АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ РККА

С. А. БОГОМОЛОВ, М. Е. ВОЛОКОБИНСКИЙ,
З. З. ВУЛИХ и Б. И. КАЖДАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть I

Выпуск I

НАЧАЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ИЗДАНИЕ
Артиллерийской академии РККА
ЛЕНИНГРАД
1932

АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ РККА

С. А. БОГОМОЛОВ, М. Е. ВОЛОКОБИНСКИЙ,
З. З. ВУЛИХ и Б. И. КАЖДАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЧАСТЬ I

Выпуск I

НАЧАЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ИЗДАНИЕ
Артиллерийской академии РККА
ЛЕНИНГРАД
1932

Ответственный редактор *Краз, Г. Я.*
Технический редактор *Позоева, Н. М.*
Поступило в производство 29/X 1932 г.
Вышло в свет в декабре 1932 г.
Колич. печ. знаков на листе 40.000.
Бумага печ. 72 × 105.

Ленгорлит № 56512. Арт. ак. № 34. **Заказ № 5097.** Тираж 2500 экз. 18 п. л.

ЛОЦТ Наркомвоенмора **имени Клима Ворошилова (Ленинград, пл. Урицкого, 10).**

Предисловие.

Настоящий курс математического анализа составлен бригадой, состоящей из т.т.: Богомолова С.А., Волокобинского М.И., Вулиха З.З. и Каждана Б.И. Как правило в окончательной обработке изложения участвовали все члены бригады, но составление различных частей курса было распределено между отдельными членами бригады.

Так в I-м выпуске § § I-IO составлены С.А. Богомоловым, остальные - З.З. Вулихом.

Авторы будут весьма благодарны за все замечания и советы, способствующие улучшению книги.

к Богомолова

В В Е Д Е Н И Е.

МАТЕМАТИКА, КАК НАУКА, ОТРАЖАЮЩАЯ ЗАКОНЫ ОБ'ЕКТИВНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ.

Математика является могучим орудием для познания природы; познавая силы природы, мы заставляем их служить нам, нашей промышленности и вообще нашему строительству во всех областях жизни. Поэтому солидное математическое образование необходимо для инженера вообще и в особенности - для командира-инженера, к деятельности которого готовятся слушатели Артиллерийской Академии.

Математика нужна нашему слушателю во-первых потому, что наши обще-технические и специально технические дисциплины строятся на математическом фундаменте и предполагают хорошую подготовку в этой области. Во-вторых, и по окончании Академии математика будет нужна слушателю в повседневной работе командира-инженера, и в особенности - в его исследовательской работе. Здесь мы подходим к третьему обстоятельству, особенно важному для нас. Если в общей промышленности мы имеем (хотя бы до некоторой степени) обмен опытом между различными странами, то в военном деле все достижения держатся в строгом секрете, а потому военные инженеры СССР будут предоставлены собственным силам. Вследствие этого им нужно особенно напряженно развивать свою исследовательскую работу по военно-техническим дисциплинам, а для ее успешности необходимо основательное знакомство с математическим анализом.

В чем же заключается сила математического анализа, делающая его таким могучим орудием для познания природы и развития техники?

Ставя математическое образование на службу социалистическому строительству вообще и военному строительству в частности, мы должны порвать с прежней формально-идеалистической установкой в математике, господствующей и ныне в буржуазных странах. В силу такой установки, основные понятия математики об'являлись "свободным созданием человеческого духа"; тогда как для нас математика важна именно потому, что ее законы суть не произвольные построения, а отражения об'ективной действительности; именно поэтому она поможет строителям социализма перестроить мир.

Математику вообще можно определить, как науку, изучающую "пространственные формы и количественные отношения действительного мира"(Энгельс А.Д., изд. IУ, стр. 33). Но математика не ограничивается при этом какой-нибудь одной определенной областью действительности; в указанном месте Энгельс далее говорит: "Чтобы изучить эти формы и отношения в их чистом виде, следует их оторвать совершенно от их содержания".

Вследствие сказанного, математика является отвлеченной наукой, которая отвлекается от специфических особенностей данного явления и занимается общими законами количественных и пространственных отношений. Но именно благодаря этому математика лежит в основе всех наук, изучающих явления, поддающиеся количественному учету или развертывающиеся в пространстве.

Разбираясь в окружающей нас природе, в человеческом обществе и в нас самих, мы находим везде не застывшие неизменные об'екты (вещи) и состояния, а всеобщее движение и непрекращающиеся изменения; "все течет", как сказал один древний философ. Не только такие явления, как полет снаряда, дают нам целый ряд переменных величин (скорость, высота над горизонтом, направление полета и т.д.), но и как будто бы неизменные строительные сооружения на самом деле представляют ту же картину господствующих везде процессов изменения: обмен внутреннего воздуха с наружным, проникновение влажности в стены, постепенное и медленное разрушение под влиянием атмосферных и других причин.

Если мы еще глубже вдумаемся в происходящие вокруг нас изменения, то увидим, что движущим началом служит взаимопроникновение и борьба противоположностей. Так, температура воздуха в каждый данный момент получается в результате борьбы нагревания солнцем и охлаждения в мировое пространство; развитие организма идет путем борьбы между постоянным созиданием новых и разрушением старых клеток; развитие общества идет путем борьбы классов и т.п.

Итак, мир есть совокупность процессов; это - одно из основных положений диалектического материализма. Поэтому математика, если она хочет быть действительно могучим орудием для познания природы, должна отразить это вечное изменение в своих основных понятиях. Если с этой точки зрения взглянуть на элементарную математику, то нетрудно подметить, что она почти исключительно имеет дело с постоянными величинами; исключением является разве лишь тригонометрия (собственно- гониометрия), изучающая изменения тригонометрических функций. Недаром Энгельс называет элементарную математику "математикой постоянных величин" (А.Д., стр. 123). Поэтому элементарная математика не в силах решить многих задач, которые ставятся естествознанием и техникой.

Решительный перелом наступил при переходе к методам так называемой высшей математики (в XVII ст.): "поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика" (Энгельс Д.П., стр. 36).

Понятие переменной величины является одним из основных в математическом анализе; оно служит отражением процессов изменения, всегда и везде протекающих в природе; само по себе оно настолько просто, что не требует каких-либо пояснений.

Наоборот, под **постоянной** величиной мы должны, строго говоря, понимать лишь момент в процессе изменения переменной (т.е.: одно из ее отдельных значений, вырванное из связного ряда, характеризующего изменение данной величины). В этом пункте мы существенно отклоняемся от того подхода к этим понятиям, который господствовал в прежних курсах математики. Там понятие о постоянной величине в сущности клалось в основу, а переменная определялась, как такая величина, которая может иметь различные значения. При таком подходе, из понятия переменной выхолащивалась самая идея о процессе изменения, которая так существенна для диалектического понимания мира.

К понятияю постоянной величины мы приходим также путем абстракции (отвлечения), неизбежной как в математике, так и в других.науках. Изучая какое-нибудь явление, мы сосредоточиваем внимание на определенной стороне его, отвлекаясь от других сторон, и таким образом вырываем его из всеобщей связи материального мира; вследствие этого величины, по существу переменные, рассматриваются как постоянные при данных условиях и на данном отрезке времени. Так,например,ускорение силы тяжести есть величина переменная, что обнаруживается при передвижении по земной поверхности или при поднятии на большую высоту (последнее обстоятельство приходится учитывать при сверхдальной стрельбе); но поскольку речь идет об одном и том же месте земной поверхности и о небольших поднятиях над ней, это ускорение можно считать постоянным.

Точно также температуру кипения воды при обычных условиях мы принимаем за постоянную, но она уменьшается с уменьшением давления; это становится заметным при под'еме на высокие горы.

В математическом анализе переменные величины играют существенную роль. Постоянными же в полном смысле этого слова являются отдельные вполне определенные числа, как например: 2,7, $-\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, число π и др. Однако, непроходимой пропасти между переменными и постоянными нет; сплошь и рядом мы встречаемся с величинами, которые могут быть и постоянными и переменными. Так, например, радиус окружности есть по существу величина переменная; но если мы рассматриваем соотношения между хордами в одной и той же окружности, то ее радиус приходится считать постоянным.

Итак, понятие переменной величины является одним из глубоко диалектических понятий математического анализа прежде всего - потому, что оно отражает процессы изменения, господствующие в природе; кроме того мы видели в нем своеобразное проявление единства противоположностей.

Выше было сказано, что мир есть совокупность процессов; развивая это положение, надо добавить, что эти процессы не протекают изолированно друг от друга; наоборот, в природе имеет место всеобщая связь и взаимодействие вещей и явлений. Отсюда вытекает, что в природе изменения различных переменных находятся в связи друг с другом. Примеров этому можно привести множество. Так, об'ем и давление определенного количества газа могут изменяться только в связи друг с другом по определенному закону (при постоянной температуре - по закону Бойль-Мариотта); дальность полета снаряда изменяется в зависимости от изменения угла бросания, начальной скорости и других величин, и т.п.

Если математика своим особым образом отражает законы об'ективного мира, то она должна отразить и эту зависимость между изменениями различных переменных; математика и делает это, вводя понятия функции и функциональной зависимости.

Пусть имеются 2 переменные величины x и y, и пусть переменная x может принимать любое из возможных для нее значений; тогда это x называется п е р е м е н н о й н е з а в и с и м о й или аргументом. Если же переменная y меняется в зависимости от x, так что получает определенное значение, коль скоро x задано, то это y называется переменной зависимой или ф у н к ц и е й; сама же зависимость y от x называется функциональной. Заметим, что при всеобщей связи природных процессов говорить о переменной независимой можно только с точки зрения математической абстракции: желая выявить влияние отдельных факторов, мы вырываем явление из общей связи и рассматриваем его с какой-нибудь определенной стороны, и таким образом получаем право говорить о переменных независимых.

Так, например, изучая свойства газа, мы можем отвлечься от изменений температуры, которую нельзя конечно считать абсолютно постоянной, отвлечься и от других факторов и рассматривать только зависимость между об'емом и давлением; тогда, имея возможность произвольно менять об'ем, мы принимаем его за переменную независимую, а давление газа будет функцией от его об'ема;

закон Бойль-Мариотта дает соответствующую функциональную зависимость. Но совершенно ясно, что можно поступить и наоборот: менять по произволу давление, а об'ем рассматривать, как функцию давления. Отсюда уже видно, что **деление** переменных на независимые и зависимые не имеет безусловного характера, а только относительный: особенности вопроса определяют, что мы возьмем в качестве переменной независимой и что - в качестве функции. Возьмем для другого примера явление выстрела из орудия; начальная скорость снаряда зависит от количества и качества заряда, от конструкции орудия и от других факторов; но если мы поставим себе целью выяснить зависимость горизонтальной дальности от начальной скорости, то в этом вопросе мы будем считать начальную скорость переменной независимой, а дальность полета - ее функцией; известная формула параболической теории дает нам искомую функциональную зависимость.

Таково весьма важное для нас понятие о функции; в следующем параграфе это понятие будет математически оформлено.

В настоящем введении мы старались методологически подойти к некоторым основным понятиям математического анализа. По мере развития курса и появления новых понятий, мы также будем стараться освещать их на основе марксистско-ленинской методологии.

§ I. ФУНКЦИИ.

I. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ. Условимся, как обычно это делается, обозначать переменные величины последними буквами французского алфавита:

$$x, y, z, t, u, v \ldots\ldots$$

а постоянные - первыми его буквами:

$$a, b, c, \ldots k, l, \ldots\ldots$$

Определение функции от одной переменной независимой было дано во введении; приведем еще несколько примеров. Если мы рассматриваем движение центра инерции снаряда, то параболическая теория дает формулу:

$$y = x \cdot tg\,\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

связывающую его ординату y (высоту над горизонтом) с абсциссой x (расстояние по горизонтальной оси); остальные буквы обозначают постоянные величины. Легко видеть, что эта формула определяет y как функцию от x Вспомним значение постоянных: θ_0 - угол бросания, v_0 начальная скорость, g - ускорение силы тяжести; все эти величины для каждого отдельного определенного выстрела являются действительно постоянными, но при изменении условий стрельбы все они (строго говоря, даже g) могут меняться; такие величины в математике называются п а р а м е т р а м и.

Если мы рассматриваем падение в пустоте, то при известных начальных условиях, величина пройденного пути S в некоторый момент времени t определяется формулой:

$$S = \frac{1}{2} g t^2;$$

пройденный путь, конечно, есть функция времени и эта формула определяет характер функциональной зависимости.

Во внутренней балистике (курс проф. Граве, вып. I, стр.11) температура T продуктов горения определяется как функция их об'ема W следующей формулой:

$$T = T_0 \left\{ \frac{W_1 - \alpha}{W - \alpha} \right\}^{\theta},$$

где $T_0, W_1; \alpha$ и θ - постоянные.

Число таких примеров можно увеличивать без труда.

Во всех предыдущих примерах каждому значению переменной независимой соответствует только одно вполне определенное значение функции; такие функции называются однозначными. В других случаях для данного значения переменной независимой получаем несколько определенных значений функции; такие функции называются многозначными. Так, например, функция:

$$y = \pm\sqrt{x}$$

для данного значения x (положительного, если мы ограничиваемся вещественными числами) имеет 2 различных значения; далее функция:

$$y = \sin x$$

- однозначна, но если мы захотим угол рассматривать как функцию его синуса (определять угол по данному синусу), то получим, как известно, бесчисленное множество различных значений.

В математическом анализе однозначные функции имеют особенно важное значение; поэтому многозначные функции превращаются в однозначные с помощью дополнительных условий (об этом будет речь в дальнейшей части курса).

Если мы хотим выразить, что y есть функция от x, не указывая, какова именно эта функциональная зависимость, то применяется следующая сокращенная запись:

$$y = f(x), \text{ или } \quad y = \mathcal{F}(x), \text{ или } \quad y = \varphi(x) \quad \text{и т.д.}$$

(употребляемая обычно буква "эф" есть первая буква слова *fonction* – функция).

Постоянную величину можно, ради общности, рассматривать, как частный случай функции, именно - такой функции, у которой на данном отрезке времени все значения равны между собой. Весьма часто под постоянной можно понимать такую функцию, которая на данном отрезке времени меняется так мало, что мы можем отвлечься от изменений ее величины. Постоянная есть частный случай функции подобно тому, как покой есть частный случай движения. Обобщим понятие функции еще в другом направлении. До сих пор мы имели дело с одной переменной независимой, но весьма часто встречаются функции от нескольких переменных независимых.

Вплотную мы займемся такими функциями в дальнейшей части курса, а сейчас ограничимся предварительным определением. Пусть x, y, z обозначают измерения прямоугольного параллелепипеда, а v — его об'ем; совершенно ясно, что каждая из переменных x, y, z может принимать любое положительное значение, независимо от того, каковы значения двух остальных; поэтому эти три переменные называются **н е з а в и с и м ы м и**. Но коль скоро все они заданы, то переменная v получает вполне определенное значение:

$$v = x \cdot y \cdot z .$$

Следовательно v будет функцией от 3 переменных независимых.

Точно также горизонтальная дальность:

$$\underline{X} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\theta_0$$

есть функция от угла бросания θ_0 и от начальной скорости снаряда v_0; а эти две величины могут меняться независимо друг от друга; так что $\underline{X}$ есть функция от 2 переменных независимых (g есть величина постоянная).

2. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ.

Имеются 3 различных способа для задания функции (снова говорим о функциях от одной переменной независимой):

а) Аналитическое задание состоит в том, что дается уравнение, связывающее переменную независимую x и ее функцию y как например:

$$x^3+y^3-3axy=0;$$

если уравнение не решено относительно y, то функция называется неявной; если же решено, то явной. Сейчас мы будем иметь дело с этим последним случаем; тогда аналитическое задание состоит в том, что нам дается формула, которая указывает, какие действия и в какой последовательности надо произвести над переменной независимой для того, чтобы получить соответствующее значение функции. Примеры такого задания уже встречались на предыдущих страницах; приведем еще несколько:

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1};$$

$$y=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}};$$

длина l полосы железа есть функция температуры t, определяемая формулой:

$$l=l_0+at+bt^2,$$

где l_0, a, b - постоянные.

При колебательном движении пройденный путь s задается в функции времени t следующей формулой:

$S = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, где A, ω, φ — пост.

В одной из эмпирических формул внутренней балистики, зависимость между давлением p пороховых газов и путем x, пройденным снарядом, выражается зависимостью:

$$p = \frac{\mathcal{Y}_m}{S} a b^2 n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(x^n + a)^3},$$

Уравнение изогнутой оси балки, лежащей на упругом основании, имеет вид:

$$y = \frac{P}{8EJ} \cdot \frac{1}{\alpha^3} e^{-\alpha x} \cdot \left\{ \cos \alpha x + \sin \alpha x \right\},$$

где все буквы, за исключением x и y обозначают постоянные; это уравнение аналитически определяет y как функцию от x.

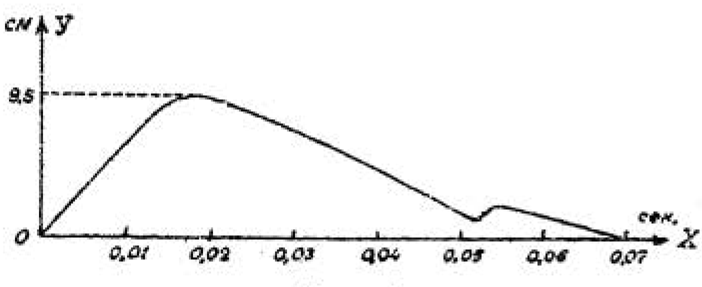
При аналитическом задании, в наши формулы могут входить не только алгебраические действия, но и другие простейшие функции, уже изученные нами, как, например: синус, логарифм и т.д. С этим способом задания функции мы больше всего будем иметь дело.

б) Т а б л и ч н о е з а д а н и е состоит в том, что для значений переменной независимой, следующих друг за другом через определенные промежутки, выписываются рядом соответствующие значения функции. Слушатель хорошо знаком с этим способом задания по таблицам логарифмов и тригонометрических функций; в справочниках обыкновенно помещаются таблицы квадратов, кубов, корней квадратных, кубичных и др. величин. Таблицы широко применяются в балистике, в теории вероятностей и в других наших специальных дисциплинах.

Надо сейчас же указать один недостаток табличного задания: значения функции даны не для всех значений аргумента, и их приходится вычислять, делая различные упрощающие допущения; так, например, поступают с вычислением логарифмов при пользовании "пропорциональными частями".

в) Графическое задание состоит в том, что задается кривая, отнесенная к определенной системе координат, причем ее ординаты, соответствующие данной абсциссе x, и дают нам значения функции, соответствующие данному значению x переменной независимой.

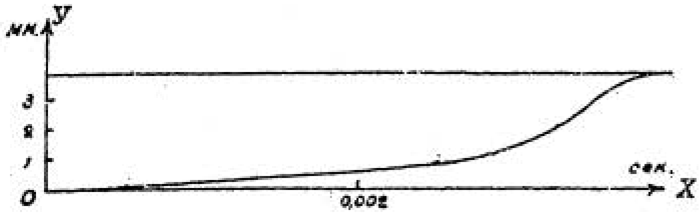
Иногда это бывает единственно возможный способ задания функции. Так, всем известны записи самопишущих метеорологических приборов; в результате получаются кривые суточного хода температуры, давления и т.п., которые вполне определяют эти величины как функции времени.



Черт. 1.

На черт. I изображена кривая, показывающая движение затвора пулемета в зависимости от действующего на него давления газа и пружины, стремящейся возвратить затвор на место. На горизонтальной оси отложено время, а по вертикальной - путь затвора; таким образом, кривая дает пройденный путь в функции времени. Последняя часть кривой показывает удар и отскакивание затвора, прежде чем он возвратится на место. Кривая получена опытным путем.

Далее на черт. 2 изображена кривая, полученная на бомбе Сарро и Вьели путем записи на закопченном барабане с помощью пера, прикрепленного к поршню; она дает нам сжатие крешера (в мм) с течением времени (тысячные доли секунды).



Черт. 2.

Таким образом, здесь опять-таки имеем графическое задание функции, а именно: кривая дает нам сжатие крешера, как функцию времени.

Что можно сказать о сравнительной ценности различных способов задания функции? Ответ на этот вопрос зависит от тех требований, которые мы пред'являем к определению функции. Если говорить о точности, то наибольшие возможности в этом отношении представляет аналитическое задание; затем идет табличное и в хвосте - графическое; если требовать наглядности, то графическое станет на первое место; с точки зрения удобства пользования, предпочтение придется отдать табличному. Несомненно будет очень хорошо, если можно соединить 2 или все 3 способа задания. В книге *Jahnke und Emde*, где имеются различные таблицы и графики, так именно и сделано для некоторых наиболее важных (в приложениях) функций.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЯВНЫХ ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИ.

Сплошь и рядом приходится вычислять частное значение функции, соответствующее данному значению переменной независимой. Если нам дана какая-нибудь функция $f(x)$, то ее значение при $x=a$ обозначается символом $f(a)$.

Пусть, например, дана функция:

$$f(x)=\frac{3x-7}{x^2+1};$$

требуется вычислить $f(3)$, т.е. значение нашей функции при $x=3$; в таком случае имеем:

$$f(3)=\frac{3.3-7}{3^2+1}=0{,}2.$$

При падении в пустоте, пройденный путь S выражается в функции времени формулой:

$$S=\frac{1}{2}gt^2, \text{ где } g=9{,}8\ м/сек^2;$$

найти пройденный путь в конце 10-й секунды. Дело сводится к вычислению значения S при $t=10$; обозначая искомую величину через S_{10} можем нап ıть:

$$S_{10}=\frac{1}{2}.9{,}8.10^2=490\,м.$$

Подобные вычисления могут приводить к более общим результатам. Пусть, например, нам задана функция:

$$f(x)=5x^4-3x^2+3;$$

составим $f(-x)$, для чего в правой части надо везде x заменить на $(-x)$:

$$f(-x)=5(-x)^4-3(-x)^2+9=5x^4-3x^2+9,$$

ибо все степени x четные. Таким образом, при всяком x имеем:

$$f(-x)=f(x);$$

функции, обладающие таким свойством, называются четными.

Если же функция обладает таким свойством, что при всяком x имеем:

$$f(-x)=-f(x),$$

то она называется нечетной. Пусть читатель проверит, что таковыми будут функции

$$f(x)=2x^3-7x$$

$$f(x)=\sin x.$$

Если имеем дело с функцией $f(x,y)$ от двух переменных независимых, то символом $f(a,b)$ обозначается то ее значение, которое она принимает при $x=a$ и $y=b$.

Пусть нам дана функция:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x+y}-3x^2y}{x^3+y^2},$$

и требуется вычислить $f(4;5)$; согласно сказанному пишем

$$f(4;5)=\frac{\sqrt{4+5}-3.4^2.5}{4^3+5^2}=-\frac{237}{89}.$$

Пусть читатель проверит, что:

$$f(5;4)=-\frac{297}{141}.$$

Известно, что горизонтальная дальность полета снаряда X задается формулой: *

$$X=\frac{v_0^2}{g}\cdot\sin 2\theta_0,$$

где значение всех входящих сюда букв было недавно разъяснено; вычислить дальность полета, если $v_0=600$ м|сек $\theta_0=45^0$, а ускорение силы тяжести g принять приближенно равным 10 м|сек^2. Обозначая искомую величину через X_0 получим:

$$X_0=\frac{(600)^2}{10}\cdot\sin 90^\circ=36\text{ км}.$$

Примеры для упражнения.

1) Проверить, что если $f(x)=x^3-2x^2+3x-5$, то:

$$f(1)=-3;\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=-7\frac{1}{8};\quad f(3)=13;$$

$$f(a)=a^3-2a^2+3a-5.$$

2) $f(x,y)=\frac{(3-x)^2+2y}{5y-6x}$; вычислить $f(3;1)$ (Отв.: $-\frac{2}{13}$)

3) Наибольший под'ем снаряда равен:

$$Y=\frac{v_0^2}{2g}\cdot\sin^2\theta_0;$$

вычислить Y при $v_0=600$ м|сек, $\theta_0=45^0$ и $g=10$ м|сек^2 (отв.: 9 км).

4) Вычислить горизонтальную дальность при $v_0 = 600$ м|сек $\vartheta_0 = 15^0$, $g = 10$ м|сек^2 (отв.: 18 км).

5) Доказать, что $\cos x$ есть четная функция.

6) Доказать, что если $f(x) = x + \frac{1}{x}$ то всегда:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

7) $f(n) = 1.2.3 \ldots n$; вычислить $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$.

4. ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ.

Пусть переменная независимая сначала имела некоторое значение x, а потом получила новое значение x_1; тогда разность: $x_1 - x$ называется приращением переменной независимой. Приращение это может быть положительным или отрицательным - в зависимости от того, увеличивается ли наша переменная независимая при своем изменении, или уменьшается. Так, если $x=5$ а $x_1 = 7$, то $x_1 - x = 2$, и приращение положительно; если же $x = 5$ а $x_1 = 3\frac{1}{2}$ то $x_1 - x = -1\frac{1}{2}$, и приращение отрицательно. Приращение переменной x обыкновенно обозначается символом Δx (читай: "дельта икс" и помни, что это - не произведение, а символ для обозначения приращения); таким образом, имеем

$$x_1 - x = \Delta x,$$

откуда:

$$x_1 = x + \Delta x.$$

Значение x_1 часто называют приращенным значением.

В дальнейшем части курса нам часто придется вычислять приращение функции, соответствующее данному приращению переменной независимой; поэтому разберем здесь этот вопрос. Начнем с примера. Пусть дана функция:

$$y = x^2,$$

и требуется найти ее приращение, зная что x сначала имел значение $=2$, а потом получил приращение $\Delta x=0{,}5$. При $x=2$ имеем $y=4$; если же переменной независимой дадим приращенное значение $x_1=2+0{,}5=2{,}5$, то новое значение функции будет:

$$y_1=(2{,}5)^2=6{,}25;$$

следовательно, приращение функции равно разности этих значений:

$$6{,}25-4=2{,}25.$$

Решим теперь этот же вопрос для нашей функции в общем виде: при некотором значении x переменной независимой функция равна:

$$y=x^2;$$

переходя к приращенному значению, вместо x подставим $(x+\Delta x)$:

$$y_1=(x+\Delta x)^2;$$

тогда приращение функции равно:

$$y_1-y;$$

эта разность обозначается через Δy ("дельта игрэк"), так что:

$$\Delta y=y_1-y=(x+\Delta x)^2-x^2;$$

произведя выкладки в правой части, окончательно найдем:

$$\Delta y=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Предыдущий численный результат получается отсюда при $x=2$ и $\Delta x=0{,}5$.

Приращение функции само является функцией от 2 переменных независимых, так как приращению Δx можно давать значения, независимо от того, чему равен x в данный момент.

Выведем теперь общую формулу для приращения функции. Пусть дана функция:

$$y=f(x);$$

и пусть переменная независимая получает приращение Δx, переходя от первоначального значения x к приращенному $(x+\Delta x)$; тогда приращенное значение функции будет:

$$y_1=f(x+\Delta x),$$

а ее приращение Δy равно разности:

$$\Delta y=y_1-y,$$

или окончательно:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Эта формула дает нам правило для составления выражения, дающего в общем виде приращение функции: берем значение функции при некотором значении x, подставляем вместо x приращенное значение $(x+\Delta x)$ и из полученного нового значения функции вычитаем первоначальное; после этого остается произвести некоторые упрощения.

Сделаем несколько примеров.

1) Пусть $y=x.(25-x)$

Здесь: $f(x)=25x-x^2$

$$f(x+\Delta x)=25(x+\Delta x)-(x+\Delta x)^2;$$

$$\Delta y=25x+25.\Delta x-x^2-2x.\Delta x-(\Delta x)^2-25x+x^2,$$

или:

$$\Delta y=25.\Delta x-2x.\Delta x-(\Delta x)^2$$

2) Пусть $y=\frac{1}{x}$;

тогда:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$f(x+\Delta x)=\frac{1}{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

3) Пусть $y=\sin x$, тогда:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=$$
$$=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

4) Измерив сторону квадрата, нашли ее равной 3 м и вычислили площадь; потом оказалось, что на самом деле сторона квадрата на 10 см меньше; насколько будет меньше истинное значение площади?

Так как площадь квадрата со стороной x равна x^2 то для приращения площади (обозначим ее через y) можно воспользоваться выведенной выше формулой:

$$\Delta y=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

У нас $x=3$ м, но это значение надо уменьшить на 10 см, так что $\Delta x=-0{,}1$ м; тогда соответствующее изменение площади будет:

$$\Delta y=2\cdot3\cdot(-0{,}1)+(0{,}1)^2=-0{,}59 \text{ кв. м},$$

т.е. наша площадь на самом деле будет на такую величину меньше.

5) Остановимся на замечательном свойстве линейной функции. Это имя носит функция вида:

$$y=a\cdot x+b, \quad \text{где } a \text{ и } b \text{ пост.};$$

вычисляем приращение функции:

$$\Delta y=a(x+\Delta x)+b-ax-b,$$

откуда:

$$\Delta y=a\cdot\Delta x, \qquad \dots\dots\dots\dots \qquad (*)$$

т.е. приращение линейной функции всегда пропорционально приращению переменной независимой.

Можно доказать и обратное предложение; пусть, именно, для некоторой функции имеет место равенство $(*)$, и пусть при некотором определенном значении x_0 переменной независимой, наша функция имела определенное значение y_0; а через y (без значка) назовем значение функции, соответствующее произвольному значению x переменной независимой. Тогда разности:

$$y-y_0 \quad \text{и} \quad x-x_0$$

можно рассматривать, как приращения наших величин, и формула $(*)$ дает:

$$y-y_0=a(x-x_0),$$

откуда:

$$y=ax+(y_0-ax_0),$$

обозначая постоянную величину (y_0-ax_0) через b, получим:

$$y=ax+b, \quad \text{что и тр. док.}$$

Так, например, закон Гука гласит, что удлинение пружины прямо пропорционально увеличению растягивающей силы; следовательно это удлинение (ℓ) есть линейная функция растягивающей силы (P):

$$\ell=aP+b;$$

коэффициенты a и b определяются опытным путем.

В заключение дадим геометрическое изображение приращения функции.

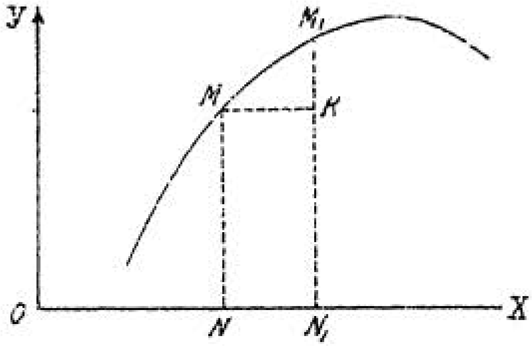
Пусть нам дана функция:

$$y=f(x);$$

возьмем прямоугольную систему координат и построим ее график, т.е. такую кривую, которая определяется уравнением $y=f(x)$ (говоря подробнее: эта кривая есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют нашему уравнению); на черт. 3 эта кривая изображена сплошной линией.

Возьмем на графике 2 точки

$$M(x;y) \quad и \quad M_1(x_1;y_1);$$



Черт. 3.

на нашем чертеже имеем:

$$ON=x, \quad NM=y; \quad ON_1=x_1, \quad N_1M_1=y_1.$$

Легко видеть, что отрезок NN_1 равен:

$$NN_1=ON_1-ON=x_1-x=\Delta x,$$

т.е. отрезок NN_1 дает нам приращение x, которое получает эта переменная при переходе от точки M к точке M_1.

Далее рассмотрим отрезок KM_1:

$$KM_1=N_1M_1-N_1K=N_1M_1-NM=y_1-y$$

$$KM_1=\Delta y;$$

Следовательно, отрезок KM_1 в данном случае является изображением приращения нашей функции, соответствующего приращению переменной независимой Δx.

Примеры для упражнения.

1) При падении в пустоте пройденный путь выражается следующей функцией времени:

$$S=\frac{1}{2}gt^2;$$

найти приращение пути в течении 11-секунды ($g=9,8$ м/сек^2)

Отв.: 102,9 м.

2) Радиус шара, первоначально равный 3 см, увеличился на 0,5 см; каково приращение об'ема?

Отв.: $\frac{127}{6}\cdot\pi$ куб. см.

3) $y=\frac{1}{x}$; найти Δy, когда x от значения $=5$ переходит к значению $=7$.

Отв.: $-\frac{2}{35}$.

4) $y=ax^2+bx+c$; найти Δy соответствующее приращению перем. незав. $=\Delta x$.

Отв.: $\Delta y=(2ax+b)\cdot\Delta x+a(\Delta x)^2$.

5) $y=x^3$; найти Δy.

Отв.: $\Delta y=3x^2\cdot\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$.

6) $S=\frac{1}{2}gt^2$; найти ΔS, соответствующее приращению перем. незав. $=\Delta t$.

Отв: $\Delta S=gt\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$

7) $y=\cos x$; найти Δy.

Отв: $\Delta y=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin(x+\frac{\Delta x}{2})$

8) $y=\mathcal{L}og\, x$; найти Δy.

Отв: $\Delta y=\mathcal{L}og(1+\frac{\Delta x}{x})$

§ 2. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ.

Роль математики в изучении природы в одной своей части сводится к изучению функциональных зависимостей, открытых естествознанием и техникой. Поэтому стержневой вопрос первых глав курса - исследование изменения функции при изменении переменной независимой.

Для строителя очень важно знать, как изменяется прочность балки при изменении ее размеров; для артиллериста - как изменяется давление пороховых газов в канале орудия и т.д.

Графическое изображение функции дает наглядную картину ее изменения: мы непосредственно усматриваем, где она возрастает и где убывает; где возрастала быстрее и где медленнее; где достигла наибольшего значения, и т.д. Наша основная задача в первой части курса - научиться отвечать на такие вопросы и для функций, заданных аналитически.

Для того, чтобы составить себе предварительное понятие о том, как это делается, и чтобы вполне конкретно поставить задачи для первых параграфов курса, разберем следующие примеры.

I. З а д а ч а: требуется выделить для огорода прямоугольный участок земли, причем материала хватит лишь на 50 м изгороди. Каковы должны быть измерения прямоугольника для того, чтобы выделенная площадь была наибольшей?

Обозначим искомые измерения прямоугольника через x и z, а его площадь - через y; тогда:

$$y = x \cdot z.$$

Переменные x и z не будут независимыми; так как периметр прямоугольника должен $= 50$, то они связаны условием:

$$2x+2z=50,$$

откуда:

$$z=25-x.$$

Подставляя, получаем площадь, как функцию от одной переменной независимой:

$$y=x(25-x).$$

Вот теперь мы и должны исследовать, как изменяется y при изменении x; в частности, для нас важно найти, при каком x наша функция y получает наибольшее значение.

Сначала исследуем вопрос грубым образом, давая x лишь целые значения от 0 до 25 (легко видеть, что x не может быть $\leqslant 0$ и не может быть $\geqslant 25$, так как тогда площадь была бы $\leqslant 0$). Составим следующую табличку, где в первой строке помещены различные значения x, а во второй - соответствующие величины площади y:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	24	46	66	84	100	114	126	136	144

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18
y	150	154	156	156	154	150	144	136	126

Легко видеть, что дальше будут повторяться те же значения y, только - в обратном порядке.

Итак, наибольшая площадь получается при $x = 12$ м и $z = 13$ м, т.е. когда измерения ближе всего подходят к равенству; бросается также в глаза, что сначала площадь растет весьма быстро, но по мере приближения к наибольшему значению, темп роста замедляется, а потом начинается убывание.

Но это исследование слишком грубо, так как x может меняться непрерывно, проходя не только через целые значения. Поэтому исследуем нашу функцию подробнее. Из ее выражения:

$$y = x \cdot (25 - x)$$

и из того, что площадь должна быть >0, мы уже вывели ограничительные условия для x:

$$0 < x < 25 .$$

Имея в виду эти неравенства, будем говорить, что x меняется в промежутке от 0 до 25, причем сами границы здесь исключены из числа возможных значений x; в других случаях переменная независимая может принимать значения, равные границам ее промежутка. В этом промежутке x может принимать, в процессе своего изменения, какие угодно значения: и целые, и дробные и иррациональные. Это выражают словами, что x изменяется непрерывно (в противоположность прерывному изменению, когда x пробегает, например, только целые значения).

Пусть x непрерывно возрастает от 0 до 25; как будет при этом изменяться y? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, найдем приращение Δy соответствующее приращению Δx переменной независимой:

в предыдущем параграфе (п.4, пример I) все вычисления были сделаны и мы получили:

$$\Delta y = 25.\Delta x - 2x.\Delta x - (\Delta x)^2,$$

или

$$\Delta y = \Delta x \left\{(25 - 2x) - \Delta x\right\} \quad .\;.\;.\;.\;. \quad **)$$

Мы желаем выяснить, как изменяется y при малейшем изменении x; поэтому приращение Δx будем считать сколь-угодно малым; мы можем считать его меньше любого заданного числа. Такие величины называются бесконечно-малыми (в дальнейшем это понятие будет уточнено).

Итак, Δx будет бесконечно-малым; выражение для Δy показывает, что и Δy будет в свою очередь бесконечно-малым, ибо Δx входит множителем во все члены суммы.

Функции, обладающие таким свойством, называются непрерывными (в дальнейшем и это понятие будет уточнено)

Таким образом, y тоже изменяется непрерывно; но будет ли y возрастать или убывать при возрастании x? Для ответа на этот вопрос надо рассмотреть знак приращения Δy: если $\Delta y > 0$, то y возрастает; если же $\Delta y < 0$, то y убывает.

Величину Δx надо считать положительной, ибо x пробегает свой промежуток, все время возрастая; поэтому знак Δy определяется знаком величины, стоящей в больших скобках (см.формулу **):

$$(25 - 2x) - \Delta x.$$

Но так как Δx есть величина бесконечно малая, то ее всегда можно считать по абсолютному значению меньше первого члена, так что знак этой разности определяется знаком ее первого члена:

$$25-2x=2.(12,5-x).$$

Отсюда мы уже можем заключить, что: пока $x<12,5$ наша функция y возрастает, когда же $x>12,5$ то y убывает; далее становится ясным, что при значении $x=12,5$ наша функция, переходя от возрастания к убыванию, достигает своего наибольшего значения.

Итак, наш огород будет иметь наибольшую площадь при $x=12,5$ м; тогда:

$$z=25-12,5=12,5 \text{ м},$$

т.е. прямоугольник превращается в квадрат, а сама площадь $=156,25$ кв. м. Попутно мы получили предложение, что из всех прямоугольников данного периметра наибольшей площадью обладает квадрат.

Из предыдущего исследования видно, что решающее значение имело выражение:

$$25-2x;$$

действительно его знак определял возрастание или убывание функции, а критическое значение $x=12,5$ получим, приравняв это выражение нулю и решив полученное уравнение. Если вдуматься в связь этого выражения с данной функцией, то придем к важнейшему понятию анализа.

Из формулы (* *) находим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=(25-2x)-\Delta x,$$

откуда:

$$25-2x=\frac{\Delta y}{\Delta x}+\Delta x$$

Относительно Δx мы знаем, что эта величина бесконечно-малая; поэтому, переходя к пределу, получим:

$$25-2x = \text{пред.}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right].$$

Таким образом, это выражение, все значение которого было выяснено выше, является пределом отношения приращения функции к приращению переменной независимой; такие пределы называются производными. В дальнейшей части курса это понятие будет выяснено всесторонне, а пока удовольствуемся сказанным.

Заметим в заключение, что если в рассмотренной задаче задать периметр прямоугольника не как 50 м, а как некоторую длину $2a$, то произойдет обобщение задачи, не вносящее никаких особенных трудностей; наибольшая площадь получится при $x=z=\frac{a}{2}$ и будет равна $\frac{a^2}{4}$

2. Для другого примера возьмем вопрос, хорошо знакомый слушателю. Траектория центра тяжести снаряда, если пренебречь сопротивлением воздуха, задается как известно уравнением:

$$y = x.\operatorname{tg}\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0},$$

где θ_0 — угол бросания, v_0 - начальная скорость, а g - ускорение силы тяжести. Положим, для сокращения письма:

$$a = \operatorname{tg}\theta_0 \quad и \quad b = \frac{2v_0^2}{g}.\cos^2\theta_0$$

(так делается, например, в книге Б.Н. Окунева "Внешняя и внутренняя балистика", стр. 23);

b есть величина всегда положительная и коэффициент a будет положительным, поскольку угол бросания будем считать острым. С этими обозначениями, наше уравнение перепишется так:

$$y = ax - \frac{x^2}{b}.$$

Исследуем эту функциональную зависимость подобно тому, как это было сделано в предыдущем примере, но будем излагать более кратко.

С чисто математической точки зрения, переменная независимая x может принимать здесь любое значение (как говорят - может меняться от $-\infty$ до $+\infty$); но физический смысл вопроса заставляет нас ограничиться той частью траектории, которая лежит выше горизонтальной прямой. Следовательно, границами для x будут те его значения, при которых y обращается в нуль; приравнивая y нулю, получаем уравнение:

$$ax - \frac{x^2}{b} = 0,$$

откуда:

$$x_1 = 0 \quad и \quad x_2 = ab.$$

Итак, для переменной независимой находим промежуток:

$$0 \leqslant x \leqslant ab$$

(здесь x может принимать пограничные значения); высшая граница ab есть не что иное, как горизонтальная дальность; подставив вместо a и b их значения, придем к обычному выражению. В указанном промежутке переменная независимая изменяется непрерывно, и будет естественным допустить, что она все время возрастает.

Для дальнейшего исследования надо составить приращение функции; предоставляя выкладки читателю, дадим окончательную формулу:

$$\Delta y=\Delta x\left\{\left(a-\frac{2x}{b}\right)-\frac{1}{b}\cdot\Delta x\right\}.$$

Отсюда сейчас же заключаем, что при бесконечно-малом Δx, и Δy будет бесконечно-малым, так что y есть функция непрерывная; это соответствует тому, что траектория есть сплошная линия без разрывов.

Далее, возрастание и убывание нашей функции зависит от знака Δy, а знак приращения в свою очередь, при бесконечно-малом Δx, зависит от знака разности $\left(a-\frac{2x}{b}\right)$; преобразуем ее:

$$a-\frac{2x}{b}=\frac{2}{b}\cdot\left(\frac{ab}{2}-x\right).$$

Теперь нетрудно прийти к выводу: при $x<\frac{ab}{2}$ функция y возрастает, при $x>\frac{ab}{2}$ функция y убывает; следовательно при $x=\frac{ab}{2}$ получаем наибольшую высоту снаряда; вычислим ее:

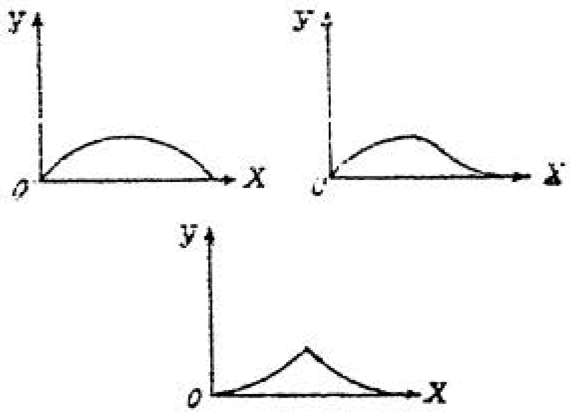
$$Y=\frac{a^2b}{2}-\frac{a^2b^2}{4b}=\frac{a^2b}{4}=\frac{v_0^2}{2g}\cdot\sin^2\theta_0.$$

Опять-таки решающее значение имело выражение $\left(a-\frac{2x}{b}\right)$, которое и здесь равно:

$$\text{пред.}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right],$$

когда Δx стремится к 0; т.е.-это есть производная.

Если по полученным результатам мы захотим построить траекторию, то убедимся, что наше исследование еще не полно. Если основываться только на наших математических выводах (оставив в стороне известную нам физическую картину явления), то всем условиям непрерывности, возрастания, убывания, достижения наибольшего значения - удовлетворят различные кривые, изображенные на черт.4; между тем действительному положению дела отвечает лишь одна из них. Эти кривые отличаются друг от друга направлением вогнутости кривой, и нам надо научиться решать этот вопрос по аналитическому выражению функции.



Черт. 4.

Рассмотренные нами примеры наметили ряд основных вопросов для более тщательного рассмотрения. Для того, чтобы уметь решить всякую задачу на исследование функции, которую может поставить перед командиром-инженером его деятельность, надо оторваться от конкретного содержания этих примеров и рассмотреть все возникшие здесь вопросы в общем виде; а после этого снова надо будет возвратиться к задачам из технических и военно-технических дисциплин.

Именно, нам предстоит рассмотреть следующие вопросы бесконечно-малые величины, основы теории пределов, непрерывность, производная, возрастание и убывание функций, нахождение наибольших и наименьших значений, вогнутость кривой и другие вопросы, связанные с перечисленными.

§ 3. ВЕЛИЧИНЫ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО-БОЛЬШИЕ.

I. В предыдущих примерах мы встречались с величинами, которые могли становиться произвольно малыми; таковыми были приращения переменных x и y; им было дано название бесконечно-малых.

С такими величинами мы встречаемся и в окружающем нас мире. Так, сила, с которой солнце притягивает (по закону Ньютона) комету, удаляющуюся безвозвратно в мировое пространство, становится по мере ее удаления меньше всякой величины. Точно также уменьшается беспредельно амплитуда колебаний маятника, если он колеблется в сопротивляющейся среде (например, в воздухе).

Настало время дать точное математическое определение понятию бесконечно-малой.

Бесконечно-малой называется такая переменная величина, которая в процессе своего изменения становится, начиная с известного момента, по абсолютному значению меньше любого наперед заданного положительного числа, как бы ни было мало это последнее.

Пусть, например, дана переменная, которая принимает последовательно ряд следующих значений:

I; 0,I; 0,0I; 0,00I; 0,000I; . . . . .

легко видеть, что какое-бы малое положительное число вы ни задали, все числа этого ряда, начиная с известного места, будут меньше заданного (об абсолютном значении здесь говорить не приходится, так как все значения нашей переменной >0). Надо подчеркнуть, что бесконечно-малая есть непременно величина переменная; пожалуй, лучше было бы говорить "бесконечно-уменьшающаяся", или: "переменная делается бесконечно-малой"; но термин "бесконечно-малая" исторически вошел в анализ и дал ему название; так что им продолжаем пользоваться, только нужно правильно понимать его.

Постоянную величину нельзя называть бесконечно-малой; она может быть очень малой, ничтожно малой, но не бесконечно-малой. Надо заметить, что эти термины не имеют определенного смысла, если не указано, по отношению к какой величине данная считается ничтожно малой; так миллиметр ничтожно мал по отношению к радиусу земли, но очень велик по отношению к длине волн ультрафиолетовых лучей.

