АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ РККА

С. А. БОГОМОЛОВ, М. Е. ВОЛОКОБИНСКИЙ,
З. З. ВУЛИХ, Б. И. КАЖДАН и В. Н. НОВИКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть I

Выпуск IV

ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ. СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

ИЗДАНИЕ
Артиллерийской академии РККА
ЛЕНИНГРАД
1933

АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ РККА

С. А. БОГОМОЛОВ, М. Е. ВОЛОКОБИНСКИЙ,
З. З. ВУЛИХ, Б. И. КАЖДАН и В. Н. НОВИКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть I

Выпуск IV

ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ. СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

ИЗДАНИЕ
Артиллерийской академии РККА
ЛЕНИНГРАД
1933

Ответственный редактор *Краз, Г. Я.*
Технический редактор *Налетов, М. М.*
Поступило в производство 16/V 1983 г.
Вышло в свет в июле 1938 г.
Количество печ. знаков в листе 40.000.
Бумага печ. 72 × 105.

Ленгорлит № 13120. Арт. ак. № 51. Заказ № 2114. Тираж 2.500 экз. $15^3/_4$ п. л.

ЛОЦТ Наркомвоенмора им. Клима Ворошилова (Ленинград, пл. Урицкого, 10).

Предисловие.

В настоящем выпуске работа между авторами была распределена следующим образом:

Вулих З.З.	составил	§§46-48; 50
Волокобинский М.Е.	"	§§49,51,52.
Богомолов С.А.	"	§ 53
Новиков В.Н.		Приложение.

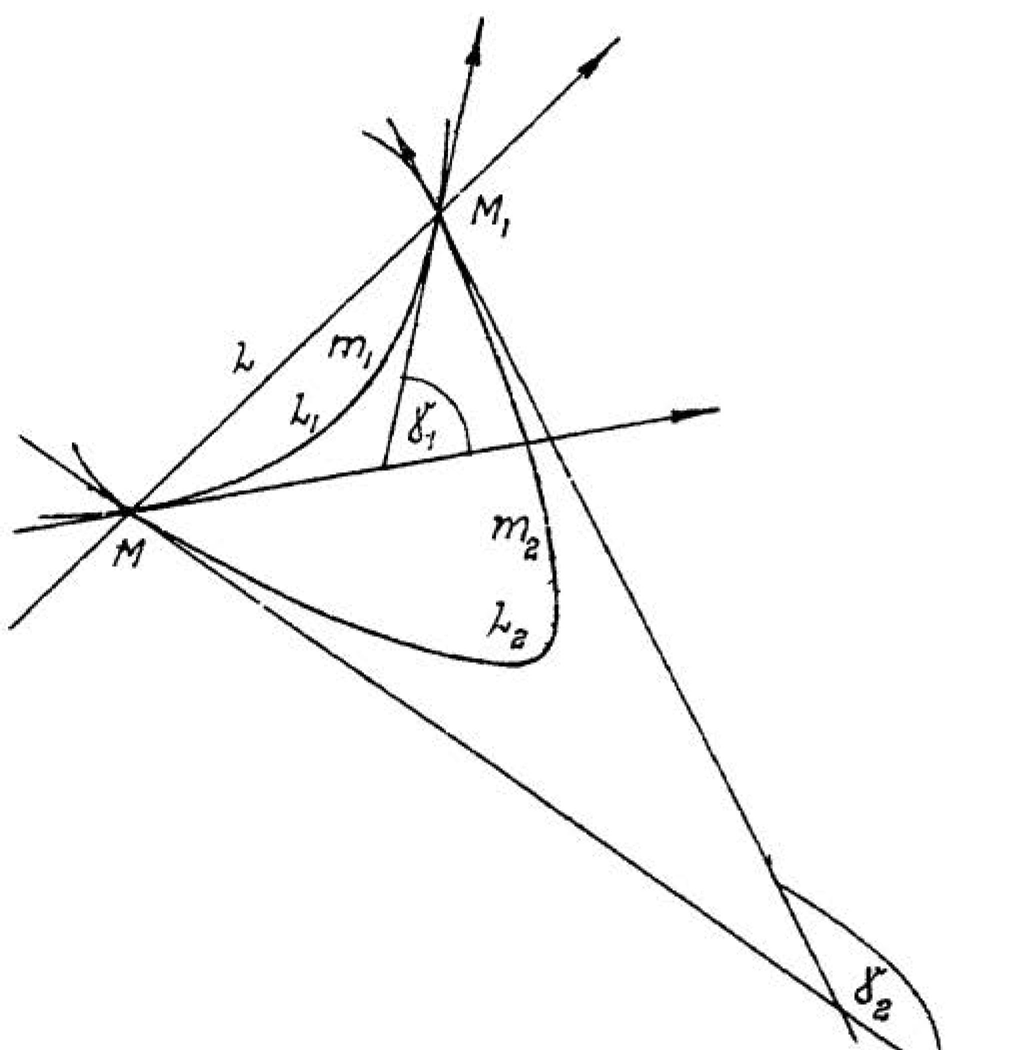
§ 46. КРИВИЗНА ПЛОСКИХ КРИВЫХ.

I. Определение кривизны; радиус кривизны.

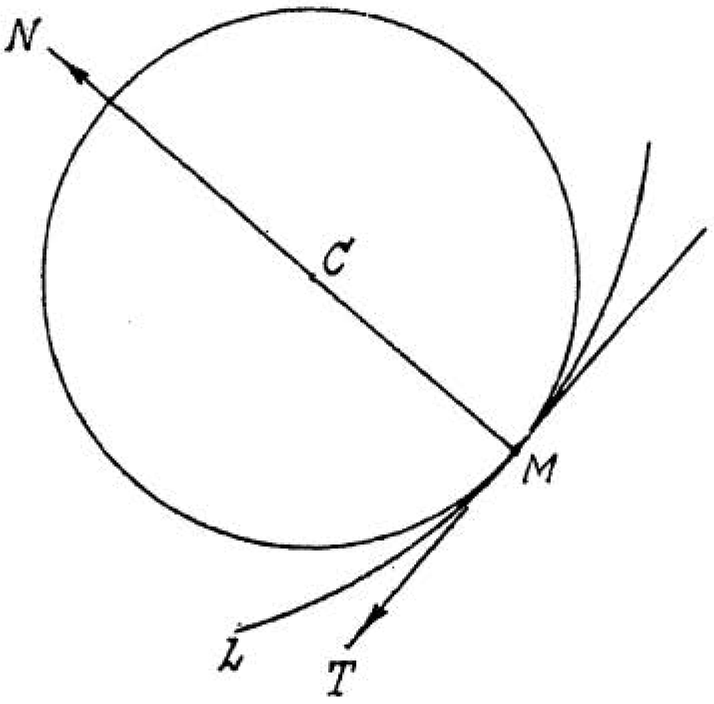
В I-й части курса мы уже познакомились с некоторыми вопросами, касающимися плоских кривых: мы умеем находить уравнения касательной и нормали к кривой в какой-нибудь ее точке и определять углы, образуемые этими прямыми с осями координат (§ 22); находить дифференциал дуги кривой (§ 21); определять направление вогнутости и отыскивать точки перегиба (§ 19). В настоящем и следующем параграфах мы продолжим изучение плоских кривых.

Займемся прежде всего вопросом о степени искривленности кривой, о так называемой ее кривизне.

Возьмем (черт.121) на плоскости 2 каких-нибудь точки M и M_1 и через эти точки по этой плоскости прове-



Черт. 121.



Черт. 123.

касательную MT и нормаль MN, направив ее в сторону вогнутости кривой, и отложим на этой нормали отрезок $MC=\frac{1}{K}$; опишем, наконец, из т. C окружность радиусом $R=CM=\frac{1}{K}$. Этот круг будет иметь, конечно, в т. M общую с данной кривой касательную MT; он называется кругом кривизны данной кривой в точке M.

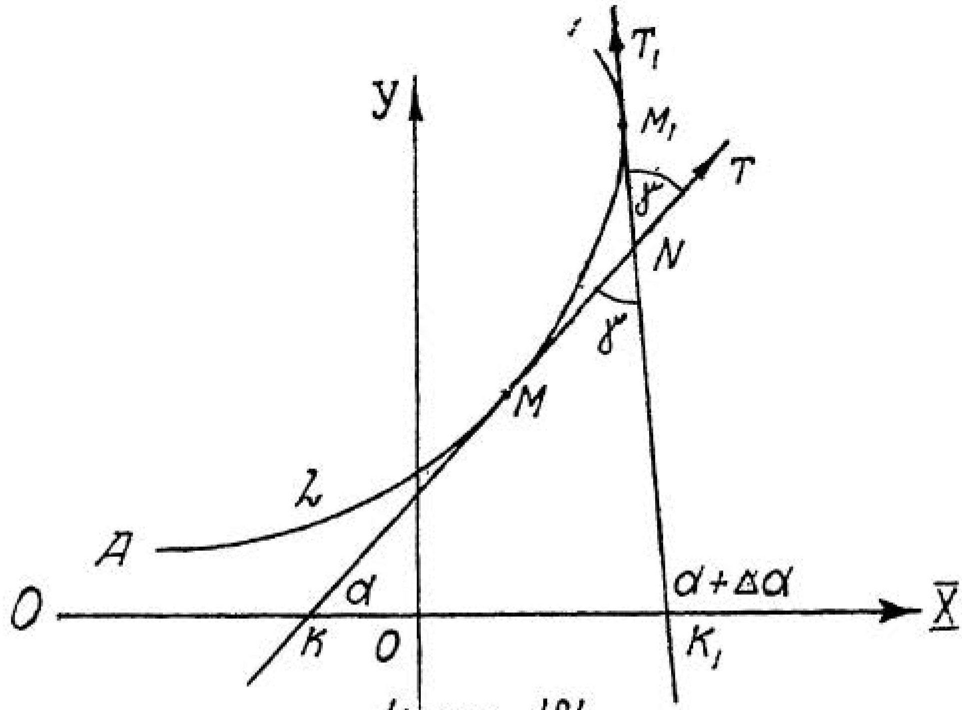
Итак, кругом кривизны кривой в данной точке называется круг: 1) проходящий через данную точку; 2) имеющий центр на нормали к кривой в данной точке со стороны вогнутости (имеющий, следовательно, в данной точке общую с кривой касательную) и 3) имеющий кривизну равную кривизне кривой в данной точке.

Радиус круга кривизны называется радиусом кривизны кривой в данной точке, а его центр - центром кривизны. Ясно, что в каждой точке кривая имеет свой круг кривизны, свой центр кривизны и свой радиус кривизны, и от точки к точке эти геометрические образы меняются.

Покажем, как вычислить радиус кривизны кривой в данной точке, и как, следовательно, найти ее кривизну.

Пусть (черт.124) уравнение некоторой кривой $\mathcal{L}$ по отношению к выбранной системе координат будет

$$y=f(x); \qquad (1)$$



Черт. 124.

Требуется найти радиус кривизны R этой кривой в точке $M(x, y)$.

Возьмем на кривой точку M_1 смежную с точкой M, и, принимая точку A за начало отсчета дуг, обозначим дугу AM буквой S, а дугу MM_1 через Δs. Проведем в точках M и M_1 касательные MT и M_1T_1, и пусть угол $\bar{X}KT$, образованный касательною MT с осью $O\bar{X}$, будет α; при переходе от точки M к точке M_1 угол, образованный касательною с осью $O\bar{X}$, получит некоторое приращение $\Delta\alpha$, так что $\angle \bar{X}K_1T_1 = \alpha + \Delta\alpha$. Угол между касательными $\angle TNT_1$ обозначим через γ (полная кривизна дуги MM_1).

Согласно определению, имеем:

$$R = \frac{1}{K} = \lim \left[\frac{\Delta s}{\gamma}\right]_{M_1 \to M};$$

но из $\triangle KNK_1$ следует, что

$$\gamma = (\alpha + \Delta\alpha) - \alpha = \Delta\alpha,$$

а потому

$$R = \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ \Delta\alpha \to 0}} \left[\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}\right] = \frac{ds}{d\alpha};$$

таким образом получаем первое выражение для радиуса кривизны:

$$\boxed{R = \frac{ds}{d\alpha}} \qquad (I)$$

Придадим ему другой более удобный для применения вид.

В § 21 была выведена формула для дифференциала дуги:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

которой можно придать такой вид:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = (1 + y'^2)^{1/2}\, dx.$$

Найдем теперь $d\alpha$. Так как

$$tg\ \alpha = y',$$

то

$$\alpha = arc\ tg\, y',$$

и потому

$$d\alpha = \frac{dy'}{1 + y'^2} = \frac{y''\, dx}{1 + y'^2} \qquad (*)$$

Подставляя эти выражения для ds и $d\alpha$ в формулу (I) и сокращая на dx, получим:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{1/2} \cdot (1 + y'^2)}{y''} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Будем считать R всегда положительным, и следовательно, для радиуса кривизны будем иметь второе выражение в таком виде:

$$\boxed{R = \left|\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}\right|} \qquad (II)$$

Здесь y' и y'' суть значения производных, выведенные из уравнения (I) и вычисленные для данной точки

<u>Примеры.</u>

I. Найти радиус кривизны параболы

$$x^2 = 8y$$

в точке (4,2).

Имеем: $y = \frac{x^2}{8}$; $y' = \frac{x}{4}$; $y'' = \frac{1}{4}$;

для данной точки: $y' = 1$; $y'' = \frac{1}{4}$;

следовательно, по формуле (II)

$$R = \frac{(1+1)^{3/2}}{\frac{1}{4}} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

2. Найти радиус кривизны циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

В прим. 2, § 19 (стр.235 и 236 вып.I, ч.I) мы имели:

$$y'_x = \operatorname{Cotg}\frac{t}{2}; \quad y''_x = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}};$$

следовательно,

$$1 + y'^2 = 1 + \operatorname{Cotg}^2\frac{t}{2} = \frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}.$$

и

$$(1 + y'^2)^{3/2} = \frac{1}{\sin^3\frac{t}{2}};$$

а потому

$$R = \left| -\frac{4a\sin^4\frac{t}{2}}{\sin^3\frac{t}{2}} \right| = 4a\sin\frac{t}{2}.$$

Так как в пределах одной арки циклоиды t изменяется от 0 до 2π, то

$$0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi,$$

и потому $Sin\frac{t}{2} > 0$, и знак абсолютной величины можно опустить.

Сравним радиус кривизны R с длиною нормали N (§ 22); имеем

$$S_n = yy' = 2a\,Sin^2\frac{t}{2}\,Cotg\frac{t}{2} = 2a\,Sin\frac{t}{2}\,Cos\frac{t}{2},$$

и $N = \sqrt{y^2 + S_n^2} = \sqrt{4a^2 Sin^4\frac{t}{2} + 4a^2 Sin^2\frac{t}{2}\,Cos^2\frac{t}{2}} = 2a\,Sin\frac{t}{2}$;

следовательно,

$$R = 2N,$$

т.е. радиус кривизны циклоиды в каждой ее точке равен удвоенной длине нормали. На этом основании чрезвычайно просто построением найти центр кривизны для каждой точки циклоиды, стоит только отложить по нормали в сторону вогнутости кривой удвоенную длину нормали.

3. Так как для точек перегиба кривых (§ 19,п.2) $y''=0$, то в этих точках радиус кривизны $R=\infty$.

4. Траектория центра инерции снаряда в параболической теории задается уравнением

$$y = p_0 x - \frac{gx^2}{2u_0^2},$$

где p_0, g, u_0 - постоянные (Окунев "Внешняя и внутренняя баллистика", стр. 46-47). Найти радиус кривизны траектории, дифференциал ее дуги и длину дуги.

По уравнению траектории составляем:

$$y' = p_0 - \frac{gx}{u_0^2}$$

и

$$y'' = -\frac{g}{u_0^2};$$

вводя угол θ, образованный касательною к траектории с осью OX (при выводе формул он был у нас обозначен буквою α) и замечая, что $y'=tg\theta$, будем иметь:

$$R=\left|\frac{(1+tg^2\theta)^{3/2}}{-\frac{g}{u_0^2}}\right|=\frac{u_0^2}{g}\cdot\frac{1}{Cos^3\theta}.$$

Чтобы найти ds, воспользуемся формулой (I) для R, т.е.

$$R=\frac{ds}{d\theta},$$

откуда

$$ds=Rd\theta=\frac{u_0^2}{g}\cdot\frac{d\theta}{Cos^3\theta}.$$

Чтобы найти длину дуги s при изменении угла θ от некоторого значения θ_0 до любого θ, надо взять интеграл:

$$s=\frac{u_0^2}{g}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{Cos^3\theta}=\frac{u_0^2}{g}\left[\frac{\sin\theta}{Cos^2\theta}+\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]_{\theta_0}^{\theta}$$

Задачи для упражнений.

I) Найти радиус кривизны кривой

$$y=\frac{x}{1+x^2}$$

в точке $(1,\frac{1}{2})$. Ответ: 2.

2) Найти радиус кривизны кривой

$$xy=12$$

в точке (3,4) Ответ: $\frac{125}{24}$.

3) Найти радиус кривизны цепной линии

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right);$$

доказать, что он пропорционален квадрату ординаты, и определить, в какой точке цепной линии он будет наименьшим.

Ответ: $R=\frac{y^2}{a}$; $R_{min}=a$ в точке $(0, a)$.

4) Найти радиус кривизны астроиды

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$$

Ответ: $R=\frac{3}{2}a\sin 2t$.

5) Найти радиус кривизны развертки круга

$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$$

Ответ: $R=at$.

6) В какой точке параболы

$$y=x^2-2x-3$$

радиус кривизны равен $\frac{37\sqrt{37}}{2}$?

Ответ: (4,5) и (- 2,5).

7) Задача № 172 из Сборника кафедры.

2. Центр кривизны. Эволюта.

Чтобы определить положение центра кривизны, надо найти две его координаты, которые обозначим x_c и y_c а для определения двух неизвестных надо составить два уравнения.

Мы знаем, что

во-1) центр кривизны лежит на нормали к кривой; следовательно, его координаты удовлетворяют уравнению нормали (§ 22, п. 3, ур.(4)):

$$(x_c-x)+y'(y_c-y)=0;$$

во-2) расстояние от центра кривизны (x_c, y_c) до данной точки (x, y) кривой равно радиусу кривизны в этой точке, т.е.

$$\sqrt{(x_c-x)^2+(y_c-y)^2}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Таким образом, возвысив обе части последнего уравнения в квадрат, получим для определения x_c и y_c систему:

$$\begin{cases} (x_c - x) + y'(y_c - y) = 0 \\ (x_c - x)^2 + (y_c - y)^2 = \dfrac{(1+y'^2)^3}{y''^2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$$x_c - x = -y'(y_c - y);$$

подставив это выражение во 2-е уравнение, будем иметь:

$$y'^2(y_c - y)^2 + (y_c - y)^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$$

или

$$(y_c - y)^2(1+y'^2) = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2},$$

откуда:

$$y_c - y = \pm\frac{1+y'^2}{y''}$$

Посмотрим, надо ли здесь удержать оба знака, или выбрать только один.

Допустим (черт.125, I), что рассматривается точка M, в которой вогнутость направлена вниз; тогда

$$y_c < y \quad \text{и} \quad y_c - y < 0;$$

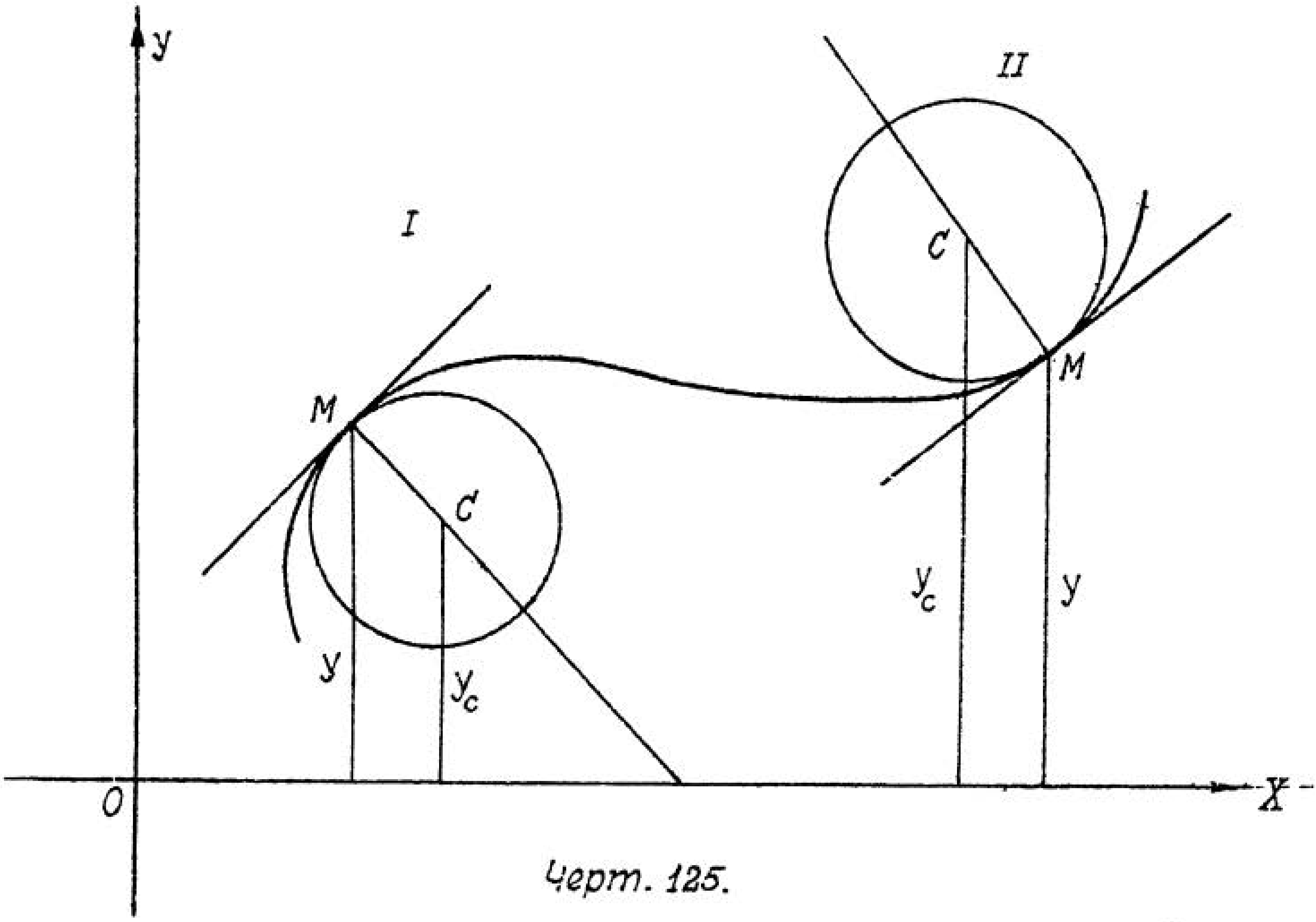
но в этом случае (§ 19, п.1) $y'' < 0$, а так как $1 + y'^2 > 0$, то чтобы в правой части получилось отрицательное число, необходимо удержать только знак +.

Допустим теперь (черт.125, II), что рассматривается точка M, в которой вогнутость направлена вверх; тогда

$$y_c > y \quad \text{и} \quad y_c - y > 0;$$

но в этом случае $y'' > 0$, а так как по прежнему числитель $1+y'^2 > 0$, то, чтобы в правой части получилось положительное число, необходимо опять удержать только знак +.

Итак $y_c - y = \frac{1+y'^2}{y''}$,



Черт. 125.

и потому

$$x_c - x = -y' \cdot \frac{1+y'^2}{y''}$$

Таким образом для координат центра кривизны получаем окончательно следующие формулы:

$$\boxed{\begin{cases} x_c = x - y' \cdot \dfrac{1+y'^2}{y''} \\ y_c = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases} \qquad (2)}$$

Укажем еще другие виды выражений для x_c и y_c. По формуле (*) п.I этого § имеем

$$\frac{1+y'^2}{y''} = \frac{dx}{d\alpha} ,$$

и потому

$$y'\cdot\frac{1+y'^2}{y''}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\alpha}=\frac{dy}{d\alpha};$$

следовательно, формулы (2) могут быть написаны в таком виде:

$$\boxed{\begin{cases} x_c = x - \dfrac{dy}{d\alpha} \\ y_c = y + \dfrac{dx}{d\alpha} \end{cases}} \qquad (2')$$

Далее заметим, что, принимая во внимание формулы (3) § 22, п.I

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\ \frac{dy}{ds}=\sin\alpha,$$

а также выр.(I) для радиуса кривизны R, будем иметь:

$$\frac{dy}{d\alpha}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{d\alpha}=R\sin\alpha$$

и

$$\frac{dx}{d\alpha}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{d\alpha}=R\cos\alpha;$$

и следовательно

$$\boxed{\begin{cases} x_c = x - R\sin\alpha \\ y_c = y + R\cos\alpha \end{cases}} \qquad (2'')$$

Вообразим себе некоторую плоскую кривую; в каждой ее точке имеется своей центр кривизны; геометрическое место всех центров кривизны называется эволютою кривой, а сама кривая по отношению к своей эволюте называется <u>эвольвентой</u>.

Покажем, как составить уравнение эволюты. Текущею ее точкой является центр кривизны данной кривой; обозначив ее координаты через $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, будем иметь:

$$\begin{cases} \bar{X} = x - y'\cdot\dfrac{1+y'^2}{y''} \\ \bar{Y} = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases} \qquad (3)$$

Если уравнение кривой задано в виде

$$y=f(x),$$

то, найдя y' и y'' в функции от x, подставим их в уравнения (3) и таким образом получим выражения X и Y через переменную x. Если из полученных уравнений можно исключить x, то мы это сделаем, и тогда уравнение эволюты примет вид:

$$F^e(X,Y)=0.$$

Если же такого исключения сделать не удастся, то считая x за параметр, оставим уравнение эволюты в параметрической форме (3).

<u>Замечание</u>. Понятно, что в некоторых случаях за параметр удобнее принять y, или даже совсем другую переменную.

<u>Примеры.</u>

I. Найти уравнение эволюты параболы

$$y^2=2px.$$

В этой задаче удобнее за параметр принять не x, а y; тогда

$$x=\frac{y^2}{2p}.$$

Чтобы найти y' и y'', дифференцируем уравнение параболы:

$$yy'=p, \text{ откуда } y'=\frac{p}{y};$$

дифференцируя еще раз, получим:

$$yy''+y'^2=0 \text{ или } yy''+\frac{p^2}{y^2}=0,$$

откуда:

$$y''=-\frac{p^2}{y^3}.$$

Таким образом

$$\frac{1+y'^2}{y''}=\frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}}=-\frac{y(y^2+p^2)}{p^2},$$

и следовательно,

$$\begin{cases} \overline{X}=\frac{y^2}{2p}+\frac{y^2+p^2}{p}=\frac{3y^2+2p^2}{2p} \\ \overline{Y}=y-\frac{y(y^2+p^2)}{p^2}=-\frac{y^3}{p^2} \end{cases} ;\ (4)$$

это и будут уравнения эволюты параболы в параметрической форме.

Исключим из этих уравнений y.

Из I-го уравнения имеем:

$$y^2=\frac{2p\overline{X}-2p^2}{3}=\frac{2p}{3}(\overline{X}-p),$$

а из 2-го:

$$y^3=-p^2\overline{Y};$$

возвысим первое из полученных таким образом уравнений в 3-ю степень, а второе во 2-ю:

$$y^6=\frac{8p^3}{27}(\overline{X}-p)^3$$

$$y^6=p^4\overline{Y}^2;$$

следовательно,

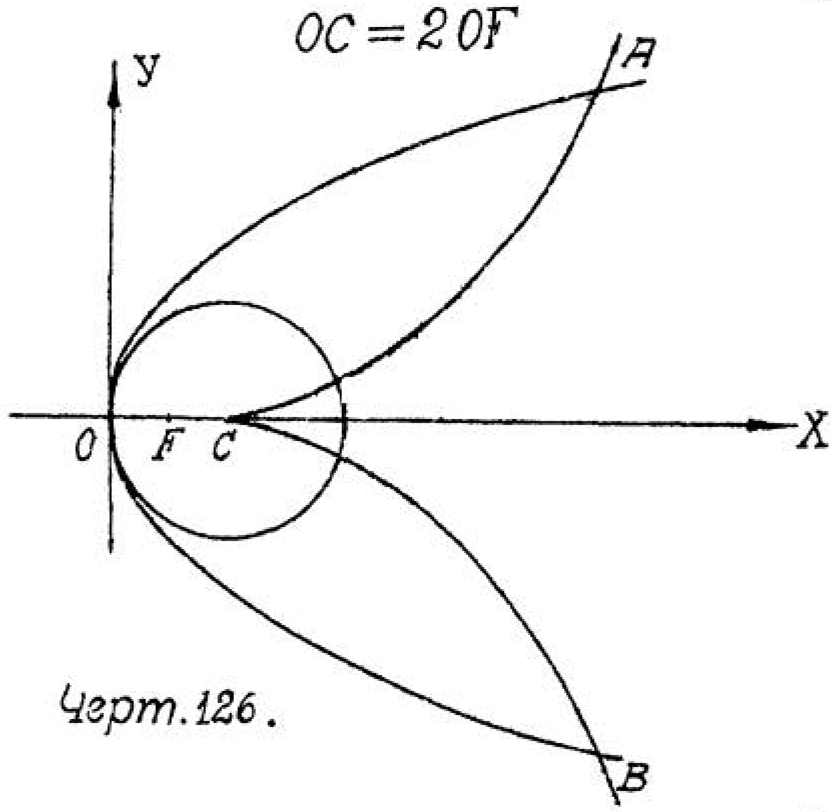
$$p^4\overline{Y}^2=\frac{8p^3}{27}(\overline{X}-p)^3,$$

или окончательно:

$$\overline{Y}^2=\frac{8}{27p}(\overline{X}-p)^3 \qquad (5)$$

Эта кривая называется <u>полукубической параболой</u>. Она изображена на черт. I26.

Из уравнений (4) следует, что для вершины параболы $O(0,0)$ центром ее кривизны будет т. $C(p,0)$, лежащая на оси симметрии параболы в расстоянии от вершины равном удвоенному расстоянию от вершины фокуса $F(\frac{p}{2}, 0)$,т.е. $OC = 2OF$



Черт.126.

Более подробное исследование этой кривой показывает, что она вся расположена правее точки C и состоит из двух ветвей: одна из них обращена вогнутостью вверх и пересекает параболу в точке A ($4p$, $2p\sqrt{2}$), другая обращена вогнутостью вниз и пересекает параболу в точке B ($4p$, $-2p\sqrt{2}$), ось симметрии параболы является осью симметрии и для эволюты, а также общею касательною к двум ветвям полукубической параболы в точке C.

2. Найти эволюту циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \qquad (6)$$

При вычислении радиуса кривизны циклоиды (прим.2 п.1 этого §) мы имели:

$$y' = \operatorname{Cotg}\frac{t}{2}; \quad y'' = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}};$$

$$1 + y'^2 = \frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}; \quad \frac{1+y'^2}{y''} = -4a\sin^2\frac{t}{2}.$$

Следовательно, уравнения (3) получат вид:

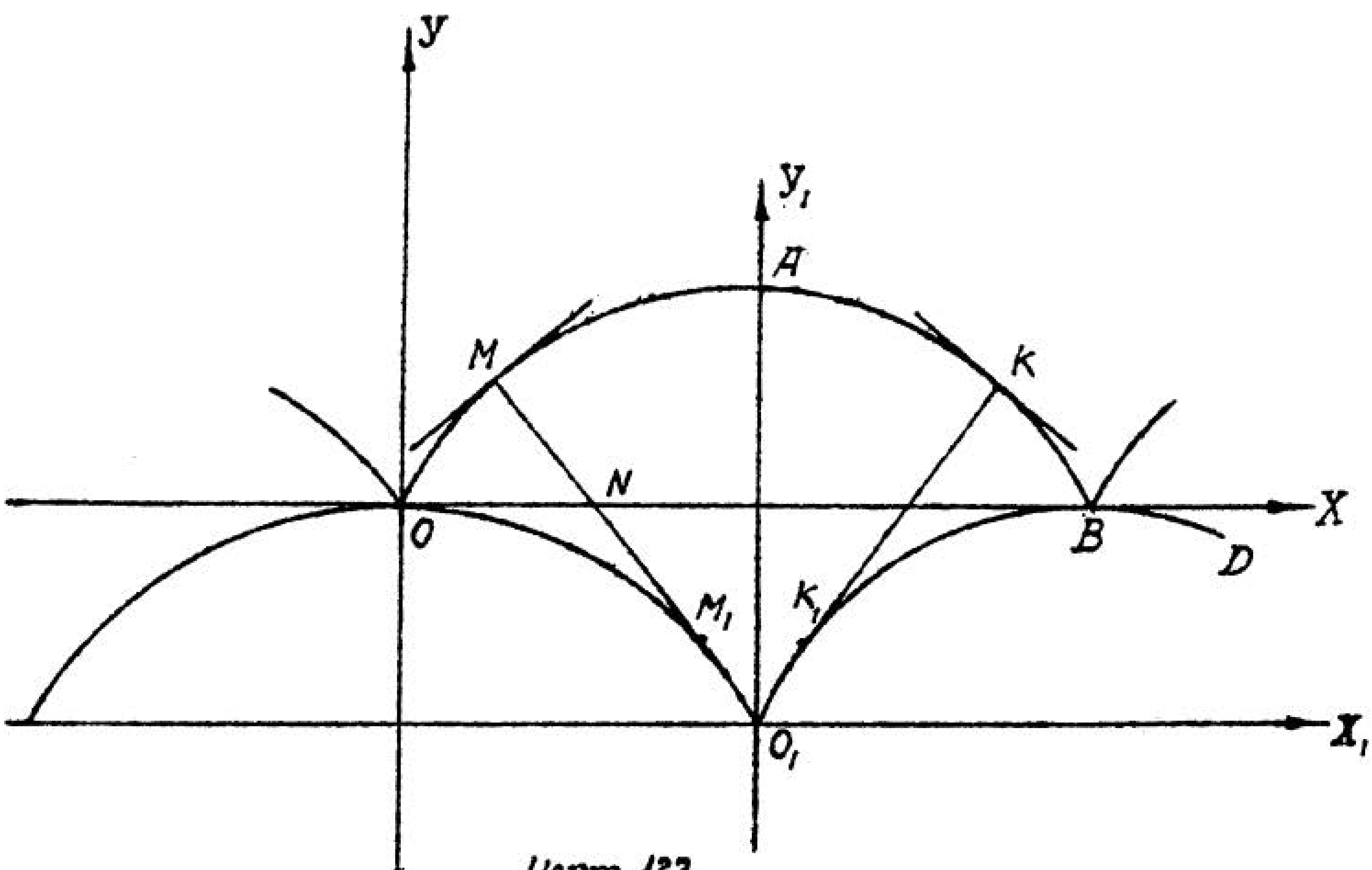
$$\begin{cases} X = a(t - \sin t) + \operatorname{Cotg}\frac{t}{2}\cdot 4a\sin^2\frac{t}{2} = at - a\sin t + 2a\sin t = \\ \quad = a(t + \sin t) \\ Y = a(1 - \cos t) - 4a\sin^2\frac{t}{2} = a(1 - \cos t) - 2a(1 - \cos t) = -a(1 - \cos t) \end{cases}$$

итак, уравнения эволюты циклоиды суть:

$$\begin{cases} X = a(t + \sin t) \\ Y = -a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (7)$$

Покажем, что этим уравнениям соответствует такая же точно циклоида, как данная, только иначе расположенная.

Пусть (черт.127) уравнения (6) соответствуют циклоиде OAB. Полагая в уравнениях(7) $t = \pi + t_1$,



Черт. 127.

получим:

$$\begin{cases} X = a(\pi + t_1 - \sin t_1) = a\pi + a(t_1 - \sin t_1) \\ Y = -a(1 + \cos t_1) = -2a + a(1 - \cos t_1). \end{cases}$$

Из этих уравнений ясно, что, если, оставив направления осей прежними, перенести начало координат в точку $O_1(\pi a, -2a)$, то в новой системе уравнения эволюты будут:

$$\begin{cases} X_1 = a(t_1 - \sin t_1) \\ Y_1 = a(1 - \cos t_1), \end{cases}$$

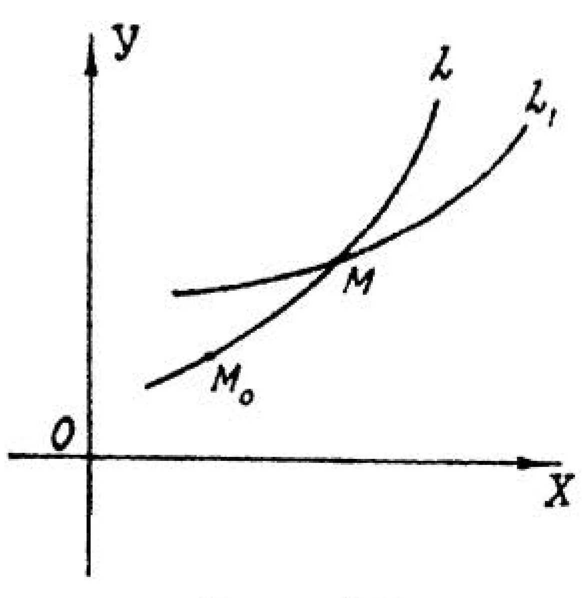
т.е. будут совершенно того же вида, как и уравнения (6) данной циклоиды; следовательно, эволютой циклоиды OAB будет такая же точно циклоида O_1BD; при этом OO_1, будет эволютой дуги OA, а O_1B - дуги AB. Центр кривизны циклоиды в точке M будет точка M_1, и, как мы видели выше, $MN = NM_1$; в точке A будет точка O_1, и в точке K - точка K_1.

3. Огибающая семейства кривых.

Рассмотрим уравнение

$$f(x, y, \alpha) = 0, \qquad (8)$$

отнесенное к некоторой прямоугольной системе координат (черт.128), и пусть это уравнение определяет y как непрерывную функцию от x. В этом уравнении x и y - координаты текущей точки линии, выражаемой этим уравнением, а α - некоторый параметр, который может принимать различные значения. Всякому определенному значению параметра α соответствует некоторая определенная кривая $\mathcal{L}$; совокупность всех кривых, соответствующих различным значениям α, образует семейство кривых, выражаемых уравнением (8).



Черт. 128.

Так, уравнение

$$y^2 = 2px$$

выражает семейство парабол, имеющих вершину в начале координат и ось x-ов – осью симметрии (переменный параметр – p); линии

$$y^2=8x\,,\ y^2=-3x,\ y^2=x,\ y^2=\frac{7}{4}x \text{ и т.д.}$$

будут линиями этого семейства.

Уравнение

$$y=ax$$

выражает семейство прямых, проходящих через начало координат (переменный параметр – a);

Уравнение

$$x^2+y^2=r^2$$

выражает семейство концентрических окружностей, описанных из начала координат (переменный параметр – r) и т.д.

Иногда уравнение содержит 2 и более переменных параметра; например, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

выражает семейство эллипсов, центр которых находится в начале координат, а оси симметрии направлены по осям координат (2 переменных параметра a и b); уравнение

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

выражает семейство всех окружностей, расположенных на одной плоскости (3 переменных параметра - α, β и r) и т.д.

Возьмем кривую $\mathcal{L}$, соответствующую параметру α в уравнении (8); дадим параметру α некоторое приращение $\Delta\alpha$; тогда новому значению $\alpha+\Delta\alpha$ параметра будет соответствовать некоторая другая линия того же семейства $\mathcal{L}_1$, уравнение которой будет

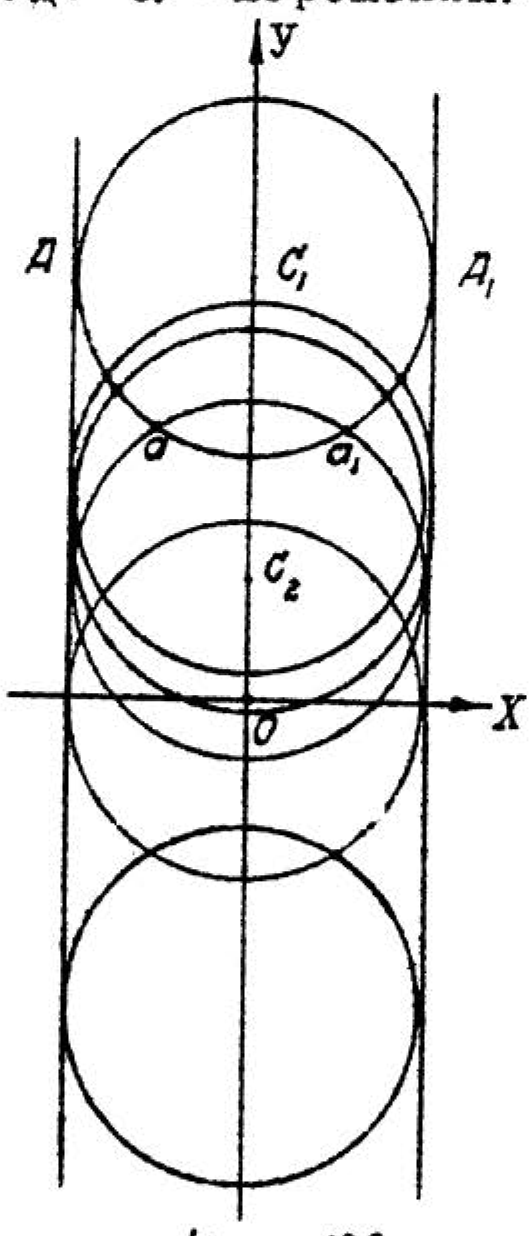
$$f(x,y,\alpha+\Delta\alpha)=0; \quad (9)$$

пусть точкою пересечения этих двух линий будет точка M. Станем теперь изменять приращение $\Delta\alpha$, неограниченно приближая его к O; тогда кривая $\mathcal{L}_1$, изменяясь, будет стремиться к совпадению с кривою $\mathcal{L}$, а точка пересечения этих линий, перемещаясь по линии $\mathcal{L}$, будет стремиться к некоторому предельному положению M_0, которое называется характеристической точкой. Для каждой линии данного семейства имеется своя характеристическая точка, причем таких точек может быть и несколько, например, если смежные линии одного семейства, пересекаются не в одной, а в двух или более точках. Геометрическое место характеристических точек всех линий данного семейства называется огибающею этого семейства, а по отношению к огибающей сами линии называются огибаемыми.

Возьмем, например, уравнение

$$x^2+(y-\alpha)^2=r^2,$$

где α - переменный параметр, а r - определенное число; оно выражает семейство окружностей (черт.129) одного и того же радиуса r, центры которых находятся на оси OY. Пусть при некотором значении параметра α окружность имеет центр в точке C_1; при другом значении параметра $\alpha+\Delta\alpha$ окружность имеет центр в точке C_2; точками пересечения этих окружностей будут точки a и a_1. Если мы станем приближать приращение $\Delta\alpha$ к O, то центр C_2 будет стремиться к совпадению с центром C_1, вторая окружность - к совпадению с первой, а точки пересечения - к совпадению с точками



Черт. 129.

A и A_1; это и будут характеристические точки окружности с центром C_1.

Выведем уравнение огибающей семейства линий, выражаемых уравнением (8).

Пусть уравнение

$$f(x,y,\alpha)=0 \qquad (8)$$

есть уравнение одной из этих кривых $\mathcal{L}$ (черт.128), соответствующей определенному значению параметра α, а уравнение

$$f(x,y,\alpha+\Delta\alpha)=0 \qquad (9)$$

есть уравнение другой кривой $\mathcal{L}_1$ того же семейства, соответствующей значению параметра $\alpha+\Delta\alpha$. Чтобы определить координаты точек пересечения этих линий, надо совместно решить уравнение (8) и (9):

$$\begin{cases} f(x,y,\alpha)=0 \\ f(x,y,\alpha+\Delta\alpha)=0; \end{cases}$$

из алгебры известно, что координаты этих же точек будут удовлетворять и всякой другой системе, эквивалентной этой, например, такой:

$$\begin{cases} f(x,y,\alpha)=0 \\ \dfrac{f(x,y,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,y,\alpha)}{\Delta\alpha}=0, \end{cases}$$

где 2-е уравнение, очевидно, есть следствие уравнений (8) и (9), так как получается почленным вычитанием уравнения (8) из уравнения (9) и делением результата на $\Delta\alpha$.

Если мы теперь станем приближать $\Delta\alpha$ к 0, то 1-е уравнение не изменится, а 2-е в пределе обратится в

$$\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{\partial\alpha}=0,$$

и система:

$$\boxed{\begin{cases} f(x,y,\alpha)=0 \\ \dfrac{\partial f(x,y,\alpha)}{\partial \alpha}=0 \end{cases}} \qquad (10)$$

определит координаты предельного положения точки M, т.е. координаты характеристической точки M_0.

Если из этих уравнений (10) исключить параметр α, то получится зависимость между координатами характеристической точки, т.е. уравнение геометрического места характеристических точек данного семейства линий, иначе говоря, уравнение его огибающей.

Иногда удобнее бывает определить x и y из уравнений (10) в функциях от α, и тогда уравнение огибающей получится в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=\varphi(\alpha) \\ y=\psi(\alpha) \end{cases} \qquad (11)$$

<u>Задачи.</u>

1. Найти огибающую семейства окружностей данного радиуса r, центры которых лежат на оси OY.

Если за параметр α выбрать расстояние центра такого круга от начала координат (черт.129), то, как мы видели выше, уравнение семейства этих окружностей будет:

$$x^2+(y-\alpha)^2=r^2;$$

тогда будем иметь:

$$f(x,y,\alpha)=x^2+(y-\alpha)^2-r^2$$

и

$$\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{\partial \alpha}=-2(y-\alpha),$$

и уравнения (10) напишутся так:

$$\begin{cases} x^2+(y-\alpha)^2=r^2 \\ -2(y-\alpha)=0, \text{ т.е. } y-\alpha=0. \end{cases}$$

Исключив из этой системы α, получим:

$$x^2=r^2 \quad \text{или} \quad x=\pm r;$$

следовательно, огибающей системы рассматриваемых окружностей будет совокупность двух прямых параллельных оси OY и касающихся данных окружностей.

Результат этот можно было предвидеть и из рассмотрения по чертежу положения характеристических точек.

2. Из орудия выбрасывается снаряд с начальной скоростью v_0. Предполагая, что орудию можно придать любое направление, и что оно всегда находится в одной плоскости, найти огибающую всех возможных траекторий снаряда (пренебрегая сопротивлением воздуха).

Уравнение траектории снаряда в таком случае, как мы уже неоднократно видели, будет

$$y=x\,tg\,\theta-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}, \qquad (12)$$

где θ - угол бросания.

Приняв за параметр

$$tg\,\theta=\alpha$$

и заметив, что

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\alpha^2,$$

перепишем уравнение (12) в виде:

$$y=x\alpha-\frac{gx^2(1+\alpha^2)}{2v_0^2}.$$

Таким образом уравнения (10) будут:

$$\begin{cases} y=x\alpha-\dfrac{gx^2}{2v_0^2}-\dfrac{gx^2\alpha^2}{2v_0^2} \\ x-\dfrac{gx^2\alpha}{v_0^2}=0; \end{cases}$$

из 2-го уравнения определяем

$$x\alpha = \frac{v_0^2}{g}$$

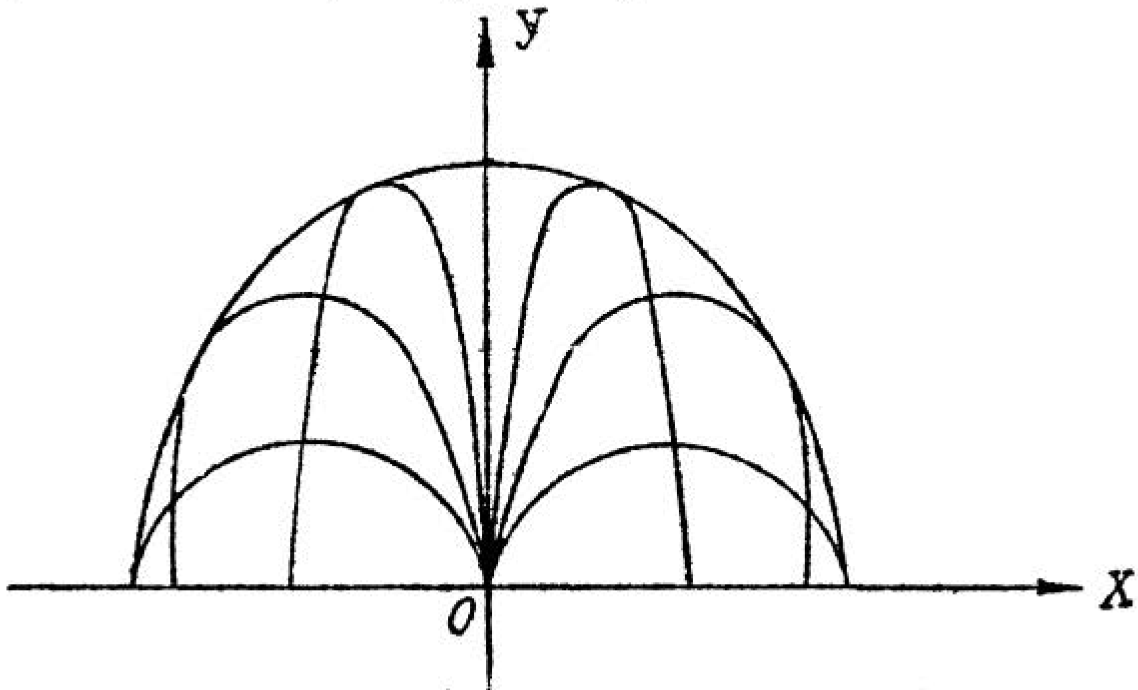
и подставляем это выражение в I-е уравнение:

$$y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{g \cdot v_0^4}{2v_0^2 g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g},$$

и окончательно уравнение искомой огибающей будет

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2},$$

т.е. огибающей будет парабола с вершиною в точке $(0, \frac{v_0^2}{2g})$, осью ее симметрии будет ось OY, вогнутость ее будет направлена вниз. Эта парабола носит название " параболы безопасности" (черт.130).



Черт. 130.

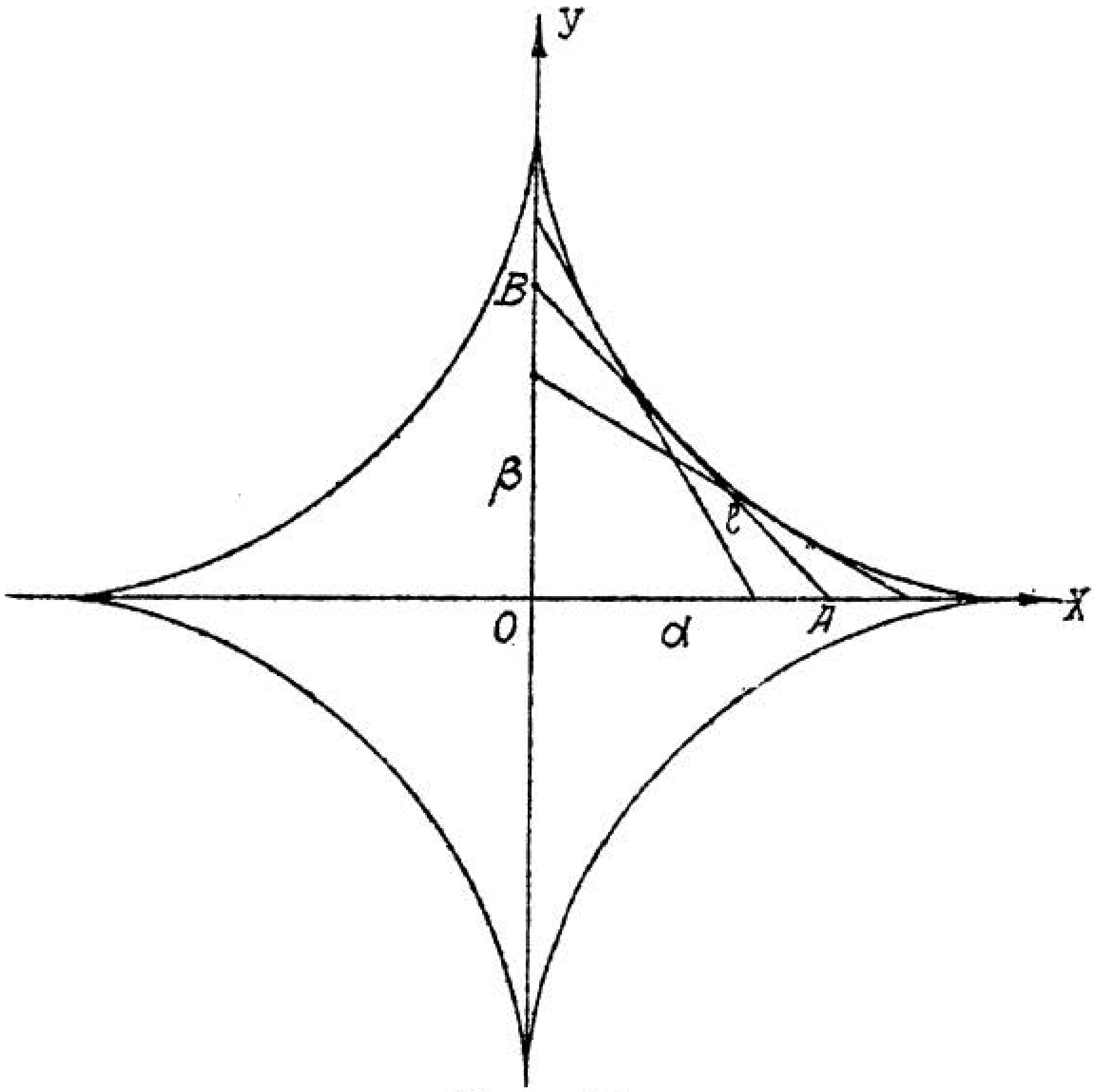
3. Найти огибающую прямых линий постоянной длины ℓ, концы которых движутся по двум взаимно-перпендикулярным прямым.

Примем (черт.131) эти взаимно-перпендикулярные прямые за оси координат и напишем уравнение движущейся прямой в отрезках на осях, которые обозначим буквами α и β :

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1.$$

Рассматривая одно из положений $AB = \ell$ движущейся прямой, для которого $\alpha = OA$ и $\beta = OB$, мы видим, что

$$\alpha^2+\beta^2=\ell^2, \quad \text{откуда} \quad \beta=\sqrt{\ell^2-\alpha^2};$$



Черт. 131.

заменяя этим выражением букву β, мы получим уравнение семейства прямых в виде

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\sqrt{\ell^2-\alpha^2}}=1,$$

так что

$$f(x,y,\alpha)=\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\sqrt{\ell^2-\alpha^2}}-1$$

и

$$\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{\partial\alpha}=-\frac{x}{\alpha^2}+\frac{\alpha y}{(\ell^2-\alpha^2)^{3/2}}.$$

Таким образом уравнения (IC) могут быть написаны так:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{(\ell^2-\alpha^2)^{1/2}} = 1 \\[2ex] \dfrac{y}{(\ell^2-\alpha^2)^{3/2}} = \dfrac{x}{\alpha^3}. \end{cases}$$

Возвысим обе части 2-го уравнения в степень $\frac{2}{3}$:

$$\frac{y^{2/3}}{\ell^2-\alpha^2} = \frac{x^{2/3}}{\alpha^2};$$

применим к этой пропорции свойство: сумма членов предыдущих относится к сумме членов последующих, как каждое предыдущее к своему последующему:

$$\frac{x^{2/3}}{\alpha^2} = \frac{y^{2/3}}{\ell^2-\alpha^2} = \frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{\ell^2};$$

отсюда получаем:

$$\alpha^2 = \frac{x^{2/3}\ell^2}{x^{2/3}+y^{2/3}} \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{x^{1/3}\ell}{\sqrt{x^{2/3}+y^{1/3}}},$$

$$\ell^2-\alpha^2 = \frac{y^{2/3}\ell^2}{x^{2/3}+y^{2/3}} \quad \text{или} \quad (\ell^2-\alpha^2)^{1/2} = \frac{y^{1/3}\ell}{\sqrt{x^{2/3}+y^{2/3}}};$$

подставив эти выражения в I-е уравнение, будем иметь:

$$\frac{x^{2/3}\sqrt{x^{2/3}+y^{2/3}}}{\ell} + \frac{y^{2/3}\sqrt{x^{2/3}+y^{2/3}}}{\ell} = 1$$

или

$$(x^{2/3}+y^{2/3})^{3/2} = \ell$$

или окончательно

$$x^{2/3}+y^{2/3} = \ell^{2/3},$$

т.е. искомой огибающей является астроида.

