b-\alpha+1}$$

нет отрицательных; при чем воспользуемся свойством вероятности оставаться всегда числом положительным.

Прежде всего остановимся на тех $\alpha+\beta$ решениях рассматриваемого нами линейного уравнения, для которых одно из чисел

$$y_0, y_1, \ldots, y_{\beta-1}, y_{a+b}, y_{a+b-1}, \ldots, y_{a+b-\alpha+1}$$

равно единице, а остальные — нулю.

Эти $\alpha+\beta$ решений дают $\alpha+\beta$ вероятностей, что капитал игрока L из величины x превратится, при окончании игры, в одно определенное число совокупности $\alpha+\beta$ чисел

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, \beta-1,\ a+b,\ a+b-1, \ldots, a+b-\alpha+1,$$

и потому они не могут давать для y_x отрицательных значений ни при одном из рассматриваемых нами значений x, ибо вероятность может быть только числом положительным или нулем. Обращаясь к другим решениям уравнения

$$y_x = py_{x+\alpha} + qy_{x-\beta},$$

замечаем, что любое из них можно составить линейным образом из упомянутых сейчас $\alpha+\beta$ решений, и на этом основании легко убеждаемся в правильности высказанного нами положения, что при

$$x = 0,\ 1,\ 2, \ldots, a+b$$

должно быть

$$y_x \geqq 0,$$

если такое неравенство имеет место при

$$x = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \beta-1,\ a+b,\ a+b-1, \ldots, a+b-\alpha+1.$$

Отсюда затем следует, что два решения

$$y'_x,\quad y''_x$$

нашего линейного уравнения наверно удовлетворяют неравенству

$$y'_x \geqq y''_x$$

при всех рассматриваемых нами значениях x, если такое неравенство оправдывается при

$$x = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \beta - 1,\ a + b,\ a + b - 1, \ldots, a + b - \alpha + 1.$$

Установив это, назовем буквою ξ вещественный положительный корень уравнения

$$\frac{p\xi^{\alpha+\beta} - \xi^{\beta} + q}{\xi - 1} = 0.$$

Если ξ не $= 1$, наше уравнение

$$y_x = py_{x+\alpha} + qy_{x-\beta}$$

допускает решение

$$y_x = C_1 + C_2\xi^x,$$

содержащее два произвольных постоянных числа C_1 и C_2, распоряжаясь которыми, мы можем удовлетворить двум уравнениям. И в силу указанного нами неравенства можно утверждать, что выражение

$$C_1 + C_2\xi^x$$

будет больше искомой вероятности y_x, если числа C_1 и C_2 мы определим уравнениями

$$C_1 + C_2\xi^{a+b-\alpha+1} = 1 \text{ и } C_1 + C_2 = 0,$$

при соблюдении которых имеем

$$C_1+C_2\xi^x>1 \text{ при } x=a+b,\ a+b-1,\ \ldots,\ a+b-\alpha+2$$

и

$$C_1+C_2\xi^x>0 \text{ при } x=1,\ 2,\ \ldots,\ \beta-1.$$

Наоборот, наше выражение

$$C_1+C_2\xi^x$$

будет меньше искомой вероятности y_x, если числа C_1 и C_2 мы определим уравнениями

$$C_1+C_2\xi^{a+b}=1 \text{ и } C_1+C_2\xi^{\beta-1}=0,$$

при соблюдении которых имеем

$$C_1+C_2\xi^x<1 \text{ при } x=a+b-1,\ a+b-2,\ \ldots,\ a+b-\alpha+1$$

и

$$C_1+C_2\xi^x<0 \text{ при } x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \beta-2.$$

Таким образом приходим к неравенствам

$$\frac{\xi^x-1}{\xi^{a+b-\alpha+1}-1}>y_x>\frac{\xi^{x-\beta+1}-1}{\xi^{a+b-\beta+1}-1}$$

и затем

$$\frac{\xi^b-1}{\xi^{a+b-\alpha+1}-1}>y_b<\frac{\xi^{b-\beta+1}-1}{\xi^{a+b-\beta+1}-1}.$$

Бертран, оставляя без внимания все отрицательные и мнимые корни уравнения

$$p\xi^{\alpha+\beta}-\xi^\beta+q=0,$$

берет вышеприведенное частное решение, с двумя произвольными постоянными, вместо общего, которое должно содержать $\alpha+\beta$ произвольных постоянных, и соответственно этому допускает, что искомая вероятность y_x определяется формулой

$$y_x = C_1 + C_2 \xi^x,$$

коэффициенты которой C_1 и C_2 находятся из уравнений

$$y_{a+b} = C_1 + C_2 \xi^{b+a} = 1, \quad y_0 = C_1 + C_2 = 0.$$

Таким образом он получает для y_b приближенную величину

$$\frac{\xi^b - 1}{\xi^{a+b} - 1},$$

которая лежит в указанных нами границах

$$\frac{\xi^b - 1}{\xi^{a+b-\alpha+1} - 1} \quad \text{и} \quad \frac{\xi^{b-\beta+1} - 1}{\xi^{a+b-\beta+1} - 1}$$

и потому при больших значениях a и b, по сравнению с α и β, немного отклоняется от точной величины y_b.

При $\xi = 1$ наше уравнение

$$y_x = p y_{x+\alpha} + q y_{x-\beta}$$

допускает решение

$$y_x = C' + C'' x,$$

сравнивая которое, при различных значениях C' и C'', с искомою вероятностью y_x, мы можем, пользуясь прежними соображениями, установить для искомой вероятности y_b неравенства

$$\frac{b}{a+b-\alpha+1} > y_b > \frac{b-\beta+1}{a+b-\beta+1},$$

которые можно вывесть также из ранее установленных посредством приближения ξ к пределу 1; для этого случая Бертран получает такое приближенное равенство

$$y_b = \frac{b}{a+b}.$$

Кроме вероятности разорения игроков, Бертран и Руше занимались математическим ожиданием числа партий, приводящих к разорению. Необходимые дополнения их нестрогих выводов можно найти в моей заметке „К вопросу о разорении игроков“ (Изв. физ.-мат. общ. при Каз. унив. 1903 г.).

Устраняя вечную игру, ограничим теперь число играемых партий; мы преобразуем, таким образом, задачу 6-ую в следующую.

§ 29. *Задача 7-ая.* При соблюдении всех условий задачи 6-ой требуется вычислить вероятность, что игра будет выиграна игроком L не позже, как в n партий. Другими словами, требуется вычислить вероятность разорения игрока M при условии, что общее число партий не превзойдет n.

Решение. Обозначим символом

$$y_{t,\,s}$$

вероятность выиграть игру игроку L в том случае, когда капитал M выражается числом t и нельзя сыграть более s партий.

При таких обозначениях искомая нами вероятность разорения игрока M представится символом

$$y_{a,\,n};$$

вместе с тем имеем

$$y_{0,\,s} = 1,\ y_{a+b,\,s} = 0 \text{ и } y_{t,\,0} = 0,$$

где

$$s \geqq 0 \text{ и } t > 0.$$

С другой стороны, рассматривая, подобно прежнему, возможные результаты одной партии, легко приходим к уравнению

$$y_{t,s} = py_{t-1,\,s-1} + qy_{t+1,\,s-1},$$

где

$$s \geqq 1 \text{ и } 0 < t < a+b.$$

Остается решить это уравнение при вышеуказанных условиях

$$y_{0,s} = 1,\ y_{a+b,s} = 0,\ y_{t,0} = 0.$$

Пользуясь способом Лапласа, мы сведем разыскание $y_{t,s}$ к разложению некоторой функции вспомогательного переменного ξ по степеням этого переменного. Пусть

$$\varphi_t(\xi) = y_{t,0} + y_{t,1}\xi + y_{t,2}\xi^2 + \ldots + y_{t,s}\xi^s + \ldots$$

Тогда

$$\varphi_{t+1}(\xi) = y_{t+1,\,0} + y_{t+1,\,1}\xi + \ldots + y_{t+1,\,s-1}\xi^{s-1} + \ldots$$

и

$$\varphi_{t-1}(\xi) = y_{t-1,\,0} + y_{t-1,\,1}\xi + \ldots + y_{t-1,\,s-1}\xi^{s-1} + \ldots$$

и в силу уравнения

$$y_{t,s} = py_{t-1,\,s-1} + qy_{t+1,\,s-1}$$

имеем

$$\varphi_t(\xi) - p\xi\varphi_{t-1}(\xi) - q\xi\varphi_{t+1}(\xi) = y_{t,0} = 0,$$

при

$$t \geqq 1.$$

На этом основании, согласно общим выводам исчисления конечных разностей, можем положить

$$\varphi_t(\xi) = U\theta^t + V\eta^t,$$

где U и V функции одного числа ξ, не зависящие от t, величины же θ и η определяются равенствами

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4pq\xi^2}}{2q\xi} \text{ и } \eta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq\xi^2}}{2q\xi},$$

как два корня одного и того же уравнения

$$\rho - p\xi - q\xi\rho^2 = 0,$$

второй степени относительно неизвестного числа ρ.

Давая затем t значения 0 и $a+b$, получаем два равенства

$$\frac{1}{1-\xi} = U + V, \quad 0 = U\theta^{a+b} + V\eta^{a+b},$$

из которых выводим

$$U = \frac{-\eta^{a+b}}{\theta^{a+b} - \eta^{a+b}} \frac{1}{1-\xi}$$

и

$$V = \frac{\theta^{a+b}}{\theta^{a+b} - \eta^{a+b}} \frac{1}{1-\xi},$$

и на этом основании находим

$$\varphi_t(\xi) = \frac{(\theta\eta)^t\,[\theta^{a+b-t} - \eta^{a+b-t}]}{\theta^{a+b} - \eta^{a+b}} \frac{1}{1-\xi}$$

$$= \frac{\eta^t}{1-\xi} \frac{1 - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{a+b-t}}{1 - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{a+b}} = \frac{\eta^t}{1-\xi} \frac{1 - \alpha^{a+b-t}\eta^{2(a+b-t)}}{1 - \alpha^{a+b}\eta^{2(a+b)}},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\theta\eta} = \frac{q}{p}.$$

Итак, искомая нами вероятность, обозначенная символом $y_{a,n}$, может быть определена как коэффициент при ξ^n в разложении по степеням ξ выражения

$$\varphi_a(\xi) = \frac{\eta^a}{1-\xi} \cdot \frac{1 - \alpha^b \eta^{2b}}{1 - \alpha^{a+b}\eta^{2(a+b)}}.$$

Разложение же полученного выражения $\varphi_a(\xi)$ в ряд по степеням ξ сводится к разложению различных степеней η в подобные же ряды, так как простое деление дает для $\varphi_a(\xi)$ такой ряд:

$$\varphi_a(\xi) = \frac{1}{1-\xi}\left\{\eta^a - \alpha^b\eta^{a+2b} + \alpha^{a+b}\eta^{3a+2b} - \alpha^{a+2b}\eta^{3a+4b} + \ldots\right\}$$

Наконец, для разложения различных степеней η в ряды можно воспользоваться известной формулой Лагранжа:

$$F(\zeta) = F(a) + \omega F'(a)f(a) + \frac{\omega^2}{1.2}\frac{dF'(a)f(a)f(a)}{da} + \ldots,$$

при

$$\zeta = a + \omega f(\zeta).$$

В данном случае имеем

$$\eta = \xi(p + q\eta^2)$$

и потому

$$\frac{\eta}{\xi} = p + q\xi^2\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2.$$

Соответственно этому, полагая в формуле Лагранжа

$$\zeta = \frac{\eta}{\xi},\ a = p,\ f(\zeta) = q\zeta^2,\ \omega = \xi^2 \text{ и } F(\zeta) = \zeta^m,$$

находим

$$\eta^m = p^m \xi^m \left\{ 1 + mpq\xi^2 + \frac{m(m+3)}{1\,.\,2} p^2 q^2 \xi^4 + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{m(m+k+1)(m+k+2)\ldots(m+2k-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k} p^k q^k \xi^{2k} + \ldots \right\}.$$

Отсюда следует, что коэффициент при ξ^n в разложении по степеням ξ выражения

$$\frac{\eta^m}{1-\xi}$$

равен произведению p^m на сумму

$$1 + mpq + \frac{m(m+3)}{1\,.\,2} p^2 q^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m+i+1)\ldots(m+2i-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots i} p^i q^i,$$

где

$$i = \frac{n-m}{2} \text{ или } \frac{n-m-1}{2}.$$

К тому же выражению можно придти путем весьма элементарных соображений, связывая притом рассматриваемую задачу с другою, простое решение которой, указанное Андре (André), можно найти в „Calcul des probabilités“ (стр. 18 — 20) Бертрана.

Начинаем с того, что искомую вероятность разорения игрока M в n или меньшее число партий, когда его капитал равен m ставкам, разбиваем на слагаемые, равные вероятностям разорения M в определенное число партий: $m, m+2, \ldots, m+2k, \ldots, m+2i$, при $i=\frac{1}{2}(n-m)$ или $\frac{1}{2}(n-m-1)$. Рассматривая затем вероятность разорения M ровно в $m+2k$ партий, при $k=0, 1, 2, \ldots, i$, замечаем, что такое разорение может быть только в случаях, когда из $m+2k$ партий игрок M выигрывает k партий, противник же его L — $m+k$ партий. Если различать все подобные случаи порядком выигрышей M и L, то можно образовать

$$\frac{(m+2k)(m+2k-1)\ldots(m+k+1)}{1.2.3\ldots\ldots k}$$

случаев, вероятность каждого из которых равна $p^{m+k}q^k$; их можно представить соответствующими последовательностями букв M и L. Но не все из них ведут, действительно, к разорению игрока M ровно в $m+2k$ партий: надо исключить те, которые ведут к разорению M уже в меньшее число партий. Например, при $k=3$ и $m=2$ имеем всего $\frac{8.7.6}{1.2.3}=56$ последовательностей, из которых надо исключить $\frac{7.6}{1.2}=21$ последовательность, которые заканчиваются буквою M, и следующие 21 последовательностей

$LLLLMMML$, $LLLMLMML$, $LLLMMLML$, $LLLMMMLL$, $LLMLLMML$, $LLMLMLML$, $LLMLMMLL$, $LLMMLMLL$, $LLMMMLLL$, $LLMMLLML$, $LMLLLMML$, $LMLLMLML$, $LMLLMMLL$, $LMLMLLML$, $LMMLLLML$, $MLLLLMML$, $MLLLMLML$, $MLLLMMLL$, $MLLMLLML$, $MLMLLLML$, $MMLLLLML$;

остается всего $56-42=14$ последовательностей, общая вероятность которых равна $14p^5q^3$.

Для подсчета исключаемых последовательностей, в общем случае, станем рассматривать их не только сначала, от первой партии к последней, но и с конца, от последней партии к первой, что и приводит нас к задаче Андре, которая состоит в следующем:

Два лица L и M подверглись баллотировке, которая дала первому из них $m+k$ голосов, а второму только k голосов, так что L получил перевес в m голосов; спрашивается, как велика вероятность, что L все время имел перевес.

Ход баллотировки можно, подобно ходу игры, представить одною из тех же последовательностей $k+m$ букв L и k букв M; так что общее число равновозможных случаев в этой новой задаче остается одинаковым с прежним:

$$\frac{(m+2k)(m+2k-1)\ldots.(m+k+1)}{1.2.3\ldots..k}.$$

И основания для исключения случаев, при которых разорение M наступает ранее указанного срока, а при баллотировке L не стоит все время впереди M, оказываются одинаковыми, если только для игры все последовательности L и M рассматривать в обратном порядке, не от первой партии к последней, а от последней партии к первой. К исключаемым последовательностям, во-первых, принадлежат все, которые при баллотировке начинаются, а при игре заканчиваются буквою M; число их равно

$$\frac{(m+2k-1)(m+2k-2)\ldots(m+k+1)}{1.2.3\ldots.(k-1)}.$$

Из тех же последовательностей, которые при баллотировке начинаются, а при игре заканчиваются буквою L, необходимо и достаточно исключить соответственно начинающиеся или оканчивающиеся последовательностью из одинакового числа L и M; ибо в баллотировке они сопровождаются моментами равенства голосов, поданных за L и M, а в игре обязательно соединены с более ранним разорением M, чем в $m+2k$ партий. Эта вторая категория исключаемых последовательностей содержит то же число их, как и первая, в чем нетрудно убедиться следующим преобразованием Андре, которое мы проведем для игры. Отделяем в каждой из последовательностей второй категории, с конца ее, кратчайшую группу из одинакового числа L и M и ставим ее впереди всей последовательности, отбросив первую ее букву M. Например, из комбинаций

$$LLLLMMML,\ LLLMMLML,\ LLMMMLLL$$

образуем

$$LLLLLMM,\ LLLMML,\ MMLLLLL.$$

Таким образом из каждой исключаемой комбинации второй категории мы получаем некоторую комбинацию $k+m$ букв L и $k-1$ букв M. И обратно, если к любой комбинации $k+m$ букв L и $k-1$ букв M прибавить впереди букву M, затем отделить от нее сначала кратчайшую комбинацию из равного числа M и L и перенести эту последнюю на самый конец последовательности, то получится одна из исключаемых последовательностей второй категории; например, из последовательностей

$$LLLLMML, \quad MMLLLLL, \quad MLLMLLL$$

образуем такие

$$LLLMMLM, \quad LLMMMLLL, \quad MLLLMMLL.$$

Указанными преобразованиями установлено полное соответствие между последовательностями $k-1$ букв M и $k+m$ букв L и исключаемыми последовательностями k букв M и $k+m$ букв L второй категории; откуда заключаем, что число последних также равно

$$\frac{(2k+m-1)(2k+m-2)\ldots(k+m+1)}{1.2.3\ldots(k-1)}.$$

Итак, общее число исключаемых последовательностей равно

$$2\frac{(2k+m-1)(2k+m-2)\ldots(k+m+1)}{1.2.3\ldots(k-1)};$$

число же случаев, при которых игрок M разоряется ровно в m партий, равно

$$\frac{(2k+m)(2k+m-1)\ldots(k+m+1)}{1.2.3\ldots k}-$$

$$-2\frac{(2k+m-1)\ldots(k+m+1)}{1.2.3\ldots(k-1)}=$$

$$=\frac{m(2k+m-1)(2k+m-2)\ldots(k+m+1)}{1.2.3\ldots k}.$$

Помножив это число на $p^{m+k}q^k$, получаем для вероятности разорения M ровно в $m+2k$ партий выражение

$$\frac{m(2k+m-1)(2k+m-2)\ldots(k+m+1)}{1.2.3\ldots\ldots k}p^{m+k}q^k,$$

вполне согласное с результатом ранее произведенных вычислений, основанных на применении производящих функций и соединенных с применением формулы Лагранжа.

Вместе с тем получается, конечно, и решение задачи Андре о баллотировке: искомая вероятность, что L, получивший $m+k$ голосов, все время шел впереди M, получившего только k голосов, равна

$$\frac{m}{2k+m}.$$

Сопоставляя наш результат с указанным выше разложением $(1-\xi)\varphi_a(\xi)$ в ряд по степеням η, нетрудно уже получить общую формулу для вычисления искомой вероятности

$$y'_{a,n}$$

при любых значениях

$$a,\ b,\ n,\ p.$$

Остановимся на том случае, когда капитал игрока L настолько велик, что для разорения L необходимо более n партий, * и каждая партия в отдельности представляет безобидную игру. Тогда

$$p=q=\frac{1}{2}$$

и искомая нами вероятность разорения игрока M, не позже как в n партий, представится суммою

$$\frac{1}{2^a}+\frac{a}{2^{a+2}}+\frac{a(a+3)}{2^{a+4}.1.2}+\ldots+\frac{a(a+i+1)\ldots(a+2i-1)}{2^{a+2i}.1.2.3\ldots i},$$

* При таком предположении вероятность $y_{m,n}$ разорения игрока M выражается только-что найденным произведением, что впервые дано без доказательства Моавром (The Doctrine of Chances, Probleme LXV).

где

$$i=\frac{n-a}{2} \text{ или } \frac{n-a-1}{2}.$$

В виду интереса, который представляет вопрос о разорении участников безобидных игр, укажем еще приближенные формулы для вычисления той же вероятности разорения M при больших значениях n, когда прямое вычисление суммы

$$\frac{1}{2^a}+\frac{a}{2^{a+2}}+\frac{a(a+3)}{2^{a+4}1.2}+\ldots+\frac{a(a+i+1)\ldots(a+2i-1)}{2^{a+2i}1.2\ldots i}$$

весьма затруднительно. Для приближенного вычисления этой суммы, равной $y_{a,n}$, заметим, что бесконечная сумма

$$\frac{1}{2^a}+\frac{a}{2^{a+2}}+\frac{a(a+3)}{2^{a+4}1.2}+\frac{a(a+4)(a+5)}{2^{a+6}1.2.3}+\ldots,$$

представляющая вероятность разорения игрока M без ограничения числа партий и капитала игрока L, равна единице и что, следовательно,

$$1-y_{a,n}=\frac{a(a+i+2)\ldots(a+2i+1)}{2^{a+2i+2}1.2\ldots(i+1)}+$$

$$+\frac{a(a+i+3)\ldots(a+2i+3)}{2^{a+2i+4}\;1.2\ldots(i+2)}+\ldots$$

Общий член этой суммы

$$\frac{a(a+k+1)\ldots(a+2k-1)}{2^{a+2k}1.2\ldots k}$$

мы обозначим символом s_k. Обращаясь затем к формуле Стирлинга и принимая во внимание равенство

$$s_k=\frac{a}{2^{a+2k}(a+2k)}\cdot\frac{1.2.3\ldots(a+2k)}{1.2\ldots k.1.2\ldots(a+k)},$$

находим два выражения

$$z'_k = a\sqrt{\frac{1}{2\pi k(a+k)(a+2k)}}\left(\frac{a+2k}{2a+2k}\right)^{a+k}\left(\frac{a+2k}{2k}\right)^{k}$$

и

$$z''_k = z'_k e^{\frac{1}{12(a+2k)} - \frac{1}{12k} - \frac{1}{12(a+k)}},$$

из которых первое z'_k больше z_k, а второе z''_k меньше z_k.

Нетрудно также убедиться, что при $k > i$ оправдываются неравенства

$$\frac{1}{4} > \frac{k(a+k)(a+2k)}{(a+2k)^3} > \frac{i(a+i)(a+2i)}{(a+2i)^3},$$

$$\frac{1}{12(a+2k)} - \frac{1}{12k} - \frac{1}{12(a+k)} > \frac{1}{12(a+2i)} - \frac{1}{12i} - \frac{1}{12(a+i)},$$

$$\left(\frac{a+2k}{2k}\right)^{k}\left(\frac{a+2k}{2a+2k}\right)^{a+k} > \left(\frac{a+2i}{2i}\right)^{i}\left(\frac{a+2i}{2a+2i}\right)^{a+i}$$

и

$$\left(\frac{a+2k}{2k}\right)^{k}\left(\frac{a+2k}{2a+2k}\right)^{a+k} < e^{-\frac{a^2}{2(a+2k)}}.$$

Следовательно, если положим

$$\overset{+}{z}_k = \frac{a+2i}{\sqrt{i(a+i)}}\frac{a}{\sqrt{2\pi(a+2k)^3}} e^{-\frac{a^2}{2(a+2k)}}$$

и

$$\bar{z}_k = H\frac{2a}{\sqrt{2\pi(a+2k)^3}}\left(\frac{a+2i}{2i}\right)^{i}\left(\frac{a+2i}{2a+2i}\right)^{a+}$$

при

$$H = e^{\frac{1}{12(a+2i)} - \frac{1}{12i} - \frac{1}{12(a+i)}},$$

то все слагаемые суммы

$$z_{i+1} + z_{i+2} + \dots,$$

равной $1 - y_{a,n}$, удовлетворят неравенствам

$$\overset{+}{z}_k > z_k > \overset{-}{z}_k$$

и потому

$$\overset{+}{z}_{i+1} + \overset{+}{z}_{i+2} + \dots > 1 - y_{a,n} > \overset{-}{z}_{i+1} + \overset{-}{z}_{i+2} + \dots .$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2i+2)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(a+2i+4)^3}} + \dots > \frac{1}{\sqrt{a+2i}} - \frac{1}{2\sqrt{(a+2i)^3}}$$

и

$$\frac{e^{-\frac{a^2}{2(a+2i+2)}}}{\sqrt{(a+2i+2)^3}} + \frac{e^{-\frac{a^2}{2(a+2i+4)}}}{\sqrt{(a+2i+4)^3}} + \dots < \int\limits_{i+\frac{a}{2}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{a^2}{4x}}\,dx}{(\sqrt{2x})^3},$$

по крайней мере при достаточно больших значениях i, когда

$$a + 2i > \frac{a^2}{3}.$$

Наконец, простая подстановка преобразует интеграл

$$\int\limits_{i+\frac{a}{2}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{a^2}{4x}}\,dx}{(\sqrt{2x})^3}$$

в

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\int_0^\tau e^{-z^2}\,dz,$$

где

$$\tau=\frac{a}{2\sqrt{i+\frac{a}{2}}}.$$

Итак, при

$$n \geqq \frac{a^2}{3}+1$$

искомая нами вероятность разорения игрока M, не позже как в n партий, больше

$$1-\frac{a+2i}{\sqrt{i(a+i)\pi}}\int_0^\tau e^{-z^2}\,dz$$

и меньше

$$1-H\frac{2\tau}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a+2i}{2i}\right)^i\left(\frac{a+2i}{2a+2i}\right)^{a+i}\left(1-\frac{1}{2(a+2i)}\right),$$

где

$$i=\frac{n-a}{2} \quad \text{или} \quad \frac{n-a-1}{2}, \quad \tau=\frac{a}{2\sqrt{i+\frac{a}{2}}}$$

и

$$H=e^{\frac{1}{12(a+2i)}-\frac{1}{12i}-\frac{1}{12(a+i)}}.$$

Соответственно этому можем установить приближенную формулу

$$y_{a,n}=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-z^2}\,dz,$$

где τ имеет вышеуказанное значение.

Лаплас для приближенного вычисления той же вероятности представляет ее в виде интеграла и заменяет подинтегральную функцию другою, подобно тому, как было сделано нами в § 20. Чтобы придти к формулам Лапласа, вспомним простые равенства

$$\left(\cos\varphi\right)^{a+2k} = \left\{\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}\right\}^{a+2k} =$$

$$= \sum \frac{(a+2k)\ldots\ldots(a+2k-l+1)}{2^{a+2k}\,1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots l} \cos(a+2k-2l)\,\varphi$$

$$\sin 2\varphi \,\sin a\varphi = \frac{1}{2}\left\{\cos\,(a-2)\,\varphi - \cos(a+2)\,\varphi\right\}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a+2j)\,\varphi\,\cos(a+2r)\,\varphi\,d\varphi = 0, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(a+2j)\,\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

где k, l, j, r числа целые и притом $k \geqq 0$, $0 \leqq l \leqq a+2k$. j не $= r$, $a+j+r$ не $= 0$. На основании этих равенств получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\varphi\right)^{a+2k} \cos(a-2)\,\varphi\,d\varphi = \frac{(a+2k)(a+2k-1)\ldots(a+k)}{2^{a+2k+1}\,1\,.\,2\,.\,3\ldots(k+1)},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\varphi\right)^{a+2k} \cos(a+2)\,\varphi\,d\varphi = \frac{(a+2k)(a+2k-1)\ldots(a+k+2)}{2^{a+2k+1}\,1\,.\,2\,.\,3\ldots(k-1)},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\varphi\right)^{a+2k} \sin 2\varphi\,\sin a\varphi\,d\varphi = \frac{a(a+2k+1)\ldots\ldots(a+k+2)}{2^{a+2k+2}\,1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(k+1)}$$

и затем

$$\sum_{k=i}^{k=\infty} \frac{a(a+2k+1)\ldots(a+k+2)}{2^{a+2k+2}\,1\,.\,2\,.\,3\ldots(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\varphi)^{a+2i}\ \sin 2\varphi\ \sin a\varphi\, d\varphi}{1-\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin a\varphi}{\sin\varphi}\left(\cos\varphi\right)^{a+2i+1} d\varphi,$$

откуда немедленно вытекает формула Лапласа для $p=q$:

$$y_{a,n} = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin a\varphi}{\sin\varphi}\left(\cos\varphi\right)^{a+2i+1} d\varphi;$$

а для p не $=q$ те же равенства, как нетрудно видеть, дают

$$y_{a,n} = y_{a,\infty} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p^a(pq)^{i+1}\sin 2\varphi\,.\ \sin a\varphi\,.\ (\cos\varphi)^{a+2i}}{1-4pq\ \cos^2\varphi}\, d\varphi,$$

где

$$y_{a,\infty} = 1\text{, если } p>q, \quad \text{и} \quad y_{a,\infty} = \left(\frac{p}{q}\right)^a\text{, если } p<q.$$

Для приближенного вычисления интеграла

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin a\varphi}{\sin\varphi}\left(\cos\varphi\right)^{a+2i+1} d\varphi$$

Лаплас обращает особое внимание на значения φ, близкие к нулю, и пользуется такими разложениями

$$\log\sin\varphi = \log\varphi - \frac{\varphi^2}{6}\ldots.$$

$$\log\left(\cos\varphi\right)^{a+2i+1} = (a+2i+1)\log\left(1-\frac{\varphi^2}{2}+\frac{\varphi^4}{24}-\ldots.\right)$$

$$= -\frac{a+2i+1}{2}\varphi^2 - \frac{a+2i+1}{12}\varphi^4 - \ldots.,$$

$$\log\frac{(\cos\varphi)^{a+2i+1}}{\sin\varphi} = -\log\varphi - \frac{a+2i+\frac{2}{3}}{2}\varphi^2 - \frac{a+2i+1}{12}\varphi^4 - \ldots.,$$

на основании которых по замене множителя $a+2i+1$ при φ^4 суммою $a+2i+\frac{2}{3}$ нетрудно получить такое приближенное равенство

$$\frac{(\cos\varphi)^{a+2i+1}}{\sin\varphi} \doteq \frac{1}{\varphi}\left(1-\frac{c^2}{6}\varphi^4\right)e^{-c^2\varphi^2},$$

где

$$c^2 = \frac{1}{2}\left(a+2i+\frac{2}{3}\right),$$

и затем

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin a\varphi}{\sin\varphi}\left(\cos\varphi\right)^{a+2i+1}d\varphi \doteq \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\left(1-\frac{c^2}{6}\varphi^4\right)e^{-c^2\varphi^2}\,d\varphi.$$

Что же касается последнего интеграла, то, рассматривая его как функцию переменного a при постоянном c, посредством дифференцирования находим:

$$\frac{d}{da}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\left(1-\frac{c^2}{6}\varphi^4\right)e^{-c^2\varphi^2}d\varphi = \int\limits_0^{\infty}\left(1-\frac{c^2}{6}\varphi^4\right)e^{-c^2\varphi^2}\cos a\varphi\,d\varphi.$$

С другой стороны, имеем

$$\int_0^\infty e^{-c^2\varphi^2}\cos a\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2c} e^{-\frac{a^2}{4c^2}}$$

и отсюда посредством четырехкратного дифференцирования по a выводим

$$\int_0^\infty e^{-c^2\varphi^2}\varphi^4 \cos a\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2c}\frac{d^4}{da^4}\left(e^{-\frac{a^2}{4c^2}}\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{8c^5} e^{-\frac{a^2}{4c^2}}\left(1 - \frac{a^2}{c^2} + \frac{a^4}{12c^4}\right).$$

Остается произвести интегрирование по a от нуля до заданного числа, при чем для сокращения письма выгодно ввести новую величину

$$t = \frac{a}{2c}.$$

Таким образом получаем

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a\varphi}{\varphi}\left(1 - \frac{c^2}{6}\varphi^4\right) e^{-c^2\varphi^2}\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2} dt - \frac{2}{8c^2\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\left(1 - 4t^2 + \frac{4}{3}t^4\right) dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^t e^{-t^2} dt - \frac{te^{-t^2}}{8c^2}\left(1 - \frac{2}{3}t^2\right)\right\},$$

что и приводит нас к приближенной формуле Лапласа

$$y_{a,n} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^t e^{-t^2} dt - \frac{te^{-t^2}}{8c^2}\left(1 - \frac{2}{3}t^2\right)\right\},$$

при

$$p=q\,,\ b=\infty\,,\ i=\frac{n-a}{2}\ \text{ или }\ \frac{n-a-1}{2}\,,\ 2c^2=a+2i+\frac{2}{3}\,,\ t=\frac{a}{2c}.$$

Для примера положим

$$a=100 \quad \text{и} \quad n=200000.$$

Тогда

$$a+2i=200000,\ i=99950,\ a+i=100050,$$

$$\tau=\frac{100}{2\sqrt{100000}}=\sqrt{0{,}025}=0{,}15811\ldots.$$

и

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\tau e^{-z^2}\,dz=0{,}17693\ldots.,$$

вычитая же число 0,17693 . . . . из единицы, получим для вероятности разорения игрока M такое приближенное значение

$$0{,}82306.$$

И достаточно уменьшить на одну единицу последнюю цифру найденной приближенной величины вероятности, чтобы иметь число

$$0{,}82305,$$

меньшее этой вероятности; ибо в данном случае

$$\frac{a+2i}{2\sqrt{i(a+i)}}=\left\{1-\frac{1}{4000000}\right\}^{-\frac{1}{2}}<1{,}0000002.$$

Применяя к данному примеру формулу Лапласа, получаем

$$t=\frac{100}{2\sqrt{100000{,}33\ldots}}=\tau\left(1+\frac{1}{300000}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

в первых 5 знаках после запятой t совпадает с τ. Имеем

$$\frac{te^{-t^2}}{8c^2}\left(1-\frac{2}{3}t^2\right)<\frac{0,16}{800000},$$

а потому и величина $y_{a,n}$, доставляемая формулой Лапласа, может отличаться от найденной нами, по более простой приближенной формуле, только в тех знаках, которые нами отброшены.

Для определения другого предела той же вероятности обращаемся к таблицам логарифмов * и посредством их находим

$$\begin{array}{ll}
\log\,(a+2i) = 5,3010299956 & \log\,(2a+2i) = 5,3012470886 \\
\log\,2i \qquad\; = 5,3008127941 & \log\,(a\;\;+2i) = 5,3010299956 \\
\hline
\qquad\qquad 0,0002172015 & \qquad\qquad 0,0002170930 \\
\qquad\qquad\quad \times 99950 & \qquad\qquad\quad \times 100050
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
21,72015 & 21,70929 & 21,70930 \\
-0,01086 & -21,72015 & +0,01085 \\
\hline
21,70929 & \bar{1},98914 & 21,72015
\end{array}$$

$$\log\,2\tau=\bar{1},5 \qquad\qquad \log\,H>\frac{-1}{10^6}$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{1}{\pi} = \bar{1},75142 \qquad\qquad \log\left(1-\frac{1}{2(a+2i)}\right)>\frac{-2}{10^6}$$

$$\begin{array}{r}
\bar{1},98914 \\
\hline
\bar{1},24056 = \log 0,17400
\end{array}$$

и, наконец,

$$y_{a,n}<1-0,1739=0,8261.$$

Итак, если число партий ограничено 200000, то вероятность разорения игрока M, капитал которого составляет только сто ставок каждой партии, не достигает

$$0,83.$$

* A. Steinhauser. Hilfstafeln zur präcisen Berechnung zwanzigstelliger Logarithmen.... Wien. 1880.

Если увеличим затем n в сто раз, то число τ уменьшится в десять раз и вместе с тем уменьшатся, приблизительно, в десять раз и найденные нами пределы разности $1 - y_{a,n}$; так что при

$$n = 20000000$$

вероятность разорения того же игрока M будет довольно близка к

$$1 - 0{,}017 = 0{,}983,$$

но меньше этого числа. Если же, увеличивая n в сто раз, мы вместе с тем увеличим капитал M в десять раз, то τ останется без изменения и вероятность разорения игрока M попрежнему будет меньше

$$0{,}83.$$

Заметим, что вероятность разорения игрока M оставалась бы меньше $\frac{1}{2}$ при всяком числе партий, если бы окончательный расчет был отложен до того момента, пока не будет сыграно это число партий. Требование немедленной расплаты за каждую партию приближает эту вероятность к единице, так что при достаточно большом числе партий разорение игрока M становится весьма вероятным.

Скажем еще несколько слов о тех случаях, когда каждая партия в отдельности представляет игру не безобидную, при чем различим два предположения:

$$1)\ p > q \quad \text{и} \quad 2)\ p < q.$$

При $p > q$ отдельные партии не выгодны для M и к прежнему заключению можно добавить, что отсрочка окончательного расчета не устраняет большой вероятности разорения M.

При $p < q$ отдельные партии выгодны для M и приведенные выше формулы показывают, что вероятность разорения игрока M всегда меньше $\left(\frac{p}{q}\right)^a$ и может быть сделана сколь угодно близкою к $\left(\frac{p}{q}\right)^a$ посредством увеличения капитала L и числа допускаемых партий n. И здесь следует помнить, что рассматриваемая нами величина вероятности разорения игрока M обусловлена требованием немедленной расплаты за каждую партию; так как, согласно выводам 2-й и 3-й глав, вероятность разорения M сделалась бы сколь угодно малою, если бы было назначено наперед достаточно большое число партий и окончательный расчет был отложен до тех пор, пока не будет сыграно это число партий.

§ 30. *Задача 8-ая.* Пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

будут n независимых величин и пусть совокупность чисел

$$1, 2, 3, \ldots, m$$

представляет все возможные, и притом равновозможные, значения каждой из них. Требуется найти вероятность, что сумма

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

будет равна данному числу.

Решение. Полагая последовательно

$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$

приходим к заключению, что при любом значении n вероятность равенства

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \alpha,$$

где α число данное, может быть определена как коэффициент при t^α в разложении выражения

$$\left\{\frac{t + t^2 + \ldots + t^m}{m}\right\}^n$$

по степеням произвольного числа t. С другой стороны, имеем

$$\left(\frac{t + t^2 + \ldots + t^m}{m}\right)^n = \frac{t^n}{m^n}\frac{(1 - t^m)^n}{(1 - t)^n} =$$

$$= \frac{t^n}{m^n}\left[1 - nt^m + \frac{n(n-1)}{1.2}t^{2m} - \ldots\right]\left[1 + nt + \frac{n(n+1)}{1.2}t^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}t^3 + \ldots\right].$$

Поэтому, обозначив вероятность равенства

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \alpha$$

символом P_α, можем установить формулу

$$m^n P_\alpha = \frac{n(n+1)\ldots(\alpha-1)}{1\,.\,2\ldots(\alpha-n)} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n(n+1)\ldots(\alpha-m-1)}{1\,.\,2\ldots(\alpha-n-m)} +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} \; \frac{n(n+1)\ldots(\alpha-2m-1)}{1\,.\,2\ldots(\alpha-n-2m)} - \ldots,$$

которая представляет удобное средство для вычисления P_α при небольших значениях α. Нетрудно также доказать равенство

$$P_\alpha = P_{n(m+1)-\alpha},$$

которое позволяет заменить число α разностью $n(m+1)-\alpha$ и, таким образом, дает возможность уменьшить α, если $\alpha > \frac{n(m+1)}{2}$. Например, при $m=6$ и $n=3$ находим

$$216\,P_{18} = 216\,P_3 = 1,\quad 216\,P_{17} = 216\,P_4 = 3,$$

$$216\,P_{16} = 216\,P_5 = \frac{3\,.\,4}{1\,.\,2} = 6,\quad 216\,P_{15} = 216\,P_6 = \frac{3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3} = 10,$$

$$216\,P_{14} = 216\,P_7 = \frac{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 15,$$

$$216\,P_{13} = 216\,P_8 = \frac{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} = 21$$

$$216\,P_{13} = 216\,P_9 = \frac{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} - 3 = 25,$$

$$216\,P_{11} = 216\,P_{10} = \frac{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} - 3\,.\,3 = 27.$$

Для осуществления этого примера могут служить три обыкновенные шестигранные кости, на гранях которых стоят нумера 1, 2, 3, 4, 5, 6. Если такие три кости брошены на плоскость и если X_1, X_2, X_3 означают нумера на верхних их гранях, то единственно возможными и притом равновозможными значениями, как для X_1, так для X_2 и X_3, будут 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Соответственно этому найденные нами числа

$$P_3, P_4, P_5, \ldots, P_{18}$$

представляют вероятности различных предположений о сумме нумеров, вскрывшихся на трех обыкновенных игральных костях. И равенство

$$P_3+P_4+P_5+\ldots+P_{10}=P_{11}+P_{12}+P_{13}+\ldots+P_{18}$$

указывает на одинаковую вероятность предположения, что эта сумма не превосходит 10, и противоположного предположения, что она больше десяти.

При больших значениях n точное вычисление P_α требует утомительных выкладок и едва ли может представлять большой интерес. Тогда возникает вопрос о разыскании приближенных выражений вероятности, по возможности простых и близких к точному. Предполагая большим только n, а не m, и рассматривая не вероятности отдельных значений суммы

$$X_1+X_2+\ldots+X_n,$$

а вероятность, что эта сумма лежит в данных пределах, мы можем обратиться к общим приближенным вычислениям 3-ей главы. Для применения их следует найти математические ожидания первых и вторых степеней рассматриваемых величин. Так как математическое ожидание любой из величин

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

равно

$$\frac{1+2+\ldots+m}{m}=\frac{m+1}{2},$$

а математическое ожидание ее квадрата равно

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+m^2}{m}=\frac{(m+1)(2m+1)}{6},$$

то разность между математическим ожиданием квадрата этой величины и квадратом ее математического ожидания приводится к

$$\frac{(m+1)(2m+1)}{6}-\left(\frac{m+1}{2}\right)^2=\frac{m^2-1}{12}$$

и потому выводы третьей главы дают для вероятности неравенств

$$n\frac{m+1}{2}-\tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}<X_1+X_2+\ldots+$$
$$+X_n<n\frac{m+1}{2}+\tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}$$

приближенное выражение в виде известного интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau} e^{-z^2}\,dz.$$

Воспользуемся частным примером для указания другого вывода того же приближенного выражения вероятности, который можно применить и в общем случае. И прежде всего заметим, что в разложении любой целой функции $F(t)$ по степеням t коэффициент при t^{α} может быть представлен в виде интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F\left(e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)e^{-\alpha\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi;$$

ибо

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi=2\pi$$

и для любого целого числа k, отличного от нуля, имеем

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{k\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi=0.$$

Поэтому

$$P_\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{(n-\alpha)\varphi\sqrt{-1}}\left(1-e^{m\varphi\sqrt{-1}}\right)^n}{m^n\left(1-e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^n}\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{\left(n\frac{m+1}{2}-\alpha\right)\varphi\sqrt{-1}}\left(e^{\frac{m}{2}\varphi\sqrt{-1}}-e^{-\frac{m}{2}\varphi\sqrt{-1}}\right)}{m^n\left(e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}-e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}\right)}\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{\left(n\frac{m+1}{2}-\alpha\right)\varphi\sqrt{-1}}\left(\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{m\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^n d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos\left(n\frac{m+1}{2}-\alpha\right)\varphi\left(\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{m\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^n d\varphi.$$

Обращаясь к приближенным вычислениям и положив

$$n\frac{m+1}{2}-\alpha=\beta=\gamma\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}},$$

заменим

$$\left(\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{m\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^n$$

показательною функциею

$$e^{-n\frac{m^2-1}{24}\varphi^2}$$

на основании соображений, указанных в 3-ей главе, а за верхний предел интеграла возьмем ∞ вместо π.

Мы получим таким образом приближенную формулу

$$P_{n\frac{m+1}{2}-\beta} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\beta\varphi \,.\, e^{-n\frac{m^2-1}{24}\varphi^2}\, d\varphi,$$

правая часть которой, как известно, равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{6}{n(m^2-1)}}\, e^{-\frac{6\beta^2}{n(m^2-1)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{6}{n(m^2-1)}}\, e^{-\gamma^2}.$$

Согласно этому вероятность неравенств

$$n\frac{m+1}{2} - \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}} < X_1 + X_2 + \ldots + X_n < n\frac{m+1}{2} + \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}$$

приближенно представится суммою всех произведений

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{6}{n(m^2-1)}}\, e^{-\gamma^2},$$

для которых γ удовлетворяет неравенствам

$$-\tau < \gamma < +\tau$$

и обращает выражение

$$n\frac{m+1}{2} - \gamma\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}$$

в целое число.

Все члены указанной суммы содержат множитель

$$\sqrt{\frac{6}{n(m^2-1)}},$$

который равен разности каждых двух смежных значений γ и будет сколь угодно мал при достаточно больших n.

Заменив на этом основании сумму интегралом, получаем для вероятности неравенств

$$n\frac{m+1}{2}-\tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}<X_1+X_2+\ldots+$$
$$+X_n<n\frac{m+1}{2}+\tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}$$

прежнее приближенное выражение

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-\gamma^2}d\gamma.$$

§ 31. Закончим главу обобщением задачи Бернулли, которое доставит нам пример связанных величин, заслуживающий особого внимания.

Пусть попрежнему дело идет о возможных результатах ряда независимых испытаний, но при каждом испытании будем различать не два, а $k+1$ несовместимых событий $E_1, E_2, \ldots, E_k, E_{k+1}$, вероятности которых сохраняют, как и в частном случае задачи Бернулли, постоянные значения: $p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}$, при чем $p_1+p_2+\ldots+p_k+p_{k+1}=1$. Число рассматриваемых испытаний обозначим буквою n, а соответствующее число появлений каждого из наших событий E_i буквою m с тем же значком i. При таких предположениях и обозначениях должно быть $m_1+m_2+\ldots+m_{k+1}=n$, а вероятность каждого определенного сочетания чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k, m_{k+1}$ выразится произведением

$$P_{m_1, m_2, \ldots, m_{k+1}, n}=\frac{\Gamma(n+1)\, p_1^{m_1} p_2^{m_2}\ldots p_{k+1}^{m_{k+1}}}{\Gamma(m_1+1)\,\Gamma(m_2+1)\ldots\Gamma(m_{k+1}+1)}$$

Имея в виду теорему Якова Бернулли и приближенную формулу Моавра-Лапласа, мы займемся значениями $\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots, \frac{m_k}{n}, \frac{m_{k+1}}{n}$ близкими к $p_1, p_2, \ldots p_{k+1}$ и соответственно этому положим

$$m_1 = np_1 + t_1\sqrt{2np_1},\ m_2 = np_2 + t_2\sqrt{2np_2}, \ldots,\ m_{k+1} = np_{k+1} + \\ + t_{k+1}\sqrt{2np_{k+1}},$$

ограничивая числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ неравенствами

$$t_1' < t_1 < t_1'',\ t_2' < t_2 < t_2'', \ldots\ldots,\ t_k' < t_k < t_k''$$

крайние члены которых t', t'' со значками 1, 2, ..., k внизу какие-нибудь данные числа; число же n мы предполагаем весьма большим и даже возрастающим безгранично. Что касается числа t_{k+1}, то каждой возможной совокупности значений $t_1, t_2, \ldots, t_k$ соответствует одно и только одно его значение в силу очевидной линейной связи

$$t_1\sqrt{2np_1} + t_2\sqrt{2np_2} + \ldots + t_k\sqrt{2np_k} + t_{k+1}\sqrt{2np_{k+1}} = 0.$$

Числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ в исчислении вероятностей также не представляют вполне независимых величин; однако, при достаточно больших n для каждого из них t_i, в указанных для него границах, возможны все значения, при которых соответствующее выражение $m_i = np_i + t_i\sqrt{2np_i}$ число целое.

Поэтому искомая вероятность выполнения установленных неравенств $t_1' < t_1 < t_1'', \ldots, t_k' < t_k < t_k''$ выразится суммою

$$\sum P_{m_1, m_2, \ldots m_{k+1}, n} = \sum \frac{\Gamma(n+1)\, p_1^{m_1}\, p_2^{m_2} \ldots p_{k+1}^{m_{k+1}}}{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)\ldots\Gamma(m_{k+1}+1)},$$

распространенною на все значения $t_1, t_2, \ldots, t_k$, которые удовлетворяют таким неравенствам и соответствуют целым числам $m_i = np_i + t_i\sqrt{2np_i}$; вместе с тем разность Δt_i каждых двух смежных значений одного и того же числа t_i должна быть равною дроби: $\Delta t_i = \frac{1}{\sqrt{2np_i}}$, приближающейся к нулю одновременно с $\frac{1}{n}$. А от выражения $P_{m_1, m_2, \ldots m_{k+1}, n}$, пользуясь формулой Стирлинга, не трудно перейти, как и в частном случае — задаче Я. Бернулли, к выражениям

$$P' = \sqrt{\frac{n}{(2\pi)^k \; m_1 \; m_2 \ldots m_{k+1}}} \left(\frac{np_1}{m_1}\right)^{m_1} \left(\frac{np_2}{m_2}\right)^{m_2} \ldots \left(\frac{np_{k+1}}{m_{k+1}}\right)^{m_{k+1}}$$

и

$$P'' = \frac{1}{\sqrt{p_{k+1}\pi^k}} e^{-t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_k^2 - t^2_{k+1}} \Delta t_1 \, \Delta t_2 \ldots \Delta t_k$$

Остается от суммы перейти к интегралу, чтобы получить для искомой вероятности предельное выражение

$$\frac{1}{\sqrt{p_{k+1}\pi^k}} \int_{t_1'}^{t_1''} \int_{t_2'}^{t_2''} \cdots \int_{t_k'}^{t_k''} e^{-t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t^2_k - t^2_{k+1}} dt_1 \ldots dt_k,$$

которое при больших n может служить для приближенного ее вычисления, при чем

$$t_{k+1} = -\frac{t_1\sqrt{p_1} + t_2\sqrt{p_2} + \ldots + t_k\sqrt{p_k}}{\sqrt{p_{k+1}}},$$

Отсюда, наконец, заключаем, что интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{p_{k+1}\pi^k}} \int e^{-t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t^2_k - t^2_{k+1}} dt_1 \, dt_2 \ldots dt_k,$$

распространенный на совокупность значений $t_1, t_2, \ldots, t_k$, ограниченную какими-нибудь неравенствами, также может служить для приближенного вычисления вероятности выполнения их.

ЛИТЕРАТУРА.

Fermat. Oeuvres complètes publiées par Tannery et Henry. T. II. Pascal. Oeuvres. T. IV, V (издание 1779 г.).

Huygens. De Ratiociniis in Ludo Aleae (Schooten. Exercitationes Mathematicae) 1657.

Montmort. Essay d'analyse sur les jeux de hazard. 2 éd. 1713.

Moivre. The doctrine of chance. 1718.

Bernoulli, Daniel. Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis (Comm. Ac. Petrop. V, 1738).

Euler. Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre. (Hist. de l'Acad. r. des sc. et bel. let. Berlin T. VII, 1751).

Euler. Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium (Opuscula analitica II).

Lagrange. Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, et où l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière (Oeuvres de Lagrange. T. II).

Lagrange. Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes, ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles; et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards. (Oeuvres T. IV).

В. П. Ермаков. Теория вероятностей. 1879.

Eggenberger. Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunction und des Laplace'schen Integrals, 2 Aufl. Jena. 1906.

А. Марков. Об испытаниях связанных в цепь ненаблюдаемыми событиями. (Изв. Акад. Наук 1912).

Broden. Wahrscheinlichkeitsbestimmungen bei der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung reeller Zahlen (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar 57, 239 — 266).

A. Wiman. Ueber eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe bei Kettenbruchentwickelungen. (Там же, 829 — 841).

ГЛАВА V.

Пределы, иррациональные числа и непрерывные величины в исчислении вероятностей.

§ 32. Не устанавливая одного общего определения, мы будем называть некоторые события *предельными* для других событий, подобно тому, как касательная называется предельным положением секущей. Называя, на каких-либо основаниях, событие E предельным для ряда событий

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots,$$

вероятности которых образуют ряд чисел

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots,$$

мы вместе с тем определим вероятность события E как предел, к которому стремится p_n при беспредельном возрастании значка n.

Примеры предельных событий можно найти в 6-ой и 7-ой задаче предыдущей главы. Но мы не станем возвращаться к разобранным уже вопросам, а займемся новыми.

Прежде чем перейти к частным вопросам, заметим, что при всех обобщениях понятия о вероятности как о числе мы имеем в виду сохранение теорем сложения и умножения вероятностей.

Первый интересный пример предельных событий, на котором мы остановимся, доставит нам задача Чебышева; такое название мы придаем следующей задаче *, заимствованной из лекций Чебышева:

Определить вероятность несократимости рациональной дроби, числитель и знаменатель которой написаны наудачу.

* Решение этой задачи можно найти также в *Vorlesungen über Mathematik* von Leopold Kronecker (Zweiter Teil, erster Abschnitt, erster Band, 24 Vorl.), где упомянуто, что ту же задачу рассматривал Дирихле.

Эта замечательная задача, подобно многим другим, станет определенною и получит определенное решение только после ряда условий, выясняющих смысл указания, что числитель и знаменатель дроби написаны наудачу.

Приступая к исследованию поставленного вопроса, займемся сначала более простым вопросом о сократимости и несократимости дроби на данное число a.

Относительно числителя дроби мы можем различить a случаев по величине остатка от обыкновенного деления его на a; именно возможными величинами остатка будут

$$0,\ 1,\ 2, \ldots,\ a-1.$$

И в силу указания, что числитель написан наудачу, мы будем считать все эти a случаев равновозможными.

Так как числитель делится на a только в одном из установленных нами случаев, то вероятность делимости его на a выражается дробью $\frac{1}{a}$. На подобных же основаниях вероятность делимости знаменателя дроби на a будет также равна $\frac{1}{a}$. Следовательно, вероятность, что дробь можно сократить на a, выразится произведением

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2},$$

и потому вероятность, что сокращение дроби на a невозможно, представится разностью

$$1 - \frac{1}{a^2}.$$

Далее важно установить, что вероятность несократимости дроби на a сохраняет величину

$$1 - \frac{1}{a^2}$$

и в том случае, когда известна несократимость дроби на какие-либо числа простые с a, так как и в этом случае возможными остатками от деления числителя и знаменателя дроби на a будут попрежнему

$$0,\ 1,\ 2, \ldots,\ a-1.$$

Установив это, возьмем ряд последовательных простых чисел

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 5,\ \alpha_4 = 7,\ \alpha_5 = 11, \ldots,$$

и назовем событием E_n несократимость дроби на

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

Вероятность такого события E_n представится на основании теоремы умножения вероятностей произведением

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\alpha^2{}_n}\right).$$

Рассматривая, наконец, несократимость дроби ни на какое число, как предельное событие для ряда событий

$$E_1,\ E_2, \ldots, E_n, \ldots,$$

выразим вероятность этой несократимости бесконечным произведением

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\ldots,$$

которое равно

$$\frac{6}{\pi^2},$$

как мы сейчас покажем.

Для доказательства, что полученное нами бесконечное произведение равно $\frac{6}{\pi^2}$, обозначим его буквою P и рассмотрим $\frac{1}{P}$.

Применяя к каждой из дробей

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}},\ \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}},\ \frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}, \ldots$$

известную формулу

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots,$$

получаем *

$$\frac{1}{P} = \Sigma \frac{1}{2^{2\lambda}} \cdot \Sigma \frac{1}{3^{2\mu}} \cdot \Sigma \frac{1}{5^{2\nu}} \ldots\ldots = \Sigma \frac{1}{(2^\lambda\, 3^\mu\, 5^\nu \ldots\ldots)^2},$$

где под

$$\lambda,\ \mu,\ \nu, \ldots\ldots$$

мы подразумеваем каждое из чисел

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots$$

Каждое произведение

$$2^\lambda\, 3^\mu\, 5^\nu \ldots\ldots$$

равно целому числу; с другой стороны, известно, что все целые числа можно представить подобными произведениями, и что каждому целому числу соответствует только одна система чисел

$$\lambda,\ \mu,\ \nu, \ldots\ldots,$$

при которой произведение

$$2^\lambda\, 3^\mu\, 5^\nu \ldots\ldots$$

равно этому числу. Поэтому полученная нами сумма

$$\Sigma \frac{1}{(2^\lambda\, 3^\mu\, 5^\nu \ldots\ldots)^2}$$

* Euler. Introductio in analysin infinitorum. T. I, 1748.

приводится к известной сумме

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

равной

$$\frac{\pi^2}{6}.$$

Итак, по вышеприведенным соображениям, вероятность несократимости рациональной дроби, числитель и знаменатель которой написаны наудачу, выразится иррациональным числом

$$\frac{6}{\pi^2}.$$

Несократимость рациональной дроби можно также рассматривать как предельное событие для другого ряда событий

$$E'_2, \ E'_3, \ldots, \ E'_n, \ldots,$$

где E'_n означает несократимость такой дроби, числитель и знаменатель которой взяты на удачу из совокупности n чисел

$$1, \ 2, \ 3, \ldots, \ n.$$

Не останавливаясь на этом новом толковании задачи, обстоятельное исследование которого можно найти в вышеупомянутых лекциях Кронекера, заметим, что оно не изменит найденной нами величины вероятности

$$\frac{6}{\pi^2},$$

если вероятность события E'_n мы выразим отношением

$$\frac{m}{n^2},$$

где m означает число несократимых дробей, числители и знаменатели которых взяты из совокупности

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, n.$$

Кронекер приводит также следующий краткий вывод Дирихле, отмечая его нестрогость. Допустим, что существует некоторая неизвестная нам вероятность P несократимости дроби, как нам приходилось уже допускать в других задачах исчисления вероятностей. Тогда на основании вышеприведенных соображений вероятность, что дробь может быть сокращена на какое-нибудь данное число t и только на t, можно представить произведением $P\cdot\frac{1}{t^2}$. Полагая затем последовательно

$$t = 1,\ 2,\ 3,$$

и замечая, что таким образом мы исчерпываем все возможные несовместимые предположения, приходим к равенству

$$1 = P\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\ldots\right) = P\,\frac{\pi^2}{6},$$

откуда

$$P = \frac{6}{\pi^2}.$$

Так выражается вероятность несократимости дроби, о числителе и знаменателе которой ничего неизвестно. Если же по известным простым признакам мы убедились уже в несократимости ее ни на 2, ни на 3, ни на 5, то в вышеприведенном бесконечном произведении

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots$$

первые три множителя придется заменить единицей, и вероятность несократимости дроби станет уже равной

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{6}{\pi^2} = \frac{75}{8\pi^2} \doteq 0{,}95.$$

Другой пример предельных событий доставит нам следующая задача.

Прямая линия AB разделена точкою C на две определенные части. Затем та же прямая разделена на три части двумя точками P и Q, из которых первая поставлена наудачу на AC, а вторая поставлена также наудачу на CB.

$A \qquad\qquad P \qquad\qquad C \qquad\qquad Q \qquad\qquad B$

Требуется определить вероятность, что

$$AP, PQ, QB$$

могут быть сторонами одного треугольника. Иначе сказать, требуется определить вероятность, что каждая из трех длин

$$AP, PQ, QB$$

меньше суммы двух остальных.

Чтобы придать поставленному вопросу определенный смысл, прежде всего положим, что прямая AB разделена $2n-1$ * точками

$$D_1, D_2, \ldots, D_{2n-1}$$

на $2n$ равных частей

$$AD_1, D_1D_2, \ldots, D_{1n-1} B,$$

общую длину которых обозначим буквою ε. Пусть вместе с тем целые числа k и l определяются неравенствами

$$k\varepsilon < AC < (k+1)\varepsilon$$

и

$$(l-1)\varepsilon < BC < l\varepsilon,$$

так что

$$(k+l-1)\varepsilon < AB = 2n\varepsilon < (k+l+1)\varepsilon$$

* Существо дела не изменится, если прямая будет разделена четным числом точек.

и потому

$$k+l=2n,$$

при чем для сокращения рассуждений мы не останавливаемся на тех случаях, когда одна из точек $D_1, D_2, \ldots, D_{2n-1}$ совпадает с C.

Ограничим затем положение точек P и Q условием, что они не могут совпадать с другими точками прямой AB, кроме указанных нами $2n-1$ точек $D_1, D_2, \ldots, D_{2n-1}$. При таких условиях для AP возможны только следующие значения

$$\varepsilon,\ 2\varepsilon, \ldots,\ k\varepsilon,$$

а для BQ возможны только следующие значения

$$\varepsilon,\ 2\varepsilon, \ldots,\ (l-1)\varepsilon.$$

Соединяя каждое возможное значение AP с каждым возможным значением BQ, получаем

$$k(l-1)$$

случаев, которые мы будем считать не только единственно возможными, но и равновозможными.

Переходя к счету тех случаев, когда

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могут быть сторонами одного треугольника, для определенности положим

$$AC<CB.$$

Случаи, к счету которых мы переходим, определяются неравенствами

$$AP<PB,\ PQ<AP+BQ,\ AQ>BQ.$$

Первое из этих неравенств выполняется при всех возможных положениях точки P, ибо

$$AP<AC<CB<PB,$$

а остальные два приведутся к следующим

$$x+y>n>y,$$

если положим

$$AP=x\varepsilon,\ BQ=y\varepsilon.$$

Совокупность всех случаев, удовлетворяющих этим условиям, не трудно расположить в таблицу:

$x=2$	$x=3$	$x=4$		$x=k$
$y=n-1$	$y=n-1$	$y=n-1$	....	$y=n-1$
	$y=n-2$	$y=n-2$	....	$y=n-2$
		$y=n-3$	....	....
			....	....
				$y=n-k+1$

Из таблицы видно, что число рассматриваемых нами случаев, в которых AP, PQ и QB могут быть сторонами одного треугольника, равно

$$1+2+3+\ldots.+(k-1)=\frac{k(k-1)}{2}.$$

Разделив это число на общее число

$$k(l-1)$$

допускаемых нами случаев, находим, что при сделанных нами предположениях вероятность возможности составить из

$$AP,\ PQ,\ QB$$

треугольник выражается дробью

$$\frac{k-1}{2(l-1)}.$$

Наконец, для устранения ограничений, в силу которых точки P и Q могут совпадать только с определенными точками отрезков AC и CB, станем увеличивать n беспредельно.

Так как при беспредельном возрастании числа n дробь

$$\frac{k-1}{2(l-1)}$$

приближается к пределу

$$\frac{1}{2}\frac{AC}{BC},$$

то на основании вышеизложенных соображений мы можем принять

$$\frac{1}{2}\frac{AC}{BC}$$

за искомую вероятность, что AP, PQ, QB могут быть сторонами одного треугольника.

Надо, однако, помнить, что для искомой вероятности мы могли бы получить совершенно иные величины, если бы заменили другими некоторые из предположений, введенных нами в решение задачи, но не высказанных при ее постановке. К таким предположениям, обусловливающим наш вывод, принадлежит, например, равновозможность установленных нами $k(l-1)$ случаев.

Подобным образом можно было бы рассмотреть разнообразные частные вопросы; но такой разбор отдельных вопросов был бы слишком долгим и не доставил бы нам определенных правил для решения других вопросов в виду того, что он требует особых соображений для каждого частного случая и заставляет, кроме искомой вероятности, вычислять другие вероятности, для которых искомая служит пределом.

Для сокращения выводов и для сообщения им бо́льшей ясности и определенности, во многих случаях, можно с успехом воспользоваться расширением понятия о вероятности, чем мы и займемся в следующих параграфах.

Заметим, что разобранный сейчас вопрос о возможности образовать треугольник принадлежит к числу многих случаев, о которых будет идти речь; а задачу Чебышева и ей подобные нельзя причислять к ним.

§ 33. Положим, что совокупность возможных значений X состоит не из конечного числа различных чисел, а из всех чисел, лежащих между данными пределами

$$A \text{ и } B.$$

Положим далее, что о вероятности отдельных значений X нет уже речи, и вместо того возникает вопрос о вероятности, что X лежит в каком нибудь данном промежутке.

В этом случае, уподобляя вероятность массе и вводя понятие о *плотности* вероятности, аналогичное понятию о плотности массы, мы будем вероятность каждой из четырех систем неравенств

$$1)\ a < X < b,\quad 2)\ a \leqq X < b,\quad 3)\ a < X \leqq b,\quad 4)\ a \leqq X \leqq b$$

выражать одним и тем же интегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{10}$$

Функцию $f(x)$, которая стоит под знаком интеграла, мы назовем *плотностью* вероятности и будем устанавливать, в каждом частном случае, более или менее произвольно, соблюдая следующие условия:

$$1)\ f(x) \geqq 0 \text{ при } A \leqq x \leqq B,$$

$$2)\ f(x) = 0 \text{ при } x < A \text{ и при } x > B,$$

$$3)\ \int_A^B f(x)\,dx = 1.$$

Первое из этих трех условий вызывается тем соображением, что вероятность должна оставаться всегда числом положительным, или нулем; а второе и третье тем, что X, по предположению, лежит между A и B и не может иметь значений, выходящих из этих пределов.

Простейшее предположение о функции $f(x)$, которое мы обыкновенно будем делать, выражается равенством

$$f(x) = \text{пост. при } A \leqq x \leqq B,$$

при чем постоянное значение $f(x)$ равно

$$\frac{1}{B-A},$$

в силу условия

$$\int_A^B f(x)\,dx = 1.$$

При таком предположении для каждых двух равных промежутков, заключающихся между A и B, вероятности, что X лежит в этих промежутках, выражаются равными числами, и соответственно этому можно сказать, что все возможные значения X представляются нам равновозможными.

Другое замечательное предположение о $f(x)$ относится к тому случаю, когда малым величинам X^2 мы придаем значительно большую вероятность, чем большим, но не находим возможным ограничить значение X каким нибудь определенным промежутком. Это второе предположение, часто принимаемое, выражается равенствами

$$A = -\infty,\ B = +\infty$$

$$f(x) = Ce^{-k^2x^2},$$

где C и k числа постоянные, которые, в силу условия

$$\int_A^B f(x)\,dx = 1$$

должны быть связаны уравнением

$$C = \frac{k}{\sqrt{\pi}},$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{k}.$$

Расширив таким образом понятие о вероятности, мы вместе с тем расширим и понятие о математическом ожидании. Именно, математическими ожиданиями

$$X, \ X^2, \ X^3, \ldots$$

мы назовем соответственно интегралы

$$\int_A^B xf(x)\,dx, \quad \int_A^B x^2 f(x)\,dx, \quad \int_A^B x^3 f(x)\,dx, \ldots$$

и вообще математическим ожиданием $\varphi(X)$ мы назовем интеграл

$$\int_A^B \varphi(x) f(x)\,dx. \tag{11}$$

Например, при

$$f(x) = \frac{1}{B-A}$$

математическое ожидание X равно

$$\int_A^B \frac{x\,dx}{B-A} = \frac{B+A}{2},$$

а математическое ожидание X^2 равно

$$\int_A^B \frac{x^2\,dx}{B-A} = \frac{A^2+AB+B^2}{3};$$

если же

$$A = -\infty, \quad B = +\infty \quad \text{и} \quad f(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2},$$

то математическое ожидание X равно нулю, а математическое ожидание X^2 равно

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2x^2} x^2\, dx = \frac{1}{2k^2}.$$

Рассматривая две или несколько величин, подобных X, мы прежде всего выделим случай независимых величин, как простейший. Две величины X и Y, возможные значения которых состоят из всех чисел, лежащих в данных пределах, мы называем независимыми друг от друга, если для любых двух чисел

$$a,\ b$$

и для двух других любых чисел

$$c,\ \partial$$

мы можем выразить вероятность неравенств

$$a \leqq X \leqq b$$

интегралом

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

а вероятность неравенств

$$c \leqq Y \leqq \partial$$

интегралом

$$\int_c^\partial f_1(y)\, dy,$$

где $f(x)$ сохраняет одинаковую величину как при неизвестном значении Y, так и при всяком данном значении Y, а $f_1(y)$ сохраняет одинаковую величину как при неизвестном значении X, так и при всяком данном значении X.

Для таких величин X и Y мы можем вероятность выполнения неравенств

$$a \leqq X \leqq b$$

вместе с неравенствами

$$c \leqq Y \leqq \partial$$

представить двукратным интегралом

$$\int_c^\partial \int_a^b f(x) f_1(y)\, dx\, dy = \int_a^b f(x)\, dx \int_c^\partial f_1(y)\, dy,$$

сохраняя теорему умножения вероятностей. И вообще интеграл

$$\int\int f(x) f_1(y)\, dx\, dy,$$

распространенный на все значения x и y, которые удовлетворяют тем или другим неравенствам, будет выражать у нас вероятность, что X и Y удовлетворяют подобным же неравенствам.

Переходя от случая независимых величин к общему, мы должны вместо произведения $f(x) f_1(y)$ ввести некоторую функцию $\varphi(x, y)$ и можем вероятность, что X и Y удовлетворяют определенным неравенствам, выражать двукратным интегралом

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy, \tag{12}$$

распространенным, конечно, на значения x и y, которые удовлетворяют таким же неравенствам.

При этом функцию $\varphi(x, y)$ двух чисел x и y мы назовем также плотностью вероятности и будем устанавливать ее более или менее произвольно, наблюдая однако, чтобы она не получала отрицательных значений и чтобы интеграл

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

приводился к единице, при распространении его на всевозможные значения x и y.

Простейшее предположение о функции $\varphi(x, y)$ состоит в том, что она сохраняет постоянную величину для значений x и y, удовлетворяющих известным неравенствам, и обращается в нуль для прочих значений x и y. При таком предположении, обращаясь к геометрическим соображениям и рассматривая X и Y как обыкновенные координаты точки на плоскости, мы легко приходим к следующему заключению.

Если $\varphi(x, y)$ мы рассматриваем как функцию координат x и y различных точек плоскости, и если S означает величину всей площади, внутри которой $\varphi(x, y)$ сохраняет постоянное значение, отличное от нуля, а s означает величину какой нибудь площади, составляющей часть первой, то отношение

$$\frac{s}{S}$$

выразит величину вероятности, что точка, определенная координатами X и Y, лежит внутри последней площади, величина которой равна s.

Расширению понятия о вероятности соответствует и расширение понятия о математическом ожидании; именно, математическим ожиданием $\psi(x, y)$ мы назовем интеграл

$$\int\int \psi(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy, \tag{13}$$

распространенный на все значения x и y.

Сказанное нами о двух величинах X и Y легко распространить на любое число подобных величин, на чем мы не считаем нужным останавливаться.

Приложим указанные нами основания к ряду задач, начиная с той, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе, на других основаниях.

§ 34. *Задача 1-ая.* Прямая линия AB разделена точкою C на две определенные части. Затем та же прямая разделена на три части двумя точками P и Q, из которых первая поставлена наудачу на AC, а вторая поставлена также наудачу на CB.

Требуется определить вероятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могут быть сторонами одного треугольника.

Решение. Обращаясь к геометрическим соображениям, будем рассматривать длины AP и BQ как обыкновенные прямолинейные прямоугольные координаты

$$X,\ Y$$

некоторой точки M на плоскости.

На приложенном чертеже

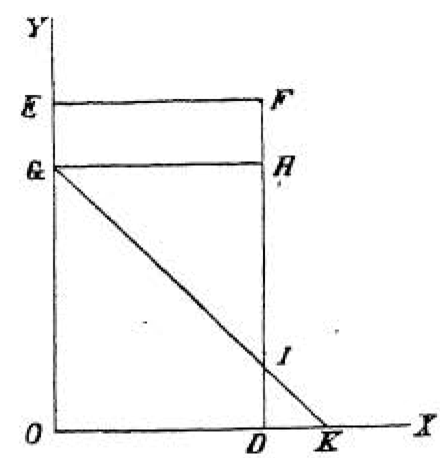
$$OD = AC,\ OE = CB > AC,\ OG = OK = \frac{AB}{2}$$

$$OY \perp OX,\ GH \parallel EF \parallel OX,\ DH \parallel OY.$$

Рассматриваемая точка M во всех случаях лежит внутри прямоугольника $OEFD$.

В тех же случаях, когда

$$AP,\ PQ,\ QB$$



могут быть сторонами одного треугольника, координаты точки M должны удовлетворять неравенствам

$$X < \frac{AB}{2},\ Y < \frac{AB}{2},$$

$$X + Y > \frac{AB}{2},$$

при выполнении которых точка M лежит внутри треугольника GHI. Поэтому искомая вероятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могут быть сторонами одного треугольника, выразится отношением площади треугольника GHI к площади прямоугольника $OEFD$, если только мы будем считать все положения точки M внутри прямоугольника $OEFD$ равновозможными, т.-е. будем считать плотность вероятности $\varphi(x, y)$ числом постоянным внутри прямоугольника $OEFD$.

Замечая, наконец, что отношение площади треугольника GHI к площади прямоугольника $OEFD$ равно

$$\frac{1}{2}\frac{AC}{BC},$$

приходим к тому же выражению искомой вероятности, которое было выведено раньше другим путем.

При других предположениях о плотности вероятности придем, конечно, к иным выводам. Например, если плотность вероятности для различных положений точки M будем считать пропорциональною произведению координат ее, то рассматриваемая нами вероятность выразится отношением интегралов

$$\frac{\int\limits_{x=0}^{x=a}\int\limits_{y=\frac{a+b}{2}-x}^{y=\frac{a+b}{2}} xy\,dy\,dx}{\int\limits_{x=0}^{x=a}\int\limits_{y=0}^{y=b} xy\,dx\,dy},$$

где буквой a мы обозначили длину AC и буквой b длину BC.

Так как

$$\int\limits_{x=0}^{x=a}\int\limits_{y=\frac{a+b}{2}-x}^{y=\frac{a+b}{2}} xy\,dy\,dx=\int\limits_{x=0}^{x=a}\frac{x^2(a+b-x)}{2}\,dx=\frac{a^3(4b+a)}{24}$$

и

$$\int\limits_{x=0}^{x=a}\int\limits_{y=0}^{y=b} xy\,dy\,dx=\frac{a^2b^2}{4},$$

то при новом предположении рассматриваемая нами вероятность оказывается равною

$$\frac{1}{2}\frac{a}{b}\cdot\frac{4b+a}{3b}$$

и потому отличается от полученной прежде множителем

$$\frac{4b+a}{3b}.$$

В частном случае, когда

$$AC = BC,$$

вероятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могут быть сторонами одного трехугольника, равна $\frac{1}{2}$ при первом предположении и $\frac{5}{6}$ при втором.

Задача 2. На прямой линии AB поставлены наудачу две точки, из которых ближайшую к A мы обозначим буквою P, а ближайшую к B обозначим буквою Q.

Требуется определить вероятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могут быть сторонами одного треугольника.

Решение. Рассматривая попрежнему

$$AP \text{ и } QB$$

как обыкновенные координаты

$$X,\ Y$$

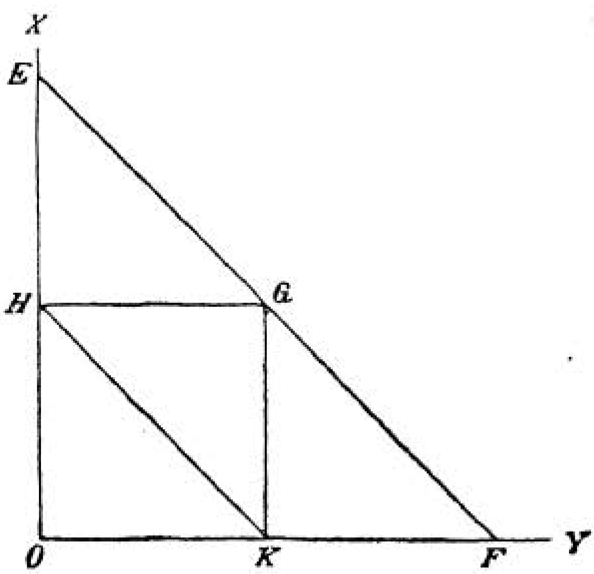
некоторой точки M на плоскости, имеем

$$X > 0,\ Y > 0,\ X + Y < AB.$$

Отсюда следует, что точка M лежит внутри треугольника EOF, ограниченного осями координат OX, OY и прямою EF, которая отсекает от координатных осей отрезки

$$OE,\ OF,$$

равные AB. Для всех положений точки M, внутри треугольника EOF, мы будем считать плотность вероятности одинаковою и соответственно этому скажем, что все случаи деления прямой AB двумя точками P и Q на три части представляются нам равновозможными.



При таких условиях разыскание искомой вероятности сводится к вычислению величины площади, внутри которой лежит точка M в тех и только в тех случаях, когда

$$AP,\ PQ \text{ и } QB$$

могут быть сторонами одного треугольника: отношение этой площади к площади треугольника EOF выразит искомую вероятность. С другой стороны, мы знаем, что

$$AP = X,\ PQ = AB - X - Y,\ QB = Y$$

могут быть сторонами одного треугольника тогда и только тогда, когда

$$X < \frac{AB}{2},\ Y < \frac{AB}{2},\ X + Y > \frac{AB}{2}.$$

При выполнении этих неравенств точка M лежит внутри треугольника HGK, ограниченного прямыми HG, GK, HK, которые соединяют средины прямых OE, EF и OF; и обратно для всех положений точки M

внутри треугольника HGK эти неравенства выполнены. Отсюда уже нетрудно заключить, что искомая вероятность выражается отношением

$$\frac{\Delta HGK}{\Delta OEF},$$

которое равно $\frac{1}{4}$.

Итак, если все случаи деления прямой AB на три части

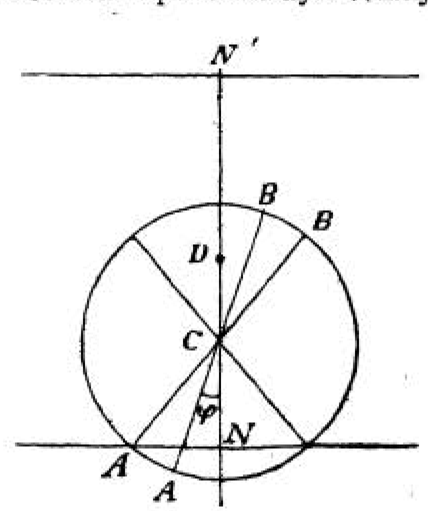
$$AP,\ PQ,\ QB$$

мы признаем равновозможными, в объясненном выше смысле, то вероятность, что из этих трех частей можно образовать треугольник, равна $\frac{1}{4}$.

§ 35. *Задача 3-ья (Бюффона).* На плоскость, покрытую рядом параллельных полос одной и той же ширины h, брошена наудачу бесконечно тонкая игла, длина которой l меньше ширины полос h. Найти вероятность, что эта игла не поместится вся в одной полосе, а пересечет одну из прямых, отделяющих две смежные полосы.