Пусть α есть какая-нибудь бесконечно малая, и пусть нам задано сколь угодно малое положительное число ε (греческая буква "эпсилон"); тогда, начиная с известного момента в процессе изменения α, всё дальнейшее время будет иметь место неравенство:

$$|\alpha| < \varepsilon;$$

вертикальные черточки обозначают, что дело идет об абсолютном значении α. Указанное неравенство служит удобным признаком для распознавания бесконечно-малых величин.

[Что такое представляет из себя это ε, которым часто пользуются в математических рассуждениях: постоянная эта величина или переменная? На этот вопрос придется ответить, что ε — постоянно, поскольку не зависит от α и ее изменений, и ε - переменно, поскольку может быть произвольно задано. Таким образом, в этом ε имеется своеобразное единство противоположностей.]

Сделаем еще несколько примеров на бесконечно-малые:

1) Дана переменная:

$$\alpha = \frac{(-1)^n}{n},$$

где n пробегает ряд натуральных чисел; другими словами, наша переменная принимает ряд значений:

$$-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ \ldots\ldots$$

Докажем, что это будет величина бесконечно-малая. Для этого надо показать, что начиная с известного момента, всегда будет выполняться неравенство:

$$|\alpha| < \varepsilon,$$

как бы ни было мало положительное число ε.

Но $|\alpha| = \frac{1}{n}$ и нам надо получить неравенство:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

которое равносильно такому:

$$n > \frac{1}{\varepsilon};$$

а этого всегда можно добиться, так как начиная с известного места, все числа натурально ряда будут $> \frac{1}{\varepsilon}$. Так, например, если $\varepsilon = 0{,}001$, то надо будет взять $n > 1000$. Итак, α есть величина бесконечно-малая.

2) $\alpha = q^n$, где $0 < q < 1$, а n пробегает ряд натуральных чисел. Для достижения неравенства:

$$q^n < \varepsilon$$

необходимо и достаточно получить такое:

$$n . \operatorname{Log} q < \operatorname{Log} \varepsilon;$$

а это равносильно тому, чтобы:

$$n > \frac{\operatorname{Log} \varepsilon}{\operatorname{Log} q}$$

($\operatorname{Log} q < 0$, почему знак неравенства меняется на обратный); последнее неравенство всегда будет выполнено, начиная с известного значения n.

Пусть, например, нам дано:

$$q=\frac{1}{2} \quad и \quad \varepsilon=0{,}00001;$$

тогда $\log q=-0{,}301$ и $\log\varepsilon=-5$ (ограничиваемся 3-значными логарифмами), и должно быть:

$$n>\frac{5}{0{,}301}=16{,}6\ldots\ldots,$$

а это условие наверное будет выполнено при $n>17$. Следовательно, α есть бесконечно-малая.

Если $-1<q<0$, то $|\alpha|=|q|^n$, где $|q|$ уже лежит между 0 и $+1$, и по предыдущему докажем, что в этом случае α тоже будет бесконечно-малой.

Из этих примеров мы видим, что бесконечно-малые могут принимать и положительные и отрицательные значения.

3) В урне имеется 50 белых и 50 черных шаров; вынимаем шар, замечаем его цвет, кладем назад и перемешиваем шары. В теории вероятностей доказывается, что вероятность вынуть n раз подряд белый шар равна $\left(\frac{1}{2}\right)^n$; отсюда следует, что если число испытаний безгранично увеличивать, то вероятность выхода одних белых шаров станет величиной бесконечно-малой.

Понятие о бесконечно-малой величине есть одно из основных понятий математического анализа; недаром он получил название "анализа бесконечно-малых". Введение в математику бесконечно-малых имело огромное значение для развития ее методов и их приложений; оно позволило изучать явления природы не в воображаемом застывшем состоянии, а в динамическом - в процессе их действительного становления. В самом деле, количественное нарастание какого-либо явления происходит путем бесконечно-малых приращений; из таких же приращений складывается и конечная величина. С этой точки зрения бесконечно-малая является диалектическим понятием; Энгельс говорит (Д.Н., стр. 36), что несмотря на свою бесконечную малость они действенны и производят все.

2. Докажем о бесконечно-малых 2 основные теоремы, которые не раз понадобятся впоследствии.

Легко сообразить, что если даны 2 бесконечно-малые то их сумма и разность тоже будут бесконечно-малыми. Так, если нам заданы 2 переменные, пробегающие соответственно такие ряды значений:

$$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;$$

$$2;\ 0{,}2;\ 0{,}02;\ 0{,}002;$$

то их сумма и разность принимают значения

$$3;\ 0{,}3;\ 0{,}03;\ 0{,}003;\ \ldots$$

$$1;\ -0{,}1;\ -0{,}01;\ -0{,}001;\ \ldots$$

Легко видеть, что это будут величины бесконечно-малые.

Докажем общую теорему:

Теорема I. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно-малых сама есть величина бесконечно-малая.

Пусть нам дано определенное число n бесконечно-малых:

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda.$$

Возьмем произвольно малое положительное число ε; тогда и $\frac{\varepsilon}{n}$ будет нам известно. Из определения бесконечно-малых вытекает, что начиная с некоторого момента, будут иметь место неравенства:

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{n}$$

$$|\beta| < \frac{\varepsilon}{n}$$

$$|\gamma| < \frac{\varepsilon}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$|\lambda| < \frac{\varepsilon}{n}$$

складывая получим новое неравенство:

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \cdots + |\lambda| < \varepsilon.$$

Далее надо применить одно правило, которое полезно будет заметить, а именно: абсолютное значение суммы меньше суммы абсолютных значений слагаемых, или в крайнем случае равно ей, т.е.:

$$|\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda| \leqslant |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \cdots + |\lambda|.$$

Действительно, если все слагаемые одного знака, то правая часть будет равна левой; если же имеем дело со слагаемыми разных знаков, то в левой части произойдет приведение, и абсолютное значение алгебраической суммы уменьшится; а в правой части этого не будет, так как там стоит арифметическая сумма.

Применяя это правило и вспоминая доказанное выше о сумме $|\alpha| + |\beta| + \cdots + |\lambda|$ найдем:

$$|\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda| < \varepsilon;$$

а отсюда следует, что наша сумма будет величиной бесконечно-малой.

В теореме было подчеркнуто, что число слагаемых должно быть конечным; легко пояснить необходимость этого таким примером. Разделив единицу на n равных частей получим равенство:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1$$

(число слагаемых $=n$); пусть теперь n беспредельно растет; тогда каждое слагаемое станет бесконечно-малым, но число их будет безгранично возрастать, и в результате сумма не будет бесконечно-малой, а всегда будет $=1$

Для того, чтобы подойти к другой теореме, рассмотрим произведение бесконечно-малой:

$$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots$$

на постоянное число 5; это произведение получает значения:

$$5;\ 0{,}5;\ 0{,}05;\ 0{,}005;\ \ldots$$

и будет тоже бесконечно-малым, как в этом легко убедиться. Если бы вместо 5, мы умножили данную бесконечно-малую на $\sin x$, то получили бы тот же вывод: хотя $\sin x$ - величина переменная, но по абсолютному значению $\sin x$ не превышает I.

Обобщим эти рассуждения, введя следующее определение.

Если нам задана какая-нибудь величина x, и если существует такое постоянное число $N>0$, что всегда имеет место неравенство:

$$|x|<N,$$

то эта величина x называется ограниченной. Отсюда следует, что всякая постоянная будет ограниченной; бесконечно-малую тоже можно назвать ограниченной. Далее $\sin x$ будет величиной ограниченной, так как всегда будет:

$$|\sin x|<2;$$

но нельзя того же утверждать о $\operatorname{tg} x$ в промежутке, содержащем $\frac{\pi}{2}$.

Теорема II. Произведение бесконечно-малой на величину ограниченную будет величиной бесконечно-малой.

Пусть α - бесконечно-малая, а x - величина ограниченная; следовательно, существует такое постоянное число $N>0$, что:

$$|x|<N$$

Возьмем произвольно малое $\varepsilon>0$; тогда и $\frac{\varepsilon}{N}$ будет нам известно; начиная с некоторого момента должно быть:

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{N},$$

откуда:

$$|\alpha|.N<\varepsilon.$$

С другой стороны имеем:

$$|\alpha.x|=|\alpha|\ |x|<|\alpha|.N;$$

сопоставляя с предыдущим, получим:

$$|\alpha.x|<\varepsilon,$$

откуда следует наша теорема.

В частности, отсюда вытекает, что произведение 2 бесконечно-малых тоже будет бесконечно-мало.

2. Перейдем теперь к понятию, которое является противоположностью рассмотренному в п. I.

Бесконечно-большой называется такая переменная величина, которая в процессе своего изменения становится, начиная с известного момента, по абсолютному значению больше любого наперед заданного положительного числа, как бы ни было велико это последнее.

Так, например, число n пробегающее натуральный ряд чисел, есть величина бесконечно-большая.

Пусть u есть величина бесконечно-большая, и N - произвольно выбранное положительное число (оно может быть сколь-угодно большим); тогда, начиная с некоторого момента, всегда будет выполнено неравенство:

$$|u| > N;$$

это служит удобным признаком для распознавания бесконечно-большой величины. Сделаем несколько примеров:

I) Если α есть бесконечно-**малая** то $\frac{1}{\alpha}$ есть бесконечно-большая. Действительно, возьмем произвольное $N>0$; тогда, начиная с известного момента:

$$|\alpha| < \frac{1}{N},$$

откуда: $\frac{1}{|\alpha|} > N$, что и требовалось доказать.

Подобным же образом можно доказать, что если u - бесконечно-**большая**, то $\frac{1}{u}$ - бесконечно-**малая**.

2) Если $q>1$, то q^n, где n пробегает ряд натуральных чисел, будет величиной бесконечно-большой.

Действительно, неравенство:

$$q^n > N$$

равносильно такому:

$$n \cdot \operatorname{Log} q > \operatorname{Log} N$$

или:

$$n > \frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} q}$$

($\operatorname{Log} q$ здесь положительное число), а этого всегда можно добиться, распоряжаясь числом n. Если бы q было <0, причем $|q|>1$, то рассуждение осталось бы по существу тем же самым, только вместо q надо было бы говорить о $|q|$.

3) Если сопротивление воздуха полету снаряда принять равным:

$$\mathcal{Y}=k.v^n,$$

где k - коэффициент пропорциональности, v - скорость снаряда, а n - положительное число (постоянное), то при беспредельном возрастании v и сопротивление возрастало бы беспредельно. Действительно, нетрудно убедиться, что положительная степень бесконечно- большого числа сама будет бесконечно-большой. Поэтому, если дело идет об увеличении дальности полета, то стараются закинуть снаряд в верхние слои атмосферы, где сопротивление воздуха сказывается в значительно меньшей степени.

Понятия бесконечно-малой и бесконечно-большой величины являются противоположностями; и весьма часто мы имеем в анализе взаимопроникновение этих противоположностей. Так, выше мы имели равенство:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=1,$$

где число слагаемых $=n$; если n беспредельно растет, то каждое слагаемое становится бесконечно-малым, а число их - бесконечно-большим; в результате же получается конечное число.

Подобно этому, в случае непрерывного изменения, бесконечно-малые приращения переменной величины,слагаясь,образуют конечную величину; но для этого необходимо, чтобы число их было бесконечно-большим (в противном случае по теореме I мы не получим конечной величины). Здесь тоже мы встречаемся с взаимопроникновением этих противоположностей. Ниже мы увидим, что подобное же имеет место при образовании одного из важнейших понятий математического анализа (именно- понятия об определенном интеграле).

Задачи для упражнения.

1) Если α есть величина бесконечно-малая, то какие из следующих величин будут бесконечно-малыми и какие бесконечно-большими:

$$0{,}0001 . \alpha, \quad 10{,}000000 . \alpha; \quad \alpha^2;$$

$$\frac{1}{\alpha}; \quad \frac{0{,}000001}{\alpha}; \quad \sin\alpha; \quad \cos\alpha;$$

$$(0{,}1)^\alpha; \quad 2^\alpha; \quad \frac{1}{\alpha^2}; \quad \frac{\alpha^2-1}{\cos\alpha};$$

$$\frac{\alpha-3}{10\alpha-1}; \quad \log\alpha; \quad \operatorname{tg}\alpha ?$$

2) Если x есть бесконечно-большая, то какие из следующих величин будут бесконечно-большими и какие бесконечно-малыми:

$$\frac{1}{x}; \quad 0{,}0000001 . x; \quad x-10{,}000000;$$

$$2x+5; \quad 0{,}0001 . x-100000; \quad \frac{1}{x^2};$$

$$\frac{1}{x^2-10000} . ?$$

§ 4. ПРЕДЕЛЫ.

I. Бесконечно-большая величина изменяется таким образом, что переходит за всякую поставленную ей границу; другие же переменные, в процессе своего изменения, неограниченно приближаются к некоторым постоянным числам. Так, если мы будем рассматривать падение тяжелого тела в сопротивляющейся среде, то его скорость с течением времени приближается к некоторому вполне определенному предельному значению (см., например, книгу т. Окунева, стр. 101-102). В геометрии мы видели, что периметр правильного вписанного многоугольника, при неограниченном удвоении числа сторон, изменяется, имея своим предельным значением длину окружности. Читатель помнит, как в алгебре рассматривается бесконечно- убывающая геометрическая прогрессия: составляется сумма n членов и доказывается, что при безграничном увеличении числа n эта сумма стремится к определенному пределу, который и называется суммой данной прогрессии. Настало время уточнить понятие предела:

<u>Постоянная a называется пределом переменной x, если разность $x-a$ есть величина бесконечно-малая.</u>

Это обстоятельство записывается так:

$$\lim x=a$$

($\lim$ есть сокращение французского слова *limite* предел), или так:

$$x \to a.$$

Вспоминая определение бесконечно-малой, можем сказать подробнее: если $\lim x=a$, то как бы ни было мало данное положительное число ε, переменная x в процессе своего изменения настолько близко подходит к a, что начиная с известного момента, всегда будем иметь неравенство:

$$|x-a|<\varepsilon.$$

Далее, из самого определения предела вытекает, что

$$x-a=\alpha,$$

где α - величина бесконечно-малая, или:

$$x=a+\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Этим равенством, равносильным утверждению, что $\lim x=a$, мы часто будем пользоваться. О самой же бесконечно-малой величине можно сказать, что она имеет своим пределом нуль.

Приведем несколько примеров:

I) Если $x\to 2$, то $x^2\to 4$.

Действительно, $x^2-4=(x-2)(x+2)$; но $(x-2)$ есть бесконечно-малая, а $(x+2)$ величина ограниченная; отсюда, по теореме II, разность (x^2-4) есть бесконечно-малая, что и требовалось доказать.

2) Если n растет безгранично, то:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

В самом деле, составим разность:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=\frac{1}{n},$$

а эта дробь при наших условиях есть величина бесконечно-малая.

3) Из тригонометрии известно, что если $x\to 0$, то:

$$\lim(\sin x)=0 \quad и \quad \lim(\cos x)=1.$$

4) Если $x\to a$, то $\sin x\to\sin a$.

Действительно, имеем:

$$\sin x-\sin a=2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2};$$

но $\frac{x-a}{2}$ есть бесконечно-малая, следовательно по предыдущему примеру и $\sin\frac{x-a}{2}$ обладает этим свойством; произведение же $2\cos\frac{x+a}{2}$ есть величина ограниченная.

Теорема II показывает, что разность $\sin x - \sin a$ есть бесконечно-малая, что и требовалось доказать.

Уже из этих примеров видно, что обыкновенно приходится искать предел функции, когда переменная независимая стремится к некоторому пределу. Познакомимся с некоторыми выражениями и обозначениями, которые здесь применяются.

Мы говорим: функция $f(x)$ стремится к пределу A, когда x стремится к пределу a, и пишем:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

если разность $f(x) - A$ будет бесконечно-малой при бесконечной малости $(x-a)$.

Следовательно, некоторые из только что полученных результатов можно записать так:

$$\lim_{x \to 2} (x^2) = 4$$

$$\lim_{x \to a} (\sin x) = \sin a$$

Если x есть величина бесконечно-большая, то она, возрастая беспредельно по абсолютному значению, никакого предела не имеет; но в этом случае всетаки пишут:

$$x \to \infty,$$

и даже условно говорят, что предел переменной x равен бесконечности.

Теперь читателю будут понятны такие записи:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A;$$

здесь разность $f(x) - A$ должна быть бесконечно-малой при бесконечно-большой x; примером может служить полученный выше результат:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Точно также можно встретить и такую запись:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty;$$

это значит, что $f(x)$ становится бесконечно-большой по мере приближения переменной x к своему пределу a; функция $f(x)$ собственно предела не имеет и указанная запись имеет условный характер: она говорит, что наша функция становится бесконечно-большой величиной. Так, например, можно написать:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)=\infty$$

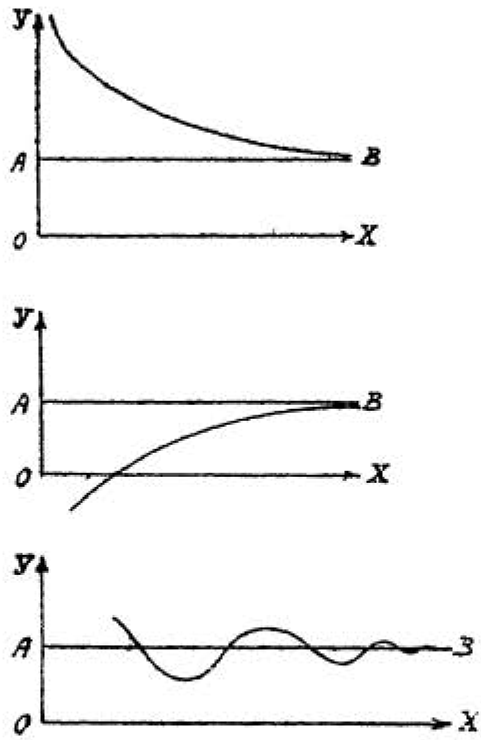
Иногда ставят при символе ∞ тот или другой знак, если хотят указать знак переменной; так если $x\to\frac{\pi}{2}$ в I квадранте, то $\operatorname{tg} x\to+\infty$; если же x подходит к $\frac{\pi}{2}$ во II квадранте, то: $\operatorname{tg} x\to-\infty$.

Не надо думать, что переменная не имеет предела только в том случае, когда она является бесконечно-большой величиной; предел может отсутствовать и у ограниченной переменной. Так, если $x\to\infty$, то $\sin x$ будет все время колебаться в границах от -1 до $+1$, и ни к какому пределу приближаться не будет.

В интересах общности иногда говорят о пределе постоянной величины. Постоянную можно рассматривать, как переменную, у которой все значения равны между собой; поэтому и говорят, что предел постоянной равен ей самой. Действительно, условие $|x-a|<\delta$ здесь будет всегда выполнено, так как $x=a$ и $x-a=0$.

Вообще же переменная может приближаться к своему пределу, оставаясь или все время больше его, или -

все время меньше, или, наконец, колеблясь около предельного значения, т.е. принимая то большие значения, то меньшие. На черт. 5 ордината кривой, при бесконечном возрастании x, приближается к пределу равному OA; три части чертежа поясняют только что указанные случаи.



Черт. 5.

2 Понятие предела, играющее существенную роль в обосновании анализа, является одним из тех понятий, в которых коренится диалектическая природа анализа бесконечно-малых.

Прежде всего, переход к пределу сплошь и рядом приводит к тому, что в результате количественных изменений некоторой величины появляется новое качество, которого не было у этой величины. Так, например, если мы станем вычислять приближенные значения $\sqrt{2}$ с возрастающей степенью точности, то получим бесконечный ряд р а ц и о н а л ь н ы х чисел, пределом которых будет уже число и р р а ц и о н а л ь н о е. Для другого примера возьмем известный прием вычисления длины окружности: мы вписываем в окружность какой-нибудь правильный многоугольник и безгранично удваиваем число его сторон; тогда окружность рассматривается, как предел этих вписанных многоугольников. Здесь переменной является линия, составленная из п р я м о л и н е й н ы х отрезков (периметр), а пределом служит уже к р и в а я линия.

В понятии предела надо отметить еще другой важный момент. Переменная, неограниченно приближающаяся к своему пределу, должна иметь бесконечное множество различных значений. В самом деле, если бы значений имелось конечное число, то перебирая их, мы нашли бы значение, ближайшее к пределу, и тогда нельзя было бы удовлетворить неравенству:

$$|x-a|<\varepsilon,$$

если бы ε было меньше разности между пределом и ближайшим к нему значением переменной. Так, например, число правильных многоугольников, которые можно вписать в окружность, очевидно будет бесконечно велико.

Из сказанного вытекает, что глубоко диалектическое понятие бесконечности входит, как составная часть, в понятие предела. Здесь не место подробно рассматривать понятие бесконечности и вскрывать все связанные с ним парадоксы; ограничимся приведением следующих слов Энгельса: "Бесконечность есть противоречие и она полна противоречий. Противоречием является уже то, что бесконечность должна быть составлена из одних только конечных величин. А между тем это так" (А.Д. изд. IУ, стр. 45). Конечно, здесь идет речь о противоречии диалектическом, т.е. о противоречии, заключающемся в самой сущности предмета.

3. Докажем основные теоремы о пределах. В этом параграфе мы рассмотрим только теоремы, связанные с 4 основными действиями; некоторые добавления будут сделаны в дальнейшей части курса.

Теорема III. Предел алгебраической суммы конечного числа слагаемых равен такой же сумме пределов этих слагаемых ("предел суммы = сумме пределов").

Пусть нам дано определенное число n переменных: $x, y, \ldots u$, и пусть они соответственно стремятся к пределам:

$$x \to a$$
$$y \to b$$
$$\cdots\cdots$$
$$u \to l$$

На основании определения предела, имеем:

$$x = a + \alpha$$
$$y = b + \beta$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u = l + \lambda$$

где $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ - бесконечно малые; складывая эти равенства, получим:

$$x + y + \cdots + u = (a + b + \cdots + l) + (\alpha + \beta + \cdots + \lambda),$$

откуда:

$$(x + y + \cdots + u) - (a + b + \cdots + l) = \alpha + \beta + \cdots + \lambda.$$

В левой части стоит разность между постоянной и переменной, а в правой части имеем величину бесконечно-малую (на основании теоремы I); следовательно, по определению предела можем написать:

$$\lim (x + y + \cdots + u) = a + b + \cdots + l;$$

но вспоминая, что a есть предел x, b - предел y, и т.д., окончательно имеем:

$$\lim (x + y + \cdots + u) = \lim x + \lim y + \cdots + \lim u,$$

что и требовалось доказать.

О "конечности" числа слагаемых надо повторить сказанное по поводу теоремы I.

Теорема IУ. <u>Предел произведения равен произведению пределов сомножителей</u>.

Начнем со случая 2 сомножителей x и y, и пусть:

$$x \to a$$
$$y \to b,$$

так что:

$$x = a + \alpha$$
$$y = b + \beta,$$

где α и β - бесконечно-малые. Перемножая эти равенства, получим:

$$xy = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta,$$

откуда:

$$xy - ab = a\beta + b\alpha + \alpha\beta.$$

Теперь, на основании теоремы II, каждое слагаемое правой части есть величина бесконечно-малая, а на основании теоремы I - их сумма тоже будет бесконечно-малой Тогда имеем:

$$\lim(xy) = ab,$$

или:

$$\lim(xy) = (\lim x).(\lim y),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь дано произведение 3 сомножителей; мы рассмотрим его, как произведении 2 множителей и применим предыдущий случай:

$$\lim (xyz) = \lim [(xy).z] = \lim (xy).\lim z,$$

но

$$\lim (xy) = \lim x.\lim y,$$

а потому:

$$\lim (xyz) = \lim x.\lim y.\lim z,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, теорема распространяется на произведение любого конечного числа сомножителей.

Следствие I. Пусть имеем произведение 2 сомножителей, из которых один есть величина постоянная C; тогда:

$$\lim (c.x) = \lim c.\lim x;$$

но выше было указано, что:

$$\lim c = c,$$

а потому:

$$\lim (c.x) = c.\lim x.$$

Получается правило: <u>постоянного множителя можно выносить за знак предела.</u>

Следствие 2. Применим теорему IУ к произведению из m множителей:

$$\lim (x.y.z \dots u) = \lim x.\lim y.\lim z \dots \lim u,$$

и сделаем все их равными x; тогда произведение заменится степенью и мы получим:

$$\lim(x^m)=(\lim x)^m,$$

т.е. : предел степени равен степени предела. Надо заметить, что это предложение доказано сейчас лишь для целой положительной степени.

Теорема У. Предел частного равен пределу делимого, деленному на предел делителя, если этот последний не равен нулю(или: предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя).

Необходимость условия, что предел делителя не $=0$, совершенно очевидна, так как на нуль делить нельзя. Сохраняя обозначения предыдущей теоремы, составим разность:

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}=\frac{\alpha b-a.\beta}{b(b+\beta)}$$

Правую часть мы рассмотрим, как произведение 2 множителей:

$$\alpha.b-a\beta \quad и \quad \frac{1}{b^2+b.\beta};$$

о первом из них легко заключить (на основании теорем III и I) что это - величина бесконечно-малая. Что же касается второго, то так как знаменатель его не равен 0 и стремится к пределу b^2, отличному от 0, этот 2-й множитель есть величина ограниченная; тогда теорема II показывает, что в правой части стоит величина бесконечно-малая. Следовательно:

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{a}{b},$$

или:

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\lim x}{\lim y},$$

если только $\lim y\neq 0$, что и требовалось доказать. Сделаем теперь несколько примеров на применение этих теорем:

I) Найти:

$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{x^2+5}{2x-3}\right]$$

Применяя теоремы III-У, получаем:

$$\lim\left\{\frac{x^2+5}{2x-3}\right\}=\frac{\lim(x^2+5)}{\lim(2x-3)}=\frac{\lim(x^2)+\lim 5}{\lim(2x)-\lim 3}=$$

$$=\frac{(\lim x)^2+5}{2\lim x-3}=\frac{(-1)^2+5}{2.(-1)-3}=-\frac{6}{5}.$$

Легко видеть, что тот же самый результат получится если прямо подставить $x=-I$ в данную функцию в следующем параграфе мы увидим, когда можно вычислять пределы функций таким сокращенным способом.

2) Найти $\lim\limits_{x\to 2}\left\{\dfrac{x^2-4}{x-2}\right\}$

Здесь уже нельзя применять теоремы У так как предел знаменателя $=0$. Замечая, что:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=x+2,$$

имеем:

$$\lim_{x\to 2}\left\{\frac{x^2-4}{x-2}\right\}=\lim_{x\to 2}\{x+2\}=4.$$

3) Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\frac{2x^2-3x+1}{x^2+1}\right\}$

Здесь тоже непосредственное применение наших теорем - невозможно, так как числитель и знаменатель собственно пределов не имеют, а беспредельно возрастают. В таких случаях надо преобразовать данное выражение, разделив числителя и знаменателя на высшую степень переменной, в данном случае - на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{2x^2-3x+1}{x^2+1}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right\}.$$

теперь можно применять теоремы III-У, и замечая, что дроби $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ имеют своим пределом 0, найдем, что искомый предел $= 2$.

4) Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right\}$

Здесь тоже необходимо предварительное преобразование:

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}).(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right\}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \right\} = 0,$$

ибо знаменатель беспредельно растет.

Примеры для упражнения.

Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 4} \left\{ \dfrac{x^2-5x+3}{2x+4} \right\}$ Отв: $-\dfrac{1}{12}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left\{ \dfrac{5x^2-7x+3}{2x^2+3x+9} \right\}$ Отв. $\dfrac{5}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \left\{ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+10} \right\}$ Отв: $-\dfrac{1}{3}$

Указание: сократить на общего множителя.

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left\{ 3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{8}{x^2} \right\}$ Отв: 3

5) $\lim\limits_{z\to\infty} \left\{ \dfrac{4-z}{8z+3} \right\}$ Отв: $-\dfrac{1}{8}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left\{ \dfrac{x^3-x+7}{x^3+5} \right\}$ Отв: 1

7) $\lim\limits_{x\to a} \left\{ \dfrac{x^3-a^3}{x-a} \right\}$ Отв: $3a^2$

8) $\lim\limits_{n \to \infty} \left\{ \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} \right\}$ Отв: $\frac{1}{2}$

Указание: найти сумму прогрессии, стоящей в числителе.

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left\{ \sqrt{x^2+1} - x \right\}$ Отв: 0

Указание: умножить и разделить на сумму данных величин.

§ 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ.

Переменные величины могут изменяться прерывно и непрерывно. Так, например, число людей в зале, наполняющемся перед собранием, изменяется прерывно, так как оно увеличивается каждый раз скачком на одну или на несколько единиц; а вот центр тяжести летящего снаряда описывает непрерывную кривую, так что число, измеряющее пройденный им путь, увеличивается, проходя через все промежуточные значения как целые, так и дробные и иррациональные. Хотя таким образом в природе наблюдаются и прерывные и непрерывные изменения, но математический анализ, в своем современном состоянии, сосредоточивает внимание на изучении непрерывных изменений: непрерывные функции обладают весьма простыми свойствами и весьма важны для приложений. Во многих случаях мы применяем непрерывные функции даже к изучению явлений заведомо прерывного характера. Возьмем, например, химическую реакцию, при которой из двух различных веществ образуется одно новое; при атомистическом строении материи, нарастание числа молекул нового вещества идет прерывным путем, так как оно непременно увеличивается каждый раз на целое число единиц. Точно также давление газа на стенки сосуда есть результат ударов отдельных молекул, и тут увеличение или уменьшение давления идет скачками. Но во всех подобных случаях эти скачки настолько малы и настолько часты, что рассмотрение процесса, как непрерывного дает правда приближенную, но вполне удовлетворительную картину объективного положения вещей - по крайней мере, при современном состоянии науки и при современной точности измерений.

Поэтому изучение непрерывных функций составляет основную задачу математического анализа.

В § 2 мы видели, что площадь прямоугольника была непрерывной функцией длины его стороны, далее высота y снаряда изменялась непрерывно при изменении горизонтального расстояния x, причем во всех этих случаях переменная независимая x сама изменялась непрерывно.

Настало время уточнить понятие о непрерывном изменении.

В том же § 2 мы видели, что для изменения переменной независимой может быть отведена вполне определенная область; там это определялось конкретным содержанием вопроса; иногда этого требует само строение функции. Так, если имеем дело с целым многочленом, то никаких ограничений на переменную независимую не налагается; она может принимать любое значение, и это выражают неравенствами:

$$-\infty < x < +\infty.$$

Но вот если мы возьмем функцию:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

и ограничимся ее вещественными значениями то x по абсолютной величине не должен превышать a, так что для изменения x получается промежуток:

$$-a \leqslant x \leqslant +a;$$

здесь x может принимать и пограничные значения. Если же возьмем такую функцию:

$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

то эти пограничные значения отпадают, так как в противном случае пришлось бы делить на 0, и для изменения x остается промежуток:

$$-a < x < +a, \quad и\ т.\ д.$$

Итак, область изменения переменной независимой всегда задается теми или другими неравенствами. Если в области своего изменения переменная независимая может принимать любое значение, то мы говорим, что она изменяется непрерывно.

Центральным вопросом настоящего параграфа является непрерывность функции.

Пусть нам задана функция:

$$y = f(x);$$

определенная в некотором промежутке:

$$a \leqslant x \leqslant b$$

т.е. каждому значению x из этого промежутка соответствует одно вполне определенное значение функции. Понимая под x любое из этих значений, дадим ему бесконечно-малое приращение Δx и составим соответствующее приращение функции Δy (этим мы занимались в § I). Так вот если бесконечно-малому приращению переменной независимой соответствует и бесконечно-малое приращение функции, то такая функция называется непрерывной.

Это определение указывает нам правило которым надо руководиться при решении вопроса о непрерывности функции. Следует обратить внимание на то что Δy выражается через x и Δx, и эти 2 величины надо рассматривать как переменные независимые. x может иметь любое значение из данного промежутка, приращение же Δx - не зависит от значения x, а может принимать различные значения в вопросе о непрерывности оно считается бесконечно-малым. Рассмотрим, для примера, некоторые простейшие функции с точки зрения их непрерывности.

1) Пусть $y=x^2$; в этом случае:

$$\Delta y=2x.\Delta x+(\Delta x)^2 \quad [\text{См. } \S 1 \text{ п.} 4];$$

если Δx - бесконечно-мало а x есть любое конечное число, то на основании теорем I и II заключаем, что правая часть будет величиной бесконечно-малой: отсюда следует что x^2 есть функция непрерывная

2) Пусть $y=x^3$; тогда имеем:

$$\Delta y=3x^2.\Delta x+3x.(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

(см. § I, прим. для упр. № 5

на основании теорем I и II заключаем, что x^3 будет функцией непрерывной при всяком конечном значении x.

Нетрудно сообразить, что подобным же путем можно доказать непрерывность x^m при всяком целом и положительном m, только вычислять Δy придется по биному Ньютона.

3) Пусть теперь $y=\frac{1}{x}$; тогда:

$$\Delta y=-\frac{\Delta x}{x^2+x.\Delta x}$$

(см. § I, п. 4. прим 2).

Рассматривая правую часть как произведение:

$$\Delta x \cdot \frac{-1}{x^2 + x \cdot \Delta x},$$

убеждаемся что I-й множитель есть величина бесконечно-малая, а 2-й будет величиной ограниченной, если только $x \neq 0$; следовательно по теореме II, Δy в этом случае будет тоже величиной бесконечно-малой. Итак, функция $\frac{1}{x}$ будет непрерывной при всяком значении x за исключением $x=0$. Надо заметить, что при $x=0$ наша функция теряет смысл, так что уже по одному этому нельзя говорить о непрерывности. Но если мы не сразу подставим $x=0$, а будем x неограниченно приближать к 0, то $\frac{1}{x}$ станет величиной бесконечно-большой, имея знак числа x; поэтому говорят условно, что при $x=0$ наша функция обращается в $\pm\infty$. При этом значении x имеется " разрыв непрерывности".

Судить о непрерывности функции бывает легче по другому признаку, который равносилен указанному выше и получается из него без труда. Рассмотрим непрерывность функции $y=f(x)$ при значении переменной независимой $=a$; для того, чтобы составить Δy, надо первоначальное значение $f(a)$, которое конечно предполагается вполне определенным числом, вычесть из приращенного. Приращение переменной независимой обозначим здесь через h, как это часто делается; тогда приращенное значение функции будет $f(a+h)$, а следовательно ее приращение:

$$\Delta y = f(a+h) - f(a).$$

По нашему определению, функция будет непрерывна при данном значении (говорят также : "в данной точке"), если разность:

$$f(a+h) - f(a)$$

будет бесконечно-малой при бесконечно- малом h. Но уменьшаемое $f(a+h)$ есть величина переменная, а вычитаемое $f(a)$ - постоянная; следовательно, предыдущее утверждение равносильно такому:

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a).$$

Эту запись можно упростить, если положить $a+h=x$ и заметить, что при $h \to 0$ будет $x \to a$; тогда имеем:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a);$$

или еще короче:

$$\lim f(x) = f(\lim x) \quad . \; . \; . \; . \; .(3)$$

Вот в этом и заключается другой признак непрерывности: если формула (3) выполняется для любого x, лежащего внутри некоторого промежутка, то функция будет непрерывной во всем этом промежутке.

Здесь будет уместным вспомнить I-й пример на вычисление предела, решенный в конце предыдущего параграфа.

Сделаем еще несколько новых примеров.

I) Выше мы видели, что:

$$\lim_{x \to a} (\sin x) = \sin a,$$

или:

$$\lim (\sin x) = \sin (\lim x);$$

следовательно, $\sin x$ есть функция непрерывная при всяком x.

2) Возьмем целый многочлен:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m,$$

где m - целое >0 число, а коэффициенты суть какие угодно постоянные числа. Будем искать предел этого многочлена, применяя теоремы III и IУ:

$$\lim\{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m\} =$$

$$= A_0 \lim(x^m) + A_1 . \lim(x^{m-1}) + \cdots + A_{m-1} \cdot \lim x + A_m =$$

$$= A_0 (\lim x)^m + A_1 (\lim x)^{m-1} + \cdots + A_{m-1} \cdot \lim x + A_m .$$

Оказывается, что признак (3) здесь всегда выполняется, а потому целый многочлен есть функция непрерывная при всяком x.

3) Рациональной функцией называется частное 2 целых многочленов:

$$\frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m}{B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_{n-1} x + B_n}.$$

рассуждая по предидущему и применяя теорему У найдем что рациональная функция непрерывна при всех значениях x за исключением только тех, при которых знаменатель обращается в 0. Пользуясь тем или другим признаком, можно перебрать все известные нам функции, и результат будет тот, что все они вообще непрерывны за исключением отдельных значений переменной независимой. Если при какой-нибудь значении переменной независимой условие непрерывности не выполняется, то говорят, что при этом значении имеет место разрыв непрерывности. Так, например, рациональная функция имеет разрыв непрерывности при тех значениях переменной независимо , при которых знаменатель обращается в нуль.

Для дальнейшего выяснения вопроса полезно будет перейти к геометрической иллюстрации.

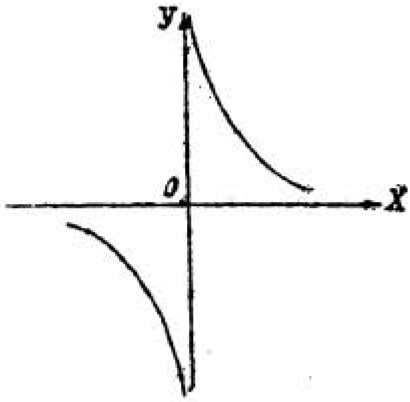
Пусть нам дана функция:

$$y=f(x);$$

построим ее график, т.е. такую линию, которая определяется только что написанным уравнением. Если данная функция непрерывна, то бесконечно-малому приращению абсциссы соответствует бесконечно-малое приращение ординаты; отсюда легко понять, что графиком непрерывной функции будет сплошная линия: например, линия, изображенная на черт. 3. Всякие же разрывы непрерывности проявляются в разрывах графика. Так, например, мы видели, что функция:

$$y=\frac{1}{x}$$

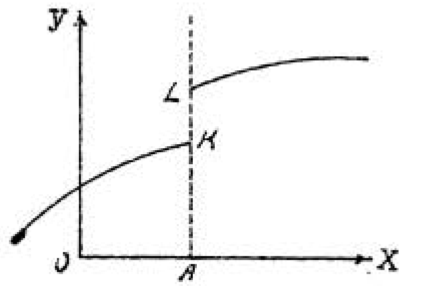
вообще непрерывна за исключением одного единственного значения $x=0$; при переходе через это значение, наша функция делает скачек от $-\infty$ к $+\infty$. На черт. 6 изображен график этой функции (это -гипербола, с которой читатель познакомится в аналитической геометрии); здесь мы ясно видим, что при $x=0$ функция не существует, а при переходе переменной независимой x через это значение, она делает скачек от бесконечно-больших отрицательных значений к бесконечно-большим положительным.



Черт. 6.

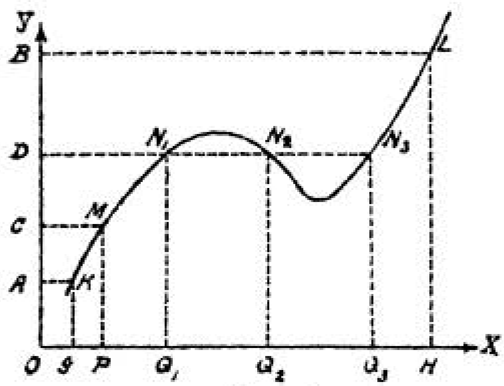
На другом черт. 7 изображен график функции, которая претерпевает разрыв непрерывности при $x=OA$; здесь она делает конечный скачок $= KL$, так что бесконечно-малому приращению переменной независимой соответствует в этой точке конечное приращение функции.

С помощью графика весьма просто выясняется одно важное свойство непрерывной функции, а именно: <u>непрерывная функция проходит через все промежуточные значения</u>. Действительно, на черт. 8 мы видим, что в точках K и L



Черт. 7.

дана функция принимает значения OA и OB; возьмем какую нибудь промежуточную величину OC, и проведем через точку C прямую $\parallel O\overline{X}$; если график представляет сплошную линию, то эта прямая пересечет его по крайней мере в одной точке; в нашем случае получаем единственную



Черт. 8.

точку M. Теперь легко видеть, что при $x=OP$ получаем $y=PM=OC$, и это значение $x=OP$ по своей величине заключается между OS и OH - абсциссами крайних точек K и L. Если бы мы взяли другое промежуточное значение OD:

$$OA < OD < OB,$$

то подобное же построение привело бы нас к 3 различным точкам N_1, N_2 и N_3 нашей кривой, так что функция принимала бы значения $= OD$ при 3 различных значениях переменной независимой; эти значения равны OQ_1, OQ_2 и OQ_3 и все лежат между OS и OH.

Как следствие, отсюда вытекает такое утверждение: непрерывная функция может изменить знак, только перейдя через нуль. В самом деле, если функция меняет знак, переходя, например, от отрицательных значений к положительным, то на основании предыдущего свойства, она должна пройти через нуль, который лежит между отрицательными и положительными числами.

Но этого уже нельзя утверждать о функциях, имеющих разрывы. Так, функция $y=\frac{1}{x}$ меняет знак при переходах от отрицательных значений к положительным, но она не обращается в нуль, а претерпевает разрыв непрерывности, перескакивая от $-\infty$ к $+\infty$. То же самое происходит с $tg\,x$ при переходе из 1-й четверти во 2-ю.

....

Примеры для упражнений.

Исследуйте непрерывность следующих функций и укажите места их разрывов, если таковые имеются:

1) ax^2+bx+c

2) $\cos x$,

3) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$

4) $\dfrac{x}{x^2-1}$

5) $ctg\,x$.

....

§6. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ.

1. При изучении всякого процесса изменения большое значение имеет вопрос о скорости или темпе этого изменения. Все мы хорошо знаем, какое значение имеет вопрос о темпах в нашем строительстве. Это понятие о темпе находит свое отражение и в математическом анализе, а именно – в понятии о скорости изменения функции по отношению к изменению переменной независимой.

Начнем с нескольких конкретных примеров. Пусть некоторая точка M движется по прямой (см. черт. 9); пусть ее положение на этой прямой определяется величиной отрезка:

$$OM = S,$$

отсчитываемого от некоторой постоянной точки O; эта величина S меняется с течением времени. Время будем отсчитывать с момента начала движения, и число, измеряющее истекшее время (например – в секундах), обозначим через t. Время рассматривается, как переменная независимая, а S будет ее функцией. Если мы знаем закон движения нашей точки, то функциональная зависимость S от t будет нам известна; так, в случае падения в пустоте (без начальной скорости) механика дает формулу:

Черт. 9

$$S = \frac{1}{2} g t^2,$$

где $g = 98$ м/сек^2 есть ускорение силы тяжести (в этом случае прямую чертежа 9 удобнее будет представлять себе вертикальной).

Возникает задача: зная закон, по которому изменяется пройденный путь, найти скорость точки в каждый данный момент.

Если наша точка движется равномерно, то вопрос ремается весьма просто: численная величина скорости, которая в этом случае постоянна, равна величине пройденного пути, деленному на соответствующий промежуток времени. Если же движение происходит неравномерно, т.е. в равные промежутки времени проходятся неравные расстояния, то дело не решается так просто.

Прежде всего вводится понятие о средней скорости для данного промежутка времени; это есть скорость воображаемой точки, которая, двигаясь равномерно, проходит в данный промежуток времени то же самое расстояние, что и действительная точка, движущаяся неравномерно. Обозначим через Δt тот промежуток времени, о котором идет речь, а через Δs – пройденный в течение этого промежутка путь; эти величины можно рассматривать, как приращения времени и пройденного пути.

Тогда, согласно сказанному выше, средняя скорость для промежутка Δt будет:

$$v_{cp}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Применим эту формулу к конкретному случаю падения в пустоте; в этом случае имеем:

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

так что:

$$\Delta s=gt\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g\cdot(\Delta t)^2$$

(см. § I п.4, прим. для упр. № 6), и средняя скорость будет:

$$v_{cp}=gt+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t. \qquad (*)$$

Если пожелаем вычислять по этой формуле, то подставим $g = 9,8$ и получим:

$$v_{cp} = 9{,}8 \cdot t + 4{,}9 \cdot \Delta t;$$

так, средняя скорость в течении 4-й секунды получится, если положить:

$$t = 3 \text{ сек. и } \Delta t = 1 \text{ сек.};$$

тогда найдем:

$$v_{cp} = 9{,}8 \cdot 3 + 4{,}9 = 34{,}3 \text{ м/сек}.$$

Средняя скорость движения, конечно, дает нам нечто для его характеристики, но далеко не воспроизводит его подлинной картины: движущаяся точка могла остановиться, пойти назад, потом снова изменить направление своего движения,- и все эти подробности нисколько не отражаются в понятии средней скорости. Но легко сообразить, что чем меньше промежуток времени, для которого ищется средняя скорость, тем ближе подойдем мы к об'ективному положению дела. Посмотрим на примере падения в пустоте, как меняется средняя скорость при уменьшении промежутка; рассматривая по-прежнему промежуток, следующий за 3-й секундой, будем его неограниченно уменьшать, и результаты вычислений по формуле*) приведем в помещенной ниже таблице (t по-прежнему = 3):

Δt	v_{cp}
1	34,3
0,5	31,85
0,1	29,89
0,01	29,449
0,001	29,4049
0,0001	29,40049.

Мы видим, что темп изменения средней скорости замедляется, причем она стремится к определенному пределу, равному 29,4 м|сек., когда Δt становится величиной бесконечно-малой. В последнем можно совершенно строго убедиться, применяя известные теоремы о пределах к формуле $(*)$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} [v_{cp}] = \lim_{\Delta t \to 0} [gt + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t] = gt;$$

полагая здесь $t = 3$, получим:

$$\lim [v_{cp}] = 9,8 . 3 = 29,4 .$$

На разобранном примере мы убеждаемся, что средняя скорость стремится к определенному пределу при безграничном уменьшении промежутка времени. Подобное же имеет место и в общем случае. Когда Δt стремится к 0, то и Δs, как соответствующее приращение непрерывной функции, тоже будет стремиться к 0; таким образом и числитель и знаменатель в выражении для средней скорости:

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

становятся оба величинами бесконечно-малыми, но отношение их, за некоторыми исключениями, всегда стремится к определенному пределу.

Вот этот предел и дает нам скорость точки v в данный момент:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (**)$$

Скорость точки в данный момент есть та скорость, с которой точка двигалась бы равномерно по закону инерции, если бы в рассматриваемый момент прекратилось действие всех сил, заставляющих ее двигаться неравномерно.

В частном случае падения в пустоте, мы выше нашли этот предел, и он оказался равным:

$$v = gt;$$

эта формула и дает нам скорость падающей точки в каждый данный момент.

Итак задача о скорости движения сводится к нахождению предела особого вида (см.* *). К вычислению подобных же пределов мы приходим и во многих других вопросах, где идет речь о темпе какого-нибудь процесса.