Основное свойство огибающей.

Рассматривая чертежи 129, 130 и 131 и обратив внимание на то, что касательной к прямой линии является она сама, мы можем подметить следующее основное свойство огибающей, которое мы и докажем.

Огибающая и огибаемая имеют в общей их точке (характеристической точке огибаемой) и общую касательную.

Для этого надо доказать, что в этой общей точке касательные к огибаемой и к огибающей имеют один и тот же угловой коэффициент. Составим выражения для того и другого.

Берем некоторую определенную огибаемую; ее уравнение будет

$$f(x, y, \alpha) = 0, \qquad (8)$$

причем, так как огибаемая определенная, то α есть некоторое определенное постоянное число. Угловой коэффициент касательной к ней $y'_x = \frac{dy}{dx}$ мы найдем, если продифференцируем это уравнение (8) по правилу дифференцирования неявных функций (§44, п.I), считая α постоянным:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'_x = 0,$$

откуда:

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (*)$$

Огибающая выражается уравнением, получающимся как результат исключения α из системы:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Это исключение можно выполнить так: из 2-го уравнения определяем α, как некоторую функцию от x и y, и это выражение подставляем в I-е уравнение; таким образом огибающая выражается тем же уравнением:

$$f(x,y,\alpha)=0, \qquad (8)$$

но только в нем надо рассматривать α как функцию от x и y, определяемую вторым уравнением системы (IO). Дифференцируя уравнение (8) при этом условии получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'_x+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial y}y'\right)=0;$$

но для характеристической точки, которую мы теперь и рассматриваем, в силу второго уравнения системы (IO)

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0;$$

следовательно, последнее уравнение обратится в

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'_x=0,$$

из которого для y'_x получается то же выражение

$$y'_x=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

что и раньше, а это и доказывает теорему.

Замечание. Из доказанного свойства следует, что огибающая касается всех линий семейства в их характеристических точках.

4. Рассмотрим теперь некоторые свойства эволют.

Свойство I. Эволюта есть огибающая нормалей к данной кривой.

Пусть имеется кривая, заданная уравнением

$$y=f(x); \qquad (I)$$

составим уравнение нормали к этой кривой в точке (x,y), обозначив координаты текущей точки нормали через X и У:

$$(X-x)+y'(Y-y)=0. \qquad (2)$$

Если в этом уравнении заменить y и y' их выражениями в функции от x на основании уравнения (I), то получится уравнение, связывающее X, Y и x; мы можем его рассматривать как уравнение семейства нормалей, проведенных к данной кривой (I), причем переменным параметром будет x - абсцисса точки данной кривой. Составим уравнение огибающей этого семейства нормалей; для этого надо к уравнению (2) присоединить уравнение, получающееся из уравнения (2) дифференцированием по параметру x, т.е.

$$-1+(Y-y)y''-y'^2=0;$$

итак, уравнением искомой огибающей будет результат исключения x из системы:

$$\begin{cases} (X-x)+y'(Y-y)=0 \\ -1+(Y-y)y''-y'^2=0, \end{cases}$$

которую можно заменить другою: из 2-го уравнения имеем:

$$Y-y=\frac{1+y'^2}{y''},$$

а, подставив это выражение в I-е уравнение, найдем:

$$X-x=-y'\cdot\frac{1+y'^2}{y''},$$

таким образом для получения уравнения огибающей надо исключить x из системы

$$\begin{cases} X=x-y'\cdot\dfrac{1+y'^2}{y''} \\ Y=y+\dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases} \qquad (3)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (3) п.2 этого параграфа, которые дают уравнение эволюты, мы замечаем, что они совпадают, а это и показывает, что огибающей нормалей является эволюта.

Следствие. Уравнения (3) с одной стороны определяют центр кривизны кривой (1), а с другой стороны они же определяют и характеристическую точку нормали к кривой, т.е. предельное положение точки пересечения двух бесконечно близких нормалей; следовательно, центр кривизны кривой можно рассматривать, как предельное положение точки пересечения двух бесконечно близких нормалей.

Свойство 2. Касательная к эволюте является нормалью к эвольвенте.

Это свойство можно сейчас же вывести из доказанного свойства I. Действительно, эволюта есть огибающая нормалей к эвольвенте, а мы видели, что огибающая касается всех линий семейства огибаемых, т.е. в данном случае нормалей к эвольвенте; следовательно, касательная к эволюте и есть нормаль к эвольвенте (черт.132).

Свойство 3. Дифференциал дуги эволюты численно равен дифференциалу радиуса кривизны эвольвенты.

Обозначим дифференциал дуги эволюты через $d\sigma$; тогда

$$d\sigma^2 = dX^2 + dY^2,$$

где X и У суть координаты текущей точки эволюты. Так как эволюта есть геометрическое место центров кривизны данной кривой, то ее уравнение можно написать не только в виде (3) п.2 этого параграфа, но и беря для координат центра кривизны другие выведенные нами выражения. Возьмем выражения (2''); тогда уравнения эволюты представляется в виде:

$$\begin{cases} X = x - R\sin\alpha \\ Y = y + R\cos\alpha\,; \end{cases}$$

дифференцируем их:

$$\begin{cases} dX = dx - R\cos\alpha\, d\alpha - \sin\alpha\, dR \\ dY = dy - R\sin\alpha\, d\alpha + \cos\alpha\, dR\,. \end{cases} \qquad (*)$$

Но, как мы видели в том же п.2,

$$\begin{cases} R \sin\alpha = \dfrac{dy}{d\alpha} \\ R \cos\alpha = \dfrac{dx}{d\alpha}; \end{cases}$$

следовательно

$$dy - R\sin\alpha\, d\alpha = 0$$
$$dx - R\cos\alpha\, d\alpha = 0,$$

и уравнения (*) принимают вид:

$$\begin{cases} d\underline{X} = -\sin\alpha\, dR \\ d\overline{Y} = \cos\alpha\, dR, \end{cases}$$

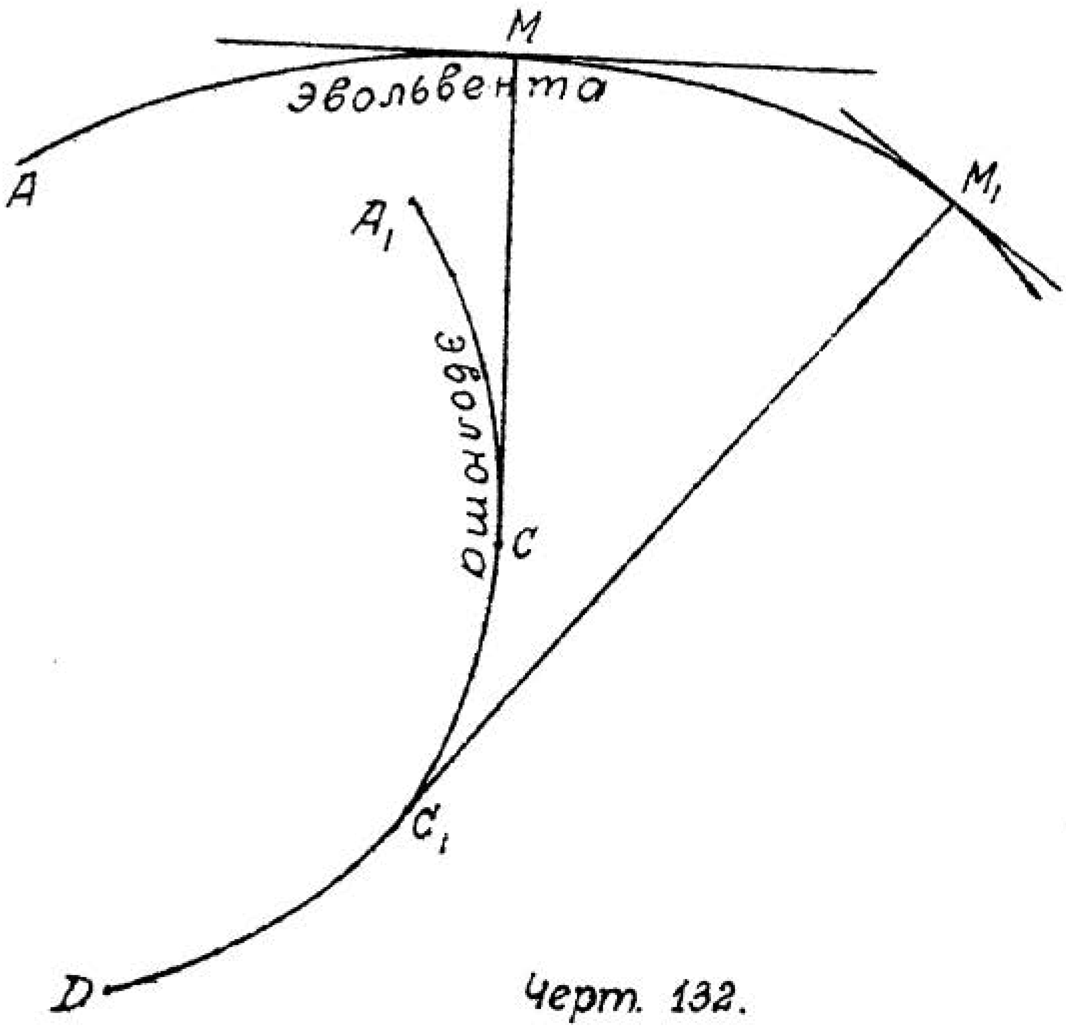
а потому

$$d\sigma^2 = d\underline{X}^2 + d\overline{Y}^2 = dR^2,$$

откуда:

$$d\sigma = \pm\, dR.$$

Следствие. Вообразим себе (черт.132) кривую AMM_1 (эвольвента) и примем точку A за начало отсчета дуг;



Черт. 132.

пусть радиусом кривизны ее в точке M будет $MC = R$, а в точке $M_1 - M_1C_1 = R_1$; допустим для определенности, что $M_1C_1 > MC$. Пусть эволютою этой кривой будет кривая A_1CC_1, за начало отсчета дуг которой примем точку A_1, и таким образом дуги эволюты будут возрастать с возрастанием радиуса кривизны эвольвенты. Обозначим:

$$\smile A_1C = \sigma \quad \text{и} \quad \smile A_1C_1 = \sigma_1 .$$

На основании свойства 3 имеем:

$$d\sigma = dR ,$$

откуда:

$$d(\sigma - R) = 0,$$

или

$$\sigma - R = \text{пост.числу},$$

т.е.

$$\sigma - R = \sigma_1 - R_1 ,$$

так что

$$\sigma_1 - \sigma = R_1 - R,$$

или

$$\smile CC_1 = M_1C_1 - MC .$$

Значит, <u>длина дуги эволюты равна разности радиусов кривизны эвольвенты в точках, соответствующих конечным точкам дуги эволюты</u>.

Положим, что некоторым способом эволюта воспроизведена материально, и на нее навернута нить DC_1C, одним концом прикрепленная к эволюте; если от точки C нить натянуть, направив ее по касательной CM и укрепить карандаш в точке M, а затем двигать карандаш от точки M к точке M_1 так, чтобы нить все время оставалась натянутой, то он при своем движении опишет эвольвенту.

<u>Задачи для упражнения.</u>

I. Найти координаты центра кривизны:

а) параболы $y = 3x^2 - 6x + 5$ в т. $(1,2)$

<u>Ответ:</u> $x_c = 1$; $y_c = 2\frac{1}{6}$.

б) гиперболы $2x^2-3y^2=5$ в т. $(-2,1)$

Ответ: $x_c=-\frac{10}{3}$; $y_c=-\frac{3}{2}$.

в) кривой $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ в точке, для которой $t=1$.

Ответ: $x_c=3$; $y_c=-4$.

2. Найти эволюту параболы

$$y=ax^2,$$

рассматривая эволюту, как геометрическое место центров кривизны и как огибающую нормалей

Ответ: $\bar{X}^2=\frac{2}{27a^2}(2a\bar{Y}-1)^3$.

3. Найти эволюту циклоиды

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$$

рассматривая ее как огибающую нормалей (сравнить с задачей 2 п.2 этого параграфа).

4. Найти эволюту равнобочной гиперболы

$$xy=1.$$

Ответ: $(\bar{X}+\bar{Y})^{2/3}-(\bar{X}-\bar{Y})^{2/3}=4^{2/3}$.

Указание. Найдя выражения для $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ через x, составить $\bar{X}+\bar{Y}$ и $\bar{X}-\bar{Y}$, выразив их через x и y.

5. Найти эволюту эллипса

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{a\bar{X}}{c^2}\right)^{2/3}+\left(\frac{b\bar{Y}}{c^2}\right)^{2/3}=1$.

Указание. При выводе выражений для $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ через t ввести линейный эксцентриситет $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

6. Найти огибающую окружностей, центры которых лежат на параболе

$$y^2=2px,$$

и которые проходят через вершину параболы

Ответ: $x^3+xy^2+py^2=0$.

7. Найти огибающую окружностей, построенных на хордах параболы

$$y^2=2px,$$

перпендикулярных к оси симметрии, как на диаметрах.

Ответ: $y^2=2px+p^2.$

8. Найти огибающую окружностей, построенных на хордах эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

перпендикулярных к большой оси эллипса, как на диаметрах.

Ответ: $\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

9. Найти огибающую эллипсов, имеющих общий центр и одну и ту же сумму полуосей, равную l.

Ответ: $x^{2/3}+y^{2/3}=l^{2/3}.$

§ 47. АСИМПТОТЫ. ОСОБЕННЫЕ ТОЧКИ.

I. Асимптоты.

При построении графиков различных функций мы неоднократно встречались с прямыми, называемыми асимптотами; например, в §II, п.4 мы видели, что график функции $y=tgx$ имеет бесчисленное множество асимптот, выражаемых уравнениями

$$x=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{3\pi}{2},\quad x=\frac{5\pi}{2}\quad \text{и т.д.};$$

в § 19 мы видели, что „кривая вероятностей" (прим.2) имеет асимптотою ось x-ов; а также, что ось x-ов является асимптотою и „кривой Валье" (прим.3); из курса Аналитической Геометрии известно, что гипербола имеет 2 асимптоты и т.д.

Уточним теперь это понятие об асимптотах кривой и покажем общие способы их нахождения.

Если у кривой есть бесконечная ветвь, то может случиться, что существует такая прямая, что разность между ординатами точек этой прямой и данной кривой, отвечающих одной и той же абсциссе, стремится к 0, при безграничном возрастании x; иногда, конечно, может существовать и такая прямая, что разность между абсциссами точек этой прямой и данной кривой, отвечающих одной и той же ординате, стремится к 0 при безграничном возрастании y. В этих случаях такие прямые и называются асимптотами данной кривой; другими словами, асимптота есть прямая, к которой кривая беспредельно приближается.

Способ отыскания асимптот мы разобьем на 2 части: сначала покажем, как найти асимптоты параллельные оси OY, а потом, как найти асимптоты не параллельные оси OY.

а) Отыскание асимптот $\parallel OY$.

Пусть (черт.133) кривая $\mathcal{L}$, уравнение которой

$$f(x,y)=0 \qquad (1)$$

имеет асимптоту $AB \parallel OY$. Тогда, очевидно, уравнением этой асимптоты будет:

$$x=a, \qquad (2)$$

и задача наша состоит в определении этого числа a.

Согласно определению асимптоты разность между абсциссами точек K и M асимптоты и данной кривой, отвечающих одной и той же ординате $y=ON$, т.е.

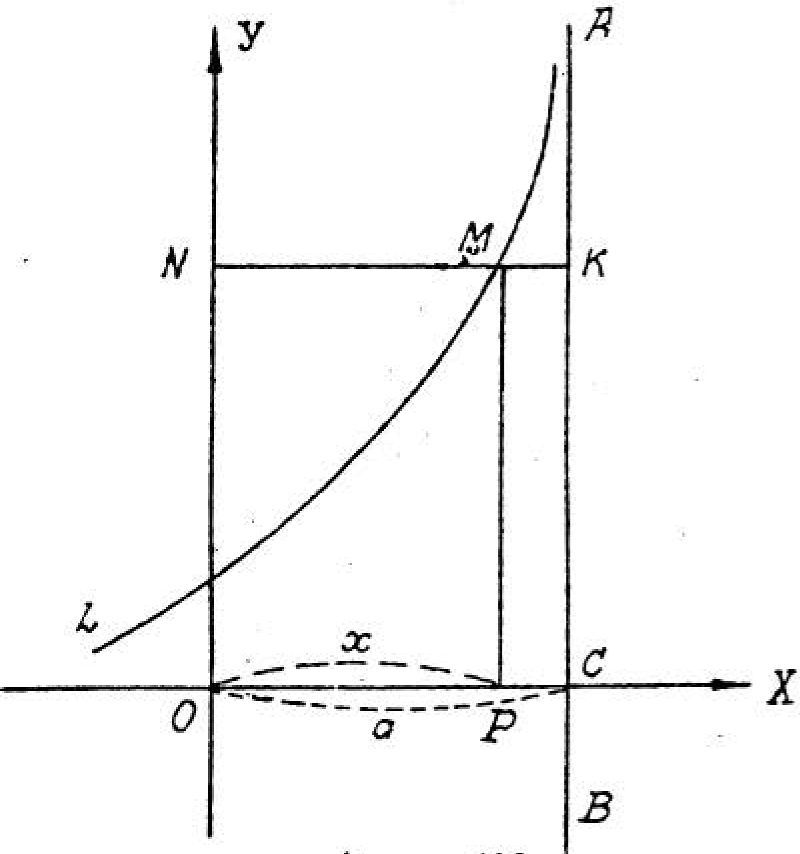
$$OC-OP$$

должна стремиться к 0 при беспредельном возрастании y; следовательно, имеем

$$\lim_{y\to\infty}(a-x)=0,$$

т.е.

$$a=\lim(x)_{y\to\infty} \qquad (3)$$



Черт. 133.

Таким образом, если кривая имеет асимптоту $\parallel OY$

$$x=a,$$

то, чтобы найти a, надо определить

$$\lim(x)_{y\to\infty},$$

где соотношение между x и y, задается уравнением (I) кривой L.

Замечание. Совершенно аналогично можно находить и асимптоты $\parallel OX$, уравнение которых будет

$$y=b,$$

где

$$b=\lim(y)_{x\to\infty}$$

но эти асимптоты, как не параллельные оси OY, можно находить и способом, который будет указан в случае b.

Примеры.

I) Найти асимптоты кривой

$$y=tg\,x.$$

Определяем из этого уравнения x:

$$x=Arctg\,y$$

и ищем:

$$a=\lim(Arctg\,y)_{y\to\infty}=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

где K-целое положительное число; следовательно, кривая имеет бесчисленное множество асимптот $\parallel OY$, уравнения которых

$$x=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}\ ,\text{где}\ k=0,1,2,3,\ldots$$

2) Найти асимптоты $\parallel OY$ кривой

$$x^3+xy^2-2my^2=0.$$

Чтобы найти

$$a=\lim_{y\to\infty}(x),$$

делим уравнение на старшую степень y, т.е. на y^2:

$$\frac{x^3}{y^2}+x-2m=0;$$

когда $y\to\infty$, то $\frac{x^3}{y^2}\to 0$, и в пределе получаем

$$a-2m=0,$$

откуда

$$a=2m;$$

таким образом искомою асимптотой будет прямая

$$x=2m.$$

3) Найти асимптоты $\parallel OY$ кривой

$$x^3+y^3-3mxy=0;$$

для отыскания $\lim_{y\to\infty}(x)$, делим уравнение на старшую степень y, т.е. на y^3:

$$\frac{x^3}{y^3}+1-3m\cdot\frac{x}{y^2}=0;$$

когда $y\to\infty$, то $\frac{x^3}{y^3}\to 0$ и $3m\cdot\frac{x}{y^2}\to 0$, и в пределе получается невозможное равенство $1=0$, которое и показывает, что $\lim_{y\to\infty}(x)$ не существует, следовательно, кривая асимптот $\parallel OY$ не имеет.

в) <u>Отыскание асимптот не $\parallel OY$.</u>

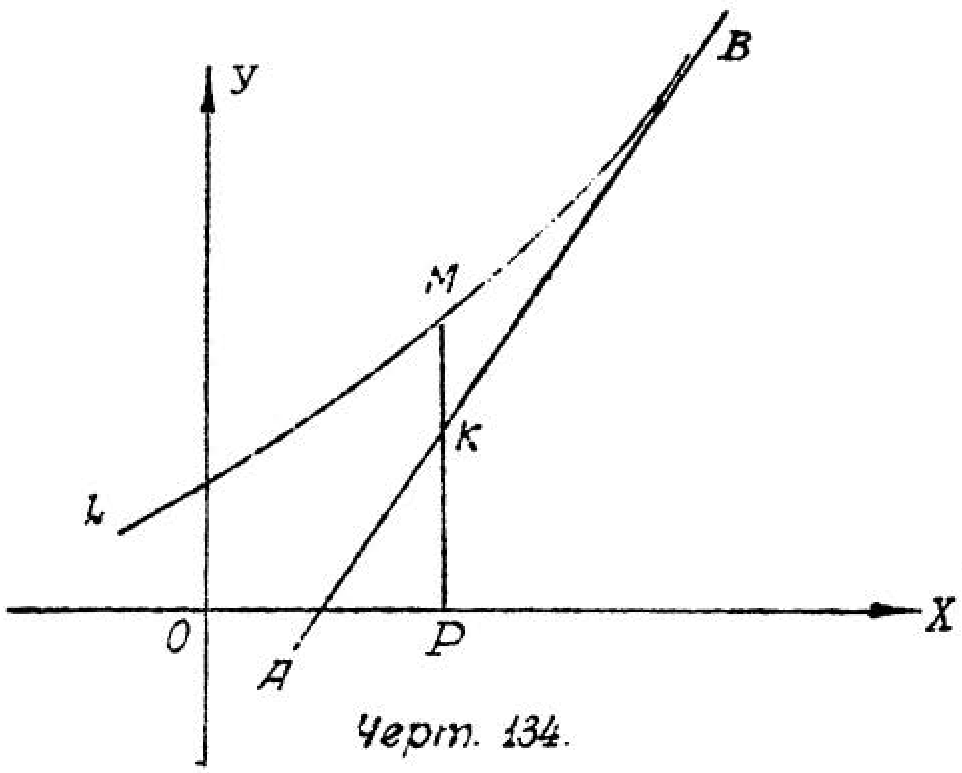
Пусть (черт.134) кривая $\mathcal{L}$, уравнение которой

$$f(x,y)=0 \qquad (1)$$

имеет асимптоту AB не параллельную OY; в таком случае уравнение асимптоты будет

$$\overline{Y} = a\overline{X} \qquad (4),$$

и задача наша состоит в определении коэффициентов a и b в этом уравнении.



Черт. 134.

Согласно определению асимптоты разность между ординатами точек M и K кривой и асимптоты, отвечающих одной и той же абсциссе $x = OP$, т.е.

$$PM - PK,$$

должна стремиться к 0 при беспредельном возрастании x; иначе говоря,

$$PM - PK = \alpha,$$ где α - бесконечно малая величина,

откуда

$$PM = PK + \alpha; \qquad (*)$$

но $PM = y$; а на основании уравнения (4), полагая в нем $X = x$, имеем

$$PK = ax + b;$$

следовательно, равенство ($*$) перепишется так:

$$y = ax + b + \alpha \qquad (5)$$

Этим уравнением и воспользуемся для определения a и b. Разделим обе его части на x:

$$\frac{y}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{\alpha}{x},$$

откуда следует

$$\lim\left(\frac{y}{x}\right)_{x\to\infty} = a, \qquad (6),$$

так как

$$\lim\left(\frac{b}{x}\right)_{x\to\infty} = 0 \quad \text{и} \quad \lim\left(\frac{\alpha}{x}\right)_{x\to\infty} = 0.$$

Итак, на основании равенства (6) для определения a поступаем так: полагаем:

$$\frac{y}{x} = t \quad \text{или} \quad y = tx$$

и заменяем в уравнении (I) y через tx; затем ищем предел, к которому стремится t, когда x растет беспредельно. Если этого предела не существует, то асимптоты нет; если же он существует и равен a_0, то это и будет значение a; (заметим кстати, что для a может получиться и несколько значений). Но, из этого еще не следует, что асимптота существует, так как надо еще найти b. Обращаемся снова к равенству (5) и заменяем в нем a найденным числом a_0:

$$y = a_0 x + b + \alpha,$$

откуда

$$b = y - a_0 x - \alpha;$$

если $x\to\infty$, то $\alpha \to 0$, и потому

$$b = \lim(y - a_0 x)_{x\to\infty} \qquad (7)$$

Это равенство и определяет b: обозначим

$$y - a_0 x = s$$

и заменим в уравнении (I) y через $a_0 x + s$, а затем ищем предел, к которому стремится s, когда x растет беспредельно: если такого предела не существует, то нет и асимптоты; если же он существует и равен b_0, то это и будет значение b в уравнении (4). В этом случае асимптота существует, и ее уравнение будет

$$Y = a_0 X + b_0;$$

понятно, что, если для a получилось несколько значений, то надо отыскивать соответствующие значения b для каждого значения a в отдельности, и тогда может получиться несколько асимптот.

Примеры.

I) Найти асимптоты кривой

$$x^3 + y^3 - 3mxy = 0.$$

Выше (прим.3) мы видели, что асимптот $\parallel OY$ у этой кривой нет. Станем теперь искать асимптоты не $\parallel OY$.

Полагаем в данном уравнении $y = tx$:

$$x^3 + t^3x^3 - 3mtx^2 = 0$$

или

$$x + t^3x - 3mt = 0;$$

делим это уравнение на x:

$$1 + t^3 - 3m\cdot\frac{t}{x} = 0;$$

ведем $x \kappa \infty$; тогда $t \to a_0$, и в пределе получаем:

$$1 + a_0^3 = 0,\ \text{откуда}\ a_0 = -1.$$

Составляем

$$s = y - a_0x = y + x,$$

откуда

$$y = s - x;$$

Заменяем в уравнении данной кривой y через $s - x$:

$$x^3 + (s-x)^3 - 3mx(s-x) = 0,$$

или

$$x^3 + s^3 - 3s^2x + 3sx^2 - x^3 - 3mxs + 3mx^2 = 0$$

или же

$$s^3 - 3s^2x + 3sx^2 - 3mxs + 3mx^2 = 0.$$

Делим это уравнение на старшую степень x, т.е. на x^2:

$$\frac{s^3}{x^2} - \frac{3s^2}{x} + 3s - \frac{3ms}{x} + 3m = 0.$$

Если $x \to \infty$, то $s \to b_0$, и в пределе получается

$$3b_0 + 3m = 0 \text{ ,откуда } b_0 = -m.$$

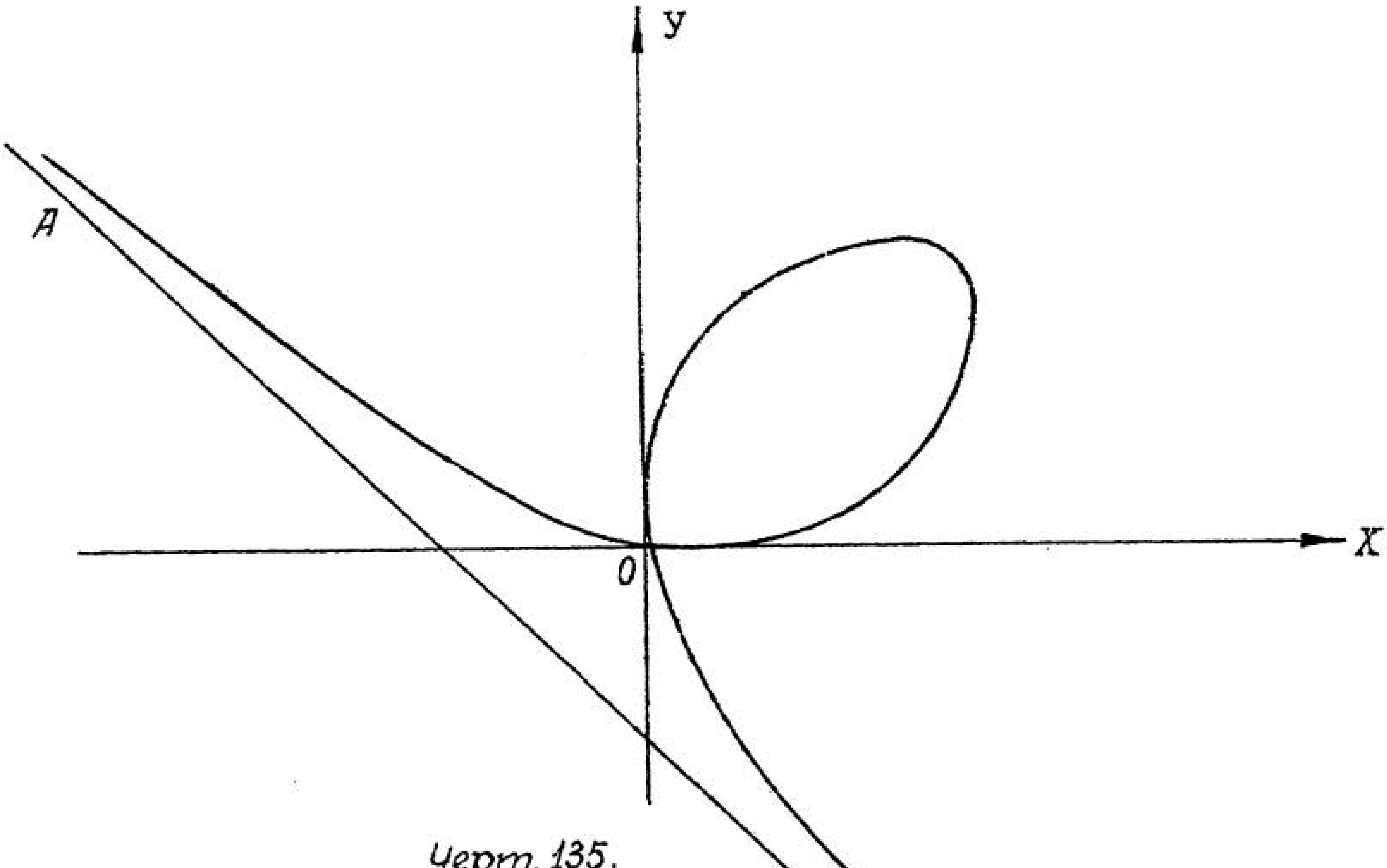
Следовательно, асимптота не $\parallel OY$ существует, и ее уравнение будет:

$$\overline{Y} = -X - m$$

или

$$X + \overline{Y} + m = 0.$$

Эта кривая носит название Декартова листа и изображена на черт.135



Черт. 135.

2) Найти асимптоты гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ищем сначала асимптоты $\parallel OY$. Из уравнения гиперболы имеем:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2};$$

отсюда следует, что, если $y \to \infty$, то и $x \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{y \to \infty}(x)$ не существует; следовательно, асимптот $\parallel OY$

гипербола не имеет.

Станем искать асимптоты не $\parallel OY$. Перепишем уравнение в виде:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

и полагаем в нем $y = tx$:

$$b^2x^2 - a^2t^2x^2 - a^2b^2 = 0;$$

делим это уравнение на x^2:

$$b^2 - a^2t^2 - \frac{a^2b^2}{x^2} = 0$$

и поведем x к ∞; тогда $t \to a_0$, и в пределе получается

$$b^2 - a^2a_0^2 = 0,$$

откуда

$$a_0 = \pm\frac{b}{a}.$$

Составляем далее

$$s = y - a_0x = y \mp \frac{b}{a}x,$$

откуда

$$y = s \pm \frac{b}{a}x;$$

подставляя это выражение y в уравнение гиперболы, получим:

$$b^2x^2 - a^2\left(s \pm \frac{b}{a}x\right)^2 - a^2b^2 = 0$$

или

$$b^2x^2 - a^2s^2 \mp 2absx - b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

или же

$$-a^2s^2 \mp 2absx - a^2b^2 = 0;$$

делим это уравнение на x:

$$-\frac{a^2s^2}{x} \mp 2abs - \frac{a^2b^2}{x} = 0;$$

если $x \to \infty$, то $s \to b_0$, и в пределе получаем:

$$\mp 2abb_0 = 0,$$

откуда

$$b_0 = 0.$$

Следовательно, гипербола имеет 2 асимптоты не параллельные OY:

$$Y=\frac{b}{a}X \quad \text{и} \quad Y=-\frac{b}{a}X,$$

результат известный из Аналитической Геометрии.

3) Найти асимптоты кривой:

$$x^2y+xy^2-2m^3=0.$$

Ищем асимптоты $\parallel OY$. Делим уравнение на старшую степень y, т.е. на y^2:

$$\frac{x^2}{y}+x-\frac{2m^3}{y^2}=0;$$

если $y\to\infty$, то $x\to a$, и в пределе получаем:

$$a=0,$$

т.е. уравнением асимптоты будет

$$x=0,$$

т.е. асимптотою будет ось y-ов.

Ищем асимптоты не $\parallel OY$. Полагаем в уравнении кривой $y=tx$:

$$tx^3+t^2x^3-2m^3=0;$$

делим полученное уравнение на x^3:

$$t+t^2-\frac{2m^3}{x^3}=0;$$

если $x\to\infty$, то $t\to a_0$, и в пределе получается

$$a_0+a_0^2=0 \quad \text{или} \quad a_0(1+a_0)=0,$$

откуда

$$a_0=0 \quad \text{и} \quad a_0'=-1.$$

Составляем далее для каждого из этих значений

$$s=y-a_0x;$$

имеем

$s=y$	$s=y+x,\ y=s-x;$

подставляем эти значения y в уравнение кривой

$x^2s+xs^2-2m^3=0$	$x^2s-x^3+xs^2-2sx^2+x^3-2m^3=0$
	или $xs^2-sx^2-2m^3=0;$

делим эти уравнения на x^2:

$$s+\frac{s^2}{x}-\frac{2m^3}{x^2}=0 \qquad \Bigg| \qquad \frac{s^2}{x}-s-\frac{2m^3}{x^2}=0;$$

если $x\to\infty$, то $s\to b_0$, и в пределе получается

$$b_0=0 \qquad \Big| \qquad b_0=0.$$

Следовательно, кривая имеет еще 2 асимптоты

$$Y=0 \qquad \text{и} \qquad Y=-X \quad \text{или} \quad X+Y=0.$$

Итак, кривая имеет всего 3 асимптоты:

$$X=0, \quad Y=0 \quad (\text{обе оси координат}) \quad \text{и} \quad X+Y=0.$$

<u>Задачи для упражнения.</u>

Найти асимптоты кривых:

I) $x^3-xy^2-x^2+2xy+y^2=0.$

<u>Ответ:</u> $x-1=0;\ x+y-1=0;\ x-y+1=0.$

2) $x^3+y^3-ay^2=0.$

<u>Ответ:</u> $x+y-\frac{a}{3}=0.$

3) $y=e^{-x^2}$

<u>Ответ:</u> $y=0.$

4) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0.$

<u>Ответ:</u> $y-2=0;\ 3x+4y-5=0.$

5) $2xy-4x-2y+3=0.$

<u>Ответ:</u> $x-1=0;\quad y-2=0.$

6) $y^3-x^3=x^2+y^2.$

<u>Ответ:</u> $3x-3y+2=0.$

7) $2x^2y+xy^2-y^3+xy-y^2-x+1=0.$

<u>Ответ:</u> $y=0;\ x+y=0;\ 2x-y+1=0.$

2. <u>Особенные точки.</u>

Положим, что нам дана кривая, заданная в прямоугольных координатах <u>алгебраическим</u> уравнением

$$f(x,y)=0 \qquad (\mathrm{I}).$$

Если взять на этой кривой некоторую точку (x, y), то, как известно, уравнение касательной прямой к этой кривой в данной точке будет:

$$Y-y=y'(X-x),$$

где y' есть значение в данной точке производной $\frac{dy}{dx}$, выводимой из уравнения (I), т.е.

$$y'=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (2)$$

Если при этом окажется, что для рассматриваемой точки одновременно:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad и \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

то уравнение (2) не определяет y', т.е. не определяет направления касательной в этой точке. Такие точки называются <u>особенными</u> точками алгебраической кривой.

Итак, чтобы найти особенные точки алгебраической кривой, надо поступать так: составить

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad и \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

и решить совместно эти уравнения; затем полученные решения подставить в данное уравнение кривой: если они данному уравнению удовлетворяют, то разбираемая точка есть особенная; если же не удовлетворяют, то точка вовсе не принадлежит кривой, и ее надо отбросить.

<u>Пример I.</u> Дана алгебраическая кривая

$$(x-1)^3+(y+1)^3-3m(x-1)(y+1)=0.$$

Составляем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3(x-1)^2-3m(y+1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3(y+1)^2-3m(x-1);$$

имеем систему уравнений

$$\begin{cases} (x-1)^2=m(y+1) \\ m(x-1)=(y+1)^2; \end{cases}$$

перемножив их почленно и сократив на m, получим:

$$(x-1)^3=(y+1)^3,$$

откуда:

$$x-1=y+1;$$

Таким образом первое уравнение может быть заменено таким:

$$(x-1)^2-m(x-1)=0$$

или

$$(x-1)(x-1-m)=0;$$

следовательно,

$$x-1=0 \quad \text{и} \quad x-1-m=0.$$

Таким образом получается 2 системы решений

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y+1=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-1-m=0 \\ y+1-m=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=m+1 \\ y=m-1. \end{cases}$$

Подставляя эти решения в данное уравнение кривой, видим, что I-е решение ему удовлетворяет, а 2-е не удовлетворяет, значит, точка (I, -I) есть особенная точка, а точка ($m+1, m-1$) не принадлежит кривой, и ее надо отбросить.

Посмотрим теперь, что можно сказать о касательных к данной кривой в особенной точке. Так как для такой точки

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

то выражение (2), служащее для определения углового коэффициента y' касательной, обращается в неопределенность, и следовательно, y' не может быть найдено из уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

Чтобы раскрыть эту неопределенность, надо это уравнение еще раз продифференцировать:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0;$$

в силу условия

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

последнее уравнение для данной точки обращается в такое:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0 y'+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 y'^2=0;$$

здесь $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0$ суть значения этих производных в данной точке, обозначим эти значения

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0=A;\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0=B;\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0=C;$$

тогда для определения y' получится квадратное уравнение

$$Ay'^2+2By'+C=0. \qquad (*)$$

Решив его, мы и найдем угловые коэффициенты касательных в особенной точке.

При этом могут встретиться 3 случая.

а) $B^2-AC>0$; тогда для y' получается 2 различных вещественных значения, и следовательно, в данной точке кривая имеет две различных касательных; такая точка называется <u>двойной</u>, в ней кривая пересекает сама себя.

<u>Пример</u>. Возьмем кривую, рассмотренную в предыдущем примере; для нее имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6(y+1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3m$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6(x-1);$$

следовательно, для особенной точки $(1,-1)$ получим:

$$A=0,\ B=-3m,\ C=0;$$

$$B^2-4AC=9m^2>0;$$

значит, точка $(1,-1)$ есть двойная точка данной кривой. Для определения y' имеем по уравнению (*)

$$y'=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}=\frac{3m\pm 3m}{0};$$

одно значение есть ∞, т.е. касательная параллельна оси OY; другое значение найдем из уравнения

$$-6my'=0, \text{ откуда } y'=0,$$

т.е. касательная параллельна оси OX. Итак, в особенной точке (I, -I) кривая имеет 2 касательных :

$$x-1=0 \text{ и } y+1=0.$$

Эта кривая есть Декартов лист с двойною точкой в точке (I, -I) (сравнить с черт.135).

б) $B^2-AC=0$; в этом случае уравнение (*) дает для y' два вещественных равных корня, и кривая в рассматриваемой точке имеет две совпадающих касательных; такие особенные точки называются точками возврата (черт. 136). причем, если ветви кривой расположены по разные

Черт. 136.

стороны общей касательной, то точка называется точкою возврата I-го рода, а если - по одну сторону, то - 2-го рода.

Пример 2. Рассмотрим кривую, называемую циссоидой Диоклеса

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x},$$

или

$$x^3+xy^2-2ay^2=0$$

Ищем особенную точку:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 4ay = 0; \end{cases}$$

решая эти уравнения, находим $x=0$, $y=0$; так как кривая проходит через начало координат, то эта точка и есть особенная. Составляем вторые производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x - 4a; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x;$$

следовательно,

$$A = -4a; \quad B = 0; \quad C = 0$$

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Значит, начало координат есть точка возврата; для определения y' имеем уравнение

$$-4ay'^2 = 0 \text{ , откуда } y' = 0,$$

и следовательно, уравнением касательной будет

$$y = 0,$$

т.е. касательною в начале координат будет ось OX.

Так как

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{2a - x}} \text{ ,}$$

то кривая будет симметрична относительно оси x-ов, и следовательно, одна ветвь будет выше оси x-ов, а другая ниже, и начало координат является точкою возврата I-го рода.

Последнее выражение для y показывает, что для вещественности y необходимо, чтобы

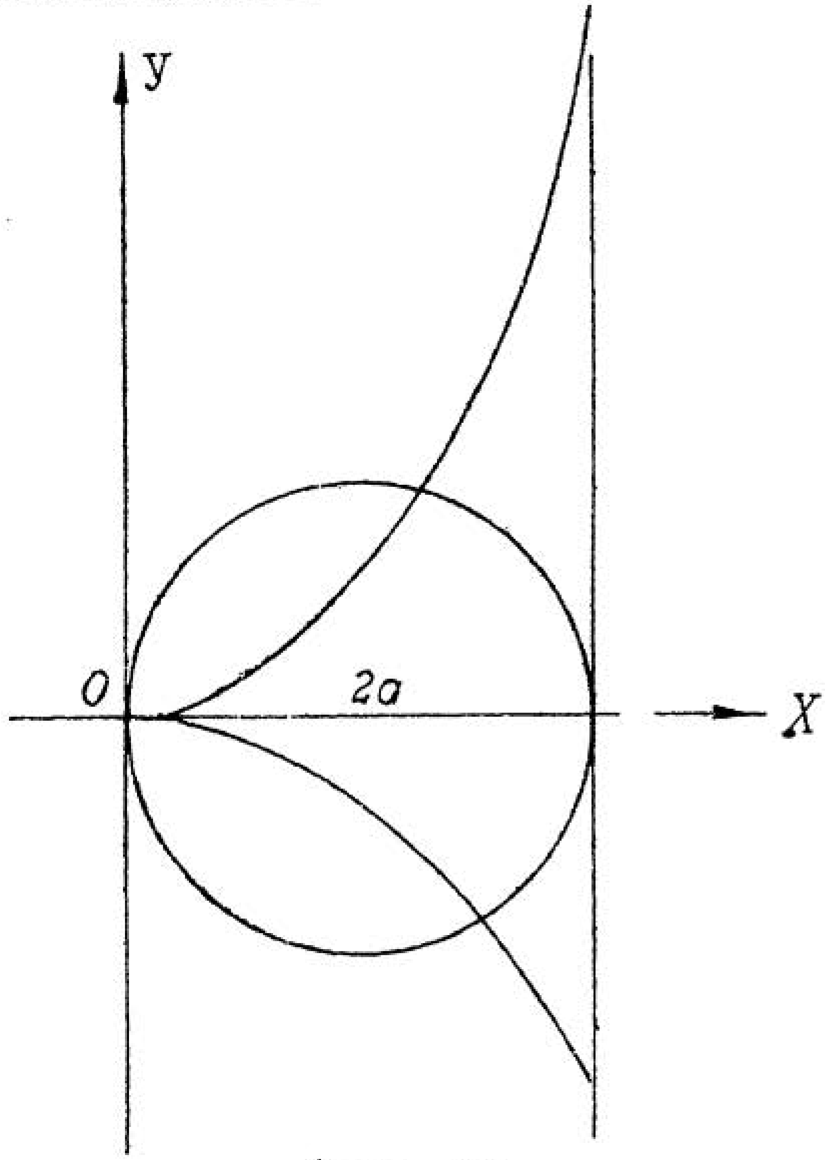
$$0 \leqslant x < 2a,$$

и что прямая

$$x = 2a$$

есть асимптота циссоиды (черт. 137).

в) $B^2 - 4AC < 0$; в этом случае уравнение (*) дает для y' два комплексных корня; кривая в рассматриваемой точке не имеет вещественных касательных, что об'ясняется отсутствием смежных с ней точек; такие точки называются изолированными.



Черт. 137.

Пример 3. Рассмотрим кривую

$$x^3-4x^2-y^2+5x+4y-6=0.$$

Составляем уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-8x+5=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=-2y+4=0\,; \end{cases}$$

решениями этой системы будут

$$x=1,\quad y=2 \quad \text{и} \quad x=\frac{5}{3},\quad y=2\,;$$

второе решение уравнению кривой не удовлетворяет и мы его отбрасываем, а первое удовлетворяет; следовательно, точка (1,2) есть особенная точка. Определим ее тип.

Имеем

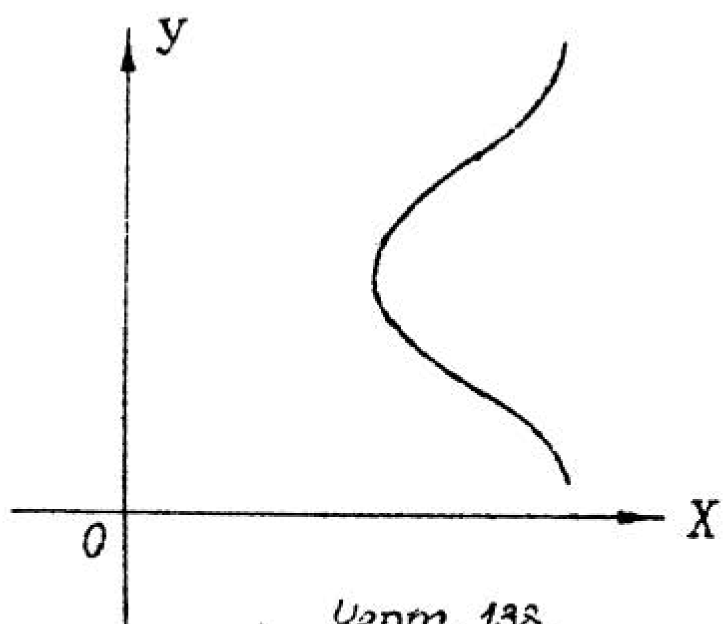
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 8;$$

значит

$$A = -2, \ B = 0, \ C = -2$$

$$B^2 - AC < 0,$$

и точка A (1,2) есть точка изолированная (черт.138)



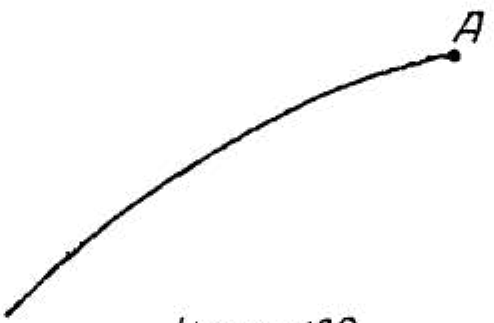
Черт. 138.

Замечание. Если бы для особенной точки значения всех вторых производных оказались равными 0, то для определения y' пришлось бы и исследование продолжить, перейдя к производным 3-го порядка и составив уравнение 3-й степени, и т.д. Таким образом могут получиться точки тройные, в которых касательных к кривой будет три, четверные с 4 касательными и т.д.; все такие точки носят общее название кратных точек.

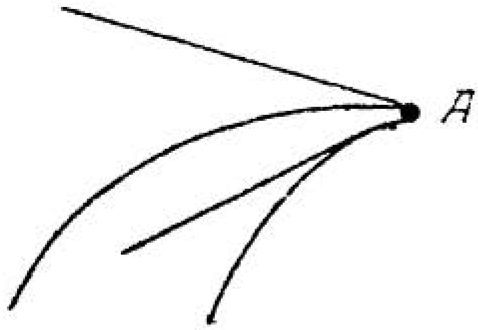
Итак, для алгебраических кривых могут существовать особенные точки только трех типов: кратные, точки возврата и изолированные.

Для кривых трансцендентных могут быть особенные точки еще двух типов: точки прекращения, характеризующиеся тем, что окружность, описанная из такой точки достаточно малым радиусом, пересекает кривую только в одной точке (черт.139), и угловые или выступающие точки

(черт.140), которые отличаются от точек возврата тем, что в этих точках кривая имеет не совпадающие, а различные касательные.



Черт. 139.



Черт. 140.

На исследование точек этих типов мы останавливаться не будем.

3. <u>Общие указания для исследования кривых.</u>

Теперь мы познакомились со всеми основными элементами и свойствами плоских кривых и можем проводить полное исследование этих кривых и на основания этого исследования с достаточною точностью строить их графики.

Установим следующую схему исследования.

1. Выбор независимой переменной и определение области ее изменений.

2. Исследование симметричности кривой относительно осей координат и относительно начала координат.

3. Пересечение кривой с осями координат.

4. Определение асимптот.

5. Определение направления кривой (увеличение или уменьшение ординат при увеличении абсцисс).

6. Определение точек кривой, в которых функция имеет *maximum* или *minimum* (такие точки будем называть вершинами *maximum* и вершинами *minimum*).

7. Определение направления вогнутости, точек перегиба и касательных в них.

8. Определение особенных точек и касательных в них.

9. Нахождение ряда добавочных точек.

Проведем по этой схеме исследование кривой, заданной уравнением

$$x^3-y^3-12x^2+45x-54=0; \qquad (A)$$

это уравнение может быть преобразовано так:

$$y^3=x^3-12x^2+45x-54,$$

или, если разложить на множители правую часть

$$y^3=(x-3)^2(x-6) \qquad (A')$$

1. Выбираем за независимую переменную x ; из уравнения (A') ясно, что y будет вещественным при любом вещественном значении x, как положительном, так и отрицательном, т.е.

$$-\infty < x < +\infty.$$

2. Кривая не симметрична относительно оси OX, так как изменение y на $-y$ изменяет уравнение.

Кривая не симметрична относительно оси OY, так как изменение x на $-x$ изменяет уравнение.

Кривая не симметрична относительно начала координат, так как одновременное изменение x на $-x$ и y на $-y$ изменяет уравнение.

3. Пересечение с осью OX найдем, полагая в уравнении (A') $y=0$; будем иметь:

$$(x-3)^2(x-6)=0;$$

следовательно с осью x-ов кривая имеет 2 общие точки: $A(3,0)$ и $B(6,0)$ (черт. 14I).

Пересечение с осью OY найдем, полагая в уравнении (A) $x=0$:

$$y^3+54=0, \quad \text{откуда} \quad y=-3\sqrt[3]{2};$$

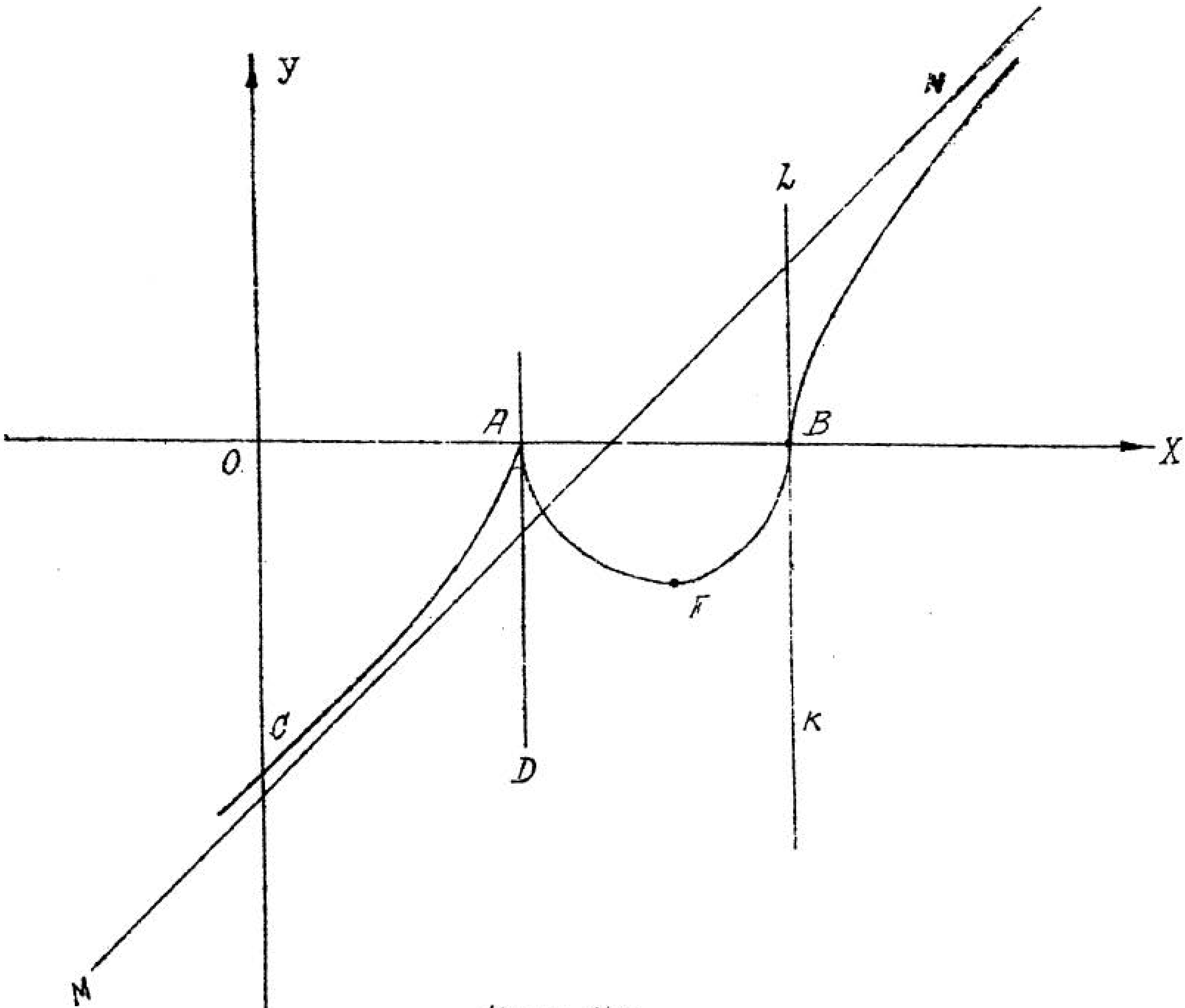
следовательно, с осью y-ов кривая имеет одну общую точку

$$C(0; -3\sqrt[3]{2}\approx-3{,}8).$$

4. Ищем асимптоты $\parallel OY$; для этого делим уравнение (A) на y^3.

$$\frac{x^3}{y^3}-1-12\frac{x^2}{y^3}+45\frac{x}{y^3}-\frac{54}{y^3}=0;$$

если $y \to \infty$, то в пределе получается невозможное равенство $-1=0$; следовательно, асимптот $\parallel OY$ нет.



Черт. 141.