Решение. Рассматривая различные возможные положения иглы на плоскости, назовем буквою x расстояние средины иглы до ближайшей из параллельных прямых, образующих вышеупомянутые полосы; а буквою φ назовем величину острого угла, который образует игла с перпендикуляром к направлению полос. Все возможные значения x заключаются между 0 и $\frac{1}{2}h$; мы будем считать их равновозможными. Точно так же мы будем считать равновозможными и все возможные значения φ, которые заключаются между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Затем для большей наглядности выводов возьмем произвольную длину за единицу меры и будем рассматривать x и φ как обыкновенные прямолинейные прямоугольные координаты некоторой точки M плоскости.



$$DN' = DN = \frac{h}{2}$$

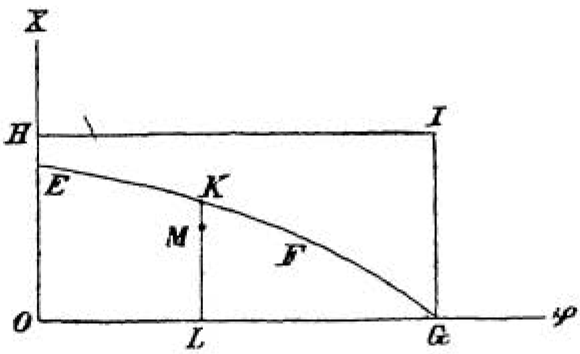
$$CN = x$$

$$\angle ACN = \varphi$$

$$AC = CB = \frac{l}{2}$$

Из чертежа видно, что игла не помещается внутри одной полосы в тех и только тех случаях, когда

$$x < \frac{l}{2} \cos \varphi.$$



$$OH = \frac{h}{2}$$

$$OE = \frac{l}{2}, \quad LM = x$$

$$OG = \frac{\pi}{2}, \quad OL = \varphi$$

Обращаясь ко второму чертежу, замечаем, что положения точки M, соответствующие только-что указанным случаям, отделяются от остальных возможных ее положений кривою линиею $EKFG$, которая определяется уравнением

$$x = \frac{l}{2} \cos \varphi,$$

и заполняют площадь $OEKFGO$, ограниченную осями координат и кривою $EKFG$. Следовательно, при сделанных предположениях искомая вероятность, что игла не поместится в одной полосе, выразится отношением площади $OEKFGO$ к площади прямоугольника $OHIG$, которое равно

$$\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cos \varphi \, d\varphi}{\frac{h}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{h\pi}.$$

Эта замечательная задача поставлена Бюффоном как первый пример исчисления вероятностей, требующий геометрических соображений. Краткое указание на нее можно найти в *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, за 1733 год; а ее решение, согласное с вышеприведенным, дано в сочинении Бюффона *Essai d'arithmétique morale*, которое появилось в 1777 году, как добавление к естественной истории Бюффона.

По поводу задачи Бюффона можно упомянуть о Цюрихском профессоре астрономе Р. Вольфе, который в течение многих лет производил ряд опытов* для выяснения вопроса о приложимости выводов исчисления вероятности к действительности, на основании теоремы Бернулли. Мы приведем результаты только тех опытов Р. Вольфа, которые относятся к задаче Бюффона. В опытах Р. Вольфа ширина полос была 45 миллиметров, а длина бросаемой иглы 36 миллиметров, и потому вероятность непомещения иглы в одной полосе, на основании формулы Бюффона, выражалась числом

$$\frac{72}{45\pi} \doteq 0{,}5093.$$

Игла была брошена на плоскость 5000 раз, при чем 2468 раз она поместилась вся внутри одной полосы, а 2532 раза отчасти в одной, отчасти в другой полосе; так что отношение числа бросаний, при которых игла не поместилась внутри одной полосы, к числу всех бросаний равно

$$\frac{2532}{5000} = 0{,}5064$$

и довольно близко подходит к указанной выше вероятности непомещения иглы в одной полосе.

В этом результате можно усмотреть некоторое подтверждение теоремы Бернулли опытом. Интересно заметить, что результатом опытов Р. Вольфа можно было бы воспользоваться и для вычисления числа π; стоит только, на основании теоремы Бернулли, допустить приближенное равенство

$$\frac{72}{45\pi} \doteq \frac{2532}{5000}.$$

Таким образом находим для π величину

$$3{,}159\ldots,$$

которая отличается от истинной менее чем на

$$0{,}02.$$

* R. Wolf. *Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit* (Mitth. der Natur. Ges. in Bern 1849—1853). Результаты дальнейших опытов Р. Вольфа опубликованы в Vierteljahrsschrift der natur. Ges. in Zürich за 1881, 1882, 1883 и 1893 годы.

Задача 4-ая. (Обобщение задачи Бюффона). На плоскость, покрытую попрежнему рядом параллельных полос одной и той же ширины h, брошена на удачу площадка, ограниченная выпуклым контуром и настолько малая, что ни в каком случае она не может лечь сразу в трех полосах, а должна поместиться вся в одной полосе, или отчасти в одной, отчасти в другой полосе. Найти вероятность, что эта площадка не поместится вся в одной полосе.

Решение. Начнем с предположения, что площадка, брошенная на плоскость, ограничена выпуклым многоугольником, и для определенности остановимся на случае пятиугольника. Стороны этого пятиугольника мы отличим друг от друга буквами a, b, c, ∂, e, которыми будем обозначать соответственным образом и длины сторон. Затем, чтобы привести новую задачу к прежней, заметим, что во всех случаях, когда площадка не поместится внутри одной полосы, две стороны контура будут пересечены одною из прямых, разграничивающих полосы.

На основании этого замечания мы разобьем событие, вероятность которого требуется найти, на 10 видов

$$ab,\ ac,\ a\partial,\ ae,\ bc,\ b\partial,\ be,\ c\partial,\ ce,\ \partial e;$$

вид ab состоит в пересечении сторон a и b одною из прямых, разграничивающих полосы; вид ac состоит в пересечении сторон a и c одною из тех же прямых и т. д.

Указанные 10 видов мы будем рассматривать как несовместимые, приписывая вероятность нуль всем случаям, когда одна из вершин пятиугольника лежит как-раз на границе двух полос. Обозначив вероятности событий

$$ab,\ ac,\ a\partial,\ ae,\ bc,\ b\partial,\ be,\ c\partial,\ ce,\ \partial e$$

символами

$$(ab),\ (ac),\ (a\partial),\ (ae),\ (bc),\ (b\partial),\ \ldots\ldots,$$

а искомую вероятность, что площадка ляжет отчасти в одной, отчасти в другой полосе, буквою P, мы на основании теоремы сложения вероятностей установим равенство

$$P=(ab)+(ac)+(a\partial)+(ae)+(bc)+(b\partial)+(be)+(c\partial)+(ce)+(\partial e).$$

В силу той же теоремы сложения вероятностей имеем

$$(a)=(ab)+(ac)+(a\partial)+(ae),$$

$$(b)=(ab)+(bc)+(b\partial)+(be),$$

$$(c)=(ac)+(bc)+(c\partial)+(ce),$$

$$(\partial)=(a\partial)+(b\partial)+(c\partial)+(\partial e),$$

$$(e)=(ae)+(be)+(ce)+(\partial e),$$

где (a) означает вероятность, что сторона a пройдет из одной полосы в другую, (b) означает подобную же вероятность для стороны b и т. д. Последние вероятности на основании вышеуказанного решения задачи Бюффона определяются равенствами

$$(a)=\frac{2a}{h\pi},\ (b)=\frac{2b}{h\pi},\ (c)=\frac{2c}{h\pi},\ (\partial)=\frac{2\partial}{h\pi},\ (e)=\frac{2e}{h\pi}.$$

Из вышеприведенных равенств находим, что сумма

$$(a)+(b)+(c)+(\partial)+(e)$$

равна как числу

$$\frac{2(a+b+c+\partial+e)}{h\pi},$$

так и удвоенной сумме

$$(ab)+(ac)+(a\partial)+(ae)+(bc)+(b\partial)+(be)+(c\partial)+(ce)+(\partial e),$$

которая выражает искомую вероятность P. Следовательно,

$$2P=\frac{2(a+b+c+\partial+e)}{h\pi}$$

и потому искомая вероятность P равна отношению

$$\frac{a+b+c+d+e}{h\pi}$$

длины контура к произведению ширины полос на число π.

И не трудно понять, что этот вывод относится не только к пятиугольнику, но и к любому выпуклому, достаточно малому многоугольнику. А затем, по способу пределов, можно распространить тот же вывод и на криволинейные контуры.

Итак, искомая нами вероятность, что брошенная площадка не поместится вся внутри одной полосы, выражается отношением длины контура площадки к произведению ширины полос на число π.

§ 36. *Задача 5-ая.* На плоскость, покрытую сетью равных треугольников, брошена бесконечно тонкая игла, длина которой l меньше каждой из высот треугольников. Найти вероятность, что эта игла поместится вся внутри одного треугольника.

Решение. Пусть ABC будет тот из треугольников сети, внутрь которого попала средина иглы; величины углов его обозначим буквами A, B, C, а величины сторон малыми буквами a, b, c.

Все положения средины иглы будем считать равновозможными при всяком направлении иглы.

Предполагая затем, что игла имеет какое-нибудь данное направление, проведем через вершины треугольника ABC, параллельно направлению иглы, прямые

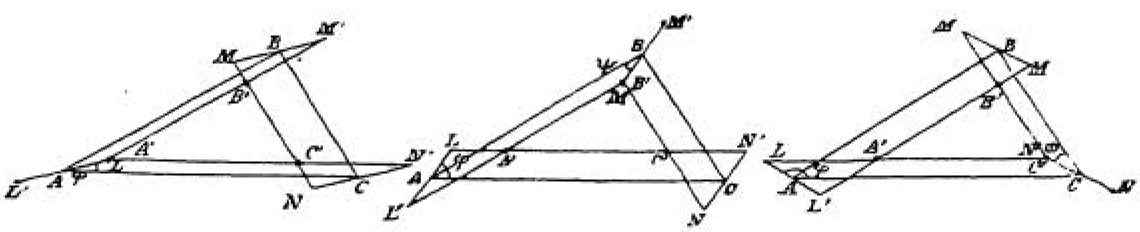
$$LAL',\ MBM',\ NCN',$$

которые в точках A, B, C делятся попалам и имеют ту же длину l, как и игла. Если концы этих прямых соединить надлежащим образом прямыми параллельными сторонам треугольника ABC, то получится внутри треугольника ABC другой треугольник $A'B'C'$, отделяющий для данного направления иглы те положения средины ее, при которых она лежит вся внутри ABC от остальных возможных положений средины иглы; так что в тех случаях, когда игла имеет рассматриваемое направление, средина ее должна лежать внутри $A'B'C'$ для того, чтобы вся игла помещалась внутри ABC.

Построение треугольника $A'B'C'$ видно из чертежей; из них видно также, что направление иглы можно определять углом

$$\varphi = \angle LAC,$$

который в случае первого чертежа лежит между 0 и A, в случае второго чертежа между A и $A+B$ и, наконец, в случае третьего чертежа между $A+B$ и $A+C+B=\pi$.



Кроме φ полезно рассматривать в случае второго чертежа угол

$$\psi=\angle MBA=\varphi-A,$$

и в случае третьего чертежа угол

$$\omega=\angle N'CB=\varphi-A-B.$$

Все направления иглы мы будем считать равновозможными в том смысле, что все величины φ от 0 до π будем рассматривать как равновозможные. При таких условиях искомая вероятность, что вся игла поместится внутри одного треугольника рассматриваемой сети, выразится интегралом

$$\int_0^\pi \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\cdot\frac{d\varphi}{\pi},$$

который равен сумме

$$\int_0^A \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\cdot\frac{d\varphi}{\pi}+\int_0^B \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\cdot\frac{d\psi}{\pi}+\int_0^C \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\cdot\frac{d\omega}{\pi}.$$

Обращаясь к интегралу

$$\int_0^A \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\frac{d\varphi}{\pi},$$

замечаем, что отношение площадей трехугольников

$$A'B'C' \text{ и } ABC$$

равно квадрату отношения их соответственных сторон, и из первого чертежа находим

$$A'C' = AC - C'N' = b - l\frac{\sin(C+\varphi)}{\sin C}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC} = \left(\frac{A'C'}{AC}\right)^2 = \left\{1 - \frac{l\sin(C+\varphi)}{b\sin C}\right\}^2$$

$$= 1 - \frac{2l\sin(C+\varphi)}{b\sin C} + \frac{l^2\sin^2(C+\varphi)}{b^2\sin^2 C}$$

$$= 1 - \frac{2l\sin(C+\varphi)}{b\sin C} + \frac{l^2[1-\cos 2(C+\varphi)]}{2b^2\sin^2 C}\Bigg\}$$

и потому

$$\int_0^A \frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\frac{d\varphi}{\pi} = \frac{A}{\pi}\left(1 + \frac{l^2a^2}{2Q^2}\right) - \frac{2la(\cos B + \cos C)}{Q\pi} +$$

$$+ \frac{l^2a^2(\sin 2B + \sin 2C)}{4Q^2\pi},$$

где Q означает удвоенную площадь треугольника ABC, т. е. равно

$$ab\sin C = ac\sin B = bc\sin A.$$

Подобным же образом, при помощи второго и третьего чертежа, находим

$$\int_0^B \frac{\Delta A'\,B'\,C'}{\Delta ABC}\frac{d\psi}{\pi}=\frac{B}{\pi}\left(1+\frac{l^2 b^2}{2Q^2}\right)-\frac{2lb\,(\cos A+\cos C)}{Q\pi}+$$
$$+\frac{l^2 b^2\,(\sin 2A+\sin 2C)}{4Q^2\pi}$$

и

$$\int_0^C \frac{\Delta A'\,B'\,C'}{\Delta ABC}\frac{d\omega}{\pi}=\frac{C}{\pi}\left(1+\frac{l^2 b^2}{2Q^2}\right)-\frac{2lc\,(\cos B+\cos A)}{Q\pi}+$$
$$+\frac{l^2 c^2\,(\sin 2B+\sin 2A)}{4Q^2\pi}.$$

Остается сложить найденные величины трех интегралов, и мы получим выражение искомой вероятности в виде алгебраической суммы

$$1+\frac{l^2}{2\pi}\frac{Aa^2+Bb^2+Cc^2}{Q^2}-$$
$$-\frac{2l}{\pi}\frac{a\,(\cos B+\cos C)+b\,(\cos A+\cos C)+c\,(\cos A+\cos B)}{Q}+$$
$$+\frac{l^2}{4\pi}\frac{a^2\,(\sin 2B+\sin 2C)+b^2\,(\sin 2A+\sin 2C)+c^2\,(\sin 2A+\sin 2B)}{Q^2}.$$

Для упрощения полученного выражения обратим внимание на простые равенства

$$a\cos B+b\cos A=c,\quad a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=2Q,$$

$$a\cos C+c\cos A=b,\quad a^2\sin 2C+c^2\sin 2A=2Q,$$

$$b\cos C+c\cos B=a,\quad b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2Q,$$

в силу которых должно быть

$$a(\cos B+\cos C)+b(\cos A+\cos C)+c(\cos A+\cos B)=a+b+c$$

и

$$a^2(\sin 2B+\sin 2C)+b^2(\sin 2A+\sin 2C)+c^2(\sin 2A+\sin 2B)=6Q.$$

Пользуясь этими равенствами, находим, что искомая вероятность может быть представлена алгебраическою суммою

$$1+\frac{l^2(Aa^2+Bb^2+Cc^2)}{2\pi Q^2}-\frac{l(4a+4b+4c-3l)}{2\pi Q}.$$

В частном случае, когда сеть состоит из равносторонних треугольников, имеем

$$A=B=C=\frac{\pi}{3},\ a=b=c,\ Q=a^2\frac{\sqrt{3}}{2};$$

тогда найденное нами выражение вероятности, что игла поместится вся внутри одного треугольника, приводится к следующему:

$$1+\frac{2}{3}\left(\frac{l}{a}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{l}{a}\left(4-\frac{l}{a}\right).$$

Этот частный случай задачи был рассмотрен Буняковским в мемуаре *О приложении анализа вероятностей к определению приближенных величин трансцендентных чисел* * и в сочинении *Основания математической теории вероятностей*.

Но благодаря неудачному выбору порядка интегрирования вычисления Буняковского отличаются значительною сложностью, которой и следует приписать погрешность, вкравшуюся в окончательный результат этих вычислений.

* Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VI Série Sciences Mathém. et Phys. T. I. (III) 1837. Основания математической теории вероятностей, стр. 137 — 143.

Полагая для примера $l=\frac{a}{\sqrt{3}}$, получим для искомой вероятности величину

$$1+\frac{2}{9}-\frac{1}{\pi}\left(4-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \doteq 0{,}1328.$$

§ 37. *Задача 6-ая. О сумме независимых векторов.* Ограничиваясь векторами на плоскости, положим, что они определяются двумя системами обыкновенных чисел

$$X,\ Y,\ Z,\ \ldots,\ W,$$

$$X',\ Y',\ Z',\ \ldots,\ W',$$

равносильными одной системе комплексных чисел

$$X+X'i,\ Y+Y'i,\ \ldots,\ W+W'i;$$

сумма рассматриваемых векторов определяется двумя обыкновенными числами

$$X+Y+Z+\ldots+W \text{ и } X'+Y'+Z'+\ldots+W'.$$

Называя рассматриваемые векторы независимыми, мы предполагаем, что в системе

$$X,\ X',\ Y,\ Y',\ \ldots,\ W,\ W'$$

могут быть связанными только числа, обозначенные нами одинаковыми буквами. Обозначим, подобно тому как в § 20, буквами $\rho, \sigma, \tau, \ldots, \omega$ вероятности равенств

$$X+X'i=x+x'i,\ Y+Y'i=y+y'i,\ \ldots,\ W+W'i=w+w'i,$$

так что

$$\Sigma\rho=\Sigma\sigma=\Sigma\tau=\ldots=\Sigma\omega=1.$$

Затем положим

$$\Sigma\rho x = a,\ \Sigma\sigma y = b, \ldots\ldots,\ \Sigma\omega w = l,$$

$$\Sigma\rho(x-a)^2 = a_1,\ \Sigma\sigma(y-b)^2 = b_1, \ldots\ldots,\ \Sigma\omega(w-l)^2 = l_1,$$

$$\Sigma\rho x' = a',\ \Sigma\sigma y' = b', \ldots\ldots,\ \Sigma\omega w' = l',$$

$$\Sigma\rho(x'-a')^2 = a'_1,\ \Sigma\sigma(y'-b')^2 = b'_1, \ldots\ldots,\ \Sigma\omega(w'-l')^2 = l'_1,$$

$$\Sigma\rho(x-a)(x'-a') = \alpha,\ \Sigma\sigma(y-b)(y'-b') = \beta, \ldots\ldots,\ \Sigma\omega(w-l)(w'-l') = \lambda;$$

эти числа мы будем считать данными. Наша задача состоит в приближенном вычислении вероятности, что суммы

$$X + Y + \ldots\ldots + W,\ X' + Y' + \ldots\ldots + W'$$

удовлетворяют некоторым неравенствам, при чем для возможной простоты исследования мы остановимся на таких неравенствах

$$t_1 < X + Y + \ldots\ldots + W - a - b - \ldots\ldots - l < t$$

и

$$t'_1 < X' + Y' + \ldots\ldots + W' - a' - b' - \ldots\ldots - l' < t',$$

где t_1, t, t'_1, t' мы считаем числами данными.

Решение. Пользуясь, подобно прежнему, множителем Дирихле, представляем искомую вероятность в виде двукратного интеграла

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{\delta\xi}{2}\sin\frac{\delta'\eta}{2}}{\xi\eta}\,\Omega e^{-\frac{is\xi}{2}-\frac{is'\eta}{2}}\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$\delta = t - t_1,\ \delta' = t' - t'_1,\ s = t + t_1,\ s' = t' + t'_1$$

и

$$\Omega = \Sigma\rho\sigma\ldots\ldots\omega e^{i(x+\ldots\ldots+w-a-\ldots\ldots-l)\xi + i(x'+\ldots\ldots+w'-a'-\ldots\ldots-l')\eta}$$

$$= \Sigma\rho e^{i(x-a)\xi + i(x'-a')\eta}\ \Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi + i(y'-b')\eta}\ldots\ldots$$

Разлагая затем суммы

$$\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi+i(x'-a')\eta},\ \Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi+i(y'-b')\eta},\ \ldots.$$

в ряды по возрастающим степеням ξ и η, получаем

$$\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi+i(x'-a')\eta}=1-\frac{a_1\xi^2+2\alpha\xi\eta+a'_1\eta^2}{2}+\ldots.$$

$$\Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi+i(y'-b')\eta}=1-\frac{b_1\xi^2+2\beta\xi\eta+b'_1\eta^2}{2}+\ldots.$$

. . . .

$$\Sigma\omega e^{i(w-l)\xi+i(w'-l')\eta}=1-\frac{l_1\xi^2+2\lambda\xi\eta+l'_1\eta^2}{2}+\ldots,$$

откуда посредством умножения выводим

$$\Omega=1-\frac{A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2}{2}+\ldots.$$

где

$$A=a_1+b_1+\ldots+l_1,\ B=\alpha+\beta+\ldots+\lambda,\ C=a'_1+b'_1+\ldots+l'_1.$$

Из указанного разложения Ω по возрастающим степеням ξ и η заключаем, что эта функция мало отличается от показательной

$$e^{-\frac{A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2}{2}}.$$

Заменяя на этом основании Ω показательной функцией, получаем для искомой вероятности приближенное выражение в виде двукратного интеграла

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{\delta\xi}{2}\sin\frac{\delta'\eta}{2}}{\eta\xi}e^{-\frac{A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2}{2}-\frac{si\xi}{2}-\frac{s'i\eta}{2}}d\eta d\xi,$$

который мы для краткости обозначим одною буквою P.

Для исключения введенных нами вспомогательных чисел ξ и η рассматриваем P как функцию переменных t и t' и составляем производные

$$\frac{dP}{dt},\quad \frac{d^2P}{dt\,dt'}.$$

Мы можем таким образом установить формулы

$$P=\int_{t_1}^{t}\frac{dP}{dt}\,dt=\int_{t_1}^{t}\int_{t'_1}^{t'}\frac{d^2P}{dt\,dt'}\,dt\,dt'$$

и

$$\frac{d^2P}{dt\,dt'}=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2}{2}-it\xi-it'\eta}\,d\eta\,d\xi.$$

Что же касается последнего двукратного интеграла, то, применяя к нему два раза известную формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-p\zeta^2-2q\zeta}\,d\xi=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{\frac{q^2}{p}},$$

где p вещественное положительное число, а q любое комплексное число, без большого труда находим

$$\frac{d^2P}{dt\,dt'}=\frac{1}{2\pi\sqrt{AC-B^2}}\,e^{-\frac{Ct^2-2Btt'+At'^2}{2(AC-B^2)}}.$$

Таким образом для искомой вероятности неравенств

$$t_1<X+Y+\ldots+W-a-b-\ldots-l<t$$

и

$$t'_1<X'+Y'+\ldots+W'-a'-b'-\ldots-l'<t'$$

мы получаем довольно простое приближенное выражение

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{AC-B^2}}\int_{t_1}^{t}\int_{t'_1}^{t'} e^{-\frac{Ct^2-2Btt'+At'^2}{2(AC-B^2)}}\,dt\,dt'.$$

Принимая же во внимание, что всякую площадь можно рассматривать как предел суммы площадей прямоугольников, стороны которых сохраняют два определенных направления, заключаем, что и вообще двукратный интеграл

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{AC-B^2}}\int\int e^{-\frac{Ct^2-2Btt'+At'^2}{2(AC-B^2)}}\,dt\,dt',$$

распространенный на все значения t и t', удовлетворяющие каким-либо определенным неравенствам, представляет приближенным образом вероятность, что таким неравенствам удовлетворяют величины

$$t = X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l$$

и

$$t' = X' + Y' + \ldots + W' - a' - b' - \ldots - l'.$$

Вопрос о погрешности этого приближенного вывода остается открытым.

§ 38. В заключение главы остановимся на связанных величинах

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$

для которых плотность вероятности пропорциональна показательной функции $e^{-\varphi}$, где φ положительная квадратичная функция:

$$\varphi = a_{1,1}\,x_1^2 + a_{2,2}\,x_2^2 + \ldots + a_{n,n}\,x_n^2 + 2a_{1,2}\,x_1x_2 + \ldots\ldots;$$

так что вероятность выполнения величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ каких-либо неравенств выражается интегралом

$$C\int e^{-\varphi}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

распространенным на все значения $x_1, x_2, \ldots x_n$, удовлетворяющие этим неравенствам. Начнем со случая двух величин x_1, x_2. При данных коэффициентах $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ формы $\varphi = a_{1,1} x_1^2 + 2a_{1,2} x_1 x_2 + a_{2,2} x_2^2$ постоянный множитель C определяется равенством

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a_{1,1} x_1^2 + 2a_{1,2} x_1 x_2 + a_{2,2} x_2^2)} \, dx_1 \, dx_2 = 1.$$

А так как простая подставка

$$x_1 + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2 = u$$

и два интегрирования дают нам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi} \, dx_1 \, dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a_{1,1} u^2 - \frac{a_{2,2} a_{1,1} - a_{1,2}^2}{a_{1,1}} x_2^2} \, du \, dx_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a_{1,1}}} \sqrt{\frac{a_{1,1} \pi}{a_{2,2} a_{1,1} - a_{1,2}^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a_{2,2} a_{1,1} - a_{1,2}^2}},$$

то в силу только-что приведенного равенства должно быть

$$C = \frac{\sqrt{a_{2,2} a_{1,1} - a_{1,2}^2}}{\pi}.$$

Следовательно, вероятность, что x_1, x_2 удовлетворяют каким-либо определенным неравенствам, выражается в данном случае интегралом

$$\frac{\sqrt{a_{2,2} a_{1,1} - a_{1,2}^2}}{\pi} \int e^{-(a_{1,1} x_1^2 + 2a_{1,2} x_1 x_2 + a_{2,2} x_2^2)} \, dx_1 \, dx_2,$$

распространенным на всю совокупность значений x_1, x_2, удовлетворяющих этим неравенствам; в частности вероятность, что x_1 лежит между данными пределами x', x'', равна

$$\frac{\sqrt{a_{2,2}a_{1,1}-a_{1,2}^2}}{\pi}\int\limits_{x'}^{x''}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi}\,dx_2\,dx_1 =$$

$$=\sqrt{\frac{a_{2,2}a_{1,1}-a_{1,2}^2}{a_{2,2}\pi}}\int\limits_{x'}^{x''} e^{-\frac{1}{2c_{1,1}}x_1^2}\,dx_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{t'}^{t''} e^{-t^2}\,dt,$$

где $c_{1,1}$ означает математическое ожидание x_1^2 и связано с коэффициентами формы φ простою формулою

$$c_{1,1}=\frac{a_{2,2}}{2(a_{2,2}a_{1,1}-a_{1,2}^2)},$$

пределы же t', t'' связаны с x', x'' равенствами

$$t'\sqrt{2c_{1,1}}=x' \quad , \quad t''\sqrt{2c_{1,1}}=x''.$$

Одинаковым образом для вероятности, что x_2 лежит в пределах

$$t'\sqrt{2c_{2,2}} \quad , \quad t''\sqrt{2c_{2,2}},$$

где $c_{2,2}$ означает математическое ожидание x_2^2, получим ту же величину

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{t'}^{t''} e^{-t^2}\,dt,$$

при чем $c_{2,2}$ связано с $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ формулою

$$c_{2,2}=\frac{a_{1,1}}{2(a_{2,2}a_{1,1}-a_{1,2}^2)}.$$

К выражениям математических ожиданий x_1^2, x_2^2 через $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ можно придти и другим путем; а именно, если в найденном нами равенстве

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi}\, dx_1\, dx_2 = \frac{\pi}{\sqrt{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2}} = Q$$

рассматривать $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{1,2}$ как независимые переменные, то дифференцирование по ним доставит три новых равенства

$$-\frac{dQ}{da_{1,1}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi} x_1^2\, dx_1\, dx_2 = \frac{\pi a_{2,2}}{2(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{dQ}{da_{1,2}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi} x_1 x_2\, dx_1\, dx_2 = \frac{-\pi a_{1,2}}{2(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$-\frac{dQ}{da_{2,2}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi} x_2^2\, dx_1\, dx_2 = \frac{\pi a_{1,1}}{2(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

на основании которых немедленно находим

$$\text{м. о. } x_1^2 = c_{1,1} = \frac{a_{2,2}}{2(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2)}, \quad \text{м. о. } x_1 x_2 = c_{1,2} =$$

$$= \frac{-a_{1,2}}{2(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2)}, \quad c_{2,2} = \frac{a_{1,1}}{2(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2)}.$$

Отсюда вытекают и обратные формулы для вычисления коэффициентов $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ по данным математическим ожиданиям x_1^2, $x_1 x_2$ x_2^2:

$$a_{1,1} = \frac{c_{2,2}}{2(c_{1,1}c_{2,2} - c_{1,2}^2)}, \quad a_{1,2} = \frac{-c_{1,2}}{2(c_{1,1}c_{2,2} - c_{1,2}^2)},$$

$$a_{2,2} = \frac{c_{1,1}}{2(c_{1,2}c_{2,2} - c_{1,2}^2)}.$$

Докажем теперь следующее предложение.

Если величины

$$x_1,\ x_2, \ldots \ldots x_n$$

связаны так, как указано в начале этого параграфа, то для любых данных чисел t' и $t'' > t'$ вероятность неравенств

$$t'\sqrt{2g} < x_1 + x_2 + \ldots + x_n < t''\sqrt{2g},$$

где

$$g = \text{м. о.}\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2,$$

точно равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-t^2}\, dt.$$

Для случая двух величин мы докажем это предложение тем приемом, который в § 20 доставил нам приближенное выражение вероятности в виде того же интеграла. Пользуясь прерывным множителем Дирихле, мы представим рассматриваемую вероятность неравенств

$$t'\sqrt{2g} < x_1 + x_2 < t''\sqrt{2g}$$

трехкратным интегралом

$$\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a_{1,1}x_1^2 - 2a_{1,2}x_1x_2 - a_{2,2}x_2^2 + i(x_1+x_2)\xi}\, R\, dx_1\, dx_2\, d\xi,$$

где

$$R = \frac{\sqrt{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2}}{\pi^2}\, e^{-i(t'+t'')\xi\sqrt{2g}}\, \frac{\sin\dfrac{t''-t'}{2}\,\xi\sqrt{2g}}{\xi}.$$

Выполняя интегрирование по x_1 и x_2, на основании упомянутой уже в § 37 общей формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\zeta^2-2q\zeta}\,d\zeta=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{\frac{q^2}{p}},$$

приводим этот трехкратный интеграл сначала к двухкратному

$$\sqrt{\frac{\pi}{a_{1,1}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{-\frac{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}^2}{a_{1,1}}x_2^2+\frac{i(a_{1,1}-a_{1,2})x_2\xi}{a_{1,1}}-\frac{\xi^2}{4a_{1,1}}}R\,dx_2\,d\xi,$$

а затем к простому

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a_{1,1}-2a_{1,2}+a_{2,2}}{4(a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}^2)}\xi^2-\frac{i(t'+t'')\xi\sqrt{2g}}{2}}\frac{\sin\frac{t''-t'}{2}\xi\sqrt{2g}}{\xi}\,d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}g\xi^2-\frac{1}{2}i(t'+t'')\xi\sqrt{2g}}\frac{\sin\frac{1}{2}(t''-t')\sqrt{2g}}{\xi}\,d\xi,$$

где

$$g=\text{м. о.}(x_1+x_2)^2=c_{1,1}+2c_{2,2}+c_{2,2}=\frac{a_{1,1}-2a_{1,2}+a_{2,2}}{2(a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}^2)}.$$

А этот последний интеграл уже встречался нам в § 20, где и было установлено, что он действительно равен

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t'}^{t''} e^{-t^2}\,dt.$$

Тем же путем можно придти к теореме при $n=3, 4, \ldots$, но с увеличением n вычисления все усложняются. Короче и проще другой путь, который мы сначала проследим также при $n=2$. Полагая $x_1+x_2=u$, мы приводим интеграл

$$C\int\int e^{-\varphi}\,dx_1\,dx_2 \quad \text{к} \quad C\int\int e^{-\varphi}\,du\,dx_2,$$

где

$$\varphi=a_{1,1}x_1^2+2a_{1,2}x_1x_2+a_{2,2}x_2^2=a_{1,1}u^2+2(a_{1,2}-a_{1,1})ux_2+$$
$$+(a_{1,1}-2a_{1,2}+a_{2,2})x_2^2;$$

следовательно, вероятность неравенств

$$t'\sqrt{2g}<x_1+x_2=u<t''\sqrt{2g}$$

равна

$$\frac{\sqrt{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}^2}}{\pi}\int\limits_{u=t'\sqrt{2g}}^{u=t''\sqrt{2g}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\varphi}\,du\,dx_2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2g\pi}}\int\limits_{t'\sqrt{2g}}^{t''\sqrt{2g}}e^{-\frac{u^2}{2g}}\,du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{t'}^{t''}e^{-t^2}\,dt,$$

при

$$g=\frac{a_{1,1}-2a_{1,2}+a_{2,2}}{2(a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}^2)}.$$

Для доказательства высказанного предложения, в общем случае, нет даже надобности выполнять, какие бы то ни было, вычисления; все сводится к такому рассуждению. Полагая

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=u,$$

вводим вместо x_1 величину u; таким образом находим, что вероятность неравенств

$$t'\sqrt{2g} < x_1 + x_2 + \ldots + x_n = u < t''\sqrt{2g}$$

выражается кратным интегралом

$$C \int\limits_{u=t'\sqrt{2g}}^{u=t''\sqrt{2g}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int e^{-\varphi}\, du\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n,$$

который по выполнении интегрирований относительно переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$ приводится к виду

$$D \int\limits_{t'\sqrt{2g}}^{t''\sqrt{2g}} e^{-\frac{u^2}{2h}}\, du;$$

и, согласно объяснениям § 33, должно быть

$$D = \frac{1}{\sqrt{2h\pi}},\ h = \text{м. о. } u^2 = g.$$

Итак, вероятность неравенств

$$t'\sqrt{2g} < x_1 + x_2 + \ldots + x_n < t''\sqrt{2g}$$

равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{t'}^{t''} e^{-t^2}\, dt,$$

в чем и состоит наше предложение.

Обращаясь к определению по коэффициентам $a_{i,k} = a_{k,i}$ формы φ постоянного множителя C выражения вероятности

$$C \int e^{-\varphi}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

и математических ожиданий $c_{l,m}=c_{m,l}$ произведений $x_l\, x_m$ в общем случае, при любом n, мы должны ввести в наши вычисления определитель формы φ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

и его миноры первого порядка, которые мы обозначим символами $\Delta_{i,k}$, указывая значками i,k вычеркиваемые столбец и строку или, что все равно, строку и столбец, так что

$$a_{1,k}\Delta_{1,k}+a_{2,k}\Delta_{2,k}+\ldots+a_{n,k}\Delta_{n,k}=\Delta$$

и

$$a_{1,k}\Delta_{1,j}+a_{2,k}\Delta_{2,j}+\ldots+a_{n,k}\Delta_{n,j}=0 \text{ при } j \text{ не } = k.$$

Если все коэффициенты $a_{i,k}=a_{k,i}$ формы φ рассматривать как независимые переменные, то, как нетрудно видеть, эти миноры можно выразить производными

$$\Delta_{i,i}=\frac{d\Delta}{da_{i,i}},\ \Delta_{i,k}=\frac{1}{2}\frac{d\Delta}{da_{i,k}}.$$

Наша задача требует вычисления интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int e^{-\varphi}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

которое легко выполнить, если линейной подстановкой

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3+\ldots+\alpha_n x_n \\ z_2 &= \quad\quad x_2+\beta_3 x_3+\ldots+\beta_n x_n \\ z_3 &= \quad\quad\quad\quad x_3+\ldots+\gamma_n x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

привести форму φ к виду

$$\varphi = b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \dots + b_n z_n^2,$$

не содержащему произведений $z_i z_k$, с различными значками i, k.

Согласно известному предложению теории квадратичных форм, определитель формы при такой подстановке не изменяется; следовательно,

$$\Delta = b_1 b_2 \dots b_n.$$

Вместе с тем рассматриваемый интеграл приводится к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int e^{-b_1 z_1^2 - b_2 z_2^2 \dots - b_n z_n^2}\, dz_1\, dz_2 \dots dz_n,$$

где все переменные $z_1, z_2, \dots, z_n$ отделены друг от друга, и каждое интегрирование выполняется независимо друг от друга; находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int e^{-b_1 z_1^2 - b_2 z_2^2 \dots - b_n z_n^2}\, dz_1\, dz_2 \dots dz_n = \sqrt{\frac{\pi^n}{b_1 b_2 \dots b_n}}$$

и потому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{-\varphi}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n = \sqrt{\frac{\pi^n}{\Delta}},$$

что дает для постоянного C такое выражение

$$C = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi^n}}$$

Рассматривая затем коэффициенты $a_{i,k} = a_{k,i}$ формы φ как независимые переменные и производя дифференцирование кратного интеграла и равного ему выражения $\sqrt{\frac{\pi^n}{\Delta}}$, по каждому из этих коэффициентов, как мы делали уже при $n=2$, получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int e^{-\varphi}\, x_i^2\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^n}{\Delta^3}}\frac{d\Delta}{da_{i,i}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^n}{\Delta^3}}\Delta_{i,i}$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi}\, x_i\, x_k\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi^n}{\Delta^3}}\frac{d\Delta}{da_{i,k}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^n}{\Delta^3}}\Delta_{i,k},$$

откуда по прибавлении множителя $C=\sqrt{\frac{\Delta}{\pi^n}}$ выводим

$$\text{м. о. } x_i^2 = c_{i,i} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta_{i,i}}{\Delta}, \quad \text{м. о. } x_i x_k = c_{i,k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta_{i,k}}{\Delta};$$

так по данным $a_{i,k}$ определяются все математические ожидания квадратов величин x_i и произведений их по два. Получаемые нами формулы дают возможность решить и обратную задачу: по данным $c_{i,n}$ найти все коэффициенты формулы φ. Для этого следует только вспомнить некоторые формулы теории определителей. А именно, формула умножения определителей, в силу вышеупомянутых равенств,

$$a_{1,k}\Delta_{1,k} + a_{2,k}\Delta_{2,k} + \ldots + a_{n,k}\Delta_{n,k} = \Delta$$

$$a_{1,k}\Delta_{1,j} + a_{2,k}\Delta_{2,j} + \ldots + a_{n,k}\Delta_{n,j} = 0 \text{ [при } j \text{ не} = k,$$

дает

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta_{1,1}, & \Delta_{1,2}, & \ldots, & \Delta_{1,n} \\ \Delta_{2,1}, & \Delta_{2,2}, & \ldots, & \Delta_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{n,1}, & \Delta_{n,2}, & \ldots, & \Delta_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta, 0, 0 \ldots, & 0 \\ 0, \Delta, 0, \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0, 0, 0, \ldots, & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^n,$$

отсюда по замене $\Delta_{i,k}$ равными им произведениями $2\Delta c_{i,k}$ выводим

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, & \ldots, & c_{1,n} \\ c_{2,1}, & c_{2,2}, & \ldots, & c_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, & \ldots, & c_{n,n} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n}.$$

Та же замена $\Delta_{i,k}$ произведениями $2\Delta c_{i,k}$ преобразует равенства, связывающие элементы определителя Δ с его минорами, в следующие

$$a_{1,k}c_{1,k} + a_{2,k}c_{2,k} + \ldots + a_{n,k}c_{n,k} = \frac{1}{2}$$

$$a_{1,k}c_{1,j} + a_{2,k}c_{2,j} + \ldots + a_{n,k}c_{n,j} = 0 \quad \text{при } j \text{ не} = k,$$

которые при данных значениях математических ожиданий всех квадратов величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и их произведений по два доставляют для всякого k совокупность n уравнений первой степени, определяющую неизвестные $a_{1,k}, a_{2,k}, \ldots, a_{n,k}$:

$$a_{1,k}c_{1,j} + a_{2,k}c_{2,j} + \ldots + a_{n,k}c_{n,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ при } j = k \\ 0 \text{ при } j \text{ не} = k \end{cases}$$

Решая ее получаем

$$a_{i,k}=\frac{1}{2}\frac{\overline{\Delta}_{i,k}}{\overline{\Delta}},$$

где

$$\overline{\Delta}=\begin{vmatrix} c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{1,n} \\ c_{2,1}, c_{2,2}, \ldots, c_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n,1}, c_{n,2}, \ldots, c_{n,n} \end{vmatrix}$$

а $\overline{\Delta}_{i,k}$ минор этого определителя, соответствующий элементу $c_{i,k}$. Таким образом по данным математическим ожиданиям квадратов величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и их произведений по два вычисляются все коэффициенты формы φ и постоянный множитель

$$C=\sqrt{\frac{\Delta}{\pi^n}}=\sqrt{\frac{1}{2^n\overline{\Delta}\,\pi^n}}.$$

Интересно заметить, что связь между коэффициентами формы φ и математическими ожиданиями произведений $x_i x_j$ имеет взаимный характер: как величины $c_{i,k}$ выражаются через $a_{i,k}$, совершенно так же величины $a_{i,k}$ выражаются через $c_{i,k}$.

ЛИТЕРАТУРА.

A. Bravais. Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point (Mém. présentés par div. sav. à l'Acad. Roy. des Sciences de l'Inst. de France. T. IX, 1846).

W. Crofton. On the Theory of Local Probability, applied to Straight Lines drawn at random in a plane, the method used being also extended to the proof of certain new Theorems in the Integral Calculus (Philos. Trans. London. CLVIII, 1868).

Ch. M. Schols. Théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace (Ann. de l'Ecole polyt. de Delft. T. II, 1886).

Ch. M. Schols. Démonstration directe de la loi limite pour les erreurs dans le plan et dans l'espace (Ann. de l'Ec. pol. de Delft. T. III, 1887).

E. Czuber. Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte. 1884.

Karl Pearson. Mathematical Contributions to the Theory of Evolution (Philos. Trans. London. Vol. 187 A, 1896).

G. Udny Yule. An Introduction to the Theory of Statistics. 1912.

Е. Слуцкий. Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения. Киев. 1912.

ГЛАВА VI.

Вероятности гипотез и будущих событий.

§ 39. В этой главе мы займемся рассмотрением ряда вопросов об изменении вероятности с изменением данных. Наши выводы будут основаны на следующей теореме, которая представляет прямое следствие теоремы умножения вероятностей и может быть названа *теоремой деления* вероятностей.

Теорема. *Вероятность события B, когда известно существование события A, равна отношению вероятности появления обоих событий A и B, вместе, к вероятности события A.*

Эта теорема выражается формулою

$$(B, A) = \frac{(AB)}{(A)}, \tag{14}$$

которая вытекает из установленного ранее равенства

$$(AB) = (A)\,(B, A).$$

Теорему деления вероятностей мы применим прежде всего к решению такой задачи.

Задача 1-ая. Пусть, при существовании события A, события

$$B_1, B_2, \ldots, B_i, \ldots, B_n$$

единственно возможны и несовместимы. Пусть далее

$$(B_1), (B_2), \ldots, (B_i), \ldots, (B_n)$$

означают их вероятности, пока существование или несуществование события A остается неизвестным; а символ

$$(A, B_i)$$

означает вероятность события A, когда установлено существование события B_i; пусть, наконец, символ

$$(B_i, A)$$

означает вероятность события B_i, когда установлено уже существование события A. По данным

$$(B_1), (B_2), \ldots, (B_n),$$

$$(A, B_1), (A, B_2), \ldots, (A, B_n)$$

требуется вычислить

$$(B_1, A), (B_2, A), \ldots, (B_n, A).$$

Решение. Согласно теореме деления вероятностей имеем

$$(B_i, A) = \frac{(AB_i)}{(A)}.$$

С другой стороны, по теореме умножения вероятностей находим

$$(AB_i) = (B_i)\,(A, B_i).$$

Разбивая, наконец, событие A на виды

$$AB_1, AB_2, \ldots, AB_n,$$

в силу теоремы сложения вероятностей получаем

$$(A) = (AB_1) + (AB_2) + \ldots + (AB_n).$$

Следовательно, имеем

$$(A) = (B_1)(A, B_1) + (B_2)(A, B_2) + \ldots + (B_n)(A, B_n)$$

и, наконец,

$$(15) \quad (B_i, A) = \frac{(B_i)(A, B_i)}{(B_1)(A, B_1) + (B_2)(A, B_2) + \ldots + (B_n)(A, B_n)}.$$

Рассматривая события

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

как гипотезы, придуманные для объяснения появившегося события A, мы можем назвать последнюю формулу, в отличие от других, *формулою для определения вероятностей гипотез*. Она известна также под именем *формулы Байеса*.

Присоединим теперь к событиям

$$A, B_1, B_2, \ldots B_n$$

новое событие C и поставим следующую задачу.

Задача 2-ая. По данным

$$(B_1), (B_2), \ldots, (B_n),$$

$$(A, B_1), (A, B_2), \ldots (A, B_n),$$

$$(C, AB_1), (C, AB_2), \ldots, (C, AB_n)$$

найти (C, A), *т. е. определить вероятность события* C, *когда существование события* A *установлено.*

Решение. По условиям вопроса, события

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

должны быть единственно возможными и несовместимыми при существовании события A. Поэтому при существовании события A мы можем разбить событие C на несовместимые виды

$$CB_1,\ CB_2, \ldots,\ CB_n$$

и в силу теоремы сложения вероятностей имеем

$$(C, A) = (CB_1, A) + (CB_2, A) + \ldots + (CB_n, A).$$

Применяя затем к слагаемым последней суммы теорему умножения вероятностей, получаем

$$(CB_i, A) = (B_i, A)(C, AB_i);$$

наконец, для выражения (B_i, A) нами была уже установлена формула

$$(B_i, A) = \frac{(B_i)(A, B_i)}{(B_1)(A, B_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)},$$

которая решает предыдущую задачу. Следовательно,

$$(CB_i, A) = \frac{(B_i)(A, B_i)(C, AB_i)}{(B_1)(A, B_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)}$$

и

$$(16) \quad (C, A) = \frac{(B_1)(A, B_1)(C, AB_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)(C, AB_n)}{(B_1)(A, B_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)}.$$

Рассматривая событие A как случившееся, а C как возможное будущее событие, мы можем назвать последнюю формулу, в отличие от других, *формулою для выражения вероятностей будущих событий*.

Важно отметить одно упрощение этой формулы. События C и A, конечно, предполагаются зависящими друг от друга, но они могут становиться независимыми по выяснении, какое именно из событий

$$B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n$$

имеет место. Если события C и A не зависят друг от друга, когда выяснено, какое именно из событий

$$B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n$$

имеет место, то каждая из вероятностей

$$(C, AB_i),$$

которые входят в рассматриваемую нами формулу, совпадает с соответствующею вероятностью

$$(C, B_i)$$

быть событию C при существовании B_i. Тогда найденная выше формула принимает более простой вид:

$$(17) \qquad (C, A) = \frac{(B_1)(A, B_1)(C, B_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)(C, B_n)}{(B_1)(A, B_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)}.$$

Для пояснения установленных формул рассмотрим ряд простых частных примеров.

Первый пример. Взят один из 14 сосудов, о которых известно, что 9 из них содержат по 5 белых и по 8 черных шаров, а остальные 5 содержат по 11 белых и по 2 черных шара, и что ни один из них не содержит иных шаров, кроме белых и черных. Из этого сосуда вынут один шар и оказался белым.

Спрашивается, как велика, при таких данных, вероятность, что взят был один из девяти сосудов, содержащих по 5 белых и по 8 черных шаров?

Затем требуется определить вероятность, что второй шар, вынутый из того же сосуда, будет также белым.

Применение формул. Пусть событие B_1 состоит в том, что взятый сосуд содержал 5 белых и 8 черных шаров, а событие B_2 в том, что взятый сосуд содержал 11 белых и 2 черных шара. Пусть далее событие A состоит в белом цвете первого вынутого шара, а событие C

в белом цвете второго вынутого шара. Тогда, придерживаясь установленных обозначений, имеем

$$(B_1)=\frac{9}{14},\ (B_2)=\frac{5}{14},$$

$$(A,B_1)=\frac{5}{13},\ (A,B_2)=\frac{11}{13},$$

а искомыми величинами будут

$$(B_1,A)\quad \text{и}\quad (C,A).$$

Первая из них представляет вероятность, что белый шар был вынут из сосуда, содержащего 9 белых и 5 черных шаров.

Определяя ее по вышеуказанной формуле, находим

$$(B_1,A)=\frac{\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13}}{\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13}+\frac{5}{14}\cdot\frac{11}{13}}=\frac{9}{20};$$

подобным же образом получим

$$(B_2,A)=\frac{\frac{5}{14}\cdot\frac{11}{13}}{\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13}+\frac{5}{14}\cdot\frac{11}{13}}=\frac{11}{20}.$$

Интересно заметить, что

$$(B_1)>(B_2),\ \text{а}\ (B_1,A)<(B_2,A).$$

Переходим к величине

$$(C,A),$$

которая представляет вероятность, что второй вынутый шар будет белым, как и первый. Для вычисления ее по формуле

$$(C, A) = \frac{(B_1)(A, B_1)(C, AB_1) + (B_2)(A, B_2)(C, AB_2)}{(B_1)(A, B_1) + (B_2)(A, B_2)}$$

мы должны установить величины

$$(C, AB_1) \text{ и } (C, AB_2).$$

Величина

$$(C, AB_1)$$

представляет вероятность вынуть после одного белого шара второй белый шар из сосуда, который до начала этих выниманий содержал 5 белых и 8 черных шаров.

Предполагая, что первый вынутый шар не был возвращен назад в сосуд, имеем

$$(C, AB_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

так как второй вынутый шар должен принадлежать к числу двенадцати шаров, среди которых 4 белых и 8 черных. На подобных же основаниях имеем

$$(C, AB_2) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Следовательно,

$$(C, A) = \frac{\frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} + \frac{5}{14} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{10}{12}}{\frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} + \frac{5}{14} \cdot \frac{11}{13}} = \frac{73}{120};$$

так определяется вероятность белого цвета второго шара, когда известен белый цвет первого шара.

До тех же пор, пока цвет первого шара остается не определенным, вероятность белого цвета второго шара равна

$$(C)=(A)=\frac{9}{14}\,\frac{5}{13}+\frac{5}{14}\,\frac{11}{13}=\frac{100}{182}=\frac{50}{91}.$$

Второй пример. Из сосуда, содержащего 3 белых и 5 черных шаров и не содержащего никаких других шаров, вынуто и переложено в другой пустой сосуд четыре шара. Затем из этого второго сосуда, содержащего только четыре шара первого сосуда, вынуто два шара, которые оказались оба белыми. Наконец, из того же второго сосуда вынут еще один шар.

Спрашивается, как велика вероятность, что этот последний шар также белый?

Применение формул. Зная, что из второго сосуда вынуто два белых шара, мы можем относительно цвета шаров, переложенных из первого сосуда во второй, сделать две гипотезы: 1) два белых и два черных, 2) три белых и один черный.

Назвав эти гипотезы событиями

$$B_1 \quad \text{и} \quad B_2,$$

белый цвет вынутых двух шаров событием A и белый цвет последнего шара событием C, имеем (см. § 21)

$$(B_1)=\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2}\cdot\frac{3.2.5.4}{8.7.6.5}=\frac{3}{7},$$

$$(B_2)=\frac{1.2.3.4}{1.2.3.1}\cdot\frac{3.2.1.5}{8.7.6.5}=\frac{1}{14},$$

$$(A, B_1)=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\ (A, B_2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2},$$

$$(C, AB_1)=0,\ (C, AB_2)=\frac{1}{2};$$

и потому искомая вероятность равна

$$\frac{\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}.$$

Этот вывод вполне согласен с тем обстоятельством, что рассматриваемый шар должен принадлежать к числу шести шаров, среди которых находится только один белый.

Третий пример. Оставим все условия и обозначения второго примера с тою только разницею, что последний шар, неизвестного цвета. будем считать вынутым не из второго сосуда, а из первого.

При таком предположении имеем

$$(C, AB_1)=\frac{1}{4}=(C, B_1),\ (C, AB_2)=(C, B_2)=0$$

и потому вероятность, что последний шар белый, равна

$$\frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{6},$$

как и должно быть, так как и этот шар принадлежит к числу шести шаров, среди которых находится только один белый.

Четвертый пример. Имеем два сосуда L и M; сосуд L содержит три шара, из которых один черный и два белых, а сосуд M содержит шесть шаров, из которых один белый и пять черных. Переложив из L в M один шар и вынув затем из M один шар, мы заметили, что этот последний шар белого цвета.

При таких условиях требуется определить вероятность, что шар, переложенный из L в M, был черного цвета.

Ответ. Искомая вероятность равна

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}}=\frac{1}{5}.$$

§ 40. Воспользуемся установленными формулами для решения двух задач, предельный случай которых, при одном частном предположении, встречает практические применения.

Задача 3-я. Рассматривается неограниченный ряд испытаний при нижеуказанных данных. По выяснении некоторых обстоятельств эти испытания становятся, относительно события E, независимыми друг от друга, и для всех их вероятность события E становится равною одному и тому же числу α. Вышеупомянутые обстоятельства не выяснены и число α остается не вполне известным. Относительно величины α можно сделать n, и только n, предположений:

$$\alpha=\alpha_1,\ \alpha=\alpha_2, \ldots, \alpha=\alpha_i, \ldots, \alpha=\alpha_n,$$

вероятности которых, соответственно имеющимся данным, представляются числами

$$p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n.$$

Требуется определить, как изменятся вероятности различных предположений о величине α в том случае, когда сверх данных, по которым установлены эти выражения

$$p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

будет известно, что при $m+l$ испытаниях событие E появилось m раз и противоположное ему l раз.

Иначе сказать, по данным

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n,$$

$$p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n,$$

требуется вычислить вероятность каждого из предположений

$$\alpha=\alpha_1,\ \alpha=\alpha_2, \ldots, \alpha=\alpha_n$$

после того, как будет известно, что при $m+l$ испытаниях событие E появилось ровно m раз.

Решение. Обозначим буквою A наблюденный результат $m+l$ испытаний, состоящий в появлении m раз события E и l раз противоположного события. Затем вышеуказанные предположения о величине числа α назовем событиями

$$B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n;$$

так что событие B_i, по существу дела, равносильно равенству

$$\alpha=\alpha_i.$$

Тогда искомыми величинами будут

$$(B_1, A),\ (B_2, A), \ldots,\ (B_n, A),$$

вероятности событий

$$B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n$$

при существовании A. Чтобы воспользоваться для определения этих вероятностей формулою

$$(B_i, A)=\frac{(B_i)(A, B_i)}{(B_1)(A, B_1)+\ldots+(B_n)(A, B_n)},$$

надо найти только значения

$$(A, B_1),\ (A, B_2), \ldots,\ (A, B_n),$$

так как числа

$$(B_1)=p_1,\ (B_2)=p_2, \ldots,\ (B_n)=p_n$$

даны.

Обращаясь к вычислению

$$(A, B_1),\ (A, B_2), \ldots,\ (A, B_n)$$

замечаем, что

$$(A, B_i)$$

представляет вероятность появления события E ровно m раз при $m+l$ независимых испытаниях, для каждого из которых вероятность события E равна α_i. Подобная вероятность находится по известной формуле, в силу которой имеем

$$(A, B_i) = \frac{1.2\ldots(m+l)}{1.2\ldots m.1.2\ldots l}\alpha_i^m(1-\alpha_i)^l.$$

Полагая i последовательно равным

$$1, 2, \ldots, n,$$

находим таким образом величины

$$(A, B_1), (A, B_2), \ldots, (A, B_n).$$

Остается только подставить эти величины в указанную выше формулу и по сокращении на

$$\frac{1.2\ldots(m+l)}{1.2\ldots m.1.2\ldots l}$$

получим

$$(B_i, A) = \frac{p_i\alpha_i^m(1-\alpha_i)^l}{p_1\alpha_1^m(1-\alpha_1)^l + p_2\alpha_2^m(1-\alpha_2)^l + \ldots + p_n\alpha_n^m(1-\alpha_n)^l}.$$

Найдя вероятность каждого значения числа α в отдельности, мы легко можем определить и вероятность, что α лежит в заданных пределах, так как последняя вероятность равна сумме вероятностей тех значений числа α, которые лежат в заданных пределах. Следовательно, после того как стало известным, что при $m+l$ испытаниях событие E случилось ровно m раз, вероятность неравенств

$$\alpha' < \alpha < \alpha''$$

выражается дробью

$$\frac{\Sigma' p_i\alpha_i{}^m(1-\alpha_i)^l}{\Sigma p_i\alpha_i{}^m(1-\alpha_i)^l},$$

где сумма Σ распространяется на все возможные значения i, сумма же Σ' только на те, при которых выполняются неравенства

$$\alpha' < \alpha_i < \alpha''.$$

Задача 4-ая. При сохранении всех условий и данных третьей задачи, требуется вычислить вероятность, что в $m_1 + l_1$ будущих испытаний, из рассматриваемого нами ряда, событие E появится ровно m_1 раз, когда известно, что в $m + l$ испытаний оно появилось ровно m раз.

Примечание. Мы назвали $m_1 + l_1$ испытаний будущими для отличия их от наблюденных; но в наших выводах время не играет никакой роли, и потому эти $m_1 + l_1$ испытаний могут быть также прошедшими или современными.

Решение. Если буквою C обозначить появление события E ровно m_1 раз при $m_1 + l_1$ испытаниях, то искомая нами вероятность, согласно принятым обозначениям, будет

$$(C, A)$$

и определится по формуле

$$(C, A) = \frac{\Sigma (B_i)(A, B_i)(C, B_i)}{\Sigma (B_i)(A, B_i)},$$

при

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Вместе с тем имеем

$$(B_i) = p_i, \quad (A, B_i) = \frac{1 . 2 \ldots (m + l)}{1 . 2 \ldots m . 1 . 2 \ldots l} \alpha_i^m (1 - \alpha_i)^l$$

и, наконец,

$$(C, B_i) = \frac{1 . 2 \ldots (m_1 + l_1)}{1 . 2 \ldots m_1 . 1 . 2 \ldots l_1} \alpha_i^{m_1} (1 - \alpha_i)^{l_1};$$

ибо (C, B_i) отличается от (A, B_i) только числами m_1 и l_1, заменяющими соответственно m и l. Подставляя эти выражения

$$(B_i),\ (A, B_i) \text{ и } (C, B)$$

в приведенную выше формулу, по сокращении на

$$\frac{1.2\ldots.(m+l)}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.l},$$

получаем

$$(C, A) = \frac{1.2\ldots.(m_1+l_1)}{1.2\ldots.m_1.1.2\ldots.l_1} \frac{\Sigma p_i \alpha_i{}^{m+m_1}(1-\alpha_i)^{l+l_1}}{\Sigma p_i \alpha_i{}^m (1-\alpha_i)^l};$$

так определяется вероятность (C, A) событию E появиться в m_1+l_1 испытаний ровно m_1 раз, когда известно, что в $m+l$ испытаний это событие появилось ровно m раз.

Для лучшего выяснения последних двух задач может служить следующий частный их случай. Имеем n категорий сосудов с белыми и иными шарами. Отношение числа белых шаров к числу всех шаров, находящихся в сосуде, равно α_1 для каждого сосуда первой категории, равно α_2 для каждого сосуда второй категории и т. д. Пусть, наконец, числа

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

представляют соответственно отношения числа сосудов категорий

$$1^{\text{ой}}, 2^{\text{ой}}, \ldots, n^{\text{ой}}$$

к числу всех сосудов.

Все эти сосуды перемешаны и из них взят наудачу один, с которым и производится ряд испытаний. Каждое испытание состоит в извлечении одного шара, который затем возвращается обратно в сосуд для поддержания постоянного отношения числа белых шаров к числу всех шаров сосуда.

При $m+l$ таких испытаний белый шар появился ровно m раз. Требуется определить вероятность, что для испытуемого сосуда отношение числа содержащихся в нем белых шаров к числу всех его шаров имеет данное значение α_i.

До наблюдения эта вероятность равна p_i; после же наблюдения она выражается, согласно формуле, дробью

$$\frac{p_i \alpha_i^m (1-\alpha_i)}{p_1 \alpha_1^m (1-\alpha_1) + p_2 \alpha_2^m (1-\alpha_2)^l + \ldots + p_n \alpha_n^m (1-\alpha_n)^l}.$$

Затем требуется определить вероятность, что при $m_1 + l_1$ испытаниях, произведенных с тем же сосудом после наблюденных $m + l$ испытаний, белый шар появится ровно m_1 раз. Если бы результат наблюденных $m + l$ испытаний не был известен, то эта последняя вероятность выражалась бы суммою

$$\sum \frac{1.2\ldots(m_1+l_1)}{1.2\ldots m_1 .1.2\ldots l_1} p_i \alpha_i^{m_1} (1-\alpha_i)^{l_1},$$

где

$$i = 1, 2, \ldots n;$$

при известности же результата $m + l$ испытаний она, согласно формуле, равна

$$\frac{1.2\ldots(m_1+l_1)}{1.2\ldots m_1 .1.2\ldots l_1} \frac{\Sigma p_i \alpha_i^{m+m_1} (1-\alpha_i)^{l+l_1}}{\Sigma p_i \alpha_i^m (1-\alpha_i)^l},$$

где

$$i = 1, 2, \ldots n.$$

Переходя к упомянутому выше предельному случаю, положим

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{n},\ \alpha_2 = \frac{2}{n}, \ldots, \alpha_i = \frac{i}{n}, \ldots, \alpha_n = 1$$

и будем увеличивать n беспредельно.

Тогда рассматриваемые нами суммы

$$\Sigma' p_i \alpha_i^m (1-\alpha_i)^l, \quad \Sigma p_i \alpha_i^m (1-\alpha_i)^l,$$

$$\Sigma p_i \alpha_i^{m+m_1} (1-\alpha_i)^{l+l_1}$$

будут стремиться, как нетрудно видеть, к пределам

$$\int\limits_{\alpha'}^{\alpha''} \alpha^m (1-\alpha)^l \, d\alpha, \quad \int\limits_0^1 \alpha^m (1-\alpha)^l \, d\alpha,$$

$$\int\limits_0^1 \alpha^{m+m_1} (1-\alpha)^{l+l_1} \, d\alpha.$$

Выводы, к которым мы приходим таким образом, заключаются в решении задач 5-ой и 6-ой.

Задача 5-ая. Рассматривается неограниченный ряд испытаний, относительно которых известно, что по выяснении некоторых обстоятельств они становятся независимыми друг от друга. Далее предполагается известным, что вероятность события E при всех этих испытаниях должна иметь одну и ту же величину α, если только будут выяснены вышеупомянутые обстоятельства. Но эти обстоятельства остаются невыясненными, и потому число α остается неизвестным и все возможные для него значения, между 0 и 1, представляются равновозможными; так что вероятность неравенств

$$\alpha' < \alpha < \alpha'',$$

при $0 < \alpha' < \alpha'' < 1$, *выражается интегралом*

$$\int\limits_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha = \alpha'' - \alpha'.$$

Спрашивается, как изменятся вероятности различных предположений о величине α в том случае, когда будет известно, что при $m+l$ испытаниях событие E появилось m раз, а противоположное ему l раз?

Ответ. Вероятность неравенств

$$\alpha' < \alpha < \alpha''$$

будет выражаться дробью

$$\frac{\int\limits_{\alpha'}^{\alpha''} \alpha^m (1-\alpha)^l \, d\alpha}{\int\limits_0^1 \alpha^m (1-\alpha)^l \, d\alpha}; \tag{18}$$

иначе сказать, плотность вероятности для различных значений α будет пропорциональна произведению

$$\alpha^m (1-\alpha)^l.$$

Задача 6-ая. При сохранении всех условий и данных предыдущей задачи, требуется найти вероятность, что в $m_1 + l_1$ будущих испытаний, из рассматриваемого нами ряда, событие E появится ровно m_1 раз, когда известно, что в $m + l$ испытаний оно появилось ровно m раз.

Ответ.

Искомая вероятность равна

$$\frac{1.2.3\ldots.(m_1+l_1)}{1.2\ldots.m_1.1.2\ldots.l_1} \cdot \frac{\int\limits_0^1 \alpha^{m+m_1} (1-\alpha)^{l+l_1} \, d\alpha}{\int\limits_0^1 \alpha^m (1-\alpha)^l \, d\alpha}. \tag{19}$$

Последние две задачи отлично иллюстрируются посредством неисчерпаемого сосуда, в котором находятся шары белого и иного цвета, при чем отношение числа белых шаров к числу всех шаров сохраняет неизвестную нам постоянную величину, сколько бы шаров мы ни вынули из сосуда.

Формулы, представляющие ответ на задачи 5-ую и 6-ую, применяются к определению вероятностей по наблюдениям, a posteriori. При этом, из выражения вероятности неравенств

$$\alpha' < \alpha < \alpha''$$

в виде отношения

$$\frac{\int\limits_{\alpha'}^{\alpha''} \alpha^m (1-\alpha)^l \, d\alpha}{\int\limits_0^1 \alpha^m (1-\alpha)^l \, d\alpha}$$

можно заключить о малой вероятности больших отклонений α от $\frac{m}{m+l}$, если число наблюденных испытаний $m+l$ значительно; и потому можно положить

$$\alpha \doteq \frac{m}{m+l}.$$

Затем из ответа на шестую задачу можно вывести, что при большом числе наблюденных испытаний и сравнительно малом числе будущих испытаний вероятности различных предположений о числе появлений события E, при этих последних испытаниях, мало отличаются от тех, которые получатся, если при всех будущих испытаниях мы будем считать вероятность события E равною

$$\frac{m}{m+l}.$$

Например, для одного будущего испытания вероятность появления события E равна *

$$\frac{m+1}{m+l+2} \doteq \frac{m}{m+l};$$

* Из выражения вероятностей $\frac{m+1}{m+l+2}$, $\frac{l+1}{m+l+2}$ возможных результатов одного испытания нетрудно путем последовательного увеличения числа испытаний вывести и общую формулу (19).

а для двух будущих испытаний вероятность появления события E два раза равна

$$\frac{(m+1)(m+2)}{(m+l+2)(m+l+3)} \mp \left(\frac{m}{m+l}\right)^2$$

и вероятность появления его только один раз равна

$$2\frac{(m+1)(l+1)}{(m+l+2)(m+l+3)} \mp 2\frac{m}{m+l}\cdot\frac{l}{m+l}.$$

Для более удобного применения формул (18) и (19), при больших величинах m, $m+l=n$, m_1, $m_1+l_1=n_1$ и малых величинах разностей $\alpha'-\frac{m}{n}$, $\alpha''-\frac{m}{n}$, $\frac{m_1}{n_1}-\frac{m}{n}$, их обыкновенно сводят, посредством применения формулы Стирлинга и замены подъинтегральной функции, к тому же интегралу Моавра-Лапласа, какой мы постоянно встречаем в различных задачах исчисления вероятностей.

Начиная с (16), делим подъинтегральную функцию $x^m(1-x)^l$ в обоих интегралах

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} x^m(1-x)^l\,dx \quad , \quad \int_0^1 x^m(1-x)^l\,dx$$

на ее наибольшее значение

$$\left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-m} = \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{l}{n}\right)^l,$$

которого она достигает при $x=\frac{m}{n}$. Затем вводим новое переменное z, связывая его с x линейным равенством

$$x=\frac{m}{n}+z\sqrt{\frac{2ml}{n^3}}$$

и разлагаем логарифм произведения $\left(\frac{nx}{m}\right)^m \left(\frac{n(1-x)}{l}\right)^l$ в ряд по степеням z на основании простых формул

$$\log\left(\frac{nx}{m}\right)^m = m\log\left(1+z\sqrt{\frac{2l}{mn}}\right) = z\sqrt{\frac{2lm}{n}} - \frac{l}{n}z^2 + \ldots$$

$$\log\left(\frac{n(1-x)}{l}\right)^l = l\log\left(1-z\sqrt{\frac{2m}{ln}}\right) =$$

$$= -z\sqrt{\frac{2lm}{n}} - \frac{m}{n}z^2 + \ldots$$

Мы приходим таким образом к приближенному равенству

$$\log\left(\frac{nx}{m}\right)^m \left(\frac{n(1-x)}{l}\right)^l \doteq e^{-z^2},$$

отбрасывая все члены с высшими стпенями z, коэффициенты которых имеют отрицательное измерение, если всем числам l, m, n приписать измерение единица. Заменяя на этом основании произведение $\left(\frac{nx}{m}\right)^m \left(\frac{n(1-x)}{l}\right)^l$ в обоих интегралах показательною функциею e^{-z^2} и принимая за пределы для z во втором интеграле $-\infty$ и $+\infty$, мы немедленно получаем общеупотребительное выражение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z'}^{z''} e^{-z^2}\,dz$$

для вероятности, что α лежит в пределах

$$\frac{m}{n} + z'\sqrt{\frac{2ml}{n^3}} \quad \text{и} \quad \frac{m}{n} + z''\sqrt{\frac{2ml}{n^3}}.$$

Числовой пример приведем в следующей главе.

Обращаясь к формуле (19), выражаем ее через функции Γ:

$$\frac{\Gamma(n_1+1)}{\Gamma(m_1+1)\,\Gamma(l_1+1)}\cdot\frac{\Gamma(m+m_1+1)\,\Gamma(l+l_1+1)\,(n+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(l+1)\,(n+n_1+1)\,\Gamma(n+n_1+1)}$$

и к каждому из произведений $\Gamma(N+1)=1\,.\,2\,.\,3\ldots N$ применяем формулу Стирлинга. Мы приходим таким путем к величине

$$P'_{m_1}=\sqrt{\frac{n_1 n^3 (m+m_1)(l+l_1)}{2\pi m l m_1 l_1 (n+n_1)^3}}\,W_{m_1},$$

отношение которой к соответствующей вероятности при достаточно больших значениях m, m_1, l, l_1 сколь угодно близко к единице, при чем

$$W_{m_1}=\left(\frac{n m_1}{n_1 m}\right)^{-m_1}\left(\frac{n l_1}{n_1 l}\right)^{-l_1}\left(\frac{n(m+m_1)}{(n+n_1)m}\right)^{m+m_1}\left(\frac{n(l+l_1)}{(n+n_1)l}\right)^{l+l_1}$$

Затем полагаем

$$m_1=n_1\frac{m}{n}+t\sqrt{\frac{2mln_1(n+n_1)}{n^3}}=n_1\frac{m}{n}+z$$

и ограничиваем t неравенствами $t_1<t<t_2$, где t_1 и t_2 какие-нибудь определенные числа, имея, конечно, в виду рассмотреть вероятность соответствующих неравенств для числа m_1 появлений события E при n_1 будущих испытаний. Если числа $m, l, \frac{n_1 m}{n}, \frac{n_1 l}{n}$ возрастают беспредельно, то отношения

$$\frac{nm_1}{n_1 m},\ \frac{nl_1}{n_1 l},\ \frac{n(m+m_1)}{(n+n_1)m},\ \frac{n(l+l_1)}{(n+n_1)l}$$

равные

$$1+\frac{nz}{n_1 m},\ 1-\frac{nz}{n_1 l},\ 1+\frac{nz}{(n+n_1)m},\ 1-\frac{nz}{(n+n_1)l}$$

стремятся к единице; ибо

$$\left(\frac{nz}{n_1 m}\right)^2=\frac{2l(n+n_1)t^2}{n_1 nm},\ \left(\frac{nz}{n_1 l}\right)^2=\frac{2m(n+n_1)t^2}{n_1 nl}$$

$$\left(\frac{nz}{(n+n_1)m}\right)^2=\frac{2lnt^2}{(n+n_1)nm},\ \left(\frac{nz}{(n+n_1)l}\right)^2=\frac{2mnt^2}{(n+n_1)nl}$$

$$\frac{ln}{(n+n_1)nm}<\frac{l(n+n_1)}{n_1 nm}<\frac{n+n_1}{n_1 m}=\frac{1}{m}+\frac{n}{n_1 m}$$

$$\frac{mn}{(n+n_1)nl}<\frac{m(n+n_1)}{n_1 nl}<\frac{n+n_1}{n_1 l}=\frac{1}{l}+\frac{n}{n_1 l}.$$

Поэтому вместо P'_m можно взять

$$P''_m=\sqrt{\frac{n^3}{2\pi m l n_1 (n+n_1)}}\,W_{m_1}.$$

Переходя к $\log W_{m_1}$, ограничимся предположением, что все числа n, m, l, n_1 бесконечно большие одного порядка *. Тогда в разложениях

$$-m_1\log\left(\frac{nm_1}{n_1 m}\right)=-\left(n_1\frac{m}{n}+z\right)\left(\frac{nz}{n_1 m}-\frac{1}{2}\frac{n^2z^2}{n_1^2m^2}+\dots\right)=$$

$$=-z-\frac{1}{2}\frac{nz^2}{n_1 m}+\dots$$

$$-l\log\frac{nl_1}{n_1 l}=+z-\frac{1}{2}\frac{nz^2}{n_1 l}$$

$$(m+m_1)\log\frac{n(m+m_1)}{(n+n_1)m}=$$

$$=\left\{(n+n_1)\frac{m}{n}+z\right\}\left(\frac{nz}{(n+n_1)m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2z^2}{(n+n_1)^2m^2}\right)$$

$$=z+\frac{1}{2}\cdot\frac{nz^2}{(n+n_1)m}+\dots$$

$$(l+l_1)\log\frac{n(l+l_1)}{(n+n_1)l}=-z+\frac{1}{2}\frac{nz^2}{(n+n_1)l}+\dots$$

* О других предположениях см. мою вторую заметку *О вероятности a posteriori* в Сообщ. Харьк. мат. общ. (2 сер. т. XIV).

члены с третьими и высшими степенями z будут бесконечно малыми и могут быть отброшены. Совокупность же членов $\log W_{m_1}$ с первою степенью z приводится к нулю; остается только совокупность членов со второю степенью z

$$-\frac{1}{2}\frac{nz^2}{n_1 m}-\frac{1}{2}\frac{nz^2}{n_1 l}+\frac{1}{2}\frac{nz^2}{(n+n_1)m}+\frac{1}{2}\frac{nz^2}{(n+n_1)l},$$

которая приводится к

$$-\frac{1}{2}\frac{n^3 z^2}{n_1(n+n_1)ml}=-t^2.$$

Следовательно, мы можем заменить W_{m_1} на e^{-t^2}. Остается принять во внимание, что разность смежных значений t равна бесконечно малому числу

$$\sqrt{\frac{n^3}{2mln_1(n+n_1)}}$$

и произвести обычный переход от суммы к интегралу, чтобы получить для рассматриваемой вероятности неравенств

$$t_1\sqrt{\frac{2mln_1(n+n_1)}{n^3}}<m_1-n_1\frac{m}{n}<t_2\sqrt{\frac{2mln_1(n+n_1)}{n^3}}$$

предельное выражение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt,$$

которым можно пользоваться для приближенного вычисления ее при больших m, l, n_1 и заданных t_1, t_2.

Относительно всех выводов, основанных на указанном нами применении формул (18) и (19), следует заметить, что им не следует придавать слишком большого значения. Дело в том, что прежде, чем применять ту или другую формулу и делать из нее различные выводы, необходимо выяснить условия ее существования и убедиться, можно ли считать их выполненными в тех случаях, к которым мы желаем применять формулу.

Формулы, представляющие ответ на задачи 5-ую и 6-ую, обставлены следующими условиями:

1) *независимость испытаний, по выяснении некоторых обстоятельств;*

2) *постоянство неизвестной нам вероятности события E по выяснении вышеупомянутых обстоятельств;*

3) *равновозможность всех значений этой вероятности, до наблюдения.*

Некоторым контролем выполнения этих условий, хотя и не абсолютным, может служить коэффициент дисперсии, о котором будет речь в следующей главе.

Применяются же эти формулы и в таких случаях, где о выполнении указанных условий едва ли можно говорить.

Один из важных примеров вероятностей, определяемых по наблюдениям, представляет вероятность лицу данного возраста прожить данный срок, например, один год. Об этой вероятности говорят очень часто в виду важных ее приложений. Многие занимались разработкою приемов приближенного вычисления ее на основании наблюдений и составили различные таблицы смертности, из которых нетрудно вывесть ее приближенную величину для различных возрастов и сроков.

Мы не станем разбирать подробностей и тонкостей этих приемов, а остановимся только на выяснении их оснований.

Положим, что n лиц, имеющих один и тот же данный возраст, поступили под наше наблюдение, и что мы не теряли их из вида в течение данного срока. Положим далее, что m из них прожили данный срок, а $n-m$ умерли в течение его. Тогда, рассматривая безразлично одно из этих лиц, мы можем дробь

$$\frac{m}{n}$$

назвать вероятностью прожить данный срок лицу данного возраста, взятому из числа вышеуказанных n лиц.

Установленная таким образом вероятность относится только к прошедшему времени и к данной группе лиц; но практические цели заставляют нас переносить выводы прошлого на будущее. Такой перенос оправдывается предположением, что для другой группы людей, более или менее похожей на прежнюю, отношение, аналогичное дроби $\frac{m}{n}$, будет мало отличаться от $\frac{m}{n}$; а это предположение основывается на замеченном с давних времен повторении различных явлений, из которого вытекает представление о неизменных законах природы.

Применяя затем к данному случаю задачи 5-ую и 6-ую, мы должны вообразить или предположить, что существует какая-то неизвестная величина

$$\alpha,$$

которая представляет вероятность лицу данного возраста прожить данный срок и приближенно равна

$$\frac{m}{n}.$$

Но нет никаких средств убедиться в правильности такого предположения, и их нельзя, конечно, извлечь из формул (18) и (19), основанных на том же предположении. Напротив, при всей вере в существование неизменных законов природы, мы имеем основания отрицать существование постоянного числа α, так как с течением времени условия жизни людей могут изменяться весьма значительно, а при изменении условий жизни едва ли может оставаться неизменною смертность * людей. Сверх того, весьма естественно предположение о различной смертности различных категорий людей, одновременно обитающих на земле, но отличающихся друг от друга местом жительства, родом занятий, телосложением и т. д.

Поэтому, если допустить, что постоянное число α определяется общими условиями жизни всех людей, то определение такого числа по наблюдениям над одной группой лиц трудно признать правильным, какими бы формулами ни подкреплялось это определение, так как должны проявиться индивидуальные особенности группы. Указанное обстоятельство не устранится и в том случае, если мы будем рассматривать не совокупность всех людей вообще, а некоторую часть ее, при чем встретится еще новое затруднение, состоящее в необходимости точно определить рассматриваемую часть.

Итак, признавая пользу таблиц смертности для практических целей, мы считаем невозможным доказывать законность их применений ссылками на вышеприведенные формулы исчисления вероятностей.

* Мы пользуемся этим словом как общеупотребительным, не останавливаясь на вопросе, можно ли ему придать вполне определенный смысл.

