

Л. А. ВУЛИС

**ТЕРМОДИНАМИКА  
ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ**



ГОСЭНЕРГОИЗДАТ

Л. А. ВУЛИС

# ТЕРМОДИНАМИКА ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

Книга посвящена термодинамической теории одномерных стационарных газовых течений. Основные свойства таких течений рассматриваются в общем виде — применительно к произвольному уравнению состояния движущейся жидкости и подробно для идеального газа. Рассмотрено изолированное и совместное влияние различных внешних воздействий (изменения сечения канала, трения, подвода и отвода массы газа, механической энергии и тепла) на скорость движения, давление, температуру и т. д. Большое внимание уделено условиям перехода через критическую скорость. Наряду с непрерывными течениями рассматриваются также течения разрывные (скачки).

Книга предназначена для научных и инженерно-технических работников, аспирантов и студентов старших курсов энергетических, авиационных и механических институтов.

Редактор А. М. Литвин

Техн. редактор С. Н. Бабочкин

Сдано в набор 30/IX 1949 г.

Подписано к печати 20/IV 1950 г.

Бумага  $60 \times 92 \frac{1}{16}$ , бум. л.  $9 \frac{1}{2} = 19$  п. л., уч.-изд. л. 20,7,

T-02958

тип. зн. в п. л. 43 570. Тираж 2 500 экз.

Заказ 2838

Типография Госэнергоиздата, Москва, Шлюзовая наб., 10.

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Движение газового потока, сопровождающееся разнообразными преобразованиями энергии, является составной частью рабочего процесса для большого числа современных аппаратов. Во многих случаях (например, в теории тепловых двигателей) термодинамика газовых потоков играет важнейшую роль не только в изучении процесса, но и в определении наиболее эффективных способов его построения. Значение термодинамики потока особенно возросло в связи с присущей технике наших дней тенденцией к всемерному повышению интенсивности рабочих процессов, т. е. к переходу на большие скорости движения, высокие тепловые напряжения и т. п. Именно этим объясняется непрерывный рост исследований, посвященных различным проблемам газовых течений. С полным удовлетворением следует отметить ведущую роль отечественной науки, опередившей зарубежную науку не только в решении отдельных задач, но и в развитии проблемы в целом. В этой связи заслуживают особого внимания выдающиеся работы большого числа советских ученых, в первую очередь, учеников и последователей знаменитых русских ученых — создателей современной аэродинамики — проф. Николая Егоровича Жуковского и академика Сергея Алексеевича Чаплыгина и основанных ими больших научных коллективов. Среди этих работ, посвященных различным вопросам газовой динамики, содержатся также исследования по теории одномерных стационарных течений. Последние, по самому существу своему, могут быть отнесены с равным правом как к газовой динамике, так и к термодинамике потока, поскольку для последней характерно исключение времени из числа независимых переменных и использование гидравлической (одномерной) модели движения.

Настоящая книга представляет собой попытку построения цельной термодинамической теории таких течений как в общем виде — для газа с произвольным уравнением состояния, так и подробно — для ряда приложений, применительно к идеальному газу. Наряду с непрерывными течениями рассматриваются также простейшие случаи разрывных течений (адиабатические и тепловые скачки), изучение которых вполне под-

дается термодинамическому анализу. При решении конкретных задач представлялось целесообразным дополнить обычные для термодинамики методы исследования расчетными приемами и характеристиками, заимствованными из газовой динамики. Помимо непосредственной пользы, связанной со значительным упрощением многих результатов и возможностью более наглядной физической интерпретации их, использование расчетного аппарата газовой динамики целесообразно и в качестве подготовки к изучению последней. С этой же целью книга дополнена отдельной главой, посвященной применению уравнения количества движения к потоку жидкости. Размеры книги не позволили включить в нее изложение экспериментальных данных или сопоставление их с теоретическим расчетом, а также рассмотреть отдельные существенные вопросы термодинамики потока (например, теорию инжекции, течение в газовых машинах и др.), не связанные близко с основным направлением книги—выяснением особенностей течения при переходе через критическую скорость. В целом книга посвящена общим вопросам термодинамического исследования рабочего процесса и не является руководством к конкретным техническим расчетам или конструированию. Помещенные в ней численные примеры имеют иллюстративное значение.

Большое внимание в книге уделено противопоставлению свойств дозвукового и сверхзвукового потока и условиям перехода через скорость звука («закон обращения воздействий» и т. п.). Изложение этих разделов построено на основе работ автора (опубликованных в 1946—1948 гг. в ряде статей в Докладах Академии наук СССР и других изданиях).

Значительная часть численных расчетов и графиков, приведенных в тексте, выполнена инж. В. М. Жилиным при подготовке литографированного издания монографии «Стационарные одномерные течения» в МАИ им. С. Орджоникидзе. Сравнительно с последней, законченной в начале 1947 г., настоящая книга переработана и дополнена рядом разделов.

Книга предполагает наличие у читателей знакомства с технической термодинамикой, гидравликой и элементами газовой динамики в объеме нормального курса высших технических учебных заведений.

С искренней благодарностью автор отмечает внимание к его работе и ряд ценных замечаний со стороны рецензента засл. деятеля науки и техники проф. А. В. Квасникова.

*Автор*

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |   |
|---|---|
| Предисловие . . . . .                   | 3 |
| Перечень основных обозначений . . . . . | 7 |

### *Часть первая*

#### ОБЩИЕ СВОЙСТВА ГАЗОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

|   |    |
|---|----|
| Глава 1,1. Введение . . . . .   | 9  |
| 1,1. Термодинамический метод исследования . . . . .                     | 9  |
| 1,2. Постановка задачи . . . . .  | 12 |
| 1,3. Основные уравнения термодинамики потока . . . . .                  | 17 |
| Глава 1,2. Закон обращения воздействий . . . . .                        | 20 |
| 1,4. Основное уравнение для скорости движения . . . . .                 | 20 |
| 1,5. Система уравнений закона обращения воздействий . . . . .           | 26 |
| 1,6. Изменение скорости движения и параметров состояния . . . . .       | 30 |
| 1,7. О влиянии физических свойств газа . . . . .                        | 34 |
| Глава 1,3. Изолированные воздействия . . . . .                          | 40 |
| 1,8. Изменение площади поперечного сечения канала . . . . .             | 40 |
| 1,9. Изменение секундного расхода газа . . . . .                        | 43 |
| 1,10. Подвод или отвод механической энергии . . . . .                   | 49 |
| 1,11. Подвод или отвод теплоты . . . . .                                | 52 |
| 1,12. Движение при наличии трения . . . . .                             | 55 |
| Глава 1,4 Общие соотношения . . . . .                                   | 58 |
| 1,13. Схемы идеальных сверхзвуковых сопел . . . . .                     | 58 |
| 1,14. Комбинированные воздействия . . . . .                             | 62 |
| 1,15. Характеристическая скорость процесса и „кризис“ течения . . . . . | 66 |
| 1,16. Физическая сущность закона обращения воздействий . . . . .        | 70 |

### *Часть вторая*

#### ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

|   |    |
|---|----|
| Глава 2,1. Основные уравнения и характеристики . . . . .                    | 78 |
| 2,1. Уравнение состояния идеального газа . . . . .                          | 78 |
| 2,2. Уравнение первого начала термодинамики для неподвижного газа . . . . . | 80 |
| 2,3. Уравнение первого начала для движущегося газа . . . . .                | 83 |
| 2,4. Уравнение неразрывности . . . . .                                      | 86 |
| 2,5. Обобщенное уравнение Бернулли . . . . .                                | 87 |
| 2,6. Характеристики газового потока . . . . .                               | 89 |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Глава 2,2. Качественные соотношения . . . . .</b>                                 | <b>92</b>  |
| 2,7. Закон обращения воздействий в течении идеального газа . . . . .                 | 92         |
| 2,8. Изменение скорости движения и параметров состояния . . . . .                    | 97         |
| 2,9. О „кризисе“ течения и влиянии трения . . . . .                                  | 106        |
| 2,10. Об изменении физических констант газа . . . . .                                | 110        |
| <b>Глава 2,3. Примеры расчета для отдельных воздействий . . . . .</b>                | <b>114</b> |
| 2,11. Геометрическое и идеальное расходное сопло . . . . .                           | 114        |
| 2,12. Механическое сопло . . . . .   | 123        |
| 2,13. Тепловое сопло . . . . .   | 133        |
| 2,14. Движение с трением в цилиндрической трубе . . . . .                            | 147        |
| 2,15. Расходное воздействие (вариант расчета) . . . . .                              | 167        |
| 2,16. Сравнение некоторых результатов расчета . . . . .                              | 179        |
| <b>Глава 2,4. Примеры расчета для сложных воздействий . . . . .</b>                  | <b>187</b> |
| 2,17. Общий метод расчета . . . . .  | 187        |
| 2,18. Движение с трением и отводом тепла или с совершением работы . . . . .          | 189        |
| 2,19. Политропические процессы для движения без трения . . . . .                     | 197        |
| 2,20. Политропические процессы для движения с трением . . . . .                      | 206        |
| 2,21. Испарение и конденсация жидкости в потоке газа (качественный анализ) . . . . . | 216        |
| 2,22. Испарение и конденсация (количественный расчет) . . . . .                      | 229        |

### *Часть третья*

## ТЕПЛОВЫЕ И АДИАБАТИЧЕСКИЕ СКАЧКИ

|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава 3,1. Адиабатический скачок уплотнения . . . . .</b>                            | <b>239</b> |
| 3,1. Прямой скачок уплотнения . . . . .   | 239        |
| 3,2. Косой скачок уплотнения . . . . .  | 246        |
| 3,3. Адиабатический скачок в течении реального газа . . . . .                           | 252        |
| <b>Глава 3,2. Тепловые скачки в газовых течениях . . . . .</b>                          | <b>257</b> |
| 3,4. Общие схемы тепловых скачков . . . . .   | 257        |
| 3,5. Примеры тепловых скачков . . . . .   | 263        |
| 3,6. Гидродинамическая схема распространения волны . . . . .                            | 266        |
| <b>Глава 3,3. Количественные соотношения . . . . .</b>                                  | <b>268</b> |
| 3,7. Изменение параметров процесса в детонационной волне . . . . .                      | 268        |
| 3,8. Стационарный режим детонации . . . . .   | 275        |
| 3,9. Некоторые дополнительные соотношения . . . . .                                     | 278        |
| 3,10. Расчет абсолютных скоростей движения газа . . . . .                               | 284        |
| 3,11. Изображение детонации в $pV$ -диаграмме . . . . .                                 | 288        |
| <b>Глава 3,4. Применение уравнения количества движения к газовым течениям . . . . .</b> | <b>292</b> |
| 3,12. Уравнение количества движения . . . . .   | 292        |
| 3,13. Течение с переменным расходом . . . . .   | 295        |
| 3,14. Примеры расчета реакции струи . . . . .   | 298        |
| Литература . . . . .  | 304        |

## ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

| № по пор. | Символ   | Единица измерения                       | Наименование величины   |
|-----------|----------|---|---|
| 1         | $p$      | $\text{кг}/\text{м}^2$                  | Давление  |
| 2         | $T$      | $^{\circ}\text{К}$                      | Температура   |
| 3         | $\rho$   | $\text{кгсек}^2/\text{м}^4$             | Плотность   |
| 4         | $p_0$    | $\text{кг}/\text{м}^2$                  | Давление торможения (полное давление)   |
| 5         | $T_0$    | $^{\circ}\text{К}$                      | Температура торможения  |
| 6         | $f_0$    | $\text{кгсек}^2/\text{м}^4$             | Плотность торможения  |
| 7         | $\gamma$ | $\text{кг}/\text{м}^3$                  | Удельный вес  |
| 8         | $V$      | $\text{м}^3/\text{кг}$                  | Удельный объем  |
| 9         | $g$      | $\text{м}/\text{сек}^2$                 | Ускорение силы тяжести ( $9,81 \text{ м}/\text{сек}^2$ )                                |
| 10        | $w$      | $\text{м}/\text{сек}$                   | Скорость движения   |
| 11        | $a$      | $\text{м}/\text{сек}$                   | Скорость звука  |
| 12        | $a^*$    | $\text{м}/\text{сек}$                   | Критическая скорость  |
| 13        | $u$      | $\text{м}/\text{сек}$                   | Характеристическая скорость процесса  |
| 14        | $U$      | $\text{ккал}/\text{кг}$                 | Внутренняя энергия  |
| 15        | $I$      | $\text{ккал}/\text{кг}$                 | Энтальпия   |
| 16        | $I_0$    | $\text{ккал}/\text{кг}$                 | Энтальпия торможения (полная энтальпия)   |
| 17        | $\Phi$   | $\text{ккал}/\text{кг}$                 | Термодинамический потенциал   |
| 18        | $S$      | $\text{ккал}/\text{кг}\cdot\text{град}$ | Энтропия  |
| 19        | $Q$      | $\text{ккал}/\text{кг}$                 | Количество подведенного тепла   |
| 20        | $Q_a$    | $\text{ккал}/\text{кг}$                 | Внешняя теплота   |
| 21        | $Q_r$    | $\text{ккал}/\text{кг}$                 | Теплота трения  |
| 22        | $r$      | $\text{ккал}/\text{кг}$                 | Теплота испарения   |
| 23        | $L$      | $\text{кгм}/\text{кг}$                  | Удельная работа   |
| 24        | $L_T$    | $\text{кгм}/\text{кг}$                  | Техническая работа  |
| 25        | $L_r$    | $\text{кгм}/\text{кг}$                  | Работа трения   |
| 26        | $A$      | $\text{ккал}/\text{кгм}$                | Тепловой эквивалент механической энергии<br>( $\frac{1}{427} \text{ ккал}/\text{кгм}$ ) |
| 27        | $R$      | $\text{кгм}/\text{кг}\cdot\text{град}$  | Газовая постоянная  |



Продолжение

| № по пор. | Символ     | Единица измерения      | Наименование величины                                |
|-----------|------------|------------------------|--|
| 28        | $\bar{R}$  | кгм/моль·град          | Универсальная газовая постоянная (848 кгм/моль·град) |
| 29        | $\mu$      | кг/моль                | Вес одного моля                                      |
| 30        | $G$        | кг/сек                 | Секундный расход газа                                |
| 31        | $F$        | м <sup>2</sup>         | Площадь поперечного сечения                          |
| 32        | $j$        | кг/м <sup>2</sup> ·сек | Плотность потока газа                                |
| 33        | $c$        | ккал/кг·град           | Теплоемкость   |
| 34        | $c_p$      | ккал/кг·град           | Теплоемкость при постоянном давлении                 |
| 35        | $c_v$      | ккал/кг·град           | Теплоемкость при постоянном объеме                   |
| 36        | $\alpha_I$ | град/атм               | Дифференциальный дроссельэффект                      |
| 37        | $P$        | кг                     | Результирующая сила                                  |
| 38        | $P_R$      | кг                     | Реакция струи (тяга)                                 |
| 39        | $x$        | м                      | Координата (длина)                                   |
| 40        | $D$        | м                      | Гидравлический диаметр канала                        |
| 41        | $\chi$     | —                      | Приведенная координата                               |
| 42        | $\zeta$    | —                      | Коэффициент сопротивления                            |
| 43        | $M$        | —                      | Число $M = \frac{w}{a}$                              |
| 44        | $\lambda$  | —                      | Коэффициент скорости                                 |
| 45        | $\sigma$   | —                      | Обозначение воздействия—безразмерная характеристика  |
| 46        | $k$        | —                      | Показатель изэнтропы                                 |
| 47        | $n$        | —                      | Показатель политропы                                 |
| 48        | $l$        | —                      | Логарифмическая производная скорости по давлению     |
| 49        | $m$        | —                      | Логарифмическая производная скорости по плотности    |
| 50        | $t$        | —                      | Логарифмическая производная скорости по температуре  |

---

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

# ОБЩИЕ СВОЙСТВА ГАЗОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

## Глава 1,1. ВВЕДЕНИЕ

### 1,1. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

В первой части книги подробно рассматриваются общие свойства газовых течений однородной сжимаемой жидкости при произвольной форме уравнения состояния. Как отмечалось в предисловии, исследование будет ограничено рамками термодинамического анализа, т. е. рассмотрением стационарной и притом одномерной задачи.

Первое из этих ограничений отвечает предположению об установившемся во времени характере движения. В любой заданной наперед точке пространства скорость движения и все параметры процесса (давление, плотность, температура, число  $M$  и т. п.) сохраняют неизменное, независящее от времени значение. Тем самым, как и всегда в термодинамике, время не входит в число независимых переменных.

Этому условию не противоречит, разумеется, возможность введения времени перемещения некоторого элемента газа от одного сечения канала к другому — при фиксированной пространственной ориентации канала. Действительно, как это будет видно из последующего, пространственная координата (для одномерного потока длина канала) не входит органически в уравнения термодинамики. Роль действительного аргумента играет, как правило, скорость движения или любой другой параметр. Поэтому только при конкретизации процесса, при «привязывании» его к определенным геометрическим размерам канала, становится одновременно возможным и обычный переход ко времени перемещения:

$$d\tau = \frac{dx}{w},$$

где  $\tau$ ,  $x$  и  $w$  — соответственно время, длина и скорость, или

$$\tau_{1-2} = \int_1^2 \frac{dx}{w}$$

— для перемещения между двумя произвольными сечениями. В отдельных задачах, например, при задании гидравлического закона сопротивления в виде

$$dL_r = \zeta \frac{w^3}{2g} \cdot \frac{dx}{D}^*$$

теряется, правда, свобода в произвольном выборе зависимости одной из переменных, например скорости, от длины. В этом случае естественно, что и время перемещения элемента газа по каналу становится заданным, однако то либо иное допущение о зависимости трения от длины по самому существу играет роль дополнительной связи, привлекаемой, например, из эксперимента, но не содержащейся в основных уравнениях.

Предположение об установившемся во времени стационарном характере движения нуждается, однако, и в более принципиальном пояснении.

Если допустить произвольный характер внешних воздействий на газовое течение, то при заданных (неизменных) начальных значениях параметров<sup>1</sup> задача далеко не всегда может иметь решение. Иначе говоря, стационарное движение газа по некоторому каналу (как это легко представить себе из самых общих соображений) возможно отнюдь не при всех теоретически мыслимых законах распределения внешних воздействий. Справедливо, наряду с этим, и противоположное ограничение. При заданном характере воздействий течение газа может сопровождаться отнюдь не любыми изменениями скорости, давления и т. п. Так, например, хорошо известно, что при стационарном адиабатическом истечении газа из простого (сходящегося или цилиндрического) насадка нельзя получить в выходном сечении значение скорости движения, превышающее местную величину скорости звука. Аналогичное соотношение имеет место и в ряде других случаев, подробно рассматриваемых ниже. Оно привело даже к установлению известного тезиса о невозможности перехода через критическую скорость в канале постоянного сечения, тезиса, в столь общем виде неправильного, хотя и справедливого для отдельных частных задач (движение под влиянием одного трения и т. п.). Вместе с тем в нестационарном процессе при тех же внешних условиях (например, при выстреле) скорость истечения из цилиндрической трубы может заметно превосходить местную скорость звука.

\* Здесь  $dL_r$  — элементарная работа трения, приходящаяся на 1 кг газа;  $\zeta$  — коэффициент сопротивления;  $w$  — скорость;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $D$  — гидравлический диаметр канала.

<sup>1</sup> Постоянство параметров на входе в канал принято во всем последующем изложении.

В связи с этим необходимо в самом начале установить правильное понимание вывода о «невозможности» движения при определенных условиях. Как следует из сказанного, вывод этот означает только невозможность стационарного течения в заданной обстановке протекания процесса. Несоответствие между последней и исходными предположениями (например, о значении скорости движения газа во входном сечении канала и т. п.) приводит к тому, что в реальном движении — в результате нестационарного процесса — происходит перестройка течения на какой-либо другой, стационарно возможный уровень. В ряде случаев, например, задание стационарно невозможного при заданных начальных условиях внешнего воздействия (например, подвода тепла и т. п.) может привести к ограничению расхода газа, протекающего через канал (т. е. к снижению скорости во входном сечении), изменению давления на входе и т. д.

Наряду с нестационарным переходом к другому установившемуся течению возможно также установление нестационарного периодического (колебательного) процесса, если таковой отвечает условиям рассматриваемой задачи.

Существенно, однако, что в обоих случаях — при нестационарной перестройке процесса на другой стационарно возможный уровень или при возникновении режима нестационарных пульсаций, применение термодинамического анализа сводится к установлению «предельного», стационарного состояния. Дальнейшее исследование задачи требует привлечения других методов анализа, выходящих за рамки термодинамики.

Это замечание в известной мере относится и ко второй основной предпосылке, лежащей в основе термодинамического метода исследования, — гидравлической модели течения.

Строго говоря, одномерная теория применима лишь к элементарной струйке тока бесконечно малого поперечного сечения, в пределах которого изменения скорости движения, давления и т. д. пренебрежимо малы. В противоположность этому в термодинамике (или газовой динамике одномерных течений) исходят из представления о постоянстве скорости, давления и т. д. по всему (конечному) поперечному сечению канала, т. е. оперируют со средними значениями переменных. Поэтому в реальных газовых потоках при стационарном движении всегда возможны (и наблюдаются в действительности) местные отклонения от выводов, полученных в одномерной гидравлической теории. Последняя бессильна, например, для исследования или хотя бы предсказания таких принципиально неодноразмерных явлений, как, например, развитие или отрыв пограничного слоя, возникновение местных циркуляционных движений в поперечном сечении криволинейных каналов, образование систем скачков уплотнения и др. Это обстоятельство

также подчеркивает ограниченный характер термодинамического исследования газовых потоков, играющего в целом роль первого приближения при изучении реальных процессов.

Вместе с тем, хорошо известно, что результаты, полученные путем термодинамического анализа, как правило, в качественном и весьма часто в количественном отношении правильно отражают основные свойства действительных течений. Это относится прежде всего к большинству суммарных результатов (например, к определению средней скорости истечения, расчету реакции струи и т. п.). Для многих современных задач примененная одномерной модели движения, вызванное недостаточной изученностью явления, представляет собой первый шаг в исследовании. Наконец, исключительная простота расчетного аппарата и физическая наглядность и обозримость результатов составляет те несомненные преимущества термодинамического анализа, которые сохранят за ним на долгое время значение одного из важнейших методов исследования рабочего процесса.

Помимо двух основных допущений, лежащих в основе принятого в этой книге метода анализа, следует отметить также пренебрежение явлениями молекулярного переноса — вязкостью и теплопроводностью. Это ограничение не позволяет, в частности, установить влияние продольного переноса (в направлении движения); вместе с тем наличие вязкого или молекулярного трения и связанного с ним сопротивления движению может быть приближенно учтено в суммарном виде введением работы трения, а наличие теплопроводности в поперечном потоке направления — введением суммарного закона теплообмена со стенками. При этом одномерная модель представляет собой значительно лучшее приближение для технически наиболее интересных развитых турбулентных движений, чем для ламинарных течений.

Наконец, в качестве последнего ограничения, связанного с представлением о жидкости как о сплошной среде, отметим неприменимость расчетного аппарата термодинамики (как и вообще механики сплошной среды) к объемам, содержащим конечное число молекул, или, что то же самое, к длинам, соизмеримым с длиной свободного пробега (например, к процессам, протекающим «внутри» скачка уплотнения и т. п.).

## 1.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Несмотря на обилие и кажущееся разнообразие рассматриваемых в книге вопросов, все они могут быть объединены в общей постановке задачи. Представим себе движение жидкости по некоторому каналу. В соответствии с основными предпосылками течение будем считать стационарным и одномерным. Это означает, что при переходе к конкретному процессу

все величины явятся функцией одной только переменной — длины канала, отсчитываемой от произвольно выбранного начального сечения. Наоборот, при исследовании задачи в общем виде роль аргумента может играть любая из переменных, входящих в основные уравнения, — скорость движения, давление, площадь поперечного сечения, и т. д., причем в любом сечении канала значение скорости, температуры и т. д. считается постоянным.

Движение жидкости по каналу протекает, вообще говоря, при наличии разнообразных внешних воздействий. К числу последних следует отнести, прежде всего, изменение площади поперечного сечения канала. Это воздействие будем называть для краткости «геометрическим». Жидкость, движущаяся по каналу, может обмениваться энергией с окружающей средой. К этому типу воздействий следует отнести обмен энергией в виде механической работы, производимой на движущихся относительно жидкости твердых поверхностях («механическое воздействие»), и в виде теплоты («тепловое воздействие»). При наличии массовых сил, действующих на жидкость, движущуюся, например, в гравитационном поле или в поле центробежных сил, к «механическому воздействию» следует отнести также работу, совершаемую в поле этих сил. Что касается «теплового воздействия», то в целях общности к этой категории можно отнести как теплообмен с окружающей средой через стенки канала, так и тепловыделение за счет протекающих в рабочем теле явлений: химических реакций (например, горения), изменения агрегатного состояния и т. д.

К числу «воздействий», влияющих на характер движения, следует отнести также сопротивление движению, связанное с трением о стенки канала, или с обтеканием тел, помещенных в поток (местные сопротивления). Эти воздействия для краткости назовем «воздействием трения»<sup>1</sup>. Включение его в число «внешних» факторов нуждается в дополнительном пояснении.

Как известно, наличие сопротивления при движении приводит к необратимому протеканию процессов. Между тем, все приведенные методы расчета относятся к процессам обратимым. Для устранения этого противоречия будем считать величину элементарной теплоты трения  $dQ_r$  (или эквивалентную ей элементарную работу трения  $dL_r$ ) заданной в каждом сечении канала наравне со всеми остальными воздействиями. Тем самым реальный необратимый процесс можно заменить некоторым эффективным обратимым процессом, в котором, благодаря выделению количества теплоты (равного

---

<sup>1</sup> В дальнейшем местные гидравлические сопротивления не будут рассматриваться и речь будет идти только о трении.

$dQ_r$ ) и совершению газом работы (равной  $dL_r$ ) имеет место тождественное изменение параметров состояния. В соответствии с этим прирост энтропии для единицы веса жидкости, связанный с наличием трения ( $dS_r > 0$ ), можно определить равенством

$$dS_r = \frac{dQ_r}{T} = \frac{AdL_r}{T},$$

в котором величина  $dQ_r$  (или  $dL_r$ ) считается заданной.

До сих пор речь шла о движении жидкости при постоянном секундном весовом расходе ее через любое поперечное сечение канала. Не входя в противоречие с условием стационарности течения, можно, однако, предположить, что по ходу канала имеет место дополнительный ввод (или отвод) жидкости. В этом случае секундный весовой расход будет меняться по длине канала, или, для краткости, будет иметь место «расходное воздействие», приводящее, как и все остальные, к изменению скорости движения, давления, температуры и т. п.

Перечислив все основные физические воздействия, обратимся к самой постановке задачи. Допустим, что известны значения скорости движения и всех остальных параметров процесса в некотором сечении канала, которое естественно назвать начальным. По ходу канала жидкость подвергается определенным воздействиям (например, подводу тепла, влиянию местных сопротивлений и трения и т. п.). В задачу исследования входит определение закона изменения скорости движения и всех параметров процесса под влиянием тех или иных воздействий, в частности отыскание предельных стационарно возможных состояний при заданном характере воздействий.

Прежде чем перейти к решению поставленной задачи, приведем несколько примеров, поясняющих ее содержание.

Известно, например, что уменьшение сечения канала приводит к ускорению движения несжимаемой жидкости (например, воды). Для газа, однако, как следует из теории сопла Лавала, такое соотношение сохраняется только в дозвуковом течении, когда скорость движения меньше местной скорости звука. В сверхзвуковом течении сужение русла вызывает не увеличение скорости движения, а торможение потока, тогда как увеличение сечения приводит к ускорению. Таким образом, в этом частном примере влияние геометрического воздействия на газовое течение различно (точнее — прямо противоположно) в дозвуковом и сверхзвуковом течении. Как будет показано далее, эта особенность течения газа в сопле Лавала является частным случаем более общего закона «обращения воздействий».

В другом частном случае — при движении газа с подогревом, — как показал впервые Г. Н. Абрамович, суммарное количество тепла, которое может быть подведено к 1 кг газа (например, в топке), оказывается не произвольным, а ограниченным. Более того, оно резко падает с возрастанием начальной скорости (в дозвуковой области течения).

Для этого же примера — движения газа с подогревом — можно указать условия, при которых подвод тепла приводит не к росту, а к падению температуры газа.

Еще более разительным является следующий пример. Допустим, что в поток газа впрыскивается охлаждающая жидкость, которая испаряется в нем. В результате претерпевают изменение скорость движения, а также давление, плотность и температура газа. Любая из этих величин в зависимости от условий протекания процесса может как возрастать, так и убывать.

При этом можно указать пять областей, в которых изменение скорости и параметров состояния будет протекать качественно различно. В одной из них, например, будет возрастать скорость и убывать давление, плотность и температура. В другой — возрастать скорость и плотность и падать температура и давление, в третьей будет возрастать одна только плотность, в четвертой — плотность и давление, наконец в пятой будет убывать скорость, а остальные параметры, в том числе температура газа, будут расти при впрыске испаряющейся в потоке жидкости.

Само собой разумеется, что все такого рода соотношения, определяющие зачастую развитие и эффективность процесса в ряде технических устройств, не являются случайными, не связанными между собой результатами. Наоборот, естественно будет установить такие общие закономерности, которые позволят качественно предсказать и количественно рассчитать влияние любых, изолированных или действующих одновременно, воздействий. Решению этой задачи при произвольном виде уравнения состояния рабочего тела посвящена первая часть книги. В самом начале ее в краткой форме напоминаются основные уравнения термодинамики потока, лежащие в основе всех последующих выводов.

Во второй части книги даны приложения общих закономерностей, установленных в первой части, к движению идеального газа как в общем виде, так и с подробным количественным расчетом для ряда простейших задач.

Эти задачи выбраны для иллюстрации общих закономерностей, рассмотренных ранее. Все они поэтому связаны в той либо иной мере с вопросом о переходе через критическую скорость. В связи с этим в книге не обсуждается ряд вопросов термодинамики потока (течение в элементах газовых машин,



теория и расчет эжекции, измерения скорости и давлений и др.), изложенных в руководствах по газовой динамике и оригинальных работах<sup>1</sup>.

В третьей части книги в тесной связи с законами движения газа в трубах рассмотрены основы теории стационарных разрывных течений, в частности, разобраны присущие этим течениям соотношения при переходе через критическую скорость.

При принятом в книге методе изложения тепловые скачки рассматриваются на основе аналогии с движением газа с подогревом в трубе постоянного сечения, тогда как адиабатические получаются как частный случай тепловых при равенстве нулю тепловыделения в скачке.

В последней главе третьей части в виде дополнения рассмотрено вкратце применение уравнения Эйлера (закона количества движения для течений газа). Необходимость в таком дополнении объясняется исключительной плодотворностью применения уравнения Эйлера к решению многих практических задач. В качестве примера в заключительном разделе приведен схематический расчет реакции газовой струи.

Изложив вкратце содержание книги, сделаем еще одно замечание общего характера. Практическое использование полученных в книге результатов определяется прежде всего тем, насколько правильно может быть выбрана в каждом конкретном случае расчетная модель процесса. Именно последнее, т. е. умелая оценка роли отдельных факторов, правильный отбор важнейших из них и пренебрежение второстепенными, установление необходимых для расчета кинетических связей между переменными (например, закона теплообмена или тепловыделения по длине канала и т. п.) представляют собой наиболее сложную и ответственную задачу при исследовании рабочего процесса. Решающее значение при этом, естественно, приобретает эксперимент, отталкиваясь от которого, следует выбрать первоначальную схему процесса (рабочую гипотезу), пригодность которой в нужном диапазоне параметров должна быть в конечном счете подтверждена на опыте.

Приводимые в тексте соотношения, как и всегда при термодинамическом анализе не могут раскрыть истинного кинетического механизма явлений. Они дают, однако, правильный ответ на вопрос о том, как изменится скорость движения, давление и т. п., если газовый поток будет подвергнут некоторому заданному воздействию. Само собой разумеется, что рассмотренные в книге задачи далеко не исчерпывают всех возможных на практике случаев, хотя и могут служить разумным приближением для некоторых из них.

<sup>1</sup> См. литературу в конце книги.

### 1.3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ ПОТОКА

Выпишем без вывода<sup>1</sup> основные уравнения термодинамики потока применительно к течению с постоянным секундным весовым расходом жидкости через любое сечение канала.

Для описания физических свойств рабочего тела возьмем уравнение состояния в его наиболее общем виде — для однородного вещества, обладающего двумя степенями свободы. Выбирая, например, в качестве термодинамических параметров состояния давление  $p$ , температуру  $T$  и удельный объем  $V$ , имеем:

$$\varphi(p, T, V) = 0 \quad (1,1)$$

или в решенном относительно одного из переменных (например, давления) виде:

$$p = p(T, V). \quad (1,1')$$

Выбор параметров состояния, в частности выбор независимых переменных (в данном случае  $T$  и  $V$ ), произведен здесь совершенно произвольно; с тем же правом можно было бы написать уравнение состояния в виде любого из соотношений:

$$p = p(\rho, S) \text{ или } I = I(T, p) \text{ и т. п.,}$$

где  $\rho$ ,  $S$  и  $I$  — плотность, энтропия и энтальпия. В конкретной задаче выбор переменных, входящих в уравнение состояния, обусловлен в основном простотой последующих выкладок и общим назначением расчета.

Перейдем теперь к уравнениям первого и второго начала термодинамики для потока жидкости. Первое из них можно написать в двух видах в зависимости от выбора системы координат. В случае, когда начало координат непрерывно совпадает с центром тяжести движущегося элемента жидкости и, следовательно, последний неподвижен относительно системы координат, уравнение первого начала имеет обычный для термодинамики вид:

$$dQ = dQ_a + dQ_r = dU + p dV. \quad (1,2)$$

Здесь  $dQ$ ,  $dQ_a$  и  $dQ_r = AdL_r$  — соответственно элементарные количества теплоты: суммарное, подводенное извне и выделившееся за счет работы трения;

<sup>1</sup> См., например, В. С. Жуковский, Техническая термодинамика. Изд. II, 1940 г., ч. III.

$dU$  — дифференциал внутренней энергии;  
 $ApdV$  — работа деформации элемента жидкости.

Используя известное равенство

$$I = U + ApV,$$

или в дифференциальной форме:

$$dI = dU + A(pdV + Vdp),$$

перепишем уравнение (1,2) в виде:

$$dQ = dI - AVdp. \quad (1,2')$$

В неподвижной (относительно выбранной системы координат) жидкости приход энергии, как это видно из уравнения (1,2), складывается из подведенного извне тепла и теплоты трения, а расход — из изменения внутренней энергии и работы расширения, или же разности изменения энтальпии и «работы проталкивания» элемента в поле переменного давления<sup>1</sup>.

Несколько другой вид имеет уравнение первого начала, написанное применительно к движущейся относительно координат жидкости, или, что то же самое, к неподвижной системе координат. В этом случае имеем:

$$dQ_a = dI + Ad \frac{w^2}{2g} + Adh + AdL_T. \quad (1,3)$$

В левой части этого уравнения стоит один только член — подведенное извне тепло. В правой — суммируется изменение энтальпии, изменение кинетической энергии ( $d \frac{w^2}{2g}$ ) и потенциальной энергии положения ( $dh$ ) и внешняя («техническая») работа ( $dL_T$ ). Теплота трения в этом уравнении в явном виде не присутствует (поскольку теплота трения в левой части этого уравнения сокращается с работой трения в правой).

Из уравнений (1,2') и (1,3) (при вычитании одного из них из другого и замене удельного объема плотностью:  $\rho = \frac{1}{gV}$ ), получим уравнение механической энергии (обобщенное уравнение Бернулли):

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{dw^2}{2} + gdh + gdL_T + gdL_r = 0. \quad (1,4)$$

<sup>1</sup> Все уравнения относятся к 1 кг жидкости.

Уравнение (1,4) представляет собой баланс механической работы; как видно из его вывода, оно соблюдается вне зависимости от наличия теплообмена, хотя последний существенно влияет на характер изменения скорости движения и других параметров.

Систему уравнений (1,1)—(1,4) дополним уравнением второго начала термодинамики, позволяющим установить закон изменения энтропии:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dQ_a + AdL_r}{T} \quad (1,5)$$

и гидравлическим уравнением неразрывности, являющимся выражением закона сохранения массы:

$$dG = d(F\rho w) = 0$$

или

$$\frac{dF}{F} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} = 0, \quad (1,6)$$

здесь в дополнении к предыдущему  $F$ —площадь поперечного сечения канала;  $G$ —секундный весовой расход.

Из написанных шести уравнений (1,1)—(1,6) только часть является независимыми. К числу последних следует отнести те из уравнений, которые отражают самостоятельные физические законы, т. е. уравнение состояния, уравнение неразрывности и любые два из уравнений (1,2)—(1,5). Эти уравнения, разумеется, всегда могут быть дополнены необходимым числом термодинамических связей и соотношений между параметрами состояния. Подробный анализ системы уравнений (1,1)—(1,6) и различных частных случаев решения их будет дан в главе 2,1 применительно к идеальному газу. Для тех же общих вопросов, которые рассматриваются в первой части книги, дальнейшая детализация основных уравнений является излишней.

В связи с основными уравнениями термодинамики следует остановиться на принятой в тексте терминологии для частных случаев изменения состояния, поскольку в литературе по термодинамике и газовой динамике (даже учебной) не существует в этом отношении единства<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> В первую очередь это относится к понятию адиабатического процесса. Последним пользуются зачастую для обозначения процесса без теплообмена и трения, в котором энтропия не меняется, и одновременно для процесса с изменением энтропии (например, ударная адиабата или течение с трением в теплоизолированной трубе). Более того, иногда „адиабатическим“ называют процесс без обмена теплом и механической энергией ( $dQ_a = 0$  и  $dL_r = 0$ ) и т. д.

По своему происхождению частные термодинамические процессы связаны обычно либо с постоянством одного из параметров состояния (температура, давление, энтропия и т. д.), либо с отсутствием одного (или нескольких) из воздействий.

При этом естественно стремиться к тому, чтобы название процесса возможно более полно отражало его существо. В соответствии с этим будем называть адиабатическим (теплоизолированным) процессом процесс без теплообмена с окружающей средой ( $dQ_a=0$ ). В частном случае отсутствия трения при  $dQ_a=0$  и  $dQ_r=0$  процесс будет обратимым адиабатическим и одновременно изэнтропическим ( $dS=0$ ). Последнее понятие является, однако, более широким, так как нетрудно представить себе частный случай изэнтропического неадиабатического процесса при непрерывном отводе от газа тепла, в количестве, точно равном теплоте трения:

$$dQ_a = -dQ_r; \quad dS = 0; \quad dQ_r > 0; \quad dQ_a < 0.$$

Наконец, процессы без обмена с окружающей средой механической энергией ( $dL_T=0$ ) или теплотой и механической энергией ( $dQ_a=0$ ;  $dL_T=0$ ) назовем соответственно механически изолированным и энергетически изолированным.

Уточнение этих названий особенно существенно для термодинамики потока, поскольку задачей ее является установление связи не только между параметрами состояния ( $p, \rho, T, S$  и т. д.), но и определение зависимости между ними и скоростью движения. Однако зависимость эта (например, между давлением и скоростью) будет, например, различна для изэнтропического процесса при  $dQ_a=0$  и  $dQ_r=0$  или при  $dQ_a=-dQ_r$ . Все эти случаи будут подробно рассмотрены в дальнейшем.

## Глава 1,2. ЗАКОН ОБРАЩЕНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЙ

### 1.4. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение газа по некоторому каналу при произвольном виде уравнения состояния в предположении постоянства секундного весового расхода. Движущийся по каналу газ находится под влиянием различных воздействий, приводящих к изменению скорости движения, давления, температуры и т. д. Сосредоточим свое внимание вначале на законе изменения скорости движения и попытаемся найти такое соотношение, из которого можно было бы в общем виде установить, как влияет на скорость движения газа любое элементарное внешнее воздействие. Для этой цели воспользуемся

приведенной выше системой дифференциальных уравнений термодинамики потока. Обратимся прежде всего к уравнению состояния в виде:

$$p = p(\rho, S),$$

выбрав в качестве независимых переменных плотность газа  $\rho$  и энтропию  $S$ .

Выражение дифференциала давления как функции двух переменных может быть написано в виде:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho dS.$$

Частную производную давления по плотности при постоянной энтропии обозначим символом

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S,$$

где, как известно из физики,

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$$

— скорость распространения звука. Величина эта, или точнее отношение скорости движения к скорости звука (число  $M$ ):

$$M = \frac{w}{a} = \frac{w}{\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}},$$

будет играть в дальнейшем весьма существенную роль во всех выводах.

В частности, будет показано, что любое заданное воздействие (например, подвод тепла или уменьшение сечения канала и т. п.), приводящее к определенному изменению скорости в дозвуковом течении (например, ускорению), действует на сверхзвуковой поток прямо противоположным образом. Это общее свойство газовых течений имеет большое значение для термодинамики газовых потоков, в особенности для конкретных приложений.

Для дальнейшего преобразования полученного выше выражения дифференциала давления воспользуемся простыми математическими соотношениями, связывающими частные производные функции двух переменных, а именно:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_\rho = -1$$

$$\text{и} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S = 1.$$

С их помощью имеем:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho = -\alpha^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p.$$

Как известно из термодинамики<sup>1</sup>,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p.$$

Мы можем теперь переписать выражение дифференциала давления в виде:

$$dp = \alpha^2 \left[ d\rho - \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p dS \right].$$

Величина  $dp$  может быть также найдена из обобщенного уравнения Бернулли, в котором пренебрежем изменением потенциальной энергии положения ( $dh$ ), несущественным в большинстве случаев для газовых течений:

$$\frac{dp}{\rho} + wdw + gdL_T + gdL_r = 0. \quad (1,4)$$

Это уравнение, как было показано ранее, является следствием уравнения первого начала термодинамики, написанного применительно к двум системам координат: неподвижной (например, связанной с неподвижными стенками канала и, следовательно, движущейся относительно газа) и движущейся вместе с центром тяжести выбранного элемента газа (следовательно, неподвижной относительно газа).

Из уравнения (1,4) имеем:

$$dp = -\rho wdw - \rho gdL_T - \rho gdL_r.$$

<sup>1</sup> Действительно:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \cdot T \left(\frac{\partial T}{T \partial S}\right)_p = \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \cdot T \left(\frac{\partial T}{\partial Q}\right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \end{aligned}$$

где

$$c_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p$$

— теплоемкость при постоянном давлении.

Приравняем теперь друг другу оба выражения для дифференциала давления, выразив предварительно величину  $d\rho$  из уравнения неразрывности:

$$\frac{dF}{F} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} = 0, \quad (1,6)$$

откуда

$$d\rho = -\rho \left( \frac{dF}{F} + \frac{dw}{w} \right)$$

и дифференциал энтропии  $dS$  из уравнения второго начала термодинамики:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dQ_a + dQ_r}{T}, \quad (1,5)$$

где  $dQ_r = AdL_r$  — теплота трения.

Выполнив эти операции, имеем:

$$\alpha^2 \left[ \rho \left( \frac{dF}{F} + \frac{dw}{w} \right) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dQ_a + dQ_r}{c_p} \right] = \rho w dw + \rho g dL_r + \rho g dL_r.$$

Разделим обе части этого уравнения на произведение  $\rho \alpha^2$  и сгруппируем слева члены, содержащие дифференциал скорости, а справа — элементарные воздействия.

После простых преобразований, которые для краткости опущены, получим в безразмерном виде:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{g}{\alpha^2} dL_r - \frac{g}{\alpha^2} dL_r + \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dL_r + \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a. \quad (1,7)$$

Уравнение (1,7) будем называть уравнением «закона обращения воздействий» для скорости движения<sup>1</sup>. В дальнейшем будут выведены аналогичные уравнения для давления, плотности и температуры. Целесообразно, однако, уже здесь исследовать подробно полученный результат.

Прежде всего сделаем небольшое замечание по поводу формы уравнения (1,7). Левая часть его состоит из произведения разности квадрата числа  $M$  и единицы ( $M^2 - 1$ ) и дифференциала логарифма скорости:

$$(M^2 - 1) d \ln w = (M^2 - 1) \frac{dw}{w}.$$

<sup>1</sup> См. Л. А. Вулис, О законе обращения воздействий в течении реального газа. Доклады Академии наук СССР, т. 56, вып. 8, 1947 г. (для идеального газа, — см. ДАН СССР, т. 54, вып. 8 и 9, 1946 г.).



Таким образом, при заданном характере изменения скорости (ускоренное или замедленное движение) знак левой части всецело определяется соотношением между скоростью движения и местной скоростью звука. Если газ движется с дозвуковой скоростью ( $M < 1$ ), то знак левой части уравнения (1,7) противоположен знаку изменения скорости. Иначе говоря, левая часть этого уравнения отрицательна в ускоренном движении и положительна в замедленном. Наоборот, в сверхзвуковом потоке ( $M > 1$ ) знак левой части уравнения (1,7) совпадает со знаком изменения скорости, т. е. положителен для ускоренного и отрицателен для замедленного движения. При монотонном изменении скорости движения знак левой части меняется при равенстве

$$M = 1; \quad w = a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s},$$

когда скорость движения становится равной местной скорости звука. В этом случае, который, следуя установившейся терминологии, будем называть «критическим» (присваивая это название также скорости движения — «критическая скорость» и всем параметрам; например, критическое сечение, критическое давление и т. п.), очевидно, в нуль обращается также правая часть уравнения (1,7).

В правой части уравнения (1,7) собраны все члены, отражающие элементарные воздействия на газовое течение: изменение сечения  $dF$ , элементарная внешняя (техническая) работа<sup>1</sup>  $dL_T$ , элементарная работа трения  $dL_r$ , и, наконец, элементарное количество подведенного к газу (извне или за счет распределенных в потоке внутренних источников, например, химической реакции) тепла  $dQ_a$ . Каждый из этих членов входит в уравнение (1,7) со своим коэффициентом.

При анализе этих коэффициентов, прежде всего, обращает на себя внимание то обстоятельство, что коэффициенты, стоящие перед элементарными изэнтропическими воздействиями ( $dF$  и  $dL_T$ ), не содержат в себе величин, связанных с уравнением состояния газа.

Это означает, что характер влияния изэнтропических воздействий на скорость движения не зависит от физических свойств жидкости, отражением которых является конкретная форма уравнения состояния.

<sup>1</sup> Напомним, что, согласно обычно для технической термодинамики условию, положительному значению  $dL_T$  (в правой части уравнения первого начала) отвечает случай, когда газ совершает элементарную работу и, следовательно, от него отводится механическая энергия, тогда как отрицательное значение  $dL_T$  означает, что работа совершается над газом и, следовательно, к нему подводится извне механическая энергия.

В противоположность этому, коэффициенты, стоящие перед элементарными воздействиями, приводящими к изменению энтропии ( $dQ_r$  и  $dQ_a$ ), содержат частную производную плотности по температуре при постоянном давлении  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ .

Характер влияния их на скорость движения, следовательно, определяется знаком этой частной производной, т. е. физическими свойствами движущейся жидкости.

Этот вывод, имеющий принципиальное значение, будет подробно обсуждаться ниже.

Перепишем уравнение (1,7) в сокращенном виде:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \sum_i a_{wi} dR_i = d\sigma_w, \quad (1,7')$$

где  $a_{wi}$  — коэффициент при соответствующих элементарных воздействиях  $dR_i$ .

Безразмерную сумму произведений  $\sum a_{wi} dR_i$  назовем элементарным суммарным воздействием —  $d\sigma_w$  (индекс  $w$  означает, что речь идет об изменении скорости движения; в дальнейшем будут введены аналогичные величины для термодинамических параметров — давления, температуры и т. п.).

Рассматривая переписанное таким образом уравнение (1,7), нетрудно сопоставить ему следующие соотношения, написанные для наглядности в табличке:

а) Ускоренное движение  $dw > 0$

б) Замедленное движение  $dw < 0$

$$M < 1$$

$$d\sigma_w < 0$$

$$M < 1$$

$$d\sigma_w > 0$$

$$M = 1$$

$$d\sigma_w = 0$$

$$M = 1$$

$$d\sigma_w = 0$$

$$M > 1$$

$$d\sigma_w > 0$$

$$M > 1$$

$$d\sigma_w < 0$$

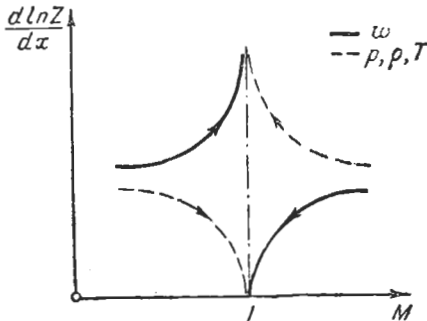
Из этой таблицы видно, что знак элементарного суммарного воздействия  $d\sigma_w$  противоположен знаку изменения скорости  $dw$  в дозвуковом течении и совпадает с ним в сверхзвуковом.

При  $M = 1$  в критическом сечении имеет место также равенство  $d\sigma_w = 0$ , т. е. суммарное воздействие  $\sigma_w$  проходит через экстремум (а именно — через минимум).

В любом случае (ускоренное или замедленное движение) монотонное изменение скорости и непрерывный переход ее через критическое значение, равное местной скорости звука, оказывается возможным только при перемене знака суммарного воздействия  $d\sigma_w$ . Если речь идет, например, о возрастании скорости от некоторого начального значения ее  $w_1 < a_1$  до конечной величины  $w_2 > a_2$ , то на участке дозву-

кового течения элементарное суммарное воздействие должно быть отрицательным ( $d\tau_w < 0$ ) вплоть до значения  $M=1$ , в котором оно обратится в нуль с тем, чтобы в сверхзвуковом потоке быть положительным ( $d\tau_w > 0$ ).

Аналогично этому, непрерывное замедление движения от некоторой величины  $w_1 > a_1$  до  $w_2 < a_2$  возможно, если в сверхзвуковом потоке суммарное воздействие отрицательно ( $d\tau_w < 0$ ), обращается в нуль при  $M=1$  и, наконец, становится положительным ( $d\tau_w > 0$ ) в области дозвукового потока.



Фиг. 1,1. Схема „кризиса“ течения.

(—  $z=w$ ; - - -  $z=p, \rho, T$  и т. д.;  
→ стрелками указано направление процесса).

В результате такого анализа оказывается возможным сформулировать следующие общие закономерности, физический смысл и значение которых будут подробно рассмотрены далее.

1. Невозможен непрерывный переход скорости движения через критическое значение ее (т. е. переход из дозвукового потока в сверхзвуковой

или обратно) посредством одностороннего по характеру своему воздействия.

2. Для обеспечения непрерывного перехода скорости движения через критическое значение ее необходимо задание такого закона распределения внешних воздействий по длине канала, который обеспечит бы изменение знака элементарного суммарного воздействия в критическом сечении.

3. Если в критическом сечении при  $M=1$  не имеет место одновременно равенство  $d\tau_w=0$  (элементарное суммарное воздействие в этом сечении не обращается в нуль), то непрерывный переход через критическую скорость невозможен. В этом случае в критическом сечении имеет место так называемое „предельное состояние“ или „кризис течения“. Для последнего характерно стремление к бесконечности величины  $d \ln w$ , причем знак ее различен по обе стороны критического сечения (см. фиг. 1,1; сплошная линия).

## 1.5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЗАКОНА ОБРАЩЕНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Уравнение (1,7) определяет характер изменения скорости движения. Дополним его аналогичными равенствами для основных термодинамических параметров: давления, плотно-

сти и температуры. Для этой цели обратимся к соответствующим дифференциальным уравнениям термодинамики потока.

Из обобщенного уравнения Бернулли (1,4) имеем:

$$\frac{dp}{\rho} = -\frac{\rho\omega^2 dw}{\rho} - \frac{\rho g}{\rho} dL_T - \frac{\rho g}{\rho} dL_r.$$

Умножим обе части этого уравнения на разность  $M^2 - 1$ , заменим произведение  $(M^2 - 1) \frac{dw}{\omega}$  — его выражением из (1,7) и перегруппируем члены, собрав справа все элементарные воздействия.

В результате после простых преобразований получим следующее уравнение закона обращения воздействий для давления:

$$(M^2 - 1) \frac{dp}{\rho} = -\frac{\rho\omega^2}{\rho} \left[ \frac{dF}{F} - \frac{g}{\omega^2} dL_T - \frac{g}{\omega^2} dL_r + \right. \\ \left. + \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dL_r + \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a \right] \quad (1,8)$$

или, в сокращенном виде

$$(M^2 - 1) \frac{dp}{\rho} = \sum_i \alpha_{pi} dR_i = d\sigma_p. \quad (1,8')$$

Воспользовавшись уравнением неразрывности (1,6), согласно которому:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dF}{F} - \frac{d\omega}{\omega};$$

аналогичным путем получим уравнение закона обращения воздействий для плотности газа:

$$(M^2 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dF}{F} + \frac{g}{a^2} dL_T + \frac{g}{a^2} dL_r - \\ - \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dL_r - \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a \quad (1,9)$$

или, в сокращенном виде:

$$(M^2 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = \sum_i \alpha_{\rho i} dR_i = d\sigma_\rho. \quad (1,9')$$

Несколько сложнее получить в общем виде уравнение закона обращения воздействий для температуры. Прибегнем для этой цели к уравнению состояния в виде:

$$T = T(p, \rho)$$

или

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_p dp + \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p d\rho.$$

Умножая это равенство на разность  $M^2 - 1$ , деля его на величину  $T$  и используя соотношения между частными производными (аналогичные приведенным выше), после ряда преобразований, получим:

$$\begin{aligned} (M^2 - 1) \frac{dT}{T} = & -M^2 \frac{\rho}{T} \frac{c_p}{c_v} \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p} \left(\frac{c_v}{c_p} - 1\right) \left(\frac{dF}{F} - \frac{g}{w^3} dL_T - \frac{g}{w^2} dL_r\right) - \\ & - \frac{M^2}{c_v T} \left(\frac{c_v}{c_p M^2} - 1\right) (dQ_a + dQ_r) \end{aligned} \quad (1,10)$$

или в сокращенном виде

$$(M^2 - 1) \frac{dT}{T} = \sum_i \alpha_{Ti} dR_i = d\varepsilon_T. \quad (1,10')$$

Вместе с уравнением (1,7) для скорости движения эти три уравнения составляют полную систему основных уравнений закона обращения воздействий. Все они построены единообразно. В правой части каждого из них стоит сумма элементарных воздействий, умноженных на соответствующие им коэффициенты; в левой части — произведение разности  $(M^2 - 1)$  на дифференциал логарифма переменной:  $d \ln w$ ,  $d \ln p$ , и т. д.

Уравнения (1,8) и (1,9) для давления и плотности идентичны с (1,7) по влиянию физических свойств газа, поскольку частная производная плотности по температуре при постоянном давлении  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$  входит только в члены, отвечающие неизоэнтропическим воздействиям. Не так обстоит дело с температурой. Как видно из уравнения (1,10), производная  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$  входит в выражения всех коэффициентов при отдельных воздействиях, кроме одного из них — коэффициента при подведенном извне элементарном количестве тепла  $dQ_a$ .

Во всем остальном все четыре безразмерные уравнения закона обращения воздействия аналогичны одно другому.

Следует подчеркнуть, что из четырех этих уравнений только три, например первые три, являются самостоятельными.

Последнее уравнение (1,10) для температуры, как это следует из самого вывода<sup>1</sup>, является следствием предыдущих.

Весьма существенно, что условие непрерывного перехода через скорость звука, сводящееся к равенству нулю в критическом сечении при  $M = 1$  всех элементарных суммарных воздействий:

$$d\alpha_w = 0; \quad d\alpha_p = 0; \quad d\alpha_\rho = 0; \quad d\alpha_T = 0,$$

взятых в отдельности, не представляет собой ряда независимых требований. Наоборот, легко показать, что равенство нулю одного из элементарных суммарных воздействий, например, равенство:

$$d\alpha_w = 0 \quad \text{при } M = 1$$

означает также обращение в нуль всех остальных в том же сечении.

Действительно, правую часть уравнений (1,8) — (1,10) можно представить в виде:

$$d\alpha_p = -\frac{c_w^2}{p} \left[ \frac{dF}{F} - \frac{1}{M^2} \frac{g}{a^2} dL_T - \frac{1}{M^2} \frac{g}{a^2} dL_r + \right. \\ \left. + \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dL_r + \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a \right]$$

— для давления,

$$d\alpha_\rho = - \left[ M^2 \frac{dF}{F} - \frac{g}{a^2} dL_r - \frac{g}{a^2} dL_r + \right. \\ \left. + \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dL_r + \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a \right]$$

— для плотности и

$$d\alpha_T = - \frac{M^2}{\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p} \cdot \frac{\rho c_p}{T c_v} \left( \frac{c_v}{c_p} - 1 \right) \left[ \frac{dF}{F} - \frac{1}{M^2} \frac{g}{a^2} dL_T - \frac{1}{M^2} \frac{g}{a^2} dL_r + \right. \\ \left. + \frac{\frac{c_v}{c_p} - 1}{c_p M^2} \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dL_r + \frac{\frac{c_v}{c_p} - 1}{c_p M^2} \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a \right]$$

— для температуры.

<sup>1</sup> При выводе уравнения (1,10) было вторично использовано уравнение состояния, положенное ранее в основу вывода уравнения (1,7).

При числе  $M$ , равном единице, следовательно, имеем:

$$d\sigma_{\rho, M=1} = -\frac{\rho\omega^2}{\rho} d\sigma_{\omega, M=1}$$

— для давления,

$$d\sigma_{\rho, M=1} = -d\sigma_{\omega, M=1}$$

— для плотности и

$$d\sigma_{T, M=1} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p} \cdot \frac{\rho c_p}{T c_v} \left(\frac{c_v}{c_p} - 1\right) d\sigma_{\omega, M=1}$$

— для температуры.

Эти соотношения показывают, что в случае непрерывного перехода через критическую скорость, когда при  $M=1$

$$d\sigma_{\omega} = 0,$$

одновременно обращаются тождественно в нуль и все остальные элементарные суммарные воздействия при  $M=1$ , т. е.:

$$d\sigma_{\rho} = d\sigma_{\rho} = d\sigma_T = 0.$$

Наоборот, если условие экстремума суммарного воздействия в критическом сечении не будет соблюдено и в течении наступит „кризис“, то одновременно со стремлением к бесконечности величины  $d \ln \omega$ , будет также  $d \ln \rho \rightarrow \infty$ ;  $d \ln \rho \rightarrow \infty$ ;  $d \ln T \rightarrow \infty$  при  $M^2=1$ , причем это стремление для дифференциалов давления, плотности и температуры будет также иметь характер сильного разрыва, указанный на фиг. 1,1 пунктиром.

Таким образом, уравнения (1,8)—(1,10) дополняют основное уравнение (1,7), так как позволяют непосредственно установить характер изменения термодинамических параметров при заданном законе распределения внешних воздействий, однако по существу они ничего не добавляют к «закону обращения воздействий» для скорости движения.

Физическое толкование этого закона на основе механики распространения возмущений в дозвуковом и сверхзвуковом потоке будет дано в конце первой части.

## 1.6. ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ И ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ

Система дифференциальных уравнений закона обращения воздействий (1,7)—(1,10) дает возможность при любом заданном внешнем воздействии или нескольких, действующих одно-

временно, предсказать характер изменения скорости движения, давления, плотности и температуры. В ряде случаев представляет интерес получить ответ на менее общий вопрос, а именно выяснить относительный характер изменения скорости движения или одного из термодинамических параметров при заданном характере изменения какого-либо другого.

Для этой цели, как было предложено в одной из работ Н. А. Мальмберг и автора, удобно ввести в рассмотрение ряд безразмерных характеристик процесса, равных логарифмическим производным одной из величин по другой<sup>1</sup>. Обозначим соответственно:

$$l = \frac{d \ln w}{d \ln p}; \quad m = \frac{d \ln w}{d \ln \rho}; \quad n = \frac{d \ln p}{d \ln \rho}; \quad t = \frac{d \ln w}{d \ln T}. \quad (1,11)$$

Наиболее простой смысл из этих величин имеет логарифмическая производная давления по плотности, представляющая собой местный показатель элементарного политропического процесса, согласно уравнению:

$$\frac{dp}{p} = n \frac{d\rho}{\rho}.$$

Как будет показано далее, введение этой величины позволяет в ряде случаев установить в предельно краткой форме связь между термодинамическими и газодинамическими характеристиками процесса и весьма просто истолковать его особенности.

В большинстве случаев газового течения привычными являются следующие соотношения между изменением скорости движения и изменением давления и плотности: при увеличении скорости падают давление и плотность, при уменьшении ее — возрастают. Этим соотношениям отвечают, очевидно, неравенства:

$$l < 0; \quad m < 0; \quad n > 0.$$

Что касается закона изменения температуры, то последний, вообще говоря, имеет более сложный характер; привычным, однако, для энергетически изолированных<sup>2</sup> течений является неравенство

$$t < 0,$$

т. е. падение температуры при росте скорости и увеличение ее — при снижении последней.

<sup>1</sup> Величины  $l$ ,  $m$ ,  $n$  и  $t$ , конечно, не независимы; они связаны между собой уравнением состояния  $\varphi(p, \rho, T) = 0$ ; кроме того,  $l = \frac{m}{n}$ .

<sup>2</sup> В отсутствии подвода или отвода энергии в виде тепла или механической работы.