Ищем асимптоты не $\parallel OY$. Полагаем в уравнении (A)

$$y=tx:$$

$$x^3-t^3x^3-12x^2+45x-54=0;$$

и делим на x^3:

$$1-t^3-\frac{12}{x}+\frac{45}{x^2}-\frac{54}{x^3}=0;$$

если $x \to \infty$, то $t \to a_0$, для определения которого получим уравнение

$$1-a_0^3=0, \quad \text{откуда} \quad a_0=1.$$

Далее полагаем

$$s = y - a_0 x = y - x \text{ , откуда } y = s + x;$$

подставляем это выражение вместо y в уравнение (A)

$$x^3 - s^3 - 3s^2x - 3sx^2 - x^3 - 12x^2 + 45x - 54 = 0$$

или

$$-s^3 - 3s^2x - 3sx^2 - 12x^2 + 45x - 54 = 0;$$

делим это уравнение на x^2:

$$-\frac{s^3}{x^2} - \frac{3s^2}{x} - 3s - 12 + \frac{45}{x} - \frac{54}{x^2} = 0;$$

если $x \to \infty$, то $s \to b_0$; в пределе получаем

$$-3b_0 - 12 = 0 \text{ , откуда } b_0 = -4;$$

и уравнение асимптоты будет

$$y = x - 4 \quad \text{или} \quad x - y - 4 = 0;$$

на черт.141 наносим прямую MN, определяемую этим уравнением.

5. Определяем направление кривой, т.е. решаем вопрос о возрастании и убывании функции. Для этого ищем первую производную y'_x; дифференцируем уравнение (A), делая при этом сокращение на 3:

$$x^2 - y^2y' - 8x + 15 = 0, \qquad (A'')$$

откуда

$$y' = \frac{x^2 - 8x + 15}{y^2} = \frac{(x-3)(x-5)}{y^2}. \qquad (*)$$

Критические значения x получим, решив уравнение

$$x^2 - 8x + 15 = 0,$$

которое дает

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 5.$$

Составляем таблицу

x	$-\infty$	. . . . .	3	. . . . .	5	. . . . .	$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	возр.	max= =0	уб.	min= $=-\sqrt[3]{4}$	возр.	$+\infty$

Уравнение (A') показывает, что при беспредельном возрастании $|x|$ беспредельно возрастает и $|y|$, причем, так как первый множитель правой части всегда положителен, то знак y совпадает со знаком $(x-6)$, т.е. когда $x \to \mp\infty$, то и $y \to \mp\infty$.

Итак, кривая идет вверх до точки $A(3,0)$, потом идет вниз до точки $F(5; -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}6)$, а затем снова идет вверх, уходя в бесконечность.

6) Из той же таблицы следует, что точка $A(3,0)$ является вершиною $maximum$, а точка $F(5, -\sqrt[3]{4})$ - вершиною $minimum$.

7) Для определения направления вогнутости находим y'', для чего дифференцируем уравнение (A''):

$$2x - 2yy'^2 - y^2y'' - 8 = 0,$$

откуда

$$y'' = \frac{2(x - yy'^2 - 4)}{y^2}$$

Знак y'' зависит от знака

$$x - yy'^2 - 4;$$

подставляя вместо y' ее выражение (*) и затем пользуясь уравнением (A'), получим:

$$x - yy'^2 - 4 = x - \frac{(x-3)^2(x-5)^2}{y^3} - 4 = x - \frac{(x-5)^2}{x-6} - 4 = -\frac{1}{x-6};$$

т.е. для значений $x<6$ $y''>0$, и кривая направлена вогнутостью вверх, а для значений $x>6$ $y''<0$, и кривая направлена вогнутостью вниз.

Точкою перегиба является точка, в которой

$$y'' = -\frac{2}{y^2(x-6)}$$

терпит разрыв, меняя знак, т.е. при $x=6$; следовательно точкою перегиба будет точка $B(6, 0)$.

Найдем уравнение касательной в этой точке:, для нее имеем:

$$y' = \frac{(x-3)(x-5)}{y^2} = \infty,$$

и следовательно, касательною будет прямая $\parallel OY$:

$$x=6;$$

проводим на чертеже прямую KL.

8) Найдем особенные точки этой кривой. Для этого составляем частные производные от левой части уравнения (A) по x и по y и приравниваем их 0; по сокращении на 3 получаем:

$$\begin{cases} x^2-8x+15=0 \\ y^2=0 \end{cases}$$

Решая совместно эти уравнения, находим 2 точки: (3,0) и (5,0). Вторая из них не принадлежит кривой; следовательно, кривая имеет одну особенную точку A (3,0). Чтобы определить ее тип, найдем значения для этой точки вторых частных производных левой части уравнения (A):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x-24,$$

и потому

$$A=0,\quad B=0,\quad C=-6$$

$$B^2-AC=0$$

следовательно, точка A есть точка возврата.

Найдем касательную к кривой в этой точке; угловой ее коэффициент будет

$$y'=\frac{(x-3)(x-5)}{y^2},$$

а так как

$$y^3=(x-3)^2(x-6),$$

то

$$y^2=(x-3)^{4/3}(x-6)^{2/3}$$

и потому

$$y'=\frac{x-5}{(x-3)^{1/3}(x-6)^{2/3}};$$

для данной точки $x=3$ получим $y'=\infty$, т.е. касательною в точке A будет прямая $AD\parallel OY$,уравнение которой

$$x=3.$$

Эта же точка A есть вершина *maximum*, направление вогнутости в ней не меняется, и кривая расположена от касательной по разные стороны; следовательно, точка A есть точка возврата I-го рода.

9. Высчитаем еще координаты ряда дополнительных точек, для чего пользуемся уравнением (A') и таблицею корней кубичных:

x	y
-1	$-4,3$
1	$-2,7$
2	$-1,6$
4	$-1,6$
7	$2,5$
8	$3,7$

Пользуясь всеми полученными данными, мы можем довольно точно построить график кривой, как это сделано на черт. 141.

Заметим кстати, что такое полное исследование, как это сделано здесь, не всегда бывает просто провести.

Задачи для упражнения.

Исследовать кривые:

1) $6x^2+x^3-y^3=0.$

2) $y=\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$

3) $y=\frac{x}{1+x^2}$

4) $x^3+xy^2-3x^2-7y^2+3x-1=0$

5) $x^2y+4y-8=0$

6) $4x^3-y^2=0$

7) $x^3+y^3=1$

8) $x^3-y^3-3xy=0.$

§ 48. КРИВЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ И ПОВЕРХНОСТИ.

I. Задание линий в пространстве. Дифференциал дуги. Касательная прямая и нормальная плоскость.

В предыдущих параграфах мы изучали плоские кривые; перейдем теперь к рассмотрению кривых пространственных, точки которых не лежат в одной плоскости, как у плоских кривых; такие кривые носят еще название кривых двоякой кривизны; основание такому названию будет выяснено ниже.

Вспомним прежде всего из курса Аналитической Геометрию, что всякая линия в пространстве может быть рассматриваема как пересечение двух поверхностей, и соответственно этому мы можем ее задавать совокупностью двух уравнений с тремя переменными, отнеся их к некоторой прямоугольной системе координат

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ F(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Кроме этого способа часто весьма удобно бывает пользоваться параметрическим способом задания, который, как известно, состоит в том, что координаты текущей точки линии задаются в функциях от произвольно выбранного параметра

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t). \end{cases}$$

Дадим примеры заданий тем и другим способом.

Рассмотрим кривую, заданную совокупностью уравнений:

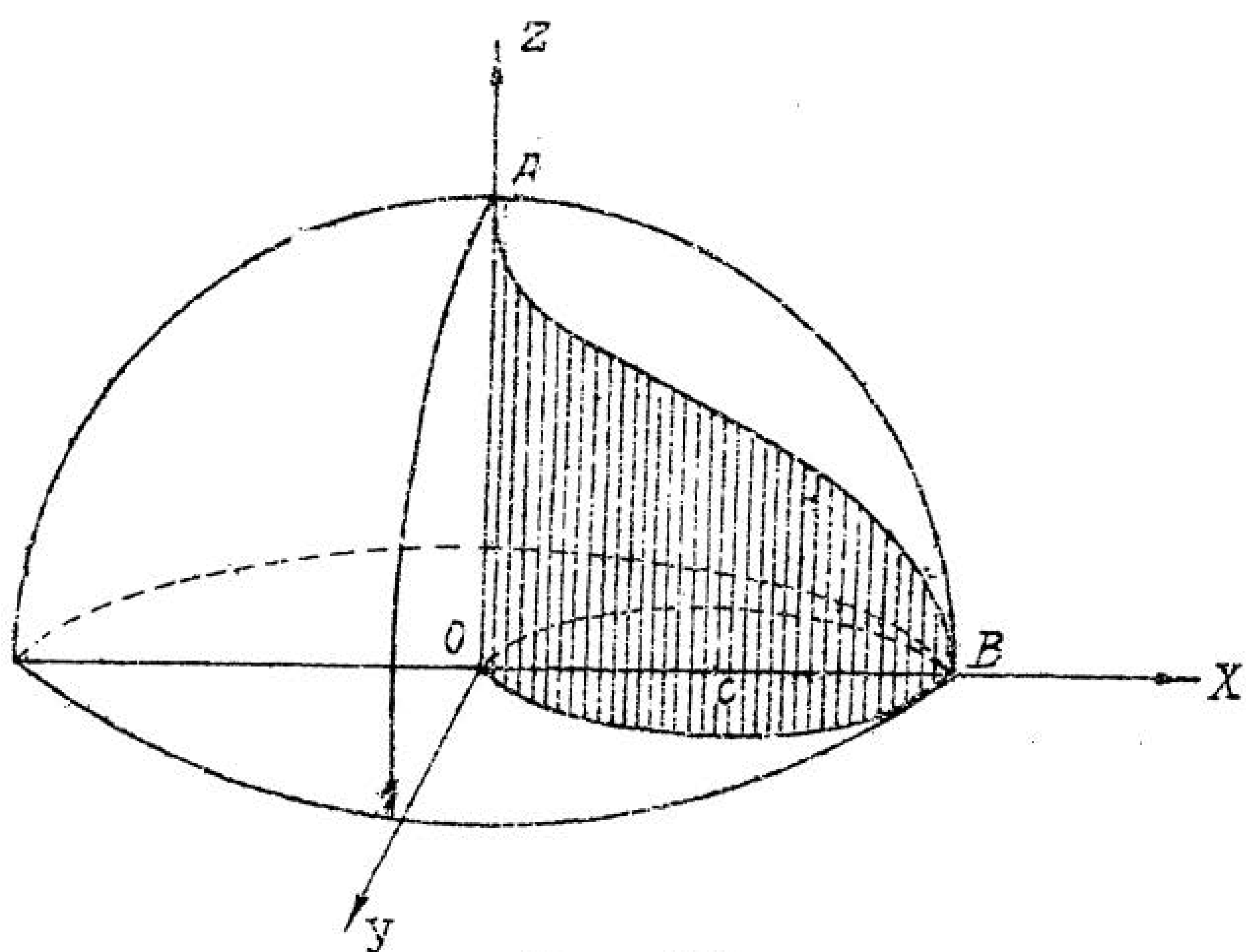
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2-ax=0. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений определяет шаровую поверхность, центр которой находится в начале координат, а радиус которой $=a$; второе уравнение определяет цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси OZ; чтобы выявить направляющую этой цилиндрической поверхности, перепишем его в таком виде:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4},$$

который показывает, что направляющей служит окружность, расположенная в плоскости XOY, центр которой находится в точке $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, а радиус которой $=\frac{a}{2}$, т.е. половине радиуса шаровой поверхности.

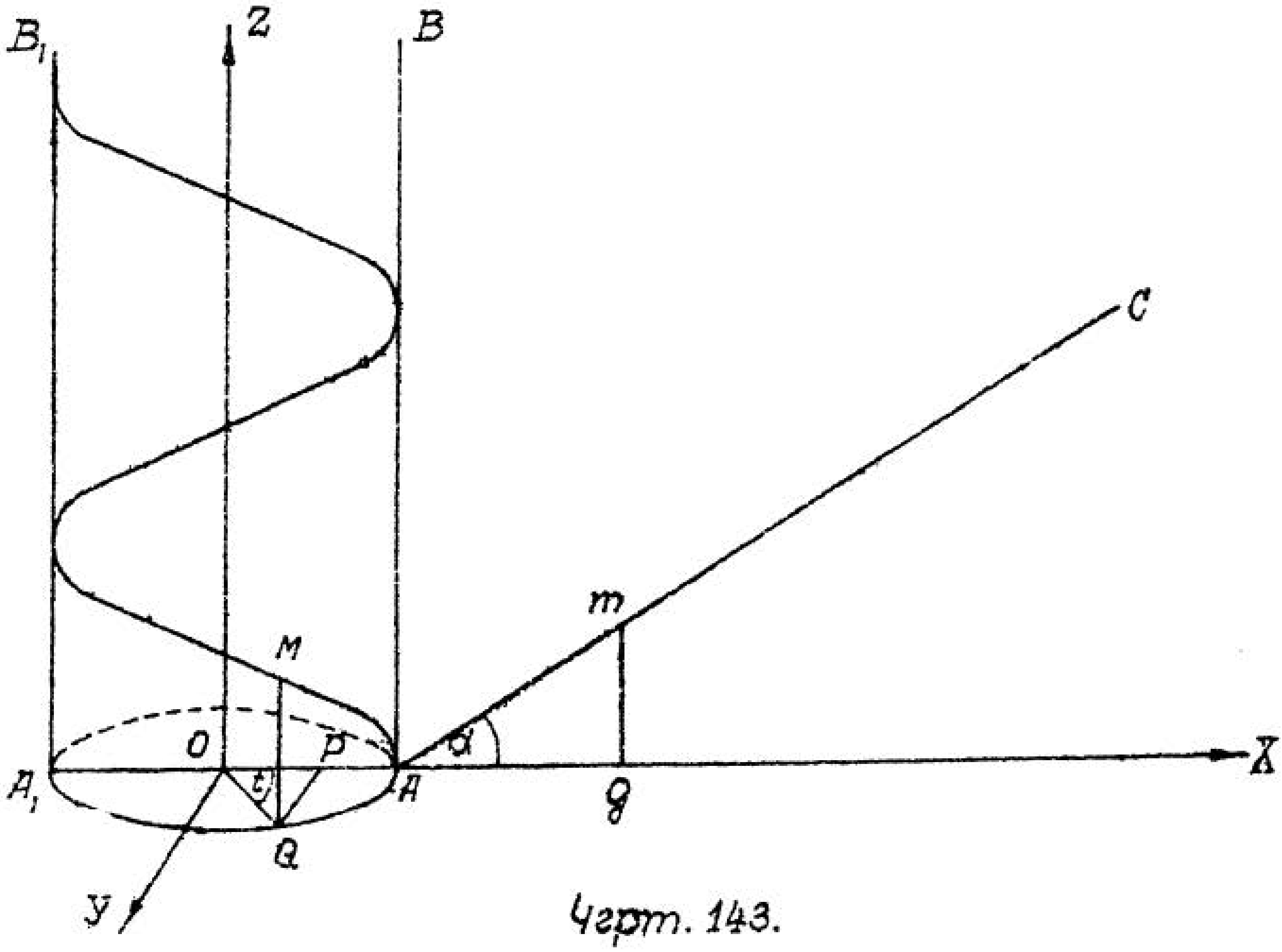
Пересечение этих двух поверхностей дает линию, известную под названием кривой Вивиана, которая изображена на черт. 142.



Черт. 142.

Для примера на параметрическое задание линии разберем так называемую <u>винтовую линию</u>.

Возьмем (черт. 143) поверхность прямого кругового цилиндра; примем центр его основания за начало координат O, направление OA – за ось OX, ось цилиндра – за ось OZ, а перпендикуляр к плоскости XOZ – за ось OY.



Черт. 143.

Пусть AB есть образующая цилиндрической поверхности, лежащая в плоскости XOZ. Проведем в этой плоскости прямую AC, образующую с осью x-ов угол α, так что $\angle XAC=\alpha$, и навернем часть плоскости XOZ, в которой лежит прямая AC, на цилиндрическую поверхность так, чтобы образующая AB осталась на месте. Тогда прямая AC расположится на цилиндрической поверхности по линии, которая и называется <u>винтовою</u>.

Выведем ее уравнение. Возьмем на винтовой линии точку M, построим ее прямоугольные координаты $x=OP$, $y=PQ$, $z=QM$ и, приняв за параметр $\angle XOQ=t$, выразим эти координаты через t. Если обозначить радиус основания цилиндра OQ буквою a, то из $\triangle OPQ$ получим

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t.$$

Остается найти выражение для z. Пусть в точку M перешла, при навертывании прямой AC, ее точка m; тогда очевидно, что

$$z = QM = qm;$$

но

$$qm = Aq \cdot tg\alpha,$$

а

$$Aq = \smile AQ = at,$$

так что

$$z = at\, tg\alpha,$$

или, полагая

$$a\, tg\alpha = k,$$

будем иметь

$$z = kt.$$

Итак, уравнения винтовой линии будут:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = kt. \end{cases}$$

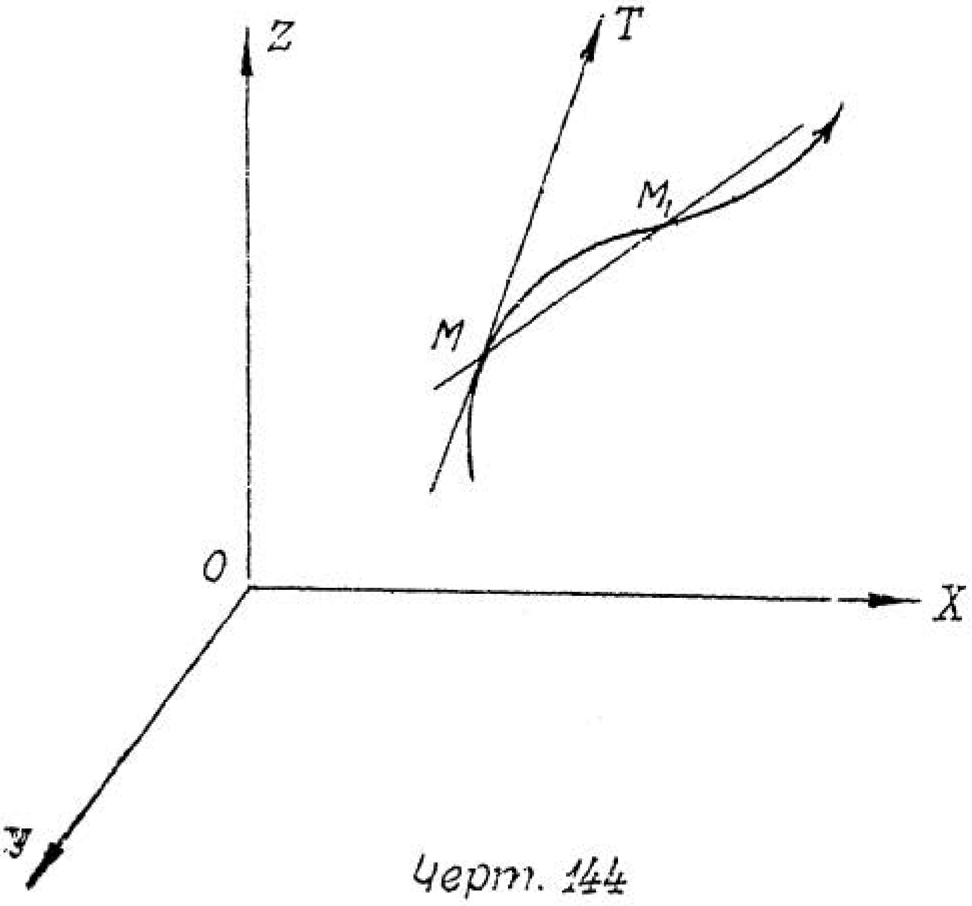
Заметим, что, если точка движется по образующей цилиндра с постоянной скоростью, а сам цилиндр вращается вокруг своей оси тоже с постоянной скоростью, то траекторией при этом является винтовая линия, начерченная на цилиндрической поверхности.

Займемся теперь выводом уравнения касательной к кривой двоякой кривизны; но прежде заметим, что формула, выведенная в §31 для дифференциала дуги плоской кривой, обобщается и на случай пространственной кривой и принимает вид

$$\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2} \qquad (I)$$

Пусть теперь нам дана кривая $\mathcal{L}$ (черт.144), уравнения которой в параметрической форме пусть будут:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases} \qquad (2)$$



Черт. 144

Возьмем на этой линии точку $M(x,y,z)$ и выведем уравнение касательной к линии $\mathcal{L}$ в точке M. В §6, п.2 было дано общее определение касательной: касательная в точке M есть прелельное положение секущей MM_1, когда точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M.

Пусть координаты точки M_1 будут (x_1, y_1, z_1). Составим уравнение секущей MM_1 : обозначая координаты текущей точки ее через X, Y, Z, найдем:

$$\frac{X-x}{x_1-x}=\frac{Y-y}{y_1-y}=\frac{Z-z}{z_1-z},$$

или, полагая

$$x_1-x=\Delta x,\ y_1-y=\Delta y,\ z_1-z=\Delta z,$$

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z};$$

разделим все знаменатели Δt:

$$\frac{X-x}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}=\frac{Y-y}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)}=\frac{Z-z}{\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)}.$$

Чтобы перейти от этого уравнения секущей к уравнению касательной, надо повести Δt к 0 (тогда Δx, Δy, Δz тоже пойдут к 0) и перейти к пределу;но

$$\lim\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]_{\Delta t\to 0}=\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$$

$$\lim\left[\frac{\Delta y}{\Delta t}\right]_{\Delta t\to 0}=\frac{dy}{dt}=\psi'(t)$$

$$\lim\left[\frac{\Delta z}{\Delta t}\right]_{\Delta t\to 0}=\frac{dz}{dt}=\omega'(t),$$

и уравнение касательной получится в виде

$$\frac{X-x}{\varphi'(t)}=\frac{Y-y}{\psi'(t)}=\frac{Z-z}{\omega'(t)}, \qquad (3)$$

или, умножив все знаменатели на dt и заметив, что

$$\varphi'(t)dt=dx,\ \psi'(t)dt=dy,\ \omega'(t)dt=dz,$$

в виде

$$\boxed{\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}.} \qquad (4)$$

Из этих уравнений касательной по формулам Аналитической Геометрии можно написать выражения для косинусов углов α, β и γ, образованных касательной с осями координат

$$\cos\alpha=\pm\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$\cos\beta = \pm\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\,;$$

но по формуле (I) этого § имеем

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = ds\,;$$

следовательно, окончательно получим такие формулы:

$$\boxed{\cos\alpha = \pm\frac{dx}{ds};\ \cos\beta = \pm\frac{dy}{ds};\ \cos\gamma = \pm\frac{dz}{ds}} \qquad (5)$$

В этих формулах надо брать знак $+$, если касательная направлена в сторону возрастающих дуг, и знак $-$, если она направлена в сторону убывающих дуг; действительно, если, например, длина дуги возрастает вместе с возрастанием x, то dx и ds будут одного и того же знака, и $\frac{dx}{ds}>0$; но в этом случае α - угол острый, и $\cos\alpha$ также >0, т.е. в формуле (5) надо удержать знак $+$.

П р и м е р I. Найти уравнения касательной к винтовой линии

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = kt. \end{cases}$$

Из этих уравнений имеем

$$dx = -a\sin t\,dt,\ dy = a\cos t\,dt,\ dz = k\,dt\,;$$

а потому уравнения (4), по сокращении знаменателей на dt, дадут уравнения касательной в виде

$$\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z - kt}{k}\,.$$

Чтобы найти углы касательной с осями, составляем

$$ds^2=a^2\sin^2 t\,dt^2+a^2\cos^2 t\,dt^2+\kappa^2 dt^2=(a^2+\kappa^2)\,dt^2,$$

откуда

$$ds=\sqrt{a^2+\kappa^2}\,dt;$$

и потому, по сокращении на dt:

$$\cos\alpha=\mp\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+\kappa^2}};\quad \cos\beta=\pm\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+\kappa^2}};\quad \cos\gamma=\pm\frac{\kappa}{\sqrt{a^2+\kappa^2}};$$

следовательно, касательная к винтовой линии образует с осью OZ постоянный угол.

Посмотрим теперь, как составить уравнения касательной, если кривая задана пересечением двух поверхностей:

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ F(x,y,z)=0. \end{cases} \qquad (6)$$

Продифференцируем эти уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy+\dfrac{\partial f}{\partial z}dz=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy+\dfrac{\partial F}{\partial z}dz=0. \end{cases}$$

Уравнения (4) показывают, что для точек касательной dx, dy и dz пропорциональны разностям $X-x$, $Y-y$, $Z-z$; положим

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}=\frac{1}{h},$$

откуда

$$dx=h(X-x);\quad dy=h(Y-y);\quad dz=h(Z-z);$$

подставив поэтому в выписанные выше уравнения вместо dx, dy и dz эти выражения и сократив на h мы и получим уравнения касательной:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0 \end{cases}} \qquad (7)$$

Каждое из уравнений (7) есть уравнение плоскости, так как оно I-й степени относительно X, Y, Z ; пересечение этих плоскостей и дает касательную к пространственной кривой.

Конечно, следует помнить, что $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ суть значения этих производных для точки касания.

Пример 2. Найти уравнения касательной к кривой Вивиани

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ x^2+y^2-5y=0 \end{cases}$$

в точке $(2, 1, 2\sqrt{5})$

Составляем частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=2z$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y-5, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=0;$$

соответствующие значения для данной точки будут:

$$4, \ 2, \ 4\sqrt{5}$$

$$4, \ -3, \ 0 \ ;$$

следовательно, уравнения касательной будут

$$\begin{cases} 4(X-2)+2(Y-1)+4\sqrt{5}(Z-2\sqrt{5})=0 \\ 4(X-2)-3(Y-1)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

или

$$\begin{cases} 2X+Y+2Z\sqrt{5}-25=0 \\ 4X-3Y-5=0 \end{cases}$$

Если надо найти углы, образуемые этой касательной с осями координат, то можно преобразовать полученные уравнения в вид пропорций; для этого исключаем из уравнений (*) $X-2$:

$$5(Y-1)+4\sqrt{5}(z-2\sqrt{5})=0;$$

получаем систему

$$\begin{cases} 5(Y-1)+4\sqrt{5}(z-2\sqrt{5})=0 \\ 4(X-2)-3(Y-1)=0; \end{cases}$$

из I-го уравнения имеем

$$Y-1=\frac{z-2\sqrt{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{4}},$$

а из 2-го

$$Y-1=\frac{X-2}{\frac{3}{4}},$$

так что

$$\frac{X-2}{\frac{3}{4}}=\frac{Y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{4}},$$

или, избавляясь от дробей в знаменателях,

$$\frac{X-2}{3}=\frac{Y-1}{4}=\frac{z-2\sqrt{5}}{-\sqrt{5}};$$

углы с осями найдутся по формулам:

$$\cos\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{9+16+5}}=\pm\frac{3}{\sqrt{30}}=\pm\frac{\sqrt{30}}{10},$$

$$\cos\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{30}}=\pm\frac{2\sqrt{30}}{15},$$

$$\cos\gamma=\mp\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}}=\mp\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Обратим внимание на то, что и в том случае, когда кривая задана пересечением двух поверхностей, уравнения касательной могут быть получены и в виде пропорций, если воспользоваться правилом дифференцирования неявных функций. Сделаем это для того же примера 2.

Дифференцируем уравнения кривой, сокращая первое на 2:

$$\begin{cases} xdx + ydy + zdz = 0 \\ 2xdx + 2ydy - 5dy = 0; \end{cases}$$

для данной точки они заменятся такими:

$$\begin{cases} 2dx + dy + 2\sqrt{5}\,dz = 0 \\ 4dx - 3dy = 0, \end{cases}$$

откуда

$$dx = \frac{3}{4}dy \quad \text{и} \quad dz = -\frac{\sqrt{5}}{4}dy;$$

следовательно, уравнения (4) касательной будут:

$$\frac{X-2}{\frac{3}{4}dy} = \frac{Y-1}{dy} = \frac{Z-2\sqrt{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{4}dy}$$

или окончательно

$$\frac{X-2}{3} = \frac{Y-1}{4} = \frac{Z-2\sqrt{5}}{-\sqrt{5}}.$$

Замечание. Всякая плоскость, проходящая через касательную прямую, называется касательною плоскостью к данной кривой; очевидно, что в данной точке к данной кривой можно провести бесчисленное множество касательных плоскостей; уравнением их будет

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0,$$

где A, B и C связаны уравнением

$$Adx + Bdy + Cdz = 0.$$

Вообразим себе теперь кривую в пространстве, возьмем на ней определенную точку, проведем в этой точке касательную к кривой и к этой касательной в точке касания проведем перпендикулярную плоскость; такая плоскость называется нормальною. Итак, нормальною плоскостью к кривой двоякой кривизны называется плоскость, проходящая через точку на кривой перпендикулярно к касательной прямой в этой точке.

Выведем ее уравнение. Так как она проходит через точку $M(x, y, z)$ и перпендикулярна к касательной, уравнения которой возьмем в виде (4)

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz},$$

то, как известно из Аналитической Геометрии, уравнением ее будет:

$$\boxed{(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0} \qquad (8)$$

Примеры. I) Для винтовой линии (см.прим.I) уравнение нормальной плоскости будет:

$$(X-a\cos t).-a\sin t+(Y-a\sin t)a\cos t+(Z-kt)k=0$$

или по упрощении

$$a\sin t.X-a\cos t.Y-kZ+k^2t=0.$$

2) Для рассмотренной в прим. 2 кривой Вивиани уравнение нормальной плоскости будет

$$3(X-2)+4(Y-1)-\sqrt{5}(Z-2\sqrt{5})=0$$

или

$$3X+4Y-\sqrt{5}\,Z=0.$$

Если кривая задается пересечением двух поверхностей уравнениями (6), то уравнение нормальной плоскости, пользуясь теорией определителей, можно написать таким образом: имеем 3 уравнения: одно-нормальной плоскости (8) и два, получающиеся из уравнений (6) их дифференцированием, связывающие dx, dy и dz:

$$\left\{\begin{aligned} &(\bar{X}-x)\,dx+(\bar{Y}-y)\,dy+(\bar{Z}-z)\,dz=0\\ &\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0\\ &\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0. \end{aligned}\right.$$

Результат исключения dx, dy и dz из этой системы однородных уравнений и даст уравнение нормальной плоскости в виде:

$$\begin{vmatrix} \bar{X}-x, & \bar{Y}-y, & \bar{Z}-z\\ \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}=0.$$

Применяя этот способ к примеру 2, получим:

$$\begin{vmatrix} \bar{X}-2, & \bar{Y}-1, & \bar{Z}-2\sqrt{5}\\ 4, & 2, & 4\sqrt{5}\\ 4, & -3, & 0 \end{vmatrix}=0;$$

делим элементы 2-й строки на 2:

$$\begin{vmatrix} \bar{X}-2, & \bar{Y}-1, & \bar{Z}-2\sqrt{5}\\ 2, & 1, & 2\sqrt{5}\\ 4, & -3, & 0 \end{vmatrix}=0;$$

располагаем этот определитель по элементам I-й строки

$$(\bar{X}-2).\,6\sqrt{5}+(\bar{Y}-1)\,8\sqrt{5}+(\bar{Z}-2\sqrt{5})-10=0$$

или, деля все уравнение на $2\sqrt{5}$:

$$3(\bar{X}-2)-4(\bar{Y}-1)-\sqrt{5}(\bar{Z}-2\sqrt{5})=0.$$

Задачи для упражнения.

Найти уравнения касательной прямой, $\cos$ углов ее с осями координат и уравнение нормальной плоскости для кривых:

1) $x=\frac{t^2}{2}$, $y=\frac{t^3}{3}$, $z=\frac{t^4}{4}$ в точке, для которой $t=1$.

Ответ: $\frac{X-\frac{1}{2}}{1}=\frac{Y-\frac{1}{3}}{1}=\frac{Z-\frac{1}{4}}{1}$; $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$12X+12Y+12Z-13=0$

2) $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^{2t}$ в точке, для которой $t=0$.

Ответ: $\frac{X-1}{1}=\frac{Y}{1}=\frac{Z-1}{2}$; $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\pm\frac{2}{\sqrt{6}}$.

$X+Y+2Z-3=0$.

3) $x=t^2$, $y=t-1$, $z=t^3-t$ в точке, для которой $t=2$.

Ответ: $\frac{X-4}{4}=\frac{Y-1}{1}=\frac{Z-6}{11}$; $\pm\frac{4}{\sqrt{138}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{138}}$, $\pm\frac{11}{\sqrt{138}}$

$4X+Y+11Z-83=0$.

4) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ y^2+z^2=10 \end{cases}$ в точке (2,3, -1).

Ответ: $\begin{cases} 2X+3Y=13 \\ 3Y-Z=10 \end{cases}$; $\pm\frac{2}{7}$, $\mp\frac{3}{7}$, $\pm\frac{6}{7}$

$3X-2Y-6Z-6=0$.

5) $\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ 2x+z^2-4=0 \end{cases}$ в точке (0,0,-2)

Ответ: $\begin{cases} X=0 \\ Z+2=0 \end{cases}$; $0, \pm 1, 0$.

$Y=0$.

6) $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=95 \\ x^2+2y^2=z \end{cases}$ в точке (-1,2,9)

Ответ: $\begin{cases} 2X+Y-9Z+95=0 \\ 2X-8Y+Z+9=0 \end{cases}$; $\pm\frac{2}{5\sqrt{65}}$, $\pm\frac{2}{\sqrt{65}}$, $\pm\frac{39}{5\sqrt{65}}$

$39X+10Y+2Z+1=0$.

2. Соприкасающаяся плоскость; главная нормаль; бинормаль.

Вообразим себе (черт.144) кривую в пространстве, и пусть ее уравнения по отношению к прямоугольной системе координат $OXYZ$ будут

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t); \end{cases} \qquad (1)$$

возьмем на этой кривой точку $M(x,y,z)$ и проведем в этой точке к кривой касательную прямую MT, написав ее уравнения в виде

$$\frac{X-x}{\varphi'(t)}=\frac{Y-y}{\psi'(t)}=\frac{Z-z}{\omega'(t)}; \qquad (2)$$

далее возьмем на кривой точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, смежную с точкой M, и проведем плоскость через касательную MT и точку M_1. Если мы станем точку M_1 приближать по кривой к совпадению с точкой M, то эта плоскость, вращаясь около MT, будет стремиться к некоторому предельному положению, которое называется соприкасающеюся плоскостью или плоскостью кривизны данной кривой в данной точке.

Итак, соприкасающейся плоскостью или плоскостью кривизны некоторой кривой в данной точке называется предельное положение плоскости, проходящей через касательную к кривой в данной точке и через бесконечно близкую к ней точку на кривой, когда последняя неограниченно приближается по кривой к данной точке.

Из этого определения совершенно ясно, что для плоской кривой плоскостью кривизны является плоскость, в которой лежит кривая.

Выведем теперь уравнение плоскости кривизны.

Прежде всего найдем уравнение плоскости, проходящей через касательную MT и точку M_1, смежную с данной точкой M. Для этого мы должны написать уравнение плоскости, проходящей через точку M:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0 \qquad (3)$$

и подчинить коэффициенты A, B, C условию параллельности плоскости (3) и прямой MT, определяемой уравнением (2); из Аналитической Геометрии известно, что это условие таково:

$$A\varphi'(t)+B\psi'(t)+C\omega'(t)=0; \qquad (4)$$

по умножении на dt оно может быть переписано и так:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0. \qquad (4')$$

Далее, искомая плоскость должна проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$; следовательно, координаты точки M_1 должны удовлетворять уравнению (3), т.е.

$$A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)=0. \;^{*)}$$

Пусть точка M_1 соответствует значению параметра $t+h$; тогда

$$x_1=\varphi(t+h); \quad y_1=\psi(t+h); \quad z_1=\omega(t+h);$$

развернем разности x_1-x, y_1-y, z_1-z по формуле Тейлора, останавливая ее на второй производной:

$$x_1-x=\varphi(t+h)-\varphi(t)=h\varphi'(t)+\frac{h^2}{2}\varphi''(t+\theta_1 h), \text{ где } 0<\theta_1<1$$

$$y_1-y=\psi(t+h)-\psi(t)=h\psi'(t)+\frac{h^2}{2}\psi''(t+\theta_2 h), \text{ где } 0<\theta_2<1$$

$$z_1-z=\omega(t+h)-\omega(t)=h\omega'(t)+\frac{h^2}{2}\omega''(t+\theta_3 h), \text{ где } 0<\theta_3<1;$$

подставив эти выражения в уравнение $(*)$, мы получим второе условие, которому подчинены коэффициенты A, B, C:

$$h[A\varphi'(t)+B\psi'(t)+C\omega'(t)]+\frac{h^2}{2}[A\varphi''(t+\theta_1h)+B\psi''(t+\theta_2h)+C\omega''(t+\theta_3h)]=0;$$

приняв во внимание условие (4) и затем сократив на $\frac{h^2}{2}$, получим 2-е условие в виде:

$$A\varphi''(t+\theta_1h)+B\psi''(t+\theta_2h)+C\omega''(t+\theta_3h)=0. \qquad (5)$$

Итак, плоскость, проходящая через MT и точку M_1 определяется уравнением:

$$A(\underline{X}-x)+B(\bar{Y}-y)+C(Z-z)=0,$$

в котором коэффициенты A, B, C подчинены 2 условиям:

$$\begin{cases} A\,dx+B\,dy+C\,dz=0 \\ A\varphi''(t+\theta_1h)+B\psi''(t+\theta_2h)+C\omega''(t+\theta_3h)=0 \end{cases}$$

Перейдем теперь к уравнению соприкасающейся плоскости.

Ее уравнение останется в виде

$$A(\underline{X}-x)+B(\bar{Y}-y)+C(Z-z)=0; \qquad (3)$$

I-е условие для коэффициентов A, B, C остается без изменения, а 2-е получим, поведя h к 0, и тогда в пределе будем иметь:

$$A\varphi''(t)+B\psi''(t)+C\omega''(t)=0, \qquad (6)$$

или, умножив на dt^2:

$$Ad^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0. \qquad (6')$$

Таким образом для определения A, B и C получается система двух однородных уравнений

$$\begin{cases} A\,dx+B\,dy+C\,dz=0 \\ Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=0 \end{cases}\left|\begin{matrix} d^2z \\ -dz \end{matrix}\right|\begin{matrix} -d^2y \\ dy \end{matrix};$$

исключая из этих уравнений сначала C, а потом B, получаем:

$$\begin{cases} A(dx\,d^2z - dz\,d^2x) + B(dy\,d^2z - dz\,d^2y) = 0 \\ A(dy\,d^2x - dx\,d^2y) + C(dy\,d^2z - dz\,d^2y) = 0, \end{cases}$$

откуда следует:

$$\frac{A}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{B}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{C}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \ell;$$

обозначив каждое из этих отношений буквою ℓ, получим, что

$$\begin{cases} A = \ell(dy\,d^2z - dz\,d^2y) \\ B = \ell(dz\,d^2x - dx\,d^2z) \\ C = \ell(dx\,d^2y - dy\,d^2x). \end{cases}$$

Подставив эти выражения в уравнение (3) и сократив на ℓ, мы и будем иметь уравнение соприкасающейся плоскости:

$$\boxed{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)(\bar{X} - x) + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)(\bar{Y} - y) + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\cdot(\bar{Z} - z) = 0} \tag{7}$$

Обращаем внимание на то, что коэффициенты в уравнении (7) равняются или самим разностям

$$dy\,d^2z - dz\,d^2y, \quad dz\,d^2x - dx\,d^2z, \quad dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

или каким-угодно числам им пропорциональным.

Так как уравнение соприкасающейся плоскости есть результат исключения A, B и C из системы трех однородных уравнений

$$\begin{cases} A(\bar{X} - x) + B(\bar{Y} - y) + C(\bar{Z} - z) = 0 \\ A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0 \\ A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0, \end{cases}$$

то, пользуясь теорией определителей, его можно написать в таком виде:

$$\begin{vmatrix} \bar{X}-x, & \bar{Y}-y, & \bar{Z}-z \\ dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

Кроме того определения соприкасающейся плоскости, которое дано в начале этого пункта, она может быть определена и иначе: во-I) соприкасающаяся плоскость есть предельное положение плоскости, проходящей через касательную к кривой параллельно бесконечно-близкой касательной и во-2) соприкасающаяся плоскость есть предельное положение плоскости, проходящей через три бесконечно-близких точки кривой.

Отметим еще следующее важное свойство соприкасающейся плоскости: соприкасающаяся плоскость кривой в данной точке есть ближайшая к кривой из всех плоскостей, проходящих через эту точку.

Приведем доказательство указанного свойства. Проведем через точку M данной кривой некоторую плоскость; ее уравнение будет

$$A(\bar{X}-x)+B(\bar{Y}-y)+C(\bar{Z}-z)=0. \qquad (\alpha)$$

Если коэффициенты A, B, C не подчинены никакому условию, то это уравнение определяет <u>любую</u> плоскость, проходящую через точку M; если A, B, C подчинены условию

$$A\varphi'(t)+B\psi'(t)+C\omega'(t)=0, \qquad (\beta)$$

то оно определяет всякую <u>касательную</u> плоскость в точке M; если A, B, C подчинены двум условиям:

$$\left\{\begin{aligned} &A\varphi'(t)+B\psi'(t)+C\omega'(t)=0 \\ &A\varphi''(t)+B\psi''(t)+C\omega''(t)=0, \end{aligned}\right. \qquad (\gamma)$$

то оно определяет соприкасающуюся плоскость в точке M.

Возьмем на кривой смежную с точкой M точку M_1 с координатами:

$$x_1 = \varphi(t+h); \quad y_1 = \psi(t+h); \quad z_1 = \omega(t+h)$$

и определим ее расстояние до плоскости (α); как известно из Аналитической Геометрии, оно выражается так:

$$\delta = \frac{A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

разложив разности x_1-x, y_1-y, z_1-z по формуле Тейлора, мы преобразуем это выражение следующим образом:

$$\delta = \frac{A\left[h\varphi'(t)+\frac{h^2}{2}\varphi''(t)+\frac{h^3}{6}\varphi'''(t)+\ldots\right]+B\left[h\psi'(t)+\frac{h^2}{2}\psi''(t)+\frac{h^3}{6}\psi'''(t)+\ldots\right]+}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\frac{+C\left[h\omega'(t)+\frac{h^2}{2}\omega''(t)+\frac{h^3}{6}\omega'''(t)+\ldots\right]}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{h}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left[A\varphi'(t)+B\psi'(t)+C\omega'(t)\right]+$$

$$+\frac{h^2}{\pm 2\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left[A\varphi''(t)+B\psi''(t)+C\omega''(t)\right]+$$

$$+\frac{h^3}{\pm 6\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left[A\varphi'''(t)+B\psi'''(t)+C\omega'''(t)\right]+\ldots\ldots$$

Если при бесконечно-малом h мы будем рассматривать расстояние δ до любой плоскости, проходящей через точку M, когда A, B и C не подчинены никакому условию, то δ есть бесконечно-малая I-го порядка. Если будем рассматривать расстояние δ до касательной плоскости, когда A, B и C подчинены условию (β), то $\delta = \frac{h^2}{\pm 2\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left[A\varphi''(t)+B\psi''(t)+C\omega''(t)\right]+\ldots,$

т.е. есть бесконечно-малая 2-го порядка.

Если же будем рассматривать расстояние δ до соприкасающейся плоскости, когда A, B и C подчинены условиям (γ), то

$$\delta = \frac{h^3}{\pm 6\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left[A\varphi'''(t)+B\psi'''(t)+C\omega'''(t)\right]+\ldots\ldots$$

т.е. есть бесконечно-малая 3-го порядка.

Таким образом, действительно, соприкасающаяся плоскость расположена к кривой ближе всякой другой плоскости, проходящей через данную точку.

Заметим кстати, что изменение знака h вызывает в случае соприкасающейся плоскости изменение знака δ; следовательно, эта плоскость пересекает кривую.

Всякая прямая перпендикулярная к касательной прямой в точке касания называется нормалью к кривой; ясно, что в данной точке можно к кривой провести бесчисленное множество нормалей, которые все лежат в нормальной плоскости. Из всех этих нормалей особенное значение имеют две: нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, которая называется первою нормалью или главною нормалью, и нормаль перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, которая называется второю нормалью или бинормалью.

Если (черт.145) мы поместим начало координат O в данную точку кривой L, ось $O\bar{X}$ направим по касательной, а пл. $\bar{X}O\bar{Z}$ совместим с плоскостью кривизны, то ось $O\bar{Z}$ будет главною нормалью, ось $O\bar{Y}$ -бинормалью, пл. $\bar{Y}O\bar{Z}$-нормальною плоскостью; плоскость же $\bar{X}O\bar{Y}$, определяемая касательною и бинормалью, называется спрямляющею плоскостью. Касательная, главная нормаль и бинормаль суть ребра трехгранного угла $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ с прямыми плоскми и двугранными углами; этот трехгранный угол называется главным трехгранным углом или главным триэдром кривой в данной точке.

Уравнения главной нормали легко получить, рассматривая ее, как прямую пересечения нормальной плоскости с соприкасающейся, т.е.

$$\begin{cases} (X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0 \\ A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \end{cases}$$

где $A=dy\,d^2z-dz\,d^2y$, $B=dz\,d^2x-dx\,d^2z$, $C=dx\,d^2y-dy\,d^2x$;

отметим, что при решении задач мы всегда можем, если понадобится, заменять в первом уравнении dx, dy и dz, а во втором - A, B и C какими-угодно числами им пропорциональными. Если надо определить углы, образуемые главною нормалью с осями координат, то в каждом частном случае по правилам Аналитической Геометрии преобразуем ее уравнения к виду пропорций и затем найдем косинусы искомых углов.

Также легко написать и уравнения бинормали: бинормаль должна проходить через данную точку (x, y, z) и быть перпендикулярною к соприкасающейся плоскости, уравнение которой, как известно:

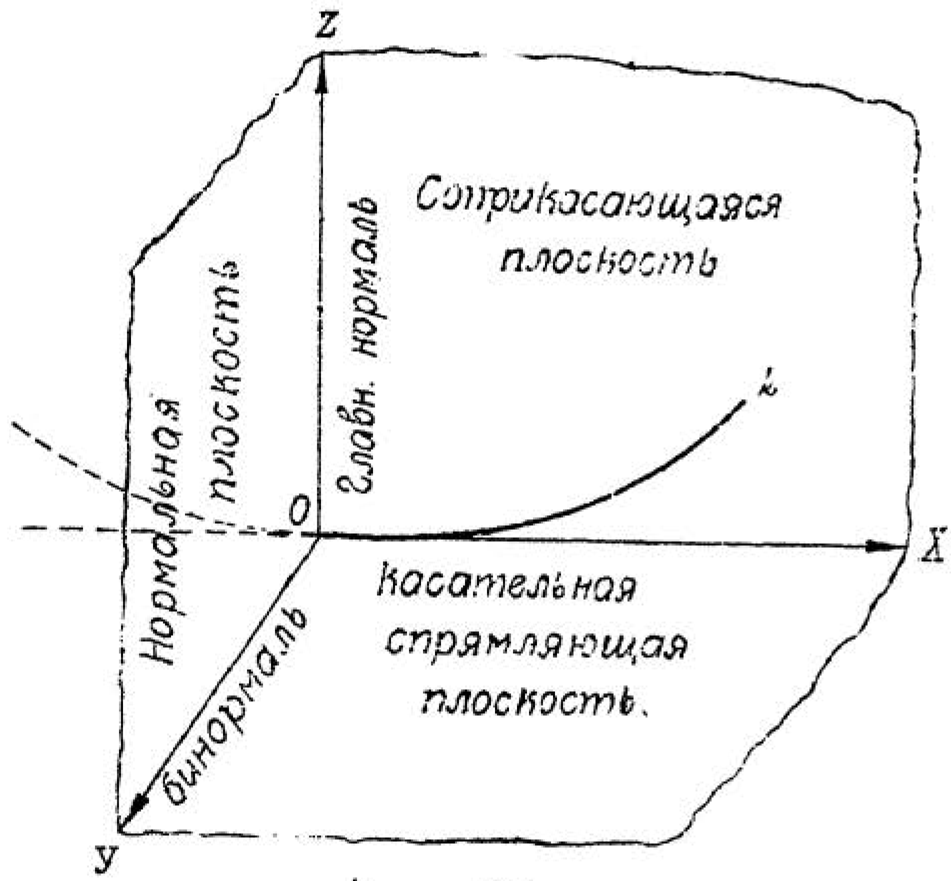
$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Пользуясь правилами Аналитической Геометрии, мы сразу можем написать уравнения бинормали в виде:

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C},$$

где A, B и C имеют указанные выше значения и опять таки могут быть заменены числами им пропорциональными.

П р и м е р ы . I. Найти уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали, бинормали и углы этих нормалей с осями координат для винтовой линии



Черт. 145.

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{Cos}\,t \\ y = a\,\mathrm{Sin}\,t \\ z = kt. \end{cases}$$

Составляем

$$dx = -a\,\mathrm{Sin}\,t\,dt; \qquad d^2x = -a\,\mathrm{Cos}\,t\,dt^2;$$

$$dy = a\,\mathrm{Cos}\,t\,dt; \qquad d^2y = -a\,\mathrm{Sin}\,t\,dt^2;$$

$$dz = k\,dt; \qquad d^2z = 0;$$

коэффициенты в уравнении соприкасающейся плоскости будут

$$A = dy\,d^2z - dz\,d^2y = ak\,\mathrm{Sin}\,t\,dt^3$$

$$B = dz\,d^2x - dx\,d^2z = -ak\,\mathrm{Cos}\,t\,dt^3$$

$$C = dx\,d^2y - dy\,d^2x = a^2\,dt^3.$$

Следовательно, уравнение соприкасающейся плоскости, по сокращении на $a\,dt^3$ будет

$$k\,\mathrm{Sin}\,t(\underline{X} - a\,\mathrm{Cos}\,t) - k\,\mathrm{Cos}\,t(Y - a\,\mathrm{Sin}\,t) + a(Z - kt) = 0$$

или

$$k\sin t.\bar{X}-k\cos t.\bar{Y}+aZ-akt=0.$$

Уравнения главной нормали напишем в виде совокупности уравнений нормальной плоскости (см.прим.I п.I этого параграфа) и плоскости соприкасающейся:

$$\begin{cases} a\sin t.\bar{X}-a\cos t.\bar{Y}-kZ+k^2t=0 \\ k\sin t\bar{X}-k\cos t.\bar{Y}+aZ-akt=0 \end{cases} \left|\begin{matrix} a \\ k \end{matrix}\right|\begin{matrix} -k \\ a \end{matrix};$$

чтобы составить уравнения главной нормали в виде пропорций, исключаем из этой системы сначала Z, а потом $\bar{Y}$:

$$\begin{cases} (a^2+k^2)\sin t.\bar{X}-(a^2+k^2)\cos t.\bar{Y}=0 \\ (a^2+k^2)Z-kt\,(a^2+k^2)=0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sin t.\bar{X}=\cos t.\bar{Y} \\ Z-kt=0, \end{cases}$$

и уравнения будут:

$$\frac{\bar{X}}{\cos t}=\frac{\bar{Y}}{\sin t}=\frac{Z-kt}{0}.$$

Так как в общих уравнениях в виде пропорций прямой линии

$$\frac{\bar{X}-x_0}{l}=\frac{\bar{Y}-y_0}{m}=\frac{Z-z_0}{n}$$

(x_0, y_0, z_0) означают координаты какой-угодно точки прямой, то условимся всегда вводить координаты рассматриваемой точки, и тогда уравнения главной нормали окончательно получатся в таком виде:

$$\frac{\bar{X}-a\cos t}{\cos t}=\frac{\bar{Y}-a\sin t}{\sin t}=\frac{Z-kt}{0}.$$

Отсюда следует, что углы, образуемые главною нормалью с осями координат, которые будем обозначать через α', β' и γ', определяются по формулам:

$$\begin{cases} \cos\alpha' = \pm\cos t \\ \cos\beta' = \pm\sin t \\ \cos\gamma' = 0 \end{cases}$$

Таким образом $\gamma' = \frac{\pi}{2}$, т.е. главная нормаль перпендикулярна к оси OZ или к образующим цилиндрической поверхности, на которой расположена винтовая линия; что же касается углов α' и β', то в зависимости от направления главной нормали

$$\alpha' = t \text{ или } \alpha' = \pi - t; \quad \beta' = \frac{\pi}{2} - t \text{ или } \beta' = \frac{\pi}{2} + t.$$

Уравнения бинормали будут написаны, по сокращении знаменателей на $a\,dt^3$, в виде

$$\frac{X - a\cos t}{k\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{-k\cos t} = \frac{Z - kt}{a};$$

углы ее с осями α'', β'' и γ'' определяются по формулам:

$$\begin{cases} \cos\alpha'' = \pm\dfrac{k\sin t}{\sqrt{a^2+k^2}} \\ \cos\beta'' = \mp\dfrac{k\cos t}{\sqrt{a^2+k^2}} \\ \cos\gamma'' = \pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}; \end{cases}$$

последнее равенство показывает, что бинормаль образует постоянный угол с осью OZ, а следовательно, и с образующими цилиндрической поверхности, на которой расположена винтовая линия.

2. Найти уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали, бинормали и углы, образованные этими нор-

малями с осями координат, для кривой

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^{2t} \end{cases}$$

в точке, для которой $t=0$.

Обратим внимание на расположение вычислений, при решении подобных задач. Сначала сделаем подготовительные определения тех чисел, которые нам понадобятся при решении задачи; а именно, найдем дифференциалы I-го и 2-го порядков от x, y и z и вычисляем их значения для данной точки; при этом вспоминаем, что во всех уравнениях и формулах подобных задач важно знать не самые значения дифференциалов, а лишь числа, им пропорциональные, и потому, например, можно отбрасывать одинаковые степени дифференциала независимой переменной (в данной задаче степени dt).

Имеем:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t; & dx = e^t(\cos t - \sin t)dt; & d^2x = -2e^t \sin t\, dt^2; \\ y = e^t \sin t; & dy = e^t(\sin t + \cos t)dt; & d^2y = 2e^t \cos t\, dt^2; \\ z = e^{2t}; & dz = 2e^{2t}dt; & d^2z = 4e^{2t}dt^2. \end{cases}$$

Составляем таблицу для $t=0$.

$t=0$		d	d^2
x	1	1	0
y	0	1	2
z	1	2	4
S		$\sqrt{6}$	

$$A = \begin{vmatrix} 1, 2 \\ 2, 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$B = \begin{vmatrix} 2, 4 \\ 1, 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$C = \begin{vmatrix} 1, 0 \\ 1, 2 \end{vmatrix} = 2$$

Следовательно, уравнение соприкасающейся плоскости будет.

$$-4\bar{Y} + 2(Z-1) = 0 \quad \text{или} \quad 2\bar{Y} - Z + 1 = 0.$$

Уравнение главной нормали: составляем сначала уравнение нормальной плоскости:

$$(\underline{X}-1)\cdot 1+(\bar{Y}-0)\cdot 1+(Z-1)\cdot 2=0 \quad \text{или} \quad \underline{X}+\bar{Y}+2Z-3=0;$$

тогда главная нормаль определится совокупностью уравнений:

$$\begin{cases} \underline{X}+\bar{Y}+2Z-3=0 \\ 2\bar{Y}-Z+1=0; \end{cases}$$

придавая им вид пропорций, получим

$$\frac{\bar{X}-1}{-5}=\frac{\bar{Y}}{1}=\frac{Z-1}{2};$$

углы α', β', γ' главной нормали с осями координат определятся по формулам:

$$\begin{cases} \cos\alpha'=\mp\frac{5}{\sqrt{30}}=\mp\frac{\sqrt{30}}{6} \\ \cos\beta'=\pm\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \cos\gamma'=\pm\frac{2}{\sqrt{30}}=\pm\frac{\sqrt{30}}{15}. \end{cases}$$

Уравнение бинормали:

$$\frac{\bar{X}-1}{0}=\frac{\bar{Y}}{-4}=\frac{Z-1}{2} \quad \text{или} \quad \frac{\bar{X}-1}{0}=\frac{\bar{Y}}{-2}=\frac{Z-1}{1};$$

углы ее с осями определяются по формулам:

$$\cos\alpha''=0; \quad \cos\beta''=\mp\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos\gamma''=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3. Найти уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали для кривой Вивиани

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ x^2+y^2-5y=0 \end{cases}$$

в точке $(2, 1, 2\sqrt{5})$ (см.прим.2 п. I этого параграфа).