§ 41. Интересно заметить, что формула (19) для вероятности будущих событий остается в силе при существенном изменении постановки вопроса, указанном Прево и Луилье, а после них Каталаном *.

Пусть производимые испытания состоят в последовательном извлечении шаров из некоторого сосуда при условии, что вынутые шары не возвращаются обратно в сосуд. Пусть, далее, первоначальное число N шаров в этом сосуде задано совершенно произвольно, только достаточно большим, чтобы произведенными n и будущими n_1 испытаниями не исчерпывался совершенно сосуд: $N > n + n_1$. Событием E называем белый цвет каждого вынутого шара и событием F иной его цвет. Первоначальное число белых шаров в сосуде остается неизвестным и, следовательно, относительно его можно сделать $N+1$ предположений:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, N,$$

которые до наблюдения мы считаем равновозможными.

Пусть, наконец, среди вынутых $n = m + l$ шаров было ровно m белых. Требуется, при таких условиях и предположениях, определить вероятность, что при дальнейшем извлечении из того же сосуда окажется среди $n_1 = m_1 + l_1$ вынутых шаров ровно m_1 белых.

Решение. Прежде всего различим для наблюденного события $\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots l}$, а для будущего $\frac{1.2.3\ldots n_1}{1.2\ldots m_1.1.2\ldots l_1}$ видов порядком появления E и F и обозначим каждый вид соответственно $E^m F^l$ и $E^{m_1} F^{l_1}$.

Относительно наблюденных появлений событий E и F, не изменяя существа вопроса, мы можем предположить, что они произошли в определенном порядке; а вероятность будущего совокупного появления события E m_1 раз и события F l_1 раз в неопределенном порядке отличается, как нетрудно понять, от такого же появления их в определенном порядке только множителем

$$\frac{1.2\ldots n_1}{1.2\ldots m_1.1.2\ldots l_1} = \frac{\Gamma(n_1+1)}{\Gamma(m_1+1)\Gamma(l_1+1)},$$

равным вышеуказанному числу таких порядков. Сведя таким образом нашу задачу к разысканию вероятности $(E^{m_1} F^{l_1}, E^m F^l)$ какого-либо уста-

* Prevost et Lhuilier. *Sur les probabilités* (Mém. de l'Acad. de Berlin 1799) Catalan. *Problèmes et théorèmes de probabilités* (Mém. de l'Acad. de Belgique, T. XLVI, 1886).

новленного события $E^{m_1}F^{l_1}$ после наблюдения появления также определенного события $E^m F^l$, можем последнюю вероятность представить отношением

$$(E^{m_1}F^{l_1},\ E^m F^l) = \frac{(E^{m+m_1}F^{l+l_1})}{(E^m F^l)},$$

к которому затем для получения искомой вероятности придется прибавить только вышеуказанный множитель. Здесь символ $(E^{m+m_1}F^{l+l_1})$, подобно $E^m F^l$, представляет, конечно, вероятность, до начала испытаний, появиться, в определенной последовательности, событию E $m+m_1$ раз и событию F $l+l_1$ раз.

С другой стороны, по условиям вопроса, событие $E^m F^l$ можно разбить на $N+1$ видов, отличающихся друг от друга числом i белых шаров, находившихся в сосуде до начала испытаний.

Вероятность каждого из этих видов выражается произведением

$$\frac{1}{N+1}\cdot\frac{i(i-1)\ldots(i-m+1)(N-i)(N-i-1)\ldots(N-i-l+1)}{N(N-1)\ldots(N-n+1)}$$

и совпадает с коэффициентом при $x^m y^l$ разложения по степеням x, y такого произведения

$$\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(l+1)}{(N+1)N(N-1)\ldots(N-n+1)}(1+x)^i(1+y)^{N-i}$$

и потому рассматриваемая вероятность события $E^m F^l$ равна коэффициенту при $x^m y^l$ в разложении по степеням x, y суммы

$$\sum\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(l+1)}{(N+1)N(N-1)\ldots(N-n+1)}(1+x)^i(1+y)^{N-i}\ (i=0,1,2,\ldots,N),$$

которая приводится к

$$\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(l+1)}{(N+1)N\ldots.(N-n+1)}\cdot\frac{(1+x)^{N+1}-(1+y)^{N+1}}{x-y}=$$

$$=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(l+1)}{(N+1)N\ldots(N-n+1)}\times$$

$$\times\sum\frac{(N+1)N\ldots(N-k+1)}{1.2\ldots.(k+1)}(x^k+x^{k-1}y+\ldots+y^k)\ (k=0,1,2,\ldots N)$$

Отсюда немедленно выводим

$$(E^m F^l) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(l+1)}{\Gamma(n+2)} = \int_0^1 x^m (1-x)^l dx;$$

а по замене m, l суммами $m+m_1$, $l+l_1$ получаем

$$(E^{m+m_1} F^{l+l_1}) = \frac{\Gamma(m+m_1+1)\Gamma(l+l_1+1)}{\Gamma(n+n_1+2)} = \int_0^1 x^{m+m_1+1}(1-x)^{l+l_1+1} dx.$$

Остается разделить вторую из этих вероятностей на первую и к частному прибавить множитель

$$\frac{1.2.3\ldots.n_1}{1.2\ldots m_1.1.2\ldots l_1},$$

чтобы придти к тому же выражению (19) для искомой вероятности в $n_1 = m_1 + l_1$ будущих испытаний событию E появиться ровно m_1 раз при наблюденном появлении его в $n = m + l$ испытаний ровно m раз. Итак, отмеченное изменение 6-ой задачи не изменяет ответа (19). Что же касается ответа (18) на задачу (5), то при указанном изменении условий задачи к нему можно также придти, но необходимо беспредельно увеличивать N.

§ 42. В заключение главы остановимся на вопросе о вероятности свидетельских показаний, к которому также можно приложить формулу Байеса. С практической точки зрения этот вопрос может представляться весьма важным; но значение его решения сильно уменьшается необходимостью многих произвольных предположений.

Для упрощения вопроса мы будем считать всех свидетелей вполне осведомленными о предмете их показания, но способными сообщать заведомо ложные сведения; а показания их будем считать независимыми друг от друга и согласными. Всем свидетелям мы припишем одинаковую склонность к правде и будем измерять ее каким-нибудь числом α, лежащим между нулем и единицей; число α мы будем рассматривать как вероятность, что свидетель говорит правду, и соответственно этому разность $1-\alpha$ будет представлять вероятность, что свидетель говорит неправду.

Число свидетелей обозначим буквою n.

Положим, что согласные их показания относятся к известному всем им результату испытания; пусть, именно, все n свидетелей заявляют, что при испытании появилось событие E, вероятность которого до свидетельских показаний равна p.

Наконец, мы введем еще величину β, которая будет выражать вероятность для свидетеля, говорящего неправду, остановиться именно на событии E, а не на каком-нибудь другом возможном результате того же испытания.

При таких условиях мы выразим произведением

$$p\alpha^n$$

вероятность появления события E и согласного заявления свидетелей об этом появлении, пока свидетели не высказались; при тех же условиях вероятность непоявления события E и согласного заявления свидетелей о его появлении мы представим произведением

$$(1-p)(1-\alpha)^n\beta^n.$$

Соответственно этому сумма

$$p\alpha^n+(1-p)(1-\alpha)^n\beta^n$$

будет выражать вероятность согласного заявления свидетелей о появлении события E, пока свидетели не высказались.

Отсюда, на основании формулы Байеса, мы заключаем, что после согласного показания свидетелей вероятность появления события E становится равною

$$\frac{p\alpha^n}{p\alpha^n+(1-p)(1-\alpha)^n\beta^n}. \tag{20}$$

Найденное простое выражение вероятности мы применим к одной интересной задаче, которую рассматривал Буняковский в вышеупомянутом сочинении *Основания математической теории вероятностей*.

Задача Буняковского. Из полной русской азбуки выдернули шесть букв наудачу, которые по мере их вскрытия ставили одну возле другой. Два очевидца утверждают, что вынутые буквы составили слово *Москва*. Спрашивается, как велика вероятность, что показание двух свидетелей справедливо?

При этом предполагается, что полная русская азбука содержит 36 букв и что склонность свидетелей к правде выражается дробью $\frac{9}{10}$.

Решение. Обращаясь к общему выражению вероятности в виде дроби

$$\frac{p\alpha^n}{p\alpha^n+(1-p)(1-\alpha)^n\beta^n},$$

замечаем, что в данном случае

$$n=2,\ \alpha=\frac{9}{10}$$

и на основании теоремы умножения вероятностей

$$p=\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{35}\cdot\frac{1}{34}\cdot\frac{1}{33}\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{31};$$

число же β остается неопределенным.

Для устранения неопределенности числа β обратимся к предположению, которое сделано Буняковским при решении задачи.

Оно заключается в том, что в русском языке имеется 50000 слов, состоящих из шести различных букв, и что при ложном показании свидетель должен остановиться на одном из этих слов. Считая все эти ложные показания равновозможными и, в виду малости разности

$$\frac{1}{50000}-\frac{1}{49999},$$

не обращая внимания на уменьшение числа их на одну единицу в случае, когда вынутые буквы составили одно из слов, мы положим

$$\beta=\frac{1}{50000}.$$

При таких предположениях искомая вероятность выразится дробью

$$\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^2}{\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^2\frac{36.35.34.33.32.31-1}{(50000)^2}},$$

которая после простых сокращений приводится к

$$\frac{81 \times (625)^2}{81 \times (625)^2 + 219126{,}5 \ldots} > 0{,}99;$$

а по вычислениям Буняковского искомая вероятность близка к

$$\frac{81}{28129}.$$

Разногласие двух выводов, полученных при одних и тех же предположениях, объясняется тем обстоятельством, что Буняковский свел единогласное показание свидетелей о появлении определенного слова *Москва* к простому указанию каждого из свидетелей на появление одного из слов русского языка и соответственно этому выразил искомую вероятность дробью

$$\frac{p\alpha^2}{p\alpha^2 + (1-p)(1-\alpha)^2},$$

полагая

$$\alpha = \frac{9}{10} \text{ и } p = \frac{50000}{36.35.34.33.32.31}.$$

Принятая нами величина β едва ли не должна быть признана слишком малою; ибо число русских слов, составленных из шести различных букв, конечно, значительно меньше 50000, и кроме того естественно предполагать, что слово *Москва* может быть выбрано для ложного показания предпочтительно перед многими другими. Увеличивая в виду этого обстоятельства число β, положим

$$\beta = \frac{1}{200};$$

тогда искомая нами вероятность, что показание двух свидетелей справедливо, выразится уже довольно малым числом

$$\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^2}{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{36.35.34.33.32.31-1}{(200)^2}} \doteq \frac{81}{35141}.$$

Приведенный пример, по нашему мнению, достаточно выясняет неизбежность многих произвольных предположений при решении вопросов, подобных разобранному нами, которые по существу дела имеют весьма неопределенный характер.

Рассмотренный вопрос примет еще более неопределенный характер, если допустим, что свидетели могут ошибаться, и устраним независимость их показаний.

Не составляя выражения вероятности свидетельских показаний при различных предположениях, считаем нелишним добавить к вышесказанному только ряд простых замечаний.

Во-первых, если событие невозможно, то никакие свидетельские показания не могут сообщить ему даже малой вероятности.

Маловероятное событие может от согласных показаний многих свидетелей превратиться в весьма вероятное, если совпадение ложных показаний представляется еще менее вероятным. Но мало вероятное событие не станет весьма вероятным от согласного показания таких свидетелей, которые сговорились друг с другом, или имеют одинаковые не вполне точные сведения о предмете их показаний. Как бы ни был добросовестен очевидец события, но сомнение в том, что он способен был правильно понять совершившееся, может, в известных случаях, лишить его показание всякого значения.

Наконец, сообщение о событии может доходить к нам не от очевидцев, а через последовательный ряд свидетелей, которые передают то, что они слышали от других. В этом случае удлинение цепи свидетелей, конечно, затемняет совершившееся. Независимо от математических формул, на которых мы не остановимся, не придавая им большого значения, ясно, что к рассказам о невероятных событиях, будто бы происшедших в давно минувшее время, следует относиться с крайним сомнением.

И мы никак не можем согласиться с Буняковским, что необходимо выделить известный класс рассказов, сомневаться в которых он считает предосудительным *.

* Некоторые философы, в видах предосудительных, пытались применять формулы, относящиеся к ослаблению вероятности свидетельств и преданий к верованиям религиозным и тем поколебать их. Для опровержения их выводов стоит только принять в соображение, что всякое следствие, выводимое из аналитической формулы, не может быть иным чем, как только развитием первоначального предположения, на котором формула основана. Если предположение ложно, то и следствия анализа будут ошибочные. Поэтому, прежде всего, должно разобрать основательно предположение, служащее точкою исхода. Когда этот разбор приведет

В данном случае мое разногласие с Буняковским выходит уже из области математики и касается шаткой области желаний и личных интересов людей. Не вдаваясь в эту область, приведем здесь замечание Лапласа по поводу одного парадокса Паскаля, которое можно найти в статье *De la probabilité des témoignages*, помещенной во введении к его классическому труду *Théorie analytique des probabilités*. Тот, кто обещает за доверие к своим утверждениям награду, не увеличивает таким обещанием, а уменьшает степень доверия к себе; если же размер обещаний становится безграничным, то степень доверия, какого они заслуживают, падает до нуля.

В виду оригинальности соображений Паскаля приведем его собственные слова *(Oeuvres complètes de Blaise Pascal*, T. I, 1858, *Pensées,* article X, p. 304):

„Pesons le gain et la perte, en prenant croix que Dieu est. Estimons ces deux cas: si vous gagnez, vous gagnez tout; si vous perdez, vous ne perdez rien. Gagez donc qu'il est sans hesiter. — Cela est admirable: oui, il faut gager; mais je gage peut-être trop. — Voyons. Puisqu'il y a pareil hasard de gain et de perte, si vous n'aviez qu'a gagner deux vies pour une, vous pourriez encore gager. Mais s'il y en avoit trois à gagner, il faudrait jouer (puisque vous êtes dans la nécessité de jouer), et vous seriez imprudent, lorsque vous êtes forcé à jouer de ne pas hasarder votre vie pour en gagner trois à un jeu où il y a pareil hasard de perte et de gain. Mais il y a une éternité de vie et de bonheur. Et cela étant, quand il aurait une infinité de hasards dont un seul serait pour vous, vous auriez encore raison de gager un pour avoir deux, et vous agiriez de mauvais sens, étant obligé à jouer, de refuser de jouer une vie contre trois à un jeu où d'une infinité des hasards il y en a un pour vous, s'il y avait une infinité de vie infiniment heureuse à gagner. Mais il y a ici une infinité de vie infiniment heureuse à gagner, un hasard de gain contre un nombre fini de hasards de perte, et ce que vous jouez est fini. Cela est tout parti: partout ou est l'infini et où il n'y a pas infinité des hasards de perte contre celui de gain, il n'y a point à balancer, il faut tout donner. Et ainsi, quand on est forcé à jouer, il faut renoncer à la raison, pour garder la vie plutôt que de la hasardes pour le gain infini aussi prêt à arriver que la perte du néant".

нас к заключению, что в духовном мире есть такие факты, которые не подчинены физическим законам, тогда все злонамеренные умствования лжефилософов рушатся сами. В статье *Certitude* (Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, Tome VI) читатели найдут примечательную выписку из сочинения аббата Прад: *Sur la vérité de la religion*. В этой выписке с необыкновенною силою ума и с убедительным красноречием рассмотрен подробно вопрос, которого мы здесь только коснулись. (Осн. мат. теории вероят., стр. 326).

ЛИТЕРАТУРА.

Bayes. An Essay toward solving a Problem in the Doctrine of Chances. A Demonstration of the second Rule in the Essay towards the Solution of a Problem in the Doctrine of Chances (Lond. Phil. Trans., 1764, 1765).

Condorcet. Mémoire sur le calcul des probabilités (Hist. de l'Acad. des sciences de Paris, 1781—1784).

Condorcet. Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. 1785.

Cournot. Exposition de la théorie des chances et des probabilités. 1843.

Ostrogradsky. Sur une question des probabilités (Bull. de la Classe Phys.-Math. de l'Acad. de St.-Pétersb. T. VI, № 21, 22).

Quetelet. Lettres sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques. 1846.

W. Lexis. Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. 1877.

E. Catalan. Problèmes et théorèmes de probabilités (Mém. de l'Acad. de Belgique. T. XLVI, 1886).

L. Bortkiewicz. Gesetz der kleinen Zahlen. Leipzig, 1898.

М. Тихомандрицкий. Курс теории вероятностей. 1898.

А. Марков. О вероятности a posteriori (Сообщ. Харьк. мат. общ. 2 сер., Т. VII, 1900; вторая заметка, Т. XIV, 1914).

L. Bortkewitsch. Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik (Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik. Bd. LXIII, LXV, LXVI).

L. Bortkiewicz. Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik (Math. Enzyklopädie 1 D. 4a. Leipzig, 1900).

ГЛАВА VII.

Способ наименьших квадратов.

§ 43. Способом наименьших квадратов называется общеупотребительный прием получения приближенных результатов из многих наблюдений, с оценкою достоинства этих результатов *. Чтобы обосновать его на соображениях, относящихся к исчислению вероятностей, мы должны установить ряд предположений и условий; и прежде всего необходимо допустить существование чисел, приближенные величины которых доставляются наблюдениями.

Каждое наблюдение, дающее то или другое число, мы будем рассматривать как частный случай многих наблюдений; и соответственно этому мы будем рассматривать, рядом с действительным результатом наблюдения, воображаемый нами возможный результат наблюдения. Считая данное наблюдение частным случаем многих наблюдений, мы будем предполагать, что условия наблюдения делятся на две категории: условия постоянные, сохраняющиеся без изменения при всех вышеупомянутых наблюдениях, частным случаем которых является данное, и условия переменные, или случайные, меняющиеся от одного наблюдения до другого. Вместе с тем допустим, что каждому определенному предположению о величине возможного результата наблюдения будет соответствовать определенная вероятность в том случае, когда постоянные условия наблюдения, нам неизвестные, станут известными.

Пусть a означает неизвестное число, приближенную величину которого x' мы получаем из наблюдения; пусть далее x означает возможный результат наблюдения, и различными значениями числа x будут

$$x', \; x'', \; x''' \; \ldots \; ;$$

* Мой взгляд на различные попытки теоретического обоснования способа наименьших квадратов изложен в статье *Закон больших чисел и способ наименьших квадратов* (Изв. физ.-мат. общ. Каз. Унив. 2-я с. Т. VIII).

пусть, наконец,

$$q', q'', q''', \ldots .$$

соответственно означают вероятности этих значений x, когда постоянные условия наблюдения известны.

Из всех упомянутых здесь чисел нам известно только одно x'. Неизвестная величина разности

$$a - x'$$

представляет действительную погрешность или ошибку наблюдения; разность же

$$a - x$$

мы будем называть возможною погрешностью наблюдения, а математическое ожидание ее

$$q'(a - x') + q''(a - x'') + q'''(a - x''') + \ldots ,$$

равное

$$a - (q'x' + q''x'' + q'''x''' + \ldots),$$

назовем *постоянною погрешностью*.

Величина постоянной погрешности нам, конечно, неизвестна; однако, в дальнейших рассуждениях мы будем считать ее равною нулю. Соответственно этому мы будем говорить, что в приближенном равенстве

$$a \doteq x'$$

нет постоянной погрешности. Заключение об отсутствии постоянной погрешности часто выводят из предположения, что каждые две величины возможной погрешности, дающие в сумме нуль, равновероятны; но в последнем предположении нет надобности для предстоящих рассуждений.

Предположение об отсутствии постоянной погрешности, как и приведенное сейчас предположение, находится в некотором противоречии с тем фактом, что различные причины постоянных погрешностей открываются постепенно. Однако, в теоретических рассуждениях мы принимаем это предположение, как необходимое.

Если бы с числом a не было связано более или менее определенного представления, то предположение об отсутствии постоянной погрешности мы могли бы сделать несомненным, определяя число a равенством

$$a = q' x' + q'' x'' + q''' x''' + \dots .$$

В дальнейших рассуждениях нам понадобится также математическое ожидание квадрата возможной погрешности, равное сумме

$$q' (x' - a)^2 + q'' (x'' - a)^2 - q''' (x''' - a)^2 + \dots ;$$

корень квадратный из этой, неизвестной нам, суммы называется *средней квадратичной ошибкой* наблюдения, или приближенного равенства

$$a \doteq x'.$$

Рассматривая результаты различных наблюдений, мы будем предполагать известными отношения математических ожиданий квадратов их погрешностей друг к другу.

Соответственно этому, вводя для нескольких наблюдений одно и то же неизвестное число k, мы будем математическое ожидание квадрата возможной погрешности данного наблюдения представлять в виде дроби

$$\frac{k}{P}$$

с определенным знаменателем P, который мы будем называть весом наблюдения или весом соответствующего равенства

$$a \doteq x'.$$

Веса наблюдений устанавливаются на разных соображениях, более или менее произвольно. На первом плане приведем простейшее соображение. Именно, если все известные условия каких-нибудь наблюдений, дающих приближенные значения одного и того же числа a, одинаковы, то обыкновенно предполагают, что веса этих наблюдений одинаковы.

Кроме приближенных равенств, доставляемых непосредственно наблюдениями, мы будем рассматривать и другие приближенные равенства, которые будем выводить из совокупности многих наблюдений. Пусть

$$U' \doteq 0$$

означает одно из таких равенств. Выражение U' составлено определенным образом из искомых чисел, подобных числу a, и из чисел, доставленных наблюдениями.

Заменяя числа, доставленные наблюдениями, воображаемыми возможными результатами наблюдений, получаем вместо U' новое выражение U, которое назовем возможною погрешностью приближенного равенства

$$U' \doteq 0.$$

А математическое ожидание U назовем постоянною погрешностью приближенного равенства

$$U' \doteq 0.$$

Мы будем рассматривать только такие приближенные равенства установленного вида, о которых на основании наших данных и предположений можно утверждать, что их постоянные погрешности равны нулю.

Затем как для равенств, доставляемых непосредственно наблюдениями, так и для выводных равенств мы будем оценивать их достоинство весом, представляя математическое ожидание квадрата возможной погрешности в виде дроби

$$\frac{k}{P},$$

где попрежнему k означает число неизвестное, а P — вес соответствующего приближенного равенства. Если наблюдения дают возможность для какого-нибудь неизвестного числа a составить несколько приближенных равенств вида

$$a - X' \doteq 0,$$

где X' означает число, вполне определяемое результатами наблюдений, то мы будем выбирать из этих равенств, как наилучшее для определения числа a, равенство, вес которого наибольший.

§ 44. *Случай одного неизвестного.*

Пусть для определения неизвестного числа a произведено n наблюдений, которые дали для a приближенные значения

$$a', \ a'', \ldots, a^{(n)}.$$

Согласно приведенным выше объяснениям рядом с действительно полученными числами

$$a', \ a'', \ldots, a^{(n)}$$

мы будем рассматривать возможные результаты наблюдений, которые пусть будут

$$u', \ u'', \ldots, u^{(n)};$$

так что u' представляет возможный результат первого наблюдения, давшего числа a', u'' возможный результат второго наблюдения и т. д. Наши наблюдения мы предполагаем свободными от постоянной погрешности и *независимыми друг от друга,* придавая последнему условию тот смысл, что величины

$$u', \ u'', \ldots, u^{(n)}$$

не зависят друг от друга.

Рассматриваемые нами наблюдения дают для определения числа a ряд приближенных равенств

$$a \doteq a', \ a \doteq a'', \ldots, \ a \doteq a^{(n)},$$

которые, согласно нашим допущениям и определениям, не содержат постоянной погрешности.

Этим равенствам мы приписываем определенные веса

$$p', p'', \ldots, p^{(n)},$$

полагая

$$\text{м. о. } (a - u')^2 = \frac{k}{p'}, \ \text{м. о. } (a - u'')^2 = \frac{k}{p''}, \ldots \text{м. о. } (a - u^{(n)})^2 = \frac{k}{p^{(n)}}.$$

Пользуясь затем результатами всех наблюдений, составим из приведенных выше n приближенных равенств следующее

$$a \doteq \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots\ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)},$$

где выбор коэффициентов

$$\lambda', \lambda'', \ldots\ldots, \lambda^{(n)}$$

находится в нашем распоряжении. Мы подчиним коэффициенты

$$\lambda', \lambda'', \ldots\ldots, \lambda^{(n)}$$

двум условиям, согласно ранее высказанным положениям.

Во-первых, мы потребуем, чтобы приближенное равенство

$$a \doteq \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots\ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

было свободно от постоянной погрешности. Это условие, очевидно, выражается равенством

$$\lambda' + \lambda'' + \ldots\ldots + \lambda^{(n)} = 1,$$

так как математическое ожидание суммы

$$\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots\ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)},$$

при любой определенной системе чисел

$$\lambda', \lambda'', \ldots\ldots, \lambda^{(n)},$$

равно

$$(\lambda' + \lambda'' + \ldots\ldots + \lambda^{(n)})\, a.$$

Во-вторых, мы потребуем, чтобы вес приближенного равенства

$$a \doteq \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots\ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

был наибольшим. Это требование вызывается тем обстоятельством, что достоинство каждого приближенного равенства мы оцениваем его весом, как было выше установлено.

Таким образом, установив ряд предположений и условий, мы превращаем в определенную математическую задачу вопрос, лишенный математического смысла, о том, как по возможности лучше воспользоваться результатами многих наблюдений.

Примечание. Мы ограничились равенствами вида

$$a \doteq \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

не только ради их особой простоты, но и по той причине, что ни о каком другом равенстве нельзя, на основании наших условий, утверждать, чтобы оно доставляло приближенную величину a без постоянной погрешности. Например, если бы мы положили

$$a \doteq \sqrt[n]{a' a'' \ldots a^{(n)}},$$

или

$$a \doteq \sqrt{\frac{a' a' + a'' a'' \ldots a^{(n)} a^{(n)}}{n}},$$

то возможность постоянной погрешности не была бы устранена.

Для определения веса приближенного равенства

$$a \doteq \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

составляем математическое ожидание квадрата разности

$$a - (\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}).$$

В силу условия

$$\lambda' + \lambda'' + \ldots + \lambda^{(n)} = 1$$

этот квадрат равен

$$\{\lambda' (u' - a) + \lambda'' (u'' - a) + \ldots + \lambda^{(n)} (u^{(n)} - a)\}^2 =$$

$$= \lambda' \lambda' (u' - a)^2 + \lambda'' \lambda'' (u'' - a)^2 + \ldots + \lambda^{(n)} \lambda^{(n)} (u^{(n)} - a)^2 +$$

$$+ 2\lambda' \lambda'' (u' - a)(u'' - a) + \ldots$$

и математическое ожидание его приводится к

$$k\left[\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right];$$

ибо математические ожидания квадратов

$$(u'-a)^2,\ (u''-a)^2,\ldots,\ (u^{(n)}-a)^2,$$

по предположению, равны

$$\frac{k}{p'},\ \frac{k}{p''},\ldots,\ \frac{k}{p^{(n)}},$$

а математические ожидания произведений

$$(u'-a)(u''-a),\ldots,\ (u''-a)(u^{(n)}-a),\ldots,$$

различных множителей, приводятся к нулю, в силу независимости величин $u', u'', \ldots, u^{(n)}$. Представляя величину

$$k\left[\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right]$$

в виде дроби

$$\frac{k}{P},$$

заключаем, что вес P рассматриваемого нами приближенного равенства

$$a \doteq \lambda' a'+\lambda'' a''+\ldots+\lambda^{(n)} a^{(n)}$$

определяется формулою

$$P=\frac{1}{\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}}.$$

И, следовательно, этот вес достигнет своей наибольшей величины в том случае, когда сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигнет своей наименьшей величины, при соблюдении, конечно, условия

$$\lambda'+\lambda''+\ldots\ldots+\lambda^{(n)}=1.$$

С другой стороны, нетрудно установить тожество

$$(p'+p''+\ldots+p^{(n)})\left\{\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right\}-(\lambda'+\lambda''+\ldots+\lambda^{(n)})^2$$

$$=\Sigma p^{(i)}p^{(j)}\left\{\frac{\lambda^{(i)}}{p^{(i)}}-\frac{\lambda^{(j)}}{p^{(j)}}\right\}^2,$$

где i означает каждое из чисел $2, 3, \ldots\ldots, n$, а j означает каждое из чисел $1, 2, 3, \ldots\ldots, i-1$.

Приведенное нами тожество показывает, что сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигает своего наименьшего значения в том случае, когда все разности

$$\frac{\lambda^{(i)}}{p^{(i)}}-\frac{\lambda^{(j)}}{p^{(j)}}$$

обращаются в нуль. Полагая соответственно этому

$$\frac{\lambda'}{p'}=\frac{\lambda''}{p''}=\ldots\ldots=\frac{\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}=\frac{\lambda'+\lambda''+\ldots\ldots+\lambda^{(n)}}{p'+p''+\ldots\ldots+p^{(n)}},$$

получаем для определения коэффициентов

$$\lambda', \lambda'', \ldots\ldots, \lambda^{(n)}$$

следующую общую формулу

$$\lambda^{(i)} = \frac{p^{(i)}}{p' + p'' + \ldots . + p^{(n)}}.$$

При величинах $\lambda', \lambda'', \ldots ., \lambda^{(n)}$, которые дает указанная нами формула, сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots . + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигает своей наименьшей величины

$$\frac{1}{p' + p'' + \ldots . + p^{(n)}},$$

а вес приближенного равенства

$$a \doteqdot \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots . + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

достигает своей наибольшей величины

$$p' + p'' + \ldots . + p^{(n)}.$$

В виду изложенных соображений из различных приближенных равенств, которые можно установить на основании вышеприведенных результатов наблюдений, мы выбираем, как наилучшее для определения числа a, такое

$$a \doteqdot \frac{p' a' + p'' a'' + \ldots . + p^{(n)} a^{(n)}}{p' + p'' + \ldots . + p^{(n)}} \tag{21}$$

и замечаем, что его вес P равен сумме весов первоначальных равенств

$$a \doteqdot a', \ a \doteqdot a'', \ldots ., \ a \doteqdot a^{(n)},$$

доставленных непосредственно наблюдениями:

$$P = p' + p'' + \ldots . + p^{(n)}. \tag{22}$$

В простейшем случае, когда всем наблюдениям мы приписываем один и тот же вес, приближенная величина a, определяемая формулой (21), представляет среднюю арифметическую из величин, доставляемых непосредственно наблюдениями; а вес приближенного равенства

$$a \doteq \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}$$

будет равен числу наблюдений, если за вес каждого наблюдения мы примем единицу.

Положим теперь, что кроме n наблюдений, доставивших приближенные равенства

$$a \doteq a', \quad a \doteq a'', \ldots, \quad a \doteq a^{(n)}$$

одинакового достоинства, произведено еще m наблюдений, доставивших приближенные равенства

$$a \doteq a^{(n+1)}, \quad a \doteq a^{(n+2)}, \ldots, \quad a \doteq a^{(n+m)}$$

также одинакового достоинства, но, быть-может, неравного достоинства с прежними. Приписывая приближенным равенствам

$$a \doteq a', \quad a \doteq a'', \ldots, \quad a \doteq a^{(n)}$$

одинаковое достоинство, мы приравняем математические ожидания квадратов их погрешностей одному и тому же неизвестному числу k_1; а математические ожидания квадратов погрешностей равенств

$$a \doteq a^{(n+1)}, \quad a \doteq a^{(n+2)}, \ldots, \quad a \doteq a^{(n+m)}$$

приравняем другому неизвестному числу k_2.

Затем из совокупности равенств

$$a \doteq a', \quad a \doteq a'', \ldots, \quad a \doteq a^{(n)}$$

мы можем вывесть равенство

$$a \doteq \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n},$$

для которого математическое ожидание квадрата погрешности равно

$$\frac{k_1}{n};$$

а равенствами

$$a \doteqdot a^{(n+1)},\quad a \doteqdot a^{(n+2)}, \ldots, \quad a \doteqdot a^{(n+m)}$$

можем воспользоваться для образования другого приближенного равенства

$$a \doteqdot \frac{a^{(n+1)} + a^{(n+2)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m}$$

математическое ожидание квадрата погрешности которого равно

$$\frac{k_2}{m}.$$

Если же, с целью лучшего определения числа a, мы пожелаем воспользоваться всеми $n+m$ равенствами

$$a \doteqdot a',\ a \doteqdot a'', \ldots,\ a \doteqdot a^{(n)},\ a \doteqdot a^{(n+1)}, \ldots,\ a \doteqdot a^{(n+m)};$$

то должны будем, так или иначе, установить величину отношения $\frac{k_1}{k_2}$. Начиная с простейшего предположения, положим

$$k_1 = k_2.$$

Тогда совокупность всех $n+m$ равенств

$$a \doteqdot a',\ a \doteqdot a'', \ldots,\ a \doteqdot a^{(n+m)}$$

доставит нам такое равенство

$$a \doteqdot \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n+m)}}{n+m},$$

для которого математическое ожидание квадрата погрешности будет выражаться дробью

$$\frac{k_1}{n+m}=\frac{k_2}{n+m}.$$

Заметим, что равенство

$$a \doteq \frac{a'+a''+\ldots\ldots+a^{(n+m)}}{n+m}$$

может быть получено как следствие двух равенств

$$a \doteq \frac{a'+a''+\ldots\ldots+a^{(n)}}{n} \text{ и } a \doteq \frac{a^{(n+1)}+\ldots\ldots+a^{(n+m)}}{m}$$

веса которых пропорциональны числам n и m; так как

$$\frac{a'+a''+\ldots\ldots+a^{(n+m)}}{n+m}=$$

$$=\frac{\frac{a'+a''+\ldots\ldots+a^{(n)}}{n}n+\frac{a^{(n+1)}+\ldots\ldots+a^{(n+m)}}{m}m}{n+m}.$$

В том же случае, когда мы имеем основание сомневаться в правильности допущения

$$k_1=k_2,$$

возникает вопрос о приближенном вычислении чисел k_1 и k_2.

Мы установим общую формулу для приближенного вычисления величин, подобных k_1 и k_2.

В применении к рассматриваемому случаю эта формула дает два приближенных равенства

$$k_1 \doteq k'_1 \text{ и } k_2 \doteq k'_2,$$

на основании которых мы будем считать отношение $\frac{k_1}{k_2}$, неизвестных чисел k_1 и k'_2, равным отношению $\frac{k'_1}{k'_2}$, известных чисел k'_1 и k'_2. Приписав отношению $\frac{k_1}{k_2}$ определенную величину $\frac{k'_1}{k'_2}$, мы можем уже воспользоваться совокупностью всех $n+m$ равенств

$$a \mp a', a \mp a'', \ldots, a \mp a^{(n+m)}$$

для вывода новой приближенной величины a. И если математические ожидания квадратов погрешностей различных приближенных равенств мы станем выражать дробями с одним и тем же числителем k_1, то можем вес каждого из равенств

$$a \mp a', a \mp a'', \ldots, a \mp a^{(n)}$$

считать равным единице, а вес каждого из равенств

$$a \mp a^{(n+1)}, a \mp a^{(n+2)}, \ldots, a \mp a^{(n+m)}$$

считать равным отношению $\frac{k'_1}{k'_2}$, в силу тождества

$$k_2 = \frac{k_1}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)}.$$

При таких условиях из совокупности $n+m$ равенств

$$a \mp a', a \mp a'', \ldots, a \mp a^{(n+m)}$$

мы выведем новое равенство

$$a \mp \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)} + \frac{k'_1}{k'_2}\left(a^{(n+1)} + \ldots + a^{(n+m)}\right)}{n + m\frac{k'_1}{k'_2}},$$

вес которого равен

$$n + m\frac{k'_1}{k'_2}.$$

Последнее равенство может быть выведено также из двух равенств

$$a \doteq \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n} \text{ и } a \doteq \frac{a^{(n+1)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m},$$

веса которых пропорциональны числам

$$n \text{ и } m\frac{k'_1}{k'_2}.$$

Наметив цель дальнейших вычислений, возвратимся к общему случаю и соответственно приближенному равенству

$$a \doteq \frac{p'a' + p''a'' + \ldots + p^{(n)}a^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}},$$

положим

$$a_0 = \frac{p'a' + p''a'' + \ldots + p^{(n)}a^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}}$$

и

$$\xi = \frac{p'u' + p''u'' + \ldots + p^{(n)}u^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}}.$$

Примечание. Если мы будем рассматривать суммы

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - \xi)^2 = p'(u' - \xi)^2 + p''(u'' - \xi)^2 + \ldots + p^{(n)}(u^{(n)} - \xi)^2$$

и

$$\Sigma p^{(i)}(a^{(i)} - a_0)^2 = p'(a' - a_0)^2 + p''(a'' - a_0)^2 + \ldots + p^{(n)}(a^{(n)} - a_0)^2$$

как функции переменных ξ и a_0, считая все остальные величины, входящие в эти суммы, числами данными, то установленные нами формулы определят значения ξ и a_0, которым соответствуют наименьшие величины рассматриваемых сумм.

Следовательно, величина a_0, которую мы принимаем за новое приближенное значение a, сообщает наименьшую величину сумме квадратов

$$\Sigma\left\{\sqrt{p^{(i)}}\,(a^{(i)}-a_0)\right\}^2;$$

отсюда и происходит название „способ наименьших квадратов".

Мы докажем, что математическое ожидание суммы

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)^2=p'(u'-\xi)^2+p''(u''-\xi)^2+\ldots+p^{(n)}(u^{(n)}-\xi)^2$$

равно

$$(n-1)\,k.$$

Для этого на основании равенств

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-a)=(\xi-a)\,\Sigma p^{(i)}$$

и

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)=0,$$

последовательно получаем

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)^2=\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)(u^{(i)}-a-\xi+a)$$

$$=\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)(u^{(i)}-a)-(\xi-a)\,\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)$$

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)^2=\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-a-\xi+a)(u^{(i)}-a)$$

$$=\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-a)^2-(\xi-a)\,\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-a)$$

$$=\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-a)^2-(\xi-a)^2\,\Sigma p^{(i)};$$

и затем, принимая во внимание, что математические ожидания произведений

$$p^{(i)}(u^{(i)}-a)^2 \quad \text{и} \quad (\xi-a)^2\,\Sigma p^{(i)}$$

равны k, из равенства

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)^2=\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-a)^2-(\xi-a)^2\,\Sigma p^{(i)}$$

выводим

$$\text{м. о. }\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)^2=\text{м. о. }\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-a)^2-\text{м. о. }(\xi-a)^2\,\Sigma p^{(i)}$$

$$=nk-k=(n-1)\,k.$$

Итак,

$$\text{м. о. }\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)^2=(n-1)\,k. \tag{23}$$

Равенством (23) пользуются для приближенного вычисления числа k, заменяя в левой его части математическое ожидание суммы

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)^2$$

тем частным значением ее, которое соответствует результатам наблюдений. Таким образом получается равенство

$$k \doteq \frac{\Sigma p^{(i)}(a^{(i)}-a_0)^2}{n-1},$$

свободное от постоянной погрешности. Разделяя число

$$\frac{\Sigma p^{(i)}(a^{(i)}-a_0)^2}{n-1}$$

на веса приближенных равенств, получим приближенные величины математических ожиданий квадратов их погрешностей. Например,

$$\frac{\Sigma p^{(i)}(a^{(i)}-a_0)^2}{(n-1)\,\Sigma p^{(i)}}$$

будет приближенною величиною математического ожидания квадрата погрешности равенства

$$a \doteq a_0 = \frac{p' a' + p'' a'' + \ldots + p^{(n)} a^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}}.$$

В частном случае, когда всем равенствам

$$a \doteq a', \quad a \doteq a'', \ldots, \quad a \doteq a^{(n)}$$

мы приписываем одинаковый вес, имеем

$$a_0 = \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}$$

и для математического ожидания квадрата погрешности каждого из данных равенств

$$a \doteq a', \quad a \doteq a'', \ldots, \quad a \doteq a^{(n)}$$

получаем приближенную величину

$$k'_1 = \frac{\sum \left\{ a^{(i)} - \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n} \right\}^2}{n-1}.$$

Подобным же образом, рассматривая ряд других равенств

$$a \doteq a^{(n+1)}, \quad a \doteq a^{(n+2)}, \ldots, \quad a \doteq a^{(n+m)},$$

которым мы также приписываем одинаковый вес, для математического ожидания квадрата погрешности каждого из них получаем приближенную величину

$$k'_2 = \frac{\sum \left\{ a^{(j)} - \frac{a^{(n+1)} + a^{(n+2)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m} \right\}^2}{m-1},$$

где

$$j = n+1, \; n+2, \ldots, \; n+m.$$

Таким образом мы установили основные элементы способа наименьших квадратов для случая одного неизвестного.

Сверх того, часто рассматривают вероятности различных предположений о величине погрешности получаемых приближенных равенств. Но это рассмотрение соединено с особым предположением, в котором раньше мы не имели надобности. Пусть будет Δ неизвестная нам погрешность одного из равенств, подобных равенству

$$a \doteq a' \quad \text{или} \quad a \doteq a_0,$$

и пусть вычислена приближенная величина математического ожидания квадрата Δ по указанному выше способу, или иным путем. Обозначим найденное нами математическое ожидание Δ^2 буквою h и допустим что вероятность неравенств

$$c < \Delta < \partial,$$

при любых значениях c и ∂, выражается интегралом

$$\int_c^{\partial} A e^{-\mu x} \, dx,$$

где A и μ числа постоянные (см. § 29).

Тогда постоянные A и μ определятся двумя равенствами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\mu x^2} dx = 1 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} A x^2 e^{-\mu x^2} dx = h,$$

которые приводятся к следующим

$$\frac{A}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{и} \quad \frac{A}{\sqrt{\mu^3}} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}},$$

откуда находим

$$\mu = \frac{1}{2h} \quad \text{и} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2h\pi}}.$$

Соответственно этому за вероятность неравенств

$$c < \Delta < \partial$$

принимают интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2h\pi}}\int_{c}^{\partial} e^{-\frac{x^2}{2h}}\,dx,$$

который приводится к

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{c}{\sqrt{2h}}}^{\frac{\partial}{\sqrt{2h}}} e^{-z^2}\,dz,$$

посредством подстановки

$$\frac{x^2}{2h} = z^2.$$

Затем, чтобы оправдать указанное выражение вероятности, рассматривают погрешность Δ как сумму многих независимых погрешностей и ссылаются на приближенное выражение вероятности, что сумма многих независимых величин лежит в данных пределах, приведенное нами в третьей главе.

Другое оправдание того же выражения вероятности основано на согласии его с наблюдениями. Для разъяснения, в чем усматривают это согласие, положим, что n наблюдений одинакового достоинства дали для неизвестного числа a значения

$$a',\ a'' \ldots,\ a^{(n)}.$$

При больших величинах n за истинную величину a принимают

$$\frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}$$

и соответственно этому считают разности

$$a^{(i)} - \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}, \text{ при } i = 1, 2 \ldots n,$$

погрешностями наблюдений. Далее полагают

$$h = \frac{\sum \left(a^{(i)} - \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}\right)^2}{n - 1}$$

и считают двояким образом число погрешностей, лежащих в данных пределах. Именно, с одной стороны, считают число разностей

$$a^{(i)} - \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n},$$

которые лежат в данных пределах; а, с другой стороны, на основании теоремы Бернулли и указанного выше выражения вероятности неравенств

$$c < \Delta < \partial$$

допускают, что число погрешностей, лежащих между c и ∂, равно

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{c:\sqrt{2h}}^{\partial:\sqrt{2h}} e^{-z^2} dz.$$

Опубликовано несколько примеров, в которых такие два счета дают для числа погрешностей одинаковые или близкие величины. По этому поводу считаю не лишним привести небольшую выдержку из сочинения Пуанкаре *La Science et l'Hypothèse*. „Un physicien éminent me disait un jour à propos de la loi des erreurs. Tout le monde y croit fermement parce que les mathématiciens s'imaginent que c'est un fait d'observation, et les observateurs que c'est un théorème de mathématiques".

Впрочем, если вышеприведенное, обычное, выражение вероятности не применимо к отдельным наблюдениям, то мы все-таки имеем основание допустить его для средних выводов из многих наблюдений, как приближенное.

Вместо математического ожидания квадрата погрешности часто рассматривают *среднюю квадратичную ошибку* и *вероятную ошибку*. Средняя квадратичная ошибка, равная корню квадратному из математического ожидания квадрата погрешности, при сделанном нами предположении, приведется к $\sqrt{h}$.

А вероятная ошибка определяется условием одинаковой вероятности предположения, что числовая величина погрешности меньше вероятной ошибки, и предположения, что числовая величина погрешности больше вероятной ошибки.

Если попрежнему допустить, что вероятность неравенств

$$c<\Delta<\partial,$$

при любых значениях c и ∂, выражается вышеприведенным интегралом, то вероятная ошибка выразится произведением

$$\rho\sqrt{h},$$

где число ρ представляет решение уравнения

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} e^{-z^2}\,dz=\frac{1}{2},$$

откуда находим

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}=0{,}47693\ldots \text{ и } \rho=0{,}67448\ldots$$

В виду таких определенных соотношений между математическим ожиданием квадрата погрешности, среднею квадратичною ошибкою и вероятною ошибкою, в каждом частном случае достаточно рассматривать одну из этих трех величин.

§ 45. *Определение вероятностей по наблюдениям.*

Остановимся на приложении только-что изложенных рассуждений и вычислений к важному вопросу об определении вероятностей по наблюдениям, который мы рассматривали в предыдущей главе, с другой точки зрения.

Пусть, по прежнему, существует неизвестная нам постоянная вероятность α появления некоторого события E при повторяемых независимых испытаниях, как в $3^{\text{ой}}$, $4^{\text{ой}}$, $5^{\text{ой}}$ и $6^{\text{ой}}$ задачах предыдущей главы. Положим, что нам известен результат s испытаний: событие E появилось σ раз.

Остальные условия задач предыдущей главы мы отбрасываем и вовсе не будем рассматривать вероятностей, которые относятся к различным предположениям о величине α и определяются нашими данными; мы их теперь не вводим. и их у нас нет. Задача наша состоит теперь не в разыскании вероятностей различных предположений о величине α, а в приближенном вычислении этой величины, согласно только-что изложенным принципам.

Таким образом характер вопроса существенно изменен, на что необходимо обратить внимание.

Рассматривая каждое из произведенных s испытаний, в отдельности, и принимая во внимание их результаты, мы можем установить σ приближенных равенств

$$\alpha \doteq 1$$

и $s-\sigma$ приближенных равенств

$$\alpha \doteq 0.$$

Этим равенствам соответствуют s величин

$$x_1, x_2, \ldots, x_s,$$

представляющих, согласно вышеприведенным объяснениям, возможные результаты испытаний:

$$1 \text{ с вероятностью } \alpha, \; 0 \text{ с вероятностью } 1-\alpha.$$

Математические ожидания всех этих x_i, очевидно, равны числу α; поэтому в наших

$$\sigma \text{ равенствах } \alpha \doteq 1 \text{ и } s-\sigma \text{ равенствах } \alpha \doteq 0$$

нет постоянных погрешностей.

Что касается математических ожиданий квадратов погрешностей:

$$(x_1-\alpha)^2,\ (x_2-\alpha)^2, \ldots, (x_s-\alpha)^2;$$

то они все равны одному и тому же неизвестному числу

$$\alpha(1-\alpha).$$

Следовательно, в данном случае, веса всех равенств одинаковы и должны быть приравнены единице, если за число k, общих рассуждений, мы возьмем теперь

$$\alpha(1-\alpha).$$

А при равенстве весов способ наименьших квадратов дает нам такое новое приближенное равенство

$$\alpha \doteq \frac{\sigma}{s},$$

вес которого, согласно общей теореме, равен s.

Вместе с тем, применяя к данному примеру формулу (23), получаем для приближенного вычисления числа k равенство

$$k \doteq \frac{\sigma(s-\sigma)^2+(s-\sigma)\sigma^2}{s^2(s-1)} = \frac{\sigma(s-\sigma)}{s(s-1)},$$

не содержащее постоянной погрешности.

Интересно заметить, что приближенную величину k мы могли бы, в данном случае, вывести из сопоставления точного равенства

$$k=\alpha(1-\alpha)$$

с вышеуказанным приближенным

$$\alpha \doteq \frac{\sigma}{s};$$

такое сопоставление дает для k величину

$$\frac{\sigma(s-\sigma)}{s^2},$$

отличающуюся от вышеприведенной множителем $\frac{s-1}{s}$, близким к единице. Надо, однако, помнить, что равенство

$$k \doteq \frac{\sigma(s-\sigma)}{s^2},$$

которое немного проще вышеприведенного, не вполне свободно от постоянной погрешности; ибо математическое ожидание выражения

$$\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_s)(s-x_1-x_2-\ldots-x_s)}{s^2}$$

равно $\frac{s-1}{s}k$, а не k.

Пойдем далее, расширяя нашу задачу. А именно, предположим теперь, что неизвестная постоянная вероятность α определяется не одною, а несколькими сериями испытаний.

Пусть эти серии состоят из

$$s', s'', \ldots, s^{(n)}$$

испытаний и сопровождаются появлением рассматриваемого события соответственно

$$\sigma', \sigma'', \ldots, \sigma^{(n)}$$

раз. При таких предположениях получаем, согласно вышеприведенному, n приближенных равенств

$$\alpha \doteq \frac{\sigma'}{s'}, \quad \alpha \doteq \frac{\sigma''}{s''}, \ldots, \quad \alpha \doteq \frac{\sigma^{(n)}}{s^{(n)}},$$

веса которых, соответственно, выражаются числами

$$s', \ s'', \ldots, s^{(n)},$$

если k сохраняет прежнее значение

$$\alpha(1-\alpha).$$

Применяя к этой совокупности равенств, свободных от постоянных погрешностей, способ наименьших квадратов, получаем результат

$$\alpha \doteq \frac{\sigma}{s},$$

где

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \ldots + \sigma^{(n)} \text{ и } s = s' + s'' + \ldots + s^{(n)};$$

наш результат свободен от постоянной погрешности, а вес его равен s.

Что же касается числа k, то согласно формуле (23) имеем

$$k \doteq \frac{1}{n-1} \sum s^{(i)} \left\{ \frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \frac{\sigma}{s} \right\}^2.$$

С другой стороны, на основании точного равенства

$$k = \alpha(1-\alpha)$$

можно положить

$$k \doteq \frac{\sigma}{s}\left(1 - \frac{\sigma}{s}\right).$$

Последнее равенство не свободно от постоянной погрешности; но свободно от нее равенство

$$k \doteq \frac{\sigma}{s-1}\left(1 - \frac{\sigma}{s}\right),$$

мало от него отличающееся, при s большом.

Как видно, в данном случае мы получаем для k два различных приближенных равенства, которые оба не содержат постоянной погрешности.

Это обстоятельство может для каждой данной совокупности чисел

$$\sigma', s', \sigma'', s'', \ldots, \sigma^{(n)}, s^{(n)}$$

служить, до известной степени, для подкрепления или опровержения наших основных предположений о независимости испытаний и постоянстве вероятности, смотря по тому, окажутся ли значения k, доставляемые различными равенствами, близкими друг к другу, или, напротив, они будут сильно расходиться.

Закончим наши рассуждения об определении вероятностей по наблюдениям численным примером, который возьмем из одной статьи * Пирсона, но рассмотрим не по Пирсону.

Дело идет об опытах профессора Вельдона с 12ью обыкновенными игральными костями. Каждый опыт состоял в одновременном бросании всех 12 костей, при чем считалось общее число появлений нумеров 5 и 6. Число опытов было 26306; результаты их представлены в следующей табличке

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
185	1149	3265	5475	6114	5194	3067	1331	403	105	14	4	0

Здесь в верхней строке приведены все возможные значения числа появлений нумеров 5 и 6, при отдельном опыте; и под каждым из этих 13 значений указано, в нижней строке, число опытов, давших его. Мы имеем

$$12 \times 26306 = 315672$$

бросаний по одной кости, которые дали следующее число появлений нумеров 5 и 6:

$$\left.\begin{array}{l} 1149 + 3.5475 + 5.5194 + 7.1331 + \ \ 9.105 \\ + 2.3265 + 4.6114 + 6.3067 + 8.403 \ + 10.14 + 11.4 \end{array}\right\} = 106602.$$

* Karl Pearson. On the Criterion that a given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from Random Sampling. (Philosophical Magazine and Journal of Science. Vol. L. July — December 1900).

Приступим к рассуждениям и соответствующим вычислениям. Если данным считать только факт, что кость имеет 6 граней, на которых стоят нумера 1, 2, 3, 4, 5, 6, то вероятность появления нумеров 5 и 6, иначе сказать, непоявление нумеров 1, 2, 3, 4, для каждого бросания кости, в отдельности, будет равна $\frac{1}{3}$. Если же исходить только из факта, что совокупность 315672 бросаний дала 106602 появлений нумеров 5 и 6, то для бросания, взятого из этой совокупности, вероятность тех же нумеров выразится дробью $\frac{106602}{315672} \doteq 0{,}33770$.

Первая величина вероятности определена только на основании принадлежности нумеров 5 и 6 к группе шести нумеров, состоящей их этих двух нумеров и из четырех других; вторая же величина вероятности установлена только на основании принадлежности бросания к группе 315672, из которых 106602 сопровождались появлением нумеров 5 и 6.

Обе величины точно соответствуют своим данным; они не совпадают, в виду различия данных. В исчислении вероятностей нет формулы для соединения первых данных со вторыми в одну совокупность; но есть формула, которая, до известной степени, позволяет судить о степени их согласованности. Эта формула определяет вероятность, что отклонение числа появлений события от произведения вероятности его на число испытаний превзойдет данную величину.

Для намеченной цели, полагаем вероятность события равною $\frac{1}{3}$, а число испытаний равным 315672 и ищем вероятность, что разность между числом появлений событий и числом 105224, составляющим $\frac{1}{3}$ числа испытаний, достигнет

$$106602 - 105224 = 1378,$$

или превзойдет это число.

Полагая соответственно этому в известной формуле (6) Лапласа

$$p = \frac{1}{3}, \quad n = 315672, \quad t = \frac{1378 \, . \, 3}{\sqrt{4 \, . \, 315672}} \doteq 3{,}67,$$

находим, что вероятность таких больших отклонений, приблизительно, равна

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{3{,}67} e^{-t^2} \, dt = 0{,}0000002.$$

Столь малая вероятность, конечно, не свидетельствует о согласии результатов произведенных испытаний с тем, что вероятность появления одного из нумеров 5 и 6 для каждого бросания кости равна $\frac{1}{3}$.

Чтобы приложить затем к нашему примеру рассуждения предыдущей главы и способ наименьших квадратов, как он у нас изложен, мы должны допустить, кроме указанных двух вполне определенных вероятностей, существование третьей неизвестной нам вероятности α, которая и должна остаться для нас неизвестной, так как она определяется неизвестными нам постоянными условиями испытаний.

Принимая все условия, указанные в задаче 5[ой] шестой главы, мы можем по данному числу испытаний ($n = 315672$) и по данному числу появлений события ($m = 106602$) найти вероятность, что α лежит между какими-нибудь данными числами α' и α'' $(0 < \alpha' < \alpha'' < 1)$, подставляя данные величины m, n, α', α'' в общее выражение (18)

$$\frac{\int\limits_{\alpha'}^{\alpha''} x^m (1-x)^{n-m}\,dx}{\int\limits_0^1 x^m (1-x)^{n-m}\,dx};$$

чем мы и воспользуемся для приближенного вычисления вероятности, что α отклоняется от $\frac{106602}{315672}$ меньше, чем на разность

$$\frac{106602}{315672} - \frac{1}{3} = \frac{1378}{315672}.$$

Согласно выводам § 41 за приближенную величину вероятности, что α лежит в пределах

$$\frac{m}{n} + z' \sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}} \quad \text{и} \quad \frac{m}{n} + z'' \sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}$$

можно принять

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{z'}^{z''} e^{-z^2}\,dz$$

Обращаясь к нашему числовому примеру, находим

$$-z' = z'' = 1378 \sqrt{\frac{315672}{2.106602.209070}} \mp 3{,}67$$

и потому

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z'}^{z''} e^{-z^2} dz \mp 0{,}9999998;$$

следовательно, вероятность, что отклонение числа α от $\frac{106602}{315672}$ достигает величины $\frac{1378}{315672}$, соответствующей $\alpha = \frac{1}{3}$ или больше ее, оказывается, при наших данных, весьма малою и приблизительно равна ранее полученному числу 0,0000002.

Этот результат подобен прежнему, но с ним не совпадает: хотя неравенства, вероятностями которых мы занимались, имеют одинаковый вид в обеих задачах:

$$\text{чис. зн. } \left(\frac{m}{n} - \alpha\right) \geqq \frac{1378}{315672},$$

но в первой задаче вероятность события (α) была данным числом, а число появлений его (m) неопределенным, а во второй, наоборот, число появлений события (m) было данным, а вероятность его (α) неопределенным числом.

Применяя, наконец, к данному примеру способ наименьших квадратов, мы также допускаем существование неизвестной постоянной вероятности α, для которой получаем на основании результатов опытов приближенное равенство

$$\alpha \mp \frac{\sigma}{s} = \frac{106602}{315672} \mp 0{,}3377.$$

Неизвестному числу α мы не приписываем теперь различных значений, а потому у нас нет и вероятностей их; зато дробь $\frac{\sigma}{s}$, с неизменным знаменателем $s = 315672$, мы рассматриваем как способную получать, кроме наблюденного, много других значений. Согласно установленным положениям, наше равенство $\alpha \doteqdot \frac{106602}{315672}$ свободно от постоянной погрешности; вес его равен 315672, а математическое ожидание квадрата погрешности выражается в виде дроби $\frac{k}{315672}$.

Что касается числа k, то для приближенного вычисления его мы имеем две формулы. Одна из них дает

$$k \doteqdot \frac{106602}{315672} \cdot \frac{209070}{315672} \doteqdot 0{,}2236.$$

Другая формула дает

$$26305k \doteqdot \sum 12N_i \left(\frac{i}{12} - \alpha^0\right)^2,$$

где

$$\alpha^0 = \frac{106602}{315672} \doteqdot 0{,}33770, \quad N_0 = 185, \quad N_1 = 1149 \quad \text{и т. д.}$$

Наши вычисления указаны в таблице, помещенной на следующей странице. Получился результат

$$k \doteqdot \frac{12.492{,}7}{26305} \doteqdot 0{,}2247$$

близкий к найденному раньше, по более простой формуле.

Отношение

$$\frac{\frac{1}{\eta - 1} \sum s^{(i)} \left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \frac{\sigma}{s}\right)^2}{\frac{\sigma}{s-1}\left(1 - \frac{\sigma}{s}\right)} = L^2,$$

которое я называю коэффициентом дисперсии, хотя обычно такое название присвоено корню квадратному из него, в данном примере отличается от единицы менее, чем на $\frac{1}{200}$:

$$\frac{2247}{2236} = 1{,}0049\ldots$$

Вес результата 0,3377 равен 315672 и потому математическое ожидание квадрата его погрешности приближенно выражается числом

$$\frac{0{,}2247}{315672} = 0{,}00000071,$$

средняя квадратичная погрешность его — числом 0,00084, а вероятная погрешность — числом 0,00056.

Соответственно такой вероятной погрешности вычисленная по формулам предыдущей главы вероятность, что рассматриваемая a posteriori вероятность появления одного из нумеров 5 и 6 отклоняется от $\frac{106602}{315672}$ менее, чем на 0,00056, оказывается близкою к $\frac{1}{2}$:

$$0{,}00056 = z\sqrt{\frac{2\sigma(s-\sigma)}{s^3}}, \quad z = 0{,}00056\sqrt{\frac{s^3}{2\sigma(1-\sigma)}}, \quad z = 0{,}47$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2}\,dz = 0{,}4937\ldots$$

i	N_i	$\frac{i}{12}-\alpha^0$	$\left(\frac{i}{12}-\alpha^0\right)^2$	$N_i\left(\frac{i}{12}-\alpha^0\right)^2$
0	185	$-0{,}33770$	0,11404	21,1
1	1149	$-0{,}25437$	0,06470	74,3
2	3265	$-0{,}17103$	0,02925	95,5
3	5475	$-0{,}08770$	0,00769	42,1
4	6114	$-0{,}00437$	0,00002	0,1
5	5194	$+0{,}07897$	0,00624	32,4
6	3067	$+0{,}16230$	0,02634	80,8
7	1331	$+0{,}24563$	0,06033	80,3
8	403	$+0{,}32897$	0,10822	43,6
9	105	$+0{,}41230$	0,16999	17,8
10	14	$+0{,}49563$	0,24565	3,4
11	4	$+0{,}57897$	0,33521	1,3

$$\sum N_i\left(\frac{i}{12}-\alpha^0\right)^2 = 492{,}7.$$

Кроме L, или L^2, часто вычисляют для контроля другой коэффициент дисперсии

$$Д = \frac{\frac{1}{n}\sum s_i^{\frac{3}{2}} \text{ чис. знач.} \left(\frac{\sigma_i}{s^{(i)}} - \frac{\sigma}{s}\right)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{\sigma}{s}\left(1-\frac{\sigma}{s}\right)}},$$

предложенный Дормуа (Journal des actuaires françaises. 1874, и E. Dormoy. Théorie mathématique des assurances sur la vie, 1878, T. I, p. 39, на том основании, что предельной величиной математического ожидания численного значения $\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ служит

$$\sqrt{\frac{8}{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,t\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

согласно выводам второй главы.

Для данного примера

$$Д = \frac{\sqrt{12\,.\,2840}}{26306\,.\sqrt{\frac{2}{\pi}\,.\,0{,}2236}} = 0{,}991$$

а для приведенных в 4-ой главе 90 серий, относящихся к Пражской лотерее, согласно вычислениям Чубера, имеем

$$Д = \frac{889}{90\sqrt{\frac{2\,.\,2854\,.\,17}{18^2\pi}}} = \frac{9{,}88}{9{,}76} = 1{,}012.$$

Следует заметить, что в случае Пражской лотереи числа $\sigma', \sigma'', \ldots, \sigma^{(n)}$ нельзя считать вполне независимыми друг от друга. Существование между ними зависимости могло бы очень усложнить наши выводы, если бы отношение $\frac{\sigma}{s}$ общего числа появлений нумеров $1, 2, \ldots, 90$ к числу тиражей, равное вероятности $\frac{1}{18}$ их появлений при отдельном тираже, не было известно до наблюдений. Последнее обстоятельство, напротив, существенно упрощает выводы, при чем за коэффициент дисперсии L^2 надо принять отношение

$$\frac{\sum s^{(i)}\left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}}-\frac{\sigma}{s}\right)^2}{n\frac{\sigma}{s}\left(1-\frac{\sigma}{s}\right)} \text{ точно равное } \frac{\sum s^{(i)}\left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}}-\alpha\right)^2}{n\,.\,\alpha(1-\alpha)};$$

и так как

$$\text{м. о. } s^{(i)}\left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}}-\alpha\right)^2=\alpha(1-\alpha),$$

то математическое ожидание указанного выражения равно единице.

На коэффициент дисперсии L впервые обратил внимание Лексис (W. Lexis. Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. 1877. Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs und Moralstatistik. 1903); а его ученик Борткевич посвятил выяснению значения L ряд своих статей, из которых мы упомянем только две: L. Bortkewitsch, „Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik" (Jahrb. für Nat.-Oek. u. Stat. LXIII, LXV, LXVI, 1893—1896) и „Das Gesetz der kleinen Zahlen", Leipzig, 1898.

Последний установил, хотя и не вполне строго, что в случае большого числа серий можно рассчитывать, с большею вероятностью, получить для L величину, близкую к единице, в предположении, конечно, существования одной вероятности для всех испытаний и независимости их. При том же основном предположении мы приведем здесь довольно простое и вполне строгое доказательство, что математическое ожидание принятого нами коэффициента дисперсии L^2 равно единице, если при $\sigma=0$ и при $\sigma=s$, когда L^2 принимает вид $\frac{0}{0}$, придавать ему значение 1.

Начнем с того, что сумму $\sum s^{(i)}\left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}}-\frac{\sigma}{s}\right)^2$ представим под видом $\sum\frac{\sigma^{(i)}\sigma^{(i)}}{s^{(i)}}-\frac{\sigma^2}{s}$, приведя таким образом L^2 к виду

$$L^2=\frac{(s-1)s\left\{\sum\frac{\sigma^{(i)}\sigma^{(i)}}{s^{(i)}}-\frac{\sigma^2}{s}\right\}}{(n-1)\sigma(s-\sigma)}.$$

Для вычисления математического ожидания этого выражения надо помножить его на вероятность

$$P=\frac{1.2\ldots s'\,\alpha^{\sigma'}(1-\alpha)^{s'-\sigma'}}{1.2\ldots\sigma'.1.2\ldots(s'-\sigma')}\cdots\cdots\frac{1.2\ldots s^{(n)}\,\alpha^{\sigma^{(n)}}(1-\alpha)^{s^{(n)}-\sigma^{(n)}}}{1.2\ldots\sigma^{(n)}\,1.2\ldots(s^{(n)}-\sigma^{(n)})}$$

совокупности чисел

$$\sigma',\ \sigma'',\ \ldots,\ \sigma^{(n)}$$

и затем взять сумму всех произведений PL^2. Это суммирование мы разобьем на две последовательных операции: в первом суммировании мы будем предполагать сумму $\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}$, обозначенную одною буквою σ, неизменною, а во втором нам придется изменять одно число σ. Такую последовательность операций можно при помощи двух знаков Σ изобразить так:

$$\sum^{\sigma=0,1,2,\ \ s}\ \sum^{\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}=\sigma} PL^2$$

При первом суммировании знаменатель $\sigma(s-\sigma)$ выражения L^2 сохраняет постоянную величину и потому задача о разыскании ΣPL^2 сводится к разысканию двух сумм

$$\sum^{\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}=\sigma} P\frac{\sigma^{(i)}\sigma^{(i)}}{s^{(i)}}\quad \text{и} \quad \sum^{\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}=\sigma} P,$$

для чего мы вводим $n+1$ произвольных независимых величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ t$$

и составляем функцию от них

$$V=(pte^{\xi_1}+q)^{s'}\,(qte^{\xi_2}+q)^{s''}\ldots(pte^{\xi_n}+q)^{s^{(n)}},$$

где $p=\alpha$ означает постоянную вероятность события E, а $q=1-\alpha$ вероятность противоположного события.

Чтобы найти при помощи V сумму

$$\sum^{\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}=\sigma} P,$$

стоит только приравнять все ξ_i нулю и затем, разложив полученное таким образом выражение

$$V_{\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_n=0} = (pt+q)^s,$$

по степеням t взять коэффициент при t^σ:

$$\frac{1.2.3\ldots s}{1.2.3\ldots\sigma.1.2\ldots(s-\sigma)}p^\sigma q^{s-\sigma},$$

который и будет равен искомой сумме

$$\sum^{\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}=\sigma} P.$$

Подобным же образом коэффициент при t^σ в выражении

$$\left(\frac{d^2 V}{d\xi_i^2}\right)_{\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_n=0}$$

будет равен сумме

$$\sum^{\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}=\sigma} P\sigma^{(i)}\sigma^{(i)},$$

ибо

$$V=\Sigma P t^{\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}} e^{\sigma'\xi_1+\sigma''\xi_2+\ldots+\sigma^{(i)}\xi_i+\ldots+\sigma^{(n)}\xi_n}$$

Дифференцируя V два раза по ξ_i и приравнивая все $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ нулю, получаем

$$\left(\frac{d^2 V}{d\xi_i^2}\right)_{\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_n=0} = s^{(i)}pt(pt+q)^{s-1}+s^{(i)}(s^{(i)}-1)p^2t^2(pt+q)^{s-2}$$

и отсюда выводим

$$\sum^{\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}=\sigma} P\frac{\sigma^{(i)}\sigma^{(i)}}{s^{(i)}}=\left\{\frac{1.2.3\ldots(s-1)}{1.2\ldots(\sigma-1)\,1.2\ldots(s-\sigma)}+\right.$$

$$\left.+(s^{(i)}-1)\frac{1.2.3\ldots(s-2)(\sigma-1)}{1.2\ldots(\sigma-1).1.2\ldots(s-\sigma)}\right\}p^{\sigma}q^{s-\sigma},$$

за исключением случаев $\sigma=0$ и $\sigma=s$, для которых, согласно сказанному выше, имеем $L^2=\frac{0}{0}=1$ и потому

$$\sum^{\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}=0} PL^2=q^s,\qquad \sum^{\sigma'+\ldots+\sigma^{(n)}=s} PL^2=p^s$$

Следовательно, при $0<\sigma<s$

$$\sum^{\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}=\sigma} P\left\{\frac{\sigma'\sigma'}{s'}+\frac{\sigma''\sigma''}{s''}+\ldots+\frac{\sigma^{(n)}\sigma^{(n)}}{s^{(n)}}-\frac{\sigma^2}{s}\right\}=$$

$$=\frac{1.2.3\ldots(s-2)}{1.2.3\ldots(\sigma-1).1.2\ldots.(s-\sigma)}$$

$$\left\{n(s-1)+(s-n)(\sigma-1)-\sigma(s-1)\right\}p^{\sigma}q^{s-\sigma}$$

$$=\frac{1.2.3\ldots(s-2)(n-1)}{1.2.3..(\sigma-1).1.2.3..(s-\sigma-1)}p^{\sigma}q^{s-\sigma}.$$

и потому

$$\sum^{\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}=\sigma} PL^2=\frac{1.2.3\ldots.s}{1.2\ldots\sigma.1.2..(s-\sigma)}p^{\sigma}q^{s-\sigma}$$

А так как то же равенство установлено уже раньше и для случаев $\sigma=0$, $\sigma=s$, то находим

$$\sum^{\sigma=0,1,2,\ldots,s}\ \sum^{\sigma'+\sigma''+\ldots+\sigma^{(n)}=\sigma} PL^2=(p+q)^s=1;$$

итак, действительно

$$\text{м. о. } L^2 = 1.$$

Тем же путем после довольно сложных выкладок можем придти к такому равенству *

$$\text{м. о. } (L^2-1)^2 =$$

$$= \frac{2s(s-n)}{(s-2)(s-3)(n-1)} \sum \frac{\sigma-1}{\sigma} \cdot \frac{s-\sigma-1}{s-\sigma} \cdot \frac{1.2\ldots s}{1.2\ldots\sigma.1.2\ldots(s-\sigma)} p^{\sigma} q^{s-\sigma},$$

если все n серий состоят из одинакового числа $\frac{s}{n}$ испытаний; отсюда затем вытекают неравенства

$$\text{м. о.}(L^2-1)^2 < \frac{2s(s-n)}{(s-2)(s-3)(n-1)} \text{ и при } n>5 \quad \text{м. о.}(L^2-1)^2 < \frac{2}{n-1},$$

которые доказывают, что при достаточно большом числе серий вероятность значительных отклонений L^2 от единицы будет сколь угодно мала.

Что касается случаев переменной вероятности, то для них математическое ожидание коэффициента дисперсии L^2 может быть, конечно, как больше, так и меньше единицы, в зависимости от того, как изменяется вероятность, при чем точное вычисление его весьма затруднительно, если только нельзя установить величину $\frac{\sigma}{s}$ до наблюдений, независимо от их результатов. Мы остановимся только на двух отдельных предположениях:

1) что вероятность изменяется только от серии к серии, оставаясь одною и тою же внутри серии,

2) что вероятность изменяется одинаковым образом внутри каждой серии,

при чем будем рассматривать только математическое ожидание дроби

$$\frac{\sum s^{(i)}\left\{\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}}-\frac{\sigma}{s}\right\}^2}{(n-1)\alpha(1-\alpha)} \quad \text{или} \quad \frac{\sum s^{(i)}\left\{\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}}-\frac{\sigma}{s}\right\}^2}{n\alpha(1-\alpha)}$$

* См. мою заметку „О коэффициенте дисперсии" в Изв. Акад. Наук за 1916 г.

Пусть вероятность изменяется от серии к серии, имея, соответственно значкам, отличающим серии, величины α', α'', ..., $\alpha^{(n)}$; так что

$$\text{м. о.} \frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} = \alpha^{(i)}, \quad \alpha = \text{м. о.} \frac{\sigma}{s} = \text{м. о.} \frac{\sigma' + \sigma'' + \ldots + \sigma^{(n)}}{s' + s'' + \ldots + s^{(n)}} =$$

$$= \frac{s'\alpha' + s''\alpha'' + \ldots + s^{(n)}\alpha^{(n)}}{s' + s'' + \ldots + s^{(n)}}$$

В таком случае имеем

$$\text{м. о.} \sum s^{(i)} \left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \frac{\sigma}{s} \right)^2 =$$

$$= \text{м. о.} \sum s^{(i)} \left\{ \frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \alpha^{(i)} - \left(\frac{\sigma}{s} - \alpha \right) + \alpha^{(i)} - \alpha \right\}^2$$

$$= \sum s^{(i)} (\alpha^{(i)} - \alpha)^2 + \text{м. о.} \sum s^{(i)} \left\{ \frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \alpha^{(i)} - \left(\frac{\sigma}{s} - \alpha \right) \right\}^2$$

$$= \sum s^{(i)} (\alpha^{(i)} - \alpha)^2 + \text{м. о.} \sum \left\{ s^{(i)} \left(1 - \frac{s^{(i)}}{s} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + (s - s^{(i)}) \left(\frac{s^{(i)}}{s} \right)^2 \right\} \left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \alpha^{(i)} \right)^2$$

$$= \sum s^{(i)} (\alpha^{(i)} - \alpha)^2 + \sum \frac{s - s^{(i)}}{s} \alpha^{(i)} (1 - \alpha^{(i)})$$

$$= \sum s^{(i)} (\alpha^{(i)} - \alpha)^2 + \sum \frac{s - s^{(i)}}{s} (\alpha + \alpha^{(i)} - \alpha)(1 - \alpha + \alpha - \alpha^{(i)})$$

$$= \sum \left(s^{(i)} - \frac{s - s^{(i)}}{s} \right) (\alpha^{(i)} - \alpha)^2 + (n - 1)\alpha(1 - \alpha) +$$

$$+ (1 - 2\alpha) \sum \frac{s - s^{(i)}}{s} (\alpha^{(i)} - \alpha)$$

$$= \sum \frac{s^{(i)}(s + 1) - s}{s} (\alpha^{(i)} - \alpha)^2 + (n - 1)\alpha(1 - \alpha) + (1 - 2\alpha)\Sigma(\alpha^{(i)} - \alpha)$$

и потому

$$\frac{\text{м. о.} \sum s^{(i)} \left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \frac{\sigma}{s}\right)^2}{(n-1)\alpha(1-\alpha)} = 1 + \sum \frac{s^{(i)}(s+1) - s}{s(n-1)} \cdot \frac{(\alpha^{(i)}-\alpha)^2}{\alpha(1-\alpha)} +$$

$$+ \frac{1-2\alpha}{\alpha(1-\alpha)} \sum \frac{\alpha^{(i)}-\alpha}{n-1}$$

Если числа $s^{(i)}$ различны, то третий член правой части полученной нами формулы может быть как положительным, так и отрицательным, в силу чего все выражение может как превышать единицу, так быть и меньше ее. А в случае серии одной длины

$$s' = s'' = \ldots = s^{(n)} = \frac{s}{n}$$

этот третий член приводится к нулю, и мы приходим к формуле Лексиса-Борткевича

$$\frac{\text{м. о.} \sum \frac{s}{n} \left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \frac{\sigma}{s}\right)^2}{(n-1)\alpha(1-\alpha)} = 1 + \frac{s-n+1}{n(n-1)} \sum \frac{(\alpha^{(i)}-\alpha)^2}{\alpha(1-\alpha)},$$

в силу которой мы можем рассчитывать получить для коэффициента дисперсии L^2 величину большую единицы, если вероятность меняется от серии к серии.

Приведенная нами выкладка значительно упрощается, если отношение $\frac{\sigma}{s}$ не зависит от результатов наблюдений, а точно равно числу α, так что $\frac{\sigma}{s} - \alpha = 0$. При $\frac{\sigma}{s} = \alpha$

имеем

$$\text{м. о.} \sum s^{(i)} \left\{\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \frac{\sigma}{s}\right\}^2 = \text{м. о.} \sum s^{(i)} \left\{\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \alpha^{(i)} + \alpha^{(i)} - \alpha\right\}^2$$

$$= \sum s^{(i)} (\alpha^{(i)} - \alpha)^2 + \sum s^{(i)} \left\{\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \alpha^{(i)}\right\}^2 = \sum s^{(i)} (\alpha^{(i)} - \alpha)^2 +$$

$$+ \sum \alpha^{(i)} (1 - \alpha^{(i)})$$

$$= \Sigma s^{(i)} (\alpha^{(i)} - \alpha)^2 + n\alpha(1-\alpha) - \Sigma (\alpha^{(i)} - \alpha)^2 + (1-2\alpha) \Sigma (\alpha_i - \alpha),$$

откуда выводим

$$\text{м. о. } L^2 = \text{м. о. } \frac{\sum s^{(i)} \left\{ \frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \frac{\sigma}{s} \right\}}{n \frac{\sigma}{s} \left(1 - \frac{\sigma}{s}\right)} = 1 + \frac{\Sigma (s^{(i)} - 1)(\alpha^{(i)} - \alpha)^2}{n\alpha(1-\alpha)} +$$

$$+ \frac{(1 - 2\alpha)\Sigma(\alpha_i - \alpha)}{n\alpha(1-\alpha)}$$

и в частности при

$$s' = s'' = \ldots = s^{(n)} = \frac{s}{n}$$

получаем

$$\text{м. о. } L^2 = 1 + \frac{(s - n)\Sigma(\alpha^{(i)} - \alpha)^2}{n^2\alpha(1-\alpha)}.$$

Следует заметить, что равенство $\frac{\sigma}{s} = \alpha$ устанавливает связь между значениями σ', σ'', ..., $\sigma^{(n)}$, но это обстоятельство, как и в ранее отмеченном случае, не мешает нашим выкладкам, благодаря тому, что в них не встречается произведений

$$\left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \alpha\right)\left(\frac{\sigma^{(j)}}{s^{(j)}} - \alpha\right)$$

с различными значками i, j.