Эти обычные соотношения не являются универсальными. Исходя из системы уравнений закона обращения воздействий, легко получить общие выражения для коэффициентов  $l$ ,  $m$ ,  $n$  и  $t$ . Действительно, при делении, например, уравнения (1,8) на (1,9), получим выражение для коэффициента  $n$  (переменного в общем случае показателя политропы):

$$n = \frac{\rho a^2 \frac{dF}{F} - \frac{g}{\omega^2} dL_T - \frac{g}{\omega^2} dL_r + \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dL_r + \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a}{\rho \frac{dF}{F} - \frac{g}{a^2} dL_T - \frac{g}{a^2} dL_r + \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dL_r + \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a}. \quad (1,12)$$

В зависимости от соотношения между отдельными элементарными воздействиями величина  $n$ , как это видно из написанного уравнения (1,12), может принимать любое значение (положительное или отрицательное; в частном случае, равное нулю или какой-либо другой постоянной величине). Аналогичным образом могут быть получены выражения для других коэффициентов  $l$ ,  $m$  и  $t$ . Отметим, в частности, что таким путем легко найти в самом общем виде условия, при которых принципиально возможно осуществление политропического течения<sup>1</sup> (т. е. процесса при постоянном значении показателя политропы  $n$ ).

Не приводя здесь в полном виде выражения для коэффициентов  $l$ ,  $m$  и  $t$  в связи с их громоздкостью, ограничимся сводной таблицей значений  $l$ ,  $m$ ,  $n$  и  $t$  для частных случаев изолированных воздействий.

Подробный анализ свойств газовых течений при наличии изолированных воздействий будет дан в следующей главе, а также во второй части книги для идеального газа, где будет показано также применение коэффициентов  $l$ ,  $m$ ,  $n$  и  $t$  к случаям совместного действия нескольких воздействий. Ограничимся здесь только отдельными замечаниями, иллюстрирующими полученные результаты.

Отметим, прежде всего, что в случае течения газа, физические свойства которого отвечают неравенству  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p < 0$ , для всех изолированных воздействий сохраняются „привычные“ соотношения между изменением скорости, давления и плотности:

$$l < 0; \quad m < 0; \quad n > 0.$$

Это означает, в частности, что происходящие при таких условиях процессы относятся к области положительных зна-

<sup>1</sup> при  $n = \text{const}$ , и соответственно  $\frac{p}{\rho^n} = \text{const}$ .

ТАБЛИЦА 1,1

Значение коэффициентов  $l$ ,  $m$ ,  $n$  и  $t$  при изолированных воздействиях

| Коэффициент | Воздействие   |   |   |  |
|-------------|---|---|---|--|
|             | Изменение сечения $dF \neq 0$   | Подвод или отвод работы $dI_T \neq 0$   | Подвод или отвод тепла $dQ_a \neq 0$  | Трение $dQ_r \neq 0$   |
| $l$         | $-\frac{p}{\rho \omega^2}$  | $-\frac{p}{\rho a^2}$   | $-\frac{p}{\rho \omega^2}$  | $-\frac{\frac{g}{a^2} - A \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}{\rho \omega^2 \left[ \frac{g}{\omega^2} - \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right]}$  |
| $m$         | $-\frac{1}{M^2}$  | $-1$  | $-1$  | $-1$   |
| $n$         | $\frac{\rho a^2}{p}$  | $\frac{\rho a^2}{p}$  | $\frac{\rho \omega^2}{p}$   | $\frac{\rho \omega^2 \left[ \frac{g}{\omega^2} - \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right]}{\frac{g}{a^2} - \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}$  |
| $t$         | $\frac{T \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}{\rho \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right)}$ | $\frac{T \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}{\rho \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right)}$ | $\frac{T \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}{\rho \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right)}$ | $c_v T \left[ \frac{g}{a^2} - \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] - \frac{A \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left( M^2 - \frac{c_v}{c_p} \right) - \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}{-\frac{g}{a^2} \rho (c_p - c_v)}$ |

чений переменного показателя политропы; осуществление процесса с отрицательным значением  $n$  здесь невозможно.

В качестве примера, показывающего влияние знака частной производной  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ , рассмотрим закон изменения температуры при  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p > 0$  для движения газа без трения и теплообмена по каналу постоянного сечения.

В этом случае, как видно из второго столбца табл. 1,  $t > 0$ , т. е. ускорение газа при отводе работы (в дозвуковой области, например, при расширении его на лопатках чисто реактивной турбины) сопровождается ростом температуры, а торможение его при подводе работы (например, в идсальном дозвуковом нагнетателе) — падением ее. Ряд аналогичных примеров влияния частной производной  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$  на харак-

тер процесса встретится далес — при детальном исследовании частных случаев изолированных воздействий. Заметим, однако, что случай  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p > 0$  практически весьма маловероятен<sup>1</sup> и рассматривается здесь только для общности теоретических выводов.

### 1.7. О ВЛИЯНИИ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГАЗА

Из уравнений (1,7) — (1,10) закона обращения воздействий для произвольного уравнения состояния следует, что ряд коэффициентов при элементарных воздействиях содержит в качестве множителя величину частной производной давления по плотности при постоянной температуре<sup>2</sup> —  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p$ .

Эта частная производная, отражающая физические свойства жидкости, входит в коэффициенты при неизоэнтропических воздействиях (внешнем подводе тепла, работе трения) в уравнениях (1,7) — (1,9), определяющих закон изменения скорости движения, давления и плотности. Она входит также в коэффициенты при всех воздействиях, кроме подвода тепла  $dQ_a$ , в уравнении (1,10) — для температуры.

В связи с этим характер изменения скорости движения и отдельных параметров состояния во многих случаях существенным образом зависит не только от задания внешних воздействий, но и от знака производной  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p$ . Более того, при одном и том же знаке внешнего воздействия скорость движения или один из термодинамических параметров может возрастать либо убывать в зависимости от знака этой производной.

Для большей наглядности приведем еще два примера, взятые также из числа изолированных воздействий (см. табл. 1,1). В случае ускоренного движения жидкости по соплу Лаваля при  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p > 0$  имеет место рост температуры, а не падение ее, как это наблюдается обычно. Таким же образом торможение жидкости (при  $M < 1$ ) в диффузоре в случае  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p > 0$  сопровождалось бы падением температуры.

<sup>1</sup> См. ниже.

<sup>2</sup>  $\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ ; величину  $\alpha_p = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$  обычно называют коэффициентом расширения. Для идеального газа, как известно,  $\alpha_p = \frac{1}{273}$ , если  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ .

Наоборот, ускоренное движение (расширение) жидкости в сходящемся насадке в случае  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p > 0$  сопровождалось бы нагревом ее.

В другом характерном примере — при подводе тепла к жидкости, движущейся без трения по цилиндрической трубе, при условии  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p > 0$  и  $M < 1$  должно было бы иметь место падение скорости и рост давления и плотности взамен привычных для дозвукового потока результатов: ускорения и расширения газа при подогреве его в канале постоянного сечения.

Эти любопытные в теоретическом отношении примеры приводят нас к следующему заключению. Физические свойства реальной жидкости могут оказать существенное влияние на основные закономерности термодинамики потоков. Несмотря на то, что закон обращения воздействий при переходе через критическую скорость ( $w = a$ ) сохраняет свою силу вне зависимости от знака величины  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ , последний в ряде случаев определяет конкретный закон изменения скорости движения и параметров состояния под влиянием тех либо иных воздействий. При этом условии  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$  отвечает обширному классу жидкостей, свойства которых, связанные с влиянием различных воздействий, качественно совпадают со свойствами идеального газа<sup>1</sup> и отвечают обычным представлениям (изобарический подвод тепла приводит к расширению жидкости).

В противоположность этому условие  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p > 0$  приводит ко многим качественно отличным соотношениям, необычность которых сама по себе свидетельствует об исключительности такого состояния реальной жидкости (если оставить в стороне воду при температуре ниже 4°C, как случай, в плане этой книги неинтересный).

В задачи этой книги не входит сколько-нибудь подробное исследование различных уравнений состояния реального

<sup>1</sup> Для последнего из уравнения состояния

$$p = \rho g R T$$

следует

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{\rho}{g R T^2} = -\frac{\rho}{T} < 0.$$

газа<sup>1</sup>, применяемых в термодинамике. Для того, чтобы указать все же область, в которой  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p$  может иметь положительное значение, ограничимся установлением связи величины  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p$  с другой характеристикой реальных газов, широко распространенной в технической термодинамике, в частности, в теории холодильных процессов. Речь идет о дифференциальном эффекте дросселирования (дроссель-эффекте), который, как известно, определяет характер изменения температуры газа при падении давления в изоэнтальпическом процессе.

Напомним, что в случае, когда внутренняя энергия газа зависит только от температуры, в процессе дросселирования температура не меняется. Для реальных жидкостей и газов падение давления при дросселировании сопровождается охлаждением (положительный дроссель-эффект) или нагреванием (отрицательный дроссель-эффект).

Математически дифференциальный дроссель-эффект выражается частной производной температуры по давлению при постоянной энтальпии и обозначается символом

$$\alpha_I = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_I. \quad (1,13)$$

Напомним вкратце вывод выражения для этого коэффициента<sup>2</sup>.

Из уравнений первого и второго начала термодинамики имеем:

$$TdS = dI - AVdp. \quad (1,14)$$

<sup>1</sup> См. М. П. Вукалович и И. И. Новиков, Уравнения состояния реальных газов (Госэнергоиздат, 1948 г.). Отметим, что для газа, подчиняющегося уравнению состояния Ван-дер-Ваальса, величина  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p$  может быть как отрицательной, так и положительной. Однако, условие  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p > 0$  для этого уравнения состояния (и аналогичных ему) отвечает области неустойчивых состояний

$$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_T < 0\right].$$

О движении газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса и близкого к нему  $[p(V-b) = RT]$ , см. К. И. Страхович, Прикладная газодинамика, ОНТИ, 1937 г.

<sup>2</sup> Читателю, знакомому с теорией дроссель-эффекта, следует обратиться непосредственно к формуле (1,17).

Выразим теперь частные производные энтальпии по температуре при постоянном давлении и по давлению при постоянной температуре.

При изобарическом процессе ( $p = \text{const}$ ;  $dp = 0$ ) из приведенного выше уравнения следует

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = c_p.$$

В другом частном случае изотермического процесса ( $T = \text{const}$ ;  $dT = 0$ ), имеем

$$\left(\frac{\partial I}{\partial p}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T + AV.$$

Напишем также выражение для термодинамического потенциала

$$\Phi = I - TS. \quad (1,15)$$

Дифференциал величины  $\Phi$ , очевидно, равен

$$d\Phi = dI - TdS - SdT,$$

а так как

$$dI = TdS + AVdp,$$

то

$$d\Phi = -SdT + AVdp.$$

В общем виде

$$d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T dp.$$

Сравнивая два последних выражения для дифференциала термодинамического потенциала, имеем:

$$S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p; \quad AV = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T.$$

Воспользуемся теперь свойствами взятых накрест вторых частных производных функций двух переменных:

$$\left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T\right]_p = \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p\right]_T,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -A \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Полученная формула позволяет переписать выражение частной производной энтальпии по давлению при постоянной температуре в виде

$$\left(\frac{\partial I}{\partial p}\right)_T = -A \left[ T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \right].$$

Выразим энтальпию, как функцию давления и температуры:

$$I = I(p, T),$$

в связи с чем дифференциал ее равен:

$$dI = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial I}{\partial p}\right)_T dp.$$

В это выражение подставим найденные ранее значения частных производных энтальпии:

$$dI = c_p dT - A \left[ T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \right] dp.$$

Полученное уравнение применим к процессу дросселирования ( $I = \text{const}$ ;  $dI = 0$ ) и определим величину дифференциального дроссель-эффекта:

$$\alpha_I = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_I = A \frac{T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V}{c_p}. \quad (1,16)$$

На фиг. 1,2, содержащейся в большинстве курсов термодинамики<sup>1</sup>, нанесена кривая инверсии  $\alpha_I = 0$  в приведенных координатах состояния  $\frac{p}{p_{кр}}$  и  $\frac{T}{T_{кр}}$ . Область внутри этой кривой отвечает положительному значению дифференциального дроссель-эффекта:  $\alpha_I > 0$ , вне ее  $\alpha_I < 0$ . Как видно из графика, одному и тому же значению давления отвечают две температуры инверсии: в области меньших температур— для жидкости и в области высоких— для газа.

Переходя в выражении для  $\alpha_I$  от удельного объема  $V = \frac{1}{\rho g}$  к плотности газа  $\rho$  с учетом равенства

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{g \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p,$$

<sup>1</sup> Более подробные сведения об инверсии и значениях  $\alpha_I$  читатель может найти, например, в книге В. С. Жуковского, Техническая термодинамика, изд. 1940 г.

получим

$$a_I = -A \frac{1 + \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}{\rho g c_p} \quad (1,16')$$

Решим уравнение (1,16') относительно интересующей нас величины частной производной  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ :

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{\rho}{T} \left( 1 + \frac{g c_p \rho}{A} a_I \right) \quad (1,17)$$

Полученная формула показывает, что знак величины  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$  связан со знаком и величиной дифференциального дроссель-эффекта  $a_I$ .

Так, например, в частном случае идеального газа, а так же при состоянии, отвечающем одной из точек инверсии ( $a_I = 0$ ) имеем:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{\rho}{T} < 0,$$

что, конечно, совпадает с простым вычислением (см. сноску на стр. 35).

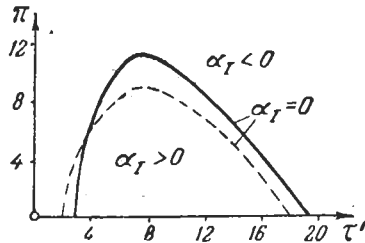
В тех случаях, когда дифференциальный дроссель-эффект положителен, т. е. тогда, когда в процессе дросселирования газ охлаждается, всегда будет

$$\text{при } a_I > 0; \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p < 0.$$

То же самое неравенство  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p < 0$  сохраняется и после инверсии ( $a_I = 0$ ) в области отрицательных значений дифференциального дроссель-эффекта ( $a_I < 0$ ), когда газ при дросселировании нагревается, если только сохраняется следующее неравенство (по абсолютной величине):

$$|a_I| < \frac{A}{c_p \gamma} = \frac{A}{c_p'}$$

где  $c_p'$  [ккал/м<sup>3</sup> град] — теплоемкость 1 м<sup>3</sup> газа.



Фиг. 1,2. Инверсия реальных газов.

(— опытные данные для CO<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, воздуха, H<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub> и др. газов по Якобу; --- по уравнению состояния Ван-дер-

$$\begin{aligned} \text{Ваальса: } \pi &= \frac{p}{p_{кр}'}; \quad \tau' = R' \frac{T}{T_{кр}'} = \\ &= R \frac{T_{кр}}{p_{кр} V_{кр}} \cdot \frac{T}{T_{кр}}, \end{aligned}$$

где  $p_{кр}$ ,  $V_{кр}$  и  $T_{кр}$  — отвечают критическому состоянию вещества.



При

$$a_i < 0 \text{ и } [a_i] = \frac{A}{c_p}$$

имеем граничное, равное нулю, значение частной производной плотности по температуре при постоянном давлении  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = 0$ .

Наконец, в области сравнительно больших отрицательных величин дифференциального дроссель-эффекта:

$$\text{при } a_i < 0 \text{ и } |a_i| > \frac{A}{c_p},$$

частная производная  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$  приобретает положительное значение. Область эта, в которой  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p > 0$ , таким образом, весьма ограничена и хотя само существование ее имеет принципиальное значение, повидимому, может представить практический интерес только в специальных случаях; поэтому в дальнейшем изложении примем  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$ .

## Глава 1.3. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

### 1.8. ИЗМЕНЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ КАНАЛА

Для большей наглядности исследуем подробно частные случаи движения газа при наличии только одного (изолированного) воздействия.

В качестве первого из таких случаев рассмотрим изоэнтропическое, энергетически изолированное движение газа по каналу переменного сечения при постоянном секундном весовом расходе.

Применительно к основным уравнениям обращения воздействий эти предположения означают равенство нулю всех элементарных воздействий, кроме величины  $dF$ , т. е.:

$$dL_T = 0; \quad dL_r = 0 \text{ и } dQ_a = 0 \text{ при } dF \neq 0.$$

Система уравнений закона обращения воздействий (1,7)—(1,10) упростится при этом и примет следующий вид:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F}, \quad (1,18)$$

$$(M^2 - 1) \frac{dp}{p} = -\frac{\epsilon w^3}{p} \cdot \frac{dF}{F}, \quad (1,19)$$

$$(M^2 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dF}{F}, \quad (1,20)$$

$$(M^2 - 1) \frac{dT}{T} = M^2 \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) \frac{\rho}{T} \cdot \frac{1}{\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p} \cdot \frac{dF}{F}. \quad (1,21)$$

Рассмотрим вначале первое из этих уравнений. Выразим для наглядности в табличке вытекающие из него соотношения между изменением площади поперечного сечения канала и скорости

а) Ускоренное движение  $dw > 0$

б) Замедленное движение  $dw < 0$

|         |          |         |          |
|---------|----------|---------|----------|
| $M < 1$ | $dF < 0$ | $M < 1$ | $dF > 0$ |
| $M = 1$ | $dF = 0$ | $M = 1$ | $dF = 0$ |
| $M > 1$ | $dF > 0$ | $M > 1$ | $dF < 0$ |

Мы пришли к хорошо известным соотношениям между скоростью движения сжимаемой жидкости и профилем канала, лежащим в основе широко распространенного в технике прибора для получения сверхзвуковых скоростей истечения — сопла Лавалья («геометрического сопла»). Напомним их вкратце. Как видно из приведенной в тексте таблички, в дозвуковом течении ускорение газа достигается при уменьшении площади поперечного сечения канала, а замедление — при увеличении ее.

В сверхзвуковом потоке в противоположность этому скорость движения газа возрастает при увеличении площади поперечного сечения канала и падает при ее уменьшении.

Критической скорости ( $M = 1$ ) отвечает минимальное («критическое») сечение:  $dF = 0$  (цилиндрический участок трубы).

Эти свойства газовых течений используются в «геометрическом сопле», схема которого, а также кривые изменения параметров газа для случая ускоренного движения при  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p < 0$  изображены на фиг. 1,3. На первом сужающемся участке этого сопла скорость движения газа возрастает до критического значения  $w = a$  в минимальном сечении. В дальнейшем — при последующем расширении канала — продолжается рост скорости движения в сверхзвуковой области.

Таким образом, непрерывный переход через скорость звука здесь осуществляется, в полном соответствии с общим законом обращения воздействий, путем последовательной смены противоположных по знаку «геометрических воздействий»: сужения канала в дозвуковом течении и расширения его — в сверхзвуковом.

Изменение давления в геометрическом сопле, как это видно из уравнений (1,19) и (1,18) (или из табл. 1,1), противоположно по знаку изменению скорости. Это означает, что давление падает в дозвуковом потоке при сужении русла канала и растет — при его расширении (диффузор). В сверхзвуковом течении давление падает при увеличении площади поперечного сечения канала и возрастает при его уменьшении.

Аналогичный характер имеет изменение плотности.

Разделив уравнение (1,20) на (1,18), имеем

$$\frac{1}{m} = \frac{d \ln \rho}{d \ln w} = -M^2 \quad (\text{см. табл. 1,1}).$$

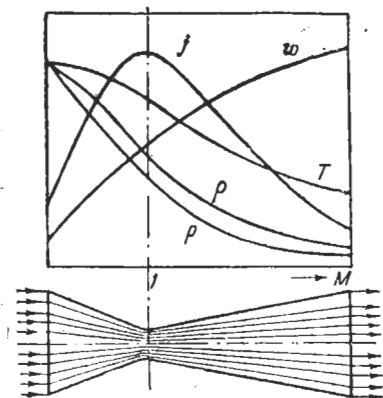
По абсолютной величине отношение  $\left| \frac{d \ln \rho}{d \ln w} \right| < 1$  при  $M < 1$ ; равно единице при  $M = 1$  и больше единицы при  $M > 1$ .

Физически это означает, что в дозвуковом течении плотность падает медленнее, чем растет скорость, поэтому при неизменном произведении

$$F \rho w = \text{const}$$

увеличение скорости требует уменьшения площади поперечного сечения  $F$ . В сверхзвуковом потоке падение плотности происходит быстрее, чем рост скорости, поэтому увеличение последней требует уже не уменьшения, а увеличения сечения. Более подробное с физической стороны объяснение процессу будет дано в § 1,16.

Фиг. 1,3. Схема геометрического сопла Лавала.



До сих пор все наши выводы не зависели от природы газа (т. е. вида уравнения состояния). Иначе обстоит дело с законом изменения температуры. Как видно из уравнения (1,21)<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> Нетрудно доказать, что разность  $\frac{c_p}{c_v} - 1$  всегда (т. е. для любого тела) положительна. Действительно, из общих термодинамических соотношений можно вывести следующее выражение для разности теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме:

$$c_p - c_v = -AT \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v^2}{\left( \frac{\partial v}{\partial V} \right)_T}$$

знак коэффициента при геометрическом воздействии связан со знаком частной производной  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p$ .

Если  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p < 0$ , а этому неравенству, как было показано выше, отвечает подавляющее большинство практически интересных случаев, то характер изменения температуры в геометрическом сопле совпадает с характером изменения давления и плотности. В этом случае — при непрерывно-ускоренном движении газа — температура падает как в дозвуковом потоке (в сужающемся канале), так и в сверхзвуковом (в расширяющемся канале) и растет при увеличении площади поперечного сечения канала — в дозвуковом, или при ее уменьшении — в сверхзвуковом течении.

В рассматриваемой задаче уравнение энергии (первого начала термодинамики) имеет вид:

$$I_0 = I + A \frac{w^2}{2g} = \text{const}, \quad (1,22)$$

где  $I_0$  — полная энтальпия (энтальпия торможения).

Непрерывный рост скорости от  $w = 0$  до максимально возможной величины:

$$w_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{2gI_0}{A}} \quad (1,23)$$

будет сопровождаться непрерывным падением энтальпии газа — от величины  $I = I_0$  (в состоянии покоя) до  $I = 0$  и  $w = w_{\text{макс}}$  при полном преобразовании потенциальной энергии газа в кинетическую энергию. Соотношение (1,23) определяет максимальную скорость в энергетически изолированном процессе (при  $dG = 0$ ).

### 1,9. ИЗМЕНЕНИЕ СЕКУНДНОГО РАСХОДА ГАЗА

В качестве второго примера рассмотрим случай, не содержащийся в полученных выше уравнениях. В основу их

Величина  $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$  всегда меньше нуля (критерий стабильности по Планку). Следовательно,  $c_p > c_v$ . Отметим также, что отношение  $c_p$  к  $c_v$  равно:

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} > 1$$

(см., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лившиц, Статистическая физика. Изд. ОНТИ, 1938 г., стр. 48—50).

вывода было положено допущение о том, что секундный весовой расход газа через любое поперечное сечение канала остается неизменным:

$$G = F g \rho w = \text{const.} \quad (1,24)$$

В соответствии с этим предположением результаты, полученные выше для геометрического сопла, можно интерпретировать следующим образом. Введем в рассмотрение величину плотности потока газа  $j \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{сек}} \right]$  (сокращенно „плотность тока“):

$$j = \frac{G}{F} = \gamma w, \quad (1,25)$$

равную по определению секундному весовому расходу газа через единицу площади поперечного сечения канала. Величина  $j$  связана с площадью сечения  $F$  очевидным соотношением (для случая постоянства секундного расхода газа):

$$\frac{dj}{j} = - \frac{dF}{F} \quad (1,26)$$

или, в интегральном виде:

$$\frac{j_2}{j_1} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (1,26')$$

Отсюда следует, что плотность тока, меняющаяся обратно пропорционально сечению, растет в дозвуковой части сопла Лавалья (имеется в виду случай ускоренного движения:  $dw > 0$ ), достигает максимального значения в критическом (минимальном) сечении сопла и падает на сверхзвуковом участке. Также будет меняться величина  $j$  и в случае непрерывного торможения газа в сопле Лавалья — при переходе от  $w_1 > a_1$  к  $w_2 < a_2$ .

Аналогичный закон изменения плотности тока можно осуществить и в другом случае — при движении газа по трубе постоянного сечения с переменным по длине весовым расходом.

Допустим, следовательно, что на первом участке цилиндрической трубы (фиг. 1,4) при соблюдении равенства нулю всех воздействий:

$$dF = dL_T = dL_r = dQ_a = 0 \quad (1,27)$$

имеет место непрерывный ввод дополнительной массы газа ( $dG > 0$ ).

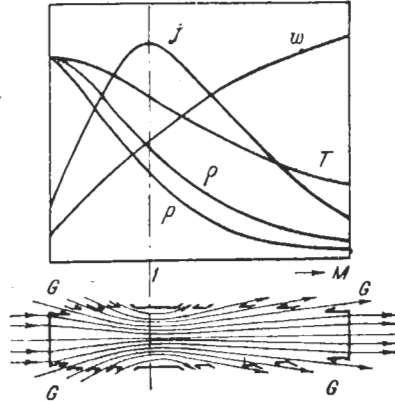
Из уравнения (1,18), которое для рассматриваемой схемы можно переписать в виде

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \frac{dj}{j} = - \frac{dG}{G}, \quad (1,28)$$

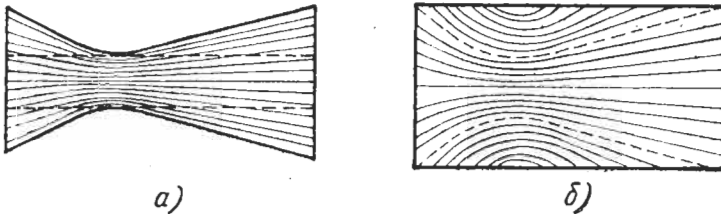
следует, что в дозвуковом течении ( $M < 1$ ) ускоренное движение может быть достигнуто при подводе дополнительной массы газа. Пределом этого ускорения будет достижение скорости движения, равной местной скорости звука:  $M = 1$  при  $dG = 0$ .

Если после критического сечения — на сверхзвуковом участке идеального расходного сопла — организовать выпуск части газов из трубы ( $dG < 0$ ), то это приведет к дальнейшему непрерывному росту скорости.

В связи с тем, что изменение расхода газа при движении его в цилиндрической трубе, как и изменение сечения при постоянном расходе, воздействует на одну и ту же величину — плотность тока газа, — для идеального расходного сопла останутся в силе все выводы и соотношения (качественные, а при некоторых дополнительных условиях и количественные, см. ниже), полученные для геометрического сопла. В частно-



Фиг. 1,4. Схема идеального расходного сопла.



Фиг. 1,5. Схемы движения жидкости в геометрическом (а) и идеальном расходном (б) соплах.

сти, сохранится и закон изменения параметров, определяемый системой уравнений (1,18) — (1,21), и показанный на фиг. 1,4 (для случая  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$  при ускоренном движении).

Общность схем геометрического и идеального расходного сопел легко показать следующим путем.

Представим себе простейшую модель идеального расходного сопла в виде цилиндрической трубы с проницаемыми для газа (пористыми) стенками, мысленно выделенной в геометрии

ческом сопле таким образом, чтобы поперечное сечение расходного сопла равнялось критическому сечению сопла Лавала (фиг. 1,5,а). Сохраняя при этом неизменный расход через геометрическое сопло, мы получим в расположенной внутри его цилиндрической трубе (идеальном расходном сопле) закон изменения расхода, обратный закону изменения сечения геометрического сопла:

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{j_2}{j_1} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Наоборот, заменяя две симметричные линии тока в плоском расходном сопле твердыми стенками (или подвергая мысленно затвердению поверхность одной из трубок тока, в осесимметричном сопле, см. фиг. 1,5,б), мы приходим обратно к схеме геометрического сопла.

Рассмотренные схемы показывают, что полная тождественность соотношений для геометрического и расходного сопел возможна при условии, если втекающий в расходное сопло или вытекающий из него газ обладает всеми параметрами, в точности равными параметрам (скорость движения по величине и направлению, давление, температура и т. п.) основного потока. Только в этом случае, отвечающем схеме идеального расходного сопла, процесс в нем можно считать энергетически изолированным и изоэнтропическим.

Действительно, в этой идеальной схеме газовый поток, в сущности, подчиняется всем законам движения в геометрическом сопле, частью которого является расходное (см. фиг. 1,5,а).

Следует заметить, что при частичном вытекании газа из цилиндрической трубы реальный процесс может быть весьма близок к процессу в идеальном расходном сопле, так как параметры вытекающего из трубы газа в первом приближении тождественны с параметрами основного потока.

В том же случае, когда речь идет об использовании положительного эффекта расходного сопла, т. е. ввода дополнительной массы газа, в расчете следует учитывать отличие в температуре, скорости и т. п. вводимого газа от основного. Последнее, однако, мало что меняет в принципиальном содержании вопроса, поскольку идея непрерывного перехода через скорость звука путем последовательной смены двух противоположных по знаку воздействий (подвода массы газа в дозвуковом потоке и отвода ее в сверхзвуковом) остается и здесь в силе, а меняются только расчетные коэффициенты при величине  $\frac{dG}{G}$ .

В сущности, принятое из методических соображений при выводе уравнений (1,7)—(1,10) допущение о постоянстве ве-

сового расхода можно было отбросить в самом начале. В этом случае, исходя из уравнения неразрывности в виде:

$$dG = d(F\rho gw) \quad (1,29)$$

или

$$\frac{dG}{G} = \frac{dF}{F} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dF}{F}, \quad (1,29')$$

обобщенного уравнения Бернулли (для переменного весового расхода) в виде<sup>1</sup>:

$$\frac{dp}{\rho} + w^2 \left[ \frac{dw}{w} + \left( 1 - \frac{w_{\text{жс}}}{w} \right) \frac{dG}{G} \right] + g dL_T + g dL_r = 0 \quad (1,30)$$

(где  $w_{\text{жс}}$  — проекция скорости притекания дополнительной массы на направление основного потока) и уравнения второго начала термодинамики для этого случая в виде:

$$dS = \frac{dQ_a + dQ_r}{T} + \Delta S_G \cdot \frac{dG}{G} \quad (1,31)$$

(где  $\Delta S_G$  — прирост энтропии одного килограмма газа в основном потоке при смешении с дополнительной массой) нетрудно аналогичным путем прийти к уточненному уравнению (1,7) для случая переменной массы газа:

$$\begin{aligned} (M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \left[ 1 + \left( 1 - \frac{w_{\text{жс}}}{w} \right) M^2 - \frac{\Delta S_{\text{жс}} T}{c_p \rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] \frac{dG}{G} - \\ - \frac{g}{a^2} dL_T - \frac{g}{a^2} dL_r + \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dL_r + \\ + \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a. \end{aligned} \quad (1,32)$$

Вывод аналогичных уравнений для давления, плотности и температуры предоставляем читателю.

<sup>1</sup> Примем для простоты  $dL_T = dL_r = 0$ .

При  $dG \neq 0$  имеем

$$Fdp + \rho w F dw + (w - w_{\text{жс}}) d(F\rho w) = 0$$

или, после деления на  $\rho F$ :

$$\frac{dp}{\rho} + w^2 \frac{dw}{w} + w^2 \left( 1 - \frac{w_{\text{жс}}}{w} \right) \frac{dG}{G} = 0. \quad (1,30')$$



В случае изолированного расходного воздействия

( $dF = dL_T = dL_r = dQ_a = 0$ ;  $dG \neq 0$ ) имеем:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \left[ 1 + \left( 1 - \frac{w_{жс}}{w} \right) M^2 - \frac{\Delta S_{жс}}{c_p} \frac{T}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] \frac{dG}{G}. \quad (1,33)$$

При  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p < 0$  подвод газа в дозвуковом течении приводит к ускорению движения, а отвод — к замедлению. Обратные соотношения имеют место в сверхзвуковом потоке. Таким образом, качественная картина, которая привела нас к схеме расходного сопла как прибора, в котором принципиально возможно путем смены противоположных по знаку воздействий (подвода и отвода дополнительной массы газа), осуществить непрерывный переход через скорость звука сохраняется в силе.<sup>1</sup>

Заметим, что даже в случае, когда притекающий газ обладает одинаковой с основным потоком полной энтальпией (т. е. суммой  $I + A \frac{w^2}{2g} = I_0$ ), но отличается от него по скорости движения, выравнивание последней связано с необратимыми потерями.

Такой частный случай, также, безусловно, схематизированный, будет рассмотрен в приложениях к идеальному газу.

В более общем случае следует учесть также изменение полной энтальпии, поэтому задача сводится, в сущности, к комбинированному (расходному и тепловому) воздействию.

В таком виде (для впрыска жидкости, испаряющейся в газовом потоке, или конденсации паров) мы рассмотрим ее подробно в конце второй части книги.

В ряде технических приложений можно, однако, решать эту задачу приближенно, пренебрегая одним из эффектов по сравнению с другим: Так, например, при расчете влияния конденсации содержащейся в воздухе влаги на течение в аэродинамических трубах весьма часто можно пренебречь изменением расхода газа по сравнению с относительно более сильным эффектом — выделением скрытой теплоты парообразования.

<sup>1</sup> Здесь не рассматривается случай  $w_{жс} \gg w$  (например, улучшение обтекания профиля путем вдувания газа и ускорения движения в пограничном слое и др.).

## 1,10. ПОДВОД ИЛИ ОТВОД МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим теперь изэнтропическое течение газа по теплоизолированной трубе постоянного сечения при неизменном секундном весовом расходе. Иными словами, положим

$$dF = dG = dL_r = dQ_a = 0 \text{ при } dL_T \neq 0.$$

Последнее неравенство означает, что газ обменивается с окружающей средой энергией в виде технической работы: получает ее извне (случай  $dL_T < 0$  — согласно принятому в технической термодинамике правилу знаков), или отдает ее наружу ( $dL_T > 0$ ). Естественно, что совершение работы предполагает наличие подвижных относительно газа твердых поверхностей<sup>1</sup>, например, чистореактивного колеса турбины (случай  $dL_T > 0$ ) или идеализированного нагнетателя ( $dL_T > 0$ ), приводимого в движение от постороннего источника энергии.

Выпишем для рассматриваемой задачи основные уравнения обращения воздействий:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = -\frac{g}{a^2} dL_T, \quad (1,34)$$

$$(M^2 - 1) \frac{dp}{p} = \frac{\rho g}{p} dL_T, \quad (1,35)$$

$$(M^2 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = \frac{g}{a^2} dL_T, \quad (1,36)$$

$$(M^2 - 1) \frac{dT}{T} = -\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) \frac{\rho g}{T a^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p} \cdot dL_T. \quad (1,37)$$

Как и в предыдущем случае, три первые уравнения, определяющие характер изменения скорости, давления и плотности, не связаны со свойствами газа; в противоположность этому, закон изменения температуры при подводе и отводе механической работы, определяется знаком частной производной  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ .

В случае, когда  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$ , из системы уравнений (1,34)—(1,37), так же, как из табл. 1,1 следует, что знак изменения скорости всегда противоположен знаку изменения всех термодинамических параметров:  $p$ ,  $\rho$  и  $T$ , т. е.:

$$l < 0; m < 0; n > 0 \text{ и } t < 0.$$

<sup>1</sup> Совершение газом работы возможно также при движении его в поле действия объемных (массовых) сил (см. ниже).

Что касается изменения скорости, то, подобно предыдущему, его можно наглядно представить в виде следующей таблички:

а) ускоренное движение  $dw > 0$

б) замедленное движение  $dw < 0$

$$M < 1$$

$$dL_T > 0$$

$$M < 1$$

$$dL_T < 0$$

$$M = 1$$

$$dL_T = 0$$

$$M = 1$$

$$dL_T = 0$$

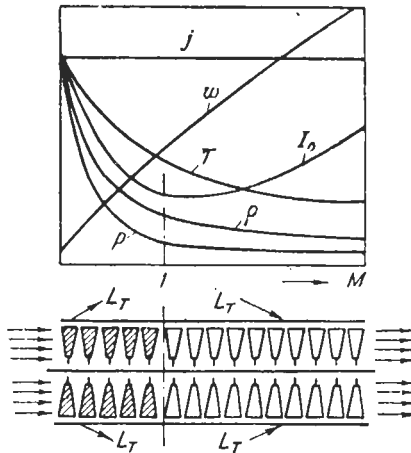
$$M > 1$$

$$dL_T < 0$$

$$M > 1$$

$$dL_T > 0$$

Мы приходим к следующему выводу, являющемуся в сущности частным случаем закона обращения воздействий, однако на первый взгляд кажущемуся чуть ли не парадоксальным<sup>1</sup>.



Фиг. 1,6. Схема механического сопла.

При совершении газом механической работы (например, в турбине) дозвуковой поток ускоряется, а сверхзвуковой — замедляется. При совершении работы над газом (например, в нагнетателе) дозвуковой поток тормозится, а сверхзвуковой — разгоняется. Таким образом, в этом случае предел одностороннего воздействия (например, отвода работы, совершаемой дозвуковым потоком) является достижение критической скорости. Дальнейшее увеличение скорости требует изменения знака воздействия, в данном случае перехода к подводу механической энергии извне.

В полной аналогии с предыдущими случаями мы приходим к схеме прибора, основной идеей которого является последовательная смена двух противоположных по знаку воздействий<sup>2</sup> (фиг. 1,6).

В полной аналогии с предыдущими случаями мы приходим к схеме прибора, основной идеей которого является последовательная смена двух противоположных по знаку воздействий<sup>2</sup> (фиг. 1,6).

<sup>1</sup> Напомним, что речь идет об идеализированном течении в канале постоянного сечения.

<sup>2</sup> Простейшую идеальную схему механического сопла можно себе представить в виде длинного вала, несущего на себе серию турбинных колес, чередующихся с неподвижными лопатками для выравнивания потока. В этом случае газ будет расширяться на первом участке (в турбине) и вращать общий вал. На втором участке — после достижения критической скорости — газ будет продолжать расширяться, снимая работу, передаваемую общим валом, с колес „нагнетателя“ при сверхзвуковых скоростях движения.

Характер изменения параметров в таком приборе, который естественно назвать „механическим соплом“, указан на фиг. 1,6 также для случая  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p < 0$ . В отличие от процесса в геометрическом сопле (или идеальном — расходном) движение газа в механическом сопле не происходит энергетически изолированно. Это означает, что в первом участке сопла при съеме работы (турбина) полная энтальпия 1 кг газа  $I_0 = I + A \frac{w^2}{2g}$  падает, проходит через минимум в критическом сечении ( $M=1$ ) и затем возрастает в сверхзвуковом участке за счет подвода извне механической энергии.

Практического применения механическое сопло в полном виде до настоящего времени не получило. Из различных схем его, представляющих теоретический интерес, заслуживают упоминания случаи движения газа в поле действия массовых сил.

Так, например, если речь идет о поле земного тяготения и, следовательно,

$$dL_T = dh \left[ \frac{\kappa g M}{\kappa g} \right],$$

где  $h$  — высота, отсчитываемая по координате, направленной от центра земли, то уравнение (1,34) приобретает следующий вид:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \frac{g}{a^2} dh. \quad (1,38)$$

Отсюда следует, что под влиянием силы тяжести дозвуковой поток при движении к центру земли будет тормозиться ( $dw < 0$ ) и сжиматься ( $dp > 0$ ;  $d\rho > 0$ ). При движении вверх дозвуковой поток будет совершать работу против силы тяжести; скорость движения при этом будет увеличиваться ( $dw > 0$ ), а давление и плотность падать ( $dp < 0$ ;  $d\rho < 0$ ).

Сверхзвуковой поток будет ускоряться (расширяться) при движении к центру земли и замедляться (сжиматься) при движении вверх, например при истечении природного газа из скважин.

Аналогичные соображения нетрудно применить и к другому случаю действия массовых сил — движению газа под влиянием центробежного эффекта<sup>1</sup>. В этом случае уравнение (1,34) имеет вид:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{\omega^2 r}{a^2} dr. \quad (1,39)$$

<sup>1</sup> Численный расчет такой схемы для идеального газа см. на стр. 130.

где  $\omega$  — угловая скорость вращения,  
 $r$  — переменный радиус, направленный от оси вращения,  
 т. е. в сторону действия силы.

Из уравнения (1,39) видно, что дозвуковой поток газа будет замедляться при движении от оси вращения к периферии и ускоряться при движении в обратном направлении, тогда как сверхзвуковой поток будет замедляться при движении по направлению к оси вращения и ускоряться при движении газа в направлении действия центробежной силы от оси вращения.

Объединяя два последних примера, можно сформулировать следующее правило: влияние любой массовой силы на движение сжимаемой жидкости по трубе постоянного сечения в поле действия этой силы сказывается в замедлении дозвукового и ускорении сверхзвукового потока, если направление движения совпадает с направлением действия этой силы и, следовательно, к газу подводится энергия, и, соответственно, в ускорении дозвукового потока и замедлении сверхзвукового в случае, когда эти направления противоположны, т. е. газ совершает работу против действующей на него силы.

### 1.11. ПОДВОД ИЛИ ОТВОД ТЕПЛОТЫ

Допустим теперь, что газ движется по трубе постоянного сечения ( $dF=0$ ), при неизменном весовом расходе ( $dG=0$ ), не совершая механической работы ( $dL_T=0$ ). Пренебрежем также работой трения ( $dL_r=0$ ). При этом единственным фактором, влияющим на поток, является внешнее тепловое воздействие (подвод или отвод тепла:  $dQ_a \neq 0$ ).

Основные уравнения закона обращения воздействий для рассматриваемого случая имеют вид:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p}{\rho c_p} \cdot dQ_a, \quad (1,40)$$

$$(M^2 - 1) \frac{dp}{p} = - \frac{\rho w^2}{p} \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p}{\rho c_p} \cdot dQ_a, \quad (1,41)$$

$$(M^2 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p}{\rho c_p} \cdot dQ_a, \quad (1,42)$$

$$(M^2 - 1) \frac{dT}{T} = \frac{M^2}{c_v T} \left(1 - \frac{c_v}{M^2 c_p}\right) \cdot dQ_a, \quad (1,43)$$

Здесь прежде всего бросается в глаза, что знак правой части трех первых уравнений зависит от знака частной производной  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ .

Если, как и ранее, принять в качестве общего условия неравенство  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$ , то закон изменения скорости движения определится соотношениями, сведенными в табличку.

а) ускоренное движение  $d\omega > 0$

б) замедленное движение  $d\omega < 0$

|         |            |         |            |
|---------|------------|---------|------------|
| $M < 1$ | $dQ_a > 0$ | $M < 1$ | $dQ_a < 0$ |
| $M = 1$ | $dQ_a = 0$ | $M = 1$ | $dQ_a = 0$ |
| $M > 1$ | $dQ_a < 0$ | $M > 1$ | $dQ_a > 0$ |

Изменение давления и плотности, как это видно из уравнений (1,41) — (1,42) и табл. 1,1, имеет всегда знак, противоположный изменению скорости.

Таким образом, при подводе тепла к дозвуковому потоку в случае  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$  скорость газа возрастает, а давление и плотность падают. Ускорение (расширение) газа имеет своим пределом в этом случае, как и в других рассмотренных выше случаях изолированных воздействий, достижение критической скорости:  $w = a$ ,  $M = 1$ . Дальнейшее ускорение возможно при перемене знака воздействия, т. е. при переходе от подвода тепла к отводу его — в сверхзвуковом потоке.

Аналогичная смена воздействий (вначале — при  $M > 1$  — подвода тепла и затем — при  $M < 1$  — отвода его) необходима для непрерывного торможения потока (сжатия газа) и перевода его из сверхзвуковой области течения в дозвуковую.

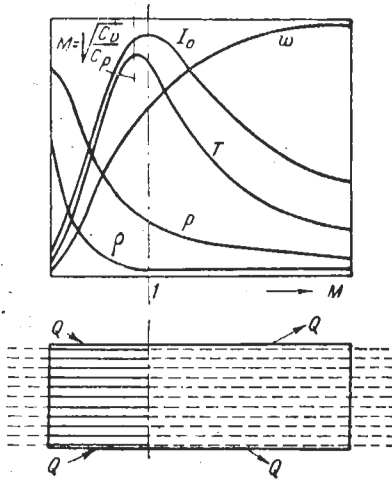
В результате мы снова приходим к схеме прибора — „теплого сопла“ (фиг. 1,7)<sup>1</sup>, в котором принципиально возможен непрерывный переход через критическую скорость за счет изменения знака воздействия при  $M = 1$ .

Если бы физические свойства газа отвечали неравенству  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p > 0$ , все наши выводы в общем виде сохранились бы (необходимость обращения воздействий в критическом сечении), однако влияние подвода и отвода тепла на скорость

<sup>1</sup> На фиг. 1,7, как и на фиг. 1,3, 1,5 и 1,6, характер изменения параметров состояния соответствует ускоренному движению при  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$ .

движения, давление и плотность, изменилось бы на противоположное.

Как и в случае механического сопла, в тепловом сопле величиной, проходящей через экстремум в критическом сечении, является полная энтальпия газа  $I_0 = I + A \frac{w^2}{2g}$ . Вне зави-



Фиг. 1,7. Схема теплового сопла.

Специфичным для рассматриваемого частного случая изолированного теплового воздействия является также закон изменения температуры.

Как видно из уравнения (1,43), при  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p < 0$  температура газа растет при подводе тепла в области чисел  $M$ :

$$0 < M^2 < \frac{c_v}{c_p}.$$

При достижении числа  $M$ , равного корню квадратному из отношения теплоемкости при постоянном объеме к теплоемкости при постоянном давлении:

$$M = \sqrt{\frac{c_v}{c_p}} < 1 \quad (1,44)$$

— в дозвуковом потоке (так как всегда  $c_p > c_v$ ) имеет место максимум температуры:  $dT = 0$ .

Во всей последующей области чисел  $M$

$$\frac{c_v}{c_p} < M^2 < \infty$$

симости от знака  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p$  изменение  $I_0$  происходит в тепловом сопле по закону, обратному тому, который имел место в механическом сопле. При подводе тепла величина  $I_0$  возрастает (на первом дозвуковом или сверхзвуковом участке сопла при непрерывном переходе через критическую скорость.) В критическом сечении полная энтальпия достигает максимума и затем падает во втором участке сопла при отводе тепла. Аналогичный характер (для движения без трения) имеет изменение энтропии.

при увеличении скорости температура монотонно падает, причем падение ее происходит вначале на участке дозвукового потока — при  $\frac{c_v}{c_p} < M^2 < 1$  при подводе тепла ( $dQ_a > 0$ ;  $dw > 0$ ;  $dT < 0$ ), а затем — в области  $M > 1$  — при отводе его.

К подробному объяснению этой особенности закона изменения температуры в тепловом сопле мы вернемся в дальнейшем.

## 1,12. ДВИЖЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

В предыдущих четырех частных случаях движение газа рассматривалось в пренебрежении работой трения. В противоположность этому исследуем теперь такое идеализированное газовое течение, в котором из всех воздействий существенное значение имеет одна только работа трения ( $dL_r \neq 0$ ).

Этот случай отвечает течению газа по трубе постоянного сечения ( $dF = 0$ ), при постоянном весовом расходе ( $dG = 0$ ) и отсутствии обмена энергией с окружающей средой как в виде работы ( $dL_r = 0$ ), так и в виде тепла ( $dQ_a = 0$ ).

Задачу рассмотрим в самом общем виде, не делая каких-либо предположений о зависимости работы трения от скорости движения или других параметров процесса.

Характер изменения скорости движения и термодинамических параметров найдем, как и прежде, из уравнений обращения воздействий:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = -\frac{g}{a^2} \left[ 1 - \frac{Aa^2}{g^2 c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] dL_r, \quad (1,45)$$

$$(M^2 - 1) \frac{dp}{p} = \frac{g^2}{p} \left[ 1 - \frac{Aa^2}{g^2 c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] dL_r, \quad (1,46)$$

$$(M^2 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = \frac{g}{a^2} \left[ 1 - \frac{Aa^2}{g^2 c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] dL_r, \quad (1,47)$$

$$(M^2 - 1) \frac{dT}{T} = -\frac{g}{a^2} \frac{\rho c_p}{T c_v} \cdot \frac{1}{\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p} \left[ 1 - \frac{Aa^2}{g^2 c_p} \cdot \frac{\frac{c_v}{c_p} - M^2}{\frac{c_v}{c_p} - 1} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] dL_r. \quad (1,48)$$

В случае неравенства  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p < 0$  первые три уравнения дают однозначный закон изменения скорости, давления и плотности под влиянием трения. Увеличению скорости дви-



жения в этом случае отвечает расширение газа (падение давления и плотности), тогда как торможение потока ( $dw < 0$ ) сопровождается сжатием ( $dp > 0$ ;  $d\rho > 0$ ).

Характер изменения скорости движения под влиянием трения дается в приведенной ниже табличке:

$$\left. \begin{array}{l} M < 1 \\ M = 1 \\ M > 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} dw > 0 \\ |dw| = \infty \\ dw < 0 \end{array} \right\} dL_r > 0.$$

Особенностью рассматриваемого случая является „односторонность“ внешнего воздействия — работы трения. Действительно, в условиях изолированного процесса, согласно второму началу термодинамики, величина работы трения всегда положительна:

$$dL_r = \frac{dQ_r}{A} = \frac{TdS}{A} > 0.$$

В связи с этим для дозвукового течения здесь возможно одно только ускоренное движение, а для сверхзвукового — одно только замедленное. Непрерывный переход через критическую скорость при действии одного только трения (в стационарном течении) принципиально невозможен. Поэтому пределом ускорения дозвукового потока или замедления сверхзвукового является достижение критической скорости ( $M = 1$ ) — в выходном сечении канала.

Этому предельному состоянию отвечает так называемый „кризис“ течения, математическим выражением которого является стремление к бесконечности величины  $|d \ln w|$  — по абсолютному значению при  $M = 1$ . Характер „кризиса“ иллюстрируется приведенным ранее графиком (фиг. 1,1), из которого видно, что ускорение терпит сильный разрыв в критическом сечении ( $d \ln w \rightarrow +\infty$  при стремлении  $M \rightarrow 1$  со стороны  $M < 1$  и  $d \ln w \rightarrow -\infty$  при стремлении  $M \rightarrow 1$  со стороны  $M > 1$ ).

В связи с тем, что в „предельном состоянии“ в левой части уравнений (1,45) — (1,47) имеет место неопределенность (произведение нуля на бесконечность) при конечной величине справа ( $dL_r = \frac{TdS}{A} > 0$ ) предельное состояние газа в критическом сечении отвечает элементарному изоэнтропическому процессу. Последнее означает, что элементарная работа трения в этом сечении (и, следовательно, изменение энтропии) является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем элементарное изменение кинетической энергии, энтальпии и т. п. Это замечание, разумеется, не означает

тождественного обращения в нуль величины  $dS = \frac{AdL_r}{T}$ , поскольку последнее противоречило бы исходным условиям для рассматриваемой задачи ( $dL_r \neq 0$ )\*.

Чрезвычайно существенно, что полученный выше вывод о невозможности непрерывного перехода через скорость звука в канале постоянного сечения под влиянием трения относится только к заданной обстановке процесса (отсутствие других воздействий). Это обстоятельство неоднократно упускалось из виду в специальной литературе, и изложенный выше результат трактовался неверно, как доказательство невозможности получения в цилиндрической трубе сверхзвуковой скорости. Подчеркнем также, что полученный вывод относится только к непрерывному переходу и, разумеется, не отрицает возможности скачкообразного перехода из сверхзвукового течения в дозвуковое с последующим разгоном движения до скорости звука на выходе из канала. Этот случай будет рассмотрен в третьей части книги.

Остановимся в заключение на законе изменения температуры. Как это видно из уравнения (1,48), последний весьма сложен. Действительно, даже при условии  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$ , принципиально возможно как убывание температуры в дозвуковом (ускоренном) течении и рост ее в сверхзвуковом (замедленном), так и обратное соотношение: рост температуры одновременно со скоростью в дозвуковом потоке и убывание температуры и скорости — в сверхзвуковом.

Первый из этих случаев  $\left(t = \frac{d \ln w}{d \ln T} < 0\right)$ , повидимому, является практически наиболее общим. Ему при условии  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$  отвечает неравенство

$$1 < \frac{Aa^2}{gpc_p} \frac{\frac{c_v}{c_p} - M^2}{\frac{c_v}{c_p} - 1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p.$$

\* На встречающееся иногда неверное толкование предельного состояния указывает И. И. Новиков (см. „Замечания к теории предельных состояний течения газов“. Известия Академии наук СССР, ОТН, 1945 г., № 10—11).

Обратное соотношение ( $t = \frac{d \ln w}{d \ln T} > 0$ ) в случае  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p < 0$  может иметь место, если

$$1 > \frac{Aa^2}{g^2 c_p} \frac{\frac{c_v}{c_p} - M^2}{\frac{c_v}{c_p} - 1} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p.$$

Заметим, во избежание недоразумений, что случай одновременного роста или убывания скорости и температуры в процессе движения под влиянием одного только трения не противоречит, разумеется, первому началу термодинамики. Полная энтальпия в рассматриваемом процессе не меняется:  $I_0 = I + \frac{Aw^2}{2g} = \text{const}$ ; поэтому рост скорости всегда сопровождается падением энтальпии, а падение скорости — ее ростом; однако, если  $t = \frac{d \ln w}{d \ln T} > 0$ , то  $\frac{\partial I}{\partial T} < 0$  и характер изменения температуры и энтальпии противоположен. При  $t < 0$  имеем, как обычно,  $dI > 0$  при  $dT > 0$  и  $dI < 0$  при  $dT < 0$ .

Из уравнений (1,45) — (1,48) нетрудно установить также соотношения между скоростью движения и параметрами состояния для случая  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p > 0$ , здесь не рассматриваемого<sup>1</sup>.

## Глава 1,4. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

### 1,13. СХЕМЫ ИДЕАЛЬНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СОПЕЛ

Проведенный выше анализ различных частных случаев влияния отдельных внешних воздействий на газовое течение привел нас к ряду схем приборов, в которых принципиально возможен непрерывный переход через критическую скорость. При разборе четырех таких схем (геометрическое, расходное, механическое и тепловое сопла, три из которых были рассмотрены впервые в работах автора<sup>2</sup>), нетрудно установить ряд общих закономерностей, имеющих принципиальное значение<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> По этому поводу (о движении с трением) см. Л. Д. Ландау и Е. М. Лившиц, *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, 1944 г., стр. 326.

<sup>2</sup> См. Л. А. Вулис, О переходе через скорость звука в газовом течении. Доклады Академии наук СССР, т. 54, вып. 8, 1946 г.

<sup>3</sup> Следуя принятому выше условию, будем рассматривать далее течение газа, физические свойства которого удовлетворяют неравенству

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p < 0.$$

Прежде всего мы установили невозможность непрерывного перехода через критическую скорость движения, равную местной скорости звука, путем любого одностороннего по своему характеру воздействия. Наиболее наглядным примером является движение газа под влиянием одного только трения, где обращение воздействия принципиально невозможно; то же самое относится, например, к изолированному движению в сходящейся трубе и т. п.

Для дальнейшего целесообразно будет подразделить все внешние воздействия на две категории: «прямых» и «обратных». К первым — «прямым» — отнесем те из воздействий, которые приводят к ускорению дозвукового потока и замедлению сверхзвукового. Ко вторым — «обратным» — те из них, которые приводят к торможению дозвукового и ускорению сверхзвукового потока. В соответствии с этим, к числу «прямых» воздействий надо отнести уменьшение сечения канала:  $dF < 0$ ; подвод дополнительной массы газа:  $dG > 0$ ; съём технической работы:  $dL_T > 0$ ; подвод тепла:  $dQ_a > 0$  и работу трения:  $dL_T > 0$ . К «обратным» воздействиям соответственно следует причислить расширение русла:  $dF > 0$ ; отвод газа  $dG < 0$ ; подвод работы  $dL_T < 0$  и отвод тепла  $dQ_a < 0$ .

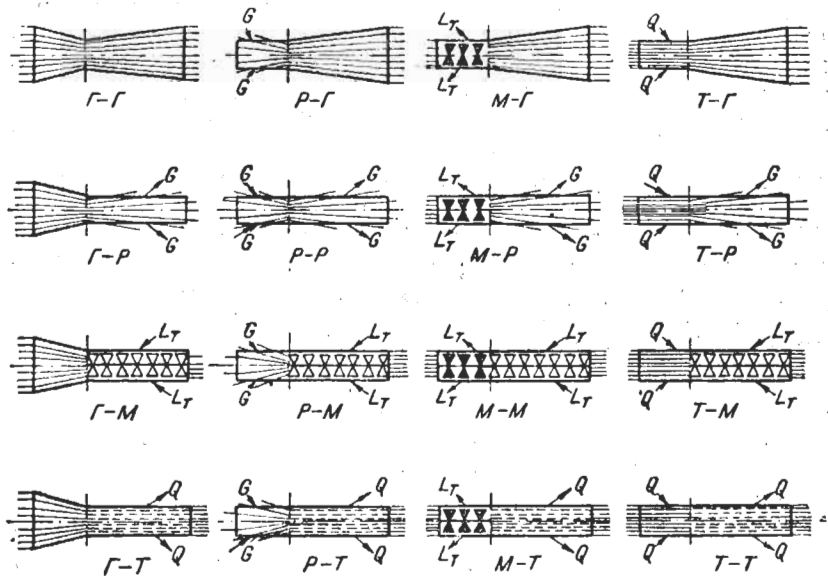
Пределом ускорения дозвукового потока газа или торможения сверхзвукового при любом «прямом» одностороннем изолированном воздействии (сужении русла потока, подводе дополнительной массы газа, съеме работы, трения или подводе тепла), или одновременном действии нескольких из них, является достижение скорости движения, равной по величине местной скорости звука. Дальнейшее ускорение движения (в сверхзвуковом потоке) связано с переменой знака воздействия, т. е. с переходом соответственно к одному из «обратных» воздействий: расширению русла, отводу газа, подводу работы или отводу теплоты.

Выше уже указывалось, что широкое распространение в технике в настоящее время получило одно только геометрическое сопло Лаваля. Возможность практического применения других схем может быть выяснена только путем специального эксперимента, тем более, что движение газов в некоторых из них (например, в механическом сопле) относится, в сущности, к принципиально неодноразмерной задаче.

Однако, значительно большее значение может иметь применение не столько самих схем сверхзвуковых сопел, сколько их отдельных элементов в чистом виде или в комбинации с другими и, главным образом, использование различных эффектов, рассмотренных ниже. Надо полагать, что в дальнейшем реализация этих эффектов значительно расширится.

Основным в схеме каждого из сопел является обращение знака воздействия в критическом сечении его. При этом выбор

второго («обратного») воздействия — после достижения критической скорости — ничем в сущности не связан с методом ускорения, применявшимся в дозвуковой области течения. Иными словами, для осуществления непрерывного перехода через скорость звука отнюдь не обязательно применение одного и того же воздействия (геометрического, теплового и т. п.) на обоих участках сопла. Мы приходим, таким образом, в принципе к большому числу разнообразных составных схем,



Фиг. 1,8. Схемы составных сопел.

(Г — геометрическое, Р — расходное, М — механическое, Т — тепловое воздействие).

состоящих из последовательно-включенных участков «прямого» и «обратного» воздействия, одинаковой или различной природы. В первом случае речь идет о рассмотренных выше схемах геометрического (Г.Г.С.), расходного (Р.Р.С.) и т. п. соплах; примерами второго типа могут служить, например, «тепло-геометрическое» сопло (Т.Г.С.), составленное из цилиндрической трубы, в которой газ за счет подвода тепла расширяется до звуковой скорости, и расходящегося адиабатического насадка, «тепло-механическое» сопло (Т.М.С.), т. е. последовательная комбинация камеры сгорания и сверхзвукового нагнетателя и т. п.

Принципиальные схемы таких составных сопел, полученных путем последовательного соединения различных воздействий, изображены на фиг. 1,8. Вместе с четырьмя основными случаями они составляют шестнадцать различных комбинаций,

подчиняющихся единому закону обращения воздействия в критическом сечении сопла. Отметим также два весьма существенные следствия этого закона.

Первое из них выражает ограниченность любого суммарного одностороннего воздействия на движущийся газ. Так, например, максимальное суммарное количество теплоты, которое можно подвести к газу, движущемуся с некоторой скоростью в трубе постоянного сечения, оказывается не произвольным; оно ограничено достижением критической скорости, как было указано в 1945 г. Г. Н. Абрамовичем, назвавшим это явление «тепловым кризисом»<sup>1</sup>. То же самое относится к суммарной работе, которую может совершить (или воспринять) движущийся газ, а также к суммарной дополнительной массе газа или суммарному изменению поперечного сечения потока при других воздействиях — при заданном состоянии газа и скорости его во входном сечении.

Существенно, что по мере сближения начальной скорости движения со скоростью звука предельная величина суммарного количества воздействия, которое может быть оказано на движущийся газ, падает, стремясь к нулю. Иными словами, чем ближе число  $M$  в начальном сечении любого сопла к единице, тем меньше суммарное одностороннее «количество воздействия», которое может быть оказано на газовый поток. Этот важный вывод станет яснее во второй части книги после перехода к интегральным соотношениям — для идеального газа.

Отметим только, что этот вывод в равной мере относится как к дозвуковому, так и к сверхзвуковому течению в случае идеального (непрерывного) или разрывного торможения. В последнем случае, если при торможении сверхзвукового потока происходит скачок уплотнения, переводящий, как известно, течение в дозвуковое, пределом одностороннего воздействия опять-таки остается достижение критической скорости. Суммарное «количество воздействия» (например, критическое количество тепла) в этом случае однозначно определяется значением числа  $M$  после скачка.

Второе следствие, вытекающее из «закона обращения», определяет режим стационарного процесса в критическом сечении. Во всех рассмотренных частных случаях в критическом сечении сопла при  $M = 1$  всегда имело место изолированное течение, т. е. равенство нулю элементарного воздействия. То же самое относится и к сумме различных элементарных воздействий при одновременном действии их, согласно основному уравнению (1,7).

<sup>1</sup> См. Г. Н. Абрамович, О тепловом кризисе в газовом течении. Доклады Академии наук СССР, т. 54, вып. 7, 1946 г.

## 1,14. КОМБИНИРОВАННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

До сих пор мы рассматривали различные случаи движения газов, находящихся под влиянием одного только воздействия. Отметим теперь некоторые особенности, связанные с комбинированным (параллельным) действием различных факторов.