Пусть рассматривается химическая реакция, при которой образуется некоторое вещество. Обозначим через x его количество, образовавшееся к моменту t; конечно, это x будет функцией от t. Для того, чтобы составить себе понятие о темпе рассматриваемой реакции, возьмем небольшой промежуток времени Δt следующий за моментом t; в течении этого промежутка снова образовалось некоторое количество вещества Δx. Отношение:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

дало бы вполне ясное представление о скорости реакции, если бы она протекала равномерно; но это не соответствует действительному ходу химических реакций. Поэтому будем безгранично уменьшать промежуток Δt, причем и Δx становится величиной бесконечно-малой, и скорость химической реакции определяется, как предел указанного отношения:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right].$$

К нахождению такого же предела придем, если поставим вопрос о скорости сгорания пороха, о скорости распада радия и т.п.

Не надо думать, что для постановки подобных вопросов необходимо, чтобы переменной независимой непременно было время.

Пусть речь идет о расширении металлического стержня под влиянием температуры, и пусть температуре в $T°$ соответствует длина стержня, равная ℓ; конечно, это ℓ есть функция от T. Возникает вопрос, каким темпом изменяется ℓ при изменении T? Для того, чтобы получить ответ, даем T некоторое приращение ΔT, находим соответствующее приращение длины $\Delta \ell$, образуем отношение:

$$\frac{\Delta \ell}{\Delta T}$$

и находим его предел, когда ΔT, а следовательно и $\Delta \ell$, безгранично убывают:

$$\lim_{\Delta T \to 0} \left[\frac{\Delta \ell}{\Delta T}\right];$$

таким образом получается то, что называется "линейным коэффициентом расширения", который и дает ответ на поставленный выше вопрос.

Словом везде, где идет речь о скорости изменения функции по отношению к изменению переменной независимой, приходится составлять отношение приращения функции к приращению переменной независимой, и искать предел этого отношения при условии, что приращение переменной независимой стремится к нулю (тогда приращение непрерывной функции тоже стремится к нулю).

Пусть нам дана непрерывная функция:

$$y = f(x);$$

из сказанного вытекает, что вопрос о темпе ее изменения сводится к нахождению предела:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]$$

Этот предел называется производной от нашей функции и обозначается через y' или $f'(x)$, так что:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Производная есть, вообще говоря, новая функция от нашей переменной независимой; так, находя скорость падения в пустоте, мы в сущности искали производную от функции $S = \frac{1}{2} g t^2$, и нашли, что она равна gt.

Равенство (4) является определением производной; раскроем его содержание словесной формулировкой.

Производная есть предел отношения приращения функции к приращению переменной независимой, когда это последнее стремится к нулю.

Нахождение производных для любых функций составляет основную задачу той части анализа бесконечно-малых, которая носит название "дифференциального исчисления".

На предыдущих страницах мы уже познакомились с одним свойством производной, которое лежит в основе многих ее приложений, а именно: производная от некоторой функции есть скорость изменения этой функции по отношению к изменению переменной независимой.

Изменение же переменной независимой принимается равномерным, и обычно считают, что она равномерно возрастает.

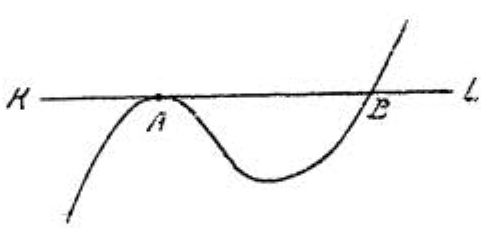
В частности, если речь идет о прямолинейном движении, то производная от пройденного пути по времени:

$$S' = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta S}{\Delta t}\right]$$

дает нам скорость движения в данный момент.

2. Познакомимся теперь с применением производной в области геометрии, а именно - рассмотрим задачу о проведении касательной к данной кривой. Читателю, уже знакомому с началами аналитической геометрии, должно быть ясно, что вопрос сводится к нахождению уравнения касательной.

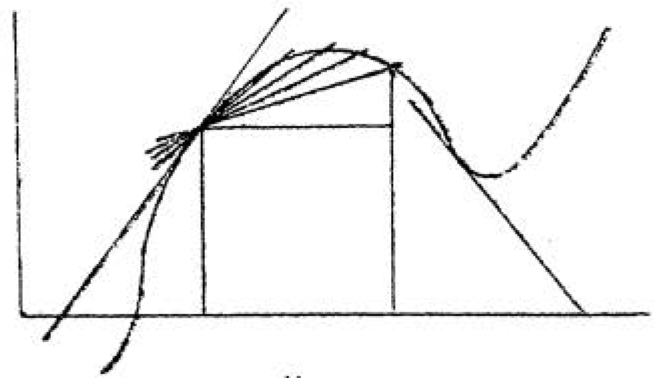
Прежде всего нам надо ответить на вопрос: что такое касательная? Из элементарной геометрии нам известно определение касательной к окружности, как прямой, имеющей с кривою только одну общую точку; но это определение не годится для более сложных кривых; так, читатель конечно согласится, что прямая KL касается в точке A кривой, изображенной на черт. 10; однако, прямая KL имеет с кривой еще одну общую точку B. К определению касательной надо подойти следующим образом. Пусть дана кривая и на ней точка M (см. черт. 11);



Черт. 10.

возьмем в смежности с ней другую точку M_1, и проведем секущую MM_1; будем теперь точку M_1 неограниченно приближать к точке M, перемещая ее по кривой; секущая тоже будет менять свое положение, вращаясь вокруг точки M, и по мере приближения M_1 к M, секущая будет приближаться к некоторому предельному положению, ML это и будет касательная.

Итак, касательная в точке M есть предельное положение секущей MM_1, когда точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M.



Черт.

Это определение позволит нам найти уравнение касательной. Пусть наша кривая задается уравнением:

$$y=f(x),$$

и пусть точка M имеет координаты:

$$M(x;\,y).$$

Тогда и касательная и секущая, как прямые, проходящие через точку M, определяются уравнением:

$$Y-y=k(X-x),$$

где большие буквы X и Y обозначают текущие координаты, а k есть угловой коэффициент, подлежащий определению.

Начнем с секущей; мы знаем, что угловой коэффициент равен тангенсу угла, образуемого прямой с осью OX; следовательно, для секущей ее угловой коэффициент k_1 равен:

$$k_1=tg\angle M_1MK.$$

(так как $MK \parallel O\underline{X}$). Далее в прямоугольном Δ-ке M_1MK имеем:

$$KM_1 = MK \cdot tg\angle M_1MK,$$

откуда:

$$tg\angle MMK = \frac{KM_1}{MK};$$

но $MK = \Delta x$... приращению x при переходе от точки M к M_1, а $KM_1 = \Delta y$.... соответствующему приращению y (см. § I, конец п.4). Следовательно:

$$tg\angle M_1MK = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

и угловой коэффициент секущей равен:

$$k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Для того, чтобы получить отсюда угловой коэффициент касательной, надо найти предел углового коэффициента секущей, когда $\Delta x \to 0$; действительно, приближение M_1 к M равносильно безграничному уменьшению $\Delta x = NN_1$. Итак, угловой коэффициент касательной k равен:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right] = y'.$$

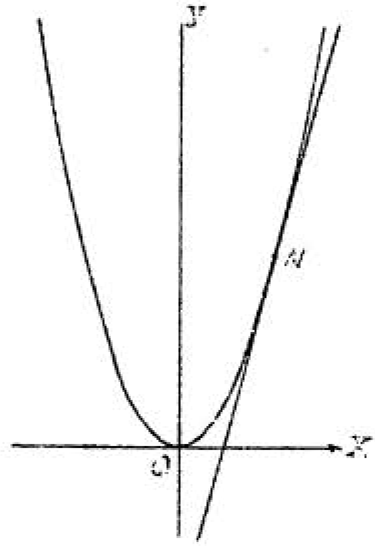
Мы получили важный результат.

<u>В приложения к геометрии, производная есть угловой коэффициент касательной</u>. Если угол касательной с осью $O\underline{X}$ (именно $\angle MT\underline{X}$) обозначить через φ, то:

$$y' = tg\,\varphi;$$

говорят также, что производная дает под'ем кривой в данной точке.

Вместе с тем мы получим уравнение касательной в точке M:



Черт. 12.

$$Y-y=y'(X-x); \quad . \; . \; . \; (5)$$

здесь малые буквы обозначают данные нам координаты точки касания; y' есть значение производной, вычисленное для точки касания; наконец, большие буквы обозначают текущие координаты точки на касательной.

Сделаем пример. Пусть задана кривая

$$y=x^2,$$

и требуется найти уравнение касательной в той ее точке, в которой абсцисса $=2$.

Легко найти, что ордината этой точки $=4$, так что точка касания определяется координатами:

$$M(2;4).$$

Кривая же есть парабола, изображенная на черт. 12 (ее легко построить по точкам). Прежде всего надо найти производную от $y=x^2$; выше мы видели, что в этом случае:

$$\Delta y=2x.\Delta x+(\Delta x)^2;$$

следовательно:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[2x+\Delta x\right]=2x.$$

Теперь надо вычислить значение y' при $x=2$, и получим угловой коэффициент искомой касательной; очевидно он равен 4, и уравнение касательной будет:

$$Y-4=4(X-2),$$

или:

$$4X-Y-4=0.$$

По этому уравнению можно построить касательную совершенно точно.

3. С методологической точки зрения о производной надо сказать, что это понятие является отражением определенной стороны об'ективного мира; в п.I мы старались выяснить, как понятие о производной коренится в темпе процессов, протекающих в природе.

С другой стороны, производная есть предел, а потому все сказанное выше о диалектической природе понятия о пределе - переносится и на понятие о производной. Но производная есть предел особого рода; именно, нам приходится искать предел отношения:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

когда и числитель и знаменатель оба стремятся к нулю. Найти этот предел прямой подстановкой предельных значений, как это иногда делалось выше,- нельзя; мы получили бы тогда отношение:

$$\frac{0}{0},$$

что представляет собою полную неопределенность; между тем путем перехода к пределу, получается вполне определенное количество, в чем мы убеждались на предыдущих примерах.

Об'яснением этого обстоятельства служит то, что нуль не является чем-то безусловно тождественным во всех случаях; важен тот процесс, который подводит нас к нулю. Поэтому непосредственная подстановка предельных значений ничего не дает, и при вычислении нашего предела необходимо учитывать самый процесс изменения Δx и Δy, ведущий их к нулю. Вот этот то процесс, различный в различных случаях, и обусловливает то или другое значение предела, хотя оба члена отношения всегда имеют своим пределом нуль. Энгельс говорит о производной (А.Д., стр. 125), что здесь имеется "количественное отношение, лишенное всякого количества", и несколько дальше: "это отношение двух исчезнувших величин, этот фиксированный момент их исчезновения - представляет собой противоречие". Конечно, и здесь речь идет о противоречии диалектическом.

4. Возрастание и убывание функции; ее наибольшие и наименьшие значения.

В примерах 1 2 мы видели, что знак производной имел решающее значение для вопроса о возрастании и убывании функции. Постараемся сейчас решить этот вопрос в общем виде.

Пусть дело идет об исследовании функции:

$$y = f(x),$$

заданной в промежутке:

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

и пусть переменная независимая x пробегает этот промежуток, непрерывно возрастая, так что приращение Δx будет у нас величиной положительной. Тогда вопрос о характере изменения функции в смежности с данной точкой (т.е. при достаточно малом Δx) решается по знаку приращения Δy: если $\Delta y>0$, то y возрастает, а если $\Delta y<0$, то y убывает. Вспоминая, что в этом вопросе $\Delta x>0$, можем сказать:

y возрастает, если $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$

y убывает, если $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$.

Но мы знаем, что:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]=y';$$

следовательно, при достаточно малом Δx, это отношение будет отличаться от y' сколь угодно мало. Поэтому, если y' не $=0$ при рассматриваемом значении x (случай $y'=0$ будет разобран ниже), то знак y' одинаков со знаком отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Следовательно, функция возрастает или убывает в смежности с данной точкой, смотря по тому, будет ли в этой точке $y'>0$ или $y'<0$. Наконец, мы говорим, что функция возрастает или убывает во всем данном промежутке, если это имеет место в каждой его точке.

Таким образом, приходим к правилу:

<u>Функция возрастает в том промежутке, в котором ее производная положительна, и функция убывает в том промежутке, в котором ее производная отрицательна.</u>

К этому выводу можно также прийти путем рассмотрения графика функции. Если будем пробегать график слева направо, то там, где функция возрастает, график идет вверх, а там, где она убывает, график идет вниз. Легко видеть (см. черт. II), что в I-м случае касательная образует с положительным направлением оси OX острый угол; и тогда производная, как тангенс острого угла, будет положительной; если же график идет вниз, то угол касательной с OX будет тупым, а производная - отрицательной. Также просто и наглядно доказываются обратные утверждения.

Сделаем пример: исследовать функцию:

$$y = x^2 - 4x + 3$$

на возрастание и убывание.

Прежде всего надо найти производную, а для этого - составить Δy; пусть читатель убедится сам, что:

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 4 \cdot \Delta x;$$

далее имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (2x - 4) + \Delta x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[(2x-4) + \Delta x\right] = 2x - 4$$

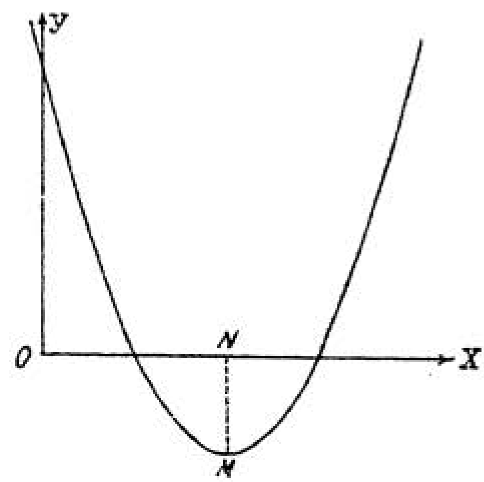
$$y' = 2(x-2).$$

Вопрос о знаке производной в этом случае решается весьма просто: пока $x < 2$, будет $y' < 0$, и y убывает; когда же $x > 2$, будет $y' > 0$ и y возрастает. При $x = 2$ функция переходит от убывания к возрастанию и, следовательно, достигает наименьшего значения; это значение $= -1$.

Картина изменения данной функции теперь выяснена вполне; для того, чтобы точнее построить ее график, не мешает найти еще несколько опорных точек; так, нетрудно убедиться, что искомая кривая пересекается с осью

OY в точке (0;3), а с осью OX – в точках (1;0) и (3;0); затем при $x=4$ имеем $y=3$, и т.д. Получаем график, изображенный на черт. 13.

В предыдущем примере мы встретились с наименьшим значением функции. Наименьшие и наибольшие значения функций имеют важные приложения. Так, например, горизонтальная дальность полета снаряда выражается формулой:



Черт. 13.

$$X = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\theta_0 ;$$

важно узнать, при каком угле бросания θ_0 эта дальность будет наибольшей (начальная скорость v_0 считается данной). Легко сообразить, что наибольшее значение X получится при наибольшем значении $\sin 2\theta_0$ т.е. когда:

$$\sin 2\theta_0 = 1 ;$$

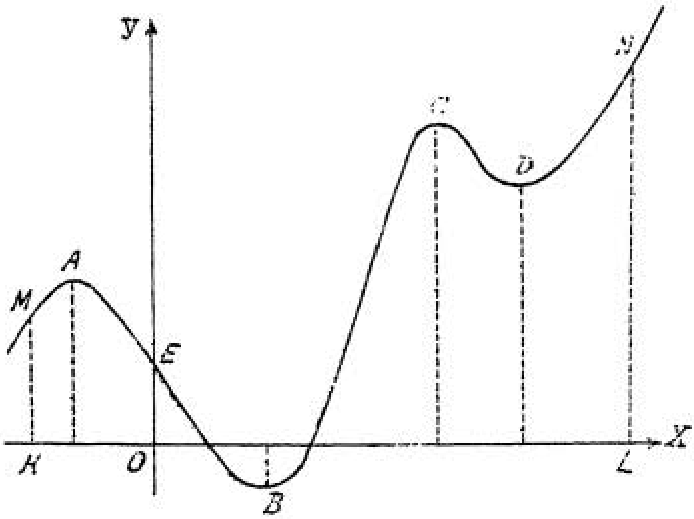
это будет при $2\theta_0 = 90°$, или при:

$$\theta_0 = 45° ;$$

и наибольшее значение $X = \frac{v_0^2}{g}$.

Вопрос здесь решается весьма просто благодаря тому, что мы уже хорошо изучили изменение синуса с изменением угла; в других случаях требуется подробное исследование, и предыдущий пример проливает некоторый свет на путь, ведущий к решению задачи.

Легко понять, что функция имеет <u>наибольшее значение по сравнению со смежными или *maximum*</u> при тех значениях переменной независимой, при которых она переходит от возрастания к убыванию; таковы точки A и C на черт. 14. Функция имеет наименьшее значение по сравнению со смежными или *minimum* - там, где она переходит от убывания к возрастанию; таковы точки B и D



Черт.14.

на черт. 14. И тот и другой случай об'единяются названием *extremum* (это - все латинские слова, во множественном числе будет: *maxima, minima, extrema.*)

Сопоставляя эти результаты с признаками возрастания и убывания функции, приходим к следующему выводу, имеющему основное значение в рассматриваемом вопросе:

Функция имеет *maximum* в той точке, где ее производная меняет знак плюс на минус, и она имеет *minimum* там, где ее производная меняет знак минус на плюс. Важно напомнить, что это правило относится к предположению, что переменная независимая все время возрастает, так что мы переходим от меньших значений x к большим, или пробегаем график функции слева направо.

Что же происходит с производной в этих критических точках, где она меняет знак? Если производная - непрерывна (а сейчас мы этим случаем ограничимся), то, меняя знак, она должна обратиться в нуль.

Отсюда получается правило для нахождения *maxima* и *minima*: составляем производную, приравниваем ее нулю и находим все вещественные корни этого уравнения; затем исследуем, что происходит со знаком производной, когда переменная независимая возрастая переходит через каждый из полученных корней. Дальнейшее сводится к основному предложению, доказанному выше.

Примером может служить проделанное выше исследование функции $y=x^2-4x+3$; можно также порекомендовать читателю взглянуть с этой общей точки зрения на примеры § 2. Другие примеры в большом числе появятся в следующих параграфах, когда мы научимся находить производные. Надо, однако, теперь же подчеркнуть, что указанным путем мы найдем значения, наибольшие и наименьшие лишь по сравнению со смежными; тогда как на практике нас обычно интересует наибольшее или наименьшее значение функции во всем рассматриваемом промежутке. Что это не одно и то же,- легко пояснить на графиках различных функций. Для функции $y=x^2-4x+3$ ее *minimum* при $x=2$ был наименьшим из всех ее значений (см.черт. 13); не так обстоит дело с графиком, изображенным на черт. 14.

Если мы станем рассматривать промежуток от точки K до точки L, то наименьшее значение функции во всем промежутке совпадает с ее *minimum'ом* в точке B; но наибольшим значением в промежутке будет ни *maximum* в точке A, ни *maximum* в точке C, а пограничное значение LN. Здесь интересно отметить еще одну особенность: *minimum* в точке D очевидно будет больше *maximum'a* в точке A; в этом нет противоречия, так как значения функции в точках A и D сравнивались лишь со смежными значениями функции, а не вообще со всеми ее значениями.

Как же находить значения функции, наибольшие и наименьшие в данном промежутке? Если наибольшее значение в промежутке получается в какой-нибудь точке, лежащей внутри промежутка, то оно в то же время будет и наибольшим по сравнению со смежными и, следовательно, найдется среди *maxima* по указанному выше способу; если же наибольшее в промежутке получается на самой границе промежутка, то оно конечно не будет находиться среди наибольших по сравнению со смежными, так как для пограничного значения нельзя говорить о смежных значениях с обеих сторон; это значение надо вычислить особо. Подобное же имеет место и для наименьшего значения.

Изложенные соображения приводят к правилу: Для того, чтобы найти значение функции, наибольшее в данном промежутке, надо найти все ее *maxima* в этом промежутке, вычислить ее значения на границах промежутка, и из всех этих чисел взять наибольшее. Для нахождения наименьшего значения, надо найти все *minima*, вычислить значения функции на границах промежутка, и из всех этих чисел взять наименьшее.

Так, например, если исследовать функцию, заданную графиком на черт. 14, и ограничиться промежутком KO, то ее наибольшим значением в этом промежутке будет *maximum* в точке A, а наименьшим - пограничное значение OE. В следующих параграфах мы не раз воспользуемся этим правилом.

5. В заключение сообщим краткие исторические сведения. Мы видели, что основная задача дифференциального исчисления - нахождение производных - была вызвана к жизни возникшим в условиях нового времени стремлением

к более полному познанию процессов, протекающих в природе, что в свою очередь было вызвано развитием производительных сил. Но ближайшим поводом к изобретению методов анализа бесконечно-малых послужили задачи о проведении касательной и задачи на *maxima* и *minima*, которыми занимались математики XVI и XVII ст.

Здесь можно назвать имена Кеплера (1615), Кавальери (1635), Ферма (1601-1665); последнему принадлежит замечание, что вблизи наибольшего или наименьшего значения функция изменяется весьма мало. Для решения задачи о касательной тоже были указаны различные приемы; так, Роберваль (1602-1675) предложил механический способ, рассматривая кривую как траекторию движущейся точки; ее скорость будет направлена по касательной.

Окончательно оформили новые методы и создали дифференциальное (и интегральное) исчисление два знаменитых ученых: Ньютон (1643-1727) и Лейбниц (1646-1716). Ученики их долго спорили о том, кому именно принадлежит первенство; но история решила вопрос в том смысле, что названные ученые пришли к своим великим работам независимо друг от друга. Вопрос настолько назрел к концу XVII столетия, что наиболее чуткие, гениальные ученые одновременно пришли к его решению.

О различии в исходных положениях у Ньютона и Лейбница мы скажем несколько слов ниже, когда продвинемся дальше в изучении анализа бесконечно-малых.

Примеры для упражнения.

Найти производные от функций:

1) $y = ax + b$ Отв: a

2) $y = ax^2 + bx + c$ Отв: $2ax + b$.

3) $y=x^3$ Отв: $3x^2$.

4) Исследовать функцию

$$y=4x-x^2.$$

и построить ее график.

§ 7. ПРОИЗВОДНАЯ ОТ ЦЕЛОГО МНОГОЧЛЕНА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧ.

1. В этом параграфе начинается вывод основных формул дифференциального исчисления; по мере того, как мы будем овладевать техникой нахождения производных, эти навыки будут применяться к решению задач указанных выше типов.

Итак, пусть нам дана непрерывная функция:

$$y=f(x);$$

ее производная определяется равенством:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]$$

Для известных нам функций этот предел всегда существует за исключением некоторых отдельных значений аргумента; но в настоящем параграфе мы с этими исключениями не встретимся.

Выпишем определение производной подробнее, использовав символ $f(x)$; мы знаем, что:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x);$$

положим для сокращения письма:

$$\Delta x=h;$$

тогда определение производной принимает вид:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (б)$$

Это равенство дает нам общее правило для нахождения производной от функции $f(x)$: вычисляем $f(x+h)$, составляем разность $f(x+h) - f(x)$, делим ее на h и ищем предел частного, когда h стремится к нулю.

Начинаем вывод основных формул: производная от x^m, где m - целое и положительное число.

В этом случае имеем:

$$f(x) = x^m$$

$$f(x+h) = (x+h)^m;$$

раскрываем правую часть по биному Ньютона:

$$f(x+h) = x^m + mx^{m-1} \cdot h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} \cdot h^2 + \dots + mxh^{m-1} + h^m.$$

Далее находим разность и частное:

$$f(x+h) - f(x) = mx^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \dots + mxh^{m-1} + h^m.$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h + \dots + mxh^{m-2} + h^{m-1};$$

последний шаг - нахождение предела:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left\{ mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h + \dots + mxh^{m-2} + h^{m-1} \right\};$$

применяя основные теоремы о пределах и обращая внимание на то, что в правой части все члены, начиная со второго, содержат множитель h, стремящийся к нулю, окончательно получаем:

$$f'(x) = mx^{m-1}.$$

Итак, мы вывели первую формулу дифференциального исчисления:

$$\underline{(x^m)' = m . x^{m-1}};$$

эта формула верна при всяком постоянном m, но пока доказана только для m целого и положительного.

Так, например:

$$(x^6)' = 6x^5; \quad (x^{14})' = 14x^{13} \text{ и т.д.}$$

Производная от аргумента (точнее говоря: производная от функции, равной аргументу).

Здесь имеем:

$$f(x) = x$$

$$f(x+h) = x+h$$

$$f(x+h) - f(x) = h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1;$$

а так как предел постоянного числа равен этому числу, то

$$f'(x) = 1,$$

или:
$$x'=1,$$

т.е. производная от переменной независимой равна единице.

Производная от постоянного количества.

Здесь имеем:

$$f(x)=C, \text{ где } C-\text{постоян.}$$
$$f(x+h)=C.$$
$$f(x+h)-f(x)=0$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

а следовательно и $f'(x)=0$.

Итак:

$$(Const.)'=0;$$

символом $Const$ (сокращенное латинское слово $Constans$) обозначается постоянная величина.

Производная от алгебраической суммы.

Здесь будет удобнее применить сокращенные обозначения; пусть u, v, w будут функциями от x, и рассмотрим их алгебраическую сумму:

$$y=u+v-w.$$

Пусть x получает приращение Δx; тогда и все наши функции y, u, v, w получат соответствующие приращения $\Delta y, \Delta u, \Delta v, \Delta w$, так что последнее равенство превратится в такое:

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w);$$

вычитая отсюда почленно первоначальное равенство, найдем Δy:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

Далее делим на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

и переходим к пределу, применяя теорему о пределе суммы:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left\{\frac{\Delta y}{\Delta x}\right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{\frac{\Delta u}{\Delta x}\right\} + \lim_{\Delta x \to 0} \left\{\frac{\Delta v}{\Delta x}\right\} - \lim_{\Delta x \to 0} \left\{\frac{\Delta w}{\Delta x}\right\};$$

нетрудно видеть, что эти пределы суть не что иное, как производные от соответствующих функций, так что получаем:

$$y' = u' + v' - w'$$

откуда, подставляя значение y:

$$\underline{(u + v - w)' = u' + v' - w'},$$

или словами: <u>производная от суммы равна сумме производных</u>.

Надо помнить, что речь идет об алгебраической сумме, так что для разности 2 функций особой формулы не нужно. Затем мы взяли 3 слагаемых, но приведенное рассуждение применяется к любому числу слагаемых, лишь бы оно было конечным; этого требует теорема III, на которую мы ссылались при выводе.

Производная от произведения.

Начнем со случая 2 множителей:

$$y = u \cdot v.$$

Переходя к приращенным значениям, подобно предыдущему случаю, получим:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) = uv + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v;$$

вычитая из этого равенства первоначальное, находим Δy:

$$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v;$$

делим на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

и переходим к пределу:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left\{\frac{\Delta y}{\Delta x}\right\} = u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left\{\frac{\Delta v}{\Delta x}\right\} + v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left\{\frac{\Delta u}{\Delta x}\right\} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left\{\frac{\Delta v}{\Delta x}\right\};$$

здесь u и v выносятся за знак предела, так как, не содержа Δx, они являются в данном случае постоянными величинами. Пределы входящих сюда отношений равны соответствующим производным, а $\lim \Delta u = 0$ по свойству непрерывной функции. Итак, окончательно получаем:

$$y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

или:

$$\underline{(u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u'}$$

или словами: производная от произведения 2 множителей равна произведению I-го множителя на производную 2-го плюс произведение 2-го на производную I-го.

Не представляет труда обобщить эту формулу на случай большего числа множителей: так, для 3 множителей имеем:

$$(uvw)' = [u.(vw)]' = u(vw)' + vwu' =$$

$$= u(vw' + wv') + vwu' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Остановимся еще на частном случае, когда один из множителей есть число постоянное C; по общей формуле имеем:

$$(Cu)' = Cu' + uC';$$

но $C' = 0$, так что приходим к выводу:

$$(Cu)' = Cu',$$

или словами: постоянный множитель можно выносить за знак производной.

В настоящем параграфе мы ограничимся выведенными до сих пор формулами; они позволяют найти производную от любого целого многочлена; именно, на основании выведенных правил последовательно получаем:

$$(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m)' = (A_0x^m)' + (A_1x^{m-1})' +$$

$$+ \cdots + (A_{m-1}x)' + A_m' = A_0(x^m)' + A_1(x^{m-1})' + \cdots +$$

$$+ A_{m-1} \cdot x' = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}.$$

В начале можно находить производную, проделывая все промежуточные выкладки, но мало-по-малу надо привыкать сразу писать результат, как например:

$$(5x^6 - x^5 + 9x^4 - x^2 + 7x + 9)' = 30x^5 - 5x^4 + 36x^3 - 2x + 7.$$

2. Решим теперь ряд задач, в которых найдет себе приложение производная от многочлена.

<u>I. Задачи на скорость и касательную:</u>

I) Если снаряд брошен вертикально вверх с начальной скоростью v_0, то пренебрегая сопротивлением воздуха, получаем пройденный им путь S в виде следующей функции времени t:

$$S = v_0 t - 4{,}9 . t^2;$$

найти скорость снаряда в конце 5-й секунды($v_0 = 100$ м|сек.) Скорость получается как производная от пройденного пути по времени, т.е. надо искать производную от S, считая t переменной независимой:

$$v = (v_0 t - 4{,}9 . t^2)' = v_0 - 9{,}8 . t;$$

искомая скорость равна:

$$v = 100 - 9{,}8 . 5 = 51 \text{ м/сек}.$$

2) В какой точке кривой

$$y = x^2 - 7x + 3$$

касательная параллельна прямой $y = 5x + 2$?

Угловой коэффициент касательной равен производной y':

$$y' = (x^2 - 7x + 3)' = 2x - 7;$$

угловой коэффициент прямой $= 5$, следовательно по условию параллельности:

$$2x - 7 = 5,$$

откуда $x = 6$.

Подставляя в данное уравнение, находим $y = -3$. Итак, ответом на вопрос является точка:

$$(6; -3).$$

II. Задачи на исследование функций и построение их графиков.

I) Исследовать изменение функции:

$$y = x^3 - x^2 - x - \frac{1}{2}$$

и построить ее график.

Прежде всего замечаем, что строение функции не налагает на аргумент никаких ограничений, так что последний может принимать любое значение:

$$-\infty < x < +\infty.$$

Пусть x пробегает промежуток от $-\infty$ до $+\infty$ (т.е. от бесконечно-больших отрицательных значений до бесконечно-больших положительных) все время возрастая; прежде всего на найти те критические значения аргумента, при которых производная, обращаясь в нуль, может менять знак. Составляем производную:

$$y' = 3x^2 - 2x - 1$$

и решаем квадратное уравнение:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0;$$

его корни $= -\frac{1}{3}$ и 1.

Эти критические значения аргумента надо выделить, и они разобьют первоначальный промежуток на 3 части:

от $-\infty$ до $-\frac{1}{3}$; от $-\frac{1}{3}$ до I; от I до $+\infty$.

Для наглядности, мы составим таблицу, в которую и будем заносить полученные выводы (см.ниже). В первой строке помещены указанные промежутки для аргумента; во 2-й строке мы отметим знаки производной в соответствующих промежутках. Менять свой знак производная может только при $x=-\frac{1}{3}$ или $x=+1$, так что внутри каждого из 3 промежутков она сохраняет один и тот же знак; чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значение производной при каком-нибудь значении x, лежащем внутри рассматриваемого промежутка. Так, для I-го промежутка вычисляем y' при $x=-1$.

$$y'=3(-1)^2-2(-1)-1=4>0,$$

так что в I-м промежутке производная всегда положительна Для 2-го промежутка вычисляем y' при $x=0$:

$$y'=-1<0;$$

а для 3-го - при $x=+2$:

$$y'=3.4-2.2-1=7>0.$$

Эти знаки производной помещаем во 2-й строке таблицы.

x	$-\infty$	.....	$-\frac{1}{3}$	.....	$+1$	.....	$+\infty$
y'		$+$		$-$		$+$	
y	$-\infty$	возр.	$-\frac{17}{54}$ (max)	убыв.	$-\frac{3}{2}$ (min)	возр.	$+\infty$

Знак производной сейчас же дает нам характер изменения функции в соответствующем промежутке, что отмечается в 3-й строке. При $x=-\frac{1}{3}$ функция имеет maximum так как ее производная меняет $+$ на $-$; этот $maximum = -\frac{17}{54}$, как это легко вычислить, подставляя $x=-\frac{1}{3}$ в выражение для y. Точно также при $x=+1$ функция имеет minimum равный $-\frac{3}{2}$. Наконец, что делается с y, когда $x \to \pm\infty$?

Для решения этого вопроса сделаем следующее преобразование:

$$y = x^3 \cdot \left\{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3}\right\},$$

т.е. вынесем за скобки высшую степень аргумента. Если $x \to \pm\infty$, то выражение в скобках имеет своим пределом 1, так что для суждения о величине y, решающее значение имеет 1-й множитель x^3. Теперь нетрудно заключить, что:

если $x \to +\infty$, то и $y \to +\infty$

если $x \to -\infty$, то и $y \to -\infty$;

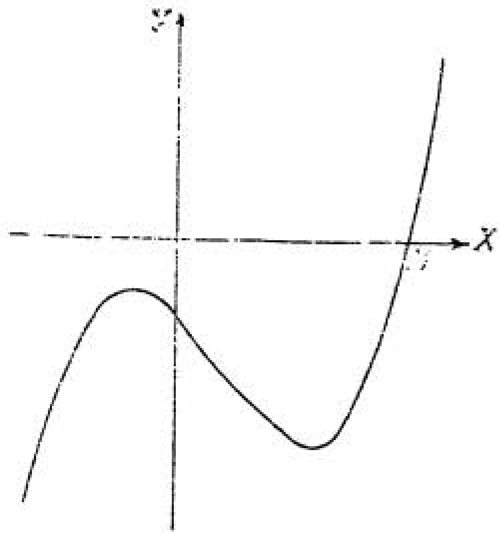
этими данными мы окончательно пополняем нашу таблицу.

Таким образом получена полная картина изменения данной функции; эта картина станет еще нагляднее, если мы построим график функции, т.е. - кривую заданную уравнением:

$$y = x^3 - x^2 - x - \frac{1}{2}.$$

Уже данных таблицы достаточно для того, чтобы в общих чертах составить себе представление о ходе кривой; для большей точности, следует вычислить ряд добавочных точек, что не представит трудностей при пользовании таблицами квадратов и кубов. График данной функции изображен на черт. 15 (за единицу принят отрезок в 15 мм).

Этот график мы постарались построить точнее, потому что он имеет интересное приложение. В курсе проф.Дроздова "Сопротивление артиллерийских орудий"(ч.I стр.138)изд.1926г при расчете сопротивления по тангенциальной деформации, приходится решать уравнение 3-й степени:



Черт. 15.

$$2x^3-2x^2-2x-1=0.$$

или, что то же самое:

$$x^3-x^2-x-\frac{1}{2}=0.$$

Для его приближенного решения можно предложить графический способ: построим график функции:

$$y=x^3-x^2-x-\frac{1}{2};$$

тогда те значения x, при которых $y=0$ (т.е. абсциссы точек пересечения кривой с осью OX) и будут корнями данного уравнения.

Из черт. 15 мы видим, что это уравнение имеет только один вещественный корень, равный абсциссе точки M. Отрезок OM равен 52,5 мм; но за единицу мы приняли отрезок в 30 мм; следовательно, искомый корень равен:

26,3 : 15 = 1,75.

Более точное значение корня будет $= 1,740$; взяв больший масштаб, мы можем достигнуть этой точности.

2) Исследовать изменение функции:

$$y = x^3(x-2)^2$$

и построить ее график.

Как и в задаче № I, для аргумента никаких ограничений не имеется.

Для вычисления производной делаем небольшое преобразование:

$$y = x^3(x^2-4x+4),$$

и пользуемся формулой для производной от произведения:

$$y' = x^3(2x-4)+3x^2(x^2-4x+4)$$

$$y' = 2x^3(x-2)+3x^2(x-2)^2$$

$$y' = x^2(x-2)\left[2x+3(x-2)\right]$$

$$y' = x^2(x-2)(5x-6).$$

Приравнивая y' нулю, находим критические точки:

$$x=0;\quad \frac{6}{5};\ 2.$$

Далее составляем таблицу подобно тому, как это было сделано в предыдущей задаче; здесь она дается в готовом виде, а читатель может сам проделать все выкладки. В таблице обращает на себя внимание значение $x=0$; здесь производная, обращаясь в нуль, знака не меняет,

x	$-\infty$		0		$\frac{6}{5}$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$-$		$+$	
y	$-\infty$	взр.	0	взр.	$1,02$ (max)	уб.	0 (min)	взр.	$+\infty$

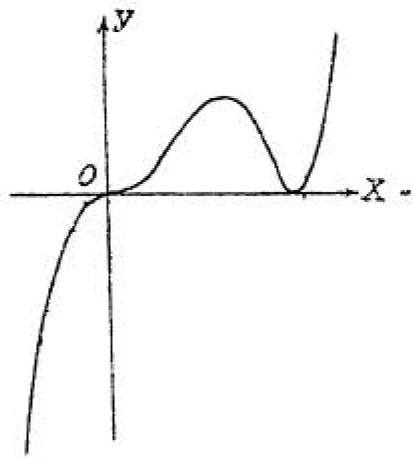
так что функция возрастает как до этого значения аргумента, так и после него. Что же происходит с функцией в этой точке? Здесь угловой коэффициент касательной к графику функции равен нулю, и эта касательная проходит через начало координат, т.е. ось OX является касательной к кривой. Далее из выражения для y:

$$y = x^3(x-2)^2$$

непосредственно видно, что при $x<0$ и $y<0$, а при $x>0$ и $y>0$, т.е. кривая пересекает свою касательную. Такие точки называются точками перегиба, о которых подробнее будем говорить значительно ниже.

Найдя еще несколько опорных точек, строим график данной функции (см. черт. 16); в начале координат имеем точку перегиба.

III. Задачи на нахождение наибольших и наименьших величин.



Черт. 16.

1) Из цилиндрического бревна (диаметр основания $= a$) требуется вырезать прямоугольную балку наибольшей прочности. Известно, что прочность такой балки пропорциональна произведению из ее ширины на квадрат высоты.

Искомыми в этой задаче будут измерения того прямоугольника, который получается в сечении балки наибольшей прочности. На черт. 17a изображено поперечное сечение данного бревна и этой балки; обозначим ширину балки через x, высоту через z, а ее прочность, которая подлежит исследованию, через y; согласно сказанному имеем:

$$y=k.xz^2,$$

где k - коэффициент пропорциональности. Мы должны найти, при каких x и z прочность (т.е. y) будет наибольшей; но x и z не являются переменными независимыми: так как $\triangle ABF$ - прямоугольный и $AB=a$, то:

$$x^2+z^2=a^2$$

откуда:

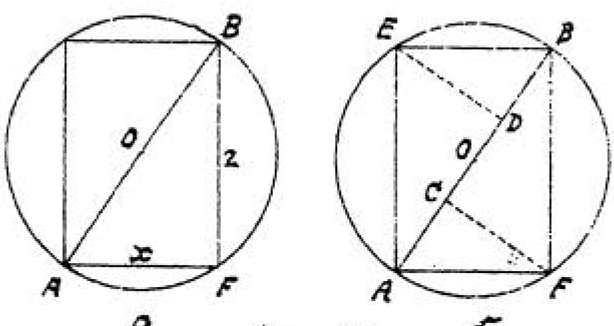
$$z^2=a^2-x^2.$$

Подставляя, находим y как функцию от одной переменной независимой x:

$$y=kx(a^2-x^2).$$

По характеру задачи эта переменная x очевидно подчинена условию:

$$0<x<a;$$



Черт. 17.

в этом промежутке и надо найти наибольшее значение y.

Ищем сначала $maxima$ функции, для чего составляем производную:

$$y=k(a^2x-x^3)$$
$$y'=k(a^2-3x^2);$$

приравнивая $y'=0$, получаем уравнение:

$$a^2-3x^2=0,$$

откуда:

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}};$$

отрицательный корень, по смыслу задачи, надо отбросить, и получается только одно критическое значение:

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

Как меняются знаки производной при переходе x через эту точку (от меньших значений к большим)? Для решения этого вопроса здесь будет удобнее разложить производную на множителей:

$$y'=3k\left(\frac{a^2}{3}-x^2\right)=3k\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-x\right)\left(\frac{a}{\sqrt{3}}+x\right);$$

теперь сразу видно, что при $x<\frac{a}{\sqrt{3}}$ будет $y'>0$, а при $x>\frac{a}{\sqrt{3}}$ будет $y'<0$; следовательно, при $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ функция имеет $maximum$. Значения на границах промежутка x принимать не может; но легко видеть, что когда x подходит к пограничным значениям 0 и a, то y устремится к нулю.

Итак, прочность будет наибольшей, если ширина балки:

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}};$$

тогда для высоты z имеем:

$$z^2=a^2-\frac{a^2}{3}=\frac{2}{3}a^2,$$

откуда:

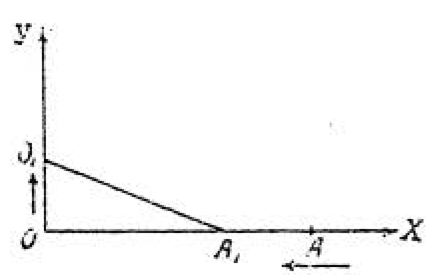
$$x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Задача наша решена вполне; для вычерчивания наиболее выгодного сечения балки, пользуются следующим построением (см. черт. 17б). Проводят диаметр AB и делят его на 3 равные части точками C и D; затем в этих точках восставляют перпендикуляры к диаметру до пересечения с окружностью в точках F и E; тогда прямоугольник $AFBE$ будет искомым. Читателю предоставляется доказать, что $AF = \frac{a}{\sqrt{3}}$ и $FB = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2) Судно A, находящееся на расстоянии 75 км к востоку от судна O, идет на запад со скоростью $=$ $= 12$ км|час; судно же O идет к северу со скоростью $= 9$ км|час. Когда эти суда будут наиболее близки друг к другу?

Задача заключается в определении того момента, когда расстояние между судами будет наименьшим; для ее решения надо расстояние выразить в функции времени t, которое будем отсчитывать в часах от момента, соответствующего исходному положению кораблей.

Выберем систему прямоугольных координат, поместив ее начало в исходном положении судна O и направив ось OX на восток (см. черт. 18), так что эта ось пройдет через начальное положение судна A; тогда $OA = 75$ км, а ось OY пойдет прямо на север.



Черт. 18.

По прошествии некоторого времени t, судно O придет в положение O_1, причем $OO_1 = 9t$; судно A

за это же время передвинется в точку A_1, причем $AA_1 = 12 . t$, а следовательно:

$$OA_1 = 75 - 12t.$$

Теперь легко найти расстояние между нашими судами в этот момент t:

$$O_1A_1 = \sqrt{(75-12t)^2 + 81 . t^2}$$

Вот для этой функции и надо найти наименьшее значение; но легко видеть, что корень получит наименьшее значение, когда это же самое произойдет с подкоренным выражением; так что дело сводится к исследованию функции:

$$(75 - 12t)^2 + 81t^2 = 225(t^2 - 8t + 25).$$

Можно еще упростить задачу, а именно: это произведение будет иметь наименьшее значение, когда наименьшее значение получит трехчлен, стоящий в скобках, ибо I-й множитель есть число постоянное.

Таким образом, в конце концов дело сводится к нахождению наименьшего значения функции:

$$y = t^2 - 8t + 25;$$

переменная независимая t подчинена только одному условию:

$$t \geqslant 0.$$

Составляем производную:

$$y' = 2t - 8$$

и находим ее корень:

$$t=4.$$

Исследуем знаки производной:

при $t=3$ будет $y'=-2<0$

при $t=5$ будет $y'=+2>0$;

следовательно при $t=4$ функция имеет $minimum$ и этот $minimum=9$.

Надо вычислить значения y на границах: при $t=0$ получаем $y=25$, если же $t\to+\infty$, то и $y\to+\infty$. Следовательно, при $t=4$ получаем значение y, наименьшее из всех его значений. Для того, чтобы найти кратчайшее расстояние между кораблями, надо вспомнить, что

$$O_1A_1=15.\sqrt{y},$$

а потому наименьшее расстояние равно:

$$15.\sqrt{9}=45\ (\text{км.})$$

и наступит оно через 4 часа.

Основываясь на конкретном содержании задачи, можно было бы упростить рассуждения. В самом деле, ясно, что корабли сначала начнут сближаться (действительно, через 2 часа их расстояние $=\sqrt{2925}$, а это <54), а потом будут все больше и больше расходиться. Отсюда следует, что наименьшее значение существует; а так как критическое значение только одно $t=4$, то при этом значении и получим наименьшее расстояние.

ПРИМЕЧАНИЕ. При решении этой задачи были применены некоторые приемы упрощения, которые надо заметить, чтобы пользоваться ими и в других случаях. Так, если нием *extrema* корня, то можно решать ту же задачу для подкоренного количества; можно отбросить постоянного положительного множителя; то же самое можно сделать с постоянным слагаемым и т.п.

Примеры и задачи для упражнения.

I. Примеры на нахождение производных от многочлена:

1) $y = x^2 - 3x$ Отв: $y' = 2x - 3$.

2) $y = 2x^3 - 6x + 5$ Отв: $y = 6(x^2 - 1)$

3) $y = at^2 + bt + c$; t - пер. незав. Отв: $y' = 2at + b$.

4) $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ Отв: $y' = 2x^2 - 3x$

5) $y = \frac{5}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 6$ Отв: $y' = 5x^3 + x$

6) $S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$; t - пер. нез. Отв: $S' = v_0 + gt$

7) $S = at^3 - bt^2 + c$; t - пер. нез. Отв: $S' = 3at^2 - 2bt$.

II. Задачи на скорость и касательную.

8) Какой угол с осью OX образует касательная к кривой $y = 3x^2 - x$ в той точке, в которой абсцисса $= 1$?

Отв: $\operatorname{tg} \varphi = 5$.

9) Найти точки, в которых касательная к кривой $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ параллельна OX?

Отв: $x = -1$ и $x = 3$.

10) Снаряд, выпущенный вертикально вверх, имеет начальную скорость $= 196$ м|сек. Найти его скорость в

конце 10-й секунды.

Отв.: 98 м|сек.

Указание: путь, пройденный снарядом, выражается, как функция времени, следующей формулой:

$$S = v_0 t - 4{,}9 \cdot t^2,$$ где v_0 – начальная скорость.

(сопротивлением воздуха пренебрегаем).

4) Сколько времени снаряд подымается вверх? (условия предыдущей задачи).

Отв.: 20 сек.

12) Высота воды в цилиндрическом сосуде, имеющем 12 см в диаметре, увеличивается на 1 см в сек. Найти скорость возрастания об'ема воды.

Отв.: 113,04 см^3|сек.

Указание: об'ем воды $= 36\pi \cdot h$, где h - ее высота; скорость его изменения $= 36\pi h'$, где h' есть скорость возрастания высоты. Подставляя данные и считая $\pi = 3{,}14$ получаем искомое.