Выберем за независимую переменную y и будем находить значения dx, d^2x, dz, d^2z для данной точки. Для этого дифференцируем данные уравнения:

$$\begin{cases} x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \\ 2x\,dx + 2y\,dy - 5\,dy = 0 \end{cases} \quad (*);$$

для данной точки они получают вид:

$$\begin{cases} 2\,dx + dy + 2\sqrt{5}\,dz = 0 \\ 4\,dx - 3\,dy = 0 \ ; \end{cases}$$

второе уравнение дает

$$dx = \frac{3}{4}\,dy,$$

и, заменяя этим выражением dx в первом уравнении, получаем:

$$\frac{5}{2}\,dy + 2\sqrt{5}\,dz = 0,$$

откуда

$$dz = -\frac{5}{4\sqrt{5}}\,dy = -\frac{\sqrt{5}}{4}\,dy.$$

Чтобы найти значения 2 дифференциалов, еще раз дифференцируем уравнения $(*)$, помня, что $d^2y = 0$:

$$\begin{cases} dx^2 + x\,d^2x + dy^2 + dz^2 + z\,d^2z = 0 \\ 2\,dx^2 + 2x\,d^2x + 2\,dy^2 = 0; \end{cases}$$

заменяя здесь dx^2 через $\frac{9}{16}dy^2$ и dz^2 через $\frac{5}{16}\,dy^2$, вводя вместо x и x их значения и сокращая второе уравнение на 2, получим:

$$\begin{cases} 2\,d^2x + 2\sqrt{5}\,d^2z = -\frac{15}{8}\,dy^2 \\ 2\,d^2x = -\frac{25}{16}\,dy^2, \end{cases}$$

откуда:

$$d^2x = -\frac{25}{32}\,dy^2; \qquad d^2z = -\frac{\sqrt{5}}{32}\,dy^2.$$

Составляем теперь таблицу пропорциональных чисел:

	d	d^2
$x=2$	3	25
$y=1$	4	0
$z=2\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$

$A=4\sqrt{5}$
$B=-28\sqrt{5}$
$C=-100.$

Уравнение соприкасающейся плоскости, по сокращении на $4\sqrt{5}$, будет:

$$(X-2)-7(Y-1)-5\sqrt{5}(Z-2\sqrt{5})=0$$

или

$$X-7Y-5\sqrt{5}Z+55=0.$$

Уравнения главной нормали будут: берем уравнение нормальной плоскости (см.прим.2, п.I, этого параграфа) и только что полученное уравнение соприкасающейся плоскости:

$$\begin{cases} 3X+4Y-\sqrt{5}Z=0 \\ X-7Y-5\sqrt{5}Z+55=0. \end{cases}$$

Уравнения бинормали будут:

$$\frac{X-2}{1}=\frac{Y-1}{-7}=\frac{Z-2\sqrt{5}}{-5\sqrt{5}}.$$

Задачи для упражнений.

Найти уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали и косинусы углов, образованных этими нормалями с осями координат, для кривых:

I) $x=\frac{t^2}{2};\ y=\frac{t^3}{3},\ z=\frac{t^4}{4}$ в точке, для которой $t=1$.

Ответ: $12X-24Y+12Z-1=0$

$$\frac{X-\frac{1}{2}}{1}=\frac{Y-\frac{1}{3}}{0}=\frac{Z-\frac{1}{4}}{-1};\quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\frac{X-\frac{1}{2}}{1}=\frac{Y-\frac{1}{3}}{-2}=\frac{Z-\frac{1}{4}}{1};\quad \pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ \mp\frac{2}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

2) $x=t\cos t, y=t\sin t,\ z=t^2$ в точке, для которой $t=0$.

Ответ: $\bar{Y}-Z=0$

$$\frac{\bar{X}}{0}=\frac{\bar{Y}}{1}=\frac{Z}{1};\quad 0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\bar{X}}{0}=\frac{Y}{1}=\frac{Z}{-1};\quad 0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3) $\begin{cases} y^2=x-z+3 \\ z^2=3-2y \end{cases}$ в точке $(-1,1,1)$

Ответ: $\bar{X}+Z=0$

$$\frac{\bar{X}+1}{-1}=\frac{\bar{Y}-1}{2}=\frac{Z-1}{1};\quad \mp\frac{1}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{2}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{\bar{X}+1}{1}=\frac{\bar{Y}-1}{0}=\frac{Z-1}{1};\quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ x+y=z^2+1 \end{cases}$ в точке $(1,1,1)$

Ответ: $\bar{X}+\bar{Y}-2Z=0$

$$\frac{\bar{X}-1}{1}=\frac{\bar{Y}-1}{1}=\frac{Z-1}{1};\quad \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\bar{X}-1}{1}=\frac{\bar{Y}-1}{1}=\frac{Z-1}{-2};\quad \pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ \mp\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Найти уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали для кривых.

5) $x=t^2,\ y=t-1,\ z=t^3-t$ в точке, для которой $t=2$.

Ответ: $6\bar{X}-13\bar{Y}-Z-5=0$

$$\frac{\bar{X}-4}{71}=\frac{\bar{Y}-1}{35}=\frac{Z-6}{-29}$$

$$\frac{\bar{X}-4}{6}=\frac{\bar{Y}-1}{-13}=\frac{Z-6}{-1}.$$

б) $\begin{cases} x^2+2y-z^2+7=0 \\ 2x+y^2-z-4=0 \end{cases}$ в точке (I,-2,2)

Ответ: $8X-22Y-Z-50=0$

$$\frac{X-1}{43}=\frac{Y+2}{19}=\frac{Z-2}{-74}$$

$$\frac{X-1}{8}=\frac{Y+2}{-22}=\frac{Z-2}{-1}.$$

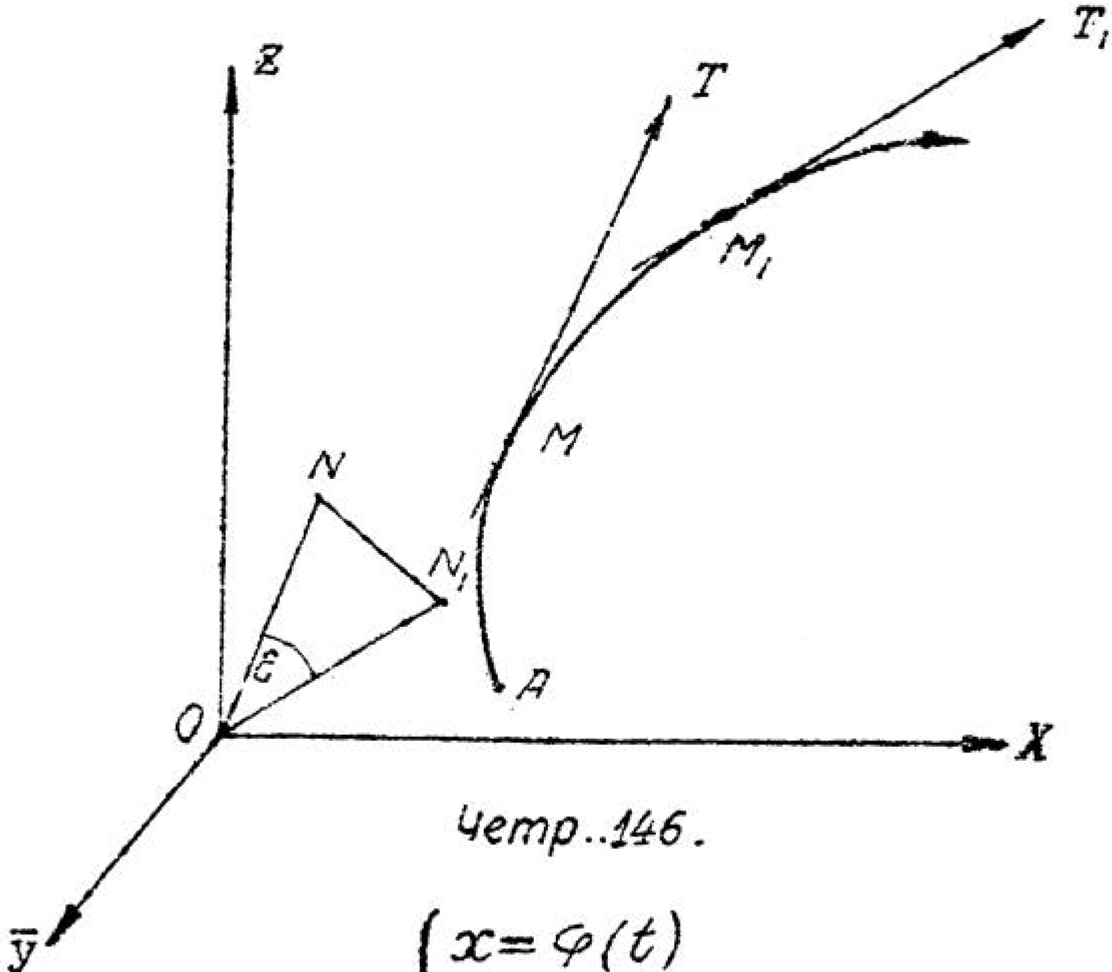
3. Радиусы I-й и 2-й кривизны.

Займемся теперь вопросом о кривизне пространственной кривой. Для таких кривых различают два рода кривизны. Первая происходит от того, что всякий элемент кривой рассматривается как некоторый плоский элемент, лежащий в своей плоскости кривизны и поэтому имеющий в этой плоскости свою кривизну и свой радиус кривизны; эта кривизна есть мера отклонения кривой от касательной прямой. Вторая кривизна происходит от того, что сама плоскость кривизны меняет свое положение от точки к точке, и между двумя соприкасающимися плоскостями для соседних точек кривой образуется некоторый двугранный угол, измеряющийся углом между перпендикулярами к этим плоскостям, т.е. между бинормалями к кривой; эта кривизна есть мера отклонения кривой от соприкасающейся плоскости; заметим, что вторая кривизна иногда называется также и кручением.

Из этих соображений понятно, почему пространственные кривые называются также кривыми двоякой кривизны.

Выведем сначала выражение для радиуса I-й кривизны.

Пусть (черт.146) нам дана некоторая кривая в пространстве; уравнения которой будут:



Черт..146.

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t); \end{cases}$$

примем точку A, кривой за начало отсчета дуг, возьмем на ней две смежные точки M и M_1 и в этих точках проведем к кривой касательные MT и M_1T_1, направив их в сторону возрастающих дуг. Эти две касательные, вообще говоря, между собою не пересекаются; поэтому углом между ними будет угол ε, образованный двумя прямыми ON и ON_1 параллельными MT и M_1T_1 и проведенными из начала координат O.

Как и для плоских кривых, отношение угла ε к длине дуги MM_1, которую обозначим через ΔS, т.е. $\frac{\varepsilon}{\Delta S}$, называется <u>среднею</u> первою кривизною дуги MM_1; если же мы станем точку M_1 приближать по кривой к совпадению с точкой M, то это отношение, вообще говоря, будет приближаться к некоторому пределу, который называется <u>первою кривизною кривой в точке M</u>; таким образом, обозначая эту величину буквою K, имеем:

$$K = \lim\left[\frac{\varepsilon}{\Delta S}\right]_{M_1 \to M};$$

величина обратная первой кривизне, называется радиусом I-й кривизны в точке M и обозначается R, так что

$$R=\frac{1}{K}=\lim\left[\frac{\Delta S}{\varepsilon}\right]_{M_1\to M}!$$

Мы знаем, что

$$\lim\left[\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right]_{\varepsilon\to 0}=\lim\left[\frac{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon}\right]_{\varepsilon\to 0}=1,$$

т.е. бесконечно-малый угол ε эквивалентен $2\sin\frac{\varepsilon}{2}$; а потому, пользуясь основною теоремой об отыскании предела отношения двух бесконечно-малых величин, мы можем написать, что

$$R=\lim\left[\frac{\Delta S}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right]_{M_1\to M}.$$

Найдем теперь выражение для $2\sin\frac{\varepsilon}{2}$. Если на прямых ON и ON_1 отложить от точки O векторы длиною = I, т.е. если $ON=ON_1=1$, то $\Delta\, ONN_1$ будет равнобедренным, и потому:

$$2\sin\frac{\varepsilon}{2}=NN_1.$$

Если координаты точки N обозначить через x, y и z, а точки N_1 – через x_1, y_1 и z_1, то получим

$$2\sin\frac{\varepsilon}{2}=NN_1=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}. \quad (*)$$

Обозначим теперь углы, образованные касательною MT с осями координат, буквами α, β и γ; тогда при переходе от точки M к точке M_1 эти точки, а также и их косинусы, получат некоторые приращения; обозначим приращения $\cos$'ов через $\Delta\cos\alpha$, $\Delta\cos\beta$ и $\Delta\cos\gamma$. Тогда по известной теореме Аналитической Геометрии, в силу которой координаты некоторой точки равны проекциям на оси координат ее радиуса-вектора, и принимая во внимание, что длины рассматриваемых радиусов-векторов ON и ON_1 равны 1, будем иметь:

$$x = \cos\alpha, \quad y = \cos\beta, \quad z = \cos\gamma;$$

$$x_1 = \cos\alpha + \Delta\cos\alpha, \quad y_1 = \cos\beta + \Delta\cos\beta_1, \quad z_1 = \cos\gamma + \Delta\cos\gamma,$$

и следовательно,

$$x_1 - x = \Delta\cos\alpha, \quad y_1 - y = \Delta\cos\beta, \quad z_1 - z = \Delta\cos\gamma.$$

Подставляя эти выражения в равенство (*), получим:

$$2\sin\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{(\Delta\cos\alpha)^2 + (\Delta\cos\beta)^2 + (\Delta\cos\gamma)^2},$$

и потому

$$R = \lim\left[\frac{\Delta s}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right]_{M_1 \to M} = \lim\left[\frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta\cos\alpha)^2 + (\Delta\cos\beta)^2 + (\Delta\cos\gamma)^2}}\right]_{\Delta s \to 0} =$$

$$= \lim\left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\cos\alpha}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\cos\beta}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\cos\gamma}{\Delta s}\right)^2}}\right]_{\Delta s \to 0},$$

откуда и получаем окончательное выражение для радиуса 1-й кривизны в виде:

$$\boxed{R = \left|\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2}}\right|} \qquad (I).$$

Заметим, что в этом виде формула не всегда удобна для вычислений; гораздо более удобной является формула:

$$\boxed{R = \left|\frac{ds^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|}, \qquad (II)$$

где A, B и C - коэффициенты в уравнении соприкасающейся плоскости, т.е.

$$A=dy\,d^2z-dz\,d^2y;\quad B=dz\,d^2x-dx\,d^2z;\quad C=dx\,d^2y-dy\,d^2x.$$

На выводе этой формулы мы не будем останавливаться; читатель может его найти, например, в „Записках по приложению дифференциального исчисления к геометрии" проф.Петровича (гл.III, § § 24 и 25).

Из сказанного в начале п. 3 этого параграфа ясно, что понятие о второй кривизне составляется совершенно аналогично понятию о первой кривизне, следует только в предыдущих рассуждениях заменить касательные MT и M_1T_1 в точках M и M_1 бинормалями кривой в этих точках. Поэтому и выражение для радиуса 2-й кривизны получается из выражения (I) для радиуса I-й кривизны заменою углов α, β и γ углами α'', β'' и γ'', образованными бинормалями в точке M с осями координат; таким образом, обозначая радиус 2-й кривизны буквою T, мы получаем для него такую формулу:

$$\boxed{T=\left|\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha''}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\beta''}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\gamma''}{ds}\right)^2}}\right|}\;;\quad (III)$$

для вычислений в некоторых случаях является более удобной другая формула

$$\boxed{T=\left|\frac{A^2+B^2+C^2}{\Delta}\right|},\qquad (IV)$$

где A, B и C - опять те же коэффициенты в уравнении соприкасающейся плоскости, а

$$\Delta=\begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \\ d^3x, & d^3y, & d^3z \end{vmatrix};$$

при вычислении этого определителя можно вместо значений дифференциалов брать, как и выше, числа им пропорциональные, разделив на одинаковые степени дифференциала независимой переменной. На выводе формулы (IУ) мы тоже останавливаться не будем; читатель может его найти в тех же "Записках" проф. Петровича (гл. III, § 26).

П р и м е р ы . I. Найти радиусы I-й и 2-й кривизны для винтовой линии:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = kt. \end{cases}$$

В примерах I п.п. I и 2 этого параграфа мы имеем:

$$ds = \sqrt{a^2+k^2}\,dt,$$

$$\cos\alpha = \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+k^2}}; \quad \cos\beta = \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+d^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{k}{\sqrt{a^2+k^2}}$$

$$\cos\alpha'' = \frac{k\sin t}{\sqrt{a^2+k^2}}; \quad \cos\beta'' = \frac{-k\cos t}{\sqrt{a^2+k^2}}; \quad \cos\gamma'' = \frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}.$$

Составляем:

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{-a\cos t\,dt}{\sqrt{a^2+k^2}\sqrt{a^2+k^2}\,dt} = \frac{-a\cos t}{a^2+k^2}$$

$$\frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{-a\sin t\,dt}{\sqrt{a^2+k^2}\sqrt{a^2+k^2}\,dt} = \frac{-a\sin t}{a^2+k^2}$$

$$\frac{d\cos\gamma}{ds} = 0;$$

Следовательно, по формуле (I)

$$R=\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2\,Cos\,t+a^2\,Sin^2 t}{(a^2+k^2)^2}}}=\frac{a^2+k^2}{a}.$$

Далее имеем:

$$\frac{d\,Cos\,\alpha''}{ds}=\frac{k\,Cos\,t}{a^2+k^2};\quad \frac{d\,Cos\,\beta''}{ds}=\frac{k\,Sin\,t}{a^2+k^2};\quad \frac{d\,Cos\,\gamma''}{ds}=0,$$

и потому по формуле (III)

$$T=\frac{a^2+k^2}{k}.$$

Мы видим, что для винтовой линии радиусы и той, и другой кривизны имеют постоянную величину.

2. Найти радиусы I-й и 2-й кривизны кривой

$$\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \\ z=e^{2t} \end{cases}$$

в точке, для которой $t=0$.

В примере 2 п.2 этого параграфа была составлена таблица, которую продолжим, вычислив еще и значения третьих дифференциалов:

$$d^2x=-2e^t\,Sin\,t\,dt^2;\qquad d^3x=-2e^t(Cos\,t+Sin\,t)\,dt^3$$

$$d^2y=2e^t\cos t\,dt^2;\qquad d^3y=2e^t(\cos t-\sin t)\,dt^3$$

$$d^2z=4e^{2t}\,dt^2;\qquad d^3z=8e^{2t}\,dt^3;$$

дополненная таблица будет:

$t=0$		d	d^2	d^3	
x	1	1	0	−2	$A=0$
y	0	1	2	2	$B=-4$
z	1	2	4	8	$C=2$
s		$\sqrt{6}$			

По формуле (II) имеем

$$R=\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{16+4}}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}.$$

Для определения T по формуле (IУ) вычисляем сначала

$$\Delta=\begin{vmatrix}1, & 0, & -2\\ 1, & 2, & 2\\ 2 & 4, & 8\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1, & 0, & -1\\ 1, & 1, & 1\\ 1, & 1, & 2\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}0, & 0, & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-8(2-3)=8;$$

следовательно,

$$T=\frac{16+4}{8}=\frac{5}{2}$$

3. Найти радиусы I-й и 2-й кривизны кривой

$$\begin{cases} x^2-y^2+z^2=1\\ y^2-2x+z=0\end{cases}$$

в точке (I,I,I).

Выбираем за независимую переменную x и дифференцируем уравнения кривой 3 раза, помня, что $d^2x=0$ и $d^3x=0$:

$$\begin{cases} x\,dx-y\,dy+z\,dz=0\\ -2\,dx+2y\,dy+dz=0\end{cases},$$

$$\begin{cases} dx^2-y\,d^2y-dy^2+z\,d^2z+dz^2=0\\ 2y\,d^2y+2\,dy^2+d^2z=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} -y\,d^3y-3\,dy\,d^2y+z\,d^3z+3\,dz\,d^2z=0\\ 2y\,d^3y+6\,dy\,d^2y+d^3z=0.\end{cases}$$

Первая из этих систем для данной точки обращается в

$$\begin{cases} dx-dy+dz=0\\ -2\,dx+2\,dy+dz=0,\end{cases}$$

откуда

$$dy=dx, \quad dz=0.$$

Вторая система для данной точки обращается в

$$\begin{cases} -d^2y+d^2z=0 \\ 2d^2y+d^2z=-2dx^2 \end{cases},$$

откуда

$$d^2y=-\frac{2}{3}dx^2, \quad d^2z=-\frac{2}{3}dx^2.$$

Третья система для данной точки обращается в

$$\begin{cases} -d^3y+d^3z=-2dx^3 \\ 2d^3y+d^3z=4dx^3, \end{cases}$$

откуда

$$d^3y=2dx^3, \quad d^3z=0.$$

Составляем таблицу

		d	d^2	d^3
x	1	1	0	0
y	1	1	$-\frac{2}{3}$	2
z	1	0	$-\frac{2}{3}$	0
s		$\sqrt{2}$		

$$A=-\frac{2}{3}; \quad B=\frac{2}{3}; \quad C=-\frac{2}{3};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & -\frac{2}{3}, & 2 \\ 0, & -\frac{2}{3}, & 0 \end{vmatrix}=\frac{4}{3}.$$

Таким образом по формулам (II) и (IУ):

$$R=\frac{ds^3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{4}{3}}}=\sqrt{6},$$

$$T=\frac{A^2+B^2+C^2}{\Delta}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}=1.$$

Задачи для упражнения.

Найти радиусы I-й и 2-й кривизны кривых.

I) $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2} \\ y=\dfrac{t^3}{3} \\ z=\dfrac{t^4}{4} \end{cases}$ в точке, для которой $t=1$.

Ответ: $R=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; $T=3$.

2) $\begin{cases} y^2=x \\ x^2=z \end{cases}$ в точке (I,-I,I).

Ответ: $R=\dfrac{21\sqrt{21}}{2\sqrt{101}}$; $T=\dfrac{101}{12}$.

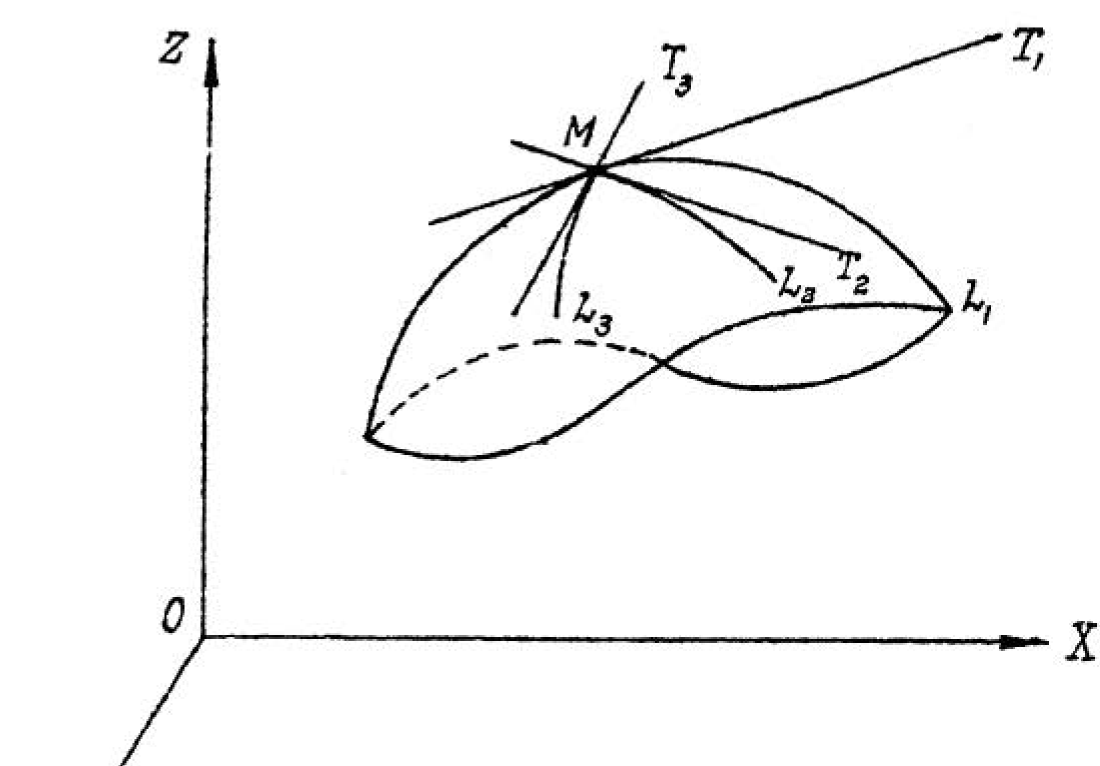
3) $\begin{cases} x^2=2ay \\ x^3=6a^2z \end{cases}$ Ответ: $R=T=\dfrac{(x^2+2a^2)^2}{4a^3}=\dfrac{(y+a)^2}{a}$.

4) $\begin{cases} x=\cos t+\sin^2 t \\ y=\sin t(1-\cos t) \\ z=-\cos t \end{cases}$ в точке, для которой $t=\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $R=3\sqrt{\dfrac{3}{14}}$; $T=\dfrac{7}{3}$.

4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Вообразим себе некоторую кривую поверхность (черт. 147), уравнение которой пусть будет:



Черт. 147.

$$f(x,y,z)=0, \qquad \text{(I)}$$

и на ней некоторую точку $M(x, y, z)$; проведем по этой поверхности через эту точку ряд линий $L_1, L_2, L_3, \ldots$ и к каждой из них в точке M проведем касательную MT_1, MT_2, $MT_3, \ldots$

Найдем уравнение геометрического места всех этих касательных.

Линию L_1 мы можем рассматривать как пересечение данной поверхности с некоторою другою поверхностью, уравнение которой пусть будет

$$F_1(x,y,z)=0;$$

тогда кривая L_1 определится системою уравнений

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ F_1(x,y,z)=0, \end{cases}$$

и на основании п.I этого параграфа касательная MT_1 выразится системою уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\dfrac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0 \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(X-x)+\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(Y-y)+\dfrac{\partial F_1}{\partial z}(Z-z)=0; \end{cases}$$

каждое из этих уравнений, будучи уравнением I-й степени относительно X, Y и Z, есть уравнение плоскости; следовательно, касательная MT_1 лежит и в плоскости, определяемой первым уравнением, и в плоскости, определяемой вторым уравнением.

Возьмем вторую линию L_2; ее мы можем рассматривать опять как пересечение данной поверхности с некоторою другою, уравнение которой пусть будет

$$F_2(x,y,z)=0;$$

тогда уравнениями линии L_2 будут:

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

и уравнения касательной MT_2 напишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{X}-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{Y}-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\bar{X}-x)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(\bar{Y}-y)+\frac{\partial F_2}{\partial z}(Z-z)=0 \end{cases}$$

следовательно, касательная MT_2 лежит в каждой из плоскостей, определяемых этими уравнениями; но первое из них - то же самое, что и в предыдущем случае; значит, в плоскости, им определяемой, лежит и касательная MT_1, и касательная MT_2.

Совершенно очевидно, что, продолжая рассуждать таким же способом, мы увидим, что и всякая иная касательная MT_3 тоже лежит в этой плоскости; т.е. плоскость, определяемая уравнением

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{X}-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{Y}-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0} \quad , (2)$$

есть геометрическое место касательных в данной точке поверхности ко всем кривым, проведенным по поверхности через эту точку. Эта плоскость называется <u>касательной плоскостью</u> к поверхности в данной на ней точке.

Иногда уравнение поверхности задается в виде

$$z=\varphi(x,y); \qquad (3)$$

тогда

$$f(x,y,z)=\varphi(x,y)-z;$$

следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \frac{\partial f}{\partial z}=-1,$$

или, полагая

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=p, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=q,$$

получим, что уравнение (2) касательной плоскости перепишется в виде

$$p(\bar{X}-x)+q(\bar{Y}-y)-(\bar{Z}-z)=0 \qquad (4')$$

или

$$\boxed{\bar{Z}-z=p(\bar{X}-x)+q(\bar{Y}-y)} \,. \qquad (4)$$

Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости в ее точке касания, называется нормалью к поверхности.

Выведем уравнения нормали. Так как она проходит через точку $M(x,y,z)$, то ее уравнения будут

$$\frac{\bar{X}-x}{l}=\frac{\bar{Y}-y}{m}=\frac{\bar{Z}-z}{n}\,,$$

а так как она должна быть перпендикулярна к плоскости, выражаемой уравнением (2), то

$$\frac{l}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{m}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{n}{\frac{\partial f}{\partial z}}\,,$$

и следовательно, уравнения нормали будут

$$\boxed{\frac{\bar{X}-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{\bar{Y}-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{\bar{Z}-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}} \qquad (5)$$

Если поверхность задана уравнением (3), то, принимая во внимание уравнение (4) касательной плоскости, получим уравнение нормали в виде

$$\boxed{\frac{\bar{X}-x}{p}=\frac{\bar{Y}-y}{q}=\frac{\bar{Z}-z}{-1}} \qquad (6)$$

Углы λ, μ и ν образуемые нормалью к поверхности с осями координат, по правилу Аналитической Геометрии определяется по формулам:

для уравнений нормали вида (5):

$$\begin{cases} \cos\lambda = \pm\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ \cos\mu = \pm\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ \cos\nu = \pm\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \end{cases} \qquad (7)$$

а для уравнений нормали вида (6):

$$\begin{cases} \cos\lambda = \pm\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \cos\mu = \pm\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \cos\nu = \mp\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{cases} \qquad (8)$$

Двойные знаки в этих формулах, как всегда, соответствуют двум возможным направлениям нормали; то направление, которое определяется знаками $+$ в формулах (7), называется направлением внешней нормали, а то, которое определяется знаками $-$, называется направлением внутренней нормали.

Примеры 1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{c^2};$$

то уравнение (2) касательной плоскости, по сокращении на 2, напишется в виде

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0$$

или

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},$$

а в силу уравнения эллипсоида правая часть этого уравнения равна 1; следовательно, уравнение касательной плоскости к эллипсоиду будет:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

Уравнения нормали будут:

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{c^2}}$$

или

$$\frac{(X-x)a^2}{x}=\frac{(Y-y)b^2}{y}=\frac{(Z-z)c^2}{z}.$$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к эллиптическому параболоиду

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=z$$

в точке (-3,6,6).

Составляем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=p=\frac{2x}{3};\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=q=\frac{y}{6};$$

для данной точки имеем:

$$p=-2, \quad q=1,$$

и потому уравнение (4) касательной плоскости напишется так:

$$Z-6=-2(X+3)+(Y-6)$$

или

$$2X-Y+Z+6=0$$

Уравнения нормали будут:

$$\frac{X+3}{2}=\frac{Y-6}{-1}=\frac{Z-6}{1};$$

нормаль образует с осями координат углы λ, μ, ν для которых

$$\cos\lambda=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}; \quad \cos\mu=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos\nu=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Задачи для упражнения.

Найти уравнения касательной плоскости и нормали и $\cos$'ы углов, образуемых нормалью с осями координат, для поверхностей:

1) однополого гиперболоида

$$x^2-3y^2+2z^2=7$$

в точке (1,-2,3).

Ответ: $X+6Y+6Z-7=0$

$$\frac{X-1}{1}=\frac{Y+2}{6}=\frac{Z-3}{6}; \quad \pm\frac{1}{\sqrt{73}}, \ \pm\frac{6}{\sqrt{73}}, \ \pm\frac{6}{\sqrt{73}}.$$

2) гиперболического параболоида

$$3x^2-4y^2=z$$

в точке (2,-1,8).

Ответ: $12\bar{X}+8\bar{Y}-Z-8=0$

$$\frac{\bar{X}-2}{12}=\frac{\bar{Y}+1}{8}=\frac{Z-8}{-1};\quad \pm\frac{12}{\sqrt{209}},\ \pm\frac{8}{\sqrt{209}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{209}}$$

3) поверхности

$$xyz=12$$

в точке (I,3,4).

Ответ: $12\bar{X}+4\bar{Y}+3Z-36=0$

$$\frac{\bar{X}-1}{12}=\frac{\bar{Y}-3}{4}=\frac{Z-4}{3};\quad \pm\frac{12}{13},\ \pm\frac{4}{13},\ \pm\frac{3}{13}$$

4) поверхности

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=6$$

в точке (I,4,9).

Ответ: $6\bar{X}+3\bar{Y}+2Z-36=0$

$$\frac{\bar{X}-1}{6}=\frac{\bar{Y}-4}{3}=\frac{Z-9}{2};\quad \pm\frac{6}{7},\ \pm\frac{3}{7},\ \pm\frac{2}{7}$$

5) поверхности

$$2x^2+6y^2+2z^2+8xz-4x+8y-6=0$$

в точка (0,-I,2).

Ответ: $3\bar{X}-\bar{Y}+2Z-5=0$

$$\frac{\bar{X}}{3}=\frac{\bar{Y}+1}{-1}=\frac{Z-2}{2};\quad \pm\frac{3}{\sqrt{14}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{14}},\ \pm\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

§ 49. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

а) Из элементарной алгебры мы уже знакомы с подразделением чисел на вещественные и мнимые; так:

$$-8\frac{1}{3};\ 1{,}4;\ \sqrt{3};\ -2\sqrt{5};\ -\sqrt[5]{6};\ -\pi;\ e$$

будут вещественными числами.

Пусть требуется извлечь корень четной степени из отрицательного числа: $\sqrt[2n]{-A}$, где n целое и положительное число и A арифметическое число. Обозначим искомый корень через x, тогда:

$$\sqrt[2n]{-A}=x;\qquad \text{откуда}\qquad x^{2n}=-A\qquad (\text{уравн. а}).$$

При возведении вещественного числа x в четную степень всегда получается положительное число, поэтому x^{2n} будет числом положительным и, как таковое, не может равняться отрицательному числу; следовательно, если ограничиться только вещественными числами, то уравнение (а) теряет смысл. Корень четной степени из отрицательного числа называется мнимым числом; если мы теперь расширим понятие о числе и введем в практику мнимые числа, то уравнение (а) сохраняет свою силу, но x рассматриваем уже не как вещественное, а как мнимое число. В дальнейшем увидим, что корень четной степени из отрицательного числа можно свести к корню второй степени из отрицательного числа, поэтому мы и остановимся на мнимых числах вида $\sqrt{-A}$, где $A>0$.

Возьмем уравнение: $x^2+4=0$; если ограничиться только вещественными числами, то это уравнение корней иметь не будет, при введении в практику мнимых корней найдем:

$$x^2+4=0; \quad x^2=-4; \quad x=\pm\sqrt{-4}; \quad x_1=+\sqrt{-4}; \quad x_2=-\sqrt{-4}.$$

Но расширение понятия о числе введением мнимых чисел необходимо не только для элементарных математических обобщений; так называемые, комплексные числа (соединение вещественного числа и мнимого, например: $6+\sqrt{-4}$) имеют не малое значение в математике и технике; введение в анализ функций комплексного переменного дало плодотворные результаты.

ЗАМЕЧАНИЕ. Дадим некоторые указания относительно постепенного расширения понятия о числе, вызванного потребностями практики. Чтобы выполнить деление целых чисел без остатка, а также деление меньшего числа на большее, потребовалось расширять понятие о числе введением дробных чисел. Затем несоизмеримые числа снова расширили наше понятие о числе. Случай вычитания из меньшего числа большего повлек за собою введение относительных чисел (положительные и отрицательные числа). Вместе с расширением понятия о числе росли и углублялись наши математические познания. Математика может дать немало примеров плодотворных результатов расширения какого-нибудь понятия. Мнимые числа, а за ними комплексные, представляют собою только дальнейшую ступень расширения понятия о числе. Как показывает история математики каждая ступень расширения понятия о числе давалась не легко и не сразу; название „мнимые числа" указывает, как трудно было в свое время освоиться с извлечением квадратного корня из отрицательных чисел.

в) Остановимся сначала несколько на комплексных числах, состоящих только из мнимой части. Производя действия над ними, будем пользоваться правилами действий над алгебраическими одночленами.

Дадим сперва мнимым числам наиболее простой вид.

Для обозначения, так называемой, мнимой единицы введем символ i т.е. положим: $\sqrt{-1}=i$, тогда очевидно: $i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$. Возьмем теперь мнимое число $\sqrt{-4}$, преобразование дает (берем только те знаки, которые указаны перед знаком корня):

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot -1}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2\sqrt{-1}=2i.$$

Точно также получим: $\sqrt{-9}=3i$; $\sqrt{-5}=\sqrt{5}\cdot i=i\cdot\sqrt{5}$;

$$-\sqrt{-16}=-4i;\quad \sqrt{-\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}i;\quad -\sqrt{-\pi^2}=-\pi i.$$

Вообще, для общего вида мнимого числа будем иметь ai, где a может быть любым вещественным числом; при $a=0$ мнимое число равно нулю: $0\cdot i=0$.

Сложение и вычитание.

1) Пусть требуется сложить:

$$\sqrt{-4};\quad \sqrt{-9};\quad -\sqrt{-16};\quad \sqrt{-81}.$$

Приведя к простейшему виду, получим:

$$\sqrt{-4}-\sqrt{-9}-\sqrt{-16}+\sqrt{-81}=2i-3i-4i+9i;$$

сделаем приведение:

$$\sqrt{-4}-\sqrt{-9}-\sqrt{-16}+\sqrt{-81}=4i.$$

2) Таким же путем найдем:

$$\sqrt{-5}-\sqrt{-4}-\sqrt{-7}=i\sqrt{5}-2i-i\sqrt{7}=(\sqrt{5}-2-\sqrt{7})i.$$

3) Возьмем пример на вычитание:

$$\sqrt{-5}-(-\sqrt{-7})=i\sqrt{5}-(-i\sqrt{7})=i\sqrt{5}+i\sqrt{7}=(\sqrt{5}+\sqrt{7})i.$$

Умножение и возвышение в степень.

Рассмотрим сначала умножение мнимого числа на вещественное:

$$-5i\cdot-4=20i;\quad -4i\cdot\pi=-4\pi\cdot i;\quad (a+b)i\cdot(a-b)=(a^2-b^2)i.$$

В дальнейшем нам понадобится знать степени i:

$$i=\sqrt{-1};\quad i^2=-1;\quad i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i;\quad i^4=i^2\cdot i^2=-1\cdot-1=1;$$

затем результаты начнут повторяться:

$$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i;\quad i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot i^2=1\cdot-1=-1;$$

$$i^7=i^4\cdot i^3=1\cdot i^3=-i;\quad i^8=i^4\cdot i^4=1,\ -\text{ и т. д.}$$

Всякое целое положительное число n может быть или кратным 4 или при делении на 4 давать остатки 1; 2; 3,- следовательно вместо n всегда можно написать или $4k$, или $4k+1$; $4k+2$; $4k+3$, где k частное от деления n на 4,- тогда:

$i^{4k}=(i^4)^k=1^k=1;$ $\quad i^{4k+1}=i^{4k}\cdot i=i;$

$i^{4k+2}=i^{4k}\cdot i^2=i^2;$ $\quad i^{4k+3}=i^{4k}\cdot i^3=i^3.$

Предоставляем читателям самим убедиться, что правило сохраняет свою силу и при n целом отрицательном.

Проделаем несколько примеров.

1) $i^{415}=i^{103.4-3}=i^3=-i=-\sqrt{-1};$ 2) $i^{102}=i^2=-1;$

3) $i^{135}=i^3=-i=-\sqrt{-1};$ 4) $i^{-99}=i^{-100+1}=i=\sqrt{-1};$

4) $i^{-37}=-i^{-40+3}=i^3=-i=-\sqrt{-1}.$

В следующих примерах будем считать p целым числом:

5) $i^{-12p+16}=1;$ 6) $i^{8p+6}=-1;$ 7) $i^{-24p+3}=-\sqrt{-1};$

8) $i^{20p^2-4p+1}=\sqrt{-1}.$

Теперь мы можем уже решать примеры на умножение мнимого числа на мнимое и на возвышение мнимого числа в степень:

1) $-5i\cdot 4i=-20i^2=20;$ 2) $(-3i)^4=81.$

3) $(-2i)^5=-32i.$

4) $\sqrt{-12}\cdot\sqrt{-3}=i\sqrt{12}\cdot i\sqrt{3}=i^2\sqrt{36}=-6.$

5) $5i\cdot 5i\cdot -4i=-100i^3=100i.$

6) $(i\sqrt{5}-i\sqrt{2})\cdot 2i\sqrt{5}=-10+2\sqrt{10}.$

Деление.

1) $-10i:5=-2i;$ 2) $7i:-3=-2\frac{1}{3}i;$ 3) $-20i:-3i=6\frac{2}{3}.$

4) $12i^5 : -3i = -4.$

5) $-5 : 4i = -\frac{5}{4i} = -\frac{5i}{4i.i} = -\frac{5i}{4i^2} = \frac{5}{4}i.$

Точно также получим:

6) $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1.i}{i.i} = \frac{i}{i^2} = -i.$

7) $i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1;$ 8) $i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{i}{i^4} = i;$ 9) $i^{-4} = 1.$

c) Комплексные числа и действия над ними.

I) Комплексное число $a+bi$ есть результат сложения вещественного числа a с мнимым bi. Если $a=0$, то вместо $a+bi$ получим bi, т.е. мнимое число; если $b=0$, то получается вещественное число a; таким образом, выражение $a+bi$ охватывает собою всю область и вещественных и мнимых и комплексных чисел.

Чтобы комплексное число равнялось нулю, очевидно необходимо, чтобы $a=0$ и $b=0$.

Возьмем два комплексных числа: $a+bi$ и a_1+b_1i. Пусть $a=a_1$ и $b=b_1$; условимся говорить, что два комплексных числа равны, если их вещественные части равны и коэффициенты мнимых частей равны:

$$a+bi = a_1+b_1i \quad \text{при} \quad a=a_1 \quad \text{и} \quad b=b_1.$$

Приведем теперь пример для пояснения, как может получиться комплексное число: решая уравнение $x^2+6x+13=0$, найдем:

$$x_1 = -3+2i; \qquad x_2 = -3-2i.$$

В полученных комплексных числах вещественные части равны, коэффициенты же при мнимых частях отличаются только знаками; такие комплексные числа называются сопряженными; в общем виде будем иметь: $a+bi$; $a-bi$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $b=0$, тогда:

$$a+bi=a; \quad a-bi=a,$$

т.е. всякое вещественное число сопряжено само с собою.

2) Производя действия над комплексными числами, будем пользоваться правилами действий над алгебраическими двучленами.

Сложение и вычитание.

Пусть требуется сложить:

$$a+bi; \quad a_1+b_1i; \quad a_2+b_2i.$$

Применяя правило сложения двучленов, найдем:

$$(a+bi)+(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=a+bi+a_1+b_1i+a_2+b_2i;$$

$$(a+bi)+(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a+a_1+a_2)+(b+b_1+b_2)i.$$

Таким образом, сумма комплексных чисел будет также комплексным числом; в частном случае: при $b+b_1+b_2=0$ получим вещественное число $a+a_1+a_2$; при $a+a_1+a_2=0$ мнимое число $(b+b_1+b_2)i$; при $a+a_1+a_2=0$ и $b+b_1+b_2=0$ нуль. Вычитание комплексных чисел сводится к сложению и останавливаться на нем не будем.

П р и м е р ы:

I) $(2,76+0,3\sqrt{-40})-(1,12-0,5\sqrt{-160})+(1,36+0,2\sqrt{-490})=$
$=(2,76+0,6\sqrt{10}i)-(1,12-2\sqrt{10}i)+(1,36+1,4\sqrt{10}i)=3.$

2) $\left(\frac{5}{6}-0,24\sqrt{-4}\right)+\left(-\frac{1}{3}+0,24\sqrt{-49}\right)=$
$=\left(\frac{5}{6}-0,48i\right)+\left(-\frac{1}{3}+1,68i\right)=0,5+1,2i.$

3) $(a+bi)+(a-bi)=2a;\ (a+bi)-(a-bi)=2bi.$

При сложении двух сопряженных комплексных чисел в результате получается вещественное число, при вычитании мнимое.

Умножение и возвышение в степень.

$$(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2;$$
$$(a+bi)(a_1+b_1i)=(aa_1-bb_1)+(a_1b+ab_1)i.$$

В результате снова имеем комплексное число.

Пример:

$$(4-\sqrt{-8})(3+\sqrt{-2})=(4-2\sqrt{2}i)(3+\sqrt{2}i)=16-2\sqrt{2}i.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как частный случай вещественное число получается при $a_1b+ab_1=0$:

$$(3+2i)(9-6i)=39.$$

Сюда же относятся и сопряженные числа:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

Сумма квадратов вещественной части и коэффициента при мнимой называется, как узнаем дальше, квадратом модуля комплексного числа; таким образом, произведение двух сопряженных комплексных чисел равно квадрату модуля:

$$(-5+\sqrt{2}i)(-5-\sqrt{2}\,i)=(-5)^2+(\sqrt{2})^2=27.$$

Примеры на возвышение в степень:

$$(7-2i)^2=45-28i; \qquad (3+2i)^3=-9+46i.$$

Д е л е н и е.

Пользуясь основным свойством дроби, имеем:

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1 i}=\frac{(a+bi)(a_1-b_1 i)}{(a_1+b_1 i)(a_1-b_1 i)}=\frac{aa_1+bb_1+(a_1 b-ab_1)i}{a_1^2+b_1^2};$$

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1 i}=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1 b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}i.$$

Полученная формула имеет смысл, если знаменатель не нуль, т.е. если одновременно a_1 и b_1 не равны нулю.

Примеры:

1) $\dfrac{3+\sqrt{-4}}{4-\sqrt{-9}}=\dfrac{3+2i}{4-3i}=\dfrac{(3+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\dfrac{6+17i}{25}=0{,}24+0{,}68i.$

2) $\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{-6}}{-1+\sqrt{-3}}=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i}=\dfrac{\sqrt{2}(-1+\sqrt{3}i)}{-1+\sqrt{3}i}=\sqrt{2}$

3) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{-3}}{1-2i}=\dfrac{\sqrt{3}(2+i)}{1-2i}=\dfrac{\sqrt{3}(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=i\sqrt{3}.$

Желающие сами могут убедиться, что при делении двух сопряженных комплексных чисел получается комплексное число.

Всмотревшись в результаты, получаемые при четырех арифметических действиях над комплексными числами, можно сделать следующее весьма полезное указание:

Если данные для действия числа заменить им сопряженными, т.е. заменить i на $-i$, то и результат действия заменится ему сопряженным числом; когда в результате действий получается вещественное число, то оно сохранится неизменным при замене всех данных для действий чисел сопряженными (вещественное число, как уже об этом упоминалось, сопряжено само с собою).

Примеры:

1) $\dfrac{(2+3i)^2+(5-i)(1+2i)}{(1-i)^2}=0{,}25+1{,}25i,$

$$\frac{(2+3i)^2+(5+i)(1-2i)}{(1+i)^2}=0,25-1,25i$$

2) $(3+2i)(9-6i)=39$

$(3-2i)(9+6i)=39$

3) $(8+6i)(3+4i)=50i$

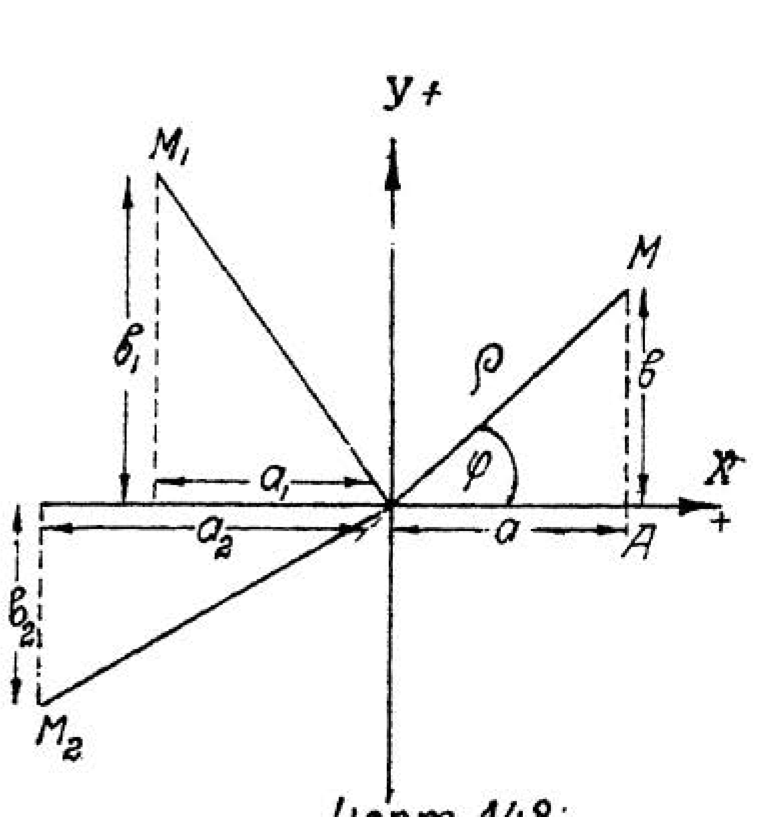
$(8-6i)(3-4i)=-50i$

4) $(3+2i)^3=-9+46i$

$(3-2i)^3=-9-46i$.

d) Геометрическое изображение комплексного числа. Из Аналитической Геометрии известно, что всякая точка на плоскости определяется парою чисел, так: пара чисел $(x=0;\ y=0)$ соответствует началу координат; числа $(x=a;\ y=0)$ определяют точку на оси абсцисс и числа $(x=0;\ y=b)$ точку на оси ординат; точка M на плоскости (см.черт.148) определяется парою чисел $(x=a;\ y=b)$.

Комплексные числа дают возможность определить точку на плоскости одним числом.



Черт. 148.

Условимся вещественные числа a откладывать по оси абсцисс, тогда каждому вещественному числу будет соответствовать единственная точка на оси абсцисс и, наоборот, всякой точке на оси абсцисс только одно вещественное число; таким образом, между осью абсцисс и системою вещественных чисел можно установить взаимное однозначное соответствие. Если мнимые числа bi будем откладывать по оси ординат, то можно также установить однозначное соответствие между осью ординат и системою мнимых чисел. Как показывает черт.148, вектор $\overrightarrow{OM}$ равен геометрической сумме $\vec{a}+\vec{b}$ и, если условимся эту сумму записывать в виде комплексного числа $a+bi$ (напомним, что, хотя комплексное число есть сумма вещественного и мнимого числа, но оба эти числа составляют одно комплексное число), то точке M будет соответствовать комплексное число $a+bi$; точно также точке M_1 комплексное число a_1+b_1i и точке M_2 комплексное число a_2+b_2i. Одним словом, каждой точке на плоскости соответствует единственное комплексное число и каждому комплексному числу единственная точка плоскости, т.е. между точками плоскости и комплексным числом можно установить однозначное соответствие. В частном случае при $b=0$ получаются точки на оси абсцисс и при $a=0$ точки на оси ординат.

e) **Формы комплексного числа; переход от одной формы к другой.**

1) Переходя от прямолинейных координат к полярным (см.черт.148), будем иметь:

$$a=\rho \operatorname{Cos}\varphi; \qquad b=\rho \operatorname{Cos}\varphi, - \qquad (1)$$

откуда:

$$a+bi=\rho \operatorname{Cos}\varphi+i\rho \operatorname{Sin}\varphi=\rho(\operatorname{Cos}\varphi+i \operatorname{Sin}\varphi). \ (2)$$

Таким образом, комплексное число может быть задано в двух формах: алгебраической $a+bi$ и тригонометрической $\rho(\operatorname{Cos}\varphi+i\operatorname{Sin}\varphi)$; каждая из этих форм имеет свои преимущества. Длина радиуса вектора, т.е. ρ, называется модулем комплексного числа, а углом φ, который отсчитывается в направлении обратном часовой стрелке, аргументом комплексного числа; модуль ρ (как длина) - число арифметическое.

Радиус-вектор, сделав около своего начала несколько полных оборотов в ту или другую сторону, займет свое прежнее положение и вместо φ можно написать $\varphi+2\pi k$, причем k любое целое положительное или отрицательное число; при $k=0$ будем иметь, так называемое, главное значение аргумента, которое, конечно, меньше 2π. Два комплексных числа:

$$\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \text{ и } \rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

будут равны, очевидно, в том случае, если их модули равны: $\rho_1=\rho$ и аргументы или равны: $\varphi_1=\varphi$ или отличаются на полное число окружностей: $\varphi_1=\varphi+2\pi k$.

З а м е ч а н и е. При $\varphi_1=\varphi+2\pi k$ имеем:

$$\cos\varphi_1=\cos(\varphi+2\pi k)=\cos\varphi; \quad \sin\varphi_1=\sin(\varphi+2\pi k)=\sin\varphi.$$

Нулю комплексное число может равняться только при $\rho=0$, т.е. когда длина радиуса вектора равна нулю, - в этом случае точка M совпадает с началом координат.

2) Переход от тригонометрической формы к алгебраической очень прост; для этого следует положить:

$$a=\rho\cos\varphi; \quad b=\rho\sin\varphi.$$

Пусть, например, $\rho=10$ и $\varphi=\frac{\pi}{6}$, тогда:

$$10\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot10\cdot\frac{1}{2}=5\sqrt{3}+5i.$$

Для обратного перехода те же формулы дают:

$$\rho\cos\varphi=a; \quad \rho\sin\varphi=b. \qquad (3)$$

Так как ρ число арифметическое, то знаки $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ будут одинаковыми со знаками a и b, что дает возможность узнать в какой четверти окружности лежит угол φ.

Разделив второе уравнение на первое, получим для вычисления аргумента формулу:

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a}. \qquad (4)$$

Возвышая оба уравнения во вторую степень и складывая, найдем:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = a^2 + b^2; \quad \rho^2 = a^2 + b^2;$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (5)$$

Для ρ берется, конечно, только арифметическое значение корня.

Зная ρ, можно аргумент φ вычислить еще и так: формулы (3) дают: $\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$; $\sin\varphi = \frac{b}{\rho}$, - или:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Возьмем пример: $-5-12i$; $a=-5$; $b=-12$.

Так как $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ отрицательны, то угол φ будет лежать в третьей четверти. Для вычисления угла φ будем иметь:

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a} = \frac{-12}{-5} = 1,4.$$

Найдем сначала острый угол φ_1, для которого $tg\,\varphi_1 = 1,4$; вычисления при помощи таблиц логарифмов дают:

$$\varphi_1 = 67^0 22' 48'' \text{ или в радианах } \varphi_1 = 1,17600.$$

Для главного значения аргумента получим:

$\varphi^\circ=180^\circ+\varphi_1^\circ$; $\quad \varphi_0=247^\circ22'48''$, –

или в радианах: $\varphi=4{,}31752$.

Для вычисления модуля воспользуемся формулой (5):

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=13.$

Итак:

$$-5-12i=13\left[\cos(247^\circ22'48''+360^\circ k)+i\sin(247^\circ22'48''+360^\circ k)\right],$$

или:

$$-5-12i=13\left[\cos(4{,}31752+2\pi k)+i\sin(4{,}31752+2\pi k)\right].$$

Точно также найдем, ограничиваясь только главным значением аргумента:

$$11-2i=11{,}18034(\cos 349^\circ41'43''+i\sin 349^\circ41'43'').$$

$$4+i\,4\sqrt{3}=8\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right).$$

3) Тригонометрическая форма комплексного числа заключает в себе, как частные случаи, и положительные и отрицательные вещественные числа: $+a$ и $-a$, где a арифметическое число.

Так как $b=0$, то ограничиваясь только главным значением аргумента, будем иметь в первом случае:

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(+a)^2+0^2}=a;$$

$$\cos\varphi=\frac{+a}{\rho}=1;\quad \sin\varphi=\frac{0}{\rho}=0;\quad \varphi=0;$$

$$+a=a(\cos 0+i\sin 0);\ -$$

и во втором:

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-a)^2+0^2}=a;$$

$$\rho\cos\varphi=-a;\quad \cos\varphi=\frac{-a}{\rho}=\frac{-a}{a}=-1;\quad \sin\varphi=\frac{0}{\rho}=0;\quad \varphi=\pi;\ -$$

$$-a=a(\cos\pi+i\sin\pi).$$

П р и м е р ы:

$$+2=2(\cos 0+i\sin 0);\quad -\sqrt{5}=\sqrt{5}(\cos\pi+i\sin\pi);$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos 0+i\sin 0);\quad -\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Итак: модуль вещественного числа равен абсолютной величине вещественного числа, главное же значение аргумента положительного вещественного числа равно нулю, и отрицательного равно π.