Об одной из таких особенностей мы уже говорили выше. Речь идет о прохождении через экстремум суммарного воздействия всех влияющих на поток факторов в критическом сечении: при  $M = 1$ ,  $d\tau = 0$ .

Анализируя уравнение (1,7), нетрудно также заключить, что при одновременном действии различных факторов критическое сечение, в котором число  $M$  равно единице, вообще говоря, не совпадает более с сечением, в котором имеет место экстремум отдельного «чистого» воздействия.

Поясним это на примере комбинированного действия двух факторов, например, теплового и геометрического. В этом случае из основного уравнения (1,7) следует:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} + \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a. \quad (1,49)$$

Допустим, что речь идет о течении в сопле Лаваля при постоянном знаке подвода тепла. Пусть для определенности  $dQ_a > 0$  (т. е. тепло подводится) и  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p < 0$ . В этом случае в критическом сечении при  $M = 1$  будет иметь место соотношение

$$\left[ \frac{dF}{F} \right]_{M=1} = - \left[ \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a \right]_{M=1} > 0,$$

т. е. скорость движения, равная скорости звука, наступит в расширяющемся насадке (за пережимом). В минимальном сечении сопла ( $dF = 0$ ) при этих условиях будет дозвуковая скорость (фиг. 1,9,а). При отводе тепла ( $dQ_a < 0$ ) критическое сечение сместится в сходящийся насадок (до пережима), так как

$$\left[ \frac{dF}{F} \right]_{M=1} = - \left[ \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a \right]_{M=1} < 0.$$

В этом случае в минимальном сечении (пережиме) сопла получается сверхзвуковая скорость (фиг. 1,9,б).

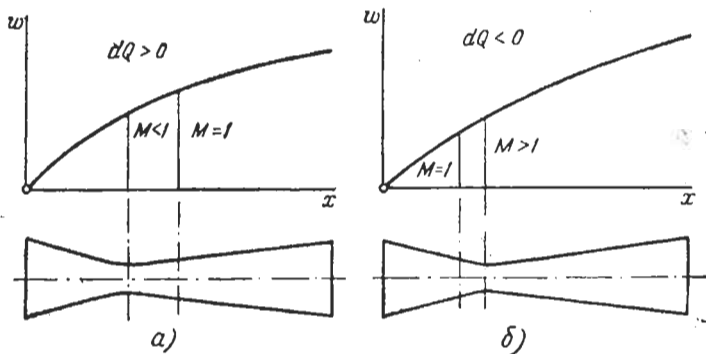
Эти соотношения, в частности, относятся к процессу истечения из цилиндрических или сходящихся насадков с подводом или отводом тепла. При подводе тепла предельная скорость истечения будет меньше звука, при отводе его — больше.

Допустим теперь, что движение газа происходит по каналу переменного сечения, однако при сохранении неизменным знака  $dF$ , например, в расходящемся насадке ( $dF > 0$ ). В противоположность этому зададим последовательное изменение знака теплового воздействия, т. е. смену подвода и отвода тепла.

Из того же уравнения (1,7) следует, что при  $M = 1$  получается равенство:

$$\left[ -\frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a \right]_{M=1} = \left[ \frac{dF}{F} \right]_{M=1} > 0.$$

Это значит, что в критическом сечении в расходящемся насадке тепло подводится. Следовательно, сечение, в котором меняется знак теплового воздействия ( $dQ_a = 0$ ), если тако-



Фиг. 1,9. Смещение критического сечения в геометрическом сопле под влиянием подвода тепла или трения (случай *a*) или отвода тепла (случай *б*).

вое имеется, смещается в этом случае в область сверхзвукового течения. Наоборот, при движении газа с последовательным подводом и отводом тепла в сходящейся трубе ( $dF < 0$ ) в критическом сечении при  $M = 1$  тепло будет отводиться, так как

$$\left[ -\frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a \right]_{M=1} = \left[ \frac{dF}{F} \right]_{M=1} < 0,$$

а сечение, в котором происходит изменение знака теплообмена ( $dQ_a = 0$ ), если таковое имеется, и переместится в дозвуковую область.

Аналогичным образом не трудно качественно проследить и за другими частными случаями параллельных воздействий.



Выполним это еще на одном примере с целью показать влияние трения. При движении газа с трением по геометрическому соплу уравнение (1,7) имеет вид:

$$(M^2 - 1) \frac{d\omega}{\omega} = \alpha_F dF - \alpha_r dQ_r, \quad (1,50)$$

где  $\alpha_F$  и  $\alpha_r$  — краткое обозначение коэффициентов при соответствующих воздействиях. Величина  $\alpha_F > 0$  так же, как и  $\alpha_r > 0$  при условии  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$ .

В критическом сечении — при  $M = 1$

$$[dF]_{M=1} = \left[ \frac{\alpha_r}{\alpha_F} dQ_r \right]_{M=1} > 0,$$

поскольку всегда  $dQ_r > 0$ . Таким образом под влиянием трения критическое сечение смещается за пережим (минимальное сечение) сопла Лавала в область расширяющегося насадка ( $dF > 0$ ) и устанавливается в том месте потока, где обратное воздействие ( $dF > 0$ ) компенсирует влияние трения.

В соответствии с этим скорость движения газа в минимальном сечении ( $dF = 0$ ), или скорость истечения из простых насадков при наличии трения, оказывается меньше звука. Действительно, при  $dF = 0$  из уравнения (1,50) для ускоренного движения газа следует:  $M < 1$ .

Как и следовало ожидать, полученные выводы повторяют результаты, приведенные выше для течения с подводом тепла (фиг. 1,9,а).

В другом частном случае движения с трением по тепловому соплу ( $dF = dG = dL_r = 0$ ;  $dQ_a \neq 0$ ;  $dQ_r \neq 0$ ) скорость движения будет равна местной скорости звука в том сечении, где (при  $M = 1$ ) будет происходить отвод тепла, превышающий выделение теплоты за счет трения в этом сечении.

Действительно, из уравнения (1,7), которое для рассматриваемого процесса перепишем в виде

$$(M^2 - 1) \frac{d\omega}{\omega} = - \left[ \frac{g}{Aa^2} - \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] dQ_r + \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a \quad (1,51)$$

следует:

$$\left[ \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a \right]_{M=1} = \left[ \frac{g}{Aa^2} - \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_r \right], \quad (1,52)$$

откуда

$$\left(\frac{dQ_a}{dQ_r}\right)_{M=1} = - \left[ 1 - \frac{g^0 c_p}{Aa^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p} \right]_{M=1} \quad (1,52')$$

и, следовательно, при  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$

$$(dQ_a)_{M=1} < 0 \text{ и } |dQ_a|_{M=1} > |dQ_r|_{M=1}.$$

Не останавливаясь на других частных случаях, сформулируем общие выводы.

Если суммарное действие всех односторонних факторов соответствует «прямому» воздействию<sup>1</sup>, то критическое сечение смещается в область «обратного» воздействия того из факторов, знак воздействия которого меняется. Если же суммарное воздействие остальных факторов имеет «обратный» характер, то критическое сечение устанавливается в области «прямого» действия знакопеременного фактора, а сечение, в котором он меняет свой знак, смещается в сверхзвуковую область течения.

Поясним это еще раз на примере течения газа в геометрическом сопле при наличии других воздействий (теплового, механического, расходного и трения). В общем случае критическое сечение не будет совпадать с минимальным (т. е. пережимом сопла). Если результирующее действие всех остальных факторов, кроме геометрического, приводит к ускорению дозвукового потока (например, преобладает трение), критическое сечение ( $M=1$ ) будет смещено в расходящийся насадок — за пережим сопла.

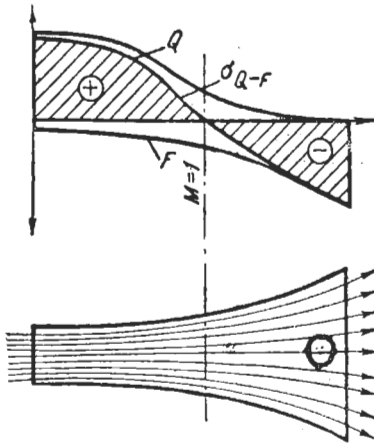
При обратном соотношении (например, при преобладании отвода тепла и т. п.) критическое сечение сместится в сходящийся насадок — до пережима сопла. В соответствии с этим, при истечении из цилиндрических или сходящихся насадков, предельная скорость истечения в общем случае отлична от критической скорости, а именно может быть больше ее, равна или меньше.

Из этого примера вытекает весьма существенный результат. Как было отмечено выше, для осуществления непрерывного перехода через скорость звука оказывается необязательным задание последовательной смены одного и того же воздействия. Действительно, из основного уравнения (1,7) видно, что речь идет об обращении суммарного воздействия. Можно, следовательно, обеспечить непрерывный переход через скорость звука, путем параллельного воздействия нескольких

<sup>1</sup> Величина суммарного элементарного воздействия в уравнении (1,7')  $d\sigma_w < 0$ .

факторов, например двух: «прямого» и «обратного», если в начале сопла задано преобладание «прямого» воздействия, а в конце его — после перехода через звук — «обратного». Например, подводя интенсивно тепло в расходящейся трубе при соотношении воздействий:  $\frac{dF}{F} < -\frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a$ , можно обеспечить ускорение газа вплоть до достижения критической скорости — в сечении, где имеет место равенство воздействий:

$$\left[ \frac{dF}{F} \right]_{M=1} = \left[ -\frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a \right]_{M=1}, \quad (1,53)$$



Фиг. 1,10. Схема комбинированного сопла.

(вверху показано изменение воздействий:  $Q$  — тепловое;  $F$  — геометрическое;  $\sigma_{Q-F}$  — суммарное воздействие).

а затем — при более сильном расширении русла, когда  $\frac{dF}{F} > -\frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dQ_a$  — продолжать ускорение газа в сверхзвуковом течении. Схематически такое комбинированное сопло показано на фиг. 1,10.

Аналогичное соотношение воздействий может быть, например, создано при отводе тепла в сходящейся трубе<sup>1</sup>, постепенном отводе газа в цилиндрической камере сгорания и в других аналогичных случаях.

Рассмотренные примеры показывают, сколь разнообразны методы воздействия на газовые течения, в частности способы получения сверхзвуковых потоков. Вопросы, связанные с практическим использованием этих эффектов, выходят за рамки этой книги и, как уже указывалось, здесь не рассматриваются.

### 1,15. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ ПРОЦЕССА И „КРИЗИС“ ТЕЧЕНИЯ

Для того чтобы выяснить несколько подробнее особенности теплового воздействия, прибегнем вновь к исходным дифференциальным уравнениям. Возьмем из них вначале только два: уравнение неразрывности и обобщенное уравнение Бернулли.

<sup>1</sup> Здесь могут быть случаи, когда увеличение скорости будет сопровождаться ростом, а не падением (как обычно) плотности.

Перепишем второе из них (для случая постоянного весового расхода:  $dG=0$ ); в виде:

$$\frac{dp}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{\rho} + \omega^2 \frac{d\omega}{\omega} + g(dL_T + dL_r) = 0. \quad (1,54)$$

Обозначим полную производную давления по плотности символом

$$u^2 = \frac{dp}{d\rho}, \quad (1,55)$$

причем величину

$$u = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \quad (1,55')$$

(значение которой характеризует связь давления с плотностью в рассматриваемом процессе, а размерность совпадает с размерностью скорости) назовем „характеристической скоростью процесса“, имея в виду случай  $\frac{dp}{d\rho} > 0$ , т. е. исключая из рассмотрения процессы изменения состояния при отрицательном значении местного показателя политропы<sup>1</sup> ( $n < 0$ ).

Подставим в уравнение (1,54) значение  $\frac{dp}{d\rho}$  из уравнения неразрывности (1,6) и сгруппируем в правой части все члены, содержащие элементарные воздействия. После несложных выкладок получим

$$\left(\frac{\omega^3}{u^2} - 1\right) \frac{d\omega}{\omega} = \frac{dF}{F} - \frac{g}{u^2} dL_T - \frac{g}{u^2} dL_r. \quad (1,56)$$

По внешнему виду полученное уравнение напоминает уравнение (1,7). Так же, как и оно, уравнение (1,56) определяет закон изменения скорости движения в зависимости от различных воздействий. Новое уравнение отличается, однако, тем, что в нем повсюду вместо квадрата скорости звука  $a^2$  стоит величина  $u^2$  — квадрат характеристической скорости процесса. Кроме того, в правой части уравнения (1,56) отсутствует член с  $dQ_a$ , отвечающий внешнему тепловому воздействию (хотя в общем случае  $dQ_a \neq 0$ ).

Как и уравнение закона обращения воздействий, уравнение (1,56) определяет условия непрерывного перехода через скорость движения, равную местной величине характери-

<sup>1</sup> Для весьма редких случаев процесса при  $n < 0$  и  $\frac{dp}{d\rho} < 0$  применение понятия характеристической скорости процесса, разумеется, лишено смысла.

ческой скорости. В случае  $w < u$ , который мы назовем „допредельным“ течением, прямые воздействия ( $dF < 0$ ;  $dL_T > 0$ ;  $dL_r > 0$ ) ускоряют движение, а обратные ( $dF > 0$ ;  $dL_T < 0$ ) — замедляют его. Противоположные соотношения складываются в „сверхпредельной“ области течения — при  $w > u$ . Наконец при  $w = u$  в предельном сечении — в случае непрерывного перехода скорости через значение  $w = u$  — должна обратиться в нуль правая часть уравнения (1,56). Если это условие не соблюдается, то при  $w = u$  наступает „кризис“ течения, т. е. имеет место стремление  $\frac{dw}{w}$  к бесконечности по абсолютной величине:

$$\left| \frac{dw}{w} \right| \rightarrow \infty,$$

причем знак  $dw$  положителен при  $w < u$  и отрицателен при  $w > u$ .

Мы приходим, таким образом, к полной внешней аналогии с переходом через скорость звука.

Рассмотрим несколько простейших частных случаев движения, в которых величина характеристической скорости процесса имеет простой смысл.

### а) Изоэнтропический процесс ( $dS=0$ )

При отсутствии теплообмена ( $dQ_a=0$ ) и трения ( $dQ_r=0$ ) характеристическая скорость совпадает со скоростью звука

$$u^2 = \frac{dp}{d\rho} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2.$$

Уравнение (1,52) в этих условиях тождественно уравнению (1,7). В свою очередь, скорость звука может рассматриваться как частный случай характеристической скорости для процессов с постоянной энтропией.

### б) Движение в тепловом сопле

При движении газа по каналу постоянного сечения под влиянием одного только теплообмена ( $dF = dG = dL_T = dL_r = 0$ ;  $dQ_a \neq 0$ ), как это видно из уравнения (1,52) в виде

$$\left( \frac{w^2}{u^2} - 1 \right) \frac{dw}{w} = 0, \quad (1,57)$$

скорость движения непрерывно совпадает по величине с характеристической скоростью:

$$w^2 = \frac{dp}{d\varphi} = u^2, \quad (1,58)$$

хотя в общем случае величина скорости все время меняется.

### в) Движение в геометрическом сопле с подводом или отводом тепла

В этом случае из уравнения (1,56) следует:

$$\left(\frac{w^2}{u^2} - 1\right) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F}. \quad (1,59)$$

Последнее означает, что скорость движения  $w$  (в случае  $dw > 0$ ) вплоть до минимального сечения меньше величины  $u$ , в пережиме сопла достигает предельного значения

$$w = w_{np} = u \text{ при } dF = 0$$

и в расширяющемся насадке  $w > u$ .

Применим для описания изменения состояния в этом случае уравнение элементарного политропического процесса:

$$\frac{dn}{n} = n \frac{d\rho}{\rho}; \quad u^2 = n \frac{p}{\rho}$$

при переменной в общем случае от сечения к сечению величине показателя политропы  $n$ . В минимальном сечении сопла Лавала в этом случае (а также при истечении газа с подводом или отводом тепла из простых насадков) предельная скорость, очевидно, равна

$$w_{np} = \sqrt{n \frac{p}{\rho}}$$

и в зависимости от значения  $n$  может быть больше или меньше скорости звука.

### г) Политропические течения

Для процессов, которые можно (обычно на ограниченном участке течения) схематизировать, как политропические, т. е. подчиняющиеся уравнению

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const при } n = \text{const},$$

величина

$$u^2 = n \frac{p}{\rho}$$

играет роль, аналогичную скорости звука в изэнтропических процессах. Более подробно этот случай будет рассмотрен специально<sup>1</sup>.

#### д) Общий случай

В общем случае произвольного процесса изменения состояния

$$u^2 = \frac{dp}{d\varphi} = \left( \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_S + \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_\varphi \frac{dS}{d\varphi}$$

или, с учетом встречавшихся ранее соотношений,

$$u^2 = a^2 \left[ 1 - \frac{1}{c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dQ_a + dQ_r}{d\varphi} \right]. \quad (1,60)$$

Как видно из этого уравнения (и как это следует из самого названия), величина  $u$  — характеристическая скорость процесса, в отличие от скорости звука, являющейся функцией состояния, представляет собой функцию процесса. Значение ее зависит от закона распределения теплового воздействия и работы трения. Несмотря на это применение величины  $u^*$  в отдельных случаях помогает истолковать термодинамические особенности различных процессов.

### 1,16. ФИЗИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ ЗАКОНА ОБРАЩЕНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В качестве последнего из вопросов общей теории одномерных стационарных газовых течений рассмотрим физическую природу явлений «обращения воздействий» при переходе через критическую скорость. Для этой цели мы должны будем выйти за рамки термодинамики и обратиться к вопросам механики распространения возмущений (слабых волн давления) в газах.

Последнее позволит нам дать качественное физическое толкование процессов течения газов в различных соплах. Заметим, что такое объяснение, повидимому, отсутствовало до настоящего времени даже для простейшего случая сопла Лаваля.

<sup>1</sup> См. § 2,19.

\* Введенной в одной из работ А. А. Гухмана и автора.

Желательность качественного объяснения явления отчетливо видна из рассмотренных ранее примеров. Напомним некоторые из них. Как было показано выше, подвод к движущемуся газу энергии в виде тепла приводит к ускорению дозвукового потока и торможению сверхзвукового, тогда как подвод к газу механической энергии (в виде работы) приводит к торможению дозвукового потока и ускорению сверхзвукового. Первое из этих соотношений (для подвода тепла) справедливо, однако, лишь при неравенстве  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p < 0$ . Что касается второго (подвода механической энергии), то оно привело нас к выводу об ускорении дозвукового потока при движении против направления действия массовой силы (гравитационной, центробежной, или, например, силы электрического поля при движении ионизированного газа) и торможении его при движении в направлении действия силы и т. п.

Разумеется, что все эти выводы и конкретные результаты, изложенные в предыдущих (и последующих) разделах, можно рассматривать как простые следствия основных физических законов сохранения массы, энергии и количества движения в применении к стационарному одномерному движению газа. Однако, такое объяснение является в известной степени формальным и вряд ли дает полное удовлетворение.

Весьма мало помогают в этом отношении и те описания количественных соотношений между отдельными параметрами процесса, к которым прибегают зачастую при анализе течения газа в сопле Лаваля. Распространенным является, например, следующее объяснение: плотность газа меняется в дозвуковом потоке медленней, а в сверхзвуковом — быстрее, чем скорость движения, поэтому при постоянном секундном расходе ускорение дозвукового потока происходит в сходящемся насадке, а сверхзвукового — в расходящемся. Эти правильные соображения (приведенные также и нами<sup>1</sup>), разумеется, только описывают, но не объясняют явления.

Между тем, единообразный характер «обращения воздействий» для самых различных явлений и возможность разделения их на две категории: «прямых», аналогичных сужению русла каната, т. е. ускоряющих дозвуковой поток и тормозя-

<sup>1</sup> См. стр. 42.

В сущности приведенный тезис представляет собой, как уже отмечалось, расшифровку формулы (см. табл. 1,1):

$$m = \frac{d \ln w}{d \ln \rho} = - \frac{1}{M^2},$$

из которой следует: при  $M < 1$ ,  $\left[ \frac{d \ln w}{d \ln \rho} \right] > 1$ ; при  $M > 1$ ,  $\left[ \frac{d \ln w}{d \ln \rho} \right] < 1$ .



щих сверхзвуковой и «обратных», аналогичных расширению русла, т. е. приводящих к противоположным эффектам, свидетельствует о наличии единого физического механизма, объясняющего все эти, внешне различные явления.

Прежде чем изложить попытку такого качественного объяснения, принадлежащего М. С. Натанзону<sup>1</sup> и автору этой книги, обратимся к картине распространения возмущений в потоке сжимаемой жидкости.

Из физики известно, что скорость звука представляет собой скорость распространения слабых волн давления (малых возмущений).

Для одномерного дозвукового течения слабые волны давления, порождаемые каким-либо помещенным в поток источником возмущений, будут распространяться в двух направлениях: в направлении движения (условно — вниз по потоку) и против него (условно — вверх по потоку), хотя абсолютная скорость распространения возмущений — относительно неподвижной системы координат — в этих направлениях будет различна. В первом случае, вниз по потоку, скорость слабой волны будет равна сумме скоростей движения газа и скорости звука в нем, во втором — вверх по потоку — их разности. Через достаточно большой промежуток времени возмущение распространится на всю область дозвукового течения<sup>2</sup>.

В сверхзвуковом потоке явление будет протекать принципиально отлично. Так как скорость распространения слабых волн давления равна скорости звука, то при  $M > 1$  возмущения будут «сноситься» потоком в направлении движения газа и вовсе не будут проникать вверх по потоку — против направления движения. Таким образом, вся область сверхзвукового течения до источника возмущения представит собой, образно выражаясь, «зону молчания», в которую не проникают звуковые сигналы. Последние, т. е. слабые волны давления, будут, следовательно, распространяться только на участке течения ниже источника возмущения.

Для иллюстрации этого важнейшего различия в свойствах дозвукового и сверхзвукового течений в газодинамике иногда прибегают к следующему образному сравнению. Говорят, что сверхзвуковой поток, подобно слепому, натывается на препятствия, не зная заранее об их существовании; дозвуковой поток «видит» препятствия заранее и перестраивается для их обтекания («видит», так как «предупреждается» бегущими навстречу течению возмущениями).

Перейдем теперь от общей картины распространения возмущений к конкретной задаче об истечении газа.

<sup>1</sup> С участием которого написан этот раздел.

<sup>2</sup> Вязкостью и теплопроводностью среды пренебрегаем.

При истечении с дозвуковой скоростью давление в выходном сечении сопла всегда равно противодействию окружающей среды. Действительно, если бы давление в выходном сечении дозвуковой струи отличалось от давления в окружающей среде, например, было бы больше его, то волна разрежения, возникшая в выходном сечении, распространилась бы против течения и вызвала бы в сопле (и резервуаре, из которого истекает газ) такое снижение давления, которое уравняло бы давление на выходе и в окружающей среде. Аналогичная картина (т. е. повышение давления в сопле и резервуаре до совпадения давления на выходе и противодействия) имела бы место при распространении волны сжатия в случае, если бы давление на выходе дозвуковой струи было бы меньше противодействия.

При сверхзвуковом (сверхкритическом) истечении — в противоположность этому давление в выходном сечении сопла не зависит от противодействия и может быть больше или меньше его. Это возможно именно потому, что возникающие в выходном сечении слабые волны давления сносятся вытекающей струей и не проникают в сопло против течения.

Представим теперь, что в канале, по которому течет газ, имеется какой-либо непрерывно действующий источник возмущения, расположенный на некотором расстоянии от выходного сечения. Течение за этим местом для простоты будем считать чисто инерционным, т. е. происходящим без трения и какого-либо обмена, к тому же в канале постоянного сечения. Примем также, что секундный расход газа и направление движения не меняются.

Если рассматриваемое течение дозвуковое, то на участке ниже источника возмущения при заданных условиях установится неизменное давление окружающей среды. На участке течения выше источника (включая резервуар, из которого вытекает газ) давление в потоке будет поддерживаться несколько более высоким, или несколько более низким, в зависимости от характера возмущения. Иными словами, дозвуковой поток заранее перестроится так, чтобы иметь за источником возмущения давление, равное противодействию среды.

Если же рассматриваемое течение сверхзвуковое, то поток до источника возмущения сохраняет несвязанное с ним распределение давления, а влияние источника распространится только на область потока ниже его, где оно, однако, сохранится вне зависимости от противодействия среды.

Мы приходим к следующему выводу. При наличии в потоке источника возмущений влияние его будет локализоваться в дозвуковом течении на участке до, а в сверхзвуковом — на участке после места своего возникновения. Что касается характера возмущений, то его легче всего качественно просле-

дить на нестационарной перестройке потока в начальный момент возникновения возмущения. Если разделить все источники возмущений на два вида: вызывающие местное повышение давления, во-первых, и — местное снижение давления, во-вторых, то можно показать (см. ниже), что первые совпадают с «прямыми» воздействиями, а вторые — с «обратными», и, следовательно, выяснить тем самым механизм обращения воздействий.

Источник возмущения, который вызывает местное повышение давления (по существу, препятствие, внесенное в поток), в дозвуковом потоке создает повышенное давление перед собой и не изменяет давление за собой. Это означает, что к потоку будет приложена сила, действующая в направлении движения и вызывающая, согласно закону импульсов, увеличение количества движения (т. е. скорости — при неизменном расходе).

Тот же источник возмущений, внесенный в сверхзвуковой поток, создает область повышенного давления за собой (ниже) и не изменяет давления перед собой (выше). Это означает, что к потоку приложена сила, действующая против направления движения, т. е. тормозящая его при неизменном расходе.

Если источник возмущения вызывает не повышение, а снижение местного давления, то легко сообразить, что он создает в дозвуковом потоке положительный градиент давления (т. е. силу против потока), а в сверхзвуковом — отрицательный градиент давления (т. е. силу по потоку).

Согласно теореме импульсов в первом случае ( $M < 1$ ) скорость движения упадет, во втором ( $M > 1$ ) — возрастет.

Мы пришли, таким образом, к общей формулировке закона обращения воздействий и должны только проиллюстрировать ее на отдельных примерах. Начнем с геометрического сопла. При местном сужении русла потока<sup>1</sup> возникшее повышение давления распространится в дозвуковом потоке вверх, а в сверхзвуковом — вниз по течению. Переходя от одиночного источника слабых возмущений к большому числу их, непрерывно расположенных по длине канала, получим непрерывное ускорение дозвукового потока и (принципиально) непрерывное торможение сверхзвукового.

В противоположность этому, местное увеличение сечения (связанное с падением давления в момент образования возмущения) приведет на основании аналогичных рассуждений к непрерывному торможению дозвукового и ускорению сверхзвукового потока.

<sup>1</sup> В одномерном течении его можно наглядно представить себе в виде сетки, внесенной в поток и вызывающей в первый момент торможение и повышение давления во всем сечении канала.

Обратимся теперь к примеру с тепловым воздействием. Элементарное местное воздействие в этом случае можно представить себе как тепловыделение в некотором объеме потока, происходящее изохорически. Если давление при этом возрастает, то влияние возмущения будет таким же, как сужения канала («прямое» воздействие), если же — в гипотетической среде — выделение тепла при  $V = \text{const}$  привело бы к падению давления, то эффект тепловыделения был бы качественно равносильным местному расширению канала («обратное» воздействие).

Нетрудно видеть, что этот вывод согласуется с полученным ранее.

Действительно, из соотношения

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = -1,$$

с учетом условия стабильности вещества<sup>1</sup>  $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T > 0$ , имеем:

при

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho > 0$$

и при

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p > 0; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho < 0.$$

Вместо частной производной  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho$ , можно, не меняя знака ее, написать  $\left(\frac{\partial p}{c_v \partial T}\right)_\rho$  или  $\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_\rho$  (так как всегда  $c_v > 0$ , где  $c_v$  — теплоемкость при постоянном объеме).

Следовательно, неравенство  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p < 0$ , при котором подвод тепла относился к прямым воздействиям, а отвод его — к обратным, означает рост давления при изохорическом подводе тепла и падение давления при изохорическом отводе тепла.

Выясним теперь особенности механического воздействия. Пусть для определенности речь идет об отводе механической

<sup>1</sup> Условию  $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T < 0$  отвечало бы неустойчивое состояние вещества. Действительно,  $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T < 0$  (т. е.  $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T > 0$ ) означает неограниченный рост удельного объема вещества при случайном повышении давления, или стремление его к нулю при случайном снижении давления.

энергии, т. е. о совершении газом работы против некоторой силы. Такое воздействие, как мы видели ранее, относится к числу прямых, т. е. ускоряет дозвуковой и замедляет сверхзвуковой поток. Очевидно, что при натекании потока на лопатку (которую газ должен нести в направлении движения, или при движении в поле массовой силы — против направления ее действия) будет создаваться местное повышение давления.

Возникающая при этом в дозвуковом течении результирующая сила, направленная по потоку, будет равна разности силы давления и механической силы, связанной с воздействием (например, реакции лопатки) и направленной против движения. При заданном направлении движения первая сила всегда больше второй и, следовательно, дозвуковой поток должен ускориться.

В сверхзвуковом потоке сила реакции будет суммироваться с положительным градиентом давления; в результате будет иметь место торможение.

Противоположные результаты нетрудно получить, если обратить воздействие, т. е. рассмотреть подвод работы, связанный с местным падением давления, появлением положительного градиента давления в дозвуковом потоке и отрицательного — в сверхзвуковом и т. д., вплоть до торможения первого из них и ускорения второго.

При движении с трением для случая  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$  суммируются два однотипных эффекта: подвод тепла и совершение работы. Разбор этого случая не представляет особого интереса.

Отметим также, что, применяя те же рассуждения к случаю совместного влияния на газовый поток различных („прямого“ и „обратного“ воздействий, одно из которых механическое, или трение) можно прийти к условиям, при которых будет иметь место неравенство<sup>1</sup>

$$l = \frac{d \ln w}{d \ln p} > 0,$$

т. е. одновременно будут возрастать или падать давление и скорость. Это легко представить себе, например, при совместном подводе тепла и работы в дозвуковом потоке и таком соотношении сил, когда давление возрастает в направлении движения под влиянием механического усилия, а скорость движения растет под влиянием результирующей силы, действующей в направлении движения.

Подробный разбор таких случаев, а также других, здесь не рассмотренных, предоставляем читателю.

<sup>1</sup> См. ниже, глава 2,2.

Развитые представления наглядно объясняют полученные ранее результаты. Они поясняют также, почему при любом одностороннем воздействии (например, при движении с трением) критическая скорость всегда устанавливается в выходном сечении канала. Именно в этом случае все местные источники слабых возмущений, расположенные по длине канала и действующие в одну сторону, создают экстремальное значение скорости в конце канала. С аналогичными вопросами влияния распространения возмущений мы столкнемся еще в дальнейшем в теории детонационных волн. Применение их к анализу какого-либо явления в газовом потоке всегда целесообразно для лучшего уяснения физической картины процесса.

---

---

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

## ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

### Глава 2,1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ

#### 2,1. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

В отличие от первой части книги, посвященной в основном качественному анализу общих свойств газовых потоков при произвольном виде уравнения состояния, вторая часть содержит в себе подробное применение этих соотношений к непрерывным течениям идеального газа.

Большое внимание при этом будет уделено количественным соотношениям, доведенным во всех случаях до расчетных формул и в отдельных примерах — до численного результата.

При решении таких задач существенное значение имеют не только конечные формулы, но и метод их вывода, а также правильный выбор основных характеристик процесса, позволяющий простым путем получить нужные соотношения и придать им наглядный и обозримый вид. Последнее существенно потому, что в технических приложениях весьма часто идет речь не о простом численном расчете, а об исследовании общих зависимостей и отыскании наиболее эффективной формы построения рабочего процесса.

В связи с этим целесообразно будет предпослать исследованию движения идеального газа краткий обзор основных уравнений и характеристик потока. Изложению этого, в основном справочного, материала будет посвящена глава 2,1.

Цель ее — напомнить читателю основные уравнения и их свойства для различных частных случаев и ознакомить его с необходимыми характеристиками процесса, в частности с теми, которые обычно применяются в газовой динамике<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> См., например, С. А. Христианович, В. А. Гальперин, М. Д. Миллионщиков и Л. А. Симонов, Прикладная газовая динамика, ч. 1, изд. 1948 г.

Начнем с напоминания свойств идеального газа. Уравнение состояния для него напишем в виде:

$$p = \rho g RT = \frac{RT}{V} \quad (2,1)$$

или

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} = \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V}. \quad (2,2)$$

В дополнение к величинам, фигурировавшим в первой части книги, в этих уравнениях  $R \left[ \frac{\text{кгм}}{\text{кг. град}} \right]$  — газовая постоянная. Величина ее определяется из формулы

$$R = \frac{\bar{R}}{\mu},$$

где  $\bar{R} = 848 \left[ \frac{\text{кгм}}{\text{моль. град}} \right]$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu \left[ \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right]$  — вес одного моля.

Величины  $R$ ,  $\mu$ , а также теплоемкость газа и показатель изоэнтропы будем считать постоянными<sup>1</sup>.

Внутренняя энергия и энтальпия идеального газа, связанные между собой, как и всегда, соотношением  $I = U + ApV$ , определяются равенствами:

$$U = c_v T \text{ и } I = c_p T, \quad (2,3)$$

где  $c_v$  и  $c_p$  — соответственно теплоемкости при постоянном объеме и давлении. Из этих равенств следует:

$$I - U = ApV = ART$$

или же

$$c_p - c_v = AR.$$

Отсюда следует также

$$c_p = AR \frac{k}{k-1} \quad (2,4)$$

— для теплоемкости при постоянном давлении и

$$c_v = AR \frac{1}{k-1} \quad (2,5)$$

<sup>1</sup> Влияние изменения физических свойств газа будет приближенно рассмотрено дальше (см. § 2,10).



— для теплоемкости при постоянном объеме, где

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

— показатель изоэнтропы.

Как было показано в первой части книги, свойства газовых потоков существенным образом зависят от знака частной производной  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ .

Для идеального газа из уравнения (2,1) следует:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{\rho}{T} < 0. \quad (2,6)$$

Дифференциальный дроссель-эффект  $\alpha_I = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_I$  для идеального газа равен нулю, поскольку энтальпия газа пропорциональна абсолютной температуре (процессы при  $I = \text{const}$  и  $T = \text{const}$  совпадают).

## 2.2. УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ ДЛЯ НЕПОДВИЖНОГО ГАЗА

Совмещая начало координат с центром тяжести движущегося элемента газа, мы приходим в сущности к рассмотрению баланса энергии в неподвижном (относительно выбранной системы координат) газе.

В этом случае уравнение первого начала, как обычно в термодинамике, может быть записано в виде:

$$dQ = dU + A p dV = dI - A V dp. \quad (1,2)$$

Для идеального газа с учетом соотношений (2,3) можно написать

$$dQ = c_v dT + A p dV \quad (2,7)$$

и

$$dQ = c_p dT - A V dp, \quad (2,7')$$

или в конечной форме:

$$Q_{1,2} = c_v (T_2 - T_1) + A \int_1^2 p dV \quad (2,8)$$

и

$$Q_{1,2} = c_p (T_2 - T_1) - A \int_1^2 V dp. \quad (2,8')$$

Отметим, что уравнения (2,7) или (2,8) не содержат в явном виде технической работы, входящей в общее выражение работы расширения.

Величина  $dQ$  — элементарное количество подведенного к газу тепла — суммируется из двух слагаемых:

$$dQ = dQ_a + dQ_r = dQ_a + AdL_r,$$

отвечающих соответственно внешнему подводу тепла и теплоте трения.

Переносим работу трения в правую часть уравнения (2,7'), получим:

$$dQ_a = dI - AVdp - AdL_r. \quad (2,7'')$$

Таким образом, работа трения входит в явном виде в уравнение первого начала для неподвижного относительно выбранной системы координат газа.

В частном случае изоэнтروпического процесса при

$$dS = \frac{dQ_a + dQ_r}{T} = 0,$$

т. е. при

$$dQ = 0,$$

из уравнений (2,7)—(2,8) имеем:

$$c_v dT = -ApdV,$$

$$c_p dT = AVdp.$$

При делении второго из этих уравнений на первое получим равенство:

$$\frac{dp}{p} = -k \frac{dV}{V} = k \frac{d\rho}{\rho}, \quad (2,9)$$

представляющее собой дифференциальное уравнение изоэнтропы. Интегрируя (при  $k = \text{const}$ ), имеем:

$$pV^k = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{p}{\rho^k} = \text{const}. \quad (2,10)$$

Последнее равенство и вытекающие из него и уравнения состояния (2,1) пропорции:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2,11)$$

часто называют уравнением адиабаты, а соответствующий ему процесс — адиабатическим. Как было указано во введении,

будем называть процесс, описываемый этим уравнением, *изоэнтропическим*<sup>1</sup>, сохраняя название *адиабатический* для более узкого класса процессов — без теплообмена с окружающей средой, вне зависимости от закона изменения энтропии.

Воспользуемся уравнением (2,9) для определения скорости распространения звука в идеальном газе:

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = k \frac{p}{\rho} = kgRT \quad (2,12)$$

или

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kgRT}. \quad (2,12')$$

Таким образом, скорость звука в идеальном газе пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры.

Напомним также формулы, связанные со схематизацией действительного процесса в виде политропического изменения состояния, согласно уравнению:

$$pV^n = \text{const}, \text{ или } \frac{p}{\rho^n} = \text{const при } n = \text{const}. \quad (2,13)$$

Из этого выражения с учетом (2,1), следует:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^n = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^n = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (2,14)$$

В противоположность обычно формальному применению уравнения политропы в виде (2,13) при  $n = \text{const}$ , в ряде случаев целесообразно использовать одно только дифференциальное соотношение между параметрами состояния, например:

$$\frac{dp}{p} = n \frac{d\rho}{\rho}, \quad (2,13')$$

в котором величина  $n$  рассматривается не как заданная постоянная, а как переменная, закон изменения которой определяется рассматриваемым процессом.

Введение такой характеристики — местного показателя политропы для элементарного процесса изменения состояния — оказывается удобным, так как позволяет по значению  $n$  судить

<sup>1</sup> Условие  $dQ = 0$  обычно понимают как  $dQ_a = 0$  и  $dQ_r = 0$  (обратная адиабата). Ему соответствует, однако, и неадиабатический изоэнтропический процесс ( $dQ_a \neq 0$ ), если  $dQ_a = -dQ_r$ , для которого уравнение изоэнтропии и формулы (2,10) и (2,11) остаются в силе.

об энергетическом характере процесса в данной точке<sup>1</sup>. При этом переменную величину  $n$  в ряде случаев легко связать с другими характеристиками процесса (числом  $M$  и др.).

Приведем также формулы, необходимые для расчета изменения энтропии.

Из уравнения (2,7) и второго начала термодинамики имеем:

$$TdS = c_v dT + ApdV = c_p dT - AVdp.$$

Отсюда, с учетом формул для теплоемкости идеального газа (2,4) — (2,5), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{AR} &= \frac{1}{k-1} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = \frac{1}{k-1} \frac{dT}{T} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} = \\ &= \frac{1}{k-1} \frac{dp}{p} - \frac{k}{k-1} \frac{d\rho}{\rho} \end{aligned} \quad (2,15)$$

или в интегральном виде:

$$\begin{aligned} \frac{S_2 - S_1}{AR} &= \ln \left[ \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] = \ln \left[ \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \frac{p_1}{p_2} \right] = \\ &= \ln \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right]. \end{aligned} \quad (2,16)$$

Для политропического процесса [в связи с (2,14)] отсюда, между прочим, следует:

$$\begin{aligned} \frac{S_2 - S_1}{AR} &= \frac{n-k}{(n-1)(k-1)} \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{n-k}{k-1} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = \\ &= n \frac{n-k}{k-1} \ln \frac{p_2}{p_1}. \end{aligned} \quad (2,17)$$

### 2.3. УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО НАЧАЛА ДЛЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ГАЗА

Уравнение первого начала для потока, написанное применительно к неподвижной системе координат, имеет следующий вид:

$$dQ_a = dU + ApdV + AVdp + Ad \frac{w^2}{2g} + Adh + AdL_T, \quad (1,3)$$

<sup>1</sup> Более подробные сведения о свойстве показателя  $n$  приведены для напоминания в главе 2,4 в связи с применением метода политропы к газовым течениям.

В этом уравнении в явном виде присутствует изменение потенциальной и кинетической энергии газа, работа проталкивания и внешняя (техническая) работа, но отсутствует работа трения. Для идеального газа

$$dQ_a = c_p dT + Ad \frac{w^2}{2g} + Adh + AdL_T, \quad (2,18)$$

или — в конечной форме:

$$Q_{1,2} = c_p(T_2 - T_1) + \frac{A}{2g}(w_2^2 - w_1^2) + A(h_2 - h_1) + AL_{1,2}. \quad (2,18')$$

Рассмотрим несколько частных случаев применения этого уравнения.

Пренебрежем, прежде всего, изменением потенциальной энергии положения ( $dh \approx 0$ ). При этом имеем:

$$dQ_a - AdL_T = c_p dT + Ad \frac{w^2}{2g} \quad (2,19)$$

и

$$Q_{1,2} - AL_{1,2} = c_p(T_2 - T_1) + \frac{A}{2g}(w_2^2 - w_1^2). \quad (2,19')$$

В случае энергетически изолированного процесса, т. е. при отсутствии обмена энергией с окружающей средой ( $dQ_a = dL_T = 0$ ), уравнение (2,19) принимает простой вид:

$$d\left(T + \frac{Aw^2}{2gc_p}\right) = dT_0 = 0 \quad (2,20)$$

или

$$T_0 = T + A \frac{w^2}{2gc_p} = \text{const.} \quad (2,20')$$

Величину  $T_0$ , согласно установившейся терминологии, назовем температурой адиабатического торможения или просто температурой торможения.

По физическому смыслу эта величина равна температуре газа в состоянии покоя (при  $w=0$ ), когда вся кинетическая энергия преобразуется в потенциальную.

В энергетически изолированном процессе — при отсутствии подвода или отвода тепла или механической энергии, вне зависимости от наличия или отсутствия трения, температура торможения остается постоянной. Так например, температура изолированного тела, помещенного в газовый поток, вследствие

прилипания газа к поверхности тела, оказывается равной величине  $T_0^*$ . При наличии обмена энергией, очевидно:

$$dQ_a - AdL_T = c_p dT_0. \quad (2,21)$$

и

$$Q_{1-2} - AL_{1-2} = c_p (T_{02} - T_{01}), \quad (2,21')$$

или в частных случаях процесса с одним только теплообменом

$$dQ_a = c_p dT_0; \quad Q_{1-2} = c_p (T_{02} - T_{01}) \quad (2,22)$$

или с одним только обменом механической энергией:

$$AdL_T = -c_p dT_0; \quad L_{1-2} = \frac{c_p}{A} (T_{01} - T_{02}). \quad (2,23)$$

Уравнение (2,20) позволяет ввести еще одну весьма важную характеристику процесса. В предельном случае — при полном преобразовании потенциальной энергии в кинетическую энергию, когда  $I=0$ ;  $T=0$ , в энергетически изолированном процессе имеем

$$w_{\max}^2 = \frac{2g}{A} I_0 = \frac{2gc_p}{A} T_0 \quad (2,24)$$

или

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2g}{A} c_p T_0}. \quad (2,24')$$

С учетом формул (2,4) и (2,12') последнее выражение можно записать в виде:

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} gRT_0} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} \cdot a_0, \quad (2,24'')$$

где  $w_{\max}$  — максимально возможная скорость движения;

$a_0$  — скорость звука в заторможенном газе.

Перепишем теперь уравнение (2,20'):

$$a^2 = \frac{k-1}{2} (w_{\max}^2 - w^2). \quad (2,25)$$

В таком виде оно определяет скорость распространения звука в движущемся газе. В предельных случаях при  $w=0$ ;  $a=a_0$  и при  $w=w_{\max}$ ;  $a=0$ .

\* Равенство это является приближенным. В действительности температура поверхности тела зависит от отношения  $\frac{\nu}{a}$ , где  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $a$  — температуропроводность. Только при  $\frac{\nu}{a} = 1$  температура теплоизолированного тела равна  $T_0$ . По этому поводу см., например, Л. А. Вулис, "О равновесной температуре тела в газовом потоке" (Журн. техн. физики, т. XX, № 1, 1950 г.).

Введем также величину критической скорости течения, равную местной скорости звука, которую обозначим символом  $a^*$ . Будем исходить при этом из уравнения энергетически изолированного процесса, для которого  $T_0 = \text{const}$ .

В случае  $w = a = a^*$ , уравнению (2,20'), умножив обе части его на произведение  $kgR$ , можно придать следующий вид:

$$a_0^2 = a^{*2} + \frac{k-1}{2} a^{*2} = \frac{k+1}{2} a^{*2}. \quad (2,26)$$

Отсюда имеем также

$$w_{\text{макс}}^2 = \frac{k+1}{k-1} a^{*2}. \quad (2,27)$$

Величина  $a^*$  определяется из уравнения (2,26) в виде

$$a^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} a_0, \quad (2,28)$$

т. е. является однозначной функцией температуры торможения. Это означает, что критическая скорость постоянна в энергетически изолированном процессе ( $T_0 = \text{const}$ ) и меняется при подводе или отводе энергии. Таким образом, величина  $a^*$  относится к числу функций состояния и однозначно определяется местным значением  $T_0$ . Значение ее в процессах с переменной температурой торможения  $T_0$ , отвечающее действительному совпадению величин  $w$  и  $a^*$ , будем означать  $a^{**}$ .

Из формулы (2,28) для энергетически изолированного процесса следует:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (2,29)$$

и для изэнтропического процесса

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2,30)$$

(индекс  $^{**}$  здесь, как и далее, означает отнесение переменной к критическому сечению при  $w = a^*$ ).

#### 2.4. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Для движения с постоянным весовым расходом уравнение неразрывности имеет вид:

$$dG = d(F\rho w) = 0 \quad (2,31)$$

или

$$F\rho w = \text{const} \quad (2,31')$$

и в дифференциальной форме

$$\frac{dF}{F} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} = 0. \quad (2,31'')$$

Введя плотность потока  $j \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{ сек}} \right]$ :

$$j = \frac{G}{F} = \gamma w,$$

перепишем уравнение (2,31) в виде

$$\frac{dF}{F} = -\frac{dj}{j}; \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{j_1}{j_2} \quad (2,32)$$

и

$$\frac{dj}{j} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w}. \quad (2,32')$$

В частном случае движения по трубе постоянного сечения ( $dF=0$ ;  $F=\text{const}$ ; при  $G=\text{const}$ )

$$dj = d(\rho w) = 0 \quad (2,33)$$

или

$$\frac{dw}{w} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad (2,33')$$

а также

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (2,33'')$$

При течении с переменным расходом

$$dG = d(Fj) \quad (2,34)$$

или

$$\frac{dG}{G} = \frac{dF}{F} + \frac{dj}{j} = \frac{dF}{F} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w}. \quad (2,34')$$

## 2.5. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Как уже указывалось в первой части книги, это уравнение по существу описывает движение центра тяжести газового элемента относительно неподвижной системы координат. В пренебрежении изменением потенциальной энергии положения и при постоянстве весового расхода оно имеет следующий вид:

$$\frac{d\rho}{\rho} + wdw + g dL_r + g dL_r = 0 \quad (2,35)$$



или в конечном виде:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + L_{1-2} + L_r = 0. \quad (2,35')$$

В частном случае движения без трения при отсутствии внешней работы уравнение Бернулли существенно упрощается<sup>1</sup>:

$$dp + \rho w dw = 0. \quad (2,36)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи интегрирования этого уравнения. При движении несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) получим:

$$p + \frac{\rho w^2}{2} = \text{const}, \quad (2,37)$$

т. е. обычное уравнение Бернулли, пригодное также для газа для малых скоростей движения.

При движении газа в канале постоянного сечения ( $\rho w = \text{const}$ ), имеем

$$p + \rho w^2 = \text{const}. \quad (2,38)$$

Это уравнение представляет собой частный случай закона сохранения количества движения для течения в цилиндрической трубе<sup>2</sup>.

В случае изэнтропического (обратимого, адиабатического) движения газа по каналу произвольной формы ( $\frac{p}{\rho^k} = \text{const}$ ) интегрирование уравнения (2,37) также не составляет труда. В этом случае, при переходе от одного состояния к другому, получим:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 0. \quad (2,39)$$

Уравнения (2,37)—(2,39) связывают скорость движения с давлением. Применим последнее из этих уравнений к процессу изэнтропического торможения газа от некоторой начальной скорости  $w = w_1$  до  $w = 0$ . В этом случае уравнение (2,39) дает:

$$\frac{p_0}{p} = \left[ 1 + \frac{w^2}{2gc_p T} \right]^{\frac{k}{k-1}}. \quad (2,40)$$

<sup>1</sup> Разделив обе части этого уравнения на  $dx$ , приходим к уравнению движения Эйлера для одномерного потока:

$$w \frac{dw}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (2,36')$$

<sup>2</sup> См. главу 3,4.

Величину  $p_0$  естественно назвать давлением изоэнтропического торможения (сокращенно давлением торможения или полным давлением). Наряду с ним и температурой торможения можно ввести также плотность торможения  $\rho_0 = \frac{p_0}{gRT_0}$ .

Уравнение (2,35) для изоэнтропического процесса приводит, например, к расчетным формулам для определения работы идеального компрессора или турбины:

$$-L_{1-2} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2g} + \frac{k}{k-1} RT_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \quad (2,41)$$

Используя (2,22), можно написать также

$$L_{1-2} = \frac{k}{k-1} RT_{01} \left[ 1 - \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]. \quad (2,42)$$

В случае подвода работы извне (компрессор) полное давление растет:  $p_{02} > p_{01}$  и  $L_{1-2} < 0$ ; в турбине—при отводе работы от газа  $p_{01} > p_{02}$  и  $L_{1-2} > 0$ .

Формулы, аналогичные равенствам (2,39)—(2,42), можно написать также для политропического процесса  $\frac{p}{\rho^n} = \text{const}$  при  $n = \text{const}$ , если заменить повсюду величину  $k$  — показателем политропы  $n$ .

## 2,6. ХАРАКТЕРИСТИКИ ГАЗОВОГО ПОТОКА

Для расчета изменения состояния в различных процессах целесообразно наряду с обычными параметрами ( $\omega$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $\rho$  и т. д.) ввести ряд переменных, связанных с ними, но позволяющих придать количественным соотношениям наиболее простой и физически наглядный вид.

Таковыми удобными характеристиками процесса являются безразмерные переменные, представляющие собой отношение скорости движения к характерному масштабу скорости. В качестве последнего естественно взять величину местной скорости звука  $a$ , критической скорости  $a^*$ , максимальной скорости  $w_{\text{макс}}$ , или, наконец, скорости звука при торможении  $a_0$ .

Соответственно приходим к четырем безразмерным переменным:

$$\text{а) числу } M; \quad M = \frac{w}{a} = \frac{w}{\sqrt{k \frac{p}{\rho}}} = \frac{w}{\sqrt{kgRT}}, \quad (2,43)$$

игравшему основную роль во всем исследовании — в первой части книги;

б) коэффициенту скорости, предложенному академиком С. А. Христиановичем<sup>1</sup>:

$$\lambda = \frac{w}{a^*} = \frac{w}{\sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_0}}; \quad (2,44)$$

в) отношению

$$\frac{w}{w_{\max}} = \frac{w}{\sqrt{\frac{2k}{k-1} gRT_0}}; \quad (2,45)$$

г) отношению

$$\frac{w}{a_0} = \frac{w}{\sqrt{kgRT_0}}. \quad (2,46)$$

Первая из этих переменных — число  $M$  — характеризует отношение кинетической энергии газа к его энтальпии:

$$M^2 = \frac{w^2}{a^2} = \frac{2}{k-1} \frac{A \frac{w^2}{2g}}{I}.$$

При малых значениях числа  $M$  величина кинетической энергии пренебрежимо мала сравнительно с энтальпией; наоборот, при достаточно большом числе  $M$  учет изменения кинетической энергии обязателен.

Используя приведенные выше формулы (2,12)—(2,26) и (2,27) для величин  $a$ ,  $a_0$ ,  $w_{\max}$  и  $a^*$ , нетрудно связать между собой все безразмерные переменные следующими равенствами:

$$M^2 = \frac{2}{k+1} \frac{\lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2} = \frac{2}{k-1} \frac{\frac{w^2}{w_{\max}^2}}{1 - \frac{w^2}{w_{\max}^2}} = \frac{\frac{w^2}{a_0^2}}{1 - \frac{k-1}{2} \frac{w^2}{a_0^2}}, \quad (2,47)$$

$$\lambda^2 = \frac{k+1}{2} \frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} = \frac{k+1}{k-1} \frac{w^2}{w_{\max}^2} = \frac{k+1}{2} \frac{w^2}{a_0^2}, \quad (2,48)$$

$$\frac{w^2}{w_{\max}^2} = \frac{\frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} = \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 = \frac{k-1}{2} \frac{w^2}{a_0^2}, \quad (2,49)$$

$$\frac{w^2}{a_0^2} = \frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} = \frac{2}{k+1} \lambda^2 = \frac{2}{k-1} \frac{w^2}{w_{\max}^2}. \quad (2,50)$$

<sup>1</sup> См. С. А. Христианович, О расчете эжектора. „Промышленная аэродинамика“, изд. БНТ, 1944 г.

Выбор одной из этих характеристик, в сущности, совершенно произволен и зависит от конкретных условий расчета и возможности упрощения связанных с ним выкладок.

В приведенной ниже табличке сопоставлены пределы изменения этих переменных в полном диапазоне чисел  $M$ .

|                                 |   |                   |                   |
|---------------------------------|---|-------------------|-------------------|
| $M^2$                           | 0 | 1                 | $\infty$          |
| $\lambda^2$                     | 0 | 1                 | $\frac{k+1}{k-1}$ |
| $\frac{w^2}{w_{\text{макс}}^2}$ | 0 | $\frac{k-1}{k+1}$ | 1                 |
| $\frac{w^2}{a_0^2}$             | 0 | $\frac{2}{k+1}$   | $\frac{2}{k-1}$   |

В дальнейшем мы будем пользоваться первыми двумя переменными: числом  $M$  и коэффициентом скорости  $\lambda$ ; применение последней величины (как и двух остальных) удобно в энергетически изолированном процессе при  $T_0 = \text{const}$  и  $\alpha^* = \text{const}$ . В этом случае речь идет, следовательно, о введении постоянного масштаба для скорости движения.

Используем теперь величины  $M$  и  $\lambda$  для установления связи между параметрами заторможенного газа  $T_0$ ,  $p_0$  и  $\rho_0$  и обычными термодинамическими величинами  $T$ ,  $p$  и  $\rho$ .

Имеем:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 = \frac{1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}, \quad (2,51)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}, \quad (2,52)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \quad (2,53)$$

Как термодинамические параметры  $T$ ,  $p$  и  $\rho$ , а также безразмерные переменные  $M$  и  $\lambda$ , величины  $T_0$ ,  $p_0$  и  $\rho_0$  являются функциями состояния и характеризуют течение газа в данном месте.

Напомним, что первая из этих величин введена в предположении энергетически изолированного торможения. Условие  $T_0 = \text{const}$  для некоторого участка течения соответствует, следовательно, процессу при отсутствии обмена энергией в виде теплоты или работы, но не зависит от наличия либо отсутствия трения. В противоположность этому величины  $p_0$  и  $\rho_0$  получены в предположении об изэнтропическом характере торможения и отсутствии обмена энергией. В связи с этим мы можем написать уравнение (2,16) для расчета изменения энтропии газа при переходе от одного состояния к другому через параметры торможения:

$$\begin{aligned} \frac{S_2 - S_1}{AR} &= \ln \left[ \left( \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \frac{\rho_{01}}{\rho_{02}} \right] = \ln \left[ \left( \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \frac{p_{01}}{p_{02}} \right] = \\ &= \ln \left[ \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left( \frac{\rho_{01}}{\rho_{02}} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right] \end{aligned} \quad (2,54)$$

или в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{AR} &= \frac{1}{k-1} \frac{dT_0}{T_0} - \frac{d\rho_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1} \frac{dT_0}{T_0} - \frac{dp_0}{p_0} = \\ &= \frac{1}{k-1} \frac{dp_0}{p_0} - \frac{k}{k-1} \frac{d\rho_0}{\rho_0} \end{aligned} \quad (2,54')$$

Отсюда видно, что в энергетически изолированном процессе с трением (при  $T_0 = \text{const}$ ) возрастание энтропии приводит к падению полного давления или плотности торможения. Обе величины  $p_0$  и  $\rho_0$  падают также при подводе теплоты (и отсутствии обмена механической энергией  $dL_T = 0$ ) также в связи с ростом энтропии. Поэтому изменение  $p_0$  (или  $\rho_0$ ) может служить характеристикой необратимых потерь в реальном процессе.

## Глава 2,2. КАЧЕСТВЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

### 2,7. ЗАКОН ОБРАЩЕНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Применим теперь результаты, полученные в первой части этой книги, к течению идеального газа. Прежде всего преобразуем систему основных уравнений закона обращения воздействий (1,7)–(1,10) для движения с постоянным весовым расходом ( $dG = 0$ ).

Для этой цели следует воспользоваться приведенными в предыдущем разделе формулами и соответственно упро-

стить коэффициенты при элементарных воздействиях. Ограничимся здесь преобразованием одного только первого уравнения (для скорости движения), а для остальных уравнений приведем без вывода конечные результаты,

Коэффициент при работе трения в уравнении (1,7) для идеального газа  $\left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = - \frac{\rho}{T} \right]$  может быть написан в виде<sup>1</sup>:

$$- \frac{g}{a^2} + \frac{A}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = - \frac{g}{a^2} - \frac{A}{\rho c_p} \cdot \frac{\rho}{T} = - k \frac{g}{a^2}.$$

Аналогично этому, коэффициент при  $dQ_a$  равен:

$$\frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = - \frac{1}{c_p T} = - g \frac{k-1}{A a^2}.$$

В окончательном виде получим следующую систему уравнений для движения с постоянным расходом:

1) для скорости движения:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{g}{a^2} dL_T - k \frac{g}{a^2} dL_r - g \frac{k-1}{A a^2} dQ_a; \quad (2,55)$$

2) для давления:

$$(M^2 - 1) \frac{dp}{p} = - k \left\{ M^2 \frac{dF}{F} - \frac{g}{a^2} dL_T - \frac{g}{a^2} \times \right. \\ \left. \times [1 + (k-1) M^2] dL_r - \frac{g}{A a^2} (k-1) M^2 dQ_a \right\}; \quad (2,56)$$

3) для плотности:

$$(M^2 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = - \left[ M^2 \frac{dF}{F} - \frac{g}{a^2} dL_T - k \frac{g}{a^2} dL_r - \frac{g}{A a^2} (k-1) dQ_a \right]; \quad (2,57)$$

4) для температуры:

$$(M^2 - 1) \frac{dT}{T} = - \left[ (k-1) M^2 \frac{dF}{F} - g \frac{k-1}{a^2} dL_T - k g \times \right. \\ \left. \times \frac{k-1}{a^2} M^2 dL_r - \frac{g}{A a^2} (k-1) (k M^2 - 1) dQ_a \right]. \quad (2,58)$$

<sup>1</sup> При выводе использовано тождество (для идеального газа)

$$I = c_p T = \frac{ARk}{k-1} T = \frac{A}{g(k-1)} \cdot kgRT = \frac{A \cdot a^2}{g(k-1)},$$

откуда:

$$\frac{A}{c_p T} = (k-1) \frac{g}{a^2}.$$

Уравнения (2,55)—(2,58) полностью описывают влияние всех элементарных воздействий на течение идеального газа<sup>1</sup>. Как это следует из приведенных ранее соображений, „прямые“ воздействия ( $dF < 0$ ;  $dL_T > 0$ ;  $dL_r > 0$ ;  $dQ_a > 0$ ) приводят к увеличению скорости движения в дозвуковом потоке и уменьшению ее—в сверхзвуковом. „Обратные“ воздействия ( $dF > 0$ ;  $dL_T < 0$ ;  $dQ_a < 0$ ) вызывают торможение дозвукового и ускорение сверхзвукового потока.

Для более подробного описания процесса целесообразно дополнить систему уравнений (2,55)—(2,58) еще одним, определяющим закон изменения числа  $M$ .

Выведем это уравнение, воспользовавшись формулой, определяющей число  $M$  для идеального газа:

$$M^2 = \frac{w^3}{a^2} = \frac{w^3}{kgRT}$$

или, в дифференциальном виде:

$$\frac{dM^2}{M^2} = 2 \frac{dw}{w} - \frac{dT}{T}. \quad (2,59)$$

Умножим обе части этого равенства на разность  $M^2 - 1$ . После подстановки в правую часть его значений  $(M^2 - 1) \frac{dw}{w}$  и  $(M^2 - 1) \frac{dT}{T}$ —соответственно из уравнений (2,54) и (2,58)—и ряда преобразований получим следующее уравнение:

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = 2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dF}{F} - \frac{g}{a^2} (k+1) dL_T - \\ - 2 \frac{g}{a^2} k \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) dL_r - \frac{g}{a^2} (k-1) (1 + kM^2) dQ_a. \quad (2,60)$$

Уравнение (2,60) прежде всего устанавливает закон изменения числа  $M$  в течении идеального газа. В дозвуковом течении при  $M < 1$  любое „прямое“ воздействие, т. е. уменьшение площади поперечного сечения канала  $dF < 0$ , отвод механической энергии в виде работы  $dL_T > 0$ , подвод тепла  $dQ_a > 0$  и работа трения  $dL_r > 0$ , приводят к увеличению числа  $M$ . В сверхзвуковом потоке эти же воздействия приводят к уменьшению величины  $M$ . В противоположность этому „обратные“ воздействия, т. е. увеличение площади поперечного сечения канала  $dF > 0$ , подвод механической энер-

<sup>1</sup> Влияние расходного воздействия ( $dG \neq 0$ ) рассмотрено отдельно (см. ниже).