13) Задачник кафедры математики №№ 26,28,47.

III. Задачи на исследование функций и построение графиков.

14) Исследовать изменение функции:

$$y = x^3 - 3x + 2$$

и построить ее графики.

Отв.: max. при $x = -1$;

min. при $x = +1$.

15) То же самое для функции:

$$y=\frac{x^4}{4}-2x^2-\frac{9}{4}.$$

Отв.: $min.$ при $x=\pm 2$; $max.$ при $x=0$.

Обратить внимание на симметричность графика и связать ее с некоторой особенностью данной функции.

16) То же самое для функции:

$$y=x^2(x-1)^2$$

Отв.: $min.$ при $x=0$ и $x=1$; $max.$ при $x=\frac{1}{2}$.

IУ. Задачи на разыскание наибольших и наименьших значений.

17) Задачник кафедры №№ 71,72.

18) Брусок длиною l равномерно нагружен; тогда его момент изгиба M в точке, отстоящей от конца на расстояние $=x$, дается формулой:

$$M=\frac{1}{2}wlx-\frac{1}{2}wx^2,$$

где w - нагрузка на единицу длины. Доказать, что наибольший момент изгиба приходится на середину бруска.

19) Из квадратного жестяного листа, сторона которого $=a$, желают сделать открытый сверху ящик наибольшего об'ема. Для этого вырезают равные квадраты по углам листа и загибают жесть, чтобы образовать боковые стенки ящика. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов?

Отв.: $\frac{a}{6}$

20) По истечении t секунд, тело, брошенное вертикально вверх со скоростью $=30$ м|сек, находится

на высоте:

$$h = 30 \cdot t - 4{,}9 t^2;$$

найти наибольшую высоту тела.

Отв.: 45,9 м (с точностью до 0,1 м).

21) Доказать, что трехчлен $Ax^2 + Bx + C$ имеет всегда только один *extremum*.

§ 8. Производные от рациональных функций и их приложения.

Для того, чтобы уметь находить производную от любой рациональной функции, нам надо вывести формулу для производной от частного (или от дроби).

Пусть:

$$y = \frac{u}{v},$$

где u и v - функции от x. Если x получает приращение Δx, то все наши функции получат соответствующие приращения, и предыдущее равенство превратится в такое:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v};$$

вычитая из него почленно первое равенство, находим Δy:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

$$\Delta y = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v^2 + v \cdot \Delta v}.$$

Делим обе части на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v}$$

и переходим к пределу, когда Δx стремится к нулю:

$$\lim\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{v \cdot \lim\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) - u \cdot \lim\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{v^2 + v \cdot \lim(\Delta v)}.$$

Пределы этих отношений, очевидно, равны производным от соответствующих функций, а $\lim(\Delta v) = 0$ в силу непрерывности функции; следовательно:

$$y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2},$$

или:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

Знаменателем правой части служит квадрат знаменателя данного выражения, а числителем служит разность 2 произведений, причем сначала берем произведение знаменателя на производную числителя данного выражения, а потом вычитаем из него произведение числителя на производную знаменателя.

Здесь мы встречаемся с особенностью, которой не было в предыдущем параграфе: там и функция и ее производная были непрерывны при всяком значении аргумента; здесь же обе эти функции терпят разрыв непрерывности при тех значениях x, при которых знаменатель v обращается в 0. При этих значениях, собственно говоря, производной не существует; но условно говорят, что она обращается в ∞. Если же и числитель, и знаменатель оба одновременно обращаются в нуль, то получается неопределенность, о чем речь будет впоследствии.

В виде примера на приложение производной от частного, докажем, что формула:

$$(x^m)' = mx^{m-1}$$

будет верной и в том случае, когда m есть число целое и отрицательное.

Пусть $m=-n$, где $n>0$;

тогда имеем:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}} =$$

$$= \frac{-n}{x^{n+1}} = -n\,x^{-n-1};$$

вспоминая, что $-n=m$ получаем:

$$(x^m)' = mx^{m-1}, \text{ что и требов. док.}$$

В частности по этой формуле можно найти производную от $\frac{1}{x}$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 . x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

этот случай следует заметить.

Переходим к решению задач.

1) Найти производную от функции:

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{1 - x^2};$$

имеем:

$$y' = \frac{(1-x^2)(x^2-x+1)' - (x^2-x+1)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1-x^2)(2x-1) - (x^2-x+1)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^2+4x-1}{(1-x^2)^2}$$

2) Под каким углом к оси OX наклонена касательная к кривой:

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

в начале координат?

Прежде всего убеждаемся, что кривая действительно проходит через начало координат; затем ищем производную:

$$y' = \frac{(1+x^2).1 - x.2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Обозначим искомый угол через φ; тогда $tg\,\varphi$ равен значению y' при $x=0$, т.е.

$$tg\,\varphi = 1, \quad \text{откуда} \quad \varphi = 45^\circ.$$

3) Исследовать изменение функции:

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

и построить ее график.

Знаменатель никогда в нуль не обращается(так как мы ограничиваемся вещественными значениями переменных), и на аргумент никаких ограничений не налагается.

Исследование ведем в общем по тому же плану, что к в предыдущем параграфе.

Производная только что была найдена:

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};$$

приравнивая ее нулю, получаем уравнение:

$$1-x^2=0,$$

которое дает нам 2 критические точки:

$$x=-1 \text{ и } x=+1.$$

Составляем таблицу, деля весь промежуток на 3 части; подробности вычислений предоставляются читателю. Особенностью по сравнению с предыдущими задачами того же типа является вычисление

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$	
y	0	уб.	$-\frac{1}{2}$	возр.	$+\frac{1}{2}$	уб.	0
			(min)		(max)		

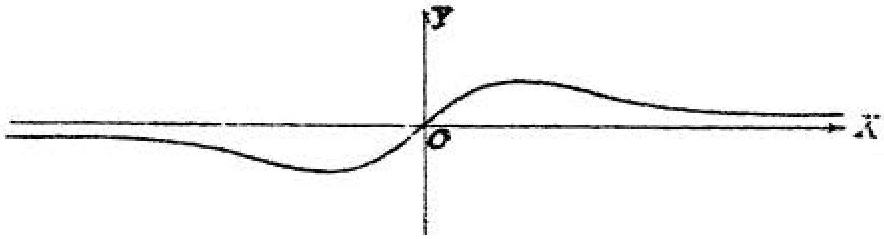
пограничных значений y. Дело сводится к нахождению:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\frac{x}{1+x^2}\right\};$$

по данному в § 4 правилу получаем:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\frac{x}{1+x^2}\right\} = \lim_{x\to\pm\infty}\left\{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}\right\} = 0.$$

Таким образом, таблица закончена; легко видеть, что график функции проходит через начало координат; можно при желании найти и другие опорные точки. После этого строим график функции (см. черт. 19).



Черт. 19.

4) Найти наиболее экономичные размеры цилиндрического парового котла.

Требование это надо понимать так, чтобы при данном об'еме V, котел имел наименьшую полную поверхность.

Обозначим через x радиус основания, а через z – высоту цилиндра; эти величины и являются искомыми.

Тогда полная поверхность будет:

$$S = 2\pi x \cdot z + 2\pi x^2;$$

но x и z связаны условием, чтобы об'ем котла $= V$, так что:

$$\pi x^2 \cdot z = V$$

Определяя отсюда z и подставляя в выражение для S, найдем:

$$S = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2$$

$$S = 2\left\{\pi x^2 + \frac{V}{x}\right\}.$$

Легко видеть, что дело сводится к нахождению наименьшего значения двучлена, стоящего в скобках; следовательно, будем искать, при каком x функция:

$$y = \pi x^2 + \frac{V}{x}$$

достигнет своего наименьшего значения. Переменная независимая x подчинена только тому условию, чтобы она была положительной, или:

$$0 < x < +\infty.$$

Далее находим производную:

$$y' = 2\pi x - \frac{V}{x^2};$$

приравниваем ее нулю, и приходим к уравнению:

$$2\pi x^3 = V,$$

откуда:

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Для того, чтобы выяснить знаки производной при переходе через это значение, перепишем ее следующим образом:

$$y' = \frac{2\pi}{x^2} \cdot \left\{x^3 - \frac{V}{2\pi}\right\};$$

первый множитель всегда > 0, а второй будет < 0 при $x < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; и он будет > 0 при $x > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; следовательно, при $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ наша функция имеет *minimum*.

Если же x будем приближать к границам промежутка, то, как легко видеть, S будет беззгранично возрастать;

так что мы нашли наименьшее значение на всем промежутке.

Найдем, наконец, высоту цилиндра:

$$z=\frac{V}{\pi x^2}=\frac{V}{\pi}\cdot\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{V^2}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

т.е.:

$$z=2x,$$

и высота цилиндра (длина парового котла) должна равняться диаметру его основания.

Примеры и задачи для упражнения.

1) Найти производные от следующих функций:

а) $\frac{a+bx+cx^2}{x}$ Отв: $c-\frac{a}{x^2}$

б) $\frac{a-x}{a+x}$ Отв: $-\frac{2a}{(a+x)^2}$

в) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ Отв: $\frac{2-2x^2}{(x^2-x+1)^2}$

г) $\frac{(x+a)(x+b)}{x^n}$ Отв: $\frac{(2-n)x^2-(n-1)(a+b)x-nab}{x^{n+1}}$

2) Построить график функции:

$$y=\frac{4}{x^2+1}$$

Отв.: при $x=0$ $max=4$; при $x\to\pm\infty$ имеем $y\to 0$; симметричность относительно оси OY.

3) То же для функции:

$$y=\frac{1}{x^2}$$

Отв.: при $x=0$ имеем разрыв непрерывности;

y возр. при $x<0$ и убыв. при $x>0$.

$y\to 0$ при $x\to\pm\infty$; симметричность относительно оси OY.

4) Нужно изготовить бассейн в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, сверху открытый, вместимостью в 32 куб. м. Каковы должны быть его измерения, чтобы облицовка стен потребовала наименьшего количества материала?

Отв.: сторона основания = 4м; высота = 2 м.

5) Требуется изготовить ведро цилиндрической формы так, чтобы при данной емкости на него ушло наименьшее количество материала.

Отв: высота = радиусу основания.

6) Задачник кафедры

№ № 75; 83; 84; 87.

Указание: когда приходится брать производную от выражения вида $(ax+b)^2$, то надо возвысить двучлен в квадрат; другого способа у нас пока нет.

§ 9. Производные от явных алгебраических функций и их приложения.

Мы уже умеем находить производные от рациональных функций; теперь надо того же достигнуть для иррациональных функций. Для этого надо научиться брать производную от корня или от степени с дробным показателем; формула:

$$(x^m)' = mx^{m-1}$$

была выведена только для целого показателя (как положительного, так и отрицательного). Прежде чем это сделать, необходимо произвести одно обобщение предыдущих формул; это обобщение будет полезно и для нахождения производных от рациональных функций.

Пусть требуется найти производную от функции:

$$y=(ax+b)^m,$$

где m – целое >0 число; если $m=2$ или 3, то можно просто развернуть правую часть и находить производную от многочлена; так мы и поступали в некоторых случаях. Но если m – число большое, то конечно, все-таки можно поступать таким же образом, воспользовавшись биномом Ньютона; но такой путь будет достаточно громоздким. Между тем можно данную функциональную зависимость разложить на две более простых; именно, можно положить:

$$y=u^m, \quad где \quad u=ax+b,$$

и теперь нахождение производной от y сводится к нахождению производной от u^m Но тут мы встречаемся с новым затруднением: у нас есть формула для производной от степени аргумента, а здесь имеется степень переменной u, которая сама есть функция от x. Как находится производная в этом случае? С подобными вопросами мы не раз встретимся в настоящем курсе; поэтому рассмотрим задачу во всей общности.

Пусть нам дано, что:

$$y=f(u), \quad где \quad u=\varphi(x),$$

а x есть переменная независимая; конечно, y тоже будет функцией от x, в чем убеждаемся, заменив u его выражением:

$$y=f\{\varphi(x)\};$$

но в том виде, как было написано выше, y является <u>функцией от функции</u>, ибо y зависит от u, а u есть функция от x. Так как y в конечном счете есть функция от x, то поставим себе задачу найти y'_x (маленький x внизу указывает на то, что мы берем производную от y по x, т.е. считая x переменной независимой, а y — его функцией); причем найдем эту производную с помощью промежуточной переменной u.

По определению производной имеем:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{\Delta y}{\Delta x} \right\};$$

но это отношение можно, очевидно, представить в виде произведения 2 отношений:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

причем когда $\Delta x \to 0$, то в силу непрерывности и $\Delta u \to 0$ Далее пишем:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right\} = \lim_{\Delta u \to 0} \left\{ \frac{\Delta y}{\Delta u} \right\} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{\Delta u}{\Delta x} \right\};$$

второй предел есть самая обыкновенная производная от u по x, которую обозначим через u'_x. Что же касается первого предела, то его вид показывает, что здесь ищется производная от y по u, как если бы u было переменной независимой; эту производную обозначим через y'_u. Итак, окончательно получаем:

$$\underline{y'_x = y'_u \cdot u'_x;}$$

это - весьма важная формула, служащая для обобщения основных формул дифференциального исчисления; словами ее можно выразить так: производная функции от функции равна ее производной по промежуточной переменной, умноженной на производную промежуточной переменной по переменной независимой.

Применим это правило к приведенному выше примеру:

$$y = u^m, \quad \text{где} \quad u = ax + b;$$

здесь $y'_u = mu^{m-1}$, так как эта производная берется по тем же правилам, как если бы u было переменной независимой; далее $u'_x = a$, так что:

$$y'_x = mu^{m-1} \cdot a$$

или

$$\left[(ax+b)^m\right]'_x = m(ax+b)^{m-1} \cdot a.$$

Рассмотрим теперь более общий случай:

$y = u^m$, где u есть функция от x (все равно, какая именно), а m - целое число. По указанному имеем:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x;$$

здесь опять-таки $y'_u = mu^{m-1}$, а u'_x так и оставим, пока нам не зададут u вполне конкретно. Следовательно:

$$y'_x = mu^{m-1} \cdot u'_x,$$

или:

$$(u^m)'_x = mu^{m-1} \cdot u'_x \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

где m - любое целое число. Эта формула является обобщением давно известной:

$$(x^m)' = mx^{m-1};$$

и переходит в нее при $u=x$. Формула (I) принесет нам пользу при нахождении производных от рациональных функций; поясним это несколькими примерами:

а) найти производную от $(ax^3+bx+c)^{11}$; по формулу (I) имеем:

$$\left[(ax^3+bx+c)^{11}\right]'_x = 11.(ax^3+bx+c)^{10}.(ax^3+bx+c)' =$$

$$= 11(ax^3+bx+c)^{10}.(3ax^2+b).$$

$$б)\ \left[\frac{1}{(a^2-x^2)^n}\right]' = \left[(a^2-x^2)^{-n}\right]' = -n(a^2-x^2)^{-n-1}.(a^2-x^2)' =$$

$$= -n(a^2-x^2)^{-n-1}.(-2x) = \frac{2nx}{(a^2-x^2)^{n+1}}$$

$$в)\ \left\{\frac{(ax+b)^3}{(cx+d)^4}\right\}' = \frac{(cx+d)^4.3(ax+b)^2.a-(ax+b)^3.4(cx+d)^3.c}{(cx+d)^8} =$$

$$= \frac{(ax+b)^2\{3a(cx+d)-4c(ax+b)\}}{(cx+d)^5}$$

2. Теперь, обращаясь к основной задаче настоящего параграфа, докажем, что формула (I) имеет место и для дробных рациональных значений m.

Рассмотрим функцию:

$$y = u^m,$$

где $m=\frac{p}{q}$, а p и q - целые числа(положительные или отрицательные); так что:

$$y=u^{\frac{p}{q}}$$

откуда:

$$y^{q}=u^{p}.$$

Но если функции - равны, то равны и их производные:

$$(y^{q})'_{x}=(u^{p})'_{x} ;$$

каждую из этих производных вычисляем по формуле (I):

$$qy^{q-1}\cdot y'_{x}=pu^{p-1}\cdot u'_{x}$$

Далее подставляем сюда вместо y его выражение через u:

$$q\cdot u^{\frac{p}{q}(q-1)}\cdot y'_{x}=pu^{p-1}\cdot u'_{x}$$

или:

$$qu^{p-\frac{p}{q}}\cdot y'_{x}=pu^{p-1}\cdot u'_{x} ;$$

отсюда находим y'_{x}:

$$y'_{x}=\frac{p}{q}\cdot\frac{u^{p-1}}{u^{p-\frac{p}{q}}}\cdot u'_{x}$$

$$y'_x=\frac{p}{q}\,u^{\frac{p}{q}-1}\cdot u'_x\ ;$$

вспоминая, что $\frac{p}{q}=m$, получаем:

$$y'_x=mu^{m-1}\cdot u'_x\ ,$$

или:

$$(u^m)'_x=mu^{m-1}\cdot u'_x\ ,$$

т.е. формула (I) верна для всякого рационального значения m.

Формула (I), в связи с другими, позволяет находить производные от иррациональных функций.

Переходим к примерам и задачам:

I) Найти производную от $\sqrt{u}$, где u есть функция от x:

$$(\sqrt{u})'_x=(u^{\frac{1}{2}})'_x=\frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\cdot u'_x=\frac{u'_x}{2\sqrt{u}}\ ;$$

эту формулу полезно заметить.

$$2)\ \left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)'=\left[(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]'=-\frac{1}{2}\cdot(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\ .$$

Полезно заметить, что при постоянном числителе удобнее пользоваться отрицательным показателем, а не рассматривать данное выражение, как дробь.

$$3)\ \left(\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' =$$

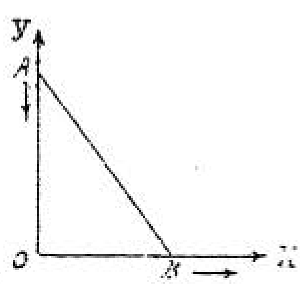
$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{(1-x).1-(1+x).(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}$$

4) Пользуясь формулой, выведенной в примере № I, находим следующую производную:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\right)' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}} = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{2\sqrt{x^2-1}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}\ .$$

5) Лестница длиною в 15 м верхним концом A (см. черт. 20) прислонена к вертикальной стене OY, а нижним концом B опирается на горизонтальный пол. Нижний конец оттаскивают от стены со скоростью = 2 м/мин; с какой скоростью опускается верхний конец лестницы, если основание ее находится в 9 м от стены?



Черт. 20.

Надо найти соотношение между скоростью уменьшения $OA=y$ и скоростью возрастания $OB=x$; а для этого прежде всего надо найти зависимость между x и y. Из $\triangle OAB$ имеем:

$$x^2+y^2=225,$$

откуда:

$$y=\sqrt{225-x^2}.$$

Переменные x и y изменяются с течением времени; для того ,чтобы найти отношение между скоростями их изменений, найдем производную от y по времени t, помня, что и x есть функция от t:

$$y'_t=\left(\sqrt{225-x^2}\right)'_t=\frac{(225-x^2)'_t}{2\sqrt{225-x^2}}=\frac{-2x\cdot x'_t}{2\sqrt{225-x^2}}$$

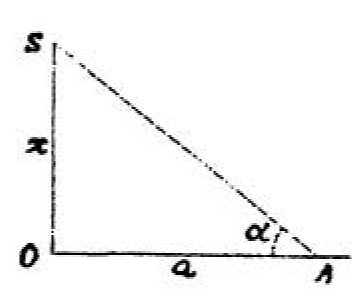
$$y'_t=-\frac{x}{\sqrt{225-x^2}}\cdot x'_t.$$

Искомое соотношение получено; нам дано, что $x'_t=2$, а $x=9$; тогда:

$$y'_t=-\frac{9}{\sqrt{225-81}}\cdot 2=-1\tfrac{1}{2}\ \text{м/мин};$$

на что указывает знак минус?

6) Над горизонтальным столом находится источник света S, который можно перемещать по вертикальной линии OS (черт. 21); на какую высоту надо поднять источник света, чтобы освещение в точке A, отстоящей от точки O на расстоянии $OA=a$, было наиболее ярким?



Черт. 21.

Мы должны найти наибольшее значение для силы освещения; а для того, чтобы составить ее выражение, надо основываться на следующем физическом законе: сила освещения прямо пропорциональна синусу угла, под которым лучи падают на освещаемую поверхность и обратно пропорциональна квадрату расстояния источника света от освещаемой поверхности.

Обозначим искомую величину OS через x, $\angle SAO$ через α, силу освещения через J; тогда:

$$J = k \cdot \frac{\sin \alpha}{(AS)^2},$$ где k - коэфф.пропорц.;

но

$$(AS)^2 = x^2 + a^2$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{AS} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

так что:

$$J = k \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}.$$

Вот для этой функции и надо найти наибольшее значение, причем x подчинен только условию быть положительным:

$$0 < x < +\infty.$$

Положительное постоянное число k можно оставить в стороне, и находить наибольшее значение функции:

$$y = \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}.$$

Ищем производную:

$$y' = \frac{(x^2+a^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(x^2+a^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2+a^2)^3} =$$

$$= \frac{(x^2+a^2)^{1/2} \cdot \{x^2+a^2-3x^2\}}{(x^2+a^2)^3} = \frac{a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^{5/2}};$$

приравнивая $y=0$, приходим к уравнению:

$$a^2-2x^2=0,$$

откуда:

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

(отрицательный корень отбрасываем).

Для выяснения знаков производной, замечаем, что знаменатель ее всегда >0, а числитель можно разложить на множителей:

$$a^2-2x^2=2\left\{\frac{a^2}{2}-x^2\right\}=2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+x\right);$$

теперь сразу видно, что при $x<\frac{a}{\sqrt{2}}$ имеем $y'>0$, а при $x>\frac{a}{\sqrt{2}}$ имеем $y'<0$; следовательно при $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ наша функция достигает $maximum$'a. Легко видеть, что это значение будет наибольшим по сравнению со всеми ее значениями, так как если x приближать к границам промежутка (т.е. или беспредельно уменьшать, или беспредельно увеличивать), то y будет беспредельно уменьшаться. И здесь эти рассуждения можно было сократить, основываясь на физической сущности задачи: наиболее яркое освещение должно иметь место при некоторой высоте источника света, а потому это и должно быть при единственном критическом значении x.

Итак, наиболее яркое освещение будет при $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ (приближенно $0{,}7a$).

7) Исследовать функцию:

$$y=1+\sqrt[3]{x^2}$$

и построить ее график.

Переменная независимая здесь ничем не ограничена, так что имеем:

$$-\infty < x < +\infty,$$

и пусть x пробегает этот промежуток, непрерывно возрастая.

Так как нам дана четная функция (замена x на $-x$ ничего не меняет), то можно сейчас же сказать, что графиком функции будет кривая, симметричная относительно оси OY.

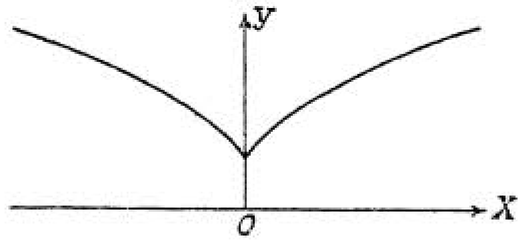
Составляем производную:

$$y' = (1 + x^{2/3})' = \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3}$$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};$$

Здесь мы встречаемся с той особенностью, что y' не обращается в нуль ни при каком конечном значении x; если бы производная была функцией непрерывной без всяких исключений, то она не могла бы изменить знак; но y' имеет разрыв непрерывности при $x=0$, так как при этом значении знаменатель обращается в 0, и $y'=\infty$ (а сама функция сохраняет непрерывность и при $x=0$). Как же обстоит дело со знаками производной, когда x возрастая переходит через 0? Легко видеть, что при $x<0$ и $y'<0$, а при $x>0$ и $y'>0$; следовательно при $x=0$ функция имеет $minimum$, и этот $minimum = 1$. Пусть читатель сам закончит исследование и составит таблицу. Для построения графика важно заметить, что в низшей точке кривой (0;1) производная обращается в ∞, так что угловой коэффициент касательной $=\infty$; другими словами, касательной служит ось OY.

График функции изображен на черт. 22.



Черт. 22.

Примеры и задачи для упражнения.

1) Найти производные следующих функций:

а) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ Отв: $2x\left(1-\frac{1}{x^4}\right)$

б) $x^m(1-x)^n$ Отв: $x^{m-1}(1-x)^{n-1}\{m-(m+n)x\}$

в) $(1-x).\sqrt{1+x^2}$ Отв: $-\frac{1-x+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

г) $(a+bx^2)^{5/4}$ Отв: $\frac{5bx}{2}(a+bx^2)^{1/4}$

д) $\frac{(x+4)^2}{x+3}$ Отв: $\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$

е) $\frac{a}{x}\sqrt{a^2-x^2}$ Отв: $-\frac{a^3}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

ж) $\frac{x^m}{(a+bx^n)^{m/n}}$ Отв: $\frac{max^{m-1}}{(a+bx^n)^{m/n+1}}$

з) $\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ Отв; $\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4-1}}$

3) В какой точке кривой:

$$y^2=4x^3$$

угловой коэффициент касательной $=3$?

Отв.: (1;2).

3) Два судна A и B одновременно вышли из гавани; первое судно идет к востоку со скоростью $= 10$ км|ч. а второе - к северу со скоростью $= 16$ км|час. С какой скоростью изменяется расстояние между ними?

Отв.: 18,9 км|час.

Указание: выразить расстояние между судами в функции времени.

4) Миноносец стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега; ему нужно послать гонца в военный лагерь, расположенный по берегу в 15 км от этого пункта. Если гонец может делать пешком по 5 км в час, а на веслах только по 4 км в час, то в каком пункте берега он должен высадиться, чтобы исполнить поручение в кратчайший срок?

Отв.: в 3 км от лагеря.

5) Задачник математ. кафедры

№№ 70; 80; 81.

§ 10. Бесконечно-малые различных порядков. Дифференциал.

I. Бесконечно- малые различных порядков.

Мы научились брать производные от алгебраических функций, но еще не умеем этого делать для функций тригонометрических, логарифма и др. Для того, чтобы идти дальше, необходимо углубить наши знания о бесконечно-малых: ведь производная есть предел отношения 2 бесконечно- малых приращений. Этому и будет посвящен настоящий параграф; указанные дополнения позволят также ввести понятие о дифференциале, от которого получила свое название изучаемая нами сейчас ветвь математического анализа.

Все бесконечно-малые величины, в процессе своего изменения, стремятся к нулю; но они могут это делать с различной скоростью. Возьмем, например, 4 переменные:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n^2}, \quad \frac{2}{n},$$

где n пробегает ряд натуральных чисел; все они будут бесконечно-малыми, но каждому понятно, что вторая убывает быстрее, чем первая, и медленнее, чем третья; вторая и четвертая убывают, так сказать, с одинаковой скоростью (их отношение равно постоянному числу).

Желательно установить определенный признак для сравнения бесконечно-малых в указанном выше отношении. Две величины мы сравниваем или с помощью разности, или с помощью отношения; разность здесь ничего не даст, так как ее предел всегда $=0$; в отношении тоже оба члена $\to 0$, но предел его может иметь различное значение.

Так, например:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}:\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\lim\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}:\frac{1}{n^2}\right]=\lim\ n=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}:\frac{2}{n}\right]=\frac{1}{2}.$$

Эти замечания подводят нас к следующим определениям.

Пусть нам даны 2 бесконечно-малых α и β; если $\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ имеет конечное значение отличное от нуля, то β и α называются бесконечно-малыми одного и того же порядка; если же этот предел $=0$, то β считается бесконечно-малой порядка высшего чем α; если, наконец, предел $=\infty$ (собственно в этом случае $\frac{\beta}{\alpha}$ становится величиной бесконечно-большой и ни к какому пределу не стремится), то β считается порядка низшего чем α.

Сделаем еще несколько примеров; во всех этих примерах α обозначает величину бесконечно-малую:

1) Сравнить $(\alpha^2-5\alpha)$ и α. Имеем:

$$\lim\left(\frac{\alpha^2-5\alpha}{\alpha}\right)=\lim(\alpha-5)=-5,$$

следовательно, наши бесконечно-малые будут одного порядка.

2) Сравнить $(3\alpha^2-2\alpha^3)$ и α:

$$\lim\left(\frac{3\alpha^2-2\alpha^3}{\alpha}\right)=\lim(3\alpha-2\alpha^2)=0,$$

следовательно, первая величина будет порядка высшего, чем.

3) Сравнить $7\sqrt{\alpha}$ и α:

$$\lim\left(\frac{7\sqrt{\alpha}}{\alpha}\right)=\lim\left(\frac{7}{\sqrt{\alpha}}\right)=\infty,$$

так что $7\sqrt{\alpha}$ будет порядка низшего чем α.

Для приложений имеет значение следующая теорема;

Теорема VI. Если имеем алгебраическую сумму бесконечно-малых различных порядков, то ее знак определяется знаком бесконечно-малой низшего порядка.

Пусть дана сумма бесконечно-малых:

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda,$$

и пусть порядок α будет ниже порядков всех остальных; выносим это α за скобки:

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda=\alpha\left\{1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\cdots+\frac{\lambda}{\alpha}\right\}.$$

Все эти отношения будут величинами бесконечно-малыми (по определению, данному выше), а следовательно и сумма их будет бесконечно-малой (теор. I); тогда величина в скобках сколь-угодно мало отличается от I, и во всяком случае будет величиной положительной. Поэтому знак всего выражения определяется знаком первого множителя, т.е. α, что и требовалось доказать.

Так, например, разность $\alpha^2-7\alpha^3$ будет положительной (при α бесконечно-малом), так как легко доказать, что вычитаемое будет высшего порядка.

Когда имеем дело с бесконечно-малыми различных порядков, то во многих случаях можно это выражение уточнить, выразив определенным числом порядок одной по отношению к другой.

Пусть β и α будут бесконечно-малыми различных порядков; если можно найти такое положительное число K, что:

$$\lim\left(\frac{\beta}{\alpha^K}\right)$$

есть конечное число, отличное от нуля, то говорят, что β будет порядка K относительно α.

Так, например, было доказано, что бесконечно-малая $(3\alpha^2-2\alpha^3)$ имеет высший порядок, чем α; но легко видеть, что:

$$\lim\left(\frac{3\alpha^2-2\alpha^3}{\alpha^2}\right)=\lim(3-2\alpha)=3;$$

следовательно, наша бесконечно-малая будет 2-го порядка относительно α. Точно также имеем:

$$\lim\left(\frac{7\sqrt{\alpha}}{\alpha^{1/2}}\right)=7,$$

так что $7\sqrt{\alpha}$ будет порядка $=\frac{1}{2}$ относительно α.

Легко видеть, что степени α:

$$\alpha^2,\ \alpha^3, \ldots \sqrt{\alpha},\ \sqrt[3]{\alpha} \ldots$$

будут соответственно порядков:

$$2,\ 3 \ldots \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots$$

3. Бесконечно- малые эквивалентные.

Предел отношения 2 бесконечно-малых одного и того же порядка равен конечному числу, отличному от нуля. Особенно важный случай получается тогда, когда этот предел $= 1$.

Если предел отношения двух бесконечно-малых равен единице, то они называются эквивалентными.

Для таких бесконечно-малых мы докажем некоторые предложения, которые понадобятся в ближайшее время.

Теорема УII. Разность двух бесконечно-малых эквивалентных есть бесконечно-малая высшего порядка, и обратно.

Пусть β и α суть бесконечно-малые эквивалентные;

тогда:

$$\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=1,$$

или $$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon - \text{б. м.};$$

отсюда:
$$\beta = \alpha + \alpha\varepsilon$$
$$\beta - \alpha = \alpha\varepsilon.$$

Нетрудно доказать, что произведение $\alpha\varepsilon$ есть бесконечно-малая высшего порядка, чем α (или β); действительно:
$$\lim\left(\frac{\alpha\varepsilon}{\alpha}\right) = \lim\varepsilon = 0.$$

Пусть, обратно, дано что
$\beta - \alpha = \gamma$, где α, β, γ - бесконечно малые,

причем γ - высшего порядка чем α; отсюда имеем:
$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \frac{\gamma}{\alpha};$$
$$\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \lim\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = 1 + \lim\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right);$$

но по данному:
$$\lim\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) = 0,$$

следовательно:
$$\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1,$$

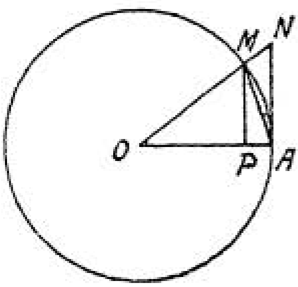
т.е. β и α эквивалентны, что и требовалось доказать.

Сейчас мы укажем один важный для нас случай эквивалентности, но предварительно докажем одно предложение из области тригонометрии. Именно, если α есть угол, лежащий в I-й четверти, то имеют место неравенства:

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha.$$

Для доказательства опишем окружность радиуса I (см. черт. 23), и пусть на этом чертеже:

$$\angle MOA = \alpha; \quad MP \perp OA \text{ и } NA \perp OA.$$



Черт. 23.

Сравнивая площади 3 фигур:

$\triangle OAM$, сектор OAM, $\triangle OAN$,

очевидно имеем:

$$\triangle OAM < \text{сектора } OAM < \triangle OAN$$

или

$$\frac{1}{2} OA . MP < \frac{1}{2} \overline{OA}^2 . \alpha < \frac{1}{2} OA . NA;$$

но

$$OA = 1; \quad MP = \sin\alpha; \quad NA = \operatorname{tg}\alpha,$$

так что подставляя и сокращая на $\frac{1}{2}$, действительно получаем:

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha.$$

<u>Теорема УIII. Если α есть величина бесконечно-малая, то $\sin\alpha$ и α — эквиваленты.</u>

Положим сначала, что $\alpha > 0$; тогда имеем:

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha;$$

разделим почленно на $\sin\alpha$ (это - величина >0):

$$1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha},$$

или, переходя к обратным величинам:

$$1>\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha,$$

Если $\alpha\to 0$, то $\cos\alpha\to 1$, и разность $(1-\cos\alpha)$ будет бесконечно-малой; но так как отношение $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ заключается по своей величине между I и $\cos\alpha$, то и подавно разность

$$1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

будет бесконечно-малой; другими словами:

$$\lim\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)=1.$$

Пусть теперь $\alpha<0$; положим:

$$\alpha=-\beta, \quad \text{где} \quad \beta>0.$$

Тогда имеем:

$$\lim\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)=\lim\left(\frac{\sin(-\beta)}{-\beta}\right)=\lim\left(\frac{-\sin\beta}{-\beta}\right)=$$

$$=\lim\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)=1,$$

так как $\beta>0$, и можно сослаться на предыдущий случай.

Всю важность этой теоремы мы почувствуем в следующем параграфе, но уже в настоящем параграфе мы увидим ее применение. Предварительно надо доказать теорему, которая об'ясняет, почему мы особо выделяем бесконечно-малые эквивалентные.

Теорема IX. При вычислении предела отношения двух бесконечно-малых, можно данные бесконечно-малые заменять другими, им эквивалентными.

Это можно делать потому, что, как сейчас увидим, от этой замены предел не изменится (мы допускаем, что предел вообще существует, так как иначе о нем нельзя было бы говорить).

Пусть ищется $\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, и пусть дано, что:

$$\beta_1 \text{ эквивал. } \beta, \quad \alpha_1 \text{ эквивал. } \alpha;$$

другими словами:

$$\lim\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)=1 \quad \text{и} \quad \lim\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)=1,$$

откуда:

$$\frac{\beta_1}{\beta}=1+\varepsilon \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_1}{\alpha}=1+\varepsilon_1$$

$$\beta_1=\beta(1+\varepsilon) \quad \text{и} \quad \alpha_1=\alpha(1+\varepsilon_1),$$

где ε и ε_1 - бесконечно-малые.

Далее имеем:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_1}$$

$$\lim\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).\lim\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_1}\right);$$

но

$$\lim\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_1}\right)=1$$

и

$$\lim\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

что и требовалось доказать.

Так как разность 2 бесконечно- малых эквивалентных есть бесконечно-малая высшего порядка (теорема УII), то эту теорему иногда выражают словами:" при вычислении предела отношения 2 бесконечно-малых, можно отбрасывать бесконечно-малые высшего порядка".

Покажем на нескольких примерах применение последних теорем:

1) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{\sin ax}{\sin bx}\right\}$

На основании теоремы УIII утверждаем, что $\sin ax$ и ax, $\sin bx$ и bx - эквивалентны; далее применяем теорему IX:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin ax}{\sin bx}\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{ax}{bx}\right\}=\frac{a}{b}.$$

2) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{tg\,x}{x}\right\}$; проводим вычисления следующим образом:

$$\lim\left\{\frac{tg\,x}{x}\right\}=\lim\left\{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right\}=$$

$$=\lim\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim\left(\frac{1}{\cos x}\right)=1,$$

т.е. при бесконечно малом x, переменные $tg\,x$ и x будут эквивалентными.

3) Пусть α - бесконечно малая, какого порядка будет переменная $(1-\cos\alpha)$?

Так как $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, а $\sin\alpha$ и α - одного порядка, то можно догадаться, что $(1-\cos\alpha)$ будет 2-го порядка. Проверим это:

$$\lim_{\alpha \to 0} \left\{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}\right\} = \lim \left\{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2.\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right\} = \frac{1}{2}\lim \left[\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)\right]^2 = 1,$$

так как предел этого отношения, по теореме VIII, равен 1. Итак, действительно $(1-\cos\alpha)$ будет 2-го порядка.

Примеры для упражнений.

1) Если α есть основная бесконечно-малая (1-го порядка), то какого порядка будут переменные:

а) $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ — Отв: 1

б) $tg\,\alpha - \sin\alpha$ — Отв: 3

в) $\sqrt[3]{\sin\alpha}$ — Отв: $\frac{1}{3}$

г) $3\sqrt{\alpha} - 5\alpha^{\frac{3}{2}}$ — Отв: $\frac{1}{2}$

д) $2\alpha^2 - 6\sqrt{\alpha^5}$ — Отв: 2

2) Прямая MM_2 есть касательная к окружности в точке M (см.чертеж 24); $M_1N \perp MM_2$, а $\angle MOM_1 = \alpha$ есть основная бесконечно-малая.

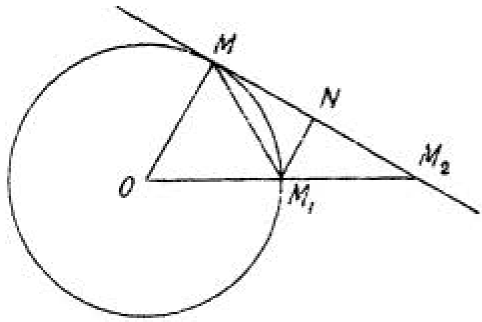
Проверить, что

MM_1 и MM_2 . . . . 1-го порядка

M_1N . . . . 2-го "

NM_2 и ΔMM_1M_2 . . . . . . 3-го "

ΔM_1NM_2 . . . . 5-го "



Черт. 24.

3) Найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{\sin 5x}{\sin x}\right\}$ Отв: 5

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{\sin 9x}{\operatorname{tg} 2x}\right\}$ Отв: $\frac{9}{2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{\sin^2 x}{x^2}\right\}$ Отв: 1

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} 2x}\right\}$ Отв: $\frac{1}{4}$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ.

При помощи введенных выше понятий, можно разложить бесконечно-малое приращение функции на две части, из которых одна - "главная часть" - будет ему эквивалентна, а другая является бесконечно-малой высшего порядка. К этому разложению мы подойдем следующим образом.

Мы хорошо знаем, что:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\Delta y}{\Delta x}\right\}=y';$$

откуда:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\varepsilon,$$

или

$$\Delta y = y' . \Delta x + \varepsilon . \Delta x, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (*)$$

где ε становится бесконечно-малой вместе с Δx.

Будем сейчас иметь дело только с такими значениями аргумента, при которых:

$$y' \text{ не} = 0;$$

тогда бесконечно-малые $y' . \Delta x$ и Δx будут одного и того же порядка, так как их отношение $= y'$ (а это есть конечная величина не $= 0$); но произведение $\varepsilon \; \Delta x$ есть бесконечно-малая высшего порядка, потому что:

$$\lim \left\{ \frac{\varepsilon . \Delta x}{\Delta x} \right\} = \lim \varepsilon = 0.$$

Таким образом, разность:

$$\Delta y - y' . \Delta x$$

есть величина бесконечно-малая высшего порядка, чем один из ее членов; следовательно, по теореме VII:

Δy и $y' . \Delta x$ - эквивалентны.

Вот эта величина $y' . \Delta x$, эквивалентная приращению функции, называется ее <u>дифференциалом</u> и обозначается dy (надо читать "дэ игрэк" и помнить, что это - не произведение).

Для того, чтобы окончательно оформить это понятие, поставим вопрос о дифференциале самого аргумента; а для этого формулу:

$$dy = y' . \Delta x$$

применим к случаю, когда:

$$y = x.$$

В этом случае $y'=1$ и:

$$dx=\Delta x$$

т.е. дифференциал переменной независимой есть ее бесконечно-малое приращение.

Теперь мы можем написать:

$$dy=y'.dx$$

и сказать, что дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал переменной независимой.

С этими обозначениями, равенство $(*)$ переписывается так:

$$\Delta y=dy+\text{б.-м. высшего порядка},$$

а это нам говорит, что приращение функции и ее дифференциал суть бесконечно-малые эквивалентные.

На этом утверждении основано все значение дифференциала. С одной стороны, в некоторых случаях можно (на основании теоремы IX) заменять Δy на dy, не нарушая математической строгости; с другой - в прикладных науках уже приближенно вместо Δy берут dy; а делают это потому, что dy выражается проще, чем Δy. Так, например:

$$\Delta(x^2)=2x\,dx+(dx)^2$$

тогда как:

$$d(x^2)=2x\,dx;$$

дальше:

$$\Delta\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)},$$

тогда как:

$$d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{dx}{x^2}, \quad \text{и т.д.}$$

Сравним для примера в нижеследующей таблице приращения и дифференциалы функции:

$$y=x^2$$

при различных беспредельно убывающих Δx и при $x=7$:

Δx	Δy	dy	$\Delta y-dy$
0,1	1,41	1,4	0,01
0,01	0,1401	0,14	0,0001
0,001	0,014001	0,014	0,000001
. . . . .	. . . . .	. . .	. . . . .

Последний столбец дает ошибку, делаемую при замене Δy на dy.

Итак, при достаточно малых изменениях аргумента приращение функции можно заменять ее дифференциалом, т.е. считать его пропорциональным приращению переменной независимой ($dy=y'.dx$); коэффициентом пропорциональности при этом служит производная, значение которой от точки к точке меняется. В § 1 (п.4) мы видели, что для линейной функции это вполне точно, для других же оно имеет приближенный характер, но приближение тем лучше, чем меньше Δx. Можно сказать, что в бесконечно-малом всякая функция ведет себя, как линейная; в этом заключается преимущество рассмотрения явления в бесконечно-малом.

Возьмем для примера площадь круга радиуса x:

$$y=\pi x^2,$$

тогда:

$$y'=2\pi x$$

$$dy=2\pi x\,.dx,$$

т.е.: при бесконечно-малом приращении радиуса можно считать, что приращение площади круга равно длине его окружности, умноженной на приращение радиуса. Точно также для об'ема шара радиуса x имеем:

$$v = \frac{4}{3}\pi x^3$$

$$v' = 4\pi x^2$$

$$dv = 4\pi x^2 . dx,$$

т.е: при бесконечно-малом приращении радиуса, приращение об'ема шара равно площади его поверхности, умноженной на приращение радиуса.

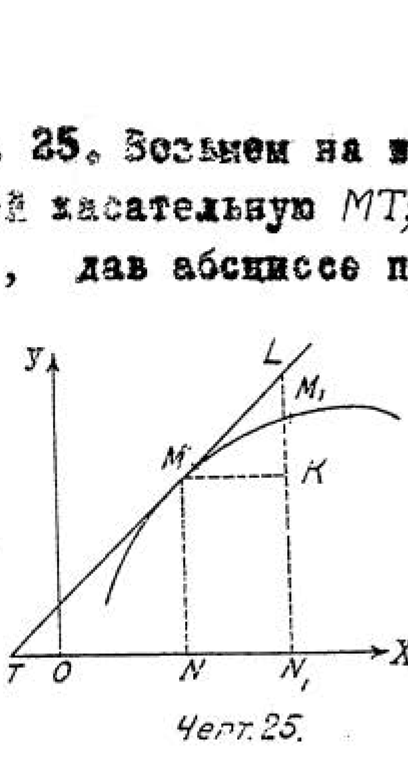
Вопрос о замене Δy на dy можно осветить с геометрической точки зрения, выяснив геометрическое значение дифференциала функции.

Пусть задана функция:

$$y = f(x),$$

график которой изображен на черт. 25. Возьмем на ней точку $M(x, y)$ и проведем в ней касательную MT; затем перейдем к смежной точке M_1, дав абсциссе приращение:

$$NN_1 = \Delta x ;$$



Черт. 25.

мы знаем уже, что приращение функции (или приращение ординаты кривой) изобразится отрезком KM_1:

$$KM_1 = \Delta y.$$

Продолжим ординату точки M_1 до пересечения с касательной в точке $\mathcal{L}$, и рассмотрим $\triangle MK\mathcal{L}$; здесь имеем:

$$K\mathcal{L}=MK.tg\angle \mathcal{L}MK;$$

но

$$MK=NN_1=\Delta x$$

$$tg\angle\mathcal{L}MK=tg\angle\mathcal{L}TX=y',$$

так что:

$$K\mathcal{L}=y'.\Delta x.$$

Считая Δx бесконечно-малым, можно сказать, что отрезок $K\mathcal{L}$, т.е. приращение ординаты касательной служит геометрическим изображением дифференциала функции.

Таким образом, если мы заменяем Δy через dy, то вместо приращения ординаты кривой берем приращение ординаты касательной; или можно сказать так: замена Δy на dy геометрически обозначает замену элемента кривой элементом касательной (в смежности с точкой касания).

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ.

Дифференциал функции весьма просто выражается через производную:

$$dy=y'.dx,$$

или:

$$df(x)=f'(x).dx;$$

отсюда находим:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

т.е. производная равна частному дифференциалов функции и аргумента.

Таким образом, вычислив производную, сейчас же найдем дифференциал, а вычислив дифференциал - без труда найдем производную; и то и другое действие поэтому называется дифференцированием.

Дифференциал функции всегда можно находить через посредство производной по формуле:

$$dy = y' \cdot dx;$$

но можно вычислять дифференциалы непосредственно, пользуясь формулами, аналогичными выведенным выше.