Перейдем к другому предположению, что вероятность меняется только внутри каждой серии, средняя же вероятности для всех серий имеет одну и ту же величину α. Пусть вероятности события E для испытаний серии (i) будут $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, ..., $\alpha_j^{(i)}$, ... и средняя арифметическая их равна α:

$$\frac{\sum \alpha_j^{(i)}}{s^{(i)}} = \text{м. о. } \frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} = \alpha \; (j = 1, 2, \ldots s^{(i)})$$

В таком случае имеем

$$\text{м. о.} \sum s^{(i)} \left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \frac{\sigma}{s} \right)^2 = \text{м. о.} \sum s^{(i)} \left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \alpha - \left(\frac{\sigma}{s} - \alpha \right) \right)^2$$

$$= \text{м. о.} \sum \left\{ s^{(i)} \left(1 - \frac{s^{(i)}}{s} \right)^2 + (s - s^{(i)}) \left(\frac{s^{(i)}}{s} \right)^2 \right\} \left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \alpha \right)^2$$

$$= \sum \frac{(s - s^{(i)})\, s^{(i)}}{s} \,\text{м. о.} \left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \alpha \right)^2,$$

$$\text{и м. о.} \left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \alpha \right)^2 = \text{м. о.} \left\{ \frac{\Sigma (\sigma_j^{(i)} - \alpha_j^{(i)})}{s^{(i)}} \right\}^2 = \frac{\Sigma \alpha_j^{(i)} (1 - \alpha_j^{(i)})}{s^{(i)} s^{(i)}} =$$

$$= \frac{s_i \alpha (1 - \alpha) - \Sigma (\alpha_j^{(i)} - \alpha)^2}{s^{(i)} s^{(i)}},$$

где $\sigma_j^{(i)}$ означает 1 или 0, смотря по результату испытания, отмеченного нумерами (i), j, и математическое ожидание $\sigma_j^{(i)}$ равно $\alpha_j^{(i)}$.

Следовательно

$$\text{м. о.} \sum s^{(i)} \left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \frac{\sigma}{s} \right)^2 = \sum \frac{s - s^{(i)}}{s} \alpha (1 - \alpha) - \sum \sum \frac{s - s^{(i)}}{s s^{(i)}} (\alpha_j^{(i)} - \alpha)^2$$

$$= (n - 1) \alpha (1 - \alpha) - \sum \sum \left(\frac{1}{s^{(i)}} - \frac{1}{s} \right) (\alpha_j^{(i)} - \alpha)^2$$

и

$$\frac{\text{м. о.} \sum s^{(i)} \left(\frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \frac{\sigma}{s} \right)^2}{(n - 1) \alpha (1 - \alpha)} = 1 - \frac{\sum \sum \left(\frac{1}{s^{(i)}} - \frac{1}{s} \right) (\alpha_j^{(i)} - \alpha)^2}{(n - 1) \alpha (1 - \alpha)},$$

в силу чего мы имеем основание ожидать, что коэффициент дисперсии при указанном предположении будет меньше единицы.

Один из примеров серий с большим коэффициентом дисперсии получается из вышеупомянутых опытов Вольфа и приведен в „Warscheinlichkeitsrechnung" Чубера (Czuber). Эти серии составлены из результатов 20000 одновременных бросаний белого и красного кубика, причем отдельно подсчитывались появления каждой из 36 пар нумеров: 1 и 1, 1 и 2, ..., 6 и 6. Результаты такого подсчета, дающего 36 серий появлений определенной пары, со среднею вероятностью $\frac{1}{36}$ приведены в табличке

№ белого кубика

№ красного кубика

	1	2	3	4	5	6	Сумма
1	547	587	500	462	621	690	3407
2	609	655	497	535	651	684	3631
3	514	540	468	438	587	629	3176
4	462	507	414	413	509	611	2916
5	551	562	499	506	658	672	3448
6	563	598	519	487	609	646	3422
Сумма	3246	3449	2897	2841	3635	3932	20000

Здесь в клетках поставлены числа появлений каждой пары. На основании этой таблички получаем

$\sigma^{(i)}$	$\sigma^{(i)} - s^{(i)}\alpha$	$(\sigma^{(i)} - s^{(i)}\alpha)^2$	$\sigma^{(i)}$	$\sigma^{(i)} - s^{(i)}\alpha$	$\sigma^{(i)} - s^{(i)}\alpha$
413	− 143	20449	562	+ 6	36
414	− 142	20164	563	7	49
438	− 118	13924	587	31	961
462	− 94	8836	587	31	961
462	− 94	8836	598	42	1764
468	− 88	7744	609	53	2809
487	− 69	4761	609	53	2809
497	− 59	3481	611	55	3025
499	− 57	3249	621	65	4225
500	− 56	3136	629	73	5329
506	− 50	2500	646	90	8100
507	− 49	2401	651	95	9025
509	− 47	2209	655	99	9801
514	− 42	1764	658	102	10404
519	− 37	1369	672	116	13456
535	− 21	441	684	128	16384
540	− 16	256	690	134	17956
547	− 9	81	10632	1180	107094
551	− 5	25	9368	1196	105626
9368	− 1196	105626	20000	2376	212720

и затем

$$L^2 = \frac{212720}{20000\,\frac{35}{36}} = 10{,}94\,,\; L = 3{,}3$$

Значительную величину коэффициента дисперсии в данном случае можно объяснить тем, что вероятности различных пар неодинаковы; при таком объяснении эти пары представляют пример серий с различными вероятностями $\alpha^{(i)}$, что может служить указанием на неправильность костей или на какую-то особенность в обстановке испытаний. Р. Вольф получает (a posteriori) на основании приведенных чисел такие вероятности появлений отдельных нумеров 1, 2, 3, 4, 5, 6: для белого кубика

$$\frac{3246}{20000} = 0{,}16230,\ 0{,}17245,\ 0{,}14485,\ 0{,}14205,\ 0{,}18175,\ 0{,}19160$$

и для красного кубика

$$\frac{3407}{20000} = 0{,}17035,\ 0{,}18155,\ 0{,}15880,\ 0{,}14580,\ 0{,}17240,\ 0{,}17110;$$

и по этим числам, пользуясь теоремой умножения вероятностей, он вычислил вероятности всех 36 пар нумеров. Впоследствии (Vierteljahr. für Naturf. Ges. zu Zürich, 1893), сообщая результаты других 10000 подобных же испытаний с четырьмя кубиками (белым, красным, желтым и голубым), он привел также результаты своих измерений расстояний между противоположными сторонами кубиков, обнаруживающие неправильности кубиков: для белого кубика расстояния между сторонами 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4 оказались равными

$$16^{\text{мм}},091,\ 16^{\text{мм}},238,\ 16^{\text{мм}},563.$$

Неизвестно только, относятся ли эти числа к тому же белому кубику, с каким были произведены прежние испытания, или к другому; и нельзя сказать, как следует ими воспользоваться для соответствующего изменения вероятностей, хотя бы они относились к тому же самому кубику.

Для примера остановимся еще на давно установленном замечательном факте: постоянном небольшом преобладании среди новорожденных мужского пола над женским. По данным, присоединенным Бюффоном к „Essai d'Arithmétique Morale" *, можно составить такую табличку:

* Oeuvres complètes de M. le Cte de Buffon 1778. 8° (малый октав). Tome Dixième. Oeuvres complètes de Buffon revues sur l'edition in 4° de l'Imprimerie Royale et annotées par M. Flourens. Tome XII (большой октав).

Годы	Янв.	Февр.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.	Ноябрь	Дек.	ИТОГ
1747	796/1608	755/1499	840/1630	782/1546	780/1529	703/1383	758/1449	845/1649	818/1575	819/1642	802/1507	696/1429	9394/18446
1748	844/1717	811/1617	894/1734	786/1530	687/1338	681/1312	718/1436	785/1528	806/1521	825/1551	665/1330	695/1293	9197/17907
1749	865/1624	823/1612	896/1800	794/1543	836/1683	810/1561	836/1542	809/1592	823/1592	782/1570	804/1567	741/1472	9819/19158
1750	895/1738	765/1534	846/1677	790/1545	835/1597	743/1440	813/1550	803/1615	803/1595	827/1583	817/1566	774/1595	9711/19035
1751	951/1858	858/1697	947/1746	825/1606	770/1516	750/1460	725/1424	840/1670	868/1672	870/1695	779/1557	722/1420	9905/19321
1752	930/1761	865/1736	920/1818	893/1750	913/1770	798/1576	763/1518	899/1675	858/1675	880/1726	784/1594	810/1628	10308/20227
1753	1011/1951	897/1705	888/1816	894/1707	919/1756	777/1469	795/1558	865/1647	809/1545	780/1543	796/1594	798/1438	10229/19729
1754	918/1799	849/1741	884/1698	754/1555	769/1573	776/1513	767/1484	770/1557	817/1586	750/1549	724/1435	729/1419	9507/18909
1755	882/1769	838/1712	955/1885	906/1774	836/1676	743/1463	816/1590	756/1565	839/1620	743/1511	657/1362	754/1485	9725/19412
1756	893/1786	868/1705	899/1766	839/1622	863/1758	837/1655	850/1679	870/1724	772/1613	831/1612	886/1608	761/1478	10169/20006
1757	866/1739	933/1744	897/1801	832/1615	864/1667	748/1460	826/1630	767/1543	840/1589	817/1637	817/1509	724/1435	9931/19369
1758	867/1710	800/1582	885/1817	810/1557	769/1526	778/1525	749/1532	867/1695	777/1589	825/1636	739/1429	811/1550	9677/19148
1759	861/1704	850/1619	788/1496	775/1502	823/1620	737/1417	858/1668	796/1564	860/1697	843/1661	830/1609	777/1501	9798/19058
1760	878/1671	857/1692	881/1659	802/1551	701/1413	756/1391	709/1453	720/1378	734/1482	759/1550	704/1367	713/1384	9214/17991
1761	886/1750	767/1507	848/1690	784/1536	782/1523	675/1299	753/1461	839/1620	797/1544	814/1559	688/1398	781/1487	9414/18374
1762	854/1614	767/1498	805/1623	726/1447	757/1458	650/1298	726/1469	795/1549	819/1534	768/1533	697/1442	683/1344	9047/17809
1763	861/1614	750/1441	811/1578	687/1370	787/1467	684/1400	728/1426	765/1494	724/1427	730/1471	751/1450	667/1331	8945/17469
1764	813/1652	839/1697	870/1771	792/1601	836/1668	747/1523	819/1617	821/1607	791/1549	874/1614	764/1547	777/1558	9745/19404
1765	789/1595	825/1626	916/1756	771/1542	850/1655	796/1539	792/1565	819/1678	833/1623	850/1699	833/1601	798/1559	9872/19439
1766	948/1828	893/1671	869/1704	810/1578	768/1525	678/1372	787/1561	830/1601	779/1545	744/1478	708/1425	728/1485	9542/18773
Итог	17608/34488	16610/32635	17539/34465	16052/31477	16145/31718	14867/29056	15588/30612	16261/31952	16164/31573	16131/31820	15245/29897	14939/29291	193149/378984

Знаменатели этой таблички дают общее число родившихся в Париже за указанные месячные промежутки времени, а числители — сколько между ними было мальчиков. Общий итог за все 20 лет дает, для вероятности новорожденному быть мальчиком, число

$$\frac{193149}{378984} = 0{,}50965;$$

отдельные же годовые итоги дают нам двадцать чисел

0,50927, 0,51360, 0,51253, 0,51016, 0,51265, 0,50962, 0,51848, 0,50278, 0,50098, 0,50830, 0,51273, 0,50538, 0,51411, 0,51220, 0,51236, 0,50800, 0,51205, 0,50222, 0,50785, 0,50828,

разности которых с числом 0,50965, по умножении на 10^5, образуют следующую совокупность чисел $10^5\delta_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, 20)$:

$$-38,\ +395,\ +288,\ +51,\ +300,\ -3,\ +883,\ -687,\ -867,\ -135,\ +308,\ -427,\ +446,\ +255,\ +271,\ -165,\ +240,\ -743,\ -180,\ -137.$$

Вычисляя коэффициент дисперсии годовых итогов, составляем следующую таблицу

$\log s^{(i)}$	$2\log(\delta_i)+10$	$\log s^{(i)}\delta_i^2$	$s^{(i)}\delta_i^2$	$10^{10}\delta_i^2$
4,2659022	3,1595672	$\bar{3}{,}425469$	0,0027	1444
4,2530228	5,1931942	$\bar{1}{,}446217$	0,2794	156025
4,2823502	4,9187850	$\bar{1}{,}201135$	0,1589	82944
4,2795529	3,4151404	$\bar{3}{,}694693$	0,0051	2601
4,2860296	4.9542426	$\bar{1}{,}240272$	0,1739	90000
4,3059315	0,9542426	$\bar{5}{,}260174$	0,0000	9
4,2951051	5,8919214	0,187027	1,5382	779689
4,2766686	5,6739144	$\bar{1}{,}950583$	0,8924	471969
4,2880703	5,8760382	0,164108	1,4592	751689

* Общие годовые итоги, без разделения по полу, можно найти также в статье Бертильона „Des Recensements de la population de la nuptialité de la natalité et de la mortalité à Paris pendant le XIX siècle et les époques antérieures" (Annexe à l'Annuaire statistique de la ville de Paris pour 1905).

$\log s^{(i)}$	$2\log(\delta_i)+10$	$\log s^{(i)}\delta_i^2$	$s^{(i)}\delta_i^2$	$10^{10}\delta_i^2$
4,3011603	4,2670778	$\bar{2}$,568238	0,0370	18496
4,2871072	4,9771014	$\bar{1}$,264209	0,1837	94864
4,2821234	5,2608558	$\bar{1}$,542979	0,3491	182329
4,2800773	5,2986697	$\bar{1}$,578747	0,3791	198916
4,2550553	4,8130804	$\bar{1}$,068136	0,1170	65025
4,2642037	4,8659386	$\bar{1}$,130142	0,1349	73441
4,2506395	4,4349679	$\bar{2}$,685607	0,0485	27225
4,2422680	4,7604225	$\bar{1}$,002690	0,1006	57600
4,2878913	5,7419776	0,029869	1,0712	552049
4,2886739	4,5105450	$\bar{2}$,799219	0,0630	32400
4,2735337	4,2734411	$\bar{2}$,546975	0,0352	18769

$19 \times 0,50965 \times 0,49035 = 4,7482 \quad \Sigma s^{(i)}\delta_i^2 = 7,0291 \quad 3657484 = \Sigma 10^{10}\delta_i^2$

и на основании ее получаем

$$L^2 = \frac{7,0291}{4,7482} = 1,48;$$

для упрощения выкладок можно было бы воспользоваться и суммою чисел последнего столбца в виду того, что ежегодное число рождений, хотя и не оставалось одинаковым для всего взятого нами промежутка времени (20 лет), но не очень уклонялось от среднего числа

$$\frac{378984}{20} = 18949,2.$$

Полагая на этом основании все s_i равными 18949,2, находим

$$L^2 = \frac{18949,2 \times 0,00036575}{4,7482} = \frac{6,9307}{4,7482} = 1,46,$$

число, близкое к вышеуказанному.

Месячные же итоги за двадцать лет доставляют нам двенадцать чисел

0,51055, 0,50896, 0,50889, 0,50996, 0,50902, 0,51167, 0,50921, 0,50892, 0,51196, 0,50695, 0,50992, 0,51002,

разности которых с числом 0,50965 по умножении на 10^5 образуют следующий ряд чисел

$$+90, \ -69, \ -76, \ +31, \ -63, \ +202, \ -44, \ -73, \ +231, \ -270, \ +27, \ +37.$$

Для вычисления нового коэффициента дисперсии составляем табличку подобную прежней

$\log s^{(i)}$	$2\log(\delta_i)+10$	$\log s^{(i)}\delta_i^2$	$s^{(i)}\delta_i^2$	$10^{10}\delta_i^2$
4,537668	3,908485	$\bar{2}$,446153	0,02794	8100
4,513684	3,677698	$\bar{2}$,191382	0,01554	4761
4,537378	3,761627	$\bar{2}$,299005	0,01991	5776
4,497993	2,982723	$\bar{3}$,480716	0,00302	961
4,501306	3,598681	$\bar{2}$,099987	0,01259	3969
4,463236	4,610703	$\bar{1}$,073939	0,11856	40804
4,485892	3,286905	$\bar{3}$,772797	0,00593	1936
4,504498	3,726646	$\bar{2}$,231144	0,01703	5329
4,499316	4,727224	$\bar{1}$,226540	0,16848	53361
4,502700	4,862728	$\bar{1}$,365428	0,23197	72900
4,475628	2,862728	$\bar{3}$,338356	0,00218	729
4,466734	3,136403	$\bar{3}$,603137	0,00401	1369

$$11 \times 0{,}50965 \times 0{,}49035 = 2{,}7490 \quad \Sigma s^{(i)}\delta_i^2 = 0{,}62716 \quad 199995 = \Sigma\, 10^{10}\delta_i^2.$$

Коэффициент дисперсии вероятностей, полученных на основании месячных итогов, оказывается меньшим не только единицы, но и $\frac{1}{4}$:

$$L^2 = \frac{0{,}62716}{2{,}7490} = 0{,}228,$$

или по упрощенному вычислению

$$L^2 = \frac{31582 \times 0{,}00002}{2{,}7490} = \frac{0{,}6316}{2{,}7490} = 0{,}23.$$

Это факт мы не можем объяснять существованием какой-то компенсирующей связи между наблюдениями, относящимися к одному месяцу и различным годам; но только малостью числа серий, благодаря которому значительные отклонения числа L^2 от его математического ожидания, равного единице, не являются слишком мало вероятными.

Чтобы выяснить, имеем ли мы здесь дело с общим или частным фактом, приведем подобные же вычисления для другого времени и места.

По данным, приведенным в „Bulletin Mensuel de statistique Municipale de la Ville de Buénos-Ayres" и в „Annuaire statistique de la Ville de Buénos-Ayres" (1901 — 1910 гг.), мы можем составить такую таблицу:

Годы	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь	ИТОГ
1901	$\frac{1426}{2763}$	$\frac{1172}{2332}$	$\frac{1368}{2671}$	$\frac{1505}{2940}$	$\frac{1569}{3059}$	$\frac{1362}{2642}$	$\frac{1585}{3140}$	$\frac{1445}{2871}$	$\frac{1316}{2657}$	$\frac{1476}{2928}$	$\frac{1371}{2706}$	$\frac{1290}{2589}$	$\frac{16885}{33298}$
1902	$\frac{1396}{2676}$	$\frac{1240}{2532}$	$\frac{1300}{2572}$	$\frac{1425}{2849}$	$\frac{1475}{2815}$	$\frac{1396}{2758}$	$\frac{1480}{2944}$	$\frac{1389}{2775}$	$\frac{1450}{2845}$	$\frac{1377}{2711}$	$\frac{1237}{2430}$	$\frac{1282}{2523}$	$\frac{16447}{32430}$
1903	$\frac{1354}{2632}$	$\frac{1283}{2477}$	$\frac{1371}{2671}$	$\frac{1289}{2575}$	$\frac{1369}{2658}$	$\frac{1398}{2725}$	$\frac{1517}{2934}$	$\frac{1376}{2690}$	$\frac{1362}{2649}$	$\frac{1361}{2707}$	$\frac{1256}{2424}$	$\frac{1225}{2494}$	$\frac{16161}{31636}$
1904	$\frac{1368}{2583}$	$\frac{1300}{2599}$	$\frac{1507}{2807}$	$\frac{1351}{2611}$	$\frac{1417}{2817}$	$\frac{1417}{2811}$	$\frac{1353}{2703}$	$\frac{1500}{2937}$	$\frac{1411}{2759}$	$\frac{1380}{2654}$	$\frac{1436}{2742}$	$\frac{1400}{2739}$	$\frac{16840}{32762}$
1905	$\frac{1419}{2751}$	$\frac{1247}{2532}$	$\frac{1537}{2944}$	$\frac{1367}{2664}$	$\frac{1627}{3081}$	$\frac{1509}{2982}$	$\frac{1531}{2981}$	$\frac{1600}{3063}$	$\frac{1503}{2896}$	$\frac{1487}{2878}$	$\frac{1410}{2776}$	$\frac{1369}{2655}$	$\frac{17606}{34203}$
1906	$\frac{1462}{2868}$	$\frac{1321}{2591}$	$\frac{1557}{3068}$	$\frac{1409}{2813}$	$\frac{1636}{3236}$	$\frac{1589}{3181}$	$\frac{1716}{3201}$	$\frac{1614}{3219}$	$\frac{1520}{2965}$	$\frac{1575}{3098}$	$\frac{1500}{2914}$	$\frac{1463}{2855}$	$\frac{18362}{36009}$
1907	$\frac{1614}{3184}$	$\frac{1444}{2850}$	$\frac{1521}{2979}$	$\frac{1731}{3376}$	$\frac{1816}{3548}$	$\frac{1680}{3243}$	$\frac{1819}{3657}$	$\frac{1739}{3360}$	$\frac{1666}{3312}$	$\frac{1768}{3685}$	$\frac{1607}{3145}$	$\frac{1560}{3022}$	$\frac{19965}{39361}$
1908	$\frac{1681}{3271}$	$\frac{1625}{3081}$	$\frac{1691}{3344}$	$\frac{1752}{3475}$	$\frac{1749}{3390}$	$\frac{1723}{3470}$	$\frac{1919}{3762}$	$\frac{1745}{3481}$	$\frac{1704}{3420}$	$\frac{1763}{3429}$	$\frac{1654}{3198}$	$\frac{1760}{3483}$	$\frac{20766}{40804}$
1909	$\frac{1748}{3363}$	$\frac{1558}{3101}$	$\frac{1868}{3666}$	$\frac{1745}{3418}$	$\frac{1707}{3430}$	$\frac{1836}{3577}$	$\frac{1976}{3835}$	$\frac{1870}{3682}$	$\frac{1995}{3905}$	$\frac{1892}{3610}$	$\frac{1814}{3669}$	$\frac{1721}{3449}$	$\frac{21730}{42705}$
1910	$\frac{1882}{3663}$	$\frac{1696}{3276}$	$\frac{2002}{3862}$	$\frac{1762}{3485}$	$\frac{1792}{3458}$	$\frac{1961}{3907}$	$\frac{1984}{3837}$	$\frac{2040}{4104}$	$\frac{2096}{3990}$	$\frac{1928}{3785}$	$\frac{1913}{3751}$	$\frac{1989}{3888}$	$\frac{23045}{45001}$
Итог	$\frac{15350}{29754}$	$\frac{13886}{27371}$	$\frac{15722}{30584}$	$\frac{15336}{30206}$	$\frac{16157}{31487}$	$\frac{15871}{31296}$	$\frac{16880}{32994}$	$\frac{16318}{32182}$	$\frac{16023}{31398}$	$\frac{16007}{31485}$	$\frac{15198}{29755}$	$\frac{15059}{29697}$	$\frac{187807}{368209}$

Общий итог за все десять лет дает для вероятности новорожденному в Буэнос-Айресе быть мальчиком такое число

$$\frac{187807}{368209} = 0{,}5101.$$

Не стремясь к ненужной для нас точности выкладок и по возможности упрощая их, получаем по годовым итогам десять вероятностей

0,5071, 0,5072, 0,5108, 0,5140, 0,5148, 0,5099, 0,5072, 0,5090, 0,5088, 0,5121,

разности которых с числом 0,5101 по умножении на 10^4 образуют такую совокупность

$-30,\ -29,\ +7,\ +39,\ +47,\ -2,\ -29,\ -11,\ -13,\ +20.$

Складываем квадраты последних чисел и умножаем эту сумму на среднее число 37000 годовых рождений, затем делим на $9 \cdot 10^8$ и на произведение $0{,}51 \times 0{,}49$

900	4	5520	261035	9	
841	841	1535	18	0,290	0,25
49	121	7055	81		1,16
1521	169	$\times$ 37000	0,49		
2209	400	49385	$\times$ 0,51	$L^2 = 1{,}16$	
5520	1535	21165	49		
		261035000	245		
			0,2499		

Месячные же итоги за десять лет доставляют нам двенадцать чисел:

0,5159, 0,5073, 0,5141, 0,5077, 0,5131, 0,5071, 0,5116, 0,5071, 0,5103, 0,5084, 0,5107, 0,5071

разности которых с числом 0,5101 по умножении на 10^4 образуют такую совокупность:

$+58,\ -28,\ +40,\ -24,\ +30,\ -30,\ +15,\ -30,\ +2,\ -17,\ +6,\ -30.$

Складываем квадраты последних чисел, умножаем эту сумму на среднее число месячных рождений за десять лет 31000, затем делим на $11 \cdot 10^8$ и на произведение $0{,}51 \times 0{,}49$

3364	225	2354	3,2482	11	
784	900	8124	22	0,2953	0,25
1600	4	10478	104	25	1,18
576	289	31000	99	45	
900	36	10478	58		
900	900	31434		$L^2 = 1{,}18$	
8124	2354	324818000			

В данном случае коэффициент дисперсии для месячных итогов так же превосходит единицу, как и для годовых.

§ 46. *Случаи многих неизвестных.*

Переходя к случаю многих неизвестных, положим, что требуется найти m чисел

$$a_1, \ a_2, \ldots, \ a_m$$

и что наблюдения дали приближенные значения

$$b', \ b'', \ldots, \ b^{(n)}$$

выражений

$$A'_1 a_1 + A'_2 a_2 + \ldots + A'_m a_m,$$

$$A''_1 a_1 + A''_2 a_2 + \ldots + A''_m a_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1^{(n)} a_1 + A_2^{(n)} a_2 + \ldots + A_m^{(n)} a_m,$$

линейных относительно искомых чисел. Коэффициенты A этих n выражений мы предполагаем числами данными.

Каждое наблюдение мы будем попрежнему рассматривать как частный случай многих наблюдений. Соответственно этому рядом с каждым числом $b^{(j)}$, которое доставлено наблюдением и представляет приближенное значение суммы

$$A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \ldots + A_m^{(j)} a_m,$$

мы будем рассматривать возможный результат $u^{(j)}$ того же наблюдения.

Вместе с тем мы будем предполагать, что равенство

$$A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} A_2 + \ldots A_m^{(j)} a_m \doteq b^{(j)}$$

свободно от постоянной погрешности; другими словами будем считать математическое ожидание числа $u^{(j)}$ равным сумме

$$A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \ldots + A_m^{(j)} a_m.$$

Степень достоинства приближенных равенств

$$A'_1 a_1 + A'_2 a_2 + \ldots + A'_m a_m \doteq b',$$

$$A''_1 a_1 + A''_2 a_2 + \ldots + A''_m a_m \doteq b'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1^{(n)} a_1 + A_2^{(n)} a_2 + \ldots + A_m^{(n)} a_m \doteq b^{(n)}$$

мы будем оценивать их весами

$$p', p'', \ldots, p^{(n)},$$

полагая

$$\text{м. о. } [u^{(j)} - c^{(j)}]^2 = \frac{k}{p^{(j)}},$$

при

$$c^{(j)} = A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \ldots + A_m^{(j)} a_m.$$

Наблюдения мы будем предполагать независимыми для того, чтобы математические ожидания произведений каждых двух различных множителей, из совокупности

$$u' - c', \; u'' - c'', \; \ldots \ldots, \; u^{(n)} - c^{(n)},$$

приводились к нулю.

Затем мы рассмотрим отдельно два предположения.

Начнем с предположения, что нам неизвестно никаких соотношений между искомыми числами

$$a_1, \; a_2, \; \ldots \ldots, \; a_m.$$

Пусть a_l означает одно из искомых чисел.

Для вывода из вышеприведенных равенств приближенной величины a_l вводим вспомогательные множители

$$\lambda', \; \lambda'', \; \ldots \ldots, \; \lambda^{(n)}$$

и полагаем

$$a_l \doteq \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)}.$$

Коэффициенты

$$\lambda', \; \lambda'', \; \ldots \ldots, \; \lambda^{(n)}$$

мы подчиним таким же двум условиям, как и в случае одного неизвестного.

Первое условие состоит в том, чтобы из установленных положений несомненно следовало, что равенство

$$a_l \doteq \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)}$$

свободно от постоянной погрешности. В силу этого условия мы рассматриваем только такие совокупности чисел

$$\lambda', \; \lambda'', \; \ldots \ldots, \; \lambda^{(n)},$$

для каждой из которых выполняется равенство

$$\text{м. о. } (\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}) = a_l$$

при произвольных значениях

$$a_1, a_2, \ldots, a_m.$$

Но

$$\text{м. о. } (\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}) = \lambda' c' + \lambda'' c'' + \ldots + \lambda^{(n)} c^{(n)}$$

и

$$c^{(j)} = A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \ldots + A_m^{(j)} a_m,$$

поэтому равенство

$$\text{м. о. } (\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}) = a_l$$

приводится к следующему

$$\left.\begin{array}{r} (A'_1\lambda' + A''_1\lambda'' + \ldots + A_1^{(n)}\lambda^{(n)})\, a_1 \\ + (A'_2\lambda' + A''_2\lambda'' + \ldots + A_2^{(n)}\lambda^{(n)})\, a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (A'_m\lambda' + A''_m\lambda'' + \ldots + A_m^{(n)}\lambda^{(n)})\, a_m \end{array}\right\} = a_l,$$

которое в виду неопределенности чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

разбивается на m равенств; а именно, должно быть

$$\left.\begin{array}{l} A'_l\lambda' + A''_l\lambda'' + \ldots + A_l^{(n)}\lambda^{(n)} = 1 \\ \text{и} \quad A'_i\lambda' + A''_i\lambda'' + \ldots + A_i^{(n)}\lambda^{(n)} = 0 \end{array}\right\} \quad (*),$$

где i означает любое из чисел

$$1,\ 2, \ldots, m,$$

кроме l.

Второе условие состоит в том, чтобы вес нашего равенства

$$a_l = \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)}$$

был наибольшим. Мы найдем этот вес, рассматривая математическое ожидание квадрата разности

$$\xi_l - a_l,$$

где

$$\xi_l = \lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}.$$

Что же касается разности

$$\xi_l - a_l,$$

то она равна

$$\lambda' (u' - c') + \lambda'' (u'' - c'') + \ldots + \lambda^{(n)} (u^{(n)} - c^{(n)});$$

ибо

$$a_l = \lambda' c' + \lambda'' c'' + \ldots + \lambda^{(n)} c^{(n)}.$$

Поэтому

$$(\xi_l - a_l)^2 = \lambda' \lambda' (u' - c')^2 + \lambda'' \lambda'' (u'' - c'')^2 + \ldots + \lambda^{(n)} \lambda^{(n)} (u^{(n)} - c^{(n)})^2$$
$$+ 2\lambda' \lambda'' (u' - c')(u'' - c'') + \ldots$$

и

$$\text{м. о. } (\xi_l - a_l)^2 = k \left\{ \frac{\lambda' \lambda'}{p'} + \frac{\lambda'' \lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)} \lambda^{(n)}}{p^{(n)}} \right\};$$

следовательно, вес рассматриваемого приближенного равенства выражается дробью

$$\frac{1}{\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}},$$

как и в случае одного неизвестного, и достигает своего наибольшего значения тогда, когда сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигает своего наименьшего значения.

Мы пришли таким образом к следующей задаче.

Из различных совокупностей коэффициентов

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)},$$

удовлетворяющих условиям (*), найти ту, для которой сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигает своей наименьшей величины.

Чтобы применить к этой задаче известный способ вспомогательных множителей, составляем выражение

$$S=\frac{1}{2}T-\mu_1 T_1-\mu_2 T_2\ldots-\mu_m T_m,$$

где

$$T=\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}},$$

$$T_1=A'_1\lambda'+A''_1\lambda''+\ldots+A_1^{(n)}\lambda^{(n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_m=A'_m\lambda'+A''_m\lambda''+\ldots+A_m^{(n)}\lambda^{(n)},$$

коэффициенты же

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ldots,\ \mu_m$$

представляют вспомогательные неизвестные. Считая числа

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ldots,\ \mu_m$$

постоянными, а

$$\lambda',\ \lambda'',\ \ldots\ldots,\ \lambda^{(n)}$$

переменными, согласно известному правилу, приравниваем нулю производные от S по каждому из этих переменных.

Мы получаем систему n уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\lambda'}{p'} &= \mu_1 A'_1 + \mu_2 A'_2 + \ldots + \mu_m A'_m,\\
\frac{\lambda''}{p''} &= \mu_1 A''_1 + \mu_2 A''_2 + \ldots + \mu_m A''_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\lambda^{(n)}}{p^{(n)}} &= \mu_1 A^{(n)}_1 + \mu_2 A^{(n)}_2 + \ldots + \mu_m A^{(n)}_m
\end{aligned}\right\} \qquad (^{**}),$$

которая вместе с прежнею системою m уравнений (*) должна служить для определения $n+m$ чисел

$$\lambda',\ \lambda'',\ \ldots\ldots,\ \lambda^{(n)},\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ldots,\ \mu_m.$$

Для решения составленных нами уравнений подставляем в уравнения (*) выражения

$$\lambda',\ \lambda'',\ \ldots\ldots,\ \lambda^{(n)}$$

через вспомогательные множители

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ldots,\ \mu_m,$$

доставляемые уравнениями (**).

Такая подстановка приводит к системе m уравнений

$$\left.\begin{array}{l}
G_{1,1}\ \mu_1 + G_{1,2}\ \mu_2 + \ldots + G_{1,m}\ \mu_m = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{l-1,1}\mu_1 + G_{l-1,2}\mu_2 + \ldots + G_{l-1,m}\mu_m = 0, \\
G_{l,1}\ \mu_1 + G_{l,2}\ \mu_2 + \ldots + G_{l,m}\ \mu_m = 1, \\
G_{l+1,1}\mu_1 + G_{l+1,2}\mu_2 + \ldots + G_{l+1,m}\mu_m = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{m,1}\ \mu_1 + G_{m,2}\ \mu_2 + \ldots + G_{m,m}\ \mu_m = 0
\end{array}\right\} \qquad (\lambda_k''),$$

коэффициенты которой определяются по формуле

$$G_{i,j} = G_{j,i} = p' A'_i A'_j + p'' A''_i A''_j + \ldots + p^{(n)} A^{(n)}_i A^{(n)}.$$

Заметим, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix}
G_{1,1}, & G_{1,2}, \ldots, & G_{1,m} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
G_{l,1}, & G_{l,2}, \ldots, & G_{l,m} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
G_{m,1}, & G_{m,2}, \ldots, & G_{m,m}
\end{vmatrix},$$

составленный из всех этих коэффициентов, должен, на основании теоремы умножения определителей, быть равным сумме квадратов определителей, всех систем m^2 элементов, которые получаются из системы

$$\left.\begin{array}{l}
A_1\sqrt{p'},\ A_1''\sqrt{p''},\ A_1'''\sqrt{p'''},\ \ldots,\ A_1^{(n)}\sqrt{p^{(n)}} \\
A_2'\sqrt{p'},\ A_2''\sqrt{p''},\ A_2'''\sqrt{p'''},\ \ldots,\ A_2^{(n)}\sqrt{p^{(n)}} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_m\sqrt{p'},\ A_m'\sqrt{p''},\ A_m''\sqrt{p'''},\ \ldots,\ A_m^{(n)}\sqrt{p^{(n)}}
\end{array}\right\} \qquad (A)$$

посредством вычеркивания $n-m$ столбцов, если только

$$n \geqq m;$$

если же $n < m$, то определитель Δ равен нулю. Поэтому для существования одного и только одного решения поставленных нами уравнений надо исключить из рассмотрения как случаи, когда $n < m$, так и случаи, когда при $n \geqq m$ обращаются в нуль определители всех систем m^2 элементов, которые получаются из (A) посредством вычеркивания $n - m$ столбцов.

Необходимость исключения таких случаев может быть установлена независимо от излагаемых нами приемов.

Она вытекает из того обстоятельства, что в исключаемых нами случаях по данным величинам сумм

$$A'_1 a_1 + A'_2 a_2 + \ldots . + A'_m a_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1^{(n)} a_1 + A_2^{(n)} a_2 + \ldots . + A_m^{(n)} a_m,$$

нельзя определить искомых чисел $a_1, a_2, \ldots ., a_m$.

Из вспомогательных множителей

$$\mu_1, \mu_2, \ldots ., \mu_m$$

особое значение имеет μ_l, так как дробь

$$\frac{1}{\mu_l}$$

выражает вес приближенного равенства

$$a_l \doteq \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots . + \lambda^{(n)} b^{(n)},$$

если коэффициенты

$$\lambda', \lambda'', \ldots ., \lambda^{(n)}$$

определены выше установленными уравнениями.

При других же значениях

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)},$$

удовлетворяющих только уравнениям (*), вес равенства

$$a_l = \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)}$$

будет меньше $\frac{1}{\mu_l}$, как мы сейчас докажем.

Пусть, в самом деле, совокупность чисел

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$$

будет решением системы уравнений (**).

Подразумевая затем под

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

переменные числа, обозначим символами

$$\overline{\lambda'}, \overline{\lambda''}, \ldots, \overline{\lambda^{(n)}}$$

значения этих переменных, определяемые уравнениями (**); иначе сказать положим

$$\frac{\overline{\lambda^{(i)}}}{p^{(i)}} = \mu_1 A_1^{(i)} + \mu_2 A_2^{(i)} + \ldots + \mu_m A_m^{(i)}$$

при

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

При таких условиях выражение

$$S = \frac{1}{2} T - \mu_1 T_1 - \mu_2 T_2 \ldots - \mu_m T_m$$

может быть представлено под видом алгебраической суммы

$$\frac{(\lambda' - \overline{\lambda'})^2}{2p'} + \frac{(\lambda'' - \overline{\lambda''})^2}{2p''} + \ldots + \frac{(\lambda^{(n)} - \overline{\lambda^{(n)}})^2}{2p^{(n)}} - \frac{\overline{\lambda'}\,\overline{\lambda'}}{2p'} - \frac{\overline{\lambda''}\,\overline{\lambda''}}{2p''} - \ldots - \frac{\overline{\lambda^{(n)}}\,\overline{\lambda^{(n)}}}{2p^{(n)}}.$$

С другой стороны, имеем

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right) - \mu_l$$

во всех случаях, когда числа

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

удовлетворяют вышеустановленным уравнениям (").

Следовательно, для всякой системы чисел

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)},$$

которая удовлетворяет уравнениям ("), должно быть

$$\frac{\lambda'\lambda'}{2p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{2p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{2p^{(n)}} = \frac{(\lambda' - \overline{\lambda'})^2}{2p'} + \ldots + \frac{(\lambda^{(n)} - \overline{\lambda^{(n)}})^2}{2p^{(n)}} + \mu_l - \frac{\overline{\lambda'}\,\overline{\lambda'}}{2p'} - \frac{\overline{\lambda''}\,\overline{\lambda''}}{2p''} - \ldots - \frac{\overline{\lambda^{(n)}}\,\overline{\lambda^{(n)}}}{2p^{(n)}};$$

откуда при

$$\lambda' = \overline{\lambda'},\ \lambda'' = \overline{\lambda''}, \ldots, \lambda^{(n)} = \overline{\lambda^{(n)}}$$

выводим

$$\frac{\overline{\lambda'}\,\overline{\lambda'}}{p'} + \frac{\overline{\lambda''}\,\overline{\lambda''}}{p''} + \ldots + \frac{\overline{\lambda^{(n)}}\,\overline{\lambda^{(n)}}}{p^{(n)}} = \mu_l.$$

Отсюда нетрудно также заключить, что μ_l представляет наименьшую величину, которой может достигать сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

при соблюдении уравнений ( ); ибо сумма

$$\frac{\overline{\lambda'}\overline{\lambda'}}{p'}+\frac{\overline{\lambda''}\overline{\lambda''}}{p''}+\ldots+\frac{\overline{\lambda^{(n)}}\overline{\lambda^{(n)}}}{p^{(n)}}$$

равна μ_l по доказанному, сумма же

$$\frac{(\lambda'-\overline{\lambda'})^2}{2p'}+\ldots+\frac{(\lambda^{(n)}-\overline{\lambda^{(n)}})^2}{2p^{(n)}}$$

не может быть числом отрицательным.

Итак, из всех равенств

$$a_l=\lambda'b'+\lambda''b''+\ldots+\lambda^{(n)}b^{(n)},$$

о которых на основании наших данных и условий можно утверждать, что они свободны от постоянной погрешности, наибольшим весом отличается то, коэффициенты которого

$$\lambda',\ \lambda'',\ \ldots,\ \lambda^{(n)}$$

определяются уравнениями (**) и (***); и этот наибольший вес равен дроби

$$\frac{1}{\mu_l}.$$

Последнюю же дробь, знаменатель которой определяется из системы уравнений (***), можно при помощи обозначений теории определителей представить отношением

$$\frac{\Delta}{\Delta_{l,l}},$$

где

$$
\Delta_{l,l} = \begin{vmatrix}
G_{1,1}, & \ldots, & G_{1,l-1}, & G_{1,l+1}, & \ldots, & G_{1,m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
G_{l-1,1}, & \ldots, & G_{l-1,l-1}, & G_{l-1,l+1}, & \ldots, & G_{l-1,m} \\
G_{l+1,1}, & \ldots, & G_{l+1,l-1}, & G_{l+1,l+1}, & \ldots, & G_{l+1,m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
G_{m,1}, & \ldots, & G_{m,l-1}, & G_{m,l+1}, & \ldots, & G_{m,m}
\end{vmatrix}.
$$

В дальнейших выводах нам потребуются и другие миноры первого порядка определителя Δ. Припомним, что при помощи своих миноров определитель Δ выражается суммами:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= G_{1,1}\Delta_{1,1} + G_{1,2}\Delta_{1,2} + \ldots + G_{1,m}\Delta_{1,m} = G_{1,1}\Delta_{1,1} + G_{2,1}\Delta_{2,1} + \ldots + G_{m,1}\Delta_{m,1} \\
&= G_{2,1}\Delta_{2,1} + G_{2,2}\Delta_{2,2} + \ldots + G_{2,m}\Delta_{2,m} = G_{1,2}\Delta_{1,2} + G_{2,2}\Delta_{2,2} + \ldots + G_{m,2}\Delta_{m,2}
\end{aligned}
$$

. . . .

где вообще $\Delta_{i,j}$ означает произведение $(-1)^{i+j}$ на определитель, получаемый из Δ посредством вычеркивания столбца

$$
\begin{matrix} G_{1,j} \\ G_{2,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ G_{m,j} \end{matrix}
$$

и строки

$$G_{i,1}, \; G_{i,2}, \; \ldots, \; G_{i,m}.$$

Припомним также, что каждая сумма

$$G_{1,i}\Delta_{1,j} + G_{2,i}\Delta_{2,j} + \ldots + G_{m,i}\Delta_{m,j},$$

где i и j два различных числа из совокупности чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m,$$

обращается в нуль, равно как и сумма

$$G_{i,1}\Delta_{j,1}+G_{i,2}\Delta_{j,2}+\ldots+G_{i,m}\Delta_{j,m}.$$

Наконец, нетрудно установить равенства

$$\Delta_{i,j}=\Delta_{j,i},$$

как следствие симметричности определителя Δ

Итак, полагая

$$a^0{}_l=\lambda' b'+\lambda'' b''+\ldots+\lambda^{(n)} b^{(n)}$$

и определяя коэффициенты

$$\lambda',\ \lambda'',\ \ldots,\ \lambda^{(n)}$$

уравнениями (**) и ($^{*}{}_{*}{}^{\cdot\cdot}$) при различных значениях l, мы можем получить приближенные величины

$$a^0{}_1,\ a^0{}_2,\ \ldots,\ a^0{}_m$$

для всех искомых чисел

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m.$$

Те же самые приближенные величины могут быть определены одною довольно простою системою уравнений.

§ 47. Имея в виду придти к этой системе, составим выражение

$$\left.\begin{aligned} W&=\Sigma p\,(A_1\xi_1+A_2\xi_2+\ldots+A_m\xi_m-u)^2\\ W^0&=\Sigma p\,(A_1a^0{}_1+A_2a^0{}_2+\ldots+A_ma^0{}_m-b)^2\end{aligned}\right\},$$

где первое W и второе W^0 отделены словом «и».

первое из которых означает сумму

$$p'(A'_1\xi_1+A'_2\xi_2+\ldots+A'_m\xi_m-u')^2+p''(A''_1\xi_1+\ldots+A''_m\xi_m-u'')^2$$
$$+\ldots+p^{(n)}(A_1^{(n)}\xi_1+A_2^{(n)}\xi_2+\ldots+A_m^{(n)}\xi_m-u^{(n)})^2,$$

второе же получается из первого через соответственную замену

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_m,\ u',\ u'',\ \ldots,\ u^{(n)}$$

числами

$$a^0{}_1,\ a^0{}_2,\ \ldots,\ a^0{}_m,\ b',\ b'',\ \ldots,\ b^{(n)}.$$

Мы будем рассматривать выражение W как функцию переменных

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_m,$$

а выражение W^0 как функцию переменных

$$a^0{}_1,\ a^0{}_2,\ \ldots,\ a^0{}_m,$$

считая постоянными не только данные числа

$$p',\ p'',\ \ldots,\ p^{(n)},\ b',\ b'',\ \ldots,\ b^{(n)},$$

но и неопределенные числа

$$u',\ u'',\ \ldots,\ u^{(n)}.$$

При таких условиях нетрудно установить, что W достигает своей наименьшей величины для тех значений

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_m,$$

которые определяются формулою

$$\xi_l=\lambda' u'+\lambda'' u''+\ldots+\lambda^{(n)} u^{(n)}$$

и уравнениями (**) и ($^{**}_{*}$) при $l=1, 2, \ldots m$; и потому W^0 достигает своей наименьшей величины для тех значений

$$a^0{}_1,\ a^0{}_2, \ldots, a^0{}_m,$$

которые определяются уравнениями (**), ($^{**}_{*}$) и формулой

$$a^0{}_l=\lambda' b'+\lambda'' b''+\ldots+\lambda^{(n)} b^{(n)}.$$

Для доказательства приравниваем нулю производные выражения W по

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

что дает нам систему уравнений

$$(24)\quad \begin{aligned} G_{1,1}\xi_1+\ldots+G_{m,1}\xi_m&=A'{}_1 p' u'+\ldots+A_1^{(n)} p^{(n)} u^{(n)},\\ G_{1,2}\xi_1+\ldots+G_{m,2}\xi_m&=A'{}_2 p' u'+\ldots+A_2^{(n)} p^{(n)} u^{(n)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ G_{1,m}\xi_1+\ldots+G_{m,m}\xi_m&=A'{}_m d' u'+\ldots+A_m^{(n)} p^{(n)} u^{(n)}, \end{aligned}$$

где $G_{i,j}$ попрежнему означает сумму

$$p' A'{}_i A'{}_j+p'' A''{}_i A''{}_j+\ldots+p^{(n)} A_i^{(n)} A_j^{(n)}.$$

Такою системою определяются те значения

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

для которых выражение W достигает своей наименьшей величины. Придавая затем букве l прежнее значение, можем из системы уравнений (24) исключить все неизвестные

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_m$$

кроме ξ_l, при помощи тех же множителей

$$\mu_1,\ \mu_2, \ldots, \mu_m,$$

которыми мы пользовались раньше. Действительно, из уравнений (24) легко вытекает уравнение

$$\left.\begin{array}{r}\mu_1 (G_{1,1}\xi_1 + \ldots + G_{m,1}\xi_m)\\ +\mu_2 (G_{1,2}\xi_1 + \ldots + G_{m,2}\xi_m)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\mu_m (G_{1,m}\xi_1 + \ldots + G_{m,m}\xi_m)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r}\mu_1 \left(A'_1 p' u' + \ldots + A_1^{(n)} p^{(n)} u^{(n)}\right)\\ +\mu_2 \left(A'_2 p' u' + \ldots + A_2^{(n)} p^{(n)} u^{(n)}\right)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\mu_m\left(A'_m p' u' + \ldots + A_m^{(n)} p^{(n)} u^{(n)}\right),\end{array}\right.$$

которое в силу уравнений (*) дает

$$\xi_l = \left\{\begin{array}{r}(\mu_1 A'_1 + \mu_2 A'_2 + \ldots + \mu_m A'_m)\, p' u'\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\left(\mu_1 A_1^{(n)} + \mu_2 A_2^{(n)} + \ldots + \mu_m A_m^{(n)}\right) p^{(n)} u^{(n)}\end{array}\right. .$$

Сравнивая последнее выражение ξ_l с выражением ξ_l, определенным формулою

$$\xi_l = \lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}$$

и равенствами (**), тотчас убеждаемся в тождественности этих двух выражений ξ_l. Итак, установленные раньше формулы и уравнения определяют те же величины

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \ldots, \ \xi_m,$$

как и система (24). Наш вывод сохраняет силу, каковы бы ни были значения чисел

$$u', \ u'', \ \ldots, \ u^{(n)}.$$

В частном случае, когда

$$u' = b', \ u'' = b'', \ \ldots, \ u^{(n)} = b^{(n)},$$

отсюда следует, что выражение W^0 действительно достигает своей наименьшей величины при тех значениях

$$a_1^0, \ a_2^0, \ \ldots, \ a_m^0,$$

определением которых мы занимались в предыдущем параграфе. Этим обстоятельством объясняется название *способ наименьших квадратов;* ибо W^0 представляет сумму квадратов выражений вида

$$\sqrt{p}\,(A_1 a_1^0 + A_2 a_2^0 + \ldots + A_m a_m^0 - b).$$

Итак, все искомые числа

$$a_1^0,\ a_2^0,\ \ldots,\ a_m^0,$$

служащие приближенными величинами для неизвестных

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,$$

могут быть найдены из одной системы уравнений

$$(25)\qquad \begin{aligned} G_{1,1}\ a_1^0 + \ldots + G_{m,1}\ a_m^0 &= A'_1 p' b' + \ldots + A_1^{(n)} p^{(n)} b^{(n)}, \\ G_{1,2}\ a_1^0 + \ldots + G_{m,2}\ a_m^0 &= A'_2 p' b' + \ldots + A_2^{(n)} p^{(n)} b^{(n)}, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{1,m}\ a_1^0 + \ldots + G_{m,m}\ a_m^0 &= A'_m p' b' + \ldots + A_m^{(n)} p^{(n)} b^{(n)}. \end{aligned}$$

Величины же

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_m,$$

связанные с величинами

$$u',\ u'',\ \ldots,\ u^{(n)}$$

формулой

$$\xi_l = \lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}$$

и уравнениями (**) и ($^*{}_*{}^*$), удовлетворяют системе уравнений (24). Рассматривая, наконец, вместо

$$u',\ u'',\ \ldots,\ u^{(n)},\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_m$$

разности

$$u' - c' = v',\ u'' - c'' = v'', \ldots\ldots,\ u^{(n)} - c^{(n)} = v^{(n)}$$

$$\xi_1 - a_1 = \eta_1, \xi_2 - a_2 = \eta_2, \ldots\ldots,\ \xi_m - a_m = \eta_m,$$

можем установить уравнения

$$G_{1,1}\ \eta_1 + G_{2,1}\ \eta_2 + \ldots\ldots + G_{m,1}\ \eta_m = \omega_1,$$

$$G_{1,2}\ \eta_1 + G_{2,2}\ \eta_2 + \ldots\ldots + G_{m,2}\ \eta_m = \omega_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$G_{1,m}\ \eta_1 + G_{2,m}\ \eta_2 + \ldots\ldots + G_{m,m}\ \eta_m = \omega_m,$$

где вообще

$$\omega_i = A'_i p' v' + A''_i p'' v'' + \ldots\ldots + A_i^{(n)} p^{(n)} v^{(n)}.$$

Эти уравнения послужат нам для вторичного определения весов приближенных равенств

$$a_1 \doteqdot a_1^0,\ a_2 \doteqdot a_2^0, \ldots\ldots,\ a_m \doteqdot a_m^0,$$

иначе сказать, для определения отношений неизвестного числа k к математическим ожиданиям величин

$$\eta_1^2 = (\xi_1 - a_1)^2,\ \eta_2^2 = (\xi_2 - a_2)^2, \ldots\ldots,\ \eta_m^2 = (\xi_m - a_m)^2.$$

При помощи тех же уравнений мы покажем, что математическое ожидание выражения W равно

$$(n - m)\, k,$$

если

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots\ldots,\ \xi_m$$

связаны с

$$u',\ u'', \ldots\ldots,\ u^{(n)}$$

уравнениями (24), как мы и предполагаем. Для намеченной цели из установленных уравнений выводим

$$\Delta\eta_1 = \Delta_{1,1}\,\omega_1 + \Delta_{1,2}\,\omega_2 + \ldots + \Delta_{1,m}\,\omega_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta\eta_m = \Delta_{m,1}\,\omega_1 + \Delta_{m,2}\,\omega_2 + \ldots + \Delta_{m,m}\,\omega_m,$$

где Δ и $\Delta_{i,j}$ имеют вышеустановленный смысл.

Помножив затем обе части равенства

$$\Delta\eta_l = \Delta_{l,1}\,\omega_1 + \Delta_{l,2}\,\omega_2 + \ldots + \Delta_{l,m}\,\omega_m$$

на ω_j и η_i, получаем два равенства

$$\Delta\omega_j\eta_l = \Delta_{l,1}\,\omega_j\,\omega_1 + \Delta_{l,2}\,\omega_j\,\omega_2 + \ldots + \Delta_{l,m}\,\omega_j\,\omega_m$$

и

$$\Delta\eta_i\,\eta_l = \Delta_{l,1}\,\omega_1\,\eta_i + \Delta_{l,2}\,\omega_2\,\eta_i + \ldots + \Delta_{l,m}\,\omega_m\,\eta_i,$$

которые дают возможность свести разыскание математических ожиданий произведений

$$\omega_j\,\eta_l \text{ и } \eta_i\,\eta_l,$$

к разысканию математических ожиданий произведений вида

$$\omega_i\,\omega_j.$$

А произведение $\omega_i\,\omega_j$, равное

$$(A'_i p' v' + \ldots + A_i^{(n)} p^{(n)} v^{(n)})\,(A'_j p' v' + \ldots + A_j^{(n)} p^{(n)} v^{(n)}),$$

приводится к сумме

$$A'_i A'_j (p' v')^2 + A''_i A''_j (p'' v'')^2 + \ldots + A_i^{(n)} A_j^{(n)} (p^{(n)} v^{(n)})^2$$

и таких произведений, каждое из которых содержит, кроме постоянных, два различных количества системы

$$v',\ v'',\ \ldots\ldots,\ v^{(n)}.$$

Поэтому математическое ожидание произведения $\omega_i \omega_j$ одинаково с математическим ожиданием суммы

$$A_i A_j'(p'v')^2 + A_i'' A_j''(p''v'')^2 + \ldots\ldots + A_i^{(n)} A_j^{(n)} (p^{(n)} v^{(n)})^2;$$

последнее же, как нетрудно видеть, равно произведению числа k на сумму

$$p' A_i' A_j' + p'' A_i'' A_j'' + \ldots\ldots + p^{(n)} A_i^{(n)} A_j^{(n)},$$

которую мы обозначаем символом

$$G_{i,j}.$$

Следовательно,

$$\text{м. о. } \omega_i \omega_j = k G_{i,j}$$

и потому равенство

$$\Delta \omega_j \eta_l = \Delta_{l,1} \omega_j \omega_1 + \Delta_{l,2} \omega_j \omega_2 + \ldots\ldots + \Delta_{l,m} \omega_j \omega_m$$

дает

$$\Delta (\text{м. о. } \omega_j \eta_l) = \Delta_{l,1} (\text{м. о. } \omega_j \omega_1) + \ldots\ldots + \Delta_{l,m} (\text{м. о. } \omega_j \omega_m)$$

$$= k \{ G_{j,1} \Delta_{l,1} + G_{j,2} \Delta_{l,2} + \ldots\ldots + G_{j,m} \Delta_{l,m} \}.$$

Отсюда заключаем, что математические ожидания произведений

$$\omega_1 \eta_1,\ \omega_2 \eta_2,\ \ldots\ldots,\ \omega_m \eta_m$$

равны k; математические же ожидания других произведений

$$\omega_j \eta_l,$$

где j отлично от l, равны нулю; ибо

$$G_{l,1}\Delta_{l,1}+G_{l,2}\Delta_{l,2}+\ldots+G_{l,m}\Delta_{l,m}=\Delta$$

и

$$G_{j,1}\Delta_{l,1}+G_{j,2}\Delta_{l,2}+\ldots+G_{j,m}\Delta_{l,m}=0,$$

если j не равно l. На этом основании из формулы

$$\Delta\eta_l\eta_i=\Delta_{l,1}\omega_1\eta_i+\Delta_{l,2}\omega_2\eta_i+\ldots+\Delta_{l,m}\omega_m\eta_i$$

выводим

$$\Delta(\text{м. о. } \eta_l\eta_i)=\Delta_{l,1}(\text{м. о. } \omega_1\eta_i)+\ldots+\Delta_{l,m}(\text{м. о. } \omega_m\eta_i)=k\Delta_{l,i}$$

и в частности

(26) $$\text{м. о. } \eta_l\eta_l=\text{м. о. } (\xi_l-a_l)^2=k\frac{\Delta_{l,l}}{\Delta}$$

Итак, математическое ожидание квадрата погрешности приближенного равенства

$$a_l \doteqdot a_l^0$$

выражается произведением

$$k\frac{\Delta_{l,l}}{\Delta};$$

иначе сказать, вес равенства

$$a_l \doteqdot a_l^0$$

выражается дробью

$$\frac{\Delta}{\Delta_{l,l}},$$

что было найдено и другим путем.

Обращаясь к выражению

$$W = \Sigma p\,(A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + \ldots + A_m\xi_m - u)^2,$$

прежде всего распространим принятое нами обозначение на другие суммы, аналогичные W; именно сумму

$$f(p',\ A'_1, \ldots,\ A'_m,\ u',\ c') + f(p'',\ A''_1, \ldots,\ A''_m,\ u'',\ c'') +$$
$$+ \ldots + f\left(p^{(n)},\ A_1^{(n)}, \ldots,\ A_m^{(n)},\ u^{(n)},\ c^{(n)}\right)$$

будем для краткости изображать так

$$\Sigma f(p,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_m,\ u,\ c)$$

для любой функции

$$f(p,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_m,\ u,\ c)$$

переменных

$$p,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_m,\ u,\ c,$$

при чем

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots,\ \xi_m,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m$$

могут играть роль постоянных.

Далее заметим, что в силу равенства

$$c^{(j)} = A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \ldots + A_m^{(j)} a_m$$

должно быть

$$A_1^{(j)}\xi_1 + A_2^{(j)}\xi_2 + \ldots + A_m^{(j)}\xi_m - u^{(j)} = A_1^{(j)}\eta_1 + \ldots + A_m^{(j)}\eta_m - v^{(j)}$$

Поэтому W совпадает с суммою

$$\Sigma p\,(A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \ldots + A_m\eta_m - v)^2.$$

С другой стороны, простые выкладки дают

$$\Sigma p\,(A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \ldots + A_m\eta_m - v)^2$$

$$= \eta_1 \Sigma p\,A_1\,(A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \ldots + A_m\eta_m - v) +$$
$$+ \ldots + \eta_m \Sigma p\,A_m\,(A_1\eta_1 + \ldots + A_m\eta_m - v)$$

$$- \Sigma p v\,(A_1\eta_1 + \ldots + A_m\eta_m - v)$$

$$= - \Sigma p v\,(A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \ldots + A_m\eta_m - v)$$

$$= \Sigma p v^2 - \eta_1 \Sigma p A_1 v - \eta_2 \Sigma p A_2 v - \ldots - \eta_m \Sigma p\,A_m v)$$

$$= \Sigma p v^2 - \eta_1\omega_1 - \eta_2\omega_2 - \ldots - \eta_m\omega_m;$$

ибо каждая из сумм

$$\Sigma p A_1 (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \ldots + A_m\eta_m - v),$$

$$\Sigma p A_2 (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \ldots + A_m\eta_m - v),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma p A_m (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \ldots + A_m\eta_m - v)$$

равна нулю. Следовательно,

$$W = \Sigma p v^2 - \eta_1\omega_1 - \eta_2\omega_2 - \ldots - \eta_m\omega_m$$

и

$$\text{м. о. } W = \Sigma\,\text{м. о. } p v^2 - \text{м. о. } \eta_1\omega_1 - \text{м. о. } \eta_2\omega_2 - \ldots - \text{м. о. } \eta_m\omega_m$$

$$= (n - m)\,k,$$

так как математическое ожидание каждого из произведений

$$p'v'v', \ldots, p^{(n)}v^{(n)}v^{(n)}, \; \eta_1\omega_1, \; \eta_2\omega_2, \ldots, \; \eta_m\omega_m$$

равно числу k. Формула

$$\text{м. о. } W = (n - m) k \tag{27}$$

служит основанием для приближенного равенства

$$k \doteq \frac{W^0}{n-m};$$

она показывает, что это приближенное равенство свободно от постоянной погрешности, при чем W^0 попрежнему означает сумму

$$p'(A'_1 a_1^0 + A'_2 a_2^0 + \ldots + A'_m a_m^0 - b')^2 + p''(A''_1 a_1^0 + \ldots + A''_m a_m^0 - b'')^2 +$$
$$+ \ldots\ldots + p^{(n)}(A_1^{(n)} a_1^0 + \ldots\ldots + A_m^{(n)} a_m^0 - b^{(n)})^2.$$

Выражение W^0 содержит кроме данных элементов только количества

$$a_1^0,\ a_2^0,\ \ldots\ldots,\ a_m^0,$$

которые могут быть найдены из уравнений (25).

Следовательно, величину W^0 можно вычислить в каждом частном случае, и потому, пользуясь равенством

$$k \doteq \frac{W^0}{n-m},$$

мы имеем возможность найти приближенную величину k; и затем по формуле (26) можем найти приближенные значения математических ожиданий квадратов погрешностей равенств

$$a_1 \doteq a_1^0,\ a_2 \doteq a_2^0 \ldots\ldots,\ a_m \doteq a_m^0,$$

доставленных способом наименьших квадратов.

Наконец, если в том встречается надобность, можем рассматривать и вероятности различных предположений о величине погрешности любого из равенств

$$a_1 \doteq a_1^0,\ a_2 \doteq a_2^0,\ \ldots\ldots,\ a_m \doteq a_m^0$$

на основании соображений, установленных нами выше, когда речь шла о случае одного неизвестного.

§ 48. Приложим изложенные общие рассуждения к простейшей задаче интерполирования. Положим, что переменные величины x, y связаны линейным соотношением и что из наблюдений найдены приближенные значения $y = y', y'', \ldots, y^{(n)}$, соответствующие $x = x', x'', \ldots, x^{(n)}$.

Эту связь мы представим так

$$y = a_1 + a_2\left(x - \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n}\right),$$

заменяя для упрощения выкладок x разностью $x - \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n}$ и обозначая буквою a со значка́ми $1, 2$ неизвестные нам постоянные числа, для которых мы имеем только совокупность приближенных равенств

$$y^{(i)} \doteq a_1 + a_2\left(x^{(i)} - \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n}\right).$$

Считая эти равенства свободными от постоянной погрешности и имеющими одинаковый вес, мы ставим себе целью для произвольно заданного x найти приближенное значение y

$$y \doteq \lambda' y' + \lambda'' y'' + \ldots + \lambda^{(n)} y^{(n)} = \Sigma \lambda^{(i)} y^{(i)} = y^0$$

наибольшего веса и также свободное от постоянной погрешности, что согласно вышеизложенным рассуждениям приводит нас к $n+2$ уравнениям первой степени

$$\sum \lambda^{(i)} = 1, \quad \sum \lambda^{(i)}\left(x^{(i)} - \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n}\right) = x - \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n}$$

и

$$\lambda^{(i)} = \mu_1 + \mu_2\left(x^{(i)} - \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

с $n+2$ неизвестными

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}, \mu_1, \mu_2.$$

Отсюда выводим для μ_1, μ_2 простые равенства

$$\mu_1=\frac{1}{n},\ \mu_2=\frac{x-\dfrac{x'+x''+\ldots+x^{(n)}}{n}}{\sum\left(x^{(i)}-\dfrac{x'+x''+,\ldots,+x^{(n)}}{n}\right)^2},$$

затем, находим

$$\lambda^{(i)}=\frac{1}{n}+\frac{\left(x-\dfrac{x'+x''+\ldots+x^{(n)}}{n}\right)\left(x^{(i)}-\dfrac{x'+x''+\ldots+x^{(n)}}{n}\right)}{\sum\left(x^{(i)}-\dfrac{x'+x''+\ldots+x^{(n)}}{n}\right)^2}$$

и, наконец,

$$y^{(0)}=\frac{\Sigma y^{(i)}}{n}+\frac{\sum y^{(i)}\left(x^{(i)}-\dfrac{x'+x''+\ldots+x^{(n)}}{n}\right)}{\sum\left(x^{(i)}-\dfrac{x'+x''+\ldots+x^{(n)}}{n}\right)^2}\left(x-\frac{x'+x''+\ldots x^{(n)}}{n}\right);$$

последнее же равенство можно представить и в таком виде:

$$y^{(0)}-\sum\frac{y^{(i)}}{n}=$$

$$=\frac{\sum\left(y^{(i)}-\dfrac{y'+y''+\ldots+y^{(n)}}{n}\right)\left(x^{(i)}-\dfrac{x'+x''+\ldots+x^{(n)}}{n}\right)}{\sum\left(x^{(i)}-\dfrac{x'+x''+\ldots+x^{(n)}}{n}\right)^2}\times$$

$$\times\left(x-\frac{x'+x''+\ldots.+x^{(n)}}{n}\right).$$

Вес полученного нами приближенного значения y равен

$$\frac{1}{\Sigma\lambda^{(i)}\lambda^{(i)}}=$$

$$=\frac{n\sum\left(x^{(i)}-\dfrac{x'+x''+\ldots.+x^{(n)}}{n}\right)^2}{\sum\left(x^{(i)}-\dfrac{x'+x''+\ldots.+x^{(n)}}{n}\right)^2+n\left(x-\dfrac{x'+x''+\ldots.+x^{(n)}}{n}\right)^2}.$$

Вместе с тем находим приближенные значения коэффициентов a_1, a_2:

$$a^0{}_1 = \frac{\Sigma y^{(i)}}{n},$$

$$a^0{}_2 = \frac{\sum\left(y^{(i)} - \frac{y' + y'' + \ldots + y^{(n)}}{n}\right)\left(x^{(i)} - \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n}\right)}{\sum\left(x^{(i)} - \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n}\right)^2}.$$

И нетрудно видеть, что при тех же значениях $a^0{}_1$, $a^0{}_2$ выражение

$$W^0 = \sum\left\{y^{(i)} - a^0{}_1, - a^0{}_2\left(x^{(i)} - \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n}\right)\right\}^2$$

достигает своей наименьшей величины, которая по делении ее на $n-2$ доставляет нам приближенное значение k:

$$k^0 = \frac{\Sigma \delta_y^{(i)} \delta_y^{(i)} \cdot \Sigma \delta_x^{(i)} \delta_x^{(i)} - (\Sigma \delta_x^{(i)} \delta_y^{(i)})^2}{(n-2)\ \Sigma \delta_x^{(i)} \delta_x^{(i)}},$$

где

$$\delta_x^{(i)} = x^{(i)} - \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n} \quad \text{и} \quad \delta_y^{(i)} = y^{(i)} - \frac{y' + y'' + \ldots + y^{(n)}}{n}.$$

Помножив это число k_0 на $\Sigma \lambda^{(i)} \lambda^{(i)}$, получаем приближенную величину математического ожидания квадрата погрешности в составленном нами выражении y:

$$\frac{\left\{\Sigma \delta_x^{(i)} \delta_x^{(i)} + n \delta_x \delta_x\right\}\left\{\Sigma \delta_y^{(i)} \delta_y^{(i)}\, \Sigma \delta_x^{(i)} \delta_x^{(i)} - \left(\Sigma \delta_y^{(i)} \delta_x^{(i)}\right)^2\right\}}{n(n-2)\left(\Sigma \delta_x^{(i)} \delta_x^{(i)}\right)^2},$$

где

$$\delta_x = x - \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n}.$$

Что же касается коэффициентов a_1, a_2, то на основании приведенных нами вычислений математическими ожиданиями квадратов их погрешностей будут

$$\frac{\Sigma \delta_y^{(i)} \delta_y^{(i)} \Sigma \delta_x^{(i)} \delta_x^{(i)} - \left(\Sigma \delta_y^{(i)} \delta_x^{(i)}\right)^2}{n(n-2) \Sigma \delta_x^{(i)} \delta_x^{(i)}} \quad \text{и} \quad \frac{\Sigma \delta_y^{(i)} \delta_y^{(i)} \Sigma \delta_x^{(i)} \delta_x^{(i)} - \left(\Sigma \delta_y^{(i)} \delta_x^{(i)}\right)^2}{(n-2)\left(\Sigma \delta_x^{(i)} \delta_x^{(i)}\right)^2}.$$

Мы рассматривали y как функцию числа x; но возможна и обратная постановка задачи, при которой та же линейная связь y с x представится таким приближенным равенством:

$$x + x^0 = d_1^{(0)} + d_2^{(0)}\left(y - \frac{\Sigma y^{(i)}}{n}\right)$$

при

$$d_1^{(0)} = \frac{\Sigma x^{(i)}}{n} \quad \text{и} \quad d_2^{(0)} = \frac{\Sigma \delta_x^{(i)} \delta_y^{(i)}}{\Sigma \delta_y^{(i)} \delta_y^{(i)}}.$$

В исключительном случае, когда существует полная пропорциональность

$$\frac{\delta'_x}{\delta'_y} = \frac{\delta''_x}{\delta''_y} = \ldots = \frac{\delta_x^{(n)}}{\delta_y^{(n)}},$$

произведение $a^0{}_2 d^0{}_2$ оказывается равным единице, и получаемые нами уравнения, выражающие связь между x, y, совпадают; в других же случаях это произведение

$$\frac{\left(\Sigma \delta_x^{(i)} \delta_y^{(i)}\right)^2}{\Sigma \delta_x^{(i)} \delta_x^{(i)} \cdot \Sigma \delta_y^{(i)} \delta_y^{(i)}}$$

меньше единицы.

Чем более расходятся получаемые нами уравнения, которые должны служить для выражения одной и той же связи, тем менее значения имеет каждое из них. Для измерения расхождения их может служить разность

$$1 - \frac{\left(\Sigma \delta_x^{(i)} \delta_y^{(i)}\right)^2}{\Sigma \delta_x^{(i)} \delta_x^{(i)} \cdot \Sigma \delta_y^{(i)} \delta_y^{(i)}}.$$

Если она равна единице, иначе сказать, если $\Sigma \delta_x^{(i)} \delta_y^{(i)} = 0$, то получаются только равенства

$$y \mp y^{(0)} = \frac{y' + y'' + \ldots + y^{(n)}}{n}, \quad x \mp x^{(0)} = \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n},$$

из которых приходится заключить о неправильности основного предположения, будто бы между рассматриваемыми величинами существует линейная связь, что не исключает возможности иной связи. Подобное же заключение приходится сделать при значениях той же разности, близких к единице; и только в тех случаях, когда она мала, можно с большею или меньшею уверенностью пользоваться полученными уравнениями для вычисления y по данному x, или обратно — x по данному y.

Числовой пример. Для примера возьмем числа, приведенные на стр. 429 восьмого издания „Основ Химии" Менделеева (1906 г.): „Растворимость азотнонатриевой соли $NaNO_3$ по определениям Дитта выражается следующими числами на 100 ч. воды

0°	4°	10°	15°	21°	29°	36°	51°	68°
66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1.

По моему мнению (1881) — говорит Менделеев, — эти данные можно выразить прямою $67{,}5 + 0{,}87\,t$".

Обозначив числа первой строки буквою x, а числа второй — буквою y, мы составляем следующую таблицу

x	$\delta_x^{(i)}$	$\delta_x^{(i)}\delta_x^{(i)}$	y	$\delta_y^{(i)}$	$\delta_y^{(i)}\delta_y^{(i)}$	$\delta_x^{(i)}\delta_y^{(i)}$
0	— 26	676	66,7	— 23,4	547,56	608,4
4	— 22	484	71,0	— 19,1	364,81	420,2
10	— 16	256	76,3	— 13,7	190,44	220,8
15	— 11	121	80,6	— 9,5	90,25	104,5
21	— 5	25	85,7	— 4,4	19,36	22,0
29	+ 3	9	92,9	+ 28	7,84	8,4
36	+ 10	100	99,4	+ 9,3	86,49	93,0
51	+ 25	625	113,6	+ 23,5	552,25	587,5
68	+ 42	1764	125,1	+ 35	1225,00	1470,0
234:9		4060	811,3:9		3084	3534,8
26			90,1			

и на основании ее получаем уравнение

$$y = 90{,}1 + \frac{3534{,}8}{4060}(x - 26) = 67{,}5 + 0{,}87\,x,$$

вполне согласное с тем, которое указано Менделеевым.

Разность же

$$1 - \frac{\left(\Sigma\, \delta_x^{(i)} \delta_y^{(i)}\right)^2}{\Sigma\, \delta_x^{(i)} \delta_x^{(i)} \cdot \Sigma\, \delta_y^{(i)} \delta_y^{(i)}}\ .$$

для данного примера оказывается равною

$$1 - \frac{3534{,}8 \times 3534{,}8}{4060 \times 3084} = 0{,}002\,.$$

Изложенные нами вычисления применяются, с большим или меньшим успехом и пользою и к таким случаям, когда нельзя одну из величин y, x рассматривать как функцию другой, в строгом смысле слова, а связь их заключается в том, что задание одной из них изменяет вероятности различных значений другой. Связь подобного рода принято называть *корреляцией*. Но для обоснования вычислений следует предполагать существование линейной зависимости не между самими величинами y, x, а между каждою из них и соответствующим ей математическим ожиданием другой, устанавливая таким образом два уравнения вида

$$\underset{(x)}{\text{мат. ож.}}\, y = a_1 + a_2 x, \qquad \underset{(y)}{\text{мат. ож.}}\, x = a_3 + a_4 y,$$

при чем скобки (x), (y) указывают, что математические ожидания, стоящие в левых частях уравнений, должны быть взяты при тех значениях x, y, какие стоят в правых частях уравнений. Мы приведем пример числовых вычислений, относящихся к двум величинам; но предварительно остановимся еще на корреляции трех элементов, чтобы одновременно произвести выкладки для двух и трех элементов.

Положим, что даны соответствующие значения трех величин x, y, z, образующие n троек:

$$x', y', z', \quad x'', y'', z'', \quad \ldots\ldots\ldots, \quad x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}.$$

Математические ожидания величин x, y, z обозначим буквами a, b, c и для сокращения выкладок вместо x, y, z введем разности

$$x-a=x_1,\ y-b=x_2,\ z-c=x_3.$$

Предполагая затем связанными линейными равенствами не величины x_1, x_2, x_3, а математические ожидания каждой из них, при задании двух других, со значениями последних, применим способ наименьших квадратов к разысканию приближенных значений шести коэффициентов

$$h_{1,2},\ h_{1,3},\ h_{2,1}\ h_{2,3},\ h_{3,1},\ h_{3,2}$$

трех допускаемых нами равенств

$$u_1=\underset{(x_2,\ x_3)}{\text{м. о. } x_1}=h_{1,2}x_2+h_{1,3}x_3,\quad u_2=\underset{(x_1,\ x_3)}{\text{м. о. } x_2}=h_{2,1}x_1+h_{2,3}x_3,$$

$$u_3=\underset{(x_1,\ x_2)}{\text{м. о. } x_3}=h_{3,1}\ x_1+h_{3,2}x_2,$$

где символ м. о. x_1, с находящимся под ним указанием $(x_2,\ x_3)$ означает математическое ожидание x_1 при значениях x_2, x_3, стоящих в сумме $h_{1,2}\ x_2+h_{1,3}\ x_3$; подобный же смысл имеют и другие два аналогичные символа.

В виду одинаковости теоретических вычислений для всех трех равенств достаточно рассмотреть одно из них. Для определения коэффициентов $h_{1,2}$, $h_{1,3}$ мы имеем совокупность приближенных равенств, свободных от постоянных погрешностей:

$$x_1^{(i)}=h_{1,2}\,x_2^{(i)}+h_{1,3}\,x_3^{(i)}\quad (i=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n),$$

где

$$x_1^{(i)}=x^{(i)}-\frac{x'+x''+\ldots+x^{(n)}}{n},$$

$$x_2^{(i)}=y^{(i)}-\frac{y'+y''+\ldots+y^{(n)}}{n},\quad x_3^{(i)}=z^{(i)}-\frac{z'+z''+\ldots+z^{(n)}}{n},$$

при чем веса всех наблюдений мы считаем одинаковыми. При таких условиях и предположениях способ наименьших квадратов доставляет нам для определения приближенных значений $h^0_{1,2}$ и $h^0_{1,3}$ два уравнения

$$\Sigma x_1^{(i)} x_2^{(i)} = h^0_{1,2} \Sigma x_2^{(i)} x_2^{(i)} + h^0_{1,3} \Sigma x_2^{(i)} x_3^{(i)}$$

$$\Sigma x_1^{(i)} x_3^{(i)} = h^0_{1,2} \Sigma x_2^{(i)} x_3^{(i)} + h^0_{1,3} \Sigma x_3^{(i)} x_3^{(i)},$$

при соблюдении которых выражение

$$W^0 = \Sigma (x_1^{(i)} - h^0_{1,2} x_2^{(i)} - h^0_{1,3} x_3^{(i)})^2$$

достигает наименьшей своей величины.