гии  $dL_T < 0$  и отвод тепла  $dQ_a < 0$ , приводит к уменьшению числа  $M$  в дозвуковом потоке и увеличению его — в сверхзвуковом.

В связи с этим можно дать другое толкование принятому ранее подразделению на „прямые“ и „обратные“ воздействия. Мы видим, что первые ( $dF < 0$ ;  $dL_T > 0$ ;  $dQ_a > 0$  и  $dL_r > 0$ ) всегда, т. е. в дозвуковой или сверхзвуковой области течения, приводят к сближению величин скорости движения  $w$  и местной скорости звука  $a$ . „Обратные“ воздействия ( $dF > 0$ ;  $dL_T < 0$ ;  $dQ_a < 0$ ) в противоположность этому приводят всегда — при любом исходном соотношении между скоростью движения и местной скоростью звука — к увеличению разности между этими величинами<sup>1</sup>.

Уравнение (2,60) имеет не только качественное, но и количественное значение. Выражая коэффициенты при всех воздействиях в функции числа  $M$ , мы приходим к уравнению, интегрирование которого дает конечные расчетные соотношения между переменными.

Для этой цели целесообразно придать несколько иной вид выражениям для отдельных воздействий, входящим в это уравнение.

Так для механического воздействия можно, используя формулы (2,4) — (2,12) — (2,51) и др., написать:

$$\frac{g}{a^2} dL_T = - \frac{g}{a^2} \frac{c_p}{A} dT_{0L} = - \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{k-1} \frac{dT_{0L}}{T_0}.$$

Индекс „L“ при величине  $dT_{0L}$  показывает, что речь идет об изменении температуры торможения, связанном с подводом механической энергии.

Аналогично этому — для теплового воздействия:

$$\frac{g}{Aa^2} dQ_a = \frac{g}{Aa^2} c_p dT_{0Q} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{k-1} \cdot \frac{dT_{0Q}}{T_0}.$$

<sup>1</sup> Вспоминая, что скорость звука для идеального газа по порядку величины весьма близка к средней скорости движения молекул, можно качественно интерпретировать полученный выше вывод следующим образом. „Прямые“ воздействия приводят в стационарном газовом течении к сближению средних значений скоростей направленного и хаотического движения молекул, тогда как „обратные“ — к их расхождению.



Индекс „Q“ при величине  $dT_{0Q}$  показывает, что речь идет об изменении температуры торможения, связанном с подводом теплоты<sup>1</sup>.

В частном случае одного только теплового воздействия ( $dQ_a \neq 0$ ;  $dL_T = 0$ , а также  $dF = 0$ ;  $dL_r = 0$ ) из уравнения (2,60) следует:

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = -(1 + kM^2) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \frac{dT_0}{T_0}; \quad (2,61)$$

тогда как при наличии одного только механического воздействия ( $dF = 0$ ;  $dL_r = 0$ ;  $dQ_a = 0$ ;  $dL_T \neq 0$ ) имеем:

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = \frac{k+1}{k-1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \frac{dT_0}{T_0} \quad (2,62)$$

(индексы „Q“ и „L“ здесь отброшены, поскольку речь идет об изолированных воздействиях).

В первом случае (тепловое воздействие) знаки  $dM$  и  $dT_0$  совпадают в дозвуковом потоке, и противоположны в сверхзвуковом.

Во втором случае (механическое воздействие) имеет место обратное соотношение: знаки  $dM$  и  $dT_0$  — противоположны в дозвуковом потоке и совпадают в сверхзвуковом.

Преобразуем теперь коэффициент при работе трения. Если принять для последней обычную формулу гидравлики:

$$dL_r = \zeta \frac{w^2}{2g} \cdot \frac{dx}{D} \quad (2,63)$$

(где  $\zeta$  — коэффициент сопротивления;  $x$  и  $D$  — длина и гидравлический диаметр канала), то из уравнения (2,60) для частного случая изолированного движения с трением следует:

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = -\zeta k M^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \frac{dx}{D}. \quad (2,64)$$

В дозвуковом течении при  $M < 1$ , если ось  $x$  ориентирована в направлении течения ( $dx > 0$ ), число  $M$  возрастает ( $dM^2 > 0$ ), в сверхзвуковом — при  $M > 1$ ,  $dM^2 < 0$ , т. е. число  $M$  убывает.

<sup>1</sup> Величины  $dT_{0L}$  и  $dT_{0Q}$  в общем случае, конечно, не тождественны. Поэтому суммирование коэффициентов при  $dT_0$  в случае одновременного действия подвода или отвода механической энергии и теплоты, недопустимо. (Помимо частного случая  $dQ_a = -AdL_T$ , не являющегося в общем плане интересным).

Перепишем, наконец, величину  $\frac{dF}{F}$  в виде

$$\frac{dF}{F} = -\frac{dj}{j}$$

(где  $j$  — плотность тока). При этом для изолированного воздействия, приводящего к одному только изменению плотности тока, имеем:

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = -2 \left( 1 - \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dj}{j}. \quad (2,65)$$

В таком виде уравнение (2,65) связывает изменение числа  $M$  с изменением плотности тока в геометрическом сопле или с изменением расхода газа в случае движения газа в идеальном расходном сопле, рассмотренном в главе 1,3.

В последнем случае

$$\frac{dj}{j} = \frac{dG}{G}$$

(случай  $\frac{dG}{G} > 0$  отвечает прямому, а  $\frac{dG}{G} < 0$  — обратному воздействию).

Уравнения (2,61) — (2,65) для частных случаев изолированных воздействий допускают непосредственное интегрирование. В этих простейших случаях, которые будут рассмотрены в следующей главе, нетрудно, впрочем, и помимо этих уравнений получить все расчетные соотношения.

Поэтому уравнение (2,60) имеет основное значение для расчета процесса при совместном действии различных факторов — при задании дополнительной связи между ними. Такого рода примеры мы также рассмотрим в дальнейшем.

## 2.8. ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ И ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ

Для установления характера относительного изменения скорости движения и параметров состояния выше (см. гл. 1,2) были введены безразмерные коэффициенты

$$l = \frac{d \ln w}{d \ln p}; \quad m = \frac{d \ln w}{d \ln \rho}; \quad n = \frac{d \ln p}{d \ln \rho}; \quad t = \frac{d \ln w}{d \ln T}.$$

Используем их теперь для исследования движения идеального газа заметив, что для последнего они связаны соотношением:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{l} - \frac{1}{m}, \quad (2,66)$$

вытекающим из уравнения состояния  $p = \rho gRT$ .

Выпишем прежде всего в табл. 2,1 значения коэффициентов  $l$ ,  $m$ ,  $n$  и  $t$  для частных случаев изолированных воздействий. Последнее нетрудно сделать на основе табл. 1,1 или непосредственно из уравнений (2,55) — (2,58).

ТАБЛИЦА 2,1  
Значения  $l$ ,  $m$ ,  $n$  и  $t$  для идеального газа  
(при изолированных воздействиях)

| Коэффициент | Воздействие                   |                                       |                                      |                           |
|-------------|-------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
|             | Изменение сечения $dF \neq 0$ | Подвод или отвод работы $dL_r \neq 0$ | Подвод или отвод тепла $dQ_a \neq 0$ | Трение $dL_r \neq 0$      |
| $l$         | $-\frac{M^2}{k}$              | $-\frac{1}{k}$                        | $-\frac{1}{kM^2}$                    | $-\frac{1}{1 + (k-1)M^2}$ |
| $m$         | $-\frac{1}{M^2}$              | $-1$                                  | $-1$                                 | $-1$                      |
| $n$         | $k$                           | $k$                                   | $kM^2$                               | $1 + (k-1)M^2$            |
| $t$         | $-\frac{1}{(k-1)M^2}$         | $-\frac{1}{k-1}$                      | $\frac{1}{1 - kM^2}$                 | $-\frac{1}{(k-1)M^2}$     |

Во всех частных случаях изолированных воздействий, как видно из табл. 2,1, имеют место следующие соотношения:

$$l < 0; \quad m < 0; \quad n > 0.$$

Это означает, что во всех таких случаях рост скорости движения сопровождается расширением газа (падением давления и плотности), а уменьшение ее — сжатием (увеличением давления и плотности).

Изменение температуры во всех случаях, кроме случая чистого теплового воздействия, подчиняется неравенству  $t < 0$  (температура падает при росте скорости и возрастает при уменьшении). В случае движения газа по тепловому соплу коэффициент  $t > 0$  при  $0 < M^2 < \frac{1}{k}$ , обращается в нуль при значении числа  $M = \frac{1}{\sqrt{k}}$  и становится отрицательным:  $t < 0$  при  $\infty > M^2 > \frac{1}{k}$ .

Этой особенности закона изменения температуры (находящейся в полном согласии с более общим соотношением (1,44), полученным ранее для произвольного уравнения состояния) легко дать простое термодинамическое толкование, если

прибегнуть к величине переменного показателя политропы  $n$ , равного в этом случае (см. табл. 2,1):

$$n = kM^2. \quad (2,67)$$

Соотношение (2,67)<sup>1</sup> показывает невозможность применения для описания процесса изменения состояния при движении без трения газа по трубе постоянного сечения с подводом или отводом тепла уравнения политропы при постоянном показателе  $n$ . Каждому значению числа  $M$ , переменного при  $dQ_a \neq 0$ , отвечает пропорциональная ему величина местного показателя элементарного политропического процесса, меняющегося от сечения к сечению.

Из формулы (2,67) видно также наличие двух характерных сечений в тепловом сопле.

В первом из них, когда переменное значение показателя политропы  $n$  обращается в единицу:  $n = 1$ , число  $M$  становится равным  $M = \frac{1}{\sqrt{k}}$ . Как известно, равенство  $n = 1$  отвечает элементарному изотермическому процессу ( $dT = 0$ ; температура проходит через экстремум, в данном случае — максимум.)

Во втором характерном сечении при  $n = k$  число  $M$  обращается в единицу:  $M = 1$ .

Здесь, в критическом сечении теплового сопла, имеет место элементарный изоэнтропический процесс ( $dQ_a = 0$ ;  $dT_0 = 0$ ,  $dS = 0$ , т. е. температура торможения и энтропия проходят через максимум).

Таким образом, расширение газа (увеличение числа  $M$ ) в тепловом сопле сопровождается монотонным ростом местного показателя политропы  $n$ , а сжатие (падение числа  $M$ ) — убыванием  $n$ .

Для ускоренного движения можно выделить следующие три участка:

$$1) \quad 0 < n < 1; \quad 0 < M^2 < \frac{1}{k}.$$

На этом участке подвод тепла вызывает увеличение скорости движения (расширение), сопровождающееся одновременным возрастанием термодинамической температуры  $T$  и температуры торможения  $T_0$ . Первая из них достигает максимума на границе этого участка при  $M = \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$2) \quad 1 < n < k; \quad \frac{1}{k} < M^2 < 1.$$

<sup>1</sup> Оно означает также  $\omega^2 = u^2$ , так как формула (2,67) является частным случаем равенства (1,58).

На этом участке при подводе тепла продолжается возрастание скорости (значение которой попрежнему меньше местной скорости звука), однако наряду с ростом температуры торможения  $T_0$  падает термодинамическая температура  $T$ . Падение температуры при продолжающемся подводе тепла связано с частичным переходом потенциальной энергии в кинетическую энергию.

На границе этого участка при  $M = 1$  местный показатель политропы  $n = k$ , т. е. имеет место элементарный изоэнтропический процесс в критическом сечении. Дальнейшее расширение газа и увеличение числа  $M$  в сверхзвуковой области течения происходит на третьем участке теплового сопла:

$$3) \quad k < n < \infty; \quad 1 < M < \infty.$$

Оно связано здесь с отводом тепла ( $n > k; dQ_a < 0$ ) и монотонным падением  $T$  и  $T_0$ .

Таким образом, введение переменной величины показателя политропы  $n$  приводит к предельно сжатой формулировке основных особенностей движения газа в тепловом сопле в виде соотношения

$$M^2 = \frac{n}{k}. \quad (2,67')$$

Невозможность для рассматриваемого случая движения (без трения) с подогревом по трубе постоянного сечения подлинно политропического изменения состояния, т. е. процесса, удовлетворяющего уравнению  $\frac{p}{\rho^n} = \text{const}$  при  $n = \text{const}$  легко показать также следующим образом. Действительно, для трех переменных  $p$ ,  $\rho$  и  $w$  мы имеем в данном случае два уравнения:

$$\rho w = \text{const} \quad (2,33)$$

и

$$p + \rho w^2 = \text{const}. \quad (2,38)$$

Число уравнений здесь на единицу меньше числа переменных и следовательно, всегда возможно выразить любые две переменные в функции третьей. Это соотношение сохранится при дополнении системы любым уравнением, вытекающим из заданных условий течения. Например, добавляя уравнение состояния и вводя тем самым новую переменную — температуру или уравнение энергии — с новой переменной ( $Q_a$  или  $T_0$ ), и т. д., мы всегда будем иметь переменных на единицу больше, чем уравнений.

Если бы мы, однако, дополнили написанные выше равенства уравнением политропы

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const} \quad \text{при} \quad n = \text{const},$$

то тем самым пришли бы к алгебраически замкнутой системе из трех уравнений с тремя неизвестными. Решение этой системы дало бы некоторые вполне определенные постоянные (а не переменные) значения давления, плотности и температуры:

$$p = p_1 = \text{const}; \quad \rho = \rho_1 = \text{const}; \quad w = w_1 = \text{const}.$$

При этом мы имели бы также

$$T = T_1 = \text{const}; \quad T_0 = T_{01} = \text{const},$$

т. е. отсутствие подогрева. Мы пришли бы, таким образом, к тривиальному случаю движения газа, как единого целого — при отсутствии какого-либо процесса.

Только отказавшись от условия  $n = \text{const}$ , мы сохраняем три уравнения с четырьмя переменными ( $p$ ,  $\rho$ ,  $w$  и  $n$ ). В этом случае, как было показано выше,  $n = kM^2$  или  $w^2 = n \frac{p}{\rho} = u^2$ , что совпадает с полученной ранее формулой (1,58).

Уравнение политропы при  $n = \text{const}$  неприменимо также по аналогичным соображениям к процессу при движении с трением (при отсутствии всех остальных воздействий). В этом случае, как это следует из табл. 2,1, переменный показатель элементарного политропического процесса также связан линейным соотношением с числом  $M^1$

$$n = 1 + (k - 1)M^2 \quad (2,68)$$

или обратно

$$M^2 = \frac{n - 1}{k - 1}. \quad (2,69)$$

Изменение местного показателя политропы происходит здесь в дозвуковом течении в узком интервале значений от  $n = 1$  (элементарный изотермический процесс) при  $M = 0$  до  $n = k$  (элементарный изоэнтропический процесс) при  $M = 1$ .

В сверхзвуковой области движения местный показатель политропы меняется от  $n = \infty$  (изохора) при  $M = \infty$  до  $n = k$  при  $M = 1$ . Значение  $n = k$  — для предельного состояния, наступающего при достижении критической скорости, отвечает элементарному изоэнтропическому процессу в этом сечении. Последнее, как указывалось выше, объясняется тем, что отличное, вообще говоря, от нуля изменение энтропии ( $dQ_r \neq 0$ ;  $dS \neq 0$ ) в предельном состоянии становится бесконечно малым по сравнению с изменением других параметров.

<sup>1</sup> Формула (2,68) была получена также И. И. Новиковым в его докторской диссертации, посвященной термодинамике газов и паров (1947).

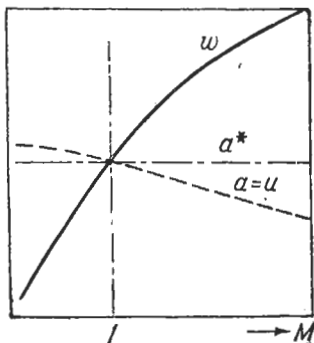
Рассмотрим также соотношения между скоростью движения, местной скоростью звука и критической скоростью, которые имеют большое значение для понимания характера течения в различных частных случаях.

В энергетически изолированном процессе температура торможения и однозначно связанная с нею критическая скорость:

$$a^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_0} \quad (2,28)$$

остаются неизменными, тогда как скорость движения  $w$  и местная скорость звука  $a$  меняются. В критическом сечении при  $M=1$  значения всех трех величин совпадают:

$$w = a = a^*.$$



Фиг. 2,1. Изменение величин  $w$ ,  $a$ ,  $a^*$ ,  $u$  — в геометрическом или идеальном расходящем сопле.

Так, например, при непрерывном увеличении скорости движения в геометрическом или идеальном расходящем сопле изменение  $w$ ,  $a$  и  $a^*$  имеет вид, изображенный на графике на фиг. 2,1. В дозвуковой области течения имеет место неравенство

$$w < a^* < a,$$

в сверхзвуковой

$$w > a^* > a.$$

Характеристическая скорость процесса  $u^2 = n \frac{p}{\rho}$  в этом случае непрерывно совпадает со скоростью звука, так как  $n = k (dS = 0)$ .

Аналогичные соотношения между  $w$ ,  $a$  и  $a^*$  имеют место в другом примере движения при  $a^* = \text{const}$  — под влиянием одного только трения, однако непрерывный переход через скорость звука здесь невозможен. Поэтому совпадение значений трех скоростей  $w$ ,  $a$  и  $a^*$  относится здесь к предельному состоянию<sup>1</sup>.

Характер изменения скоростей показан на фиг. 2,2 раздельно для дозвукового (ускоренного) и сверхзвукового

<sup>1</sup> Легко показать также, что при этом процессе в области  $M < 1$

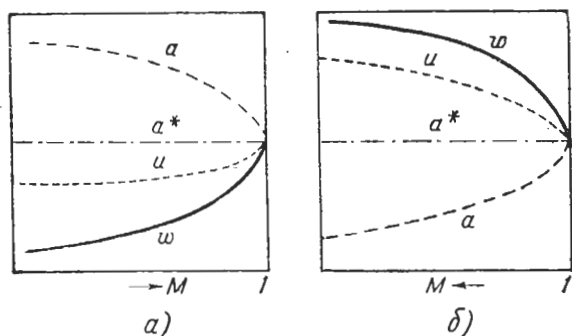
$$w < u < a^* < a,$$

тогда как при  $M > 1$ :

$$w > u > a^* > a.$$

(замедленного) движения. На этом же графике нанесена также кривая изменения характеристической скорости  $u$ , в соответствии с формулой (2,68).

Обратимся теперь к частным случаям процесса с обменом энергией. Здесь  $T_0 \neq \text{const}$  и, следовательно, величина  $a^*$  также меняется. Значение ее, отвечающее критическому сечению ( $M=1$ ), обозначим поэтому  $a^{**}$ .



Фиг. 2,2. Изменение величин  $w$ ,  $a$ ,  $a^*$ ,  $u$  — под влиянием трения,

$a$  — дозвуковое течение;  $b$  — сверхзвуковое течение.

На фиг. 2,3 показано изменение  $w$ ,  $a$  и  $a^*$  при движении газа по механическому соплу. В связи с изэнтропическим характером процесса характеристическая скорость здесь совпадает со скоростью звука.

В дозвуковой области течения здесь снова

$$w < a^* < a,$$

причем скорость движения растет с увеличением числа  $M$ , а величины  $a$  и  $a^*$  — падают, первая — в связи с падением температуры, а вторая — в связи с отводом механической энергии и уменьшением температуры торможения  $T_0$ .

В критическом сечении при  $M=1$  все три значения  $w$ ,  $a$  и  $a^*$  совпадают.

В сверхзвуковой области

$$w > a^* > a,$$

причем скорость звука  $a$  — падает, а критическая скорость, пройдя через минимум при  $M=1$ , возрастает в соответствии с подводом энергии и ростом  $T_0$ .

Иной характер имеет изменение величин  $w$ ,  $a$  и  $a^*$  при движении газа под влиянием одного только теплового воздействия. В этом случае характеристическая скорость процесса непрерывно совпадает со скоростью движения;  $w = u$



(2,67). При непрерывном росте скорости в тепловом сопле величина  $a$  растет в начале до числа  $M = \frac{1}{\sqrt{k}}$ , а затем падает. В свою очередь, критическая скорость  $a^*$  растет в дозвуковой области течения при подводе тепла и падает в сверхзвуковой — при отводе его. Как и в предыдущих случаях, в дозвуковом потоке при  $M < 1$

$$w < a^* < a,$$

в критическом сечении при  $M = 1$

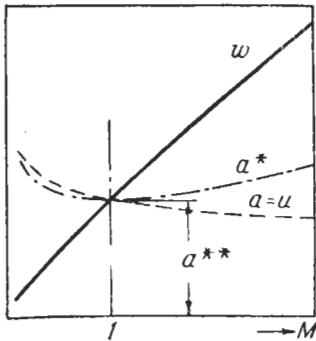
$$w = a = a^{**},$$

и в сверхзвуковом потоке при  $M > 1$

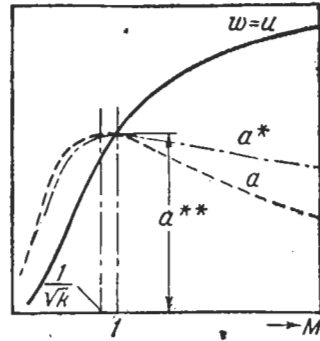
$$w > a^* > a.$$

Соответствующие кривые — для движения газа в тепловом сопле — показаны на фиг. 2,4.

Обратимся теперь к краткому анализу движения при совместном действии нескольких, например, двух факторов.



Фиг. 2,3. Изменение величин  $w$ ,  $a$ ,  $a^*$ ,  $u$  — в механическом сопле.



Фиг. 2,4. Изменение величин  $w$ ,  $a$ ,  $a^*$ ,  $u$  — в тепловом сопле.

В качестве первого примера рассмотрим движение без трения по трубе переменного сечения при наличии подвода или отвода тепла. Значение коэффициентов  $l$ ,  $m$  и  $n$  найдем из уравнений (2,55) — (2,57). Первый из них — коэффициент  $l$ , характеризующий изменение давления относительно скорости движения, равен:

$$l = - \frac{\frac{dF}{F} - \frac{g}{Aa^2} (k-1) dQ_a}{kM^2 \left[ \frac{dF}{F} - \frac{g}{Aa^2} (k-1) dQ_a \right]} = - \frac{1}{kM^3} < 0. \quad (2,70)$$

Уменьшение скорости в этом процессе, следовательно, всегда сопровождается ростом давления, а увеличение ее — падением давления. В отличие от этого коэффициенты  $m$  и  $n$  могут быть как положительными, так и отрицательными:

$$m = -\frac{1 - \sigma_{Q-F}}{M^2 - \sigma_{Q-F}}; \quad n = \frac{1 - \sigma_{Q-F}}{M^2 - \sigma_{Q-F}}, \quad (2,71)$$

где для краткости обозначено

$$\sigma_{Q-F} = g(k-1) \frac{F}{Aa^2} \cdot \frac{dQ_a}{dF}. \quad (2,71')$$

При  $\sigma_{Q-F} < 0$ , т. е. при подводе тепла в сходящейся трубе ( $dQ_a > 0$ ;  $dF < 0$ ), или при отводе тепла в расходящейся трубе ( $dQ_a < 0$ ;  $dF > 0$ ) всегда будет  $m < 0$  и  $n > 0$ .

Если  $\sigma_{Q-F} > 0$ , т. е. имеет место совместное действие противоположных по характеру влияния на газовое сечение факторов ( $dQ_a > 0$ ;  $dF > 0$ , или  $dQ_a < 0$ ;  $dF < 0$ ), знаки  $m$  и  $n$  меняются при  $M^2 = \sigma_{Q-F}$ .

Так в случае  $\sigma_{Q-F} < 1$  и  $0 < M^2 < \sigma_{Q-F}$  имеют место неравенства  $m > 0$  и  $n < 0$ , т. е. увеличение скорости в дозвуковом течении сопровождается падением давления и ростом плотности, а падение скорости — ростом давления и уменьшением плотности (процесс с отрицательным показателем политропы).

Аналогичные соотношения могут быть в сверхзвуковом потоке, если  $M^2 > \sigma_{Q-F} > 1$ . Величина  $t$  в рассматриваемом случае также может быть как положительной, так и отрицательной.

Предоставляя читателю рассмотреть аналогичным путем другие частные случаи<sup>1</sup>, ограничимся общими качественными выводами. При любой комбинации односторонних по характеру влияния на газовое течение воздействий („прямых“ или „обратных“) всегда имеют место соотношения  $l < 0$ ;  $m < 0$ ;  $n > 0$ .

Отклонения от этих „обычных“ свойств газовых течений могут иметь место только в случае совместного действия двух или нескольких противоположных факторов. В приведенной в тексте табличке указаны величины  $l$ ,  $m$  и  $n$ , соответствующие определенным воздействиям, при сочетании

<sup>1</sup> Мы вернемся к этому вопросу при подробном анализе влияния впрыска жидкости, испаряющейся в газовом потоке (случай  $dG \neq 0$ ;  $dQ_a \neq 0$ ).

которых с другими (противоположными по характеру) принципиально могут быть получены соотношения  $l > 0$ ,  $m > 0$  или  $n < 0$ :

|      |        |        |        |
|------|--------|--------|--------|
| $dF$ | $dL_T$ | $dQ_a$ | $dL_r$ |
| $m$  | $l$    | $n$    | $l, n$ |

Например, при одновременном действии изменения сечения и подвода или отвода работы в случае  $\frac{dF}{dL_T} > 0$  в потоке возможны, наряду с „обычными“ соотношениями, также и неравенства  $l > 0$ ;  $m > 0$ , т. е. ускоренное движение при росте давления и плотности, или замедленное — при их падении. Показатель полнотры  $n$  в этом случае всегда положителен:  $n > 0$ .

В другом примере — при комбинации теплоты и работы, если  $\frac{dQ_a}{dL_T} < 0$ , возможны процессы при  $l \geq 0$ ,  $n \geq 0$ , но всегда  $m < 0$ . Наконец, при движении в расходящейся трубе с трением (при  $\frac{dF}{dL_r} > 0$ ) принципиально возможны как положительные, так и отрицательные значения всех трех коэффициентов  $m$ ,  $l$  и  $n$ .

Практическое осуществление таких „аномальных“ процессов требует экспериментальной проверки, поскольку полученные выводы в значительной мере ограничены как гидравлической моделью движения, так и произвольным, в сущности, выбором соотношений между воздействиями.

### 2.9. О „КРИЗИСЕ“ ТЕЧЕНИЯ И ВЛИЯНИИ ТРЕНИЯ

Как следует из уравнения (2,55), непрерывный переход через скорость звука возможен в случае, если в критическом сечении при  $M=1$  обращается одновременно в нуль сумма всех элементарных воздействий:

$$\left[ \frac{dF}{F} \right]_{M=1} - \left[ \frac{g}{a^2} dL_T \right]_{M=1} - \left[ k \frac{g}{a^2} dL_r \right]_{M=1} - \left[ (k-1) \frac{g}{Aa^2} dQ_a \right]_{M=1} = 0. \quad (2,72)$$

Условие это устанавливает режим течения в критическом сечении. Из всех воздействий, входящих в уравнение (2,72), одно, а именно — трение, — является принципиально односторонним. Отсюда следует, что непрерывный переход через кри-

тическую скорость в реальном движении (с трением) возможен только при наличии еще хотя бы одного «обратного» воздействия, которое могло бы компенсировать трение.

Последнее, как указывалось в первой части книги, приводит к смещению критического сечения в область действия «обратного» фактора. При значительном трении необходимо, однако, не только наличие «обратного» воздействия, но и достаточная интенсивность его для того, чтобы обеспечить соблюдение равенства (2,72). Для отдельных частных случаев это уравнение приводит к следующим количественным соотношениям.

При движении с трением в канале переменного сечения и отсутствии остальных воздействий критическое сечение устанавливается при

$$\left[ \frac{dF}{F} \right]_{M=1} = \left[ k \frac{g}{a^2} dL_r \right]_{M=1} > 0, \quad (2,73)$$

т. е. в расходящемся участке трубы. В зависимости от интенсивности трения и угла раствора сопла смещение критического сечения за пережим сопла может быть больше или меньше.

В другом частном случае — при движении с трением в механическом сопле — уравнение (2,72) дает для критического сечения при  $M=1$ :

$$[dL_r]_{M=1} = - [kdL_r]_{M=1} < 0. \quad (2,74)$$

В этом процессе критическое сечение устанавливается после изменения знака воздействия — в области подвода работы (нагнетатель), причем в том сечении, где к газу подводится механическая энергия, в  $k$  раз превышающая работу трения.

При движении с трением газа по цилиндрической трубе и подводе или отводе тепла<sup>1</sup> энергетический режим критического сечения определяется равенством:

$$[dQ_a]_{M=1} = - \left[ \frac{k}{k-1} dQ_r \right]_{M=1} < 0. \quad (2,75)$$

Последнее означает, что критическое сечение располагается в области отвода тепла, в том месте канала, где количество отведенного тепла в  $\frac{k}{k-1}$  раза превышает теплоту трения. В связи с этим следует отметить, что отвод тепла в количестве, равном теплоте трения

$$dQ_a = -dQ_r,$$

<sup>1</sup> Этот случай был исследован в 1946 г. А. А. Гухманом и автором.

не может создать условия для осуществления непрерывного перехода через критическую скорость, несмотря на изэнтропический характер процесса ( $dS=0$ ), поскольку в критическом сечении не выполняется условие (2,75). В этом случае при  $M=1$  будет иметь место «кризис» течения и связанное с ним установление «предельного состояния» в выходном сечении канала.

Аналогичный результат будет иметь место, всегда, когда присущие конкретному процессу специфические особенности находятся в противоречии с общим условием (2,72) или вытекающими из него для частных случаев равенствами. Наличие такого противоречия, либо отсутствие его, разумеется, не может быть предсказано из каких-либо общих соображений. Практика применения сопла Лаваля показывает, например, что в этом частном случае — геометрического сопла с трением — компенсация трения и непрерывный переход через скорость звука не вызывает каких-либо осложнений.

Для теплового сопла с трением в противоположность этому можно указать один весьма важный пример процесса, при котором наличие внутренней связи между внешним воздействием (теплообменом) и работой трения приводит к противоречию с условием, необходимым для предотвращения кризиса.

Допустим, что подвод и отвод тепла осуществляется исключительно соприкосновением через стенки прямой трубы, причем во всей области течения (как дозвуковой, так и сверхзвуковой) справедливы соотношения элементарной гидродинамической теории теплообмена.

В этом случае, как показано подробно в работах А. А. Гухмана<sup>1</sup>, «кризис» течения неизбежен и, следовательно, непрерывный переход через скорость звука невозможен.

Докажем это в самом общем виде. Отношение количества тепла, отводимого от газа через стенки, к количеству его, выделяющемуся вследствие трения, можно записать в виде:

$$\frac{dQ_a}{dQ_r} = \frac{\alpha \Delta T_0}{A \tau w},$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи;

$\Delta T_0 = T_0 - T_{cm}$  — разность температуры торможения газа  $T_0$  и температуры стенки  $T_{cm}$ ;

$\tau$  — напряжение трения.

<sup>1</sup> См. А. А. Гухман. Журнал технической физики, т. IX, № 5, 1939 г.; т. X, № 20, 1940 г.

Согласно гидродинамической теории тепл. обмена<sup>1</sup>, для трубы постоянного сечения справедливо равенство:

$$\frac{\alpha}{\tau} = \frac{gc_p}{w}.$$

Следовательно,

$$\frac{dQ_a}{dQ_r} = - \frac{gc_p \Delta T_0}{Aw^2} = - \frac{gc_p \left( T + \frac{Aw^2}{2gc_p} - T_{cm} \right)}{Aw^2}$$

или

$$\frac{dQ_a}{dQ_r} = - \frac{1}{2} \frac{1}{k-1} \frac{a^2 - kgRT_{cm}}{w^3}.$$

В критическом сечении при  $M = 1$  это соотношение приводит к равенству:

$$\left[ \frac{dQ_a}{dQ_r} \right]_{M=1} = - \frac{1}{2} \frac{1}{k-1} \left[ 1 - \frac{T_{cm}}{T^*} \right].$$

Однако, в условиях отсутствия «кризиса», согласно уравнению (2,75), должно быть также:

$$\left[ \frac{dQ_a}{dQ_r} \right]_{M=1} = - \frac{k}{k-1}.$$

Приравняв друг другу правые части двух последних выражений, мы приходим к физически невозможному условию:

$$\frac{T_{cm}}{T^*} = - \frac{k-1}{2} < 0.$$

(Абсолютная температура стенки  $T_{cm}$  или критическая температура  $T^*$  должна быть отрицательной.) Следовательно, соотношение между  $dQ_a$  и  $dQ_r$ , вытекающее из гидродинамической теории теплообмена, противоречит условию непрерывного перехода через скорость звука и «кризис» в рассматриваемом процессе принципиально неизбежен.

Поэтому практическое осуществление теплового сопла, по-видимому, должно быть связано наряду с теплообменом соприкосновением и с другими формами отвода тепла (например, излучением раскаленных газов, впрыском охлаждающей жидкости и т. п.).

<sup>1</sup> См., например, М. А. Михеев, Основы теплопередачи. Госэнергоиздат, 1949 г.

Мы рассмотрели несколько примеров одновременного действия двух факторов. При наличии нескольких воздействий аналогичные соображения относятся к суммарному «обратному» воздействию, которое должно обеспечить соблюдение условия (2,72).

Во всех остальных случаях, когда уравнение (2,72) не может быть удовлетворено, непрерывный переход через скорость звука невозможен.

Все рассмотренные выше примеры относились к движению с трением, когда для предотвращения «кризиса» необходимо задание достаточно интенсивного обратного воздействия, чтобы удовлетворить условиям (2,72) в критическом сечении. Совершенно аналогичные соотношения применимы, однако, и к другим случаям перехода через критическую скорость при наличии (кроме трения) другого какого-либо «прямого» воздействия, например, к переходу через скорость звука в сходящейся трубе за счет смены подвода и отвода тепла, или переходу через скорость звука в сопле Лавала при подводе тепла и т. п.

Весьма существенно, что условия, соблюдение которых дает возможность осуществить непрерывный переход через критическую скорость, определяют единственно местный режим процесса в критическом сечении, но не накладывают каких-либо ограничений на характер течения или энергетические соотношения вдали от него. Это означает, что в практической обстановке не требуется создания какого-либо специального режима компенсации трения и других «прямых» воздействий в заданном наперед критическом сечении канала. Задача сводится лишь к заданию такого закона распределения воздействий по длине канала, который позволил бы, чтобы в потоке вблизи того сечения, в котором меняется знак суммарного внешнего воздействия, сложились соотношения, удовлетворяющие уравнению (2,72). В этом месте в потоке и установится «автоматически» критическая скорость.

## 2.10. ОБ ИЗМЕНЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ КОНСТАНТ ГАЗА

При протекании химических реакций (горение, термическая диссоциация и т. п.), изменении агрегатного состояния и в некоторых других случаях, наряду с выделением или поглощением энергии, имеет место изменение физических констант рабочего тела: газовой постоянной смеси  $R$ , среднего молекулярного веса  $\mu$  и теплоемкости. Изменение последней происходит, впрочем, и при отсутствии химических реакций — в связи с изменением температуры. В предыдущих разделах, имея в виду, главным образом, качественные вы-

воды, мы считали величины  $R$ ,  $\nu$ ,  $c_p$  и  $k$  — постоянными, не зависящими от параметров состояния.

Это же приближение, сводящееся в сущности к введению в расчет средних для рассматриваемого интервала изменения состояния значений физических констант, будет принято и в последующем — для количественного расчета различных частных случаев. В связи с этим целесообразно установить в общем виде качественный эффект, вызываемый изменением физических констант. Несмотря на приближенный характер такого анализа, он позволит в конкретных случаях оценить знак отклонения действительного процесса от результатов расчета, выполненного в предположении постоянства физических констант. Рассмотрим этот эффект в свете закона обращения воздействия, отбросив для простоты все остальные факторы. Идеализированная таким образом задача сводится к течению газа по каналу постоянного сечения, при постоянстве секундного весового расхода и отсутствии обмена энергией (в виде теплоты и работы) и трения.

Допустим, что газ попрежнему подчиняется уравнению состояния  $p = \rho gRT$ , однако величина  $R$  в правой части этого уравнения — переменная.

В дифференциальной форме уравнение состояния напомним в виде:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dR}{R} + \frac{dT}{T}. \quad (2,76)$$

Воспользуемся теперь уравнением энергии для энергетически изолированного процесса — в виде условия постоянства температуры торможения:

$$dT_0 = dT + \frac{k-1}{kgR} \omega^2 \frac{d\omega}{\omega} = 0,$$

откуда

$$\frac{dT}{T} = - (k-1) M^2 \frac{d\omega}{\omega}. \quad (2,77)$$

Напишем также уравнение Бернулли для движения без трения по каналу постоянного сечения в виде

$$\frac{dp}{\rho} + \omega^2 \frac{d\omega}{\omega} = 0$$

или:

$$\frac{dp}{p} = - k M^2 \frac{d\omega}{\omega} \quad (2,78)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{d\omega}{\omega} = - \frac{d\rho}{\rho}. \quad (2,79)$$



Равенства (2,77) — (2,79) связывают изменение параметров состояния  $p$ ,  $\rho$  и  $T$  с изменением скорости движения  $w$ . Подставим теперь значения  $\frac{dp}{p}$ ,  $\frac{d\rho}{\rho}$  и  $\frac{dT}{T}$  в уравнение (2,76).

После простых выкладок, получим:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \frac{dR}{R} \quad (2,80)$$

или, в связи с соотношением между  $R$  и  $\mu$ :

$$\mu = \frac{\bar{R}}{R}; \quad \frac{d\mu}{\mu} = - \frac{dR}{R}$$

(где  $\bar{R}$  — универсальная газовая постоянная),

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{d\mu}{\mu}. \quad (2,80')$$

Уравнения (2,80) — (2,80'), написанные в обычной для закона обращения воздействий форме, определяют влияние изменения физических констант на характер движения.

Для большей четкости выпишем вытекающие из этих уравнений соотношения отдельно для ускоренного и замедленного движения в виде следующей таблички:

а) Ускоренное движение  $dw > 0$

б) Замедленное движение  $dw < 0$

|         |          |            |         |          |            |
|---------|----------|------------|---------|----------|------------|
| $M < 1$ | $dR > 0$ | $d\mu < 0$ | $M < 1$ | $dR < 0$ | $d\mu > 0$ |
| $M = 1$ | $dR = 0$ | $d\mu = 0$ | $M = 1$ | $dR = 0$ | $d\mu = 0$ |
| $M > 1$ | $dR < 0$ | $d\mu > 0$ | $M > 1$ | $dR > 0$ | $d\mu < 0$ |

Мы видим, что увеличение газовой постоянной смеси (или уменьшение среднего молекулярного веса) приводит к ускорению дозвукового потока и замедлению сверхзвукового. Обратно этому, уменьшение газовой постоянной (или увеличение молекулярного веса) вызывает торможение дозвукового потока и ускорение сверхзвукового.

В соответствии с применявшейся ранее терминологией, это означает, что изменение физических констант газа, характеризующееся неравенством  $dR > 0$  (или  $d\mu < 0$ ), может быть отнесено к числу „прямых“ воздействий, а обратное ему —  $dR < 0$  (или  $d\mu > 0$ ) — к числу „обратных“.

Равенства (2,77) — (2,79) позволяют также однозначно определить влияние этого воздействия на изменение параметров состояния. При изолированном действии одного только изменения физических констант справедливы неравенства

$$l < 0; m < 0; n > 0; t < 0.$$

Последнее означает, что ускорение движения сопровождается падением давления, плотности и температуры, а замедление — их ростом.

Исследуем также закон изменения числа  $M$ . По определению

$$M^2 = \frac{w^2}{kgRT}.$$

Наряду с изменением газовой постоянной  $R$ , учтем также изменение показателя изоэнтропы<sup>1</sup>  $k$ . Дифференцируя выражение для  $M^2$  при переменном  $k$ , имеем:

$$\frac{dM^2}{M^2} = 2 \frac{dw}{w} - \frac{dk}{k} - \frac{dR}{R} - \frac{dT}{T}. \quad (2,81)$$

Используя равенства (2,77) — (2,80), можно получить также следующее уравнение, связывающее изменение числа  $M$  с изменением физических констант  $R$  и  $k$ :

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = - (1 + kM^2) \frac{dR}{R} - (M^2 - 1) \frac{dk}{k} \quad (2,82)$$

или, для изменения  $\mu$  и  $k$ :

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = (1 + kM^2) \frac{d\mu}{\mu} - (M^2 - 1) \frac{dk}{k}. \quad (2,83)$$

Увеличение газовой постоянной  $R$ , или уменьшение молекулярного веса  $\mu$ , приводит, следовательно, к росту числа  $M$  в дозвуковом потоке и падению его — в сверхзвуковом. Наоборот, снижение  $R$ , или возрастание  $\mu$ , приводит к падению  $M$  в дозвуковой области течения и к росту — в сверхзвуковой. В первом случае ( $dR > 0$ ;  $d\mu < 0$ ) имеет место, следовательно, стремление к критическому режиму течения ( $M \rightarrow 1$ ), тогда как во втором ( $dR < 0$ ;  $d\mu > 0$ ) разность  $|M^2 - 1|$  возрастает по абсолютной величине.

Что касается изменения показателя изоэнтропы  $k$ , то, как это видно, например, из уравнения (2,82), рост  $k$  приводит всегда (в дозвуковой или сверхзвуковой области течения) к падению числа  $M$ , а уменьшение  $k$  — к увеличению  $M$ . Последнее вполне естественно, поскольку скорость звука, стоящая в знаменателе числа  $M$ , прямо пропорциональна корню квадратному из величины  $k$ :  $a = \sqrt{kgRT}$ .

Полученный результат приводит к следующему качественному выводу. При протекании химических реакций, происходящих с увеличением молекулярного веса смеси, и, следова-

<sup>1</sup> Полагая его, в первом приближении, независимым от изменения  $R$ .

тельно, с падением эффективной газовой постоянной, влияние выделения тепла (для экзотермической реакции) несколько ослабляется противоположным по своему характеру влиянием изменения физических констант газа. Более подробно совместное влияние теплового эффекта реакции и изменение числа молей газа в процессе реакции может быть рассмотрено на конкретных примерах.

Отметим также, что изменение физических констант газа сказывается и в ряде других случаев при отсутствии химической реакции. Примером может служить впрыск охлаждающей жидкости (например, воды) в газовый поток высокой температуры, или конденсация влаги в воздухе. Как правило, однако, в большинстве таких случаев основное значение имеют эффекты, связанные с тепловым воздействием, затем — эффекты, связанные с расходным воздействием и в последнюю очередь — с изменением физических постоянных. Поэтому учет последнего фактора целесообразен при решении конкретных задач — на основе подробного предварительного расчета состава газа и его характеристик во всей области изменения состояния.

## Глава 2,3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ДЛЯ ОТДЕЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

### 2,11. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И ИДЕАЛЬНОЕ РАСХОДНОЕ СОПЛО

Перейдем к ряду примеров подробных количественных расчетов для различных частных случаев движения идеального газа. В этой главе мы рассмотрим четыре случая движения газа под влиянием одного только изолированного воздействия, анализ которых привел нас к схемам сверхзвуковых сопел, и движение с трением.

Отличительной особенностью любых таких частных случаев изолированного воздействия (геометрическое, расходное, механическое, тепловое сопла, а также движение под влиянием одного только трения) является одинаковое соотношение между числом переменных величин в основных уравнениях термодинамики потока и числом самих уравнений. Во всех случаях число переменных на единицу больше числа уравнений, поэтому принципиально всегда возможно выразить изменение всех переменных  $w$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $\rho$ ,  $j$ ,  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $\rho_0$ ,  $S$  и т. д. через изменение одной какой-либо, выбранной в качестве аргумента.

Большое удобство представляет выбор в качестве аргумента одной из критериальных характеристик потока: числа  $M$  или коэффициента скорости  $\lambda$ .

При этом предпочтение, оказываемое в конкретных случаях одной из этих безразмерных величин перед другой, опре-

деляется исключительно желанием получить конечные расчетные формулы в возможно более простом виде. В тех случаях, где серьезных оснований для выбора между  $M$  и  $\lambda$  нет, мы дадим обе формы расчетных зависимостей от числа  $M$  и коэффициента скорости; впрочем, переход от одной из них к другой не представляет никаких затруднений<sup>1</sup>.

Для вывода количественных соотношений между переменными можно было бы исходить из полученных выше дифференциальных уравнений закона обращения воздействий для числа  $M$ . Например, в рассматриваемом случае изменения плотности тока мы должны были бы обратиться к уравнению (2,65), интегрирование которого дало бы зависимость величины  $j$  (т. е. площади сечения — для геометрического сопла и расхода газа — для идеального расходящего) от числа  $M$ . Учитывая, однако, простоту рассматриваемых в этой главе примеров, будем исходить непосредственно из интегральных соотношений между переменными, выбирая эти соотношения в соответствии с процессом изменения состояния.

Для геометрического и идеального расходящего сопла, т. е. для изоэнтропического движения газа с переменной плотностью тока, в связи с энергетически изолированным процессом изменения состояния ( $dQ_a = 0$ ;  $dL_T = 0$ ), наиболее простой вид из основных уравнений имеет уравнение энергии. Напишем его сразу в интегральной форме в виде условия постоянства температуры торможения:

$$T_{01} = T_{02}.$$

(Условимся, здесь и в дальнейшем, индекс «1» относить к начальному сечению, а индекс «2» к переменному — конечному.)

По определению температура торможения  $T_0$  связана с термодинамической температурой  $T$  выражением (2,57):

$$T_0 = T \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) = \frac{T}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}.$$

<sup>1</sup> Напомним формулы, связывающие число  $M$  с коэффициентом скорости [(см. (2,47) — (2,48)]:

$$M^2 = \frac{\frac{2}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}; \quad \lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}.$$

Отсюда непосредственно получаем выражение для отношения температур в двух сечениях потока:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (2,84)$$

Воспользуемся теперь изэнтропическими пропорциями, имея в виду, что изменение состояния газа подчиняется равенствам

$$S_2 = S_1; \quad \frac{p}{\rho^k} = \text{const};$$

или

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k.$$

Мы можем, следовательно, сразу же написать выражения для отношения давлений:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2,85)$$

и для отношения плотностей в двух сечениях канала:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (2,86)$$

в функции от числа  $M$  или коэффициента скорости.

В связи с тем, что постоянство температуры торможения означает также неизменяемость критической скорости, т. е. равенство

$$a_1^* = a_2^* = \text{const},$$

отношение скоростей движения газа в двух сечениях равно

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (2,87)$$

Наконец, отношение плотностей тока газа в двух сечениях из уравнений (2,86)—(2,87) равно:

$$\frac{j_2}{j_1} = \frac{M_2}{M_1} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2,88)$$

Нетрудно проверить, что формула (2,88) получается также при интегрировании уравнения (2,65):

Действительно, уравнение (2,65) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \frac{dM^2}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) M^2} - \frac{dM^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right] = \\ & = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{d \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} - \frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2} = -\frac{dj}{j}, \end{aligned}$$

откуда непосредственно следует соотношение (2,88).

Во всех случаях, кроме последнего, имело место монотонное изменение параметров<sup>1</sup> при росте или убывании величины  $M_2$  и постоянстве  $M_1$ . В противоположность этому плотность тока  $j$  проходит через экстремум (максимум) при  $\omega = a^*$  — в критическом сечении сопла.

Покажем это обычным приемом: вычислим производную от переменной плотности тока  $j_2$  по числу  $M_2$  и приравняем ее нулю. Решая затем полученное уравнение относительно числа  $M_2$ , найдем значение его, отвечающее экстремуму плотности тока

$$\frac{d \frac{j_2}{j_1}}{dM_2} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}{M_1} \frac{d}{dM_2} \left[ \frac{M_2}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \right] = 0$$

<sup>1</sup> А именно, падение температуры, давления и плотности при росте  $M_2$  или рост их — при убывании числа  $M_2$ , если значение  $M_1$  фиксировано.

или

$$\left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} - 2M_2^2 \frac{k+1}{2(k-1)} \cdot \frac{k-1}{2} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)} - 1} = 0,$$

откуда

$$1 - \frac{\frac{k+1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} = 1 - \lambda_2^2 = 0,$$

или же

$$\lambda_2^2 = M_2^2 = 1.$$

Нетрудно аналогичным путем убедиться в том, что при  $w = a^*$  вторая производная плотности тока по числу  $M$

отрицательна:  $\frac{d^2 j_2}{dM_2^2} < 0$ , т. е. действительно в критическом сечении сопла имеет место максимум плотности тока.

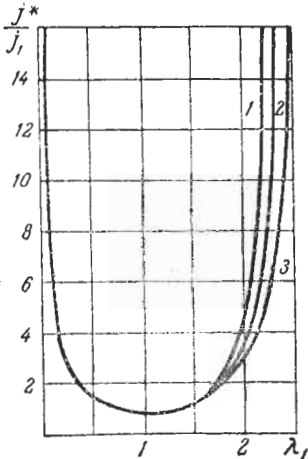
Подставляя в уравнение (2,88) значение  $M_2 = 1$ , найдем максимальное значение отношения плотностей тока  $\frac{j_2}{j_1}$  в функции от числа  $M_1$  или  $\lambda_1$ :

$$\frac{j^*}{j_1} = \frac{j_{\max}}{j_1} = \frac{1}{M_1} \cdot \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = \frac{1}{\lambda_1} \left( \frac{2}{\frac{k+1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2,89)$$

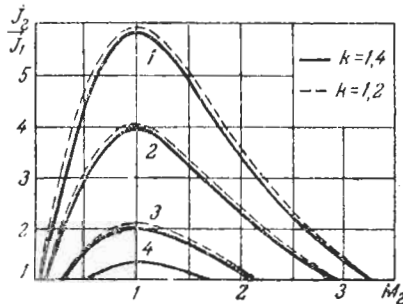
С ростом начального значения числа  $\lambda_1$  или  $M_1$  (точнее с приближением его к единице с любой стороны) отношение  $\frac{j^*}{j_1}$  падает, стремясь к единице при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . На фиг. 2,5 изображены кривые зависимости  $\frac{j^*}{j_1}$  от  $\lambda_1$  для трех значений показателя  $k$ . В дозвуковой области течения кривые, построенные для разных  $k$ , практически сливаются, тогда как в сверхзвуковой — заметно расходятся. Как видно из фиг. 2,5, заданному значению  $\lambda_1$  (при данном  $k$ ) отвечает одно значение  $\frac{j^*}{j_1}$ . Для геометрического сопла это равносильно следующему. Если размеры входного сечения сопла фиксиро-

ваны, то (для дозвукового потока) задание значения  $\lambda_1$  определяет размеры критического сечения. Например, при  $\lambda_1 = 0,5$  критическое сечение должно быть примерно в 1,5 раза меньше входного. Допустим, однако, что мы захотели бы дать большее сужение и уменьшили площадь, например, в три раза. В этом случае (при  $\frac{j^*}{j_1} = 3$ ) величина  $\lambda_1$  во входном сечении упала бы до  $\lambda_1 \approx 0,2$  и, следовательно, при заданном состоянии газа в сечении I расход газа снизился бы приблизительно в 2,5 раза.

Этот пример является наглядной иллюстрацией ограниченности сум-



Фиг. 2,5. Зависимость критического отношения плотностей потока для геометрического сопла от начального значения коэффициента скорости.  
1 —  $k = 1,4$ ; 2 —  $k = 1,3$ ; 3 —  $k = 1,2$ .



Фиг. 2,6. Зависимость отношения плотностей тока в геометрическом сопле от числа  $M_1$ .  
1 —  $M_1 = 0,1$ ; 2 —  $M_1 = 0,15$ ; 3 —  $M_1 = 0,3$ ;  
4 —  $M_1 = 0,5$ .

марного воздействия (в данном случае — сужения сечения сопла Лавалья или подвода газа — для идеального расходного сопла) при заданном значении числа  $M_1$  (или  $\lambda_1$ ) на входе. Аналогичные соотношения встретятся и в дальнейшем для остальных частных случаев движения газа.

Численный пример изменения плотности тока в зависимости от переменного числа  $M_2$  для нескольких значений числа  $M_1$  и двух значений показателя  $k = 1,2$  и  $k = 1,4$ , рассчитанный по формуле (2,88), показан на графике фиг. 2,6.

Истолкуем теперь полученный результат отдельно для геометрического и идеального расходного сопла. В первом из них (сопле Лавалья) весовой расход постоянен и, следовательно:

$$\frac{j_2}{j_1} = \frac{F_1}{F_2}$$



так как

$$G_1 = G_2.$$

Таким образом, уравнение (2,88) дает нам закон изменения площади поперечного сечения. Критическому сечению ( $M_2 = \lambda_2 = 1$ ) отвечает минимальное сечение сопла, равное

$$\frac{F^*}{F_1} = \frac{F_{мин}}{F_1} = M_1 \left( \frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (2,90)$$

или

$$\frac{F^*}{F_1} = \frac{F_{мин}}{F_1} = \lambda_1 \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{\frac{2}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2,90')$$

При расчете сопла Лаваля этим выражением обычно пользуются для определения отношения переменного сечения, отвечающего заданному числу  $M$  или коэффициенту скорости, к критическому сечению сопла (или для решения обратной задачи при заданной конфигурации сопла).

Во втором случае — в идеальном расходном сопле — постоянно сечение канала, следовательно, здесь  $\frac{j_2}{j_1} = \frac{G_2}{G_1}$ , так как  $F_1 = F_2$ .

В этом случае уравнение (2,88) дает закон изменения весового расхода; в критическом сечении расход максимален и определяется формулой (2,89):

$$\frac{G^*}{G_1} = \frac{G_{макс}}{G_1} = \frac{1}{M_1} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = \frac{1}{\lambda_1} \left( \frac{\frac{2}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2,91)$$

Напомним данное выше объяснение совпадения расчетных формул для геометрического и идеального расходного сопла. Для лучшего понимания последнего следует представить его себе выполненным в виде проницаемой для отдельных трубок тока (например, пористой) цилиндрической трубы, расположенной внутри геометрического сопла. При этом расходное сопло вместе с окружающим его потоком является, в сущности, тем же геометрическим соплом (см. выше фиг. 1,5,а), поскольку дополнительно вводимый газ на всем протяжении сопла обладает в точности теми же значениями скорости движения, температуры и прочих параметров, что и основной поток,

текущий по цилиндрической трубе. Такая схема ближе, конечно, к отводу газа из канала в реальном течении. Поэтому, ниже будет рассмотрен другой вариант расчета расходного сопла, более близкий к случаю ввода газа<sup>1</sup>.

Что касается изменения параметров заторможенного газа в геометрическом и идеальном расходном сопле, то по этому поводу можно отметить следующее.

Как указывалось выше, температура торможения здесь не меняется:

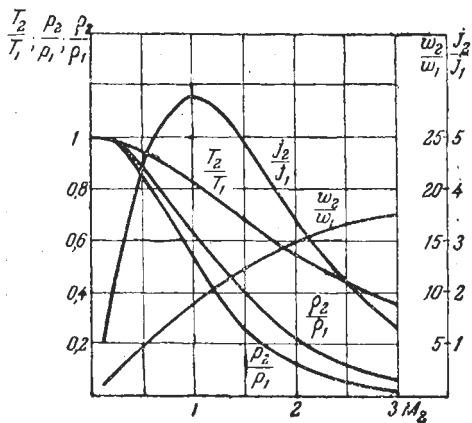
$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1.$$

Соответственно неизменными в связи с изоэнтропическим изменением состояния будут также давление и плотность заторможенного газа (связанные с температурой торможения изоэнтропическими пропорциями):

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = 1.$$

Отмеченное здесь постоянство всех трех параметров заторможенного газа  $T_0$ ,  $p_0$  и  $\rho_0$  является особенностью энергетически изолированного процесса при движении без трения.

На фиг. 2,7 показаны примеры кривых изменения всех параметров в геометрическом или идеальном расходном сопле в зависимости от числа  $M_2$  при заданной величине  $M_1 = 0,1$  и  $k = 1,4$ , иллюстрирующие полученные соотношения.



Фиг. 2,7. Изменение параметров газа, движущегося в геометрическом сопле в зависимости от числа  $M$  (для  $M_1 = 0,1$ ;  $k = 1,4$ ).

Укажем также некоторые полезные расчетные формулы и численные значения, являющиеся простым следствием приведенных выше.

Прежде всего, полагая в уравнениях (2,84) — (2,86) начальное значение  $M_1 = \lambda_1 = 0$ , а  $M_2 = \lambda_2 = 1$ , получим известные соотношения для параметров газа в критическом сечении при истечении из бесконечно большого резервуара:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \tag{2,29}$$

<sup>1</sup> См. стр. 167,

и

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2,30)$$

Таблица численных значений этих отношений для четырех значений показателя изоэнтропы  $k$  приводится ниже.

ТАБЛИЦА 2,2

Критические соотношения для геометрического и идеального расходного сопла

(при  $M_1 \approx 0$ ;  $M_2 = 1$ )

| Критическое отношение             | Показатель изоэнтропы |       |       |       |
|-----------------------------------|-----------------------|-------|-------|-------|
|                                   | $k = 1,1$             | 1,2   | 1,3   | 1,4   |
| Температуры $\frac{T^*}{T_0}$     | 0,953                 | 0,910 | 0,87  | 0,834 |
| Давления $\frac{p^*}{p_0}$        | 0,595                 | 0,565 | 0,546 | 0,528 |
| Плотности $\frac{\rho^*}{\rho_0}$ | 0,614                 | 0,621 | 0,628 | 0,634 |

Далее, из формулы (2,87) легко получить значение максимальной скорости истечения в вакуум (при  $M_2 = \infty$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ )

$$\frac{w_{\max}}{a^*} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \quad (2,27)$$

или

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} gRT_0} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} a_0, \quad (2,24)$$

где  $a_0$  — скорость звука в резервуаре, связанная с критической скоростью соотношением:

$$\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}}. \quad (2,28)$$

Соответствующие численные значения сведены в табл. 2,3 для тех же значений показателя  $k$ .

ТАБЛИЦА 2,3  
Максимальная скорость истечения

| Соотношение                             | Показатель адиабаты |       |       |       |
|---|---------------------|-------|-------|-------|
|   | $k = 1,1$           | 1,2   | 1,3   | 1,4   |
| $\lambda_{\max} = \frac{w_{\max}}{a^*}$ | 4,59                | 3,32  | 2,77  | 2,45  |
| $\frac{w_{\max}}{a_0}$                  | 4,47                | 3,16  | 2,58  | 2,24  |
| $\frac{a^*}{a_0}$                       | 0,976               | 0,954 | 0,932 | 0,915 |

В заключение — для удобства использования — в табл. 2,4 сведены все расчетные формулы, определяющие изменение параметров в двух сечениях потока в зависимости от числа  $M$  и коэффициента скорости — для геометрического и идеального расходного сопла.

## 2,12. МЕХАНИЧЕСКОЕ СОПЛО

Для движения газов в механическом сопле, т. е. в трубе постоянного сечения при неизменном весовом расходе и отсутствии теплообмена и трения, условие постоянства сечения и секундного весового расхода означает существование равенства:

$$j_2 = j_1$$

(постоянство плотности тока), откуда:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Напишем также отношение квадратов числа  $M^*$  для двух сечений сопла:

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{w_2^2}{w_1^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_2 \rho_1}{w_1 \rho_2}$$

Используя одну из пропорций для изоэнтропического процесса

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^k,$$

\* Формулы зависимости переменных от коэффициента скорости вследствие их громоздкости для данного случая в тексте не приводятся. Для сравнения они даны в итоговой таблице (см. табл. 2,5).

ТАБЛИЦА 2,4  
Основные соотношения для геометрического и идеального  
расходного сопла

| Расчетная величина          | Символ                  | Расчетные формулы   |  |
|-----------------------------|-------------------------|---|--|
| Отношение давлений          | $\frac{p_2}{p_1}$       | $\left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$                      | $\left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$                             |
| Отношение температур        | $\frac{T_2}{T_1}$       | $\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}$   | $\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}$  |
| Отношение плотностей        | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$                      | $\left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$                             |
| Отношение скоростей         | $\frac{w_2}{w_1}$       | $\frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}}$                              | $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  |
| Отношение плотностей потока | $\frac{j_2}{j_1}$       | $\frac{M_2}{M_1} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$ | $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$ |

Примечания: 1. Отношение параметров заторможенного газа равно:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = 1.$$

2. Для геометрического сопла  $\frac{j_2}{j_1} = \frac{F_1}{F_2}$ , для идеального расходного сопла  $\frac{j_2}{j_1} = \frac{G_2}{G_1}$ ,

имеем:

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \left( \frac{w_2}{w_1} \right)^{k+1}$$

или, наоборот, для отношения скорости движения в двух сечениях сопла:

$$\frac{w_2}{w_1} = \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{2}{k+1}} \quad (2,92)$$

Соответственно этому зависимости параметров состояния от числа  $M$  имеют вид:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2}{k+1}}, \quad (2,93)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2k}{k+1}}, \quad (2,94)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}}. \quad (2,95)$$

Этим формулам отвечает монотонный рост скорости и монотонное падение давления, температуры и плотности газа при расширении его и увеличении числа  $M$  — в турбине в дозвуковой области течения или в нагнетателе — в сверхзвуковой. Обратное изменение всех переменных соответствует сжатию газа в дозвуковом нагнетателе или сверхзвуковой турбине — при уменьшении числа  $M$ .

Иной характер имеет изменение параметров заторможенного потока  $T_0$ ,  $p_0$  и  $\rho_0$ , отражающих влияние энергетического воздействия (в данном случае, подвода или отвода работы).