Так, например, было выведено, что:

$$(x^m)' = mx^{m-1};$$

умножая обе части на dx, имеем:

$$(x^m)' \cdot dx = mx^{m-1} dx;$$

но:

$$(x^m)' dx = d(x^m),$$

так что получается следующая формула для дифференциала степени:

$$d(x^m) = mx^{m-1} \cdot dx.$$

Для производной функции от функции имеется формула:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x;$$

подобно предыдущему, отсюда выводим:

$$y'_x \cdot dx = y'_u \cdot u'_x\, dx;$$

но:

$$y'_x \cdot dx = dy, \quad u'_x\, dx = du,$$

так что

$$dy = y'_u \cdot du;$$

если вспомнить, что $y = f(u)$, то последнее равенство можно переписать так:

$$dy = f'(u) \cdot du;$$

здесь $f'(u)$ берется по тем же правилам, как если бы переменная u была независимой. В частности, отсюда получаем:

$$d(u^m) = mu^{m-1} \cdot du$$

- совершенно так же, как в случае независимой переменной; du можно будет вычислить, если нам зададут u в функции от x.

Подобным же образом переносятся на дифференциалы и другие основные формулы; выпишем те из них, которые еще не были приведены:

$$dC = 0$$

$$d(u + v - w) = du + dv - dw$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$d(Cu) = C\,du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v.du-u\,dv}{v^2};$$

везде знак производной заменяется знаком дифференциала. Этого нельзя только сделать формулой:

$$x'=1,$$

так как ей соответствует утверждение, что dx есть не что иное, как Δx (равносильно-истое утверждение!)

Сделаем примеры на вычисление и применение дифференциалов:

$$1)\ d\left\{2x^3-9x^2+4x-5\right\}=6x^2dx-18x\,dx+4dx=$$

$$=2(3x^2-9x+2)\,dx.$$

$$2)\ d\left\{\frac{\sqrt{u}}{3}-\frac{7}{u}\right\}=\frac{du}{6\sqrt{u}}+\frac{7du}{u^2}=\left\{\frac{1}{6\sqrt{u}}+\frac{7}{u^2}\right\}du;$$

будет ли u переменной независимой или зависимой, этот дифференциал имеет тот же самый вид.

$$3)\ d\left\{\frac{(x+3)^2}{x^2+1}\right\}=\frac{(x^2+1).d\{(x+3)^2\}-(x+3)^2.d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(x^2+1).2(x+3)dx-(x+3)^2.2x\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x+3)(1-3x)}{(x^2+1)^2}dx;$$

Отсюда можем заключить, что:

$$\left\{\frac{(x+3)^2}{x^2+1}\right\}'=\frac{2(x+3)(1-3x)}{(x^2+1)^2}.$$

4) Вычислить $d(\sqrt[3]{x})$ при $x=8$ и $dx=-0{,}01$. Заметим, что dx задается независимо от значения x; можно сказать, что x и dx суть 2 переменные не-

зависимые. Переходим к решению:

$$d(\sqrt[3]{x})=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} ;$$

подставляем данные:

$$d(\sqrt[3]{x})=-\frac{0,01}{12}=-0,000833\ldots\ldots ;$$

Мы получили частное значение дифференциала нашей функции, соответствующее численно заданным x и dx.

5) Дифференциалом пользуются для приближенной оценки ошибок, происходящих от неточности данных чисел. Пусть требуется вычислить

$$y=f(x)$$

при некотором x, полученном путем измерения; и пусть это x – неточно, а точное значение будет x_1. Тогда ошибка, которую мы сделаем вычисляя y, будет равна приращению y, которое он получает при переходе аргумента от x к x_1. Выше мы видели, что в приложениях вместо Δy обычно берут dy; а потому ошибку (правильнее сказать – высшую границу ошибки) вычисляют по формуле:

$$dy=f'(x).dx,$$

где под dx понимают высшую границу разности (x_1-x).

Пусть, например, известно, что при измерении радиуса круга сделана ошибка в 1%; какова будет вследствие этого ошибка в измерении площади?

Площадь круга:

$$y=\pi x^2;$$

как сказано выше, ошибку измеряем дифференциалом:

$$dy = 2\pi x . dx.$$

Дано, что ошибка в измерении x (радиуса) составляет 1%; это значит, что ее высшая граница равна

$$0{,}01 . x$$

Для того, чтобы оценить ошибку в вычислении площади, подставляем эту величину вместо dx:

$$dy = 2\pi x . 0{,}01 . x = 0{,}02\,\pi x^2;$$

т.е.: ошибка не превышает 0,02 площади; другими словами она оценивается в 2%.

б) Найти $\sqrt{9{,}21}$.

Рассуждаем так: дана функция

$$y = \sqrt{x};$$

при $x = 9$ имеем $y = 3$; спрашивается, чему будет равен y, если x получит приращение $\Delta x = 0{,}21$? Для решения задачи надо вычислить Δy и прибавить к 3; но вместо Δy возьмем приближенно dy:

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{0{,}21}{2.\sqrt{9}} = \frac{0{,}21}{6} = 0{,}035;$$

следовательно

$$\sqrt{9{,}21} = 3 + 0{,}035 = 3{,}035$$

(точнее будет: 3,03480).

Примеры для упражнения.

1) Найти дифференциалы от функций:

а) $(a^2-x^2)^5$ Отв: $-10x(a^2-x^2)^4 \cdot dx$

б) $\sqrt{1+x^2}$ Отв: $\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

в) $\dfrac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}$ Отв: $\dfrac{2nx^{2n-1}dx}{(1+x^2)^{n+1}}$

г) $\dfrac{t^3}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$ Отв: $\dfrac{3t^2dt}{\sqrt{(1-t\ )^5}}$

д) Задачник кафедры №№ 30,38.

2) Найти дифференциал функции

$$y=x^2-3x$$

при $x=5$ и $dx=-0{,}1$. Отв: $-0{,}7$.

3) То же для функции:

$$y=\frac{1}{x}$$

при $x=10$ и $dx=0{,}01$ Отв: $=-0{,}0001$.

4) Какова будет ошибка в вычислении об'ема шара, если радиус вычислен с точностью до 1%?

Отв.: 3%.

5) Вычислить $\sqrt{16{,}45}$ (по образцу прим. № 6).

Отв.: 4,056.

6) Задачник кафедры №№ 36,37.

5. Теперь, когда мы больше узнали из области анализа бесконечно-малых, можно в двух словах (и вследствие краткости - в несколько упрощенном виде) коснуться раз-

личия между методами Н ь ю т о н а и Л е й б н и ц а.

Ньютон и его ученики не вводили дифференциалов; у них основным понятием служила "флюксия", т.е. производная; это понятие было отражением скорости изменения (fluxion - истечение).

У Л е й б н и ц а же все основано на дифференциалах; выкладки с дифференциалами производились при отбрасывании бесконечно-малых высших порядков.

Последнее вызвало нападки на исчисление бесконечно-малых; чтобы устранить их, начала анализа были переработаны примерно в том духе, как это было изложено выше; в частности, теорема IX позволяет в известных случаях отбрасывать бесконечно-малые высших порядков, не нарушая математической строгости. Соединяя воедино идеи Ньютона и Лейбница, анализ бесконечно-малых выиграл в разнообразии методов и, можно сказать, тем самым поднялся на высшую ступень.

§ 11. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

1. До сих пор мы рассматривали функции целые и дробные, рациональные и иррациональные; все эти функции носят общее название алгебраических. Если приравнять нулю целую функцию от двух переменных, то полученное уравнение называется алгебраическим; например, уравнения

$$x^2-3y^2-1=0,$$

$$xy+ax^3-bx^2y=0$$

суть уравнения алгебраические. Функция y, определяемая алгебраическим уравнением, называется функцией алгебраической; при этом, если y входит в уравнение только в I-й степени, то функция будет рациональной; если же y входит в степени 2-й или выше, то функция будет иррациональной; например уравнение

$$3xy+2y-5x+3=0$$

определяет y как рациональную функцию от x; решив это уравнение относительно y, получим

$$y=\frac{5x-3}{3x+2};$$

уравнение

$$x^2-3xy+2y^2-3x+2y-3=0$$

определяет y как иррациональную функцию от x.

Все функции, которые не принадлежат к классу алгебраических, называются трансцендентными. К числу трансцендентных функций, к рассмотрению которых мы теперь приступим, относятся:

а) функции тригонометрические:

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\operatorname{tg} x,\quad y=\sec x,\quad y=\operatorname{cosec} x,$$

где x может иметь любое вещественное, положительное или отрицательное, значение; необходимо помнить, что дуга или угол x задается в радиальной мере;

б) функции логарифмические

$$y=\log_a x,\ \text{где}\quad a>0,$$

а x - любое вещественное положительное число, т.е.

$$0\leqslant x<\infty;$$

в) функции показательные

$$y=a^x,\quad \text{где}\quad a>0,$$

а x - любое вещественное, положительное или отрицательное, число, т.е.

$$-\infty < x < +\infty$$

г) функции круговые, с которыми мы подробно познакомимся ниже (§ 15), и которые обозначаются

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arccotg} x.$$

д) функции степенные при иррациональном показателе (степенная трансцендентность), например,

$$y = x^{\sqrt{3}}$$

2. Перейдем теперь к дифференцированию тригонометрических функций.

Пусть $y = \sin x$;
как известно, эта функция непрерывна для всех значений аргумента x от $-\infty$ до $+\infty$.

Найдем производную $\sin x$.

Дадим аргументу x приращение Δx; тогда функция y получит приращение

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x;$$

преобразуем эту разность по известной формуле тригонометрии:

$$\Delta y = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

составляем отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

и, наконец, переходим к пределу:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right] \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right].$$

Но мы знаем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right] = 1,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \cos x;$$

следовательно:

$$y' = \cos x.$$

Итак, получаем

и потому
$$\boxed{\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \\ d\sin x &= \cos x\,dx \end{aligned}};$$

если бы мы имели $\sin u$, где u есть в свою очередь функция от x, то применяем правило дифференцирования функции от функции (заметим кстати, что функция от функции называется также сложною функцией): производная от сложной функции равна произведению ее производной по вспомогательной функции на производную вспомогательной функции по независимому переменному; таким образом будем иметь:

$$\boxed{\begin{aligned} (\sin u)'_x &= \cos u \cdot u'_x \\ d\sin u &= \cos u\,du. \end{aligned}}$$

Например,

$$(\sin 2x)' = 2\cos 2x;$$

$$\left[\sin(x^2+1)\right]' = \cos(x^2+1)\cdot(x^2+1)' = 2x\cos(x^2+1).$$

Зная производную $\sin x$, мы можем весьма просто проследить ход изменения этой функции.

Рассмотрим изменение x в промежутке от 0 до 2π; тогда, приравнивая нулю производную

$$y' = \cos x = 0,$$

получим для x критические значения

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2};$$

составляем таблицу:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	возр.	max $=1$	уб.	min $=1$	возр.	0

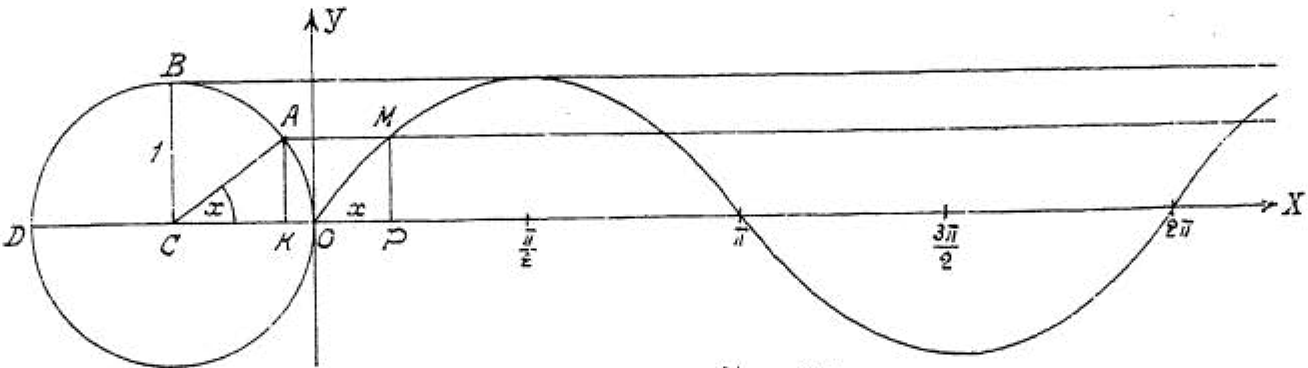
В силу периодичности функции $\sin x$ эта картина ее изменения повторяется бесчисленное число раз и для значения $x<0$, и для значений $x>2\pi$.

Эти свойства $\sin x$, а также и другие, известные читателю из курса тригонометрии, хорошо иллюстрируются его графиком; укажем его построение.

Берем (черт. 26) круг радиуса $CO=1$ и принимаем диаметр DO за ось x-ов, а точку O за начало координат. Строим центральный угол x и из конечной точки A радиуса CA проводим прямую параллельную OX до пересечения с перпендикуляром PM, восстановленным к оси OX в ее точке P с абсциссою $OP=x$ (x - радиальная мера $\angle OCA$); тогда эта точка пересечения и дает точку M графика $\sin x$; действительно, ордината $y = PM = KA$, а при радиусе равном 1 $AK = \sin x$; следовательно:

$$y = \sin x.$$

Подобным построением мы можем найти сколько-угодно точек графика; например, можно разделить окружность на



Черт. 26.

произвольное число равных частей и точки деления принять за исходные; в этом случае проще находятся соответствующие точки на оси OX. Соединив все полученные точки, мы найдем кривую, называемую <u>синусоидою</u>.

Заметим, что подобным же способом можно строить графики и более сложных функций

$$A \sin x, \quad A \sin \omega x, \quad A \sin(\omega x + \alpha);$$

эти функции имеют большое применение в вопросах так называемого гармонического колебательного движения, часто встречающегося в механике и физике.

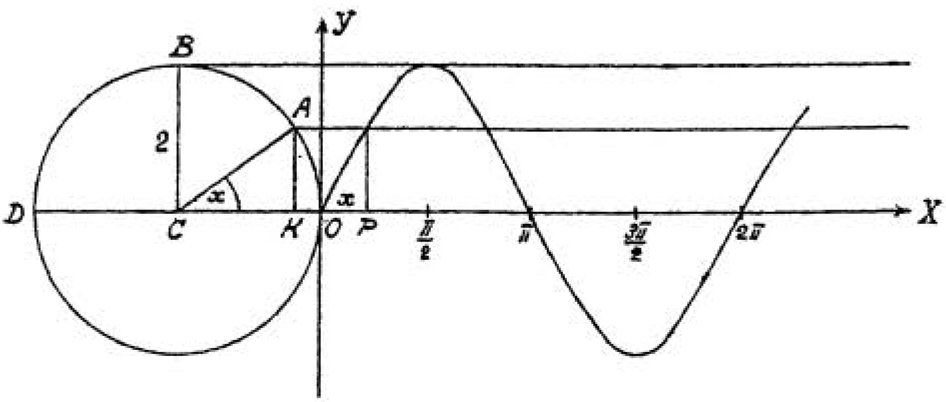
Чтобы построить график функции

$$y = A \sin x,$$

достаточно только взять вспомогательную окружность радиуса A, а не 1; например, для функции

$$y = 2\sin x$$

графиком (черт. 27) будет кривая, построенная при помощи окружности радиуса равного 2:



Черт. 27.

Чтобы построить график функции

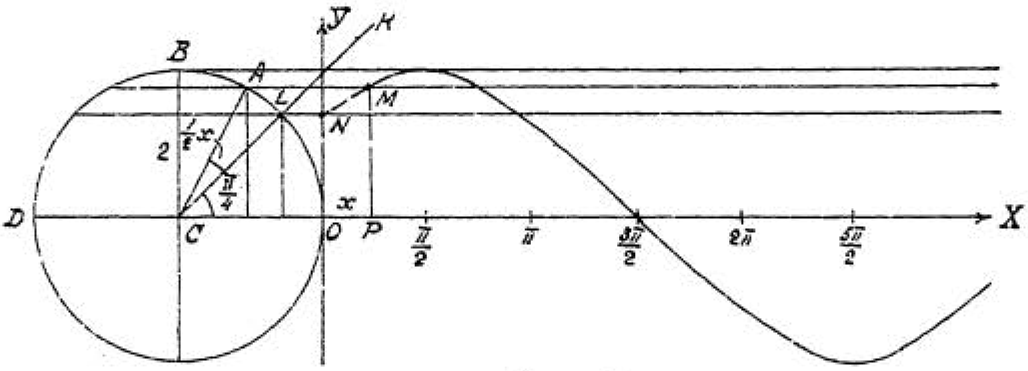
$$y = A\sin \omega x,$$

надо вспомогательную окружность описать радиусом равным A, а для нахождения точки графика, соответствующей абсциссе x, проводить радиус окружности под углом ωx.

Наконец, график функции

$$y = A\sin(\omega x + \alpha)$$

можно построить тем же способом, взяв окружность радиуса A, но проведя сначала вспомогательную прямую из центра под углом α к оси OX и затем отсчитывая углы ωx не от оси OX, а от этой прямой. Например, на черт. 28 построен график функции $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$:



Черт. 28.

окружность описана радиусом равным 2; вспомогательная прямая CK проведена так, что

$$\angle XCK=\frac{\pi}{4};\quad \angle KCA=\frac{1}{2}x \quad \text{и} \quad \angle XCA=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}.$$

Если x есть время, которое обычно обозначается буквой t, так что

$$y=A\,Sin(\omega t+\alpha),$$

то величина y называется <u>синусоидальной</u>; постоянная A называется <u>амплитудой</u> величины y; при изменении t радиус вспомогательной окружности вращается около центра и за время t описывает угол ωt; следовательно, в единицу времени он проходит угол ω, т.е. ω есть <u>угловая скорость</u> движения, она называется также <u>частотой</u> величины y; угол, который образует в момент t вращающийся радиус с осью абсцисс, т.е. угол $\omega t+\alpha$, называется <u>фазой</u> величины y, а угол α, соответствующий $t=0$, называется <u>начальной фазой</u>.

3. Выведем теперь производную функции

$$y=Cos\,x,$$

причем вывод будет совершенно аналогичен выводу производной $\sin x$, сделанному в п. 2.

Имеем:

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2};$$

следовательно:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

так что

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right] = -\lim_{\Delta x\to 0}\left[\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta}{2}}\right] =$$

$$= -\sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

Итак,

$$\boxed{\begin{aligned}&(\cos x)' = -\sin x; \quad d\cos x = -\sin x\,dx\\ &(\cos u)'_x = -\sin u\cdot u'_x; \quad d\cos u = -\sin u\,du.\end{aligned}}$$

Рассмотрим ход изменения функции $y=\cos x$ при изменении x от 0 до 2π; находим критические значения, приравнивая нулю производную:

$$-\sin x = 0, \quad x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi,$$

и составляем таблицу:

x . . .	0		π		2π
y' . . .	0	$-$	0	$+$	0
y	1	убыв.	min $=-1$	возр.	1

В силу периодичности функции $y=\cos x$ эта картина ее изменения повторяется бесчисленное число раз и для значений $x<0$, и для значений $x>2\pi$, а это показывает, что при $x=0$ и при $x=2\pi$, функция имеет *maximum*, равный I.

4. Пусть теперь

$$y=\operatorname{tg} x;$$

для вывода производной заменим $\operatorname{tg} x$ отношением $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ и применим правило дифференцирования дроби:

$$y=\frac{\sin x}{\cos x};$$

$$y'=\frac{\cos x(\sin x)'-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Следовательно:

$$\boxed{\begin{array}{ll}(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}; & d\operatorname{tg} x=\dfrac{dx}{\cos^2 x} \\[2ex] (\operatorname{tg} u)'_x=\dfrac{u'_x}{\cos^2 u}; & d\operatorname{tg} u=\dfrac{du}{\cos^2 u}.\end{array}}$$

Так как при всяком x производная

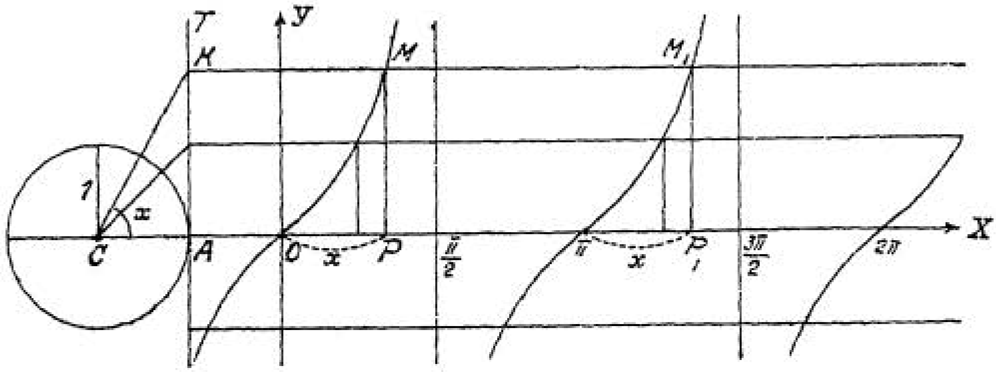
$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

есть число положительное, то $\operatorname{tg} x$ есть функция всегда возрастающая; при $x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, и вообще при $x=\frac{(2K+1)\pi}{2}$, где K - какое-угодно целое число, положительное или отрицательное, как производная, так и сама функция перестают существовать (обращаются в ∞) и происходит разрыв непрерывности.

Для построения графика функции

$$y=\operatorname{tg} x$$

можно воспользоваться построением аналогичным построению графика $\sin x$. Из точки C (черт. 29) описываем окружность радиусом $CA=1$ и из точки A проводим



Черт. 29.

касательную AT к окружности; направление CA принимаем за ось OX и произвольную точку O на этой оси за начало координат. Чтобы найти точки графика, соответствующие аргументу x, строим $\angle ACK=x$ (x - радиальная мера) и из точки K пересечения его стороны с касательной AT проводим прямую параллельную OX; точки пересечения этой прямой с перпендикулярами PM, P_1M_1, ... восставленными к оси x-ов в точках $P, P_1, \ldots$ с абсциссами x, $\pi+x$, ... и будут точками M, M_1, ... графика функции $tg\, x$. Действительно, ордината, например, точки M

$$y=PM=AK,$$

а при радиусе равном I

$$AK=tg\, x.$$

Построив таким образом достаточно большое число точек и соединив их, мы и получим график функции $tg\, x$. Заметим, что, чем ближе будет x подходить к $\frac{\pi}{2}$, тем ординаты, а следовательно, и значения функции, будут расти все быстрее и быстрее, и всегда можно подобрать

x настолько близко к $\frac{\pi}{2}$, что y сделается больше какого-угодно наперед заданного положительного числа, т.е. когда $x \to \frac{\pi}{2}$, то y растет беспредельно; при этом график будет неограниченно приближаться к прямой $x=\frac{\pi}{2}$. Когда x сделается равным $\frac{\pi}{2}$, то произойдет разрыв непрерывности, и при дальнейшем возрастании x функция y станет принимать отрицательные значения, уменьшающиеся по абсолютной величине; таким образом прямая

$$x=\frac{\pi}{2}$$

есть такая прямая, что расстояние текущей точки графика от нее стремится к 0, когда x приближается к $\frac{\pi}{2}$, как возрастая, так и убывая; такие прямые называются асимптотами.

В силу периодичности функции $tg\,x$ с периодом равным π картина ее изменения повторяется бесчисленное число раз, и таким образом график ее состоит из бесчисленного множества одинаковых ветвей с асимптотами.

$$x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{3\pi}{2},\ x=\frac{5\pi}{2} \text{ и т.д.}$$

5. Пусть, наконец,

$$y=Cotg\,x.$$

Для отыскания производной применяем тот же прием, что и для отыскания производной $tg\,x$:

$$y=\frac{Cos\,x}{Sin\,x};$$

$$y'=\frac{Sin\,x(cos\,x)'-Cos\,x(Sin\,x)'}{Sin^2 x}=\frac{-sin^2 x-Cos^2 x}{Sin^2 x}=$$

$$=-\frac{Sin^2 x+Cos^2 x}{Sin^2 x}=-\frac{1}{Sin^2 x}.$$

Следовательно:

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; \qquad d\operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$(\operatorname{cotg} u)'_x = -\frac{u'_x}{\sin^2 u}; \qquad d\operatorname{cotg} u = -\frac{du}{\sin^2 u}$$

Так как производная

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

при всяком x есть число отрицательное, то $\operatorname{cotg} x$ есть функция всегда убывающая; при $x = 0, \pi, 2\pi$ и вообще при $x = K\pi$, где K - какое-угодно целое число, как положительное, так и отрицательное, как производная, так и сама функция перестает существовать (обращается в ∞) и происходит разрыв непрерывности.

Перейдем теперь к решению примеров и задач.

I. Найти производную функции

$$y = \sin^4 \frac{x}{3}.$$

Эта функция есть функция сложная:

$$y = u^4, \quad \text{где} \quad u = \sin\frac{x}{3};$$

следовательно, по правилу дифференцирования функции от функции имеем:

$$y' = 4u^3 u'_x;$$

чтобы найти u'_x, замечаем, что u в свою очередь есть функция от функции:

$$u = \sin v, \quad \text{где} \quad v = \frac{x}{3},$$

так что

$$u'_x = \cos v \cdot u'_x = \cos v \cdot \frac{1}{3}$$

Итак, окончательно

$$y' = 4\sin^3\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\sin^3\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует путем упражнений приобрести навык сразу составлять выражение для производной сложной функции, не вводя промежуточных обозначений u, v и т.д.

2. Найти производную функции

$$y = \frac{2}{\sqrt[3]{tg^4 3x}};$$

переписываем функцию y, введя отрицательные и дробные показатели:

$$y = 2(tg\,3x)^{-\frac{4}{3}};$$

$$y' = 2 \cdot -\frac{4}{3}(tg\,3x)^{-\frac{7}{3}} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 = -\frac{8}{\sqrt[3]{tg^7 3x} \cdot \cos^2 3x} =$$

$$= -\frac{8}{tg^2 3x \cos^2 3x \sqrt[3]{tg\,3x}} = -\frac{8}{\sin^2 3x \sqrt[3]{tg\,3x}}$$

3. Некоторая кривая, называемая циклоидою, и с которою в дальнейшем курсе мы познакомимся подробно, задается в параметрической форме уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t); \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (*)$$

найти наклон по отношению к оси OX касательной к этой кривой в какой-либо ее точке.

Мы знаем, что $tg\alpha$, где α есть угол, образованный касательной с осью OX, равен значению производной y'_x вычисленному для данной точки. Конечно, мы могли бы найти эту производную обычным способом, если бы нам удалось, исключив параметр t из уравнений $(*)$, выразить y через x; но при параметрическом задании линии во многих случаях это довольно затруднительно и сложно, а во многих случаях и совсем невозможно. Поэтому воспользуемся другим способом.

Так как

$$y'_x=\frac{dy}{dx},$$

то из уравнений $(*)$ найдем dx и dy и разделим второе выражение на первое:

$$\begin{cases} dx=a(1-\cos t)\,dt \\ dy=a\sin t\,dt, \end{cases}$$

или, вводя по известным формулам тригонометрии угол $\frac{t}{2}$:

$$\begin{cases} dx=2a\sin^2\frac{t}{2}\,dt \\ dy=2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt; \end{cases}$$

таким образом

$$tg\,\alpha=y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{2x\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt}{2a\sin^2\frac{t}{2}\,dt}=\operatorname{Cotg}\frac{t}{2},$$

откуда

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}.$$

Например, угол, который образует с осью OX касательная к циклоиде в точке, определяемой параметром $t=\frac{\pi}{6}$, равен

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{12},$$

т.е. 75°.

Предположим, что в уравнениях

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

параметр t означает время; представим тогда производную y'_x в таком виде:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t},$$

но, как известно, y'_x есть скорость изменения переменной y по отношению к изменению переменной x; следовательно, эта скорость равна отношению скоростей изменения переменных y и x.

4. Зная, что $\sin 30^\circ=0{,}5$ и $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866$, найти приближенное значение $\sin 30^\circ 2'$.

Перейдем сначала к радиальному измерению углов:

$$\alpha=30^\circ=\frac{\pi}{6}$$

$$\alpha+\Delta\alpha=30^\circ 2'=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{5400}.$$

Мы знаем, что приближенно можно принять (при небольшом $\Delta\alpha$)

$$\Delta y\approx dy;$$

следовательно:

$$\Delta y=\sin(\alpha+\Delta\alpha)-\sin\alpha\approx d\sin\alpha=\cos\alpha\, d\alpha=0{,}866\cdot\frac{\pi}{5400}=0{,}0005;$$

а потому
$$\sin 30^\circ 2' \approx 0,5 + 0,0005 = 0,5005.$$

Для сравнения приводим более точное значение: 0,500504.

5. Изучить изменение функции
$$y = \sin x + \cos x$$
в границах изменения x от 0 до 2π, т.е. для значений
$$0 \leq x \leq 2\pi.$$

Составляем производную
$$y' = \cos x - \sin x,$$
приравниваем ее нулю и решаем полученное уравнение:
$$\cos x - \sin x = 0$$
$$\cos x(1 - tg\, x) = 0;$$
$\cos x$ не может равняться 0, так как, если $\cos x = 0$, то $\sin x \neq 0$, и $y' \neq 0$; следовательно:
$$1 - tg\, x = 0,$$
откуда
$$tg\, x = 1,$$
и для данного промежутка имеем:
$$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

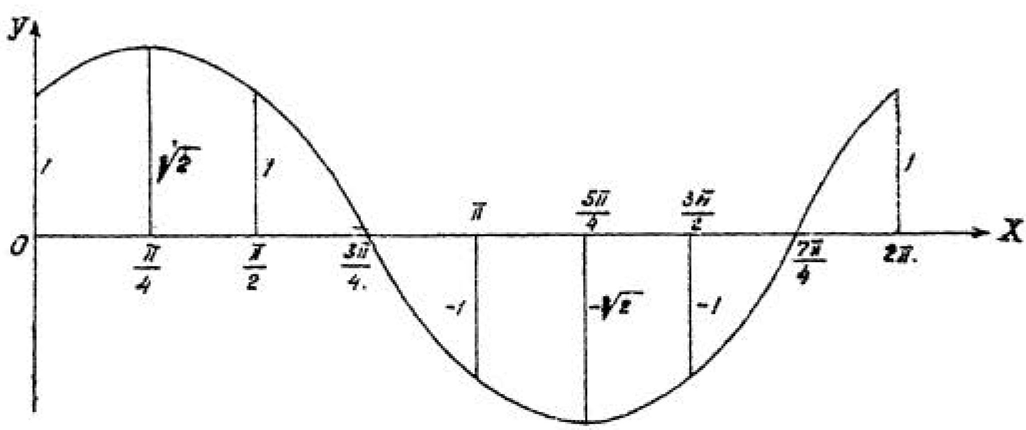
Таким образом мы нашли критические значения; составляем таблицу:

x	0	. . . . . .	$\frac{\pi}{4}$	. . . . . .	$\frac{5\pi}{4}$	. . . . . .	2π
y'		$+$		$-$		$+$	
y	1	возр.	max $=\sqrt{2}$	убыв.	min. $=-\sqrt{2}$	возр.	1

Для вычисления знака производной в I-м промежутке можно взять $x=\frac{\pi}{6}$; тогда $y'=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}>0$; во втором промежутке удобнее взять $x=\pi$ тогда $y'=-1<0$; в третьем промежутке берем $x=\frac{3\pi}{2}$; тогда $y'=+1>0$.

Итак, на данном интервале от 0 до 2π функция имеет maximum $\sqrt{2}$ при $x=\frac{\pi}{4}$ и minimum равный $-\sqrt{2}$ при $x=\frac{5\pi}{4}$, так как на границах интервала значения функции равны I, то эти же значения $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ являются и наибольшим и наименьшим значениями функции.

График функции изображен на черт. 30.



Черт. 30.

Так как эта функция периодическая (с периодом 2π), то картина ее изменения повторяется бесчисленное множество раз и для $x<0$, и для $x>2\pi$.

6. Задача из теории лафетов (сообщена т. Туроверовым К.К.).

Условие боковой устойчивости при выстреле приводится к неравенству:

$$\frac{\cos(\gamma+\delta)}{\cos(\psi-\delta)} > K,$$

где ψ - угол боковой наводки; γ - угол между осью симметрии лафета и прямой, соединяющей точку опоры сошника с центром тяжести всей системы (при данном ψ); K - коэффициент запаса устойчивости; δ - переменный угол, изменяющийся на практике от 0 до некоторого определенного значения, которое обозначим через δ_0.

Для решения вопроса о возможности удовлетворить указанному неравенству, требуется найти наименьшее значение дроби, стоящей в левой части. При каком значении δ получится это наименьшее значение дроби?

Рассматривая данную дробь, как функцию переменного δ, т.е. полагая

$$\frac{\cos(\gamma+\delta)}{\cos(\psi-\delta)} = f(\delta),$$

составляем производную

$$f'(\delta) = \frac{-\cos(\psi-\delta)\sin(\gamma+\delta) - \cos(\gamma+\delta)\sin(\psi-\delta)}{\cos^2(\psi-\delta)} =$$

$$= -\frac{\sin(\gamma+\psi)}{\cos^2(\psi-\delta)};$$

так как и $\gamma < \frac{\pi}{2}$ и $\psi < \frac{\pi}{2}$, то $\gamma + \psi < \pi$, и $\sin(\gamma+\psi) > 0$; следовательно $f'(\delta) < 0$, и потому функция $f(\delta)$ все время убывает, так что ее наименьшее значение получается при $\delta = \delta_0$

Примеры и задачи для упражнения.

I. Найти производные следующих функций:

а) $y = 3\sin^5\frac{x}{3}$ Отв: $y' = 5\sin^4\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$.

б) $y = \sqrt[5]{\cos^3 2x}$ Отв: $y' = -\frac{6}{5}\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 2x\sin^3 2x}$.

в) $y = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$ Отв: $y' = \sin^3 x$.

г) $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{3}{2}x$ Отв: $y' = \sin^2 x\operatorname{tg}^2 x$.

д) $y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$ Отв: $y' = \left(\frac{x}{\cos x + x\sin x}\right)^2$

е) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{x}{2}$ Отв: $y' = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$.

ж) $x = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{S}{\lambda}\right)$; найти $\frac{dx}{dt}$, считая a, T, S и λ постоянными. Отв: $\frac{2\pi a}{T}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{S}{\lambda}\right)$

з) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$; найти y'_x. Отв: $-\operatorname{tg} t$.

и) $\begin{cases} x = r(\cos t + t\sin t) \\ y = r(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, найти y'_x Отв: $\operatorname{tg} t$.

к) $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$; найти $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ Отв: $\frac{1}{9}$.

л) $f(x) = \frac{2}{3}\operatorname{tg} x\sqrt{\operatorname{tg} x} - \frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$; найти $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ Отв: 4.

м) $\begin{cases} x = b + a\left(-\sin t + \frac{1}{2\sin^2 t}\right); \\ y = a(\cos t + \operatorname{Cotg} t) \end{cases}$

Найти значение y'_x для точки, определяемой значением $t=\frac{\pi}{3}$.

Отв.: $\sqrt{3}$.

2. Найти точки кривой

$$y=x+\sin 4x,$$

в которых касательная параллельна прямой $y=3x-1$.

Отв.: в точках с абсциссами $x=n\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}$.

3. Найти угол, который образует с осью OX касательная к кривой

$$y=2\sin x+3\cos 2x$$

в точке (0,3) Отв. $63^{\circ}26'6''$

3. Под каким углом пересекаются кривые

$$y=\sin x+\cos' x$$

и $$y=\sin x-\cos x\ ?$$

УКАЗАНИЕ. Углом между кривыми называется угол, образованный касательными к этим кривым в точке их пересечения.

Отв.: под прямым углом.

5. Найти приближенные значения $tg\ 45^{\circ}3'$ и $tg\ 44^{\circ}57'$

Отв.: $tg\ 45^{\circ}3' \approx 1{,}001745$
$tg\ 44^{\circ}57^{\circ} \approx 0{,}998255$.

6. Точка движется по синусоиде; которая из ее координат изменяется быстрее?

Отв.: абсцисса; в точках пересечения кривой с осью x-ов скорости одинаковы.

7. Проследить ход изменения функции

$$y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$$

и построить ее график.

Отв.: при $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$ maximum

при $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \dots$ minimum.

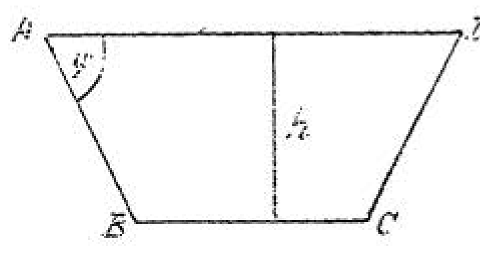
8. Задача № 69 из сборника кафедры.

9. Из всех равнобедренных треугольников, вписанных в круг радиуса R, найти тот, который имеет наибольший периметр.

Отв.: равносторонний треугольни.

УКАЗАНИЕ. За независимую переменную принять угол при основании равнобедренного треугольника.

10. Открытый канал (черт. 31), имеющий в разрезе форму равнобочной трапеции $ABCD$, площадь которой $=S$, а высота $=h$, должен быть устроен так, чтобы при движении воды потеря на сопротивление трению была наименьшей, т.е. чтобы "мокрый периметр" $ABCD$ был наименьшим. Каким должен быть в этом случае угол φ откоса?



черт.31.

Отв.: 60°.

УКАЗАНИЕ: $ABCD = \frac{S}{h} - h\,Cotg\,\varphi + \frac{2h}{Sin\,\varphi}$.

§ 12. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ.

Логарифмическая функция имеет вид

$$y = Log_a x,$$

где $a>0$ и называется основанием логарифмов; согласно известному из курса алгебры определению логарифма имеем

$$a^y = x.$$

Построим графики этой функции, взяв $a=10$ и $a=0,1$. Составляя таблицы значений функции при различных положительных значениях аргумента, получим:

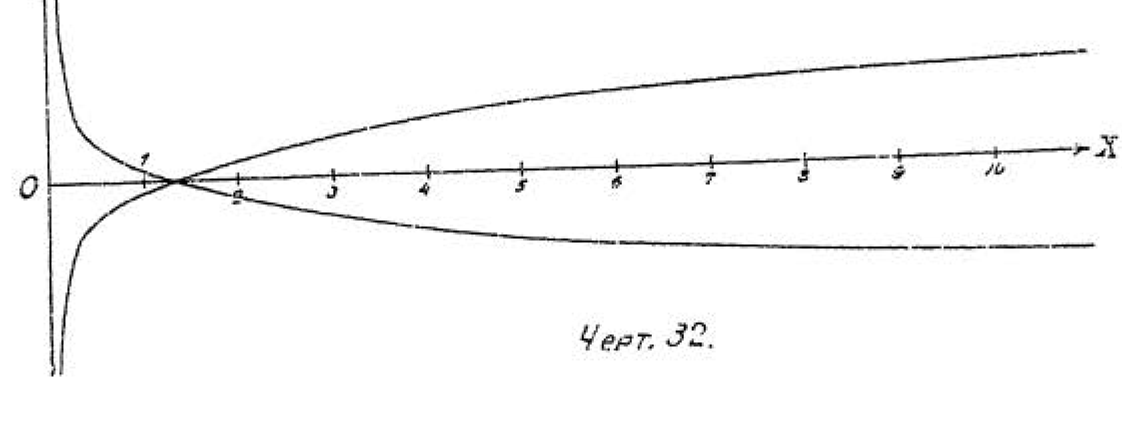
$a=10$

x	y
0	$-\infty$
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2

$a=0,1$

x	y
0	$+\infty$
0,01	2
0,1	1
1	0
10	-1
100	-2

Конечно, для более точного построения графиков надо определить координаты довольно большого числа точек близких между собою. Построив ряд таких точек и соединив их между собою кривою линией, мы и получим графики функции для того и другого основания; эти графики изображены на черт. 32; ось OY есть асимптота графиков.



Черт. 32.

Рассмотрение этих графиков хорошо уясняет известные из курса алгебры основные свойства логарифмической функции при основании большем I и при основании меньшем I.

Разберем теперь следующий вопрос. Нам известно значение логарифмической функции для аргумента x при основании a; найти ее значение для того же аргумента x при другом основании b. Пусть

$$\log_a x = y$$
$$\log_b x = z;$$

тогда на основании определения логарифма имеем:

$$a^y = x$$
$$b^z = x,$$

откуда

$$a^y = b^z;$$

прологарифмируем это равенство по основанию a:

$$y = z \log_a b,$$

и следовательно

$$z = y \cdot \frac{1}{\log_a b}.$$

Это равенство показывает, что для нахождения логарифма некоторого числа при новом основании надо его логарифм по старому основанию умножить на постоянное число

$$\frac{1}{\log_a b};$$

это число называется модулем системы. Например, если известны десятичные логарифмы чисел, а желательно найти логарифмы чисел при основании равном 2, то надо все десятичные логарифмы умножить на

$$\frac{1}{\log_{10} 2} = \frac{1}{0,30103} = 3,322,$$

так что

$$\log_2 3 = 0,47712 \cdot 3,322 = 1,585.$$

§ 13. ЧИСЛО e; ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ.

Перейдем теперь к отысканию производной функции

$$y = \log x. \qquad (1)$$

Согласно общему правилу дадим аргументу x приращение Δx и найдем соответствующее приращение функции y:

$$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

находим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

положим теперь

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}, \quad \text{т.е.} \quad \Delta x = \frac{x}{n}; \qquad (*)$$

тогда

$$\frac{1}{\Delta x} = \frac{n}{x} = \frac{1}{x} \cdot n;$$

следовательно, в этих новых обозначениях:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Пусть теперь $\Delta x \to 0$; тогда, в силу равенства $(*)$, $n \to \infty$; значит,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right] = \frac{1}{x} \lim_{n \to \infty} \left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

($\frac{1}{x}$ не зависит от Δx; поэтому мы его вынесли за знак предела).

Воспользуемся теперь теоремой о пределах, которую примем без доказательства: предел логарифма некоторой переменной величины равен логарифму предела этой величины; следовательно,

$$y' = \frac{1}{x} \log \lim_{n \to \infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \qquad (2)$$

Итак, мы нашли, что в выражение производной функции (I) входит

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Но теперь возникает вопрос: существует ли такое число. Другими словами, имеет ли переменная $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ предел, когда $n \to \infty$? Ведь мы знаем, что далеко не всякая переменная имеет предел. Ответом на этот вопрос мы сейчас и займемся.

Рассуждение мы поведем следующим образом: сначала мы докажем, что рассматриваемая переменная имеет предел, а потом уже составим себе понятие о самом числе.

Доказательство будет основано на одном свойстве переменной величины, достаточно очевидном само по себе (в более подробных курсах анализа это свойство доказывается вполне строго).

Будем называть переменную величину монотонной, если она при своем изменении все время возрастает, или все время убывает; в первом случае назовем ее монотонновозрастающей, а во втором - монотонно-убывающей. Свойство, которое мы положим в основу доказательства, следующее: <u>если монотонно-возрастающая переменная все время остается меньше некоторого постоянного числа A, то она имеет предел, который или меньше, или равен A; если монотонно- убывающая переменная все время остается больше некоторого постоянного числа B, то она имеет предел, который или больше, или равен B.</u>

<u>Теорема. Переменная</u>

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n\to\infty}$$

<u>имеет предел.</u>

Остановимся на случае, когда n беспредельно возрастает, принимая последовательно значения чисел натурального ряда, т.е.

$$n = 1,2,3,4 \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

и разобьем доказательство теоремы на 2 части.

<u>I-я часть. Переменная u_n есть переменная монотонно-возрастающая.</u>

Давая для n последовательно значения I,2,3,4,..., получим:

$$u_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2; \quad u_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2,25; \quad u_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=$$

$$=\frac{64}{27}=2,37\ldots; \quad u_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=\frac{625}{256}=2,44\ldots \text{и т.д.}$$

Рассматривая эти числа, мы замечаем, что они идут, возрастая:

$$u_1<u_2<u_3<u_4.$$

Докажем, что это будет явлением общим, т.е. всегда с увеличением n будет возрастать u_n.

Так как, по предположению, n есть целое и положительное число, то применим к выражению для u_n формулу бинома Ньютона:

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1}{1.2.3\dots(n-2)(n-1)n}\cdot\frac{1}{n^n};$$

возьмем член $\frac{n(n-1)}{1:2}\cdot\frac{1}{n^2}$ и разделим числитель и знаменатель его на n^2; тогда получим: $\dfrac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}}{1.2}=\dfrac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1.2}$; точно так же в члене $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3}$ разделим числитель и знаменатель на n^3.

$$\frac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}}{1.2.3}=\frac{1.\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3};$$

проделаем подобные же преобразования для всех последующих членов; тогда выражение для u_n можно написать в таком виде:

$$u_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right);(*)$$

(заметим, что произведение $1.2.3.\dots.n$ называется <u>факториалом</u> и обозначается $n!$; например, $5!=1.2.3.4.5=120$). Правая часть равенства (*) состоит из ($n+1$) положительных слагаемых; если по этой же формуле составить выражение для u_{n+1}:

$$u_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right),$$

то правая часть будет состоять уже из $(n+2)$ положительных слагаемых; при этом во всех членах, начиная с 3-го, вычитаемые внутри скобок уменьшаются (их знаменатели увеличиваются), а поэтому разности, заключенные в скобках, увеличиваются; значит, все слагаемые для u_{n+1}, начиная с 3-го, больше соответствующих слагаемых для u_n, и кроме того u_{n+1} имеет еще одно лишнее положительное слагаемое; следовательно,

$$u_{n+1} > u_n$$

для всякого n, и I-я часть теоремы доказана.

<u>2-я часть. $u_n < 3$ при всяком n.</u>

Возьмем равенство $(*)$ и отбросим в правой его части все вычитаемые; тогда правая часть увеличится, и мы будем иметь, что

$$u_n < 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots n};$$

далее еще более увеличим правую часть, заменив в знаменателях все числа, начиная с 3, числом 2, т.е. уменьшив эти знаменатели; тогда

$$u_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

но $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ есть сумма n членов геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$; значит, по известной формуле алгебры

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}},$$

и потому

$$u_n < 1+2-\frac{1}{2^{n-1}},$$

или окончательно:

$$u_n < 3,$$

в чем мы и хотели убедиться.

Итак, мы доказали, что при указанном способе изменения n переменная $(1+\frac{1}{n})^n$ есть переменная монотонно- возрастающая, но при своем возрастании всегда остающаяся меньше 3; значит, на основании выше указанного свойства переменная $(1+\frac{1}{n})^n_{n\to\infty}$ имеет предел, который меньше 3; первая же часть теоремы в сопоставлении с равенством $(*)$ указывает, что этот предел больше 2.

Этот предел в математике обозначается буквою e и называется основанием натуральных или неперовых логарифмов по имени шотландского математика Непера(1550 - 1617). Логарифмы при этом основании мы будем обозначать $\ln x$ или $\log x$, сохраняя обозначение $\log_a x$ для логарифмов при другом основании.