Введя в наши вычисления определитель

$$\Delta^x = \begin{vmatrix} \Sigma x_1^{(i)} x_1^{(i)}, & \Sigma x_1^{(i)} x_2^{(i)}, & \Sigma x_1^{(i)} x_3^{(i)} \\ \Sigma x_1^{(i)} x_2^{(i)}, & \Sigma x_2^{(i)} x_2^{(i)}, & \Sigma x_2^{(i)} x_3^{(i)} \\ \Sigma x_1^{(i)} x_3^{(i)}, & \Sigma x_2^{(i)} x_5^{(i)}, & \Sigma x_3^{(i)} x_3^{(i)} \end{vmatrix},$$

и его миноры

$$\Delta^x_{1,1} = \Sigma x_2^{(i)} x_2^{(i)} \Sigma x_3^{(i)} x_3^{(i)} - \Sigma x_2^{(i)} x_3^{(i)} \Sigma x_2^{(i)} x_3^{(i)},$$

$$\Delta^x_{1,2} = \Delta^x_{2,1} = - \Sigma x_1^{(i)} x_2^{(i)} \Sigma x_3^{(i)} x_3^{(i)} - \Sigma x_1^{(i)} x_3^{(i)} \Sigma x_2^{(i)} x_3^{(i)},$$

$$\Delta^x_{1,3} = \Delta^x_{3,1} = \Sigma x_1^{(i)} x_2^{(i)} \,.\, \Sigma x_2^{(i)} x_3^{(i)} - \Sigma x_1^{(i)} x_3^{(i)} \,.\, \Sigma x_2^{(i)} x_2^{(i)},$$

можем решения наших двух уравнений представить такими дробями

$$h^0_{1,2} = -\frac{\Delta^x_{1,2}}{\Delta^x_{1,1}}, \quad h^0_{1,3} = -\frac{\Delta^x_{1,3}}{\Delta^x_{1,1}};$$

а введя еще три определителя минора

$$\Delta^x_{2,2} = \begin{vmatrix} \Sigma x_1^{(i)} x_1^{(i)}, & \Sigma x_1^{(i)} x_3^{(i)} \\ \Sigma x_1^{(i)} x_3^{(i)}, & \Sigma x_3^{(i)} x_3^{(i)} \end{vmatrix}, \quad \Delta^x_{3,3} = \begin{vmatrix} \Sigma x_1^{(i)} x_1^{(i)}, & \Sigma x_1^{(i)} x_2^{(i)} \\ \Sigma x_1^{(i)} x_2^{(i)}, & \Sigma x_2^{(i)} x_2^{(i)} \end{vmatrix},$$

$$\Delta^x_{2,3} = \begin{vmatrix} \Sigma x_1^{(i)} x_3^{(i)}, & \Sigma x_1^{(i)} x_1^{(i)} \\ \Sigma x_2^{(i)} x_3^{(i)}, & \Sigma x_1^{(i)} x_2^{(i)} \end{vmatrix},$$

можем написать и выражения остальных 4 величин h^0:

$$h^0_{2,1} = -\frac{\Delta^x_{1,2}}{\Delta^x_{2,2}},\ h^0_{2,3} = -\frac{\Delta^x_{2,3}}{\Delta^x_{2,2}},\ h^0_{3,1} = -\frac{\Delta^x_{1,3}}{\Delta^x_{3,3}},\ h^0_{3,2} = -\frac{\Delta^x_{2,3}}{\Delta^x_{3,3}}.$$

Вместе с тем имеем

$$W^0 = \Sigma x_1^{(i)} x_1^{(i)} - h^0_{1,2}\Sigma x_1^{(i)} x_2^{(i)} - h^0_{1,3}\Sigma x_1^{(i)} x_3^{(i)} =$$

$$= \frac{\Delta_{1,1}\Sigma x_1^{(i)} x_1^{(i)} + \Delta_{1,2}\Sigma x_1^{(i)} x_2^{(i)} + \Delta_{1,3}\Sigma x_1^{(i)} x_3^{(i)}}{\Delta_{1,1}} = \frac{\Delta}{\Delta_{1,1}};$$

эту величину W^0 для определения приближенного значения k^0 числа k надо приравнять $(n-3)\,k_0$, так как у нас не два, а три неизвестных числа a, $h_{1,2}$, $h_{1,3}$, приближенные величины которых согласно способу наименьших квадратов доставляют нам равенства

$$a \doteq a^0 = \frac{x' + x'' + \ldots + x^{(n)}}{n},\ \ h_{1,2} \doteq h^0_{1,2},\ \ h_{1,3} \doteq h^0_{1,3},$$

веса которых соответственно равны

$$n,\ \frac{\Delta_{1,1}}{\Sigma x_3^{(i)} x_3^{(i)}},\ \frac{\Delta_{1,1}}{\Sigma x_2^{(i)} x_2^{(i)}},$$

так что математические ожидания квадратов их погрешностей приближенно выражаются так:

$$\frac{\Delta}{n(n-3)\Delta_{1,1}},\ \frac{\Delta}{\Delta^2_{1,1}\Sigma x_3^{(i)} x_3^{(i)}},\ \frac{\Delta}{\Delta^2_{1,1}\Sigma x_2^{(i)} x_2^{(i)}}.$$

Во избежание недоразумений и для сообщения нашим выводам полной формальной строгости заметим, что допускаемой нами связи можно придать такой вид

$$v = \underset{(y,z)}{\text{м. о.}}\ x = a_1 + h_{1,2}(y - b^0) + h_{1,3}(z - c^0)$$

где

$$b^0 = \frac{y' + y'' + \ldots . y^{(n)}}{n}, \quad c^0 = \frac{z' + z'' + \ldots . + z^{(n)}}{n}$$

и

$$a_1 = a + h_{1,2}(b^0 - b) + h_{1,3}(c^0 - c),$$

заменяя таким образом a числом a_1, для которого способ наименьших квадратов и даст приближенное равенство

$$a_1 \doteq a^0$$

веса n и с указанным математическим ожиданием квадрата погрешности. Но то же самое a^0 служит приближенным значением для a, в виду данной совокупности значений x, при чем согласно выводам способа наименьших квадратов, приближенным значением математического ожидания квадрата отклонения a^0 от a является

$$\frac{\Sigma x_1^{(i)} x_1^{(i)}}{(n-1)n}.$$

Рассуждения о корреляции можно связать с понятием об эллипсах и эллипсоидах рассеяния или отклонения *, проходящих через точки с одинаковою плотностью вероятности, для чего достаточно предположить эту последнюю пропорциональной показательному выражению $e^{-\varphi}$, где φ как и в § 38 квадратичная положительная форма; в случае трех величин

$$\varphi = a_{1,1} x_1^2 + 2a_{1,2} x_1 x_2 + a_{2,2} x_2^2 + 2a_{1,3} x_1 x_3 + 2a_{2,3} x_2 x_3 + a_{3,3} x_3^2.$$

Математическое ожидание x_1 при данных x_2, x_3 в этом случае выражается отношением

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + 2a_{1,3}x_1x_3)} x_1 dx_1}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + 2a_{1,3}x_1x_3)} dx_1},$$

* Fehler ellipse (ellipsoid).

которое по замене суммы

$$x_1 + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2 + \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} x_3$$

одною буквою t приводится к

$$-\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\left(\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2 + \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} x_3\right) dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt} = -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2 - \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} x_3;$$

следовательно, имеем

$$\underset{(x_2, x_3)}{\text{м. о. } x_1} = -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2 - \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} x_3.$$

В том же случае математическое ожидание x_1 при данном x_2 и неопределенном x_3 выражается отношением

$$\frac{\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi} x_1\, dx_1\, dx_3}{\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi}\, dx_1\, dx_3},$$

которое по выполнении интегрирований относительно x_3 приводится к виду

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x_1^2 - 2\beta x_1 x_2} x_1\, dx_1}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x_1^2 - 2\beta x_1 x_2}\, dx_1}$$

и потому оказывается равным $-\frac{\beta x_2}{\alpha}$, где

$$\alpha = \frac{a_{1,1}\,a_{3,3} - a_{1,3}\,a_{1,3}}{a_{3,3}} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{a_{1,2}\,a_{3,3} - a_{2,3}\,a_{1,3}}{a_{3,3}};$$

следовательно, имеем также

$$\underset{(x_2)}{\text{м. о.}}\ x_1 = -\frac{a_{1,2}\,a_{3,3} - a_{2,3}\,a_{1,3}}{a_{1,1}\,a_{3,3} - a_{1,3}\,a_{1,3}}\,x_2.$$

Сближая эти выводы с выводами § 38, введем также величины c с двумя значками, приближенные значения которых, с оценкою погрешности, устанавливаемою способом наименьших квадратов, даются равенствами

$$c^0_{1,1} = \frac{\Sigma\, x_1^{(i)}\, x_1^{(i)}}{n}, \quad c^0_{1,2} = \frac{\Sigma\, x_1^{(i)}\, x_2^{(i)}}{n}, \quad c^0_{2,2} = \frac{\Sigma\, x_2^{(i)}\, x_2^{(i)}}{n} \text{ и т. д.}$$

Если вместо неизвестных нам величин $c_{i,j}$ взять их приближенные значения $c^0_{i,j}$, даваемые только-что указанными равенствами, без чего числовых выкладок нельзя произвести, то определитель Δ^x будет отличаться от Δ только множителем n^3. Поэтому за приближенные значения коэффициентов $a_{i,k}$ можно принять отношения

$$\frac{n\,\Delta^x_{i,k}}{2\Delta^x};$$

хотя мы и не можем установить, что математическое ожидание этого отношения действительно равно $a_{i,k}$, а потому и оценка погрешности, согласная с основами способа наименьших квадратов, здесь невозможна. Соответственно такому результату выражения

$$h^0_{1,2},\ h^0_{1,3},\ h^0_{2,1},\ h^0_{2,3},\ h^0_{3,1},\ h^0_{3,2}$$

можно рассматривать как приближенные величины отношений

$$\frac{-a_{1,2}}{a_{1,1}},\ \frac{-a_{1,3}}{a_{1,1}},\ \frac{-a_{1,2}}{a_{2,2}},\ \frac{-a_{2,3}}{a_{2,2}},\ \frac{-a_{1,3}}{a_{3,3}},\ \frac{-a_{2,3}}{a_{3,3}},$$

что согласуется с теоретическим равенством

$$\underset{(x_2,\,x_3)}{\text{м. о.}}\ x_1 = -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}\,x_2 - \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}\,x_3.$$

Наконец, что касается отношения

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{a_{1,2}\,a_{3,3}-a_{2,3}\,a_{1,3}}{a_{1,1}\,a_{3,3}-a_{1,3}\,a_{1,3}}=\frac{\Delta_{1,2}}{\Delta_{2,2}},$$

то оно в силу формул § 38 приводится к

$$\frac{c_{1,2}}{c_{2,2}},$$

и потому приближенно может быть представлено отношением

$$\frac{\Sigma x_1^{(i)}\,x_2^{(i)}}{\Sigma x_2^{(i)}\,x_2^{(i)}},$$

что вполне согласно с нашим выводом для корреляции двух элементов. Совершенно также можно трактовать корреляцию любого числа величин.

Численный пример.

Этот пример мы заимствуем из статьи Raymond Pearl, „Variation and Correlation in Brain-Weight" (Biometrika IV, 1905—1906). На стр. 84, 86, 88 указанной статьи мы находим следующие три таблицы, по которым можно устанавливать корреляцию между ростом умершего человека (шведа), весом его мозга и продолжительностью его жизни; приводим их:

Рост в сантиметрах $x_1^{(i)}+a^0$

Вес мозга в граммах $x_2^{(i)}+b^0$	144—146	147—149	150—152	153—155	156—158	159—161	162—164	165—167	168—170	171—173	174—176	177—179	180—182	183—185	186—188	189—191
1100—1149	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—
1150—1199	—	—	—	—	—	2	3	1	—	2	2	—	—	—	—	
1200—1249	—	—	1	—	—	4	2	5	5	1	1	1	—	1	—	—
1250—1299	—	1	—	—	4	3	5	8	8	6	3	3	—	3	—	—
1300—1349	1	—	—	—	2	4	4	7	11	9	7	6	2	—	—	—
1350—1399	1	1	—	—	1	7	17	21	11	13	6	5	3	—	—	
1400—1449	—	—	1	1	—	2	9	10	13	13	8	11	2	2	—	—
1450—1499	—	—	1	1	1	4	6	8	13	8	9	5	1	2	—	1
1500—1549	—	—	—	—	1	—	1	2	4	5	7	4	4	—	—	—
1550—1599	—	—	—	—	1	3	—	6	1	4	2	6	2	—	—	—
1600—1649	—	—	—	—	—	—	—	3	4	4	—	1	—	—	—	—
1650—1699	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	1	—	—	—	—
1700—1749	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—
Общее число	2	2	3	2	10	29	47	72	71	66	45	44	14	8	—	1

Рост в сантиметрах $x_1^{(i)}+a^0$

Продолжительность жизни в годах $x_3^{(i)}+c^0$	144—146	147—149	150—152	153—155	156—158	159—161	162—164	165—167	168—170	171—173	174—176	177—179	180—182	183—185	186—188	189—191
20—24	—	—	—	—	—	—	3	1	5	4	7	3	2	1	—	1
25—29	—	—	—	—	—	1	1	7	4	6	6	10	1	1	—	—
30—34	—	—	1	—	1	2	5	9	12	6	6	4	—	2	—	—
35—39	1	—	—	1	—	5	4	12	9	6	3	6	2	—	—	—
40—44	—	—	1	—	1	6	8	12	9	11	5	5	3	—	—	—
45—49	1	—	—	—	1	4	8	5	6	5	5	4	—	1	—	—
50—54	—	2	—	—	1	2	9	8	10	6	3	4	3	2	—	—
55—59	—	—	—	—	2	2	3	7	6	9	5	2	2	1	—	—
60—64	—	—	1	—	3	3	4	7	3	8	1	1	1	—	—	—
65—69	—	—	—	—	1	2	1	1	5	3	2	3	—	—	—	—
70—74	—	—	—	—	—	1	—	1	1	1	1	1	—	—	—	—
75—79	—	—	—	1	—	1	1	2	1	1	1	1	—	—	—	—
Общее число	2	2	3	2	10	29	47	72	71	66	45	44	14	8	—	1

Вес мозга в граммах $x_2^{(i)}+b^0$

Продолжительность жизни в годах $x_3^{(i)}+c^0$	1100—1149	1150—1199	1200—1249	1250—1299	1300—1349	1350—1399	1400—1449	1450—1499	1500—1549	1550—1599	1600—1649	1650—1699	1700—1749
20—24	—	—	—	1	6	5	2	7	2	3	1	—	—
25—29	—	—	—	1	4	10	8	4	2	2	3	2	1
30—34	—	1	2	—	5	13	8	6	5	3	4	1	—
35—39	1	2	1	6	4	8	9	9	4	4	1	—	—
40—44	—	1	9	6	10	9	10	5	5	4	2	—	—
45—49	—	—	1	4	6	8	6	9	3	3	—	—	—
50—54	—	—	1	7	4	15	7	9	4	2	1	—	—
55—59	—	1	3	4	9	6	7	6	1	2	—	—	—
60—64	—	4	1	7	2	4	8	3	1	2	—	—	—
65—69	—	1	2	4	3	2	3	2	1	—	—	—	—
70—74	—	—	—	2	—	4	—	—	—	—	—	—	—
75—79	—	—	1	2	—	2	4	—	—	—	—	—	—
Общее число	1	10	21	44	53	86	72	60	28	25	12	3	1

Здесь значения рассматриваемых величин заданы их границами; в наших вычислениях все числа, о которых известно только, что они лежат между двумя данными числами, мы приравняем полусумме этих последних: таким образом, например, продолжительность жизни образует следующий ряд чисел: 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 62, 67, 72, 77.

При указанном условии числа a^0, b^0, c^0 будут

$$a^0 = 169 + \frac{-2.24 - 2.21 - 3.18 - 2.15 - 10.12 - 29.9 - 47.6 - 72.3 + 66.3 + 45.6 + 44.9 + 14.12 + 8.15 + 21}{416}$$

$$= 169.3$$

$$b^0 = 1425 + 10 \times \frac{-30 - 10.25 - 21.20 - 44.15 - 53.10 - 86.5 + 60.5 + 28.10 + 25.15 + 12.20 + 3.25 + 30}{416}$$

$$= 1400$$

$$c^0 = 52 + 10 \times \frac{-27.6 - 37.5 - 48.4 - 49.3 - 61.2 - 40 + 39 + 32.2 + 18.3 + 6.4 + 9.5}{832}$$

$$= 47 + 10 \times \frac{-27.5 - 37.4 - 48.3 - 49.2 - 61 + 50 + 39.2 + 32.3 + 18.4 + 6.5 + 9.6}{832}$$

$$= 44{,}5;$$

в данном случае мы считаем излишним вести вычисления с бо́льшею степенью точности; в упомянутой статье вместо полученных нами чисел приведены бо́льшие числа

169,789, 1400,481, 45,024,

которые нельзя признать более правильными.

Для дальнейших вычислений преобразуем основные таблицы в следующие:

$x_1^{(i)}$

$x_2^{(i)}$	− 24,3	− 21,3	− 18,3	− 15,3	− 12,3	− 9,3	− 6,3	− 3,3	− 0,3	+ 2,7	+ 5,7	+ 8,7	+ 11,7	+ 14,7	+ 17,7	+ 20,7	Всего
− 275	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
− 225	—	—	—	—	—	2	3	1	—	2	2	—	—	—	—	—	10
− 175	—	—	1	—	—	4	2	5	5	1	1	1	—	1	—	—	21
− 125	—	1	—	—	4	3	5	8	8	6	3	3	—	3	—	—	44

$x_2^{(i)}$ \ $x_1^{(i)}$	$-24{,}3$	$-21{,}3$	$-18{,}3$	$-15{,}3$	$-12{,}3$	$-9{,}3$	$-6{,}3$	$-3{,}3$	$-0{,}3$	$+2{,}7$	$+5{,}7$	$+8{,}7$	$+11{,}7$	$+14{,}7$	$+17{,}7$	$+20{,}7$	Всего
-75	1	—	—	—	2	4	4	7	11	9	7	6	2	—	—	—	53
-25	1	1	—	—	1	7	17	21	11	13	6	5	3	—	—	—	86
$+25$	—	—	1	1	—	2	9	10	13	13	8	11	2	2	—	—	72
$+75$	—	—	1	1	1	4	6	8	13	8	9	5	1	2	—	1	60
$+125$	—	—	—	—	1	—	1	2	4	5	7	4	4	—	—	—	28
$+175$	—	—	—	—	1	3	—	6	1	4	2	6	2	—	—	—	25
$+225$	—	—	—	—	—	—	—	3	4	4	—	1	—	—	—	—	12
$+275$	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	1	—	—	—	—	3
$+325$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
Всего	2	2	3	2	10	29	47	72	71	66	45	44	14	8	—	1	416

$x_3^{(i)}$ \ $x_1^{(i)}$	$-24{,}3$	$-21{,}3$	$-18{,}3$	$-15{,}3$	$-12{,}3$	$-9{,}3$	$-6{,}3$	$-3{,}3$	$-0{,}3$	$+2{,}7$	$+5{,}7$	$+8{,}7$	$+11{,}7$	$+14{,}7$	$+17{,}7$	$+20{,}7$	Всего
$-22{,}5$	—	—	—	—	—	—	3	1	5	4	7	3	2	1	—	1	27
$-17{,}5$	—	—	—	—	—	1	1	7	4	6	6	10	1	1	—	—	37
$-12{,}5$	—	—	1	—	1	2	5	9	12	6	6	4	—	2	—	—	48
$-7{,}5$	1	—	—	1	—	5	4	12	9	6	3	6	2	—	—	—	49
$-2{,}5$	—	—	1	—	1	6	8	12	9	11	5	5	3	—	—	—	61
$+2{,}5$	1	—	—	—	1	4	8	5	6	5	5	4	—	1	—	—	40
$+7{,}5$	—	2	—	—	1	2	9	8	10	6	3	4	3	2	—		50
$+12{,}5$	—	—	—	—	2	2	3	7	6	9	5	2	2	1	—	—	39
$+17{,}5$	—	—	1	—	3	3	4	7	3	8	1	1	1	—	—	—	32
$+22{,}5$	—	—	—	—	1	2	1	1	5	3	2	3	—	—	—	—	18
$+27{,}5$	—	—	—	—	—	1	—	1	1	1	1	1	—	—	—	—	6
$+32{,}5$	—	—	—	1	—	1	1	2	1	1	1	1	—	—	—	—	9
Всего	2	2	3	2	10	29	47	72	71	66	45	44	14	8	—	1	416

$x_3^{(i)}$ \ $x_2^{(i)}$	-275	-225	-175	-125	-75	-25	$+25$	$+75$	$+125$	$+175$	$+225$	$+275$	$+325$	Всего
$-22{,}5$	—	—	—	1	6	5	2	7	2	3	1	—	—	27
$-17{,}5$	—	—	—	1	4	10	8	4	2	2	3	2	1	37
$-12{,}5$	—	1	2	—	5	13	8	6	5	3	4	1	—	48
$-7{,}5$	1	2	1	6	4	8	9	9	4	4	1	—	—	49

$x_3^{(i)}$ \ $x_2^{(i)}$	−275	−225	−175	−125	−75	−25	+25	+75	+125	+175	+225	+275	+325	Всего
− 2,5	—	1	9	6	10	9	10	5	5	4	2	—	—	61
+ 2,5	—	—	1	4	6	8	6	9	3	3	—	—	—	40
+ 7,5	—	—	1	7	4	15	7	9	4	2	1	—	—	50
+12,5	—	1	3	4	9	6	7	6	1	2	—	—	—	39
+17,5	—	4	1	7	2	4	8	3	1	2	—	—	—	32
+22,5	—	1	2	4	3	2	3	2	1	—	—	—	—	18
+27,5	—	—	—	2	—	4	—	—	—	—	—	—	—	6
+32,5	—	—	1	2	—	2	4	—	—	—	—	—	—	9
Всего	1	10	21	44	53	86	72	60	28	25	12	3	1	416

По этим таблицам вычисляем $\Sigma x_1^{(i)} x_1^{(i)}$, $\Sigma x_1^{(i)} x_2^{(i)}$, $\Sigma x_2^{(i)} x_2^{(i)}$ т. д.

$x_1^{(i)} x_1^{(i)}$		$x_1^{(i)} x_1^{(i)}$	
$590{,}49 \times 2 =$	1180,98	$0{,}09 \times 71 =$	6,39
$453{,}69 \times 2 =$	907,38	$7{,}29 \times 66 =$	481,14
$334{,}89 \times 3 =$	1004,67	$32{,}49 \times 45 =$	1462,05
		$75{,}69 \times 44 =$	3330,36
$234{,}09 \times 2 =$	468,18	$136{,}89 \times 14 =$	1916,46
$151{,}29 \times 10 =$	1512,90	$216{,}09 \times 8 =$	1728,72
$86{,}49 \times 29 =$	2508,21	$428{,}49 \times 1 =$	428,49
$39{,}69 \times 47 =$	1865,43		9353.61
$10{,}89 \times 72 =$	784,08		10231,83
	10231,83		$19585{,}44 = \Sigma x_1^{(i)} x_1^{(i)}$

$x_2^{(i)} x_2^{(i)}$		$x_2^{(i)} x_2^{(i)}$	
$75625 \times 4 =$	302500	$5625 \times 113 =$	635625
$50625 \times 22 =$	1113750	$625 \times 158 =$	98750
$30625 \times 46 =$	1408750	$105625 \times 1 =$	105625
$15625 \times 72 =$	1125000		840000
	3950000		3950000
			$4790000 = \Sigma x_2^{(i)} x_2^{(i)}$

$x_3^{(i)} x_3^{(i)}$		$x_3^{(i)} x_3^{(i)}$	
$506{,}25 \times 45 =$	22781,25	$756{,}25 \times 6 =$	4537,50
$306{,}25 \times 69 =$	21131,25	$1056{,}25 \times 9 =$	9506,25
$156{,}25 \times 87 =$	13593,75		14043,75
$56{,}25 \times 99 =$	5568,75		63706,25
$6{,}25 \times 101 =$	631.25		$77750{,}00 = \Sigma x_3^{(i)} x_3^{(i)}$
	63706,25		

вычисление $\Sigma x_1^{(i)} x_2^{(i)}$

−75	−500	−675	+225	−875	+325	−175	+275	+75	
−25	−150	−350	+450	−1000	+975	−375	+375	×21	
−100	−25	−625	+125	−825	+500	−450	+500	+1575	
×−24	+75	−300	+800	−275	+175	−125	+1050		
+2400	+125	−425		−2975	+900	−1125	+225	−100	+100
	+175	−2375		+3150	+275	+3025	+275	−150	+175
−125	−300	+800		+175	+3150	+1900	+325	−75	+500
25	×−12	−1575		×0		×9	3025	−300	+425
−150	+3600	×−6		0		+17100		−1125	+1900
×−21		+9450						−1575	+750
+3150								−50	+75
	−450	−225	+250	−275	+325	−150	+50	−350	+3925
−175	−700	−875	+600	−450	+600	−75	+75	−3725	−3725
+25	−375	−1000	+250	−175	+625	−225	+500		+200
+75	−300	−525	+1050	−750	+700	+975	+350		×−0,3
−75	−175	−525	+675	−675	+900	+750	+975		−60
×−18	+50	−3150	+275	−325	+3150	×12			
+1350	+300	+3100	+3100	−2650	−2650	+9000			
	+525	−50			+500				
+25	−1125	×−3			×3	−175	+50		
+75	×−9	+150			+1500	−375	+150		
+100	+10125			−450	+200	−550	+200		
×−15				−175	+675	200			
−1500				−375	+875	−350			
				−525	+350	×15			
				−150	+2100	−5250			
				−1675	−1675				
					+425				
					×6				
					+2550				

+2400	+3600	+17100	5400
+3150	+10125	+9000	27375
+1350	+9450	−5250	22365
−1500	+150	+1575	+55140 $= \Sigma x_1^{(i)} x_1^{(i)}$
+5400	+1500	−60	
	+2550	+22365	
	27375		

вычисление $\Sigma x_1^{(i)} x_3^{(i)}$

−7,5	−17,5	+10,0	−112,5	+15,0	−67,5	+10,0	−5,0	+15,0
+2,5	−25,0	+15,0	−70,0	+75,0	−175,0	+30,0	−32,5	+2,5
−5,0	−37,5	+25,0	−150,0	+75,0	−50,0	+25,0	−152,5	+25,0
×−24	−15,0	+52,5	−67,5	+52,5	−45,0	+17,5	−140,0	+95,0
+120,0	−95,0		−22,5	+112,5	−12,5	+67,5	−20,0	+112,5
	+207,5		−422,5	+60,0	−350,0	+60,0	−35,0	+52,5
+15,0	+112,5	+45,0	+390,0	390,0	+210,0	+210,0	−22,5	+20,0
×−21	×−9	+60,0	−32,5		−140,0		−407,5	+95,0
−315,0	−1012,5	+207,5	×0		×9		+417,5	417,5
			0		−1260,0		−10,0	
−12,5	−67,5	+20,0	−90,0	+12,5	−45,0	+22,5	×0,3	
−2,5	−17,5	+67,5	−105,0	+45,0	−17,5	+25,0	−3,0	
+17,5	−62,5	+37,5	−75,0	+112,5	−15,0	17,5		
+2,5	−30,0	+70,0	−45,0	+140,0	−7,5	+65,0		
×−18	−20,0	+55,0	−27,5	+67,5	−85,0		−315,0	+120,0
−45,0	−197,5	+250,0	−342,5	+60	+65,0		−45,0	+285,0
	+250,0		+437,5	437,5	−20,0		−375,0	+405,0
−7,5	+52,5		+95,0		×12		−1140,0	
+32,5	×−6		×+3		−240,0		−1012,5	
+25,0	−315,0		+285,0				−315,0	
×−15					−40,0	+2,5	−60,0	
−375,0	−22,5	+12,5	−157,5	+22,5	−25,0	+15,0	−915,0	
	−122,5	+60,0	−105,0	+62,5	−65,0	+12,5	−1260,0	
−15,0	−112,5	+87,5	−75,0	+17,5	+30,0	+30,0	−240,0	
+10,0	−90,0	+122,5	−22,5	+45,0	−35,0		−472,5	
+25,0	−30,0	+50,0	−360,0	+60,0	×15		−525,0	
+52,5	−377,5	+65,0	+207,5	207,5	−525,0		−3,0	
+22,5	+397,5	+397,5	−152,5		−22,5		−6678,0	
+95,0	+20,0		×6		×21		+405,0	
×−12	×−3		−915,0		−472,5		−6273,0	$= \Sigma x_1^{(i)} x_3^{(i)}$
−1140,0	−60							

вычисление $\Sigma x_2^{(i)} x_3^{(i)}$

−7,5	−40,0	+10,0	−67,5	+10,0	−45,0	+7,5	−22,5	−16875,0
×−275	−45,0	+52,5	−35,0	5,0	−35,0	+30,0	−52,5	−15312,5
+2062,5	−15,0	+50,0	−62,5	+60,0	−62,5	+52,5	−50,0	−43125,0
	−100,0	+122,5	−12,5	+110,0	−30,0	+90,0	−7,5	−9000,0
−12,5	+445,0	+90,0	−70,0	+185,0	−12,5		−5,0	−11875,0
−15,0	+345,0	+120,0	−22,5		−185,0		+7,5	−17062,5
−2,5	×−125	445,0	−65,0		+90,0		−130,0	−29250,0
+12,5	−43125,0		−335,0		−95,0		×225	−13062,5
+70,0	−135,0	+15,0	+185		×125		−29250,0	−5687,5
+22,5	−70,0	+30,0	−150,0		−11875,0			−161250,0
+75,0	−62,5	+112,5	×−25				−35,0	
×−225	−30,0	+35,0	+3750,0		−67,5	+7,5	−12,5	
−16875,0	−25,0	+67,5	−157,5	+22,5	−35,0	+75,0	−47,5	+2062,5
−25,0	−322,5	260,0	−70,0	+67,5	−37,5	+82,5	×275	4687,5
−7,5	260,0		−75,0	+75,0	−40,0		−13062,5	+3750,0
−22,5	−62,5		−67,5	+52,5	−180,0		−17,5	+10500
+10,	×−75		−12,5	+45,0	82,5		×325	−161250,0
+37,5	+4687,5		−382,5	+262,5	−97,5		−5687,5	
+50,0			+262,5		×175			
+45,0			−120,0		−17062,5		$\Sigma x_2^{(i)} x_3^{(i)} =$	−150750,0
+87,5			×75					
×−175			−9000,0					
−15312,5								

Разделяя полученные суммы на 415 (на $n-1$), находим приближенные значения c^0 чисел c:

$$c^0_{1,1} = \frac{19585}{415} = 47,20\,, c^0_{2,2} = \frac{4790000}{415} = 11542\,, c^0_{3,3} = \frac{77750}{415} = 187,35$$

$$c^0_{1,2} = \frac{55140}{415} = 132,87\,, c^0_{1,3} = \frac{-6273}{415} = -15,12\,,$$

$$c^0_{2,3} = \frac{-150787}{415} = -363,34.$$

Разделяя первые три числа на 416, находим приближенные величины математических ожиданий квадратов погрешностей вышенайденных значений

$$a^0 = 169,3,\ b^0 = 1400,\ c^0 = 44,5$$

чисел a, b, c:

$$\frac{47,20}{416}=0,1135,\ \frac{11542}{416}=27,75,\ \frac{187,35}{416}=0,4504,$$

откуда по извлечении корней квадратных и по умножении на $\frac{2}{3}$ получаются средние квадратичные и вероятные погрешности тех же значений

$$0,33,\quad 5,25,\quad 0,67 \quad \text{и} \quad 0,22,\quad 3,5,\quad 0,45,$$

что согласуется с вероятными погрешностями, приведенными в указанной статье $\pm 0,225$, $\pm 3,516$, $\pm 0,452$.

По числам c немедленно можно составить корреляционные формулы для каждой пары элементов

$$u_1=\frac{c_{1,2}}{c_{2,2}}x_2,\ u_2=\frac{c_{1,2}}{c_{1,1}}x_1,\ u_1=\frac{c_{1,3}}{c_{3,3}}x_3,\ldots,$$

при чем произведения

$$\frac{\overset{0}{c}_{1,2}}{\overset{0}{c}_{2,2}}\cdot\frac{\overset{0}{c}_{1,2}}{\overset{0}{c}_{1,1}}=2,8\,.\,0,012=0,035,\ldots$$

в данном случае оказываются близкими не к единице, а к нулю, что указывает на невозможность установления линейной связи между самими величинами x_1, x_2, x_3, взятыми попарно. Мы приведем здесь только те корреляционные соотношения, соответствующие которым находятся в статье Raymond Pearl:

$$\underset{(p)}{\text{м. о.}}\quad м=1400+2,8\,(p-169,3)=926+2,8\,p$$

$$\underset{(ж)}{\text{м. о.}}\quad м=1400-1,94\,(ж-44,5)=1486-1,94\,ж$$

где буквы $м$, p, $ж$ последовательно означают вес мозга, рост и продолжительность жизни; им соответствуют такие результаты R. Pearl

$$W=1487,783-1,939\,A,\quad W=915,054+2,859\,S,$$

где W — вес мозга, A — продолжительность жизни, S — рост.

Некоторое несогласие одних выводов с другими может объясняться разностью в числе удержанных цифр.

Для оценки погрешностей коэффициентов 2,8 при p и 1,94 при $ж$ вычисляем соответствующие им значения W^0 (по нашим обозначениям) k^0. Получаем

$$\Sigma\left\{x_2^{(i)}-2{,}8\,x_1^{(i)}\right\}^2=\Sigma x_2^{(i)}x_2^{(i)}-2{,}8\,\Sigma x_2^{(i)}x_1^{(i)}=4635608$$

$$k^0=\frac{4635608}{414}=11197,$$

а так как вес коэффициента 2,8 равен $\Sigma x_1^{(i)}x_1^{(i)}=19585$, то для математического ожидания квадрата его погрешности получается приближенное число

$$\frac{11197}{19585}=0{,}57$$

и, следовательно, средняя квадратичная погрешность этого коэффициента оказывается приблизительно равною 0,75, а вероятная погрешность его около 0,5.

А для другого коэффициента 1,94 находим

$$\Sigma\left\{x_2^{(i)}+1{,}94\,x_3^{(i)}\right\}^2=\Sigma x_2^{(i)}x_2^{(i)}+1{,}94\,\Sigma x_2^{(i)}x_3^{(i)}=4497473$$

$$k^0=\frac{4497473}{414}=10863,\quad \frac{10863}{77750}=0{,}14$$

и, следовательно, средняя квадратичная погрешность его приблизительно равна 0,37.

Для составления корреляционных формул, связывающих все три величины x_1, x_2, x_3, обращаемся к вычислению миноров первого порядка определителя $\overline{\Delta}$:

$$\overline{\Delta}_{1,1}=11542\times187{,}35-(363{,}34)^2=2030380$$

$$\overline{\Delta}_{1,2}=-132{,}87\times187{,}35+363{,}34\times15{,}12=-19399{,}5$$

$$\overline{\Delta}_{1,3}=-132{,}87\times363{,}34+115{,}42\times15{,}12=-48277{,}0$$

$$\Delta_{2,2}=47{,}2\times187{,}35-(15{,}12)^2=8614{,}3,$$

$$\Delta_{2,3}=47{,}2\times363{,}34-15{,}12\times132{,}87=15140{,}7,$$

$$\Delta_{3,3}=47{,}2\times11542-(132{,}87)^2=527128,$$

что доставляет нам корреляционное равенство

$$\text{м. о. } м = 1400 + 2{,}25\,(р - 169{,}3) - 1{,}75\,(ж - 44{,}5)$$
$$= 1097 + 2{,}25\,р - 1{,}75\,ж,$$

которому в статье R. Pearl соответствует такое

$$W = 1091{,}021 + 2{,}288\,S - 1{,}755\,A.$$

А уравнение эллипсоидов рассеяния можем написать в следующем виде:

$$203\,x_1^2 - 4\,x_1 x_2 - 10\,x_1 x_3 + 0{,}9\,x_2^2 + 3\,x_2 x_3 + 53\,x_3^2 = \text{пост.}$$

§ 49. Оставляя в стороне достаточно разъясненную связь корреляционных формул со способом наименьших квадратов, мы можем придать своим выводам более общий характер.

Во-первых, чтобы равным значениям квадратичной формы

$$\varphi = a_{1,1} x_1^2 + \ldots + 2a_{i,k} x_i x_k + \ldots + a_{n,n} x_n^2$$

соответствовали равные плотности вероятности, эта плотность не должна быть обязательно показательною функциею φ, а может быть любою функциею $F(\varphi)$, ограниченною только двумя условиями:

1) $F(\varphi)$ не получает отрицательных значений

2)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int F(\varphi)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n = 1.$$

Пусть плотность вероятности выражается одною из таких функций $F(\varphi)$. Для наших выводов вводим новые величины $z_1, z_2, \ldots, z_n$, связанные с $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейными равенствами

$$z_i = \Sigma\lambda_{i,j} x_j\,(j = 1, 2, \ldots, n),\quad x_j = \Sigma\mu_{i,j} z_i\,(i = 1, 2, \ldots, n),$$

определители которых

$$\begin{vmatrix} \lambda_{1,1}, & \lambda_{1,2}, & \ldots, & \lambda_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n,1}, & \lambda_{n,2}, & \ldots, & \lambda_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \mu_{1,1}, & \mu_{1,2}, & \ldots, & \mu_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{n,1}, & \mu_{n,2}, & \ldots, & \mu_{n,n} \end{vmatrix}$$

равны единице. Коэффициентами λ μ этих равенств можно распорядиться так, чтобы форма φ привелась к сумме квадратов z_i^2 с постоянными положительными множителями:

$$\varphi = A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2 + \ldots + A_n z_n^2$$

и соответственно этому дифференциальное выражение

$$F(\varphi)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

привелось к

$$F(\varphi)\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_n = F(A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2 + \ldots + A_n z_n^2)\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$$

Если же введем новые величины

$$u_1 = z_1 \sqrt{A_1},\ u_2 = z_2 \sqrt{A_2},\ \ldots,\ u_n = z_n \sqrt{A_n},$$

то придем к еще более простому дифференциальному выражению

$$F(\varphi)\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_n = \frac{F(u_1^2 + u_2^2 + \ldots u_n^2)\, du_1 \ldots du_n}{\sqrt{A_1 A_2 \ldots A_n}}$$

Так как в последнее выражение все величины $u_1, u_2, \ldots, u_n$ входят совершенно одинаковым образом, то математические ожидания $u_1^2, u_2^2, \ldots u_n^2$ равны друг другу; математические же ожидания $z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2$ обратно пропорциональны числам $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\text{м. о. } z_i^2 = \frac{A}{A_i},$$

где A без значка число постоянное для всех i; математические же ожидания первых степеней z_i и произведений по два z с различными значками, $z_i z_j$ при j не $= i$, равны нулю, в виду того, что

$$F(A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2 + \ldots + A_n z_n^2)$$

четная функция относительно каждого из чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

По той же причине математическое ожидание z_i остается равным нулю и в том случае, если значения прочих чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ будут даны.

Установив это, произведем переход от чисел z к x посредством обеих систем равенств

$$z_i = \Sigma \lambda_{i,j} x_j, \quad x_j = \Sigma \mu_{i,j} z_i,$$

коэффициенты которых связаны равенствами

$$\Sigma \lambda_{i,j} \mu_{i,j} = 1, \Sigma \lambda_{i,j} \mu_{k,j} = 0 \text{ при } k \text{ не} = i \ (j = 1, 2, 3, \ldots n)$$

$$\Sigma \lambda_{i,j} \mu_{i,j} = 1, \Sigma \lambda_{i,j} \mu_{i,k} = 0 \text{ при } k \text{ не} = j \ (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Подставляя в сумму

$$A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2 + \ldots + A_n z^2$$

вместо $z_1, z_2, \ldots, z_n$ их линейные выражения через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получаем

$$a_{s,r} = a_{r,s} = \Sigma A_i \lambda_{i,r} \lambda_{i,s} (i = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

перемножая же

$$x_r = \Sigma \mu_{i,r} z_i \quad \text{на} \quad x_s = \Sigma \mu_{j,s} z_j$$

и переходя к математическому ожиданию $c_{r,s}$ произведения $x_r\, x_s$, находим

$$\text{м. о. } x_r x_s = c_{r,s} = c_{s,r} = A \Sigma \frac{\mu_{j,r} \mu_{j,s}}{A_j} (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

Отсюда затем выводим

$$a_{s,l} c_{r,l} = A \Sigma \Sigma A_i \lambda_{i,s} \lambda_{i,l} \frac{\mu_{j,r} \mu_{j,l}}{A_j} \binom{i = 1, 2, \ldots n}{j = 1, 2, \ldots n}$$

и

$$\underset{l = 1, 2, \ldots, n}{\Sigma a_{s,l} c_{r,}} = \underset{(i, j, l = 1, 2, 3, \ldots, n)}{A \Sigma \Sigma \Sigma \frac{A_i}{A_j} \lambda_{i,s} \lambda_{i,l} \mu_{j,r} \mu_{j,l}}.$$

Начнем это трехкратное суммирование со значка l.

При неизменных значениях i, j множители $\frac{A_i}{A_j}$, $\lambda_{i,s}$, $\mu_{j,r}$ остаются также неизменными и потому могут быть вынесены за знак суммирования по l, после чего мы придем к сумме:

$$\Sigma\lambda_{j,l}\mu_{j,l}{}^{(l=1,\,2,\,\ldots\,n)},$$

равной единице при $i=j$ и нулю при i не $=j$. Следовательно, отпадают все члены, где i не $=j$, и получается простая сумма:

$$\sum_{l=1,\,2,\,\ldots\,n} a_{s,l}c_{r,l} = A\sum_{i=1,\,2,\,\ldots\,n}\lambda_{i,s}\mu_{i,r},$$

которая также равна единице только при $s=r$, а при s не $=r$ приводится к нулю. Итак,

$$\sum_{l=1,\,2,\,\ldots,\,n} a_{s,l}c_{r,l} = A, \text{ при } s=r, \text{ и} = \text{нулю при } s \text{ не} = r.$$

Наш результат можно представить, с одной стороны, в виде n систем уравнений первой степени

$$\begin{gathered}
c_{1,1}a_{s,1}+c_{1,2}a_{s,2}+\ldots+c_{1,n}a_{s,n}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_{s,1}a_{s,1}+c_{s,2}a_{s,2}+\ldots+c_{s,n}a_{s,n}=A\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_{n,1}a_{s,1}+c_{n,2}a_{s,2}+\ldots+c_{n,n}a_{s,n}=0
\end{gathered}$$

с неизвестными $a_{s,1}$, $a_{s,2}$, ..., $a_{s,n}$, если считать числа $c_{r,s}$ данными; а с другой стороны — в виде n систем уравнений

$$\begin{gathered}
a_{1,1}c_{r,1}+a_{1,2}c_{r,2}+\ldots+a_{1,n}c_{r,n}+0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{r,1}c_{r,1}+a_{r,2}c_{r,2}+\ldots+a_{r,n}c_{r,n}=A\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n,1}c_{r,1}+a_{n,2}c_{r,2}+\ldots+a_{n,n}c_{r,n}=0.
\end{gathered}$$

Системы эти имеют взаимный характер и доставляют известные выражения $a_{r,s}$ через миноры $\overline{\Delta}_{r,s}$ определителя

$$\overline{\Delta}=\begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, & \ldots, & c_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, & \ldots, & c_{n,n} \end{vmatrix}$$

и $c_{r,s}$ через миноры $\Delta_{r,s}$ определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix};$$

а именно

$$a_{r,s}=\frac{A\overline{\Delta}_{r,s}}{\overline{\Delta}},\quad c_{r,s}=\frac{A\Delta_{r,s}}{\Delta}:$$

коэффициенты $a_{r,s}$ формы φ пропорциональны минорам $\overline{\Delta}_{r,s}$ определителя $\overline{\Delta}$, и математические ожидания $c_{r,s}$ произведений $x_r\, x_s$ пропорциональны минорам $\Delta_{r,s}$ определителя Δ.

Положим теперь

$$z_1=x_1+\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2+\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}x_3+\ldots+\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n$$

$$\lambda_{2,1}=\lambda_{3,1}=\ldots=\lambda_{n,1}=0,$$

что, как известно и нетрудно видеть, вполне возможно.

В таком случае при данных $x_2, x_3, \ldots, x_n$ числа $z_2, z_3, \ldots, z_n$ будут также данными. С другой стороны, мы уже выяснили, что математическое ожидание z_1 остается равным нулю и после того как $z_2, z_3, \ldots, z_n$ приданы любые определенные значения. Следовательно, при данных $x_2, x_3, \ldots, x_n$ математическое ожидание суммы

$$x_1+\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2+\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}x_3+\ldots+\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n$$

равно нулю и потому

$$\underset{(\text{при данных } x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n)}{\text{м. о. } x_1} = -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2 - \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} x_3 - \ldots - \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} x_n.$$

Выделяя, подобным же образом, из совокупности $x_2, x_3, \ldots, x_n$ вместо x_1 любую величину x_r, можем установить общую корреляционную формулу

$$\underset{(\text{при задании остальных } x_i)}{\text{м. о. } x_r = \Sigma h_{r,i} x_i} \quad \underset{\text{кроме } r}{(i = 1, 2, \ldots, n)},$$

где

$$h_{r,i} = -\frac{a_{r,i}}{a_{r,r}} = -\frac{\Delta_{r,i}}{\Delta_{r,r}}.$$

Корреляционные формулы, как мы их понимаем, являются прямым следствием допущения, что существуют обобщенные эллипсоиды рассеяния, иначе сказать, что при некоторой совокупности коэффициентов $a_{r,s}$ равным значениям квадратичной формы

$$\varphi = a_{1,1} x_1^2 + \ldots + 2 a_{r,s} x_r x_s + \ldots + a_{n,n} x_n^2$$

соответствуют равные же плотности вероятности.

Обратного же заключения нельзя сделать: корреляционные формулы

$$\underset{(\text{при задании остальных } x_i)}{\text{м. о. } x_r = \Sigma h_{r,i} x_i} \quad \underset{\text{кроме } r}{(i = 1, 2, \ldots, n)}$$

могут быть и при отсутствии эллипсоидов рассеяния. Во всяком случае коэффициенты $h_{r,i}$ корреляционной формулы определяются по математическим ожиданиям $c_{i,k}$ произведений $x_i x_k$ тою же формулою

$$h_{r,i} = -\frac{\Delta_{r,i}}{\Delta_{r,r}}.$$

Чтобы придти к такой формуле, достаточно обе части корреляционной формулы помножить на все числа x_i в отдельности, кроме x_r, и перейти к математическим ожиданиям. Мы получим таким образом систему $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными $h_{r,i}$:

$$c_{r,k}=\sum h_{r,i}\, c_{i,k} \qquad \underset{\text{(кроме } r)}{(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)},$$

решение которой как-раз выражается формулою

$$h_{r,i}=-\frac{\Delta_{r,i}}{\Delta_{r,r}}.$$

В заключение заметим, что из корреляционных формул с n величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно вывесть подобные же формулы с $n-1$ величинами. Например, если в формуле

$$\underset{(\text{при данных } x_2, \ldots, x_n)}{\text{м. о. } x_1}=\sum h_{1,i}\, x_i \qquad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n)$$

оставлять неизменными только $x_2, \ldots, x_{n-1}$, числу x_n приписывать все возможные для него, при таком условии, значения, а в формуле

$$\underset{(\text{при данных } x_1,\ x_2, \ldots, x_{n-1})}{\text{м. о. } x_n}=\sum h_{n,i}\, x_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1),$$

оставляя также $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ неизменными приписывать числу x_1 все возможные значения, то получатся два корреляционных уравнения

$$\underset{(\text{при данных } x_2, \ldots, x_{n-1})}{\text{м. о. } x_1}=\sum_{i=2,3,\ldots,n-1} h_{1,i}\, x_i+h_{1,n} \underset{(\text{при данных } x_2, \ldots, x_{n-1})}{\text{м. о. } x_n}$$

$$\underset{(\text{при данных } x_2, \ldots, x_{n-1})}{\text{м. о. } x_n}=\sum h_{n,i}\, x_i+h_{n,1} \underset{(\text{при данных } x_2, \ldots, x_{n-1})}{\text{м. о. } x_1}$$

откуда по исключении математического ожидания x_n выводим

$$\underset{(\text{при данных } x_2, \ldots, x_{n-1})}{\text{м. о. } x_1}=\sum -\frac{\Delta_{1,i}\Delta_{n,n}-\Delta_{1,n}\Delta_{n,i}}{\Delta_{1,1}\Delta_{n,n}-\Delta_{1,n}\Delta_{1,n}}\, x_i \qquad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1).$$

В последней формуле число x_n совершенно исчезает и по введении миноров $\Delta'_{i,k}$ определителя

$$\Delta' = \begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, & \ldots, & c_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, & \ldots, & c_{n,n} \end{vmatrix}$$

она в силу известных предложений теории определителей приводится к виду

$$\underset{(\text{при данных } x_2, \ldots, x_{n-1})}{\text{м. о. }} x_1 = \sum -\frac{\Delta'_{1,i}}{\Delta_{1,1}} x_i \quad (i = 2, 3, \ldots n-1),$$

вполне совпадающему с установленным выше для n чисел, как и следовало ожидать.

§ 50. Прежде чем перейти к случаям, когда известна одна или несколько точных линейных связей между искомыми числами, остановимся еще на общем случае *параболического интерполирования,* при котором одна из двух величин x, y предполагается целою функциею другой. Приложению к параболическому интерполированию способа наименьших квадратов посвящен ряд мемуаров Чебышева*.

Пусть попрежнему n наблюдений, независимых и свободных от постоянных погрешностей, доставили при заданных значениях x

$$x', x'', \ldots, x^{(n)}$$

такие значения y

$$y', y'', \ldots y^{(n)};$$

но y целая функция от x не первой, а какой-нибудь данной степени $m-1$

$$y = e_1 + e_2 x + e_3 x^2 + \ldots + e_{m-1} x^{m-2} + e_m x^{m-1},$$

при чем $m < n$; что касается весов p', p'', ..., $p^{(n)}$ наших наблюдений, то для сообщения выводам возможно большей общности мы не будем предполагать их равными.

* Сочинения Чебышева. Т. I и II.

Не изменяя существа дела, можно постановке вопроса придать два различных вида: можно для любого x искать приближенную величину y, как мы делали в простейшем случае $m=2$, или искать приближенные значения коэффициентов целой функции. Как при первой, так и при второй постановке вопроса, которой мы сейчас займемся, выгодно для упрощения вычислений располагать искомую целую функцию не по степеням x, а по другим целым функциям

$$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x+g_1,\ \ldots,\ \varphi_l(x)=x^l+g_l x^{l-1},+\ldots,$$

которые определяются данными числами $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ и весами $p', p'', \ldots, p^{(n)}$, как выяснится из рассмотрения уравнений, доставляемых способом наименьших квадратов. Итак, мы положим

$$y=a_1\varphi_0(x)+a_2\varphi_1(x)+\ldots+a_m\varphi_{m-1}(x),$$

при чем не будем отличать приближенных значений $a_1, a_2, \ldots a_m$ от точных, если последние существуют, как мы предположили. Согласно способу наименьших квадратов, следует сумму

$$\Sigma p^{(i)}\left\{y^{(i)}-a_1\varphi_0(x^{(i)})-a_2\varphi_1(x^{(i)})-\ldots-a_m\varphi_{m-1}(x^{(i)})\right\}^2$$

сделать наименьшею, что доставляет нам совокупность m уравнений первой степени

$$\Sigma p^{(i)}y^{(i)}\varphi_l(x^{(i)})=a_1\Sigma p^{(i)}\varphi_0(x^{(i)})\varphi_l(x^{(i)})+\ldots+a_{l+1}\Sigma p^{(i)}\varphi_l(x^{(i)})\varphi_l(x^{(i)})+\ldots$$

Приведенное уравнение обязательно содержит a_{l+1}, ибо все члены суммы $\Sigma p^{(i)}\varphi_l(x^{(i)})\varphi_l(x^{(i)})$ числа положительные; что же касается остальных неизвестных $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то оно может не содержать их при надлежащем выборе полиномов $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$: а именно, если все суммы

$$\Sigma p^{(i)}\varphi_j(x^{(i)})\varphi_l(x^{(i)})$$

при j не $=l$ будут приведены к нулю.

Следовательно, если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ будут подобраны так, чтобы все $\frac{m(m-1)}{2}$ сумм

$$\Sigma p^{(i)} \varphi_0(x^{(i)}) \varphi_1(x^{(i)}),\ \Sigma p^{(i)} \varphi_0(x^{(i)}) \varphi_2(x^{(i)}), \ldots, \Sigma p^{(i)} \varphi_0(x^{(i)}) \varphi_{m-1}(x^{(i)}),$$

$$\Sigma p^{(i)} \varphi_1(x^{(i)}) \varphi_2(x^{(i)}), \ldots, \Sigma p^{(i)} \varphi_1(x^{(i)}) \varphi_{m-1}(x^{(i)})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma p^{(i)} \varphi_{m-2}(x^{(i)}) \varphi_{m-1}(x^{(i)})$$

приводились к нулю, то неизвестные $a_1, a_2, \ldots, a_m$ в совокупности уравнений, доставляемой способом наименьших квадратов, окажутся отделенными, и их можно будет прямо вычислять по общей формуле

$$a_{l+1} = \frac{\Sigma p^{(i)} y^{(i)} \varphi_l(x^{(i)})}{\Sigma p^{(i)} \varphi_l(x^{(i)}) \varphi_l(x^{(i)})},$$

знаменатель которой $\Sigma p^{(i)} \varphi_l(x^{(i)}) \varphi_l(x^{(i)})$ представит вместе с тем вес получаемого по этой формуле приближенного значения a_{l+1}. Что же касается суммы W, то при указанных нами условиях она приводится к

$$W = \Sigma p^{(i)} y^{(i)} y^{(i)} - a_1 \Sigma p^{(i)} y^{(i)} \varphi_0(x^{(i)}) -$$

$$- a_2 \Sigma p^{(i)} y^{(i)} \varphi_1(x^{(i)}) \ldots - a_m \Sigma p^{(i)} y^{(i)} \varphi_{m-1}(x^{(i)})$$

$$= \sum p^{(i)} y^{(i)} y^{(i)} - \sum \frac{\left(\Sigma p^{(i)} y^{(i)} \varphi_l(x^{(i)})\right)^2}{\Sigma p^{(i)} \varphi_l(x^{(i)}) \varphi_l(x^{(i)})} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ l = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \end{matrix}$$

и соответственно этому для математического ожидания квадрата погрешности, соответствующей весу единицы, получаем такое приближенное выражение

$$k = \frac{1}{n-m}\left\{\sum p^{(i)} y^{(i)} y^{(i)} - \sum \frac{\left(\Sigma p^{(i)} y^{(i)} \varphi_l(x^{(i)})\right)^2}{\Sigma p^{(i)} \varphi_l(x^{(i)}) \varphi_l(x^{(i)})}\right\}.$$

Обращаясь к ряду вспомогательных функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x),$$

замечаем, что первая из них должна удовлетворять одному условию

$$\Sigma p^{(i)} \varphi_1 (x^{(i)}) = 0,$$

которое, при $\varphi_1(x) = x + g_1$, дает одно уравнение

$$\Sigma p^{(i)} x^{(i)} + g_1 \Sigma p^{(i)} = 0,$$

откуда находим

$$g_1 = -\frac{\Sigma p^{(i)} x^{(i)}}{\Sigma p^{(i)}}, \quad \varphi_1(x) = x - \frac{\Sigma p^{(i)} x^{(i)}}{\Sigma p^{(i)}}.$$

Для функции $\varphi_2(x)$ имеем два условия

$$\Sigma p^{(i)} \varphi_2 (x^{(i)}) = 0 \quad \text{и} \quad \Sigma p^{(i)} \varphi_1 (x^{(i)}) \varphi_2 (x^{(i)}) = 0.$$

Эту вторую вспомогательную функцию мы можем представить в виде суммы

$$\varphi_2(x) = (x + f_2) \varphi_1(x) + h_2,$$

коэффициенты которой f_2, h_2 в силу наших условий должны удовлетворять уравнениям

$$\Sigma p^{(i)} (x^{(i)} + f_2) \varphi_1 (x^{(i)}) + h_2 \Sigma p^{(i)} = 0$$

и

$$\Sigma p^{(i)} (x^{(i)} + f_2) \varphi_1 (x^{(i)}) \varphi_1 (x^{(i)}) + h_2 \Sigma p^{(i)} \varphi_1 (x^{(i)}) = 0,$$

откуда находим

$$h_2 = -\frac{\Sigma p^{(i)} x^{(i)} \varphi_1 (x^{(i)})}{\Sigma p^{(i)}}, \quad f_2 = -\frac{\Sigma p^{(i)} x^{(i)} \varphi_1 (x^{(i)}) \varphi_1 (x^{(i)})}{\Sigma p^{(i)} \varphi_1 (x^{(i)}) \varphi_1 (x^{(i)})}.$$

Подобным же образом каждую из следующих функций ряда

$$\varphi_0(x), \ \varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ldots, \ \varphi_l(x), \ \varphi_{l+1}(x), \ldots$$

можно составлять, как нетрудно убедиться, по двум предшествующим ей на основании общей формулы

$$\varphi_{l+1}(x) = (x + f_{l+1}) \varphi_l(x) + h_{l+1} \varphi_{l-1}(x)$$

коэффициенты которой f_{l+1}, h_{l+1} определяются двумя требованиями

$$\Sigma p^{(i)}(x^{(i)}+f_{l+1})\varphi_l(x^{(i)})\varphi_{l-1}(x^{(i)})+h_{l+1}\Sigma p^{(i)}\varphi_{l-1}(x^{(i)})\varphi_{l-1}(x^{(i)})=0$$

и

$$\Sigma p^{(i)}(x^{(i)}+f_{l+1})\varphi_l(x^{(i)})\varphi_l(x^{(i)})+h_{l+1}\Sigma p^{(i)}\varphi_{l-1}(x^{(i)})\varphi_l(x^{(i)})=0,$$

откуда находим

$$h_{l+1}=-\frac{\Sigma p^{(i)}x^{(i)}\varphi_l(x^{(i)})\varphi_{l-1}(x^{(i)})}{\Sigma p^{(i)}\varphi_{l-1}(x^{(i)})\varphi_{l-1}(x^{(i)})}=-\frac{\Sigma p^{(i)}\varphi_l(x^{(i)})\varphi_l(x^{(i)})}{\Sigma p^{(i)}\varphi_{l-1}(x^{(i)})\varphi_{l-1}(x^{(i)})}$$

и

$$f_{l+1}=-\frac{\Sigma p^{(i)}x^{(i)}\varphi_l(x^{(i)})\varphi_l(x^{(i)})}{\Sigma p^{(i)}\varphi_l(x^{(i)})\varphi_l(x^{(i)})}.$$

Что касается сумм

$$\Sigma p^{(i)}y^{(i)}\varphi_l(x^{(i)}),\ \Sigma p^{(i)}\varphi_l(x^{(i)})\varphi_l(x^{(i)}),\ \Sigma p^{(i)}x^{(i)}\varphi_l(x^{(i)})\varphi_l(x^{(i)}),$$

то вычисление их можно свести к вычислению сумм

$$\Sigma p^{(i)},\ \Sigma p^{(i)}x^{(i)},\ \Sigma p^{(i)}(x^{(i)})^2,\ \Sigma p^{(i)}(x^{(i)})^3,\ \ldots\ldots,$$

$$\Sigma p^{(i)}y^{(i)},\ \Sigma p^{(i)}y^{(i)}x^{(i)},\ \Sigma p^{(i)}y^{(i)}(x^{(i)})^2,\ \ldots\ldots;$$

для этой цели служит следующий ряд формул, где символами $(0,\ r)$ и $(j,\ r)$ мы, по примеру Чебышева, обозначаем суммы

$$\Sigma p^{(i)}(x^{(i)})^r \quad \text{и} \quad \Sigma p^{(i)}(x^{(i)})^r\varphi_j(x^{(i)}).$$

$$a_1=\frac{\Sigma p^{(i)}y^{(i)}}{(0,0)},$$

$$g_1=f_1=-\frac{(0,1)}{(0,0)},\ (1,1)=(0,2)+f_1(0,1),\ \varphi_1(x)=x+f_1$$

$$a_2=\frac{\Sigma p^{(i)}y^{(i)}x^{(i)}+g_1\Sigma p^{(i)}y^{(i)}}{(1,1)}=\frac{\Sigma p^{(i)}y^{(i)}x^{(i)}-(0,1)\,a_1}{(1,1)}$$

$$(1,2)=(0,3)+f_1(0,2),\ (1,3)=(0,4)+f_1(0,3),\ h_2=-\frac{(1,1)}{(0,0)}$$

$$f_2 = -\frac{(1,2)+f_1(1,1)}{(1,1)} = -\frac{(1,2)}{(1,1)} + \frac{(0,1)}{(0,0)}, \quad (2,2) = (1,3) + f_2(1,2) + h_2(0,2)$$

$$\varphi_2(x) = (x+f_2)\,\varphi_1(x) + h_2, \quad \Sigma p^{(i)} y^{(i)} (x^{(i)})^2 = a_1(0,2) + a_2(1,2) + a_3(2,2)$$

$$a_3 = \frac{\Sigma p^{(i)} y^{(i)} (x^{(i)})^2 - (0,2)\,a_1 - (1,2)\,a_2}{(2,2)}$$

$$(1,4) = (0,5) + f_1(0,4), \quad (1,5) = (0,6) + f_1(0,5), \quad h_3 = -\frac{(2,2)}{(1,1)} \ldots .$$

$$(2,3) = (1,4) + f_2(1,3) + h_2(0,3), \quad (2,4) = (1,5) + f_2(1,4) + h_2(0,4)$$

$$f_3 = -\frac{\Sigma p^{(i)} x^{(i)} \varphi_2(x^{(i)}) \left\{(x^{(i)}+f_2)(x^{(i)}+f_1) + h_2\right\}}{(2,2)} =$$

$$= -\frac{(2,3) + (f_2+f_1)(2,2)}{(2,2)}$$

$$= -\frac{(2,3)}{(2,2)} + \frac{(1,2)}{(1,1)} \quad \varphi_3(x) = (x+f_3)\,\varphi_2(x) + h_3\,\varphi_1(x)$$

$$\Sigma p^{(i)} y^{(i)} (x^{(i)})^3 = a_1(0,3) + a_2(1,3) + a_3(2,3) + a_4(3,3)$$

$$a_4 = \frac{\Sigma p^{(i)} y^{(i)} (x^{(i)})^3 - a_1(0,3) - a_2(1,3) - a_3(2,3)}{(3,3)}$$

. . . .

$$(1,2l) = (0,2l+1) + f_1(0,2l), \quad (1,2l+1) = (0,2l+2) + f_1(0,2l+1)$$

$$(2,2l-1) = (1,2l) + f_2(1,2l-1) + h_2(0,2l-1),$$

$$(2,2l) = (1,2l+1) + f_2(1,2l) + h_2(0,2l)$$

$$(3,2l-2) = (2,2l-1) + f_3(2,2l-2) + h_3(1,2l-2),$$

$$(3,2l-1) = (2,2l) + f_3(2,2l-1) + h_3(1,2l-1)$$

. . . .

$$(l,\ l+1)=(l-1,\ l+2)+f_l(l-1,\ l+1)+h_l(l-2,\ l+1),$$

$$(l,\ l+2)=(l-1,\ l+3)+f_l(l-1,\ l+2)+h_l(l-2,\ l+2)$$

$$f_{l+1}=-\frac{\Sigma p^{(i)}x^{(i)}\{(x^{(i)})^l+(f_1+f_2+\ldots+f_l)(x^{(i)})^{l-1}+\ldots\}\varphi_l(x^{(i)})}{(l,\ l)}=$$

$$=-\frac{(l,\ l+1)+(f_1+f_2+\ldots+f_l)(l,\ l)}{(l,\ l)}=-\frac{(l,\ l+1)}{(l,\ l)}+\frac{(l-1,\ l)}{(l,\ l)}.$$

$$h_{l+1}=-\frac{(l,\ l)}{(l-1,\ l-1)},\quad \varphi_{l+1}(x)=(x+f_{l+1})\varphi_l(x)+h_{l+1}\varphi_{l-1}(x)$$

$$\Sigma p^{(i)}y^{(i)}(x^{(i)})^{l+1}=$$

$$=a_1(0,\ l+1)+a_2(1,\ l+1)+\ldots+a_{l+1}(l,\ l+1)+a_{l+2}(l+1,\ l+1)$$

$$a_{l+2}=\frac{\Sigma p^{(i)}y^{(i)}(x^{(i)})^{l+1}-a_1(0,l+1)-a_2(1,l+1)-\ldots-a_{l+1}(l,l+1)}{(l+1,\ l+1)}$$

Числовой пример *. Применим указанные вычисления к следующей совокупности пар значений x, y, при чем веса всех наблюдений возьмем равными единице и будем считать y целою функциею второй степени от x.

$x^{(i)}$	$y^{(i)}$
0,15411	19,47
0,19516	21,83
0,22143	23,11
0,28802	26,11
0,32808	27,60
0,38183	28,89
0,45517	33,17
0,57012	33,38
0,75930	32,31
0,91075	31,88
1,13895	25,46
$(0,1)=\Sigma(x^{(i)})=5,40292$	$\Sigma y^{(i)}=303,21$

* Этот пример взят из мемуара Чебышева „Sur l'interpolation par la methode des moindres carrés", § VIII (Сочинения Чебышева, I, стр. 493—498).

По этим данным образуем следующие таблички:

$(x^{(i)})^2$	$(x^{(i)})^3$	$(x^{(i)})^4$
0,02375	0,00366	0,00056
0,03809	0,00743	0,00145
0,04903	0,01086	0,00240
0,08296	0,02389	0,00688
0,10764	0,03531	0,01159
0,14579	0,05567	0,02126
0,20718	0,09430	0,04292
0,32504	0,18531	0,10565
0,57654	0,43776	0,33239
0,82947	0,75544	0,68801
1,29721	1,47745	1,68275
$(0,2)=3,68270$	$(0,3)=3,08708$	$(0,4)=2,89586$

$x^{(i)}y^{(i)}$	$(x^{(i)})^2y^{(i)}$	$(y^{(i)})^2$
3,00052	0,46241	379,08
4,26034	0,83145	476,55
5,11725	1,13311	534,07
7,52020	2,16596	681,73
9,05501	2,97077	761,76
11,03105	4,21199	834,63
15,09799	6,87215	1100,25
19,03061	10,84973	1114,22
24,53298	18,62790	1043,94
29,03471	26,44337	1016,33
28,99767	33,02691	648,21
$\Sigma x^{(i)}y^{(i)}=156,67833$	$\Sigma (x^{(i)})^2y^{(i)}=107,59575$	$\Sigma (y^{(i)})^2=8590,77$

Первая табличка вместе со значениями $x^{(i)}$ служит для вычисления f_1, $(1,1)$, f_2, h_2, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,2)$, а вторая — для вычисления коэффициентов a_1, a_2, a_3. Последовательно находим

$$f_1=-\frac{(0,1)}{(0,0)}=-\frac{5,40292}{11}=-0,49117$$

$$(1,1)=(0,2)+f_1(0,1)=3,68270-2,65378=1,02892$$

$$h_2=-\frac{(1,1)}{(0,0)}=-0,09354;$$

$$(1,2)=(0,3)+f_1(0,2)=3,08708-1,80884=1,27824$$

$$f_2=-\frac{(1,2)}{(1,1)}+\frac{(0,1)}{(0,0)}=-1,24235+0,49117=-0,75118$$

$$\varphi_1(x)=x-0,49117$$

$$\varphi_2(x)=(x-0,75118)(x-0,49117)-0,09354=$$

$$=x^2-1,24235x+0,27542$$

Вторая же табличка вместе с данными $y^{(i)}$ служит для вычисления коэффициентов a_1, a_2, a_3 и суммы W.

$$a_1=\frac{\Sigma y^{(i)}}{(0,0)}=\frac{303,21}{11}=27,5645,\quad a_1(0,1)=148,92903$$

$$\Sigma x^{(i)}y^{(i)}-a_1(0,1)=156,67833-148,92903=7,74930$$

$$a_2=\frac{\Sigma x^{(i)}y^{(i)}-a_1(0,1)}{(1,1)}=\frac{7,74930}{1,02892}\ 7,5315$$

$$\begin{aligned}\Sigma(x^{(i)})^2y^{(i)}&=107,59575\\ -(0,2)a_1&=-101,51195\\ -(1,2)a_2&=-9,62713\\ \hline &\ \ -3,54333\end{aligned}\qquad a_3=\frac{-3,54333}{0,07490}=-47,308$$

$$\begin{aligned}a_1\varphi_0(x)&=27,564\\ a_2\varphi_1(x)&=-3,699+7,532x\\ a_3\varphi_2(x)&=-13,030+58,773x-47,308x^2\\ \hline y&=10,835+66,305x-47,308x^2\,*\end{aligned}$$

* По мемуару Чебышева

$$y=10,834+66,311x-47,313x^2$$

$$\Sigma (y^{(i)})^2 = 8590{,}77 \qquad k = \frac{6{,}93}{8} = 0{,}866$$

$$-(0{,}0)\,a_1^2 = -8357{,}85 \qquad \text{м. о. кв. погр. } a_1 = \frac{k}{(0{,}0)} = 0{,}0787$$

$$-(1{,}1)\,a_2^2 = -58{,}36 \qquad \text{м. о. кв. погр. } a_2 = \frac{k}{(1{,}1)} = 0{,}842$$

$$-(2{,}2)\,a_3^2 = -167{,}63 \qquad \text{м. о. кв. погр. } a_3 = \frac{k}{(2{,}2)} = 11{,}56$$

$$W = 6{,}93$$

Средняя квадратичная погрешность оказывается для a_1 равною 0,28, для a_2 равною 0,92 и для a_3 достигает 3,4; поэтому уже первые знаки после запятой в этих числах приходится признать сомнительными, в числе же a_3 сомнительна и цифра 7 перед запятой.

Для некоторой проверки наших числовых выводов может служить следующая таблица.

наблюд. $y^{(i)}$	вычисл. $y^{(i)} = \bar{y}^{(i)}$	$y^{(i)} - \bar{y}^{(i)}$	квадр. откл. набл. от вычисл. $(y^{(i)} - \bar{y}^{(i)})^2$
19,47	19,93	— 0,46	0,2116
21,83	21,97	— 0,14	0,0196
23,11	23,20	— 0,09	0,0081
26,11	26,01	+ 0,10	0,0100
27,60	27,50	+ 0,10	0,0100
28,89	29,25	— 0,36	0,1296
33,17	31,21	+ 1,96	3,8416
33,38	33,26	+ 0,12	0,0144
32,31	33,90	— 1,59	2,5281
31,88	31,98	— 0,10	0,0100
25,46	24,99	+ 0,47	0,2209
		$\Sigma (y^{(i)} - \bar{y}^{(i)}) = 0{,}01$	$7{,}0039 = W = \Sigma (y^{(i)} - \bar{y}^{(i)})^2$

Разницу двух полученных нами значений W

$$6{,}93 \quad \text{и} \quad 7{,}00$$

можно объяснить накоплением погрешностей, происходящих от отбрасывания десятичных знаков. Результаты вычислений, приведенные в мемуаре Чебышева, несколько отличаются от полученных нами: согласно им искомая целая функция второй степени

$$y = 10{,}834 + 66{,}311x - 47{,}313x^2;$$

но такое малое изменение коэффициентов не оказывает заметного влияния на величины $\overline{y^{(i)}}$.

Для случая, когда все расстояния между последовательными значениями x одинаковы

$$x'' - x' = x''' - x'' = \ldots . = x^{(i+1)} - x^{(i)} = \ldots . = x^{(n)} - x^{(n-1)}$$

равно как и веса наблюдений, Чебышев дал специальные формулы *, выводом которых мы сейчас займемся.

Пусть $p' = p'' = \ldots . = p^{(n)} = 1$ и

$$x' = 1,\ x'' = 2, \ldots ., \ x^{(i)} = i, \ldots ., \ x^{(n)} = n.$$

В таком случае для определения всех функций $\varphi_l(x)$ нетрудно установить общую формулу

$$\varphi_l(x) = C_l \Delta^l (x-1)(x-2) \ldots . (x-l)(x-n)(x-n-1) \ldots .$$
$$\ldots . (x-n-l+1)$$

при

$$C_l = \frac{1}{2l(2l-1) \ldots . (l+1)}.$$

Для этой цели замечаем, что функция

$$\Phi(x) = (x-1)(x-2) \ldots . (x-l)(x-n-1) \ldots . (x-n-l)$$

обращается в нуль при $x = 1, 2, \ldots ., l$ и при $x = n+1, \ldots ., n+l$, и потому ее разность

$$\Delta^\lambda \Phi(x) = \Phi(x+\lambda) - \frac{\lambda}{1}\Phi(x+\lambda-1) + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}\Phi(x+\lambda-2) \ldots . \pm \Phi(x)$$

* В мемуаре „Об интерполировании величин равноотстоящих (Сочинения Т. II, стр. 236—242) он обобщает эти формулы и на некоторые случаи неодинаковых весов; но едва ли такое обобщение может найти приложение.

порядка λ меньшего, чем l, обращается в нуль

$$\text{при } x = n + l - \lambda \quad \text{и} \quad \text{при } x = 1.$$

Следовательно, если в формуле суммирования по частям

$$\sum_{1}^{n+1} \cdot \Omega(x) \Delta \Psi(x) = \Omega(n+1) \Psi(n+1) - \Omega(1) \Psi(1)$$

$$- \sum_{1}^{n+1} \cdot \Psi(x+1) \Delta \Omega(x)$$

мы последовательно положим

$$\Psi(x) = \Delta^{l-1} \Phi(x), \Delta^{l-2} \Phi(x+1), \Delta^{l-3} \Phi(x+2), \ldots,$$

$$\Delta \Phi(x+l-2), \Phi(x+l-1)$$

и

$$\Omega(x) = \theta(x), \Delta\theta(x), \ldots, \Delta^{l-1}\theta(x),$$

где $\theta(x)$ такая же произвольная функция числа x, как и $\Omega(x)$, то получим следующий ряд равенств

$$\sum_{1}^{n+1} \theta(x) \Delta^l \Phi(x) = -\sum_{1}^{n+1} (\Delta\theta(x)) \cdot \Delta^{l-1} \Phi(x+1)$$

$$\sum_{1}^{n+1} (\Delta\theta(x)), \Delta^{l-1} \Phi(x+1) = -\sum_{1}^{n+1} (\Delta^2 \theta(x)) \cdot \Delta^{l-2} \Phi(x+2)$$

$$\sum_{1}^{n+1} (\Delta^2\theta(x)) \Delta^{l-2} \Phi(x+2) = -\sum_{1}^{n+1} \Delta^3\theta(x) \Delta^{l-3} \Phi(x+3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{1}^{n+1} (\Delta^{l-1}\theta(x)) \cdot \Delta\Phi(x+l-1) = -\sum_{1}^{n+1} \Delta^l\theta(x) \cdot \Phi(x+l),$$

откуда вытекает такое

$$\sum_{1}^{n+1} \theta(x)\,\Delta^l \Phi(x) = (-1)^l \sum_{1}^{n+1} (\Delta^l \theta(x)) \cdot \Phi(x+l)$$

и в частности для любой целой функции $\theta(x)$ степени меньше чем l имеем

$$\sum_{1}^{n+1} \theta(x)\,\Delta^l \Phi(x) = 0.$$

Последнее равенство служит достаточным доказательством верности вышеприведенной формулы

$$\varphi_l(x) = C_l \Delta^l (x-1)(x-2)\ldots(x-l)(x-n-1)\ldots(x-n-l),$$

при чем величина $\dfrac{1}{2l(2l-1)\ldots(l+1)}$ коэффициента C_l вытекает из поставленного нами требования, чтобы коэффициент при старшем члене x^l функции $\varphi_l(x)$ был равен единице.

Полагая же в формуле

$$\sum_{1}^{n+1} \theta(x)\,\Delta^l \Phi(x) = (-1)^l \sum_{1}^{n+1} \Delta^l \theta(x)\,\Phi(x+l)$$

функцию $\theta(x)$ равною $\varphi_l(x)$, получаем

$$\sum_{1}^{n+1} \varphi_l(x)\,\varphi_l(x) = \frac{1.2.3\ldots l}{(l+1)(l+2)\ldots 2l}$$

$$\sum_{1}^{n+1} (x+l-1)\ldots(x+1)\,x\,(n-x)(n-x-1)\ldots(n-x-l+1)$$

$$= \frac{1.2.3\ldots l}{(l+1)(l+2)\ldots 2l} \cdot$$

$$\sum_{1}^{n-l+1} (x+l-1)\ldots(x+1)\,x\,(n-x)(n-x-1)\ldots(n-x-l+1),$$

в виду того, что произведение $(n-x)(n-x-1)\ldots(n-x-l+1)$ приводится к нулю при $x=n,\ n-1,\ldots,n-l+1$. Произведение $(x+l-1)\ (x+l-2)\ldots(x+1)x$ можно, согласно известной формуле исчисления конечных разностей, представить в виде разности порядка l

$$(x+l-1)(x+l-2)\ldots(x+1)x=$$
$$=\Delta^l\frac{(x+l-1)\ldots(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots(x-l)}{2l(2l-1)\ldots(l+1)}.$$

А так как при $x=n-l+1$ приводятся к нулю произведение

$$(n-x)(n-x-1)\ldots(n-x+l+1)$$

и все его разности, порядок которых не превосходит $l-1$, а при $x=1$ приводятся к нулю

$$\Psi(x+l-1),\ \Delta\Psi(x+l-2),\ldots,\ \Delta^{l-2}\Psi(x+1),\ \Delta^{l-1}\Psi(x),$$

то l-кратное применение формулы суммирования по частям доставляет нам следующее равенство

$$\sum_1^{n+1-l}(n-x)(n-x-1)\ldots(n-x-l+1)$$

$$\Delta^l\frac{(x+l-1)\ldots(x+1)x(x-1)\ldots(x-l)}{2l(2l-1)\ldots(l+1)}$$

$$=\frac{1.2.3\ldots l}{2l(2l-1)\ldots(l+1)}\sum_1^{n+1-l}(x+2l-1)(x+2l-2)\ldots(x+1)x;$$

вместе с тем, как известно, имеем

$$\sum_1^{x+1}(x+2l-1)(x+2l-2)\ldots(x+1)x=$$
$$=\frac{1}{2l+1}(x+2l-1)\ldots(x+1)x(x-1)$$

и потому

$$\sum_{1}^{n-l+1}(x+2l-1)\ldots.(x+1)x=\frac{(n+l)(n+l-1)\ldots.(n-l+1)(n-l)}{2l+1}$$

$$=\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots.(n^2-l^2)}{2l+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{1}^{n+1}\varphi_l(x)\,\varphi_l(x)=\left\{\frac{1.2.3\ldots l}{2l(2l-1)\ldots(l+1)}\right\}^2\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-l^2)}{2l+1}.$$

С другой стороны, имеем

$$\sum_{1}^{n+1}y^{(x)}\varphi^l(x)=(-1)^l C_l\sum_{1}^{n+1}\Phi(x+l)\,\Delta^l y^{(x)}$$

$$=\sum_{1}^{n-l+1}\frac{(x+l-1)\ldots.x(n-x)\ldots.(n-x-l+1)\,\Delta^l y^{(x)}}{2l(2l-1)\ldots.(l+1)},$$

что доставляет такую формулу

$$a_{l+1}=\frac{(2l+1)\,2l(2l-1)\ldots.(l+1)}{(1.2\ldots.l)^2}\times$$

$$\times\sum_{1}^{n-l+1}\frac{(x+l-1)\ldots.x(n-x)\ldots.(n-x-l+1)\,\Delta^l y^{(x)}}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots.(n^2-l^2)}$$

с весом

$$\left\{\frac{1.2\ldots.l}{2l(2l-1)\ldots.(l+1)}\right\}^2\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots.(n^2-l^2)}{2l+1};$$

интерполяционная же формула Чебышева в данном случае принимает следующий вид

$$y = \frac{\sum\limits_{1}^{n+1} y^{(x)}}{n} + \frac{3\sum\limits_{1}^{n} x(n-x)\Delta y^{(x)}}{1^2 . n(n^2-1^2)} \Delta x(x-n) +$$

$$+ \frac{5\sum\limits_{1}^{n-1}(x+1)x(n-x)(n-x-1)\Delta^2 y^{(x)}}{1^2 . 2^2 n(n^2-1^2)(n^2-2^2)} \Delta^2 x(x-1)(x-n)(x-n-1)$$

$$+ \frac{7\sum\limits_{1}^{n-2}(x+2)(x+1)x(n-x)(n-x-1)(n-x-2)\Delta^3 y^{(x)}}{1^2 . 2^2 . 3^3, n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)} .$$

$$\times \Delta^3 x(x-1)(x-2)(x-n)(x-n-1)(x-n-2)$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Для последовательного составления функций $\varphi_l(x)$ прежде всего заметим, что все суммы

$$\sum_{1}^{n+1}\left(x-\frac{n+1}{2}\right), \ \sum\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^3, \ \sum\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^5, \dots$$

нечетных степеней $x-\frac{n+1}{2}$ равны нулю, и на этом основании не трудно заключить, что $\varphi_l(x)$ при l четном, четная а при l нечетном, нечетная функция разности $x-\frac{n+1}{2}$. Отсюда следует, что связь между тремя последовательными функциями φ имеет такой вид

$$\varphi_{l+1}(x) = \left(x-\frac{n+1}{2}\right)\varphi_l(x) + h_{l+1}\varphi_{l-1}{}^{(x)},$$

и на основании общей формулы находим

$$h_{l+1} = -\frac{\sum\limits_{1}^{n+1} \varphi_l(x)\,\varphi_l(x)}{\sum\limits_{1}^{n+1} \varphi_{l-1}(x)\,\varphi_{l-1}(x)} = \frac{l^2(n^2-l^2)}{4(2l-1)(2l+1)}.$$

Вот выражения функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$:

$$\varphi_1(x) = x - \frac{n+1}{2}, \quad \varphi_2(x) = \left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{n^2-1}{12} = x^2 - (n+1)x + \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\varphi_3(x) = \left(x - \frac{n+1}{2}\right)\left\{x^2 - (n+1)x + \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n^2-2^2}{3.5}\right\}$$

$$= x^3 - \frac{3(n+1)}{2}x^2 + \frac{6n^2+15n+11}{10}x - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{20}.$$

Числовой пример возьмем из книги Маиевского, „Изложение способа наименьших квадратов", при чем исправим погрешности, вкравшиеся в числовые выкладки Маиевского *. Мы находим следующую табличку:

x	$y^{(x)}$	$\Delta y^{(x)}$	$\Delta^2 y^{(x)}$	$\Delta^3 y^{(x)}$
1	0,2020	—0,0135	—0,0105	+0,0134
2	0,1885	—0,0240	+0,0029	—0,0076
3	0,1645	—0,0211	—0,0047	+0,0026
4	0,1434	—0,0258	—0,0021	—0,0016
5	0,1176	—0,0279	—0,0037	+0,0016
6	0,0897	—0,0316	—0,0021	—0,0008
7	0,0581	—0,0337	—0,0029	
8	0,0244	—0,0366		
9	—0,0122			
	$\Sigma y^{(x)} = 0{,}9760$			

* Тот же пример со всеми погрешностями воспроизведен в обширном труде Josef Kozák: „Grundprobleme der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate" (Zweiter Band, erster Teil, 1908, стр. 186—195, § 27).