Искомое выражение для отношения температур торможения в двух сечениях потока мы получим, используя выражение:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right)}{T_1 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)}$$

и уравнение (2,95). Подставляя в написанное выше выражение значение  $\frac{T_2}{T_1}$  из (2,95), получим:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}} \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}. \quad (2,96)$$

Тот же результат можно было получить непосредственно путем интегрирования уравнения (2,62)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Действительно, разделяя переменные в уравнении (2,62), приходим к равенству:

$$\frac{k-1}{2} \frac{dM^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} - \frac{k-1}{k+1} \frac{dM^2}{M^2} = \frac{dT_0}{T_0},$$

откуда сразу же следует уравнение (2,96).

Здесь также нетрудно показать, что температура торможения проходит через экстремум (а именно через минимум) в критическом сечении сопла при  $w = a^*$ , т. е.  $M_2 = \lambda_2 = 1$  (при фиксированном значении  $M_1$ ).

Действительно, из равенства производной от температуры торможения по числу  $M$  нулю:

$$\frac{d T_2}{d M_2} = \frac{M_1^{\frac{2(k-1)}{k+1}}}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \frac{d}{d M^2} \left[ \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{M_2^{\frac{2(k-1)}{k+1}}} \right] = 0,$$

имеем

$$(k-1) M_2^{\frac{2(k-1)}{k+1} + 1} - \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right) \frac{2(k-1)}{k+1} M_2^{\frac{2(k-1)}{k+1} - 1} = 0,$$

откуда:

$$1 - \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{\frac{k+1}{2} M_2^2} = 1 - \frac{1}{\lambda_2^2} = 0,$$

т. е.

$$\lambda_2 = M_2 = 1.$$

Следовательно, минимум температуры торможения\* имеет место при  $M_2 = 1$  — в критическом сечении сопла.

Наличие этого минимума легко объясняется характером энергетического обмена. В дозвуковом участке механического сопла (в турбине) работа совершается газом и энергия отводится от него, поэтому энтальпия торможения  $I_0 = I + A \frac{w^2}{2g}$  падает. В сверхзвуковом участке (нагнетателе) энергия подводится, и энтальпия торможения  $I_0$  (а также температура торможения  $T_0 \frac{I_0}{c_p}$ ) растет.

Аналогичный характер имеет изменение двух других параметров заторможенного газа: давления торможения  $p_0$  и плотности торможения.

По определению  $p_0$  и  $\rho_0$  связаны с давлением и плотностью газа выражениями:

$$p_0 = p \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \rho_0 = \rho \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

---

\*  $\frac{d^2 T_{02}}{d M_2^2} > 0$  при  $M_2 = 1$ .

В данном случае — при изоэнтропическом изменении состояния в механическом сопле — мы можем связать величины  $p_0$  и  $\rho_0$  с температурой торможения пропорциями<sup>1</sup>:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Отсюда, в связи с полученным выше выводом о характере изменения  $T_0$ , и следует одновременное прохождение

всех трех параметров заторможенного газа (температуры, давления и плотности торможения) через минимум в критическом сечении.

Кривые изменения параметров газа в механическом сопле в зависимости от числа  $M_2$  для численного примера:  $M_1 = 0,1$  и  $k = 1,4$ , показаны на фиг. 2,8.

Минимальное значение температуры торможения в критическом сечении механического сопла будет равно:

$$\frac{T_0^*}{T_{01}} = \frac{T_{0 \text{ мин}}}{T_{01}} = \frac{2(k-1)}{k+1} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \quad (2,97)$$

По мере стремления величины  $M_1$  к единице это отношение будет возрастать, также стремясь к единице.

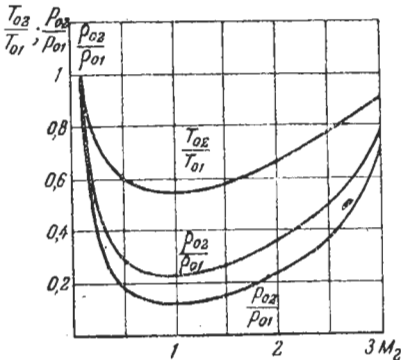
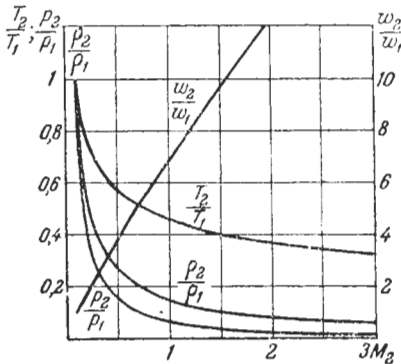
Полученное выражение для температуры торможения легко связать с количеством работы, совершенной

(или воспринятой) газом при соответствующем изменении чисел  $M$ .

Действительно, работа, совершенная газом, равна:

$$L_{1-2} = -c_p(T_{02} - T_{01}) = c_p(T_{01} - T_{02}).$$

<sup>1</sup> Окончательные выражения даны в таблице расчетных формул (см. табл. 2,5).



Фиг. 2,8. Изменение параметров газа, движущегося в механическом сопле в зависимости от числа  $M$  (для  $M_1 = 0,1$ ;  $k = 1,4$ ).



Следовательно, безразмерная характеристика

$$l_{1-2} = \frac{L_{1-2}}{c_p T_{01}} = 1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}, \quad (2,98)$$

равная отношению совершенной газом работы к его начальной энтальпии торможения (сумме энтальпии и кинетической энергии), определяется как простое дополнение до единицы выражения (2,96).

В соответствии с этим максимальная („критическая“) работа одностороннего механического воздействия (турбины или нагнетателя) при заданном начальном состоянии газа определяется из (2,97) уравнением:

$$l^* = l_{\max} = 1 - \frac{k+1}{2} \frac{M_1^{\frac{2(k-1)}{k+1}}}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} = 1 - \frac{\lambda_1^2}{M_1^{k+1}}. \quad (2,99)$$

Эту величину назовем „критической работой“.

Поясним эти соотношения численным примером.

Например, при  $M_1^2 = 0,1$  ( $M_1 \approx 0,316$ ) и  $k = 1,4$ , критическая работа расширения газа в турбине равна:

$$l_{\max} = 1 - 1,2 \frac{\sqrt[3]{0,316}}{1 + 0,02} \approx 0,2.$$

Допустим, что газ на входе в турбину имел температуру  $T_1 = 1000^\circ\text{K}$ , в этом случае работа, совершенная 1 кг газа при расширении его до скорости звука (при  $c_p \approx 0,3 \frac{\text{ккал}}{\text{кг.град}}$ ) составит<sup>1</sup>

$$L_{1-2}^* = 0,3 \cdot 1000 \cdot 1,02 \cdot 0,2 \approx 61 \frac{\text{кгМ}}{\text{кг}}.$$

Если при тех же значениях величин понизить число  $M$  на входе до  $M_1 = 0,1$ , то получим:

$$l_{\max} = 1 - 1,2 \frac{\sqrt[3]{0,1}}{1,002} \approx 0,445$$

и

$$L_{1-2} = 0,3 \cdot 1000 \cdot 1,002 \cdot 0,445 \approx 134 \frac{\text{кгМ}}{\text{кг}}.$$

Вычислим также работу расширения газа в турбине для обоих случаев ( $M_1^2 = 0,1$  и  $M_1^2 = 0,01$ ), если на выходе из турбины  $M_2 = 0,5$ .

<sup>1</sup>  $L_{1-2} = l_{1-2} \cdot l_{01} = c_p \cdot T_{01} \cdot l_{1-2}$ .

В первом случае из формулы (2,98) имеем:

$$l_{1,2} = 1 - \frac{\sqrt[3]{0,316}}{\sqrt[3]{0,5}} \cdot \frac{1,05}{1,02} \approx 0,117,$$

во втором, соответственно:

$$l_{1,2} = 1 - \frac{\sqrt[3]{0,1}}{\sqrt[3]{0,5}} \cdot \frac{1,05}{1,02} \approx 0,4.$$

Полная работа расширения 1 кг газа соответственно составит (при  $k=1,4$ ,  $c_p = 0,30$ ,  $T_1 = 1000^\circ\text{K}$ ),

$$L_{1,2} \approx 35,8 \frac{\text{кг}\cdot\text{М}}{\text{кг}} \quad (\text{т. е. } \sim 60\% L_{\text{макс}})$$

— при расширении газа от  $M_1 = 0,1$  до  $M_2 = 0,5$

и

$$L_{1,2} \approx 120 \frac{\text{кг}\cdot\text{М}}{\text{кг}} \quad (\text{т. е. } \sim 90\% L_{\text{макс}})$$

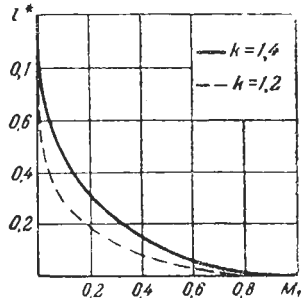
— при расширении газа от  $M_1 = 0,1$  до  $M_2 = 0,5$ .

На фиг. 2,9 и 2,10 показаны примеры кривых зависимости величины  $l^* = l_{\text{макс}}$  от числа  $M_1$  и величины  $l_{1,2}$  — от  $M_2$ , иллюстрирующие убывание  $l_{\text{макс}}$  с ростом  $M_1$  — явление, которое по аналогии естественно назвать „механическим кризисом“.

Найдем теперь значения параметров состояния в критическом сечении (при  $M_2 = 1$ ) механического сопла для случая истечения из бесконечно большого резервуара (при  $M_1 \approx 0$ ) Подставляя соответствующие значения числа  $M$  в уравнения (2,93) — (2,95), получим

$$\frac{p^*}{p_{01}} = \frac{\rho^*}{\rho_{01}} = \frac{T^*}{T_{01}} = 0.$$

Физически это означает, что расширение газов в первом участке сопла (турбине) будет протекать до полного вакуума, если начальная скорость газов на входе в турбину ничтожно мала. Поэтому для реализации второго участка сопла и перехода в нем через скорость звука необходимо, чтобы скорость газов на входе в турбину заметно отли-



Фиг. 2,9. Зависимость „критической работы“ газа в механическом сопле от числа  $M_1$  на входе.

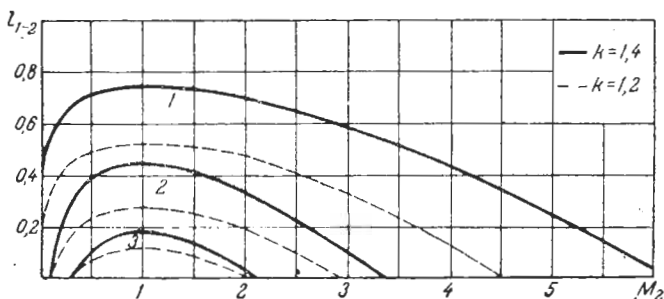
чалась от нуля. В этом случае критические значения параметров будут равны:

$$\frac{p^*}{p_1} = M_1^{\frac{2k}{k+1}}; \quad T_1^* = M_1^{\frac{2(k-1)}{k+1}}; \quad \rho_1^* = M_1^{\frac{2}{k-1}}.$$

Что касается максимальной скорости истечения<sup>1</sup> из механического сопла, то, как это видно из уравнения (2,92), она оказывается ничем неограниченной:

$$\frac{w_{\max}}{a^{**}} = \infty.$$

В табл. 2,5 приведена сводка основных формул для изэнтропического движения газа в механическом сопле или его элементах (турбине и компрессоре).



Фиг. 2,10. Зависимость безразмерной работы газа в механическом сопле от числа  $M$   
(1 —  $M_1 = 0,01$ ; 2 —  $M_1 = 0,1$ ; 3 —  $M_1 = 0,3$ ).

В заключение раздела применим соотношение для механического сопла к следующему примеру расчета. В главе 3,1 — в конце §, посвященного качественному анализу влияния подвода или отвода механической работы на течение газов, была рассмотрена схема «центробежного сопла»<sup>2</sup>. Допустим теперь, что газ, вытекающий из резервуара с повышенным давлением при начальной скорости, равной скорости звука, движется по направлению от оси вращения по вращающейся трубе постоянного сечения. Найдем число оборотов, которое необходимо придать этой трубе для получения на выходе заданного числа  $M > 1$ .

<sup>1</sup> Напомним, что для сечения, в котором скорость движения  $w$  равна критической, мы применяем обозначение  $a^{**}$ , так как значение самой критической скорости меняется по ходу сопла (в связи с изменением температуры торможения). Аналогичное обозначение  $a^{**}$  будет дано также ниже — для теплового сопла.

<sup>2</sup> См. стр. 51.

ТАБЛИЦА 2,5  
Основные соотношения для механического сопла

| Расчетная величина              | Символ                        | Расчетные формулы  |  |
|---------------------------------|-------------------------------|--|--|
| Отношение давлений              | $\frac{p_2}{p_1}$             | $\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{2k}{k+1}}$  | $\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}\right)^{\frac{k}{k+1}}$   |
| Отношение температур            | $\frac{T_2}{T_1}$             | $\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}}$  | $\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}\right)^{\frac{k-1}{k+1}}$   |
| Отношение плотностей            | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$       | $\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{2}{k+1}}$   | $\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}\right)^{\frac{1}{k+1}}$   |
| Отношение температур торможения | $\frac{T_{02}}{T_{01}}$       | $\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}} \times$<br>$\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}$                          | $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}} \times$<br>$\left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}\right)^{\frac{2}{k+1}}$ |
| Отношение давлений торможения   | $\frac{p_{02}}{p_{01}}$       | $\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{2k}{k+1}} \times$<br>$\left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{k}{k+1}}$ | $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{2k}{k+1}} \times$<br>$\left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}\right)^{\frac{2k}{k+1}}$    |
| Отношение плотностей торможения | $\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}$ | $\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{2}{k+1}} \times$<br>$\left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{1}{k+1}}$  | $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{2}{k+1}} \times$<br>$\left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}\right)^{\frac{2}{k+1}}$      |

Примечания: 1. Отношение плотностей потока  $\frac{j_2}{j_1} = 1$ .

2. Отношение скоростей  $\frac{w_2}{w_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ .

3. Для расчета работы 1 кг газа:

$$l_{1-2} = l_{1-2c} p T_{01}, \quad \text{где } l_{1-2} = 1 - \frac{T_{02}}{2T_{01}}.$$

Расчет проведем для численного примера (при произвольном выборе величин) — для двух значений числа  $M$  на выходе:  $M' = 2$  и  $M'' = 3$ . Длину трубы (от оси вращения) примем для простоты, равной одному метру, начальную температуру газа  $T_1 = 300^\circ\text{K}$ , теплоемкость  $c_p = 0,24 \frac{\text{ккал}}{\text{кг град.}}$ ,  $k = 1,4$ .

Найдем прежде всего величину  $l^*$  — безразмерную характеристику критической работы. Из формулы (2,99) имеем: для  $M = 2$

$$l^* = 1 - 1,2 \frac{\sqrt{2}}{1,8} = -0,16; \quad \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = 0,16;$$

для  $M = 3$

$$l^{**} = 1 - 1,2 \frac{\sqrt{3}}{2,8} = -0,28; \quad \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = 0,28.$$

В соответствии с этим полная работа, приходящаяся на 1 кг газа, составит

$$AL' = l^* c_p T_{01} = 0,16 \cdot 0,24 \cdot 300 \approx 14 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$$

и

$$AL'' = 0,28 \cdot 0,24 \cdot 300 \cdot 1,2 \approx 24 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$$

или в механических единицах

$$L' \approx 6000 \frac{\text{кгм}}{\text{кг}}; \quad L'' \approx 10000 \frac{\text{кгм}}{\text{кг}}.$$

Полученная величина механической работы должна быть подведена к одному килограмму газа, движущемуся по вращающейся трубке за счет работы центробежной силы. Напишем выражение для последней в виде:

$$dL = \frac{\omega^2 r dr}{g}; \quad L = \frac{\omega^2}{g} \left( \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \right) = \frac{\omega^2}{4g} = \frac{\pi^2 \cdot n^2}{4 \cdot 30^2 \cdot g} \approx \frac{n^2}{3600}$$

(при  $r_2 = 1$  м и  $r_1 = 0$ ;  $\omega$  — угловая скорость,  $n$  — число оборотов в минуту).

Приравнявая величину работы привода работе, подвод которой необходим для ускорения сверхзвукового потока газа от числа  $M_1 = 1$  до  $M' = 2$ , получим

$$n' = \sqrt{3600 \cdot 6000} \approx 4650 \text{ об/мин}$$

и, соответственно, для  $M'' = 3$

$$n'' = \sqrt{3600 \cdot 10000} = 6000 \text{ об/мин.}$$

Несмотря на произвольный характер величин, фигурирующих в расчете, результаты его показывают принципиальную

осуществимость такой схемы. В рассмотренном примере на долю механического воздействия был отведен один лишь сверхзвуковой участок сопла; создание исходной скорости движения газа, равной скорости звука, было предположено за счет другого (проще всего — геометрического) воздействия. Нетрудно было бы рассмотреть аналогично и полную схему механического (центробежного) сопла, в котором газ ускорялся бы в дозвуковом течении, двигаясь в направлении к оси вращения, а затем, продолжая движение от оси вращения, двигался бы со сверхзвуковой скоростью. Однако, и в этом случае начальная скорость (на входе в сопло), как это было показано выше, должна заметно отличаться от нуля.

### 2.13. ТЕПЛОВОЕ СОПЛО

Последняя из схем сверхзвуковых сопел — схема теплового сопла — представляет значительный интерес, так как может быть использована при некоторых реальных процессах. В первую очередь это относится к участку подогрева газа в дозвуковом течении, отвечающему простейшей схеме цилиндрической камеры сгорания. Помимо этого, соотношения между параметрами состояния и скоростью движения газа в двух сечениях сопла будут использованы в дальнейшем (в третьей части книги) — применительно к тепловым скачкам (в частном случае — к адиабатическому скачку уплотнения).

При движении газа в тепловом сопле (т. е. в трубе постоянного сечения, при постоянном весовом расходе и отсутствии механического воздействия и трения) сохраняется неизменной плотность тока:

$$j = \rho g w = \text{const},$$

откуда, как и в механическом сопле, имеем:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Кроме того, из уравнения Бернулли для движения без трения в трубе постоянного сечения, имеем

$$p + \rho w^2 = \text{const} \quad (2,38)$$

или

$$p_2 + \rho_2 w_2^2 = p_1 + \rho_1 w_1^2.$$

Это равенство является частным случаем закона сохранения количества движения — для рассматриваемого процесса.

Из уравнения (2,38) нетрудно выразить отношение давлений в функции от отношения удельных объемов  $\left(V = \frac{1}{\rho g}\right)$ .

Для этой цели перепишем его в виде:

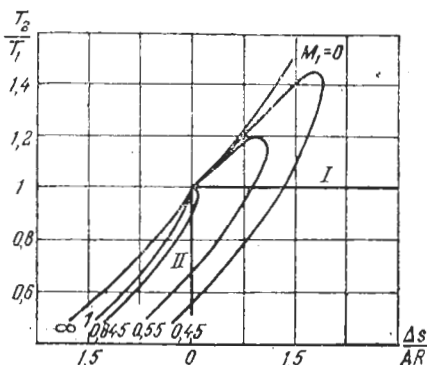
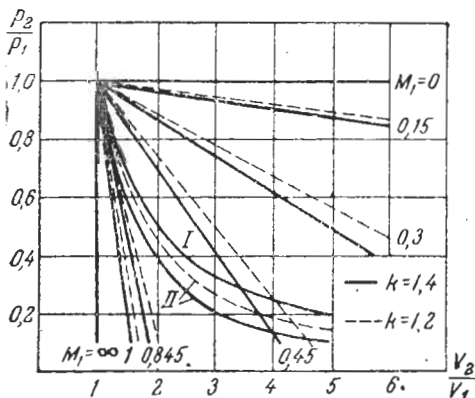
$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{\rho_1 \omega_1^2}{\rho_1} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right).$$

Имея в виду равенства:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \text{и} \quad \frac{\rho_1 \omega_1^2}{\rho_1} = kM^2,$$

можно написать также

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - kM_1^2 \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right) = 1 - n_1 \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right), \quad (2,100)$$



Фиг. 2,11. Изменение параметров состояния (расширение) газа, движущегося в тепловом сопле в  $pV$  и  $TS$ -координатах.

I — изотерма; II — изобэнтропа.

Каждая из кривых в начальной точке касается политропы со значением показателя  $n = kM_1^2$ . В случае  $M_1^2 < \frac{1}{k}$  кривые в диаграмме  $TS$  имеют максимум темпера-

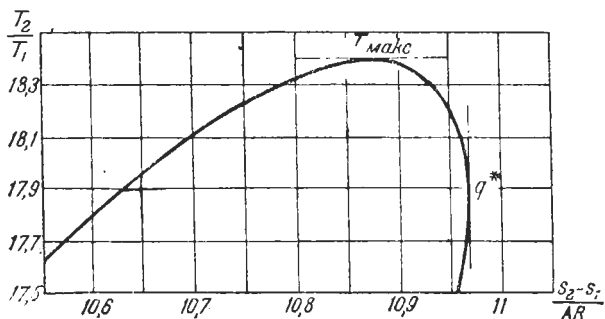
где  $n_1 = kM_1^2$  — начальное значение переменного коэффициента политропы, согласно формуле (2,67).

Таким образом, изменение состояния газа, движущегося в тепловом сопле, изображится в диаграмме  $pV$  (фиг. 2,11) семейством прямых линий, угловой коэффициент которых пропорционален квадрату начального числа  $M$ .

Мы видим, что с ростом начального значения числа  $M_1$  процесс приближается к изохорическому, так как большому изменению давления при сверхзвуковых скоростях отвечает ничтожное изменение плотности.

На том же графике (фиг. 2,11) внизу показан ход кривых расширения газа в тепловом сопле в тепловой

туры при  $M^2 = \frac{1}{k}$  и — в случае  $M^2 < 1$  — максимум энтропии при  $M=1$  (значение числа  $M^2$ , указано на фиг. 2,11 для каждой из кривых). В большем масштабе это показано для численного прим. ра на фиг. 2,12.



Фиг. 2,12. Изменение состояния газа в тепловом сопле в диаграмме  $TS$ .

Перепишем теперь уравнение импульсов (2,38) в виде:

$$p_2 \left( 1 + k \frac{w_2^2}{k \frac{p_2}{\rho_2}} \right) = p_1 \left( 1 + k \frac{w_1^2}{k \frac{p_1}{\rho_1}} \right)$$

или

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (2,101)$$

Таким образом, мы получили зависимость давления от числа  $M$  или коэффициента скорости<sup>1</sup>.

Из отношения квадратов чисел  $M$  для движения в трубе постоянного сечения:

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{w_2^2}{w_1^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1} = \frac{w_2 \rho_1}{w_1 \rho_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

получим аналогичные соотношения для скорости движения:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \cdot \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \cdot \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \quad (2,102)$$

<sup>1</sup> Выражения зависимости параметров от коэффициента скорости приводим без вывода.



и для плотности газа:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1^2}{M_2^2} \cdot \frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \cdot \frac{1 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_1^2}. \quad (2,103)$$

Закон изменения температуры получим из уравнения состояния:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

и соотношений (2,101) и (2,103) в виде:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \left( \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right)^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \left( \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \right)^2 \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (2,104)$$

Приравнявая уравнение (2,104) единице, находим простое соотношение между числами  $M$  для двух сечений теплового сопла с одинаковой температурой<sup>1</sup>

$$M_1 \cdot M_2 = \frac{1}{k} \quad (2,105)$$

(в частности, в сечении, в котором число  $M = \frac{1}{k}$ , температура в точности равна критической температуре  $T^*$  при  $M = 1$ ).

Перейдем теперь к параметрам заторможенного газа.

Зависимость температуры торможения от числа  $M$  согласно равенству:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} = \frac{T_2}{T_1} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}$$

имеет следующий вид:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \left( \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right)^2 \cdot \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}. \quad (2,106)$$

<sup>1</sup> При  $\frac{T_2}{T_1} = 1$  получаем из (2,104) квадратное уравнение относительно  $M_2$ :

$$kM_1M_2^2 - (1 + kM_1^2)M_2 + M_1 = 0,$$

откуда находим два корня:

$$M_2 = M_1,$$

или  $M_2 = \frac{1}{kM_1}$ , т. е. (2,105).

Формула (2,106), полученная из интегральных соотношений между параметрами процесса, вытекает также непосредственно из дифференциального уравнения (2,61). Перепишем для доказательства последнее в виде:

$$\frac{dM^2}{(1+kM^2)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)M^2} = \frac{dT_0}{T_0}, \quad (2,61')$$

откуда, после интегрирования, получаем (2,106).

Выразим также отношение температур торможения в зависимости от коэффициента скорости:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \left( \frac{1+\lambda_1^2}{1+\lambda_2^2} \right)^2. \quad (2,107)$$

Последняя формула имеет наиболее удобный для практического использования вид.

Отношение давлений торможения  $\frac{p_{02}}{p_{01}}$  по определению равно:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

следовательно:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2} \left( \frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{1+\lambda_1^2}{1+\lambda_2^2} \left( \frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2,108)$$

Аналогично этому отношение плотностей заторможенного газа, равно:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} &= \frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1+kM_2^2}{1+kM_1^2} \left( \frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \\ &= \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \cdot \frac{1+\lambda_2^2}{1+\lambda_1^2} \left( \frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \end{aligned} \quad (2,109)$$

Мы получили зависимость всех переменных от чисел  $M$  или  $\lambda$ . Проанализируем полученные результаты.

При возрастании числа  $M$  (или коэффициента скорости) имеет место непрерывное возрастание скорости и падение давления и плотности газа.

В отличие от этого (см. формулы (2,104)—(2,107)) обе температуры: термодинамическая  $T$  и температура адиабатического торможения  $T_0$ —при росте числа  $M$  проходят через экстремум (максимум), тогда как величины  $\rho_0$  и  $\rho_0$  проходят в критическом сечении теплового сопла через минимум.

Рассмотрим вначале закон изменения температуры при росте числа  $M$ .

Из приведенных выше уравнений и термодинамических рассуждений, вытекало наличие максимума температуры в тепловом сопле при достижении величины числа  $M$ , равной  $M = \frac{1}{\sqrt{k}}$ . Нетрудно убедиться в том, что полученная для закона изменения температуры формула (2,104) удовлетворяет этому условию.

Действительно, приравняем нулю производную температуры по числу  $M^2$ :

$$\frac{dT_3}{dM_2^2} = \frac{(1 + kM_1^2)^2}{M_1^2} \frac{d}{dM_2^2} \left[ \frac{M_2^2}{(1 + kM_2^2)^2} \right] = 0.$$

Освобождаясь от знаменателя, получим

$$(1 + kM_2^2)^2 - 2kM_2^2(1 + kM_2^2) = 0,$$

т. е.

$$M_2^2 = \frac{1}{k}; \quad M_2 = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Приведем также значение коэффициента скорости, отвечающее максимуму температуры:

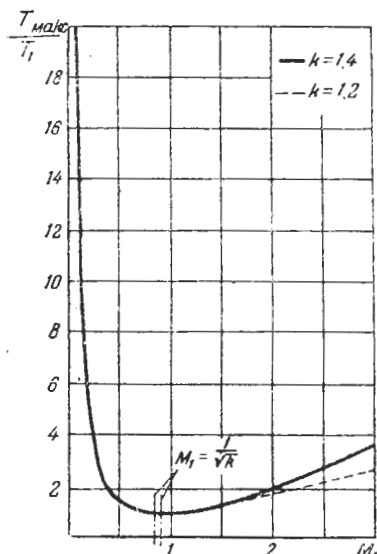
$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{k+1}{3k-1}} \left( \text{при } M_2 = \frac{1}{\sqrt{k}} \right).$$

Таким образом, в соответствии с изложенным ранее, при числе  $M = \frac{1}{\sqrt{k}}$  имеет место максимум<sup>3</sup> термодинамической

<sup>1</sup> Для упрощения выкладок будем дифференцировать по квадрату числа  $M_2^2$ , считая  $M_1^2$  — неизменным.

<sup>2</sup> Проверку того факта, что найденный экстремум является максимумом  $\left( \frac{d^2 T_3 / dM_2^4}{dM_2^2} < 0 \text{ при } M_2^2 = \frac{1}{k} \right)$ , предоставляем читателю.

температуры (элементарный изотермический процесс). Подставляя найденное значение числа  $M = \frac{1}{\sqrt{k}}$  в формулу (2,104), найдем максимальное значение температуры в функции числа  $M_1$  — на входе в трубу (фиг. 2,13):



фиг. 2,13. Зависимость максимальной температуры газа в тепловом сопле от значения числа  $M$  на входе.

$$\begin{aligned} \frac{T_{max}}{T_1} &= \frac{(1+kM_1^2)^2}{4kM_1^2} = \\ &= \frac{k+1}{8k\lambda_1^2} \frac{(1+\lambda_1^2)^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}. \quad (2,110) \end{aligned}$$

Как видно из графика на фиг. 2,13, при увеличении начального значения  $M_1$  на входе в канал максимальная температура, достижимая за счет подвода тепла, резко падает. В дальнейшем мы проиллюстрируем это численным примером.

Найдем теперь значение числа  $M$ , отвечающее максимуму температуры торможения. Для упрощения выкладок нам удобнее будет воспользоваться зависимостью  $T_0$  от  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \frac{dT_{02}}{d\lambda_2^2} &= \frac{(1+\lambda_1^2)^2}{\lambda_1^2} \frac{d}{d\lambda_2^2} \left[ \frac{\lambda_2^2}{(1+\lambda_2^2)^2} \right] = 0; \\ (1+\lambda_2^2)^2 - 2\lambda_2^2(1+\lambda_2^2) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\lambda_2 = M_2 = 1.$$

И здесь, в полном соответствии с развитыми ранее общими соображениями, максимум температуры торможения — величины, отражающей энергетическое воздействие<sup>1</sup>, имеет место в критическом сечении при  $w = a^{**}$ .

<sup>1</sup> В данном случае — для теплового сопла — подвода или отвода тепла. Как и ранее, легко показать, что при  $\lambda_2 = 1$

$$-\frac{d^2 T_{02}}{d\lambda_2^4} < 0, \text{ т. е. } T^*_0 = T_{0, макс.}$$

Нетрудно видеть, что в этом сечении при  $M=1$  — пройдут через экстремум (а именно, через минимум) и два остальных параметра заторможенного газа: давление торможения  $p_0$  и плотность торможения  $\rho_0$ .

Покажем это вначале для давления торможения. Вычислим из (2,108) производную от  $p_0$  по  $M_2^2$  и приравняем ее нулю, считая  $M_1$  постоянным:

$$\frac{d \frac{p_{02}}{p_{01}}}{d M_3^2} = \frac{1 + k M_1^2}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} \frac{d}{d M_3^2} \left[ \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_3^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}{1 + k M_3^2} \right] = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{k}{k-1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_3^2\right)^{k-1} \cdot \frac{k-1}{2} (1 + k M_2^2) - \\ - k \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} M_3^2\right)^{k-1} = 0, \end{aligned}$$

или после сокращений:

$$M_2 = \lambda_2 = 1.$$

Следовательно, экстремум давления заторможенного газа приходится на критическое сечение теплового сопла.

Легко показать также, что этот экстремум будет минимум

(так как  $\frac{d^2 \frac{p_{02}}{p_{01}}}{d M_3^4} > 0$  при  $M_2 = 1$ ).

Мы не будем этого делать, поскольку падение давления торможения в дозвуковом тчении при подводе тепла очевидно из физических соображений (в связи с ростом энтропии).

Что касается плотности заторможенного газа, то прохождение ее через минимум следует непосредственно из соотношения:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{gRT_0},$$

так как  $p_0$  — убывает, а  $T_0$  растет при подводе тепла на дозвуковом участке теплового сопла и соответственно  $p_0$  — растет, а  $T_0$  — убывает при отводе тепла в области  $M > 1$ .

Максимальное значение температуры торможения в критическом сечении — в зависимости от числа  $M$  на входе в трубу — найдем, подставив в формулу (2,110) значение  $M_2 = \lambda_2 = 1$ .

Имеем:

$$\frac{T_0^*}{T_{01}} = \frac{T_{0\max}}{T_{01}} = \frac{(1 + kM_1^2)^2}{2(k+1)M_1^2 \left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)} = \left(\frac{1 + \lambda_1^2}{2\lambda_1}\right)^2. \quad (2,111)$$

Сравнивая выражения для максимальных значений термодинамической температуры  $T$  и температуры торможения  $T_0$ , приходим к простой связи между ними:

$$\frac{T_{0\max}}{T_{\max}} = \frac{2k}{k+1}. \quad (2,112)$$

При  $k=1,4$  это отношение равно 1,17, при  $k=1,2$  оно составляет 1,09.

Из формул (2,110) — (2,111) видно, что с ростом числа  $M_1$  на входе в трубу падают как максимальная термодинамическая температура  $T_{\max}$ , так и максимальная температура торможения  $T_{0\max}$ , достижимые в цилиндрической трубе при подводе тепла. Последнее означает падение „критического подогрева“. Действительно, от величины  $T_0$  легко перейти к суммарному количеству тепла  $Q_{1-2}$ , подведенному к 1 кг газа:

$$Q_{1-2} = c_p(T_{02} - T_{01})$$

или, в безразмерном виде:

$$q_{1-2} = \frac{Q_{1-2}}{c_p T_{01}} = \frac{T_{02}}{T_{01}} - 1. \quad (2,113)$$

Из формулы (2,107), вычитая из правой части ее единицу, получим:

$$q_{1-2} = \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_1^2 \lambda_2^2)}{\lambda_1^2(1 + \lambda_2^2)^2}. \quad (2,114)$$

В частном случае интегрального адиабатического перехода:

$$q_{1-2} = 0; \quad T_{02} = T_{01},$$

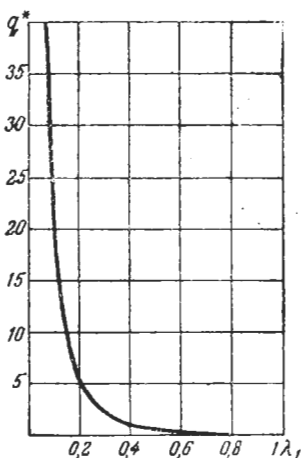
имеем два решения:

$$1) \lambda_2 = \lambda_1,$$

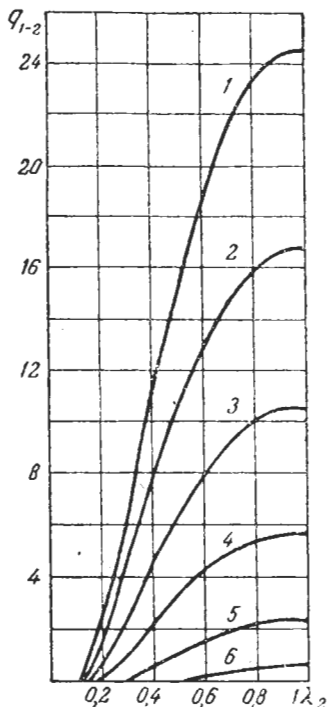
т. е. тривиальное совпадение сечений (при отсутствии подвода тепла) или

$$2) \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1; \quad \omega_1 \omega_2 = \alpha^{*2},$$

т. е. известную формулу газовой динамики для адиабатического плоского скачка уплотнения<sup>1</sup>. В данном случае она соответствует двум сечениям теплового сопла с равными температурами торможения (т. е. интегральному равенству нулю всего количества тепла, подведенного на участке 1-2:  $Q_{1-2} = 0$ ). К подробному обсуждению этой связи мы вернемся в следующей части книги в разделе о тепловых скачках.



Фиг. 2,14. Зависимость безразмерной характеристики «критического подогрева» в тепловом сопле от коэффициента скорости на входе (для дозвуковой области течения).



Фиг. 2,15. Зависимость безразмерной характеристики подогрева в тепловом сопле от коэффициента скорости (для дозвуковой области течения).

1— $\lambda_1=0,1$ ; 2— $\lambda_1=0,12$ ; 3— $\lambda_1=0,15$ ;  
4— $\lambda_1=0,2$ ; 5— $\lambda_1=0,4$ ; 6— $\lambda_1=0,5$ .

Максимальное значение  $q_{\text{макс}}$ , отвечающее критическому подогреву, найдем из (2,114):

$$q^* = q_{\text{макс}} = \left( \frac{1 - \lambda_1^2}{2\lambda_1} \right)^2. \quad (2,115)$$

На фиг. 2,14 представлена зависимость величины  $q^* = q_{\text{макс}}$  от коэффициента скорости на входе. Этот график, а

<sup>1</sup> См. ниже главу 3,2.

также фиг. 2,15, на которой изображена серия кривых  $q_{1-2} = q(\lambda)$  — для разных значений  $\lambda_1$  на входе в сопло, наглядно иллюстрируют явление „теплового кризиса“, сводящееся, как указал впервые Г. Н. Абрамович, к убыванию суммарного количества тепла, подводимого к газу при приближении начального значения  $M_1$  к единице.

Приведем также небольшой численный пример.

Пусть число  $M$  на входе в цилиндрическую камеру будет равно  $M_1^2 = 0,1$  ( $M_1 \approx 0,316$ ), а температура газа  $T_1 = 300^\circ\text{K}$ .

В этом случае при  $k = 1,4$  максимальная температура газа (при  $M_2^2 = \frac{1}{k}$ ) составит, согласно формуле (2,110):

$$T_{\text{макс}} = \frac{1,14^2}{0,56} \cdot 300 \approx 700^\circ\text{K}.$$

Критическое количество тепла, которое может быть подведено к 1 кг газа при расширении его до  $M_2 = 1$ , согласно (2,115) будет равно:

$$q_{\text{макс}} = \frac{(1 - 0,118)^2}{4 \cdot 0,118} \approx 1,65$$

$$\left(\text{так как } \lambda_1^2 = \frac{k+1}{2} \frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} = \frac{1,2 \cdot 0,1}{1,02} \approx 0,118\right).$$

При  $c_p = 0,30 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$  соответственно получим:

$$Q_{1-2}^* = 0,3 \cdot 300 \cdot 1,02 \cdot 1,65 \approx 152 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}.$$

Если при тех же значениях  $k$ ,  $c_p$  и  $T$  понизить число  $M$  на входе до  $M_1 = 0,1$ , то максимальная температура составит:

$$T_{\text{макс}} = \frac{1,014^2}{0,056} \cdot 300 \approx 5\,500^\circ\text{K},$$

а критическое количество тепла, соответственно равно

$$q_{\text{макс}} = \frac{(1 - 0,012)^2}{4 \cdot 0,012} \approx 20,4$$

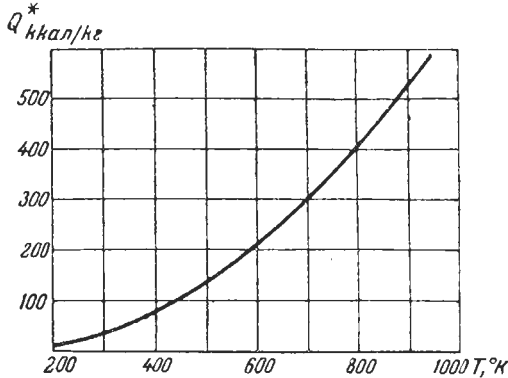
(так как  $\lambda_1^2 = \frac{1,2 \cdot 0,01}{1,002} \approx 0,012$ ), откуда полное количество тепла

$$Q_{1-2}^* = 0,3 \cdot 300 \cdot 1,002 \cdot 20,4 = 1\,840 \text{ ккал/кг}.$$



Приведенный пример, несмотря на случайный характер выбранных величин, наглядно показывает увеличение «критического подогрева» при уменьшении числа  $M$  на входе в тепловое сопло.

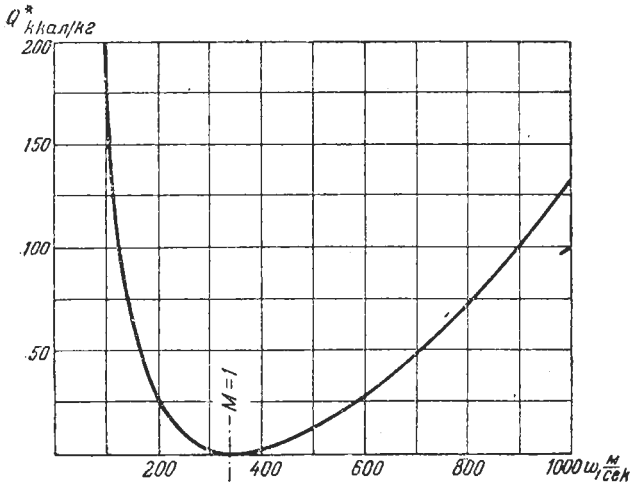
Существенно, что параметром, определяющим «тепловой кризис», является именно начальное число  $M_1$  (или  $\lambda_1$ ), а не температура или скорость газа на входе в трубу в отдельно-



Фиг. 2,16. Изменение максимального количества теплоты, подводимого к 1 кг газа при критическом подогреве, в зависимости от начальной температуры.

$$(\omega_1 = 200 \text{ м/сек}; \\ \epsilon_p = 0,3 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}}; k = 1,4).$$

сти. При заданной температуре газа на входе в трубу максимальное количество теплоты, которое может быть подведено к 1 кг газа, падает с увеличением начальной скорости. При



Фиг. 2,17. Изменение максимального количества теплоты, подводимого к 1 кг газа при критическом подогреве, в зависимости от начальной скорости

$$(T_1 = 500^\circ \text{ К}; \epsilon_p = \\ = 0,3 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}}; \\ k = 1,4).$$

заданной начальной скорости, максимальное количество теплоты тем больше, чем выше температура на входе.

Конкретные примеры расчета приведены на графиках на фиг. 2,16 и 2,17. Последний из них охватывает также сверх-

звуковую область, в которой подвод тепла приводит к падению скорости до  $w=a$ . Полученные результаты могут быть использованы при расчетах цилиндрической камеры сгорания для определения предельных теоретических условий форсирования<sup>1</sup>.

Обратимся теперь к некоторым другим особенностям движения газов в тепловом сопле.

Из формулы (2,102) при  $M_2 = \infty$  и  $M_1 = 1$  получаем выражение для максимальной скорости истечения из теплового сопла:

$$\frac{w_{\max}}{a^{**}} = \frac{1+k}{k}. \quad (2,116)$$

Отметим также простое соотношение между максимальной скоростью истечения и начальной скоростью (в произвольном сечении сопла). Подставляя в формулу (2,102) значение  $M_2 = \infty$ , имеем<sup>2</sup>:

$$\frac{w_{\max}}{w_1} = 1 + \frac{1}{kM_1^2}. \quad (2,117)$$

Отсюда следует, например, что в сечении, где имеет место максимум температуры ( $M_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ) скорость движения в точности равна половине максимальной:

$$w_{T_{\max}} = \frac{w_{\max}}{2}. \quad (2,118)$$

Выпишем теперь значения всех переменных величин для критического сечения, которые понадобятся в дальнейшем. Из уравнений (2,101) — (1,104) при  $M_2 = 1$ , имеем:

$$\frac{p^*}{p_1} = \frac{1+kM_1^2}{1+k} = \frac{1+\lambda_1^2}{k+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}, \quad (2,119)$$

<sup>1</sup> Фактический предел форсирования, т. е. максимальное число  $M$  на входе при заданном подводе тепла будет меньше в связи с наличием гидравлических сопротивлений.

<sup>2</sup> Используя полученное в предыдущем разделе для движения в тепловом сопле соотношение между местным показателем политропы в начальном сечении сопла и числом  $M$ :  $n_1 = kM_1^2$  (2,67), можно придать формуле (2,117) более простой вид:

$$\frac{w_{\max}}{w_1} = \frac{1+n_1}{n_1}. \quad (2,117')$$

$$\frac{p^*}{p_1} = \frac{(1+k)M_1^2}{1+kM_1^2} = \frac{2\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2}, \quad (2,120)$$

$$\frac{T^*}{T_1} = \frac{(1+kM_1^2)^2}{(1+k)^2M_1^2} = \frac{(1+\lambda_1^2)^2}{2(k+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}, \quad (2,121)$$

$$\frac{a^{**}}{a_1} = \frac{1+kM_1^2}{(1+k)M_1^2} = \frac{1+\lambda_1^2}{2\lambda_1^2}. \quad (2,122)$$

В частном случае истечения из бесконечно большого резервуара (при  $M_1=0$ ) получим:

$$\frac{p^*}{p_1} = \frac{1}{1+k}; \quad \frac{T^*}{T_1} = \infty; \quad \frac{a^{**}}{a_1} = 0.$$

Таким образом, здесь, как и в случае механического сопла, реализация сверхзвукового участка возможна только при условии  $w_1 > 0$ , если же скорость газа на входе в тепловое сопло будет ничтожно мала ( $M_1 \approx 0$ ), то расширение газа на первом участке сопла — при подводе тепла — будет происходить теоретически до полного вакуума ( $p_2^* = 0$ ), достижение которого при конечном падении давления возможно только при бесконечно большом подогреве ( $T_2^* = \infty$ ;  $Q_{1-2}^* = \infty$ ).

На фиг. 2,18 показаны примеры кривых изменения всех переменных при движении газа в тепловом сопле в зависимости от переменного числа  $M_2$  при заданном значении числа  $M_1 = 0,1$  на входе. Эти кривые служат наглядной иллюстрацией полученных выше результатов. Мы видим, в частности, что на участке между числами  $M_2 = \frac{1}{\sqrt{k}}$  и  $M_2 = 1$ , т. е. вблизи скорости звука в дозвуковом течении имеет место падение температуры  $T$  при подводе тепла. Абсолютное значение падения температуры на этом отрезке весьма невелико. Его легко найти из формул (2,110) и (2,121) для  $T_{\max}$  и  $T^*$ :

$$\frac{T^*}{T_{\max}} = \frac{4k}{(1+k)^2} < 1.$$

При  $k=1,4$  это отношение составляет  $\sim 0,97$ ; при  $k=1,2$  примерно  $\sim 0,99$ .

Таким образом, падение температуры в дозвуковой области теплового сопла на участке  $\frac{1}{\sqrt{k}} < M < 1$  (обусловленное

сравнительно более быстрым ростом кинетической энергии, превышающим подвод тепла и приводящим поэтому к падению энтальпии газа) весьма незначительно.

Если учесть при этом, что согласно формуле (2,105) уже при числе  $M$ , равном  $M_2 = \frac{1}{k}$ , будет достигнуто значение температуры:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(1 + kM_1^2)^2}{(1 + k)^2 M_1^2} = \frac{T^*}{T_1},$$

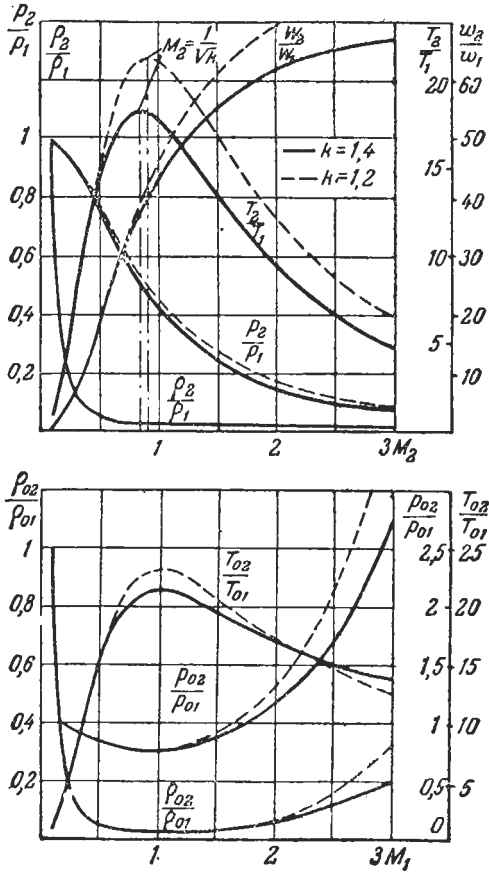
то, в первом приближении, можно считать температуру на всем участке:  $\frac{1}{k} \leq M_2 \leq 1$  — постоянной. Максимальная ошибка, связанная с таким приближением, как было показано, будет соответствовать среднему геометрическому значению числа  $M$  на этом интервале:  $M_2 = \frac{1}{\sqrt{k}}$  и для  $k = 1,2-1,4$  составит всего 1-3%.

Даже для одноатомного газа ( $k = 1,67$ )  $T_{\max}$  будет выше  $T^*$  всего только на  $\sim 7\%$ .

В приводимой табл. 2,6 сведены основные расчетные соотношения для изменения параметров в тепловом сопле в зависимости от числа  $M$  и коэффициента скорости.

### 2,14. ДВИЖЕНИЕ С ТРЕНИЕМ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Рассмотрим движение идеального газа в канале постоянного сечения при неизменном весовом расходе газа и отсут-



Фиг. 2,18. Изменение параметров газа, движущегося в теплом сопле, в зависимости от числа  $M$  (для  $M_1 = 0,1$ ).

ТАБЛИЦА 2,6  
Основные соотношения для теплового сопла

| Расчетная величина              | Символ                        | Расчетные формулы  |  |
|---------------------------------|-------------------------------|--|--|
| Отношение давлений              | $\frac{p_2}{p_1}$             | $\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}$  | $\frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \lambda_2^2$  |
|                                 | $\frac{p_2}{p_1}$             |  | $\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \left( \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \right)^2 \times$<br>$\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}$               |
| Отношение температур            | $\frac{T_2}{T_1}$             | $\frac{M_2^2}{M_1^2} \left( \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right)^2$   | $\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \frac{1 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_1^2}$  |
|                                 | $\frac{T_2}{T_1}$             |  | $\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \left( \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \right)^2$   |
| Отношение плотностей            | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$       | $\frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2}$  | $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \frac{1 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_1^2}$  |
|                                 | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$       | $\frac{M_2^2}{M_1^2} \left( \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right)^2 \times$<br>$\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}$               | $\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \left( \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \right)^2$   |
| Отношение температур торможения | $\frac{T_{1,2}}{T_{01}}$      | $\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \times$<br>$\left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$                     | $\frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \times$<br>$\left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$                                 |
|                                 | $\frac{T_{1,2}}{T_{01}}$      |  | $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \frac{1 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_1^2} \times$<br>$\left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$ |
| Отношение плотностей торможения | $\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}$ | $\frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2} \times$<br>$\left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$ | $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \frac{1 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_1^2} \times$<br>$\left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$ |
|                                 | $\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}$ |  | $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \frac{1 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_1^2} \times$<br>$\left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$ |

Примечания: 1. Отношение плотностей потока  $\frac{j_2}{j_1} = 1$ .

2. Отношение скоростей  $\frac{w_2}{w_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ .

3. Для расчета количества тепла, подводимого к 1 кг газа:

$$Q_{1-2} = q_{1-2} c_p T_{01}, \quad \text{где } q_{1-2} = \frac{T_{01}}{T_{01}} - 1.$$

ствии обмена энергией как в виде теплоты, так и в виде работы. Единственным воздействием на газовый поток является в этом случае работа трения  $dL, \neq 0$ . В связи с этим процесс происходит с ростом энтропии.

Непрерывный переход через скорость звука здесь невозможен. В случае дозвукового потока движение является ускоренным; в случае сверхзвукового — замедленным.

Решим, прежде всего, ту же задачу, что и в предыдущих случаях: найдем зависимости, определяющие изменение всех параметров в двух сечениях потока в функции от числа  $M$  и коэффициента скорости. В рассматриваемой схеме — движения под воздействием одного только трения — мы не ограничимся, однако, этим и установим также закон изменения коэффициента скорости  $\lambda$  (следовательно, и всех других параметров) по длине трубы.

Из условия постоянства температуры торможения:

$$T_{02} = T_{01}$$

найдем закон изменения температуры:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (2,123)$$

В дозвуковом течении температура падает, а скорость растет, в сверхзвуковом — температура растет, а скорость падает.

Температура торможения  $T_0$  при этом, как уже указывалось выше, остается неизменной. Это означает также постоянство критической скорости:

$$a_2^* = a_1^* = \text{const.}$$

В связи с этим отношение скорости движения в двух сечениях равно отношению коэффициентов скорости, т. е.:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (2,124)$$

и, вследствие постоянства плотности тока:  $j_2 = j_1 = \text{const}$ , отношение плотностей газа равно:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (2,125)$$

Для того чтобы найти также закон изменения давлений напишем отношение квадратов чисел  $M$  для двух сечений потока при условии  $j = \text{const}$ :

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{w_2 p_1}{w_1 p_2}.$$

Отсюда непосредственно следует:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (2,126)$$

Как видно из полученных формул, в дозвуковом течении давление и плотность падают; в сверхзвуковом — растут.

Что касается параметров заторможенного газа: давления  $p_0$  и плотности  $\rho_0$ , то закон изменения давления торможения можно, как и всегда, написать в виде:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

причем, в связи с постоянством температуры торможения, отношение давлений торможения будет равно отношению плотностей заторможенного газа:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}.$$

С учетом формулы (2,126) имеем:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2,127)$$

Как в дозвуковом (ускоренном), так и в сверхзвуковом (замедленном) течении давление и плотность заторможенного газа падают. Это видно из того, что величина  $\frac{p_{02}}{p_{01}}$  имеет минимум при  $M = \lambda = 1$ . Таким образом, даже при отсутствии внешних энергетических воздействий, т. е. при энергетически изолированном процессе изменения состояния ( $dQ_a = 0$ ;  $dL_T = 0$ ), но при наличии трения, давление и плотность заторможенного газа уменьшаются в связи с ростом энтропии.

Отмеченное свойство этих двух параметров торможения (в частности, давления заторможенного газа) позволяет пользоваться отношением  $\frac{p_{02}}{p_{01}}$  для расчета необратимых потерь в различных элементах двигателей и других устройств.

В предельном случае истечения через трубу с трением при  $M_1 \approx 0$  и  $M_2 = 1$  из формул (2,123)—(2,126), получим:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}$$

(т. е. то же значение, что и в сопле Лавалья, что вполне понятно в связи с постоянством температуры торможения в энергетически изолированном процессе для обоих случаев). В этом случае, однако, давление и плотность в критическом сечении (при  $M_1 = 0$ ) обращаются в нуль:

$$\frac{p^*}{p_0} = \frac{\rho^*}{\rho_0} = \frac{p_0^*}{p_{01}} = \frac{\rho_0^*}{\rho_{01}} = 0.$$

При критическом истечении и значении числа  $M$  на входе в трубу, отличном от нуля, соответственно имеем:

$$\frac{T^*}{T_1} = \frac{2}{k+1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right) = \frac{\frac{2}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}; \quad (2,128)$$

$$\frac{p^*}{p_1} = M_1 \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{\frac{k+1}{2}}} = \frac{2}{k+1} \frac{\lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}; \quad (2,129)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_1} = \frac{w_1}{a^*} = M_1 \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}} = \lambda_1 \quad (2,130)$$

$$\frac{p_0^*}{p_{01}} = \frac{\rho_0^*}{\rho_{01}} = M_1 \left( \frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = \lambda_1 \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2,131)$$

Например, при  $\lambda_1 = 0,1$  скорость движения газа в условиях критического истечения возрастает, а плотность падает в десять раз, сравнительно со значением на входе, давление падает почти в двенадцать раз, тогда как температура снижается всего лишь примерно на 16%. Это обстоятельство,



наряду с учетом подвода тепла в реальных условиях движения газа по длинным трубопроводам, объясняет, почему в технических расчетах процесс зачастую рассматривают как изотермический.

Сводку полученных соотношений для общего случая дадим для удобства использования в отдельной таблице.

ТАБЛИЦА 2,7

Основные соотношения для течения с трением в изолированной трубе постоянного сечения

| Расчетная величина            | Символ                  | Расчетные формулы   |  |
|-------------------------------|-------------------------|---|--|
| Отношение давлений            | $\frac{p_2}{p_1}$       | $\frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}}$                        | $\lambda_1 \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}$                                |
| Отношение температур          | $\frac{T_2}{T_1}$       | $\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}$   | $\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}$  |
| Отношение плотностей          | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}}$                        | $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  |
| Отношение давлений торможения | $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ | $M_3 \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} \lambda_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$ | $\lambda_1 \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$ |

Примечание. 1)  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ ; 2)  $\frac{J_2}{J_1} = 1$ ; 3)  $\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1$ ; 4)  $\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}}$ .

Кривые изменения всех параметров газа, движущегося по трубе под влиянием одного только трения, показаны для численного примера ( $\lambda_1 = 0,1$ ) на графике на фиг. 2,19.

Изобразим также процесс изменения состояния при движении с трением газа по трубе постоянного сечения в термодинамических диаграммах  $pV$  и  $TS$ .

Для этой цели получим предварительно уравнение процесса в координатах  $pV$ .

Из формул (2,125)—(2,126) имеем

$$\frac{p_2}{v_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}$$

или

$$pV \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) = RT_0 = \text{const.} \quad (2,132)$$

Величина  $\frac{k-1}{2} M^2$  для движения в трубе постоянного сечения ( $j = \text{const}$ ) равна

$$\frac{k-1}{2} M^2 = \frac{k-1}{2} \frac{\omega \omega^2}{k p} = \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{j^2}{g} \frac{V}{p} = B \frac{V}{p},$$

где для краткости обозначено:

$$B = \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{j^2}{g} = \text{const.}$$

Таким образом, уравнение процесса имеет вид:

$$pV \left( 1 + B \frac{V}{p} \right) = \text{const.} \quad (2,132')$$

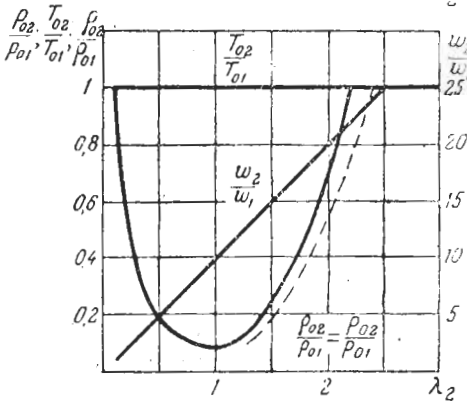
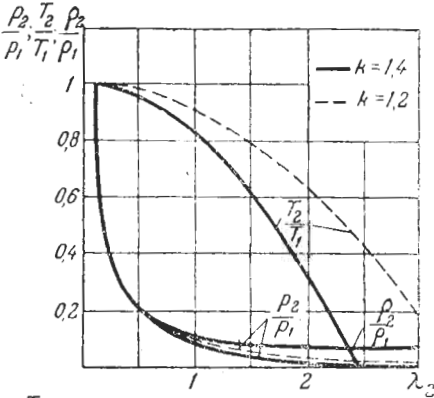
откуда

$$p = \frac{RT_0 - BV^2}{V} = \frac{RT_0}{V} \left[ 1 - \left( \frac{V}{V_{\text{макс}}} \right)^2 \right]. \quad (2,133)$$

При росте удельного объема падение давления происходит сильнее, чем при изотермическом процессе ( $pV = \text{const}$ ).

В последнем уравнении символом  $V_{\text{макс}}$  обозначено предельное значение удельного объема, соответствующее достижению максимальной скорости истечения  $\omega = \omega_{\text{макс}}$ , т. е. полному преобразованию потенциальной энергии в кинетическую. Действительно

$$V_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{RT_0}{B}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \frac{g}{j^2} RT_0} = \frac{\sqrt{2g}}{j} A I_0 = \frac{\omega_{\text{макс}}}{j} \equiv V_{\text{макс}}.$$



Фиг. 2,19. Изменение параметров газа, движущегося по трубе под влиянием трения (для  $\lambda_1 = 0,1$ )

течения  $\omega = \omega_{\text{макс}}$ , т. е. полному преобразованию потенциальной энергии в кинетическую. Действительно

Величина  $w_{\max}$  имеет здесь то же значение, что и в геометрическом сопле [см. (2,24)], но предельная плотность газа при  $w = w_{\max}$  не равна здесь нулю, так как плотность тока  $j$  постоянна.

В связи с этим отношение удельных объемов  $\frac{V}{V_{\max}}$  представляет собой также относительное значение скорости движения  $\frac{w}{w_{\max}}$  — в долях от максимальной скорости:  $\frac{V}{V_{\max}} = \frac{w}{w_{\max}}$ .

Из формул, приведенных в главе 2,1, следует также

$$\frac{w^2}{w_{\max}^2} = \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 = \frac{\frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}. \quad (2,49)$$

Перепишем теперь уравнение (2,133) в относительных координатах  $\frac{p_2}{p_1}$  и  $\frac{V_2}{V_1}$ :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1}{V_2} \frac{1 - \left(\frac{V_2}{V_{\max}}\right)^2}{1 - \left(\frac{V_1}{V_{\max}}\right)^2} = \frac{V_1 \left(\frac{w_{\max}}{w_1}\right)^2 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2}{\left(\frac{w_{\max}}{w_1}\right)^2 - 1}. \quad (2,134)$$

или с учетом (2,49):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{\lambda_1^2}}{\frac{V_2}{V_1} \left(1 - \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{\lambda_1^2}\right)}. \quad (2,134^1)$$

В предельном случае  $\lambda_1 = 0$  уравнение (2,134<sup>1</sup>) переходит в равенство  $pV = \text{const}$ , т. е. соответствует изотермическому процессу; при  $\lambda_1 = \lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ , имеем  $\frac{p_2}{p_1} = \infty$  при сколь угодно близком к единице значения  $\frac{V_2}{V_1}$ , что соответствует изохорическому процессу. Наконец, при  $\lambda_1 = 1$ , в связи с формулой (2,130), имеем  $\frac{V_2}{V^*} = \frac{p_2}{p^*} = 1$ , т. е. процесс расширения или сжатия стягивается в диаграмме  $pV$  в точку. Все эти соотношения вполне согласуются с приведенными ранее результатами качественного исследования [см. формулы (2,68)—(2,69)].