Мы рассмотрели вопрос о существовании предела переменной $(1+\frac{1}{n})^n$, при условии, что n растет беспредельно, принимая ряд целых и положительных значений; в более подробных курсах анализа доказывается, что к тому же самому пределу e стремится переменная $(1+\frac{1}{n})^n$ и в тех случаях, когда n растет беспредельно по абсолютной величине, принимая какие-угодно значения, положительные или отрицательные, рациональные или иррациональные. Читатель, желающий познакомиться с этим доказательством, найдет его, например, в курсе И.А. Лурье "Основы высшей математики", ч. I, § 35.

Итак, можно считать установленным, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = e.$$

Чему же равняется это число e? Мы уже знаем, что оно больше 2 и меньше 3; если бы мы хотели составить более точное представление об этом числе, то могли бы продолжить начатые при доказательстве I-й части основной теоремы этого параграфа вычисления значений u_n:

$$u_1=2; \quad u_2=2,25; \quad u_3=2,37; \quad u_4=2,44; \quad u_{10}=2,59;$$

$$u_{100}=2,70; \quad u_{1000}=2,717; \quad \text{и т.д.}$$

В дальнейшем курсе будет указан более удобный способ вычисления числа e; а пока заметим, что e есть число иррациальное, выражаемое бесконечною дробью

$$e=2,71828.......$$

УПРАЖНЕНИЕ. Задача № 2 из сборника кафедры.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы ввели в рассмотрение число e, исходя из теоретических соображений при отыскании производной логарифмической функции. Но оказывается, что тот процесс вычислений, который приводит к этому числу, иррациональному, и, казалось бы, довольно искусственно составляемому, является отражением действительных процессов, происходящих в природе; всякая задача, связанная с ростом организмов, будет ли то рост колонии бактерий в питательной среде, рост леса в свободных условиях или рост развития какой-либо отрасли народной промышленности, приводит к этому числу e. Читатель может подробнее ознакомиться с этим вопросом, разобрав задачу № 25 из сборника кафедры.

Выведем на основании доказанной теоремы 2 следствия, относящиеся к пределам.

<u>Следствие I</u>. Положим в равенстве

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=e$$

$\frac{1}{n}=\alpha$ или $n=\frac{1}{\alpha}$; тогда, если $n\to\infty$, то $\alpha\to 0$, и это равенство перепишется так:

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]=e.$$

<u>Следствие 2.</u> Найдем $\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}\right]$

Имеем:

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}\right]=\lim_{\alpha\to 0}\left[\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]=\ln\lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]=\ln e=1,$$

т.е. при бесконечно-малом α бесконечно-малая величина $\ln(1+\alpha)$ и α эквивалентны.

Установив таким образом существование

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

и составив представление о числе e, возвратимся к вопросу о производной логарифмической функции. В начале настоящего параграфа мы установили, что функция

$$y=\log_a x \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

имеет производную

$$y'=\frac{1}{x}\log_a \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \quad ;\ldots (2)$$

и так как

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=e,$$

то

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Из этой формулы совершенно ясно, что производная логарифмической функции получает наиболее простой вид, если за основание принять число e, ибо тогда

$$\log_e e = \ln e = 1,$$

и следовательно функция

$$y = \ln x$$

имеет производную

$$y' = \frac{1}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ввиду такой простоты выражения производной в анализе всегда применяется система натуральных логарифмов; десятичная же система имеет преимущество лишь при вычислительной работе; для перехода от одной из этих систем к другой пользуются формулами, выведенными выше (§ 12):

$$\log_{10} x = \ln x \, . \log_{10} e = \ln x \, . \, 0{,}434;$$

$$\ln x = \log_{10} x \cdot \frac{1}{\log_{10} e} = \log_{10} x \, . \, 2{,}303;$$

для нахождения производной $\log_{10} x$ применяем формулу (3):

$$(\log_{10} x)' = \frac{1}{x} \log_{10} e = \frac{0{,}434}{x}.$$

Если надо найти производную сложной функции

$$y = \ln u,$$

где u есть некоторая функция от x, то пользуясь правилом дифференцирования таких функций, получим

$$y'_x=(\ln u)'_u \cdot u'_x=\frac{u'_x}{u};$$

т.е. надо написать дробь, знаменателем которой будет выражение, стоящее под знаком $\ln$, а числителем - производная знаменателя.

Например, если

$$y=\ln(x^3-2x^2+1),$$

то

$$y'=\frac{3x^2-4x}{x^3-2x^2+1}.$$

Итак, дифференцирование логарифмической функции сводится к формулам:

$$\boxed{\begin{aligned}
&(\ln x)'=\frac{1}{x}; \qquad d\ln x=\frac{dx}{x};\\
&(\ln u)'_x=\frac{u'_x}{u}; \qquad d\ln u=\frac{du}{u};\\
&(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e; \quad d\log_a x=\frac{1}{x}\log_a e.dx;\\
&(\log_a u)'_x=\frac{u'_x}{u}\log_a e; \quad d\log_a u=\frac{1}{u}\log_a e\,du.
\end{aligned}}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пользуясь выведенной формулой для производной логарифмической функции, обобщим еще более формулу (6) § 9:

$$(u^m)'=mu^{m-1}u'_x,$$

справедливость которой была доказана для всякого рационального значения показателя m. Устраним теперь и это ограничение рациональности показателя m и станем предполагать, что m есть какое-угодно вещественное число, рациональное или иррациональное.

Имеем

$$y = u^m;$$

прологарифмируем это равенство по основанию e:

$$\ln y = m \ln u$$

и возьмем производные от обеих частей, помня, что и y и u суть функции от x:

$$\frac{y'_x}{y} = m\frac{u'_x}{u},$$

откуда

$$y'_x = my \cdot \frac{u'_x}{u};$$

заменим y его выражением u^m:

$$y'_x = mu^m \cdot \frac{u'_x}{u} = mu^{m-1}u'_x$$

Таким образом мы пришли к той же самой формуле (6), но здесь уже показатель m может быть любым вещественным числом.

§ 14. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ.

Перейдем теперь к рассмотрению показательной функции

$$y=a^x,$$

где $a>0$ а x - любое вещественное число.

Составим таблицы значений функций

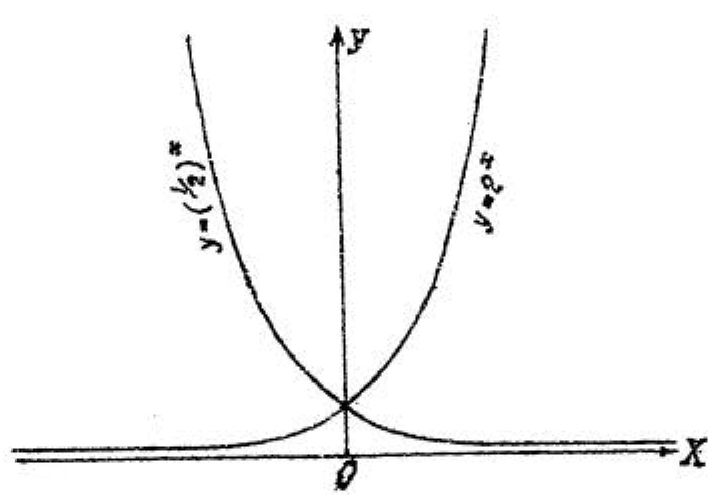
$y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

Построив по этим данным ряд соответствующих точек, а для более точного построения найдя еще ряд добавочных точек, соединим полученные точки линией и получим графики данных функций (черт. 33)

Заметим, что, как мы видели выше (§ 3), если $a<1$ то, когда $x\to\infty$, $y\to 0$; если же $a<1$, то $y\to 0$, если $x\to-\infty$; следовательно, ось OX есть асимптота графиков. Эти графики, подобно графикам ло-



Черт. 33.

гарифмической функции, хорошо иллюстрируют основные свойства показательной функции, известные из курса алгебры.

График функции $y=e^x$ имеет тот же характер, как и график функции $y=2^x$.

Найдем производную показательной функции

$$y=a^x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

прологарифмируем это равенство по основанию e:

$$\ln y = x \ln a; \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

рассматривая $\ln y$ как сложную функцию от x, найдем производные по x от обеих частей равенства (2):

$$\frac{y'_x}{y} = \ln a,$$

откуда

$$y'_x = y \ln a,$$

или, подставляя вместо y его выражение (1), получим

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= (a^x)' = a^x \ln a \\ d(a^x) &= a^x \ln a \, dx. \end{aligned}} \quad \ldots (3)$$

и следовательно,

Если

$$y = a^u,$$

где u есть функция от x, то по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\boxed{\begin{aligned}(a^u)'_x &= a^u \ln a \, u'_x \\ d(a^u) &= a^u \ln a \, du.\end{aligned}}$$

и

Обратим внимание на особенно важный частный случай этих формул, когда $a=e$:

$$\boxed{\begin{aligned}&(e^x)'=e^x; \quad d(e^x)=e^x dx \\ &(e^u)'_x=e^u u'_x; \quad d(e^u)=e^u du.\end{aligned}}$$

Примеры.

1) Найти y', если

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Применяя основные теоремы о производных и замечая, что $e^{\frac{x}{a}}$ и $e^{-\frac{x}{a}}$ суть сложные функции от x, будем иметь:

$$y'=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}-\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

2) Найти y', если

$$y=\ln\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}};$$

заметим, что, если функция дает возможность произвести логарифмирование до нахождения производной, то его необходимо сделать: этим вычисление упрощается.

Итак,

$$y = 2x - \ln(1 + e^{2x});$$

следовательно

$$y' = 2 - \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{2}{1+e^{2x}}.$$

3) Найти y', если

$$y = \ln\frac{3^{2x}}{1+3^{2x}};$$

имеем:

$$y = 2x\ln 3 - \ln(1+3^{2x});$$

$$y' = 2\ln 3 - \frac{2 \cdot 3^{2x}\ln 3}{1+3^{2x}} = \frac{2\ln 3}{1+3^{2x}}.$$

4) Найти y', если

$$y = e^{ax} \cdot \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}.$$

Применяем правило дифференцирования произведения:

$$y' = \frac{1}{a^2+b^2}\left[e^{ax}(ab\cos bx + b^2\sin bx) + ae^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)\right] =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[ab\cos bx + b^2\sin bx + a^2\sin bx - ab\cos bx\right] =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a^2+b^2)\sin bx = e^{ax}\sin bx.$$

Переходим к рассмотрению задач.

Задача I. Прежде всего обратим внимание на то, что, если

$$y=a^{kx}, \quad \text{то} \quad y'=ka^{kx}\ln a, \quad \ldots\ldots (1)$$

или, полагая постоянное $k\ln a=c$:

$$y'=cy;$$

в частности, если

$$y=e^{kx}, \quad \text{то} \quad y'=ky, \quad \ldots\ldots (2)$$

т.е. производная показательной функции пропорциональна самой функции; c и k - коэффициенты пропорциональности.

Припомним, что производная характеризует скорость изменения функции по отношению к изменению независимой переменной; так, если за независимую переменную принять время и рассматривать некоторое количество y, изменяющееся с течением времени, то производная характеризует скорость изменения количества y с изменением времени. Положим, что при некотором процессе зависимость между количеством вещества и временем выражается показательною функцией вида (I) или (2); тогда, в силу сделанного замечания, скорость процесса пропорциональна количеству вещества; в этом случае говорят, что процесс подчинен закону пропорционального роста; при этом коэффициент пропорциональности положителен, если с увеличением времени количество вещества увеличивается, и отрицателен, если количество вещества убывает. К числу таких процессов относятся радиоактивный распад, охлаждение или нагревание тела в окружающей среде, ход химических реакций и другие. Этому же закону подчиняются и другие процессы, которые характеризуются зависимостью того же вида (1) или (2), но где независимой переменной является не время, а некоторая другая переменная; к числу таких процессов относится, например, изменение атмосферного давления в зависимости от высоты над поверхностью земли.

Решим задачу на этот последний вопрос.

Давление воздуха p на высоте h над уровнем земли выражается так называемой "барометрической формулой"

$$p = p_0 e^{-\frac{h}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots (3),$$

где p_0 и a - постоянные числа; очевидно, что при $h=0$ имеем

$$p = p_0 ,$$

т.е. p_0 есть давление воздуха на уровне моря; причем $p_0 = 10330$ кг/м^2. Считая $a = 8000$, найти: 1) на какой высоте давление воздуха равно $\frac{3}{4}$ давления на уровне моря; 2) скорость изменения давления на этой высоте.

Для решения 1-го вопроса полагаем в формуле (3) $p = 0{,}75\,p_0$; тогда, сокращая на p_0, получим

$$0{,}75 = e^{-\frac{h}{8000}},$$

откуда, логарифмируя по основанию 10, будем иметь

$$\log_{10} 0{,}75 = -\frac{h}{8000} \log_{10} e$$

или

$$\bar{1},87506 = -0{,}12494 = -\frac{h}{8000} \cdot 0{,}4343;$$

следовательно:

$$h = \frac{0{,}12494 \cdot 8000}{0{,}4343} = 2301{,}4 \text{ метра.},$$

т.е. на высоте приблизительно равной 2,3 км.

Для решения 2-го вопроса находим производную $\frac{dp}{dh}$:

$$v = \frac{dp}{dh} = -\frac{p_0}{a} e^{-\frac{h}{a}} = -\frac{1}{a} p;$$

так как

$$p = 0{,}75 \cdot 10330,$$

то

$$v = -\frac{0{,}75 \cdot 10330}{8000} = -0{,}9684 \frac{\frac{кг}{м^2}}{м.}$$

знак - показывает, что с увеличением высоты давление воздуха уменьшается.

Задача 2. Исследовать ход изменения функции

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad (a > 0)$$

и начертить ее график.

Мы видели (прим. I этого параграфа), что

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

приравнивая производную нулю, получаем, по сокращении на $\frac{1}{2}$,

$$e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} = 0$$

или

$$e^{\frac{x}{a}} = e^{-\frac{x}{a}},$$

откуда ясно, что

$$x=-x \quad \text{или} \quad 2x=0,$$

так что критическим значением является одно число $x=0$. Так как x не подчинен никаким ограничениям, то рассматриваем два промежутка $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Для вычисления знака производной в первом промежутке проще всего взять $x=-a$; тогда

$$y'=\frac{1}{2}(e^{-1}-e)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^2}{e}<0;$$

для второго промежутка берем $x=a$

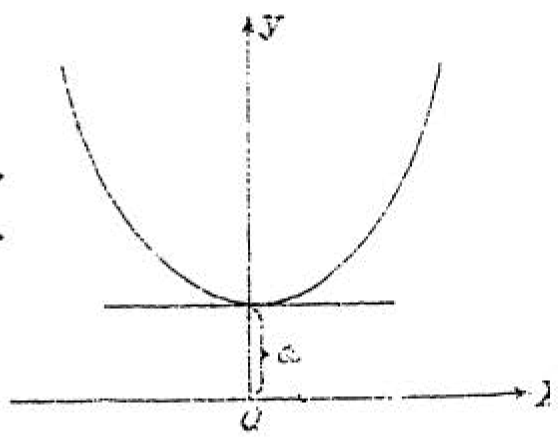
$$y'=\frac{1}{2}(e-e^{-1})=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2-1}{e}>0.$$

Составляем таблицу:

x	$-\infty$	......	0	......	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	убыв.	a (min)	возр.	$+\infty$

Так как производная при переходе через 0 меняет знак от $-$ к $+$, то при $x=0$ функция имеет $minimum = a$.

Построив ряд дополнительных точек и соединив их линией, мы и получим кривую (черт.34), выражаемую данным уравнением. Касательная к ней в точке $(0, a)$, в которой функция имеет $minimum$, параллельна оси OX.



Черт. 34.

Эта кривая носит название __цепной линии__; по этой кривой располагается тяжелая, однородная, гибкая и нерастяжимая нить, закрепленная своими концами. По виду эта кривая напоминает параболу 2-го порядка и знаменитый математик Галилей (1564 - 1642), занимаясь вопросом о форме кривой, по которой располагается такая нить, действительно считал ее за параболу. Ошибочность этого мнения была замечена другим знаменитым математиком Гюйгенсом (1629-1695), когда ему было всего 17 лет, но тогда он еще не дал положительного решения вопроса и сделал это лишь значительно позднее.

В дальнейшем курсе мы увидим, что с известною степенью приближения цепная линия может быть заменена параболою.

Задача 3. В какой точке кривой

$$y = \ln x$$

касательная проходит через начало координат.

Обозначим координаты искомой точки (x_0, y_0), так что

$$y_0 = \ln x_0.$$

Из аналитической геометрии известно, что всякая прямая, проходящая через точку (x_0, y_0), выражается уравнением

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где k есть угловой коэффициент; но k равен значению производной для данной точки, т.е.

$$k = \frac{1}{x_0};$$

следовательно, уравнение касательной будет:

$$y - y_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0),$$

или

$$y - \ln x_0 = \frac{x}{x_0} - 1$$

или, наконец,

$$y - \frac{x}{x_0} = \ln x_0 - 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (*)$$

Чтобы касательная проходила через начало координат, надо чтобы свободный член в уравнении (*) был равен 0, т.е. для определения x_0 получаем уравнение

$$\ln x_0 - 1 = 0,$$

откуда

$$\ln x_0 = 1$$

или

$$x_0 = e$$

$$y_0 = \ln x_0 = 1$$

Итак, искомая точка будет

$$(e, 1)$$

и уравнение касательной в ней:

$$y = \frac{x}{e}.$$

Задача 4. Найти наибольшее значение функции

$$y = x^2 e^{-x}$$

если x принимает значения

$$0 \leqslant x \leqslant 3.$$

Составляем производную

$$y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x);$$

приравнивая это выражение 0, получаем

$$xe^{-x}(2 - x) = 0;$$

для рассматриваемого промежутка $e^{-x} \neq 0$; поэтому критическими значениями являются 0 и 2.

Составляем таблицу

x	0	.....	2	......	3
y'		$+$	0	$-$	
y	0	возр.	$\frac{4}{e^2}$ max	убыв.	$\frac{9}{e^3}$;

при переходе через 0 производная меняет знак от $+$ к $-$; значит, при $x=2$ функция имеет *maximum*. Чтобы найти наибольшее значение, вычисляем значения функции на границах:

при $x=0$ .... $y=0<\frac{4}{e^2}$;

при $x=3$ $y=\frac{9}{e^3}$; так как $\frac{9}{e^3}:\frac{4}{e^2}=\frac{9}{4e}<1$

то $\frac{9}{e^3}<\frac{4}{e^2}$.

Итак, *maximum* функции на данном промежутке при $x=2$ равный $\frac{9}{e^2}$ есть и ее наибольшее значение.

Примеры и задачи для упражнений.

I. Найти производные следующих функций

а) $y=\ln(3x^3-2x^2+x-1)$ Отв: $y'=\frac{9x^2-4x+1}{3x^3-2x^2+x-1}$

б) $y=\ln\frac{x-1}{2x-1}$ Отв: $y=\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$

в) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ Отв: $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

г) $y=\ln\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$ Отв: $y'=\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{(x-2x^3)\sqrt{1-x^2}}$

д) $y=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ Отв: $y'=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

е) $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ Отв: $y'=\sqrt{x^2+a^2}$

ж) $y=\ln tg\frac{x}{2}$ Отв: $y'=\frac{1}{\sin x}$

з) $y = \ln \cos ax$ Отв: $y' = -a \operatorname{tg} ax$.

и) $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right)$ Отв: $y' = \frac{1}{\sin x + \cos x}$

к) $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{1 + \sqrt{\cos 2x}}$ Отв: $y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x \sqrt{\cos 2x}}$

л) $y = \frac{1}{8} e^{2x}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3)$ Отв: $y' = x^3 e^{2x}$.

м) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ Отв: $y' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

н) $y = x^4 e^{4x}$ Отв: $y' = 4x^3 e^{4x}(x+1)$

о) $y = x^3 2^{3x}$ Отв: $y' = 3x^2 2^{3x}(x \ln 2 + 1)$

п) $y = \frac{1}{10} e^x (\sin 3x - 3\cos 3x)$. Отв: $y' = e^x \sin 3x$.

р) $y = e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ Отв: $y' = e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$.

с) $f(x) = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{3}$; найти $f'(0)$. Отв: 2.

т) $f(x) = e^{-x^3}(3x + 2)$; найти $f'(1)$ Отв: $-\frac{12}{e}$.

2. Тело, имеющее температуру T_0, погружено в среду, имеющую температуру 0. Согласно Ньютонову закону охлаждения, пригодному для небольших промежутков времени, через t секунд после погружения тело примет температуру

$$T = T_0 e^{-kt},$$

где k - постоянное число, зависящее от свойств среды и материала тела. а) Определить скорость охлаждения, б) Зная, что тело, имевшее температуру 15,5, охладилось до 15^0 в тот момент, когда скорость охлаждения была равна 0,0164 град|сек, определить, когда это произошло.

Отв.: а) $v=-kT$

б) через 30 сек. после погружения.

3) Имеется I грамм радиоактивного вещества; зная, что явление распада радия подчиняется закону, выражаемому уравнением

$$y=ae^{-kt},$$

где a - первоначальное количество вещества, t - время, прошедшее от начала процесса, k - постоянный коэффициент, y - количество вещества, не подвергшегося распаду к рассматриваемому моменту, определить: а) так называемый период полураспада, т.е. через сколько времени от начала процесса количество вещества уменьшится вдвое; и б) скорость процесса в момент полураспада; $k = 0{,}026$.

Отв.: а) 26,7 мин.

б) - 0,013 град|мин.

4) Исследовать ход изменения функции

$$y=x^2e^{-x^2}$$

для значений

$$-2\leqslant x\leqslant +2$$

Отв.: при $x=-1$ $maximum=\frac{1}{e}$

при $x=0$ $minimum=0$.

при $x=+1$ $maximum=\frac{1}{e}$

§ 15. ФУНКЦИИ ВЗАИМНО-ОБРАТНЫЕ; КРУГОВЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.

1. Займемся теперь так называемыми круговыми функциями, которые являются обратными по отношению к функциям тригонометрическим.

Но прежде всего поясним, что вообще понимается под названием обратных функций.

Рассматривая какую-либо функциональную зависимость между двумя переменными, мы можем одну из них считать переменной независимой, и тогда другая будет ее функцией. Например, на основании закона Бойля-Мариотта, при одной и той же температуре зависимость между упругостью p и об'емом v данной массы газа выражается соотношением

$$pv=c,$$

где c - постоянное число. Ясно, что, наблюдая это явление, можно следить за изменением об'ема газа при изменении его упругости и можно следить за изменением упругости при изменении об'ема; в первом случае мы выбираем p за независимую переменную, а v рассматриваем как функцию от p:

$$v=\frac{c}{p};$$

во втором-независимою переменною мы считаем v, и тогда p будет функцией от v:

$$p=\frac{c}{v}$$

Вообще, пусть некоторая функциональная зависимость между переменными x и y задана уравнением, решенным относительно y:

$$y=f(x); \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

в таком случае x считаем независимою переменною, а y - функцией от x. Если бы для той же функциональной зависимости мы стали считать переменную y независимой, то x сделалось бы функцией от y, выражение которой через y мы нашли бы, решив уравнение (I) относительно x; пусть

$$x=\varphi(y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Функции, обозначенные характеристиками f и φ, и называются <u>взаимно-обратными</u>; если, согласно обычному значению, и во второй функции переменную независимую назвать буквою x, то взаимно-обратными функциями будут

$$f(x) \text{ и } \varphi(x).$$

Например, I) пусть

$$y=4x+5;$$

решаем это уравнение относительно x:

$$x=\frac{y-5}{4};$$

тогда функции

$$4x+5 \text{ и } \frac{x-5}{4}$$

суть функции взаимно-обратные;

2) пусть

$y=x^m$ (m -целое и положительное число);

решаем это уравнение относительно x:

$$x=\sqrt[m]{y};$$

следовательно, функции

$$x^m \text{ и } \sqrt[m]{x}$$

суть функции взаимно-обратные; при $m=2$ взаимно-обратными функциями будут x^2 и $\sqrt{x}$;

заметим, что из этих двух функций первая, т.е. x^2, есть функция <u>однозначная</u>, так как каждому значению x соответствует только одно значение функции, а вторая, т.е. $\sqrt{x}$, при $x>0$ есть функция <u>многозначная</u>, так как каждому значению x соответствует два значения функции; на этом примере мы видим, что из двух взаимно-обратных функций одна может быть однозначной, а другая - многозначной (в первом примере обе функции были однозначны);

3) пусть
$$y=a^x;$$

решаем это уравнение относительно x:

$$x=\log_a y;$$

следовательно, функции

$$a^x \text{ и } \log_a x$$

суть функции взаимно-обратные.

Посмотрим теперь, как, имея график какой-нибудь функции, получить график функции ей обратной.

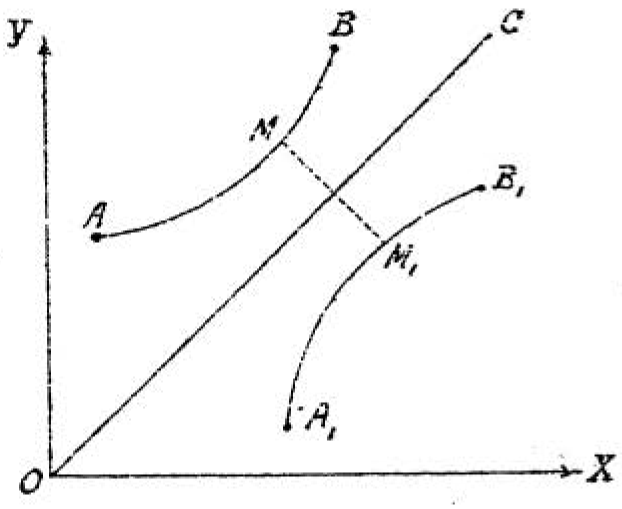
Пусть графиком функции

$$y=f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

будет линия AB (черт. 35); тогда, конечно, графиком функции

$$x=\varphi(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

будет та же самая линия AB, так как уравнение (2) есть то же самое уравнение (1), только переписанное в другом виде; но нам интересно знать не график функции $x=\varphi(y)$, а функции (3) $y=\varphi(x)$.



Черт. 35.

Совершенно ясно, что мы его получим, если переменим названия осей координат, приняв ось OY за ось абсцисс, а ось OX – за ось ординат. Но и это нас еще не вполне удовлетворяет: желательно получить график функции (3), оставаясь при прежних обозначениях осей координат.

Нетрудно убедиться, что таким графиком будет линия A_1B_1 симметричная линии AB относительно биссектрисы OC координатного угла; действительно, если мысленно выведя линию A_1B_1 из плоскости чертежа, сделать поворот около биссектрисы на 180°, то линия A_1B_1 совпадет с AB, ось абсцисс совпадет с осью OY, а ось ординат – с осью OX.

2. После этих общих соображений относительно взаимно-обратных функций перейдем к рассмотрению функций обратных тригонометрическим, которые называются <u>круговыми</u>.

Функция обратная синусу обозначается

$$y = \operatorname{Arc}\,\operatorname{Sin} x\,;$$

это есть дуга (или угол), синус которой равен x; очевидно, аргумент x может принимать значения в промежутке (- I, +I), т.е.

$$-1 \leq x \leq +1.$$

Прежде всего заметим, что одному и тому же значению x соответствует бесчисленное множество значений y, т.е. функция $\operatorname{Arc}\,\operatorname{Sin} x$ <u>есть функция многозначная</u>, тогда как функция $y = \operatorname{Sin} x$ есть функция <u>однозначная</u>, так как каждому значению x соответствует только одно значение y.

Например,

$$\operatorname{Arc}\,\operatorname{Sin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6},\ \frac{17\pi}{6},\quad и\ т.д.$$

$$= -\frac{11}{6}\pi,\ -\frac{7}{6}\pi,\ -\frac{23}{6}\pi,\ -\frac{19}{6}\pi\quad и\ т.д.$$

Но в анализе стремятся иметь дело с функциями однозначными; для того, чтобы этого достигнуть по отношению к $Arc\, Sin\, x$, вводят дополнительное условие, которое выделяет из бесчисленного множества значений функции одно, которое называется главным и обозначается малою буквою a в слове $arc\, Sin$, т.е.

$$y = arc\, Sin\, x;$$

этим дополнительным условием является следующее: под функцией $arc\, Sin\, x$ разумеют дугу (или угол), синус которой равен x, и которая заключается в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ (т.е. в первой положительной или в первой отрицательной четверти); таким образом,

$$arc\, Sin\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; \qquad arc\, Sin\, 1 = \frac{\pi}{2};$$

$$arc\, Sin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}; \qquad arc\, Sin(-1) = -\frac{\pi}{2};$$

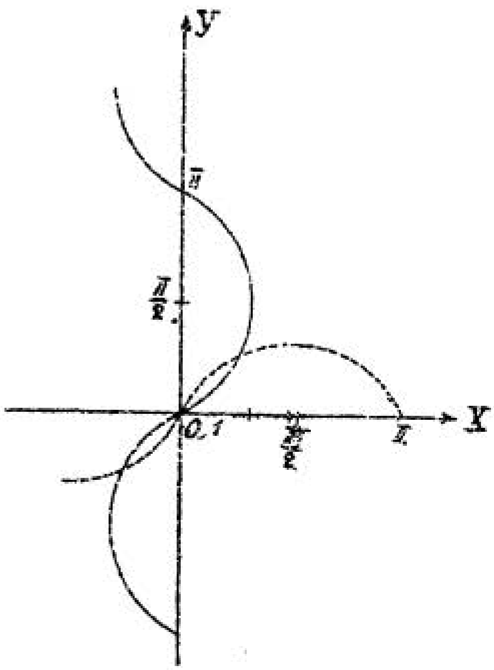
$$arc\, Sin\, 0 = 0.$$

Чтобы построить график функции $Arc\, Sin\, x$, поступаем по общему правилу, начертив (черт. 36) линию, симметричную синусоиде относительно биссектрисы координатного угла; многозначность этой функции подтверждается рассмотрением графика: если взять значение x в промежутке $(-1, +1)$ и провести прямую параллельную оси OY, то эта прямая пересечет график бесчисленное множество раз, т.е. одному и тому же значению x соответствует бесчисленное множество различных значений y.

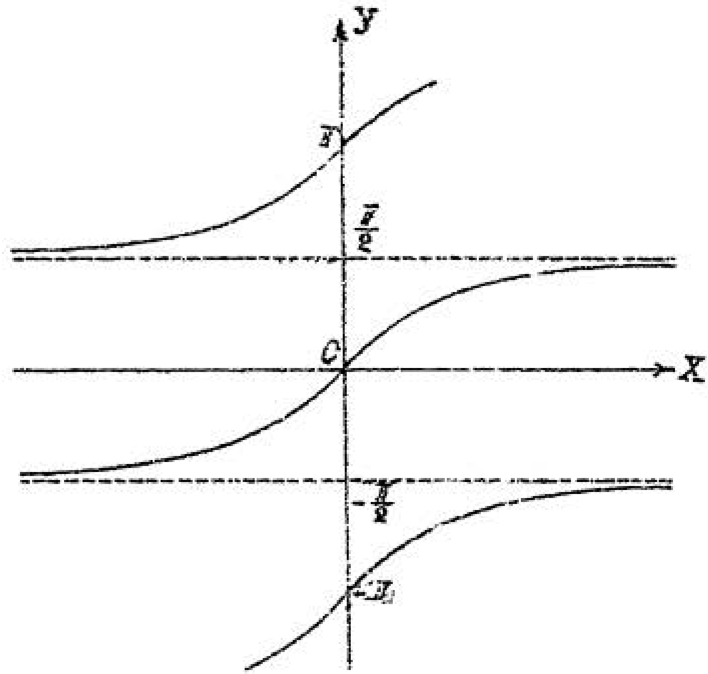
Подобным же образом можно рассмотреть функции

$$Arc\, Cos\, x,\ Arc\, tg\, x,\ Arc\, Cotg\, x;$$

графики их получаются построением линий, симметричных относительно биссектрисы координатного угла графикам соответствующих тригонометрических функций; на черт. 37 изображен график функции $y = Arc\, tg\, x$; он состоит из бесчислен-



Черт. 36



Черт. 37

ного множества одинаковых бесконечних ветвей, асимпто-
тами которых являются прямые

$$y=\frac{\pi}{2},\quad y=\frac{3\pi}{2},\quad y=\frac{5\pi}{2}\quad \text{и т. д.}$$

$$y=-\frac{\pi}{2},\quad y=-\frac{3\pi}{2},\quad y=-\frac{5\pi}{2}\quad \text{и т.д.}$$

Все эти функции, как и $\operatorname{Arc\,Sin} x$, суть функции многозначные; их однозначность достигается введением дополнительных условий:

$$y=\operatorname{arc\,Cos} x,\quad \text{где}\quad 0\leq y\leq \pi$$

$$y=\operatorname{arc\,tg} x,\quad \text{где}\quad -\frac{\pi}{2}\leq y\leq +\frac{\pi}{2}$$

$$y=\operatorname{arc\,Cotg} x,\quad \text{где}\quad 0\leq y\leq \pi;$$

например,

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}, \qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4};$$

$$\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6};$$

$$\operatorname{arcCotg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}, \qquad \operatorname{arcCtg}(-1)=\frac{3\pi}{4}.$$

Заметим, что

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}; \quad . \ . \ . \ . \ . \ (*)$$

действительно, положив

$$\arcsin x=y, \quad \arccos x=z,$$

будем иметь

$$x=\sin y=\cos z;$$

следовательно

$$y=\frac{\pi}{2}-z,$$

или

$$y+z=\frac{\pi}{2}.$$

Точно также

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcCotg}x=\frac{\pi}{2} \quad . \ . \ . \ . \ (**)$$

3. Перейдем теперь к выводу производных круговых функций.

a) Пусть

$$y=\arcsin x, \quad \text{где} \quad -1\leq x\leq+1, \ -\frac{\pi}{2}\leq y\leq+\frac{\pi}{2}; \ (1)$$

перепишем эту зависимость в другом виде:

$$x=\sin y \quad . \ . \ . \ . \ (2)$$

и возьмем от обеих частей равенства (2) производные по x, помня, что y есть функция от x, и следовательно, рассматривая $\sin y$ как функцию от функции:

$$1=\cos y\cdot y'_x;$$

отсюда

$$y'_x=\frac{1}{\cos y};$$

но нам желательно выразить производную в функции аргумента x; поэтому воспользуемся уравнением (2) и выразим $\cos y$ через x:

$$\cos y=+\sqrt{1-\sin^2 y}=+\sqrt{1-x^2};$$

перед корнем сохраняем только знак $+$, так как y заключается в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, а в таком случае $\cos y$ положителен.

Итак,

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & d\arcsin x=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \\ (\arcsin u)'=\dfrac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}; & d\arcsin u=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} \end{array}}$$

б) Пусть

$$y=\arccos x,\ \text{где}\ -1\leqslant x\leqslant +1,\ \pi\geqslant y\geqslant 0.$$

Совершенно также, как и в предыдущем случае, можно вывести и производную $(\arccos x)'$; предоставляем читателю сделать это самостоятельно; мы же воспользуемся для получения производной равенством $(*)$, выведенным в п. 2. На основании этого равенства имеем:

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x,$$

а потому

$$(\arccos x)'=-(\arcsin x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Итак,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}; \quad d\arccos u = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

в) Пусть

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad где \quad -\infty < x < +\infty, \; -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}.$$

Переписываем это равенство в виде

$$x = \operatorname{tg} y$$

и берем производные по x, помня, что y есть функция от x:

$$1 = \frac{y'_x}{\cos^2 y},$$

откуда

$$y'_x = \cos^2 y;$$

но из тригонометрии известно, что

$$1 + \operatorname{tg}^2 y = \sec^2 y = \frac{1}{\cos^2 y},$$

так что

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$

следовательно

$$y'_x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad d\operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'_x}{1+u^2}; \quad d\operatorname{arctg} u = \frac{du}{1+u^2}$$

г) Пусть

$$y = \operatorname{arc\,Cotg} x, \quad \text{где} \quad -\infty < x < +\infty, \ \pi > y > 0.$$

Пользуясь равенством $(**)$ п.2, имеем

$$\operatorname{arc\,Cotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x,$$

откуда

$$(\operatorname{arc\,Cotg} x)' = -(\operatorname{arc\,tg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Итак,

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\operatorname{arc\,Cotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}; & d\operatorname{arc\,Cotg} x = -\dfrac{dx}{1+x^2} \\ (\operatorname{arc\,Cotg} u)' = -\dfrac{u'_x}{1+u^2}; & d\operatorname{arc\,Cotg} u = -\dfrac{du}{1+u^2} \end{array}}$$

Примеры.

1. $y = \arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; найти y'.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(1+x^2) - 2x - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{2x} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2}{1+x^2}.$$

2. $y = \dfrac{1}{3} \ln \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$; найти y'.

Переписываем функцию y, произведя логарифмирование:

$$y = \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}};$$

тогда будем иметь:

$$y'=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2x-1}{6(x^2-x+1)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{(2x-1)^2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2x-1}{6(x^2-x+1)}+\frac{2}{3+4x^2-4x+1}=$$

$$=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2x-1}{6(x^2-x+1)}+\frac{1}{2(x^2-x+1)}=$$

$$=\frac{2(x^2-x+1)-(2x-1)(x+1)+3(x+1)}{6(x+1)(x^2-x+1)}=$$

$$=\frac{2x^2-2x+2-2x^2+x-2x+1+3x+3}{6(x^3+1)}=\frac{1}{x^3+1}.$$

Теперь мы разобрали все основные функции и нашли выражения для их производных. Заметим, что если функция имеет для некоторого значения аргумента определенную производную, то она для этого значения непрерывна. Действительно, пусть

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]$$

есть некоторое определенное число; из теории пределов мы знаем, что переменная величина, имеющая предел, равна своему пределу + бесконечно-малая величина; следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha,\quad \text{где } \alpha - \text{ б.-мал.},$$

отсюда

$$\Delta y=y'\Delta x+\alpha\,\Delta x;$$

но при бесконечно-малом Δx в правой части этого равенства обе слагаемые бесконечно-малы, а потому и их сумма Δy есть величина бесконечно-малая; значит, бесконечно-малому приращению аргумента x соответствует и бесконечно-малое приращение функции y, т.е. функция y для данного значения аргумента есть функция непрерывная.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полезно заметить, что обратного заключения сделать нельзя: функция может быть непрерывной для некоторого значения аргумента, но не иметь для этого значения производной; но останавливаться на этом вопросе мы не будем.

Таблица основных формул дифференциального исчисления.

Соберем теперь выведенные формулы в одну таблицу:

$$x'=1\quad;\qquad dx=\Delta x$$

$$c'=0\quad;\qquad dC=0.$$

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'\;;\qquad d(u+v-w)=du+dv-dw$$

$$(uv)'=uv'+vu'\;;\qquad d(uv)=udv+vdu$$

$$(cu)'=Cu'\;;\qquad d(Cu)=Cdu$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2};\qquad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

$$(u^m)'=mu^{m-1}u'\;;\qquad d(u^m)=mu^{m-1}du$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}\ ; \qquad d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}\ ; \qquad d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{du}{u^2}$$

$$(\sin u)' = \cos u \,.\, u'; \qquad d \sin u = \cos u \, du$$

$$(\cos u)' = -\sin u \,.\, u'; \qquad d \cos u = -\sin u \, du$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}\ ; \qquad d \operatorname{tg} u = \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$(\operatorname{cotg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}\ ; \qquad d \operatorname{cotg} u = -\frac{du}{\sin^2 u}$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \,.\, u'; \qquad d(a^u) = a^u \ln a \, du$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'\ ; \qquad d(e^u) = e^u du$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}\ ; \qquad d \ln u = \frac{du}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{\log_a e}{u}\, u'; \qquad d \log_a u = \frac{\log_a e}{u}\, du$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \qquad d \arcsin u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \qquad d \arccos u = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}; \qquad d \operatorname{arc\,tg} u = \frac{du}{1+u^2}$$

$$(\operatorname{arc\,cotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}; \qquad d \operatorname{arc\,cotg} u = -\frac{du}{1+u^2}.$$

Примеры для упражнений:

1) $y=\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^3$; найти y'. Отв: $\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2$.

2) $y=\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{2\sqrt{3x-x^2}}$; найти y'. Отв: $\frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}$.

3) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; найти y'. Отв: $\arcsin x$

4) $y=\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$; найти y'.
Отв: $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

5) $y=\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+1}{\sqrt{x^4-x^2+1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$; найти y'. Отв: $\frac{x}{x^6+1}$

6) $y=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$; найти y'.
Отв: $\frac{x^2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}$

7) $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$; найти y'.
Отв: $(\arcsin x)^2$.

8) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$; найти y'. Отв: $\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}$

9) $y=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$; найти y'. Отв: $\frac{x^4+1}{x^6+1}$.

10) $y=\arccos\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; найти y'. Отв: $-\frac{2}{e^x+e^{-x}}$

11) $\begin{cases} x=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) \\ y=a\sin t \end{cases}$; найти $\frac{dy}{dx}$. Отв: $\operatorname{tg}t$.

12. $\begin{cases} x = a + b\left[\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right) - \ln tg\, t\right] \\ y = b\, Cotg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right) \end{cases}$; найти $\frac{dy}{dx}$.

Отв: $tg\, t$.

13) $y = u^v$, где u и v – функции от x; найти y'_x.

УКАЗАНИЕ. Сначала следует прологарифмировать данное равенство, а затем взять производные от обеих частей.

Отв.: $y'_x = vu^{v-1}u'_x + u^v \ln u \cdot v'_x$.

14) $y = x^{Sin\, x}$; найти y' (см.прим.13).

Отв.: $y' = x^{Sin\, x}\left(Cos\, x \ln x + \frac{Sin\, x}{x}\right)$

15) $y = \sqrt[x]{x}$; найти y' (см.прим.13)

Отв.: $y' = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - \ln x)$

§ 16. ТАБЛИЧНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.

Мы рассматривали до сих пор дифференцирование функций, заданных аналитически, и в таком случае получали вполне точные выражения для их производных. Но в технике часто приходится пользоваться функциями, заданными таблицами их значений, причем не устанавливается общей аналитической зависимости функции от аргумента. В таком случае для нахождения значений производных уже нельзя, конечно, пользоваться рассмотренными выше приемами, а приходится довольствоваться нахождением по табличным данным приближенных значений производных, достаточных для практических целей. Впрочем, такими приближенным вычислением значений производных полезно иногда пользоваться и не только в том случае, когда аналитическая зависимость неизвестна, но и в тех случаях, когда эта зависимость выражается довольно сложно и требует продолжительных выкладок для вычисления.

К разбору такого табличного дифференцирования мы теперь и перейдем.

Допустим, что имеется таблица значений функции

$$y=f(x);$$

возьмем три смежных значения: $f(x_1)$, $f(x_2)$ и $f(x_3)$, причем

$$x_2-x_1=x_3-x_2=\Delta x;$$

тогда, если Δx достаточно мало, принимают приближенно:

$$y'\approx\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т.е. или

$$f'(x_2)\approx\frac{f(x_3)-f(x_2)}{\Delta x}, \qquad (*)$$

или

$$f'(x_2)\approx\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\Delta x}; \qquad (**)$$

результат получится еще точнее, если принять за приближенное значение $f'(x_2)$ полусумму значений $(*)$ и $(**)$:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{f(x_3)-f(x_2)}{\Delta x}+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\Delta x}\right]=\frac{f(x_3)-f(x_1)}{2\Delta x};$$

таким образом будем иметь:

$$(\alpha)\quad f'(x_2)\approx\frac{f(x_3)-f(x_1)}{2\Delta x}.$$

Для примера возьмем сначала функцию, производную которой легко вычислить точно, и сравним полученные результаты.

Пусть
$$y=x^3;$$
берем таблицу кубов:

x	$y=x^3$
2	8
2,01	8,120601
2,02	8,242408
2,03	8,365427

Применим формулу (α) для вычисления $f'(2,02)$; имеем:

$$x_1=2,01; \quad x_2=2,02; \quad x_3=2,03$$

$$\Delta x=0,01;$$

$$f(x_1)=8,120601; \quad f(x_3)=8,365427$$

и
$$f'(2,02)\approx\frac{8,365427-8,120601}{2\cdot 0,01}$$

или
$$f'(2,02)\approx 12,2413.$$

Полученное приближенное значение сравниваем с точным; так как
$$f'(x)=3x^2,$$
то
$$f'(2,02)=12,2412;$$

Таким образом в приближенном значении три первых знака, после запятой вполне точны.

Для второго примера возьмем таблицу значений функции

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},$$

приведенную в курсе "Стрельбы" П.А. Гельвиха и имеющую значение в вопросе о вероятности попадания при стрельбе.

Выпишем часть этой таблицы:

x	$\Phi(x)$
1,55	0,102
1,60	0,087
1,65	0,074
1,70	0,063

Найдем $\Phi'(1,65)$.

Применяя формулу (α), имеем:

$$x_1 = 1,60; \quad x_2 = 1,65; \quad x_3 = 1,70$$

$$\Delta x = 0,05.$$

$$\Phi(x_1) = 0,087; \qquad \Phi(x_3) = 0,063$$

$$\Phi'(1,65) \approx \frac{0,063 - 0,087}{2 \cdot 0,05}$$

или

$$\Phi'(1,65) \approx -0,24.$$

Примеры для упражнений.

1. Имея таблицу значений натуральных тригонометрических величины

	$\sin$	tg	$cotg$	$\cos$
20^0	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397
21^0	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336
22^0	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272
23^0	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205
24^0	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135

вычислить приближенные значения $(\sin x)'$; $(\cos x)'$; $(tg\, x)'$ и $(cotg\, x)'$ при $x = 22^\circ$.

УКАЗАНИЕ. Надо помнить, что Δx должно быть выражено в радиальной мере.

Отв.: 0,926; - 0,375; 1,163; - 7,140.

2) Вероятность недолета или перелета при стрельбе выражается довольно сложной функцией $F(t)$, которую мы приводить не будем, от аргумента t, представляющего собою величину интервала между целью и средней точкой группирования, выраженную в определенных единицах. В курсе "Стрельбы" П.А. Гельвиха помещена таблица, дающая значения этой функции для различных значений t от -5 до 5; взяв часть этой таблицы

t	$F(t)$
3	0,97849
3,1	0,98173
3,2	0,98455
3,3	0,98698
3,4	0,98908,

найти приближенное значение $F'(3,3)$.

Отв.: 0,0226.

§ 17. *Maxima* и *minima* функций от одной переменной

Мы уже решили ряд задач на определение *maximum'a* и *minimum'a* функций и на нахождение наибольших и наименьших значений. Приведем теперь в систему приобретенные нами сведения и укажем вместе с тем еще один способ распознавания характера *extrema*, который в некоторых случаях скорее приводит к цели.

Мы знаем, что если функция

$$y=f(x)$$

при $x=x_0$ получает значение $f(x_0)$, которое больше всех достаточно близких значений функции, т.е. если

$$(\alpha)\ f(x_0) > f(x_0+h)$$

для всех достаточно малых значения h, как положительных, так и отрицательных, то говорят, что при $x=x_0$ функция достигает своего *maximum'a*; если же при $x=x_0$

$$(\beta)\ f(x_0) < f(x_0+h),$$

то говорят, что при $x=x_0$ функция достигает своего *minimum'a*.