По данным значениям x получаем

$$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x-5,\ \varphi_2(x)=x^2-10x+\frac{55}{3},$$

$$\varphi_3(x)=x^3-15x^2+\frac{316}{5}x-66.$$

Затем находим

$$a_1=\frac{\Sigma y^{(x)}}{n}=+\frac{0{,}9760}{9}=0{,}108444\ldots,$$

а для вычисления коэффициентов a_2, a_3, a_4 и W образуем две таблички:

$(y^{(x)})^2$	$x(n-x)\,\Delta y^{(x)}$
0,04080400	$1.8\times-0{,}0135=-0{,}1080$
0,03553225	$2.7\times-0{,}0240=-0{,}3360$
0,02706025	$3.6\times-0{,}0211=-0{,}3798$
0,02056356	$4.5\times-0{,}0258=-0{,}5160$
0,01382976	$5.4\times-0{,}0279=-0{,}5580$
0,00804609	$6.3\times-0{,}0316=-0{,}5688$
0,00337561	$7.2\times-0{,}0337=-0{,}4718$
0,00059536	$8.1\times-0{,}0366=-0{,}2928$
0,00014884	$\Sigma x(n-x)\,\Delta y^{(x)}=-3{,}2312$
$\Sigma(y^{(x)})^2=0{,}14995572$ *	$a_2=-\frac{3{,}2312}{120}=-0{,}0269266\ldots$

$$\frac{x(x+1)(n-x)(n-x-1)}{1^2.2^2}\Delta^2 y^{(x)}$$

$$1.28\times-0{,}0105=-0{,}2940$$
$$3.21\times+0{,}0029=+0{,}1827$$
$$6.15\times-0{,}0047=-0{,}4230$$
$$10.10\times-0{,}0021=-0{,}2100$$
$$15.\ 6\times-0{,}0037=-0{,}3330$$
$$21.\ 3\times-0{,}0021=-0{,}1323$$
$$28.\ 1\times-0{,}0029=-0{,}0812$$

$$\sum\frac{x(x+1)(n-x)(n-x-1)}{1^2.2^2}\Delta^2 y^{(x)}=-1{,}2908\ ^{**}$$

* У Маневского 0,14998582.

** У Маневского 1,2878.

$$\frac{x(x+1)(x+2)(n-x)(n-x-1)(n-x-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}\Delta^3 y^{(x)}$$

$$1 \cdot 56 \times +0{,}0134 = +0{,}7504$$
$$4 \cdot 35 \times -0{,}0076 = -1{,}0640$$
$$10 \cdot 20 \times +0{,}0026 = +0{,}5200$$
$$20 \cdot 10 \times -0{,}0016 = -0{,}3200$$
$$35 \cdot 4 \times +0{,}0016 = +0{,}2240$$
$$56 \cdot 1 \times -0{,}0008 = -0{,}0448$$

$$\sum \frac{x(x+1)(x+2)(n-x)(n-x-1)(n-x-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}\Delta^3 y^{(x)} = +0{,}0656$$

$$a_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 80 \cdot 77}(-1{,}2908) = -0{,}001397,$$

$$a_4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{9 \cdot 80 \cdot 77 \cdot 72}\,0{,}0656 = +0{,}0000138.$$

Ограничиваясь первыми тремя членами формулы Чебышева, получаем

$$a_1 \varphi_0(x) = 0{,}10844$$
$$a_2 \varphi_1(x) = +0{,}13463 - 0{,}026927\,x$$
$$a_3 \varphi_2(x) = -0{,}02561 + 0{,}013970\,x - 0{,}001397\,x^2$$
$$\overline{y}^{(x)} = 0{,}21746 - 0{,}012957\,x - 0{,}001397\,x^2$$

$$\sum (y^{(x)})^2 = 0{,}14995572 \qquad \sum\left\{\varphi_0(x)\right\}^2 = 9, \quad \sum\left\{\varphi_1(x)\right\}^2 = 60$$

$$-a_1^2 \sum\left\{\varphi_0(x)\right\}^2 = -0{,}10584178 \qquad \sum\left\{\varphi_2(x)\right\}^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{9 \cdot 80 \cdot 77}{5} = 308$$

$$-a_2^2 \sum\left\{\varphi_1(x)\right\}^2 = -0{,}04350272 \qquad \text{ср. кв. ошибка } a_1 = 0{,}00046$$

$$-a_3^2 \sum\left\{\varphi_2(x)\right\}^2 = -0{,}00060109 \qquad \text{ср. кв. ошибка } a_2 = 0{,}00017$$

$$W = 0{,}00001013 \qquad \text{ср. кв. ошибка } a_3 = 0{,}00007$$

$$k = \frac{W}{6} = 0{,}00000169.$$

Прибавление следующего члена $a_4 \varphi_3(x)$ уменьшает W на

$$a^2{}_4 \sum \left\{ \varphi_3(x) \right\}^2 = 0{,}00000027,$$

но увеличивает число k, которое становится тогда равным

$$\frac{0{,}00000986}{5} \, 0{,}00000195;$$

средняя же квадратичная погрешность коэффициента a_4 достигает

$$0{,}00003.$$

Мы видим, что средняя квадратичная погрешность полученной нами величины 0,0000139 коэффициента a_4 превышает эту величину. При таких условиях приходится признать четвертый член формулы Чебышева совершенно сомнительным и прибавление его излишним. Ограничиваясь первыми тремя членами, составим для сравнения наблюденных значений $y^{(x)}$ с вычисленными по формуле следующую табличку

$y^{(x)}$	$\overline{y}^{(x)}$	$y^{(x)} - \overline{y}^{(x)}$	$(y^{(x)} - \overline{y}^{(x)})^2 = (\delta^{(x)})^2$
0,2020	0,20310	$-0{,}00110$	0,00000121
0,1885	0,18596	$+0{,}00254$	0,00000645
0,1645	0,16602	$-0{,}00152$	0,00000231
0,1434	0,14328	$+0{,}00012$	0,00000001
0,1176	0,11775	$-0{,}00015$	0,00000002
0,0897	0,08943	$+0{,}00027$	0,00000007
0,0581	0,05831	$-0{,}00021$	0,00000004
0,0244	0,02440	0,00000	0,00000000
$-0{,}0122$	$-0{,}01231$	$+0{,}00011$	0,00000001

$$\Sigma (y^{(x)} - \overline{y}^{(x)}) = +0{,}00006, \quad \Sigma (\delta^{(x)})^2 = 0{,}00001012 = W$$

§ 51. Положим теперь, что сверх данных и условий, допущенных в § 46, нам известно несколько зависимостей между $a_1, a_2, \ldots, a_m$. И подобно тому, как раньше мы предполагали линейными, относительно $a_1, a_2, \ldots, a_m$, те выражения, приближенные величины которых доставлены наблюдениями, будем предполагать линейными, относительно $a_1, a_2, \ldots, a_m$, и те выражения, точные величины которых нам известны помимо наблюдений.

Такое предположение обыкновенно оправдывают тем соображением, что способ наименьших квадратов употребляется для разыскания малых поправок в найденных, так или иначе, приближенных величинах неизвестных. В виду предполагаемой малости чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ пренебрегают их степенями выше первой, равно как и произведениями их, и таким образом все выражения, содержащие эти числа, сводят к линейным.

Не настаивая на законности приведенного соображения, заметим, что предположение о линейном виде всех выражений, величины которых доставляются наблюдениями или известны помимо наблюдений, принадлежит к числу основных, и нарушение его лишило бы нас возможности обосновать способ наименьших квадратов на вышеуказанных началах.

Пусть, кроме приближенных равенств

$$A'_1 a_1 + A'_2 a_2 + \ldots + A'_m a_m = b',$$

$$A''_1 a_1 + A''_2 a_2 + \ldots + A''_m a_m = b'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1^{(n)} a_1 + A_2^{(n)} a_2 + \ldots + A_m^{(n)} a_m = b^{(n)},$$

мы имеем ν вполне точных равенств

$$D'_1 a_1 + D'_2 a_2 + \ldots + D'_m a_m = \partial',$$

$$D''_1 a_1 + D''_2 a_2 + \ldots + D''_m a_m = \partial'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_1^{(\nu)} a_1 + D_2^{(\nu)} a_2 + \ldots + D_m^{(\nu)} a_m = \partial^{(\nu)},$$

где D и ∂, с разными значками, числа данные.

Вместе с тем положим, что на основании последних равенств количества

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu$$

можно выразить через

$$a_{\nu+1},\ a_{\nu+2},\ \ldots,\ a_m.$$

Тогда, пользуясь выражением одних количеств через другие и исключая на этом основании

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\nu,$$

мы можем уменьшить число неизвестных.

Таким образом каждая из сумм

$$A_1^{(i)} a_1 + A_2^{(i)} a_2 + \ldots + A_m^{(i)} a_m$$

преобразуется в равную ей сумму вида

$$B_{\nu+1}^{(i)} a_{\nu+1} + B_{\nu+2}^{(i)} a_{\nu+2} + \ldots + B_m^{(i)} a_m + B^{(i)},$$

где коэффициенты

$$B_{\nu+1}^{(i)},\ B_{\nu+2}^{(i)},\ \ldots,\ B_m^{(i)},\ B^{(i)}$$

вполне определяются нашими данными. Вместе с тем разыскание приближенных значений m неизвестных

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$$

будет сведено к разысканию приближенных значений $m-\nu$ количеств

$$a_{\nu+1},\ a_{\nu+2},\ \ldots,\ a_m,$$

из n приближенных уравнений

$$B'_{\nu+1} a_{\nu+1} + \ldots + B'_m a_m \doteq b' - B',$$

$$B''_{\nu+1} a_{\nu+1} + \ldots + B''_m a_m \doteq b'' - B'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B^{(n)}_{\nu+1} a_{\nu+1} + \ldots + B^{(n)}_m a_m \doteq b^{(n)} - B^{(n)}.$$

И мы можем обратиться к рассуждениям предыдущих параграфов, если только указанными уравнениями исчерпываются все известные нам соотношения между неизвестными

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,$$

так как в этом случае между числами

$$a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots, a_m$$

не будет никаких известных нам соотношений.

После такого уменьшения числа неизвестных мы найдем, по изложенным выше способам, для неизвестных

$$a_{\nu+1},\ a_{\nu+2},\ \ldots,\ a_m$$

приближенные величины

$$a^0_{\nu+1},\ a^0_{\nu+2},\ \ldots,\ a^0_m,$$

которым будет соответствовать наименьшая величина суммы

$$\Sigma p\,(B_{\nu+1}\,a^0_{\nu+1}+B_{\nu+2}\,a^0_{\nu+2}+\ldots+B_m\,a^0_m+B-b)^2,$$

равной

$$p'\,(B'_{\nu+1}\,a^0_{\nu+1}+B'_{\nu+2}\,a^0_{\nu+2}+\ldots+B'_m\,a^0_m+B'-b')^2+\ldots$$

$$+\,p^{(n)}\,(B^{(n)}_{\nu+1}\,a^0_{\nu+1}+B^{(n)}_{\nu+2}\,a^0_{\nu+2}+\ldots+B^{(n)}_m\,a^0_m+B^{(n)}-b^{(n)})^2.$$

Для остальных же неизвестных

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\nu$$

мы найдем их приближенные величины

$$a^0_1,\ a^0_2,\ \ldots,\ a^0_\nu,$$

подставляя в выражение этих неизвестных через

$$a_{\nu+1},\ a_{\nu+2},\ \ldots,\ a_m$$

вместо последних чисел их приближенные величины

$$a^0_{\nu+1},\ a^0_{\nu+2},\ \ldots,\ a^0_m.$$

Найденная таким образом система приближенных значений неизвестных

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$$

удовлетворит всем уравнениям

$$D'_1\, a^0_1 + D'_2\, a^0_2 + \ldots + D'_m\, a^0_m = \partial',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D^{(\nu)}_1 a^0_1 + D^{(\nu)}_2 a^0_2 + \ldots + D^{(\nu)}_m a^0_m = \partial^{(\nu)}.$$

Но для всякой системы чисел

$$a^0_1,\ a^0_2,\ \ldots,\ a^0_m,$$

которая удовлетворяет этим уравнениям, должно быть

$$A^{(i)}_1 a^0_1 + A^{(i)}_2 a^0_2 + \ldots + A^{(i)}_m a^0_m = B^{(i)}_{\nu+1} a^0_{\nu+1} + \ldots + B^{(i)}_m a^0_m + B^{(i)}$$

и потому сумма

$$\Sigma p\left(B_{\nu+1} a^0_{\nu+1} + \ldots + B_m a^0_m + B - b\right)^2$$

одинакова с суммою

$$\Sigma p\left(A_1 a^0_1 + A_2 a^0_2 + \ldots + A_m a^0_m - b\right)^2.$$

Отсюда нетрудно заключить, что найденная нами система чисел

$$a^0_1,\ a^0_2,\ \ldots,\ a^0_m,$$

представляющих приближенные величины $a_1, a_2, \ldots, a_m$, отличается от всякой другой системы чисел

$$a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0,$$

которая удовлетворяет известным нам уравнениям, наименьшею величиною суммы

$$\Sigma p\left(A_1 a_1^0 + A_2 a_2^0 + \ldots + A_m a_m^0 - b\right)^2.$$

Указанное приведение связанных величин к величинам, между которыми никаких связей неизвестно, мы проведем с надлежащею подробностью в простейшем случае, который довольно часто встречается на практике; а именно мы предположим, что из независимых наблюдений получены приближенные значения $a_1', a_2', \ldots, a_m'$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$, между которыми известна одна связь

$$D_1 a_1 + D_2 a_2 + \ldots + D_m a_m = \partial$$

Пусть веса приближенных равенств

$$a_1 = a_1', \ a_2 = a_2', \ldots, \ a_m = a_m'$$

соответственно будут $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Заменяя в последнем из этих равенств неизвестное a_m равною ему суммою

$$\frac{\partial}{D_m} - \frac{D_1}{D_m} a_1 - \frac{D_2}{D_m} a_2 - \ldots - \frac{D_{m-1}}{D_m} a_{m-1},$$

приходим к m равенствам

$$a_1 = a_1', \ a_2 = a_2', \ldots, \ a_{m-1} = a'_{m-1}, \ \frac{D_1}{D_m} a_1 + \frac{D_2}{D_m} a_2 + \ldots +$$

$$+ \frac{D_{n-1}}{D_m} a_{m-1} = \frac{\partial}{D_m} - a_m'$$

с теми же весами $p_1, p_2, \ldots, p_m$, но с $m-1$ искомыми величинами $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$. Такие равенства, согласно вышеустановленному способу наименьших квадратов, доставляют нам для новых приближенных значений $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{m-1}^0$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ систему уравнений

$$\left(p_1+\frac{D_1^2}{D_m^2}p_m\right)a_1^0+\frac{D_1D_2}{D_m^2}p_m a_2^0+\ldots+$$
$$+\frac{D_1D_{m-1}}{D_m^2}p_m a_{m-1}^0=p_1a_1'+\frac{D_1}{D_m}p_m\left(\frac{\partial}{D_m}-a_m'\right),$$

$$\frac{D_1D_2}{D_m^2}p_m a_1^0+\left(p_2+\frac{D_2^2}{D_m^2}p_m\right)a_2^0+\ldots+$$
$$+\frac{D_2D_{m-1}}{D_m^2}p_m a_{m-1}^0=p_2a_2'+\frac{D_2}{D_m}p_m\left(\frac{\partial}{D_m}-a_m'\right),$$

. . . .

$$\frac{D_1D_{m-1}}{D_m^2}p_m a_1^0+\frac{D_2D_{m-1}}{D_m^2}p_m a_2^0+\ldots+$$
$$+\left(p_{m-1}+\frac{D_{m-1}^2}{D_m^2}\right)p_m a_{m-1}^0=p_{m-1}a_{m-1}'+\frac{D_{m-1}}{D_m}p_m\left(\frac{\partial}{D_m}-a_m'\right);$$

вводя же вместо $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{m-1}^0$ поправки

$$\delta_1=a_1^0-a_1',\ \delta_2=a_2^0-a_2',\ \ldots,\ \delta_{m-1}=a_{m-1}^0-a_{m-1}'$$

получаем для этих последних такую систему уравнений

$$\left(p_1+\frac{D_1^2}{D_m^2}p_m\right)\delta_1+\frac{D_1D_2}{D_m^2}p_m\delta_2+\ldots+$$
$$+\frac{D_1D_{m-1}}{D_m^2}p_m\delta_{m-1}=\frac{D_1\varepsilon}{D_m}p_m,$$

. . . .

$$\frac{D_1D_{m-1}}{D_m^2}p_m\delta_1+\frac{D_2D_{m-1}}{D_m^2}p_m\delta_2+\ldots+$$
$$+\left(p_{m-1}+\frac{D_{m-1}^2}{D_m^2}\right)p_m\delta_{m-1}=\frac{D_{m-1}\varepsilon}{D_m}p_m$$

где

$$\rho = \partial_1 - D_1 a_1' - D_2 a_2' - \ldots - D_{m-1} a_{m-1}' - D_m a_m';$$

откуда выводим

$$p_i \delta_i = \frac{D_i}{D_m} \cdot \frac{p_m (\rho - \omega)}{D_m}$$

при

$$\omega = D_1 \delta_1 + D_2 \delta_2 + \ldots + D_{m-1} \delta_{m-1}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, m-1$$

Следовательно,

$$\frac{p_1 \delta_1}{D_1} = \frac{p_2 \delta_2}{D_2} = \ldots = \frac{p_{m-1} \delta_{m-1}}{D_{m-1}},$$

$$\omega = \frac{p_i \delta_i}{D_i} \left(\frac{D_1^2}{p_1} + \frac{D_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{D_{m-1}}{p_{m-1}} \right)$$

и, наконец,

$$\frac{p_i \delta_i}{D_i} \left(\frac{D_1^2}{p_1} + \frac{D_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{D_{m-1}^2}{p_{m-1}} + \frac{D_m^2}{p_m} \right) = \rho;$$

а так как поправка δ_m, доставляющая по формуле

$$a_m^0 = a_m' + \delta_m$$

из a_m' новую приближенную величину a_m^0 числа a_m, должна быть определена из условия

$$D_1 \delta_1 + D_2 \delta_2 + \ldots + D_{m-1} \delta_{m-1} + D_m \delta_m = \rho,$$

то получаем также

$$\frac{p_m \delta_m}{D_m} \left(\frac{D_1^2}{p_1} + \frac{D_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{D_m^2}{p_m} \right) = \rho.$$

Таким образом мы приходим к общей формуле

$$a_i^0 = a_i' + \frac{(\partial - D_1 a_1' - D_2 a_2' - \ldots - D_m a_m') D_i}{p_i \left(\frac{D_1^2}{p_1} + \frac{D_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{D_m^2}{p_m} \right)},$$

которой можно придать и такой вид

$$a_i^0 = \frac{\partial D_i + p_i\left(\Omega - \frac{D_i^2}{p_i}\right)a_i - D_i \Sigma D_j a_j'}{p_i \Omega},$$

при

$$\Omega = \frac{D_1^2}{p_1} + \frac{D_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{D_m^2}{p_m} \quad \text{и} \quad j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m \text{ кроме } i.$$

Обратимся к оценке возможных погрешностей $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ результативных равенств

$$a_1 = a_1^0,\ a_2 = a_2^0,\ \ldots,\ a_m = a_m^0.$$

Если возможные погрешности равенств $a_1 = a_1'$, $a_2 = a_2', \ldots, a_m = a_m'$, доставленных наблюдениями, мы обозначим соответственно символами $v_1, v_2, \ldots, v_m$, то из найденной уже общей формулы непосредственно получим также общую формулу

$$\eta_i = v_i - \frac{D_i(D_1 v_1 + D_2 v_2 + \ldots + D_m v_m)}{p_i \Omega}.$$

На основании этой формулы, принимая во внимание равенства

$$\text{м. о. } v_i^2 = \frac{k}{p_i},\ \text{м. о. } v_i v_j = 0,$$

и их следствия

$$\text{м. о. } v_i(D_1 v_1 + D_2 v_2 + \ldots + D_m v_m) = \frac{D_i k}{p_i},\ \text{м. о.} (D_1 v_1 + D_2 v_2 + \\ + \ldots + D_m v_m)^2 = \Omega k,$$

без труда находим

$$\text{м. о. } \eta_i^2 = \frac{k}{p_i} - \frac{2D_i^2 k}{p_i^2 \Omega} + \frac{D_i^2 k}{p_i^2 \Omega} = \frac{\left(\Omega - \frac{D_i^2}{p_i}\right)k}{p_i \Omega}$$

и

$$\text{м. о. } \eta_i \eta_j = -\frac{D_i D_j k}{p_i p_j \Omega}.$$

Что же касается k, то, согласно нашим положениям, приближенная величина его устанавливается равенством

$$k = \Sigma p_i \delta_i^2 = \frac{\rho^2}{\Omega} = \frac{(\partial - D_1 a_1' - D_2 a_2' - \ldots - D_m a_m')^2}{\frac{D_1^2}{p_1} + \frac{D_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{D_m^2}{p_m}}.$$

Выражение м. о. $\eta_i \eta_j$ вместе с м. о. η_i^2 может быть полезным при оценке погрешности любого приближенного равенства

$$\Sigma L_i a_i = \Sigma L_i a_i^0$$

с данными коэффициентами L_i; ибо математическое ожидание квадрата этой погрешности выражается суммою

$$\Sigma L_i^2 \text{ м. о. } \eta_i^2 + 2 \Sigma L_i L_j \text{ м. о. } \eta_i \eta_j.$$

Та же совокупность чисел $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0$ может быть определена одною системою $m+1$ уравнений

$$p_i a_i^0 + D_i \zeta = p_i a_i' \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

$$\Sigma D_i a_i^0 = \partial;$$

так как она должна сообщать сумме

$$\Sigma p_i (a_i^0 - a_i')^2$$

наименьшее значение при соблюдении условия

$$\Sigma D_i a_i^0 = \partial.$$

Из последней системы, полагая попрежнему $a_i^0 = a_i' + \delta_i$, выводим

$$\Sigma D_i \delta_i = \partial - \Sigma D_i a_i' = \rho \quad \text{и} \quad p_i \delta_i = -D_i \zeta,$$

что и доставляет нам тот же результат

$$\frac{p_i\delta_i}{D_i}\left(\frac{D^2_1}{p_1}+\frac{D^2_2}{p_2}+\ldots+\frac{D^2_m}{p_m}\right)=\rho.$$

В основание способа наименьших квадратов при задании одной или нескольких точных связей между искомыми числами можно положить также рассуждения вполне анологичные тем, которые послужили нам основанием выводов для случая, когда никаких связей неизвестно, кроме, конечно, приближенных, доставленных наблюдениями. Для указанной цели заметим, что точные равенства можно рассматривать как частный случай приближенных, приписывая им бесконечно большой вес, или, лучше сказать, приравнивая математические ожидания квадратов их погрешностей нулю. Согласно этому при задании вышеприведенных точных равенств, связывающих a_1, $a_2, \ldots, a_m$, мы можем к совокупности наблюденных величин

$$u',\ u'',\ \ldots,\ u^{(n)}$$

присоединить еще ν величин

$$u^{(n+1)}=D'_1a_1+D'_2a_2+\ldots+D'_ma_m,\ \ldots,\ u^{(n+\nu)}=D_1^{(\nu)}a_1+D_2^{(\nu)}a_2+$$
$$+\ldots+D_m^{(\nu)}a_m,$$

для которых математические ожидания соответствующих погрешностей $u^{(n+1)}-\partial'_1, \ldots, u^{(n+\nu)}-\partial^{(\nu)}$ равны нулю.

При таком предположении станем рассматривать для любого значка $l=1, 2, 3, \ldots, m$ все линейные выражения
$\xi_l=\lambda' u'+\lambda'' u''+\ldots+\lambda^{(n)}u^{(n)}+\lambda^{(n+1)}u^{(n+1)}+\ldots+\lambda^{(n+\nu)}u^{(n+\nu)}$, коэффициенты которых λ', λ'', $\ldots$, $\lambda^{(n)}$, $\lambda^{(n+1)}, \ldots$, $\lambda^{(n+\nu)}$ числа определенные, а математические ожидания на основании наших данных заведомо приводятся к a или к $a+g$, где g также число определенное. Каждое из этих линейных выражений доставит нам для a_l приближенное равенство

$$a_l=\lambda'b'+\lambda''b''+\ldots+\lambda^{(n)}b^{(n)}+\lambda^{(n+1)}\partial'+\ldots+\lambda^{(n+\nu)}\partial^{(\nu)}-g=a_l^0$$

свободное от постоянной погрешности; а математическое ожидание квадрата его погрешности $\xi_l - a_l = \eta_l$ представится суммою

$$\text{м. о. } \eta_l^2 = \frac{k\lambda'\lambda'}{p'} + \ldots + \frac{k\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}} = k\mathrm{T},$$

не содержащею коэффициентов $\lambda^{(n+1)}, \ldots, \lambda^{(n+\nu)}$, которую, согласно установленному нами принципу, надо сделать наименьшею. Рассматривая поставленную задачу, замечаем, что при каждой данной системе коэффициентов $\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$ можно, не изменяя получаемой величины a_l^0, придать коэффициентам $\lambda^{(n+1)}, \ldots, \lambda^{(n+\nu)}$ любые значения, определяя, конечно, надлежащим образом число g: а именно при переходе от совокупности $\lambda^{(n+1)}, \ldots, \lambda^{(n+\nu)}$ к совокупности $\lambda_1^{(n+1)}, \ldots, \lambda_1^{(n+\nu)}$ необходимо прибавить к g сумму

$$(\lambda_1^{(n+1)} - \lambda^{(n+1)})\,\partial' + \ldots + (\lambda_1^{(n+\nu)} - \lambda^{(n+\nu)})\,\partial^{(\nu)}.$$

Это замечание позволяет по приведении выражения

$$\text{м. о. } \xi_l = \lambda'c' + \lambda''c'' + \ldots + \lambda^{(n)}c^{(n)} + \lambda^{(n+1)}\Sigma D_i'a_i + \ldots +$$
$$+ \lambda^{(n+\nu)}\Sigma D_i^{(\nu)}a_i$$

к сумме

$$\mathrm{T}_1a_1 + \mathrm{T}_2a_2 + \ldots + \mathrm{T}_m a_m,$$

где

$$\mathrm{T}_i = A_i'\lambda' + A_i''\lambda'' + \ldots + A_i^{(n)}\lambda^{(n)} + D_i'\lambda^{(n+\nu)} + \ldots + D^{(\nu)}\lambda^{(n+\nu)},$$

распорядиться множителями $\lambda^{(n+1)}, \ldots, \lambda^{(n+1)}$ так, чтобы в ней оставалось не m, а только $m-\nu$ из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$, после чего, в силу нашего требования она тождественно должна равняться a_l; если, конечно, нами исчерпаны все известные связи между $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Таким образом мы приходим к условиям

$$\mathrm{T}_l = 1;\ \mathrm{T}_i = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, m \text{ кроме } l$$

одинаковым с прежними (*). Вводя затем вспомогательные множители $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ для решения задачи о наименьшей величине T при данных T_1, T_2, . . . , T_m, получаем кроме прежней совокупности уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\lambda'}{p'} = \mu_1 A'_1 + \mu_2 A'_2 + \quad + \mu_m A'_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\lambda^{(n)}}{p^{(n)}} = \mu_1 A_1^{(n)} + \mu_2 A_2^{(n)} + \quad \ldots + \mu_m A_n^{(n)} \end{array}\right\} \quad ({}^{**})$$

совокупность ν уравнений

$$\mu_1 D'_1 + \mu_2 D'_2 + \cdot \quad + \mu_m D'_m = 0$$

$$\mu_1 D''_1 + \mu_2 D''_2 + \ldots + \mu_m D''_m = v$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_1 D_1^{(\nu)} + \mu_2 D_2^{(\nu)} + \cdot \quad + \mu_m D_m^{(\nu)} = 0.$$

Из всех этих уравнений по исключении множителей

$$\lambda', \lambda'', \quad . \lambda^{(n)}$$

вытекает вместо системы m уравнений $({}_{x}{}^{*}{}_{x})$ система $m + \nu$ уравнений

$$G_{i,1}\mu_1 + G_{i,2}\mu_2 + \ldots + G_{i,m}\mu_m + D'_i\lambda^{(n+1)} + \ldots + D_i^{(\nu+1)}\lambda^{(n+\nu)} = 0$$

при i не $= l$

$$G_{l,1}\mu_1 + G_{l,2}\mu_2 + \cdots \quad + G_{l,m}\mu_m + D'_l\lambda^{(n+1)} + \ldots \quad + D_l^{(\nu+1)}\lambda^{(n+\nu)} = 1$$

$$D'_1\ \mu_1 + D'_2\ \mu_2 + \ldots + D'_m\ \mu_m = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_1^{(\nu)}\mu_1 + D_2^{(\nu)}\mu_2 + \ldots + D_m^{(\nu)}\mu_m = 0,$$

где, как и прежде,

$$G_{i,j}=G_{j,i}=p'A_i'A_j'+p''A_i''A_j''+\ldots+p^{(n)}A_i^{(n)}A_j^{(n)}.$$

Остается решить эту систему уравнений и по найденным значениям $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ вычислить $\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$.

Для определения веса получаемого таким образом приближенного равенства

$$a_l=\lambda'b'+\lambda''b''+\ldots+\lambda^{(n)}b^{(n)}+\lambda^{(n+1)}\partial'+\ldots+\lambda^{(n+\nu)}\partial^{\nu}$$

достаточно заметить, что прежний вывод, согласно которому этот вес равен $\frac{1}{\mu_l}$, сохраняет свою силу.

На основании такого вывода веса получаемых указанным путем приближенных значений чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ могут быть представлены отношениями

$$\frac{\Delta}{\Delta_{1,1}}, \frac{\Delta}{\Delta_{2,2}}, \ldots, \frac{\Delta}{\Delta_{m,m}}$$

определителя

$$\begin{vmatrix} G_{1,1}, & G_{1,2}, & \ldots, & G_{1,m}, & D_1', & D_1'', & \ldots, & D_1^{(\nu)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{m,m}, & G_{m,m}, & \ldots, & G_{m,m}, & D_m', & D_m'', & \ldots, & D_m^{(\nu)} \\ D_1', & D_2', & \ldots, & D_m', & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_1^{(\nu)}, & D_2^{(\nu)}, & \ldots, & D_m^{(\nu)}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix}$$

к его минорам, получаемым вычеркиванием первого столбца и первой строки для a_1, второго столбца и второй строки для a_2 и т. д.

Нетрудно выяснить, что система выражений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, доставляемая вышеприведенными формулами и уравнениями, совпадает с тою системою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, которая определяется требованием, чтобы сумма

$$W=\Sigma p^{(i)}(A_1^{(i)}\xi_1+A_2^{(i)}\xi_2+\ldots+A_m^{(i)}\xi_m-u^{(i)})^2 \text{ при } i=1, 2, 3, \ldots, n$$

достигала наименьшей величины при соблюдении условий

$$D'_1\,\xi_1 + D'_2\,\xi_2 + \ldots + D'_m\,\xi_m = \partial'$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$D_1^{(\nu)}\xi_1 + D_2^{(\nu)}\xi_2 + \ldots + D_m^{(\nu)}\xi_m = \partial^{(\nu)}.$$

В самом деле эта последняя система $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ определяется уравнениями

$$G_{1,1}\xi_1 + G_{1,2}\xi_2 + \ldots + G_{1,m}\xi_m + D'_1\zeta_1 + D''_1\zeta_2 + \ldots + D_1^{(\nu)}\zeta_\nu =$$
$$= \Sigma p^{(i)} A_1^{(i)} u^{(i)},$$

$$\cdot\ \cdot$$

$$G_{m,1}\xi_1 + G_{m,2}\xi_2 + \ldots + G_{m,m}\xi_m + D'_m\zeta_1 + D''_m\zeta_2 + \ldots + D_m^{(\nu)}\zeta_\nu =$$
$$= \Sigma p^{(i)} A_m^{(i)} u^{(i)},$$

$$D'_1\,\xi_1 + D'_2\,\xi_2 + \ldots + D'_m\,\xi_m = \partial' = u^{(n+1)}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$D_1^{(\nu)}\xi_1 + D_2^{(\nu)}\xi_2 + \ldots + D_m^{(\nu)}\xi_m = \partial^{(\nu)} = u^{(n+\nu)},$$

откуда, введя вспомогательные множители

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m, \lambda^{(n+1)}, \ldots, \lambda^{(n+\nu)}$$

и произведя сложение, получаем следующее уравнение

$$\Sigma L_i \xi_i + \Sigma M_j \zeta_j = p' N' u' + p'' N'' u'' + \ldots + p^{(n)} N^{(n)} u^{(n)} +$$
$$+ \lambda^{(n+1)} u^{(n+1)} + \ldots + \lambda^{(n+\nu)} u^{(n+\nu)}$$

где

$$L_i = G_{i,1}\mu_1 + \ldots + G_{i,m}\mu_m + D'_i\lambda^{(n+1)} + \ldots + G_i^{(\nu)}\lambda^{(n+\nu)},$$

$$M_j = D_1^{(j)}\mu_1 + \ldots + D_m^{(j)}\mu_m$$

$$N' = A'_1\mu_1 + A'_2\mu_2 + \ldots + A'_m\mu_m, \ldots, N^{(n)} = A_1^{(n)}\mu_1 + \ldots + A_m^{(n)}\mu_m.$$

Если затем вспомогательным множителям

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m, \lambda^{(n+1)}, \ldots, \lambda^{(n+\nu)}$$

придать вышеуказанные значения, то левая часть составленного нами уравнения приведется к ξ_l, а правая к сумме

$$\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)} + \lambda^{(n+1)} u^{(n+1)} + \ldots + \lambda^{(n+\nu)} u^{(n+\nu)}$$

с прежними величинами множителей

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}, \lambda^{(n+1)} \ldots + \lambda^{(n+\nu)},$$

что и доказывает тождественность двух систем величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

к которым мы приходим различными путями.

А так как задача о наименьшей величине суммы

$$W = \Sigma p^{(i)} (A_1^{(i)} \xi_1 + A_2^{(i)} \xi_2 + \ldots + A_m^{(i)} \xi_m - u^{(i)})^2$$

при соблюдении условий

$$D_1' \xi_1 + \ldots + D_m' \xi_m = \partial', \ldots, D_1^{(\nu)} \xi_1 + \ldots + D_m^{(\nu)} \xi_m = \partial^{(\nu)}$$

может быть сведена посредством исключения ν из величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ к подобной же задаче с $m - \nu$ неизвестными величинами; то на основании вывода, относящегося к случаю, когда между числами, разыскиваемыми по способу наименьших квадратов, не задано никаких связей, кроме доставленных наблюдениями; не производя новых вычислений, мы можем установить равенство

$$\text{м. о. } \Sigma p^{(i)} \{A_1^{(i)} \xi_1 + \ldots + A_m^{(i)} \xi_m - u^{(i)}\}^2 = (n + \nu - m) k,$$

которое доставляет для k приближенное значение k^0:

$$(n + \nu - m) k^0 = \Sigma p^{(i)} \{A_1^{(i)} a_1^0 + \ldots + A_m^{(i)} a_m^0 - l^{(i)}\}^2.$$

Для некоторых теоретических выводов можно также приписать точным связям

$$u^{(n+1)} = \Sigma D_i' a_i = \partial', \ldots, \quad u^{(n+\nu)} = \Sigma D_i^{(\nu)} a_i = \partial^{(\nu)}$$

веса $p^{(n+1)}, \ldots, p^{(n+\nu)}$ и затем увеличивать эти веса беспредельно. Таким путем, например, нетрудно, исходя из выражения м. о. $\eta_i \eta_l$, установленного при отсутствии точных связей, придти для указанного случая подобных связей не только к найденному уже выражению м. о. η_l^2, но и к общей формуле

$$\text{м. о. } \eta_i \eta_l = \frac{\Delta_{l,i}}{\Delta} k,$$

где $\Delta_{l,i}$ известный минор того же определителя Δ.

На практических приемах, служащих для контроля для решения уравнений, к которым приводит способ наименьших квадратов, мы не остановимся.

§ 52. Для примера рассмотрим следующий вопрос практической геометрии.

В прямолинейном трехугольнике EFG несколько раз измерены все его углы, и получено для угла E, в градусах, r приближенных значений

$$E', E'', \ldots, E^{(r)},$$

для угла F, в градусах, s приближенных значений

$$F', F'', \ldots, F^{(s)}$$

и для угла G, в градусах, t приближенных значений

$$G', G'', \ldots, G^{(t)}.$$

Все измерения мы предполагаем независимыми и свободными от постоянных ошибок. Придавая, сверх того, одинаковый вес всем измерениям одного и того же угла, мы получим, согласно изложенному способу, для E, F, G следующие приближенные величины:

$$\frac{E' + E'' + \ldots + E^{(r)}}{r}, \quad \frac{F' + F'' + \ldots + F^{(s)}}{s}, \quad \frac{G' + G'' + \ldots + G^{(t)}}{t},$$

если только оставим в стороне соотношение

$$E+F+G=180.$$

Если же желаем принять во внимание это соотношение, то найденные нами числа

$$\frac{E'+E''+\ldots+E^{(r)}}{r},\ \frac{F'+F''+\ldots+F^{(s)}}{s},\ \frac{G'+G''+\ldots+G^{(t)}}{t},$$

которые условимся обозначать для краткости символами

$$\overline{E},\ \overline{F},\ \overline{G},$$

должно, в силу изложенных нами правил, заменить другими.

Эти другие приближенные значения чисел E, F, G обозначим символами

$$E^0,\ F^0,\ G^0;$$

разности же

$$E^0-\overline{E},\ F^0-\overline{F},\ G^0-\overline{G}$$

назовем поправками первых приближенных значений и обозначим символами

$$\delta(E),\ \delta(F),\ \delta(G).$$

Числа

$$E^0,\ F^0,\ G^0$$

вместе с поправками

$$\delta(E),\ \delta(F),\ \delta(G)$$

получат определенный смысл только после того, как мы установим определенные отношения между весами измерений, относящихся к различным углам E, F, G.

Устанавливая различным образом эти отношения, мы, естественно, можем получить совершенно различные результаты.

Здесь мы приведем две системы поправок

$$\delta(E),\ \delta(F),\ \delta(G).$$

Для получения первой системы припишем всем измерениям одинаковый вес.

При таком условии искомая нами система чисел

$$E^0,\ F^0,\ G^0$$

должна отличаться от всех других систем чисел

$$E^0,\ F^0,\ G^0,$$

удовлетворяющих уравнению

$$E^0+F^0+G^0=180,$$

наименьшею величиною суммы

$$(E^0-E')^2+(E^0-E'')^2+\ldots+(E^0-E^{(r)})^2$$

$$+(F^0-F')^2+(F^0-F'')^2+\ldots+(F^0-F^{(s)})^2$$

$$+(G^0-G')^2+(G^0-G'')^2+\ldots+(G^0-G^{(t)})^2.$$

Это требование выражается системой уравнений

$$E^0+F^0+G^0=180$$

$$rE^0-E'-E''\ldots-E^{(r)}=sF^0-F'-F''\ldots-F^{(s)}=tG^0-G'-G''\ldots-G^{(t)},$$

откуда без большого труда выводим

$$\frac{E^0-\overline{E}}{\frac{1}{r}}=\frac{F^0-\overline{F}}{\frac{1}{s}}=\frac{G^0-\overline{G}}{\frac{1}{t}}=\frac{180-(\overline{E}+\overline{F}+\overline{G})}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}},$$

или, что все равно,

$$\frac{\delta(E)}{\frac{1}{r}}=\frac{\delta(F)}{\frac{1}{s}}=\frac{\delta(G)}{\frac{1}{t}}=\frac{180-(\overline{E}+\overline{F}+\overline{G})}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}}.$$

Итак, если всем измерениям углов

$$E,\ F,\ G$$

мы приписываем один и тот же вес, то поправки

$$\delta(E),\ \delta(F),\ \delta(G)$$

первых приближенных величин

$$\overline{E}=\frac{E'+E''+\ldots+E^{(r)}}{r},\quad \overline{F}=\frac{F'+\ldots+F^{(s)}}{s},\quad \overline{G}=\frac{G'+G''+\ldots+G^{(t)}}{t}$$

этих углов представляют три части разности

$$180-(\overline{E}+\overline{F}+\overline{G})$$

обратно пропорциональные числам

$$r,\ s,\ t.$$

В частности при

$$r=s=t$$

имеем

$$\delta(E)=\delta(F)=\delta(G)=\frac{180-(\overline{E}+\overline{F}+\overline{G})}{3}.$$

Прежде чем заняться другой системой поправок, применим формулы предыдущего параграфа к оценке достоинства приближенных равенств

$$E \doteq E^0,\ F \doteq F^0,\ G \doteq G^0.$$

Для этой цели исключим число G, заменив его разностью

$$180-(E+F);$$

так что измерения угла G будут доставлять нам приближенные величины разности

$$180-(E-F).$$

В данном случае выражение W^0 предыдущего параграфа приводится к сумме

$$\begin{aligned}&(E^0-E')^2+(E^0-E'')^2+\ldots+(E^0-E^{(r)})^2\\&+(F^0-F')^2+(F^0-F'')^2+\ldots+(F^0-F^{(s)})^2\\&+(E^0+F^0-180+G')^2+\ldots+(E^0+F^0-180+G^{(t)})^2,\end{aligned}$$

если одинаковые, по предположению, веса измерений мы приравняем единице. Соответственно этому система (25) приведется к двум уравнениям

$$(r+t)E^0+tF^0=r\overline{E}+t(180-\overline{G}),$$

$$tE^0+(s+t)F^0=s\overline{F}+t(180-\overline{G}),$$

и количества

$$\Delta,\ \Delta_{1,1}\ \text{и}\ \Delta_{2,2}$$

определятся равенствами

$$\Delta=\begin{vmatrix}r+t, & t\\ t, & s+t\end{vmatrix}=rs+rt+st,\quad \Delta_{1,1}=s+t,\quad \Delta_{2,2}=r+t.$$

Отсюда следует, что вес равенства

$$E\doteq E^0$$

выражается дробью

$$\frac{rs+rt+st}{s+t},$$

а вес равенства

$$F\doteq F^0$$

выражается дробью

$$\frac{rs+rt+st}{r+t};$$

и по аналогии нетрудно заключить, что вес равенства

$$G \doteqdot G^0$$

должен выразиться дробью

$$\frac{rs+rt+st}{r+s}.$$

В частном случае, когда

$$r=s=t,$$

веса всех равенств

$$E \doteqdot E^0,\ F \doteqdot F^0,\ G \doteqdot G^0$$

оказываются равными

$$\frac{3r}{2},$$

т. е. половине числа всех измерений.

Наконец, число k, выражающее математическое ожидание квадрата погрешности каждого из начальных равенств

$$E \doteqdot E',\ldots,\ E \doteqdot E^{(r)},\ F \doteqdot F',\ldots,\ F \doteqdot F^{(s)},\ G \doteqdot G',\ldots,\ G \doteqdot G^{(t)},$$

вычисляется, с неизвестною погрешностью, из равенства

$$(r+s+t-2)\,k \doteqdot \begin{cases} (E^0-E')^2+(E^0-E'')^2+\ldots+(E^0-E^{(r)})^2 \\ +(F^0-F')^2+(F^0-F'')^2+\ldots+(F^0-F^{(s)})^2 \\ +(G^0-G')^2+(G^0-G'')^2+\ldots+(G^0-G^{(t)})^2. \end{cases}$$

Другая система поправок

$$\delta(E),\ \delta(F),\ \delta(G),$$

которую мы сейчас укажем, относится к тому случаю, когда возникает сомнение, не следует ли измерениям различных углов приписывать различные веса.

Тогда для сравнительной оценки достоинств различных измерений углов мы можем попробовать найти для каждого угла, в отдельности, приближенную величину математического ожидания квадрата погрешности его измерений. А именно, согласно приведенным выше объяснениям, мы можем признать число

$$k_1 = \frac{(\overline{E} - E')^2 + (\overline{E} - E'')^2 + \ldots + (\overline{E} - E^{(r)})^2}{r - 1}$$

за приближенную величину математического ожидания квадрата погрешности каждого из измерений угла E, число

$$k_2 = \frac{(\overline{F} - F')^2 + (\overline{F} - F'')^2 + \ldots + (\overline{F} - F^{(s)})^2}{s - 1}$$

за приближенную величину математического ожидания квадрата погрешности каждого из измерений угла F, и, наконец, число

$$k_3 = \frac{(\overline{G} - G')^2 + (\overline{G} - G'')^2 + \ldots + (\overline{G} - G^{(t)})^2}{t - 1}$$

за приближенную величину математического ожидания квадрата погрешности каждого из измерений угла G.

Если числа k_1, k_2, k_3 мало отличаются друг от друга, то их рассмотрение может служить некоторым подтверждением прежнего предположения, согласно которому всем измерениям мы приписывали одинаковый вес. Если же числа k_1, k_2, k_3 значительно разнятся друг от друга, то вместо предположения равенства весов всех измерений можно признать более правильным предположение, что числа k_1, k_2, k_3 служат верною мерою вышеупомянутых математических ожиданий.

При таком предположении веса измерений углов E, F, G можно соответственно приравнять дробям

$$\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3}.$$

Тогда искомая система чисел E^0, F^0, G^0 будет отличаться от всякой другой системы чисел E^0, F^0, G^0, которая удовлетворяет уравнению

$$E^0 + F^0 + G^0 = 180,$$

наименьшим значением суммы

$$\frac{1}{k_1}(E^0 - E')^2 + \ldots + \frac{1}{k_1}(E^0 - E^{(r)})^2 + \frac{1}{k_2}(F^0 - F')^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{k_2}(F^0 - F^{(s)})^2 + \frac{1}{k_3}(G^0 - G')^2 + \ldots + \frac{1}{k_3}(G^0 - G^{(t)})^2.$$

Это требование выражается уравнениями

$$\frac{rE^0 - E' - E'' - \ldots - E^{(r)}}{k_1} = \frac{sF^0 - F' - F'' - \ldots - F^{(s)}}{k_2} =$$
$$= \frac{tG^0 - G' - G'' - \ldots - G^{(t)}}{k_3},$$

из которых, в связи с уравнением

$$E^0 + F^0 + G^0 = 180,$$

без труда выводим

$$\frac{\delta(E)}{\frac{k_1}{r}} = \frac{\delta(F)}{\frac{k_2}{s}} = \frac{\delta(G)}{\frac{k_3}{t}} = \frac{180 - (\overline{E} + \overline{F} + \overline{G})}{\frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{t}}.$$

Пользуясь затем для определения весов равенств

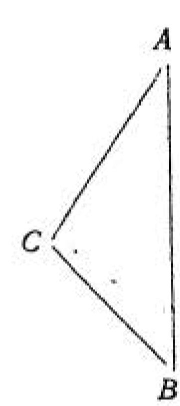
$$E \mp E^0,\ F \mp F^0,\ G \mp G^0$$

тем же приемом, какой мы применили раньше, найдем, что теперь эти веса соответственно равны

$$\frac{rsk_3 + rtk_2 + stk_1}{k_1(sk_3 + tk_2)},\ \frac{rsk_3 + rtk_2 + stk_1}{k_2(rk_3 + tk_1)},\ \frac{rsk_3 + rtk_2 + stk_1}{k_3(rk_2 + sk_1)}.$$

Приведем также пример на замену нелинейной связи линейною, заимствуя его из руководства Гельмерта (F. R. Helmert, „Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate", 1872 г., стр. 184—185).

В треугольнике ABC измерены



$\angle B = 33^0\ 22'\ 42'' \mp 20''$, $\angle C = 125^0\ 42'\ 11'' \mp 20''$, $BC = 103^m,67 \mp 0^m,05$, $AB = 235^m,83 \mp 0,05$. Здесь $\mp 20''$ и $\mp 0^m,05$ означают так называемые средние квадратичные погрешности (mittlern Fehler), выраженные в секундах для углов и в сотых долях метра для сторон; эти числа приведены для установления веса измерений. Принимая, как и Гельмерт, за единицу для углов минуту, мы заменим первое из них дробью $\frac{1}{3}$; а единицу длины сохраним равною метру, при чем средняя квадратичная погрешность измеренных длин выразится попрежнему числом $0,05 = \frac{1}{20}$.

Возвышая дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{20}$ в квадрат, получаем приближенные значения математических ожиданий квадратов погрешностей произведенных измерений: для углов $\frac{1}{9}$, для сторон $\frac{1}{400}$, что дает нам для весов тех же измерений числа 9 и 400. Прибавляя для упрощения выкладок к 9 одну единицу, Гельмерт сводит эти веса к 1 и 40. Что касается связи между углами и сторонами, то она не имеет линейного характера и выражается известною тригонометрическою формулою

$$\frac{BC}{AB}=\frac{\sin(\angle B+\angle C)}{\sin\angle C},$$

но ее можно свести к линейной, если положить

$$\angle B=33^0\,22'\,42''+x_1,\ \angle C=125^0\,42'\,11''+x_2,\ BC=103^m{,}67+x_3,$$

$$AB=235^m{,}83+x_4$$

и в виду малости чисел x_1, x_2, x_3, x_4 пренебречь квадратами и высшими степенями их. По логарифмическим таблицам находим

$$\log BC=\log(103{,}67+x_3)=2{,}015653+0{,}00419x_3$$

$$\log AB=\log(235{,}83+x_4)=2{,}372599+0{,}00184x_4$$

$$\log(BC:AB)=\bar{1}{,}643054+0{,}00419x_3-0{,}00189x_4$$

$$\log\sin(\angle B+\angle C)=\log\sin(159^0\,4'\,53''\,x_1+x_2)=$$

$$=\bar{1}{,}552719-0{,}00033x_1-0{,}00033x_2$$

$$\log\sin\angle C=\log\sin(125^0\,42'\,11''+x_2)=\bar{1}{,}909584-0{,}00009x_2$$

$$\log(\sin A:\sin C)\qquad=\bar{1}{,}643135-0{,}00033x_1$$

$$-0{,}00024x_2$$

что доставляет нам такое уравнение

$$\bar{1},643054+0,00419x_3-0,00184x_4=\bar{1},643135-0,00033x_1-0,00024x_2$$

или, что все равно,

$$8,1-33x_1-24x_2-419x_3+184x_4=0.$$

Искомые поправки x_1, x_2, x_3, x_4 определяются требованием, чтобы сумма

$$x_1^2,+x_2^2+40(x_3^2+x_4^2)$$

получала наименьшую величину при соблюдении последнего уравнения.

По формулам предыдущего параграфа при

$$\rho=8,1,\ D_1=33,\ D_2=24,\ D_3=-419,\ D_4=184,\ p_1=p_2=1,\ p_3=p_4=40$$

получаем

$$\frac{D_1^2}{p_1}=1089, \frac{D^2_2}{p_2}=576, \frac{D_3^2}{p_3}=4389, \frac{D_4^2}{p_4}=846, \Omega=6900$$

$$x_1=\frac{D_1\rho}{\Omega}=0,0388, x_2=0,0282, x_3=\frac{D_3\rho}{p_3\Omega}=0,0123, x_4=-0,0054.$$

Вводя найденные поправки, получаем

$$\angle B=33^0\,22'\,44'', \angle C=125^0\,42'\,13''\ CB=103^m,682,\ AB=235^m,825.$$

Для оценки погрешностей η_1, η_2, η_3, η_4, этих приближенных величин вычисляем их веса

$$\frac{\Omega}{\Omega-\dfrac{D_1^2}{p_1}}=\frac{6900}{5811}=1,18, \ldots, \frac{6900}{6324}=1,09, \frac{p_3\,\Omega}{\Omega-\dfrac{D_3^2}{p_3}}=110,$$

$$\frac{p_4\,\Omega}{\Omega-\dfrac{D_4^2}{p_4}}=46$$

и

$$k_0 = \frac{\rho^2}{\Omega} = 0{,}00950,$$

что доставляет нам

$$\text{м. о. } \eta_1^2 = \frac{0{,}00950}{1{,}18} = 0{,}083, \quad \text{м. о. } \eta_2^2 = 0{,}087,$$

$$\text{м. о. } \eta_3^2 = 0{,}000087, \quad \text{м. о. } \eta_4^2\, 0{,}000207.$$

Соответственно этому средние квадратичные погрешности углов можно принять равными $6''$, а сторон $0^m{,}009$ и $0^m{,}014$.

Что касается остальных двух элементов трехугольника, то их можно вычислить по формулам

$$\angle A = 180^0 - \angle B - \angle C,\ AC = AB\,.\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = CB\frac{\sin \angle B}{\sin \angle A}$$

откуда находим

$$\angle A = 20^0\, 55'\, 3'' \qquad \log AB = 2{,}372590 \qquad \log BC = 2{,}015703$$

$$\log \sin \angle B = \bar{1}{,}740499 \qquad \log \sin \angle B = \bar{1}{,}740499$$

$$D \log \sin \angle C = 0{,}090419 \qquad D \log \sin \angle A = 0{,}447303$$

$$2{,}203508 \qquad 2{,}203505$$

$$AC = 159^m{,}775.$$

Для оценки погрешностей последних чисел, на чем мы не остановимся, пришлось бы вычислить также математические ожидания произведений $\eta_1\, \eta_2$, $\eta_1\, \eta_3$ и т. д.

ЛИТЕРАТУРА.

Gauss. Méthode des moindres carrés, traduit par J. Bertrand.

Encke. Ueber die Methode der kleinsten Quadrate (Berl. Astr. Jahrbuch. 1834, 1835, 1836).

Bienaymé. Sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés (Jour. de Liouville, T. XVII, 1852).

Glaisher. On the law of facility of errors of observations and on the method of least squares (Mem. of the R. Astr. Soc., XXXIX).

P. Pizzetti. I Fondamenti Matematici per la critica dei resultati sperimentali. Genova, 1892.

М. Маиевский. Изложение способа наименьших квадратов и применения его преимущественно к исследованию результатов стрельбы.

И. Слешинский. К теории способа наименьших квадратов. Одесса, 1892.

Н. Цингер. Курс астрономии (часть теоретическая).

Helmert. Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2 Aufl. 1907.

S. Wellisch. Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung. 1909.

R. Suppantschitsch. Zur Axiomatik der Methode der kleinsten Quadrate (Sitzungsberichte der kais. Akad. d. Wis. in Wien. Math.-nat. Kl.; Bd. CXXII, Abt. IIa. 1913).

ГЛАВА VIII

О страховании жизни.

§ 53. Расчеты стоимостей различных видов страхования жизни основаны на норме роста капитала и на таблицах смертности, служащих для исчисления вероятностей тех или иных предположений о жизни и смерти людей; ибо эти расчеты связаны с рассмотрением сумм, которые должны быть выданы или получены в различные эпохи времени, в зависимости от жизни или смерти определенных лиц.

Посредством известного множителя, выражающего рост капитала во времени, подобные суммы приводятся к одной эпохе, которую мы назовем основным моментом времени.

Относя все капиталы к основному моменту, превращают капитал A в

$$\frac{A}{(1+t)^n},$$

если получение или выдача капитала A последует через n лет после основного момента времени, при чем t означает число постоянное и измеряет годовой рост капитала.

Если же капитал A должен быть выдан или получен за n лет до основного момента времени, то его превращают в

$$A(1+t)^n.$$

Такое приведение капиталов вытекает из указаний практики; мы будем его придерживаться и при рассмотрении математических ожиданий прибыли или убытка предприятий в тех случаях, когда убытки и прибыли предприятий могут быть в различные моменты времени. На этом основании нетрудно составить понятие о математическом ожидании прибыли предприятия, приведенной к данному моменту времени. Последнее математическое ожидание, которое можно назвать стоимостью предприятия, служит для решения вопроса о выгодности или невыгодности предприятия, при разнообразии моментов прибыли и убытка. Вместе с тем установленное раньше условие безобидности игр превращается в требование, чтобы для каждого игрока математическое ожидание прибыли, приведенной к одному моменту времени, было нулем.

Вероятности, которые нам придется рассматривать, определяются посредством таблиц смертности.

Из таблиц смертности получается ряд чисел

$$N_a,\ N_{a+1},\ N_{a+2},\ \ldots,$$

где N_{a+i+1} показывает, какое число лиц доживает до возраста $a+i+1$ лет из N_{a+i} лиц, имеющих возраст $a+i$ лет. Сообразно этому дробь

$$\frac{N_{a+i+1}}{N_{a+i}}$$

будет вероятностью лицу возраста $a+i$ лет дожить до $a+i+1$ лет, а дробь

$$\frac{N_{a+i}-N_{a+i+1}}{N_{a+i}}$$

выразит вероятность тому же лицу, возраста $a+i$ лет, умереть в течение одного года. Далее нетрудно заключить, что дробь

$$\frac{N_{a+i+n}}{N_{a+i}}$$

представит вероятность лицу возраста $a+i$ лет дожить до $a+i+n$ лет, дроби же

$$\frac{N_{a+i}-N_{a+i+1}}{N_{a+i}},\ \frac{N_{a+i+1}-N_{a+i+2}}{N_{a+i}},\ \frac{N_{a+i+2}-N_{a+i+3}}{N_{a+i}},\ \ldots$$

представляют соответственно вероятности лицу возраста $a+i$ лет умереть в возрасте

от $a+i$ до $a+i+1$ лет, от $a+i+1$ до $a+i+2$ лет, и т. д.

По числам

$$N_a,\ N_{a+1},\ N_{a+2},\ \dots$$

составляется другой важный ряд чисел

$$Q_a=\frac{N_a}{(1+t)^{\omega}},\quad Q_{a+1}=\frac{N_{a+1}}{(1+t)^{\omega+1}},\ \dots,\quad Q_{a+i}=\frac{N_{a+i}}{(1+t)^{\omega+i}},\ \dots,$$

где ω означает некторое постоянное, например a. Ряд

$$Q_a,\ Q_{a+1},\ Q_{a+2},\ \dots$$

состоиг из конечного числа членов; складывая их с того или другого члена до последнего, образуем третий ряд чисел

$$\begin{aligned} S_a &= Q_{a+1}+Q_{a+2}+Q_{a+3}+\dots \\ S_{a+1} &= \qquad\quad Q_{a+2}+Q_{a+3}+\dots \\ S_{a+2} &= \qquad\qquad\qquad Q_{a+3}+\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Приведенными числами можно воспользоваться для решения следующих задач, относящихся к страхованию одного лица.

Задача 1-я. Определить стоимость единицы капитала, уплачиваемой лицу возраста с лет по достижении им возраста д лет, причем эта стоимость должна быть отнесена к тому моменту времени, когда вышеупомянутое лицо имеет возраст с лет.

Искомая стоимость, как нетрудно догадаться, выражается произведением

$$\frac{N_\partial}{N_c}\cdot\frac{1}{(1+t)^{\partial-c}},$$

которое равно отношению

$$\frac{Q_\partial}{Q_c}.$$

Если найдется N_c лиц, возраста c лет, и каждое из них внесет в общую кассу капитал

$$\frac{N_\partial}{N_c} \cdot \frac{1}{(1+t)^{\partial-c}},$$

то составится сумма

$$\frac{N_\partial}{(1+t)^{\partial-c}},$$

которая через $\partial - c$ лет превратится в

$$N_\partial,$$

если сохранится принятый нами размер роста капитала.

С другой стороны, если эти N_c лиц будут вымирать согласно принятой нами таблице смертности, то к моменту расплаты из них останется в живых N_∂ лиц, которые и могут получить по одной единице капитала из общей кассы, содержащей N_∂ единиц капитала. Это рассуждение подтверждает верность найденного нами числа

$$\frac{N_\partial}{N_c} \cdot \frac{1}{(1+t)^{\partial-c}} = \frac{Q_\partial}{Q_c}.$$

Задача 2-я. Лицо возраста c лет желает получать ежегодную постоянную пенсию A, начиная с момента достижения им возраста $c+i$ лет до смерти.

Определить, какою суммою X оценивается эта пенсия в момент, когда вышеуказанное лицо имеет c лет.

Предположим, что ежегодная пенсия A не распределяется по частям года, а выдается вся целиком, и сообразно этому отнесем ежегодную пенсию A к тем моментам времени, когда рассматриваемое лицо будет последовательно достигать возрастов

$$c+i \text{ лет}, \ c+i+1 \text{ лет}, \ c+i+2 \text{ лет}, \ldots.$$

При таком предположении получим, на основании решения предыдущей задачи, ряд последовательных стоимостей

$$\frac{Q_{c+i}}{Q_c}A, \ \frac{Q_{c+i+1}}{Q_c}A, \ \frac{Q_{c+i+2}}{Q_c}A, \ldots,$$

сумма которых

$$\frac{Q_{c+i}+Q_{c+i+1}+Q_{c+i+2}+\ldots}{Q_c}A$$

выразит искомую величину X; следовательно,

$$\frac{X}{A}=\frac{S_{c+i-1}}{Q_c}.$$

Найденная нами величина X может быть рассматриваема как нормальная сумма, которую должно потребовать страховое учреждение от лица возраста c за предоставление ему права на ежегодную пенсию A, если выдача пенсии начинается с момента достижения вышеупомянутым лицом возраста $c+i$ и продолжается до смерти этого лица.

Задача 3-я. Найти, какую сумму Y должно потребовать страховое учреждение за предоставление наследникам лица возраста c права получить сумму A в момент смерти этого лица. Другими словами, требуется определить стоимость этого права, когда застрахованное лицо находится в живых и имеет возраст c лет.

Для упрощения вопроса приурочим предстоящую смерть застрахованного лица к тем моментам, когда оно достигает возрастов

$$c \text{ лет}, \ c+1 \text{ лет}, \ c+2 \text{ лет, и т. д.},$$

считая, что в случае, если смерть лица последует между возрастом $c+i$ и $c+i+1$ лет, его наследники получат сумму A уже в тот момент, когда возраст этого лица будет равен $c+i$ годам. Такое предположение, значительно упрощающее расчет, преувеличивает, до некоторой степени, искомую стоимость. Чтобы получить затем величину меньшую, чем искомая стоимость, достаточно подвинуть на год все моменты последовательных выдач, что введет только простой делитель $1+t$.

Останавливаясь на вышеуказанном предположении, станем рассматривать пожизненное страхование лица как совокупность годовых страхований:

на случай смерти в возрасте от c до $c+1$ лет,

на случай смерти в возрасте от $c+1$ до $c+2$ лет, и т. д.

Стоимости этих годовых страхований, отнесенные к моменту времени, когда застрахованное лицо имеет возраст c, выразятся произведениями

$$\frac{N_c-N_{c+1}}{N_c}A, \quad \frac{N_{c+1}-N_{c+2}}{N_c}\cdot\frac{A}{1+t}, \quad \frac{N_{c+2}-N_{c+3}}{N_c}\cdot\frac{A}{(1+t)^2}, \ldots$$

Отсюда заключаем, что искомая величина Y, несколько преувеличенная, может быть представлена в виде суммы

$$\frac{N_c - N_{c+1}}{N_c} A + \frac{N_{c+1} - N_{c+2}}{N_c} \cdot \frac{A}{1+t} + \frac{N_{c+2} - N_{c+3}}{N_c} \cdot \frac{A}{(1+t)^2} + \ldots,$$

которая легко приводится к

$$A - t \frac{Q_{c+1} + Q_{c+2} + Q_{c+3} + \ldots}{Q_c} A = A - t \frac{S_c}{Q_c} A.$$

Этот результат, на основании решения предыдущей задачи, может быть истолкован в том смысле, что наследники, получая капитал A только после смерти застрахованного лица, лишаются, во все время его жизни, процентов с этого капитала. Если разделим найденную величину

$$A\left(1 - t\frac{S_c}{Q_c}\right)$$

на $1+t$, то получим величину

$$\frac{A}{1+t}\left(1 - t\frac{S_c}{Q_c}\right),$$

которая, согласно вышесказанному, будет меньше искомой стоимости Y. Наконец, для достижения большей точности можно приурочить смерть застрахованного лица к тем моментам, когда оно достигает возрастов

$$c + \frac{1}{2} \text{ лет}, \quad c + \frac{3}{2} \text{ лет}, \quad c + \frac{5}{2} \text{ лет, и т. д.};$$

тогда получится для искомой стоимости Y третье значение

$$\frac{A}{\sqrt{1+t}}\left(1 - t\frac{S_c}{Q_c}\right),$$

о котором уже нельзя будет сказать, превосходит ли оно Y или нет. Заметим, что мы имеем здесь один из тех важных для практики случаев, когда существование искомой величины, в строгом математическом смысле, не может быть установлено; поэтому в данном случае не может быть и речи о точной формуле. Усложняя выводы, можно создать иллюзию точности; но для устранения этой иллюзии, в данном случае, достаточно заметить, что таблицы смертности не принадлежат к числу настоящих математических таблиц.

Задача 4-ая. Лицо возраста с уплачивает страховому учреждению ежегодно сумму x, начиная с момента достижения возраста с до своей смерти, с тем условием, чтобы наследникам этого лица была выдана сумма A тотчас после его смерти. Определить нормальную величину отношения $\frac{x}{A}$.

Согласно решению задачи 2-ой стоимость всех сумм, которые уплатит застрахованное лицо страховому учреждению, приводится для начала страхования к

$$\left(1+\frac{S_c}{Q_c}\right)x.$$

С другой стороны, на основании решения задачи 3-ей можно признать, что для того же момента времени стоимость суммы A, которую страховое учреждение должно будет уплатить наследникам лица, приводится к

$$\frac{A}{\sqrt{1+t}}\left(1-t\frac{S_c}{Q_c}\right).$$

Поэтому, на основании условия безобидности игр, имеем

$$\left(1+\frac{S_c}{Q_c}\right)x=\frac{A}{\sqrt{1+t}}\left(1-t\frac{S_c}{Q_c}\right),$$

откуда выводим

$$\frac{x}{A}=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\cdot\frac{1-t\frac{S_c}{Q_c}}{1+\frac{S_c}{Q_c}}=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\cdot\frac{Q_c-tS_c}{Q_c+S_c}.$$

Переходя к таким страхованиям, которые обусловлены жизнью и смертью двух лиц, положим для большей общности, что эти два лица принадлежат к различным категориям людей, и что потому к ним следует применять различные таблицы смертности.

Сохраним для одного лица прежний ряд чисел

$$N_a,\ N_{a+1},\ N_{a+2},\ N_{a+3},\ldots$$

в выше разъясненном смысле, а для другого лица будем употреблять, в том же смысле, новый ряд чисел

$$N'_a,\ N'_{a+1},\ N'_{a+2},\ N'_{a+3},\ldots.$$

Тогда, если первое лицо имеет возраст c лет, а второе возраст ∂ лет, то вероятность прожить им обоим i лет выразится произведением

$$\frac{N_{c+i}}{N_c}\cdot\frac{N'_{\partial+i}}{N'_\partial}.$$

При тех же условиях вероятность, что первое лицо умрет в течение i лет, а второе останется в живых, представится произведением

$$\frac{N_c-N_{c+i}}{N_c}\cdot\frac{N'_{\partial+i}}{N_\partial};$$

и вероятность, что второе лицо умрет в течение i лет, а первое останется в живых, представится произведением

$$\frac{N_{c+i}}{N_c}\cdot\frac{N'_\partial-N'_{\partial+i}}{N'_\partial}.$$

Наконец, произведение

$$\frac{N_c-N_{c+i}}{N_c}\cdot\frac{N'_\partial-N'_{\partial+i}}{N'_\partial}$$

выразит вероятность, что оба лица умрут в течение i лет.

Для решения нижеследующих задач полезно ввести три системы чисел:

$$X_c=\frac{1}{N_c}\left\{\frac{N_{c+1}}{1+t}+\frac{N_{c+2}}{(1+t)^2}+\frac{N_{c+3}}{(1+t)^3}+\ldots\right\},$$

$$X'_\partial=\frac{1}{N'_\partial}\left\{\frac{N'_{\partial+1}}{1+t}+\frac{N'_{\partial+2}}{(1+t)^2}+\frac{N'_{\partial+3}}{(1+t)^3}+\ldots\right\},$$

$$X_{c,\partial}=\frac{N_{c+1}N'_{\partial+1}}{(1+t)N_cN'_\partial}+\frac{N_{c+2}N'_{\partial+2}}{(1+t)^2N_cN'_\partial}+\ldots,$$

где под буквами c и ∂ мы подразумеваем любое из чисел

$$a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ \ldots$$

Число

$$1+X_c$$

представляет, на основании решения задачи 2-ой, стоимость единицы капитала, уплачиваемой ежегодно первому лицу, или первым лицам, с момента достижения им возраста c до смерти, при чем эта стоимость отнесена к моменту первой уплаты, когда вышеупомянутое лицо имеет возраст c лет.

Подобный же смысл имеет для второго лица число

$$1+X'_\partial.$$

Что же касается числа

$$1+X_{c.\partial},$$

то оно выражает, как нетрудно убедиться, стоимость ежегодных уплат единицы капитала, производимых при условии существования в живых обоих рассматриваемых нами лиц, при чем эта стоимость, подобно предыдущим, относится к моменту первой уплаты, который совпадает с моментами достижения вышеупомянутыми лицами возрастов c лет и ∂ лет.

Задача 5-ая. Лицо возраста с лет желает, чтобы тотчас после его смерти страховое учреждение выдало другому лицу, возраста д лет, капитал А, если смерть первого лица последует в тот промежуток времени, когда его возраст будет заключаться между $c+i$ *и* $c+i+1$ *годами. Определить стоимость этого капитала, приведенную к моменту, когда первое лицо имеет возраст с лет, а второе д лет.*

Если бы уплата капитала A не была обусловлена жизнью второго лица, то искомую стоимость можно было бы представить произведением

$$\frac{N_{c+i}-N_{c+i+1}}{N_c}\cdot\frac{1}{(1+t)^{i+\frac{1}{2}}},$$

на основании сказанного нами при решении задачи 3-ей.

Теперь же мы должны прибавить еще один множитель, выражающий вероятность, что в момент смерти первого лица второе окажется в живых. Этот множитель лежит между

$$\frac{N'_{\partial+i}}{N'_{\partial}} \quad \text{и} \quad \frac{N'_{\partial+i+1}}{N'_{\partial}};$$

ибо в рассматриваемый момент смерти первого лица возраст второго лица заключается между $\partial+i$ и $\partial+i+1$ годами.

Допуская же, что в момент смерти первого лица возраст второго равен $\partial+i+\frac{1}{2}$, мы за вышеупомянутый множитель можем принять

$$\frac{N'_{\partial+i}+N'_{\partial+i+1}}{2N'_{\partial}}.$$

Итак, за величину искомой стоимости можно считать произведение

$$\frac{N_{c+i}-N_{c+i+1}}{N_c}\cdot\frac{N'_{\partial+i}+N'_{\partial+i+1}}{2N'_{\partial}}\cdot\frac{1}{(1+t)^{i+\frac{1}{2}}}.$$

Этот результат послужит основанием для дальнейших наших выводов.

Задача 6-ая. Лицо возраста с вносит в страховое учреждение капитал Y с тем условием, чтобы тотчас по смерти этого лица был выдан капитал A другому лицу возраста ∂.

Найти нормальную величину отношения

$$\frac{Y}{A}.$$

Страхование, о котором идет речь, можно рассматривать как совокупность годовых страхований, стоимость которых мы только-что определили. На этом основании нетрудно установить равенство

$$\frac{Y}{A}=\sum\frac{N_{c+i}-N_{c+i+1}}{N_c}\cdot\frac{N'_{\partial+i}+N'_{\partial+i+1}}{2N'_{\partial}}\cdot\frac{1}{(1+t)^{i+\frac{1}{2}}},$$

где

$$i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots.$$

Затем посредством простых преобразований выводим

$$\frac{Y}{A}\sqrt{1+t}=\frac{1}{2}(1-tX_{c,\partial})-\frac{N_{c+1}}{2N_c}(1+X_{c+1,\partial})+$$

$$+\frac{N'_{\partial+1}}{2N'_\partial}(1+X_{c,\partial+1}).$$

Задача 7-ая. Лицо возраста с и другое лицо возраста д вносят в страховое учреждение капитал Z с тем условием, чтобы тотчас по смерти кого-нибудь из них был выдан капитал A оставшемуся в живых. Найти нормальную величину отношения

$$\frac{Z}{A}.$$

На основании решения задачи 6-ой произведение

$$\frac{Z}{A}\sqrt{1+t}$$

выражается суммою

$$\frac{1}{2}(1-tX_{c,\partial})-\frac{N_{c+1}}{2N_c}(1+X_{c+1,\partial})+\frac{N'_{\partial+1}}{2N'_\partial}(1+X_{c,\partial+1})$$

$$+\frac{1}{2}(1-tX_{c,\partial})-\frac{N'_{\partial+1}}{2N'_\partial}(1+X_{c,\partial+1})+\frac{N_{c+1}}{2N_c}(1+X_{c+1,\partial}),$$

которая приводится к $1-tX_{c,\partial}$.

Этот результат можно вывести из того соображения, что два лица, получая капитал A только после смерти одного из них, лишаются процентов с капитала A во все время, пока они оба живы.

Задача 8-ая. Лицо возраста с и другое лицо возраста д вносят ежегодно в страховое учреждение капитал x, пока оба живы, с тем условием, чтобы тотчас по смерти кого-нибудь из них оставшемуся в живых был выдан капитал A. Найти нормальную величину отношения

$$\frac{x}{A}.$$

На основании решения предыдущей задачи получаем

$$\frac{x}{A}=\frac{1-tX_{c,\partial}}{1+X_{c,\partial}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t}},$$

если первая уплата капитала x происходит в тот момент, когда вышеупомянутые лица имеют возрасты c лет и ∂ лет.

Задача 9-ая. Лицо возраста c вносит в страховое учреждение капитал Z с тем, чтобы другому лицу возраста ∂ была обеспечена ежегодная пожизненная пенсия A с момента смерти первого лица. Определить нормальную величину отношения $\frac{Z}{A}$.

Для упрощения расчета приурочим все выдачи пенсии к тем моментам, когда второе лицо достигает возраста

$$\partial+1 \text{ лет, } \partial+2 \text{ лет, } \partial+3 \text{ лет и т. д.}$$

Далее условия задачи истолкуем таким образом, что при достижении возрастов

$$\partial+1 \text{ лет, } \partial+2 \text{ лет, } \partial+3 \text{ лет и т. д.}$$

второе лицо во всяком случае получает пенсию A, которую, однако, оно тотчас возвращает страховому учреждению, если и первое лицо оказывается живым.

При таком толковании вопроса легко получается формула

$$\frac{Z}{A}=X'_{\partial}-X_{c,\partial}.$$

Желающим ознакомиться подробнее с различными вопросами страхования жизни и приемами их решения укажем капитальное сочинение Б. Ф. Малешевского, „Теория и практика пенсионных касс“; оно содержит также изложение приемов составления таблиц смертности.

ЛИТЕРАТУРА.

E. Dormoy. Théorie mathématique des assurances sur la vie. 1878.

U. Broggi. Traité des assurances sur la vie avec developpements sur le calcul des probabilités. Traduit de l'italien par S. Lattés. 1907.

G. Bohlmann. Lebensversicherungs-Mathematik (Math. Enzyklopädie I D 4 b).

С. Е. Савич. Элементарная теория страхования жизни и трудоспособности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

метода математических ожиданий — метода моментов — к выводу второй предельной теоремы исчисления вероятностей

Неравенства Чебышева и основная теорема.