Существенно, что полученное уравнение не может быть записано в виде

$$f(p_1, V_1) = f(p_2, V_2) = \text{const},$$

как это возможно, например, для изоэнтропы или любой другой политропы. Иначе говоря, давление в рассматриваемом процессе не может быть выражено в виде простой функции удельного объема  $p = p(V)$ , а зависит дополнительно от состояния газа в начальной точке.

Следуя Я. Б. Зельдовичу<sup>1</sup>, выразим эту зависимость следующим образом:

$$p = p(V; p_1, V_1)$$

или в безразмерном виде:

$$\frac{p_2}{p_1} = f\left(\frac{V_2}{V_1}; \lambda_1\right).$$

С аналогичным примером кривой, зависящей от начального состояния, мы сталкивались выше при исследовании движения в тепловом сопле. Действительно, формула

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - kM_1^2 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) \quad (2,100)$$

также отвечает кривой в диаграмме  $pV$ , уравнение которой в общем виде должно быть записано в форме

$$p = p(V; p_1, V_1) \quad \text{или} \quad \frac{p_2}{p_1} = f\left(\frac{V_2}{V_1}; M_1\right).$$

В обоих случаях начальная точка  $(p_1, V_1)$  в плоскости  $pV$  является особой точкой кривой. Характер термодинамического процесса в этой точке легко установить, если ввести в рассмотрение переменный показатель политропы по формуле (2,68), как это было сделано нами во втором разделе предыдущей главы.

Для описания процесса в координатах  $TS$  воспользуемся формулой (2,54), имеющей для рассматриваемого процесса вид

$$\frac{S_2 - S_1}{AR} = \ln \left(\frac{p_{01}}{p_{02}}\right), \quad \text{так как} \quad \frac{T_{02}}{T_{01}} = 1$$

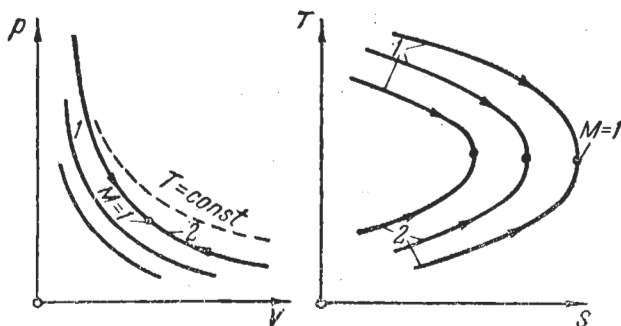
<sup>1</sup> См. Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику. Изд. Академии наук СССР, 1946, стр. 72 (соображения Я. Б. Зельдовича относятся к ударной адиабате).

или

$$\frac{S_2 - S_1}{AR} = \ln \left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \right] = \ln \left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \right]. \quad (2,135)$$

Объединяя это равенство и формулу (2,123), связывающую изменение температуры с коэффициентом скорости, получим в параметрическом виде выражение зависимости температуры от энтропии.

На фиг. 2,20 показаны кривые, изображающие процесс соответственно в  $pV$  и  $TS$  координатах<sup>1</sup>.



Фиг. 2,20. Изображение процесса при движении с трением в трубе постоянного сечения в диаграммах  $pV$  и  $TS$ .

1 — дозвуковое течение; 2 — сверхзвуковое течение.

В действительном процессе могут быть реализованы только отдельные участки этих кривых. Так, на фиг. 2,21 показаны результаты расчета дозвукового течения при разных величинах  $\lambda_1$ . Границей для всех кривых служит линия, удовлетворяющая формуле (2,130):  $\frac{V_1}{V_*} = \lambda_1$ . На фиг. 2,22 изображено действительное течение процесса расширения ( $\lambda_1 < 1$ ) и сжатия ( $\lambda_1 > 1$ ), в тепловой диаграмме, причем параметр  $\lambda_1$  растет для сверхзвукового потока и падает для дозвукового при переходе от одной кривой к другой слева направо. Пунктиром указано предельное состояние (кризис:  $M = 1$ ).

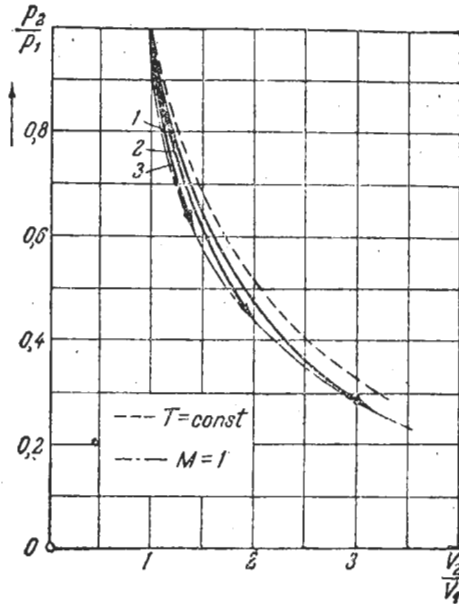
<sup>1</sup> Соображения о независимости прироста энтропии от параметров трубы при критическом истечении из цилиндрической трубы (движение с трением) приведены в работе И. И. Новикова. «Об одном парадоксе предельных состояний течения газа». Известия Академии наук СССР, ОТН, № 7—8, 1945.

Полученные выше расчетные формулы, сводка которых была дана в табл. 2,7, связывают изменение скорости движения или любого параметра состояния между собой и с изменением числа  $M$  (или коэффициента скорости  $\lambda$ ) для двух сечений канала.

В этом отношении эти формулы аналогичны другим расчетным соотношениям, полученным ранее для различных схем сверхзвуковых сопел.

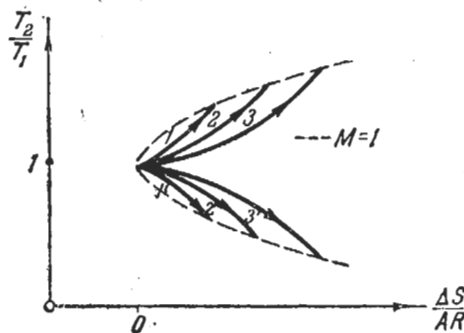
Между ними вместе с тем имеется принципиальное отличие. Действительно, во всех случаях, рассмотренных ранее, в число формул входило выражение, связывающее число  $M$  (или  $\lambda$ ) с величиной, изменение которой характерно для данного воздействия. Для геометрического и расходного сопла такой величиной является плотность тока  $j$ , для механического и теплового — температура торможения  $T_0$ . При движении под влиянием одного только трения обе величины:  $j$  и  $T_0$  не меняются. Мы не можем также написать в общем виде какое-либо соотношение между работой трения  $dL$ , и числом  $M$ . Поэтому возникает необходи-

мость в задании дополнительного уравнения, вводящего в число переменных величину, изменение которой было бы специфично для работы трения. В свое время в первом разделе преды-



Фиг. 2,21. Кривые расширения газа при дозвуковом течении с трением.

1 —  $\lambda_1 = 0,3$ ; 2 —  $\lambda_1 = 0,5$ ; 3 —  $\lambda_1 = 0,7$ .



Фиг. 2,22. Действительный характер процесса в диаграмме  $TS$  для расширения и сжатия газа при движении с трением в трубе постоянного сечения

$(1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3; 1 > \lambda'_1 > \lambda'_2 > \lambda'_3)$ .

душей главы мы выразили работу трения в обычной для гидравлики форме:

$$dL_r = \zeta \frac{\omega^2}{2g} \cdot \frac{dx}{D}, \quad (2,63)$$

где  $\zeta$  — коэффициент сопротивления,  $x$  и  $D$  — длина и диаметр канала.

В этом случае уравнение закона обращения воздействий для рассматриваемого процесса движения под влиянием одного только трения имеет вид

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = -\zeta k M^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \frac{dx}{D}. \quad (2,64)$$

Прежде чем интегрировать это уравнение с целью установить в конечном виде связь между числом  $M$  и длиной трубы, сделаем несколько замечаний.

Задание закона сопротивления в форме уравнения (2,63) является по существу своему введением дополнительного условия, не вытекающего из общих уравнений термодинамики. Наряду с ним возможны, разумеется, и другие способы определения величины  $dL_r$ . При этом использование формулы (2,63) при заданном значении коэффициента гидравлического сопротивления  $\zeta$  отвечает однозначному „размещению“ процесса по пространственной координате — длине.

В рассмотренных ранее примерах координата — длина канала вовсе не фигурировала. Поэтому результаты расчета, представленные, например, для геометрического сопла в виде зависимости скорости и т. д. от числа  $M$ , могли быть отнесены к каналу произвольной длины при задании связи между величиной  $\omega$  (или любым другим параметром процесса) и координатой  $x$ .

В отличие от этого, в задаче о движении с трением, условие (2,63) вводит координату  $x$  — длину канала, как независимую переменную. При этом, разумеется, сохраняется основное свойство рассматриваемой задачи — односторонность воздействия трения ( $dL_r > 0$ ). Ориентируя ось координат по направлению движения, мы получаем дополнительное условие  $dx > 0$ , определяющее, как это будет показано ниже, невозможность непрерывного перехода через скорость звука в рассматриваемой задаче. Существенно также, что длина канала  $x$  входит в уравнение (2,63) в произведении с коэффициентом сопротивления  $\zeta$ . Тем самым в простейшем случае при

$\zeta = \text{const}$ <sup>1</sup> оказывается возможным обобщить результаты расчета для каналов, отличающихся гидравлическим сопротивлением, если ввести „приведенную длину“ канала, пропорциональную произведению  $\zeta \cdot x$ .

Обратимся теперь к связи между приведенной длиной канала и числом  $M$ . Для упрощения выкладок и, главное, конечного результата целесообразнее будет искать связь между  $x$  и  $\lambda$ . С этой целью, вместо интегрирования уравнения (2,64), обратимся к уравнению обращения воздействий для скорости движения (2,55), имеющему для рассматриваемой задачи с учетом равенства (2,63), следующий вид:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = -\zeta \frac{M^2}{2} \cdot \frac{dx}{D}. \quad (2,136)$$

Разделим это равенство на квадрат числа  $M$ :

$$\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \frac{dw}{w} = -\zeta \frac{dx}{2D}.$$

Для интегрирования последнего уравнения, перейдем от чисел  $M$  к коэффициенту скорости, имея в виду следующие тождества:

$$\frac{dw}{w} = \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (\text{так как } a^* = \text{const})$$

и

$$\frac{1}{M^2} - 1 = \frac{k+1}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right).$$

После подстановки этих выражений в преобразованное уравнение (2,136), последнее примет следующий вид:

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{k}{k+1} \zeta \frac{dx}{D}. \quad (2,137)$$

<sup>1</sup> Если коэффициент сопротивления зависит от числа  $R$ , т. е.  $\zeta = \zeta(R)$ , то, пренебрегая в первом приближении зависимостью коэффициента динамической вязкости  $\mu$  от температуры, можно сохранить все выводы для случая  $\zeta = \text{const}$ , так как для цилиндрической трубы  $R = \frac{wd\rho}{\mu} = \frac{\text{const}}{\mu} - (\rho w = \text{const})$ .



Проинтегрируем это уравнение <sup>1</sup> в пределах от начального сечения ( $x=0$ ;  $\lambda=\lambda_1$ ) до переменного ( $x$ ;  $\lambda=\lambda_2$ ):

$$\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} - \ln \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} = \frac{2k}{k+1} \zeta \frac{x}{D} \quad (2,138)$$

или в размерных переменных:

$$\frac{a^{*2}}{2} \left( \frac{1}{w_1^2} - \frac{1}{w_2^2} \right) - \ln \frac{w_2}{w_1} = \frac{k}{k+1} \zeta \frac{x}{D}. \quad (2,139)$$

Мы пришли к хорошо известному в газовой динамике уравнению <sup>2</sup>.

Покажем теперь, что коэффициент скорости  $\lambda$  меняется в пределах от  $\lambda=\lambda_1$  до  $\lambda_2 \leq 1$ , т. е. скорость возрастает не более, чем до скорости звука на выходе из трубы, если в начале трубы движение было дозвуковым ( $\lambda_1 < 1$ ), или падает не более, чем до скорости звука на выходе из трубы, если в начале ее движение происходило со сверхзвуковой скоростью ( $\lambda_1 > 1$ ).

Обозначим для краткости правую часть уравнения (2,138) символом:

$$\chi = \frac{2k}{k+1} \zeta \frac{x}{D}, \quad (2,141)$$

так что:

$$\chi = \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} - \ln \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}, \quad (2,142)$$

где  $\chi$  — приведенная безразмерная координата.

По физическому смыслу величина  $\chi$  пропорциональна произведению длины трубы  $x$  на коэффициент сопротивления

<sup>1</sup> Тот же результат, конечно, получится из уравнения (2,64). Перепишем его в виде:

$$\frac{dM^2}{M^2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)} - \frac{dM^2}{M^4 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)} = -\zeta k \frac{dx}{D}.$$

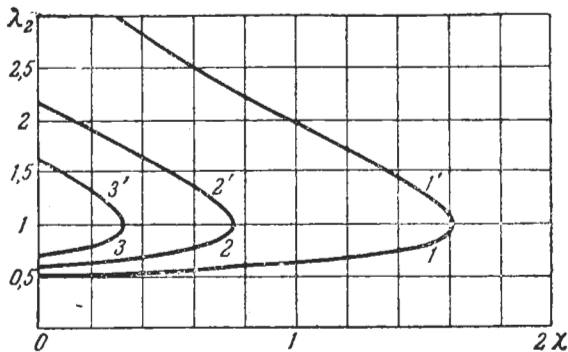
Интегрируя это уравнение, получим равенство

$$\frac{2}{k+1} \left( \frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} \right) + \ln \left[ \frac{M_1^2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right)}{M_2^2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)} \right] = \frac{2k}{k+1} \zeta \frac{x}{D}, \quad (2,140)$$

которое при замене  $M$  на  $\lambda$  переходит в (2,138).

<sup>2</sup> См., например, Ф. И. Франкль, С. А. Христианович и Р. А. Алексеева, Основы газовой динамики. Труды ЦАГИ, № 364, 1938.

$\zeta$  и, следовательно, должна быть всегда положительной (так как все остальные множители в выражении, определяющем величину  $\chi$ , бесспорно больше нуля).



Фиг. 2,23. Зависимость коэффициента скорости на выходе из трубы (при движении под влиянием трения) от значения его на входе и приведенной длины.

$$1 - \lambda_1 = 0,3; 2 - \lambda_1 = 0,4; 3 - \lambda_1 = 0,5; 1' - \lambda_1 = 1,6;$$

$$2' - \lambda_1 = 2,4; 3' - \lambda_1 = 3,5.$$

Однако, уравнение (2,142) показывает, что при фиксированном значении  $\lambda_1$  и переменном  $\lambda_2$  величина  $\chi$  проходит через экстремум, а именно максимум. Докажем это обычным путем:

Вычислим производную  $\frac{d\chi}{d\lambda_2^2}$  (считая  $\lambda_1^2$  — заданным) и приравняем ее нулю:

$$\frac{d\chi}{d\lambda_2^2} = \frac{1}{\lambda_2^4} - \frac{1}{\lambda_2^2} = 0$$

или

$$\lambda_2^2(1 - \lambda_2^2) = 0; \quad \lambda_2 = 1.$$

Мы видим, что в критическом сечении при  $\lambda_2 = 1$ , величина  $\chi$  проходит через экстремум. Покажем теперь, что этот экстремум — максимум. Для этого исследуем знак второй производной:

$$\frac{d^2\chi}{d\lambda_2^4} = -\frac{2}{\lambda_2^6} + \frac{1}{\lambda_2^4}.$$

В сечении, в котором  $\chi$  проходит через экстремум, т. е. при  $\lambda_2 = 1$ , вторая производная  $\chi$  по  $\lambda_2^2$

$$\frac{d^2\chi}{d\lambda_2^4} = -1 < 0.$$

Следовательно, в этом сечении имеет место максимум. Это означает, что в действительном стационарном течении реализуется только тот участок, на котором коэффициент скорости меняется от начального значения  $\lambda_1$  до единицы, так как дальнейшее изменение, связанное с убыванием длины трубы, физически бессмысленно.

На фиг. 2,23 изображены кривые изменения коэффициента скорости  $\lambda_2$  в зависимости от приведенной длины  $\lambda$  для нескольких значений  $\lambda_1$ .

Этот график может служить для перехода от кривых зависимости скорости движения, давления, температуры и т. п. от коэффициента скорости  $\lambda$  (фиг. 2,18) к распределению  $\omega, p, T$  и т. д. по длине канала при заданном значении  $\zeta$ .

В случае  $\lambda_1 < 1$  реализуется нижняя ветвь кривой, в другом случае, когда скорость на входе в трубу больше звука ( $\lambda_1 > 1$ ), принципиально должна была бы реализоваться верхняя ветвь<sup>1</sup>.

Из уравнения (2,142) найдем теперь максимальное значение приведенной длины трубы в зависимости от начального значения коэффициента скорости  $\lambda_1$ :

$$\lambda^* = \lambda_{\max} = \frac{1}{\lambda_1^2} - 1 - \ln \lambda_1^2. \quad (2,143)$$

Некоторые численные значения  $\lambda_{\max} = \lambda(\lambda_1)$  приведены в табл. 2,8.

ТАБЛИЦА 2,8

$$\lambda_{\max} = \lambda(\lambda_1)$$

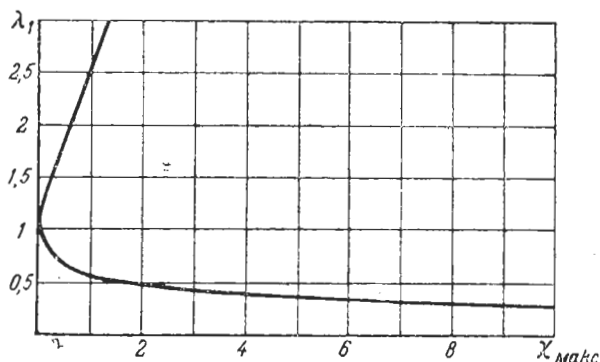
| $\lambda_1$      | 0        | 0,1  | 0,2   | 0,3  | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0 |
|------------------|----------|------|-------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-----|
| $\lambda_{\max}$ | $\infty$ | 94,4 | 20,78 | 7,71 | 3,42 | 1,61 | 0,76 | 0,324 | 0,116 | 0,024 | 0   |

Кривая изменения максимальной приведенной длины трубы  $\lambda_{\max}$  в зависимости от коэффициента скорости  $\lambda_1$  дана на фиг. 2,24.

Мы пришли к весьма важному результату. При заданной длине трубы (и диаметре ее) и фиксированных значениях  $k$  и  $\zeta$  коэффициент скорости на входе  $\lambda_1$  имеет ограниченное значение. Чем больше  $\lambda_{\max}$  (т. е. чем больше произведение длины трубы, выраженной в калибрах  $\frac{x}{D}$ , на коэффициент

<sup>1</sup> В действительности, в некотором сечении трубы происходит скачок уплотнения, переводящий поток в дозвуковой, после чего снова реализуется нижняя ветвь кривой  $\lambda = \lambda(\lambda_1)$  на фиг. 2,22 (отвечающая, однако, другому значению  $\lambda_1$  — см. ниже).

сопротивления  $\zeta$  или каждая из этих величин в отдельности — при постоянстве другой), тем меньше предельный коэффициент скорости на входе, т. е. тем меньше предельный расход газа через трубу. Обратное заданному значению  $\lambda_1$  — на входе в трубу соответствует предельная приведенная длина трубы  $\lambda_{\text{макс}}$ , отвечающая истечению с максимальной возможной скоростью, равной скорости звука на выходе из трубы. Если при заданных параметрах газа на входе подключить трубу большего сопротивления, то расход газа через нее упадет и коэффициент  $\lambda_1$  снизится.



Фиг. 2,24. Изменение критической приведенной длины в зависимости от коэффициента скорости на входе.

Эти соображения относятся прежде всего к дозвуковому течению (на входе в трубу). Помимо специфичного для течения с трением наличия „предельной“ длины трубы, чрезвычайно существенно общее свойство газовых течений, выражающееся в перестройке потока (в частности, ограничения расхода газа через канал) для удовлетворения предельным условиям.

Аналогичный пример был рассмотрен выше при анализе „теплого кризиса“. Он заключался в ограничении расхода газа через цилиндрическую трубу в связи с предельным расширением газа до  $\lambda_2 = 1$  на выходе при подводе тепла.

В обоих этих случаях и других, аналогичных им, утверждение о невозможности движения при условиях, неудовлетворяющих выведенным соотношениям (например, критическое истечение из трубы с трением при величине  $\lambda_1 > 0,5$  в случае, когда  $\lambda_{\text{макс}} > 1,61$  — см. табл. 2,8), означает невозможность стационарного процесса. Если представить себе, например, стационарное критическое истечение при  $\lambda_1 = 0,5$  и  $\lambda_{\text{макс}} = 1,61$  и затем внезапно увеличение сопротивления и, следовательно, величины  $\lambda_{\text{макс}}$ , то оно вызовет нестационарный

переход течения на режим с меньшим значением  $\lambda_1$ . Падение расхода газа может, однако, в реальном процессе привести к большему, чем требуется для нового стационарного режима, падению сопротивления, в связи с чем расход снова возрастет, сопротивление увеличится, расход уменьшится и т. д.

В таких условиях возможно установление пульсирующего (нестационарного) режима течения. Аналогичная картина принципиально возможна в тепловом сопле, например, в напряженных камерах сгорания при критическом истечении.

Рассмотрим также вкратце соотношения, характеризующие движение с трением в трубе постоянного сечения в сверхзвуковой области при образовании прямых скачков уплотнения. Приведенные выше формулы и графики относились к идеальному случаю плавного торможения сверхзвукового потока вплоть до кризиса при  $M=1$  на выходе из трубы. Между тем хорошо известно, что торможение сверхзвукового потока в цилиндрических трубах может происходить не непрерывно, а путем образования скачков уплотнения.

Подробнее это явление будет рассмотрено в следующей (третьей) части книги, поэтому ограничимся здесь кратким качественным описанием его, необходимым для понимания приведенных ниже графиков.

Как показывают опыты, при торможении сверхзвукового потока в некотором сечении трубы (точнее, на некотором участке, длина которого практически пренебрежимо мала) происходит резкое падение скорости движения и возрастание давления, температуры и плотности. Изменение скорости является при этом не только количественным, но и качественным: после прямого скачка поток движется с дозвуковой скоростью. Это весьма важное свойство адиабатических скачков отчетливо видно, например, из встречавшейся выше известной формулы газовой динамики, связывающей значения скорости движения до и после прямого скачка с критической скоростью:

$$w_1 w_2 = a^{*2}$$

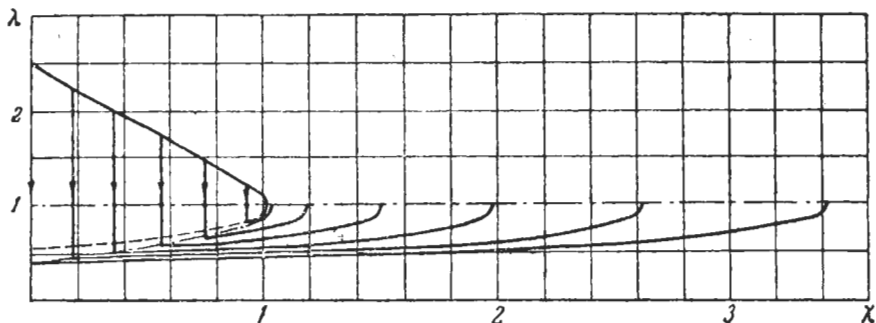
или в безразмерном виде:  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  (так как  $\lambda_1 > 1$ , то  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} < 1$ ).

При анализе движения с трением и образованием скачка последний можно упрощенно рассматривать как дополнительное сопротивление, сконцентрированное в некотором сечении канала.

До образования скачка сверхзвуковой поток движется замедленно под влиянием трения. После прямого скачка в дозвуковом течении имеет место возрастание скорости снова под влиянием трения. Изменение состояния на этих участках происходит в соответствии с закономерностями и

конкретными соотношениями, рассмотренными в этом разделе. Таким образом, при заданной величине  $\lambda_1 > 1$  на входе в трубу и заданной приведенной длине последней, характеризующей сопротивление трения, возникновение скачка приводит как бы к увеличению общего сопротивления (и, следовательно величины  $\lambda$ ).

Иллюстрацией этих соотношений может служить график на фиг. 2,25, на котором изображено изменение коэффициента скорости по длине трубы при заданной величине  $\lambda_1 = 2,5$  для различных длин трубы. Чем больше сопротивление последней, тем ближе ко входу возникает скачок

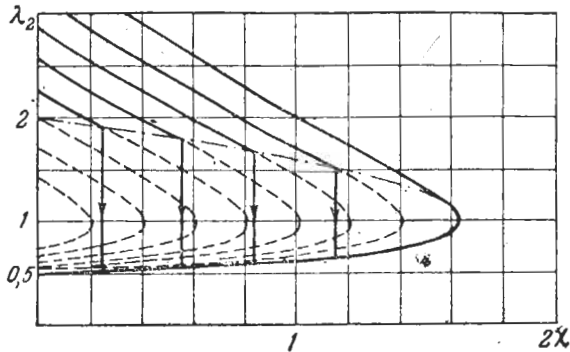


Фиг. 2,25. Изменение коэффициента скорости в трубе при сверхзвуковом течении и образовании плоских скачков в зависимости от приведенной длины (для  $\lambda_1 = 3$ ).

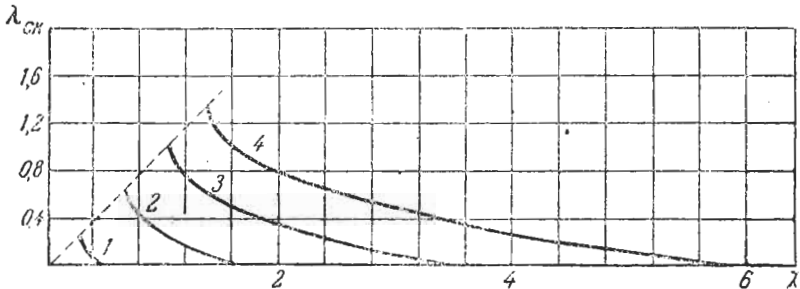
уплотнения, тем, следовательно, меньше значение коэффициента скорости после скачка и больше участок дозвукового течения. Пунктиром на фиг. 2,25 показана дозвуковая ветвь кривой  $\lambda_2 = \lambda(\chi)$ , отвечающая плавному торможению, согласно уравнению (2,142). Штрихпунктиром очерчена кривая значений коэффициента скорости  $\lambda$ , удовлетворяющая уравнению прямого скачка:  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  относительно верхней ветви кривой.

На фиг. 2,26 показаны результаты расчета картины образования прямых скачков при втекании сверхзвукового потока в трубу заданного сопротивления с различными скоростями (для случая  $\gamma = 1,61$ ). Чем больше величина коэффициента скорости  $\lambda_1$  на входе в трубу (значение которого на фиг. 2,26 непосредственно отсчитывается по пересечению кривой с осью ординат — при  $\chi = 0$ ), тем дальше от входа возникает скачок. Физически это смещение скачка в глубь трубы объясняется тем, что при фиксированном суммарном сопротивлении удельное сопротивление скачка тем меньше, чем при меньшем значении  $\lambda$  он возникает. Область, в которой кривые проведены пунктиром, в действительном тече-

нив не реализуется. Как видно из фиг. 2,26, при очень большом значении  $\lambda_1$  или, соответственно, при малом сопротивлении трубы, принципиально возможно плавное торможение до величины  $\lambda = 1$  на выходе<sup>1</sup>.



Фиг. 2,26. Изменение коэффициента скорости по длине трубы при сверхзвуковом течении с трением и образованием скачков в зависимости от коэффициента скорости на входе (при  $\lambda=1,61$ ; штрихпунктиром очерчена область, в которой возможно возникновение скачков).



Фиг. 2,27. Зависимость безразмерного расстояния, на котором образуется скачок, от коэффициента скорости на входе и приведенной длины трубы.

1 —  $\lambda_1 = 1,5$ ; 2 —  $\lambda_1 = 2,0$ ; 3 —  $\lambda_1 = 2,5$ ; 4 —  $\lambda_1 = 3,0$ .

Эти соотношения отчетливо видны также на фиг. 2,27. На последней изображена зависимость безразмерного расстояния от входа в трубу до места образования скачка (обозначенная  $\lambda_{ск}$ ) от приведенной длины трубы  $\lambda$  и коэффициента скорости на входе  $\lambda_1$ . Последний является параметром для кривых на фиг. 2,27, возрастающим в порядке нумерации кривых от  $\lambda_1 = 1,5$  — для первой из них, до  $\lambda_1 = 3$  —

<sup>1</sup> Это же значение  $\lambda = 1$  на выходе из трубы сохраняется в конце дозвукового участка течения — после скачка; условие  $\lambda_{вых} = 1$  и определяет в сущности местоположение скачка внутри трубы.

для последней. Точки пересечения этих кривых с осью абсцисс соответствуют максимальным значениям приведенной длины  $l_{\text{макс}}$  — для данной величины  $\lambda_1$ . Они отвечают образованию скачка на входе в трубу, течение по которой на всей длине будет дозвуковым.

При уменьшении сопротивления, в соответствии с графиком на фиг. 2,25, скачок отодвигается в глубь трубы и перемещается по ней вплоть до выходного сечения, где, как это видно из фиг. 2,25, интенсивность его ничтожно мала. Проведенный на фиг. 2,27 пунктиром биссектор соединяет точки, для которых  $l_{\text{ск}} = l$ , т. е. скачок образуется в выходном сечении.

Необходимо заметить, что рассмотренная расчетная схема далеко не исчерпывает возможного многообразия картин сверхзвукового течения. Наряду с прямыми скачками в трубах возможно образование целой системы кривых скачков (расположенных под углом к направлению движения). В этом случае расчет становится более сложным. Дальнейшее рассмотрение этого вопроса требует привлечения опытных материалов и выходит за рамки книги<sup>1</sup>.

## 2,15. РАСХОДНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ (ВАРИАНТ РАСЧЕТА)

В качестве последнего примера расчета процесса для частного случая действия одного только фактора рассмотрим вариант энергетически изолированного движения без трения по трубе постоянного сечения при переменном весовом расходе.

В разделе, посвященном геометрическому и идеальному расходному соплу, мы указывали, что тождественность этих двух схем основана на предположении об изоэнтропическом характере изменения состояния в основном потоке, движущемуся по геометрическому соплу, внутри которого (согласно схеме на фиг. 1,5,а) выделено идеальное расходное сопло.

Это предположение отвечает предельной идеализации реального процесса движения газа с переменным секундным весовым расходом. Как уже отмечалось, такая схема близка к течению с отводом газа из трубы постоянного сечения для замедленного дозвукового течения или ускоренного сверхзвукового. Действительно, в этом случае вытекающий из канала газ в первом приближении обладает всеми параметрами основного потока. В пренебрежении потерями такой процесс в целом можно отождествить с изоэнтропическим движением по геометрическому соплу.

Рассмотренная схема, однако, существенно дальше от реального процесса, происходящего при подводе извне дополни-

<sup>1</sup> Подробные данные о сопротивлении труб и образовании скачков приведены, например, в цитированной выше „Прикладной газовой динамике“ под редакцией акад. С. А. Христиановича (ч. 1, изд. 1948).



тельной массы газа. В этом случае добавляемый к основному потоку газ может, вообще говоря, сколь угодно отличаться от него по своим свойствам (температуре, скорости и т. п.). В связи с этим расчет такого процесса должен был бы вестись с учетом влияния, по меньшей мере, двух воздействий: расходного и теплового. Такой пример для впрыска в газовый поток охлаждающей жидкости будет рассмотрен в следующей главе.

Попытаемся теперь рассмотреть вновь случай чистого расходного воздействия, имея ввиду одно только добавление газа,  $dG > 0$ , в идеализированном случае течения с постоянной полной энтальпией. С этой целью примем условие  $I_{0жс} = I_0$ , т. е. положим равными полные энтальпии в основном потоке и притекающем газе. Для идеального газа  $I_0 = c_p T_0$ ; следовательно, наше условие означает:

$$T_0 = T_{0жс} \quad \text{или} \quad T_0 = \text{const},$$

температура торможения при добавлении газа не меняется; значение ее в любых сечениях потока одинаково.

По физическому смыслу это предположение означает равенство абсолютных значений разности энтальпий и кинетических энергий основного потока и притекающего газа. Положим для определенности, что газ втекает в основной поток с пренебрежимо малой скоростью движения в направлении последнего (притекание газа происходит в плоскости, нормальной к оси основного потока, поэтому проекция вектора скорости на направление основного движения равна нулю). В этом случае очевидно:

$$w_{жс} = 0; \quad \Delta E_{кин} = \frac{\Delta w^2}{2g} > 0.$$

Условие  $T_0 = T_{0жс}$  может быть при этом выдержано, если положить  $T_{жс} > T$  — газ притекает с более высокой температурой. Падение энтальпии притекающего газа  $\Delta I_{жс}$  в точности компенсирует затрату энергии на создание скорости.

Это дополнительное условие приводит нас снова к случаю одного только расходного воздействия, для которого несложно произвести полный расчет. Будем, как и прежде, искать зависимость отношения скоростей, температур и т. д. в двух сечениях потока от числа  $M$  или коэффициента скорости.

Из условия  $T_0 = \text{const}$  — для всего потока — следует:

$$T_{02} = T_{01},$$

отсюда, как и всегда для энергетически изолированного процесса (см. § 2,21):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (2,144)$$

При дополнительном вводе газа в дозвуковой поток число  $M$  растет, температура падает.

Используем теперь уравнение импульсов для движения в трубе постоянного сечения (пригодное также к случаю переменного расхода газа, если проекция скорости втекания на направление движения равна нулю<sup>1</sup>)

$$p + \rho \omega^2 = \text{const}. \quad (2,38)$$

Отсюда, как и в случае теплового сопла, имеем:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \cdot \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (2,145)$$

Давление в основном потоке при подводе газа падает в дозвуковой области течения и растет — в сверхзвуковой.

Мы можем теперь написать также выражение для отношения плотностей газа в двух сечениях потока в виде:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2}, \text{ или}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \cdot \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} = \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2}. \quad (2,146)$$

Изменение плотности в дозвуковом и сверхзвуковом течениях происходит аналогично изменению давления: плотность газа падает при увеличении расхода, если  $M_1 < 1$  и растет при  $M_1 > 1$ .

<sup>1</sup> Уравнение (2,38) легко получить в конечном виде с помощью закона количества движения. Пусть через сечение 1 проходит расход в единицу времени  $G_1$  кг/сек газа, а через 2 соответственно  $G_2$ . Площади сечений будем считать равными, а давления в них обозначим  $p_1$  и  $p_2$ . Имеем:

$$Fp_1 + G_1\omega_1 = Fp_2 + G_1\omega_2 + \Delta G(\omega_2 - \omega_{\text{ж}}) = Fp_2 + G_2\omega_2,$$

так как  $G_2 = G_1 + \Delta G$  и  $\omega_{\text{ж}} = 0$ . Отсюда имеем  $p + \rho\omega^2 = \text{const}$  [к тому же результату приводит уравнение (1,30)]. По этому поводу подробнее см. § 3,13.

Закон изменения скорости движения найдем из условия постоянства критической скорости:  $a^* = \text{const}$  (так как  $T_0 = \text{const}$ ). В связи с этим

$$\frac{w_3}{w_1} = \frac{M_3}{M_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (2,147)$$

Скорость движения растет при увеличении числа  $M$  (в дозвуковом потоке) и падает при уменьшении  $M$  — в сверхзвуковом.

Используя два последних уравнения, напишем выражение, связывающее плотность потока  $j$  с числом  $M$ :

$$j_2 = \frac{M_2}{M_1} \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}} = \lambda_2 \cdot \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2}. \quad (2,148)$$

Величина  $j$  — плотность тока газа — специфична для рассматриваемого воздействия, поскольку

$$j_2 = \frac{G_2}{G_1} = 1 + \frac{\Delta G}{G},$$

где  $\frac{\Delta G}{G_1}$  — относительный прирост секундного весового расхода газа.

Как видно из уравнения (2,148), изменение плотности тока происходит по закону, отличному от закона изменения этой величины в геометрическом или идеальном расходном сопле (см. § 2,88); численное сравнение дадим ниже.

Качественный характер изменения плотности тока при этом сохраняется; максимальное значение ее приходится на критическое сечение.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Последнее легко показать обычным путем:

$$\frac{d j_2}{d \lambda_2} = \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1^2} \frac{1 + \lambda_2^2 - 2\lambda_2^2}{(1 + \lambda_2^2)^2} = 0$$

при  $\lambda_2 = M_2 = 1$ , причем  $\frac{d^2 j_2}{d \lambda_2^2} < 0$ .

Выпишем также значение отношения давлений и плотностей торможения в двух сечениях канала. Из постоянства температуры торможения следует  $\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}$  или с учетом формулы (2,52):

$$\begin{aligned} \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} &= \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \\ &= \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \end{aligned} \quad (2,149)$$

Нетрудно убедиться, что давление (и плотность) заторможенного газа падает при подводе газа как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом потоке. Действительно, выражение (2,149) тождественно формуле (2,108) для изменения давления торможения в тепловом сопле. Как было показано в § 2,12, из (2,108) следует:

$$\frac{d \frac{p_{02}}{p_{01}}}{dM_2} = 0 \quad \text{при} \quad M_2 = \lambda_2 = 1; \quad \frac{d^2 \frac{p_{02}}{p_{01}}}{dM_2^2} > 0.$$

Поэтому в критическом сечении имеет место минимум величин  $p_{02}$  и  $\rho_{02}$ . Изменение последних в рассматриваемом случае не только аналогично друг другу по характеру (как в тепловом сопле), но и численно одинаково.

Выпишем теперь выражения критических значений параметров. В предельном случае  $M_1 \approx 0$ ;  $M_2 = 1$ , имеем:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1},$$

как и всегда для энергетически изолированного процесса.

Предельное критическое отношение давлений в этом случае, как и в тепловом сопле, равно

$$\frac{p^*}{p_{01}} = \frac{1}{1+k},$$

тогда как предельное падение плотностей не зависит от числа  $k$  и равно:

$$\frac{\rho^*}{\rho_{01}} = \frac{1}{2}$$

— начальная плотность (при  $M=0$ ) ровно вдвое больше плотности в критическом сечении.

Эти значения имеют смысл теоретических предельных величин, поскольку достижению  $M_2=1$  при  $M_1=0$  отвечает бесконечное возрастание расхода:

$$\frac{G^*}{G_0} = \frac{j^*}{j_0} = \infty .$$

Наконец, изменение параметров заторможенного газа при этих условиях равно

$$\frac{p_0^*}{p_0} = \frac{\rho_0^*}{\rho_0} = \frac{(k+1)^{\frac{1}{k-1}}}{2^{\frac{k}{k-1}}} .$$

При числе  $M_1 \neq 0$  ( $\lambda_1 \neq 0$ ) соответственно имеем:

$$\frac{T^*}{T_1} = \frac{2}{k+1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right) = \frac{\frac{2}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} , \quad (2,150)$$

$$\frac{p^*}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + k} = \frac{1}{1+k} \cdot \frac{1 + \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} , \quad (2,151)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_1} = \frac{1 + kM_1^2}{2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)} = \frac{1 + \lambda_1^2}{2} , \quad (2,152)$$

$$\frac{j^*}{j_1} = \frac{1 + kM_1^2}{M_1 \sqrt{2(1+k) \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)}} = \frac{1 + \lambda_1^2}{2\lambda_1} , \quad (2,153)$$

$$\frac{p_0^*}{p_{01}} = \frac{\rho_0^*}{\rho_{01}} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + k} \left( \frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{1 + \lambda_1^2}{2} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{\frac{2}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k-1}} . \quad (2,154)$$

Проиллюстрируем эти соотношения численными примерами. При  $\lambda_1=0,1$  для получения критического истечения необходим дополнительный расход газа в количестве

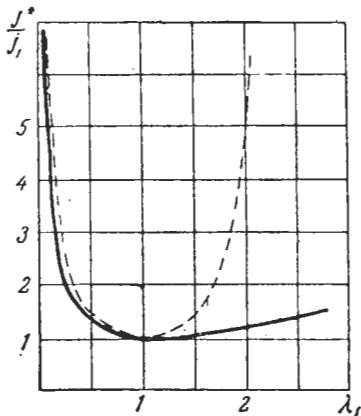
$$\frac{\Delta G^*}{G_1} = \frac{j^*}{j_1} - 1 = \frac{(1 - \lambda_1^2)^2}{2\lambda_1} \approx 4,05 \frac{\kappa\kappa}{\kappa\kappa}$$

на каждый килограмм газа из основного потока, т. е. примерно пятикратное увеличение расхода по сравнению с начальным.

В аналогичных условиях в идеальном расходном сопле оказалось бы возможным, согласно формуле (2,91) при  $k=1,4$  подвести:

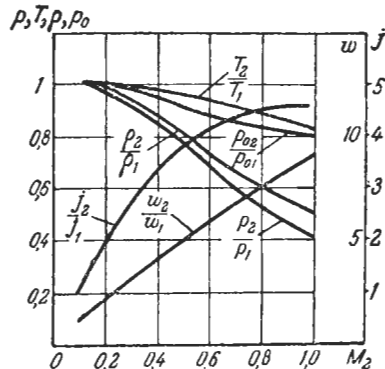
$$\frac{\Delta G^*}{G_1} = \frac{1}{0,1} \left[ \frac{1}{1,2 \left( 1 - \frac{0,01}{6} \right)} \right]^{2,5} - 1 \approx 5,3 \frac{\text{кг}}{\text{кг}}$$

В более полном виде для переменного значения  $\lambda_1$  эта зависимость показана графически на фиг. 2,28, где пунктиром проведена линия для идеального расходного сопла. Как видно из графика, результаты расчета в обоих предположениях,



Фиг. 2,28. Зависимость критического отношения плотностей тока в расходном сопле от коэффициента скорости на входе.

(сплошная линия — вариант постоянства температуры торможения; пунктир — идеальное расходное сопло для  $k=1,4$ ).



Фиг. 2,29. Изменение параметров газа в расходном сопле в зависимости от числа  $M$  при постоянстве температуры торможения; ( $M_1=0,1$ ;  $k=1,4$ ).

сравнительно близки между собой в дозвуковой области течения и резко различны в сверхзвуковой. На фиг. 2,29 изображено изменение всех параметров в зависимости от числа  $M_2$ . Сравнение с кривыми для идеального расходного сопла (фиг. 2,7) для тех же значений  $M_1=0,1$  и  $k=1,4$  показывает, что во втором варианте происходит более медленный рост скорости и плотности тока, более быстрое падение давления и плотности и тождественное изменение температуры.

Полученные выше расчетные формулы сведены для удобства использования в табл. 2,9.

Рассмотрев подробно количественные соотношения, обратимся к термодинамической трактовке процесса.

Заметим прежде всего, что движение с увеличением расхода газа сопровождается как в дозвуковой, так и сверхзвуковой области течения, ростом энтропии. Из уравнения (2,54), с учетом  $T_0 = \text{const}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{S_2 - S_1}{AR} = \ln \left( \frac{p_{01}}{p_{02}} \right) &= \ln \left[ \frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2}M_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right] = \\ &= \ln \left[ \frac{1 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_1^2} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \right] \end{aligned} \quad (2,155)$$

В критическом сечении при  $M=1$  энтропия 1 кг газа достигает максимума:

$$\frac{\Delta S^*}{AR} = \ln \left( \frac{p_{01}^*}{p_0^*} \right),$$

где значение  $\frac{p_{01}^*}{p_0^*}$  определяется формулой (2,154).

Таким образом, рассматриваемая схема принципиально отличается от идеального (изэнтропического) расходного сопла. Физически возрастание энтропии объясняется необратимым процессом смешения основного потока и дополнительной массы газа, поступающей в канал с температурой и скоростью, отличающимися от параметров потока на конечную величину.

Воспользуемся теперь некоторыми выводами из уравнений закона обращения воздействий. В первой части книги в разделе, посвященном расходному воздействию, мы вывели уравнение обращения воздействий для скорости движения при переменном расходе и произвольной форме уравнения состояния. Для идеального газа, с учетом равенства  $\frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -1$  и условия  $w_{\text{эс}} = 0$ , уравнение (1,33) примет вид:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \left[ 1 + M^2 + \frac{\Delta S_{\text{эс}}}{c_p} \right] \frac{dG}{G}, \quad (2,156)$$

где  $\Delta S_{\text{эс}}$  — прирост энтропии за счет смешения, отнесенный к 1 кг газа. Значение этой величины станет более ясным, если для рассматриваемого случая вывести равенство, аналогичное (2,156), не используя при выводе уравнения второго начала термодинамики.

ТАБЛИЦА 2,9  
Основные соотношения для расходного сопла  
(вариант  $T_0 = \text{const}$ )

| Расчетная величина            | Символ                  | Расчетные формулы  |  |
|-------------------------------|-------------------------|--|--|
| Отношение давлений            | $\frac{p_2}{p_1}$       | $\frac{1+k M_1^2}{1+k M_2^2}$  | $\frac{1+\lambda_2^2}{1+\lambda_1^2} \cdot \frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}$                          |
| Отношение температур          | $\frac{T_2}{T_1}$       | $\frac{1+\frac{k-1}{2} M_1^2}{1+\frac{k-1}{2} M_2^2}$  | $\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}$  |
| Отношение плотностей          | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\frac{1+k M_1^2}{1+k M_2^2} \cdot \frac{1+\frac{k-1}{2} M_2^2}{1+\frac{k-1}{2} M_1^2}$                          | $\frac{1+\lambda_1^2}{1+\lambda_2^2}$  |
| Отношение скоростей           | $\frac{w_2}{w_1}$       | $\frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{1+\frac{k-1}{2} M_1^2}{1+\frac{k-1}{2} M_2^2}}$                                     | $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  |
| Отношение плотностей потока   | $\frac{j_2}{j_1}$       | $\frac{M_2}{M_1} \frac{1+k M_1^2}{1+k M_2^2} \sqrt{\frac{1+\frac{k-1}{2} M_2^2}{1+\frac{k-1}{2} M_1^2}}$         | $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{1+\lambda_1^2}{1+\lambda_2^2}$  |
| Отношение давлений торможения | $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ | $\frac{1+k M_1^2}{1+k M_2^2} \left( \frac{1+\frac{k-1}{2} M_2^2}{1+\frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$ | $\frac{1+\lambda_1^2}{1+\lambda_2^2} \left( \frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$ |

Примечание. 1)  $\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1$ ; 2)  $\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}}$ ; 3)  $\frac{\Delta G}{G} = \frac{j_2}{j_1} - 1$ .

Приведем кратко такой вывод, имея в виду его методическое значение, а также то обстоятельство, что результативные формулы понадобятся нам в следующей главе — при решении задачи о впрыске жидкости в поток газа.

Исходные уравнения напишем в виде:

$$\frac{dG}{G} = \frac{dp}{\rho} + \frac{dw}{w} = \frac{dj}{j} \quad (2,34)$$



—уравнение неразрывности для течения с переменным расходом в канале постоянного сечения;

$$\frac{dp}{\rho} + w^2 \left( \frac{dw}{w} + \frac{dj}{j} \right) = 0 \quad (1,30')$$

—обобщенное уравнение Бернулли;

$$dT_0 = dT + \frac{wdw}{gc_p} = 0 \quad (2,20)$$

—уравнение энергии (в виде условия постоянства температуры торможения) и

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (2,3)$$

—уравнение состояния идеального газа.

Из двух последних уравнений нетрудно получить выражение величины  $\frac{d\rho}{\rho}$  в виде:

$$\frac{dp}{\rho} = gRT \frac{d\rho}{\rho} - \frac{gR}{2c_p} w^2 \frac{dw}{w} = \frac{a^2}{k} \cdot \frac{d\rho}{\rho} - \frac{k-1}{k} w^2 \frac{dw}{w}.$$

Заменяя  $\frac{d\rho}{\rho}$  из уравнения неразрывности и подставляя  $\frac{dp}{\rho}$  в уравнение Бернулли, после ряда преобразований, получим

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - (1 + kM^2) \frac{dG}{G}. \quad (2,157)$$

Сравнивая правые части уравнений (2,156) и (2,157) приходим к равенству:

$$\frac{\Delta S_{\text{эс}}}{c_p} = (k-1) M^2 = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{w^2}{gRT}$$

или

$$T \Delta S_{\text{эс}} = \frac{Aw^2}{g} = \Delta E_{\text{кин}} + [\Delta I_{\text{эс}}],$$

поскольку из условия  $T_0 = \text{const}$  следует

$$A \frac{w^2}{2g} = - \Delta I_{\text{эс}}.$$

Окончательно

$$\Delta S_{\text{эс}} = S - S_{\text{эс}} = \frac{A \frac{w^2}{2g} + c_p (T - T_{\text{эс}})}{T}. \quad (2,158)$$

Прирост энтропии, отнесенный к 1 кг вводимого дополнительно газа, равен в рассматриваемой задаче сумме абсо-

лотных величин разностей кинетической энергии и энтальпии в основном и дополнительном потоке, деленной на температуру.

Приведем также (без вывода) остальные уравнения обращения воздействий:

для давления

$$(M^2 - 1) \frac{dp}{p} = 2kM^3 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \frac{dj}{j}; \quad (2,159)$$

для плотности

$$(M^2 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = (1+k)M^3 \frac{dj}{j}; \quad (2,160)$$

для температуры

$$(M^2 - 1) \frac{dT}{T} = (k-1) \left(1 + kM^2\right) M^2 \frac{dj}{j} \quad (2,161)$$

и, наконец, для числа  $M$

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = -2 \left(1 + kM^3\right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \frac{dj}{j}. \quad (2,162)$$

Интегрирование последнего уравнения, как это легко проверить, привело бы нас к соотношению между плотностью тока и числом  $M$ , т. е. к уравнению (2,148).

Из уравнений (2,157) — (2,162) получим выражения коэффициентов  $l$ ,  $m$ ,  $n$  и  $t$ , каждый из которых определяет закон относительного изменения двух величин: скорости и давления  $l = \frac{d \ln w}{d \ln p}$ , скорости и плотности —  $m = \frac{d \ln w}{d \ln \rho}$ , давления и плотности  $n = \frac{d \ln p}{d \ln \rho}$  и, наконец, скорости и температуры —  $t = \frac{d \ln w}{d \ln T}$ .

Эти коэффициенты в рассматриваемой задаче равны:

$$l = - \frac{1 + kM^2}{2kM^2} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) < 0;$$

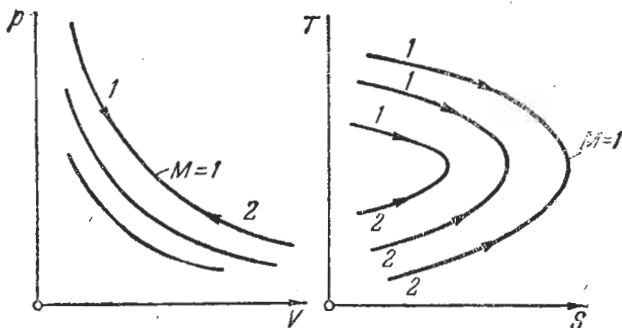
$$m = - \frac{1 + kM^2}{k+1} < 0;$$

$$n = \frac{2k}{k+1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) > 0;$$

$$t = - \frac{1}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} < 0.$$

Полученные выражения согласуются с приведенными выше формулами и определяют относительное изменение  $\omega$ ,  $p$ ,  $T$  и  $\rho$  в зависимости от числа  $M$ .

Наиболее наглядной из этих характеристик является величина  $n$  местного (переменного) показателя политропы.



Фиг. 2,30. Изображение процесса течения газа с переменным расходом (второй вариант расчета) в диаграммах  $pV$  и  $TS$ .

1 — подвод газа при  $M < 1$ ; 2 — подвод газа при  $M > 1$ .

Как видно из приведенной формулы, в дозвуковом потоке  $n$  меняется от  $n_0 = \frac{2k}{k+1}$  ( $1 < n_0 < k$ ) при  $M_0 = 0$  (т. е. от элементарной политропы, заключенной между изотермой и изоэнтропой) до  $n^* = k$  при  $M = 1$ . Последнее, как и при движении с трением, означает, что предельное состояние при вводе дополнительной массы газа при  $M = 1$  является изоэнтропическим.

В сверхзвуковом потоке величина  $n$  меняется от  $n = \infty$  при  $M = \infty$  (изохора) до  $n = k$  при  $M = 1$ .

Решая выражение для  $n$  относительно числа  $M$ , получим

$$M^2 = \frac{k+1}{k-1} \left( \frac{n}{k} - \frac{2}{k+1} \right). \quad (2,163)$$

Выражение (2,163), как и рассмотренные ранее формулы (2,67) — для движения в тепловом сопле, или (2,69) — для движения с трением, устанавливает простую связь между числом  $M$  и местным значением переменного показателя элементарного политропического процесса.

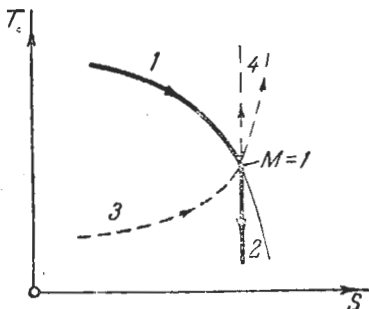
Характер кривых, изображающих процесс в термодинамических диаграммах  $pV$  и  $TS$  показан на графике на фиг. 2,30.

Как видно из графика, изменение состояния в рассматриваемом процессе весьма близко к процессу при движении под влиянием одного только трения (фиг. 2, 20).

На фиг. 2,30 стрелками указано вероятное направление изменения состояния при подводе газа в реальном процессе: расширение в дозвуковой области и сжатие — в сверхзвуковой. Критическое сечение в диаграмме  $TS$  определяется по

Фиг. 2,31. Изображение процесса изменения состояния газа при непрерывном переходе через скорость звука в расходном сопле в диаграмме  $TS$ .

(сплошная линия — расширение; пунктир — сжатие; тонкими линиями показан характер реального процесса на участке отвода газа). 1 — подвод газа (при  $M < 1$ ); 2 — отвод газа (при  $M > 1$ ); 3 — подвод газа (при  $M > 1$ ); 4 — отвод газа (при  $M < 1$ ).



максимуму энтропии; в диаграмме  $pV$  оно отвечает той точке кривой, где касательная к ней имеет угол наклона к оси координат  $\frac{dp}{dV} = -k \frac{p}{V}$ .

На фиг. 2,31 в координатах  $TS$  изображен процесс непрерывного перехода через критическую скорость в расходном сопле: для ввода газа использована схема процесса при  $T_0 = \text{const}$ , для вывода его — схема идеального сопла<sup>1</sup> ( $S = \text{const}$ ).

## 2.16. СРАВНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Рассмотренные пять случаев изолированных воздействий на газовое течение представляют собой простейшие примеры применения общих уравнений термодинамики газовых потоков. Помимо этого детальный анализ соотношений для каждого из них представляет также самостоятельный интерес, поскольку реальные процессы в технике складываются из этих частных случаев. Более того, во многих элементах различных аппаратов можно, в порядке первого приближения, схематизировать действительный процесс, как движение газа, находящегося под влиянием одного только — основного для рассматриваемой задачи — воздействия. В таких случаях полученные выше соотношения приобретают характер приближенных расчетных формул. В следующей главе мы рассмотрим некоторые случаи совместного действия двух или нескольких факторов и укажем общий метод решения таких задач.

Сравним теперь между собой процессы изменения состояния газа для рассмотренных частных случаев, прибегнув для этого к численным примерам.

<sup>1</sup> В реальном процессе, в связи с потерями при выпуске газа, эта часть кривой также будет протекать с ростом энтропии (см. фиг. 2,31).

На фиг. 2,32 совмещены кривые зависимости всех переменных от числа  $M$  при одном и том же значении  $M$  на входе в канал:  $M_1=0,1$  для двух значений показателя  $k=1,4$  и  $k=1,2$ . Все кривые на фиг. 2,32 относятся только к расширению газа, поэтому в сверхзвуковой области они представляют процесс в геометрическом (или в идеальном расходном), механическом и тепловом соплах. В дозвуковой области показано также расширение под влиянием одного только трения и при подводе газа — по второму варианту расчета<sup>1</sup>.

На фиг. 2,33 показано изменение критических значений всех переменных (при  $M_2=1$ ) в зависимости от величины  $M_1$  на входе в канал для  $k=1,4$ . Такой график, в отличие от фиг. 2,32, имеет не только иллюстративное, но и расчетное значение, так как позволяет рассчитать изменение любой из переменных при переходе от одного значения числа  $M$  к другому.

Для этой цели следует воспользоваться простыми соотношениями:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T^*} = \left(\frac{T^*}{T}\right)_1; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p^*} = \left(\frac{p^*}{p}\right)_1 \text{ и т. д.}$$

Значения  $\frac{T^*}{T_1}$ ;  $\frac{p^*}{p_1}$  и т. д. даны на графике фиг. 2,33. Подсчитаем для примера значение  $\frac{p_2}{p_1}$  при переходе от  $M_1=0,5$  до  $M_2=2$  в тепловом сопле.

По графику имеем:

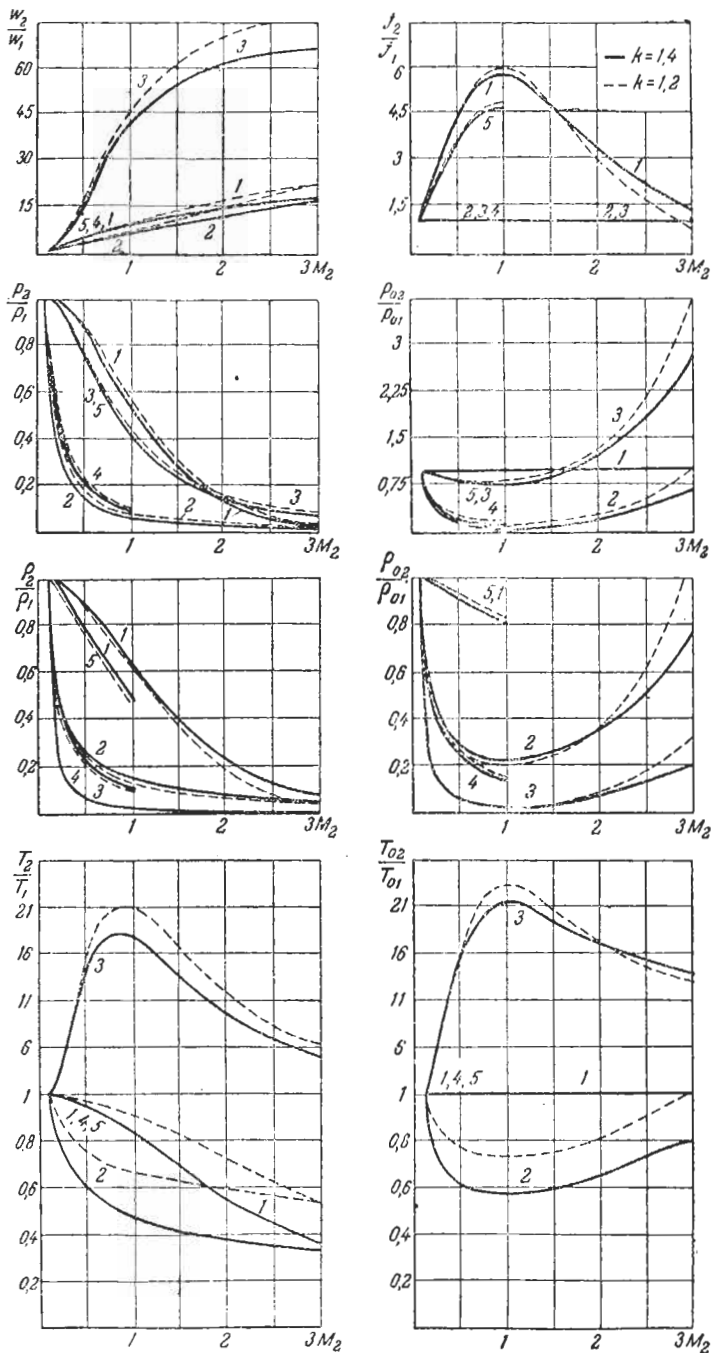
$$\frac{p^*}{p_1} \approx 0,56 \text{ (при } M_1=0,5); \quad \frac{p^*}{p_1} \approx 2,75 \text{ (при } M_1=2).$$

Отсюда  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{0,55}{2,75} \approx 0,20$ , что практически совпадает с расчетом по формуле  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}$  из табл. 2,6.

График критических значений параметров (фиг. 2,33) построен для дозвуковой и сверхзвуковой областей в предположении о непрерывном изменении переменных (безударное течение).