Предоставляем читателям самим найти:

$$+bi=b\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$-bi=b\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right).$$

$$4i=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$-i\sqrt{7}=\sqrt{7}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right).$$

f) Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Алгебраическая форма весьма пригодна для выкладок при сложении, вычитании, перемножении (двух или трех) и делении комплексных чисел, возвышении их во вторую или третью степень; во всех остальных случаях, особенно же при извлечении корня, или суждении о модуле, удобнее пользоваться тригонометрической формой, которая к тому же дает возможность сделать важные выводы.

Сложение и вычитание.

Сложение и вычитание комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, сводится к алгебраической форме (при алгебраической форме выкладки проще), поэтому на этих действиях мы останавливаться не будем, а дадим только геометрическое толкование сложению комплексних чисел, чтобы указать свойство модуля суммы.

Требуется сложить числа:

$$\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \quad \text{и} \quad \rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1).$$

Обозначим модуль искомой суммы через ρ_2 и аргумент через φ_2; тогда:

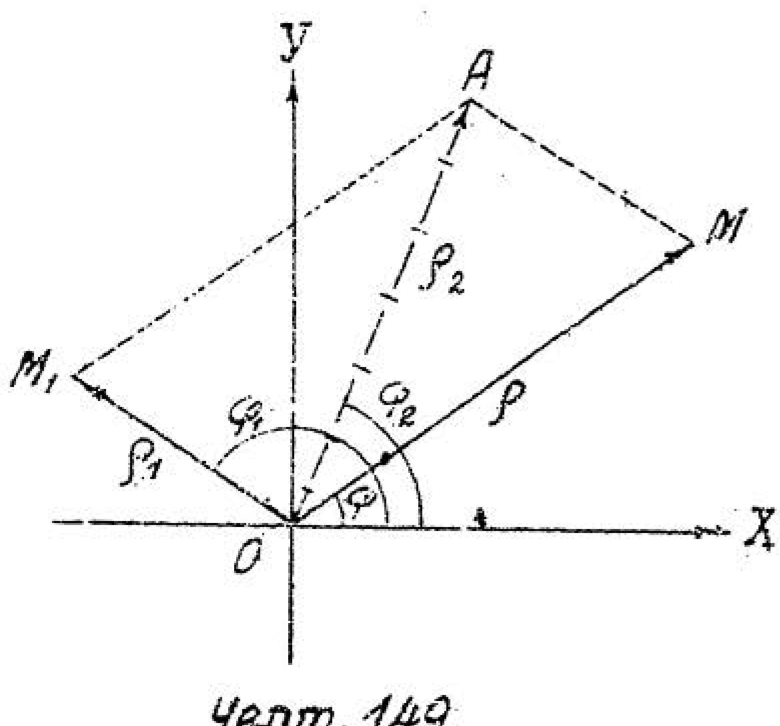
$$\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2);$$

или:

$$\rho\cos\varphi+\rho_1\cos\varphi_1+i(\rho\sin\varphi+\rho_1\sin\varphi_1)=\rho_2\cos\varphi_2+i\rho_2\sin\varphi_2;$$

откуда:

$$\left.\begin{aligned}\rho_2\cos\varphi_2&=\rho\cos\varphi+\rho_1\cos\varphi_1\\ \rho_2\sin\varphi_2&=\rho\sin\varphi+\rho_1\sin\varphi_1\end{aligned}\right\}\text{(урав. } a).$$



Черт. 149.

Первому слагаемому соответствует точка M (см. черт. 149) и второму точка M_1 (этим же точкам в свою очередь соответствуют радиусы векторы OM и OM_1). Остается найти точку соответствующую сумме, для чего надо построить параллелограм на радиусах векторах OM и OM_1.

Точка A будет искомой; действительно, как известно из аналитической геометрии, в данном случае мы имеем геометрическую сумму: $\overline{OA} = \overline{OM} + \overline{OM_1}$, проекция же суммы на любую ось равна сумме проекций, поэтому:

$$np(OA)_x = np(OM)_x + np(OM_1)_x; \quad np(OA)_y = np(OM)_y + np(OM_1)_y;$$

но чертеж дает:

$$np(OA)_x = \rho_2 \cos\varphi_2; \qquad np(OA)_y = \rho_2 \sin\varphi_2;$$

$$np(OM)_x = \rho \cos\varphi; \qquad np(OM)_y = \rho \sin\varphi;$$

$$np(OM_1)_x = \rho_1 \cos\varphi_1; \qquad np(OM_1)_y = \rho_1 \sin\varphi_1 \cdot -$$

следовательно:

$$\rho_2 \cos\varphi_2 = \rho\cos\varphi + \rho_1 \cos\varphi_1:$$

$$\rho_2 \sin\varphi_2 = \rho\sin\varphi + \rho_1 \sin\varphi_1,$$

что вполне соответствует уравнениям (a). Итак, точка A и будет искомой точкой.

Мы уже знаем, что модуль комплексного числа есть длина радиуса-вектора, соответствующего этому числу; следовательно длина радиуса-вектора OM, т.е. ρ, будет модулем первого слагаемого; длина вектора OM_1, т.е. ρ_1, модулем второго слагаемого и, наконец, длина вектора OA, которую мы обозначим через ρ_2, модулем суммы. Так как сторона OA (см. треугольник OMA) меньше суммы сторон OM и MA и больше их разности, то применяясь к чертежу, где $OM > MA$ и помня, что MA по длине равен OM_1, найдем: $\rho - \rho_1 < \rho_2 < \rho + \rho_1$.

З а м е ч а н и е.

В частном случае, когда точки M и M_1 лежат на одной прямой по одну сторону начала координат, имеем: $\rho_2 = \rho + \rho_1$ и по разные стороны: $\rho_2 = \rho - \rho_1$.

Итак, можем считать доказанным, что модуль суммы не больше суммы модулей слагаемых. Эту теорему легко распространить на любое число слагаемых.

Умножение.

$$\rho(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$\rho_1\rho_2\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right].$$

Так как:

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2);$$
$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2=\sin(\varphi_1+\varphi_2), -$$

то:

$$\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\rho_1\rho_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]. \quad (6)$$

Формула (6) показывает, что модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, а аргумент - сумме аргументов сомножителей. Эту теорему легко распространить на любое число сомножителей:

$$\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\ldots\ldots\rho_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)=$$
$$\rho_1\cdot\rho_2\ldots\ldots\rho_n\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)\right] \quad (7)$$

Примеры.

1) $0{,}125(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi)\cdot 8(\cos\frac{7}{10}\pi+i\sin\frac{7}{8}\pi)\cdot 0{,}5(\cos\frac{23}{60}\pi+i\sin\frac{23}{60}\pi)=$

$$=0{,}5\left[\cos(\frac{2}{3}+\frac{7}{10}+\frac{23}{60})\pi+i\sin(\frac{2}{3}+\frac{7}{10}+\frac{23}{60})\pi\right]=$$
$$=0{,}5\left[\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right]=0{,}5\left[\cos(2\pi-\frac{1}{4}\pi)+i\sin(2\pi-\frac{1}{4}\pi)\right]=$$
$$=0{,}5(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i).$$

2) $4i\cdot\frac{1}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\cdot\frac{3}{4}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=$

$$4(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})\cdot\frac{1}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\cdot\frac{3}{4}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=$$
$$\cos(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})\pi+i\sin(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})\pi=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$$

3) $3(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\cdot 2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\cdot 5(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})=$

$$=30\left[\cos\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)\pi+i\sin\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)\pi\right]=$$

$$=30\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=30i.$$

Возвышение в степень.

Применяя формулу (7) для случая равных сомножителей, получим:

$$\left[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \quad (8)$$

Следовательно, при возвышении комплексного числа в целую положительную степень нужно его модуль возвысить в ту же степень и аргумент умножить на показателя степени.

Таким образом, при возвышении комплексного числа в целую положительную степень получается комплексное число; предоставляем читателям самим разобраться в частных случаях. Полагая $\rho=1$ в формуле (8), получим формулу Моавра:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi; \quad (9)$$

подставляя $2\pi-\varphi$ вместо φ, будем иметь:

$$(\cos\varphi-i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi-i\sin\varphi; \quad (10)$$

напомним, что n число целое и положительное.

Примеры:

1) $\left[3(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\right]^5=243(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi=$

$$=243\left[\cos(2\pi-\tfrac{1}{3}\pi)+i\sin(2\pi-\tfrac{1}{3}\pi)\right]=243(\cos\tfrac{1}{3}\pi-i\sin\tfrac{1}{3}\pi)=$$

$$=243\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=121,5(1+\sqrt{3}\cdot i).$$

2) $\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{16} = \cos 2\pi - i\sin 2\pi = 1.$

3) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6 = 64\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -64i.$

Деление.

Пусть требуется разделить:

$\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на $\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Рассматривая деление, как действие обратное умножению, легко сделать вывод, что модуль частного будет $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ и аргумент его $(\varphi_1 - \varphi_2)$. Таким образом, обозначая частное в виде дроби, запишем:

$$\frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]. \quad (\text{II})$$

Модуль частного равен частному модулей, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.

Формула (II) показывает, что частное всегда возможно найти, за исключением случая, когда $\rho_2 = 0$ (делитель обращается в нуль).

Примеры:

1) $\left(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi\right) : \left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i).$

2) $\frac{2}{3}\left(\cos\frac{8}{9}\pi + i\sin\frac{8}{9}\pi\right) : \frac{1}{3}\left(\cos\frac{1}{9}\pi - i\sin\frac{1}{9}\pi\right) =$

$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{8}{9}\pi + i\sin\frac{8}{9}\pi\right) : \frac{1}{3}\left[\cos\left(-\frac{1}{9}\pi\right) + i\left(-\frac{1}{9}\pi\right)\right] = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$

3) $15\left(-\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) : 5\left(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi\right) =$

$= 15\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) : 5\left(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i.$

Извлечение корня.

Пусть требуется найти:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)},$$

где n целое положительное число.

Обозначая модуль и аргумент искомого числа соответственно через x и y, будем иметь:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y),\text{ откуда:}$$

$$\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=x^n(\cos ny+i\sin ny).$$

Но если комплексные числа равны, то разность между аргументами равна целому числу окружностей, модули же равны; согласно этому будем иметь:

$$ny=\varphi+2\pi k;\quad y=\frac{\varphi+2\pi k}{n},$$

где k любое целое положительное или отрицательное число, - и

$$x^n=\rho;\quad x=\sqrt[n]{\rho}.$$

Так как x и ρ модули, то извлечение корня всегда возможно и следует взять только арифметическое значение корня.

Таким образом, окончательно получим:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right).\quad (12)$$

Если вместо k подставлять n последовательных целых положительных значений от 0 до $n-1$ включительно, т.е. подставить все числа ряда:

$$0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\ldots;(n-2);\ (n-1) \qquad (\text{ряд а}),-$$

то получится n различных значений корня.

Если затем вместо k подставлять числа: $n;\ n+1;\ n+2$ и т.д., то значения корня начнут повторяться.

Точно также новых значений корня не получим, когда вместо k будем подставлять целые отрицательные числа; например: $k=-1$ дает такое же значение корня, как и $k=n-1$; $k=-2$ дает такое же значение корня, как и $k=n-2$.

Добавление(для желающих).

Дадим обоснование данного выше указания. Легко заметить, как показывает формула (12), что значение $\sqrt[n]{\rho}$ не изменяется при всех значениях корня, а изменяются значения аргумента $\frac{\varphi+2\pi k}{n}$, которые только и надлежит принимать во внимание. Одни и те же значения корня могут получиться только в том случае, когда значения аргумента $\frac{\varphi+2\pi k}{n}$ будут отличаться на целое число окружностей. Подставив в формуле (12) вместо k целые числа k_2 и k_1, причем $k_2>k_1$, получим для них следующие значения аргумента:

$$\frac{\varphi+2\pi k_2}{n};\qquad \frac{\varphi+2\pi k_1}{n}.$$

Для разности значений аргумента имеем:

$$\frac{\varphi+2\pi k_2}{n}-\frac{\varphi+2\pi k_1}{n}=\frac{k_2-k_1}{n}\cdot 2\pi.$$

Если k_2 и k_1 числа ряда (а), то, очевидно:

$$0<k_2-k_1<n;\qquad 0<\frac{k_2-k_1}{n}<1;$$

следовательно:

$$\frac{k_2-k_1}{n}\cdot 2\pi < 2\pi.$$

Итак при подстановке в формулу (12) вместо k чисел ряда (а) не могут получаться значения аргумента, отличающиеся на целое число окружностей, а потому каждый раз мы будем иметь различные значения корня. Поставим вместо k одно из чисел ряда:

$$-1;\ -2;\ -3;\ldots\ldots;\ -(n-1) \qquad (\text{ряд } в),-$$

например: $-\ell$, причем $-1 \geqslant -\ell \geqslant -(n-1)$.

Для числа $-\ell$ получим такое же значение корня, как и для числа $n-\ell$ ряда (а), - действительно:

$$\frac{\varphi+2\pi k}{n}=\frac{\varphi+2\pi\cdot -\ell}{n}=\frac{\varphi-2\pi\ell}{n};$$

$$\frac{\varphi+2\pi k}{n}=\frac{\varphi+2\pi(n-\ell)}{n}=\frac{\varphi-2\pi\ell}{n}+2\pi.$$

Значения аргумента отличаются на 2π.

Пусть теперь k (положительное или отрицательное число) по абсолютной величине больше n. Обозначим частное от деления k на n через p и остаток через k_1, тогда: $k=np+k_1$. Очевидно, остаток k_1 будет одно из чисел ряда (а) или ряда (в). Подставив вместо k равное ему выражение $np+k_1$, получим:

$$\frac{\varphi+2\pi k}{n}=\frac{\varphi+2\pi(np+k_1)}{n}=\frac{\varphi+2\pi k_1}{n}+2\pi p.$$

При вычислении косинуса и синуса $2\pi p$ отбрасывается, следовательно получится одно из прежних значений корня.

П р и м е р ы:

1) $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3}$;

$\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}$.

Давая k значения: 0; I; 2 получим три значения корня: $\cos 0+i\sin 0=1$; $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Один из корней вещественный и два комплексных сопряженных.

Для проверки возвысим в куб два последних значений корня:

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)^3=\frac{-1+3i\sqrt{3}-3(i\sqrt{3})^2+(i\sqrt{3})^3}{8}=\frac{-1+3i\sqrt{3}+9-3i\sqrt{3}}{8}=\frac{-1+9}{8}=1;$$

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\frac{-1-3i\sqrt{3}-3(i\sqrt{3})^2-(i\sqrt{3})^3}{8}=\frac{-1-3i\sqrt{3}+9+3i\sqrt{3}}{8}=\frac{-1+9}{8}=1.$$

При извлечении корня третьей степени, подставляя значения k , вместо 2 проще взять - I (см.стр.I7).

2) $\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}$;

$k=0$; $\qquad \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$;

$k=1$; $\qquad \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}=\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5\pi}{6}=$

$=\cos(\pi-\frac{1}{6}\pi)+i\sin(\pi-\frac{1}{6}\pi)=-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$;

$k=-1$; $\qquad \cos\frac{\frac{\pi}{2}-2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}-2\pi}{3}=\cos-\frac{\pi}{2}+i\sin-\frac{\pi}{2}=-i$.

Все корни мнимые и между ними нет сопряженных.

3) $\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi}=\cos\frac{\frac{3}{2}\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi+2\pi k}{3}$;

$$k=0; \quad \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i;$$

$$k=1; \quad \cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi=\frac{-\sqrt{3}-i}{2};$$

$$k=-1; \quad \cos-\frac{1}{6}\pi+i\sin-\frac{1}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

Снова все корни мнимые и между ними нет сопряженных.

4) $\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3};$

$$k=0; \quad \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2};$$

$$k=1; \quad \cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$$k=-1; \quad \cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Один корень вещественный и два комплексных сопряженных.

5) Предоставляем желающим самим проделать извлечение корня $\sqrt[4]{-1}$.

Ответы: $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$.

Все корни комплексные попарно сопряженные.

6) Возьмем теперь пример на извлечение корня из комплексного числа: $\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}}$.

Перейдем к тригонометрической форме:

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{32+32}=8.$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{\rho}=\frac{-4\sqrt{2}}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin\varphi=\frac{b}{\rho}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

искомый угол лежит во второй четверти; очевидно

$$\varphi=90^\circ+45^\circ=135^\circ.$$

Итак:

$$\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+i\,4\sqrt{2}}=\sqrt[3]{8(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)}, \quad \text{или:}$$

$$\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+i\,4\sqrt{2}}=2\left(\cos\frac{135^\circ+360^\circ\cdot k}{3}+i\sin\frac{135^\circ+360^\circ k}{3}\right);$$

$$\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+i\,4\sqrt{2}}=2[\cos(45^\circ+120^\circ k)+i\sin(45^\circ+120^\circ k)].$$

Давая k значения 0;1; - 1, найдем следующие значения корня:

$k=0$; $2(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=\sqrt{2}(1+i)=1{,}4142+1{,}4142i$;

$k=1$; $2(\cos 165^\circ+i\sin 165^\circ)=2(-\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)=-1{,}9318+0{,}5176i$;

$k=-1$; $2(\cos -75^\circ+i\sin -75^\circ)=2(\sin 15^\circ-i\cos 15^\circ)=0{,}5176-1{,}9318i$;

7) Желающие могут сами проработать пример:

$\sqrt[3]{-9+46i}$; ответ: $3+2i$; $-3{,}2321+1{,}5981i$; $0{,}2321-3{,}5981i$.

При извлечении квадратного корня из комплексного числа можно и не переходить к тригонометрической форме, но на этом вопросе останавливаться не будем.

9) Косинусы и синусы кратных дуг.

Покажем одно из интересных применений формулы Моавра:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi,$$

где n целое положительное число.

Разлагаем левую часть уравнения в ряд по формуле бинома Ньютона:

$$\cos^n\varphi+\frac{n}{1}\cos^{n-1}\varphi.\sin\varphi+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\varphi.i^2\sin^2\varphi+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}.i^3\sin^3\varphi+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^4\varphi.i^4\sin\varphi+\ldots+\frac{n}{1}\cos\varphi.i^{n-1}\sin^{n-1}\varphi+i^n\sin^n\varphi=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

Помня, что $i^2=-1$; $i^3=-i$; $i^4=i$ и т.д. и отделяя вещественную часть от мнимой, полученное уравнение перепишем в таком виде:

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \ldots + R_1$$

$$+ i\left(n\cos^{n-1}\varphi.\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi + \ldots + R_2\right).$$

Под R_1 и R_2 мы подразумеваем последние члены каждого ряда.

Исходя из условий равенства комплексных чисел, имеем:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \ldots + R_1;$$

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi + \ldots + R_2.$$

Оба ряда будут конечные и практически мы всегда сумеем найти последние члены R_1 и R_2.

Примеры:

1) $n=2$;

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \frac{2.1}{1\cdot 2}\cos^0\varphi\sin^2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi;$$

$$\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi.$$

Полученные формулы известны нам уже из тригонометрии.

2) $n=3$;

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - \frac{3.2}{1\cdot 2}\cos\varphi\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi;$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \frac{3.2.1}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^0\varphi\sin^3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

3) $n=4$;

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi;$$

$$\sin^4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi.$$

Таким образом всегда возможно косинус и синус кратных дуг выразить через степени косинуса и синуса простой дуги.

h) Двучленные уравнения.

Рассмотрим сначала уравнения:

$$x^n-1=0; \qquad x^n+1=0;$$

или

$$x^n=1; \qquad x^n=-1,$$

где n целое положительное число.

Первое уравнение при n четном имеет два вещественных корня: $+1$ и -1, остальные корни (как увидим дальше) будут мнимые попарно сопряженные; при n нечетном то же уравнение имеет один вещественный корень: $+1$; остальные корни мнимые попарно сопряженные. Второе уравнение при n четном вещественных корней иметь не будет, все корни будут мнимые попарно сопряженные; при n нечетном то же уравнение имеет один вещественный корень: - I, остальные корни - мнимые попарно сопряженные. Двучленные уравнения можно решать или разложением на множителей или путем извлечения корня.

Метод разложения на множителей.

1) $x^2-1=0$; $(x+1)(x-1)=0$; корни $x_1=1$; $x_2=-1$.

2) $x^2+1=0$; $x^2-i^2=0$; $(x+i)(x-i)=0$; корни $x_1=i$; $x_2=-i$.

3) $x^3-1=0$; $(x-1)(x^2+x+1)=0$. Первое уравнение $x-1=0$ дает: $x_1=1$; решая квадратное уравнение $x^2+x+1=0$, найдем:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}, \text{ или: } x_2=-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3});\; x_3=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

Результаты получились те же самые, как и при извлечении кубического корня из единицы (см. стр. 128).

Один корень вещественный, два мнимые сопряженные.

4) Точно также для уравнения $x^3+1=0$ найдем: $x_1=-1$; $x_2=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$; $x_3=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$. Один корень вещественный,

два мнимые сопряженные.

5) $x^4-1=0$; $(x^2+1)(x^2-1)=(x+i)(x-i)(x+1)(x-1)=0$;
$x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=i$; $x_4=-i$.
Два корня вещественные и два мнимые сопряженные.

6) $x^4+1=0$. Непосредственное разложение на множителей дает: $x^4-i^2=0$; $(x^2+i)(x^2-i)=0$; можно поступить проще прибавив и отняв $2x^2$, тогда:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)=0.$$

Корнями первого квадратного уравнения будут:
$x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; второго: $x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.
Корни мнимые, попарно сопряженные.

7) Решение уравнений $x^5\mp 1=0$ способом разложения на множителей громоздко и на них останавливаться не будем.

8) $x^6-1=0$; $(x^3+1)(x^3-1)=0$. Ссылаясь на 3) и 4) пример, можно выписать корни: $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$; $x_4=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$; $x_5=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$; $x_6=-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$. Два корня вещественные, остальные мнимые попарно сопряженные.

9) $x^6+1=0$; $(x^2)^3+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)=0$. Биквадратное уравнение легко преобразовать: $x^4-x^2+1=x^4+2x^2+1-3x^2=$ $=(x^2+1)^2-(x\sqrt{3})^2=(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)$. Все шесть корней будут минимальными попарно сопряженными.

Решенные примеры подтверждают сделанное в начале указание, что если уравнение четной степени, то или два корня вещественные, остальные мнимые попарно сопряженные, или же все корни мнимые попарно сопряженные; если уравнение нечетной степени, то один корень вещественный и остальные мнимые попарно сопряженные.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения $ax^n \mp b=0$, где a и b положительные вещественные числа легко свести к рассмотренным типам следующим преобразованием:

$$ax^n \mp b=0;\ \frac{a}{b}x^n \mp 1=0;\ \left(x\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n \mp 1=0;\ z^n \mp 1=0,\ \text{где}\ z=x\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Решив уравнение $z^n \mp 1=0$, остается вместо z подставить: $z=x\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; откуда: $x=z\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, т.е. полученные для z корни следует помножить на $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.

Пример: $27x^3-8=0;\ \frac{27}{8}x^3-1=0;\ \left(\frac{3}{2}x\right)^3-1=0;\ z^3-1=0;$

$$z_1=1;\quad z_2=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3});\quad z_3=-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3});$$

$$x_1=\frac{2}{3};\ x_2=-\frac{1}{3}(1+i\sqrt{3});\quad x_3=-\frac{1}{3}(1-i\sqrt{3}).$$

То же уравнение легко решить и без указанного преобразования:

$$27x^3-8=(3x-2)(9x^2+6x+4)=0.$$

Метод извлечения корня.

I) Для уравнения $x^n-1=0$ имеем $x=\sqrt[n]{1}$, где под $\sqrt[n]{1}$ следует понимать всю совокупность значений корня (каждое из этих значений возведенное в n степень должно дать единицу).

Применяя правило извлечения корня, найдем:

$$\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2\pi k}{n}+i\sin\frac{0+2\pi k}{n};$$

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad (13)$$

где $k=0;\ 1;\ 2;\ \ldots\ldots;(n-1)$.

Вещественные корни, которые найдутся без формулы, - при n четном: $+1$ и -1 и при n нечетном: $+1$. Так как мнимые корни будут попарно сопряженные, то, получив мнимый корень, следует тотчас же написать и сопряженный ему корень.

Для примера возьмем уравнение $x^5-1=0$, которое не было решено нами методом разложения на множителей. Положив $n=5$ в формуле (13) и подставив вместо k последовательно: 0; 1; 2, найдем:

$$x_1=\cos 0+i\sin 0=1;$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ=0,3090+i\cdot 0,9511;$$

$$x_3=\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}=0,3090-i\cdot 0,9511;$$

$$x_4=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}=\cos 144^\circ+i\sin 144^\circ=-0,8090+i\cdot 0,5878;$$

$$x_5=\cos\frac{4\pi}{5}-i\sin\frac{4\pi}{5}=-0,8090-i\cdot 0,5878.$$

Добавление (для желающих).

Для уравнения $x^n+1=0$, или $x^n=-1$, имеем:

$$\sqrt[n]{-1}=\sqrt[n]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{n};$$

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{2k+1}{n}\cdot\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\cdot\pi. \qquad (14)$$

При n четном все корни будут мнимые, при n нечетном имеем один вещественный корень - 1. Для примера возьмем уравнение $x^4=-1$; положив $n=4$ в формуле (14) и подставив вместо k последовательно 0 и 1, найдем:

$$x_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

$$x_2=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i);$$

$$x_3=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i);$$

$$x_4=\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

2) Пусть требуется решить уравнение $ax^n+b=0$, где a и b комплексные числа. Данное уравнение перепишем в виде: $x^n=-\frac{b}{a}$, или полагая $-\frac{b}{a}=A$, полу-

чим:

$$x^n=A, -$$

где A комплексное число (в частном случае вещественное), отсюда:

$$x = \sqrt[n]{A}.$$

Предположим, что мы нашли одно из значений корня $\sqrt[n]{A}$, которое обозначим через a. Найденное значение корня должно удовлетворять уравнению $x^n=A$ (урав. m), т.е.
$a^n=A$ (уравн. n). Разделив уравнение (m) на уравнение (n), найдем:

$$\frac{x^n}{a^n}=\frac{A}{A}, \text{ или: } \frac{x^n}{a^n}=1.$$

Извлекаем из последнего уравнения корень n степени:

$$\frac{x}{a}=\sqrt[n]{1},$$

откуда:

$$x=a\sqrt[n]{1} \qquad (15).$$

Здесь под $\sqrt[n]{1}$ подразумевается вся совокупность значений корня из I. Таким образом, найдя одно из значений корня из комплексного числа и помножая его на все значения корня той же степени из I, получим все значения корня из комплексного числа.

Пример: $x^3=-1$.

Одно из значений корня нам известно, именно: - I.

Помножим -I на все значения $\sqrt[3]{1}$, т.е. на

$$+1; \quad -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}); \quad -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}), -$$

тогда найдем:

$$x_1=-1; \quad x_2=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}); \quad x_3=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

Результаты получились те же, что и на странице 132 (см. пример 4).

i) Зависимость между показательными и тригонометрическими функциями.

Рассмотрим возвышение вещественного числа в мнимую степень, причем ограничимся только числом e. При вещественном x функция e^x может быть представлена в виде бесконечного ряда, сходящегося при всяком конечном значении x:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots\ldots$$

Подставив ix вместо x (в курсах функций комплексного переменного доказывается возможность такой подстановки) этот ряд перепишем в следующем виде:

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1}+\frac{i^2x^2}{1.2}+\frac{i^3x^3}{1.2.3}+\frac{i^4x^4}{4!}+\frac{i^5x^5}{5!}+\frac{i^6x^6}{6!}+\frac{i^7x^7}{7!}+\ldots\ldots$$

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{ix^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-\frac{ix^7}{7!}\ldots\ldots$$

Отделяя вещественные и мнимые члены, имеем:

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right).$$

В правой части равенства первый ряд есть разложение $\cos x$ в ряд, второй разложение в ряд $\sin x$, поэтому:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x. \qquad (16)$$

Подставив $-x$ вместо x получим,

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x. \qquad (17)$$

Показательную функцию при любом комплексном показателе $x+iy$ определяем формулой:

$$e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \qquad (18)$$

Так как модуль числа $e^x(\cos y+i\sin y)$ очевидно будет e^x и аргумент y, то на основании формулы (18) модулем числа e^{x+iy} будет e^x и аргументом y. Написав ρ вместо e^x и φ вместо y, найдем:

$$\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho e^{i\varphi}. \qquad (19)$$

Последняя формула дает показательную форму комплексного числа.

Примеры:

1) $e^{2+i\frac{\pi}{6}}=e^2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=e^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right).$

2) $5\sqrt{2}+i5\sqrt{2}=10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=10\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=10e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}.$

Переписав уравнения (16) и (17) в виде:

$$\cos x+i\sin x=e^{ix};$$

$$\cos x-i\sin x=e^{-ix}, -$$

и решив их относительно $\cos x$ и $\sin x$, получим формулы Эйлера:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2};$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},$$

которые выражают тригонометрические функции через показательные при мнимых показателях степеней.

50. ЦЕЛАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ.

I. Общий вид целой рациональной функции n-й степени, как мы знаем, такой:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n,$$

где n - целое и положительное число, а коэффициенты a

не зависят от x, некоторые из них могут быть и нулями, только $a_0 \neq 0$.

Те значения переменной x, которые обращают функцию $f(x)$ в 0, называются корнями функции; например, если

$$f(x_1)=0 \text{ и } f(x_2)=0,$$

то x_1 и x_2 суть корни функции $f(x)$.

Для функции

$$f(x)=x^3+x^2-6x$$

числа 0, 2, -3 суть корни, так как

$$f(0)=0; \quad f(2)=8+4-12=0; \quad f(-3)=-27+9+18=0.$$

Заметим, что в Высшей Алгебре доказывается следующая основная теорема: всякая целая рациональная функция имеет по крайней мере один корень, вещественный или комплексный.

Рассмотрим важнейшие свойства целой функции.

Теорема I (Безу). Остаток от деления целой рациональной функции $f(x)$ на двучлен вида $(x-m)$ равен результату подстановки в данную функцию вместо x числа m.

Пусть частное от деления $f(x)$ на $(x-m)$ будет $\varphi(x)$, а остаток R; так как степень остатка ниже степени делителя, а делитель - I-й степени, то R есть число постоянное, от x независящее.

Мы знаем, что делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток; следовательно, имеем тождество

$$f(x)=(x-m)\varphi(x)+R;$$

положим в нем $x=m$; тогда получим:

$$f(m)=(m-m)\varphi(m)+R,$$

где R, не зависящее от x, при такой подстановке не меняется; из полученного равенства и следует, что

$$R=f(m).$$

Примеры. I. Найти остаток от деления

$$f(x)=x^4-3x^3+2x-7$$

на $x+2$.

Так как $x+2=x-(-2)$, то $m=-2$, и потому

$$R=f(-2)=16+24-4-7=29.$$

2. Подобрать свободный член k в функции

$$f(x)=3x^5-4x^4+2x^2+k$$

так, чтобы (-I) была ее корнем.

Чтобы (-I) была корнем, необходимо, на основании определения, чтобы

$$f(-1)=0;$$

но

$$f(-1)=-3-4+2+k=-5+k;$$

следовательно, должно быть

$$-5+k=0,$$

откуда

$$k=5.$$

Теорема II. Для того чтобы целая рациональная функция $f(x)$ делилась без остатка на $(x-m)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(m)=0$.

Действительно, если $f(x)$ делится без остатка на $x-m$, то $R=0$, а по теореме I $R=f(m)$; значит и $f(m)=0$. Обратно, если $f(m)=0$, то и $R=0$, т.е. деление совершается без остатка.

Пример. Подобрать коэффициент k в функции

$$f(x)=4x^3+kx^2-3x-6$$

так, чтобы она делилась без остатка на $x+2$.

Составляем

$$f(-2)=-32+4k+6-6=4k-32;$$

чтобы функция делилась без остатка, надо, чтобы

$$4k-32=0, \quad \text{откуда} \quad k=8.$$

Значит, функция

$$4x^3+8x^2-3x-6$$

делится без остатка на $x+2$.

Пользуясь доказанной теоремой, можно вывести известные из курса Алгебры признаки делимости суммы или разности одинаковых степеней двух количеств на сумму или разность первых степеней тех же количеств.

Рассмотрим различные случаи:

I. $f(x)=x^n-a^n$:

1) делитель $=x-a$;

составляем

$$R=f(a)=a^n-a^n=0;$$

следовательно, разность одинаковых степеней двух количеств делится без остатка на разность первых степеней тех же количеств;

2) делитель$=x+a$;

тогда

$$R=f(-a)=(-a)^n-a^n;$$

а) если $n=2k$, то

$$R=(-a)^{2k}-a^{2k}=a^{2k}-a^{2k}=0,$$

т.е. разность одинаковых четных степеней двух количеств делится без остатка на сумму первых степеней тех же количеств;

б) если $n=2k+1$, то

$$R=(-a)^{2k+1}-a^{2k+1}=-a^{2k+1}-a^{2k+1}=-2a^{2k+1}\neq 0,$$

т.е. разность одинаковых нечетных степеней двух количеств не делится без остатка на сумму первых степеней тех же количеств.

II. $f(x)=x^n+a^n$.

1) делитель $=x-a$;

тогда

$$R=f(a)=a^n+a^n=2a^n\neq 0,$$

т.е. сумма одинаковых степеней двух количеств не делится без остатка на разность первых степеней тех же количеств;

2) делитель $=x+a$;

тогда

$$R=f(-a)=(-a)^n+a^n;$$

а) если $n=2k$, то

$$R=(-a)^{2k}+a^{2k}=a^{2k}+a^{2k}=2a^{2k}\neq 0,$$

т.е. сумма одинаковых четных степеней двух количеств не делится без остатка на сумму первых степеней тех же количеств;

б) если $n=2k+1$, то

$$R=(-a)^{2k+1}+a^{2k+1}=-a^{2k+1}+a^{2k+1}=0,$$

т.е. сумма одинаковых нечетных степеней двух количеств делится без остатка на сумму первых степеней тех же количеств.

Теорема III. Целая рациональная функция $f(x)$ n-й степени может быть разложена на множители таким образом:

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n),$$

где a_0 - коэффициент данной функции при x^n, а $x_1, x_2, \ldots x_n$ - ее корни.

По основной теореме алгебры функция $f(x)$ имеет по крайней мере один корень, вещественный или комплексный; пусть таким корнем будет число x_1; тогда $f(x_1)=0$, а в таком случае, по теореме II, функция $f(x)$ делится без остатка на $x-x_1$:

$$\frac{f(x)}{x-x_1}=\varphi_{n-1}(x),$$

где $\varphi_{n-1}(x)$ есть целая функция степени $(n-1)^{й}$; старший ее член получается делением a_0x^n на x; следовательно, коэффициент при x^{n-1} в функции $\varphi_{n-1}(x)$ равен a_0. Из последнего равенства следует:

$$f(x)=(x-x_1)\varphi_{n-1}(x).$$

Но $\varphi_{n-1}(x)$, будучи тоже целою функцией, имеет также по крайней мере один корень x_2, и по теореме II :

$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{x-x_2}=\varphi_{n-2}(x) \qquad \text{или} \qquad \varphi_{n-1}(x)=(x-x_2)\varphi_{n-2}(x),$$

где $\varphi_{n-2}(x)$ - опять целая функция с коэффициентом при старшем члене равным a_0, но степени уже $(n-2)^{й}$.

Продолжая рассуждать таким же образом, получим ряд равенств:

$$f(x)=(x-x_1)\varphi_{n-1}(x)$$

$$\varphi_{n-1}(x)=(x-x_2)\varphi_{n-2}(x)$$

$$\varphi_{n-2}(x)=(x-x_3)\varphi_{n-3}(x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_2(x)=(x-x_{n-1})\varphi_1(x),$$

где $\varphi_1(x)$ есть целая функция I-й степени с коэффициентом при x равным a_0, т.е.

$$\varphi_1(x)=a_0 x+b,$$

а это равенство можно переписать так:

$$\varphi_1(x)=a_0\left(x+\frac{b}{a_0}\right);$$

или, положив

$$\frac{b}{a_0}=-x_n,$$

будем иметь:

$$\varphi_1(x)=a_0(x-x_n).$$

Присоединив это последнее равенство к предыдущим и перемножив их, мы после сокращения и получим разложение на множители функции $f(x)$:

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})(x-x_n); \quad (1)$$

при этом ясно, что при

$$x=x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n$$

функция $f(x)$ обращается в 0, т.е. что эти числа суть корни функции $f(x)$. Таким образом теорема доказана вполне.

Пример. Для функции

$$f(x)=5x^4-30x^3+35x^2+30x-40$$

имеем:

$$f(1)=0,\ f(-1)=0,\ f(2)=0,\ f(4)=0;$$

следовательно,

$$f(x)=5(x-1)(x+1)(x-2)(x-4).$$

Теорема IУ. Целая рациональная функция $f(x)$ n-ой степени не может иметь более n различных корней.

Пусть x' есть корень функции $f(x)$; тогда, полагая в равенстве (I) $x=x'$, будем иметь

$$f(x')=a_0(x'-x_1)(x'-x_2)\dots(x'-x_n);$$

так как $a_0\neq 0$, то $f(x')$ может равняться 0 только в том случае, если равна 0 одна из разностей

$$x'-x_1,\ x'-x_2,\dots x'-x_n;$$

а это значит, что корень x' должен непременно равняться одному из чисел

$$x_1,\ x_2,\dots x_n,$$

и иных корней у функции быть не может.

Следствие. Если относительно целой функции n-й степени известно, что она обращается в 0 при различных значениях x, число которых больше n, то она равна 0 тождественно, т.е. обращается в 0 при всяком значении x.

Действительно, пусть $f(x)$ обращается в 0 при каком нибудь значении x не равном ее корням

$$x_1, x_2,\dots x_n;$$

тогда из разложения функции

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

следует, что это возможно лишь тогда, когда $a_0=0$; а в таком случае она обращается в функцию

$$a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

степень которой не выше $(n-1)^й$. Эта функция тоже обращается в 0 при значениях x, число которых больше $n-1$; значит, и $a_1=0$. Рассуждая таким же образом, мы и получим, что все коэффициенты функции должны равняться 0, и она будет равна 0 при всяком значении x.

Теорема У. Две целые рациональные функции n-й степени тождественны, если они принимают равные значения при различных значениях x, число которых больше n.

Пусть две целые функции n-й степени:

$$x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

и

$$F(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} +, \ldots + b_{n-1} x + b_n$$

таковы, что

$$f(x_1) = F(x_1); \quad f(x_2) = F(x_2); \ldots . f(x_n) = F(x_n); \quad f(x_{n+1}) = F(x_{n+1}). (*)$$

Составим новую функцию n-й степени

$$\varphi(x) = F(x) - f(x) = (b_0 - a_0) x^n + (b_1 - a_1) x^{n-1} + \ldots .$$
$$\ldots + (b_{n-1} - a_{n-1}) x + (b_n - a_n);$$

тогда для этой функции, принимая во внимание равенства $(*)$, будем иметь:

$$\varphi(x_1) = F(x_1) - f(x_1) = 0$$
$$\varphi(x_2) = F(x_2) - f(x_2) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi(x_n) = F(x_n) - f(x_n) = 0$$
$$\varphi(x_{n+1}) = F(x_{n+1}) - f(x_{n+1}),$$

т.е. функция n-й степени $\varphi(x)$ обращается в 0 при $(n+1)$ различных значениях x, а потому, на основании следствия из теоремы IУ, все ее коэффициенты равны 0; значит,

$$b_0 - a_0 = 0; \quad b_1 - a_1 = 0; \; \ldots\ldots \; b_{n-1} - a_{n-1} = 0; \; b_n - a_n = 0,$$

откуда

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \; \ldots\ldots \; b_{n-1} = a_{n-1}, \quad b_n = a_n;$$

иначе говоря,

$$F(x) = f(x).$$

Следствие. Целая рациональная функция n-й степени вполне определяется заданием $(n+1)$-го ее значения.

Действительно, на основании теоремы У не может быть двух различных функций, которые принимали бы одни и те же значения при $(n+1)$ различных значениях x.

Задача. Составить функцию n-й степени по заданным ее значениям:

$$f(x_1), \; f(x_2), \ldots\ldots f(x_n), \; f(x_{n+1}).$$

Искомая функция может быть составлена решением системы $(n+1)$ уравнений с $(n+1)$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_1 + a_n = f(x_1) \\ a_0 x_2^n + a_1 x_2^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_2 + a_n = f(x_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_n + a_n = f(x_n) \\ a_0 x_{n+1}^n + a_1 x_{n+1}^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_{n+1} + a_n = f(x_{n+1}), \end{cases}$$

в которой неизвестными являются коэффициенты функции $f(x)$

$$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-1}, a_n.$$

Другой способ решения этой задачи состоит в применении так называемой формулы интегрирования Лагранжа, которая дает искомую функцию в таком виде:

$$f(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{n+1})}f(x_1)+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{n+1})}f(x_2)+$$

$$+\ldots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n+1})}f(x_i)+\ldots+$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\ldots(x_{n+1}-x_n)}f(x_{n+1}). \qquad (A).$$

Действительно,

1. степень составленной таким образом функции $f(x)$ есть n, так как в числителе каждого ее члена перемножаются n двучленов линейных относительно x, все же остальные числа - постоянные;

2. числители всех одночленов в правой части при

$x=x_i$, где $i=1,2,3,\ldots(n+1)$

обращаются в 0, так как в каждый из них входит множитель $x_i-x_i=0$, за исключением одночлена

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n+1})}f(x_i),$$

который при $x=x_i$ обращается в $f(x_i)$, и таким образом формула (A) дает

$$f(x_i)=f(x_i).$$

<u>П р и м е р.</u> Составить функцию 3-й степени $f(x)$ так, чтобы :

$$f(1)=1;\quad f(-1)=2;\quad f(2)=-1;\quad f(-2)=3.$$

I-й способ. Пусть искомая функция

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3;$$

тогда имеем систему:

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=1 \\ -a_0+a_1-a_2+a_3=2 \\ 8a_0+4a_1+2a_2+a_3=-1 \\ -8a_0+4a_1-2a_2+a_3=3. \end{cases} \qquad (\alpha)$$

Складываем I-е уравнение со 2-м, а 3-е с 4-м:

$$\begin{cases} 2a_1+2a_3=3 \\ 8a_1+2a_3=2 \end{cases}, \quad \text{откуда: } a_1=-\frac{1}{6},\ a_3=\frac{5}{3};$$

вычитаем из I-го уравнения системы (α) 2-е, а из 3-го 4-е:

$$\begin{cases} 2a_0+2a_2=-1 \\ 16a_0+4a_2=-4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2a_0+2a_2=-1 \\ 8a_0+2a_2=-2, \end{cases}$$

откуда

$$a_0=-\frac{1}{6}, \quad a_2=-\frac{1}{3}.$$

Итак, искомая функция будет:

$$f(x)=-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}.$$

2-й способ. Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{2.-1.3}\cdot 1+\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{-2.-3.1}\cdot 2+$$

$$+\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{1.3.4}\cdot -1+\frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{-3.-1.-4}\cdot 3.$$

Производя умножения, получим:

$$
\begin{array}{r|r|r|r|}
f(x)=-\frac{1}{6} & x^3-\frac{1}{6} & x^2+\frac{2}{3} & x+\frac{2}{3} \\
+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & +\frac{4}{3} \\
-\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{12} & +\frac{1}{6} \\
-\frac{1}{4} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}
$$

$$f(x)=-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

<u>Кратные корни.</u> Выше мы видели, что целая функция разлагается на множители таким образом:

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n);$$

в этом разложении

$$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$$

суть корни функции $f(x)$; при этом может случиться, что некоторые из этих корней окажутся между собою равными; в таком случае несколько равных множителей в разложении $f(x)$ соединяются в степень $(x-x_1)^k$; такие равные между собою корни называются <u>кратными</u> корнями функции $f(x)$.

Если

$$f(x)=(x-x_1)^k\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ уже не делится на $x-x_1$, т.е. $\varphi(x_1)\neq 0$, то число k называется <u>показателем кратности</u> корня x_1; если $k=2$, то корень называется <u>двойным</u>; если $k=3$, то корень называется <u>тройным</u> и т.д.

Например, функция

$$f(x)=5(x-1)^2(x+1)(x-2)^4$$

имеет простой корень (-I), двойной корень I и четверной корень 2. При подсчете числа корней условились считать каждый корень за столько корней, какова его кратность; таким образом двойной корень считается за 2 корня, тройной - за 3 и т.д. При таком способе подсчета число корней целой функции всегда равно ее степени; например, в предыдущем примере число корней 2+1+4=7, и степень функции тоже равна 7.

Укажем признаки кратности корня.

Теорема VI. Для того, чтобы число x_1 было k-кратным корнем целой функции, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_1)=0,\quad f'(x_1)=0,\quad f''(x_1)=0,\ \dots\ f^{(k-1)}(x_1)=0 \text{ и } f^{(k)}(x_1)\neq 0. \ (*)$$

Необходимость. Если x_1 есть k-кратный корень функции $f(x)$, то условия (*) соблюдаются.

Согласно определению имеем

$$f(x)=(x-x_1)^k\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ уже не делится на $x-x_1$, т.е. $\varphi(x_1)\neq 0$. Разложим функцию $f(x)$ по степеням разности $(x-x_1)$, пользуясь формулой Тейлора:

$$f(x)=f(x_1)+\frac{x-x_1}{1}f'(x_1)+\frac{(x-x_1)^2}{2!}f''(x_1)+\dots+\frac{(x-x_1)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)+$$

$$+\frac{(x-x_1)^k}{k!}f^{(k)}(x_1)+\dots\dots\dots+\frac{(x-x_1)^n}{n!}\varphi^{(n)}(x_1),$$

которую перепишем в таком виде:

$$f(x)=R(x)+(x-x_1)^k\left[\frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}+\frac{(x-x_1)}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_1)+\dots+\frac{(x-x_1)^{n-k}}{n!}f^{(n)}(x_1)\right], (\alpha),$$

где

$$R(x)=f(x_1)+\frac{x-x_1}{1}f'(x_1)+\frac{(x-x_1)^2}{2!}f''(x_1)+\dots+\frac{(x-x_1)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_1)$$

есть целая функция степени не выше $(k-1)^{й}$; следовательно $R(x)$ есть остаток при делении $f(x)$ на $(x-x_1)^k$; а так как, в силу условия, этот остаток должен равняться 0 тождественно, т.е. при всяком значении x, то необходимо, чтобы:

$$f(x_1)=0,\ f'(x_1)=0,\ f''(x_1)=0, \ldots f^{(k-1)}(x_1)=0.$$

Кроме того,

$$f^{(k)}(x_1)\neq 0,$$

так как в противном случае выражение в квадратных скобках в равенстве (α) имело бы общий множитель $(x-x_1)$, который можно было бы вынести за скобки, и функция $f(x)$ делилась бы без остатка на $(x-x_1)^{k+1}$, что противоречит условию.

Достаточность. Если условия (*) соблюдены, то x_1 есть корень функции $f(x)$ кратности k.

Действительно, при данных условиях равенство (α) принимает вид :

$$f(x)=(x-x_1)^k\left[\frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}+\frac{(x-x_1)f^{(k+1)}(x_1)}{(k+1)!}+\ldots+\frac{(x-x_1)^{n-k}}{n!}f^{(n)}(x_1)\right];$$

который показывает, что $f(x)$ делится на $(x-x_1)^k$; а так как по условию $f^{(k)}(x_1)\neq 0$, то выражение в квадратных скобках не делится на $(x-x_1)$, т.е, согласно определению, x_1 есть корень кратности k функции $f(x)$.

2. Комплексные корни. Решим квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0,$$

где коэффициенты a, b и c суть вещественные числа, по формуле

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

если b^2-4ac есть число отрицательное равное $-k^2$, то для его корней получаются выражения:

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{k}{2a}i$$

и

$$x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{k}{2a}i;$$

отсюда заключаем, что, если квадратное уравнение (или целая функция 2-й степени) с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень x_1, то другим его корнем будет непременно число тоже комплексное и притом сопряженное с x_1.

Докажем теорему, обобщающую это свойство функций 2-й степени для функций какой-угодно степени.

Теорема УII. Если комплексное число $x_1=a+bi$ есть корень целой функции:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

все коэффициенты которой вещественны, то и комплексное число $x_2=a-bi$, сопряженное с x_1, есть также корень функции $f(x)$.

Действительно, по условию

$$f(x_1)=f(a+bi)=0;$$

пусть результат подстановки числа $a+bi$ в функцию $f(x)$ дает комплексное число $P+Qi$; тогда, чтобы

$$P+Qi=0,$$

необходимо, чтобы

$$P=0 \quad \text{и} \quad Q=0.$$

Составим теперь $f(a-bi)$; так как в выражении, содержащем конечное число действий сложения, вычитания, умножения, деления и возвышения в целую степень над комплексными числами, замена всех комплексных чисел им сопряженными и результат заменяют также числом с ним сопряженным, то

$$f(a-bi)=P-Qi;$$

а так как $P=0$ и $Q=0$, то и

$$f(a-bi)=0,$$

т.е. $x_2=a-bi$ есть корень функции $f(x)$.

Следствие I. Так как каждому комплексному корню $a+bi$ целой функции $f(x)$ с вещественными коэффициентами соответствует сопряженный корень $a-bi$, то, если первый из этих корней будет кратности k, то и второй будет той же кратности k; т.е. сопряженные комплексные корни имеют одинаковую кратность.

Следствие 2. Число комплексных корней всегда четное, функция нечетной степени имеет по крайней мере один вещественный корень; функция четной степени или вовсе не имеет вещественных корней, или имеет их четное число.

Предположим, что целая функция n-й степени с вещественными коэффициентами $f(x)$ имеет несколько вещественных корней различной кратности и несколько пар сопряженных комплексных корней. Тогда при разложении на множители функции $f(x)$ каждый вещественный корень дает множитель вида $(x-x_1)^{\alpha_1}$, где α_1 - кратность вещественного корня x_1, а каждая пара сопряженных комплексных корней дает произведение вида

$$(x-a-bi)^{\beta_1}(x-a+bi)^{\beta_1}=(x^2-2ax+a^2+b^2)^{\beta_1}=(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1},$$

где p_1 и q_1 - вещественные числа, а β_1 - степень кратности каждого из сопряженных комплексных корней.

Таким образом, полное разложение на множители целой функции $f(x)$ с вещественными коэффициентами представляется в таком виде:

$$f(x)=a_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_e)^{\alpha_e}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}\ldots$$

$$\ldots(x^2+p_kx+q_k)^{\beta_k},$$

где

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_e+2(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_k)=n.$$

Например, если функция $f(x)$ имеет корни:

I.... двойной
- 2.... простой
$1\pm i$.... двойные
$2\pm 3i$... простые
5.... коэффициент старшего члена, то

$$f(x)=5(x-1)^2(x+2)\left[(x-1-i)(x-1+i)\right]^2\left[(x-2-3i)(x-2+3i)\right]=$$

$$=5(x-1)^2(x+2)(x^2-2x+2)^2(x^2-4x+13),$$

где

$$2+1+2(2+1)=9$$

есть степень функции $f(x)$.

3. Понятие о приближенном решении уравнений.

Укажем теперь простейшие способы приближенного решения уравнений.

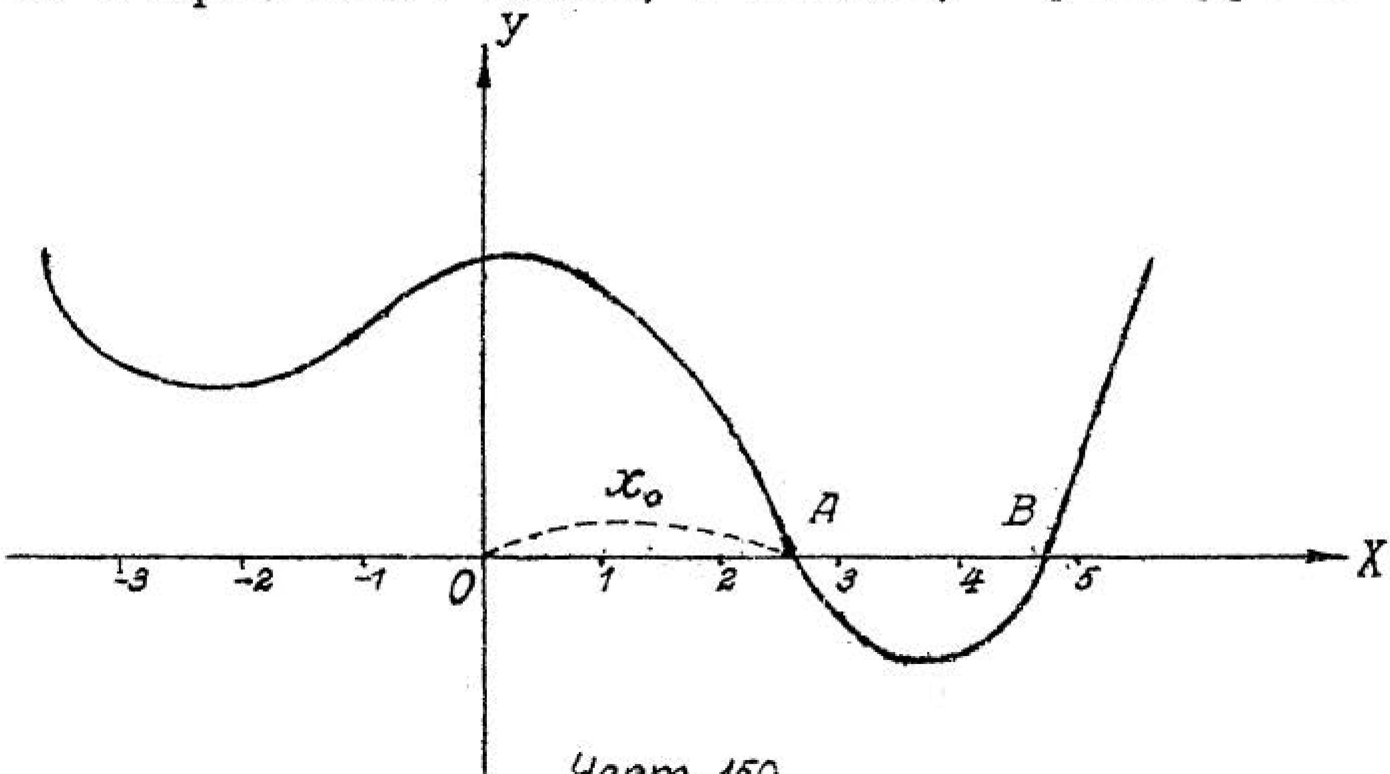
Общий характер решения заключается в следующем: сначала находят два числа, между которыми заключается корень уравнения, или, как говорят, отделяют корень; а затем, дробя промежуток между этими числами на более мелкие, постепенно сближают границы, между которыми заключается корень, и таким образом находят приближенное его значение.

Покажем, прежде всего, как найти первоначальные два числа, отделяющие корень.

Пусть надо решить уравнение

$$f(x)=0. \qquad (1)$$

Выбрав некоторую прямоугольную систему координат, строим график функции, стоящей в левой части уравнения (I) (черт. 150). Тогда, очевидно, корнем уравнения



Черт. 150.

(I) будет число x_0, выражающее абсциссу той точки A графика, для которой ордината равна 0, т.е. другими словами, абсциссу точки пересечения этой линии с осью OX. При пересечении оси x-ов ордината $y=f(x)$ меняет знак; поэтому, если мы найдем два числа a и b таких, что $f(a)$ и $f(b)$ различных знаков, то между ними наверное имеется один или нечетное число корней уравнения (I).

Числа эти можно найти во - I) при помощи чертежа, сделанного даже приблизительно, и во-2) при помощи простых вычислений; можно эти два способа и соединить: найдя первым способом границы корня, мы можем уточнить найденное приближение вторым способом.