§ 54. Для приложения метода Бьенэме-Чебышева (метода моментов) к доказательству второй предельной теоремы исчисления вероятностей мы должны рассматривать непрерывные дроби вида

$$\cfrac{a_1}{z+b_1-\cfrac{a_2}{z+b_2-\cfrac{a_3}{z+b_3-\ldots}}}$$

в связи с рядами вида

$$S_0\frac{1}{z}+S_1\frac{1}{z^2}+S_2\frac{1}{z^3}+S_3\frac{1}{z^4}+\ldots,$$

где число z переменное, а остальные буквы означают числа постоянные или переменные, не зависящие от z. Как ряд, так и непрерывная дробь будут у нас бесконечными; но мы не имеем надобности предполагать их сходящимися, ибо ряд служит нам только для образования конечных сумм

$$S_0\frac{1}{z}+S_1\frac{1}{z^2}+S_2\frac{1}{z^3}+\ldots+S_{k-1}\frac{1}{z^k}$$

с произвольным числом слагаемых, а непрерывная дробь нужна только ради ее подходящих дробей

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)}=\cfrac{a_1}{z+b_1-\cfrac{a_2}{z+b_2-\ldots\, -\cfrac{a_m}{z+b_m}}},$$

при чем целые функции

$$\psi_1(z),\ \psi_2(z),\ \psi_3(z), \ldots .$$

и

$$\omega_1(z),\ \omega_2(z),\ \omega_3(z), \ldots .$$

последовательно определяются формулами

$$\psi_1(z) = a_1, \qquad \psi_2(z) = a_1(z + b_2),$$

$$\omega_1(z) = z + b_1,\ \omega_2(z) = (z + b_1)(z + b_2) - a_2,$$

$$\psi_m(z) = (z + b_m)\,\psi_{m-1}(z) - a_m\,\psi_{m-2}(z)$$

$$\omega_m(z) = (z + b_m)\,\omega_{m-1}(z) - a_m\,\omega_{m-2}(z).$$

Числа

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots .$$

мы должны ограничить условием, что среди определителей

$$S_0, \quad \begin{vmatrix} S_0, & S_1 \\ S_1, & S_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} S_0, & S_1, & S_2 \\ S_1, & S_2, & S_3 \\ S_2, & S_3, & S_4 \end{vmatrix}, \ldots .$$

нет равных нулю. Такое условие необходимо и достаточно, чтобы можно было связать ряд с непрерывною дробью общим равенством

$$\omega_m(z) \cdot \left\{ S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + \ldots \right\} - \psi_m(z) = \frac{\alpha}{z^{m+1}} + \frac{\beta}{z^{m+2}} + \ldots ,$$

которое имеет следующий смысл: если множить целую функцию $\omega_m(z)$ по обычным правилам на бесконечную сумму

$$S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + \ldots ,$$

то в получаемом таким образом произведении должны приводиться к нулю коэффициенты при

$$\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}, \ldots \frac{1}{z^m},$$

целая же часть этого произведения образует функцию $\psi_m(z)$. Полагая

$$\omega_m(z) = L_0 + L_1 z + L_2 z^2 + \ldots + L_{m-1} z^{m-1} + z^m,$$

мы получаем отсюда систему уравнений

$$\begin{aligned}
S_0 L_0 + S_1 L_1 + \ldots + S_{m-1} L_{m-1} + S_m &= 0,\\
S_1 L_0 + S_2 L_1 + \ldots + S_m L_{m-1} + S_{m+1} &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
S_{m-1} L_0 + S_m L_1 + \ldots + S_{2m-2} L_{m-1} + S_{2m-1} &= 0,
\end{aligned}$$

которая действительно определяет коэффициенты

$$L_0, L_1, \ldots, L_{m-1}$$

целой функции $\omega_m(z)$, если только, согласно вышеупомянутому условию, определитель

$$\begin{vmatrix} S_0, & S_1, \ldots, & S_{m-1} \\ S_1, & S_2, \ldots, & S_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m-1}, & S_m, \ldots, & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

Обозначая затем для любой целой функции

$$\varphi(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_k z$$

символом

$$[\varphi(x)]$$

сумму

$$S_0 C_0 + S_1 C_1 + S_2 C_2 + \ldots + S_k C_k,$$

мы можем представить вышеприведенную систему уравнений так:

$$[\omega_m(x)] = 0,\ [x\omega_m(x)] = 0, \ldots,\ [x^{m-1}\omega_m(x)] = 0,$$

и можем заменить ее даже одним равенством

$$[\theta(x)\,\omega_m(x)] = 0,$$

если под $\theta(z)$ будем подразумевать все целые функции $m-1^{\text{ой}}$ степени.

Введенный нами символ $[\varphi(x)]$ удовлетворяет, очевидно, простой теореме сложения

$$[\varphi(x) + \chi(x)] = [\varphi(x)] + [\chi(x)].$$

На этом основании не трудно проверить, что функции

$$\omega_m(z),\ \omega_{m-1}(z),\ \omega_{m-2}(z)$$

связаны между собой уравнением вида

$$\omega_m(z) = (z + b_m)\,\omega_{m-1}(z) - a_m\,\omega_{m-2}(z).$$

В самом деле, каковы бы ни были постоянное число b_m и целая функция $\theta(z)$, $m-3^{\text{ей}}$ степени, имеем

$$[\theta(x)\,\omega_m(x)] = 0 \quad \text{и} \quad [(x + b_m)\,\omega_{m-1}(x)\,\theta(x)] = 0,$$

и потому разность

$$\omega_m(z) - (z + b_m)\,\omega_{m-1}(z),$$

согласно вышеприведенной теореме сложения, должна удовлетворять уравнению

$$\left[\theta(x)\left\{\omega_m(x)-(x+b_m)\,\omega_{m-1}(x)\right\}\right]=0,$$

где $\theta(z)$ также произвольная целая функция $m-3^{\text{ей}}$ степени; а при некотором определенном значении коэффициента b_m эта разность приводится к целой функции $m-2^{\text{ой}}$ степени, и тогда она может отличаться только постоянным множителем от функции $\omega_{m-2}(z)$, которая как-раз определяется уравнением

$$[\theta(x)\,\omega_{m-2}(x)]=0,$$

где степень произвольной целой функции $\theta(z)$ равна $m-3$.

Что касается целой функции $\psi_m(z)$, то при помощи введенного нами символа она может быть определена формулой

$$\psi_m(z)=\left[\frac{\omega_m(x)-\omega_m(z)}{x-z}\right].$$

Последняя формула представляет сокращенное выражение следующей

$$\psi_m(z)=S_0 z^{m-1}+(S_0 L_{m-1}+S_1)\,z^{m-2}$$
$$+(S_0 L_{m-2}+S_1 L_{m-1}+S_2)\,z^{m-3}+\ldots.$$

Следует заметить также, что неравенство определителя

$$\begin{vmatrix} S_0, & S_1, \ldots, & S_{m-1} \\ S_1, & S_2, \ldots, & S_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m-1}, & S_m, \ldots, & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

нулю указывает на невозможность удовлетворить системе уравнений

$$[\varphi(x)]=0,\ [x\varphi(x)]=0,\ \ldots,\ [x^{m-1}\varphi(x)]=0$$

никакою целою функциею $\varphi(z)$, которая не равна тожественно нулю и имеет степень меньшую m. И, наоборот, если только-что приведенной системе уравнений нельзя удовлетворить целою функциею $\varphi(z)$ степени ниже m, не приравнивая всех ее коэффициентов нулю, то наш определитель

$$\begin{vmatrix} S_0, & S_1, \ldots, & S_{m-1} \\ S_1, & S_2, \ldots, & S_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m-1}, & S_m, \ldots, & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

На этом основании мы можем для тех рядов

$$S_0\frac{1}{z}+S_1\frac{1}{z^2}+S_2\frac{1}{z^3}+\ldots,$$

которыми специально будем заниматься, заключать о существовании соответствующей непрерывной дроби

$$\cfrac{a_1}{z+b_1-\cfrac{a_2}{z+b_2-\cfrac{a_3}{z+b_3-\ldots}}}$$

без вычисления определителей

$$S_0,\quad \begin{vmatrix} S_0, & S_1 \\ S_1, & S_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} S_0, & S_1, & S_2 \\ S_1, & S_2, & S_3 \\ S_2, & S_3, & S_4 \end{vmatrix},\ldots.$$

Не делая пока никаких особых предположений, обратим внимание на то, что коэффициенты целых функций

$$\omega_m(z) \quad и \quad \psi_m(z)$$

представляют некоторые рациональныя функции чисел

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_{2m-1}.$$

Следовательно, корни уравнения

$$\omega_m(z)=0$$

алгебраические функции тех же чисел, и потому, при непрерывном изменении последних, они также должны изменяться непрерывно.

Если же для некоторой совокупности чисел

$$S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_{2m-2},\ S_{2m-1}$$

все эти корни различны, то мы можем установить равенство

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)}=\sum_{\xi}\frac{\rho}{z-\xi},$$

где суммирование, обозначенное символом $\sum\limits_{\xi}$, распространяется на все корни уравнения

$$\omega_m(\xi)=0,$$

а значения ρ определяются формулой

$$\rho=\frac{\psi_m(\xi)}{\omega'_m(\xi)};$$

и обе формулы

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)}=\sum_{\xi}\frac{\rho}{z-\xi} \quad \text{и} \quad \rho=\frac{\psi_m(\xi)}{\omega'_m(\xi)}$$

сохраняет свою силу при достаточных малых изменениях чисел

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{2m-2},\ S_{2m-1},$$

непрерывными функциями которых будут все ρ подобно ξ.

Положим теперь, что мы имеем некоторую совокупность вещественных чисел, общий член которой обозначим буквою x; положим также, что каждому из этих x соответствует свое определенное число p.

Наконец, положим, что имеют смысл суммы

$$\sum_x p, \sum_x px, \sum_x px^2, \sum_x px^3, \ldots,$$

распространенные на всю нашу совокупность чисел x, и этим суммам приравняем, соответственным образом, коэффициенты вышеприведенного ряда

$$S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + \ldots,$$

так что, вообще, будет

$$S_k = \sum_x px^k.$$

При таких предположениях, на которых мы специально остановимся, введенный нами символ

$$[\varphi(x)]$$

обращается в сумму

$$\sum_x p\varphi(x).$$

А система уравнений, которой подчинены коэффициенты функции $\omega_m(z)$, может быть выражена равенством

$$\sum_x p\theta(x)\omega_m(x) = 0,$$

где $\theta(z)$ попрежнему произвольная целая функция $m-1$-ой степени.

Вместе с тем нетрудно видеть, что сумма

$$\sum_x p\varphi(x)\varphi(x)$$

может быть нулем только для таких вещественных целых функций $\varphi(z)$, которые сами обращаются в нуль, коль скоро z равняется любому из чисел x нашей совокупности. А отсюда следует, что требованию, выражаемому равенством

$$\sum_x p\theta(x)\varphi(x) = 0,$$

где $\theta(z)$ произвольная целая функция $m-1$-ой степени, не может удовлетворить никакая целая функция $\varphi(z)$, $m-1$-ой степени, если совокупность x содержит более $m-1$ чисел.

Поэтому, если наша совокупность x содержит более $m-1$ чисел, то существование вышеуказанных дробей

$$\frac{\psi_1(z)}{\omega_1(z)}, \frac{\psi_2(z)}{\omega_2(z)}, \ldots, \frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)},$$

определяемых первыми $2m$ членами ряда

$$S_0\frac{1}{z} + S_1\frac{1}{z^2} + S_2\frac{1}{z^3} + \ldots$$

не подлежит сомнению. При том же предположении нетрудно убедиться что число вещественных различных корней уравнения

$$\omega_m(z) = 0$$

должно быть равным m, а не меньше m.

В самом деле, если различными вещественными корнями, нечетной кратности, для уравнения

$$\omega_m(z) = 0$$

будут k и только k чисел

$$c_1, c_2, \ldots, c_k,$$

то произведение

$$(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_k)\,\omega_m(z),$$

при всех вещественных значениях z, будет числом положительным и будет нулем только вместе с $\omega_m(z)$, и потому, если $k<m$, то сумма

$$\sum_x p(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_k)\,\omega_m(x),$$

содержащая не менее m слагаемых и среди них не более

$$k+\frac{m-k}{2}=m-\frac{m-k}{2}$$

нулей, не может быть нулем, между тем как она при $k<m$ должна быть нулем, в силу общего равенства

$$\sum p\vartheta(x)\,\omega_m(x)=0,$$

определяющего функцию $\omega_m(z)$.

Итак, $k=m$, и соответственно этому $\omega_m(z)$ должна разлагаться на m различных вещественных множителей первой степени

$$\omega_m(z)=(z-\xi_1)(z-\xi_2)\ldots(z-\xi_m).$$

Таким образом, мы приходим к следующим выводам, на которых будут основаны дальнейшие наши заключения.

Если совокупность вещественных чисел x содержит не менее μ членов и если соответствующие им числа p положительны, то для

$$m=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ \mu$$

существует целая функция $\omega_m(z)$, m-ой степени, определяемая системой уравнений

$$(1)\quad \sum_x p\,\omega_m(x)=0,\quad \sum_x px\,\omega_m(x)=0,\ \ldots,\ \sum_x px^{m-1}\omega_m(x)=0$$

и условием, что у ней коэффициент при z^m равен единице. Эта функция разлагается на m различных вещественных множителей первой степени

$$(2)\qquad \omega_m(z)=(z-\xi_1)(z-\xi_2)\ldots(z-\xi_m).$$

Полагая затем

$$\psi_m(z) = \sum_x p \frac{\omega_m(z) - \omega_m(x)}{z - x}, \tag{3}$$

можем, при тех же условиях на счет x и p, установить формулы

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} = \sum_\xi \frac{\rho}{z - \xi}, \tag{4}$$

$$\rho = \frac{\psi_m(\xi)}{\omega'_m(\xi)},$$

где

$$\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

и общее равенство

$$\sum_\xi \rho\,\Omega(\xi) = \sum_x p\,\Omega(x) \tag{5}$$

для любой целой функции $\Omega(z)$, степень которой не выше $2m-1$.

В самом деле, если степень целой функции $\Omega(z)$ не превосходит $2m-1$, то мы можем установить равенства

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) + \theta(z)\,\omega_m(z)$$

и

$$\Omega_0(z) = \sum_\xi \frac{\omega_m(z)}{(z-\xi)\,\omega'_m(\xi)}\,\Omega(\xi),$$

где степень целой функции $\theta(z)$ не превосходит $m-1$.

Вместе с тем имеем

$$\sum_x p\theta(x)\,\omega_m(x) = 0 = \sum_\xi \rho\theta(\xi)\,\omega_m(\xi)$$

и

$$\sum_x p\,\Omega_0(x) = \sum_\xi \Omega(\xi) \sum_x p\,\frac{\omega_m(x) - \omega_m(\xi)}{(x-\xi)\,\omega'_m(\xi)} =$$

$$= \sum_\xi \frac{\psi_m(\xi)}{\omega'_m(\xi)}\,\Omega(\xi) = \sum_\xi \rho\,\Omega(\xi);$$

следовательно,

$$\sum_x p\,\Omega(x) = \sum_x p\,\Omega_0(x) = \sum_\xi \rho\,\Omega(\xi),$$

что и выражается равенством (5).

Наконец, рассматривая два ряда целых функций

$$\omega_0(z) = 1,\ \omega_1(z),\ \omega_2(z), \ldots,\ \omega_\mu(z)$$

и

$$\psi_0(z) = 0,\ \psi_1(z),\ \psi_2(z), \ldots,\ \psi_\mu(z),$$

мы убеждаемся, что каждые три смежных функции этих рядов связаны между собой линейными формулами

$$\begin{gathered}\omega_m(z) = (z + b_m)\,\omega_{m-1}(z) - a_m\,\omega_{m-2}(z),\\ \psi_m(z) = (z + b_m)\,\psi_{m-1}(z) - a_m\,\psi_{m-2}(z),\end{gathered} \tag{6}$$

коэффициенты которых a_m и b_m можно определить равенствами

$$b_m = -\frac{\sum\limits_x p\,x\,\omega_{m-1}(x)\,\omega_{m-1}(x)}{\sum\limits_x p\,\omega_{m-1}(x)\,\omega_{m-1}(x)} \tag{7}$$

и

$$a_m = \frac{\sum\limits_x p\,\omega_{m-1}(x)\,\omega_{m-1}(x)}{\sum\limits_x p\,\omega_{m-2}(x)\,\omega_{m-2}(x)}, \tag{8}$$

при $m \geqq 2$.

Для полного определения функций

$$\omega_1(z),\ \psi_1(z),\ \omega_2(z),\ \psi_2(z), \ldots,\ \omega_\mu(z),\ \psi_\mu(z)$$

следует присоединить еще четыре равенства

$$\omega_1(z) = z + b_1,\ \ \psi_1(z) = a_1$$

и

$$a_1 = \sum_x p,\ \ b_1 = -\frac{\sum\limits_x px}{\sum\limits_x p}.$$

Из формул (6) и (8) вытекает важное для нас простое равенство

$$\psi_m(z)\,\omega_{m-1}(z) - \psi_{m-1}(z)\,\omega_m(z) = \sum_x p\,\omega_{m-1}(x)\,\omega_{m-1}(x), \tag{9}$$

в силу которого можно заменить вторую из формул (4) такою

$$\rho = \frac{\sum\limits_x p\,\omega_{m-1}(x)\,\omega_{m-1}(x)}{\omega'_m(\xi)\,\omega_{m-1}(\xi)}. \tag{10}$$

Если совокупность чисел x со своими положительными числами p изменяется, но суммы

$$S_0 = \sum_x p,\ \ S_1 = \sum_x px, \ldots,\ S_{2m-1} = \sum_x px^{2m-1} \tag{11}$$

сохраняют неизменные величины, то функции

$$\omega_m(z) \quad \text{и} \quad \psi_m(z)$$

остаются также неизменными и вместе с тем, конечно, сохраняют свои значения связанные с ними числа ξ и ρ.

Если же, с изменением чисел x и p, изменяются и суммы (11), то мы можем, все-таки, утверждать, что при достаточно малом изменении этих сумм функции

$$\omega_m(z) \quad \text{и} \quad \psi_m(z),$$

определяемые уравнением (1) и формулой (3), не перестанут существовать, и все корни уравнения

$$\omega_m(z) = 0$$

останутся вещественными и различными, равно как останутся вещественными и числа ρ, определяемые формулой (4), или равносильною ей формулою (10).

Согласно вышесказанному эти числа ξ и ρ должны быть непрерывными функциями сумм

$$\sum_x p, \ \sum_x px, \ldots, \ \sum_x px^{2m-1}.$$

§ 55. Сохраняя предположение, что числа

$$S_0, \ S_1, \ S_2, \ldots, \ S_{2m-1}$$

задаются формулой

$$S_k = \sum_x px^k$$

и рассматривая только такие совокупности вещественных чисел x и положительных чисел p, для которых существуют наши функции

$$\omega_m(z) \quad \text{и} \quad \psi_m(z),$$

и уравнение

$$\omega_m(z) = 0$$

не имеет ни мнимых, ни кратных корней, мы установим замечательные неравенства, на которые впервые было обращено внимание Чебышевым в краткой заметке „Sur les valeurs limites des intégrales", помещенной в журнале Лиувилля за 1874 г.

Эти неравенства мы представим в немного измененном виде; что же касается их доказательства, то оно впервые было дано в статье * моей „Доказательства некоторых неравенств П. Л. Чебышева", откуда мы его и возьмем.

Неравенства Чебышева.

Пусть α будет какое-нибудь вещественное число, а ξ' и ξ'' — два ближайших к нему корня уравнения

$$\omega_m(z) = 0,$$

так что

$$\xi' \leqq \alpha \leqq \xi''.$$

Если

$$\sum^{x<\alpha} p, \quad \sum^{x\leqq\alpha} p, \quad \sum^{\xi<\xi'} \rho, \quad \sum^{\xi\leqq\xi''} \rho$$

означают соответственно суммы всех значений p

$$\text{для } x<\alpha \quad \text{и} \quad \text{для } x\leqq\alpha$$

и суммы всех значений ρ

$$\text{для } \xi<\xi' \quad \text{и} \quad \text{для } \xi\leqq\xi'',$$

то должно быть

$$\sum^{x<\alpha} p \geqq \sum^{\xi<\xi'} \rho \quad \text{и} \quad \sum^{x\leqq\alpha} p \leqq \sum^{\xi\leqq\xi''} \rho. \tag{12}$$

Примечание. Если α не превосходит наименьшего из корней уравнения

$$\omega_m(z) = 0,$$

* Сообщения Харьковского Математического Общества за 1883 год.

то первое из неравенств (12) надо заменить очевидным

$$\sum^{x<\alpha} p \geqq 0.$$

Подобным же образом, если α не меньше наибольшего из корней уравнения

$$\omega_m(z) = 0,$$

то второе из неравенств (12) следует заменить также очевидным

$$\sum^{x \leqq \alpha} p \leqq \sum_{\xi} \rho = \sum_{x} p.$$

Доказательство. Останавливаясь на доказательстве первого неравенства, образуем целую функцию

$$\Omega(z),$$

$2m-2^{\text{ой}}$ степени, согласно условиям:

$$1)\quad \Omega(\xi) = 1 \quad \text{при} \quad \xi < \xi',$$

$$2)\quad \Omega(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \geqq \xi',$$

$$3)\quad \Omega'(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \text{ не} = \xi',$$

где ξ означает, подобно прежнему, все корни уравнения

$$\omega_m(z) = 0.$$

Для этой цели полагаем

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) + \omega_m(z)\,\Omega_1(z),$$

а целые функции

$$\Omega_0(z),\ m-1^{\text{ой}} \text{ степени, и } \Omega_1(z),\ m-2^{\text{ой}} \text{ степени,}$$

составляем, по известной формуле Лагранжа, согласно определяющим их условиям

$$\Omega_0(\xi) = 1 \quad \text{при} \quad \xi < \xi',$$

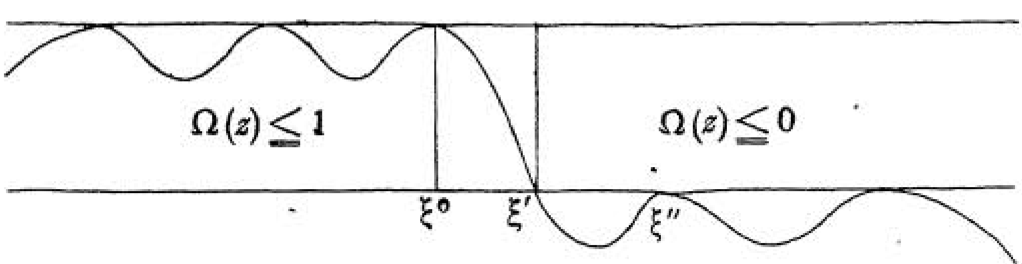
$$\Omega_0(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \geqq \xi',$$

$$\omega'_m(\xi)\,\Omega_1(\xi) = -\Omega'_0(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \text{ не } = \xi'.$$

Установив существование нужной для нас функции $\Omega(z)$, замечаем, что ее производная $\Omega'(z)$ обращается в нуль $m-1$ раз, при всех корнях уравнения

$$\omega_m(z) = 0,$$

за исключением ξ', и еще $m-2$ раза во всех промежутках между смежными корнями этого уравнения, за исключением промежутка от ξ' до смежного корня, меньшего ξ'. Этот смежный с ξ' корень на нашем схематическом чертеже, показывающем ход функции $\Omega(z)$, обозначен символом ξ^0.



А так как степень $\Omega'(z)$ равна $2m-3$, то указанными нами исчерпываются все корни уравнения

$$\Omega'(z) = 0.$$

Отсюда следует, что в промежутке от $z = \xi^0$ до $z = \xi'$ постоянно должно быть

$$\Omega'(z) < 0.$$

И затем, согласно приведенному схематическому чертежу, мы легко убеждаемся в верности неравенства

$$\Omega(z) \leqq 1 \quad \text{при} \quad z < \xi'$$

и неравенства

$$\Omega(z) \leqq 0 \quad \text{при} \quad z > \xi';$$

следовательно,

$$\sum_x p\,\Omega(x) \leqq \sum^{x<\xi'} p \leqq \sum^{x<\alpha} p.$$

С другой стороны, имеем

$$\sum_x p\,\Omega(x) = \sum_\xi \rho\,\Omega(\xi)$$

и

$$\sum_\xi \rho\,\Omega(\xi) = \sum^{\xi<\xi'} \rho,$$

в силу условий, определяющих функцию $\Omega(z)$, и общего равенства (5)

Остается сопоставить последние равенства с только-что установленным неравенством

$$\sum_x p\,\Omega(x) \leqq \sum^{x<\alpha} p,$$

и мы тотчас придем к первому из неравенств (12)

$$\sum^{x<\alpha} p \geqq \sum^{\xi<\xi'} \rho.$$

Подобным же образом нетрудно доказать и второе неравенство. Надо только немного изменить условия, определяющие вспомогательную функцию $\Omega(z)$; а именно, теперь следует положить

1) $\Omega(\xi) = 1$ при $\xi \leqq \xi''$

2) $\Omega(\xi) = 0$ при $\xi > \xi''$

3) $\Omega'(\xi) = 0$ при ξ не $= \xi''$.

Для определенной такими равенствами целой функции $\Omega(z)$, $2m-2^{\text{ой}}$ степени, имеем

$$\sum_x p\Omega(x) \geqq \sum^{x \leqq \xi''} p \geqq \sum^{x \leqq \alpha} p$$

и вместе с тем

$$\sum_x p\Omega(x) = \sum_\xi \rho\Omega(\xi) = \sum^{\xi \leqq \xi''} \rho;$$

откуда тотчас вытекает второе неравенство

$$\sum^{x \leqq \alpha} p \leqq \sum^{\xi \leqq \xi''} \rho.$$

§ 56. Займемся теперь применением наших общих выводов к замечательному ряду и соответствующей ему непрерывной дроби; мы придем таким образом к предложению, которое служит основанием для доказательства теоремы о пределе вероятности, по способу Чебышева. Предварительно, однако, сделаем еще общее замечание о возможности заменить суммы

$$\sum_x p, \quad \sum_x px, \quad \sum_x px^2, \ldots$$

интегралами

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b xf(x)\,dx, \quad \int_a^b x^2 f(x)\,dx, \ldots,$$

где a и b означают любые вещественные числа, или $-\infty$ и $+\infty$ а вещественная функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$f(x) \geqq 0.$$

Нетрудно понять, что такая замена сумм интегралами не нарушает ни наших формул, ни наших заключений, если только интегралы имеют смысл.

Установив это, мы возьмем ряд

$$S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + \ldots,$$

коэффициенты которого определяются одною формулою

$$S_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^k \, dx, \tag{13}$$

или, что все равно, совокупностью двух формул

$$S_{2k} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2k} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2},$$

и

$$S_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{2k+1} \, dx = 0,$$

где k означает целое положительное число или нуль.

Для такого ряда функция $\omega_m(z)$ определяется формулою

$$\omega_m(z) = \frac{e^{z^2}}{(-2)^m} \cdot \frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m}, \tag{14}$$

ибо из формулы (14) следует:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \theta(x) \, \omega_m(x) \, dx =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^m \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} dx = \frac{1}{2^m \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^m \theta(x)}{dx^m} dx,$$

какова бы ни была целая функция $\theta(z)$, и потому

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\theta(x)\,\omega_m(x)\,dx = 0,$$

коль скоро степень целой функции $\theta(z)$ меньше m.

Отсюда вытекает также важное для нас равенство

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\omega_m(x)\,\omega_m(x)\,dx = \frac{1.2.3\ldots.m}{2^m},$$

в силу которой формула (10) приводится в данном случае к такой

$$\rho = \frac{1.2.3\ldots.(m-1)}{2^{m-1}\omega'_m(\xi)\,\omega_{m-1}(\xi)}.$$

С другой стороны, из формулы (14) нетрудно вывесть ряд простых соотношений

$$\omega'_m(z) = \frac{2ze^{z^2}}{(-2)^m}\cdot\frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m} + \frac{e^{z^2}}{(-2)^m}\cdot\frac{d^m(-2ze^{-z^2})}{dz^m}$$

$$= \frac{me^{z^2}}{(-2)^{m-1}}\cdot\frac{d^{m-1}e^{-z^2}}{dz^{m-1}} = m\omega_{m-1}(z),$$

$$\omega_m(z) = \frac{e^{z^2}}{(-2)^m}\cdot\frac{d^{m-1}(-2ze^{-z^2})}{dz^{m-1}}$$

$$= \frac{ze^{z^2}}{(-2)^{m-1}}\cdot\frac{d^{m-1}e^{-z^2}}{dz^{m-1}} - \frac{(m-1)e^{z^2}}{2(-2)^{m-2}}\cdot\frac{d^{m-2}e^{-z^2}}{dz^{m-2}}$$

$$= z\omega_{m-1}(z) - \frac{m-1}{2}\omega_{m-2}(z)$$

$$= \frac{z}{m}\omega'_m(z) - \frac{1}{2m}\omega''_m(z).$$

Равенством

$$\omega'(z) = m\omega_{m-1}(z)$$

мы воспользуемся, прежде всего, для преобразования вышеприведенного выражения ρ к следующему виду

$$\rho = \frac{1.2.3\ldots.m}{2^{m-1}\omega'_m(\xi)\,\omega'_m(\xi)}. \tag{15}$$

Последнее выражение ρ послужит нам для вывода замечательно простого неравенства, из которого вытекает важное для нас предложение:

$$\text{пред.}_{m=\infty}\ \rho = 0.$$

Это неравенство и его вывод мы заимствуем из статьи * академика Н. Я. Сонина, „О точности определения предельных величин интегралов", не передавая, однако, буквально ее содержания.

Начнем с того, что заменим квадрат

$$\omega'_m(\xi)\,\omega'_m(\xi),$$

входящий в знаменатель рассматриваемого выражения ρ равною ему суммою

$$\omega'_m(\xi)\,\omega'_m(\xi) + B\omega_m(\xi)\,\omega_m(\xi),$$

подбирая вспомогательный коэффициент B так, чтобы производная по z целой функции

$$\omega'_m(z)\,\omega'(z) + B\omega_m(z)\,\omega_m(z)$$

делилась на квадрат

$$\omega'_m(z)\,\omega'_m(z).$$

На первую степень $\omega'_m(z)$ производная составленной нами целой функции, равная

$$2\omega'_m(z)\left\{\omega''_m(z) + B\omega_m(z)\right\},$$

* Записки Академии Наук. Том 69, кн. 1, 1892.

делится при всяком B; на квадрат же

$$\omega'_m(z)\,\omega'_m(z)$$

она будет делиться при

$$B=2m,$$

ибо, согласно вышеприведенному соотношению между

$$\omega_m(z), \quad \omega'_m(z) \quad \text{и} \quad \omega''_m(z)$$

имеем

$$\omega''_m(z)+2m\omega(z)=2z\omega'(z).$$

Мы приходим таким образом к равенству

$$\left\{\omega'_m(z)\,\omega'_m(z)+2m\omega_m(z)\,\omega_m(z)\right\}'=4z\omega'_m(z)\,\omega'_m(z),$$

которое показывает, что сумма

$$\omega'_m(z)\,\omega'_m(z)+2m\omega_m(z)\,\omega_m(z)$$

достигает своего наименьшего значения при $z=0$.

Отсюда тотчас выводим неравенство

$$\rho<\frac{1.2.3\ldots.m}{2^{m-1}\{\omega'_m(0)\,\omega'_m(0)+2m\omega_m(0)\,\omega_m(0)\}},$$

разбором и упрощением которого мы займемся.

Для этого обращаемся равенствам

$$\omega_1(z)=z, \qquad \omega_2(z)=z^2-\frac{1}{2}$$

$$\omega_m(z)=z\omega_{m-1}(z)-\frac{m-1}{2}\,\omega_{m-2}(z),$$

которые могут служить для определения всех функций $\omega_m(z)$, и принимаем во внимание формулу

$$\omega'_m(z)=m\omega_{m-1}(z).$$

Мы видим, что при m четном $\omega'_m(0)$ приводится к нулю вместе с $\omega_{m-1}(0)$, значение же $\omega_m(0)$ определяется из ряда последовательных равенств

$$\omega_2(0) = -\frac{1}{2},$$

$$\omega_4(0) = -\frac{3}{2}\omega_2(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2},$$

$$\omega_6(0) = -\frac{5}{2}\omega_4(0) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

и оказывается равным

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\frac{1.3.5\dots.(m-1)}{2^{\frac{m}{2}}}.$$

Напротив, при m нечетном

$$\omega_m(0) = 0$$

и

$$\omega'_m(0) = m\omega_{m-1}(0) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{1.3.5\dots.(m-2)m}{2^{\frac{m-1}{2}}}.$$

Следовательно, при m четном имеем

$$\rho < \frac{2.4.6\dots.(m-2)}{3.5.7\dots.(m-1)},$$

а при m нечетном

$$\rho < \frac{2.4.6\dots.(m-1)}{3.5.7\dots.m};$$

другими словами, при

$$m = 2l+1 \quad \text{и} \quad m = 2l+2,$$

где l любое целое положительное число, имеем

$$\rho < \frac{2.4.6\dots.2l}{3.5.7\dots.(2l+1)}.$$

Чтобы придти к еще более простому неравенству, замечаем, что квадрат выражения

$$\frac{2.4.6\dots.2l}{3.5.7\dots.(2l+1)}$$

можно представить в виде произведения дроби $\frac{1}{2l+1}$ на известное выражение

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\dots\frac{2l}{2l-1}\cdot\frac{2l}{2l+1},$$

которое, при возрастании l, постоянно возрастает и, согласно формуле Валлиса, стремится к пределу $\frac{\pi}{2}$, когда l возрастает беспредельно. Это выражение, конечно, меньше своего предела. Из нашего замечания вытекает, таким образом, неравенство

$$\rho^2 < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2l+1},$$

или, что все равно,

$$\rho < \sqrt{\frac{\pi}{4l+2}}, \tag{16}$$

при

$$m = 2l+1 \quad \text{и} \quad m = 2l+2.$$

Немного усложняя вывод, мы могли бы заменить $4l+2$ числом $4l+3$, которое указано Н. А. Сониным; но для наших заключений такая замена не имеет значения.

§ 57. Теперь уже нетрудно установить вышеупомянутое предложение, которое составляет главную цель этой статьи.

Теорема *. Если совокупность вещественных чисел x, со своими положительными числами p, изменяется так, что суммы

$$\sum_x p,\ \sum_x px,\ \sum_x px^2,\ \sum_x px^3,\ \ldots$$

приближаются соответственно к пределам

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x\,dx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x^2\,dx,\ \ldots,$$

то для любого данного числа α обе суммы

$$\sum^{x<\alpha} p \quad \text{и} \quad \sum^{x\leqq\alpha} p$$

приближаются к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx.$$

Доказательство. Положим для наглядности, что последовательность изменений x и p определяется целым числом n, возрастающим беспредельно. При помощи этого вспомогательного числа мы можем выразить основное условие теоремы так: для любого данного положительного числа i и для сколь угодно малого неизменного положительного числа λ должно быть такое число ν, что неравенства

$$-\lambda < \sum_x px^k - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x^k\,dx < \lambda$$

* A. Markoff, Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}=0$ (Bull. de l'Acad. de St.-Pétersbourg. 1898).

обязательно имеют место

$$\text{при} \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, i \quad \text{и} \quad n > \nu.$$

Нам надо доказать, что при таком условии численные значения обеих разностей

$$\sum^{x<\alpha} p - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\, dx \quad \text{и} \quad \sum^{x \leqq \alpha} p - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\, dx$$

будут меньше любого данного положительного числа ε, при всех достаточно больших значениях n.

Для этой цели разбиваем число ε на два слагаемых, также положительных и определенных:

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'',\ \varepsilon' > 0,\ \varepsilon'' > 0,$$

например:

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Затем берем целое число l настолько большим, чтобы было

$$\sqrt{\frac{\pi}{4l+2}} < \frac{\varepsilon'}{2}$$

и полагаем

$$m = 2l + 1 \quad \text{или} \quad 2l + 2.$$

Дальнейшие наши рассуждения, в которых l и m будут предполагаться неизменными, можно провести как при $m = 2l + 1$, так и при $m = 2l + 2$. Этою двойственностью числа m мы воспользуемся, чтобы для упрощения рассуждений устранить из рассмотрения случаи, когда уравнение

$$e^{z^2} \frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m} = 0$$

допускает корень

$$z = \alpha.$$

Возможность устранения таких случаев вытекает из того, что уравнение

$$e^{z^2}\frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m}=0$$

не может допускать одинаковых корней при двух смежных значениях m:

$$\text{при}\quad m=2l+1\quad\text{и при}\quad m=2l+2.$$

Итак, приравнивая m одному из двух чисел

$$2l+1 \quad \text{и} \quad 2l+2,$$

мы будем предполагать, что ни один из корней уравнения

$$e^{z^2}\frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m}=0,$$

которые мы обозначим символом $\bar{\xi}$, не совпадает с α.

Сохраняя установленные ранее обозначения

$$\omega_m(z),\ \xi,\ \rho$$

для переменной совокупности чисел x и p, мы для только-что рассмотренного специального случая, который сейчас будет играть роль предельного, заменяем эти обозначения такими

$$\overline{\omega}_m(z),\ \overline{\xi},\ \rho.$$

Соответственно этому и неравенство (16) мы заменим следующим

$$\bar{\rho}<\sqrt{\frac{\pi}{4l+2}},$$

откуда выводим

$$\bar{\rho}<\frac{\varepsilon'}{2},$$

для всех рассматриваемых нами величин $\bar{\rho}$.

Пусть далее

$$\overline{\xi'} \text{ и } \overline{\xi''}$$

будут два смежных корня уравнения

$$\overline{\omega}_m(z) = 0,$$

т. е. уравнения

$$e^{z^2} \frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m} = 0,$$

между которыми лежит число α, так что

$$\overline{\xi'} < \alpha < \overline{\xi''}.$$

Применяя к нашему специальному случаю неравенства Чебышева (12)' находим

$$\sum^{\overline{\xi} < \overline{\xi'}} \overline{\rho} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx < \sum^{\overline{\xi} \leqq \overline{\xi''}} \overline{\rho}$$

и отсюда выводим неравенства

$$\sum^{\overline{\xi} < \overline{\xi'}} \overline{\rho} > \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx - \varepsilon'$$

и

$$\sum^{\overline{\xi} \leqq \overline{\xi''}} \overline{\rho} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx + \varepsilon',$$

принимая во внимание, что разность

$$\sum^{\overline{\xi} \leqq \overline{\xi''}} \overline{\rho} - \sum^{\overline{\xi} < \overline{\xi'}} \overline{\rho}$$

равна сумме двух значений $\overline{\rho}$, соответствующих

$$\overline{\xi} = \overline{\xi'} \quad \text{и} \quad \overline{\xi} = \overline{\xi''}.$$

С другой стороны, в силу указанной нами непрерывности корней уравнения

$$\omega_m(z) = 0$$

и соответствующих им количеств ρ, можем утверждать, что коль скоро числовые величины разностей

$$\sum_x p x^k - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^k \, dx,$$

при

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2m-1,$$

все будут меньше некоторого достаточно малого числа λ, будут иметь место следующие обстоятельства:

1) ни одно из чисел ξ, т.-е. ни один из корней уравнения

$$\omega_m(z) = 0,$$

не будет совпадать с числом α, так что среди них найдутся два смежных числа

$$\xi', \quad \xi'',$$

удовлетворяющие неравенствам

$$\xi' < \alpha < \xi'';$$

2) числовые величины обеих разностей

$$\sum^{\xi < \xi'} \rho - \sum^{\overline{\xi} < \overline{\xi'}} \overline{\rho} \quad \text{и} \quad \sum^{\xi \leqq \xi''} \rho - \sum^{\overline{\xi} \leqq \overline{\xi''}} \overline{\rho}$$

будут меньше данного числа ε''.

Пусть λ настолько мало, что указанные обстоятельства имеют место, коль скоро выполняются неравенства

$$-\lambda < \sum_x p x^k - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^k dx < \lambda$$

при

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 2m-1.$$

Предполагая введенные нами числа

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \varepsilon'',\ l,\ m,\ \lambda$$

неизменными, будем увеличивать число n.

Согласно основному условию теоремы, при достаточно больших значениях n, т.-е. при всех n, превосходящих некоторое определенное число ν, только-что приведенные неравенства обязательно будут выполняться.

И для всех этих значений n обе суммы

$$\sum^{x<\alpha} p \quad \text{и} \quad \sum^{x \leqq \alpha} p$$

будут отличаться от

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx$$

менее чем на ε.

В самом деле, в силу неравенств Чебышева (12), имеем

$$\sum^{\xi<\xi'} \rho \leqq \sum^{x<\alpha} p \leqq \sum^{x \leqq \alpha} p \leqq \sum^{\xi \leqq \xi''} \rho.$$

Вместе с тем, при

$$n > \nu,$$

должно быть

$$\sum^{\xi<\xi'} \rho > \sum^{\bar{\xi}<\bar{\xi}'} \bar{\rho} - \varepsilon''$$

и

$$\sum^{\xi\leqq\xi''} \rho < \sum^{\bar{\xi}\leqq\bar{\xi}''} \bar{\rho} + \varepsilon''.$$

Присоединяя же к этим неравенствам установленные раньше

$$\sum^{\bar{\xi}<\bar{\xi}'} \bar{\rho} > \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx - \varepsilon'$$

и

$$\sum^{\bar{\xi}\leqq\bar{\xi}''} \bar{\rho} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx + \varepsilon',$$

легко убеждаемся, что обе суммы

$$\sum^{\xi<\xi'} \rho \quad \text{и} \quad \sum^{\xi\leqq\xi''} \rho,$$

при $n > \nu$, разнятся от

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx$$

менее чем на

$$\varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon.$$

А отсюда тотчас следует, что и обе суммы

$$\sum^{x<\alpha} p \quad \text{и} \quad \sum^{x\leqq\alpha} p,$$

лежащие между

$$\sum^{\xi<\xi'} p \quad \text{и} \quad \sum^{\xi\leqq\xi''} p,$$

при выполнении указанных условий, т. е. при всех достаточно больших значениях n, будут разнится от

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx$$

менее чем на ε

Теорема наша, таким образом, доказана. А из нее вытекает следствие, которым мы будем пользоваться.

Следствие. Каковы бы ни были данные числа t_1 и t_2, второе из которых больше первого, при соблюдении условий вышеприведенной теоремы, четыре суммы

$$\sum^{t_1<x<t_2} p, \quad \sum^{t_1\leqq x<t_2} p, \quad \sum^{t_1<x\leqq t_2} p, \quad \sum^{t_1\leqq x\leqq t_2} p,$$

распространенные на все значения x, которые удовлетворяют неравенствам

$$t_1 < x < t_2,$$

с присоединением, или без присоединения, значений

$$x = t_1 \quad \text{и} \quad x = t_2,$$

стремятся к одному пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2}\,dx.$$

Рассматривая, наконец, положительные числа p, как вероятности соответствующих значений x, мы можем представить это следствие в виде теоремы, относящейся к исчислению вероятностей.

Предельная теорема Чебышева[*]. *Если совокупность всех возможных значений некоторой вещественной величины x, вместе с их вероятностями, изменяется так, что для всякого данного целого положительного числа m, не исключая нуля, математическое ожидание x^m стремится к пределу*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^m \, dx,$$

то вероятность выполнения неравенств

$$t_1 < x < t_2,$$

с присоединением или без присоединения крайних значений

$$x = t_1 \quad \text{и} \quad x = t_2,$$

должна стремиться к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} \, dt,$$

каковы бы ни были данные числа t_1 и $t_2 > t_1$.

Если сопоставить эту теорему с доказанной в главе III (§ 21) теоремой о математических ожиданиях, то получится теорема о пределе вероятности, при тех предположениях, которые были приняты в теореме главы III. Но мы на этом не остановимся, так как предложение, которое мы могли бы сейчас установить, представляет только частный случай того, которое будет предметом следующей статьи.

[*] Мы соединяем с этой теоремой имя Чебышева, хотя он рассматривал только неизменные совокупности x, p, точно удовлетворяющие условию

$$\text{м. о. } x^m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

§ 58. Желая придать нашему доказательству возможно бо́льшую простоту и ясность, мы воспользовались замечательным неравенством Сонина, которое основано на особых свойствах функции $e^{x^2}\dfrac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$, что лишает нас возможности распространить наши выводы на другие случаи, с которыми нам придется встретиться. К счастью, оно играет у нас только вспомогательную роль: мы воспользовались им для доказательства, что при беспредельном увеличении значка m функции $\overline{\omega}_m(x)$ разность

$$\sum^{\bar{\xi} \leqq \bar{\xi}''} \bar{\rho} - \sum^{\xi < \xi'} \bar{\rho}$$

становится бесконечно малою. Но того же можно достигнуть иным путем, не пользуясь неравенством Сонина.

Пересматривая наши выводы, нетрудно придти к такому общему предложению:

Пусть совокупность вещественных чисел x со своими положительными числами p изменяется так, что суммы

$$\sum_x p, \quad \sum_x px, \quad \sum_x px^2, \quad \sum_x px^3, \ldots .$$

приближаются соответственно к пределам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx, \ldots$$

или при соблюдении относительно x неравенств $a < x < b$, к пределам

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b xf(x)\,dx, \quad \int_a^b x^2 f(x)\,dx, \ldots\ldots$$

Пусть при этом функция $f(x)$ непрерывна и не получает отрицательных значений.

Пусть далее

$$\frac{\psi_m(x)}{\omega_m(x)}=\cfrac{a}{x+b_1-\cfrac{a_2}{x+b_2\,.\;\;\;_{\ddots}\;-\cfrac{a_m}{x+b_m}}}$$

обозначает m'ую подходящую дробь в формальном разложении в непрерывную дробь интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)\,dy}{x-y}\quad \textit{или}\quad \int\limits_a^b\frac{f(y)}{x-y}\,dy.$$

Положим что в соответствии с произвольным промежутком, где $f(x)$ не остается постоянно нулем, существует число m_0 такое, что при $m\geqq m_0$ уравнение $\omega_m(x)=0$ имеет корни в этом промежутке. Тогда для любого данного числа α обе суммы

$$\sum^{x<\alpha} p \quad \text{и} \quad \sum^{x\leqq\alpha} p$$

приближаются к пределу

$$\int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx$$

Таким образом вопрос о существовании указанного предела для сумм

$$\sum^{x<\alpha} p \quad \text{и} \quad \sum^{x\leqq\alpha} p$$

сводится к вопросу о существовании корней уравнения $\omega_m(x)=0$ в любом данном промежутке. Этот последний вопрос представляет затруднения только в случаях, когда оба предела интегралов или один из них бесконечны. Рассуждения, относящиеся к случаю бесконечных пределов, дают решение и для случая конечных пределов a и b, при чем в этом случае вопрос решается утвердительно очень просто. Останавливаясь на случаях, когда оба предела интегралов бесконечны и обозначая буквою g наибольшее из численных значений корней уравнения $\omega_m(m) = 0$, мы докажем такое предложение:

если при беспредельном возрастании значка m отношение $\frac{g}{m}$ стремится к пределу 0, то между любыми данными числами c и ∂ должны быть корни уравнения $\omega^m(x) = 0$, при всех достаточно больших значениях m, или интеграл

$$\int_c^\partial f(x)\, dx$$

должен приводиться к нулю.

Для доказательства вводим новое переменное число $t = (x - c)(\partial - x)$ и его целую функцию

$$\Omega(t) = \left\{\cos \mu \arccos \frac{2t + h}{h}\right\}^2$$

при $h = (g + |c|)(g + |\partial|)$, где символы $|c|$ и $|\partial|$ означают абсолютные значения c и ∂, и при μ равно μ целой части числа $\frac{m-1}{2}$. Степень целой функции $\Omega(t)$ относительно x равна 4μ и потому не превосходит $2m - 2$, в силу чего, согасно доказанному выше, можем установить равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \Omega(x)\, dx = \sum A_i\, \Omega(\xi_i) \; (i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ m),$$

где ξ_i означает все корни уравнения $\Omega_m(x) = 0$ и

$$A_i = \frac{\psi_m(\xi_i)}{\Omega'_m(\xi_i)}.$$

С другой стороны, не трудно убедиться, что для всех значений x, лежащих в промежутках от $-g$ до c и от ∂ до g, со включением пределов $\mp g$, функция $\Omega(t)$, оставаясь числом положительным, не превосходит единицы; ибо при таких значениях x имеем

$$t = (x - c)(\partial - x) < 0, \; -t < h, \; \frac{2t + h}{h} < 1, \; \frac{2t + h}{h} > -1.$$

А для значений x, лежащих между c и ∂, получаем

$$\Omega(t) =$$
$$=\left\{\frac{\left(\frac{2t+h}{h}+\sqrt{\left(\frac{2t+h}{h}\right)^2-1}\right)^{\mu}+\left(\frac{2t+h}{h}-\sqrt{\left(\frac{2t+h}{h}\right)^2-1}\right)^{\mu}}{2}\right\}^2,$$
$$t \geqq 0,\ \frac{2t+h}{h} \geqq 1,\ \sqrt{\left(\frac{2t+h}{h}\right)^2-1} > 2\sqrt{\frac{t}{h}}$$

и затем

$$\Omega(t) > \left\{\frac{\left(1+2\sqrt{\frac{t}{h}}\right)^{\mu}+\left(1-2\sqrt{\frac{t}{h}}\right)^{\mu}}{2}\right\}^2 >$$
$$> \left(1+2\mu(\mu-1)\frac{t}{h}\right)^2 > 4\mu(\mu-1)\frac{t}{h}.$$

Следовательно, если допустим, что между c и ∂ нет ни одного корня уравнения, то придем к таким неравенствам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\Omega(t)\,dx > \int_{c}^{\partial} f(x)\,\Omega(t)\,dx >$$
$$> \frac{4\mu(\mu-1)}{(g+|c|)(g+|d|)}\int_{c}^{\partial}(x-c)(\partial-x)f(x)\,dx$$

и

$$\sum A_i\,\Omega(\xi_i) < \sum A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

откуда вытекает следующее неравенство

$$\int_{c}^{\partial}(x-c)(\partial-x)f(x)\,dx < \frac{(g+|c|)(g+|d|)}{4\mu(\mu-1)}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

правая часть которого, при беспредельном возрастании m, должна стремиться к пределу 0 в силу условия

$$\text{пред.}_{m=\infty} \frac{g}{m} = 0.$$

Итак, при соблюдении указанного условия при достаточно больших значениях m в промежутке от c до ∂ должны быть корни уравнения $\omega_m(x) = 0$ или интеграл

$$\int_c^\partial (x-c)(\partial - x) f(x)\, dx$$

должен равняться нулю, что равносильно равенству

$$\int_c^\partial f(x)\, dx = 0.$$

Имея в виду вопросы исчисления вероятностей, остановимся на тесно связанных разложениях в непрерывные дроби интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}|y|^\gamma\, dy}{x-y} \;|-|\; (\gamma + 1 > 0) \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \frac{e^{-y} y^\delta\, dy}{z-y} \;|-|\; (\delta + 1 > 0),$$

где (y) означает абсолютное значение y, при $\delta = \frac{1}{2}(\gamma - 1)$ второй из них сводится к первому подстановкой x^2 на место z и y^2 на место y:

$$x\int_0^\infty \frac{e^{-y} y^\delta\, dy}{z-y} = 2x\int_0^\infty \frac{e^{-y^2} y^{2\delta+1}\, dy}{x^2 - y^2} = \int_0^\infty \left\{\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}\right\} e^{-y^2} y^\gamma\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}|y|^\gamma\, dy}{x-y}, \quad \text{при} \quad z = x^2 \quad \text{и} \quad \delta = \frac{1}{2}(\gamma - 1).$$

Нам важны только знаменатели подходящих дробей; обозначая их символами $\omega_m(x)$ и $\omega^{(m)}(z)$, мы для определения этих целых функций степени m от x и от z получаем такие общие уравнения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}|y|^{\gamma}\omega_m(y)\varphi(y)\,dy=0 \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} e^{-y}y^{\delta}\omega^{(m)}(y)\varphi(y)\,dy=0,$$

где $\varphi(y)$ произвольная целая функция от y степени $m-1$.

В виду четности функции $e^{-y^2}(y)^{\gamma}$, относительно функции $\omega_m(x)$ нетрудно заключить, что она должна быть четною при m четном и нечетною при m нечетном. Что же касается функции $\omega^{(m)}(z)$, то для нее нетрудно установить довольно простую формулу

$$\omega^{(m)}(z)=e^{z}z^{-\delta}\frac{d^m(e^{-z}z^{\delta+m})}{dz^m},$$

как доказывает следующее равенство

$$\int_0^{\infty}\frac{d^m(e^{-y}y^{\delta+m})}{dy^m}\varphi(y)\,dy=\pm\int_0^{\infty}e^{-y}y^{\delta+m}\frac{d^m\varphi(y)}{dy^m}\,dy.$$

Вместе с тем нетрудно убедиться, что при $z=x^2$ функция $\omega^{(m)}(z)$ совпадает с $\omega_{2m}(x)$; ибо для любой целой функции $\varphi(z)$ степени $m-1$ имеем

$$0=\int_0^{\infty}e^{-y}y^{\delta}\omega^{(m)}(y)\varphi(y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}|y|^{2\delta+1}\omega^{(m)}(y^2)\varphi(y^2)\,dy,$$

и для любой нечетной целой функции $\varphi(x)$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}(y)^{2\delta+1}\omega^{(m)}(y^2)\varphi(y)\,dy$$

также равен нулю.

Наконец, для получения $\omega_{2m+1}(x)$ достаточно в выражении

$$(-1)^m e^z z^{-\delta-\frac{1}{2}} \frac{d^m e^{-z} z^{\delta+m+1}}{dz^m},$$

равном произведению $\sqrt{z}$ на некоторую целую функцию $\theta_m(z)$ от z степени m, заменить z на x^2. В самом деле $x\,\theta_m(x^2)$ представляет нечетную целую функцию от x степени $2m+1$, в силу чего интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} |y|^{2\delta+1} y\theta_m(y^2)\,\varphi(y)\,dy$$

приводится к нулю для всякой четной целой функции $\varphi(y)$ и для всякой нечетной целой функции $\varphi(y)$, степень которой не превосходит $2m-1$, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} |y|^{2\delta+1} y\,\theta_m(y^2)\,\varphi(y)\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\delta} \cdot y\,\theta_m(y) \frac{\varphi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}\,dy$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d^m(e^{-y} y^{\delta+m+1})}{dy^m} \cdot \frac{\varphi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}\,dy =$$

$$= \pm \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\delta+m+1} \frac{d^m}{dy^m} \frac{\varphi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}\,dy = 0.$$

Таким образом мы приходим к следующим формулам:

$$\omega_{2m}(x) = (-1)^m e^z z^{-\delta} \frac{d^m e^{-z} z^{\delta+m}}{dz^m} = x^{2m} - \frac{m(m+\delta)}{1} x^{2m-2} +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m+\delta)(m+\delta-1)}{1.2} x^{2m-4} - \ldots,$$

$$\omega_{2m+1}(x) = (-1)^m e^z z^{-\delta-\frac{1}{2}} \frac{d^m e^{-z} z^{\delta+m+1}}{dz^m} = x^{2m+1} -$$

$$-\frac{m(m+\delta+1)}{1} x^{2m-1} + \frac{m(m-1)(m+\delta+1)(m+\delta)}{1.2} x^{2m-3} - \ldots.$$

$$\omega_{2m+2}(x) = (-1)^{m+1} e^z z^{-\delta} \frac{d^{m+1} e^{-z} z^{\delta+m+1}}{dz^{m+1}} =$$

$$= x^{2m+2} - \frac{(m+1)(m+\delta+1)}{1} x^{2m} + \ldots.$$

при $z = x^2$; откуда посредством вычитания выводим

$$\omega_{2m+2}(x) = x\,\omega_{2m+1}(x) - (m+\delta+1)\,\omega_{2m}(x)$$

$$\omega_{2m+1}(x) = x\,\omega_{2m}(x) - m\,\omega_{2m-1}(x)$$

и затем последовательным делением приходим к ряду дробей

$$\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)} = x - \frac{\delta+1}{x}, \quad \frac{\omega_3(x)}{\omega_2(x)} = x - \frac{1}{\omega_2(x) : \omega_1(x)}, \ldots.$$

$$\frac{\omega_{2m+1}(x)}{\omega_{2m}(x)} = x - \frac{m}{\omega_{2m}(x) : \omega_{2m-1}(x)}, \quad \frac{\omega_{2m+2}(x)}{\omega_{2m+1}(x)} =$$

$$= x - \frac{m+\delta+1}{\omega_{2m+1}(x) : \omega_{2m}(x)}, \ldots.$$

Желая установить высший предел числовых значений корней уравнений

$$\omega_2(x) = 0, \ \omega_3(x) = 0, \ldots, \ \omega_{2m+1}(x) = 0, \ \omega_{2m+2}(x) = 0, \ldots,$$

мы можем ограничиться положительными значениями x; ибо

$$\omega_{2m+1}(x) = -\omega_{2m+1}(-x), \quad \omega_{2m+2}(x) = \omega_{2m+2}(-x).$$

Мы докажем, что отношение $\frac{\omega_{2m}(x)}{\omega_{2m-1}(x)}$, равное

$$x - \frac{m+\delta}{\omega_{2m-1}(x) : \omega_{2m-2}(x)}$$

больше $\frac{1}{2}x$ при всех значениях x, превосходящих $\sqrt{4(m+\delta)}$, и отношение $\frac{\omega_{2m+1}(x)}{\omega_{2m}(x)}$ больше $\frac{1}{2}x$, если превосходит наибольшее из чисел $\sqrt{4m}$ и $\sqrt{4(m+\delta)}$, для чего последовательно будем полагать m равным 1, 2, 3, ...

При $m=1$ получаем

$$\frac{\omega_{2m}(x)}{\omega_{2m-1}(x)} = \frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)} = x - \frac{1+\delta}{x} > x - \frac{\frac{1}{4}x^2}{x} > \frac{1}{2}x, \text{ если } x^2 > 4(1+\delta)$$

$$\frac{\omega_{2m+1}(x)}{\omega_{2m}(x)} = \frac{\omega_3(x)}{\omega_2(x)} = x - \frac{1}{\omega_2(x) : \omega_1(x)} > x - \frac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}x,$$

если $x^2 > 4$ и $4(1+\delta)$.

Затем остается выяснить последовательный переход от одного значения m к следующему. Допуская, что только-что высказанное предложение справедливо для некоторого значения m, получаем

$$\frac{\omega_{2m+2}(x)}{\omega_{2m+1}(x)} = x - \frac{m+\delta+1}{\omega_{2m+1}(x) : \omega_{2m}(x)} > x - \frac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}x,$$

если $x^2 > 4(m+\delta+1)$

и

$$\frac{\omega_{2m+3}(x)}{\omega_{2m+2}(x)} = x - \frac{m+1}{\omega_{2m+2}(x) : \omega_{2m+1}(x)} > x - \frac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}x} > \frac{1}{2}x,$$

если $x^2 > 4(m+\delta+1)$ и $4(m+1)$

и таким образом убеждаемся, что оно остается в силе и при увеличении m на единицу. Следовательно, оно справедливо при всех значениях m.

Отсюда следует, что числовая величина корней уравнения $\omega_{2m}(x)=0$ не превосходит $\sqrt{4(m+\delta)}$, а числовая величина корней уравнения $\omega_{2m+1}(x)=0$ не превосходит наибольшего из чисел $\sqrt{4m}$ и $\sqrt{4(m+\delta)}$. А так как оба отношения

$$\frac{\sqrt{4(m+\delta)}}{m} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{4m}}{m}$$

бесконечно малы при бесконечно больших m, то на основании вышеустановленного предложения оба уравнения

$$\omega_{2m}(x)=0 \text{ и } \omega_{2m+1}(x)=0,$$

при достаточно больших m, должны иметь корни в любом данном промежутке. Принимая же во внимание, что корни уравнения $\omega^{(m)}(x)=0$ квадраты корней уравнения $\omega_{2m}(x)=0$, заключаем, что при достаточно больших значениях m они также должны быть в любом данном промежутке. В виду доказанного можно предельной теореме придать более общий вид:

Обобщенная предельная теорема. Если совокупность всех возможных значений некоторой вещественной величины x, вместе с их вероятностями, изменяется так, что для всякого данного целого положительного числа m, не исключая нуля, математическое ожидание x^m стремится к пределу

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}|x|^{\gamma} x^m dx,$$

где

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}|x|^{\gamma} dx = 1$$

или, если x получает только положительные значения, к пределу

$$B\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{\delta+m} dx;$$

где

$$B\int_0^\infty e^{-x}x^\beta\,dx=1$$

что вероятность выполнения неравенств

$$t_1<x<t_2$$

с присоединением или без присоединения крайних значений $x=t_1$ *и* $x=t_2$ *должна стремиться соответственно к пределу*

$$A\int_{t_1}^{t_2}e^{-x^2}|x|^\gamma\,dx$$

в первом случае, или к пределу

$$B\int_{t}^{t_2}e^{-x}x^\beta\,dx$$

во втором случае, каковы бы ни были данные числа t_1, t_2, *которые во втором случае должны быть, конечно, положительными.*

ЛИТЕРАТУРА.

Stieltjes, T. J. Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques (Ann. de l'Ec. nor. 3 sér. I, 1884).

Possé, C. Sur quelques applications des fractions continues algébriques. St.-Pétersbourg, 1886.

Stieltjes, T. J. Recherches sur les fractions continues (Ann. de la Fac. de Toulouse VII). Paris, 1902.

А. Марков. Исчисление конечных разностей. 2-ое изд. 1911.

Теорема о пределе вероятности для случаев академика А. М. Ляпунова.

§ 59 Приближенное выражение вероятности в виде интеграла, указанное нами в § 20, было известно давно и, по справедливости, должно быть связано с именем Лапласа.

Но теорема, что этот интеграл представляет предел вероятности, была, за исключением случая Бернулли *, впервые высказана и доказана для определенных случаев Чебышевым в мемуаре ** „Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités".

В этом замечательном мемуаре, ясно показавшем значение метода математических ожиданий, оставались некоторые пробелы как в формулировке, так и в доказательстве теоремы; они пополнены мною в статьях „Закон больших чисел и способ наименьших квадратов" *** и „Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}=0$".

Таким образом были установлены условия, при соблюдении которых теорема о пределе вероятности несомненно должна иметь место; этих условий достаточно для существования теоремы, и они являлись необходимыми, чтобы можно было придти к ней путем известных простых рассуждений.

Впоследствии академик А. М. Ляпунов поставил себе целью придти к теореме о пределе вероятности иным путем, дополняя надлежащим образом обычный вывод приближенной формулы, и вместе с тем установить эту теорему для возможно большего числа случаев, что и сделано им в мемуарах **** „Sur une proposition de la théorie des probabilités" и „Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité".

* Для этого случая доказательство ее, названное мною доказательством Лапласа, было уже намечено Моавром в Miscellanea analytica (1730 г.).

** Сочинения П. Л. Чебышева. Том II, 481—491.

*** Изв. Физ.-мат. общества при Казанском универ. 2 серия. Т. VIII, 1898.

**** Bull. de l'Acad. des sciences de St.-Pétersb. V série, T. XIII. Mem. de l'Acad de St.-Pétersb VIII série, T. XI

Общность выводов в последней работе А. М. Ляпунова далеко превзошла ту, которая была достигнута методом математических ожиданий. Достигнуть столь общих выводов, методом математических ожиданий казалось даже невозможным, ибо он основан на рассмотрении таких математических ожиданий, в неограниченном числе, существование которых в случаях А. М. Ляпунова не предполагается.

Для восстановления поколебленного таким образом значения метода математических ожиданий необходимо было выяснить, что вышеупомянутыми работами он далеко не исчерпан до конца. Об этой задаче я думал довольно долго, и мне удалось решить ее, можно сказать, в двух направлениях. С одной стороны, я нашел, как надо дополнить метод математических ожиданий, чтобы охватить все случаи А. М. Ляпунова; а с другой стороны, ряд моих работ показал, что тот же метод дает довольно легкое средство для распространения предельной теоремы на связанные величины. Из последних работ я изложу здесь, в измененном виде, только одну; но сначала мы займемся доказательством предельной теоремы для случаев А. М. Ляпунова.

Пусть будет

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_k, \ldots, Z_n, \ldots$$

неограниченный ряд независимых величин; пусть, вместе с тем, при всяком k, существуют

$$a_k = \text{м. о. } Z_k, \quad b_k = \text{м. о. } (Z_k - a_k)^2$$

и

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о. } |Z_k - a_k|^{2+\delta},$$

где δ некоторое положительное число, а символ $|V|$ для любого количества V означает абсолютную его величину.

Положим, наконец, что отношение

$$\frac{b_1^{(2+\delta)} + b_2^{(2+\delta)} + \ldots + b_n^{(2+\delta)}}{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

приближается к пределу нуль, когда n беспредельно возрастает.

Таковы условия А. М. Ляпунова. Нам надо доказать, что при соблюдении их оправдывается теорема о пределе вероятности: *для любых дан-*

ных чисел t_1 *и* t_2, *из которых второе больше первого, вероятность неравенств*

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{\sqrt{2(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}} < t_2$$

стремится к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

когда n возрастает беспредельно.

Для этой цели введем вспомогательное число N, которое будем увеличивать беспредельно вместе с n и совокупность всех возможных значений каждой разности

$$Z_k - a_k$$

разобьем на две совокупности, одну из которых пусть составят числа X_k, лежащие между $-N$ и $+N$, а другую — числа Y_k, лежащие вне этих пределов Предполагая, что

$$Y_k = 0 \quad \text{при} \quad -N \leqq Z_k - a_k \leqq +N$$

и

$$X_k = 0 \quad \text{при} \quad Z_k - a_k < -N \quad \text{и при} \quad Z_k - a_k > N,$$

мы можем положить

$$Z_k - a_k = X_k + Y_k,$$

вместе с тем нетрудно установить равенства

$$\text{м. о. } (Z_k - a_k) = 0 = \text{м. о. } X_k + \text{м. о. } Y_k,$$

$$b_k = \text{м. о. } X_k^2 + \text{м. о. } Y_k^2,$$

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о. } |X_k|^{2+\delta} + \text{м. о. } |Y_k|^{2+\delta}.$$

Математических ожиданий других степеней

$$Z_k - a_k, \quad |Z_k - a_k|, \quad Y_k \text{ и } |Y_k|,$$

при условиях А. М. Ляпунова, мы не должны рассматривать. Но как бы велико ни было введенное нами число N, мы можем рассматривать математические ожидания любых положительных степеней X_k и $|X_k|$. Введем следующие обозначения

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n, \quad b_1^{(2+\delta)} + b_2^{(2+\delta)} + \ldots + b_n^{(2+\delta)} = B'_n$$

$$|\text{м. о. } X_k| = |\text{м. о. } Y_k| = c_k^{(1)}, \quad |\text{м. о. } X_k^{\alpha}| = c_k^{(\alpha)}$$

при $\alpha = 2, 3, 4, \ldots$ Вместе с тем обозначим символом p_k вероятность равенства

$$Z_k - a_k = X_k$$

равносильного неравенствам

$$-N \leqq Z_k - a_k \leqq N,$$

и символом q_k вероятность противоположного равенства

$$Z_k - a_k = Y_k, \quad \text{при} \quad Y_k \text{ не } = 0,$$

иначе сказать, вероятность неравенства

$$(Z_k - a_k)^2 > N^2;$$

так что

$$p_k + q_k = 1.$$

Вспомогательное число N, возрастающее беспредельно вместе с n, мы подчиним двум условиям. И прежде всего постараемся распорядиться числом N так, чтобы разность между вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{2\sqrt{B_n}} < t_2$$

и вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{2\sqrt{B_n}} < t_2$$

приближалась к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$.

Так как первые неравенства равносильны вторым во всех случаях, когда

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n = 0,$$

то числовая величина разности между вероятностями их не может превзойти вероятности нарушения, по крайней мере, одного из равенств

$$Y_1 = 0,\ Y_2 = 0, \ldots,\ Y_n = 0,$$

а эта последняя вероятность, как нетрудно видеть, не больше суммы

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n.$$

Обращаясь к сумме

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n$$

и принимая во внимание равенство

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о.} \left| X_k \right|^{2+\delta} + \text{м. о} \left| Y_k \right|^{2+\delta},$$

устанавливаем неравенство

$$q_k < \frac{b_k^{(2+\delta)}}{N^{2+\delta}}$$

и отсюда выводим

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n < \frac{B'_n}{N^{2+\delta}}.$$

Сообразно этому, мы подчиним число N условию, чтобы дробь

$$\frac{B'_n}{N^{2+\delta}}$$

приближалась к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$. При соблюдении такого условия разность между вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

и вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

должна, согласно вышеприведенным объяснениям, приближаться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$; и, следовательно, при разыскании предела вероятности первых неравенств мы можем заменить их вторыми.

Обращаясь к разысканию предела вероятности этих вторых неравенств

$$t_1 < \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2,$$

мы подчиним N другому условию, при соблюдении которого, вместе с первым, нетрудно для всякого положительного числа m установить формулу

$$\underset{n=\infty}{\text{пред. м. о}} \left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^m \, dt,$$

что, в силу заключительной теоремы предыдущей статьи, немедленно приведет нас к цели.

При рассмотрении математического ожидания степени

$$\left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m$$

нам придется повторить вычисления главы III, § 21.

Согласно обобщенной формуле Ньютона имеем

$$\left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \cdot \frac{S\alpha, \beta \ldots, \gamma}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}},$$

где α, β, . . . , λ целые положительные числа (не нули), удовлетворяющие условию

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=m$$

и $S^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ означает симметрическую функцию величин

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,$$

которая определяется одним ее членом

$$X_1^{\alpha}\ X_2^{\beta},\ \ldots,\ X_i^{\lambda}.$$

Отсюда, в силу теорем о математических ожиданиях сумм и произведений, выводим

$$\text{м. о.}\left\{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m=\sum\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\ \frac{G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}}{(\sqrt{2B_n})^m},$$

где $G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ означает математическое ожидание суммы $S^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ и получается из нее через замену степеней величин

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$$

математическими ожиданиями тех же степеней

Относительно выражения

$$\frac{G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}}{(\sqrt{2B_n})^m}$$

мы докажем, что при надлежащем выборе числа N оно будет приближаться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$, для всякой возможной системы чисел α, β, ... λ, кроме одной

$$\alpha=\beta=\ldots=\lambda=2,$$

которая возможна только при m четном

Для намеченной цели обратим внимание на простое неравенство

$$\frac{|G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}|}{B_n^{\frac{m}{2}}}<\frac{c_1^{(\alpha)}+\ldots+c_n^{(\alpha)}}{B_n^{\frac{\alpha}{2}}}\cdots\frac{c_1^{(\lambda)}+\ldots+c_n^{(\lambda)}}{B_n^{\frac{\lambda}{2}}},$$

правая часть которого составлена из множителей вида

$$\frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \ldots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}},$$

где e может получать значения 1, 2, 3, . . .

В силу приведенного неравенства можно утверждать, что для всякой совокупности чисел

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda,$$

не состоящей из одних только двоек, отношение

$$\frac{G^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}}{B_n^{\frac{m}{2}}}$$

будет, наверно, стремиться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$, если мы распорядимся числом N так, чтобы было

$$\text{пред.}_{n \to \infty} \frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \ldots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}} = 0$$

при

$$e = 1, 3, 4, 5, \ldots$$

Относительно выражения

$$\frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \ldots + c_n^{(2)}}{B_n}$$

легко убедиться, что при значениях N, удовлетворяющих выше установленному условию, оно должно стремиться к пределу 1, когда n возрастает беспредельно. В самом деле, сопоставляя равенство

$$c_k^{(2)} + \text{м. о. } Y_k^2 = b_k$$

с неравенством

$$\text{м. о. } Y_k^2 < \frac{b_k^{(2+\delta)}}{N^\delta},$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, находим

$$b_k > c_k^{(2)} > b_k - \frac{b_k^{(2+\delta)}}{N^\delta},$$

откуда посредством сложения выводим

$$1 > \frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \ldots + c_n^{(2)}}{B_n} > 1 - \frac{B'_n}{B_n N^\delta}.$$

Что же касается выражения

$$\frac{B'_n}{B_n N^\delta},$$

то его можно представить в виде произведения двух множителей

$$\left(\frac{B'_n}{N^{2+\delta}}\right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \text{ и } \left(\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}}\right)^{\frac{2}{2+\delta}},$$

которые при наших условиях оба стремятся к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$

Нетрудно также убедиться, что условия, которым мы подчинили уже число N, достаточны для того, чтобы отношение

$$\frac{c_1^{(1)} + c_2^{(1)} + \ldots + c_n^{(1)}}{B_n^{\frac{1}{2}}}$$

приближалось к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$: это вытекает из простых неравенств

$$c_k^{(1)} < \text{м. о. } |Y_k|$$

и

$$\left\{\sum \text{м. о. } |Y|\right\}^2 < (q_1 + q_2 + \ldots + q_n) \sum \text{м. о. } Y_k^2 < B_n \sum q_k$$

Обращаясь к отношениям

$$\frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \ldots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}}$$

при $e = 3, 4, 5, \ldots$, принимаем во внимание неравенство

$$c_k^{(e)} < N^{e-2} b_k$$

и на основании его находим

$$\frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \ldots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}} < \left(\frac{N^2}{B_n}\right)^{\frac{e-2}{2}}.$$

Отсюда следует, что все рассматриваемые нами отношения

$$\frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \ldots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}}$$

будут наверно стремиться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$, если число N мы подчиним условию, чтобы отношение

$$\frac{N^2}{B_n}$$

стремилось к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$. Это новое условие может быть выполнено одновременно с ранее установленным, которое выражается равенством

$$\underset{n=\infty}{\text{пред}} \frac{B'_n}{N^{2+\delta}} = 0.$$

Действительно, если положим

$$N = (B_n B'_n)^{\frac{1}{4+\delta}},$$

то обе дроби

$$\frac{N^2}{B_n} \text{ и } \frac{B'_n}{N^{2+\delta}}$$

приведутся к одному и тому же выражению

$$\left(\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}}\right)^{\frac{2}{4+\delta}},$$

которое, в силу одного из принятых нами условий А. М Ляпунова, должно стремиться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$

Итак, положив

$$N = (B_n B'_n)^{\frac{1}{4+\delta}},$$

мы можем утверждать, что разность между вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 + \quad + Z_n - a_1 - a_2 - \ . \ . \ - a_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

и вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

будет приближаться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$, что отношение

$$\frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \ldots + c_n^{(2)}}{B_n}$$

будет в то же время приближаться к пределу единица и что, наконец, в сумме

$$\sum \frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \cdot \frac{G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}},$$

равной математическому ожиданию

$$\left\{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m,$$

будут стремиться к пределу нуль, вместе с $\frac{1}{n}$, все слагаемые ее кроме одного, которое определяется равенствами

$$\alpha=\beta=\ldots=\lambda=2$$

и входит в состав этой суммы только при m четном.

Принимая же во внимание простое неравенство

$$(c_k^{(2)})^\alpha<N^{2\alpha-2}\,c_k^{(2)}$$

при

$$\alpha=2,\ 3,\ 4,\ldots,$$

легко можем установить неравенство

$$\frac{(c_1^{(2)})^\alpha+\ldots+(c_n^{(2)})^\alpha}{B_n{}^\alpha}<\left(\frac{N^2}{B_n}\right)^{\alpha-1},$$

которое показывает, что при наших условиях приближаются к пределу нуль, вместе с $\frac{1}{n}$, и все отношения вида

$$\frac{(c_1^{(2)})^\alpha+\ldots+(c_n^{(2)})^\alpha}{B_n{}^\alpha}.$$

Отсюда следует, что при указанных нами условиях математическое ожидание любой положительной нечетной степени отношения

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{2B_n}}$$

должно приближаться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$.

Если же m число четное, то к пределу нуль должны стремиться две разности *

$$\text{м. о.}\left\{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^n-\frac{m!}{2^{\frac{m}{2}}}\cdot\frac{G^{2,2,\ldots,2}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}}$$

и

$$\left(\frac{c_1^{(2)}+c_2^{(2)}+\ldots+c_n^{(2)}}{2B_n}\right)^{\frac{m}{2}}-\left(\frac{m}{2}!\right)\frac{G^{2,2,\ldots,2}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}}.$$

для второй разности это заключение основано на тождестве

$$\left\{\frac{c_1^{(2)}+c_2^{(2)}+\ldots+c_n^{(2)}}{2B_n}\right\}^{\frac{m}{2}}=\sum\frac{\frac{m}{2}!}{\mu!\,\nu!\ldots\omega!}\;\frac{H^{\mu,\nu,\ldots,\omega}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}}$$

и на неравенстве

$$H^{\mu,\nu,\ldots,\omega}<\left\{(c_1^{(2)})^{\mu}+\ldots+(c_n^{(2)})^{\mu}\right\}\cdots\left\{(c_1^{(2)})^{\omega}+\ldots+(c_n^{(2)})^{\omega}\right\},$$

где $H^{\mu,\nu,\ldots,\omega}$ означает симметрическую функцию величин $c_1^{(2)}, c_2^{(2)},\ldots, c_n^{(2)}$, которая определяется одним ее членом

$$(c_1^{(2)})^{\mu}(c_2^{(2)})^{\nu}\ldots(c_j^{(2)})^{\omega}.$$

Итак, при m нечетном

$$\underset{n=\infty}{\text{пред. м. о.}}\left\{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m=0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}t^m\,dt,$$

а при m четном

$$\underset{n=\infty}{\text{пред. м. о.}}\left\{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m=\frac{m!}{2^m\left(\frac{m}{2}!\right)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}t^m\,dt,$$

что немедленно доставляет нам вышеприведенную предельную теорему.

* Глава III, § 21

Подобным же способом можно установить ее и в некоторых других случаях.

Заметим, по примеру А. М. Ляпунова, что его условия выполняются, если числовые величины всех разностей $Z_k - a_k$ не превосходят одного и того же неизменного числа и, вместе с тем, сумма

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

обозначенная символом B_n, возрастает беспредельно вместе с n. Действительно, если при всех k выполняются неравенства

$$-L < Z_k - a_k < L,$$

где L постоянное положительное число, то для любого положительного числа δ имеем

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о.} \left| Z_k - a_k \right|^{2+\delta} < L^\delta b_k$$

и потому

$$\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} < \frac{L^\delta}{B_n^{\frac{\delta}{2}}},$$

откуда тотчас следует

$$\text{пред.}_{n=\infty} \frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} = 0,$$

если только B_n возрастает беспредельно вместе с n.