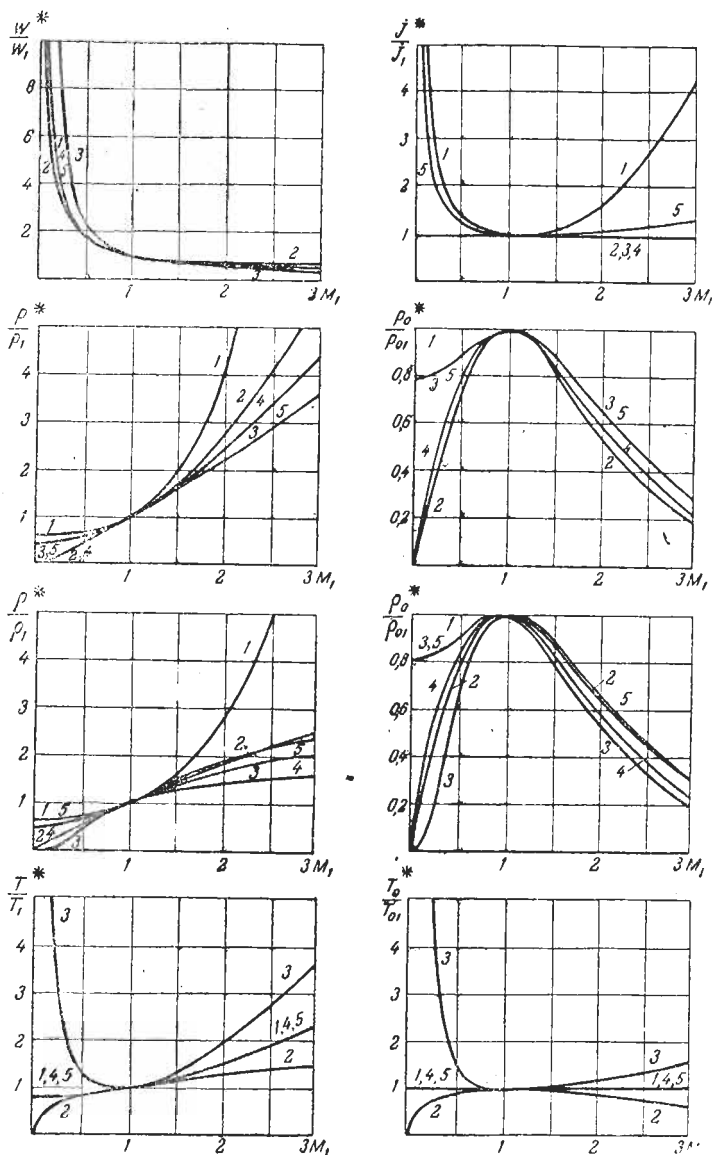
Сопоставим теперь расширение (или сжатие) газа при движении без трения с постоянным весовым расходом в различных соплах на участке между двумя одинаковыми по площади сечениями, отвечающими также одинаковым значениям

<sup>1</sup>  $T_0 = \text{const}; \omega_{\text{вс}} = 0.$



Фиг. 2,32. Сравнение процесса расширения газа под влиянием различных изолированных воздействий.

1 — движение газа в геометрическом или идеальном расходящем сопле; 2 — движение газа в механическом сопле; 3 — движение газа в тепловом сопле; 4 — движение газа под влиянием трения; 5 — движение с подводом газа — вариант расчета расходящего сопла  $T_0 = \text{const}$ .



Фиг. 2,33. Сравнение критических параметров газа при влиянии различных воздействий (для  $k=1,4$ ).

1 — геометрическое или идеальное расходное сопло; 2 — механическое сопло; 3 — тепловое сопло; 4 — движение с трением; 5 — расходное воздействие — вариант расчета  $T_0 = \text{const}$ .

и температуры торможения. Этот расчет приведет нас к некоторым выводам, полезным для понимания материала, изложенного в третьей части книги (теории тепловых и адиабатических скачков).

На фиг. 2,34 построена зависимость между коэффициентами скорости  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в двух равных сечениях сопла, отвечающих одинаковой температуре торможения. Исходными для расчета служат приведенные выше формулы (2,88) и (2,96') для изэнтропических (геометрического и механического) сопел и формула (2,107) для теплового сопла.

В этих формулах принято:  $F_2 = F_1$  и  $T_{02} = T_{01}$ .

Соответственно получаем для геометрического и механического сопла общую формулу:

$$\lambda_2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \lambda_1 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2\right) \quad (2,164)$$

или

$$\lambda_2^{k-1} - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^{k+1} = \lambda_1^{k-1} - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^{k+1} \quad (2,164')$$

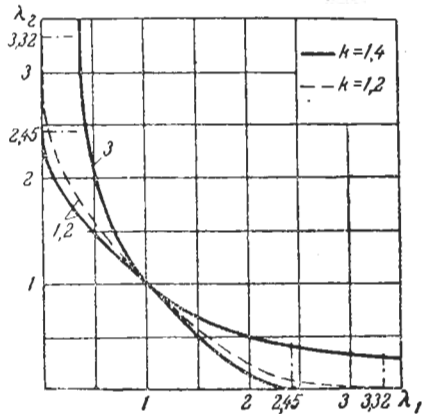
Задавая значениями  $\lambda_1$  и подбирая решение уравнения относительно  $\lambda_2^*$ , нетрудно построить кривую:  $\lambda_2 = \lambda(\lambda_1)$ , изображенную на фиг. 2,34 для двух изэнтропических сопел при двух значениях показателя  $k$  (кривые 1, 2).

Для теплового сопла из формул (2,107) и (2,114) следует, что  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$  для сечений с одинаковой температурой торможения связаны между собой простым уравнением:

$$w_1 w_2 = a^{*2} \quad \text{или} \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (2,165)$$

Соответствующая кривая (3) также нанесена на фиг. 2,34.

Это отличие теплового сопла от остальных сопел, разумеется, не случайно, а вызвано различием в характере изме-



Фиг. 2,34. Соотношение между коэффициентами скорости в двух одинаковых по площади сечениях сопла при одинаковых значениях температуры торможения.

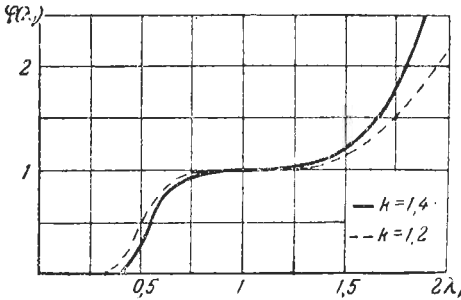
1,2 — геометрическое и механическое сопла; 3 — теплое сопло.

\* Это уравнение просто решается также графически.



нения состояния газа, движущегося по соплам. Действительно, в первых двух случаях (геометрическое и механическое сопла) имеет место непрерывно изоэнтропический процесс.

В соответствии с этим энтропия по всему ходу сопла и, в частности, в обоих сечениях, для которых справедливы равенства  $F_1 = F_2$ ,  $T_{01} = T_{02}$ , одинакова, т. е.  $S_2 = S_1 = \text{const}$ .



Фиг. 2,35.

В тепловом сопле, в отличие от этого, процесс расширения или сжатия происходит при изменении энтропии, а именно, при росте ее на первом участке (при  $w < a^*$  и подводе тепла) и убывании на втором (при  $w > a^*$  и отводе тепла).

Несмотря на то, что суммарное количество тепла, подведенное между выбранными сечениями ( $T_{01} = T_{02}$ ), равно нулю (т. е. при переходе от  $w_1 < a^*$  к  $w_2 > a^*$  в сверхзвуковой области течения отведено ровно столько же тепла, сколько было подведено в дозвуковой), изменение энтропии между этими сечениями отлично от нуля. Более того, нетрудно показать, что переход от сечения 1, в котором  $\lambda_1 < 1$ , в сечение 2 ( $\lambda_2 > 1$ ) происходит с убыванием энтропии 1 кг газа, а обратный переход — из сверхзвукового течения в дозвуковое — с повышением.

Действительно, разность энтропии 1 кг газа в двух сечениях сопла выражается формулой:

$$\frac{S_2 - S_1}{AR} = \ln \left[ \left( \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \frac{F_{01}}{F_{02}} \right] \quad (2,54)$$

или, при

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1,$$

$$\frac{S_2 - S_1}{AR} = \ln \frac{F_{01}}{F_{02}}.$$

Таким образом, знак изменения энтропии между выделенными двумя сечениями теплового сопла, в которых температура торможения одинакова, определяется соотношением между полными давлениями в этих сечениях.

Согласно формуле (2,108') это отношение равно:

$$\frac{p_{01}}{p_0} = \frac{1 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_1^2} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Преобразуем это выражение, подставив в него, согласно формуле (2,165),  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$  и обозначив его для краткости  $\varphi(\lambda_1)$

$$\varphi(\lambda_1) = e^{\frac{S_2 - S_1}{AR}} = \frac{1}{\lambda_1^2} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_1^2}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \right). \quad (2,166)$$

Полученное выражение обращается в единицу при  $\lambda_1 = 1$  и любом значении  $k$ . Нетрудно показать также, что  $\varphi(\lambda_1)$  всегда меньше единицы, если  $\lambda_1 < 1$  и  $\varphi(\lambda_1) > 1$  при  $\lambda_1 > 1$  (см. график функции  $\varphi(\lambda_1)$  для двух значений  $k$  на фиг. 2,35). Это означает, что интегрально адиабатический переход из дозвуковой области теплового сопла в сверхзвуковую сопровождается падением энтропии:

$$\lambda_1 < 1; \varphi(\lambda_1) < 1; S_2 - S_1 < 0,$$

а обратный переход из сверхзвуковой области в дозвуковую сопровождается ростом энтропии:

$$\lambda_1 > 1; \varphi(\lambda_1) > 1; S_2 - S_1 > 0.$$

Для более полного сравнения в табл. 2,10 приведены подробные численные результаты расчета для двух примеров (при  $k=1,4$ ):

а) переход из дозвуковой области течения в сверхзвуковую при  $\lambda_1 = 0,5$  и б) обратный переход при  $\lambda_1 = 2$  для изоэнтропических сопел и для теплового сопла при одинаковых значениях плотности тока и температуры торможения в обоих сечениях.

Из табл. 2,10 видно, что интегрально-адиабатический переход в теплового сопле существенно отличается от перехода изоэнтропического. При расширении газов и переходе через скорость звука в тепловом сопле от значения  $w_1 < a^*$  к величине  $w_2 > a^*$  (при равенстве количества тепла, отведенного в сверхзвуковом потоке, количеству его, подведенного в дозвуковом потоке, т. е.  $Q_{1,2} = 0$ ) получается большее падение давления, температуры и плотности и, соответственно, больший прирост скорости, чем при изоэнтропическом переходе.

Энтропия в этом случае убывает.

Наоборот, при переходе от  $w_1 > a^*$  к  $w_2 < a^*$  при тех же условиях энтропия в тепловом сопле возрастает, поэтому прирост давления, температуры и плотности и падение скорости будут меньше, чем при  $S = \text{const}$ .

ТАБЛИЦА 2,10

Сравнение интегрально-адиабатических переходов через скорость звука

| Величина                                | а) ускорение (расширение) |                | б) торможение (сжатие) |                |
|---|---------------------------|----------------|------------------------|----------------|
|   | Изоэнтропические сопла    | Тепловое сопло | Изоэнтропические сопла | Тепловое сопло |
| $\lambda_1$ . . . . .                   | 0,5                       | 0,5            | 2                      | 2              |
| $\lambda_2$ . . . . .                   | 1,52                      | 2              | 0,13                   | 0,5            |
| $\frac{j_2}{j_1}$ . . . . .             | 1                         | 1              | 1                      | 1              |
| $\frac{T_{02}}{T_{01}}$ . . . . .       | 1                         | 1              | 1                      | 1              |
| $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ . . . . .       | 1                         | 3,5            | 1                      | 0,286          |
| $\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}$ . . . . . | 1                         | 3,5            | 1                      | 0,286          |
| $\frac{p_2}{p_1}$ . . . . .             | 0,21                      | 0,087          | 46,2                   | 11,5           |
| $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ . . . . .       | 0,329                     | 0,25           | 15,5                   | 4              |
| $\frac{T_2}{T_1}$ . . . . .             | 0,642                     | 0,347          | 2,99                   | 2,88           |
| $\frac{w_2}{w_1}$ . . . . .             | 3,04                      | 4              | 0,065                  | 0,25           |
| $\frac{S_2 - S_1}{AR}$ . . . . .        | 0                         | -1,26          | 0                      | 1,26           |

Кроме того, в изоэнтропических соплах при  $T_{02} = T_{01}$  не меняются также остальные параметры заторможенного газа ( $p_{02} = p_{01}$ ;  $\rho_{02} = \rho_{01}$ <sup>1</sup>).

В отличие от этого, в тепловом сопле расширение газа на участке  $T_{02} = T_{01}$  происходит с ростом  $p_0$  и  $\rho_0$ , а сжатие с их падением<sup>2</sup>, несмотря на то, что начальные и конечные значения

<sup>1</sup> Рост энтропии и, следовательно, изменение  $p_0$  и  $\rho_0$  происходят также при адиабатическом движении газа в канале в случае внезапного расширения сечения канала. По этому поводу см., например, Б. М. Киселев, Расчет одномерных газовых течений. Прикл. математика и механика, т. XI, № 1, 1947.

<sup>2</sup> Этот вывод относится к конечным изменениям  $p_0$  и  $\rho_0$  на всем интервале процесса. Внутри его  $p_0$  и  $\rho_0$  падают при приближении к критическому сечению и возрастают при удалении от него.

температуры торможения одинаковы. Эта особенность теплого сопла, равно как и изменение энтропии при адиабатическом переходе через скорость звука, связаны с тем, что подвод тепла в дозвуковом течении и отвод его в сверхзвуковом происходят при различных давлениях. Подвод тепла при  $\lambda < 1$  происходит в области более высокого давления и связан с большей работой расширения, чем отвод тепла при  $\lambda > 1$ , происходящий в области пониженного давления.

Заметим, что наличие двух режимов течения газа в геометрическом сопле ( $w_1 < a^*$  и  $w_2 > a^*$ ), отвечающих одной величине сечения, иногда истолковывается как доказательство возможности скачкообразного перехода из сверхзвуковой области течения в дозвуковую. Это рассуждение, однако, неверно, так как такой переход — скачок уплотнения в пределах практически постоянного сечения — протекает по законам движения в тепловом, а не геометрическом сопле. К этому вопросу мы вернемся подробнее в третьей части книги.

## Глава 2,4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ДЛЯ СЛОЖНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

### 2,17. ОБЩИЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Задачи, решение которых было дано в предыдущей главе, относились к простейшим случаям движения газа под влиянием одного только (изолированного) воздействия. В применении к действительным процессам подобная схематизация отвечает возможности пренебрежения влиянием ряда факторов по сравнению с одним из них — основным для данной задачи. Реальная обстановка, в которой протекают рабочие процессы в различных технических устройствах, не всегда позволяют, однако, пользоваться столь далеко идущим упрощением. В связи с этим целесообразно рассмотреть в общем виде и на ряде примеров движение газа под влиянием двух или нескольких, действующих одновременно факторов.

Обратимся для этой цели к уравнению обращения воздействий для числа  $M$  (2,60), которое с учетом уравнений (2,61) — (2,65) напомним для движения с постоянным весовым расходом в виде:

$$\begin{aligned} (M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = & 2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dF}{F} + \\ & + \frac{k+1}{k-1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dT_{0L}}{T_0} - (1 + kM^2) \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dT_{0Q}}{T_0} - \\ & - \zeta k M^2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dx}{D}. \end{aligned} \quad (2,60')$$

В правой части этого уравнения собраны выражения, отражающие отдельные воздействия — геометрическое, энергетические (механическое и тепловое) и работу трения. Каждое из последних представлено в виде произведения некоторого «коэффициента воздействия» в функции числа  $M$  на дифференциал переменной величины, характерной для данного воздействия. При изолированных воздействиях, т. е. в случае, когда в правой части уравнения  $(2,60')$  оставался лишь один член, уравнение это могло быть подвергнуто непосредственному интегрированию. В результате были получены конечные соотношения между числом  $M$  и переменной, характерной для данного воздействия<sup>1</sup>, с помощью основных уравнений термодинамики потока нетрудно было дополнить эти соотношения рядом аналогичных для температуры, давления и т. п. Как уже указывалось выше, типичным для всех задач, рассмотренных в предыдущей главе, являлось следующее соотношение между числом переменных и числом уравнений: первое из них на единицу больше второго. В такой системе уравнений (в отличие от алгебраически-замкнутой системы: число неизвестных равно числу уравнений; решение дает постоянные значения всех величин) принципиально всегда возможно выразить изменение одной переменной в зависимости от другой.

Не так обстоит дело при наличии нескольких, например двух, совместно действующих факторов. Для того, чтобы замкнуть в указанном выше смысле систему уравнений, в этом случае необходимо дополнить ее специальными соотношениями между воздействиями, при отсутствии которых задача допускает множество решений. Легко видеть, что число таких дополнительных соотношений должно быть на единицу меньше числа воздействий: одно в случае двух факторов (например, подвода тепла и совершения работы), два в случае трех и т. д.

В отличие от рассмотренных ранее уравнений, представляющих собой математическую запись основных законов термодинамики потоков, дополнительные соотношения между отдельными воздействиями не могут в общем случае быть составлены на основании одних только термодинамических соображений. Поэтому своим происхождением эти уравнения обязаны либо опыту, либо каким-либо теоретическим закономерностям, определяющим «кинетику» воздействий и их соотношение между собой. Один из таких примеров был вкратце рассмотрен в § 2,9, где была показана в общем виде неизбежность «кризиса» течения и невозможность непрерывного

<sup>1</sup> Плотности тока  $j$  для геометрического и расходного сошла или температуры торможения  $T_0$  для механического и теплового.

перехода через скорость звука в случае, когда отвод тепла связан с теплотой трения соотношением

$$\frac{dQ_a}{dQ_r} = - \frac{\alpha \cdot \Delta T_0}{A \tau w},$$

вытекающим из гидродинамической теории теплообмена<sup>1</sup>.

Естественно, что дополнительные соотношения, необходимые для создания замкнутой системы уравнений, необязательно должны в явном виде связывать между собой различные воздействия. С равным успехом можно дополнить систему основных уравнений любыми соотношениями между переменными, не вытекающими из уравнений термодинамики потока, например — в случае двух воздействий — опытным или теоретическим соотношением между скоростью и давлением, температурой и числом  $M$  и т. п. Число таких вариантов задания дополнительных уравнений, разумеется, весьма велико и подробное рассмотрение их выходит за рамки книги.

Мы ограничимся поэтому несколькими простыми примерами, в которых соотношение между воздействиями или переменными<sup>1</sup> будет выбрано, в сущности говоря, произвольно. Эти примеры позволят нам, во-первых, проиллюстрировать идею расчета и, во-вторых, выяснить дополнительно некоторые термодинамические особенности процесса. Один из таких примеров, связанный с распространенным в технических расчетах методом политропы, будет рассмотрен в § 2,19 и § 2,20.

Известным исключением явится только один пример, рассмотренный в конце этой главы, для которого при ряде упрощений уравнение связи между воздействиями может быть написано из общих соображений.

В тех случаях, когда уравнения, связывающие отдельные воздействия, затруднительно выразить в аналитической форме и вообще при решении сложных задач, уравнение (2,60') может быть проинтегрировано численно или графически последовательно для небольших интервалов изменения числа  $M$ .

## 2,18. ДВИЖЕНИЕ С ТРЕНИЕМ И ОТВОДОМ ТЕПЛА ИЛИ С СОВЕРШЕНИЕМ РАБОТЫ

В качестве первого примера рассмотрим следующую задачу. Идеальный газ движется по трубе постоянного сечения при неизменном секундном весовом расходе. Движение сопровождается трением и отводом тепла, причем последний осуществляется так, чтобы непрерывно компенсировать выделение тепла за счет работы трения.

<sup>1</sup> См. стр. 103.

Уравнение связи между воздействиями имеет, таким образом, следующий вид:

$$dQ_a = -dQ_r, \quad (2,167)$$

что означает также

$$dS = 0, \quad S = \text{const},$$

т. е. имеет место изэнтропическое изменение состояния движущегося по каналу газа.

Задавая работу трения в обычном для гидравлики виде, имеем:

$$\zeta \frac{w^2 dx}{2g D} = -\frac{c_p dT_{0Q}}{A}. \quad (2,168)$$

Воспользуемся выражением для температуры торможения

$$T_0 = T + A \frac{w^2}{2gc_p} = A \frac{w^2}{2gc_p} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)$$

и выразим из него величину  $\frac{w^2}{2g}$ :

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{c_p T_0}{A} \cdot \frac{\frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}. \quad (2,169)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (2,168) последнее примет вид

$$\zeta \frac{dx}{D} = -\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k-1}{2} M^2} \cdot \frac{dT_{0Q}}{T_0}. \quad (2,170)$$

Мы можем теперь переписать уравнение обращения воздействий для числа  $M$  для рассматриваемого случая в виде

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = -\frac{k+1}{2} M^2 \zeta \frac{dx}{D} \quad (2,171)$$

или

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = \frac{k+1}{k-1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dT_0}{T_0} \quad (2,172)$$

[что совпадает с уравнением (2,62)].

Мы пришли к уравнениям, в которых число  $M$  связано с одной переменной — температурой торможения (2,172), или приведенной длиной трубы (2,171).

Интегрирование этих уравнений дает закон изменения числа  $M$  и температуры торможения по длине трубы, а также связь между первыми двумя из этих величин ( $T_0$  и  $M$ ). После этого вывод остальных соотношений не представит труда. Из уравнения (2,172) после интегрирования его имеем:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}} \cdot \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}. \quad (2,173)$$

Полученное выражение в точности совпадает с формулой (2,96), полученной ранее. Для изменения температуры торможения в механическом сопле. Это совпадение не является, конечно, случайным. Оно основано на том, что, принимая закон отвода тепла в виде  $dQ_a = -dQ_r$ , мы, в сущности, свели задачу к движению под влиянием одного только механического воздействия — работы трения (входящей в обобщенное уравнение Бернулли). В связи с этим отпадает необходимость вычисления всех остальных соотношений между скоростью движения и параметрами процесса и числом  $M$ , поскольку все они были в свое время найдены для механического сопла и приведены, например, в табл. 2,5.

Характер изменения переменных показан на фиг. 2,8, причем для рассматриваемой задачи физический смысл имеет только дозвуковой участок этого графика (для ускоренного движения).

Обратимся теперь к распределению переменных по длине канала.

Из уравнения (2,171) после интегрирования его при  $\zeta = \text{const}$  получим:

$$\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} + \ln \frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{k+1}{2} \zeta \frac{x}{D} = \frac{(k+1)^2}{4k} \chi \approx \chi, \quad (2,174)$$

где  $\chi = \frac{2k}{k+1} \zeta \frac{x}{D}$  — приведенная длина, согласно формуле (2,141).

Исследование этого уравнения (которое мы предоставляем читателю) показывает, что величина  $\chi$  и, следовательно, пропорциональная ей длина трубы  $x$  имеет максимум при  $M=1$ . Последнее, впрочем, видно и непосредственно из уравнения (2,171). Физически это означает невозможность при заданной обстановке процесса  $\left( \frac{dQ_a}{dQ_r} = -1 \right)$  непрерыв-

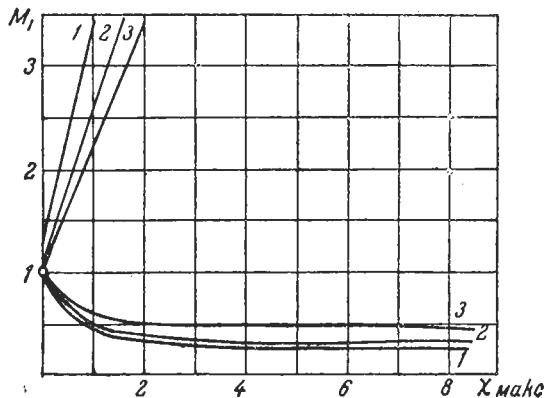


ного перехода через скорость звука<sup>1</sup>. В критическом сечении при  $M=1$  наступает предельное состояние („кризис“ течения). В связи с этим движение по каналу при непрерывном отводе тепла, в точности компенсирующем тепловыделение за счет трения, возможно в дозвуковой области только ускоренное, а в сверхзвуковой — только замедленное.

Зависимость максимальной величины приведенной длины трубы  $\chi_{\max}$  от числа  $M$  на входе  $M_1$  при  $M_2=1$ , согласно выражению:

$$\chi_{\max} = \frac{4k}{(k+1)^2} \left( \frac{1}{M_1^2} - 1 + \ln M_1^2 \right), \quad (2,175)$$

построена на графике на фиг. 2,36. Для сравнения на этом же графике нанесена кривая  $\chi_{\max} = \chi(M_1)$  для случая движения под влиянием одного только трения.



Фиг. 2,36. Зависимость максимальной длины трубы при движении с трением от числа  $M$  на входе.

1 — изолированное трение; 2 — отвод тепла, компенсирующий теплоту трения; 3 — подвод работы, компенсирующий работу трения.

Как видно из фиг. 2,36, отвод тепла по закону  $dQ_a = -dQ_n$  значительно увеличивает максимальную величину приведенной длины трубы сравнительно со случаем чистого трения.

Показательно, что в рассмотренной задаче, несмотря на изэнтропический характер процесса, сохраняются в силе все особенности, присущие движению под влиянием трения.

<sup>1</sup> Этот вывод был получен ранее из общих соображений. Соотношение (2,167) между отводом тепла и теплотой трения не удовлетворяет условию (2,75); см. стр. 107.

Качественно близкий результат нетрудно получить и во втором примере частичной компенсации работы трения<sup>1</sup> — подводом механической энергии по закону:

$$dL_T = -dL_r \quad (2,176)$$

или

$$\zeta \frac{w^2 dx}{2gD} = \frac{c_p dT_{0L}}{A} \quad (2,176')$$

Последнее уравнение отличается от (2,170) только знаком. В соответствии с этим имеем:

$$\zeta \frac{dx}{D} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k-1}{2} M^2} \cdot \frac{dT_{0L}}{T_0} \quad (2,177)$$

В этом случае из уравнения (2,60'), для случая совместного действия механической работы и работы трения, получим:

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = - (1 + kM^2) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \frac{dT_{0L}}{T_0} \quad (2,61)$$

т. е. уравнение, совпадающее со случаем движения под влиянием одного только теплового воздействия. В соответствии с этим все интегральные соотношения для рассматриваемой задачи будут тождественны с формулами, приведенными в табл. 2,6 для движения в тепловом сопле. Характер изменения переменных показан на фиг. 2,18, причем для процесса расширения сохраняет значение только дозвуковой участок течения.

Последнее замечание станет ясным, если обратиться к связи между приведенной длиной трубы и числом  $M$ . Перепишем для этой цели уравнение (2,60') для рассматриваемой задачи в виде:

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = - \frac{k-1}{2} M^2 (1 + kM^2) \zeta \frac{dx}{D} \quad (2,178)$$

После интегрирования, получим:

$$\frac{1}{k+1} \left( \frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} \right) + \ln \left[ \frac{M_1^2}{M_2^2} \cdot \frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2} \right] = \frac{k-1}{4k} \chi \quad (2,179)$$

<sup>1</sup> Полная компенсация трения потребовала бы непрерывного отвода тепла по закону  $dQ_a = -dQ_n$  и подвода механической энергии по закону  $dL_T = -dL_r$ . В этом случае изменение состояния газа происходило бы по законам изэнтропического энергетически изолированного процесса.

Нетрудно убедиться, что и в этом случае величина  $\chi$  — приведенная длина трубы — имеет максимум при  $M_2 = 1$ . Следовательно, и здесь непрерывный переход через скорость звука невозможен.

Последнее вполне естественно, поскольку, как было показано в § 2,9, непрерывный переход через критическую скорость при совместном действии механической работы и работы трения возможен при условии подвода работы в критическом сечении в количестве

$$dL_r^* = -k dL_r^*, \quad (2,74)$$

что противоречит условию (2,176).

Для критического истечения при  $M_2 = 1$  получим из (2,179) выражение максимальной приведенной длины трубы:

$$\chi_{\max} = \frac{4k}{k-1} \left\{ \frac{1}{k+1} \left( \frac{1}{M_1^2} - 1 \right) + \ln \left[ \frac{M_1^2(1+k)}{1+kM_1^2} \right] \right\}. \quad (2,180)$$

Соответствующая кривая показана на фиг. 2,36.

Таким образом, и в этой задаче сохраняются все специфические для движения с трением особенности процесса.

Возвратимся вновь к случаю одновременного влияния теплового воздействия и работы трения.

Изменим теперь дополнительное условие. Допустим, что в нашем распоряжении имеются экспериментальные данные по зависимости скорости движения от длины трубы. Имея в виду получить соотношение, не противоречащее непрерывному переходу через скорость звука, т. е. условию:

$$\frac{dQ_a^*}{dQ_r^*} = -\frac{k}{k-1}, \quad (2,75)$$

примем для некоторого участка вблизи критического сечения линейную зависимость в полулогарифмических координатах скорости движение от приведенной длины<sup>1</sup>:

$$\frac{d \ln w}{d\chi} = \alpha = \text{const}. \quad (2,181)$$

<sup>1</sup> Очевидно, положительному значению  $\alpha > 0$  отвечает ускоренное движение и непрерывный переход из дозвуковой области течения в сверхзвуковую, тогда как  $\alpha < 0$  означает замедленное движение. Выбор определенного значения  $\alpha$  конкретизирует процесс. Этот случай движения, приводящий к простой зависимости скорости от длины:  $\frac{w}{w_1} = e^{\alpha\chi}$  („экспоненциальное течение“), был рассмотрен в одной из работ автора.

Для того, чтобы установить соответствие выражения (2,181) и условия (2,75), обратимся к уравнению (2,55) в виде:

$$\begin{aligned} (M^2 - 1) \frac{d\omega}{\omega} &= \frac{g}{Aa^2} [(k-1)dQ_a + kdQ_r] = \\ &= \frac{g}{Aa^2} \left[ (k-1)dQ_a + Ak \frac{\omega^2}{2g} \cdot \frac{dx}{D} \right] \end{aligned}$$

или

$$(M^2 - 1) d \ln \omega = \frac{k+1}{4} M^2 \left( 1 + \frac{k-1}{k} \frac{dQ_a}{dQ_r} \right) d\lambda.$$

Отсюда

$$\frac{dQ_a}{dQ_r} = - \left( 1 - \frac{4}{k-1} \cdot \frac{M^2 - 1}{M^2} \cdot \frac{d \ln \omega}{d\lambda} \right) \frac{k}{k-1}. \quad (2,182)$$

В критическом сечении при  $M=1$  и любом конечном значении производной  $\frac{d \ln \omega}{d\lambda}$  удовлетворяется условие (2,75).

В частности оно соблюдается при выбранном для простоты случае  $\frac{d \ln \omega}{d\lambda} = a = \text{const}$ , что, разумеется, всегда возможно с известным приближением для узкого интервала изменения скорости.

В более общем виде последнее уравнение можно написать в следующей форме:

$$\frac{dQ_a}{dQ_r} = - [1 - (M^2 - 1)\varphi(M)] \frac{k}{k-1},$$

где функция  $\varphi(M)$  конечна при  $M=1$ . При таком виде связи между отводом тепла и теплотой трения соотношение (2,75) всегда будет удовлетворено при  $M=1$  так же, как и при  $a = \text{const}$ .

В этом последнем случае — при  $a = \text{const}$  — нетрудно довести задачу до подробных расчетов соотношений между всеми переменными. Характер процесса (например, при  $a > 0$ ) будет напоминать движение в тепловом сопле с той только разницей, что критическое сечение ( $M=1$ ) не будет совпадать с максимумом энтропии ( $dS=0$ ) и с сечением, в котором меняется знак теплового воздействия ( $dT_0=0$ ).

Так, например, при  $a=1$  и  $k=1,4$  переход от подвода тепла к отводу его будет происходить при  $M=0,42$ ; максимум энтропии ( $dQ_a = -dQ_r$ ) установится при  $M=0,5$ , вместо  $M=1$  для обоих характерных сечений ( $dT_0=0$  и  $dS=0$ ) в случае теплового сопла без трения<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Приведенные значения отвечают предположению  $a=1 = \text{const}$  для всего интервала изменения числа  $M$ . В этом случае сместится в область меньших чисел  $M$  и максимум температуры:  $dT=0$  при  $M \approx 0,36$  вместо  $M = \frac{1}{V k} \approx 0,71$  для теплового сопла.

Это обстоятельство имеет принципиальное значение, так как показывает, в частности, усиление «теплового кризиса» под влиянием трения.

Аналогичным путем, используя уравнения закона обращения воздействий, нетрудно прийти к количественным соотношениям и при любом другом виде задания дополнительного уравнения.

Остановимся в заключение вкратце на случае совместного действия трех факторов: геометрического, теплового и работы трения. Примем, что два последние связаны, как и ранее, уравнением

$$dQ_a = -dQ_r \quad (2,167)$$

(отвод тепла непрерывно компенсирует выделение тепла за счет работы трения).

В таком виде задача представляет известный интерес, как одна из применяемых иногда в практических расчетах схем истечения газа из сопла Лавала.

В рассматриваемом случае уравнению (2,60') с учетом (2,167) и (2,170), можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} (M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} &= 2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dF}{F} + \\ &+ \frac{k+1}{k-1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dT_0}{T_0}. \end{aligned} \quad (2,183)$$

Уравнение (2,183) допускает непосредственное интегрирование, в результате которого получим:

$$\left( \frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}} \cdot \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} = \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}} \cdot \frac{T_{02}}{T_{01}} \quad (2,184)$$

(при  $F_2 = F_1$  уравнение (2,184), естественно, переходит в (2,173)).

Изменение температуры торможения связано с приведенной длиной выражением (2,170):

$$\frac{dT_0}{T_0} = - \frac{\frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \zeta \frac{dx}{D}. \quad (2,185)$$

Помимо этого, в конкретном расчете должна быть задана связь между сечением трубы и ее длиной:  $F = F(x)$  — определяющая профиль сопла. В результате полученная система

уравнений принципиально вполне достаточно для отыскания закона изменения числа  $M$  и всех остальных переменных по длине трубы. В этом случае, как и следовало из общих соображений, понадобилось привлечение двух дополнительных уравнений:  $F = F(x)$  и  $dS = 0$  для конкретизации обстановки.

## 2-19. ПОЛИТРОПИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ БЕЗ ТРЕНИЯ

Во многих технических задачах весьма затруднительно, а иногда и невозможно, составление дополнительного уравнения, связывающего между собой различные воздействия или параметры процесса. Такое положение имеет место при современном уровне знаний, например, при расчете истечения продуктов сгорания, сопровождающегося рядом малоизученных явлений<sup>1</sup>, или при расчете движения газа по конической камере сгорания и т. п.

В таких случаях, при отсутствии достаточных экспериментальных данных (которые естественно было бы положить в основу расчета), стремление к созданию возможно более простого метода расчета побуждает зачастую в обход трудностей прибегать к предположению о политропическом характере изменения состояния.

Это формальное, в сущности, допущение сводится, как известно, к принятию уравнения процесса в виде:

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const}, \quad (2,13)$$

где  $n = \text{const}$  — показатель политропы.

Особо следует подчеркнуть, что такое предположение является, по существу своему, совершенно произвольным<sup>2</sup> и по-

<sup>1</sup> Речь идет о термической диссоциации и рекомбинации молекул и радикалов, догорания газов, замедленном возбуждении более инертных (колебательных) степеней свободы, наконец, теплоотдаче и трении.

<sup>2</sup> Напомним, что уравнение политропы получается при нанесении зависимости одного параметра состояния от другого (например, давления от плотности) в логарифмических координатах для участков, отвечающих линейной зависимости между переменными. Действительно, уравнению прямой (в логарифмических координатах):

$$\lg \frac{p_2}{p_1} = n \lg \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

соответствует закон  $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n$  или  $\frac{p}{\rho^n} = \text{const}$ , где  $n$  — угловой коэффициент прямой. Тем самым применение этого уравнения допустимо для ограниченных участков процесса, поддающихся линейной аппроксимации (в логарифмических координатах).

этому в ряде случаев может оказаться в противоречии с действительными законами, специфичными для рассматриваемого явления. Примерами могут служить разобранные выше задачи о движении газов в тепловом сопле, или движении с трением, в которых величина  $n$  оказалась переменной, а допущение  $n = \text{const}$  привело бы к отказу от всякого изменения состояния.

Поэтому применение метода политропы может оказаться не только бесполезным, но и вредным, если только опыт или теоретические соображения не показывают, что ошибки, связанные с ним, пренебрежимо малы. Помимо этого, принятие  $n = \text{const}$  для расчета конечных соотношений (например, в процессе истечения), отнюдь не определяет однозначно действительные энергетические соотношения по ходу процесса.

Этим весьма важным замечаниям не противоречит, разумеется, то обстоятельство, что, как было показано выше, в некоторых случаях, для которых предположение  $n = \text{const}$  недопустимо, использование представлений об элементарном политропическом процессе (при переменном показателе политропы) оказалось весьма полезным, так как позволило перебросить мостик между термодинамическими и газодинамическими характеристиками процесса и дать простое толкование ряду его особенностей [см., например, формулы (2,67), (2,68) и др.]. И действительно введение переменного показателя  $n$  по существу не имеет ничего общего с методом политропы ( $n = \text{const}$ ).

Вместе с тем широкое применение в настоящее время метода политропы ( $n = \text{const}$ ) в технических расчетах делает целесообразным краткое напоминание основных свойств его и тех физических допущений, на которых он основывается.

Кроме того, уместно будет указать наиболее простой путь расчетного применения этого метода для газовых течений, поскольку неизбежное в будущем вытеснение его физическими методами расчета продлится, повидимому, еще значительное время, необходимое для существенного развития и углубления знаний по теории рабочего процесса тепловых машин.

Напомним прежде всего вывод уравнения политропы для движения без трения идеального газа и проанализируем физическое содержание допущений, положенных в его основу.

Для этой цели выпишем уравнение первого начала термодинамики, применительно к системе координат, движущейся вместе с центром тяжести элемента газа:

$$dQ_a = c_v dT + A p dV \quad (2,7)$$

или

$$dQ_a = c_p dT - A V dp \quad (2,7')$$

Представим величину  $dQ_a$  количество, подводимого к газу извне тепла, в виде:

$$dQ_a = c_n dT,$$

где  $c_n$  — теплоемкость процесса, определяемая равенством:

$$c_n = \frac{dQ_a}{dT}, \quad (2,186)$$

т. е. отношение элементарного количества тепла к дифференциалу температуры.

Перепишем теперь уравнения (2,7')—(2,7) в виде

$$(c_n - c_p) dT = -AVdp$$

и

$$(c_n - c_v) dT = ApdV$$

и разделим их одно на другое, используя равенство:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}.$$

В результате получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{c_n - c_p}{c_n - c_v} = \frac{dp}{p}.$$

Обозначим символом  $n$  отношение:

$$n = \frac{c_n - c_p}{c_n - c_v}, \quad (2,187)$$

откуда следует также:

$$c_n = c_v \frac{n-k}{n-1} = c_p \frac{n-k}{k(n-1)} \quad (2,188)$$

и примем, что величина  $n = \text{const}$  для всего процесса. В этом предположении приведенное выше уравнение  $\frac{dp}{p} = n \frac{dV}{V}$  легко интегрируется и дает:

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const} \quad (2,13)$$

или, с учетом уравнения состояния,

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (2,14)$$



Мы пришли к хорошо известным политропическим пропорциям, определяющим связь между изменениями параметров состояния. Таким образом, в основе метода политроны лежит допущение о постоянстве величины теплоемкости процесса:  $c_n = \frac{dQ_n}{dT} = \text{const}$  (или, что то же самое, о постоянстве отношения любых двух членов в уравнении первого начала термодинамики:  $dQ_n = dI - AVdp$ ), не вытекающее, вообще говоря, из каких-либо рациональных положений.

Условие  $c_n = \text{const}$  играет, таким образом, роль дополнительного соотношения, необходимого для приведения системы уравнений к замкнутому виду в случае нескольких воздействий. При действии одного только фактора (т. е. во всех случаях изолированных воздействий) такое допущение является недопустимым, так как оно лишает систему уравнений единственной степени свободы.

Напомним также элементарные сведения о политропических процессах, необходимые для того, чтобы иметь возможность судить с суммарным энергетическим характере процесса по одной только численной величине показателя  $n$ .

На фиг. 2,37 в диаграммах  $pV$  и  $TS$  изображен ряд политроп для расширения газа. Как известно, условие  $n = \text{const}$  содержит в себе ряд частных случаев простейших (изопараметрических) процессов изменения состояния, при которых остается неизменным один из параметров состояния, а именно<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} n = 0; p = \text{const} & \text{— изобара,} \\ n = 1; T = \text{const} & \text{— изотерма,} \\ n = k; S = \text{const} & \text{— изоэнтропа,} \\ n = \infty; \rho = \text{const} & \text{— изохора.} \end{aligned}$$

Поэтому задание численного значения показателя политропы  $n$ , хотя и не указывает истинного механизма процесса, однако определяет как суммарные энергетические соотношения, имеющие место в нем, так и характер изменения параметров состояния. Эти свойства политропы наглядно иллюстрируются табл. 2,11 для процесса расширения газа в интервале положительных значений показателя политропы  $0 \leq n \leq \infty$ .

<sup>1</sup> К политропическим процессам можно свести также частный случай движения при постоянном числе  $M$ :  $M = \text{const}$ . В этом случае (для движения без трения) показатель политропы равен

$$n = \frac{kM^2}{2 + kM^2} = \text{const}$$

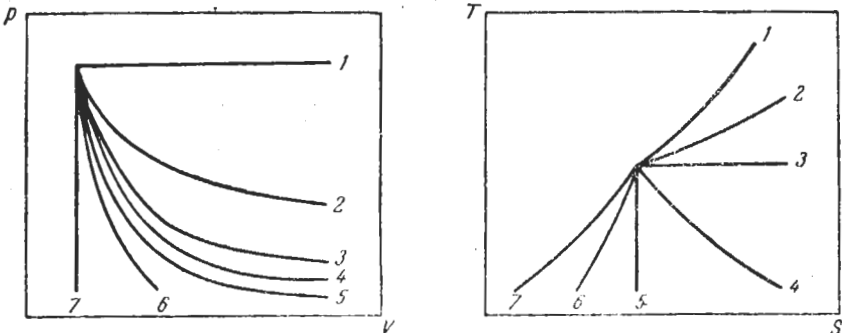
(например, при  $k = 1,4$  и  $M = 1 = \text{const}$ ;  $n \approx 0,41$ ).

ТАБЛИЦА 2,11  
 Политропическое расширение  
 ( $n = \text{const}$ )

| № кривых на фиг. 2,37 | Показатель политропы | Характер изменения величин |      |      |         |                          |
|-----------------------|----------------------|----------------------------|------|------|---------|--------------------------|
|                       |                      | $dQ_a$                     | $dp$ | $dT$ | $d\phi$ | $\frac{d\omega}{dT} - 0$ |
| 1                     | 0                    | $>0$                       | 0    | $>0$ | $<0$    | 0                        |
| 2                     | $0 < n < 1$          | $>0$                       | $<0$ | $>0$ | $<0$    | $<0$                     |
| 3                     | 1                    | $>0$                       | $<0$ | 0    | $<0$    | $<0$                     |
| 4                     | $1 < n < k$          | $>0$                       | $<0$ | $<0$ | $<0$    | $<0$                     |
| 5                     | $k$                  | 0                          | $<0$ | $<0$ | $<0$    | $<0$                     |
| 6                     | $k < n < \infty$     | $<0$                       | $<0$ | $<0$ | $<0$    | $<0$                     |
| 7                     | $\infty$             | $<0$                       | $<0$ | $<0$ | 0       | $<0$                     |

Примечание. Для сжатия все знаки следует изменить на обратные.

Например, если  $k=1,4$ , а  $n=1,2$ , то это означает, что процесс расширения происходит с подводом тепла ( $dQ_a > 0$ ) и ростом температуры ( $dT > 0$ ). Существенно, что эти соотношения сохраняются как при отсутствии технической работы



Фиг. 2,37. Политропическое расширение газа в диаграммах  $pV$  и  $TS$  (значения  $n$  см. в табл. 2,11).

( $dL_T = 0$ ), так и при наличии ее ( $dL_T \neq 0$ ), поскольку величина  $dL_T$  в явном виде не входит в уравнение первого начала для неподвижного газа (2,7). Однако, действительный характер изменения скорости движения при политропическом процессе существенным образом зависит от наличия либо отсутствия технической работы.

В первом случае, т. е. при  $dL_T = 0$ , нетрудно прийти к простому обобщению всех зависимостей, выведенных ранее для изоэнтропического энергетически изолированного процесса путем простой замены показателя изоэнтропы  $k$  показателем

политропы  $n$ . Действительно, уравнение энергии (2,18) для неподвижной системы координат при  $dL_T=0$ , имеет вид:

$$dQ_a = dI + Ad \frac{w^2}{2g}.$$

С учетом (2,186) можно придать этому уравнению следующую форму:

$$c_n dT = c_p dT + Ad \frac{w^2}{2g}$$

или

$$dT + Ad \frac{w^2}{2g(c_p - c_n)} = dT_{n0} = 0,$$

где для политропического процесса

$$T_{n0} = T + A \frac{w^2}{2g(c_p - c_n)}. \quad (2,189)$$

Величину  $T_{n0}$  естественно назвать температурой политропического торможения (при  $n=k$  и  $T_{n0}=T_0$ , мы приходим к обычной температуре адиабатического торможения).

Полученное выражение может быть далее упрощено, если заметить, что разность теплоемкостей  $c_p$  и  $c_n$ , согласно формуле (2,188), равна:

$$c_p - c_n = c_p \left[ 1 - \frac{n-k}{k(n-1)} \right] = \frac{ARk}{k-1} \cdot \frac{n(k-1)}{k(n-1)},$$

или, после сокращений<sup>1</sup>:

$$c_p - c_n = AR \frac{n}{n-1}. \quad (2,190)$$

Подставляя значение разности  $c_p - c_n$  в выражение для  $T_{n0}$ , получим:

$$T_{n0} = T \left( 1 + \frac{n-1}{2} M_n^2 \right) = \frac{T}{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_n^2}, \quad (2,191)$$

где  $M_n = \sqrt{\frac{w}{n \frac{p}{\rho}}} = \frac{w}{u}$  — „политропическое число  $M$ “,  $\lambda_n = \sqrt{\frac{w}{\left(n \frac{p}{\rho}\right)_{np}}} = \frac{w}{u_{np}}$  — „политропический коэффициент скоро-

<sup>1</sup> В частном случае изэнтропического процесса при  $n=k$

$$c_n = \frac{dQ_a}{dT} = 0 \text{ и } c_p = AR \frac{k}{k-1}. \quad (2,4)$$

сти", равный отношению скорости движения к предельному значению величины  $u_n = \sqrt{n \frac{p}{\rho}}$  (характеристической скорости политропического процесса), соответствующему равенству  $w = u_n$ .

Как и обычно, введенные, таким образом, величины числа  $M$  и коэффициента скорости связаны простыми соотношениями:

$$M_n^2 = \frac{\frac{2}{n+1} \lambda_n^2}{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_n^2} \quad (2,192)$$

или

$$\lambda_n^2 = \frac{\frac{n+1}{2} M_n^2}{1 + \frac{n-1}{2} M_n^2}, \quad (2,192')$$

представляющими модификацию приведенных ранее формул (2,47)—(2,48) для перехода от числа  $M$  к  $\lambda$ —и обратно.

Таким образом, заменяя последовательно во всех выражениях показатель  $k$  величиной  $n$ , т. е. вводя вместо скорости звука  $a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kgRT}$  — величину  $u_n = \sqrt{n \frac{p}{\rho}} = \sqrt{ngRT}$ , вместо числа  $M = \frac{w}{a}$  — величину  $M_n = \frac{w}{u_n}$ , вместо коэффициента скорости  $\lambda = \frac{w}{a^*}$  — величину  $\lambda_n = \frac{w}{u_{np}}$ , где предельная величина характеристической скорости равна:

$$u_{np} = \sqrt{\frac{2n}{n+1} gRT_{n_0}}$$

и т. д., мы приходим к простому обобщению всех формул изоэнтропических течений.

Для рассматриваемого процесса, соответствующего, например, движению газа в геометрическом сопле с подводом или отводом тепла при отсутствии механической работы ( $dL_T = 0$ ) и трения ( $dL_r = 0$ ) можно, следовательно, написать ряд соотношений, аналогичных формулам, приведенным в табл. 2,4:

для температуры:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{n-1}{2} M_{n1}^2}{1 + \frac{n-1}{2} M_{n2}^2} = \frac{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n2}^2}{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n1}^2}, \quad (2,193)$$

для давления:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{1 + \frac{n-1}{2} M_{n1}^2}{1 + \frac{n-1}{2} M_{n2}^2} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \left( \frac{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n2}^2}{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n1}^2} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad (2,194)$$

для плотности:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{1 + \frac{n-1}{2} M_{n1}^2}{1 + \frac{n-1}{2} M_{n2}^2} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left( \frac{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n2}^2}{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n1}^2} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (2,195)$$

для скорости:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{M_{n2}}{M_{n1}} \sqrt{\frac{1 + \frac{n-1}{2} M_{n1}^2}{1 + \frac{n-1}{2} M_{n2}^2}} = \frac{\lambda_{n2}}{\lambda_{n1}} \quad (2,196)$$

и для плотности тока:

$$\begin{aligned} \frac{j_2}{j_1} &= \frac{M_{n2}}{M_{n1}} \left( \frac{1 + \frac{n-1}{2} M_{n1}^2}{1 + \frac{n-1}{2} M_{n2}^2} \right)^{\frac{n+1}{2(n-1)}} = \\ &= \frac{\lambda_{n2}}{\lambda_{n1}} \left( \frac{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n2}^2}{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n1}^2} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned} \quad (2,197)$$

При этом параметры политропически заторможенного газа<sup>1</sup> остаются неизменными:

$$\frac{T_{n02}}{T_{n01}} = \frac{p_{n02}}{p_{n01}} = \frac{\rho_{n02}}{\rho_{n01}} = 1.$$

<sup>1</sup> По аналогии с температурой политропического торможения, естественно ввести также давление и плотность политропически заторможенного газа, согласно равенствам:

$$p_{n0} = p \left( 1 + \frac{n-1}{2} M_n^2 \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

и

$$\rho_{n0} = \rho \left( 1 + \frac{n-1}{2} M_n^2 \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Существенно, что в этом случае максимум плотности тока попрежнему будет в минимальном сечении геометрического сопла при  $M_n = 1$ , а не в критическом сечении сопла при  $M = 1$ .

Без изменения останутся и все остальные формулы, полученные выше для геометрического и расходного сопел (при последовательной замене символов:  $k \rightarrow n$ ,  $M \rightarrow M_n$  и т. д.). Если же  $dL_T \neq 0$ , т. е. имеет место обмен технической работой, то для описания политропического процесса, соответствующего, например, движению газа в механическом сопле с подводом или отводом тепла, сохраняются одни только пропорции, связывающие величины  $p$ ,  $\rho$  и  $T$ , но не уравнение (2,191) постоянства температуры политропического торможения. Наоборот, в этом случае, в полной аналогии с расчетом механического сопла, будем иметь (согласно табл. 2,5):

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{M_{n1}}{M_{n2}} \right)^{\frac{2n}{n+1}}; \quad (2,198)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{M_{n1}}{M_{n2}} \right)^{\frac{2(n-1)}{n+1}}; \quad (2,199)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_1}{w_2} = \left( \frac{M_{n1}}{M_{n2}} \right)^{\frac{2}{n+1}}; \quad (2,200)$$

$$\frac{T_{n02}}{T_{n01}} = \left( \frac{M_{n1}}{M_{n2}} \right)^{\frac{2(n-1)}{n+1}} \cdot \frac{1 + \frac{n-1}{2} M_{n2}^2}{1 + \frac{n-1}{2} M_{n1}^2} \quad (2,201)$$

и т. д. В частности, для расчета работы 1 кг газа будем иметь:

$$L_{1-2} = \frac{ARn}{n-1} (T_{n01} - T_{n02}). \quad (2,202)$$

Таким образом, и здесь последовательная замена  $k$  на  $n$  дает возможность сохранить для политропического процесса все формулы, полученные ранее для изэнтропы. Именно эта простота формул и является основным достоинством метода политропы. В этом смысле введение чисел  $M_n$ ,  $\lambda_n$ , параметров  $T_{n0}$  и т. д., является логическим завершением этого приема, устраняющим из всех расчетных формул величину показателя изэнтропы  $k$ .

Иначе говоря, предположение о постоянстве величины  $n$  приводит формально как бы к переходу к фиктивному рабочему телу, для которого  $k=n$ . То обстоятельство, что при такой замене действительное число  $k$ , являющееся характеристикой физических свойств газа<sup>1</sup>, исчезает из всех уравнений, делает метод политропы особо удобным для расчета. Следует, однако, не упускать из виду всего сказанного ранее о формальности предположения  $n = \text{const}$  (т. е.  $c_n = \frac{dQ_a}{dT} = \text{const}$ ), придающего всем соотношениям в сущности эмпирический характер. В связи с этим использование уравнения политропы при  $n = \text{const}$  допустимо, главным образом, в узких интервалах изменения состояния и по мере развития знаний о механизме процесса должно уступить место более обоснованным методам расчета.

## 2,20. ПОЛИТРОПИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ С ТРЕНИЕМ

В предыдущем разделе этой главы мы рассмотрели применение метода политропы к движению без трения. Для случая двух воздействий (например, при движении газа с подводом тепла в геометрическом сопле) дополнительное условие (2,186):  $c_n = \frac{dQ_a}{dQ_n} = \text{const}$  было достаточным для расчета изменения всех переменных.

При движении с трением в связи с действием дополнительного фактора — работы трения — необходимо, очевидно, также добавочное соотношение между воздействиями или параметрами процесса.

Одним из возможных вариантов введения такого дополнительного условия является дальнейшее развитие метода политропы.

Рассмотрим в связи с этим особенности применения этого метода к движению с трением, имея в виду, что к нему еще в большей мере относятся все сделанные ранее замечания о формальном характере схематизации действительного процесса в виде политропического<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Как известно, показатель  $k$  зависит от атомности газа: для одноатомного газа  $k = \frac{5}{3}$ , для двухатомного газа  $k = \frac{7}{5}$  и т. д.

<sup>2</sup> В этом разделе условимся считать всегда  $n > 0$  (т. е.  $\frac{dp}{d\varphi} > 0$ ) и не рассматривать сравнительно редкого случая процесса с отрицательным показателем политропы.

Для движения с трением уравнение (2,8) первого начала, написанное в системе координат, движущейся вместе с центром тяжести элемента газа, имеет следующий вид:

$$dQ = dQ_a + dQ_r = dl - AVdp$$

или

$$dQ = dQ_a + dQ_r = dU + ApdV.$$

Если представить полное элементарное количество теплоты  $dQ$ , т. е. сумму величин  $dQ_a$  и  $dQ_r$ , как и для процесса без трения, в виде произведения теплоемкости процесса  $c$  на дифференциал температуры  $dT$ , т. е. положить:

$$dQ = cdT,$$

то для идеального газа, взамен написанных выше уравнений, можно написать попрежнему:

$$(c - c_p) dT = AVdp$$

и

$$(c - c_v) dT = ApdV.$$

Отсюда при постоянстве суммарной теплоемкости процесса

$$c = \frac{dQ}{dT} = \text{const}, \quad (2,186)$$

и постоянстве величины  $n_r$  — суммарного показателя политропы<sup>1</sup>, равного:

$$n_r = \frac{c - c_p}{c - c_v} = \text{const}, \quad (2,203)$$

после деления одного из написанных равенств на другое и интегрирования, получим, как и прежде:

$$\frac{p}{(\rho^{n_r})} = \text{const},$$

т. е. обычное уравнение политропы (2,13).

<sup>1</sup> Индекс  $r$ , как и везде, указывает, что речь идет о движении с трением. Для определения теплоемкости  $c$ , как и раньше, имеем:

$$c = c_v \frac{n_r - k}{n_r - 1} = c_p \frac{n_r - k}{k(n_r - 1)}. \quad (2,203')$$

Предположение  $n_r = \text{const}$  означает также  $c = \text{const}$  и обратно.



В этом предположении ( $n_r = \text{const}$ ) давление, температура и плотность газа, как и для движения без трения, по-прежнему связаны между собой политропическими пропорциями:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{n_r} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n_r} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n_r}{n_r-1}}. \quad (2,204)$$

Таким образом, и здесь — в движении с трением — метод политропы основывается на произвольном, в сущности, предположении о постоянстве суммарной теплоемкости процесса:

$$c = \frac{dQ}{dT} = \text{const}.$$

Этого предположения, однако, еще недостаточно для полного расчета процесса, например, для установления связи между параметрами состояния и скоростью движения. Для этой цели необходимо принять отдельные допущения о величине подводимого извне тепла и теплоты трения. Последнее позволит также выяснить подробнее характер влияния трения.

Следуя основному для политропических процессов предположению о постоянстве теплоемкости, примем отдельно:

$$dQ_a = c_n dT$$

для тепла, подводимого извне, где  $c_n$  — политропическая теплоемкость для фиктивного движения без трения и

$$dQ_r = c_r dT$$

для теплоты трения, где  $c_r$  — величина, которую назовем „теплоемкостью трения“.

Очевидно, что суммарная теплоемкость процесса  $c$  будет при этом равна сумме величин  $c_n$  и  $c_r$ :

$$c = c_n + c_r, \quad (2,205)$$

а коэффициент политропы  $n_r$ , входящий в написанные выше пропорции, может быть выражен в виде:

$$n_r = \frac{c_p - c_n - c_r}{c_v - c_n - c_r}. \quad (2,206)$$

Воспользуемся теперь выражениями:

$$c_p - c_n = AR \frac{n}{n-1}$$

$$\text{и} \quad c_v - c_n = AR \frac{1}{n-1},$$

представляющими собой, как было показано выше, простое обобщение формул (2,4)—(2,5):

$$c_p = AR \frac{k}{k-1}$$

и

$$c_v = AR \frac{1}{k-1}.$$

После простых преобразований получим равенства, связывающие показатель „реальной“ политропы  $n_r$  (для движения с трением) с показателем „идеальной“ (для движения без трения) политропы  $n$ , отвечающей одинаковому изменению температуры:

$$n_r = \frac{n - \frac{n-1}{AR} c_r}{1 - \frac{n-1}{AR} c_r} \quad (2,207)$$

или

$$n = \frac{n_r + \frac{n_r-1}{AR} c_r}{1 + \frac{n_r-1}{AR} c_r}, \quad (2,208)$$

где, как и ранее:

$$n = \frac{c_p - c_n}{c_v - c_n}. \quad (2,187)$$

Заметим, что второе слагаемое в числителе и знаменателе формулы (2,208) всегда отрицательно. Действительно, если значение суммарного показателя политропы лежит в пределах между 0 и 1, т. е.:

$$0 < n_r < 1,$$

то разность:

$$n_r - 1 < 0.$$

В этом случае, однако, процесс расширения идет с повышением температуры ( $dT > 0$ ), а так как теплота трения всегда положительна ( $dQ_r > 0$ ), то теплоемкость трения:

$$c_r = \frac{dQ_r}{dT} > 0.$$

Произведение

$$\frac{n_r - 1}{AR} c_r$$

будет при этом отрицательным.

Возвращаясь к формуле (2,208), мы видим, что при  $0 < n_r < 1$  в числителе и знаменателе ее вычитается одинаковая величина, в связи с чем правильная дробь убывает, стремясь к нулю.

Поэтому для этой области значений суммарного показателя политропы справедливо неравенство:

$$n_r > n.$$

Для процесса расширения в области  $1 < n_r < \infty$  разность  $n_r - 1 > 0$ , однако, теплоемкость трения будет отрицательна:  $c_r = \frac{dQ_r}{dT} < 0$ , так как  $dQ_r > 0$ , но  $dT < 0$  для расширения газа при значении  $n_r > 1$ . Таким образом, и здесь:

$$\frac{n_r - 1}{AR} c_r < 0.$$

В этой области значений показателя  $n_r$  ( $1 < n_r < \infty$ ) в формуле (2,208) вычитается из числителя и знаменателя неправильной дроби одинаковое число  $\frac{n_r - 1}{AR} c_r$ , в связи с чем величина  $n_r$  растет.

Поэтому здесь справедливо неравенство

$$n > n_r,$$

обратное предыдущему. Следовательно для политропических процессов расширения при движении с трением величины  $n_r$  и  $n$  связаны между собой соотношениями:

а) при  $0 < n_r < 1$  показатель реальной политропы больше показателя идеальной:  $n_r > n$ ;

б) при  $n_r = 1$ , т. е. при изотермическом течении одновременно и  $n = 1$ ;

в) при  $1 < n_r < \infty$  показатель реальной политропы меньше показателя идеальной:  $n_r < n$ .

Обратные соотношения:

$$n_r < n \text{ при } 0 < n_r < 1$$

и

$$n_r > n \text{ при } 1 < n_r < \infty$$

будут отвечать процессам сжатия, так как знак теплоемкости трения  $c_r$  в формуле (2,208) изменится на обратный.

Рассмотрим некоторые частные случаи политропических процессов, вытекающие из формул (2,207) — (2,208).

1. При  $c_r = 0$  и  $c_n = 0$ .

Этот случай отвечает изоэнтропическому течению без теплообмена и трения. Показатель политропы здесь равен показателю изоэнтропы:

$$n_r = n = k.$$

Тождественный результат:  $n_r = k$  может иметь место при непрерывной „компенсации“ теплоты трения отводом тепла по закону:  $dQ_a = -dQ_r$  и  $dQ = 0$ .

В этом случае, рассмотренном вкратце в предыдущем разделе, несмотря на то, что связь между давлением, температурой и плотностью имеет вид изоэнтропы, характер движения газа не тождественен случаю изоэнтропы, когда  $dQ = dQ_a = dQ_r = 0$ .

Действительно, при  $dQ_a = -dQ_r \neq 0$ , показатель идеальной политропы  $n$ , входящий во все выражения, связывающие температуру газа и скорость его движения (см. ниже), будет равен

$$n = \frac{k + \frac{k-1}{AR} c_r}{1 + \frac{k-1}{AR} c_r} = \frac{k + \frac{c_r}{c_v}}{1 + \frac{c_r}{c_v}} > n_r = k,$$

как и всегда для расширения в области  $n_r > 1$ , так как  $c_r < 0$  ( $dQ_r > 0$ ;  $dT < 0$ ). Поэтому, при отсутствии внешней работы, будет взамен постоянства температуры адиабатического торможения:

$$T_0 = T \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)$$

соблюдаться условие:

$$T_{n0} = T \left( 1 + \frac{n-1}{2} M_n^2 \right) = \text{const.} \quad (2,191)$$

Физически это отличие вполне понятно, так как трение эквивалентно выделению тепла и совершению работы, а принятый закон отвода тепла  $dQ_a = -dQ_r$  компенсирует только теплоту трения.