Неравенства (α) и (β) могут быть переписаны так:

$$(\alpha')\quad f(x_0+h) - f(x_0) < 0$$

$$(\beta')\quad f(x_0+h) - f(x_0) > 0;$$

в левых частях этих неравенств стоит приращение функции $f(x)$ при $x=x_0$; а потому, об'единяя их, можно сказать, что функция $f(x)$ при $x=x_0$ имеет *extremum*, если для данного значения аргумента приращение функции сохраняет один и тот же знак при всех достаточно-малых приращениях аргумента, как положительных, так и отрицательных (- для *maximum'a* и + для *minimum'a*.

Мы видели (черт. 14), как графически поясняется понятие о *maximum'e* и *minimum'e*. Далее мы знаем, что, если функция при $x=x_0$ достигает своего *maximum'a*, то она из возрастающей делается убывающей, а это характеризуется знаком производной: при возрастании производная положительна, а при убывании - отрицательна; если же при $x=x_0$ функция достигает своего *minimum'a*, то она из убывающей делается возрастающей, и знак ее производной меняется от - на +. Чтобы найти эти критические значения, при которых производная может изменять знак, и следовательно, функция может иметь *maximum* или *minimum*, надо, как мы видели, приравнять производную нулю и найти корни полученного уравнения; кроме того производная может переменить знак и при тех значениях аргумента, при которых она терпит разрыв непрерывности.

На этих соображениях и основан способ нахождения *maximum'a* и *minimum'a*, которым мы и пользовались при решении ряда задач. Он состоит в следующем:

1) составляем производную данной функции;

2) приравниваем ее нулю и решаем полученное уравнение; кроме того определяем те значения аргумента, при которых производная терпит разрыв;

3) делим всю область изменений аргумента x найденными в п. 2 числами на ряд промежутков и для каждого промежутка определяем знак производной; каждое из чисел испытываем отдельно: если знак производной меняется от + к −, то данное значение x дает *maximum*; если знак меняется от − к +, то *minimum*; если же знак не меняется, то при этом значении функция не имеет ни *maximum'a*, ни *minimum'a*.

Укажем теперь другой способ, который дает возможность произвести испытание критических значений; п.п. 1 и 2 решения вопроса остаются без изменения.

Познакомимся для этого с понятием о производных высших порядков.

Пусть нам дана функция

$$y=f(x);$$

ее производная

$$y'=f'(x)$$

представляет собою новую функцию от x, которая в свою очередь имеет свою производную; станем теперь называть производную от данной функции производною 1-го порядка или первою производною; тогда производная от первой производной называется производною 2-го порядка или второю производною от данной функции $f(x)$ и обозначается

$$y''=f''(x);$$

далее, производная от второй производной называется производною 3-го порядка или третьей производной, что обозначается

$$y'''=f'''(x) \quad \text{и т.д.}$$

Например,

1) пусть $\quad y=5x^4-3x^3+4x-6;$

тогда $\quad y'=20x^3-9x^2+4,$

$$y''=60x^2-18x,$$

$$y'''=120x-18,$$

$$y^{(IV)}=120,$$

$$y^{(V)}=0.$$

2) Пусть $\quad y=\ln(1+x);$

тогда $\quad y'=\frac{1}{1+x},$

$$y''=-\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$y'''=\frac{1.2}{(1+x)^3},$$

$$y^{(IV)}=-\frac{1.2.3}{(1+x)^4}, \quad и\ т.д.$$

3) Требуется найти $f''(1)$, если

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1};$$

составляем сначала

$$f'(x)=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}=2(x+1)^{-2};$$

затем находим

$$f''(x)=-4(x+1)^{-3}=-\frac{4}{(x+1)^3},$$

и, наконец, вычисляем

$$f''(1)=-\frac{4}{(1+1)^3}=-\frac{1}{2}.$$

Вернемся теперь к вопросу о распознавании *maximum'a* и *minimum'a*.

Пусть, составив уравнение

$$f'(x)=0$$

и решив его, мы нашли корни x_1 и x_2. Если при $x=x_1$ функция имеет *maximum*, то производная $f'(x)$, непрерывно изменяясь, проходит через 0, идя от положительных значений к отрицательным, т.е. убывая; а это, как известно, характеризуется тем, что ее производная, т.е. вторая производная функции $f(x)$, для $x=x_1$ отрицательна. Если же при $x=x_2$ функция имеет *minimum*, то $f'(x)$, изменяясь непрерывно, проходит через 0, идя от отрицательных значений к положительным, т.е. возрастая; а это характеризуется тем, что ее производная, т.е. вторая производная функции $f(x)$, для $x=x_2$ положительна.

Итак, <u>второй способ</u> распознавания *maximum'a* и *minimum'a* состоит в следующем.

Решив уравнение

$$f'(x)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

надо составить вторую производную $f''(x)$ и вычитать ее значение для каждого из корней уравнения (*); если значение $f''(x)$ получится отрицательное, то испытуемый корень дает *maximum*, если же - положительное, то — *minimum*.

Примеры.

I) Найти *maximum* и *minimum* функции

$$y=x^3-9x^2+15x-3.$$

Составляем первую производную:

$$y'=3x^2-18x+15;$$

приравниваем ее нулю и решаем полученное уравнение, разделив его предварительно на 3:

$$x^2-6x+5=0; \quad x_1=1, \quad x_2=5.$$

Составляем 2-ю производную:

$$y''=6x-18;$$

определяем ее знак для значений x равных I и 5:

$$f''(1)<0 \quad ; \quad f''(5)>0 \, ;$$

следовательно, при $x=\mathrm{I}$ функция имеет *maximum*,
при $x=5$ " " *minimum*;

чтобы найти *maximum* подставляем в данную функцию вместо x значение I:

maximum = I - 9 + I5 - 3 = 4;

так же находим

minimum = I25 - 225 + 75 - 3 = - 28.

2. При изучении вопроса о рассеивании при стрельбе в связи с ошибкой в угле бросания φ приходится изучать изменение функции

$$B_\varphi = \cos 2\varphi \sin \varphi,$$

где φ может принимать значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Найдем *maximum* и *minimum* этой функции (курс "Стрельбы" П.А. Гельвиха, ч.I, стр.32).

Составляем производную:

$$B'_\varphi = \cos\varphi \cos 2\varphi - 2\sin\varphi \sin 2\varphi = \cos^3\varphi - \cos\varphi \sin^2\varphi -$$

$$-4\sin^2\varphi \cos\varphi = \cos^3\varphi - 5\cos\varphi(1-\cos^2\varphi) =$$

$$= 6\cos^3\varphi - 5\cos\varphi = \cos\varphi(6\cos^2\varphi - 5).$$

Приравниваем производную нулю и решаем полученное уравнение:

$$\cos\varphi(6\cos^2\varphi - 5) = 0;$$

находим критические значения:

$$\cos\varphi = 0; \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2};$$

$$6\cos^2\varphi - 5 = 0; \ \cos\varphi = +\sqrt{\frac{5}{6}}; \quad \varphi_2 = \arccos\sqrt{\frac{5}{6}} = 19°28';$$

чтобы решить вопрос о *maximum'е* и *minimum'е*, составляем вторую производную:

$$B''_\varphi = \cos\varphi - 12\cos\varphi \sin\varphi - (6\cos^2\varphi - 5)\sin\varphi =$$

$$= -\sin\varphi(18\cos^2\varphi - 5);$$

при $\varphi = \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ имеем

$$B''_\varphi = 5 > 0, \text{ т.е. } minimum,$$

который равен -1;

при $\varphi=\varphi_2=\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$ имеем

$$B''_{\varphi}<0,$$

так как $\sin\varphi_2>0$, $18\cos^2\varphi-5=15-5>0$; следов., $\varphi=\varphi_2$ дает *maximum*, который равен 0,273.

§ 18. МЕХАНИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ.

Обратим внимание на механическое значение второй производной.

Станем рассматривать случай прямолинейного неравномерного движения точки, закон которого выражается зависимостью пройденного пути S от времени t:

$$S=f(t);$$

тогда, как известно, скорость v движения точки выражается первою производной $f'(t)$,

т.е.

$$v=\frac{ds}{dt}=f'(t).$$

Эта скорость, вообще говоря, также изменяется с течением времени; поэтому можно рассматривать изменение самой скорости: если за некоторый промежуток времени Δt скорость получает приращение Δv, то отношение

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

называется средним ускорением движения точки за промежуток времени Δt, а

$$w=\lim\left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right]_{\Delta t\to 0}$$

называется ускорением движения в данный момент; но

$$\lim \left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right]_{\Delta t \to 0}$$

есть производная $\frac{dv}{dt}$ или $\frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right)$ (это обозначение выражает, что берется производная по t от $\frac{dS}{dt}$); а мы знаем, что производная от первой производной есть вторая производная от S взятая по t два раза; значит, ускорение в данный момент

$$w = f''(t);$$

заметим еще другое обозначение второй производной, которое будет об'яснено впоследствии:

$$f''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2};$$

так что можно записать и так:

$$w = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

По основному закону движения Ньютона произведение массы m материальной точки на ускорение w равно силе F, действующей на точку в данный момент; таким образом

$$F = mw = m\frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Рассмотрим, например, случай свободного падения тела в пустоте, выражаемого законом

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

где s_0 есть значение s при $t=0$ т.е. дает положение исходного места падения, v_0 - скорость движения в начальный момент, g - постоянное число, называемое ускорением силы тяжести и равное 981 см|сек^2.

Для этого движения скорость

$$v=\frac{ds}{dt}=v_0+gt,$$

а ускорение

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=g,$$

т.е. есть постоянное число. В этом случае сила F, действующая на тело, равна mg, и есть постоянная величина, называемая весом тела.

Пример:

Найти силу, действующую на материальную точку массы m, совершающую гармоническое колебательное движение по закону

$$s=A\sin(\omega t+\alpha),$$

где ω, α и A суть постоянные числа (частота, начальная фаза и амплитуда) (см. § II,п.2)

Имеем

$$v=\frac{ds}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\alpha)$$

$$w=\frac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin(\omega t+\alpha);$$

следовательно:

сила $F=mw=-Am\omega^2\sin(\omega t+\alpha)$

или $$F=-m\omega^2 s$$

Таким образом мы видим, что гармоническое колебательное движение происходит под действием силы пропорциональной перемещению движущейся точки и направленой обратно этому перемещению.

Примеры и задачи для упражнения (к §§ 17 и 18)

1) Найти maxima и minima ф-ии

$$y=3x^4-4x^3-12x^2+20$$

и построить ее график.

Ответ: *minima* равны 15 и -12,

maximum $=20$.

2) Найти *maximum* и *minimum* ф-ии

$$y=\sin 2x-x$$

для промежутка $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Ответ: *maximum* $=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$,

minimum $=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$

3) Доказать, что ускорение точки, движущейся по закону

$$s=\frac{a}{2}(e^{kt}+e^{-kt}),$$

в момент t равно k^2s.

4) Материальная точка массы m движется по оси $\overline{OX}$ по закону

$$x=\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{kv_0}{m}t\right);$$

Показать, что действующая сила, пропорциональна квадрату скорости.

5) Задачи №№ 67,68,73,88 и 89 из Сборника кафедры.

§ 19. ВОГНУТОСТЬ и ВЫПУКЛОСТЬ ПЛОСКИХ КРИВЫХ; ТОЧКИ ПЕРЕГИБА.

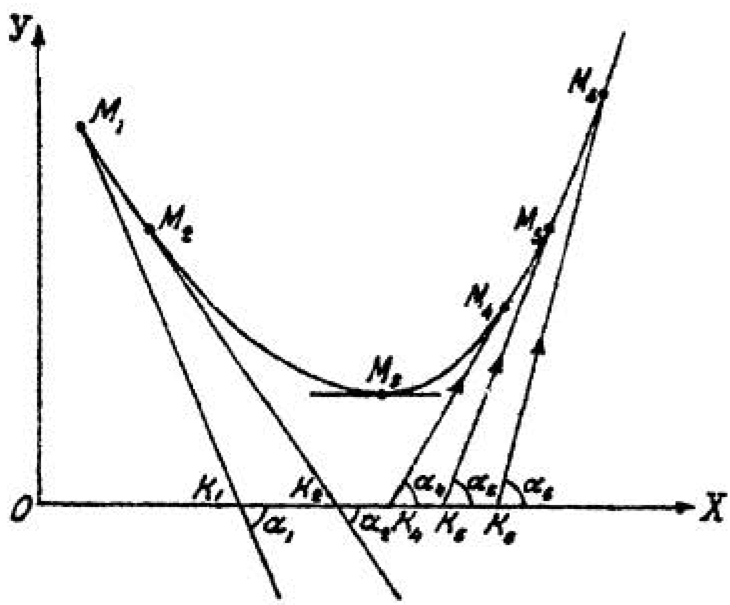
I. Рассматривая задачу о параболической траектории (§2,п.2), мы видим, что для правильности построения графика необходимо уметь решать не только вопросы о возрастании и убывании, о симметричности, о точках *extrema*, но еще и о направлении вогнутости.

Теперь мы можем заняться решением и этого вопроса.

Положим (черт.38),что кривая, выражающая функцию

$$y=f(x),$$

направлена вогнутостью кверху, или, как говорят, в сторону положительных ординат.



Черт. 38.

Рассмотрим на кривой ряд точек $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$; в каждой из этих точек проведем касательные к кривой и проследим изменение tg угла α, образуемого касательной с осью OX; все касательные направим в одном и том же смысле, указанном стрелками (напр., в сторону возрастания дуг), и в части кривой, расположенной левее низшей точки M_3, будем считать углы отрицательными; обозначим эти углы соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$.

Так как $\angle M_1K_1X < \angle M_2K_2X$, то по абсолютной величине

$$|\alpha_1| > |\alpha_2|;$$

но эти углы отрицательные, следовательно,

$$\alpha_1 < \alpha_2;$$

$\alpha_3 = 0$; углы же $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ — положительные и идут в возрастающем порядке, так что вообще имеем:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 < \alpha_6.$$

Таким образом угол α все время возрастает, и потому возрастает и $tg\alpha$; но

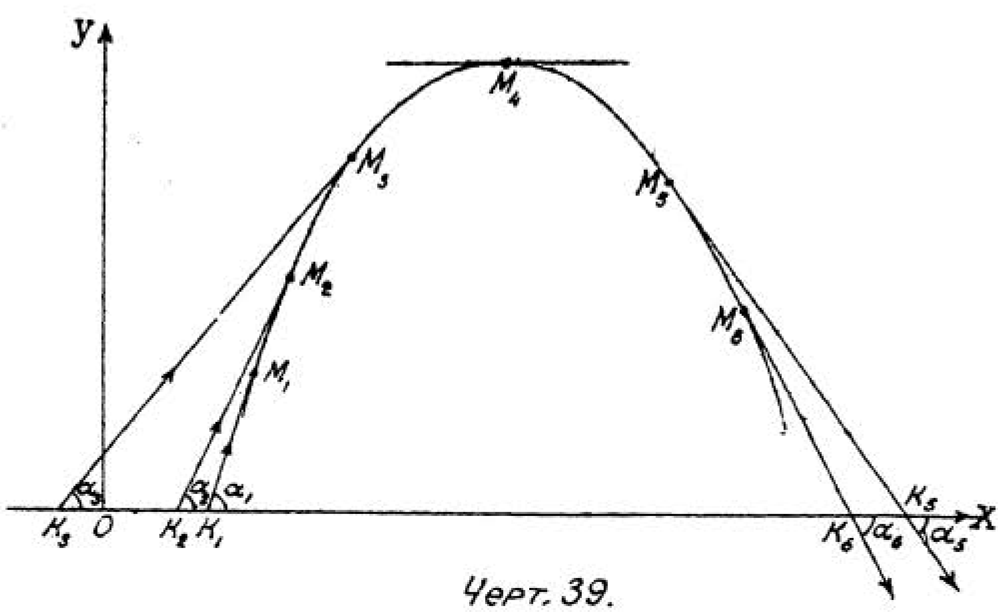
$$tg\,\alpha = f'(x);$$

значит функция $f'(x)$ есть функция <u>возрастающая</u> на участке кривой, обращенном вогнутостью вверх.

Но если функция возрастает, то, как известно, ее производная положительна ; следовательно в рассматриваемом случае положительною будет производная от $f'(x)$, т.е. $f''(x)$.

Рассматривая подобным же образом случай, когда кривая вогнутостью обращена вниз, т.е. в сторону отрицательных ординат, (черт. 39), мы заметим явление обратное. Слева от наивысшей точки M_4 при передвижении точки слева направо получаются углы положительные и уменьшающиеся :

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 ;$$



Черт. 39.

далее $\alpha_4 = 0$; в правой же части кривой мы снова рассматриваем отрицательные углы, причем

$$\angle M_5 K_5 \overline{X} > \angle M_6 K_6 \overline{X},$$

$$|\alpha_5| < |\alpha_6|$$

и $\alpha_5 > \alpha_6$,

так что

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5 > \alpha_6.$$

следовательно угол α все время убывает, и потому убывает и $tg\,\alpha$, т.е. функция $f'(x)$; значит, в рассматриваемом случае ее производная, т.е. $f''(x)$, отрицательна.

Итак, вопрос о направлении вогнутости решается следующим образом:

Составляем вторую производную функции $f(x)$ и исследуем ее знак: для тех значений x, при которых $f''(x)>0$, вогнутость направлена вверх; а для тех значений x, при которых $f''(x)<0$, вогнутость направлена вниз.

П р и м е р ы.

1) Рассмотрим кривую

$$y = ax^2 + bx + c; \qquad (1)$$

из Аналитической геометрии известно, что эта кривая есть парабола.

Прежде всего исследуем ее на вогнутость; имеем

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a;$$

следовательно, если $a>0$, то парабола во всех точках направлена вогнутостью вверх; если же $a<0$, то парабола направлена вогнутостью вниз.

Посмотрим теперь, как она расположена относительно осей координат. Найдем точки, в которых функция (1) имеет *maximum* или *minimum*; для этого приравниваем первую производную нулю и решаем полученное уравнение:

$$2ax + b = 0, \quad x = -\frac{b}{2a};$$

так как $y''=2a$, то при $a>0$ имеем $y''>0$, и следовательно $x=-\frac{b}{2a}$, дает $minimum$ функции, который равен

$$y=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b.\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2-4ac}{4a};$$

при $a<0$ имеем $y''<0$, и следовательно, в этом случае

$x=-\frac{b}{2a}$ дает $maximum$ функции, равный той же самой величине.

Преобразуем теперь уравнение (I) к новой системе координат, начало которой поместим в найденную точку

$$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right),$$

а направления осей оставим прежние. Из аналитической геометрии известно, что формулами перехода в этом случае будут:

$$\begin{cases} x=x_1-\frac{b}{2a} \\ y=y_1-\frac{b^2-4ac}{4a}, \end{cases}$$

и уравнение (I) примет вид:

$$y_1-\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x_1^2-\frac{bx_1}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)+b\left(x_1-\frac{b}{2a}\right)+c$$

или $$y_1-\frac{b^2-4ac}{4a}=ax_1^2-bx_1+\frac{b^2}{4a}+bx_1-\frac{b^2}{2a}+c;$$

или $$y_1-\frac{b^2-4ac}{4a}=ax_1^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

или, наконец,

$$y_1 = ax_1^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

а это уравнение, как известно, есть уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат (новой системы), а осью симметрии которой является ось y-ов (новой системы).

Следовательно, парабола (I) имеет вершину в точке

$$\left(-\frac{b}{2a}, \; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right);$$

ось ее симметрии параллельна оси OY; при $a>0$ вогнутость направлена вверх, при $a<0$ – вниз.

2) Определить направление вогнутости циклоиды, заданной уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t-\sin t) \\ y &= a(1-\cos t) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

По отношению к этой кривой мы уже рассматривали (зад. 3 § II) вопрос о наклоне касательной, причем вывели, что

$$\left.\begin{aligned} dx &= 2a\sin^2\frac{t}{2}\,dt \\ dy &= 2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (*)$$

откуда имели, что

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \operatorname{Cotg}\frac{t}{2}.$$

Для решения вопроса о вогнутости надо составить y''_x, т.е. взять производную по x от первой производной y'_x; но y'_x выражена в функции от t, а t связано с x первым из уравнений (3) циклоиды, т.е.

t есть в свою очередь некоторая функция от x; поэтому применяем правила дифференцирования функции от функции:

$$y''_x = -\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{dt}{dx};$$

чтобы найти $\frac{dt}{dx}$, обращаемся к первому из равенств(*) откуда выводим:

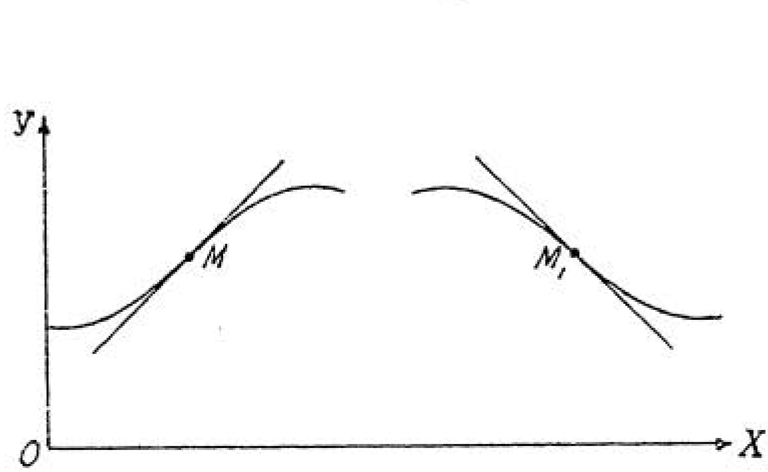
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}};$$

следовательно:

$$y''_x = -\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} \quad \frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$$

Очевидно, полученное выражение при всяком t есть число отрицательное а потому y''_x для всех точек кривой отрицательна; значит, циклоида во всех своих точках направлена вогнутостью вниз.

2. Рассмотрим теперь те точки кривой, в которых вогнутость меняет свое направление; эти случаи представлены на черт. 40; в точках M и M_1 вторая производная меняет знак: в первом случае от $+$ к $-$, а во втором от $-$ к $+$; следовательно, для этих точек вторая производная обращается в 0 или терпит разрыв непрерывности.



Черт. 40.

Такие точки называются точками перегиба.

Итак, чтобы найти точки перегиба кривой

$$y=f(x),$$

надо решить уравнение

$$f''(x)=0,$$

а также определить те значения x, при которых $f''(x)$ терпит разрыв непрерывности; каждое из найденных значений x надо испытать: если при переходе через него вторая производная меняет знак, то это значение x есть абсцисса точки перегиба.

Сопоставляя этот способ определения точек перегиба со способом нахождения maximum'a и minimum'a функции $f'(x)$, т.е. производной от $f(x)$, легко установить, что точки перегиба определяются теми значениями x, которые дают maxima и minima производной.

При построении графиков полезно находить касательные в точках перегиба; заметим, что по отношению к этим касательным кривые расположены по разные стороны.

Теперь при построении графиков мы можем дополнить те исследования, которые мы делали до сих пор, еще и исследованием на вогнутость и выпуклость и точки перегиба, что еще уточнит наши сведения о кривых.

Решим несколько примеров.

1) Исследовать функцию

$$y=f(x)=x^3-6x^2+9x+3$$

и построить ее график.

Решим прежде всего вопрос о направлении кривой; для этого составляем первую производную

$$f'(x)=3x^2-12x+9;$$

приравниваем ее нулю и сокращаем на 3:

$$x^2-4x+3=0,$$

откуда $\qquad x_1=1, \quad x_2=3.$

Составляем таблицу:

x ...	$-\infty$ ...		1 ...		3 ...		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		возр.	max. $=7$	уб.	min. $=3$	возр.	

Итак, график идет вверх, достигает *maximum'а* в точке (I,7), затем идет вниз, достигает *minimum'а* в точке (3,3) и снова идет вверх.

Для определения вогнутости составляем вторую производную

$$f''(x)=6x-12$$

и находим точку перегиба:

$$x-2=0, \quad x=2;$$

исследуем знак второй производной для значений x слева и справа от $x=2$:

$$f''(0)=-12<0, \quad f''(3)=6>0;$$

следовательно, точка (2,5) есть точка перегиба; при этом слева от нее кривая обращена вогнутостью вниз, а справа -вверх. Найдем еще уравнение касательной в точке перегиба; для этого вычисляем

$$f'(2)=-3;$$

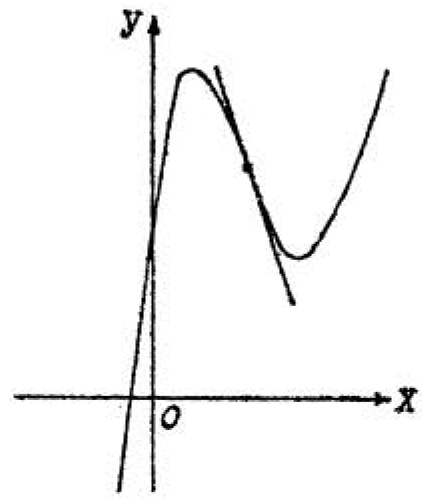
следовательно, уравнение будет

$$y-5=-3(x-2) \quad \text{или} \quad 3x+y-11=0$$

График кривой изображен на черт. 4I.

2) Построить график так называемой "кривой вероятностей", которая имеет большие применения в теории ошибок и в теории стрельбы; ее уравнение

$$y=e^{-x^2}$$



Черт. 41.

Прежде всего заметим, что замена x на $(-x)$ не изменяет уравнения; следовательно, кривая симметрична относительно оси OY.

Далее, если x растет беспредельно по абсолютной величине, то y стремится к 0; значит, по мере возрастания по абсолютной величине абсцисс, кривая неограниченно приближается к оси OX, т.е. ось x-ов есть асимптота кривой.

Составляем первую производную и приравниваем ее нулю:

$$-2xe^{-x^2}=0;$$

отсюда получаем критическое значение для x:

$$x=0;$$

соответственно этому получается таблица:

x	$-\infty$	. . . . .	0	. . . . . .	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	возр.	max. $=1$	убыв.	0

Ищем точки перегиба:

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2-1);$$

так как $e^{-x^2} \neq 0$, то $2x^2-1=0$, откуда

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}};$$

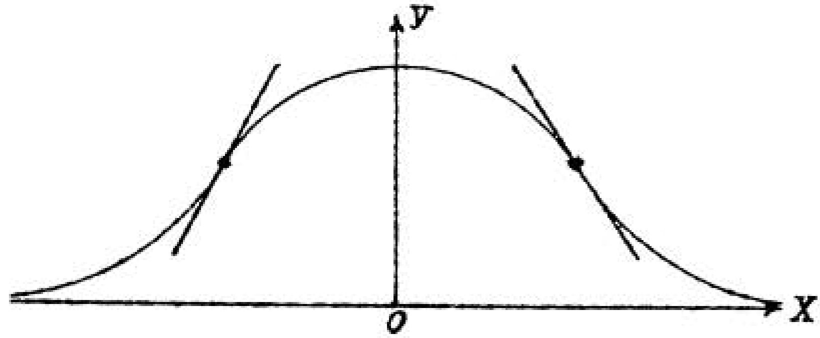
при этом знак второй производной меняется так:

x	$-\infty$	. . . . .	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	. . . .	$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	. . . . .	$+\infty$
y''		$+$		$-$		$+$	
вогнутость		вверх		вниз		вверх	

(определение знака y'' делается очень просто: $2e^{-x^2}>0$ при всяком x; значит, знак y'' совпадает со знаком $(2x^2-1)$; в первом промежутке можно взять для x число - I, во втором $x=0$ в третьем $x=+1$); итак, кривая имеет 2 точки перегиба:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,7;\ \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6\right) \text{ и } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7;\ \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6\right)$$

График кривой вероятностей изображен на черт. 42.



Черт. 42.

3) В теории лафетов (Лендер, ч. I, стр. 151) рассматривается кривая Валье, уравнение которой

$$P = P_m z e^{1-z},$$

где $z = \frac{t}{T}$ (T - пост.), $t \geqslant 0$, P_m - пост. полож. число; принимая t за абсциссу, а P за ординату, построить график кривой.

Прежде всего заметим, что с беспредельным возрастанием t беспредельно возрастает и z, а e^{1-z} стремится к 0; таким образом в произведении ze^{1-z} один множитель растет беспредельно, а другой стремится к 0; какое же значение имеет $\left[ze^{1-z}\right]_{z\to\infty}$? В дальнейшем курсе будет указан способ, при помощи которого весьма легко можно найти это значение; теперь же мы прямо укажем, что оно равно 0, т.е. P стремится к 0, когда $z\to\infty$ (читатель может в этом убедиться непосредственным вычислением P, давая z различные увеличивающиеся значения). Это показывает, что ось абсцисс есть асимптота кривой.

Далее, находим первую производную

$$P'_z = P_m(1-z)e^{1-z};$$

приравнивая ее нулю, определяем критическое значение

$$z=1 \quad \text{или} \quad t=T;$$

составляем таблицу:

z	0	. . . . .	1	. . . . .	$+\infty$
t	0	. . . . .	T	. . . . .	$+\infty$
P'		$+$	0	$-$	
P	0	возр.	$\max = P_m$	убыв.	0

Найдем еще точку перегиба:

$$P''=-P_m e^{1-z}-P_m(1-z)e^{1-z}=-P_m e^{1-z}(2-z),$$

разбираем значение $z=2$ или $t=2T$.

z	0	. . . . . .	2	. . . .	$+\infty$
t	0	. . . .	$2T$	. . . .	$+\infty$
P''		$-$	0	$+$	
вогнутость.		вниз		вверх	;

следовательно, точка с абсциссою $t=2T(z=2)$ есть точка перегиба; ее ордината

$$P=P_m\cdot 2e^{-1}=\frac{2}{e}P_m\approx 0{,}73\,P_m;$$

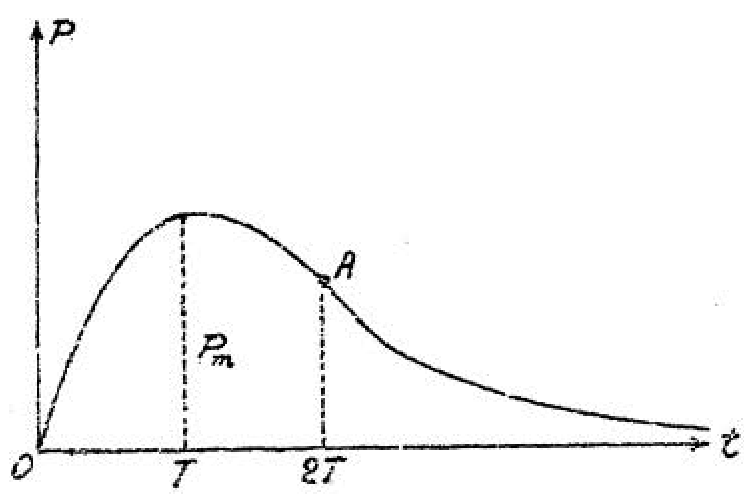
итак, точкою перегиба будет

$$A\left(2T;\ \frac{2}{e}P_m\approx 0{,}73\,P_m\right).$$

Найдем, наконец, tg угла, образованного с осью абсцисс касательною к кривой в начале координат; для этого надо в выражении для P'_z положить $z=0$:

$tg\,\alpha=P_m\cdot e\approx 2{,}72\,P_m.$

На черт. 43 изображен график кривой Валье.



Черт. 43.

Задачи для упражнения

1. Определить направление вогнутости и найти точки перегиба кривых:

а) $6y=x^3-6x^2+12x-2$

Отв.: точка перегиба $(2,1)$

б) цепной линии (см.зад. 2 § 14)

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Отв.: точек перегиба нет; вогнутость везде направлена вверх.

2. Определить направление вогнутости астроиды

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$$

Отв.: $y''=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$; вогнутость направлена вверх для $0<t<\pi$ и вниз для $\pi<t<2\pi$.

3. Построить график функции, рассмотренной выше (см. прим. 2 § 17)

$$B_\varphi=\cos 2\varphi\sin\varphi,$$

где φ может принимать значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$, принимая φ за абсциссу, а B_φ за ординату.

Отв.: (в дополнение к выше полученным результатам)
точке перегиба соответствует

$$\varphi=\arccos\sqrt{\frac{5}{18}}=58^\circ 11'.$$

УКАЗАНИЕ. Достаточно дать приблизительный вид графика, не делая точных вычислений.

4. По закону Ван-дер-Ваальса зависимость между об'емом v, упругостью p и абсолютной температурой T газа выражается уравнением

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT,$$

где R и b - пост. величины для данного газа. При изотермическом состоянии газа, т.е. при $T=$пост., зависимость p от v для значений $v>b$ изображается кривой (v - абсцисса, p - ордината), имеющей точку перегиба. То значение T, при котором под'ем соответствующей кривой в ее точке перегиба равен 0, называется <u>критической температурой данного</u> газа T_k, а значения v_k и p_k в этой точке называются <u>критическим об'емом</u> и <u>критической упругостью</u>. Определить

$$T_k,\ v_k \text{ и } p_k.$$

<u>Отв.</u>: $T_k=\dfrac{8a}{27Rb}$; $v_k=3b$; $p_k=\dfrac{a}{27b^2}$

УКАЗАНИЕ. Сначала надо определить T_k и v_k, решив совместно два уравнения, из которых одно выражает условие существования точки перегиба, а другое, что под'ем кривой в точке перегиба равен 0; а затем уже определить p_k.

5. Исследовать функцию

$$y=x^2e^{-x}$$

и построить ее график; кривая эта принадлежит к числу так называемых"кривых распределения" Пирсона и имеет значение при рассмотрении вопросов стрельбы (см.,например, курс П.А.Гельвиха, ч.I, вып.2, гл.III, § 3).

<u>Отв.</u>: maximum при $x=2$ равный $\frac{4}{e^2}$,
minimum при $x=0$ равный 0;
точки перегиба при $x=2\pm\sqrt{2}$,
ось OX — асимптота.

§ 20. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ЛИНИЙ.

Перейдем теперь к некоторым применениям понятия о производной в геометрических вопросах. Но сначала вспомним отчасти уже известный читателю из курса аналитической геометрии так называемый параметрический способ задания линии.

Вообразим себе на плоскости декартову прямоугольную систему координат и отнесем к этой системе некоторую линию; координаты текущей ее точки обозначим через x и y. Тогда, как известно из аналитической геометрии, данная линия вполне определяется заданием ее уравнения

$$f(x, y)=0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

т.е. уравнения, связывающего координаты любой ее точки.

Но иногда бывает удобнее задавать линию другим способом, а именно: выбрав некоторую вспомогательную переменную величину t, выразить через эту величину координаты x и y текущей точки данной линии; пусть

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(t) \\ y &= \varphi_2(t) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Тогда совокупность этих двух уравнений и определяет вполне данную линию; действительно, когда t принимает какое-нибудь значение, то по формулам (2) находятся соответствующие значения x и y, и таким образом определяется положение точки данной линии.

Такой способ задания линии называется <u>параметрическим</u>; вспомогательная переменная t называется <u>параметром</u>, а уравнения (2) - <u>параметрическими уравнениями</u> линии.

В такой форме весьма часто задаются в механике траектории движущейся точки, положение которой изменяется с изменением времени t. Выразив координаты движущейся точки в функции от времени t уравнениями (2), мы можем определить ее положение в любой момент; вместе с тем задание уравнений (2) вполне определяет траекторию движущейся точки.

Например, уравнениями траектории снаряда, выпущенного под углом θ_0 к горизонту при начальной скорости v_0, будут

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\theta_0 \\ y &= v_0 t \sin\theta_0 - \tfrac{1}{2} g t^2, \end{aligned}\right\}$$

где g - пост. число (ускорение силы тяжести).

Совершенно ясно, что из уравнений (2) можно получить уравнение вида (I), стоит только исключить из уравнений (2) параметр t; но надо заметить, что это исключение иногда сделать трудно, а иногда и невозможно.

Возьмем предыдущий пример и определим t из I-го уравнения:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0};$$

подставив это значение t во 2-е уравнение, получим:

$$y = x \operatorname{tg}\theta_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0};$$

это и будет уравнение той же траектории в виде (I).

Наоборот, если дано уравнение (I), то можно получить параметрические уравнения (2), выбрав произвольно параметр t и найдя выражение x через этот параметр:

$$x = \varphi_1(t);$$

затем надо поста_ить это значение x в уравнение (I)

$$f[\varphi_1(t), y] = 0$$

и из него определить y:

$$y=\varphi_2(t).$$

Ясно, что, так как t можно выбирать совершенно произвольно, то такое преобразование можно сделать самыми разнообразными способами.

Разберем несколько примеров на параметрическое задание линий.

1. Круг. Из аналитической геометрии известно, что при определенном выборе параметра t параметрическими уравнениями круга будут:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\operatorname{Cos} t \\ y &= r\operatorname{Sin} t \end{aligned}\right\}$$

Возвысив обе части каждого уравнения в квадрат и сложив полученные уравнения, получим

$$x^2+y^2=r^2(\operatorname{Cos}^2 t+\operatorname{Sin}^2 t)$$

или

$$x^2+y^2=r^2,$$

а это есть обычное уравнение круга в простейшей форме.

2. Эллипс. Из аналитической геометрии известно, что при определенном выборе параметра t параметрическими уравнениями эллипса будут:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\operatorname{Cos} t \\ y &= b\operatorname{Sin} t. \end{aligned}\right\}$$

Чтобы получить уравнение эллипса в обычной простейшей форме, исключим из этих уравнений параметр t. Для этого перепишем их в виде

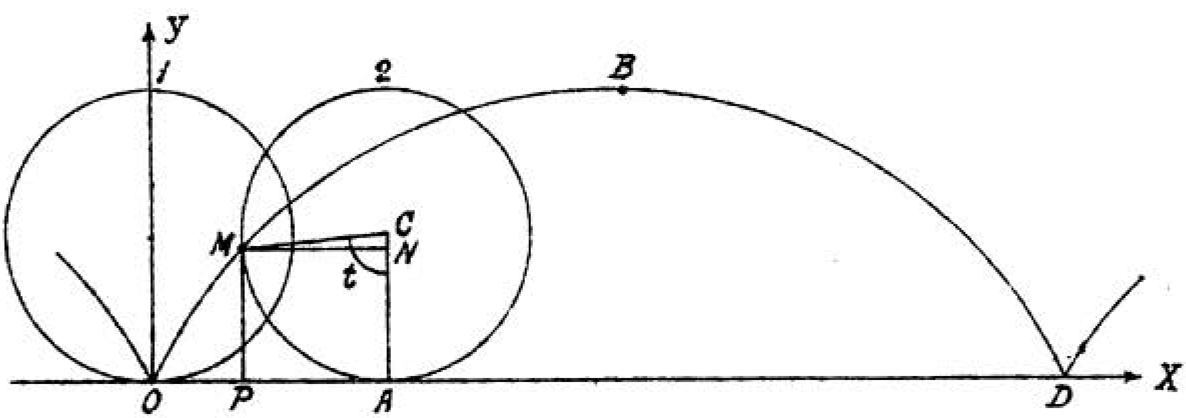
$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos t \\ \frac{y}{b} &= \sin t; \end{aligned}\right\}$$

возвысив обе части каждого уравнения в квадрат и сложив, получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3. Ц и к л о и д а. Циклоидой называется кривая, которую описывает некоторая точка окружности, катящейся без скольжения по неподвижной прямой.

Примем (черт. 44) неподвижную прямую за ось x-ов



Черт. 44.

и рассмотрим некоторое положение I катящейся окружности; точку прикосновения окружности с прямой OX примем за начало координат и станем следить за движением этой точки.

Радиус круга обозначим через a.

Возьмем теперь другое положение 2 катящегося круга, и пусть точка, за движением которой мы наблюдаем, займет положение M; координаты ее пусть будут

$$x = OP, \quad y = PM.$$

Обозначим центр круга во 2 положении буквою C, а точку прикосновения с осью OX буквою A, и примем за параметр t центральный угол, образованный радиусами CA и CM т.е.

$$t = \angle MCA.$$

Через этот параметр t и выразим координаты x и y точки M.

Прежде всего заметим, что то обстоятельство, что круг катится без скольжения по прямой OX, характеризуется равенством:

$$\smile MA = OA, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (*)$$

чтобы в этом убедиться, достаточно вообразить себе, что круг катится обратно из положения 2 в положение I, так что точка A остается на месте; тогда очевидно, что точка M, перемещаясь, придет в совпадение с точкою O. Условие $(*)$ нам дает:

$$OA = at;$$

(под t мы разумеем, как всегда, радиальную меру угла, а потому $\smile MA = at$).

Проведем из т. M прямую $MN \parallel OX$; тогда из чертежа выводим:

$$x = OP = OA - PA = OA - MN;$$

но из $\triangle MCN$ следует, что

$$MN = a \sin t;$$

и потому

$$x = at - a \sin t = a(t - \sin t).$$

Далее,

$$y = PM = AC - NC;$$

но из того же треугольника имеем:

$$NC = a\cos t;$$

следовательно,

$$y = a - a\cos t = a(1-\cos t).$$

Таким образом совокупность уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t-\sin t) \\ y &= a(1-\cos t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

и представляет собою параметрическое задание циклоиды.

Циклоида изображена на черт. 44; она состоит из бесчисленного множества одинаковых частей вида OBD, часто называемых арками циклоиды; пролет каждой арки равен $2\pi a$, т.е. длине окружности катящегося круга. В замечании 2 § 19 мы рассмотрели вопрос о выпуклости циклоиды и видели, что она всюду обращена выпуклостью вверх, как это видно и из чертежа. Наивысшая точка B арки есть положение движущейся точки для среднего положения круга; она имеет координаты $(\pi a, 2a)$.

Из уравнений (3) можно исключить параметр t таким образом: из 2-го уравнения определяем $\cos t$:

$$\cos t = \frac{a-y}{a},$$

откуда

$$t = \arccos\frac{a-y}{a}$$

и

$$\sin t = \sqrt{1-\left(\frac{a-y}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a};$$

подставляя эти выражения в I-е уравнение, получим:

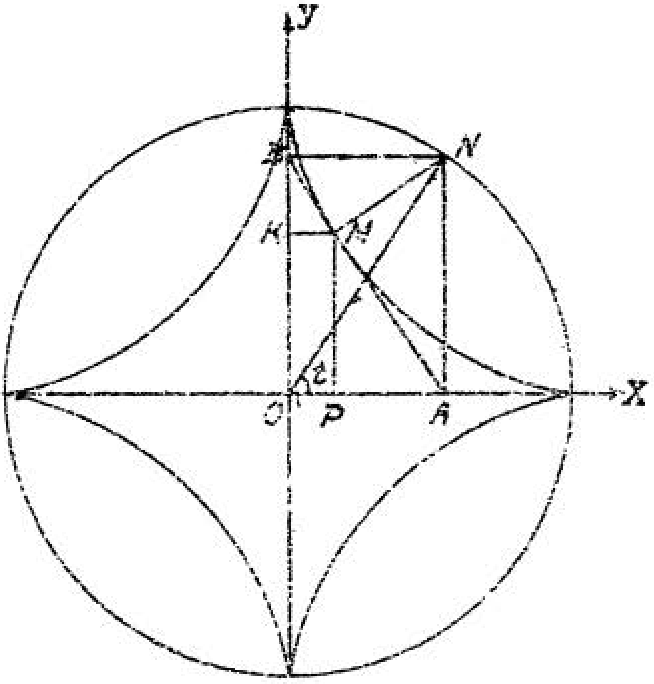
$$x = a\arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}.$$

Ясно, что это вид сложнее и менее удобен для исследования, чем параметрические уравнения (3).

4. А с т р о и д а . Опишем (черт. 45) из начала координат окружность радиуса a и возьмем на этой окружности какую-нибудь точку N; из этой точки опускаем на оси координат перпендикуляры NA и NB; таким образом получается прямоугольник $OBNA$; проведем в нем диагонали AB и ON; ясно, что

$$AB = ON = a;$$

наконец, найдем основание M перпендикуляра NM, опущенного из т. N на диагональ AB.



Черт. 45.

Геометрическое место всех точек, построенных так же, как и точка M, и образует линию, называемую а с т р о и д о й.

Выведем ее уравнение в параметрической форме. Обозначим координаты точки M через x и y, так что

$$OP = x, \quad PM = y,$$

и примем за параметр

$$t = \angle XON.$$

Проведя $MK \parallel OX$, мы легко заметим, что на чертеже образовался ряд углов равных t.

$$t = \angle XON = \angle OAB = \angle ABN = \angle KMB = \angle MNA.$$

Выразим теперь через параметр t координаты x и y точки M:

$$x = OP = KM;$$

из $\triangle KMB$ имеем

$$KM = BM \operatorname{Cos} \angle KMB = BM \operatorname{Cos} t,$$

из $\triangle MBN$: $BM = BN \operatorname{Cos} \angle MBN = BN \operatorname{Cos} t$

и из $\triangle ABN$: $BN = AB \operatorname{Cos} \angle ABN = a \operatorname{Cos} t$;

следовательно, $BM = a \operatorname{Cos}^2 t$

и

$$x = a \operatorname{Cos}^3 t.$$

Точно также:

из $\triangle PMA$: $y = PM = AM \operatorname{Sin} \angle OAB = AM \operatorname{Sin} t,$

из $\triangle AMN$: $AM = AN \operatorname{Sin} \angle MNA = AN \operatorname{Sin} t,$

и из $\triangle ABN$: $AN = AB \operatorname{Sin} \angle ABN = a \operatorname{Sin} t$;

следовательно, $AM = a \operatorname{Sin}^2 t$

и

$$y = a \operatorname{Sin}^3 t.$$

Итак, параметрическими уравнениями астроиды будут

$$\left.\begin{aligned} x &= a \operatorname{Cos}^3 t \\ y &= a \operatorname{Sin}^3 t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

Чтобы исключить t из этой системы, разделим каждое уравнение на a:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}&=\cos^3 t\\ \frac{y}{a}&=\sin^3 t;\end{aligned}\right\}$$

возвысим обе части каждого уравнения в степень $\frac{2}{3}$:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}&=\cos^2 t\\ \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3}&=\sin^2 t\end{aligned}\right\}$$

и сложим полученные уравнения:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{a}\right)^{2/3}=\cos^2 t+\sin^2 t=1,$$

или окончательно

$$(5)\quad x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$$

Астроида изображена на черт. 45; при ее исследовании можно пользоваться уравнениями и вида (4), и вида (5). Упражнение 2 § 19 имеет целью исследовать по уравнениям (4) вопрос о вогнутости астроиды.

Задачи для упражнения.

В задачах 1-6 кривые заданы в параметрической форме; найти их уравнения в обычной непараметрической форме.

1) $\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos t}\\ y=b\,\mathrm{tg}\,t\end{cases}$ Отв: гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

2) $\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}(e^t+e^{-t})\\ y=\dfrac{b}{2}(e^t-e^{-t})\end{cases}$ Отв: гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

3) $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ Отв: окружн. $x^2+y^2-2ay=0$.