При помощи первого способа мы могли бы в предыдущем примере установить, что один корень уравнения заключается между 2 и 3, а другой - между 4 и 5.

Применение второго способа покажем на примере.

Пусть нам дано уравнение

$$f(x)=x^3-5x+2,3=0.$$

Так как $f(-\infty)=-\infty$, а $f(0)=2,3>0$, то уравнение имеет по крайней мере один отрицательный корень; вычисляем

$$f(-10)=-1000+50+2,3<0;$$

значит, есть корень между - 10 и 0; делим промежуток между - 10 и 0 пополам и высчитываем

$$f(-5)=-125+25+2,3<0;$$

значит, есть корень между - 5 и 0; высчитываем

$$f(-2)=-8+10+2,3>0;$$

отсюда заключаем, что искомый корень x_1

$$-5<x_1<-2;$$

высчитываем далее

$$f(-3)=-27+15+2,3<0,$$

и таким образом заключаем, что

$$-3<x_1<-2.$$

Проделывая указанные вычисления, одновременно располагаем результаты в виде таблицы:

x	$-\infty$	-10	-5	-3	-2	0
$f(x)$	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

Далее берем промежуток от - 3 до - 2 и делим его пополам, т.е. берем значение аргумента - 2,5; имеем

$$f(-2,5)=-\frac{125}{8}+\frac{25}{2}+2,3<0;$$

следовательно,

$$-2,5<x_1<-2.$$

Так как $f(-2,5)$ мало отличается от 0, то испытываем число $-2,4$:

$$f(-2,4)=-13,824+12+2,3>0;$$

следовательно,

$$-2,5<x_1<-2,4.$$

Поступая и далее подобным же образом, мы бы нашли

$$f(-2,44)<0$$
$$f(-2,43)>0;$$

значит,

$$-2,44<x_1<-2,43.$$

Если за значение x_1 взять любое число между этими двумя числами, например, их полусумму

$-2,435$,

то наверно ошибка будет меньше 0,01.

Так как

$$f(0)=2,3>0$$

$$f(1)=-1,7<0$$

$$f(2)=0,3>0,$$

то остальные два корня будут положительны; один из них

$$0<x_2<1,$$

а другой

$$1<x_3<2,$$

и могут быть вычислены подобным же способом. Заметим кстати, что при этих вычислениях полезно пользоваться таблицами квадратов и кубов или логарифмической линейкой.

Пример графического решения уравнения мы имели, например, в § 7 (ч.I, вып.I, стр.98 и 99), где таким способом решено уравнение

$$2x^3-2x^2-2x-1=0,$$

которое имеет приложение при расчете сопротивления артиллерийских орудий по тангенциальной деформации.

Указанный графический способ иногда можно несколько видоизменить. Перепишем данное уравнение в виде

$$f_1(x)=f_2(x) \qquad (2)$$

и построим графики двух функций

и
$$\begin{cases} y=f_1(x) \\ y=f_2(x) \end{cases}; \qquad (3)$$

очевидно, корнями уравнения (2) будут абсциссы точек пересечения линий, определяемых уравнениями (4), так как этими корнями будут те значения x, которые соответствуют одному и тому же значению y.

<u>Пример I.</u> Приложим этот способ к решению кубического уравнения

$$z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0.$$

Прежде всего покажем, что это уравнение всегда можно заменить таким кубическим уравнением, в котором нет члена, содержащего z^2. Действительно, введем новую неизвестную x, полагая

$$z=x+\alpha,$$

где α - пока неопределенное число; тогда данное уравнение заменится таким:

$$x^3+\left.\begin{matrix}3\alpha\\+a_1\end{matrix}\right| x^2+\left.\begin{matrix}3\alpha^2\\+2a_1\alpha\\+a_2\end{matrix}\right| x+\begin{matrix}\alpha^3\\+a_1\alpha^2\\+a_2\alpha\\+a_3\end{matrix}=0. \qquad (*)$$

Подберем теперь число α таким образом, чтобы коэффициент при x^2 обратился в 0, т.е. чтобы

$$3\alpha + a_1 = 0,$$

откуда

$$\alpha = -\frac{a_1}{3}.$$

Тогда, подставив это значение α в уравнение (*), мы и получим уравнение

$$x^3 + px + q = 0, \qquad (4)$$

где

$$p = 3\left(-\frac{a_1}{3}\right)^2 + 2a_1\left(-\frac{a_1}{3}\right) + a_2 = a_2 - \frac{a_1^2}{3}$$

$$q = \left(-\frac{a_1}{3}\right)^3 + a_1\left(-\frac{a_1}{3}\right)^2 + a_2\left(-\frac{a_1}{3}\right) + a_3 = \frac{2}{27}a_1^3 - \frac{1}{3}a_1a_2 + a_3,$$

и в котором нет члена, содержащего квадрат неизвестного. Если мы решим уравнение (4), то корни данного уравнения определятся по формуле

$$z = x - \frac{a_1}{3}.$$

К этому уравнению (4) мы и применим указанный графический способ решения; для этого перепишем его в виде

$$x^3 = -px - q$$

и найдем абсциссы точек пересечения кубической параболы

$$y = x^3$$

и прямой

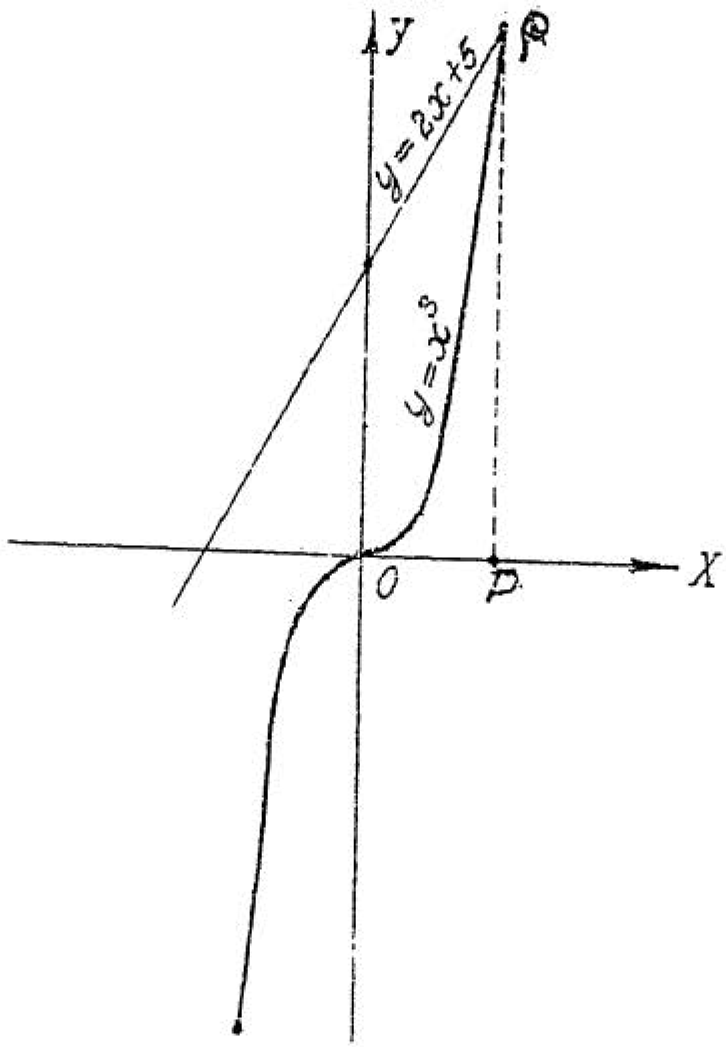
$$y = -px - q.$$

На черт. 151 этим способом решено уравнение

$$x^3 - 2x - 5 = 0:$$

построена кубическая парабола

$$y = x^3$$



Черт. 151.

и прямая

$$y=2x+5;$$

точкою их пересечения будет точка A, абсцисса которой OP, будучи измерена, и дает приблизительное значение корня $=2,1$.

Пример 2. Этот способ можно применить и к решению трансцендентных уравнений. Возьмем уравнение

$$2\sin x - x = 0;$$

перепишем его в виде

$$2\sin x = x$$

и построим графики (черт. 152) функций

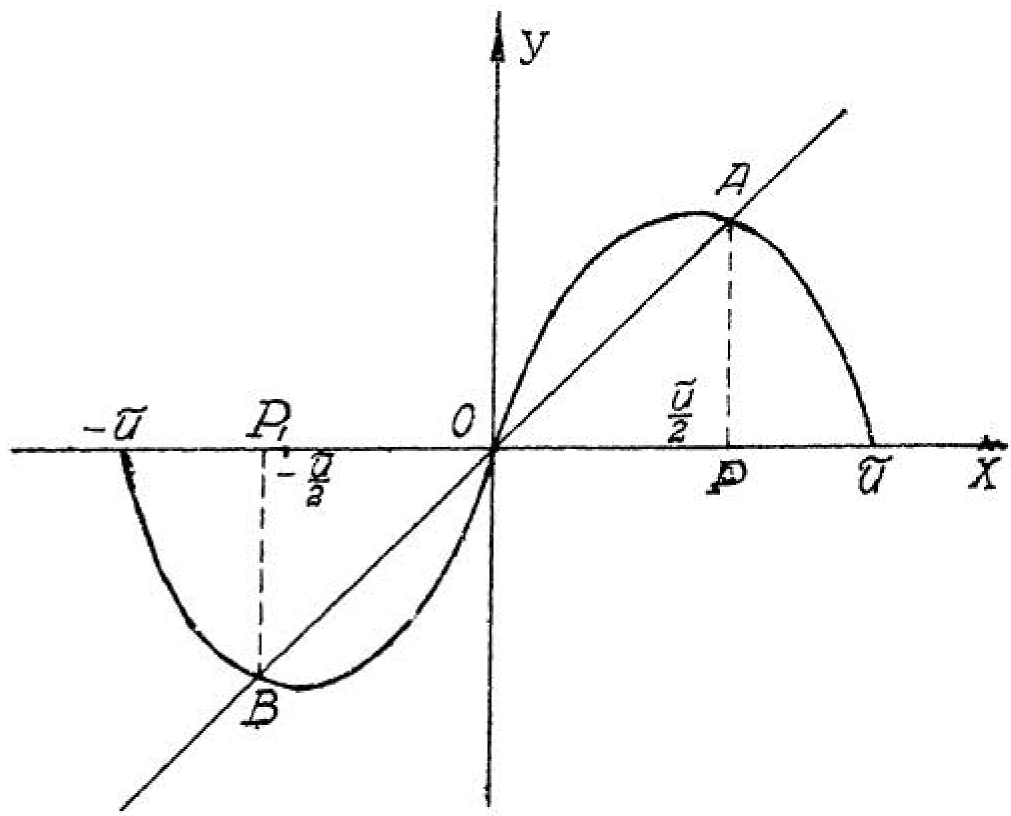
$$y=2\sin x$$

и

$$y=x$$

Построение 1-го из них было разобрано в п. 2, § 11 (часть I, вып. I, стр. 159-160), а графиком 2-й функции служит биссектриса BA первого и третьего координатных углов; эти линии пересекаются в 3 точках B, O и A, абсциссы которых и дадут корни данного уравнения; измерив OP, найдем приблизительное значение 1,9; $OP_1 = -OP \approx -1{,}9$; абсцисса точки 0 есть 0. Итак, данное уравнение имеет корни:

$$x_1 = 0; \quad x_2 \approx 1{,}9; \quad x_3 \approx -1{,}9;$$



Черт 162.

корень x_2, конечно, выражает величину дуги x в радиальной мере, что соответствует приблизительно 109^0.

Способ последовательных приближений Ньютона.

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0,$$

и допустим, что корень x_0, который требуется вычислить, отделен числами a и b, так что

$$a < x_0 < b.$$

За 1-е приближение корня x_0 можно взять или число a, или число b, или любое число между ними, например, $\frac{a+b}{2}$. Выбрав 1-е приближение x_1, мы можем утверждать, что корень

$$x_0 = x_1 + h;$$

эту поправку h мы и станем приближенно вычислять.

Мы ищем h таким образом, чтобы

$$f(x_1+h)=0;$$

разложим $f(x_1+h)$ по формуле Тейлора по степеням h:

$$f(x_1+h)=f(x_1)+\frac{h}{1}f'(x_1)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_1)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_1)+\ldots\ldots,$$

и тогда будем иметь:

$$f(x_1)+\frac{h}{1}f'(x_1)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_1)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_1)+\ldots\ldots=0.$$

Считая h числом малым, отбрасываем члены, содержащие h^2, h^3 и т.д., и тогда получим приближенное равенство

$$f(x_1)+\frac{h}{1}f'(x_1)\approx 0,$$

откуда

$$h\approx-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

и таким образом за 2-е приближение корня x_0 примем

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)};$$

затем подобным же способом составим 3-е приближение

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

потом 4-е

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \text{ и т.д.}$$

В большинстве случаев эти числа

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ldots\ldots$$

идут, приближаясь к корню x_0; но надо заметить, что в некоторых случаях этот путь и не дает хороших результатов, в чем и состоит недостаток способа Ньютона.

Пример. Вычислить по способу Ньютона положительный корень уравнения

$$x^3-2x-5=0,$$

решенного выше графическим путем.

Так как

$$f(2)=8-4-5<0,$$

а

$$f(3)=27-6-5>0,$$

то

$$2<x_0<3.$$

Так как $f(2)=-1$, а $f(3)=16$, т.е. $f(2)$ ближе к 0, чем $f(3)$, то корень x_0 ближе к 2, чем к 3; поэтому пробуем

$$f(2,1)=2,1^3-4,2-5=0,061>0;$$

следовательно,

$$2<x_0<2,1.$$

Берем за I-е приближение

$$x_1=2,05;$$

тогда 2-е приближение будет равно:

$$x_2=2,05-\frac{(2,05)^3-4,1-5}{3\cdot(2,05)^2-2}=2,05+\frac{0,48488}{10,6075}=$$

$$=2,05+0,0457=2,0957.$$

На этом приближении мы и остановимся, заметив, что более точные вычисления дает для этого корня приближенное значение

2,09455.

Задачи для упражнения.

1. Найти остаток при делении целой функции

а) x^3+2x^2+x-1 на $x+3$. Отв. -13

б) $2x^4-2x^3+9x^2-3x-7$ на $x-2$. Отв. 39.

в) $3x^3-x^2+x-1$ на $x+5$ Отв. -396.

2. Найти значение свободного члена k функции

$$x^4-4x^3+2x^2+4x+k,$$

при котором она делится без остатка на $x-3$.

Отв. - 3.

3. Найти значение коэффициента a функции

$$ax^4-2x^3-9x^2-3x-36,$$

при котором она делится без остатка на $x+3$.

Отв. 2.

4. Найти значение коэффициента k функции

$$x^3+y^3+z^3+kxyz,$$

при котором эта функция делится без остатка на $x+y+z$.

Отв. - 3.

5. Составить функцию $f(x)$ по следующим, вполне ее определяющим данным:

а) $f(1)=2$; $f(-2)=1$; $f(3)=-2$ Отв. $-\frac{7}{15}x^2-\frac{2}{15}x+\frac{13}{5}$.

б) $f(0)=-2$; $f(1)=-1$; $f(-1)=-3$; $f(2)=30$; $f(-2)=-34$; $f(3)=241$.

Отв. x^5-1.

в) $f(1)=4$; $f(-1)=0$; $f(2)=15$; $f(-2)=-5$.

Отв. x^3+x^2+x+1.

6) Зная, что числа 2, - 2 и - 3 суть корни функции

$$x^6+x^5-14x^4-8x^3+64x^2+16x-96,$$

определить степень кратности каждого из них и разложить функцию на множители.

Отв.: тройной, двойной, простой.

7. Составить целую функцию, зная, что

I есть ее тройной корень

- I " " двойной "

$2 \pm i$ суть ее двойные корни.

2 есть коэффициент старшего члена.

Отв. $2x^9-18x^8+64x^7-96x^6-4x^5+196x^4-$
$-242x^3-32x^2+130x-50.$

§ 51. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

Во втором выпуске первой части, на который будем ссылаться, мы познакомились с интегрированием простейших функций, теперь надлежит аппарат интегрирования расширить. В этом параграфе изложим в общих чертах интегрирование рациональных дробей.

Пункт I-й.

Интеграл типа $\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}dx$, где $\varphi(x)$ и $f(x)$ целые рациональные функции, причем корни знаменателя дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ вещественные и среди этих корней нет равных.

Степень числителя предполагаем ниже степени знаменателя, так как в противном случае, разделив числителя на знаменателя, всегда возможно исключить целое число; кроме того, считаем дробь не сократимой, т.е. числитель и знаменатель не имеют общих корней; если бы они имели общий корень, например a, то числитель и знаменатель, как известно из алгебры, можно было бы разделить на $x-a$.

а) При вычислении интеграла $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ (см. часть I; выпуск 2-й; стр. 60) для разложения дроби $\frac{1}{x^2-a^2}$, или $\frac{1}{(x+a)(x-a)}$, на простейшие был использован искусственный прием, который уже для случая трех сомножителей окажется непригодным. Применим, так называемый, способ неопределенных коэффициентов. Положим, что:

$$\frac{1}{(x+a)(x-a)}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x-a}, \qquad (1)$$

где A и B некоторые, пока нам неизвестные числа. Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(x+a)(x-a)}=\frac{(A+B)x+Ba-Aa}{(x+a)(x-a)}.$$

Так как дроби равны и знаменатели дробей равны, то и числители должны быть равны:

$$(A+B)x+Ba-Aa=1. \qquad (2)$$

Вспомним, что x переменная величина при постоянных A и B; следовательно равенство (2), как тождество, должно удовлетворяться при различных значениях x; но чтобы это было возможным, необходимым условием является $A+B=0$, но тогда получим, что $Ba-Aa=1$.

Итак для вычисления A и B будем иметь уравнения:

$$A+B=0; \qquad Ba-Aa=1.$$

Решение этих уравнений дает:

$$A=-\frac{1}{2a} \quad \text{и} \quad B=\frac{1}{2a}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (I), найдем:

$$\frac{1}{(x+a)(x-a)}=-\frac{1}{2a(x+a)}+\frac{1}{2a(x-a)},$$

и переходя к интегрированию:

$$\int\frac{dx}{(x+a)(x-a)}=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a};$$

$$\int\frac{dx}{(x+a)(x-a)}=\frac{1}{2a}\lg(x-a)-\frac{1}{2a}\lg(x-a)+C;$$

$$\int\frac{dx}{(x+a)(x-a)}=\frac{1}{2a}\lg\frac{x-a}{x+a}+C.$$

Снова получается формула, данная во втором выпуске I-й части (см.стр.61). Таким образом, разложение дробей на простейшие рассматривается как действие обратное приведению к общему знаменателю.

б) Тот же метод применяется, когда знаменатель можно разложить на три и более сомножителей. Возьмем примеры.

I) Пусть требуется вычислить:

$$J=\int\frac{2x^2-11x-25}{x^3-7x-6}dx.$$

Легко проверить подстановкой, что корни знаменателя будут: -I;-2; 3- следовательно:

$$x^3-7x-6=(x+1)(x+2)(x-3).$$

Поступая, как и раньше, найдем:

$$\frac{2x^2-11x-25}{(x+1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3};$$

или, приводя правую часть тождества к одному знаменателю:

$$\frac{2x^2-11x-25}{(x+1)(x+2)(x-3)}=\frac{A(x+2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)},$$

отсюда:

$$2x^2-11x-25=A(x+2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x+2). \quad (m)$$

Произведя в правой части тождества (m) перемножение и собрав вместе члены, содержащие x^2 и x, будем иметь:

$$2x^2-11x-25=(A+B+C)x^2+(-A-2B+3C)x-6A-3B+2C. \quad (n)$$

В силу того, что x переменная величина (A; B и C постоянные), равенство (n), как справедливое при различных значениях x, будет тождеством; коэффициенты же при одинаковых степенях x правой и левой части тождества, а также свободные члены, должны быть равны,-поэтому:

$$A+B+C=2;$$

$$-A-2B+3C=-11;$$

$$-6A-3B+2C=-25;$$

Решая последнюю систему уравнений, найдем:

$$A=3; \quad B=1; \quad C=-2.$$

Тот же результат можно получить проще: в тождестве (m) вместо x возможно подставлять различные числа (причем A; B; C остаются без изменения); подставим последовательно: -1; -2; 3, т.е. корни знаменателя.

При $x=-1$ будем иметь:

$$2(-1)^2-11.-1-25=A(-1+2)(-1-3)+B(-1+1)(-1-3)+C(-1+1)(-1+2),$$

или:

$$-12=-4A; \quad A=3;$$

точно также при $x=-2$:

$$5=5B; \quad B=1;$$

и при $x=3$:

$$-40=20C; \quad C=-2.$$

Итак:

$$\frac{2x^2-11x-25}{x^3-7x-6}=\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-3}.$$

Переходим к интегрированию:

$$J=\int\frac{2x^2-11x-25}{x^3-7x-6}dx=3\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x+2}-2\int\frac{dx}{x-3};$$

$$J=\int\frac{2x^2-11x-25}{x^3-7x-6}\,dx=3\ln(x+1)+\ln(x+2)-2\ln(x-3)+C;$$

$$J=\int\frac{2x^2-11x-25}{x^3-7x-6}\,dx=\ln\frac{(x+1)^3(x+2)}{(x-3)^2}+C.$$

Желающие могут проверить полученный результат дифференцированием.

2) $J=\int\frac{dx}{x^3-5x^2+6x}$.

Так как $x^3-5x^2+6x=x(x^2-5x+6)=x(x-2)(x-3)$, то для разложения на простейшие дроби будем иметь:

$$\frac{1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3},$$

приводя к одному знаменателю:

$$\frac{1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)},$$

откуда:

$$A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)=1.$$

Подставляя в последнее тождество вместо „x" последовательно: 0;2;3,- найдем:

$x=0$	$A(0-2)(0-3)=1;$	$A.-2.-3=1;$	$6A=1;$	$A=\frac{1}{6};$
$x=2$	$B.2(2-3)=1;$	$B.\ 2.-1=1;$	$-2B=1;$	$B=-\frac{1}{2};$
$x=3$	$C.3(3-2)=1;$	$C.\ 3\ .\ 1=1;$	$3C=1;$	$C=\frac{1}{3}.$

Следовательно:

$$\frac{1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-3}.$$

Перейдем к интегрированию:

$$J=\int\frac{dx}{x^3-5x^2+6x}=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-3};$$

$$J=\int\frac{dx}{x^3-5x^2+6x}=\frac{1}{6}\ln x-\frac{1}{2}\ln(x-2)+\frac{1}{3}\ln(x-3)+C.$$

3) $J=\int\frac{dx}{x^4-5x^2+4}$.

Знаменатель легко разложить на множители:

$$x^4-5x^2+4=x^4-4x^2-x^2+4=x^2(x^2-4)-(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

(Можно также найти корни знаменателя, решив уравнение $x^4-5x^2+4=0$).

Следовательно:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2};$$

отсюда:

$$A(x+1)(x^2-4)+B(x-1)(x^2-4)+C(x+2)(x^2-1)+D(x-2)(x^2-1)=1.$$

Подставляем в последнее тождество вместо x последовательно: 1; -1; 2; -2:

$x=1$	$A(1+1)(1-4)=1;$	$A.2.-3=1;$	$-6A=1;$	$A=-\frac{1}{6};$
$x=-1$	$B(-1-1)(1-4)=1;$	$B.-2.-3=1;$	$6B=1;$	$B=\frac{1}{6};$
$x=2$	$C(2+2)(4-1)=1;$	$C.4.3=1;$	$12C=1;$	$C=\frac{1}{12};$
$x=-2$	$D(-2-2)(4-1)=1;$	$D.-4.3=1;$	$-12D=1;$	$D=-\frac{1}{12}.$

Итак:

$$\frac{1}{x^4-5x^2+4}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{x+2}.$$

Переходим к интегрированию:

$$J=\int\frac{dx}{x^4-5x^2+4}=-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x+2};$$

$$J=\int\frac{dx}{x^4-5x^2+4}=-\frac{1}{6}\ln(x-1)+\frac{1}{6}\ln(x+1)+\frac{1}{12}\ln(x-2)-\frac{1}{12}\ln(x+2)+C,$$

или:

$$J=\int\frac{dx}{x^4-5x^2+4}=\frac{1}{6}\ln\frac{x+1}{x-1}+\frac{1}{12}\ln\frac{x-2}{x+2}+C.$$

4) $J=\int\frac{6x^2-7x-24}{13x(3-2x)(4x+1)}dx=\frac{1}{13}\int\frac{6x^2-7x-24}{x(3-2x)(4x+1)}dx.$

Положив $3-2x=-2(x-\frac{3}{2})$ и $4x+1=4(x+\frac{1}{4})$, последний интеграл перепишем в следующем виде:

$$\int\frac{6x^2-7x-24}{x(3-2x)(4x+1)}dx=-\frac{1}{8}\int\frac{6x^2-7x-24}{x(x-\frac{3}{2})(x+\frac{1}{4})}dx.$$

Корнями знаменателя будут 0; $\frac{3}{2}$; $-\frac{1}{4}$. Дальше ход решения будет тот же, что и в прежних примерах. Но здесь удобно поступить и иначе:

$$\frac{6x^2-7x-24}{x(3-2x)(4x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{3-2x}+\frac{C}{4x+1};$$

$$\frac{6x^2-7x-24}{x(3-2x)(4x+1)}=\frac{A(3-2x)(4x+1)+Bx(4x+1)+Cx(3-2x)}{x(3-2x)(4x+1)};$$

отсюда:

$$6x^2-7x-24=A(3-2x)(4x+1)+Bx(4x+1)+Cx(3-2x).$$

Произведя перемножение в правой части тождества и собрав вместе члены, содержащие x^2 и x, будем иметь:

$$6x^2-7x-24=(-8A+4B-2C)x^2+(10A+B+3C)x+3A.$$

Сравнение обеих частей тождества дает:

$$-8A+4B-2C=6;$$
$$10A+B+3C=-7;$$
$$3A=-24.$$

Из последнего уравнения находим $A=-8$; и подставляя -8 вместо A в первое и второе уравнение и упрощая, получим:

$$2B-C=-29;$$
$$B+3C=73$$

Решая последние два уравнения, найдем:

$$B=-2;\quad C=25.$$

Итак:

$$\frac{6x^2-7x-24}{x(3-2x)(4x+1)}=-\frac{8}{x}-\frac{2}{3-2x}+\frac{25}{4x+1}.$$

Переходим к интегрированию:

$$\int\frac{6x^2-7x-24}{x(3-2x)(4x+1)}\,dx=-8\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2dx}{2x-3}+25\int\frac{dx}{4x+1};$$

$$\int\frac{6x^2-7x-24}{x(3-2x)(4x+1)}dx=-8\ln x+\ln(2x-3)+\frac{25}{4}\ln(4x+1)+C.$$

5) $\mathcal{J}=\int\frac{(3x^2-7x-6)\,dx}{(x-1)(2x+1)(x-3)}$.

Корнями знаменателя будут: I; $-\frac{1}{2}$; 3. Последний корень обращает числитель в нуль (в чем легко убедиться подстановкой), т.е. будет корнем числителя, а потому последний должен делится на $x-3$ (в результате деления получим $3x+2$).

Сократив дробь на $x-3$, будем иметь:

$$\mathcal{J}=\int\frac{(3x+2)\,dx}{(x-1)(2x+1)}.$$

Дальнейшее решение этого примера не представляет интереса и останавливаться на нем не будем.

Таким образом, мы видим, что предварительное сокращение дроби (для чего следует убедиться: не будут ли некоторые из корней знаменателя корнями числителя) упрощает выкладки.

c) Если степень числителя выше степени знаменателя, то сначала следует исключить целую часть путем деления числителя на знаменателя.

$$\mathcal{J}=\int\frac{x^4+x^3-5x^2-24x-31}{x^3-7x-6}dx=\int\left(x+1+\frac{2x^2-11x-25}{x^3-7x-6}\right)dx$$

$$\mathcal{J}=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{2x^2-11x-25}{x^3-7x-6}dx.$$

Последний интеграл мы уже имели (см. пример I-й).

Решенные примеры показывают, что если степень числителя ниже степени знаменателя, корни которого вещественные и среди них нет кратных, то в результате интегрирования получаются только логарифмические функции; если же степень числителя выше или равна степени знаменателя, то алгебраические и логарифмические.

d) Примеры для самостоятельной проработки.

I) $\int\frac{x^4+2x+6}{x^3+x^2-2x}dx=\frac{1}{2}x^2-x+3\ln\frac{(x-1)(x+2)}{x}+C$.

2) $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx=\ln\frac{C(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}$.

3) $\int\frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}dx=\ln\left[C(x+1)^4(x-2)^3(x-1)^2\right]$.

4) $\int\frac{(x^2+x-1)dx}{x^3+x^2-6x}=\ln\sqrt[6]{Cx(x-2)^3(x+3)^2}$.

5) $\int\frac{z^5+z^4-8}{z^3-4z}dx=\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{2}z^2+4z+\ln\frac{z^2(z-2)^5}{(z+2)^3}+C$.

6) $\int\frac{(2y^2-5)dy}{y^4-5y^2+6}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{y-\sqrt{2}}{y+\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}}+C$.

7) $\int\frac{(t^2+pq)dt}{t(t-p)(t+q)}=\ln\frac{(t-p)(t+q)}{t}+C$.

8) $\int\frac{(u-1)\,du}{u^2+6u+8}=\ln\frac{C(u+4)^{\frac{5}{2}}}{(u+2)^{\frac{3}{2}}}+C$.

Пункт 2-й.

Интегралы типа $\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx$, где $\varphi(x)$ и $f(x)$ попрежнему целые рациональные алгебраические функции (степень числителя ниже степени знаменателя), не имеющие общих корней; корни знаменателя попрежнему вещественные, но среди них встречаются и кратные.

а) Рассмотрим сначала простейший случай, когда $f(x)=(x-a)^n$, где n целое, положительное число.

1) $\int\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}dx$.

Здесь степень числителя может быть и выше степени знаменателя.

Берем подстановку:

$$x-a=t;\quad x=a+t;\quad dx=dt,$$

следовательно:

$$\int\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}dx=\int\frac{\varphi(a+t)}{t^n}dt.$$

Так как числитель целая рациональная функция, то последний интеграл всегда можно вычислить.

Пример:

$$J=\int\frac{x^2+2x}{(x-1)^3}dx;\quad x-1=t;\quad x=t+1;\quad dx=dt;$$

$$J=\int\frac{(t+1)^2+2(t+1)}{t^3}dt=\int\frac{t^2+4t+3}{t^3}dt=\int\frac{dt}{t}+4\int\frac{dt}{t^2}+3\int\frac{dt}{t^3};$$

$$J=\ln t-\frac{4}{t}-\frac{3}{2t^2}+C=\ln(x-1)-\frac{4}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}+C.$$

2) Еще проще вычисляется интеграл: $\int\frac{dx}{(x-a)^n}$.

Возьмем подстановку:

$$x-a=t;\quad x=t+a;\quad dx=dt, -$$

тогда:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\int\frac{dt}{t^n}=-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}}+C;$$

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n}=-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C. \qquad (4)$$

в) Пусть теперь знаменатель $f(x)$ кроме корня α (причем мы не ограничиваемся только вещественными корнями), кратность которого n, имеет еще и другие корни.

Из алгебры известно, что многочлен $f(x)$ должен делиться на $(x-\alpha)^n$, будет ли число α вещественным или комплексным - это безразлично. Обозначая частное от деления через $f_1(x)$, будем иметь:

$$f(x)=(x-\alpha)^n f_1(x);$$

следовательно:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^n f_1(x)}.$$

Так как корень α выделен, то число α не будет корнем многочлена $f_1(x)$; в силу того, что данная дробь несократима, т.е. числитель и знаменатель не имеют общих корней, число α не будет корнем полинома $\varphi(x)$.

Докажем возможность разложения:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^n f_1(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^n}+\frac{\varphi_1(x)}{(x-\alpha)^{n-1} f_1(x)}, \qquad (5)$$

где A неизвестное пока число и $\varphi_1(x)$ неизвестный полином, степень которого ниже степени $\varphi(x)$.

Это разложение понадобится и при случае мнимых корней, поэтому при доказательстве будем подразумевать под α, как вещественные, так и комплексные числа.

Перенесем первый член правой части равенства (5) в левую и приведем последнюю к одному знаменателю:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^n f_1(x)}-\frac{A}{(x-\alpha)^n}=\frac{\varphi_1(x)}{(x-\alpha)^{n-1} f_1(x)};$$

$$\frac{\varphi(x)-A f_1(x)}{(x-\alpha)^n f_1(x)}=\frac{\varphi_1(x)}{(x-\alpha)^{n-1} f_1(x)},$$

откуда:

$$\frac{\varphi(x)-A f_1(x)}{x-\alpha}=\varphi_1(x). \qquad (6)$$

Так как правая часть последнего равенства, т.е. $\varphi_1(x)$ по нашему предположению целый рациональный многочлен, то является необходимым, чтобы числитель левой части, именно $\varphi(x)-A f_1(x)$, делился на $x-\alpha$; но, как известно из алгебры, это возможно только в том случае, когда число α будет корнем числителя. Полагая в числителе $x=\alpha$, получим (корень многочлена обращает многочлен в нуль):

$$\varphi(\alpha)-A f_1(\alpha)=0,$$

следовательно:

$$A=\frac{\varphi(\alpha)}{f_1(\alpha)}. \qquad (7).$$

Как было уже упомянуто, число α не будет корнем $\varphi(x)$ и $f_1(x)$, поэтому $\varphi(\alpha)$ и $f_1(\alpha)$ не равны нулю; таким образом формула (7) дает для A вполне определенное и единственное число.

В силу раньше сказанного многочлен $\varphi(x)-Af_1(x)$ должен делиться на $x-\alpha$; так как число A нам известно, то подобное деление всегда возможно выполнить и по формуле (6) найти $\varphi_1(x)$.

Поставленная теорема доказана.

Если $n=1$, т.е. если α является единичным корнем знаменателя, то равенство (5) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)f_1(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} \qquad (8)$$

Продолжая разложение дальше, найдем:

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-\alpha)^{n-1}f_1(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)^{n-1}}+\frac{\varphi_2(x)}{(x-\alpha)^{n-2}f_1(x)};$$

$$\frac{\varphi_2(x)}{(x-\alpha)^{n-2}f_1(x)}=\frac{A_2}{(x-\alpha)^{n-2}}+\frac{\varphi_3(x)}{(x-\alpha)^{n-3}f_1(x)};$$

. . . .

$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{(x-\alpha)f_1(x)}=\frac{A_{n-1}}{x-\alpha}+\frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)}.$$

Итак, для дроби $\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^n f_1(x)}$ окончательно получим:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^n f_1(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^n}+\frac{A_1}{(x-\alpha)^{n-1}}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{n-2}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-\alpha}+\frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)} \quad (9)$$

Зная корни многочлена $f_1(x)$, указанный прием применим и к оставшейся неразложенной дроби $\frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)}$.

Таким образом, если знаменатель дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ имеет, например, корни α и β, соответственные кратности которых n и m, и, кроме того, единичные корни γ и δ, - то данная дробь разложится на простейшие следующим образом:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^n(x-\beta)^m(x-\gamma)(x-\delta)}=\frac{A}{(x-\alpha)^n}+\frac{A_1}{(x-\alpha)^{n-1}}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{n-2}}+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\beta)^m}+\frac{B_1}{(x-\beta)^{m-1}}+\frac{B_2}{(x-\beta)^{m-2}}+\ldots+\frac{B_{m-1}}{x-\beta}+\frac{C}{x-\gamma}+\frac{D}{x-\delta}.$$

Числа $A;\ A_1;\ A_2;\ldots;A_{n-1};\ B;\ B_1;\ B_2;\ \ldots;\ B_{m-1};\ C;\ D$ найдутся по методу неопределенных коэффициентов.

Данный вид разложения рациональной дроби на простейшие является единственным, но на доказательстве этого останавливаться не будем.

c) Примеры:

$$J=\int\frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+x^3-3x^2-5x-2}.$$

Знаменатель должен иметь четыре корня.

Легко видеть, что -1 будет тройным корнем знаменателя, так как обращает знаменатель, его первую и вторую производную в нули:

$$x^4+x^3-3x^2-5x-2=(-1)^4+(-1)^3-3(-1)^2-5(-1)-2=1-1-3+5-2=0;$$

$$4x^3+3x^2-6x-5=4(-1)^3+3(-1)^2-6(-1)-5=-4+3+6-5=0;$$

$$12x^2+6x-6=12(-1)^2+6(-1)-6=12-6-6=0.$$

Число 2 будет простым корнем знаменателя:

$$x^4+x^3-3x^2-5x-2=2^4+2^3-3.2^2-5.2-2=0.$$

Итак:

$$x^4+x^3-3x^2-5x-2=(x+1)^3(x-2).$$

Замечание. Тот же результат легко получить путем разложения знаменателя на множители:

$$x^4+x^3-3x^2-5x-2=x^4+x^3-3x^2-3x-2x-2=(x+1)(x^3-3x-2);$$

$$x^3-3x-2=x^3-x-2x-2=x(x^2-1)-2(x+1)=(x+1)(x^2-x-2);$$

$$x^2-x-2=x^2+x-2x-2=(x+1)(x-2);$$

$$x^4+x^3-3x^2-5x-2=(x+1)^3(x-2).$$

Заданный интеграл перепишем так:

$$J=\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x+1)^3(x-2)}.$$

Приступим к разложению под'интегральной дроби на простейшие:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B}{x-2}; \qquad (k)$$

$$x^2+1=A(x-2)+A_1(x+1)(x-2)+A_2(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3.$$

Подставим в тождество (k) вместо x числа -1; 2 (корни знаменателя):

$$(-1)^2+1=A(-1-2); \qquad 2=-3A; \qquad A=-\frac{2}{3};$$

$$2^2+1=B(2+1)^3; \qquad 5=27B; \qquad B=\frac{5}{27}.$$

Подстановка корней тем выгодна, что все члены правой части тождества, кроме одного, пропадают. Но у нас чисел для корней два, неизвестных же коэффициентов четыре (подобная недохватка всегда имеет место при случае кратных корней); если подставить теперь вместо x какое-либудь другое число, то все слагаемые удерживаются. Поступим проще: предположим, что в правой части тождества сделали перемножение и собрали вместе все члены, содержащие x^3; легко прикинуть в уме, что коэффициент при x^3 будет A_2+B; так как левая часть тождества x^3 не содержит, то $A_2+B=0$; откуда: $A_2=-B$; $A_2=-\frac{5}{27}$.

Подставив теперь в тождество (k) вместо A; A_2; B найденные для них значения и положив $x=0$, получим:

$$1=-\frac{2}{3}\cdot-2+A_1\cdot-2-\frac{5}{27}\cdot-2+\frac{5}{27}\cdot 1; \quad 1=\frac{4}{3}-2A_1+\frac{10}{27}+\frac{5}{27}; \quad A_1=\frac{4}{9}$$

Итак:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{5}{27}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{5}{27}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Переходим к интегрированию:

$$\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{4}{9}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{5}{27}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{5}{27}\int\frac{dx}{x-2}.$$

Первый и второй интегралы правой части легко найдутся (см. стр. 175); следовательно будем иметь:

$$\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{4}{9(x+1)}-\frac{5}{27}\ln(x+1)+\frac{5}{27}\ln(x-2)+C,-$$

и после упрощения окончательно получим:

$$\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{4x+1}{9(x+1)^2}+\frac{5}{27}\ln\frac{x-2}{x+1}+C.$$

2) $J=\int\frac{dx}{x^5-2x^4+x^3}=\int\frac{dx}{x^3(x-1)^2}.$

Разложим под'интегральную дробь на простейшие:

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x^3}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x-1},-$$

откуда:

$$1=A(x-1)^2+A_1x(x-1)^2+A_2x^2(x-1)^2+Bx^3+B_1x^3(x-1). \quad (k)$$

Полагаем сначала $x=0$, а затем $x=1$ (корни знаменателя):

$$1=A(-1)^2; \qquad A=1;$$

$$1=B\cdot 1^3; \qquad B=1.$$

Легко прикинуть в уме, что коэффициент при x^4 в правой части тождества (k) будет A_2+B_1; сравнение с левой частью дает:

$$A_2+B_1=0; \qquad B_1=-A_2.$$

Пользуясь полученными результатами, тождество (k) перепишем так:

$$(x-1)^2+A_1x(x-1)^2+A_2x^2(x-1)^2+x^3-A_2x^3(x-1)=1;$$

или:

$$(x-1)^2+A_1x(x-1)^2-A_2x^2(x-1)+x^3=1.$$

Если теперь подставим вместо x два каких-нибудь числа, то получим два уравнения, решение которых даст A_1 и A_2; но мы поступим несколько проще: продифференцируем последнее равенство, отчего значения A_1 и A_2 не изменятся:

$$2(x-1)+A_1(x-1)^2+2A_1x(x-1)-2A_2x(x-1)-A_2x^2+3x^2=0.$$

Полагая во вновь полученном тождестве сначала $x=0$, а затем $x=1$, найдем: $A_1=2$; $A_2=3$.

Итак
$$\frac{1}{x^3(x-1)^2}=\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}.$$

Замечание. Допустив больше выкладок, мы можем тот же результат получить и иначе.

Сделав перемножение в правой части тождества(k), собрав члены, содержащие одинаковые степени x и расположив их по возрастающим степеням x, найдем:

$$A+(-2A+A_1)x+(A-2A_1+A_2)x^2+(A_1+B-B_1-2A_2)x^3+(A_2+B_1)x^4=1.$$

Сравнение левой и правой части последнего тождества, дает следующие пять уравнений:

$$A=1;$$
$$-2A+A_1=0;$$
$$A-2A_1+A_2=0;$$
$$A_1+B-B_1-2A_2=0;$$
$$A_2+B_1=0.$$

Пользуясь первым уравнением, из второго найдем $A_1=2$; затем из третьего имеем $A_2=3$ и из пятого $B_1=-3$; и, наконец, из четвертого $B=1$.

Следовательно:
$$\frac{1}{x^3(x-1)^2}=\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{x+1}.$$

Указанный прием, которым в дальнейшем придется чаще пользоваться, очень прост, но требует больше выкладок.

Остается произвести интегрирование:
$$\int\frac{dx}{x^3(x-1)^2}=\int\frac{dx}{x^3}+2\int\frac{dx}{x^2}+3\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}-3\int\frac{dx}{x-1};$$

$$\int\frac{dx}{x^3(x-1)^2}=-\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x}+3\ln x-\frac{1}{x-1}-3\ln(x-1)+C.$$

После легких преобразований окончательно получим:

$$\int\frac{dx}{x^3(x-1)^2}=-\frac{6x^2-3x-1}{2x^2(x-1)}+\ln\frac{Cx^3}{(x-1)^3}.$$

d) Примеры для самостоятельной проработки.

1) $\int\frac{ax^2dx}{(x+a)^3}=a\ln(x+a)+\frac{2a^2}{x+a}-\frac{a^3}{2(x+a)^2}+C.$

2) $\int\left(\frac{a}{y+a}-\frac{by}{(y+b)^2}\right)dy=\ln(y+a)^a(y+b)^{-b}-\frac{b^2}{y+b}+C.$

3) $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\ln(x-1)+C.$

4) $\int\frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{4}{x+2}+\ln(x+1)+C.$

5) $\int\frac{(x-8)\,dx}{x^3-4x^2+4x}=\frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^3}{x^2}+C.$

6) $\int\frac{(3z+2)\,dz}{z(z+1)^3}=\frac{4z+3}{2(z+1)^2}+\ln\frac{z^2}{(z+1)^2}+C.$

7) $\int\frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}=-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C.$

8) $\int\frac{t^2\,dt}{t^3+5t^2+8t+4}=\frac{4}{t+2}+\ln(t+1)+C.$

Решенные примеры показывают, что в результате интегрирования для простых корней получаются логарифмические функции, для кратных - алгебраические и логарифмические.

Пункт 3-й.

Интегрирование рациональных дробей, если знаменатель дроби имеет и комплексные корни.

а) Знаменатель дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ целый рациональный многочлен с вещественными коэффициентами: поэтому, имея комплексный корень $a+bi$ кратности n, он будет иметь и сопряженный корень $a-bi$ той же кратности; следовательно, как известно из алгебры, полином $f(x)$ должен делиться на $(x-a-bi)^n$ и $(x-a+bi)^n$, т.е. на произведение $(x-a-bi)^n(x-a+bi)^n$, которое преобразуем так:

$$[(x-a)-bi]^n[(x-a)+bi]^n=[(x-a)^2+b^2]^n=(x^2-2ax+a^2+b^2)^n;-$$

Полагая $-2a=p$ и $a^2+b^2=q$, получим: $(x^2+px+q)^n$.

Руководствуясь правилом формулы (9), справедливой как для случая вещественных, так и мнимых корней, мы могли бы выделить простейшие дроби с комплексными знаменателями, а затем, об'единив попарно дроби с сопряженными комплексными знаменателями, получить дроби с вещественными знаменателями; но можно поступить гораздо проще.

Обозначив частное от деления $f(x)$ на $(x^2+px+q)^n$ через $f_1(x)$, откуда $f(x)=(x^2+px+q)^n f_1(x)$ легко найти:

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)} \quad (10),$$

где M и N вещественные числа и $\varphi_1(x)$ целая рациональная функция степени ниже полинома $\varphi(x)$.

Замечание. Дадим доказательство справедливости формулы (10). Перенесем первый член правой части тождества (10) в левую и приведем в левой части дроби к одному знаменателю:

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}=\frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)};$$

$$\frac{\varphi(x)-(Mx+N)f_1(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)}=\frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)};$$

откуда:

$$\frac{\varphi(x)-(Mx+N)f_1(x)}{x^2+px+q}=\varphi_1(x). \quad (11)$$

Так как правая часть последнего равенства, т.е. $\varphi_1(x)$, по нашему предположению целый рациональный многочлен, то является необходимым, чтобы числитель левой части, именно $\varphi(x)-(Mx+N)f_1(x)$ делился на x^2+px+q; как известно из алгебры, это возможно только в том случае, когда корни трехчлена x^2+ $+px+q$ будут корнями числителя (т.е. обращают последний в нуль).

Полагая в числителе сначала $x=a+bi$, получим:

$$\varphi(a+bi)-[M(a+bi)+N]f_1(a+bi)=0;$$

следовательно:

$$M(a+bi)+N=\frac{\varphi(a+bi)}{f_1(a+bi)},$$

или:

$$Ma+N+Mbi=\frac{\varphi(a+bi)}{f_1(a+bi)}. \qquad (12)$$

Из отдела комплексных чисел известно, что в результате действий над комплексными числами, получается комплексное число; поэтому обозначив дробь, стоящую в правой части равенства (12), через $P+Qi$, будем иметь:

$$Ma+N+Mbi=P+Qi; \qquad (13)$$

следовательно (на основании равенства комплексных чисел):

$$Ma+N=P; \quad Mb=Q, -$$

отсюда:

$$M=\frac{Q}{b}; \qquad N=\frac{Pb-Qa}{b} \qquad (14)$$

Так как практически вещественные числа P и Q мы всегда сумеем найти, то в силу формул (14) всегда сумеем найти и M и N, которые также будут числами вещественными, вполне определенными и притом единственными.

Действительно: символы φ и f_1 (см. форм. 12) обозначают арифметические действия; результаты же арифметических действий над сопряженными комплексными числами, как показано в § 49 (см.стр.113) будут также сопряженными комплексными числами; поэтому, если бы мы положили $x=a-bi$, то формулу (13) пришлось бы переписать в следующем виде:

$$Ma+N-Mbi=P-Qi;$$

откуда снова бы пришли к формулам (14).

Выделяя подобно тому, как это делали в случае вещественных кратных корней, простейшие дроби до конца, найдем:

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\dots+\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{x^2+px+q}+\frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)}. \quad (15)$$

Коэффициенты числителей простейших дробей попрежнему ищутся методом неопределенных коэффициентов.

Таким образом, вопрос сводится к интегрированию дроби типа $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ или, в более общем виде, дроби типа: $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

в) $J=\int\frac{(Mx+N)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, где n целое положительное число.

1) Два частных случая: первый при $M=0$; $N=1$ и $n=1$, — и второй при $n=1$, т.е. интегралы:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{и} \quad \int\frac{(Mx+N)\,dx}{ax^2+bx+c},$$

были уже рассмотрены во втором выпуске первой части (см.стр.64 и 65) и останавливаться на них не будем.

2) Если $n>1$, то для уменьшения выкладок удобнее упростить сначала под'интегральную функцию, взяв $2ax+b$, т.е. производную от ax^2+bx+c, за новую переменную:

$$2ax+b=z; \quad x=\frac{z-b}{2a}; \quad dx=\frac{dz}{2a};$$

$$ax^2+bx+c=a\left(\frac{z-b}{2a}\right)^2+b\cdot\frac{z-b}{2a}+c=\frac{z^2+4ac-b^2}{4a}.$$

Полагая $4ac-b^2=k$, причем k может быть как положительным, так и отрицательным числом, смотря по тому: будут ли корни знаменателя мнимыми или вещественными (в дальнейшем понадобится этот интеграл и для случая вещественных корней), получим:

$$J=\int\frac{M\cdot\frac{z-b}{2a}+N}{\frac{1}{(4a)^n}(z^2+k)^n}\cdot\frac{dz}{2a}=4^{n-1}a^{n-2}\int\frac{Mz+2aN-bM}{(z^2+k)^n}dz;$$

или, полагая $2aN-bM=Q$, найдем:

$$J=4^{n-1}a^{n-2}\int\frac{Mz+Q}{(z^2\ \ k)^n}dz.$$

Последний интеграл представим в виде суммы двух интегралов:

$$\int\frac{Mz+Q}{(z^2+k)^n}dz=M\int\frac{z\,dz}{(z^2+k)^n}+Q\int\frac{dz}{(z^2+k)^n}.$$

Обозначая последние два интеграла соответственно через A_n и B_n, будем иметь:

$$\int\frac{Mz+Q}{(z^2+k)^n}dz=MA_n+QB_n. \qquad (16)$$

3) Интеграл A_n легко найдется преобразованием под'интегральной функции:

$$A_n=\int\frac{z\,dz}{(z^2+k)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{2z\,dz}{(z^2+k)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{d(z^2+k)}{(z^2+k)^n};$$

$$A_n=\int\frac{z\,dz}{(z^2+k)^n}=-\frac{1}{2(n-1)(z^2+k)^{n-1}}+C. \qquad (17)$$

Так как при $n=1$ второй интеграл, именно $B_1=\int\frac{dx}{x^2+k}$, нам известен, то остается только вывести формулу приведения:

$$B_n=\int\frac{dz}{(z^2+k)^n}=\frac{1}{k}\int\frac{k}{(z^2+k)^n}dz=\frac{1}{k}\int\frac{z^2+k-z^2}{(z^2+k)^n}dz;$$

$$B_n=\frac{1}{k}\int\frac{(z^2+k)dz}{(z^2+k)^n}-\frac{1}{k}\int\frac{z^2dz}{(z^2+k)^n}=\frac{1}{k}\int\frac{dz}{(z^2+k)^{n-1}}-\frac{1}{k}\int\frac{z^2dz}{(z^2+k)^n};$$

$$B_n=\frac{1}{k}B_{n-1}-\frac{1}{k}\int\frac{z^2dz}{(z^2+k)^n}. \qquad (S)$$

С помощью интегрирования по частям последний интеграл сведем к интегралу B_{n-1}:

$$\int\frac{z^2dz}{(z^2+k)^n}=\int z\cdot\frac{zdz}{(z^2+k)^n}.$$

Но множитель $\frac{zdz}{(z^2+k)^n}$ есть дифференциал интеграла A_n (см. формулу 17), поэтому:

$$\int\frac{z^2dz}{(z^2+k)^n}=\int z\,d\left(-\frac{1}{2(n-1)(z^2+k)^{n-1}}\right);$$

откуда:

$$\int\frac{z^2dz}{(z^2+k)^n}=-\frac{z}{2(n-1)(z^2+k)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dz}{(z^2+k)^{n-1}};$$

$$\int\frac{z^2dz}{(z^2+k)^n}=-\frac{z}{2(n-1)(z^2+k)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}B_{n-1}.$$

Пользуясь полученным результатом, равенство (S) перепишем так:

$$B_n=\frac{1}{k}B_{n-1}+\frac{1}{k}\cdot\frac{z}{2(n-1)(z^2+k)^{n-1}}-\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2(n-1)}B_{n-1}.$$

После легкого преобразования окончательно получим:

$$B_n=\int\frac{dz}{(z^2+k)^n}=\frac{1}{k}\left[\frac{z}{2(n-1)(z^2+p)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dz}{(z^2+k)^{n-1}}\right] \quad (18)$$

4) Возьмем пример: $J=\int\frac{(2x-1)dx}{(x^2-2x+2)^3}$.

Во избежание дробей за новую переменную удобнее взять половину производной трехчлена x^2-2x+2:

$$x-1=z;\quad x=z+1;\quad dx=dz;$$

$$x^2-2x+2=(z+1)^2-2(z+1)+2=z^2+1;$$

$$2x-1=2(z+1)-1=2z+1.$$

Следовательно:

$$J=\int\frac{(2z+1)\,dz}{(z^2+1)^3}=\int\frac{2z\,dz}{(z^2+1)^3}+\int\frac{dz}{(z^2+1)^3}=-\frac{z}{2(z^2+1)^2}+\int\frac{dz}{(z^2+1)^3}$$

Очевидно

$$B_1=\int\frac{dz}{z^2+1}=arctg\,z+C.$$

Пользуясь методом, который был применен при выводе формулы (18), легко найти:

$$B_2=\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C,-$$

и для вычисления B_3 точно таким путем получим:

$$B_3=\int\frac{dz}{(z^2+1)^3}=\frac{z}{4(z^2+1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

Итак:

$$B_3=\int\frac{dz}{(z^2+1)^3}=\frac{z}{4(z^2+1)^2}+\frac{3z}{8(z^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} z+C,$$

тогда:

$$J=-\frac{z}{4(z^2+1)^2}+\frac{3z}{8(z^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} z+C.$$

Подставляя $x-1$ вместо z, найдем окончательно:

$$\int\frac{(2x-1)dx}{(x^2-2x+2)^3}=-\frac{x-1}{4(x^2-2x+2)^2}+\frac{3(x-1)}{8(x^2-2x+2)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x-1)+C.$$

c) Возьмем сначала примеры, когда знаменатель дроби имеет мнимые корни, но среди корней нет кратных.

I) $J=\int\frac{x^3+x+1}{x^4-1}\,dx.$

Прежде чем приступить к разложению на простейшие дроби, преобразуем подинтегральную функцию (для уменьшения выкладок).

$$\int\frac{x^3+x+1}{x^4-1}dx=\int\frac{x^3dx}{x^4-1}+\int\frac{(x+1)dx}{x^4-1}=\int\frac{x^3dx}{x^4-1}+\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Первый интеграл легко найдется:

$$\int\frac{x^3dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{4x^3dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{d(x^4-1)}{x^4-1};$$

$$\int\frac{x^3dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\ln(x^4-1)+C.$$

Приступим теперь к разложению на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Px+Q}{x^2+1}.$$

Приводя дроби к одному знаменателю и приравнивая числителей, имеем:

$$1=A(x^2+1)+(Px+Q)(x-1), \qquad (k)$$

или

$$1=(A+P)x^2+(Q-P)x+A-Q;$$

отсюда:

$$A+P=0; \quad Q-P=0; \quad A-Q=1.$$

Полагая, кроме того, $x=1$ в тождестве (k) найдем $A=\frac{1}{2}$.

Подставляя $\frac{1}{2}$ вместо A в первое и третье из полученных уравнений, имеем: $P=-\frac{1}{2}$ и $Q=-\frac{1}{2}$. При вычислении коэффициентов одновременно пользовались обоими приемами.