И не трудно видеть, что вышеизложенное доказательство теоремы о пределе вероятности, для этих последних случаев, значительно упрощается, так как исчезает надобность вводить вспомогательное число N и разбивать все значения $Z_k - a_k$ на две совокупности.

Если же числовые величины разностей

$$Z_k - a_k$$

могут быть произвольно большими, то для существования теоремы о пределе вероятностей недостаточно одного беспредельного возрастания суммы

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

как показывает мой пример.

Пример. Пусть Z_k, при достаточно больших значениях k, может иметь три значения

$$0,\ (\log k)^{\mu},\ -(\log k)^{\mu},$$

вероятности которых соответственно равны

$$1 - \frac{2}{k(\lg k)^{\nu}},\quad \frac{1}{k(\lg k)^{\nu}},\quad \frac{1}{k(\lg k)^{\nu}},$$

где μ и ν данные положительные числа и

$$2\mu - \nu + 1 > 0;$$

для прочих же величин k пусть $Z_k = 0$, так что в сумме

$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

отпадает определенное число k_0 первых членов.

В этом случае имеем:

$$a_k = 0 \text{ при всех значениях } k$$

$$\text{м. о. } |Z_k|^{\iota} = 0 \quad \text{при} \quad k \leqq k_0$$

$$\text{м. о. } Z_k^2 = b_k = \frac{2(\log k)^{2\mu-\nu}}{k} \quad \text{при} \quad k > k_0$$

и вообще

$$\text{м. о. } |Z_k|^{\iota} = \frac{2(\log k)^{\iota\mu-\nu}}{k} \quad \text{при} \quad k > k_0,$$

для любого положительного числа ι.

Следовательно, для нашего примера

$$B_n = \frac{2\{\log(k_0+1)\}^{2\mu-\nu}}{k_0+1} + \ldots + \frac{2\{\log n\}^{2\mu-\nu}}{n}$$

и

$$B'_n = \frac{2\{\log(k_0+1)\}^{(2+\delta)\mu-\nu}}{k_0+1} + \ldots + \frac{2\{\log n\}^{(2+\delta)\mu-\nu}}{n}.$$

Сравнивая последние суммы с соответствующими интегралами, легко усматриваем, что отношения

$$\frac{B_n}{(\log n)^{2\mu-\nu+1}} \quad \text{и} \quad \frac{B'_n}{(\log n)^{(2+\delta)\mu-\nu+1}}$$

не могут возрастать беспредельно и не могут становиться произвольно малыми. Поэтому и произведение

$$\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} \cdot (\log n)^{(1-\nu)\frac{\delta}{2}},$$

равное

$$\frac{B'_n}{(\log n)^{(2+\delta)\mu-\nu+1}} : \left(\frac{B_n}{(\log n)^{2\mu-\nu+1}}\right)^{1+\frac{\delta}{2}},$$

также не может ни беспредельно возрастать, ни становиться произвольно малым.

Отсюда тотчас заключаем, что при $\nu < 1$ условие А. М. Ляпунова

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \left(\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}}\right) = 0$$

выполнено и, следовательно, теорема о пределе вероятности имеет место.

Напротив, при $\nu \geqq 1$ условие А. М. Ляпунова, очевидно, не выполняется, что, однако, не доказывает еще неприменимости к данному случаю предельной теоремы, ибо это условие установлено как достаточное, но не как необходимое.

При $\nu > 1$ и достаточно больших величинах k_0, мы легко можем обнаружить эту неприменимость, рассматривая вероятность, что сумма

$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

точно равна нулю Если бы теорема о пределе вероятности, в данном случае, имела место, то вероятность равенства

$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0$$

приближалась бы к пределу нуль, при беспредельном возрастании n.

Между тем нетрудно видеть, что вероятность нарушения этого равенства не больше суммы вероятностей равенств

$$Z_{k_0+1} = \pm(\log(k_0+1))^\mu, \ldots, Z_n = \pm(\log n)^\mu,$$

которая составляет часть бесконечной суммы

$$\frac{2}{(k_0+1)\{\log(k_0+1)\}^\nu} + \ldots + \frac{2}{(k_0+i)\{\log(k_0+i)\}^\nu}, \ldots$$

и потому должна оставаться меньше

$$\frac{2}{(\nu-1)(\log k_0)^{\nu-1}},$$

как бы велико ни было число n. Поэтому, взяв k_0 настолько большим, чтобы дробь

$$\frac{2}{(\nu-1)(\log k_0)^{\nu-1}}$$

была меньше единицы, мы можем утверждать, что вероятность равенства

$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0$$

постоянно остается больше положительного числа

$$1 - \frac{2}{(\nu-1)(\log k_0)^{\nu-1}}$$

и, следовательно, не стремится к пределу нуль.

Например, при

$$\nu = 2 \quad \text{и} \quad k_0 = 10$$

вероятность равенства

$$Z_1 + Z + \ldots + Z_n = 0$$

постоянно больше

$$1 - \frac{2}{\log 10} > \frac{1}{8}.$$

Таким образом неприменимость теоремы о пределе вероятности к указанным сейчас случаям, при $\nu > 1$, выяснена, при чем в силу неравенства

$$2\mu - \nu + 1 > 0$$

сумма

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n$$

возрастает у нас беспредельно вместе с n.

Замечательный случай испытаний, связанных в цепь.

§ 60. В этой статье мы будем рассматривать неограниченный ряд последовательных испытаний, которые отметим, по порядку, нумерами

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k,\ k+1,\ \ldots$$

Наши испытания будут связаны, относительно некоторого события E, в *простую цепь*, которая немедленно разделяется на две части, как только для одного из испытаний установлено, появилось ли при нем событие E или нет: следующие за ним испытания становятся независимыми от предшествующих ему.

Останавливаясь здесь только на замечательном частном случае такой цепи, который соответствует случаю Бернулли для независимых испытаний, мы будем считать установленными для всей цепи одни и те же два числа

$$p_1,\ p_2,$$

вместо одного числа p случая Бернулли.

Число p_1 означает вероятность события E при $k+1^{\text{м}}$ испытании, если дано, что E появилось при $k^{\text{м}}$ испытании, а результаты следующих за ним испытаний остаются неопределенными. Число p_2 означает также вероятность события E при $k+1^{\text{м}}$ испытании, пока результаты испытаний с нумерами

$$k+1,\ k+2,\ k+3,\ \ldots$$

остаются неопределенными, но только при задании, что $k^{\text{ое}}$ испытание привело к появлению не события E, а противоположного ему события F. Согласно вышеприведенному объяснению связи испытаний в *простую цепь*, указанные вероятности события E, при $k+1^{\text{м}}$ испытании, устанавливаются совершенно независимо от результатов первых $k-1$ испытаний и, при полном или частном выяснении этих результатов, должны оставаться неизменными.

Чтобы сообщить нашим выводам полную определенность, следует ввести еще число p', представляющее вероятность события E при первом испытании, пока их результаты, вообще, остаются неопределенными. Однако в окончательных наших выводах последнее число не играет никакой роли.

Вместе с числами

$$p_1,\ p_2,\ p'$$

мы введем в наши вычисления, для сокращения письма и для симметрии формул, их дополнения до единицы

$$q_1=1-p_1,\ q_2=1-p_2,\ q'=1-p',$$

представляющие вероятности события F, противоположного E.

Наше исследование начнем с рассмотрения ряда чисел

$$p',\ p'',\ p''',\ \ldots,\ p^{(k)},\ p^{(k+1)},\ \ldots,$$

соответственно представляющих вероятности события E при каждом из испытаний

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k,\ k+1,\ \ldots,$$

пока результаты прочих из них остаются неопределенными.

На основании теорем сложения и умножения вероятностей находим

$$p''=p'p_1+(1-p')p_2,$$

$$p'''=p''p_1+(1-p'')p_2$$

и вообще

$$p^{(k+1)}=p^{(k)}p_1+(1-p^{(k)})p_2.$$

Этому общему уравнению можно придать такой вид

$$p^{(k+1)}-p=\delta\,(p^{(k)}-p),$$

если δ и p определить равенствами

$$\delta = p_1 - p_2, \quad p_2 = p\,(1 - \delta),$$

при чем мы исключаем случай $\delta = 1$, не представляющий интереса. Не представляет интереса и случай $\delta = -1$, который мы тоже исключим; так что у нас будет

$$-1 < \delta < +1.$$

Введя числа

$$p, \; q = 1 - p \text{ и } \delta,$$

мы можем выразить посредством их числа p_1, p_2, q_1, q_2 простыми формулами

$$(1) \qquad \begin{aligned} p_1 &= p + \delta q, \quad q_1 = q - \delta q, \\ p_2 &= p - \delta p, \quad q_2 = q + \delta p, \end{aligned}$$

а из уравнения, связывающего $p^{(k+1)}$ с $p^{(k)}$, находим общую формулу

$$p^{(k)} = p + (p' - p)\,\delta^{k-1},$$

откуда видно, что p служит пределом, к которому стремится $p^{(k)}$, когда k возрастает беспредельно.

Переходим к рассмотрению вероятностей различных предположений о числе появлений E при n последовательных испытаниях с нумерами

$$1, \; 2, \; 3, \; \ldots, \; n.$$

При одном первом испытании это число, которое вообще мы будем обозначать буквою m, может иметь два значения

$$1 \text{ и } 0,$$

вероятности которых, согласно вышеустановленному, равны

$$p' \text{ и } q'.$$

При $n=2$ имеем три предположения

$$m=2,\ m=1,\ m=0,$$

и их вероятности, соответственно, равны

$$p'p_1,\ p'q_1+q'p_2,\ q'q_2.$$

При $n=3$ для четырех возможных случаев

$$m=3,\ m=2,\ m=1,\ m=0$$

находим такие вероятности

$$p'p_1p_1,\ p'p_1q_1+p'q_1p_2+q'p_2p_1,\ p'q_1q_2+q'p_2q_1+q'q_2p_2,\ q'q_2q_2.$$

Для общих выводов введем новые обозначения. Пусть

$$P_{m,k}$$

означает вероятность, что в первые k испытаний событие E появится ровно m раз; пусть далее

$$A_{m,k} \text{ и } B_{m,k}$$

означают такие же вероятности, как и $P_{m,k}$, но при добавочном требовании, которое для $A_{m,k}$ состоит в появлении E при $k^{\text{м}}$ испытании, а для $B_{m,k}$ — в появлении F при $k^{\text{м}}$ испытании; так что

$$P_{m,k}=A_{m,k}+B_{m,k}. \tag{2}$$

Введем затем произвольное число ξ и станем рассматривать его функции трех видов

$$\varphi_k=\sum A_{m,k}\xi^m,\ \psi_k=\sum B_{m,k}\xi^m,\ \omega_k=\sum P_{m,k}\xi^m, \tag{3}$$

которые очевидно связаны простою формулою

$$\omega_k=\varphi_k+\psi_k. \tag{4}$$

При таких обозначениях, переходя от k испытаний к $k+1$ испытаниям, мы можем установить, на основании теорем сложения и умножения вероятностей, следующие формулы

$$(5)\qquad \begin{aligned} A_{m,k+1} &= p_1 A_{m-1,k} + p_2 B_{m-1,k}, \\ B_{m,k+1} &= q_1 A_{m,k} + q_2 B_{m,k}, \end{aligned}$$

в силу которых имеем

$$(6)\qquad \begin{aligned} \varphi_{k+1} &= p_1 \xi \varphi_k + p_2 \xi \psi_k, \\ \psi_{k+1} &= q_1 \varphi_k + q_2 \psi_k. \end{aligned}$$

Из уравнений (6), посредством исключения функций ψ или φ, нетрудно получить для функций обоих видов совершенно одинаковые уравнения

$$\varphi_{k+2} - (p_1 \xi + q_2) \varphi_{k+1} + (p_1 - p_2) \xi \varphi_k = 0,$$

$$\psi_{k+2} - (p_1 \xi + q_2) \psi_{k+1} + (p_1 - p_2) \xi \psi_k = 0,$$

из которых посредством сложения выводим такое же уравнение и для функций третьего вида

$$(7)\qquad \omega_{k+2} - (p_1 \xi + q_2) \omega_{k+1} + (p_1 - p_2) \xi \omega_k = 0.$$

Следовательно, если мы введем новое произвольное число t и положим

$$(8)\qquad \Omega(\xi, t) = \omega_0 + \omega_1 t + \omega_2 t^2 + \omega_3 t^3 + \ldots,$$

определяя ω_0 равенством

$$(9)\qquad \omega_2 - (p_1 \xi + q_2) \omega_1 + (p_1 - p_2) \xi \omega_0 = 0,$$

то должно быть

$$\Omega(\xi, t) = \frac{L_0 + L_1 t}{1 - (p_1 \xi + q_2) t + (p_1 - p_2) \xi t^2},$$

$$L_0 = \omega_0, \quad L_1 = \omega_1 - (p_1 \xi + q_2) \omega_0.$$

С другой стороны, имеем

$$\omega_1 = p'\xi + q', \quad \omega_2 = p'p_1\xi^2 + (p'q_1 + q'p_2)\xi + q'q_2$$

и из уравнения (9) находим

$$\omega_0 = 1,$$

откуда выводим

$$L_0 = 1, \quad L_1 = (p' - p_1)\xi + q' - q_2.$$

Подставляя эти величины L_0 и L_1 в указанное выражение $\Omega(\xi, t)$ и принимая во внимание формулы (1), мы приходим, наконец, к равенству

$$\Omega(\xi, t) = \frac{1 + \{(p' - p_1)\xi + q' - q_2\}\,t}{1 - \{(p + \delta q)\xi + q + \delta p\}\,t + \delta\xi t^2}, \tag{10}$$

которое может служить для определения всех функций ω_n.

Мы им воспользуемся для вывода теоремы о пределе вероятностей, соответствующей нашей цепи испытаний.

Наш вывод начнем с рассмотрения математических ожиданий различных целых положительных степеней разности

$$m - np,$$

где m означает число появлений события E при n испытаниях, отмеченных нумерами

$$1, 2, 3, \ldots, n.$$

Нетрудно заметить, что математическое ожидание выражения $(m - np)^i$, равное сумме

$$\sum_m P_{m,n}(m - np)^i = P_{0,n}(-np)^i + P_{1,n}(1 - np)^i + \ldots,$$

можно, для любого целого положительного числа i, получить следующим образом, если имеем ω_n: вводим новое число u, связанное с ξ уравнением

$$\xi = e^u,$$

составляем производную

$$\frac{d^i\left(e^{-npu}\,\omega_n\right)}{du^i}$$

и, наконец, положив в ней $u=0$, получаем в результате рассматриваемое математическое ожидание $(m-np)^i$.

Отсюда, принимая во внимание формулу (8), которая связывает функции ω_n с $\Omega(\xi, t)$, заключаем, что

$$\text{м. о.}\,(m-np)^i$$

можно определить как коэффициент при t^n в разложении, по возрастающим степеням t, следующего выражения

$$\left\{\frac{d^i\,\Omega\left(e^u,\, te^{-pu}\right)}{du^i}\right\}_{u=0},$$

к исследованию которого мы и приступим.

В силу формулы (10) это выражение приводится к рациональной функции числа t, знаменатель которой не может содержать иных простых множителей, кроме делителей выражения

$$\left\{1-\left[(p+\delta q)\xi+q+\delta p\right]t+\delta\xi t^2\right\}_{\xi=1},$$

которое равно

$$1-(1+\delta)t+\delta t^2$$

и разлагается на два множителя

$$(1-t)(1-\delta t).$$

Следовательно, наша рациональная функция числа t разлагается на простейшие дроби двух видов

$$\frac{G}{(1-t)^j} \quad \text{и} \quad \frac{H}{(1-\delta t)^l}.$$

Для дробей первого вида имеем

$$\frac{G}{(1-t)^j} = D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + \ldots + D_n t^n + \ldots,$$

(11)

$$D_n = G\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+j-1)}{1.2.3\ldots(j-1)}$$

и потому

(12) $$\text{пред.}_{n=\infty}\left\{\frac{D_n}{n^{j-1}}\right\} = \frac{G}{1.2\ldots(j-1)}, \quad \text{пред.}_{n=\infty}\left\{\frac{D_n}{n^{j-1+\varepsilon}}\right\} = 0,$$

где ε — любое неизменное положительное число; для дробей второго вида имеем

$$\frac{H}{(1-\delta t)^l} = R_0 + R_1 t + R_2 t^2 + \ldots + R_n t^n + \ldots,$$

(13)

$$R_n = H\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+l-1)}{1.2.3\ldots(l-1)}\delta^n$$

и потому

(14) $$\text{пред.}_{n=\infty} R_n = 0.$$

Мы имеем в виду доказать, что при беспредельном возрастании числа n отношение

$$\frac{\text{м. о.}(m-np)^i}{n^{\frac{i}{2}}}$$

стремится к пределу, равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} C^{\frac{i}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^i \, dt,$$

где

$$C = 2pq\frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

Для этой цели нам послужит намеченное разложение рациональной функции

$$\left\{\frac{d^i\,\Omega\,(e^u,\; te^{-pu})}{du^i}\right\}_{u=0}$$

на простейшие дроби и указанные разложения последних в ряды по возрастающим степеням t.

Из формулы (14) ясно, что дробями вида

$$\frac{H}{(1-\delta t)^l}$$

нам не надо заниматься, ибо они дают в выражении

$$\frac{\text{м. о.}\,(m-np)^i}{n^{\frac{i}{2}}},$$

при переходе к пределу, исчезающие члены.

В силу же формул (12) отпадают и все дроби вида

$$\frac{G}{(1-t)^j} \quad \text{при} \quad j \leqq \frac{i+1}{2}.$$

Остается только выяснить, что j не может быть больше $\frac{i}{2}+1$ и что в случае

$$j=\frac{i}{2}+1,$$

возможном только при i четном, должно быть

$$\frac{G}{1.2.3\ldots\frac{i}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}C^{\frac{i}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}t^i\,dt.$$

Для этой цели обращаемся к общим формулам, посредством которых находятся производные дробных функций:

$$\frac{d^i}{du^i}\left(\frac{U}{V}\right) = U\frac{d^i}{du^i}\left(\frac{1}{V}\right) + \frac{i}{1}U'\frac{d^{i-1}}{du^{i-1}}\left(\frac{1}{V}\right) + \ldots \tag{15}$$

и

$$\frac{d^\alpha}{du^\alpha}\left(\frac{1}{V}\right) = \sum \frac{\alpha!\,\beta!}{V^{\beta+1}}\,\frac{(-V')^\lambda}{\lambda!}\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}V''\right)^\mu}{\mu!}\,\frac{\left(-\frac{1}{6}V'''\right)^\nu}{\nu!}\ldots, \tag{16}$$

где суммирование Σ надо распространить на всевозможные совокупности целых чисел

$$\beta,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

удовлетворяющие двум уравнениям

$$\begin{gathered} \lambda+\mu+\nu+\ldots=\beta \\ \lambda+2\mu+3\nu+\ldots=\alpha \end{gathered} \tag{17}$$

и неравенствам

$$0<\beta\leqq\alpha,\ \lambda\geqq 0,\ \mu\geqq 0,\ \nu\geqq 0,\ \ldots.$$

Чтобы получить

$$\left\{\frac{d^i\Omega(e^u, te^{-pu})}{du^i}\right\}_{u=0}$$

мы должны в формулах (15) и (16) положить

$$\begin{gathered} U = 1 + \left\{(p'-p_1)e^{qu} + (q'-q_2)e^{-pu}\right\}t \\ V = 1 - \left\{(p+\delta q)e^{qu} + (q+\delta p)e^{-pu}\right\}t + \delta e^{(q-p)u}t^2 \end{gathered} \tag{18}$$

и по выполнении всех дифференцирований приравнять число u нулю.

Рассматривая отдельные члены правой части формулы (15) при U и V, определяемых равенствами (18), видим, что произведение

$$U^{(i-\alpha)} \frac{d^\alpha}{du^\alpha}\left(\frac{1}{V}\right)$$

дает нам при $u=0$ такую рациональную функцию числа t, знаменатель которой может содержать множитель $1-t$ только в той же степени, как и знаменатель функции

$$\frac{d^\alpha}{du^\alpha}\left(\frac{1}{V}\right)_{u=0},$$

или в низшей степени. Переходя к формуле (16), мы прежде всего, на основании второго из равенств (18), находим

$$V' = -\left\{(p+\delta q)\, q e^{qu} - (q+\delta p)\, p e^{-pu}\right\} t + \delta (q-p)\, e^{(q-p)u} t^2$$

и

$$V'_{u=0} = \delta (p-q)\, t(1-t),$$

чем обнаруживается делимость целой функции

$$V'_{u=0}$$

на $1-t$.

Отсюда следует, что знаменатель общего члена

$$\frac{\alpha!\,\beta!}{V^{\beta+1}} \cdot \frac{(-V')^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2} V''\right)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{6} V'''\right)^\nu}{\nu!} \cdots$$

формулы (16), при $u=0$, может содержать, после надлежащих сокращений, множитель $1-t$ в степени не большей числа $\beta+1-\lambda$.

С другой стороны, из условий, ограничивающих величины

$$\beta,\ \lambda,\ \mu,\ \nu, \ldots,$$

нетрудно вывести неравенство

$$\lambda \geqq 2\beta - \alpha,$$

которое ограничивает значения λ при $2\beta > \alpha$.

Пока $2\beta<\alpha$, число $\beta+1-\lambda$ остается, очевидно, меньше $\frac{\alpha}{2}+1$, ибо $\lambda\geqq 0$; то же число $\beta+1-\lambda$ остается меньше $\frac{\alpha}{2}+1$ и при $2\beta>\alpha$, ибо тогда $\lambda\geqq 2\beta-\alpha$. И только при $\beta=\frac{\alpha}{2}$, если такое значение β возможно, и при $\lambda=0$ важное для нас число

$$\beta+1-\lambda$$

достигает значения $\frac{\alpha}{2}+1$.

Останавливаясь на предположении

$$\alpha=2\beta,\ \lambda=0,$$

которое возможно только при α четном, находим, что этому предположению соответствует только один член формулы (16)

$$\frac{1.2.3\ldots.\alpha}{2^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{(-V'')^{\frac{\alpha}{2}}}{V^{\frac{\alpha}{2}+1}}.$$

Следовательно, если i нечетное, то ни одно из наших произведений

$$U^{(i-\alpha)}\frac{d^{\alpha}}{du^{\alpha}}\left(\frac{1}{V}\right),$$

при $u=0$, не может содержать в знаменателе множитель $1-t$ в степени большей $\frac{i+1}{2}$, и потому, согласно вышеприведенным объяснениям, должно быть

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\ \frac{\text{м. о.}\,(m-np)^{i}}{n^{\frac{i}{2}}}=0.$$

Если же i число четное, то в разложении

$$\left\{\frac{d^{i}\Omega\,(e^{u},te^{-pu})}{du^{i}}\right\}_{u=0}$$

на простейшие дроби, два вида которых

$$\frac{G}{(1-t)^j} \quad \text{и} \quad \frac{H}{(1-\delta t)^l}$$

нами установлены, число j не превосходит $\frac{i}{2}+1$.

И соответствующая этому случаю дробь

$$\frac{G}{(1-t)^{\frac{i}{2}+1}}$$

прямо получается из подобного же разложения на простейшие дроби произведения

$$\frac{1.2.3\ldots.i}{2^{\frac{i}{2}}}\left(\frac{U}{V}\right)_{u=0}\left(\frac{-V''}{V}\right)^{\frac{i}{2}}_{u=0},$$

так что коэффициент ее G определяется равенством

$$G=\frac{1.2.3\ldots.i}{2^{\frac{i}{2}}}\cdot\frac{U}{-\frac{dV}{dt}}\cdot\left(\frac{\frac{d^2V}{du^2}}{\frac{dV}{dt}}\right)^{\frac{i}{2}}$$

при

$$u=0,\ t=1.$$

Производя, наконец, указанные вычисления, находим

$$(U)_{u=0,\,t=1}=1-\delta,\quad \left(\frac{dV}{dt}\right)_{u=0,\ t=1}=-1+\delta$$

$$\left(\frac{d^2V}{du^2}\right)_{u=0,\ t=1}=-q^2(p+\delta q)-p^2(q+\delta p)+\delta(q-p)^2=-pq(1+\delta)$$

и затем

$$G = \frac{1.2.3\ldots.i}{2^{\frac{i}{2}}}\left\{pq\frac{1+\delta}{1-\delta}\right\}^{\frac{i}{2}},$$

чем и доказывает формула

$$\frac{G}{1.2.3\ldots.\frac{i}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{2pq\frac{1+\delta}{1-\delta}\right\}^{\frac{i}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}t^i\,dt,$$

которую мы желали установить, как указано выше; ибо

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}t^i\,dt = \frac{1.3.5\ldots.(i-1)}{2^{\frac{i}{2}}}.$$

Таким образом мы обнаружили, что, как при i нечетном, так и при i четном, должно быть

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\ \frac{\text{м. о.}\,(m-np)^i}{n^{\frac{i}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{2pq\frac{1+\delta}{1-\delta}\right\}^{\frac{i}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}t^i\,dt;$$

иначе сказать

$$\text{пред. м. о.}\left\{\frac{m-np}{\sqrt{2npq\frac{1+\delta}{1-\delta}}}\right\}^i = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}t^i\,dt.$$

А отсюда, как мы знаем, немедленно вытекает теорема:

При беспредельном возрастании числа рассматриваемых испытаний n, вероятность неравенств

$$t_1 < \frac{m-np}{\sqrt{2npq\frac{1+\delta}{1-\delta}}} < t_2$$

должна приближаться к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

каковы бы ни были данные числа t_1 *и* $t_2 > t_1$.

Закончим статью и всю книгу поучительным примером связанных испытаний, совокупность которых, с некоторым приближением, можно рассматривать как простую цепь. Этот пример выясняет, что суммы многих связанных величин могут образовать (почти) независимые величины.

Пример наш не требует ничего, кроме какой-нибудь книги, и потому легко может быть повторен каждым, в большем или меньшем размере. Мы берем последовательность 20000 букв в романе Пушкина „Евгений Онегин", не считая ъ и ь; эта последовательность обнимает всю первую главу и шестнадцать строф второй. Она доставляет нам 20000 связанных испытаний, каждое из которых дает гласную или согласную букву. Соответственно этому мы допускаем существование неизвестной постоянной вероятности p букве быть гласной и приближенную величину числа p ищем из наблюдений, считая число появившихся гласных и согласных букв. Кроме числа p мы найдем, также из наблюдений, приближенные величины двух других чисел p_1 и p_2, представляющих вероятности:

первое, p_1, — гласной букве следовать за гласной,

второе, p_2, — гласной букве следовать за согласной.

Противоположные вероятности, букве быть согласной, обозначим, как в только-что произведенном исследовании:

$$q,\ q_1,\ q_2.$$

Разыскивая число p, мы находим для него сначала 200 приближенных величин, из которых затем выводим среднюю арифметическую. А именно, мы разбиваем всю последовательность 20000 букв на 200 последовательностей по 100 букв и считаем, сколько гласных в каждой сотне букв: мы получаем 200 чисел, которые, по разделении на 100, дают двести приближенных величин p.

При счете числа гласных мы имеем в виду сохранить возможность образовать другие соединения по 100 букв, не пересматривая всей совокупности 20000 букв. С этой целью мы располагаем каждую из рассматриваемых сотен букв в квадрат, по десяти строк и десяти столбцов, сохраняя порядок букв

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\ 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 91, & 92, & 93, & 94, & 95, & 96, & 97, & 98, & 99, & 100; \end{array}$$

считаем, сколько гласных в каждом столбце, в отдельности, и соединяем числа по два:

1-ое и 6-ое, 2-ое и 7-ое, 3-ье и 8-ое, 4-ое и 9-ое, 5-ое и 10-ое.

Мы получаем таким образом для каждой сотни букв пять чисел, обозначаемых нами символами

$$(1,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 8),\ (4,\ 9),\ (5,\ 10);$$

сумма их

$$(1,\ 6)+(2,\ 7)+(3,\ 8)+(4,\ 9)+(5,\ 10)$$

равна числу гласных этой сотни.

Соединяя же по 500 букв вместе, мы можем образовать новые пять сотен букв: первую — из первых и шестых столбцов, вторую — из вторых и седьмых столбцов и т. д. Число гласных в этих новых сотнях определяется суммами

$$\Sigma(1,\ 6),\ \Sigma(2,\ 7),\ \Sigma(3,\ 8),\ \Sigma(4,\ 9),\ \Sigma(5,\ 10),$$

состоящими из соответствующих пяти слагаемых.

Результаты нашего счета приведены в сорока табличках, каждая из которых содержит: в первой строке — пять чисел (1, 6) и их сумму, во второй строке — пять чисел (2, 7) и их сумму и т. д., а в последней строке — число гласных в первой сотне, во второй сотне и т. д. и, наконец, числом гласных во всех пяти сотнях, уменьшенное для сбережения места на 200.

6	8	11	11	13	49	16	11	9	8	7	51	14	12	7	3	6	42	5	11	10	6	10	42
12	11	7	7	5	42	4	8	9	11	10	42	5	5	11	9	11	41	12	8	8	11	7	46
6	6	6	7	13	38	9	9	9	7	10	44	8	10	6	10	7	41	7	7	12	10	9	45
8	10	11	9	4	42	12	9	6	10	7	44	11	11	8	3	10	43	8	12	7	9	9	45
10	11	5	10	8	44	3	8	10	8	9	38	4	4	11	14	8	41	12	8	10	9	8	47
42	46	40	44	43	15	44	45	43	44	43	19	42	42	43	39	42	8	44	46	47	45	43	25

10	6	6	6	7	35	8	7	8	7	10	40	11	11	8	7	7	44	11	10	10	12	6	49
9	12	15	6	9	51	10	9	9	8	8	44	9	6	10	11	11	47	4	4	9	7	9	33
9	3	6	10	9	37	8	9	8	8	8	41	12	9	9	5	6	41	11	13	6	9	10	49
9	11	8	5	6	39	10	6	13	6	12	47	10	8	6	11	11	46	6	7	11	8	6	38
9	10	10	10	9	48	8	12	5	13	6	44	7	6	8	9	8	38	8	6	10	7	12	43
46	42	45	37	40	10	44	43	43	42	44	16	49	40	41	43	43	16	40	40	46	43	43	12

12	9	8	10	10	49	8	9	9	5	8	39	7	7	7	7	9	37	12	7	7	6	8	40
3	10	12	9	10	44	7	9	9	11	7	43	9	13	6	8	4	40	6	8	7	10	8	39
11	11	6	11	10	49	10	6	6	9	9	40	9	7	11	12	14	53	9	10	10	8	7	44
10	8	11	6	7	42	7	8	15	6	9	45	7	11	8	9	7	42	9	5	6	7	7	34
6	8	7	9	6	36	11	7	6	11	10	45	8	10	10	11	9	48	7	11	9	13	7	47
42	46	44	45	43	20	43	39	45	42	43	12	40	48	42	47	43	20	43	41	39	44	37	4

7	4	11	5	7	34	5	5	7	5	9	31	8	6	5	14	11	44	10	9	13	6	12	50
11	14	9	11	9	54	12	6	10	10	8	46	8	12	10	7	4	41	8	8	8	9	5	38
7	6	9	8	9	39	8	14	11	11	10	54	8	10	9	8	14	49	10	10	8	9	10	47
10	9	8	10	5	42	4	3	9	5	9	30	9	5	9	9	6	38	7	9	10	7	10	43
11	10	8	9	11	49	13	14	9	11	7	54	8	13	11	5	10	47	9	8	3	11	7	38
46	43	45	43	41	18	42	42	46	42	43	15	41	46	44	43	45	19	44	44	42	42	44	16

4	11	10	12	5	42	5	11	10	6	5	37	4	4	10	11	5	34	13	11	13	10	10	57
14	9	8	7	14	52	8	9	8	10	10	45	6	12	9	8	10	45	7	10	9	6	2	34
4	8	9	8	4	33	8	8	6	9	9	40	13	4	10	8	6	41	8	8	7	8	12	43
8	14	11	12	6	51	10	6	9	7	6	38	7	10	7	12	11	47	9	11	9	10	6	45
11	6	7	4	14	42	11	9	8	10	12	50	9	13	8	1	8	39	6	3	7	9	9	34
41	48	45	43	43	20	42	43	41	42	42	10	39	43	44	40	40	6	43	43	45	43	39	13

11	6	8	9	5	39	10	10	4	7	9	40	10	8	7	8	8	41	10	3	11	13	5	42
6	10	6	8	13	43	11	10	13	13	9	56	6	9	9	8	7	39	7	11	9	7	10	44
10	5	11	11	6	43	10	7	5	9	6	37	15	9	11	13	9	57	10	10	4	7	7	38
9	12	6	8	10	45	10	5	8	10	10	43	5	10	5	4	7	31	7	7	14	13	7	48
7	11	9	10	10	47	6	13	10	5	6	40	8	9	10	12	9	48	11	9	9	6	15	50
43	44	40	46	44	17	47	45	40	44	40	16	44	45	42	45	40	16	45	40	47	46	44	22

8	8	13	5	8	42	12	7	12	5	12	48	10	14	7	6	6	43	9	6	7	10	5	37
9	10	7	14	9	49	10	8	5	13	4	40	4	6	8	10	14	42	11	10	7	8	9	45
9	11	6	8	7	41	10	13	8	7	9	47	13	6	12	8	5	44	10	10	9	9	10	48
7	9	12	6	9	43	9	4	12	6	9	40	7	13	5	8	10	43	8	6	12	10	10	46
10	9	9	12	9	49	4	12	9	9	8	42	8	5	15	10	9	47	9	11	8	5	11	44
43	47	47	45	42	24	45	44	46	40	42	17	42	44	47	42	44	19	47	43	43	42	45	20

12	13	5	9	11	50	5	11	8	12	10	46	9	11	10	6	13	49	5	9	7	10	6	37
7	7	10	5	8	37	12	8	9	8	6	43	9	8	6	8	6	37	10	9	11	7	7	44
7	7	9	14	7	44	8	11	9	8	7	43	7	7	12	10	9	45	11	11	11	10	8	51
12	13	7	8	10	50	8	5	7	11	8	39	12	12	6	8	8	46	7	7	5	10	10	39
4	4	12	11	9	40	11	11	10	6	8	46	5	7	9	11	4	36	13	8	9	8	10	48
42	44	43	47	45	21	44	46	43	45	39	17	42	45	43	43	40	13	46	44	43	45	41	19

8	6	8	7	14	43	7	9	8	6	7	37	9	11	11	8	8	47	5	7	4	3	7	26
8	14	13	8	4	47	9	8	6	10	11	44	10	8	5	9	10	42	14	10	13	9	5	51
12	4	6	9	11	42	10	9	10	8	10	47	6	8	16	12	11	53	7	8	6	8	9	38
6	8	9	10	8	41	8	7	4	9	4	32	12	11	5	7	8	43	7	10	9	5	9	40
6	8	11	8	6	39	11	8	10	8	9	46	6	5	9	10	8	38	9	10	11	16	7	53
40	40	47	42	43	12	45	41	38	41	41	6	43	43	46	46	45	23	42	45	43	41	37	8

4	7	9	11	10	41	10	8	7	8	7	40	12	10	11	4	5	42	12	13	6	6	10	47
10	7	9	4	9	39	10	8	11	10	7	46	5	9	10	11	11	46	6	3	10	10	4	33
8	13	9	12	10	52	6	11	11	10	10	48	10	8	10	7	13	48	11	11	9	7	14	52
7	5	7	7	12	38	12	8	7	6	5	38	11	8	8	11	5	43	5	8	8	9	9	39
13	10	10	9	5	47	5	9	11	12	11	48	4	8	8	9	11	40	11	6	11	12	7	47
42	42	44	43	46	17	43	44	47	46	40	20	42	43	47	42	45	19	45	41	44	44	44	18

Остановимся на совокупности чисел

$$42,\ 46,\ 40,\ 44,\ 43,\ 44,\ 45,\ 43,\ \ldots,$$

стоящих в последних строках наших 40 табличек и показывающих сколько находится гласных в последовательных сотнях текста:

1) мой дядя самых честных правил когда не в шутку занемог он
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
уважат себя заставил и лучше выдумат не мог его пример другим на
20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42
(42 гласных)

2) ука но боже мой какая скука с болным сидет и ден и ноч не
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
отходя ни шагу проч какое низкое коварство полуживого забавлят ем
22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46
(46 гласных)

и т. д.

Считая, сколько раз в этой совокупности 200 чисел встречается каждое число, составляем новую небольшую таблицу

37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
3	1	6	18	12	31	43	29	25	17	12	2	1

Здесь в первой строке приведены все числа, входящие в нашу совокупность, а под ними, во второй строке, указано, сколько раз они встречаются.

При помощи этой таблицы легко находим их среднее арифметическое

$$43+\frac{29+25.2+17.3+12.4+2.5+6-31-12.2-18.3-6.4-5-3.6}{200}=43{,}19$$

и отсюда выводим

$$p \doteq 0{,}4319 \doteq 0{,}432.$$

Вычисляем сумму квадратов их отклонений от 43,2; она оказывается равною

$$1022{,}8,$$

что по разделении на 200 дает нам число

$$5{,}114,$$

которое можно принять за приближенную величину математического ожидания квадрата отклонения любого из наших 200 чисел от их общего математического ожидания, приблизительно равного 43,2. Наконец, число

$$\frac{5,114}{200} = 0,02557$$

представляет приближенную величину математического ожидания квадрата погрешности в определении $100p$ равенством

$$100p \doteq 43,2.$$

Такое заключение соединено с обычным предположением способа наименьших квадратов, что мы имеем дело с независимыми величинами. Это предположение, в данном случае, оправдывается не хуже, чем во многих других, ибо связь между числами, по способу их получения, весьма слаба. Независимости наших величин соответствует тот факт, что, соединяя их по две, по четыре и по пяти и вычисляя для этих 100, 50 и 40 комбинаций суммы квадратов их отклонений от

$$86,4, \quad 172,8 \quad \text{и} \quad 216,$$

мы получаем числа

$$827,6 \quad 975,2 \quad \text{и} \quad 1004,$$

которые не очень сильно отличаются от ранее найденного числа

$$1022,8.$$

Можно подметить также некоторую согласованность наших результатов с известным законом погрешностей, указанным в конце § 44 и связанным с именами Гаусса и Лапласа; например, величина, называемая вероятною погрешностью, у нас приблизительно равна

$$0,67\sqrt{5,11} \doteq 1,5$$

и соответственно этому между

$$43,2 - 1,5 = 41,7 \quad \text{и} \quad 43,2 + 1,5 = 44,7$$

находится 103 числа, т. е. около половины их: 31 раз число 42, 43 раза число 43 и 29 раз число 44.

Переходя от сотен испытаний к отдельным испытаниям, замечаем, что число

$$\frac{5,114}{100} = 0,05114$$

сильно отличается от

$$0,432 \times 0,568 = 0,245376:$$

коэффициент дисперсии, который в случае § 45 был весьма близок к единице, здесь оказывается равным

$$\frac{51140}{245376} \doteq 0,208,$$

т. е. составляет около $\frac{1}{5}$, что прекрасно объясняется связанностью наших испытаний. Для выяснения этой связи, хотя бы и неполного, нам может послужить вычисление вышеупомянутых вероятностей p_1 и p_2.

Просматривая весь текст из 20000 букв, мы считаем, сколько в нем встречается последовательностей

гласная, гласная;

получаем число 1104, которое по разделении на число всех гласных в тексте дает для p_1 приближенную величину

$$\frac{1104}{8638} \doteq 0,128.$$

Подобным же образом считая число последовательностей

согласная, согласная

и деля его на 11362, мы могли бы найти приближенное значение q_2 и затем $p_2 = 1 - q_2$. Но можно заменить утомительный прямой счет следующим, очень кратким. А именно, нетрудно заметить, что разность

$$8638 - 1104 = 7534$$

равна числу последовательностей

согласная, гласная,

или превосходит его на единицу; отсюда тотчас получаем для p_2 такую приближенную величину

$$\frac{7534}{11362} \doteq 0{,}663.$$

Мы видим, что вероятность букве быть гласной значительно изменяется, в зависимости от того, предшествует ей гласная или согласная; разность $p_1 - p_2$, обозначаемая нами буквою δ, оказывается приблизительно равною

$$0{,}128 - 0{,}663 = -0{,}535.$$

Если допустить теперь, что наша последовательность 20000 букв образует простую цепь, в вышеобъясненном смысле, то при

$$\delta = -0{,}535$$

за теоретический коэффициент дисперсии можно принять, согласно нашему исследованию, число

$$\frac{1+\delta}{1-\delta} = \frac{465}{1535} \doteq 0{,}3;$$

конечно, это число не вполне совпадает с полученным раньше

$$0{,}208,$$

но, во всяком случае, подходит к нему ближе, чем число единица, соответствующее случаю независимых испытаний.

Можно было бы еще ближе подойти к числу 0,208 при помощи выводов моего исследования * „Об одном случае испытаний, связанных в сложную цепь“; тогда пришлось бы считать различные последовательности из трех букв, при чем прямой счет необходимо было бы выполнить для двух последовательностей:

гласная, гласная, гласная

и

согласная, согласная, согласная.

Следует однако помнить, что полного совпадения чисел в подобных исследованиях, где теория соединена с опытом, нельзя требовать.

Переходим к другому указанному нами распределению 20000 букв на сотни. Составляем для него таблицу повторяемости различных чисел, подобную прежней.

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
1	0	0	0	1	2	1	3	5	1	2	9	13	12	13	11
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
17	16	15	10	10	16	10	10	5	5	3	3	3	0	1	2

Среднее арифметическое из этих новых 200 чисел равно прежнему числу

$$43{,}19.$$

Сумма же квадратов их отклонений от 43,2 значительно больше прежней; а именно она равна

$$5788{,}8.$$

Здесь следует остановиться на условии независимости величин, обычно соединяемом со способом наименьших квадратов (см. главу VII); вспом-

* Изв Академии Наук. 1911.

ним, для чего нужно это условие. Оно является необходимым при разыскании веса окончательного результата, выражаемого равенством (21), и при вычислении математического ожидания W, которое дает нам приближенную величину k. Но это условие окажется лишним, если мы, во-первых, оставим в стороне вопрос о весе равенства (21) и, во-вторых, заменим ξ в выражении W числом a, которое потом будем считать равным a_0, пренебрегая разностью $a - a_0$. Тогда в основу наших суждений лягут два равенства

$$\text{м. о.}\,\frac{p' x' + p'' x'' + \ldots + p^{(n)} x^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}} = a$$

и

$$\text{м. о.}\,\frac{p'(x' - a)^2 + p''(x'' - a)^2 + \ldots + p^{(n)}(x^{(n)} - a)^2}{n} = k$$

не требующие независимости величин

$$x',\ x'',\ \ldots,\ x^{(n)}.$$

На основании таких равенств, опираясь на закон больших чисел, мы полагаем

$$a \doteq \frac{\Sigma p^{(i)} a^{(i)}}{\Sigma p^{(i)}} = a_0 \quad \text{и} \quad k \doteq \frac{\Sigma p^{(i)} (a^{(i)} - a)^2}{n} \doteq \frac{\Sigma p^{(i)} (a^{(i)} - a_0)^2}{n}.$$

Отпадает только теорема о весе окончательного результата, выражаемая известным равенством (22): вес результата равен сумме весов составляющих.

В данном случае, каждое из наших 200 чисел представляет сумму почти независимых величин; но зато сами суммы связаны по пяти.

Мы имеем 40 групп по 500 букв; в каждой сотне нет смежных букв текста, чем обусловливается независимость слагаемых; зато в каждой группе смежны буквы первой сотни с буквами второй сотни, буквы второй сотни с буквами первой и третьей и т. д., в силу чего наши числа связаны по пяти, как сказано выше.

Вместо 200 независимых чисел у нас оказывается теперь 5 связанных групп, каждая из которых содержит 40 независимых чисел.

Это не мешает нам, согласно приведенным объяснениям, рассматривать число

$$\frac{5788{,}8}{200} = 28{,}944$$

как приближенную величину математического ожидания квадрата отклонения наших новых 200 чисел

$$49,\ 42,\ 38,\ 42,\ 44,\ 51,\ 42,\ 44, \ldots .$$

от их математического ожидания, приблизительно равного 43,2. И, переходя от сотен букв (испытаний) к отдельным буквам, мы замечаем, что число

$$0{,}28944$$

не очень сильно отличается от

$$0{,}432 \times 0{,}568 = 0{,}245376:$$

коэффициент дисперсии оказывается равным

$$\frac{289440}{245376} \doteq 1{,}18.$$

Если же мы обратимся к окончательному результату

$$43{,}19,$$

то математическое ожидание квадрата его погрешности нельзя уже выражать числом

$$\frac{28{,}944}{200} = 0{,}14472,$$

в виду связи наших чисел

$$49,\ 42,\ 38,\ 42,\ 44, \ldots ;$$

напротив, мы имеем основание приравнивать это математическое ожидание числу

$$\frac{5,114}{200}=0,02557,$$

найденному при прежнем распределении букв на сотни.

Упомянутая сейчас связь чисел проявляется при соединении их в суммы по два, по четыре и, в особенности, по пяти. Вычисляя для этих 100, 50 и 40 комбинаций суммы квадратов их отклонений от

$$86,4 \quad 172,8 \quad \text{и} \quad 216,$$

мы получаем вместо числа

$$5788,8$$

числа

$$3551,6 \quad 3089,2 \quad \text{и} \quad 1004,$$

последнее из которых почти в шесть раз меньше 5788,8.

Подобное же исследование я выполнил над произведением другого автора (С. Т. Аксаков, „Детские годы Багрова-внука"). Результаты последнего исследования, обнимающего совокупность 100000 букв *), приведены в следующих табличках, из которых можно видеть, как и в какой мере проявляются в действительности предельные теоремы исчисления вероятностей.

Распределение тысяч букв (сотен десятков) по числу десятков, содержащих одинаковое число гласных.

Число гласных в десятке указано в первом столбце, а число десятков в первой строке. Таблицы дают соответствующие числа сотен десятков.

* Исследование произведено над переписанным мною текстом, который несколько отличается от оригинала, благодаря вкравшимся при переписке ошибкам, но, в виду немногочисленности и неумышленности ошибок, они не должны существенно влиять на выводы. В первом исследовании я употребил много времени и труда на исключение таких ошибок. Вычисления выполнены в обоих случаях с одинаковою тщательностью.

Отсюда выведены вероятности, что число гласных в десятке равно 2, 3, 4, 5, 6, 7 (другие числа не встречались). Эти вероятности приведены в предпоследнем столбце, в последнем же столбце даны для них коэффициенты дисперсии.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Вер.	К. д.
2	84	15	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0017	—
3	0	0	1	5	6	7	9	11	10	15	12	12	5	3	1	1	1	1	0	0,0835	1,19
6	0	0	0	3	6	8	5	20	12	18	10	9	2	2	3	0	0	1	1	0,0827	1,04
7	73	20	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0034	—

	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	Вер.	К. д.
4	0	2	3	3	2	6	6	10	8	2	5	7	7	4	9	5	8	3	5	3	1	0	0	1	0,4276	1,02
5	2	5	6	5	3	10	8	6	8	7	11	7	6	6	0	6	1	1	0	0	2	0	0	0	0,4011	1,82

Коэффициентов дисперсии для 2 и 7 я не привожу (вычислить их не трудно), так как для столь редких событий они ни о чем не свидетельствуют.

Распределение десятков по числу гласных в них.

2	3	4	5	6	7	Вер. глас.	К. д.
17	835	4276	4011	827	34	0,44898	0,25

Это распределение вытекает из предыдущих табличек и дает нам среднюю вероятность гласной, или число гласных в 100000 букв и соответствующий коэффициент дисперсии.

Последовательностей, состоящих из двух гласных, оказалось, по моему счету, 6588; поэтому

$$p_1 \doteq \frac{6588}{44898} \doteq 0{,}147, \quad p_2 = \frac{38310}{55102} \doteq 0{,}695, \quad \delta = -0{,}548, \quad \frac{1+\delta}{1-\delta} \doteq 0{,}29.$$

Измененное и теоретическое (внизу) распределение десятков по числу гласных.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вер глас.	К. д.
26	233	793	1699	2320	2319	1548	740	261	59	2	0,44898	1,05
26	210	771	1675	2389	2335	1586	738	226	41	3		

Изменение порядка букв произведено по тому же способу, как и в первом исследовании (без образования новых сотен): в новые десятки соединены буквы, отделяемые в тексте друг от друга девятью промежуточными буквами.

Теоретическое распределение десятков получено по формуле (4), относящейся к независимым испытаниям, при

$$p = 0{,}44898, \quad q = 0{,}55102, \quad n = 10,$$

с присоединением, конечно, множителя 10000.

Распределение тысяч букв по числу гласных.

В первой строке указаны отклонения (сначала отрицательные, а потом положительные) числа гласных от 449, а во второй соответствующее число тысяч букв

−19	17	16	15	13	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	+1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	16	18	К. д.
1	1	1	1	1	2	1	3	3	5	5	4	5	4	7	3	7	7	4	6	3	5	0	2	2	3	5	3	1	3	1	1	0,225

Распределение сотен букв по числу гласных.

37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
1	2	5	21	33	69	123	163	196	171	109	50	35	10	10	2

Средние величины $c^{(2)}$, $c^{(3)}$, $c^{(4)}$, $c^{(5)}$, $c^{(6)}$ степеней отклонений от среднего числа гласных в сотне букв, коэффициент дисперсии и другие отношения

$c^{(2)}=c$	$c^{(3)}$	$c^{(4)}$	$c^{(5)}$	$c^{(6)}$	К. д	$c^{(4)}:c^2$	$c^{(6)}:c^3$
4,986	0,230	83,39	11,29	2291	0,202	3,35	18,4

Эта табличка получена по числам предыдущей, при чем сначала взяты были отклонения от 45, а затем произведена соответствующая поправка.

Распределение сотен букв по числу гласных, при счете через одну букву.

При этом счете буквы, стоящие в тексте рядом, попадают в различные сотни, а буквы, отделенные в тексте одною буквою, становятся рядом.

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	0	2	1	2	6	6	8	8	19	22	25	45	42	65	47	48	61	71	67

46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
62	61	59	38	53	38	42	28	24	18	5	7	3	8	1	3	1	1	1	0	1

Средние величины $c^{(2)}$, $c^{(3)}$, и $c^{(4)}$, коэффициент дисперсии и отношение $c^{(4)}:c^2$ для последнего счета.

$c^{(2)}=c$	$c^{(3)}$	$c^{(4)}$	К. д.	$c^{(4)}:c$
35,896	17,47	3833,5	1,45	2,97

Коэффициент дисперсии оказался здесь заметно больше единицы. Этот факт, хотя и нерезко выраженный, соответствует теоретическим соображениям о простой цепи, ради которых и был предпринят последний счет.

Вероятности p_1 и p_2 для этого нового распределения букв я вычислил сперва только по первому десятку тысяч букв. Гласных среди них было 4462; последовательностей же двух гласных, разделяемых в тексте одною буквою, оказалось 2470. Поэтому, при счете через одну букву, имеем

$$p_1 \doteq \frac{2470}{4462} \doteq 0{,}55, \quad p_2 \doteq \frac{1992}{5538} \doteq 0{,}36, \quad \delta = +0{,}19, \quad \frac{1+\delta}{1-\delta} \doteq 1{,}5.$$

Затем я подсчитал такие последовательности и для всего текста: их оказалось 24773; откуда находим

$$p_1 \doteq \frac{24773}{44898} \doteq 0{,}552, \quad p_2 \doteq \frac{20125}{55102} \doteq 0{,}365, \quad \delta \doteq 0{,}187, \quad \frac{1+\delta}{1-\delta} \doteq 1{,}46.$$

ЛИТЕРАТУРА.

А. Марков. Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь (Зап Акад. Наук, VIII серия, т. XXII).

А. Марков Исследование общего случая испытаний связанных в цепь. (Зап. Акад. Наук, VIII серия, т. XXV).

А. Марков. Об испытаниях связанных в цепь ненаблюдаемыми событиями. (Изв. Акад. Наук. 1912).

А. Марков Пример статистического исследования над текстом романа Пушкина „Евгений Онегин“, иллюстрирующий связь испытаний в цепь. (Изв. Акад. Наук. 1913)

Таблица значений

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,00	0,00	0000	1128	2257	3385	4513	5642	6770	7899	9027	0155	0,01
0,01	0,01	1283	2412	3540	4668	5796	6924	8053	9181	0309	1437	0,02
0,02	0,02	2565	3692	4820	5948	7076	8204	9331	0459	1586	2714	0,03
0,03	0,03	3841	4969	6096	7223	8350	9477	0604	1731	2858	3984	0,04
0,04	0,04	5111	6238	7364	8490	9617	0743	1869	2995	4121	5246	0,05
0,05	0,05	6372	7497	8623	9748	0873	1998	3123	4248	5373	6497	0,06
0,06	0,06	7622	8746	9870	0994	2118	3241	4365	5488	6612	7735	0,07
0,07	0,07	8858	9981	1103	2226	3348	4470	5592	6714	7835	8957	0,08
0,08	0,09	0078	1199	2320	3441	4561	5682	6802	7922	9042	0161	0,10
0,09	0,10	1281	2400	3519	4638	5756	6874	7993	9110	0228	1346	0,11
0,10	0,11	2463	3580	4697	5813	6930	8046	9162	0277	1393	2508	0,12
0,11	0,12	3623	4738	5852	6966	8080	9194	0307	1420	2533	3646	0,13
0,12	0,13	4758	5870	6982	8094	9205	0316	1427	2537	3648	4758	0,14
0,13	0,14	5867	6976	8085	9194	0303	1411	2519	3626	4733	5840	0,15
0,14	0,15	6947	8053	9159	0265	1370	2476	3580	4685	5789	6893	0,16
0,15	0,16	7996	9099	0202	1304	2406	3508	4610	5711	6811	7912	0,17
0,16	0,17	9012	0111	1211	2310	3408	4507	5605	6702	7799	8896	0,18
0,17	0,18	9992	1089	2184	3279	4374	5469	6563	7657	8750	9843	0,19
0,18	0,20	0936	2028	3120	4211	5302	6393	7483	8573	9662	0751	0,21
0,19	0,21	1840	2928	4016	5103	6190	7277	8363	9448	0533	1618	0,22
0,20	0,22	2703	3787	4870	5953	7036	8118	9200	0281	1362	2442	0,23
0,21	0,23	3522	4601	5680	6759	7837	8915	9992	1069	2145	3221	0,24
0,22	0,24	4296	5371	6445	7519	8592	9665	0738	1810	2881	3952	0,25
0,23	0,25	5023	6093	7162	8231	9300	0368	1435	2502	3569	4635	0,26
0,24	0,26	5700	6765	7829	8893	9957	1020	2082	3144	4205	5266	0,27
0,25	0,27	6326	7386	8445	9504	0562	1620	2677	3733	4789	5845	0,28
0,26	0,28	6900	7954	9008	0061	1114	2166	3218	4269	5319	6369	0,29
0,27	0,29	7418	8467	9515	0563	1610	2656	3702	4748	5792	6836	0,30
0,28	0,30	7880	8923	9965	1007	2049	3089	4129	5169	6208	7246	0,31
0,29	0,31	8283	9321	0357	1393	2428	3463	4497	5530	6563	7595	0,32

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,30	0,32	8627	9658	0688	1718	2747	3775	4803	5830	6857	7883	0,33
0,31	0,33	8908	9933	0957	1980	3003	4025	5047	6067	7088	8107	0,34
0,32	0,34	9126	0144	1162	2179	3195	4211	5226	6240	7253	8266	0,35
0,33	0,35	9279	0290	1301	2312	3321	4330	5338	6346	7353	8359	0,36
0,34	0,36	9365	0369	1374	2377	3380	4382	5383	6384	7384	8383	0,37
0,35	0,37	9382	0380	1377	2374	3370	4365	5359	6353	7346	8338	0,38
0,36	0,38	9330	0321	1311	2300	3289	4277	5264	6251	7237	8222	0,39
0,37	0,39	9206	0190	1173	2155	3136	4117	5097	6076	7055	8032	0,40
0,38	0,40	9009	9986	0961	1936	2910	3883	4856	5828	6799	7769	0,41
0,39	0,41	8739	9707	0676	1643	2609	3575	4540	5504	6468	7430	0,42
0,40	0,42	8392	9354	0314	1274	2232	3190	4148	5104	6060	7015	0,43
0,41	0,43	7969	8922	9875	0827	1778	2728	3678	4626	5574	6521	0,44
0,42	0,44	7468	8413	9358	0302	1245	2187	3129	4069	5009	5948	0,45
0,43	0,45	6887	7824	8761	9697	0632	1566	2500	3432	4364	5295	0,46
0,44	0,46	6225	7154	8083	9011	9938	0864	1789	2713	3637	4560	0,47
0,45	0,47	5482	6403	7323	8243	9161	0079	0996	1912	2827	3742	0,48
0,46	0,48	4655	5568	6480	7391	8301	9211	0119	1027	1934	2840	0,49
0,47	0,49	3745	4649	5553	6455	7357	8258	9158	0057	0956	1853	0,50
0,48	0,50	2750	3645	4540	5434	6327	7220	8111	9002	9891	0780	0,51
0,49	0,51	1668	2555	3442	4327	5211	6095	6978	7860	8741	9621	0,51
0,50	0,52	0500	1378	2256	3132	4008	4883	5757	6630	7502	8373	0,52
0,51	0,52	9244	0113	0982	1849	2716	3582	4447	5311	6175	7037	0,53
0,52	0,53	7899	8759	9619	0478	1336	2193	3049	3904	4758	5612	0,54
0,53	0,54	6464	7316	8166	9016	9865	0713	1560	2406	3251	4096	0,55
0,54	0,55	4939	5782	6623	7464	8304	9143	9981	0818	1654	2489	0,56
0,55	0,56	3323	4157	4989	5821	6651	7481	8310	9138	9965	0791	0,57
0,56	0,57	1616	2440	3263	4086	4907	5727	6547	7366	8183	9000	0,57
0,57	0,57	9816	0631	1445	2258	3070	3881	4691	5501	6309	7116	0,58
0,58	0,58	7923	8728	9533	0337	1140	1941	2742	3542	4341	5139	0,59
0,59	0,59	5936	6733	7528	8322	9116	9908	0700	1490	2280	3068	0,60
0,60	0,60	3856	4643	5429	6214	6998	7780	8563	9344	0124	0903	0,61
0,61	0,61	1681	2459	3235	4010	4785	5558	6331	7102	7873	8643	0,61
0,62	0,61	9411	0179	0946	1712	2477	3241	4004	4766	5527	6287	0,62
0,63	0,62	7046	7805	8562	9318	0074	0828	1582	2334	3086	3836	0,63
0,64	0,63	4586	5334	6082	6829	7575	8320	9063	9806	0548	1289	0,64
0,65	0,64	2029	2768	3506	4244	4980	5715	6449	7183	7915	8646	0,64
0,66	0,64	9377	0106	0835	1562	2289	3014	3739	4463	5185	5907	0,65
0,67	0,65	6628	7347	8066	8784	9501	0217	0932	1646	2359	3071	0,66
0,68	0,66	3782	4492	5202	5910	6617	7323	8029	8733	9436	0139	0,67
0,69	0,67	0840	1541	2240	2939	3636	4333	5028	5723	6417	7109	0,67

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,70	0,67	7801	8492	9182	9871	0559	1245	1931	2616	3300	3983	0,68
0,71	0,68	4666	5347	6027	6706	7384	8061	8738	9413	0087	0761	0,69
0,72	0,69	1433	2105	2775	3445	4113	4781	5447	6113	6778	7441	0,69
0,73	0,69	8104	8766	9427	0086	0745	1403	2060	2716	3371	4025	0,70
0,74	0,70	4678	5330	5981	6631	7281	7929	8576	9222	9868	0512	0,71
0,75	0,71	1156	1798	2440	3080	3720	4358	4996	5633	6268	6903	0,71
0,76	0,71	7537	8170	8801	9432	0062	0691	1319	1946	2572	3197	0,72
0,77	0,72	3822	4445	5067	5688	6309	6928	7546	8164	8780	9396	0,72
0,78	0,73	0010	0624	1237	1848	2459	3069	3678	4286	4892	5498	0,73
0,79	0,73	6103	6707	7311	7913	8514	9114	9713	0312	0909	1506	0,74
0,80	0,74	2101	2695	3289	3882	4473	5064	5654	6243	6830	7417	0,74
0,81	0,74	8003	8588	9172	9755	0338	0919	1499	2078	2657	3234	0,75
0,82	0,75	3811	4386	4961	5535	6107	6679	7250	7820	8389	8957	0,75
0,83	0,75	9524	0090	0655	1219	1783	2345	2906	3467	4026	4585	0,76
0,84	0,76	5143	5699	6255	6810	7364	7917	8469	9020	9570	0120	0,77
0,85	0,77	0668	1215	1762	2307	2852	3396	3939	4480	5021	5561	0,77
0,86	0,77	6100	6638	7176	7712	8247	8782	9315	9848	0379	0910	0,78
0,87	0,78	1440	1969	2497	3024	3550	4075	4599	5123	5645	6167	0,78
0,88	0,78	6687	7207	7726	8244	8761	9277	9792	0306	0819	1332	0,79
0,89	0,79	1843	2354	2863	3372	3880	4387	4893	5398	5902	6406	0,79
0,90	0,79	6908	7410	7910	8410	8909	9407	9904	0400	0895	1389	0,80
0,91	0,80	1883	2375	2867	3358	3848	4336	4824	5312	5798	6283	0,80
0,92	0,80	6768	7251	7734	8216	8697	9177	9656	0134	0611	1088	0,81
0,93	0,81	1564	2038	2512	2985	3457	3928	4399	4868	5337	5804	0,81
0,94	0,81	6271	6737	7202	7666	8129	8592	9053	9514	9974	0433	0,82
0,95	0,82	0891	1348	1804	2260	2714	3168	3621	4073	4524	4974	0,82
0,96	0,82	5424	5872	6320	6767	7213	7658	8102	8545	8988	9429	0,82
0,97	0,82	9870	0310	0749	1188	1625	2062	2497	2932	3366	3799	0,83
0,98	0,83	4232	4663	5094	5523	5952	6380	6808	7234	7659	8084	0,83
0,99	0,83	8508	8931	9353	9775	0195	0615	1034	1452	1869	2285	0,84
1,00	0,84	2701	3115	3529	3942	4355	4766	5177	5586	5995	6403	0,84
1,01	0,84	6810	7217	7623	8027	8431	8834	9237	9638	0039	0439	0,85
1,02	0,85	0838	1236	1634	2030	2426	2821	3215	3609	4001	4393	0,85
1,03	0,85	4784	5174	5564	5952	6340	6727	7113	7499	7883	8267	0,85
1,04	0,85	8650	9032	9414	9794	0174	0553	0931	1309	1685	2061	0,86
1,05	0,86	2436	2810	3184	3557	3928	4300	4670	5040	5408	5776	0,86
1,06	0,86	6144	6510	6876	7241	7605	7968	8331	8692	9054	9414	0,86
1,07	0,86	9773	0132	0490	0847	1204	1559	1914	2268	2622	2974	0,87
1,08	0,87	3326	3677	4028	4377	4726	5074	5421	5768	6114	6459	0,87
1,09	0,87	6803	7147	7489	7832	8173	8513	8853	9192	9531	9868	0,87

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1,10	0,88	0205	0541	0877	1211	1545	1878	2211	2542	2873	3204	0,88
1,11	0,88	3533	3862	4190	4517	4844	5170	5495	5819	6143	6466	0,88
1,12	0,88	6788	7109	7430	7750	8070	8388	8706	9023	9340	9656	0,88
1,13	0,88	9971	0285	0599	0912	1224	1535	1846	2156	2466	2774	0,89
1,14	0,89	3082	3390	3696	4002	4307	4612	4916	5219	5521	5823	0,89
1,15	0,89	6124	6424	6724	7023	7321	7619	7915	8212	8507	8802	0,89
1,16	0,89	9096	9390	9682	9975	0266	0557	0847	1136	1425	1713	0,90
1,17	0,90	2000	2287	2573	2859	3143	3427	3711	3993	4275	4557	0,90
1,18	0,90	4837	5117	5397	5676	5954	6231	6508	6784	7059	7334	0,90
1,19	0,90	7608	7882	8155	8427	8698	8969	9239	9509	9778	0046	0,91
1,20	0,91	0314	0581	0847	1113	1378	1643	1907	2170	2432	2694	0,91
1,21	0,91	2956	3216	3476	3736	3994	4253	4510	4767	5023	5279	0,91
1,22	0,91	5534	5788	6042	6295	6548	6800	7051	7302	7552	7801	0,91
1,23	0,91	8050	8298	8546	8793	9039	9285	9530	9775	0019	0262	0,92
1,24	0,92	0505	0747	0989	1230	1470	1710	1949	2188	2426	2663	0,92
1,25	0,92	2900	3136	3372	3607	3841	4075	4309	4541	4773	5005	0,92
1,26	0,92	5236	5466	5696	5925	6154	6382	6609	6836	7063	7288	0,92
1,27	0,92	7514	7738	7962	8186	8409	8631	8853	9074	9295	9515	0,92
1,28	0,92	9734	9953	0172	0389	0607	0823	1040	1255	1470	1685	0,93
1,29	0,93	1899	2112	2325	2537	2749	2960	3171	3381	3590	3799	0,93
1,30	0,93	4008	4216	4423	4630	4836	5042	5247	5452	5656	5860	0,93
1,31	0,93	6063	6266	6468	6669	6870	7071	7271	7470	7669	7867	0,93
1,32	0,93	8065	8262	8459	8656	8851	9047	9241	9435	9629	9822	0,93
1,33	0,94	0015	0207	0399	0590	0781	0971	1160	1349	1538	1726	0,94
1,34	0,94	1914	2101	2287	2473	2659	2844	3029	3213	3396	3580	0,94
1,35	0,94	3762	3944	4126	4307	4488	4668	4848	5027	5205	5384	0,94
1,36	0,94	5561	5739	5915	6092	6268	6443	6618	6792	6966	7139	0,94
1,37	0,94	7312	7485	7657	7828	7999	8170	8340	8510	8679	8848	0,94
1,38	0,94	9016	9184	9351	9518	9684	9850	0016	0181	0346	0510	0,95
1,39	0,95	0673	0837	0999	1162	1323	1485	1646	1806	1966	2126	0,95
1,40	0,95	2285	2444	2602	2760	2917	3074	3231	3387	3542	3698	0,95
1,41	0,95	3852	4007	4161	4314	4467	4620	4772	4924	5075	5226	0,95
1,42	0,95	5376	5526	5676	5825	5974	6122	6270	6417	6564	6711	0,95
1,43	0,95	6857	7003	7148	7293	7438	7582	7726	7869	8012	8154	0,95
1,44	0,95	8297	8438	8580	8720	8861	9001	9140	9280	9419	9557	0,95
1,45	0,95	9695	9833	9970	0107	0243	0379	0515	0650	0785	0919	0,96
1,46	0,96	1054	1187	1320	1453	1586	1718	1850	1981	2112	2243	0,96
1,47	0,96	2373	2503	2632	2761	2890	3018	3146	3274	3401	3528	0,96
1,48	0,96	3654	3780	3906	4031	4156	4281	4405	4529	4652	4775	0,96
1,49	0,96	4898	5020	5142	5264	5385	5506	5627	5747	5867	5986	0,96

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1,50	0,96	6105	6224	6342	6460	6578	6695	6812	6929	7045	7161	0,96
1,51	0,96	7277	7392	7507	7621	7736	7849	7963	8076	8189	8301	0,96
1,52	0,96	8413	8525	8637	8748	8859	8969	9079	9189	9298	9407	0,96
1,53	0,96	9516	9625	9733	9841	9948	0055	0162	0268	0374	0480	0,97
1,54	0,97	0586	0691	0796	0900	1004	1108	1212	1315	1418	1520	0,97
1,55	0,97	1623	1725	1826	1928	2029	2129	2230	2330	2430	2529	0,97
1,56	0,97	2628	2727	2825	2924	3022	3119	3216	3313	3410	3507	0,97
1,57	0,97	3603	3698	3794	3889	3984	4079	4173	4267	4361	4454	0,97
1,58	0,97	4547	4640	4732	4825	4916	5008	5099	5191	5281	5372	0,97
1,59	0,97	5462	5552	5642	5731	5820	5909	5997	6085	6173	6261	0,97
1,60	0,97	6348	6435	6522	6609	6695	6781	6867	6952	7037	7122	0,97
1,61	0,97	7207	7291	7375	7459	7543	7626	7709	7792	7874	7956	0,97
1,62	0,97	8038	8120	8201	8282	8363	8444	8524	8604	8684	8764	0,97
1,63	0,97	8843	8922	9001	9079	9157	9235	9313	9391	9468	9545	0,97
1,64	0,97	9622	9698	9775	9851	9926	0002	0077	0152	0227	0301	0,98
1,65	0,98	0376	0450	0523	0597	0670	0743	0816	0889	0961	1033	0,98
1,66	0,98	1105	1177	1248	1319	1390	1461	1531	1601	1671	1741	0,98
1,67	0,98	1810	1880	1949	2018	2086	2154	2223	2290	2358	2426	0,98
1,68	0,98	2493	2560	2627	2693	2759	2825	2891	2957	3022	3088	0,98
1,69	0,98	3153	3217	3282	3346	3410	3474	3538	3601	3665	3728	0,98
1,70	0,98	3790	3853	3915	3978	4040	4101	4163	4224	4285	4346	0,98
1,71	0,98	4407	4468	4528	4588	4648	4707	4767	4826	4885	4944	0,98
1,72	0,98	5003	5061	5120	5178	5235	5293	5351	5408	5465	5522	0,98
1,73	0,98	5578	5635	5691	5747	5803	5859	5914	5970	6025	6080	0,98
1,74	0,98	6135	6189	6244	6298	6352	6405	6459	6513	6566	6619	0,98
1,75	0,98	6672	6724	6777	6829	6881	6933	6985	7037	7088	7139	0,98
1,76	0,98	7190	7241	7292	7342	7393	7443	7493	7543	7592	7642	0,98
1,77	0,98	7691	7740	7789	7838	7886	7935	7983	8031	8079	8127	0,98
1,78	0,98	8174	8222	8269	8316	8363	8409	8456	8502	8549	8595	0,98
1,79	0,98	8641	8686	8732	8777	8822	8868	8912	8957	9002	9046	0,98
1,80	0,98	9091	9135	9179	9222	9266	9309	9353	9396	9439	9482	0,98
1,81	0,98	9525	9567	9609	9652	9694	9736	9778	9819	9861	9902	0,98
1,82	0,98	9943	9984	0025	0066	0106	0147	0187	0227	0267	0307	0,99
1,83	0,99	0347	0386	0426	0465	0504	0543	0582	0621	0659	0698	0,99
1,84	0,99	0736	0774	0812	0850	0888	0925	0963	1000	1037	1074	0,99
1,85	0,99	1111	1148	1184	1221	1257	1293	1330	1365	1401	1437	0,99
1,86	0,99	1472	1508	1543	1578	1613	1648	1683	1718	1752	1787	0,99
1,87	0,99	1821	1855	1889	1923	1956	1990	2024	2057	2090	2123	0,99
1,88	0,99	2156	2189	2222	2254	2287	2319	2352	2384	2416	2448	0,99
1,89	0,99	2479	2511	2542	2574	2605	2636	2667	2698	2729	2760	0,99

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1,90	0,99	2790	2821	2851	2881	2912	2942	2972	3001	3031	3061	0,99
1,91	0,99	3090	3119	3148	3178	3207	3235	3264	3293	3321	3350	0,99
1,92	0,99	3378	3406	3435	3463	3490	3518	3546	3574	3601	3628	0,99
1,93	0,99	3656	3683	3710	3737	3764	3790	3817	3844	3870	3896	0,99
1,94	0,99	3923	3949	3975	4001	4026	4052	4078	4103	4129	4154	0,99
1,95	0,99	4179	4204	4229	4254	4279	4304	4329	4353	4378	4402	0,99
1,96	0,99	4426	4450	4475	4498	4522	4546	4570	4593	4617	4640	0,99
1,97	0,99	4664	4687	4710	4733	4756	4779	4802	4824	4847	4870	0,99
1,98	0,99	4892	4914	4937	4959	4981	5003	5025	5047	5068	5090	0,99
1,99	0,99	5111	5133	5154	5176	5197	5218	5239	5260	5281	5302	0,99
2,00	0,99	5322	5343	5363	5384	5404	5425	5445	5465	5485	5505	0,99
2,01	0,99	5525	5545	5564	5584	5604	5623	5643	5662	5681	5700	0,99
2,02	0,99	5719	5738	5757	5776	5795	5814	5832	5851	5870	5888	0,99
2,03	0,99	5906	5925	5943	5961	5979	5997	6015	6033	6050	6068	0,99
2,04	0,99	6086	6103	6121	6138	6156	6173	6190	6207	6224	6241	0,99
2,05	0,99	6258	6275	6292	6308	6325	6342	6358	6375	6391	6407	0,99
2,06	0,99	6423	6440	6456	6472	6488	6504	6519	6535	6551	6567	0,99
2,07	0,99	6582	6598	6613	6628	6644	6659	6674	6689	6704	6719	0,99
2,08	0,99	6734	6749	6764	6779	6794	6808	6823	6837	6852	6866	0,99
2,09	0,99	6880	6895	6909	6923	6937	6951	6965	6979	6993	7007	0,99
2,10	0,99	7021	7034	7048	7061	7075	7088	7102	7115	7128	7142	0,99
2,11	0,99	7155	7168	7181	7194	7207	7220	7233	7246	7258	7271	0,99
2,12	0,99	7284	7296	7309	7321	7334	7346	7358	7371	7383	7395	0,99
2,13	0,99	7407	7419	7431	7443	7455	7467	7479	7490	7502	7514	0,99
2,14	0,99	7525	7537	7548	7560	7571	7583	7594	7605	7616	7627	0,99
2,15	0,99	7639	7650	7661	7672	7683	7693	7704	7715	7726	7737	0,99
2,16	0,99	7747	7758	7768	7779	7789	7800	7810	7820	7831	7841	0,99
2,17	0,99	7851	7861	7871	7881	7891	7901	7911	7921	7931	7941	0,99
2,18	0,99	7951	7960	7970	7980	7989	7999	8008	8018	8027	8037	0,99
2,19	0,99	8046	8055	8065	8074	8083	8092	8101	8110	8119	8128	0,99
2,20	0,99	8137	8146	8155	8164	8173	8181	8190	8199	8207	8216	0,99
2,21	0,99	8224	8233	8241	8250	8258	8267	8275	8283	8292	8300	0,99
2,22	0,99	8308	8316	8324	8332	8340	8348	8356	8364	8372	8380	0,99
2,23	0,99	8388	8396	8403	8411	8419	8426	8434	8442	8449	8457	0,99
2,24	0,99	8464	8472	8479	8486	8494	8501	8508	8516	8523	8530	0,99
2,25	0,99	8537	8544	8552	8559	8566	8573	8580	8586	8593	8600	0,99
2,26	0,99	8607	8614	8621	8627	8634	8641	8648	8654	8661	8667	0,99
2,27	0,99	8674	8680	8687	8693	8700	8706	8712	8719	8725	8731	0,99
2,28	0,99	8738	8744	8750	8756	8762	8768	8775	8781	8787	8793	0,99
2,29	0,99	8799	8805	8810	8816	8822	8828	8834	8840	8845	8851	0,99

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,30	0,99	8857	8862	8868	8874	8879	8885	8890	8896	8902	8907
2,31	0,99	8912	8918	8923	8929	8934	8939	8945	8950	8955	8960
2,32	0,99	8966	8971	8976	8981	8986	8991	8996	9001	9006	9011
2,33	0,99	9016	9021	9026	9031	9036	9041	9045	9050	9055	9060
2,34	0,99	9065	9069	9074	9079	9083	9088	9093	9097	9102	9106
2,35	0,99	9111	9115	9120	9124	9129	9133	9137	9142	9146	9150
2,36	0,99	9155	9159	9163	9168	9172	9176	9180	9184	9189	9193
2,37	0,99	9197	9201	9205	9209	9213	9217	9221	9225	9229	9233
2,38	0,99	9237	9241	9245	9249	9252	9256	9260	9264	9268	9271
2,39	0,99	9275	9279	9282	9286	9290	9293	9297	9301	9304	9308
2,40	0,99	9311	9315	9319	9322	9326	9329	9333	9336	9339	9343
2,41	0,99	9346	9350	9353	9356	9360	9363	9366	9370	9373	9376
2,42	0,99	9379	9383	9386	9389	9392	9395	9398	9402	9405	9408
2,43	0,99	9411	9414	9417	9420	9423	9426	9429	9432	9435	9438
2,44	0,99	9441	9444	9447	9450	9452	9455	9458	9461	9464	9467
2,45	0,99	9469	9472	9475	9478	9480	9483	9486	9489	9491	9494
2,46	0,99	9497	9499	9502	9505	9507	9510	9512	9515	9517	9520
2,47	0,99	9523	9525	9528	9530	9533	9535	9538	9540	9542	9545
2,48	0,99	9547	9550	9552	9554	9557	9559	9561	9564	9566	9568
2,49	0,99	9571	9573	9575	9578	9580	9582	9584	9586	9589	9591
2,5	0,999	5930	6143	6345	6537	6720	6893	7058	7215	7364	7505
2,6	0,999	7640	7767	7888	8003	8112	8215	8313	8406	8494	8578
2,7	0,999	8657	8732	8803	8870	8934	8994	9051	9105	9156	9204
2,8	0,999	9250	9293	9334	9373	9409	9443	9476	9507	9536	9563
2,9	0,999	9589	9613	9636	9658	9679	9698	9716	9733	9750	9765
3,0	0,999	9779	9793	9805	9817	9829	9839	9849	9859	9867	9876
3,1	0,999	9884	9891	9898	9904	9910	9916	9921	9926	9931	9936
3,2	0,999	9940	9944	9947	9951	9954	9957	9960	9962	9965	9967
3,3	0,999	9969	9971	9973	9975	9977	9978	9980	9981	9982	9984
3,4	0,999	9985	9986	9987	9988	9989	9989	9990	9991	9991	9992
3,5	0,999	9993	9993	9994	9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996
3,6	0,999	9996	9997	9997	9997	9997	9998	9998	9998	9998	9998
3,7	0,999	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Примеры, выясняющие состав таблиц

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0,212} e^{-t^2}\,dt = 0,235680; \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0,293} e^{-t^2}\,dt = 0,321393.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Приложение метода математических ожиданий — метода моментов — к выводу второй предельной теоремы исчисления вероятностей.