4) $\begin{cases} x = a(1-\sin t) \\ y = a\cos t \end{cases}$ Отв: окружн. $x^2+y^2-2ax=0$.

5) $\begin{cases} x = a(1+\cos t) \\ y = b(1+\sin t) \end{cases}$ Отв: эллипс $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$.

6) $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$ Отв: Декартов лист $x^3+y^3-3axy=0$.

7) Придать уравнению круга

$$x^2+y^2=a^2$$

параметрическую форму, приняв за параметр величину t, связанную с x уравнением

$x=\frac{2at}{1+t^2}$ Отв: $\begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2} \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$

8) Придать уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

параметрическую форму, приняв за параметр величину t, а) связанную с x уравнением

$$x^2+a^2t^2=a^2;$$

б) связанную с y уравнением

$$y^2+b^2t^2=b^2.$$

Отв.: а) $\begin{cases} x=\pm a\sqrt{1-t^2} \\ y=bt \end{cases}$; б) $\begin{cases} x=at \\ y=\pm b\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

9) Найти параметрические уравнения окружности, центр которой находится в точке $C(a,b)$ и радиус которой $=r$, если принять за параметр угол, образованный радиусом текущей точки окружности с положительным направлением оси OX.

Отв.: $\begin{cases} x=a+r\cos t \\ y=b+r\sin t. \end{cases}$

10) Кривая (строфоида) задана уравнениями

$$\begin{cases} x=\dfrac{2at^2}{1+t^2} \\ y=a\dfrac{t(t^2-1)}{1+t^2}; \end{cases}$$

найти точки ее пересечения с осью OX

Отв.: $(0,0)$ и $(a,0)$.

11) Кривая (циссоида) задана уравнениями

$$\begin{cases} x=\dfrac{2a}{t^2+1} \\ y=\dfrac{2a}{t(t^2+1)}; \end{cases}$$

найти точки ее пересечения с прямой

$$x=a$$

Отв.: $(a,\pm a)$

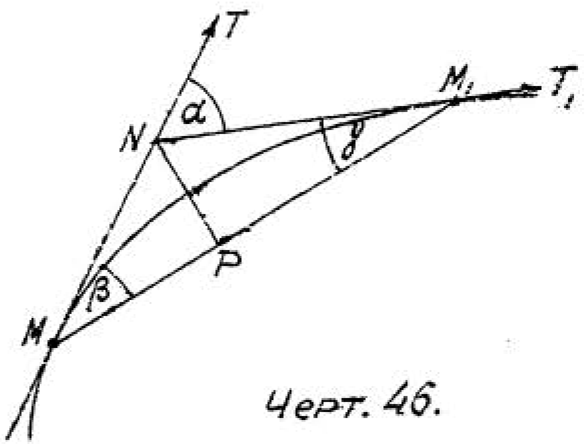
§ 21. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ДУГИ.

В дальнейшем курсе нам неоднократно придется встречаться с дифференциалом дуги; выводом его выражения мы и займемся в настоящем параграфе. Но прежде докажем следующую важную теорему.

Теорема. Бесконечно-малая дуга эквивалентна стягивающей ее хорде.

Возьмем (черт.46) на плоской кривой дугу MM_1, которой соответствует хорда MM_1, причем выберем $m.\ M_1$ настолько близко к $m.\ M$, чтобы между ними не было точки перегиба, и докажем, что

$$\lim \left[\frac{\smile MM}{MM_1}\right]_{M_1 \to M} = 1.$$



Черт. 46.

Проведем в точках M и M_1 касательные к кривой MT и M_1T_1, которые при своем пересечении в точке N образуют $\angle M_1NT = \alpha$, а с хордою MM_1 углы:

$\beta = \angle M_1MN$ и $\gamma = \angle MM_1N$;

тогда, как известно из геометрии

$$\beta < \alpha \quad и \quad \gamma < \alpha$$

и следовательно,

$$\cos\beta > \cos\alpha \quad и \quad \cos\gamma > \cos\alpha. \qquad (*)$$

Рассматривая хорду MM_1, дугу $\smile MM_1$ и ломаную $MN+NM_1$, имеем

$$MM_1 < \smile MM_1 < MN + NM_1. \qquad (**)$$

Опустив из точки N перпендикуляр NP на хорду MM_1, получим:

$$MP = MN\cos\beta \quad \text{и} \quad PM_1 = NM_1\cos\gamma,$$

откуда

$$MN = \frac{MP}{\cos\beta} \quad \text{и} \quad NM_1 = \frac{PM_1}{\cos\gamma}$$

и в силу неравенств (*)

$$MN < \frac{MP}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad NM_1 < \frac{PM_1}{\cos\alpha},$$

т.е.

$$MN + NM_1 < \frac{MP + PM_1}{\cos\alpha}$$

или

$$MN + NM_1 < \frac{MM_1}{\cos\alpha}$$

Таким образом неравенства (* *) можно заменить такими:

$$MM_1 < \smile MM_1 < \frac{MM_1}{\cos\alpha},$$

или, деля на MM_1:

$$1 < \frac{\smile MM_1}{MM_1} < \frac{1}{\cos\alpha},$$

Но когда точка M_1, двигаясь по кривой, стремится к совпадению с точкой M, то угол α стремится к 0, $\cos\alpha \to 1$ и $\frac{1}{\cos\alpha} \to 1$ а потому переменная $\frac{\smile MM_1}{MM_1}$ при своем изменении все время остается между I и другой переменной, стремящейся к I; следовательно,

$$\lim_{M_1 \to M}\left[\frac{\smile MM_1}{MM_1}\right] = 1$$

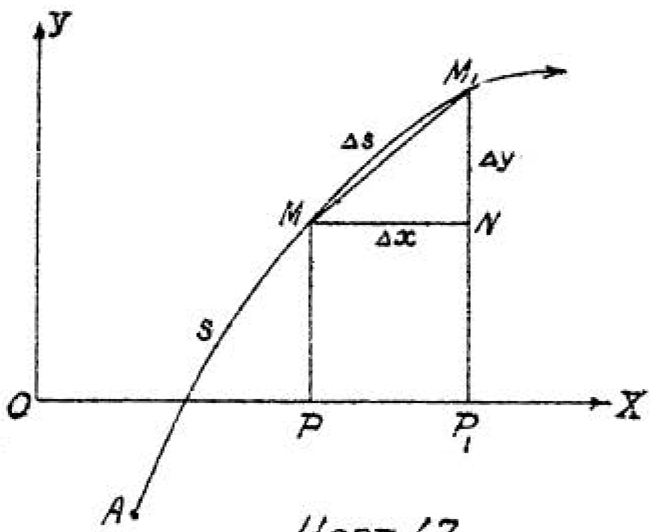
что и надо было доказать.

Возьмем теперь на плоскости (черт. 47) некоторую кривую

$$y=f(x),$$

где $f(x)$ есть функция непрерывная и однозначная для разбираемых значений x; на этой кривой выбираем определенную точку A, которую примем за начало отсчета дуг в направлении, указанном стрелкою; возьмем на кривой точку $M(x,y)$, и пусть

$$\smile AM = s$$



Черт. 47.

Если мы станем изменять абсциссу x, то, очевидно, будет изменяться и положение точки M, а вместе с тем и длина дуги s; следовательно, s есть некоторая функция от x.

Найдем производную $\frac{ds}{dx}$.

Дадим независимой переменной x бесконечно-малое приращение $\Delta x = PP_1$; тогда, проведя в точке P_1 перпендикуляр к оси OX, получим на кривой точку M_1, координаты которой будут

$$x_1 = x+\Delta x, \quad y_1 = P_1M_1 = y+\Delta y, \text{ где } \Delta y = NM_1;$$

при этом дуга s получит в силу непрерывности тоже бесконечно-малое приращение

$$\Delta s = \smile MM_1.$$

Согласно определению производной имеем:

$$\frac{ds}{dx} = \lim\left[\frac{\Delta s}{\Delta x}\right]_{\Delta x\to 0} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

но при отыскании предела отношения между двумя бесконечно-малыми величинами, как известно (§ 10), каждую из них можно заменить величиною ей эквивалентною ; поэтому, на основании только что доказанной теоремы, в равенстве (α) можно заменить Δs длиною хорды MM_1, т.е.

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta s}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{MM_1}{\Delta x}\right] \quad ;$$

но из прямоугольного ΔMNM_1 имеем

$$MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2};$$

поэтому

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\right];$$

далее, применяя известные теоремы о пределах, будем иметь:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left\{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]\right\}^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Итак,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

откуда

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

или

$$\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Это и есть формула квадрата дифференциала дуги плоской кривой.

Из формулы (I) следует, что при вычислении ds приходится извлекать корень квадратный, который имеет два значения, положительное или отрицательное. Знак + берется тогда, когда дуга возрастает с возрастанием независимого переменного; например, как это происходит на нашем черт. 47. Знак - берется тогда, когда дуга убывает с возрастанием независимого переменного; например, если бы на черт. 47 мы выбрали за направление отсчета дуг - направление противуположное движению часовой стрелки.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вид (I) формулы для ds^2 тем удобен, что он не предрешает выбора независимой переменной; в каждом данном случае, пользуясь этою же формулой, мы можем выбрать так независимую переменную, чтобы вычисление было проще.

В разбираемых ниже примерах мы так и будем поступать.

Примеры.

I) Синусоида.

Дана кривая
$$y = \sin x;$$
по формуле (I) имеем
$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$
но
$$dy = \cos x\, dx;$$
следовательно,
$$ds^2 = dx^2 + \cos^2 x\, dx^2 = (1 + \cos^2 x)\, dx^2,$$
откуда
$$ds = \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

В этом примере за независимую переменную мы выбрали x.

2) Парабола.

Берем уравнение параболы

$$y^2 = 2px,$$

откуда

$$x = \frac{y^2}{2p};$$

дифференцируя, получим

$$dx = \frac{y\,dy}{p},$$

и следовательно,

$$ds^2 = \frac{y^2 dy^2}{p^2} + dy^2 = \frac{p^2 + y^2}{p^2}\,dy^2,$$

откуда

$$ds = \frac{1}{p}\sqrt{p^2 + y^2}\,dy.$$

В этом примере за независимую переменную проще было взять y.

3) Циклоида.

Берем уравнения циклоиды

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t); \end{aligned}\right\}$$

из этих уравнений имеем

$$\left.\begin{aligned} dx &= a(1 - \cos t)\,dt = 2a\sin^2\frac{t}{2}\,dt \\ dy &= a\sin t\,dt = 2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt; \end{aligned}\right\}$$

следовательно,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 4a^2\sin^4\frac{t}{2}\,dt^2 + 4a^2\sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}\,dt^2 =$$

$$= 4a^2\sin^2\frac{t}{2}\left(\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}\right)dt^2 = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}\,dt^2,$$

откуда

$$ds = 2a \sin\frac{t}{2}dt.$$

В этом примере за независимую переменную мы выбрали параметр t.

4) Найти скорость движения снаряда, выпущенного под углом θ_0 к горизонту при начальной скорости v_0. Мы видели в § 20, что уравнения траектории в этом случае будут:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 \cos\theta_0 . t \\ y &= v_0 \sin\theta_0 . t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\}$$

Как известно, скоростью движения в данный момент будет значение производной от пути s по времени t. Составим поэтому ds; из уравнений траектории имеем:

$$\left.\begin{aligned} dx &= v_0 \cos\theta_0 dt \\ dy &= (v_0 \sin\theta_0 - gt)dt; \end{aligned}\right\}$$

следовательно,

$$ds^2 = (v_0^2 \cos^2\theta_0 + v_0^2 \sin^2\theta_0 - 2v_0 gt \sin\theta_0 + g^2t^2)dt^2,$$

или

$$ds^2 = (v_0^2 - 2v_0 gt \sin\theta_0 + g^2t^2)dt^2,$$

и потому скорость

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin\theta_0 + g^2t^2}$$

<u>Задачи для упражнений.</u>

Найти дифференциалы дуги следующих кривых:

1. эллипса по его параметрическим уравнениям

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t. \end{aligned}\right.$$

Отв.: $ds=a\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt$, где $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ (эксцентриситет эллипса).

2. астроиды по ее параметрическим уравнениям

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$$ Отв.: $ds=\frac{3}{2}a\sin 2t\,dt$

и по ее уравнению

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$ Отв.: $ds=\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}dx$.

3. цепной линии по ее уравнению

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Отв.: $ds=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{y\,dx}{a}$.

4. развертки круга по ее уравнениям:

$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$$

Отв.: $ds=at\,dt$.

5. кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x=6at^5 \\ y=5at(1-t^8) \end{cases}$$

Отв.: $ds=5a(1+9t^8)\,dt$.

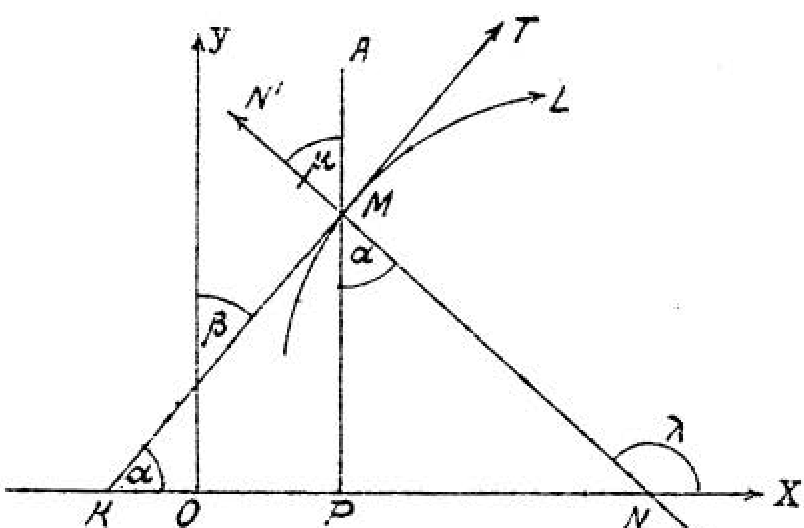
§ 22. КАСАТЕЛЬНЫЕ И НОРМАЛИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ.

1. В предыдущей части курса было решено достаточно большое число задач на определение наклона касательной и на составление уравнения касательной.

Решим теперь эту задачу в общем виде.

Пусть имеется (черт. 48) некоторая плоская кривая L, уравнение которой в прямоугольной системе координат пусть будет

$$y=f(x) \quad \ldots \ldots (1)$$



Черт. 48.

Возьмем на этой кривой какую-нибудь точку $M(x,y)$ и проведем к ней в этой точке касательную MT. Найдем уравнение этой касательной.

Пишем уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку (так как буквами x и y мы обозначили координаты данной точки M, то координаты текущей точки касательной станем обозначать большими буквами X и Y):

$$Y-y=k(X-x),$$

где k есть угловой коэффициент; чтобы это уравнение выражало касательную к линии (1), надо, как известно, чтобы k равнялось значению производной функции $f(x)$, вычисленному для точки касания (x, y), т.е. чтобы

$$k = f'(x);$$

обозначая это значение производной через y', получим уравнение касательной в точке (x, y) в таком виде

$$Y - y = y'(X - x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Найдем косинусы углов α и β, образуемых касательною с осями координат OX и OY.

Мы уже знаем, что

$$tg\,\alpha = y' = \frac{dy}{dx};$$

следовательно

$$tg\,\beta = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Cotg\,\alpha = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy}.$$

Пользуясь формулой тригонометрии

$$1 + tg^2\alpha = Sec^2\alpha = \frac{1}{Cos^2\alpha},$$

мы получим:

$$Cos\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

или, припоминая форм. (I) § 31 для дифференциала дуги:

$$cos\,\alpha = \pm\frac{dx}{ds}.$$

Точно также

$$Cos\,\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\beta}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^3}} = \pm\frac{dy}{ds}.$$

Итак, касательная образует с координатными осями углы, косинусы которых определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm\frac{dx}{ds} \\ \cos\beta &= \pm\frac{dy}{ds} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Двойной знак в этих формулах зависит от того, какое направление касательной мы будем рассматривать. Если касательная направлена в сторону возрастающих дуг (такое направление касательной будем называть положительным), то в обеих формулах надо взять знак $+$; если же касательная направлена в сторону убывающих дуг, то знак $-$.

Например, на черт. 48 дуги считаются возрастающими с увеличением x; следовательно, если $dx>0$, то $ds>0$ и в то же время $dy>0$; значит,

$$\frac{dx}{ds}>0 \quad и \quad \frac{dy}{ds}>0;$$

касательная направлена в сторону возрастающих дуг; углы α и β - острые, их косинусы положительны; поэтому

$$\cos\alpha=+\frac{dx}{ds};\ \cos\beta=+\frac{dy}{ds}.$$

Подобным же образом можно проверить высказанное правило знаков и в других случаях чертежа.

2. Нормалью к кривой называется прямая, проходящая через некоторую точку кривой перпендикулярно к касательной в этой точке.

Выведем уравнение нормали.

Так как нормаль NN' (черт.48) проходит через точку $M(x,y)$, то ее уравнение будет

$$Y-y=m(X-x);$$

так как она перпендикулярна к касательной, угловой коэффициент которой $= y'$, то $m=-\frac{1}{y'}$, и потому уравнение нормали будет:

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

или

$$(X-x)+y'(Y-y)=0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

если заменить в этом уравнении y' через $\frac{dy}{dx}$ то уравнение нормали может быть написано и в таком виде:

$$(X-x)dx+(Y-y)dy=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

Следует помнить, что и в уравнении (4) под y' разумеется значение производной для точки (x, y).

Определим косинусы углов λ и μ, образованных нормалью с осями координат OX и OY.

Условимся считать положительным то направление нормали, которое получается при повороте на 90^{0} положительного направления касательной против движения часовой стрелки и будем под λ и μ разуметь углы, образованные с осями координат положительным направлением нормали.

На черт. 48 $\angle XNN_1=\lambda$ есть угол тупой; и так как

$$\beta+\lambda=\pi,$$

то
$$\cos\lambda=\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta=-\frac{dy}{ds};$$
при этом, как мы видели в п. 1 этого параграфа

$$dy>0, \quad ds>0.$$

Далее, $\mu=\angle KMN'=\alpha$ есть угол острый,

$$\cos\mu=\cos\alpha=+\frac{dx}{ds} \; (dx>0, \; ds>0).$$

Если бы нормаль была направлена в сторону, противоположную положительному направлению, то получили бы

$$\cos\lambda=+\frac{dy}{ds} \quad и \quad \cos\mu=-\frac{dx}{ds}.$$

Итак, нормаль образует с координатными осями углы, косинусы которых определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \mp\frac{dy}{ds} \\ \cos\mu &= \pm\frac{dx}{ds} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

верхние знаки соответствуют положительному направлению нормали, а нижние - ему противоположному.

3. Посмотрим теперь, как измеряются длины отрезков, связанных с касательной и нормалью.

Длина отрезка MK (черт. 48) касательной от точки касания до пересечения ее с осью OX называется длиною касательной и обозначается буквою T.

Длина отрезка нормали MN от точки пересечения ее с кривою до пересечения с осью OX называется длиною нормали и обозначается буквою N.

Проекция KP длины касательной на ось OX называется подкасательною и обозначается S_t.

Проекция PN длины нормали на ось OX называется поднормалью и обозначается S_n.

Найдем выражение для вычисления этих отрезков.

Из прямоугольного $\triangle KMP$ имеем

$$S_t = KP = PM \operatorname{Cotg}\alpha,$$

но $PM = y$, ординате точки M, а

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{1}{y'};$$

следовательно,

$$S_t = \frac{y}{y'}$$

Из прямоугольного $\triangle PMN$ имеем

$$S_n = PN = PM\, tg\angle PMN,$$

но $\angle PMN = \angle PKM = \alpha$, а $tg\,\alpha = y'$; следовательно,

$$S_n = yy'.$$

Будем всегда считать S_t и S_n положительными, а потому напишем формулы в таком виде:

$$\boxed{S_t = \left|\frac{y}{y'}\right|;\quad S_n = |yy'|} \quad \ldots\ldots (6)$$

Что касается длин касательной и нормали, то из тех же прямоугольных треугольников мы их легко найдем на основании теоремы Пифагора:

$$T = +\sqrt{y^2 + S_t^2}\ ;\quad N = +\sqrt{y^2 + S_n^2}\ .$$

Примеры. Приложим полученные результаты к некоторым кривым.

I. Эллипс.

На эллипсе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (*)$$

возьмем точку $M(x, y)$ и найдем уравнение касательной к эллипсу в этой точке.

Мы знаем (п. I этого параграфа), что уравнение касательной напишется в виде

$$Y - y = y'(X - x)\ ; \qquad (**)$$

определим y', т.е. производную по x от функции y, заданной уравнением $(*)$ эллипса. Мы могли бы сделать это так: определить y из уравнения $(*)$ как функцию от x и затем по известным правилам найти производную; но того же результата можно достигнуть проще: а именно, станем прямо дифференцировать равенство $(*)$, считая y функцией от x, этим уравнением определяемой; в таком случае левая часть равенства $(*)$ тождественно будет равна I, а потому ее производная равна 0; применяя правила дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot y'=0$$

или

$$b^2x+a^2yy'=0,$$

откуда

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

Заметим, что тот же результат мы могли бы получить и при помощи дифференциалов; а именно, берем дифференциалы от обеих частей уравнения $(*)$

$$\frac{2x\,dx}{a^2}+\frac{2y\,dy}{b^2}=0$$

или

$$b^2x\,dx+a^2y\,dy=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Подставляя найденное значение для y' в уравнение $(**)$ касательной, получим

$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x);$$

умножаем обе части этого уравнения на a^2y:

$$a^2yY-a^2y^2=-b^2xX+b^2x^2,$$

или

$$b^2xX+a^2yY=b^2x^2+a^2y^2;$$

делим обе части на a^2b^2:

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

но в силу данного уравнения $(*)$ имеем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

значит, окончательно уравнение касательной к эллипсу будет

$$\boxed{\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Заметим кстати, что это уравнение можно получить из уравнения $(*)$ эллипса, пользуясь следующим мнемоническим правилом: заменяем в уравнении $(*)$ x^2 и y^2 через xx и yy, а затем в этих произведениях пишем одну букву большую, а другую малую:

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратим внимание на то, что при решении этой задачи нам приходилось находить производную y' от функции y, которая была задана уравнением $(*)$, причем удобнее было не решать этого уравнения относительно y. Такое задание функции уравнением не решенным относительно y называется <u>неявным</u> заданием, а сама функция в этом случае называется <u>неявною</u>. Если решить уравнение относительно y, то получится задание <u>явное</u>, и функция будет называться <u>явною</u>. Но надо заметить, что далеко не во всех случаях можно обратить задание неявное в явное, а потому тот прием, который мы употребили в этом случае, в некоторых случаях является лишь более удобным, а в других - необходимым. В дальнейшем курсе вопрос о дифференцировании неявных функций будет разобран подробно.

2. Г и п е р б о л а.

Так как уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

отличается от уравнения эллипса только знаком, то вывод уравнения касательной к гиперболе совершенно аналогичен проделанному выводу для эллипса, и в результате получится

$$\boxed{\frac{Xx}{a^2}-\frac{Yy}{b^2}=1} \quad \ldots\ldots (8)$$

3. П а р а б о л а.

Берем уравнение парболы

$$y^2=2px \; (p>0,\ x>0)$$

и дифференцируем его (сокращая на 2):

$$yy'=p,$$

откуда

$$y'=\frac{p}{y}$$

Составляем уравнение касательной:

$$Y-y=\frac{p}{y}(X-x);$$

преобразуем его:

$$Yy-y^2=pX-px;$$

заменяем y^2 через $2px$ на основании уравнения параболы:

$$Yy-2px=pX-px,$$

откуда

$$Yy=p(X+x) \quad \ldots\ldots (9)$$

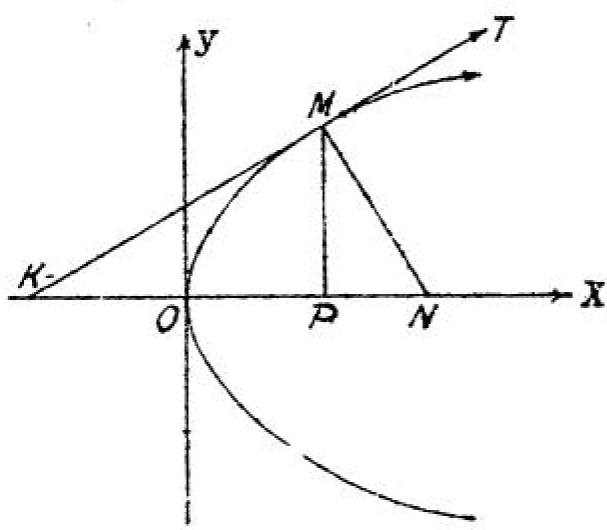
Это уравнение может быть получено из уравнения параболы при помощи того же мнемонического правила: надо в уравнении параболы заменить y^2 через yy, а $2x$ через $x+x$ и написать в каждом из этих выражений одну букву большую, а другую малую.

Найдем для параболы величины подкасательной и поднормали; имеем по формулам (6) этого параграфа:

$$S_t=\left|\frac{y}{y'}\right|=\frac{y^2}{p}=\frac{2px}{p}=2x;$$

$$S_n=|yy'|=y\cdot\frac{p}{y}=p.$$

I-я формула указывает, что подкасательная KP (черт. 49) равна удвоенной абсциссе точки M, т.е. $KP=2\,OP$, или $KO=OP$; а это соотношение дает очень простой способ построения касательной к параболе в данной ее точке M; именно, надо от начала координат отложить по оси x-ов влево отрезок равный абсциссе данной точки и полученную точку соединить с данной.



Черт. 49.

2-я формула показывает, что для всех точек параболы поднормаль имеет одну и ту же величину, равную p.

Задачи для упражнения.

I) Найти касательную и нормаль к кривой

$$y=\frac{x}{1+x^2}$$

в точке ее, абсцисса которой $=2$.

$$3X+25Y-16=0$$

Отв.: $125X-15Y-244=0.$

2) Провести касательную и нормаль к кривой

$$x^2-2xy+5y^2-2x+4y+1=0$$

в точке (I,0) **Отв.:** $Y=0;\ X=1.$

3) В точке (a,a) циссоиды

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}$$

провести касательную и нормаль, а также найти длины подкасательной, поднормали, касательной и нормали.

Отв.: $2x-y-a=0;\ x+2y-3a=0$

$$S_t=\frac{a}{2};\quad S_n=2a;\quad T=\frac{a}{2}\sqrt{5};\quad N=a\sqrt{5}.$$

4) Провести касательную и нормаль к кривой

$$\left.\begin{aligned} x&=t^4-2t+1\\ y&=t^2+2t \end{aligned}\right\}$$

в точке (I,3) **Отв.:** $2X-Y+1=0;\ X+2Y-7=0.$

5) К параболе

$$y^2=6x$$

провести касательную через точку $\left(\frac{5}{2},\ 4\right)$.

УКАЗАНИЕ. Прежде всего следует обратить внимание, что точка $\left(\frac{5}{2},4\right)$ не лежит на параболе, а потому для решения задачи надо найти точки касания (их будет две), а затем применить выведенное уравнение касательной к параболе.

Отв.: $2X-2Y+3=0;\ 6X-10Y+25=0.$

6) К эллипсу

$$\frac{11x^2}{48}+\frac{y^2}{3}=1$$

провести касательную через точку (4,-5)

Отв.: $11X+4Y-24=0;\ 11X+16Y+36=0.$

7) Доказать, что отрезок касательной к астроиде (черт.45)

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},$$

заключенный между осями координат, имеет постоянную длину.

УКАЗАНИЕ. Уравнение касательной написать в отрезках на осях.

Отв.: отрезок касательной $= a$.

8) Показать, что для кривой

$$\left.\begin{aligned} x&=b+a(\ln \sin t-\sin^2 t)\\ y&=a \sin t \cos t \end{aligned}\right\}$$

$$N^2+T^2=a^2 \quad \text{и} \quad NT=ay.$$

9) Показать, что кривые

$$y=e^{ax} \quad \text{и} \quad y=e^{ax}\sin(bx+c)$$

в каждой общей точке имеют общую касательную.

10) Найти уравнение касательной и нормали к астроиде, заданной параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos^3 t\\ y&=a\sin^3 t \end{aligned}\right\}$$

Отв.: $X\sin t+Y\cos t=\frac{1}{2}a\sin 2t.$

$X\cos t-Y\sin t=a\cos 2t.$

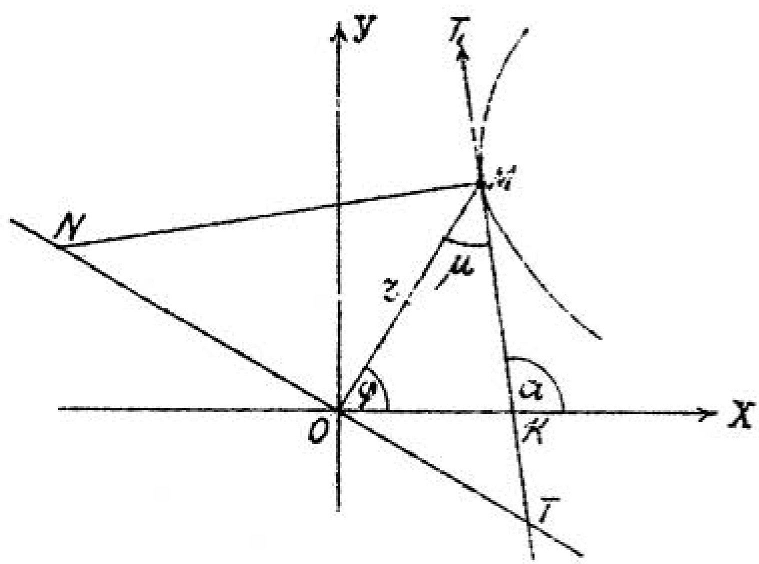
§ 23. КРИВЫЕ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

1. Из аналитической геометрии известно, что иногда уравнение кривой удобнее задавать не в прямолинейной, а в полярной системе координат. Посмотрим, как в таком случае определить направление касательной к кривой.

Пусть (черт. 50) некоторая кривая задана уравнением в полярных координатах

$$r = f(\varphi),$$

где r есть радиус-вектор точки M, а φ - полярный угол.



Черт. 50

Очевидно, что направление касательной MT определится, если будет известен угол $\mu = \angle OMT$, образованный касательною с радиусом-вектором точки касания M. Определением этого угла мы и займемся.

Пусть координаты точки M в полярной системе будут r и φ, а в прямоугольной x и y; тогда, как известно, зависимость между ними выражается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (*)$$

Угол μ есть внутренний угол $\triangle OMK$, внешний угол которого $\angle XKM$ есть угол α, составленный касательною с положительным направлением оси абсцисс прямоугольной системы, следовательно,

$$\mu = \alpha - \varphi$$

$$tg\,\mu = tg(\alpha - \varphi) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\varphi}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\varphi}. \qquad (**)$$

Но мы знаем, что

$$tg\,\alpha = y'_x = \frac{dy}{dx};$$

следовательно, равенство (* *) можно переписать так:

$$tg\,\mu = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{Sin\,\varphi}{Cos\,\varphi}}{1 + \frac{Sin\,\varphi}{Cos\,\varphi}\cdot\frac{dy}{dx}} = \frac{Cos\,\varphi\, dy - Sin\,\varphi\, dx}{Cos\,\varphi\, dx + Sin\,\varphi\, dy};$$

продифференцируем теперь уравнения (*), в которых и r, и φ - переменные величины:

$$\left.\begin{array}{l|l|l} dx = -r\,Sin\,\varphi\, d\varphi + Cos\,\varphi\, dr & -Sin\,\varphi & Cos\,\varphi \\ dy = \ \ r\,Cos\,\varphi\, d\varphi + Sin\,\varphi\, dr & Cos\,\varphi & Sin\,\varphi \end{array}\ ;\right\}$$

если I-е из этих уравнений умножить на $-Sin\,\varphi$ а второе на $Cos\,\varphi$ и полученные уравнения сложить, то найдем числитель выражения для $tg\,\mu$:

$$Cos\,\varphi\, dy - Sin\,\varphi\, dx = r\,d\varphi;$$

если же I-е из них умножить на $Cos\,\varphi$, а второе на $Sin\,\varphi$ и полученные уравнения сложить, то найдем знаменатель

$$Cos\,\varphi\, dx + Sin\,\varphi\, dy = dr;$$

таким образом для $tg\,\mu$ получается выражение

$$\boxed{tg\,\mu = \frac{r\,d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'_\varphi}}, \qquad (1)$$

где r'_φ есть производная $\frac{dr}{d\varphi}$ от r по φ.

2. Проведем через полюс O прямую NT перпендикулярную к радиусу-вектору OM; тогда длина отрезка касательной MT от точки касания до пересечения с прямою NT называется длиною полярной касательной, а длина отрезка нормали MN – длиною полярной нормали; проекции этих отрезков на прямую NT, а именно, отрезок OT и ON называется соответственно полярною подкасательною и полярною поднормалью.

Укажем, как вычисляются эти отрезки.

Из прямоугольного $\triangle OMT$ имеем:

$$\text{полярн. подкасат. } OT = r \operatorname{tg} \mu,$$

или, принимая во внимание формулу (I):

$$\boxed{\text{полярн. подкасат. } OT = \frac{r^2}{r'_\varphi}} \qquad (2)$$

Из прямоугольного $\triangle OMN$ имеем:

$$\text{полярн. подн}\text{орм. } ON = r \operatorname{Cotg} \angle ONM;$$

но $\angle ONM = \mu$ и $\operatorname{Cotg} \angle ONM = \frac{r'_\varphi}{r}$;

следовательно:

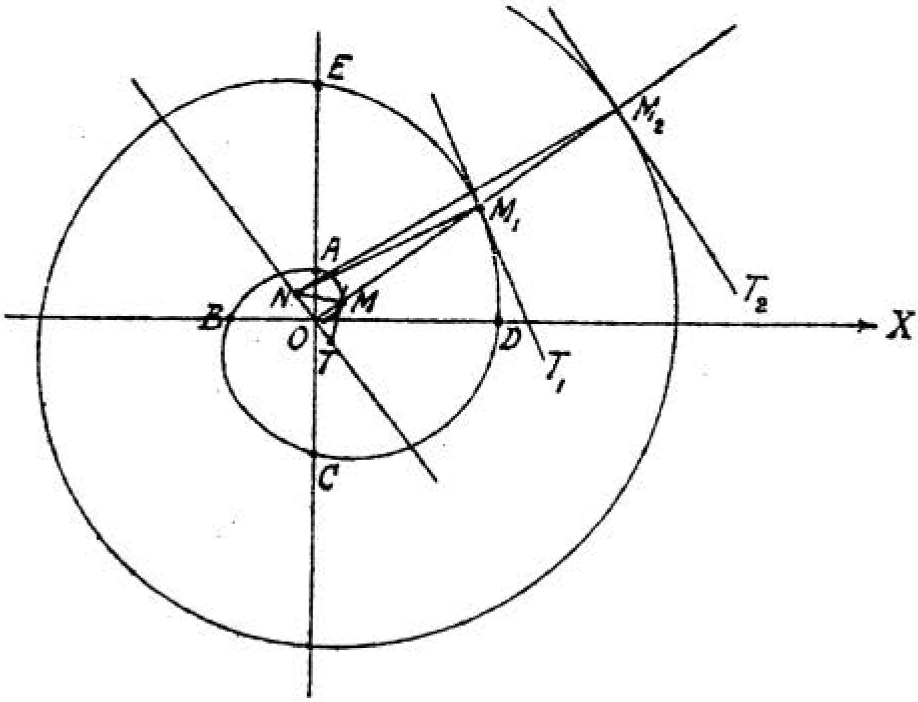
$$\boxed{\text{полярн. поднорм. } ON = r'_\varphi} \qquad (3)$$

Если бы понадобилось найти длины полярных касательной и нормали, то надо воспользоваться теоремою Пифагора, вычислив гипотенузу прямоугольных треугольников OMT и OMN.

3. Познакомимся теперь с некоторыми кривыми, уравнения которых удобно выражаются в полярных координатах, причем разберем две кривых, принадлежащих к классу так называемых спиралей.

а) Архимедова спираль.

Допустим, что некоторая точка движется равномерно по лучу OM (черт.5I) и в то же время сам луч также равномерно вращается около точки O; тогда траекторией движущейся точки и будет кривая, называемая <u>архимедовой спиралью</u>.



Черт. 51.

Примем точку O за полюс, а прямую OX за полярную ось; так как и радиус-вектор, и полярный угол в силу равномерности движений растут пропорционально времени, то

$$r = kt$$

и $$\varphi = k_1 t_1$$

а потому, деля первое из этих равенств на второе и обозначая $\frac{K}{K_1}$ буквою a, получим

$$\frac{r}{\varphi} = \frac{K}{K_1} = a,$$

откуда

$$r = a\varphi \; ; \qquad (4)$$

это и есть уравнение архимедовой спирали; здесь a есть некоторое постоянное положительное число.

Проследим движение точки M спирали. Когда $\varphi=0$, то $r=0$, т.е. точка находится в полюсе; когда $\varphi=\frac{\pi}{2}$, то $r=a\cdot\frac{\pi}{2}$, т.е. отрезок $OA=a\cdot\frac{\pi}{2}$; когда $\varphi=\pi$, то $r=OB=a\pi=2.OA$; когда $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ то $r=OC=\frac{3a\pi}{2}=3.OA$; когда $\varphi=2\pi$, то $r=4.OA$ и т.д.; вообще, когда φ растет от 0 до ∞, то и r растет тоже от 0 до ∞; при этом, если φ получает приращение $\Delta\varphi$, то

$$r+\Delta r=a(\varphi+\Delta\varphi)=r+a\Delta\varphi,$$

т.е. если полярный угол изменяется в арифметической прогрессии, то и радиус-вектор изменяется тоже в арифметической прогрессии.

Возьмем луч, соответствующий некоторому углу φ; этот луч встретит спираль в точках $M, M_1, M_2, \ldots$ соответственно углам $\varphi, \varphi+2\pi, \varphi+4\pi, \ldots$; для этих точек радиусы-векторы будут

$$a\varphi,\ a(\varphi+2\pi),\ a(\varphi+4\pi),\ \ldots;$$

значит,

$$OM=a\varphi,$$

$$OM_1=a\varphi+2\pi a=OM+2\pi a,$$

$$OM_2=a\varphi+4\pi a=OM_1+2\pi a \quad \text{и т.д.}$$

отсюда видно, что расстояния между точками пересечения некоторого луча с завитками спирали везде одинаковы и равны $2\pi a$.

Так как в силу уравнения (4)

$$r'_\varphi=a,$$

а на основании формулы (3) r'_φ есть величина полярной поднормали ON, то значит

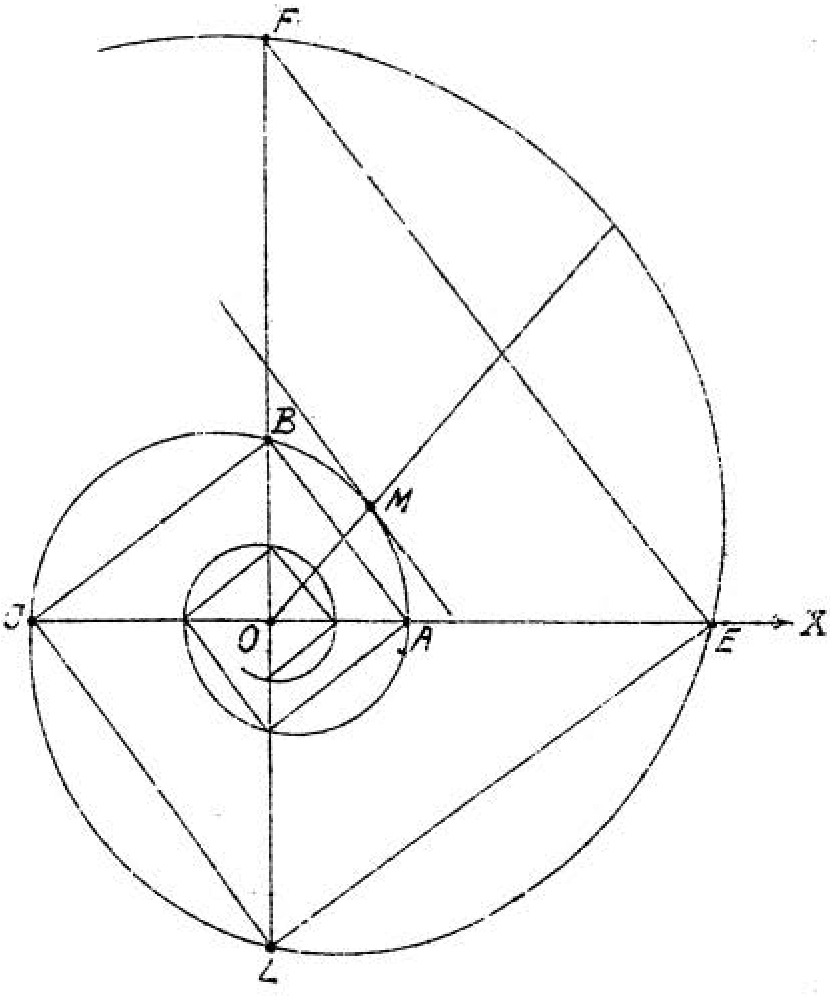
$$ON=a,$$

т.е. архимедова спираль имеет полярную поднормаль постоянной длины a; а потому нормали к спирали в любой из ее точек, лежащих на одном и том же луче, проходят через точку N, которую очень легко получить: проведя прямую $NT \perp OM$, откладываем по этой прямой в сторону возрастания полярного угла отрезок $ON=a$ и таким образом получаем точку N.

Чтобы получить касательную,например,в точке M_2,соединяем точку N с точкой M_2 (нормаль) и проводим $M_2T_2 \perp NM_2$.

б) Логарифмическая спираль.

Логарифмической спиралью называется кривая, уравнение которой в полярных координатах (черт. 52) такое:



Черт. 52.

$$r = ae^{m\varphi}, \qquad (5)$$

где m и a — постоянные положительные числа.

Если $\varphi=0$, то $r=a$; следовательно, точка A для которой $OA=a$, есть точка спирали; когда φ будет увеличиваться от 0 до ∞, то r будет также возрастать от a до ∞; когда φ будет убывать от 0 до $-\infty$, то r будет тоже убывать от a до 0; таким образом спираль будет асимптотически приближаться к полюсу, никогда его не достигая (полюс - асимптотическая точка спирали).

Если φ получает приращение $\Delta\varphi$, то

$$r+\Delta r = ae^{m(\varphi+\Delta\varphi)} = r.e^{m\Delta\varphi}$$

т.е. если полярный угол изменяется в арифметической прогрессии, то радиус-вектор изменяется в геометрической прогрессии; таким образом получается соответствие с известною из алгебры зависимостью между логарифмами и числами: если логарифмы образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие им числа образуют геометрическую прогрессию.

Отложим на полярной оси отрезок OA равный a; тогда точка A, как мы видели, принадлежит спирали. Далее отложим на перпендикуляре к полярной оси в точке O отрезок $OB=ae^{m\frac{\pi}{2}}$; тогда получится и другая точка B, принадлежащая тоже спирали. Восставим теперь перпендикуляр BC к прямой AB в точке B; тогда точка C пересечения этого перпендикуляра с полярною осью будет тоже точкою спирали; действительно,

$$\triangle OBC \sim \triangle OBA,$$

следовательно,

$$OC:OB=OB:OA,$$

или

$$OC=\frac{a^2e^{2m\cdot\frac{\pi}{2}}}{a}=ae^{m\pi},$$

т.е. точка C принадлежит спирали и соответствует полярному углу π.

Подобным же образом можно убедиться, что строя $CD\perp BC$, $DE\perp DC$, $EF\perp DE$ и т.д. будем получать на прямых OX и OB точки $D, E, F, \ldots\ldots$, принадлежащие спирали.

Укажем еще одно чрезвычайно характерное для логарифмической спирали свойство. Найдем по формуле (I) величину $tg\,\mu$, т.е. tg угла, образованного радиусом-вектором точки M спирали с касательною в этой точке; для этого на основании уравнения (5) составим

$$r'_\varphi=mae^{m\varphi},$$

и потому

$$tg\,\mu=\frac{r}{r'_\varphi}=\frac{ae^{m\varphi}}{mae^{m\varphi}}=\frac{1}{m},$$

т.е. все касательные к логарифмической спирали образуют с радиусами-векторами точек касания постоянный угол. Это свойство дает основание называть логарифмическую спираль и равноугольною.

Заметим, кстати, что, если $m=0$, то уравнение логарифмической спирали принимает вид

$$r=a,$$

т.е. обращается в уравнение окружности; итак, окружность можно рассматривать, как частный вид логарифмической спирали. В этом случае

$$\mu=\frac{\pi}{2},$$

т.е. касательные к окружности во всех ее точках перпендикулярны к радиусам - свойство хорошо известное из геометрии.

Задачи для упражнения.

1) Для логарифмической спирали $r=e^{\varphi}$ найти длины полярных подкасательной, подномали, касательной и нормали, а также угол μ

Отв.: $r;\ r;\ r\sqrt{2};\ r\sqrt{2};\ \frac{\pi}{4}$.

2) То же для кардиоиды

$$r=a(1+\cos\varphi).$$

Отв.: $-r\,\mathrm{cotg}\frac{\varphi}{2};\ -r\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2};\ \frac{r}{\sin\frac{\varphi}{2}};\ \frac{r}{\cos\frac{\varphi}{2}};\ \frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}.$

3) Определить угол μ для лемнискаты Бернулли

$$r^2=a^2\cos 2\varphi.$$

Отв: $\frac{\pi}{2}+2\varphi$.

Оглавление.

Стр.

ВВЕДЕНИЕ. Математика, как наука, отражающая законы об'ективной действительности I

§ I. Функции 8

§ 2. Постановка вопроса об исследовании изменения функции 25

§ 3. Величины бесконечно-малые и бесконечно большие 34

§ 4. Пределы 45

§ 5. Непрерывность 58

§ 6. Производная и ее значение для исследования функций 68

§ 7. Производная от целого многочлена и ее приложения к решению различных задач 88

§ 8. Производные от рациональных функций и их приложения II0

§ 9. Производные от явных алгебраических функций и их приложения II8

§ I0. Бесконечно-малые различных порядков. Дифференциал I3I

§ II. Дифференцирование тригонометрических функций I54

§ I2. Логарифмическая функция I75

§ I3. Число e; дифференцирование логарифмической функции I78

§ I4. Дифференцирование показательной функции I89

§ I5. Функции взаимно-обратные; круговые функции и их дифференцирование 202

Стр.

§ 16. Табличное дифференцирование....... 216

§ 17. *Maxima* и *minima* функций от одной переменной........................ 220

§ 18. Механическое значение второй производной.......................... 227

§ 19. Вогнутость и выпуклость плоских кривых; точки перегиба................. 230

§ 20. Параметрический способ задания линий 245

§ 21. Дифференциал дуги................. 256

§ 22. Касательные и нормали плоских кривых 264

§ 23. Кривые в полярных координатах....... 276.

....