Таким образом:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+1}.$$

Приступим к интегрированию:

$$\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Все три интеграла легко найдутся:

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{2}\ln(x-1)+C$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{4}\int\frac{2xdx}{x^2+1}=\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x+C.$$

Итак: $$\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x+C.$$

Для заданного интеграла будем иметь:

$$\int\frac{x^3+x+1}{x^4-1}dx=\frac{1}{4}\ln(x^4-1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x+C.$$

После простых преобразований получим окончательно:

$$\int\frac{x^3+x+1}{x^4-1}\,dx=\frac{1}{4}\ln(x+1)(x-1)^3-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x+C.$$

2) $$J=\int\frac{4x^2+2x}{x^3-1}\,dx=2\int\frac{2x^2+x}{x^3-1}\,dx.$$

Разложим под'интегральную дробь на простейшие:

$$\frac{2x^2+x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Px+Q}{x^2+x+1};$$

$$2x^2+x=A(x^2+x+1)+(Px+Q)(x-1). \qquad (k)$$

Полагая в тождестве (k) $x=1$, имеем: $A=1$; полагая же $x=0$, найдем: $A-Q=0$; отсюда $Q=A=1$.

Коэффициент при x^2 правой части тождества очевидно будет: $A+P$; сравнение с левой частью дает $A+P=2$; $P=2-A=2-1=1$.

Коэффициенты найдены, тогда:

$$\frac{2x^2+x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Переходим к интегрированию:

$$J=2\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1}=2\ln(x-1)+2\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1}.$$

Для последнего интеграла имеем:

$$2\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1}=\int\frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx=\int\frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1}+\int\frac{dx}{x^2+x+1};$$

$$2\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1}=\ln(x^2+x+1)+\int\frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Остается вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$.

Взяв за новую переменную производную знаменателя $2x+1$ или половину этой производной, т.е. $x+\frac{1}{2}$, легко найдем:

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Итак окончательно:

$$\int\frac{4x^2+2x}{x^3-1}dx=2\ln(x-1)+\ln(x^2+x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c;$$

или:

$$\int\frac{4x^2+2x}{x^3-1}dx=\ln(x-1)(x^3-1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

d) Перейдем к примерам, когда знаменатель дроби имеет мнимые кратные корни.

I) $$J=\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}.$$

Разложим под'интегральную дробь на простейшие:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Px+Q}{(x^2+1)^2}+\frac{Rx+S}{x^2+1};$$

откуда:

$$1=A(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)^2+(Px+Q)x^2+(Rx+S)x^2(x^2+1), \qquad (k)$$

Полагаем $x=0$ (корень знаменателя), тогда: $A=1$.

Корнями множителя x^2+1 будут i и $-i$. Подставляя i вместо x в тождестве (k) (и помня, что при $x=i$ имеем $x^2+1=0$ и $x^2=-1$), найдем: $Pi+Q=-1$, а потому: $P=0$, $Q=-1$. Коэффициент при x^5 в правой части тождества (k) очевидно будет $B+R$; сравнение с левой частью тождества дает $B+R=0$, откуда $R=-B$.

Итак имеем:

$$A=1;\quad P=0;\quad Q=-1;\quad R=-B;$$

теперь тождество (k), можно переписать в таком виде:

$$1=(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)^2-x^2+(-Bx+S)x^2(x^2+1). \qquad (\ell)$$

Полагая $x=1$ и $x=-1$ в тождестве (ℓ), получим уравнения:

$$B+S=-1;\qquad -B+S=-1,$$

решение которых дает: $B=0$; $S=-1$; таким образом, вторая простейшая дробь выпадает.

Вместо того, чтобы полагать $x=\pm 1$ в тождестве (l), желающие могут это тождество сначала продифференциро вать, а затем положить $x=0$, тогда сразу получится $B=0$; положив затем $B=0$ и $x=i$ (тогда $x^2+1=0$ и $x^2=-1$), легко найти $S=-1$.

Выпишем найденные коэффициенты:

$$A=1;\quad B=0;\quad P=0;\quad Q=-1;\quad R=0;\quad S=-1.$$

Переходим к интегрированию:

$$\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Первый и третий интеграл суммы нам известен:

$$\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C;\qquad \int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}+C.$$

второй был вычислен на стр. 188.

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Окончательно получим:

$$\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}-\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

2) $\displaystyle\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}\,dx.$

Разложим под'интегральную дробь на простейшие:

$$\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Px+Q}{(x^2+1)^2}+\frac{Rx+S}{x^2+1};$$

$$2x^3+x+3=Px+Q+(Rx+S)(x^2+1);$$

$$2x^3+x+3=Rx^3+Sx^2+(P+R)x+Q+S.$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях x в последнем тождестве дает:

$$R=2;\quad S=0;\quad P+R=1;\quad Q+S=3.$$

Отсюда имеем:

$$P=-1;\quad Q=3;\quad R=2;\quad S=0.$$

Следовательно:

$$\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{2x\,dx}{x^2+1};$$

или

$$\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}dx+\ln(x^2+1)+C.$$

Интеграл в правой части последнего равенства равен сумме двух интегралов:

$$\int\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}dx=-\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}+3\int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

из которых первый найдется легко:

$$-\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2(x^2+1)}+C,$$

второй же мы уже имели (см. стр.188):

$$3\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{3x}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Итак:

$$\int\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}=\frac{3x+1}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Окончательно получим:

$$\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx=\ln(x^2+1)+\frac{3x+1}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

3) В качестве последнего примера найдем интеграл, который в свое время доставил затруднения Лейбницу:

$$J=\int\frac{dx}{x^4+1}.$$

Знаменатель имеет четыре мнимых корня; но гораздо проще, не находя этих корней, разложить знаменатель на два квадратных множителя:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2;$$

$$x^4+1=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1).$$

Разлагаем на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Px+Q}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Rx+S}{x^2-x\sqrt{2}+1};$$

$$1=(Px+Q)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(Rx+S)(x^2+x\sqrt{2}+1);$$

$$1=(P+R)x^3+\left[Q+S-(P-R)\sqrt{2}\right]x^2+\left[P+R-(Q-S)\sqrt{2}\right]x+Q+S.$$

Очевидно: $P+R=0$ и $Q+S=1$; следовательно последнее тождество перепишется так:

$$0=\left[1-(P-R)\sqrt{2}\right]x^2-(Q-S)\sqrt{2}\cdot x,$$

откуда:

$$1-(P-R)\sqrt{2}=0; \quad Q-S=0.$$

Итак, для вычисления коэффициентов имеем систему следующих четырех уравнений:

$$P+R=0; \quad P-R=\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad Q+S=1; \quad Q-S=0,$$

решение которых дает:

$$P=\frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad Q=\frac{1}{2}; \quad R=-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad S=\frac{1}{2}.$$

Следовательно:

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(x+\sqrt{2})\,dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(x-\sqrt{2})\,dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Во втором выпуске первой части были рассмотрены полученные интегралы, поэтому, не останавливаясь на интегрировании, перепишем только результат:

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)+C.$$

Пункт 4-й (для желающих).

Упрощения при интегрировании рациональных дробей.

а) Разложение на простейшие дроби при наличии кратных корней в знаменателе ведет часто к немалым выкладкам, между тем преобразованием под'интегральной функции или введением новой переменной вопрос решается иногда проще. Приведем примеры:

1) $$\int\frac{(2x-3)dx}{x^4+6x^3+9x^2+1}=\int\frac{d(x^2-3x)}{(x^2-3x)^2+1}=arctg(x^2-3x)+C.$$

2) $$J=\int\frac{x^2dx}{x^3(x^3+1)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{x^3(x^3+1)}=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z(z+1)};$$

вопрос свелся к интегралу, который рассмотрен во втором выпуске первой части (см. стр. 64); перепишем результат:

$$\int\frac{dz}{z(z+1)}=\ln\frac{z}{z+1}+C;\qquad \int\frac{x^2dx}{x^3(x^3+1)}=\frac{1}{3}\ln\frac{x^3}{x^3+1}+C.$$

3) $$\int\frac{2x(x^2+1)^3dx}{(x^4+2x^2+2)^2}=\int\frac{(x^2+1)^3\,d(x^2+1)}{[(x^2+1)^2+1]^2}=\int\frac{z^3dz}{(z^2+1)^2};$$

$$\int\frac{z^3dz}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{z^2\,dz^2}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{t\,dt}{(t+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{(t+1-1)dt}{(t+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2};$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{t\,dt}{(t+1)^2}=\frac{1}{2}\ln(t+1)+\frac{1}{2(t+1)}+C;$$

$$\int\frac{2x(x^2+1)^3dx}{(x^4+2x^2+2)^2}=\frac{1}{2}\ln[(x^2+1)^2+1]+\frac{1}{2[(x^2+1)^2+1]}+C.$$

4) Если знаменатель имеет только два вещественных корня одинаковой кратности, то вопрос сводится к применению формулы приведения (14)

$$\int\frac{dx}{(x+1)^3(x-1)^3}=\int\frac{dx}{(x^2-1)^3}.$$

Предоставляем слушателям довести решение примера до конца.

в) При решении примеров было обращено внимание на то, что в результате интегрирования при наличии только простых корней получаются логарифмические функции или арктангенсы - при наличии кратных корней получаются и алгебраические функции; наиболее выкладок при разложении дробей на простейшие требуется именно при случае кратных корней; интегрирование простейших дробей получаемых, когда знаменатель имеет кратные мнимые корни, снова требует немало выкладок. В более подробных курсах излагается способ Эрмита-Остроградского, несколько облегчающий выкладки, дающий возможность выделить алгебраическую часть интеграла, не производя самого интегрирования и даже не разлагая знаменателя под'интегральной функции на множителей.

Примеры для самостоятельной проработки.

а) 1) $\int\frac{x^2dx}{1-x^4}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

2) $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+4)}=\frac{1}{10}\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

3) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}=\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

4) $\int\frac{(5x^2-1)dx}{(x^2+3)(x^2-2x+5)}=\ln\frac{x^2-2x+5}{x^2+3}+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$

5) $\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

б) 1) $\int\frac{(x^3+x^2+2)dx}{(x^2+2)^2}=\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C.$

2) $\int\frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+C.$

3) $\int\frac{2x\,dx}{(x+1)(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{x-1}{2(x^2+1)}+C.$

§ 52. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

Рассмотрим только некоторые из тех интегралов, которые выражаются через элементарные функции.

Пункт I-й.

$$\int R(x;\ \sqrt[n]{u^m};\ \sqrt[n_1]{u^{m_1}};\ \sqrt[n_2]{u^{m_2}}\ldots\ldots)dx,$$

где: $u=\dfrac{ax+b}{\alpha x+\beta}$, или в частных случаях:

$u=ax+b;\quad u=ax;$

показатели корней и показатели подкоренных выражений целые числа. Вместо обычного знака f здесь поставлен знак R, чтобы показать, что над аргументами x, $\sqrt[n]{u^m}$, $\sqrt[n_1]{u^{m_1}}$, $\sqrt[n_2]{u^{m_2}}$... следует производить только рациональные действия.

За новую переменную возьмем: $t=\sqrt[k]{u}$, где k наименьшее кратное всех показателей корней, отсюда $u=t^k$; тогда как все радикалы, так и x и dx, как увидим на примерах, выразятся рационально через t. Таким образом, вопрос сводится к интегрированию рациональной функции,- в общем случае: рациональной дроби.

Примеры.

1) $J=\int\dfrac{\sqrt{x}\cdot dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$.

$$t=\sqrt[4]{x};\quad x=t^4;\quad dx=4t^3dt;\quad \sqrt{x}=t^2;\quad \sqrt[4]{x^3}=t^3.$$

$$J=\int\frac{t^2\cdot 4t^3\,dt}{t^3+1}=4\int\frac{t^5\,dt}{t^3+1}=4\int\left(t^2-\frac{t^2}{t^3+1}\right)dt;$$

$$J=4\int t^2dt-4\int\frac{t^2dt}{t^3+1}=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln(t^3+1)+C;$$

$$\int\frac{\sqrt{x}\,.\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{3}\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)+C.$$

2) $\displaystyle\int\frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}{6x^{\frac{1}{4}}}dx.$

Не вводя новой переменной, преобразуем подʼинтегральную функцию:

$$\int\frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}{6x^{\frac{1}{4}}}dx=\frac{1}{6}\int\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)dx=\frac{1}{6}\int\left(x^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{1}{12}}\right)dx;$$

$$\int\frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}{6x^{\frac{1}{4}}}dx=\frac{1}{6}\int x^{\frac{5}{4}}dx-\frac{1}{6}\int x^{\frac{1}{12}}dx=\frac{2}{27}x^{\frac{9}{4}}-\frac{2}{13}x^{\frac{13}{12}}+C.$$

3) $\displaystyle J=\int\frac{dx}{x^{\frac{5}{8}}-x^{\frac{1}{8}}}.$

$$t=x^{\frac{1}{8}};\quad x=t^8;\quad dx=8t^7dt;\quad x^{\frac{5}{8}}=t^5.$$

$$J=\int\frac{8t^7dt}{t^5-t}=8\int\frac{t^6dt}{t^4-1}=8\int\left(t^2+\frac{t^2}{t^4-1}\right)dt;$$

$$J=8\int t^2dt+8\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{8}{3}t^3+8\int\frac{t^2dt}{t^4-1}.$$

Разлагая последнюю дробь на простейшие, будем иметь:

$$\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Окончательно получим:

$$J=\frac{8}{3}t^3+2\ln\frac{t-1}{t+1}+4\operatorname{arctg}t+C;$$

$$\int\frac{dx}{x^{\frac{5}{8}}-x^{\frac{1}{8}}}=\frac{8}{3}x^{\frac{3}{8}}+2\ln\frac{x^{\frac{1}{8}}-1}{x^{\frac{1}{8}}+1}+4\operatorname{arctg}x^{\frac{1}{8}}+C.$$

4) $$I=\int\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)dx}{\sqrt[6]{x-1}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}+1}.$$

$$t=\sqrt[6]{x-1};\quad x-1=t^6;\quad dx=6t^5dt;\quad \sqrt[3]{x-1}=t^2;\quad \sqrt{x-1}=t^3.$$

$$I=\int\frac{\frac{1}{t^2}(1+t)\cdot 6t^5dt}{t+t^2+t^3+1}=\int\frac{6(1+t)t^3dt}{(1+t)(t^2+1)};$$

$$I=\int\frac{6t^3\,dt}{t^2+1}=\int\frac{3t^2\cdot 2t\,dt}{t^2+1}=3\int\frac{t^2\,dt^2}{t^2+1}=3\int\frac{z\,dz}{z+1};$$

$$I=3\int\frac{(z+1-1)\,dz}{z+1}=3\int dz-3\int\frac{dz}{z+1}=3z-3\ln(z+1)+C;$$

$$I=3t^2-3\ln(t^2+1)+C;$$

$$I=3\sqrt[3]{x-1}-3\ln\left(\sqrt[3]{x-1}+1\right)+C.$$

5) $$I=\int\sqrt{\frac{1+x}{(1-x)^3}}\,dx.$$

$$I=\int\frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx;$$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=t;\quad \frac{1+x}{1-x}=t^2;\quad x=\frac{t^2-1}{t^2+1};\quad dx=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2};\quad 1-x=\frac{2}{t^2+1};\quad \frac{1}{1-x}=\frac{t^2+1}{2};$$

$$I=\int\frac{t^2+1}{2}\cdot t\cdot\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}=2\int\frac{t^2\,dt}{t^2+1}=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1};$$

$$I=2t-2\,\mathrm{arctg}\,t+C.$$

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{(1-x)^3}}\,dx=2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

Замечание. Решенные примеры просты, но часто вопрос сводится к интегрированию сложной рациональной дроби. Предлагаем желающим самим проделать:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}}$$

Пункт 2-й.

Интеграл $\int R(x;\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$,

где знак R обозначает, что над аргументами x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ надлежит производить только рациональные действия.

В более подробных курсах излагается, что путем преобразования под'интегральной функции задача, в общем случае, сводится к интегрированию рациональной функции и к некоторым интегралам иррациональных функций, из которых рассмотрим:

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\qquad \int\frac{A\,dx}{(x-a)^n\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

здесь $\varphi(x)$ целая рациональная функция, A число, n целое положительное число. Оба эти интеграла в свою очередь сводятся к основному интегралу:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Заметим, что в под'интегральных функциях радикал переведен в знаменатель: как увидим дальше, интегрирование в общем случае совершается много проще, когда радикал находится в знаменателе.

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Предположим, что $a>0$; корни же квадратного трехчлена ax^2-bx+c могут быть как вещественные, так и мнимые.

Сначала следует упростить под'интегральную функцию, взяв за новую переменную $2ax+b=z$, т.е. производную квадратного трехчлена, или половину этой производной $ax+\frac{b}{2}=z$. Приведем пример.

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}}.$$

Возьмем за новую переменную производную трехчлена $2x^2-3x+1$:

$$4x-3=z;\quad x=\frac{z+3}{4};\quad dx=\frac{dz}{4};$$

$$2x^2-3x+1=2\left(\frac{z+3}{4}\right)^2-3.\frac{z+3}{4}+1=\frac{z^2-1}{8}.$$

$$J=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{z^2-1}{8}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}.$$

Решение вопроса свелось к интегралу, рассмотренному во втором выпуске первой части; так как вычисление этого интеграла не представляет теперь интереса, то приведем только окончательный результат:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(4x-3+2\sqrt{2}\ \sqrt{2x^2-3x+1})+C.$$

Замечание. Тот же результат можно получить проще, уменьшив значительно выкладки, взяв для подстановки:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-x\sqrt{a}.$$

Возьмем прежний пример:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}}.$$

Подстановка: $\sqrt{2x^2-3x+1}=z-x\sqrt{2}\qquad(p)$,

отсюда, возвышая обе части равенства (p) в квадрат:

$$-3x+1=z^2-2xz\sqrt{2}.$$

Продифференцируем последнее равенство:

$$-3dx=2zdz-2\sqrt{2}xdz-2\sqrt{2}zdx;$$

$$dx=\frac{2(z-x\sqrt{2})dz}{2\sqrt{2}z-3}.$$

Подставляя вместо dx полученное для него выражение и $z-x\sqrt{2}$ вместо $\sqrt{2x^2-3x+1}$, заданный интеграл перепишем так:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}}=\int\frac{2(z-x\sqrt{2})dz}{(2\sqrt{2}\,z-3)(z-x\sqrt{2})}=\int\frac{2dz}{2\sqrt{2}z-3}.$$

Последний интеграл берется легко:

$$\int\frac{2dz}{2\sqrt{2}z-3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{2\sqrt{2}\,dz}{2\sqrt{2}\,z-3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(2\sqrt{2}z-3)}{2\sqrt{2}\,z-3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(2\sqrt{2}z-3)+C.$$

Из уравнения (p) имеем:

$$z=x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2-3x+1},$$

следовательно:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(4x-3+2\sqrt{2}\sqrt{2x^2-3x+1})+C.$$

Желающие сами легко могут найти интеграл в общем виде при $a>0$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c})+C. \quad (1)$$

в) Пусть теперь $a<0$, корни же квадратного трехчлена ax^2+bx+c вещественные, т.е. $b^2-4ac>0$.

Попрежнему за новую переменную следует взять: $2ax+b$, т.е. производную квадратного трехчлена, или половину этой производной: $ax+\frac{b}{2}$.

Приведем пример:

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}$$

Очевидно $b^2-4ac>0$, так как $b^2-4ac=16$.

За новую переменную возьмем половину производной квадратного трехчлена $-3x^2+2x+1$:

$$-3x+1=z;\quad x=\frac{1-z}{3};\quad dx=-\frac{dz}{3};$$

$$-3x^2+2x+1=-3\left(\frac{1-z}{3}\right)^2+2\cdot\frac{1-z}{3}+1=\frac{4-z^2}{3};$$

$$J=\int\frac{-\frac{dz}{3}}{\sqrt{\frac{4-z^2}{3}}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dz}{\sqrt{4-z^2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\frac{z}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arccos\frac{z}{2}+C.$$

Окончательно найдем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arccos\frac{-3x+1}{2}+C.$$

Пользуясь указанным методом, желающие сами могут вывести формулу:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arccos\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C=-\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C,\quad(2)$$

где $a<0$ и $b^2-4ac>0$.

Замечание. В более подробных курсах излагается, что при $a<0$ и мнимости корней трехчлена ax^2+bx+c радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$ принимает только мнимые значения и интеграл представится в мнимой форме.

Пункт 3-й.

а) Интеграл

$$N=\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $\varphi(x)$ целая рациональная функция, можно свести к основному, выделив алгебраическую часть при помощи формулы:

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\psi(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+K\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\quad(3)$$

Здесь $\psi(x)$ некоторая целая рациональная функция одной степенью ниже полинома $\varphi(x)$, а K постоянное число. Для вычисления коэффициентов полинома $\psi(x)$ и числа K применяют способ неопределенных коэффициентов. Прежде чем перейти к решению примеров, дадим для желающих обоснование приводимой формулы.

I) Возьмем более простой интеграл того же типа.

$$P=\int\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{ax^2+b}}.$$

Полагая степень полинома $\varphi(x)$ равной n, можем записать:

$$\varphi(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots\ldots+A_{n-1}x+A_n.$$

Очевидно, интеграл P распадется на сумму интегралов, из которых последний будет основным, остальные же интегралами типа

$$Q_n=\int\frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+b}}.$$

Выведем формулу приведения для интеграла Q_n.

По правилам дифференциального исчисления найдем:

$$d\sqrt{ax^2+b}=\frac{ax\,dx}{\sqrt{ax^2+b}},\text{ поэтому } \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{d\sqrt{ax^2+b}}{ax}.$$

Следовательно:

$$Q_n=\int\frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\int\frac{x^n d\sqrt{ax^2+b}}{ax}=\frac{1}{a}\int x^{n-1}d\sqrt{ax^2+b}.$$

Интегрирование по частям дает:

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{1}{a}x^{n-1}\sqrt{ax^2+b}-\frac{1}{a}\int\sqrt{ax^2+b}\cdot dx^{n-1};$$

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{1}{a}x^{n-1}\sqrt{ax^2+b}-\frac{n-1}{a}\int x^{n-2}\sqrt{ax^2+b}\,dx.\quad(k)$$

В последнем интеграле тождества (k) переведем радикал в знаменатель:

$$\frac{n-1}{a}\int x^{n-2}\sqrt{ax^2+b}\,dx=\frac{n-1}{a}\int x^{n-2}\sqrt{ax^2+b}\cdot\frac{\sqrt{ax^2+b}}{\sqrt{ax^2+b}}dx=\frac{n-1}{a}\int\frac{ax^n+bx^{n-2}}{\sqrt{ax^2+b}}dx;$$

$$\frac{n-1}{a}\int x^{n-2}\sqrt{ax^2+b}\,dx=(n-1)\int\frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+b}}+\frac{(n-1)b}{a}\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{ax^2+b}}.$$

Тождество (k) перепишем теперь так:

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{1}{a}x^{n-1}\sqrt{ax^2+b}-(n-1)\int\frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+b}}-\frac{(n-1)b}{a}\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}.$$

Второй член правой части перенесем в левую; сделав приведение и разделив все члены тождества на n, окончательно получим:

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{1}{an}x^{n-1}\sqrt{ax^2+b}-\frac{(n-1)b}{an}\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}. \quad (4)$$

Итак:

$$Q_n=\frac{1}{an}x^{n-1}\sqrt{ax^2+b}-\frac{(n-1)b}{an}Q_{n-2}. \qquad (4\,a)$$

Применяя последовательно формулу приведения и выделяя каждый раз алгебраическую часть, интеграл Q_n при n четном сведем к известному уже нам интегралу:

$$Q_0=\int\frac{x^0\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}, -$$

и при n нечетном:

$$Q_1=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+b}};$$

последний интеграл легко найдется:

$$Q_1=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{1}{2a}\int\frac{2ax\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{1}{2a}\int\frac{d(ax^2+b)}{\sqrt{ax^2+b}};$$

$$Q_1=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+b}+C. \qquad (5)$$

Приведем пример на применение формулы приведения:

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{x}{2a}\sqrt{ax^2+b}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}. \qquad (6)$$

Для второго примера возьмем:

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{x^2}{3a}\sqrt{ax^2+b}-\frac{2b}{3a}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+b}};$$

последний интеграл известен, поэтому

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{x^2}{3a}\sqrt{ax^2+b}-\frac{2b}{3a^2}\sqrt{ax^2+b}+C;$$

или:

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{ax^2-2b}{3a^2}\sqrt{ax^2+b}+C. \qquad (7)$$

Замечание. Как показывает второй пример при n нечетном интеграл Q_n выражается только через алгебраическую функцию; в этом случае результат можно получить очень просто без формулы приведения, взяв за новую переменную $\sqrt{ax^2+b}$; предлагаем желающим применить этот прием ко второму примеру.

2) Вернемся к интегралу P, который, как было указано, можно представить в виде суммы интегралов типа Q_n. Из последних при помощи формулы приведения можно до конца выделить алгебраическую часть; действительно: формула $(4a)$ дает:

$$Q_n=\frac{1}{na}x^{n-1}\sqrt{ax^2+b}-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{b}{a}Q_{n-2};$$

$$Q_{n-2}=\frac{1}{(n-2)a}x^{n-3}\sqrt{ax^2+b}-\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{b}{a}Q_{n-4};$$

следовательно:

$$Q_n=\frac{1}{na}x^{n-1}\sqrt{ax^2+b}-\frac{n-1}{n(n-2)}\cdot\frac{b}{a^2}x^{n-3}\sqrt{ax^2+b}+\frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\cdot\frac{b^2}{a^2}Q_{n-4};$$

продолжая выделение дальше, дойдем при n четном до:

$$Q_0=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}+C, -$$

и при n нечетном до:

$$Q_1=\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+b}+C.$$

Проделаем эту операцию для каждого из слагаемых суммы интегралов типа Q_n. Теперь становится очевидным, что, взяв в алгебраических членах за скобку

$\sqrt{ax^2+b}$ и сделав приведение трансцендентных членов, получим формулу:

$$P=\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\psi(x)\sqrt{ax^2+b}+K\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}\qquad(\ell),$$

где $\psi(x)$ целая рациональная функция степенью на единицу ниже степени $\varphi(x)$ и K постоянное число. Интеграл P можно получить из интеграла $\int\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, положив $ax+\frac{b}{2}=z$, откуда $x=\frac{2z-b}{2a}$; сделав обратную подстановку, формулу (ℓ) приведем к виду формулы (3).

<u>Примеры.</u>

1) $\int\frac{(3x^3+7\frac{1}{2}x^2+5x+2\frac{1}{2})\,dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$.

Числитель под'интегральной функции есть полином третьей степени, тогда в силу формулы (3) функция $\psi(x)$ должна быть полиномом второй степени; обозначив последний через $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, будем иметь:

$$\int\frac{(3x^3+7\frac{1}{2}x^2+5x+2\frac{1}{2})\,dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{x^2+3x+2}+K\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}.$$

Для определения неизвестных коэффициентов, продифференцируем последнее тождество:

$$\frac{3x^3+7\frac{1}{2}x+5x+2\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+3x+2}}=(2\alpha x+\beta)\sqrt{x^2+3x+2}+\frac{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)(2x+3)}{2\sqrt{x^2+3x+2}}+\frac{K}{\sqrt{x^2+3x+2}}.$$

Освободившись от дробей, найдем:

$$6x^3+15x^2+10x+5=(4\alpha x+2\beta)(x^2+3x+2)+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)(2x+3)+2K;$$

отсюда:

$$6x^3+15x^2+10x+5=6\alpha x^3+(15\alpha+4\beta)x^2+(8\alpha+9\beta+2\gamma)x+4\beta+3\gamma+2K.$$

Сравнение обеих частей последнего тождества дает:

$$6\alpha=6;\quad 15\alpha+4\beta=15;\quad 8\alpha+9\beta+2\gamma=10;\quad 4\beta+3\gamma+2K=5.$$

Решая систему уравнений, получим: $\alpha=1$; $\beta=0$; $\gamma=1$; $K=1$.

Итак:

$$\int\frac{(3x^3+7\frac{1}{2}x^2+5x+2\frac{1}{2})\,dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}=(x^2+1)\sqrt{x^2+3x+2}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}.$$

Интеграл в правой части равенства найти сумеем (см. стр.208); поэтому окончательно будем иметь:

$$\int\frac{(3x^3+7\tfrac{1}{2}x^2+5x+2\tfrac{1}{2})dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}=(x^2+1)\sqrt{x^2+3x+2}+\ln(2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2})+C.$$

2) $\displaystyle\int\frac{(6x^3-2x^2+3)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Взяв те же обозначения, как и в примере первом, найдем:

$$\int\frac{(6x^3-2x^2+3)dx}{\sqrt{1-x^2}}=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{1-x^2}+K\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Продифференцировав тождество, получим:

$$\frac{6x^3-2x^2+3}{\sqrt{1-x^2}}=(2\alpha x+\beta)\sqrt{1-x^2}-\frac{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{K}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Освобождаемся от дробей:

$$6x^3-2x^2+3=(2\alpha x+\beta)(1-x^2)-(\alpha x^2+\beta x+\gamma)x+K;$$

или:

$$6x^3-2x^2+3=-3\alpha x^3-2\beta x^2+(2\alpha-\gamma)x+\beta+K.$$

Сравнение обеих частей тождества дает:

$$-3\alpha=6;\quad -2\beta=-2;\quad 2\alpha-\gamma=0;\quad \beta+K=3;$$

отсюда: $\alpha=-2;\quad \beta=1;\quad \gamma=-4;\quad K=2.$

Итак:

$$\int\frac{6x^3-2x^2+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=(-2x^2+x-4)\sqrt{1-x^2}+2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

и окончательно:

$$\int\frac{6x^3-2x^2+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=(-2x^2+x-4)\sqrt{1-x^2}+2\arcsin x+C.$$

Тот же пример можно было решить и иначе: разбив заданный интеграл на три интеграла, из которых последний известен, остальные же легко найти, как указано на стр. 205 и 206 (см.форм. 6 и 7).

3) $\displaystyle\int\sqrt{-3x^2+2x+1}\;dx.$

Помножив и разделив под'интегральное выражение на $\sqrt{-3x^2+2x+1}$, переведем радикал в знаменатель:

$$\int\sqrt{-3x^2+2x+1}\,.dx=\int\frac{-3x^2+2x+1}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}dx.$$

Так как числитель под'интегральной функции полином второй степени, то функция $\psi(x)$ будет полиномом первой степени, поэтому:

$$\int\sqrt{-3x^2+2x+1}\,.dx=(\alpha x+\beta)\sqrt{-3x^2+2x+1}+K\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}.$$

После дифференцирования будем иметь:

$$\sqrt{-3x^2+2x+1}=\alpha\sqrt{-3x^2+2x+1}+\frac{(\alpha x+\beta)(-3x+1)}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}+\frac{K}{\sqrt{-3x^2+2x+1}};$$

отсюда:

$$-3x^2+2x+1=\alpha(-3x^2+2x+1)+(\alpha x+\beta)(-3x+1)+K;$$

или:

$$-3x^2+2x+1=-6\alpha x^2+3(\alpha-\beta)x+\alpha+\beta+K.$$

Сравнение обеих частей тождества дает:

$$\alpha=\frac{1}{2};\quad \alpha-\beta=\frac{2}{3};\ \alpha+\beta+K=1;$$

Решая систему уравнений, получим:

$$\alpha=\frac{1}{2};\quad \beta=-\frac{1}{6};\quad K=\frac{2}{3}.$$

Итак:

$$\int\sqrt{-3x^2+2x+1}\,.dx=\frac{3x-1}{6}\sqrt{-3x^2+2x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}.$$

Последний интеграл вычислен на стр.203, остается переписать результат:

$$\int\sqrt{-3x^2+2x+1}\,.dx=\frac{3x-1}{6}\sqrt{-3x^2+2x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arccos\frac{-3x+1}{2}+C.$$

Теперь легко найдутся подобного же типа интегралы, данные во втором выпуске первой части (см.стр.69).

Пользуясь указанным приемом, желающие сами могут вывести формулу:

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{4ac-b^2}{8a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \quad (8)$$

Таким образом, интегралы такого типа сводятся к основному.

Пункт 4-й.

а) Интеграл: $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

где n целое положительное число, сводится к рассмотренному раньше типу, так как, взяв подстановку $x-\alpha=\frac{1}{z}$, возможно первый множитель, преобразовав, отделить от радикала и перевести в числитель. Приведем для пояснения пример:

$$J=\int\frac{dx}{(x-2)^3\sqrt{-x^2+4x-3}}.$$

Взяв подстановку $x-2=\frac{1}{z}$, откуда $x=\frac{1}{z}+2$ и $dx=-\frac{dz}{z^2}$, найдем:

$$J=\int\frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z^3}\sqrt{-\left(\frac{1}{z}+2\right)^2+4\left(\frac{1}{z}+2\right)-3}}=-\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{z^2-1}}$$

Выделим алгебраическую часть из полученного интеграла:

$$\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{z^2-1}}=(\alpha_1 z+\beta)\sqrt{z^2-1}+K\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}.$$

Дифференцирование дает:

$$\frac{z^2}{\sqrt{z^2-1}}=\alpha_1\sqrt{z^2-1}+\frac{(\alpha_1 z+\beta)z}{\sqrt{z^2-1}}+\frac{K}{\sqrt{z^2-1}};$$

или:

$$z^2=2\alpha_1 z^2+\beta z-\alpha_1+K;$$

отсюда:

$$\alpha_1=\frac{1}{2};\qquad \beta=0;\qquad K=\frac{1}{2}.$$

Итак:

$$\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{z^2-1}}=\frac{1}{2}z\sqrt{z^2-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}};$$

или:

$$\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{z^2-1}}=\frac{1}{2}z\sqrt{z^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)+C.$$

Подставляя обратно $\frac{1}{x-2}$ вместо z, окончательно будем иметь:

$$\int\frac{dx}{(x-2)^3\sqrt{-x^2+4x-3}}=-\frac{\sqrt{-x^2+4x-3}}{2(x-2)^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{-x^2+4x-3}}{x-2}+C.$$

Если в знаменателе подынтегральной функции стоит x^n вместо $(x-\alpha)^n$, то для подстановки следует взять $x=\frac{1}{z}$.

в) Решим теперь два примера: первый, когда $n=1$, и второй, когда $n=1$ и $\alpha=0$.

1) $J=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+3}}$.

Полагая $x-1=\frac{1}{z}$, откуда $x=\frac{1}{z}+1$ и $dx=-\frac{dz}{z^2}$, после легких преобразований будем иметь:

$$J=-\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+2}}=-\ln\left(z+\sqrt{z^2+2}\right)+C.$$

Таким образом решение, вопроса сводится к основному интегралу. Подставляя обратно $\frac{1}{x-1}$ вместо z, окончательно найдем:

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+3}}=\ln\frac{x-1}{1+\sqrt{2x^2-4x+3}}+C.$$

2) $J=\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2+4x-1}}$.

Взяв подстановку $x=\frac{1}{z}$, откуда $dx=-\frac{dz}{z^2}$, заданный интеграл сведем к основному:

$$J=-\int\frac{dz}{\sqrt{-z^2+4z+2}}=\arcsin\frac{-z+2}{\sqrt{6}}+C$$

Полагая теперь $z=\frac{1}{x}$, окончательно получим:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2+4x-1}}=-\arcsin\frac{2x-1}{x\sqrt{6}}+C.$$

Пункт 5-й.

а)

1) При интегрировании иррациональной функции, переводя радикал в знаменатель, путем преобразования под'интегральной функции вопрос сводится к немногим типам интегралов; дадим желающим понятие о тех подстановках, при помощи которых, не производя указанного преобразования, можно сразу свести вопрос к интегрированию рациональной функции (последняя часто получается весьма сложною).

Возьмем первую подстановку Эйлера

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-x\sqrt{a},$$

причем предполагаем, что $a>0$.

Возвышая попрежнему (см. стр. 201) обе части равенства в квадрат, будем иметь:

$$bx+c=z^2-2xz\sqrt{a};$$

откуда:

$$x=\frac{z^2-c}{2z\sqrt{a}+b},$$

следовательно:

$$dx=\frac{2(z^2\sqrt{a}+bz+c\sqrt{a})\,dz}{(2z\sqrt{a}+b)^2};\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{z^2\sqrt{a}+bz+c\sqrt{a}}{2z\sqrt{a}+b}.$$

Таким образом, как $\sqrt{ax^2+bx+c}$, так и x и dx, выражаются рационально через z и под'интегральная функция преобразуется в рациональную. Желающие могут сами проделать пример (рациональная функция на этот раз получается не сложною):

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx.$$

2) Иногда с успехом можно воспользоваться тригонометрическими подстановками. Возьмем пример:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}.\,dx.$$

Подстановка $x=a\sin\varphi$, откуда $dx=a\cos\varphi\,d\varphi$, дает:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}.\,dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2\varphi}.\,a\cos\varphi\,d\varphi=a^2\int\cos^2\varphi\,d\varphi.$$

Последний интеграл вычисляется легко и уже встречался.

в) Прежде чем приступить к интегрированию, следует преобразовать под'интегральную функцию, чем часто упрощается вычисление интеграла. Приведем примеры:

1) $$J=\int\frac{(x^5-2x^3+2x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Преобразование под'интегральной функции дает:

$$J=\int\frac{(x^4-2x^2+2)x.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{[(x^2-1)^2+1]x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Возьмем подстановку:

$$\sqrt{1-x^2}=z;\quad 1-x^2=z^2;\quad x\,dx=-z\,dz;$$

тогда:

$$J=-\int\frac{(z^4+1)z\,dz}{z}=-\int(z^4+1)\,dz=-\frac{z^5}{5}-z+C;$$

$$J=-\frac{(1-x^2)^2}{5}\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^2}+C$$

$$J=-\frac{1}{5}(x^4-2x^2+6)\sqrt{1-x^2}+C.$$

2) $$J=\int\frac{(3x^2+1)\,dx}{(x^3+x)\sqrt{x^3+x-1}}.$$

Здесь достаточно взять просто подстановку:

$$\sqrt{x^3+x-1}=z;\quad x^3+x-1=z^2;\quad x^3+x=z^2+1;\quad (3x^2+1)\,dx=2z\,dz;$$

следовательно:

$$J=\int\frac{2z\,dz}{(z^2+1)z}=2\int\frac{dz}{z^2+1}=2\,\mathrm{arctg}\,z+C;$$

$$J=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^3+x-1}+C.$$

Пункт 6-й.

Интегрирование дифференциальных биномов.

В распоряжении читателя имеется теперь аппарат достаточный, чтобы проинтегрировать простейшие иррациональные функции; остается только познакомиться с интегрированием дифференциальных биномов.

Дифференциальным биномом называется выражение вида:

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

где $m;n;p$ могут быть какими-угодно вещественными числами. Укажем случаи, когда интегралы дифференциальных биномов выражаются через элементарные функции.

По теореме Чебышева интеграл:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

выражается через элементарные функции только в трех случаях:

1) p целое число.

Когда p целое положительное число, хотя бы m и n были дробными числами, то, применив формулу бинома Ньютона, вопрос сведем к интегрированию одночленов.

Ели же p целое отрицательное число, а m и n дроби, то возьмем подстановку: $x=z^q$, где q наименьшее кратное знаменателей этих дробей; тогда очевидно x^m; x^n; dx; выразятся рационально через z; выражение в скобках перейдет в знаменатель с положительным показателем, подинтегральною функцией будет рациональная дробь. Таким образом, этот случай не представляет интереса и останавливаться на нем не будем.

2) $\frac{m+1}{n}$ целое число, хотя p дробь (правильная или неправильная) вида $\pm\frac{r}{s}$, где r и s считаем числами положительными.

В этом случае для подстановки удобно взять $a+bx^n=z^s$.

Приведем примеры:

$$J=\int x^3(a+bx^2)^{-\frac{5}{2}} dx.$$

Здесь $m=3$; $n=2$; $p=-\frac{3}{2}$; $s=2$.

Так как $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2$ (целое число), то условие интегрируемости выполнено.

Возьмем подстановку $a+bx^n=z^s$:

$$a+bx^2=z^2; \quad x^2=\frac{z^2-a}{b}; \quad xdx=\frac{zdz}{b},-$$

тогда:

$$J=\int x^2(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}xdx=\int\frac{z^2-a}{b}\cdot z^{-3}\cdot\frac{zdz}{b}=\frac{1}{b^2}\int\frac{z^2-a}{z^2}dz;$$

$$J=\frac{1}{b^2}\int dz-\frac{a}{b^2}\int\frac{dz}{z^2}=\frac{z}{b^2}+\frac{a}{b^2z}+C=\frac{z^2+a}{b^2z}+C.$$

Окончательно получим:

$$\int x^3(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{2a+bx^2}{b^2\sqrt{a+bx^2}}+C.$$

Для второго примера найдем интеграл:

$$\int\sqrt[3]{x}.\sqrt{1+\sqrt[6]{x}}.dx=\int x^{\frac{1}{3}}(1+x^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{2}}dx;$$

$$m=\frac{1}{3}; \quad n=\frac{1}{6}; \quad p=\frac{1}{2}; \quad \frac{m+1}{n}=\frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{6}}=8.$$

Полагая $1+x^{\frac{1}{6}}=z^2$, будем иметь:

$$x^{\frac{1}{6}}=z^2-1; \quad x^{\frac{1}{3}}=(z^2-1)^2; \quad x=(z^2-1)^6; \quad dx=12(z^2-1)^5zdz.$$

Следовательно:

$$\int\sqrt[3]{x}.\sqrt{1+\sqrt[6]{x}}.dx=12\int z^2(z^2-1)^7dz.$$

Последний интеграл найти уже сумеем.

3) $\underline{\frac{m+1}{n}+p}$ <u>целое число;</u> p же попрежнему дробь (правильная или неправильная) вида $\pm\frac{r}{s}$, где r и s попрежнему считаем положительными числами.

Для подстановки следует взять: $a+bx^n=z^sx^n$.

Возьмем пример, который легко решается при помощи ранее указанных методов; это даст возможность сравнения удобства методов.

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Второе условие интегрируемости не выполнено:

$$\frac{m+1}{n}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2} \text{ (дробь);}$$

третье условие выполняется:

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{2+1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1 \text{ (целое число).}$$

Возьмем подстановку $a+bx^n=z^3x^n$:

$$1-x^2=z^2x^2; \quad -2xdx=2z^2xdx+2x^2zdz;$$

отсюда:

$$-dx=z^2dx+xzdz; \quad (z^2+1)dx=-xzdz; \quad dx=-\frac{xzdz}{z^2+1}.$$

Следовательно:

$$\int x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=-\int x^2\cdot z^{-1}\cdot x^{-1}\frac{xzdz}{z^2+1}=-\int\frac{x^2dz}{z^2+1}.$$

Зная, что $1-x^2=z^2x^2$, найдем: $x^2=\frac{1}{z^2+1}$, поэтому:

$$\int x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=-\int\frac{x^2dz}{z^2+1}=-\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

При интегрировании рациональных дробей мы уже имели (см.стр. 186):

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C;$$

воспользовавшись этим результатом, получим:

$$\int x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=-\frac{z}{2(z^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C, -$$

и окончательно:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$$

§ 53. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ.

I. Интегралы вида:

$$\int f(x)e^{ax}\,dx; \quad \int f(x)\sin ax\,dx; \quad \int f(x)\cos ax\,dx,$$

где a - постоянная, а $f(x)$ есть целая рациональная функция, нам уже встречались (а именно - в § 25); здесь нужно только систематизировать приобретенные там предварительные навыки.

Правило для нахождения этих интегралов заключается в том, что мы интегрируем их по частям, пользуясь формулой:

$$\int u.\,dv = u.v - \int v.\,du,$$

причем за u во всех трех случаях принимаем целую функцию, а трансцендентную относим к dv; благодаря этому, степень целой функции понижается, и применив этот прием конечное число раз, мы дойдем до табличных интегралов. Так, например, для I-го интеграла полагаем:

$$u = f(x); \qquad du = f'(x)\,dx;$$

$$dv = e^{ax}dx; \qquad v = \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\cdot e^{ax},$$

и формула интегрирования по частям дает:

$$\int f(x)e^{ax}dx = \frac{1}{a}f(x)\,e^{ax} - \frac{1}{a}\int f'(x)e^{ax}dx.$$

Таким образом, мы получили интеграл того же вида, но степень целой функции стала на I ниже; продолжая применять тот же прием, мы в конце концов дойдем до табличного интеграла:

$$\int e^{ax}.\,dx.$$

Пример I. Найти $\int e^{-3x}(3x^2 - x + 4)\,dx.$

Здесь имеем:

$$u = 3x^2 - x + 4; \qquad du = (6x - 1)\,dx;$$

$$dv = e^{-3x}dx; \qquad v = -\frac{1}{3}e^{-3x}.$$

$$\int e^{-3x}(3x^2-x+4)dx = -\frac{1}{3}(3x^2-x+4)\cdot e^{-3x} + \frac{1}{3}\int(6x-1)e^{-3x}dx.$$

Далее интегрируем по частям полученный только что интеграл:

$$\int(6x-1)e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}(6x-1)e^{-3x} + \frac{1}{3}\int 6\cdot e^{-3x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}(6x-1)e^{-3x} - \frac{2}{3}e^{-3x} + C.$$

Подставляя находим:

$$\int e^{-3x}(3x^2-x+4)dx = e^{-3x}\left\{-\frac{1}{3}(3x^2-x+4) - \frac{1}{9}(6x-1) - \frac{2}{9}\right\} + C.$$

$$\int e^{-3x}(3x^2-x+4)dx = -e^{-3x}\left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{13}{9}\right) + C.$$

Замечание. Всматриваясь в это решение, мы замечаем, что оно имеет тот же вид, что и подинтегральная функция: та же самая показательная функция умножается на целую функцию той же степени, но, конечно, с другими коэффициентами. Это - не случайное явление; самый процесс нахождения интеграла показывает, что так будет всегда. Действительно, множитель e^{ax} войдет во все члены, и вынеся его за скобки, в скобках получим многочлен той же степени, что и данный. На этом основании здесь можно применять способ неопределенных коэффициентов. Поясним его на разобранном примере. Согласно изложенному выше, полагаем:

$$\int e^{-3x}(3x^2-x+4)dx = e^{-3x}(Ax^2+Bx+D) + C,$$

где коэффициенты A, B, D пока еще неизвестны. Для определения их, берем от обеих частей последнего равенства производные:

$$e^{-3x}(3x^2-x+4)=-3e^{-3x}(Ax^2+Bx+D)+e^{-3x}(2Ax+B);$$

по сокращении на e^{-3x}, имеем:

$$3x^2-x+4=-3(Ax^2+Bx+D)+2Ax+B;$$

остается сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x, начиная с x^2:

$3=-3A$, откуда: $A=-1$;

$-1=-3B+2A$, откуда: $3B=2A+1=-1$, $B=-\frac{1}{3}$.

$4=-3D+B$, откуда: $3D=B-4=-\frac{13}{3}$, $D=-\frac{13}{9}$.

Итак, находим то же самое решение:

$$\int e^{-3x}(3x^2-x+4)\,dx=-e^{-3x}\cdot\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{13}{9}\right)+C.$$

Интегралы двух других типов находятся по тому же правилу; поясним это примерами.

Пример 2. $\int x^2\sin\frac{x}{2}\,dx.$

Полагаем:

$u=x^2$; $du=2x\,dx$;

$dv=\sin\frac{x}{2}\,dx$; $v=\int\sin\frac{x}{2}\,dx=-2\cos\frac{x}{2}$.

$$\int x^2\sin\frac{x}{2}\,dx=-2x^2\cos\frac{x}{2}+4\int x\cos\frac{x}{2}\,dx;$$

последний интеграл тоже интегрируем по частям:

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos\frac{x}{2}\,dx}_{dv}=2x\sin\frac{x}{2}-2\int\sin\frac{x}{2}\,dx=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C.$$

Подставляя находим данный интеграл:

$$\int x^2\sin\frac{x}{2}\,dx=-2x^2\cos\frac{x}{2}+8x\sin\frac{x}{2}+16\cos\frac{x}{2}+C.$$

Пример 3. $\int(2x+5)\cos 2x\,dx.$

Интегрируем по частям:

$$\int\underbrace{(2x+5)}_{u}\underbrace{\cos 2x\,dx}_{dv}=\frac{1}{2}(2x+5)\sin 2x-\int\sin 2x\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}(2x+5)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

Примеры для упражнения.

I) Найти интегралы:

$$\int e^{-5x}\cdot(x^2+3x+2)\,dx;\qquad \int x^3 e^{-x}\,dx;$$
$$\int (1-x)a^x\,dx;\qquad \int (x^2-x)\cos 3x\,dx;$$
$$\int (4x^2-2x+5)\sin\frac{x}{3}\,dx;\qquad \int e^{-x^2}x^3\,dx;$$
$$\int (x\sin x+3\cos x)\,dx.$$

(правильность решения легко проверить дифференцированием).

2) Вывести следующие формулы

$$\int x^m\cos x\,dx = x^m\sin x - m\int x^{m-1}\cdot\sin x\,dx.$$

$$\int e^{\alpha x} f(x)\,dx = e^{\alpha x}\left\{\frac{f(x)}{\alpha}-\frac{f'(x)}{\alpha^2}+\frac{f''(x)}{\alpha^3}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{f^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}}\right\}+C.$$

Замечание. В предыдущих примерах мы везде, при интегрировании по частям, полагали:

$$u=f(x);$$

если же требуется найти интеграл от произведения целой функции на логарифмическую или круговую, то за u надо брать трансцендентную функцию. Пусть, например, требуется найти интеграл:

$$\int x^2\cdot\lg(1-x)\,dx;$$

здесь мы полагаем:

$$u=\lg(1-x);\qquad du=-\frac{dx}{1-x};$$
$$dv=x^2\,dx;\qquad v=\frac{x^3}{3};$$

и таким образом получаем:

$$\int x^2\lg(1-x)\,dx=\frac{1}{3}x^3\lg(1-x)+\frac{1}{3}\int\frac{x^3\,dx}{1-x}.$$

В результате интегрирования по частям мы пришли к интегралу от рациональной дроби; читателю предлагается решить задачу до конца. Точно также находим:

$$\int (x+1) \cdot \operatorname{arctg} x\, dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right) \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+2x}{1+x^2}\, dx,$$

и снова приходим к более простому интегралу. В случае $\arcsin x$, получим интеграл, содержащий $\sqrt{1-x^2}$, а такие интегралы были рассмотрены выше.

2. Интегралы вида:

$$\int \cos mx \cdot \cos nx\, dx; \quad \int \sin mx \cdot \sin nx\, dx;$$

и

$$\int \sin mx \cdot \cos nx\, dx,$$

где m и n - постоянные числа.

Эти интегралы понадобятся нам впоследствии при рассмотрении тригонометрических рядов (рядов Фурье).

Указанные интегралы находятся тем способом, что, путем тригонометрических преобразований, произведение тригонометрических функций заменяется их суммой. Именно, берем известные формулы:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

складывая и вычитая их находим новые формулы:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right\}$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right\}.$$

Пользуясь этими формулами, находим первые 2 интеграла:

$$\int \cos mx \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{1}{2}\, \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + C.$$

$$\int \sin mx . \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + C.$$

Для нахождения 3-го интеграла, берем формулы:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta$$

и складывая их получаем:

$$\sin\alpha . \cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\};$$

тогда можем написать:

$$\int \sin mx . \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin(m-n)x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos(m-n)x}{m-n} + C.$$

3. Рассмотрим теперь интегралы вида:

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx,$$

где f есть знак рациональной функции. Такие интегралы всегда берутся в конечном виде, так как путем подстановки:

$$tg\,\frac{x}{2} = z$$

они сводятся к интегралам от рациональной функции.

Подстановка эта основана на том, что $\sin x$ и $\cos x$, как сейчас увидим, выражаются рационально через $tg\,\frac{x}{2}$.

Действительно:

$$1 + tg^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}},$$

откуда:

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+z^2};$$

с другой стороны известно, что:

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1;$$

подставляя сюда найденное выше выражение для $\cos^2\frac{x}{2}$, получим:

$$\cos x = \frac{2}{1+z^2} - 1 = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Переходим к $\sin x$:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2tg\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2},$$

откуда:

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}.$$

Наконец, из того, что

$tg\frac{x}{2} = z$ имеем $x = 2arctg z$,

и следовательно:

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Теперь данный интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int f(\sin x, \cos x)dx = \int f\left\{\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right\}\cdot\frac{2dz}{1+z^2};$$

а этот последний интеграл можно переписать так:

$$\int \Phi(z)\,dz,$$

где $\Phi(z)$ обозначает рациональную функцию от z. Итак, наше утверждение доказано.

Пример I. $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Делаем указанную подстановку:

$$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int\frac{2dz}{(1+z^2)\cdot\left\{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}\right\}} =$$

$$= \int\frac{2dz}{1+z^2+2z+1-z^2} = \int\frac{2dz}{2+2z} =$$

$$= \int\frac{dz}{1+z} = lg(1+z)+C = lg\left(1+tg\frac{x}{2}\right)+C.$$

Пример 2. $\int\frac{dx}{3+2\cos x}$.

В этом случае имеем:

$$\int\frac{dx}{3+2\cos x}=\int\frac{2\,dz}{(1+z^2)\cdot\left\{3+2\frac{1-z^2}{1+z^2}\right\}}=$$

$$=\int\frac{2\,dz}{3+3z^2+2-2z^2}=2\int\frac{dz}{5+z^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{5}}+C=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

В некоторых случаях можно применять более простую подстановку. Именно, если под'интегральная функция обладает тем свойством, что не меняет своего значения при замене $\sin x$ на $-\sin x$, $\cos x$ на $-\cos x$, то можно положить:

$$\operatorname{tg}x=t$$

(условимся называть в этом случае под'интегральную функцию „четной" функцией от $\sin x$ и $\cos x$).

Проверим это утверждение на примерах.

Пример 3. $\int\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}$.

Здесь очевидно под интегралом стоит четная функция от $\sin x$ и $\cos x$; поэтому полагаем:

$$\operatorname{tg}x=t,$$

откуда: $\sin x=t.\cos x$; $\quad dx=\cos^2x.\,dt$

$$\int\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}=\int\frac{\cos^2x.\,dt}{\cos^2x.(a^2+b^2t^2)}=$$

$$=\int\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{1}{ab}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{bt}{a}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{ab}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)+C.$$

Пример 4. $\int\frac{dx}{a+b\operatorname{tg}x}$.

Так как $\operatorname{tg}x$ не меняется при изменении знака $\sin x$ и $\cos x$, то можем положить:

$$\operatorname{tg}x=t,$$

откуда:

$$x = \operatorname{arctg} t \qquad \text{и} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{(a+bt)(1+t^2)}$$

Разлагаем под'интегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(a+bt)(1+t^2)} = \frac{A}{a+bt} + \frac{Pt+Q}{1+t^2}$$

$$1 = A(1+t^2) + (Pt+Q)(a+bt);$$

полагая $t = -\frac{a}{b}$, найдем:

$$1 = A\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right), \quad \text{откуда:} \quad A = \frac{b^2}{a^2+b^2};$$

сравнивая коэффициенты при t^2 получим:

$$A + bP = 0$$

$$P = -\frac{b}{a^2+b^2};$$

наконец сравнение свободных членов дает:

$$1 = A + Qa,$$

откуда:

$$Q = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Таким образом, приходим к разложению:

$$\frac{1}{(a+bt)(1+t^2)} = \frac{1}{a^2+b^2}\left\{\frac{b^2}{a+bt} - \frac{bt-a}{1+t^2}\right\}.$$

$$\int \frac{dt}{(a+bt)(1+t^2)} = \frac{1}{a^2+b^2}\Big\{b\cdot\lg(a+bt) -$$

$$-\frac{1}{2} b \lg(1+t^2) + a \operatorname{arctg} t\Big\} + C.$$

Возвращаясь к первоначальной переменной, имеем:

$$\int\frac{dx}{a+b\,tg\,x}=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\left\{b.\,lg(a+b\,tg\,x)-\right.$$

$$\left.-\frac{b}{2}\,lg\,sec^2x+a\cdot arctg(tg\,x)\right\}+C=$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\left\{b.\,lg(a+b\,tg\,x)+b.\,lg\cos x+ax\right\}+C=$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\left\{ax+b.\,lg(a\cos+b\sin x)\right\}+C.$$

Примеры для упражнения.

1) $\int\frac{dx}{1-\cos x}$ Отв. $-cotg\,\frac{x}{2}+C.$

2) $\int\frac{dx}{2+3\cos x}$ Отв. $\frac{1}{\sqrt{5}}\,lg\left\{\frac{tg\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}-\sqrt{5}}\right\}+C.$

3) $\int\frac{dx}{(1+\cos x)\sin x}$ Отв. $\frac{1}{2}\,lg\,tg\,\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\,tg^2\frac{x}{2}+C.$

4) $\int\frac{dx}{2\sin x+3\cos x+4}$ Отв. $\frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\left\{\frac{2+tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right\}+C.$

5) $\int\frac{\sin^2x}{\cos^6x}\,dx$ Отв. $tg^3x\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\,tg^2x\right\}+C.$

6) $\int\frac{dx}{1+\cos^2x}$ Отв. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,arctg\left(\frac{tg\,x}{\sqrt{2}}\right)+C.$

7) $\int\frac{dx}{(\sin x+a\cos x)^2}$ Отв. $-\frac{1}{tg\,x+a}+C.$

8) $\int\frac{1+tg^2x}{1-tg^2x}\,dx$ Отв. $\frac{1}{2}\,lg\left\{\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}\right\}+C.$

9) $\int\frac{\sin x.\cos x\,dx}{a\cos^2x+b\sin^2x}$ Отв. $\frac{1}{2(b-a)}\cdot log\,(a\cos^2x+b\sin^2x)+C.$

4. Интегралы вида:

$$\int\sin^m x.\cos^n x\,dx,$$

где m и n - целые числа (положительные, отрицательные или нули).

Легко видеть, что рассматриваемый интеграл является частным случаем предыдущего; но его удобнее находить другими приемами. Рассмотрим различные случаи нашего интеграла.

а) Одна из тригонометрических функций входит в положительной нечетной степени (какова другая степень,- безразлично); тогда делаем подстановку, принимая другую функцию за новую переменную.

Пример I. $\int \sin^4 x . \cos^5 x . dx.$

Переписываем данный интеграл следующим образом:

$$\int \sin^4 x . (1-\sin^2 x)^2 . \cos x . dx$$

и полагаем:

$$\sin x = z; \qquad \cos x . dx = dz;$$

тогда получаем:

$$\int \sin^4 x . \cos^5 x . dx = \int z^4 (1-z^2)^2 dz =$$

$$= \int \left\{ z^4 - 2z^6 + z^8 \right\} dz = \frac{z^5}{5} - \frac{2}{7} z^7 + \frac{z^9}{9} + C =$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

Пример 2. $\int \sin^3 x . dx.$

Здесь полагаем:

$$\cos x = z; \qquad \sin x . dx = -dz$$

$$\int \sin^3 x = \int (1-\cos^2 x) \sin x . dx = -\int (1-z^2) dz =$$

$$= -z + \frac{z^3}{3} + C = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

Пример 3 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} dx.$

$$\sin x = z; \qquad \cos x . dx = dz$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x) \cos x . dx}{\sin^7 x} = \int \frac{1-z^2}{z^7} dz =$$

$$= \int \frac{dz}{z^7} - \int \frac{dz}{z^5} = -\frac{1}{6z^6} + \frac{1}{4z^4} + C =$$

$$= -\frac{1}{6\sin^6 x} + \frac{1}{4\sin^4 x} + C.$$

б) Оба показателя - положительные и четные числа.

Здесь проще всего будет применить способ введения кратных углов, который позволяет постепенно понижать степени тригонометрических функций. Основанием служат следующие формулы, известные из тригонометрии:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

иногда приходится также пользоваться формулой:

$$\sin\alpha . \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha .$$

Поясним на примерах применение этого способа.

<u>Пример 4.</u> $\int \sin^4 x . dx.$

Воспользовавшись приведенной выше формулой для $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$, пишем:

$$\int \sin^4 x . dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left\{\int dx - 2\int \cos 2x . dx + \int \cos^2 2x . dx\right\} =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x) dx =$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

<u>Пример 5</u> $\int \sin^2 x . \cos^2 x \, dx.$

Так как

$$\sin x . \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

то:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x . dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x . dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

<u>Пример 6.</u> $\int \sin^2 x . \cos^4 x \, dx.$

Применяя те же формулы получаем:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int (\sin x.\cos x)^2.\cos^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)(1+\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left\{\int dx + \int \cos 2x\,dx - \int \cos 4x\,dx - \int \cos 2x \cos 4x\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{16}\left\{x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x - \int \cos 2x \cos 4x\,dx\right\};$$

для нахождения последнего интеграла, поступаем по указанию пункта 2:

$$\int \cos 2x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int \left\{\cos 2x + \cos 6x\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

Подставляя окончательно находим:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\left\{x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x\right\} + C.$$

в) Показатели m и n равны по абсолютной величине, но обратны по знаку; легко видеть, что в этом случае имеем:

$$\int tg^n x\,dx \quad \text{или} \quad \int cotg^n x\,dx.$$

Для этих интегралов получаются без труда формулы приведения, если вспомнить следующие тригонометрические соотношения:

$$tg^2 x = sec^2 x - 1$$

$$cotg^2 x = cosec^2 x - 1.$$

Действительно, для I-го интеграла имеем:

$$\int tg^n x\,dx = \int tg^{n-2} x.tg^2 x\,dx = \int tg^{n-2} x(sec^2 x - 1)\,dx =$$

$$= \int tg^{n-2} x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int tg^{n-2} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{n-1}\cdot tg^{n-1} x - \int tg^{n-2} x\,dx.$$

Таким образом, данный интеграл сводится к интегралу того же вида, но - с показателем степени на 2 единицы ниже; поступая с этим интегралом по предыдущему, мы дойдем в конце концов до одного из следующих интегралов:

$$\int dx = x + C.$$
$$\int tg\,x\,dx = -\lg\cos x + C.$$

Подобным же образом находится интеграл с $cotg\,x$.

<u>Пример 7.</u> $\int cotg^3 x\,dx.$

$$\int cotg^3 x\,dx = \int cotg\,x . cotg^2 x\,dx =$$
$$= \int cotg\,x.(cosec^2 x - 1)\,dx =$$
$$= \int cotg\,x \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\frac{1}{2}cotg^2 x - \lg\sin x + C.$$

г) Интегралы с отрицательными показателями m и n весьма часто приводятся к таким:

$$\int \frac{dx}{\sin x\,\cos x}; \qquad \int \frac{dx}{\sin x}; \qquad \int \frac{dx}{\cos x};$$

найдем их.

Для первого, согласно сказанному в п.2, полагаем:

$$tg\,x = z; \qquad dx = \cos^2 x\,dz; \quad \sin x = z.\cos x.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x . \cos x} = \int \frac{\cos^2 x . dz}{z . \cos^2 x} = \int \frac{dz}{z} = \log z + C.$$

Следовательно:

$$\int \frac{dx}{\sin x . \cos x} = \lg tg\,x + C. \qquad (1)$$

Второй сводится к первому:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2} . \cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2} . \cos\frac{x}{2}},$$

откуда по формуле (I) имеем:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \lg tg\,\frac{x}{2} + C. \qquad (2)$$

Наконец 3-й сводится ко 2-му:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)},$$

откуда по формуле (2) получаем:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\lg tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C. \qquad (3)$$

g) В случае показателей разных знаков, хорошие результаты дает интегрирование по частям. Если же имеются только отрицательные показатели, то начинаем с введения в числитель тригонометрической единицы. Поясним сказанное на примерах.

П р и м е р 8. $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$.

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin x}+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx;$$

второй интеграл интегрируем по частям, полагая:

$$u=\cos x; \qquad du=-\sin x\,dx;$$

$$dv=\frac{\cos x.dx}{\sin^3 x}; \qquad v=\int\frac{d\sin x}{\sin^3 x}=-\frac{1}{2\sin^2 x}.$$

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}.$$

Подставляя находим:

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lg tg\frac{x}{2}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C.$$

П р и м е р 9. $\int\frac{dx}{\cos x.\sin^3 x}$.

$$\int\frac{dx}{\cos x.\sin^3 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x.\sin^3 x}\,dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos x.\sin x}+\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}=$$

$$= \lg \operatorname{tg} x - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

Пример 10. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx.$

Интегрируем по частям, полагая:

$$u = \cos^3 x; \qquad du = -3\cos^2 x \sin x\,dx;$$

$$dv = \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}; \qquad v = -\frac{1}{2\sin^2 x}.$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx;$$

вычисляем последний интеграл:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} -$$

$$-\int \sin x\,dx = \lg \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \cos x + C;$$

подставляя окончательно, находим:

$$\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\cos x - \frac{3}{2}\lg \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Замечание. Иногда в интегралах такого вида бывает полезно, согласно п.3, сделать одну из подстановок:

$$\operatorname{tg} x = z \quad \text{или} \quad \operatorname{cotg} x = z.$$

Пример II.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

Пример I2.

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^4 x \cdot \frac{dx}{\sin^2 x};$$

полагая здесь

$$\operatorname{cotg} x = z,$$

имеем:

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -dz.$$

$$\operatorname{cosec}^4 x = (1+z^2)^2.$$

$$\int\frac{dx}{\sin^6 x}=-\int(1+2z^2+z^4)\,dz=$$

$$=-\left\{z+\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5\right\}+C=$$

$$=-\left\{\operatorname{cotg}x+\frac{2}{3}\operatorname{cotg}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5x\right\}+C.$$

Примеры для упражнения.

1) $\int\frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}\,dx.$ Отв. $-\frac{1}{\sin x}-2\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$

2) $\int\cos^3 x.dx.$ Отв. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$

3) $\int\cos^3 x.\sin^4 x.dx.$ Отв. $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$

4) $\int\frac{\sin 2x}{\cos^7 x}\,dx.$ Отв. $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\cos^5 x}+C.$

5) $\int\cos^4 x.dx.$ Отв. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

6) $\int\sin^2 x.\cos^4 x.dx.$ Отв. $\frac{1}{16}x-\frac{1}{32}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$

7) $\int\frac{dx}{\cos^2 x.\sin x}.$ Отв. $\lg\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{\cos x}+C.$

(указание: $\operatorname{cotg}x=z$)

8) $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}\,dx.$ Отв. $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3x-\frac{2}{5}\operatorname{cotg}^5x-\frac{1}{7}\operatorname{cotg}^7x+C.$

9) $\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx.$ Отв. $\frac{\sin^3 x}{\cos x}+\frac{3}{4}\sin 2x-\frac{3}{2}x+C.$

10) $\int\frac{dx}{\cos^4 x.\sin x}.$ Отв. $\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+\lg\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

11) $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx.$ Отв. $\cos x+\frac{1}{\cos x}+C.$

12) Вывести формулу приведения:

$$\int\sin^m x\,dx=-\frac{1}{m}\sin^{m-1}x.\cos x+\frac{m-1}{m}\int\sin^{m-2}x.dx.$$

(Указание: интегрировать по частям, положив $u=\sin^{m-1}x$, а в полученном интеграле заменить $\cos^2 x$ на $(1-\sin^2 x)$, и разбить его на 2 интеграла).

13) Вывести формулу приведения:

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} .$$

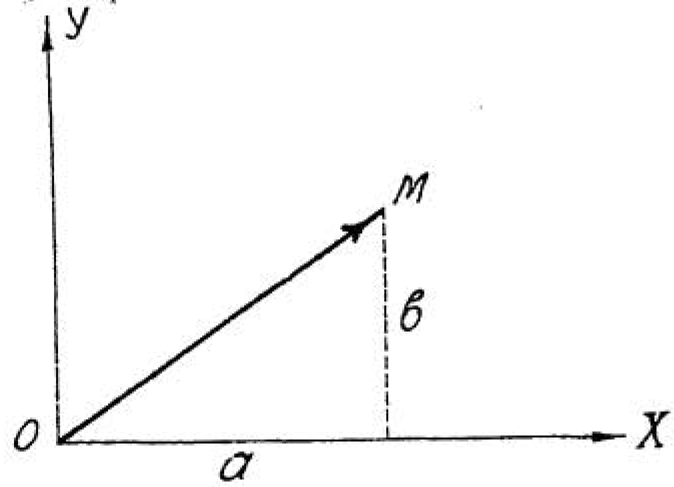
14) Вывести формулу приведения:

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin^{m-1} x}{\cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^{n-2} x} dx.$$

Приложение.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

В основной части курса дается геометрическое истолкование комплексного числа $z=a+bi$ в виде точки $M(a,b)$ плоско- (черт.153).



Черт. 153.

Отсюда легко перейти к другому геометрическому истолкованию комплексных чисел, более важному для приложений.

Проведя из начала координат O вектор $\overrightarrow{OM}$, можно считать изображением комплексного числа $z=a+bi$ именно этот вектор $\overrightarrow{OM}$, т.е. вектор, начало которого помещается в точке $O(0,0)$, а конец в точке $M(a,b)$. Проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на координатные оси, очевидно, равны соответственно числам a и b.

Изображение комплексных чисел в виде векторов с общим началом в точке $O(0,0)$ позволяет очень легко дать геометрическое истолкование основным действиям с комплексными числами.

Рассмотрим четыре основные действия.

Сложение. $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$.

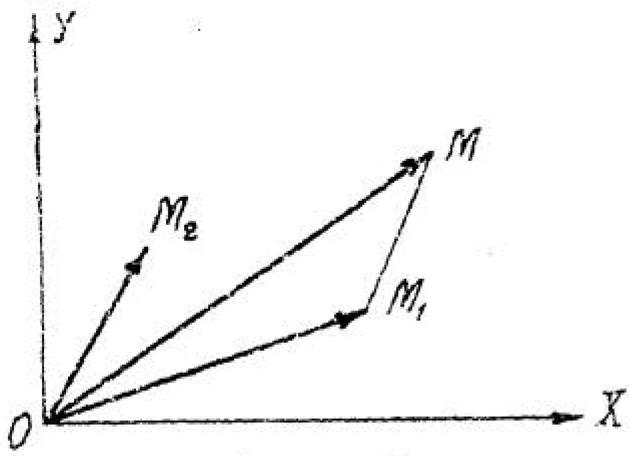
Складывая, найдем $z=z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$.

Докажем (черт.154), что если число z_1 изображается вектором $\overrightarrow{OM_1}$, а число z_2 - вектором $\overrightarrow{OM_2}$, то $z=z_1+z_2$ будет изображаться вектором $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, т.е. геометрической суммой первых двух векторов.

Складывая геометрически вектора $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$, находим

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}.$$

Проектируя геометрическую сумму на координатные оси, по теореме о проекции геометрической суммы на ось, получим:



Черт. 154.

$$np_{ox}\overrightarrow{OM} = np_{ox}\overrightarrow{OM_1} + np_{ox}\overrightarrow{OM_2},$$

$$np_{oy}\overrightarrow{OM} = np_{oy}\overrightarrow{OM_1} + np_{oy}\overrightarrow{OM_2}$$

или

$$np_{ox}\overrightarrow{OM} = a_1 + a_2$$

$$np_{oy}\overrightarrow{OM} = b_1 + b_2.$$

Так как проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на координатные оси соответственно равны числам $(a_1 + a_2)$ и $(b_1 + b_2)$, то этот вектор есть геометрическое изображение комплексного числа

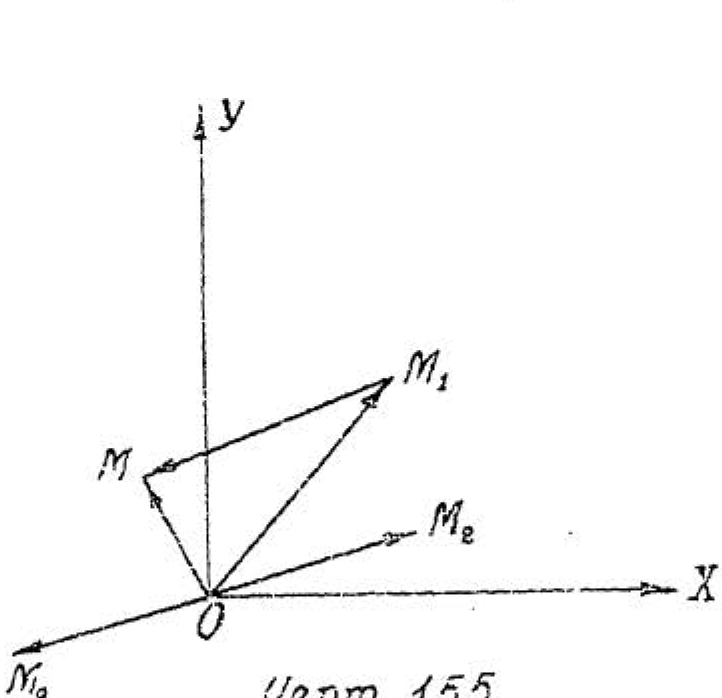
$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = z_1 + z_2.$$

Значит, сложению комплексных чисел соответствует геометрическое сложение изображающих их векторов.

Вычитание. $z_1 = a_1 + b_1 i$, $\quad z_2 = a_2 + b_2 i$.

Вычитая, находим $z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Докажем (черт. 155), что если число z_1 изображается вектором $\overrightarrow{OM_1}$, а число z_2 – вектором $\overrightarrow{OM_2}$, то $z = z_1 - z_2$ будет изображаться вектором $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$, т.е. геометрической разностью векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$.



Черт. 155.

Чтобы из одного вектора геометрически вычесть другой вектор, нужно к первому вектору прибавить вектор, геометрически противоположный второму вектору.

Поэтому

$$\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OM},$$

или

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}.$$

Проектируя геометрическую разность на координатные оси и применяя теорему о проекции геометрической разности на ось, получим:

$$пр_{ox}\overrightarrow{OM} = пр_{ox}\overrightarrow{OM_1} - пр_{ox}\overrightarrow{OM_2}$$
$$пр_{oy}\overrightarrow{OM} = пр_{oy}\overrightarrow{OM_1} - пр_{oy}\overrightarrow{OM_2}$$

или

$$пр_{ox}\overrightarrow{OM} = a_1 - a_2$$
$$пр_{oy}\overrightarrow{OM} = b_1 - b_2 .$$

Так как проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на координатные оси соответственно равны числам $(a_1 - a_2)$ и $(b_1 - b_2)$, то этот вектор есть геометрическое изображение комплексного числа

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i = Z_1 - Z_2 .$$

Значит, вычитанию комплексных чисел соответствует геометрическое вычитание изображающих их векторов.

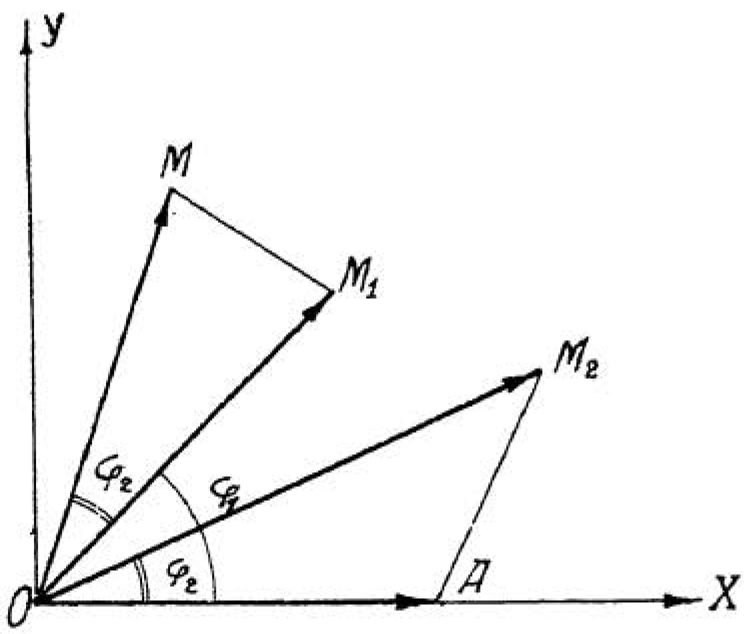
Умножение. Для геометрического истолкования умножения и деления комплексных чисел удобнее пользоваться тригонометрической формой комплексного числа $Z = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; при этом геометрическим изображением числа z считается вектор, имеющий начало в точке $(0, 0)$, длина которого равна z и который составляет с положительным направлением оси OX угол φ.

Возьмем $Z_1 = z_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $Z_2 = z_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Как известно, $Z = Z_1 . Z_2 = z_1 . z_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$, т.е. модуль произведения равен произведению модулей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей.

Отсюда непосредственно вытекает способ геометрического истолкования умножения комплексных чисел. Пусть (черт. 156) число Z_1 изображается вектором $\overrightarrow{OM_1}$ (его длина $= z_1$ и он составляет с положительным направлением оси OX угол φ_1), число Z_2 изображается вектором $\overrightarrow{OM_2}$ (его длина $= z_2$ и он составляет с положительным направлением оси OX угол φ_2);

пусть, кроме того, вектор $\overrightarrow{OA}$ изображает вещественную единицу (его длина $=1$ и он отложен в положительном направлении оси OX). Соединив прямой точки A и M_2, строим на векторе $\overrightarrow{OM_1}$ треугольник OM_1M подобный треугольнику OAM_2, притом так, чтобы углы $\angle M_1OM=\varphi_2$ и $\angle XOM_1=\varphi_1$ лежали по разные стороны вектора $\overrightarrow{OM_1}$.



Черт. 156.

Из подобия треугольников OM_1M и OAM_2 находим

$$\frac{OM}{OM_1}=\frac{OM_2}{OA}, \text{откуда } OM=\frac{OM_1\cdot OM_2}{OA}=\frac{r_1\cdot r_2}{1}=r_1\cdot r_2.$$

Итак, длина вектора $\overrightarrow{OM}=r_1\cdot r_2$, причем он составляет с положительным направлением оси OX угол $\angle XOM=\varphi_1+\varphi_2$.

Следовательно, этот вектор является геометрическим изображением комплексного числа, модуль которого $=r_1\cdot r_2$, а аргумент $=\varphi_1+\varphi_2$, т.е. геометрическим изображением произведения $Z_1.Z_2$.

Выясним еще геометрический смысл множителя $(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. При умножении какого-нибудь комплексного числа на этот множитель, модуль множимого остается без изменения, а его аргумент увеличивается на угол φ. Следовательно, при умножении на двучлен $(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ вектор, изображающий множимое, сохраняя свою длину, поворачивается против часовой стрелки на угол φ. Отсюда вытекает, что при умножении на мнимую единицу $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ происходит поворот против часовой стрелки на 90°, при умножении на $(-1)=\cos\pi+i\sin\pi$ происходит поворот против часовой стрелки на 180° и т.д.

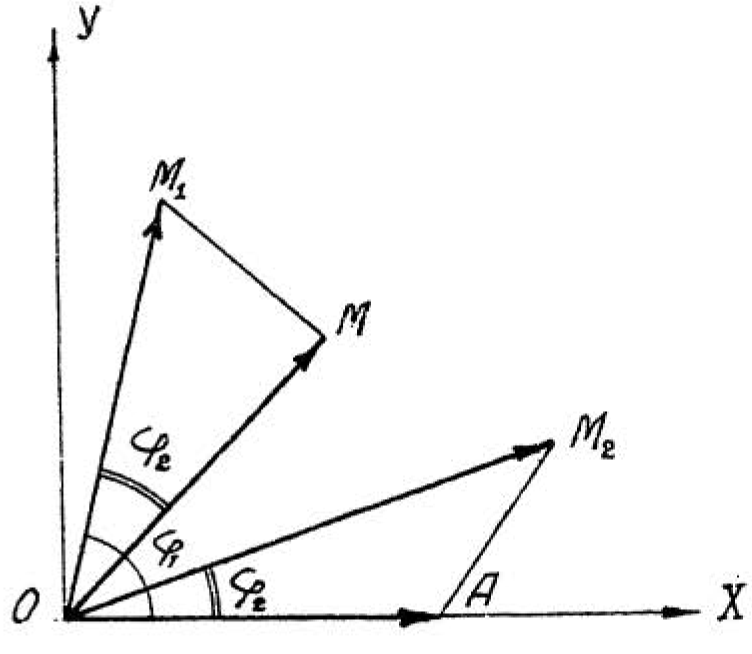
<u>Деление.</u> Возьмем $Z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $Z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

Как известно, $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$,

т.е. модуль частного равен частному модулей, а аргумент - разности аргументов делимого и делителя.

Переходим к геометрическому истолкованию.

Пусть (черт. 157) изображение числа z_1 есть вектор $\overrightarrow{OM_1}$, а изображение числа z_2 есть вектор $\overrightarrow{OM_2}$; пусть, кроме того, вектор $\overrightarrow{OA}$ есть изображение вещественной единицы.



Черт. 157.

Соединив прямой точки A и M_2, строим на векторе $\overrightarrow{OM_1}$ треугольник OMM_1 подобный треугольнику OAM_2, притом так, чтобы углы $\angle MOM_1=\varphi_2$ и $\angle XOM_1=\varphi_1$ лежали по одну сторону вектора $\overrightarrow{OM_1}$.

Из подобия треугольников OMM_1 и OAM_2 находим

$$\frac{OM_1}{OM}=\frac{OM_2}{OA}, \quad \text{откуда} \quad OM=\frac{OM_1\cdot OA}{OM_2}=\frac{z_1\cdot 1}{z_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Итак, длина вектора $\overrightarrow{OM}=\frac{z_1}{z_2}$, причем он составляет с положительным направлением оси OX угол $\angle XOM=\varphi_1-\varphi_2$.

Следовательно, вектор $\overrightarrow{OM}$ действительно является изображением частного $\frac{Z_1}{Z_2}$.

Теперь нетрудно заключить, что деление какого-нибудь комплексного числа на двучлен $(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ выражается в повороте вектора, изображающего делимое, по часовой стрелке на угол φ.

СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ВЕКТОРНЫЕ ДИАГРАММЫ.

Переменная величина, даваемая формулой $y=A.\sin(\omega t+\varphi)$, называется синусоидальною величиной; в этой формуле независимая переменная t – время, а постоянные параметры A, ω и φ - амплитуда, частота и начальная фаза синусоидальной величины, причем частота ω связана с периодом T соотношением $\omega T=2\pi$.

Синусоидальные величины встречаются в теории переменного тока: сила тока и напряжение чаще всего следуют (по крайней мере приближенно) синусоидальному закону.

В теории переменного тока принято изображать синусоидальные величины с помощью так называемых векторных диаграмм. Пусть имеем две синусоидальные величины <u>одинаковой частоты</u>

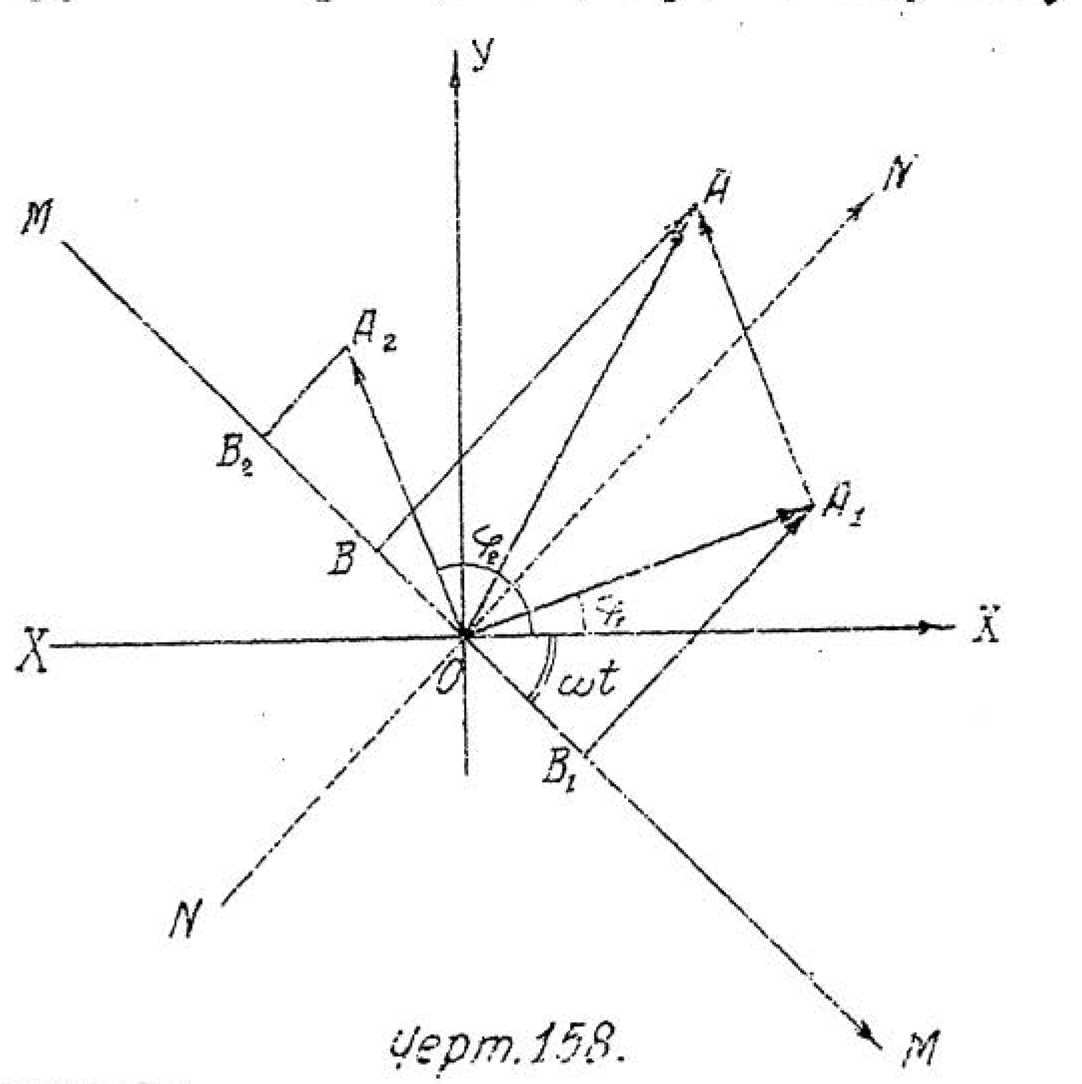
$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \qquad \text{и} \qquad y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Для построения векторной диаграммы поступаем следующим образом.

Через точку O плоскости проводим луч, который будем вращать с угловой скоростью ω <u>по часовой стрелке</u>; этот луч носит название оси времени (черт. 158).

Пусть начальное положение оси времени (в момент $t=0$) совпадает с осью OX.

Построим вектор $\overrightarrow{OA_1}$ длиною A_1, образующий с начальным положением оси времени угол φ_1. В момент t вектор $\overrightarrow{OA_1}$ образует с осью времени MM угол $= \omega t + \varphi_1$ (за промежуток времени t ось времени повернется по часовой стрелке на угол ωt, т.е. из положения XX перейдет в положение MM). Спроектируем вектор $\overrightarrow{OA_1}$ на направление, получаемое путем поворота на 90° против часовой стрелки положения оси времени в момент t, т.е. на направление NN. Проекция вектора $\overrightarrow{OA_1}$ на направление NN, или, проще говоря, взятая с надлежащим знаком длина перпендикуляра, опущенного из конца вектора $\overrightarrow{OA_1}$ на направление MM, и дает ве-



Черт. 158.

личину y_1, т.е. $B_1A_1 = y_1$.

Вектор $\overrightarrow{OA_1}$ называется вектором синусоидальной величины y_1.

Выполнив аналогичное построение для второй синусоидальной величины, найдем $B_2A_2 = y_2$.

Вектор $\overrightarrow{OA_2}$ называется вектором синусоидальной величины y_2.

Таким образом с помощью векторов на плоскости с общим началом в точке $(0,0)$ мы можем изображать синусоидальные величины одинаковой частоты: длина вектора дает амплитуду соответствующей синусоидальной величины, а угол между вектором и положительным направлением оси OX дает начальную фазу этой величины (сама же синусоидальная величина дается проекцией соответствующего вектора на направление, получаемое путем поворота на 90° против часовой стрелки соответствующего положения оси времени).

Построенный чертеж называется векторной диаграммой синусоидальных величин y_1 и y_2.

Векторная диаграмма облегчает сложение синусоидальных величин одинаковой частоты.

Выполняя геометрическое сложение векторов $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$, найдем $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA}$.

Проектируя геометрическую сумму $\overrightarrow{OA}$ на направление NN и применяя известную теорему о проекции геометрической суммы, находим

$$y_1 + y_2 = BA.$$

Метод векторных диаграмм становится особенно удобным при введении комплексных чисел.

Как выяснено выше, существует два способа геометрического истолкования комплексных чисел: при одном устанавливается соответствие между комплексными числами и точками плоскости, при другом устанавливается соответствие между комплексными числами и векторами на плоскости с началом в точке $(0,0)$.

При втором способе истолкования комплексное число $a+bi$ изображается вектором, проекции которого на оси OX и OY.

соответственно суть a и b. При этом сложение комплексных чисел можно заменять геометрическим сложением изображающих их векторов, и, наоборот, геометрическое сложение векторов можно заменять сложением соответствующих им комплексных чисел. Этим мы и воспользуемся.

Вектор $\overrightarrow{OA_1}$ изображается комплексным числом

$$A_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=A_1\cos\varphi_1+iA_1\sin\varphi_1.$$

Вектор $\overrightarrow{OA_2}$ изображается комплексным числом

$$A_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=A_2\cos\varphi_2+iA_2\sin\varphi_2.$$

Следовательно, вектор $\overrightarrow{OA}$, геометрическая сумма векторов $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$, будет изображаться суммой двух предыдущих комплексных чисел, т.е. комплексным числом

$$(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2)+i(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2),$$

причем

$$A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2=np_{ox}\overrightarrow{OA},\quad A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2=np_{oy}\overrightarrow{OA}.$$

Проектируя вектор $\overrightarrow{OA}$ на направление NN и применяя теорему о проекции геометрической суммы, получим:

$$BA=(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega t\right)+(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2)\cos\omega t$$

или

$$y_1+y_2=(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2)\sin\omega t+(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2)\cos\omega t.$$

Таким образом, применение к векторной диаграмме комплексных чисел позволяет без всякого труда переходить от графического выражения суммы синусоидальных величин к ее аналитическому выражению.

Замечание. В заключение рассмотрим еще вопрос о производной и интеграле синусоидальной величины

$$y=A\sin(\omega t+\varphi).$$

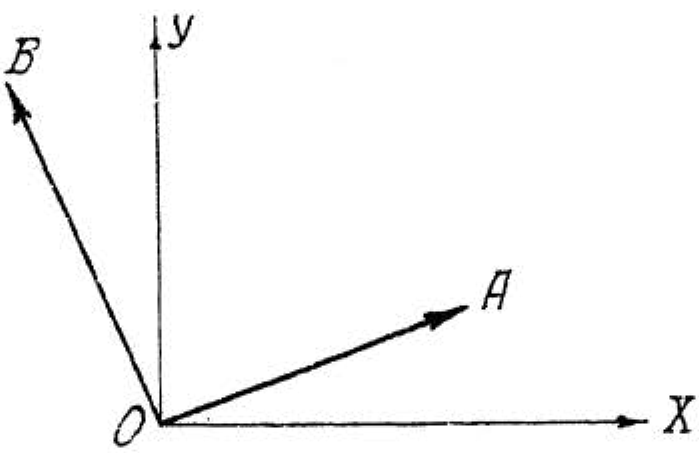
Дифференцируя, получим:

$$\frac{dy}{dt}=A\omega,\cos(\omega t+\varphi)$$

или

$$\frac{dy}{dt}=A\omega.\sin(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}),$$

т.е. производная синусоидальной величины y есть синусоидальная величина той же частоты, но отличается от y тем, что амплитуда умножается на частоту ω, а начальная фаза увеличивается на $\frac{\pi}{2}$. Геометрически это значит, что вектор $\overrightarrow{OB}$ (черт. 159) синусоидальной величины $\frac{dy}{dt}$ по своей длине равен длине вектора $\overrightarrow{OA}$ синусоидальной величины y, умноженной на частоту ω, и повернут против часовой стрелки на $\frac{\pi}{2}$ относительно вектора $\overrightarrow{OA}$.



Черт. 159.

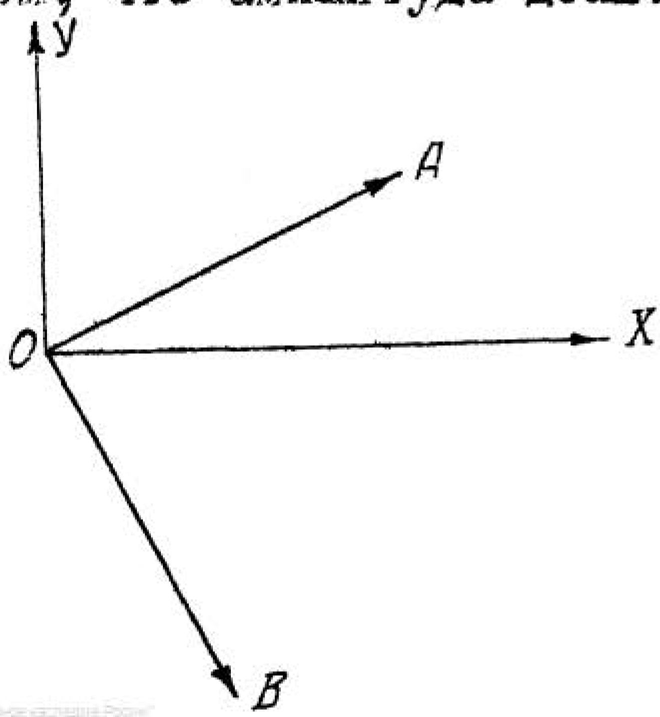
Интегрируя формулу $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ и отбрасывая произвольную постоянную (что необходимо сделать, если желаем получить синусоидальную величину той же частоты), получим

$$\int y\,dt=\int A\sin(\omega t+\varphi)\,dt=-\frac{A}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)=$$

$$=-\frac{A}{\omega}\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\omega t+\varphi)\right]=\frac{A}{\omega}\sin\left[\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right], \text{ т.е.}$$

$$\int y\,dt=\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}).$$

Следовательно, интеграл синусоидальной величины y есть синусоидальная величина той же частоты, но отличается от y тем, что амплитуда делится на частоту ω, а начальная фаза уменьшается на $\frac{\pi}{2}$.



Геометрически это значит, что вектор $\overrightarrow{OB}$ (черт. 160) синусоидальной величины $\int y\,dt$ по своей длине равен длине вектора $\overrightarrow{OA}$ синусоидальной величины y, разделенной на частоту ω, и повернут по часовой стрелке на $\frac{\pi}{2}$ относительно вектора $\overrightarrow{OA}$.

УРАВНЕНИЯ ПЛОСКИХ ЛИНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ.

При изучении некоторых явлений в цепи переменного тока, электротехника пользуется уравнениями линий в комплексной форме. Уравнения линий в комплексной форме получаются при геометрическом истолковании комплексных чисел, как точек плоскости.

Как известно, геометрическим изображением комплексного числа $z=x+iy$ считается точка z на плоскости с координатами x и y.

Если мы будем считать вещественные числа x и y переменными, то давая им значения

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots \quad \text{и} \quad y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots$$

мы получим на плоскости ряд точек:

$$\begin{array}{lccc} z_1=x_1+iy_1 & \text{с координатами} & x_1 & \text{и } y_1 \\ z_2=x_2+iy_2 & ,, & x_2 & \text{и } y_2 \\ z_3=x_3+iy_3 & ,, & x_3 & \text{и } y_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Из сказанного вытекает, что при изменении вещественных переменных x и y, точка $z=x+iy$ будет перемещаться на плоскости, занимая на ней различные положения.

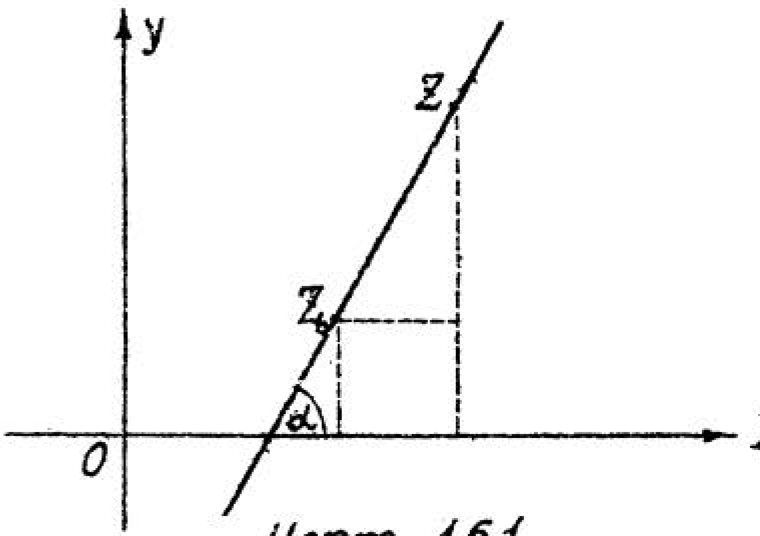
Если мы будем рассматривать переменные x и y как непрерывные функции некоторого переменного параметра u :

$$x=\varphi(u), \quad y=\psi(u),$$

то точка $z=\varphi(u)+i\psi(u)$, при непрерывном изменении параметра u, опишет на плоскости некоторую линию, вид которой определяется функциями φ и ψ. Уравнение $z=\varphi(u)+i\psi(u)$ и называется уравнением этой линии в комплексной форме.

Посмотрим на примерах, как составляется уравнение той или другой линии в комплексной форме, причем будем брать те линии, которые особенно часто встречаются в приложениях.

<u>П р и м е р I.</u> Составить в комплексной форме уравнение прямой, проходящей через неподвижную точку $z_0=x_0+iy_0$, и составляющей с положительным направлением оси OX угол α. (черт.161).



Черт. 161.

Возьмем на прямой переменную точку $z=x+iy$.

В качестве переменного параметра u выберем длину вектора $\overrightarrow{Z_0Z}$.

Проектируя вектор $\overrightarrow{Z_0Z}$ на оси координат, получим:

$x-x_0=u\cos\alpha$, откуда $x=x_0+u\cos\alpha$;
$y-y_0=u\sin\alpha$, откуда $y=y_0+u\sin\alpha$.

Подставляя найденные значения x и y в формулу $z=x+iy$, находим

$$z=x_0+u\cos\alpha+i(y_0+u\sin\alpha)$$

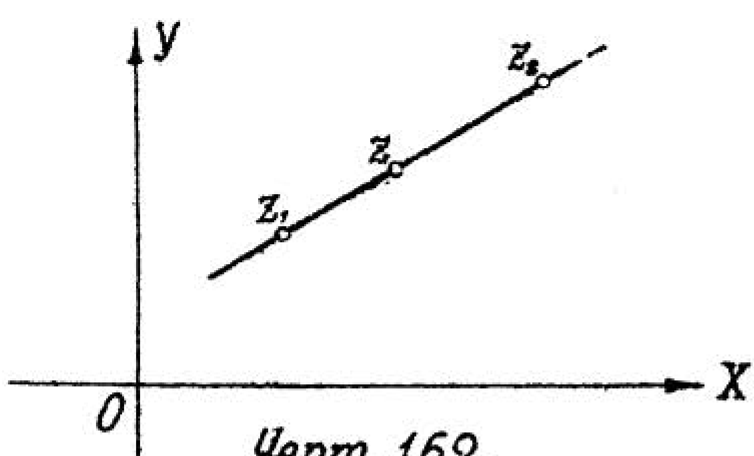
или

$$z=x_0+iy_0+u(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

или

$$\underline{z=z_0+ue^{\alpha i}}$$

П р и м е р 2. Составить в комплексной форме уравнение прямой, проходящей через две неподвижные точки $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ (черт. 162).



Черт. 162.

Возьмем на прямой переменную точку $z=x+iy$.

Применяя известное из Аналитической Геометрии условие расположения трех точек на одной прямой, находим $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

В качестве переменного параметра u выбираем общую величину предыдущих равных отношений, т.е. полагаем

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=u,$$

откуда

$$x=x_1+u(x_2-x_1)$$
$$y=y_1+u(y_2-y_1).$$

Подставляя найденные значения x и y в формулу $z=x+iy$, находим

$$z=x_1+u(x_2-x_1)+iy_1+iu(y_2-y_1)$$

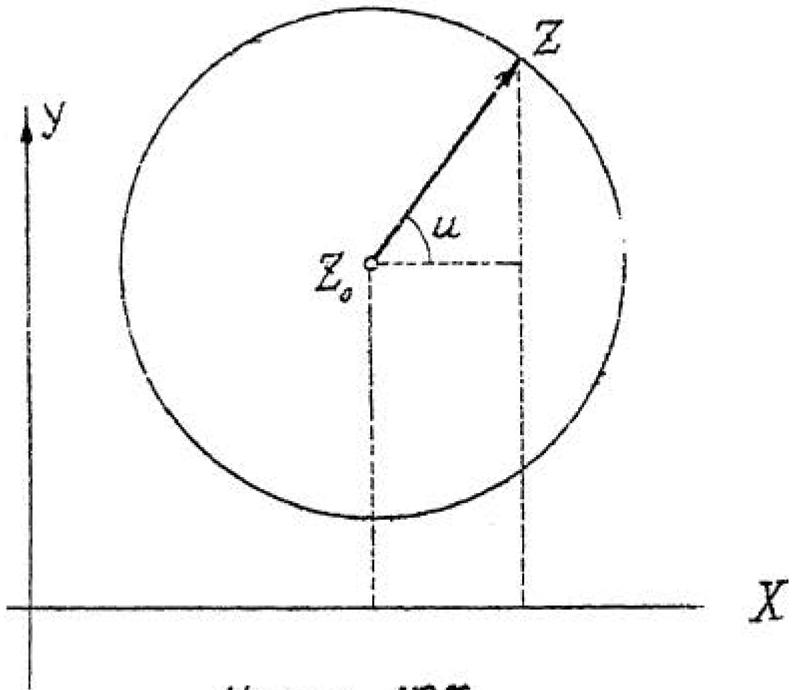
или

$$z=x_1+iy_1+u(x_2+iy_2)-u(x_1+iy_1)$$

или

$$\underline{z=z_1+u(z_2-z_1).}$$

<u>Пример 3.</u> Составить в комплексной форме уравнение окружности с центром в точке $z_0=x_0+iy_0$ и радиусом a (черт. 163)



Черт. 163.

Возьмем на окружности переменную точку $z=x+iy$.

В качестве переменного параметра выбираем угол u.

Проектируя вектор $\overrightarrow{Z_0Z}$ на оси координат, находим:

$$x-x_0=a\cos u, \quad \text{откуда} \quad x=x_0+a\cos u;$$

$$y-y_0=a\sin u, \quad \text{откуда} \quad y=y_0+a\sin u.$$

Подставляя найденные значения x и y в формулу $z=x+iy$, получаем

$$z=x_0+a\cos u+iy_0+ia\sin u$$

или

$$z=x_0+iy_0+a(\cos u+i\sin u)$$

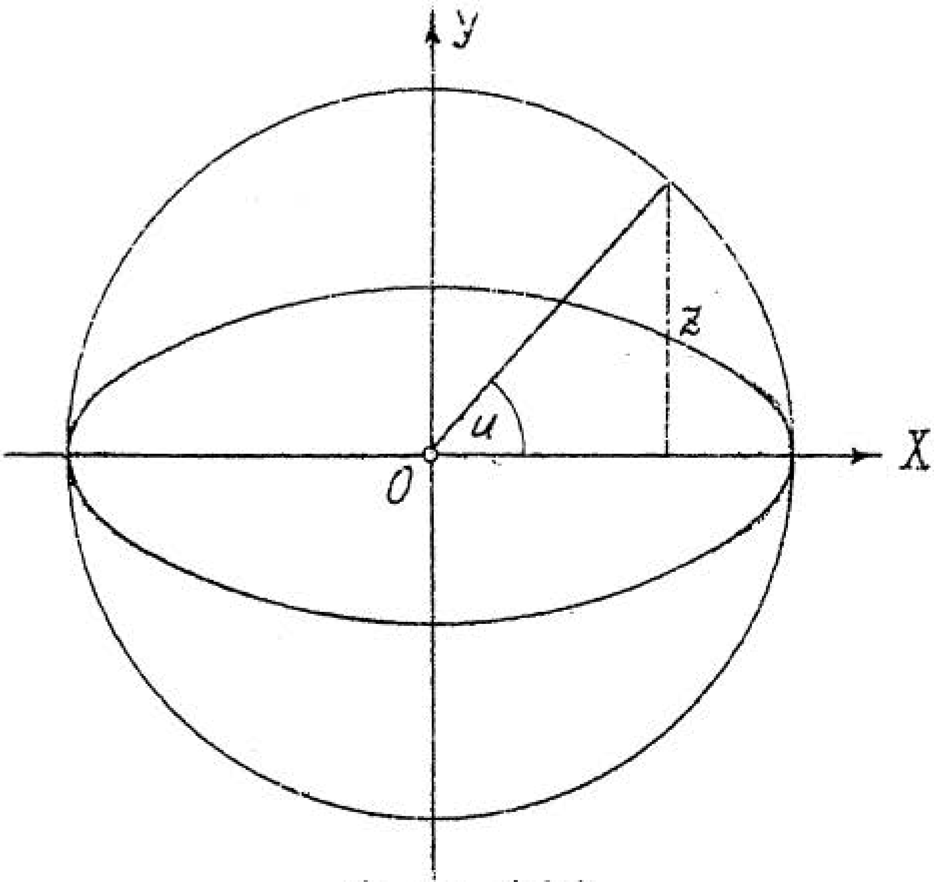
или

$$\underline{z=z_0+ae^{ui}.}$$

<u>Частный случай.</u> Для окружности с центром в точке $z_0=0$ (начало координат) получим:

$$\underline{z=ae^{ui}.}$$

П р и м е р 4. Составить в комплексной форме уравнение эллипса с центром в начале координат и полуосями a и b. (черт.164).



Черт.164.

Возьмем на эллипсе переменную точку $z=x+iy$.

В качестве переменного параметра выбираем угол u.

Из Аналитической Геометрии известно:

$$x=a\cos u$$
$$y=b\sin u.$$

Подставляя значения x и y в формулу $z=x+iy$, находим

$$z=a\cos u+ib\sin u.$$

Применяя формулы Эйлера, получим

$$z=a\frac{e^{ui}+e^{-ui}}{2}+ib\frac{e^{ui}-e^{-ui}}{2i}$$

или

$$z=\frac{a+b}{2}e^{ui}+\frac{a-b}{2}e^{-ui}$$

П р и м е р 5. Во всех предыдущих примерах мы пользовались параметрическим представлением линии в прямоугольных координатах, но иногда бывает удобнее пользоваться параметрическим представлением линии в полярных координатах. В этих случаях переменная z берется в показательной форме $z=re^{\varphi i}$, где $r=f(u)$ и $\varphi=\psi(u)$, т.е. модуль и аргумент выражаются в функции параметра u.

В качестве примера составим в комплексной форме уравнение логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$ (как известно, при $m=0$ получается уравнение окружности $r=a$).

Возьмем на спирали неподвижную точку (φ_0, r_0), где $r_0=ae^{m\varphi_0}$; и переменную точку (φ, r), где $r=ae^{m\varphi}$ (черт.165).

В качестве переменного параметра u принимаем

$$u=\varphi-\varphi_0.$$

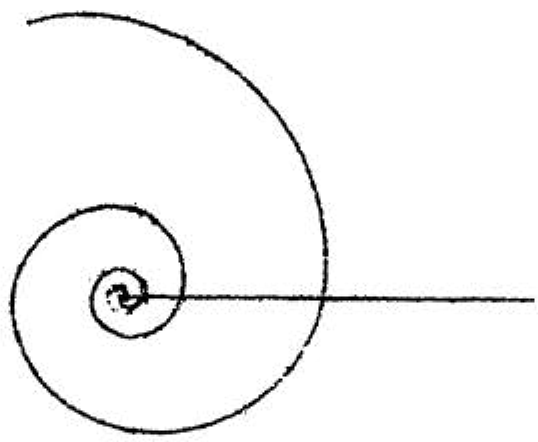
Разделив $r=ae^{m\varphi}$ на $r_0=ae^{m\varphi_0}$, получаем

$$\frac{r}{r_0}=e^{m(\varphi-\varphi_0)}=e^{mu}, \text{откуда} \quad r=r_0 e^{mu}$$

или

$$r=ae^{m\varphi_0}\cdot e^{mu}.$$

Кроме того, $\varphi=u+\varphi_0$.



Черт. 165.

Подставляя найденные в функции параметра u значения r и φ в формулу $z=re^{\varphi i}$, получаем

$$z=ae^{m\varphi_0}\cdot e^{mu}\cdot e^{(u+\varphi_0)i}$$

или

$$z=ae^{(m+i)\varphi_0}\cdot e^{(m+i)u}. \quad (*)$$

Обозначая, ради сокращения письма, комплексное число $m+i$ через α и комплексное число $ae^{\alpha\varphi_0}$ через β, мы можем уравнению логарифмической спирали в комплексной форме придать такой вид

$$\underline{z=\beta e^{\alpha u},}$$ где α и β две комплексные постоянные.

Частный случай. Полагая в уравнении $(*)$ $m=0$, получим

$$z=ae^{\varphi_0 i}\cdot e^{ui}=ae^{(\varphi_0+u)i}.$$

Так как у нас $u=\varphi-\varphi_0$, то

$$z=ae^{\varphi i}.$$

Иначе говоря, при $m=0$ получается уравнение окружности (см. пример 3).

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ.

Как известно, затухающее гармоническое колебание выражается формулой $x=Ae^{-\varepsilon t}\cdot\sin(\omega t+\varphi)$.

Для его представления в комплексной форме вводим в рассмотрение такую комплексную величину

$$z=\beta e^{\alpha u},$$ где α и β две комплексные

постоянные.

Полагаем

$$\begin{cases} \beta = Ae^{(\varphi-\frac{\pi}{2})i} \\ \alpha=(\omega+\varepsilon i)i=-\varepsilon+\omega i \\ u=t \ . \end{cases}$$

Тогда

$$z=Ae^{(\varphi-\frac{\pi}{2})i}\cdot e^{(\omega i-\varepsilon)t}$$

или

$$z=Ae^{-\varepsilon t}\cdot e^{(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})i}.$$

Переходим от показательной формы к тригонометрической

$$z=Ae^{-\varepsilon t}\left\{\cos\left[\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right]+i\sin\left[\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right]\right\}=$$

$$=Ae^{-\varepsilon t}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\omega t+\varphi)\right]-i\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\omega t+\varphi)\right]\right\},$$

откуда

$$z=Ae^{-\varepsilon t}\left\{\sin(\omega t+\varphi)-i\cos(\omega t+\varphi)\right\}=$$

$$=Ae^{-\varepsilon t}\sin(\omega t+\varphi)-iAe^{-\varepsilon t}\cos(\omega t+\varphi).$$

Легко заметить, что вещественная часть введенной нами комплексной величины z совпадает с затухающим гармоническим колебанием $x=Ae^{-\varepsilon t}\sin(\omega t+\varphi)$; отсюда вытекает, что мы имеем право любое затухающее гармоническое колебание $x=Ae^{-\varepsilon t}\sin(\omega t+\varphi)$ представлять в виде вещественной части такой комплексной величины $z=Ae^{-\varepsilon t}\cdot e^{(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})i}$.

С геометрической точки зрения получается следующее: когда точка $z=Ae^{-\varepsilon t}\cdot e^{(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})i}$ описывает с изменением t логарифмическую спираль (см. пример 5), то ее проекция на ось OX (вспомним, что вещественная часть комплексного числа есть проекция его аффикса на ось OX) совершает затухающее гармоническое колебание по закону $x=Ae^{-\varepsilon t}\cdot\sin(\omega t+\varphi)$.

Положим теперь $\varepsilon=0$.

В этом случае $z=Ae^{(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})i}$, $x=A.\sin(\omega t+\varphi)$.

С геометрической точки зрения получится следующее: точка $z=Ae^{(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})i}$ с изменением t будет описывать окружность радиуса A, а ее проекция на ось OX будет совершать чистое гармоническое колебание по закону $x=A\sin(\omega t+\varphi)$ (т.е. без затухания).

Содержание.

Стр.

....