2. При  $c_r = 0$ , но  $c_n \neq 0$ , имеем:

$$n_r = \frac{c_p - c_n}{c_v - c_n} = n.$$

Здесь происходит движение без трения в политропическом процессе изменения состояния, рассмотренное подробно в предыдущем разделе.

3. При  $c_r \neq 0$ , но  $c_n = 0$ , имеем:

$$n_r = \frac{c_p - c_r}{c_n - c_r} = k_r < k.$$

В этом случае речь идет о необратимом адиабатическом процессе (без теплообмена, но с трением). Подобные течения рассматриваются часто в теории паровых турбин<sup>1</sup>.

В этом процессе наиболее четко видны потери, связанные с наличием трения и происходящие при преобразовании потенциальной энергии в кинетическую.

Так, в предположении об отсутствии внешней (технической) работы:  $dL_T = 0$ , из уравнения энергии, написанного для неподвижной системы координат, как и в случае движения без трения, следует:

$$T_0 = \text{const},$$

т. е.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (2,84)$$

<sup>1</sup> Несмотря на внешние отличия в формулах, применяемый в расчетах турбин прием легко сводится к политропе. Действительно, обычно вводят допущение о пропорциональности теплоты трения и изменения энтальпии:  $dQ_r = -\xi dI$  и принимают  $\xi = \text{const}$ .

В наших обозначениях это отвечает равенству:

$$c_r = -\xi c_p = \text{const}$$

или

$$k_r = k \frac{1 + \xi}{1 + k\xi} < k.$$

Как было показано выше, предположение  $k_r = \text{const}$  допустимо только при наличии хотя бы двух воздействий (например, при движении с трением в сопле Лаваля или при движении в цилиндрической трубе с подводом тепла и трением). При изолированном влиянии одного только трения в цилиндрической трубе величина  $k_r$ , согласно формуле (2,68), равна

$$k_r = 1 + (k-1) M^2,$$

т. е.

$$k_r \neq \text{const}.$$

В эти равенства входит показатель политропы без трения  $n=k$  (для адиабатического процесса), тогда как при переходе к давлению и плотности и имеем:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k_r}{k_r-1}}; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{k_r-1}}. \quad (2,204)$$

4. Общий случай:  $c_r \neq 0$ ;  $c_n \neq 0$ .

Пусть для простоты  $dL_T = 0$  (процесс механически изолированный). Из условия:

$$T_{n0} = \text{const} \quad (2,191)$$

следует

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{n-1}{2} M_{n1}^2}{1 + \frac{n-1}{2} M_{n2}^2} = \frac{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n2}^3}{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n1}^2}, \quad (2,193)$$

где, как и ранее,

$$M_n^2 = \frac{w^2}{n \frac{p}{\rho}} \quad \lambda_n^3 = \frac{\frac{n+1}{2} M_n^2}{1 + \frac{n-1}{2} M_n^2} = \frac{w^2}{\left(n \frac{p}{\rho}\right)_{np}}$$

При переходе к давлению и плотности из уравнения политропы  $\frac{p}{\rho^{n_r}} = \text{const}$  следует:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + \frac{n-1}{2} M_{n1}^2}{1 + \frac{n-1}{2} M_{n2}^2}\right)^{\frac{n_r}{n_r-1}} = \left(\frac{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n2}^3}{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n1}^2}\right)^{\frac{n_r}{n_r-1}} \quad (2,209)$$

и

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{1 + \frac{n-1}{2} M_{n1}^2}{1 + \frac{n-1}{2} M_{n2}^2}\right)^{\frac{1}{n_r-1}} = \left(\frac{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n2}^3}{1 - \frac{n-1}{n+1} \lambda_{n1}^2}\right)^{\frac{1}{n_r-1}} \quad (2,210)$$

взамен уравнений (2,194) и (2,195) для движения без трения. Иными словами, уравнение связи между температурой и скоростью, а также все остальные соотношения, вытекают

щие из уравнения энергии, написанного для неподвижной системы координат, имеют тождественный вид как для движения с трением, так и для движения без него.

В противоположность этому, соотношения между температурой и давлением или плотностью и, следовательно, соотношения между одним из последних и скоростью зависят от характеристик процесса с трением ( $c_r, n_r$ ).

Физически это означает, что в области  $n_r < 1$ , т. е. для процессов расширения газа, идущих с повышением температуры, при одинаковом приросте последней ( $\frac{T_2}{T_1} = \text{idem}$ ) в процессе с трением будут иметь место большие падения давления и плотности, чем в процессе без трения.

Те же соотношения характерны и для области  $n_r > 1$ , т. е. для расширения газа, сопровождающегося падением температуры. Действительно, и здесь при  $\frac{T_2}{T_1} = \text{idem}$  процессу с трением отвечает более глубокое падение давления и плотности (фиг. 2,38).

Учитывая, что трение не оказывает на связи температуры и скорости<sup>1</sup>, мы можем сформулировать эти соотношения следующим образом.

Во всей области ускоренных течений влияние трения сказывается на уменьшении прироста скорости движения газов, реализуемого при одинаковом падении давления или, наоборот, на необходимости при течении с трением более глубокого расширения (т. е. падения давления и плотности) для достижения того же ускорения газов.

Аналогичный анализ влияния трения нетрудно произвести также для замедленных течений (при том же условии  $dL_T = 0$ ).

В более общем случае—при наличии технической работы—влияние трения будет сказываться на снижении величины работы, совершаемой газом в движении с трением при заданном падении давления, сравнительно со случаем отсутствия трения. Это видно из выражения:

$$L_{1-2} = \frac{ARn}{n-1} (T_{n01} - T_{n02}), \quad (2,202)$$

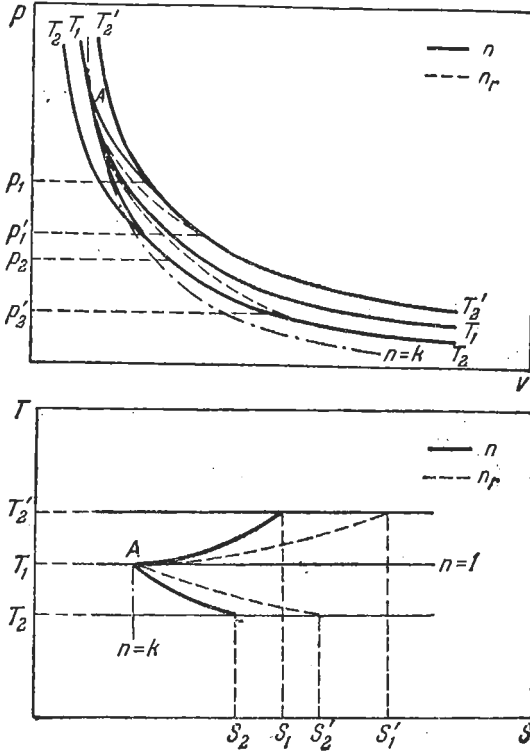
пригодного для обоих случаев движения с трением и без него.

Для иллюстрации этих соотношений на фиг. 2,38 в диаграмме  $pV$  и в диаграмме  $TS$  показаны политропические кри-

<sup>1</sup> Здесь имеется в виду случай отсутствия технической работы;

$$dL_T = 0.$$

вые расширения, приведенные для движения с трением (пунктир) и без него (сплошные линии). Более быстрый рост энтропии в движении с трением наглядно объясняет смысл сделанных выше выводов.



Фиг. 238. Сравнение реальной политропы (для движения с трением) с идеальной (для движения без трения) в диаграммах  $pV$  и  $TS$ .

Заслуживает упоминания, что эти выводы не связаны с допущением о подлинно политропическом характере процесса ( $n_r = \text{const}$ ). Для любого реального движения (при переменном  $n_r$ ) мы можем отнести их к бесконечно малому элементарному процессу, приняв для него:

$$\frac{dp}{p} = n_r \frac{d\rho}{\rho}$$

и

$$dL_T = - \frac{ARn}{n-1} dT_{\text{ср}}$$



При этом местные соотношения между переменными величинами  $n_r$  и  $n$  будут иметь указанный выше вид и при любом законе изменения этих величин по потоку приведут к качественно тождественным результатам для суммарного влияния трения.

В случае же, когда на некотором конечном участке процесса можно на основании опытных данных принять величины  $n_r$  и  $n$  постоянными, эти соотношения приобретают количественное значение, однако расчетное использование их возможно при независимом (например, экспериментальном) определении величины „теплоемкости трения“  $c_r$ .

## 2.21. ИСПАРЕНИЕ И КОНДЕНСАЦИЯ ЖИДКОСТИ В ПОТОКЕ ГАЗА (КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ)

Одним из распространенных в технике способов снижения температуры газового потока является впрыск охлаждающей жидкости. В этом случае главный эффект связан обычно с затратой тепла на испарение жидкости, поэтому в первом приближении впрыск ее равносителен отводу тепла от основного потока.

В дозвуковом течении газа результатом такого воздействия (по принятой нами терминологии — «обратного») явится снижение скорости движения, рост давления и плотности и т. д. В сверхзвуковом течении, в противоположность этому, будет происходить ускорение потока и расширение газа. В связи с этим впрыск охлаждающей жидкости, испаряющейся в потоке газа, принципиально является одним из возможных методов осуществления сверхзвукового участка теплового сопла.

В других случаях, также встречающихся в различных устройствах, в потоке газа происходит конденсация содержащихся в нем паров. И здесь, зачастую, главный эффект связан с выделением в потоке скрытой теплоты парообразования, т. е. равносителен подводу тепла.

В действительности, однако, при испарении жидкости, наряду с отводом тепла, газовый поток подвергается еще одному (расходному) воздействию, а именно — увеличению общей массы газов за счет образовавшегося пара. Наоборот, при конденсации, наряду с подводом тепла, происходит также уменьшение общей массы газов в основном потоке при выпадении конденсата.

При более точном расчете следовало бы учесть также изменение физических свойств рабочего тела — его теплоемкости и среднего молекулярного веса.

Качественное влияние этих эффектов было установлено в § 2,10. В дальнейшем мы не будем его учитывать и ограничимся приближенным анализом задачи для случая постоянных физических констант газа,

Таким образом, в обоих случаях — при испарении или конденсации жидкости — газовый поток подвергается влиянию, по меньшей мере, двух противоположных по характеру факторов. При испарении мы имеем дело с комбинированным воздействием, складывающимся, например, для дозвукового потока, из ускоряющего движение подвода массы и тормозящего движение отвода тепла. При конденсации суммируется ускоряющее дозвуковой поток влияние подвода тепла и замедляющее поток влияние отвода массы. При относительно большой теплоте испарения в пределе процесс с практической точностью сведется к рассмотренному ранее случаю чисто теплового воздействия; в другом предельном случае — при сравнительно малом тепловом эффекте — к чисто расходному воздействию. В общем случае эти факторы будут, очевидно, ослаблять друг друга и качественный результат суммарного воздействия (т. е. закон изменения скорости движения, числа  $M$ , давления и т. д.) будет определяться преобладающим фактором. Чрезвычайно существенно, что условия, при которых одно из воздействий преобладает над другим, могут быть совершенно различными для каждого из параметров процесса (скорости движения, числа  $M$ , давления и т. п.).

В задачу исследования в связи с этим входят установление закона изменения скорости движения и любой другой переменной в зависимости от соотношения между тепловым и расходным воздействием при данном числе  $M$ . Особый интерес представляют результаты, относящиеся к мало исследованной области сверхзвуковых течений.

Для решения поставленной задачи существенное значение имеет предположение о скорости движения жидкости, впрыснутой в газовый поток, или образовавшегося в нем конденсата<sup>1</sup>. Не решая задачи в общем виде, ограничимся двумя

<sup>1</sup> Это предположение предопределяет вид уравнения количества движения. В общем случае движения без трения по каналу постоянного сечения его следует записать в виде:

$$dp + \rho w dw + (w - w_{жс}) d(\rho w) = 0, \quad (3,71)$$

где  $w_{жс}$  — проекция скорости жидкости на направление потока (см. главу 3,4).

В рассматриваемых в тексте случаях соответственно имеем

$$dp + \rho w dw + w d\rho w = 0 \text{ при } w_{жс} = 0 \text{ (случай А)}$$

и

$$dp + \rho w dw = 0 \text{ при } w_{жс} = w \text{ (случай Б)}.$$

Не вдаваясь в подробности, отметим, что при  $w_{жс} \gg w$  влияние расходного воздействия меняется на обратное. Величина  $w_{жс}$ , при которой это явление имеет место, различна для скорости движения, давления, числа  $M$  и т. д.

простейшими частными случаями, представляющими наибольший практический интерес.

В первом из них (который будем называть для краткости случаем *A*) положим, что проекция скорости жидкости на направление потока равна нулю. Для испарения это будет отвечать впрыску жидкости нормально к основному потоку; для конденсации — выпадению конденсата из потока. Для расходного воздействия наше предположение соответствует второму варианту расчета (см. раздел 2,15).

Во втором случае (случай *B*) примем, что скорость жидкости непрерывно совпадает по величине и направлению со скоростью основного потока. Это предположение — для испарения и конденсации — означает, что жидкость увлекается газовым потоком с пренебрежимо малой относительной скоростью, что вполне естественно для конденсации паров в потоке газа, или для частичного изменения весовой доли влаги в насыщенном паре. Для впрыска жидкости извне случай *B* — менее вероятен. По отношению к расходному воздействию это предположение соответствует схеме идеального (изоэнтروпического) расходного сопла.

В обоих случаях (*A* и *B*) для механически изолированного движения без трения по каналу постоянного сечения суммарное воздействие будет складываться из чисто теплового и соответствующего расходного. Связь между этими воздействиями дает нам уравнение первого начала термодинамики, написанное применительно к неподвижной системе координат. Для 1 кг газа в основном потоке имеем

$$dQ_a = c_p dT_0 = \Delta I_{0,ж} \frac{dG}{G}, \quad (2,211)$$

где  $\Delta I_{0,ж}$  — разность полных энтальпий жидкости и пара при температуре и скорости движения его, равных температуре и скорости движения основного потока,

$\frac{dG}{G}$  — количество жидкости, приходящееся на 1 кг газа.

Введем, как и прежде, при наличии двух воздействий безразмерную характеристику

$$\sigma_{Q-G} = \left| \frac{dT_0}{T_0} \cdot \frac{G}{dG} \right| = \left| \frac{d \ln T_0}{d \ln G} \right| = \frac{\Delta I_{0,ж}}{c_p T_0}. \quad (2,212)$$

По смыслу рассматриваемой задачи величина  $\frac{d \ln T_0}{d \ln G}$  всегда отрицательна: при испарении газ подводится:  $dG > 0$ , а полная энтальпия падает:  $dT_0 < 0$ ; при конденсации происходит отвод газа:  $dG < 0$  и рост полной энтальпии:  $dT_0 > 0$ .

Поэтому в дальнейшем во всех уравнениях мы будем ставить знак минус перед величиной  $\varepsilon$ , равной абсолютному значению отношения  $\left| \frac{d \ln T_0}{d \ln G} \right|$  (а также отбросим для краткости индексы).

Рассмотрим вначале случай  $A(w_{\text{эс}} = 0)$ , для которого исследуем прежде всего закон изменения числа  $M$ .

Для изолированного действия одного только расходного фактора при  $w_{\text{эс}} = 0$  уравнение обращения воздействий для числа  $M$  имело вид:

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = -2(1 + kM^2) \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dG}{G}. \quad (2,162)$$

В другом частном случае — одного только теплового воздействия — для движения газа в тепловом сопле соответственно имеем:

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = -(1 + kM^2) \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dT_0}{T_0}. \quad (2,61)$$

В связи с основным свойством этих уравнений — аддитивностью воздействий, для рассматриваемого случая совместного действия подвода (или отвода) массы и, соответственно, отвода (или подвода) тепла, мы можем написать объединенное уравнение в виде:

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = -(1 + kM^2) \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \left( 2 \frac{dG}{G} + \frac{dT_0}{T_0} \right), \quad (2,213A)$$

или, с учетом формулы (2,212),

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = -(1 + kM^2) \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \left( 1 - \frac{\sigma}{2} \right) \frac{dG}{G}. \quad (2,214A)$$

Уравнение (2,214) связывает число  $M$  и изменение расхода; при заданной зависимости величины  $\sigma$  от  $M$  оно может быть проинтегрировано и доведено до конечных соотношений.

Аналогично этому, уравнение

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = -(1 + kM^2) \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \left( 1 - \frac{2}{\sigma} \right) \frac{dT_0}{T_0} \quad (2,214'A)$$

даст нам связь числа  $M$  и температуры торможения.

Исследуем уравнение (2,214A), имея в виду для определенности случай  $dG > 0$  (испарение). Как и всегда в уравнениях обращения воздействий, знак левой части в (2,214A) связан с соотношением между числом  $M$  и единицей. В до-

звуковом потоке при  $M < 1$  разность  $M^2 - 1$  в левой части этого уравнения отрицательна, в сверхзвуковом положительна. Знак правой части этого уравнения при фиксированном знаке величины  $dG$  определяется значением безразмерной характеристики  $\sigma$ .

Если  $\sigma < 2$ , то при  $dG > 0$  правая часть (2,214А) отрицательна. При  $\sigma > 2$  — она положительна. Наконец, при  $\sigma = 2$  оба воздействия в правой части уравнения взаимно уравновешиваются; число  $M$  проходит через экстремум.

Сведем для наглядности в табличку все возможные соотношения как для испарения, так и для конденсации.

| $M$     | $\sigma$     | Испарение<br>$dG > 0; dT_0 < 0$ | Конденсация $dG < 0; dT_0 > 0$ |
|---------|--------------|---------------------------------|--------------------------------|
| $M < 1$ | $\sigma < 2$ | $dM > 0$                        | $dM < 0$                       |
|         | $\sigma = 2$ | $dM = 0$                        | $dM = 0$                       |
|         | $\sigma > 2$ | $dM < 0$                        | $dM > 0$                       |
| $M > 1$ | $\sigma < 2$ | $dM < 0$                        | $dM > 0$                       |
|         | $\sigma = 2$ | $dM = 0$                        | $dM = 0$                       |
|         | $\sigma > 2$ | $dM > 0$                        | $dM < 0$                       |

Обозначим значение величины  $\sigma$ , обращающее в нуль правую часть уравнения (2,214), индексом  $M$ . Очевидно,

$$\sigma_M = 2.$$

Как видно из таблички, при  $\sigma < \sigma_M$  всегда — при испарении или конденсации в дозвуковом или сверхзвуковом течении — в суммарном воздействии преобладает расходное; при  $\sigma > \sigma_M$  — тепловое. В первом случае качественный эффект (закон изменения числа  $M$ ) совпадает с эффектом, вызываемым одним только расходным воздействием, во втором — одним только тепловым.

Найдем теперь аналогичные критериальные значения величины  $\sigma$  (которые обозначим  $\sigma_w$  — для скорости движения,  $\sigma_p$  — для давления и т. д.) для других параметров процесса.

Объединяя уравнения (2,55) для теплового сопла<sup>1</sup> и (2,157) для расходного воздействия, имеем:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - (1 + kM^2) \left( 1 - \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1 + kM^2} \sigma \right) \frac{dG}{G}. \quad (2,215A)$$

<sup>1</sup> С учетом тождества

$$g \frac{k-1}{Aa^2} dQ_a = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dT_0}{T_0}.$$

В этом случае—для скорости движения—величина  $\sigma_w$  не является уже постоянной, как это было для числа  $M$ , а зависит от последнего, согласно равенству:

$$\sigma_w = \frac{1 + kM^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}.$$

Воспользовавшись системой уравнений (2,56—2,58) для чисто теплового воздействия и (2,158—2,160) для расходного, имеем также:

для давления:

$$(M^2 - 1) \frac{dp}{p} = 2kM^2 \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right) \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \frac{dG}{G}; \quad (2,216A)$$

для плотности:

$$(M^2 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = (k+1)M^2 \left[1 - \frac{1 + \frac{k-1}{2}M^2}{(k+1)M^2} \sigma\right] \frac{dG}{G} \quad (2,217A)$$

и для температуры:

$$(M^2 - 1) \frac{dT}{T} = (k-1)M^2(1 + kM^2) \times \\ \times \left[1 - \frac{(kM^2 - 1) \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{(k-1)M^2(1 + kM^2)} \sigma\right] \frac{dG}{G}. \quad (2,218A)$$

Эти уравнения дают нам критериальные значения величины  $\sigma$  для каждого из параметров состояния.

Выясним также закон изменения давления и плотности заторможенного газа.

По определению:

$$p_0 = p \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \rho_0 = \rho \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

или

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)} \frac{dM^2}{M^2}$$

и

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{M^2}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)} \frac{dM^2}{M^2}.$$

Из уравнений (2,214) — (2,217), имеем

$$\frac{dp_0}{p_0} = -kM^2 \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \frac{dG}{G} \quad (2,219A)$$

— для полного давления и

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} = -kM^2 \left(1 - \frac{2 + kM^2}{2kM^2} \sigma\right) \frac{dG}{G} \quad (2,220A)$$

— для плотности торможения.

Последние два уравнения, в отличие от (2,214) — (2,218A), не содержат в левой части разности  $(M^2 - 1)$ , так как параметры заторможенного газа не подчинены закону обращения воздействий при переходе через критическую скорость.

В приведенной ниже табл. 2,12 выписаны все выражения для величин  $\sigma_M$ ;  $\sigma_w$ ;  $\sigma_p$  и т. д. и указаны их значения для характерных величин числа  $M$ ;  $M=0$ ;  $M=1$  и  $M=\infty$ .

ТАБЛИЦА 2,12  
Критериальное значение  $\sigma_{kp}$   
(случай  $A: w_{эс} = 0$ )

| $M$      | $\sigma_M; \sigma_p;$<br>$\sigma_{p0}$ | $\sigma_w$                          | $\sigma_p$                            | $\sigma_T$   | $\sigma_{i0}$          |
|----------|--|-------------------------------------|---------------------------------------|--|------------------------|
| —        | 2                                      | $\frac{1+kM^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}$ | $\frac{(k+1)M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}$ | $\frac{(k-1)M^2(1+kM^2)}{(kM^2-1)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}$ | $\frac{2kM^2}{2+kM^2}$ |
| 0        | 2                                      | 1                                   | 0                                     | —  | 0                      |
| 1        | 2                                      | 2                                   | 2                                     | 2  | $\frac{2k}{2+k}$       |
| $\infty$ | 2                                      | $\frac{2k}{k-1}$                    | $2\frac{k+1}{k-1}$                    | 2  | 2                      |

Как видно из этой таблицы, для трех переменных ( $M$ ,  $p$  и  $p_0$ ) величина  $\sigma_{kp}$  одинакова и равна двум; для остальных переменных она зависит от числа  $M$  и показателя  $k$ . При  $M=1$  значения  $\sigma_{kp}$  для скорости, числа  $M$ , давления, температуры и плотности совпадают, что соответствует условию непрерывного перехода через критическую скорость.

Заслуживает упоминания также особенность, связанная с законом изменения температуры. На участке  $0 < M^2 < \frac{1}{k}$  оба воздействия — тепловое и расходное — одинаково влияют

на температуру: при испарении (т. е. подводе массы и отводе тепла) она падает; при конденсации (т. е. отводе массы и подводе тепла) она растет — в обоих случаях под влиянием каждого из факторов, взятого в отдельности<sup>1</sup>.

Таким образом, каждому из параметров процесса отвечает, вообще говоря, свое (постоянное или переменное) критериальное значение величины  $\sigma_{кр}$ .

Во всех случаях, однако, условию

$$\sigma < \sigma_{кр}$$

отвечает преобладание расходного воздействия, а условию

$$\sigma > \sigma_{кр}$$

— преобладание теплового.

В качестве частного вывода отметим, что практическое осуществление сверхзвукового участка теплового сопла при впрыске охлаждающей жидкости в газовый поток возможно при  $\sigma > 2$  (рост числа  $M$  и полного давления) и при  $\sigma > \sigma_w$  (рост абсолютной скорости движения).

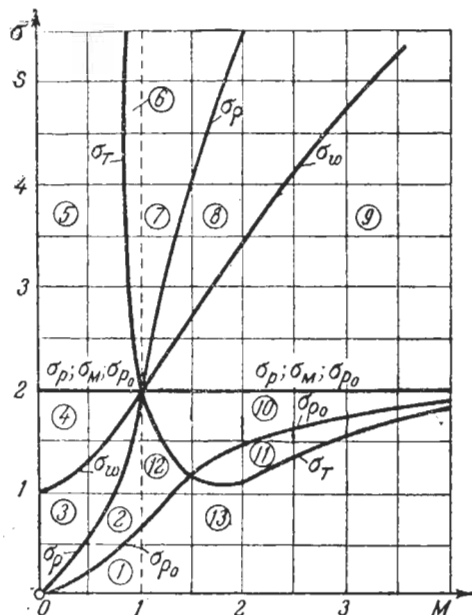
Изменение всех критериальных величин  $\sigma_{кр}$  в зависимости от числа  $M$  показано для  $k=1,4$  на диаграмме  $\sigma-M$  фиг. 2,39. Из этого графика видно, что вся теоретически возможная область протекания процессов испарения или конденсации жидкости в газовом потоке ( $0 < M < \infty$ ;  $0 < \sigma < \infty$ ) делится кривыми критериальных значений  $\sigma_w$ ,  $\sigma_M$  и т. д. и линией  $M=1$  на тринадцать участков, для каждого из которых существует свой закон изменения параметров. При пересечении какой-либо из этих кривых (например  $\sigma_w$ ) меняет свой знак дифференциал соответствующей величины, а сама переменная проходит через экстремум. При пересечении линии  $M=1$ , в соответствии с законом обращения воздействий, меняют свой знак дифференциалы скорости движения, давления, плотности, температуры и числа  $M$ , но остаются неизменными знаки дифференциалов давления и плотности торможения.

Закон изменения всех переменных для каждой из тринадцати областей — для случая испарения — указан в табличке в подписи к фиг. 2,39. Для конденсации все знаки в этой

<sup>1</sup> Напомним, что при изолированном тепловом воздействии значение  $M^2 = \frac{1}{k}$  отвечает экстремуму (максимуму) температуры.

При  $M^2 > \frac{1}{k}$  изменение температуры, как и других переменных, при  $\sigma < \sigma_T$  происходит под влиянием преобладающего расходного фактора, при  $\sigma > \sigma_T$  теплового, наконец, при  $\sigma = \sigma_T$ ,  $dT=0$ .





Фиг. 2,39. Диаграмма  $\sigma M$  для процессов испарения и конденсации жидкости в потоке газа при  $w_{жс} = 0$  (случай А).

Изменение параметров при испарении  
( $dG > 0$ ;  $dT_0 < 0$ ).

| № участка на диаграмме (Фиг. 2,39) | Знак дифференциала переменной |      |      |         |      |           |           |
|------------------------------------|-------------------------------|------|------|---------|------|-----------|-----------|
|                                    | $dM$                          | $dw$ | $dp$ | $d\rho$ | $dT$ | $d\rho_0$ | $d\rho_0$ |
| 1                                  | >0                            | >0   | <0   | <0      | <0   | <0        | <0        |
| 2                                  | >0                            | >0   | <0   | <0      | <0   | <0        | <0        |
| 3                                  | >0                            | >0   | <0   | <0      | <0   | <0        | <0        |
| 4                                  | >0                            | <0   | <0   | >0      | <0   | <0        | <0        |
| 5                                  | <0                            | <0   | >0   | >0      | >0   | >0        | >0        |
| 6                                  | <0                            | <0   | >0   | >0      | >0   | >0        | >0        |
| 7                                  | >0                            | >0   | <0   | <0      | <0   | <0        | <0        |
| 8                                  | >0                            | >0   | <0   | <0      | <0   | <0        | <0        |
| 9                                  | >0                            | <0   | <0   | >0      | <0   | <0        | <0        |
| 10                                 | <0                            | <0   | >0   | >0      | >0   | >0        | >0        |
| 11                                 | <0                            | <0   | >0   | >0      | >0   | >0        | >0        |
| 12                                 | <0                            | <0   | >0   | >0      | >0   | >0        | >0        |
| 13                                 | <0                            | <0   | >0   | >0      | >0   | >0        | >0        |

Примечание. Для конденсации ( $dG < 0$ ;  $dT_0 > 0$ ) все знаки следует изменить на обратные.

табличке следует изменить на обратные. Отметим, в частности, что для процесса в области участков 4 и 9 на диаграмме  $\sigma M$  падение или рост скорости движения сопровождается одновременным падением или ростом давления ( $l > 0$ ); то же самое происходит на участках 3 и 8 для скорости движения

и плотности газа ( $m > 0$ ). Всем этим процессам отвечает, очевидно, отрицательное значение местного показателя политропы:  $n = \frac{d \ln p}{d \ln \rho} < 0$ , тогда как для всех остальных участков  $l < 0$ ,  $m < 0$  и  $n > 0$ .

Приведенная диаграмма полностью определяет качественный характер изменения всех параметров процесса при  $w_{жс} = 0$  (случай А).

Обратимся теперь к случаю Б ( $w_{жс} = w$ ) с тем, чтобы уяснить влияние скорости втекания жидкости на характер изменения переменных. Систему уравнений закона обращения воздействий для этого случая нетрудно получить, суммируя изолированные воздействия: тепловое и идеальное расходное.

Из уравнений (2,55) — (2,60) с учетом формулы (2,212) для комбинированного действия теплового и расходного (идеального) фактора получим:<sup>1</sup>

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^3} = -2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \left( 1 - \frac{kM^2 + 1}{2} \sigma \right) \frac{dG}{G}; \quad (2,214Б)$$

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \left[ 1 - \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \sigma \right] \frac{dG}{G}; \quad (2,215Б)$$

$$(M^2 - 1) \frac{dp}{p} = kM^2 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \sigma \right] \frac{dG}{G}; \quad (2,216Б)$$

$$(M^2 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = M^2 \left( 1 - \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{M^2} \sigma \right) \frac{dG}{G}; \quad (2,217Б)$$

$$(M^2 - 1) \frac{dT}{T} = -2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \left( 1 - \frac{kM^2 + 1}{2} \sigma \right) \frac{dT_a}{T_a}. \quad (2,218Б)$$

Эти уравнения дополним также равенствами для давления и плотности заторможенного газа:

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{kM^2}{2} \sigma \frac{dG}{G} = - \frac{kM^2}{2} \sigma \frac{dT_0}{T_0}; \quad (2,219Б)$$

<sup>1</sup> Система уравнений (2,214) — (2,220Б) применима также к случаю движения в геометрическом сопле с подводом или отводом тепла. В этом случае  $\sigma = \frac{d \ln T_0}{d \ln F^2} > 0$  (см. ниже).

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} = \left(1 + \frac{kM^2}{2}\right) \sigma \frac{dG}{G} = - \left(1 + \frac{kM^2}{2}\right) \sigma \frac{dT_0}{T_0}. \quad (2,220Б)$$

В приведенной табл. 2,13 выписаны критериальные значения величины  $\sigma$  для всех переменных, кроме параметров торможения.

ТАБЛИЦА 2,13  
Критериальное значение  $\sigma$   
(случай Б:  $w_{ж} = w$ )

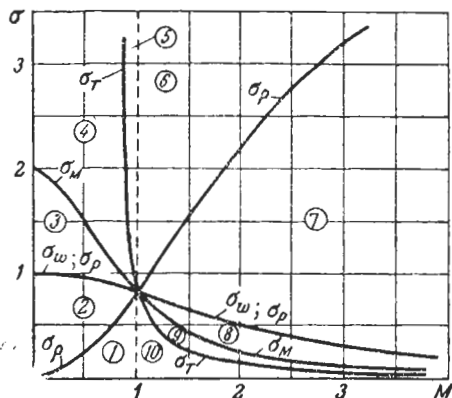
| $M$      | $\sigma_M$         | $\sigma_w; \sigma_p$           | $\sigma_p$                       | $\sigma_T$   |
|----------|--------------------|--------------------------------|----------------------------------|--|
| —        | $\frac{2}{1+kM^2}$ | $\frac{1}{1+\frac{k-1}{2}M^2}$ | $\frac{M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}$ | $\frac{(k-1)M^2}{(kM^2-1)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}$ |
| 0        | 2                  | 1                              | 0                                | —  |
| 1        | $\frac{2}{k+1}$    | $\frac{2}{k+1}$                | $\frac{2}{k+1}$                  | $\frac{2}{k+1}$  |
| $\infty$ | 0                  | 0                              | $\frac{2}{k-1}$                  | 0  |

Характер изменения величин  $\sigma_{кр}$  показан на диаграмме  $\sigma M$  на фиг. 2,40 для  $k=1,4$ . В табличке в полписи к этому графику указаны знаки дифференциалов  $dM$ ,  $d\omega$ ,  $dp$  и т. д. для случая конденсации.

Как и в предыдущем варианте расчета, условие  $\sigma < \sigma_{кр}$  (например  $\sigma < \sigma_w$ ;  $\sigma < \sigma_p$  и т. д.) отвечает преобладанию расходного воздействия (отвода массы при конденсации, или подвода ее при испарении). Наоборот, условие  $\sigma > \sigma_{кр}$  означает преобладание теплового воздействия над расходным (протода тепла при конденсации или отвода его при испарении). При  $\sigma = \sigma_{кр}$  имеет место экстремум соответствующего параметра процесса. В этом отношении результаты исследования для случая Б совпадают с предыдущими для случая А.

Вместе с тем, расчет в предположении  $w_{ж} = w$  приводит, как это видно из табл. 2,13 и фиг. 2,40, к ряду существенно отличных результатов. В первую очередь это относится к давлению и плотности торможения. В связи с тем, что изолированное расходное воздействие в случае Б не вызывает изменения энтропии газа (см. идеальное расходное сопло),

изменение  $p_0$  и  $\rho_0$  определяется одним только тепловым воздействием. Поэтому, вне зависимости от величины  $\sigma$ , знаки  $dp_0$  и  $d\rho_0$ , как это вытекает из равенств (2,219 и 2,220Б) совпадают со знаком  $dG$  и противоположны знаку  $dT_0$ . При испарении оба параметра ( $p_0$  и  $\rho_0$ ) растут, при конденсации — падают.



Фиг 2,40. Диаграмма  $\sigma M$  для процессов испарения и конденсации жидкости в потоке газа при  $w_{ж} = w$  (случай Б).

Изменение параметров при конденсации ( $dG < 0$ ;  $dT_0 > 0$ ).

| № участка на диаграмме (фиг. 2,40) | Знак дифференциала переменной |      |      |         |      |        | $d\rho_0$ | $d\rho_0$ |
|------------------------------------|-------------------------------|------|------|---------|------|--------|-----------|-----------|
|                                    | $dM$                          | $dw$ | $dp$ | $d\rho$ | $dT$ | $dp_0$ |           |           |
| 1 и 6                              | <0                            | <0   | >0   | >0      | >0   |        |           |           |
| 2 и 7                              | <0                            | <0   | >0   | <0      | >0   |        |           |           |
| 3 и 8                              | <0                            | >0   | <0   | <0      | >0   |        |           |           |
| 4 и 9                              | >0                            | >0   | <0   | <0      | >0   |        |           |           |
| 5 и 10                             | >0                            | >0   | <0   | <0      | <0   |        |           |           |

Примечание. Для испарения ( $dG > 0$ ;  $dT_0 < 0$ ) все знаки следует изменить на обратные.

Как и в случае А, при  $M=1$  имеет место совпадение всех значений  $\sigma_M$ ,  $\sigma_w$ ,  $\sigma_p$ ,  $\sigma_\rho$  и  $\sigma_T$ , т. е. обращение в нуль суммарного воздействия в условиях непрерывного перехода через скорость звука.

На диаграмме  $\sigma M$  (фиг. 2,40) для случая  $w_{ж} = w$  имеется десять различных участков возможного протекания процессов, причем характер изменения переменных одинаков в дозвуковых и сверхзвуковых участках, ограниченных одними

и теми же кривыми<sup>1</sup>. Эта симметрия является простым следствием закона обращения воздействий при переходе через число  $M = 1$ .

Подобно случаю *A*, расчет в предложении  $w_{жс} = w$ , дает участки, для которых  $m = \frac{d \ln w}{d \ln p} > 0$  (скорость движения и плотность газа растут или убывают одновременно). Этим участкам (2 и 7 на фиг. 2,40) отвечает также отрицательное значение местного показателя политропы  $n = \frac{d \ln p}{d \ln \rho} < 0$ . Величина  $l = \frac{d \ln w}{d \ln p}$  в случае *B* всегда отрицательна (знаки изменения скорости и давления противоположны). Для остальных участков диаграммы  $\sigma M$  всегда  $l < 0$ ;  $m < 0$  и  $n > 0$ .

Из сравнения обоих вариантов расчета: случай *A*  $w_{жс} = 0$  (фиг. 2,39) и случай *B*  $w_{жс} = w$  (фиг. 2,40), видно, как сильно влияет величина скорости движения жидкости на характер протекания процесса. При одних и тех же значениях  $\sigma$  и числа  $M$  расчет для случая *B* даст качественно отличное от случая *A* направление процесса.

Как уже отмечалось выше, случай *A* ( $w_{жс} = 0$ ) наиболее характерен для впрыска охлаждающей жидкости.

При конденсации ему отвечает выпадение конденсата из потока<sup>2</sup>. Случай *B* ( $w_{жс} = w$ ), в свою очередь, представляет естественную схему процесса конденсации влаги в газовом потоке, когда образовавшиеся частицы жидкости увлекаются газом без относительной скорости. Для испарения случай *B* можно рассматривать как приближенную 'модель' процесса частичного осушения потока насыщенного пара.

Во всех приведенных выше формулах и уравнениях фигурировала величина  $\sigma$  — относительное воздействие. Если начальное значение  $\sigma$  и зависимость ее от числа  $M$  известны, то при нанесении кривой  $\sigma = \sigma(M)$  для действительного процесса на одну из диаграмм  $\sigma M$  (для случая *A* или *B*, в соответствии с выбранным предположением) мы получим подробную качественную картину изменения всех переменных.

<sup>1</sup> Например, на участках 1 и 6, ограниченных линиями  $\sigma_2$  и  $M = 1$ ; на участках 2 и 7 и т. д.

Заметим, что аналогичная симметрия сохраняется и для случая *A*, если на диаграмме  $\sigma M$  на фиг. 2,39 исключить из рассмотрения параметры заторможенного газа.

<sup>2</sup> В точности схеме случая *A* при конденсации отвечал бы дренаж конденсата из канала, однако и при конденсации пара на стенках (например, в теплообменниках) движением жидкости в ламинарном слое у стенки со сравнительно малыми скоростями можно обычно пренебречь.

Этот прием является общим для любого случая совместного действия двух противоположных факторов и может быть с успехом применен и для других задач (например, для исследования течения в геометрическом сопле с теплообменом<sup>1</sup> и т. п.). Это обстоятельство, наряду с практическим значением процессов испарения и конденсации жидкости в потоке газа, побудило нас к столь подробному качественному исследованию задачи. Обратимся теперь к количественному расчету.

## 2,22. ИСПАРЕНИЕ И КОНДЕНСАЦИЯ (КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ РАСЧЕТ)

Определим прежде всего порядок величины  $\varepsilon$ —характеристики, входящей во все приведенные выше формулы и соотношения. В случае впрыска жидкости в газовый поток при равенстве  $w_{жс} = 0$  (испарение, случай А) разность полных энтальпий жидкости и пара после приведения его к одинаковому с газом температуре и скорости может быть приближенно оценена из формулы:

$$\Delta I_{0жс} \approx c_{ржс} (T_{к} - T_{жс}) + r c_{рп} (T_0 - T_{жс}),$$

где  $T_{к}$  — температура кипения;

$T_{жс}$  — температура жидкости;

$r$  — теплота испарения;

$c_{ржс}$  и  $c_{рп}$  — соответственно средние теплоемкости жидкости и образовавшегося из нее пара.

В соответствии с этим, величина  $\varepsilon$  может быть в этом случае выражена в виде:

$$\varepsilon = \frac{\Delta I_{0жс}}{c_p T_0} = \frac{c_{рп}}{c_p} \cdot \frac{c_{ржс} (T_{к} - T_{жс}) + \frac{r}{c_{рп}} + T_0}{T_0}$$

или

$$\varepsilon = \varepsilon \left( 1 + \frac{T'}{T_0} \right). \quad (2,221)$$

В последнем выражении для краткости обозначено

$$\varepsilon = \frac{c_{рп}}{c_p}; \quad T' = \frac{c_{ржс}}{c_{рп}} (T_{к} - T_{жс}) + \frac{r}{c_{рп}} - T_{жс}.$$

<sup>1</sup> Более того, в связи с идентичностью соотношений для идеального расходного сопла и геометрического, случай Б в точности отвечает движению с подводом тепла в расходящемся канале ( $dT_0 > 0$ ;  $dF > 0$ ) или с отводом тепла — в сходящемся ( $dT_0 < 0$ ;  $dF < 0$ ). Для описания такого процесса при противоположных тепловом и геометрическом воздействиях полностью сохраняются все уравнения и диаграмма  $\varepsilon M$  на фиг. 2,40.

Например, для впрыска воды в поток горячего воздуха при  $T_{жс} = 300^\circ\text{K}$ ;  $T_{к} = 400^\circ\text{K}$ ;  $r \approx 500$  ккал/кг;  $c_{ржс} = 1$  ккал/кг.град;  $c_{рп} = 0,5$  ккал/кг.град;  $c_p = 0,25$  ккал/кг.град,  $k = 1,4$  имеем:

$$\kappa = 2; T' = 2 \cdot 100 + \frac{500}{0,5} - 400 = 800^\circ\text{K}.$$

При этом

$$\sigma = 2 \left( 1 + \frac{800}{T_0} \right).$$

Как видно из последнего выражения, величина  $\sigma$  тем меньше, чем больше температура торможения (т. е. чем больше  $M$  и температура газа).

В другом примере — при впрыске воды в водяной пар  $\kappa = 1$ ;  $T' \approx 800^\circ\text{K}$ ;  $\sigma = 1 + \frac{800}{T_0}$ . Еще меньшие значения  $\sigma$  могут быть получены при впрыске жидкости с малой теплотой испарения и низкой температурой кипения (например, жидкого кислорода и т. п.).

Во всех остальных вариантах процесса (испарение при  $w_{жс} = w$ ; конденсация паров при  $w_{жс} = 0$ , или  $w_{жс} = w$ ) величина  $\Delta I_{0жс}$  приближенно равна теплоте испарения:

$$\Delta I_{0жс} \approx r.$$

В связи с этим для оценки порядка величины  $\sigma$  можно принять

$$\sigma \approx \frac{r}{c_p T_0} = \frac{T''}{T_0}, \quad (2,222)$$

где обозначено  $T'' = \frac{r}{c_p}$ . Например, при конденсации воды в потоке воздуха  $T'' \approx \frac{500}{0,25} = 2000^\circ\text{K}$  и  $\sigma \approx \frac{2000}{T_0}$ , тогда как при частичном изменении влагосодержания насыщенного водяного пара  $\sigma \approx \frac{1000}{T_0}$ .

Согласно формулам (2,221) — (2,222), величина  $\sigma$  зависит прежде всего от температуры торможения потока. Если принять в первом приближении величины  $\kappa$  и  $T'$  в (2,221) и  $T'$  в (2,222) постоянными, т. е. выбрать их средние значения для некоторого интервала процесса, то, пользуясь уравнением обращения воздействия для числа  $M$ , можно установить связь между величинами  $M$  и  $T_0$ . Дальнейший расчет изменения переменных не составит труда.

Решим эту задачу отдельно для каждого из вариантов расчета.

**а) Испарение при  $\omega_{жс} = 0$  (случай А)**

Найдем прежде всего соотношение между изменением температуры торможения и расходом газа.

Из уравнений (2,211) — (2,212), с учетом (2,221), имеем:

$$\frac{dT_0}{T' + T_0} = -\kappa \frac{dG}{G}. \quad (2,223)$$

Интегрируя при постоянных  $\kappa$  и  $T'$ , получим

$$\frac{T' + T_{02}}{T' + T_{01}} = \left(\frac{G_1}{G_2}\right)^\kappa,$$

откуда

$$\frac{G_2}{G_1} = \left( \frac{1 + \frac{T'}{T_{01}}}{\frac{T_{02}}{T_{01}} + \frac{T'}{T_{01}}} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (2,224)$$

или

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(1 + \frac{T'}{T_{01}}\right) \left(\frac{G_1}{G_2}\right)^\kappa - \frac{T'}{T_{01}}. \quad (2,224')$$

Свяжем теперь температуру торможения с числом  $M$ . Для этой цели перепишем уравнение (2,214'А) в виде:

$$-\frac{(M^2 - 1) dM^2}{M^2(1 + kM^2) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} = \left[1 - \frac{2T_0}{\kappa(T' + T_0)}\right] \frac{dT_0}{T_0}. \quad (2,214''А)$$

Интегрируя при  $T'$ ,  $\kappa$  и  $k = \text{const}$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{T_{02}}{T_{01}} \left( \frac{1 + \frac{T'}{T_0}}{\frac{T_{02}}{T_{01}} + \frac{T'}{T_{01}}} \right)^{\frac{2}{\kappa}} &= \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \left( \frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2} \right)^2 = \\ &= \frac{\lambda_2^2 (1 + \lambda_1^2)^2}{\lambda_1^2 (1 + \lambda_2^2)}. \end{aligned} \quad (2,225)$$

Правая часть уравнения (2,225) представляет собой отношение температур торможения при чисто тепловом воздействии [см. уравнения (2,106) — (2,107)]. Для упрощения обозначим ее  $A(M_1, M_2)$ . На фиг. 2,41 приведено критическое значение  $A(M_1)$  для  $k = 1,4$  и  $M_2 = 1$ . Для перехода к

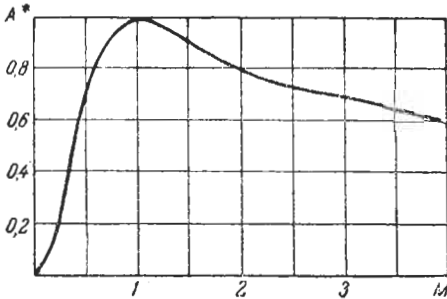


произвольным значениям числа  $M$  как и в других аналогичных случаях, служит равенство<sup>1</sup>

$$A(M_1, M_2) = \frac{A^*(M_2; 1)}{A^*(M_1; 1)} = \frac{A_2^*}{A_1^*}.$$

После отыскания зависимости между  $T_0$  и  $M$  легко найти изменение всех остальных переменных. Действительно, отношение температур равно;

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_{02}}{T_{01}} \cdot \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}. \quad (2,226)$$



Фиг. 2,41.

Закон изменения давления найдем из уравнения (2,38)

$$p + \rho w^2 = \text{const}$$

в виде

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}. \quad (2,227)$$

Последние два выражения дают нам также значение отношения плотностей в двух сечениях потока:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2}. \quad (2,228)$$

Отношение значений скорости движения в двух сечениях равно:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad \text{или} \quad \frac{w_2}{w_1} = \frac{G_2}{G_1} \cdot \frac{f_1}{f_2}. \quad (2,229)$$

<sup>1</sup> Например, при расширении газа от  $M_1 = 1,5$  до  $M_2 = 3,5$  имеем:  $A^*(1,5) \approx 0,91$ ;  $A^*(3,5) \approx 0,61$  (фиг. 2,41), откуда

$$A(M_1, M_2) = A(1,5; 3,5) = \frac{0,61}{0,91} \approx 0,67.$$

Наконец, для давления и плотности торможения, как обычно, имеем:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2,230)$$

и

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (2,231)$$

Таким образом, количественный расчет процесса в этом случае доводится до конца.

### б) Конденсация и испарение при $\omega_{\text{ис}} = \omega$ (случай Б)

Расчет этих двух случаев можно произвести одновременно, так как для обоих, согласно (2,222),  $\sigma = \frac{T''}{T_0}$ .

Из уравнений (2,211)—(2,212) и (2,222) имеем:

$$\frac{dT_0}{T''} = -\frac{dG}{G}, \quad (2,232)$$

откуда

$$\frac{G_2}{G_1} = e^{\frac{T_{01}}{T''} \left( 1 - \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)} \quad (2,233)$$

или

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 + \frac{T''}{T_{01}} \ln \frac{G_1}{G_2}. \quad (2,233')$$

Уравнение обращения воздействий для числа  $M$  (2,214Б) с учетом (2,222), перепишем в виде:

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2} = 2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \left( \frac{dT_0}{T''} - \frac{kM^2 + 1}{2} \frac{dT_0}{T_0} \right). \quad (2,214Б)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение может быть приближенно численно проинтегрировано (для малых

интервалов изменения числа  $M^1$ ). В результате получим зависимость:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = f(M_1; M_2). \quad (2,234)$$

Дальнейший расчет изменения всех переменных производится без труда. В отличие от предыдущего случая здесь неприменимо уравнение (2,38), т. е.  $p + \rho w^2 \neq \text{const}$ . Для указания последовательности расчета приведем конечные формулы:

для температуры:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_{02}}{T_{01}} \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}, \quad (2,235)$$

для скорости движения:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad (2,236)$$

для плотности:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{G_2}{G_1} \cdot \frac{w_1}{w_2}, \quad (2,237)$$

для давления:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{T_2}{T_1}, \quad (2,238)$$

для полного давления

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2,239)$$

<sup>1</sup> Для этой цели ему удобно придать следующий вид:

$$\ln \left[ \frac{M_2^2}{M_1^2} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right] = 2 \frac{T_{01}}{T_0} \left( 1 - \frac{T_{02}}{T_{01}} \right) + \int_1^2 (1 + kM^2) \frac{dT_0}{T_0} \quad (2,214'' \text{ Б})$$

и для плотности торможения

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (2,240)$$

### в) Конденсация при $\omega_{жс} = 0$ (случай А)

Для этого случая сохраняются без изменения формулы (2,233) и (2,233'), связывающие изменение секундного расхода и температуры торможения.

Новое, сравнительно с полученными ранее выражениями, уравнение мы найдем для связи  $T_0$  и  $M$ .

Из (2,214'А) с учетом (2,222), имеем:

$$-\frac{(M^2 - 1) dM^2}{M^2(1 + kM^2) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} = \left(2 \frac{T_0}{T''} - 1\right) \frac{dT_0}{T_0} \quad (2,214''А)$$

Интегрируя, при  $T'' = \text{const}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{T_{01}}{T_0} e^{2 \frac{T_{01}}{T''} \left(1 - \frac{T_{01}}{T_{01}}\right)} &= M_2^2 \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{M_1^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)} \left( \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right)^2 = \\ &= A(M_1, M_2), \end{aligned} \quad (2,241)$$

где  $A^*(M)$ —функция числа  $M$ , представленная на графике фиг. 2,41. Дальнейший расчет может быть без труда произведен по формулам (2,226)—(2,231), как и при испарении.

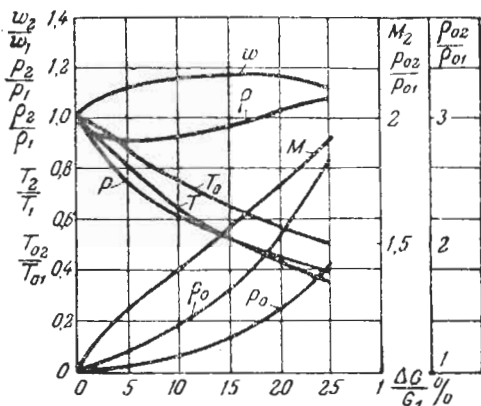
Для иллюстрации полученных результатов приведем два численных примера, которые позволят нам также истолковать некоторые особенности рассматриваемых процессов.

На фиг. 2,42 представлены кривые изменения всех параметров процесса в зависимости от относительной доли впрыснутой жидкости  $\frac{\Delta G}{G_1} = \frac{G_2}{G_1} - 1$ .

Расчет произведен для  $\omega_{жс} = 0$  (случай А) по формулам (2,224)—(2,231), причем принято:  $\kappa = 2$ ;  $T' = 800^\circ \text{K}$ ;  $T_{01} = 2400^\circ \text{K}$ ;  $M_1 = 1$ ;  $k = 1,4$ ;  $c_p = 0,25 \text{ ккал/кгград}$ .

Полученные результаты, естественно, находятся в полном согласии с качественным анализом. В соответствии с начальным значением числа  $M_1 = 1$  и величины  $\sigma = 2 \left(1 + \frac{800}{2400}\right) \approx 2,67$  процесс начинается на участке 7 диаграммы

$\sigma M$  на фиг. 2,39. Поэтому в начале процесса имеет место рост числа  $M$ , скорости движения, а также давления и плотности торможения и падение температуры, плотности газа, статического и полного давления. В дальнейшем, в связи с падением температуры торможения, величина  $\sigma$  растет и процесс пересекает кривую  $\sigma_p$  при переходе в участок 8, а затем и кривую  $\sigma_w$  при переходе в участок 9 диаграммы  $\sigma M$ . На фиг. 2,42, соответственно этому, имеет место мини-



Фиг. 2,42. Кривые изменения параметров процесса при впрыске охлаждающей жидкости в поток газа.

мум плотности газа при  $M \approx 1,4$  и максимум скорости движения при  $M \approx 1,7$ .

Несмотря на ориентировочный выбор численных величин, рассмотренный пример показывает полную возможность осуществления сверхзвукового участка теплового сопла путем впрыска охлаждающей жидкости (например, воды). Существенно также, что сравнительно небольшая добавка воды (до 20—25%) приводит к столь значительным изменениям параметров (числа  $M$ , полного давления и др.).

Второй численный пример приведем для расчета конденсации. Допустим, например, что в воздушном потоке ( $k=1,4$ ) при числе  $M_1=3$  за счет конденсации влаги имеет место повышение температуры торможения на 20% ( $T_{02}/T_{01}=1,2$ ). Примем также  $T''=2000^\circ\text{K}$ ,  $T_{01}=1120^\circ\text{K}$ . Результаты расчета представлены в табл. 2,14.

Полученные величины наглядно показывают, как велико влияние исходных предположений о характере процесса на результаты расчета. В первом столбце табл. 2,14 приведен расчет для  $w_{жс}=w$  (случай Б) по формулам (2,233)—(2,240). В соответствии с изменением величины  $\sigma$  от  $\sigma_1 = \frac{2000}{1120} \approx 1,8$  до  $\sigma_2 \approx 1,5$  процесс относится к участку 7 на диаграмме  $\sigma M$  (см. фиг. 2,40). Конденсация жидкости приводит здесь к падению скорости, плотности, числа  $M$ , давления и плотности торможения и росту давления и температуры.

ТАБЛИЦА 2,14

| Варианты расчета      |                          | 1) $w_{жс} = w$ (Б) | 2) $w_{жс} = 0$ (А) | 3) $dG = 0$ |
|-----------------------|--------------------------|---------------------|---------------------|-------------|
| Исходные<br>данные    | $\frac{T_{02}}{T_{01}}$  | 1,20                | 1,20                | 1,20        |
|                       | $M_1$                    | 3                   | 3                   | 3           |
| Расчетные<br>величины | $M_2$                    | 2,4                 | 3,3                 | 2,0         |
|                       | $\frac{\Delta G^*}{G_1}$ | 0,10                | 0,11                | 0,0         |
|                       | $\frac{w_2}{w_1}$        | 0,99                | 1,24                | 0,90        |
|                       | $P_2$                    | 1,42                | 0,76                | 2,02        |
|                       | $P_1$                    |                     |                     |             |
|                       | $P_2$                    | 0,89                | 0,72                | 1,10        |
|                       | $P_1$                    |                     |                     |             |
|                       | $\frac{T_2}{T_1}$        | 1,57                | 1,06                | 1,87        |
|                       | $P_{02}$                 | 0,57                | 1,18                | 0,42        |
|                       | $P_{01}$                 |                     |                     |             |
| $\rho_{02}$           | 0,48                     | 0,98                | 0,35                |             |
| $\rho_{01}$           |                          |                     |                     |             |

\* В скачках конденсации величина  $\frac{\Delta G}{G_1}$  обычно значительно меньше; значение  $\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1,20$  принять в примере для придания наглядности результатам расчета.

Качественно сходные результаты, за исключением закона изменения плотности, дает третий вариант расчета, выполненный по формулам, приведенным в табл. 2,6 для чисто теплового воздействия (т. е. в пренебрежении эффектами, вызванными изменением массы). Количественные отклонения от результатов расчета по первому варианту здесь, однако, заметны (например, для конечного числа  $M$ , изменения давления и температуры).

Совершенно другие результаты дает расчет, приведенный в среднем столбце табл. 2,14, выполненный по формулам (2,241) и (2,226) — (2,231) в предположении  $w_{жс} = 0$  (случай А; выпадение конденсата из потока).

При тех же значениях  $\sigma$  процесс относится в этом случае к участкам 10, 11 и 13 диаграммы  $\varepsilon M$  на фиг. 2,39. В соответствии с этим здесь имеет место рост скорости движения и числа  $M$  (вместо падения их при расчете для случая  $w_{жс} = w$ ), падение давления и плотности и т. д. (для

температуры газа и плотности торможения преобладает влияние участка  $10$ ; подробный расчет обнаруживает здесь прохождение  $\rho_0$  через минимум и  $T$  через максимум при пересечении кривых  $\sigma_{\rho_0}$  и  $\sigma_T$  на диаграмме  $\sigma M$ ). Таким образом, при расчете для случая  $A(\omega_{\text{ж}} = 0)$  процесс конденсации аналогичен сверхзвуковому участку расходного сопла. В этой связи заслуживает упоминания экспериментально наблюденный случай такого эффекта<sup>1</sup> при сверхкритическом истечении водяного пара через охлаждаемые цилиндрические трубки и заметной конденсации его на стенках трубок. В этих опытах наблюдалось падение давления до величины, значительно ниже критической, т. е. переход через скорость звука, вызванный интенсивным отводом массы.

Отметим в заключение, что рассмотренная задача об испарении и конденсации жидкости в потоке газа, несмотря на ряд допущений (постоянство физических констант, отсутствие трения, постоянство сечения канала) представляет значительный интерес для реальных процессов, так как они большей частью протекают на весьма малых отрезках канала, в связи с чем пренебрежение трением и изменением сечения становится вполне допустимым.

Такие процессы («скачки конденсации») мы рассмотрим в следующей части книги, идеализируя их, однако, как чисто тепловые воздействия. В противоположность этому приведенные здесь методы расчета (с учетом обоих воздействий: теплового и расходного) дают более полную картину таких «скачков».

Рассмотренная задача показывает возможность самых разнообразных эффектов, вызываемых противоположными воздействиями (включая, например, такие процессы, при которых под влиянием впрыска охлаждающей жидкости температура газа не только не падает, но даже растет — см. участки  $6$ ,  $12$  и  $13$  на диаграмме  $\sigma M$  на фиг. 2,39, или  $5$  и  $10$  на фиг. 2,40 и т. п.). Это обстоятельство лишний раз подчеркивает необходимость в каждом конкретном случае тщательного термодинамического анализа рабочего процесса при больших скоростях движения газового потока, а также возможность создания различных эффектов, которые могут оказаться полезными при решении различных технических задач.

Этим примером закончим разбор различных частных случаев непрерывного движения идеального газа.

---

<sup>1</sup> Любезно сообщенный автору доц. В. М. Зысиным.

## ТЕПЛОВЫЕ И АДИАБАТИЧЕСКИЕ СКАЧКИ

### Глава 3,1. АДИАБАТИЧЕСКИЙ СКАЧОК УПЛОТНЕНИЯ

#### 3,1. ПРЯМОЙ СКАЧОК УПЛОТНЕНИЯ

В конце главы 2,3 мы рассмотрели качественные и количественные соотношения, связывающие состояние газа в двух сечениях теплового сопла, для которых значения температуры торможения одинаковы.

Напомним вкратце полученный при этом основной результат. Обратимся для этой цели к формуле (2,114), устанавливающей связь между температурой торможения и коэффициентом скорости в двух одинаковых по размеру сечениях канала при постоянном весовом расходе и отсутствии механической работы и трения. Формула эта имеет следующий вид (см. § 2,13)

$$q_{1-2} = \frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 = \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_1^2 \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 (1 + \lambda_2^2)^2}. \quad (3,1)$$

В частном случае постоянства температуры торможения ( $\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1$ ), если отбросить тривиальный случай:  $\lambda_2 = \lambda_1$ , из (3,1) следует:

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (3,2)$$

Соотношение (3,2) для прямого адиабатического скачка хорошо известно в газовой динамике. Оно означает<sup>1</sup>, что если в сечении 1 скорость движения была дозвуковой ( $\lambda_1 < 1$ ,  $w_1 < a^*$ ), то в сечении 2 — при равном значении  $T_0$  — поток будет сверхзвуковым ( $\lambda_2 > 1$ ;  $w_2 > a^*$ ) и, наоборот, значению  $\lambda_1 > 1$  отвечает  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} < 1$ .

<sup>1</sup> При  $T_{02} = T_{01}$ , также  $a^*_{2} = a^*_{1} = a^*$ , следовательно:

$$w_1 \cdot w_2 = a^{*2} \quad (3,2)$$

— произведение скоростей до скачка и после него равно квадрату критической скорости.



При непрерывном процессе изменения состояния в тепловом сопле принципиально возможны оба случая движения: ускоренное и замедленное. Первому из них отвечает подвод тепла на участке от  $\lambda_1 < 1$  до  $\lambda^* = 1$  в дозвуковом течении и отвод его в сверхзвуковом участке от  $\lambda^* = 1$  до  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} > 1$ . Второму случаю замедленного движения соответствует подвод тепла в сверхзвуковом течении (от  $\lambda_1 > 1$  до  $\lambda^* = 1$ ) и отвод на участке от  $\lambda^* = 1$  до  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} < 1$  при дозвуковой скорости движения. В обоих случаях суммарное количество тепла, подведенное к газу во всем процессе (на участке от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ ), равно нулю.

Применим теперь аналогичные соображения к несколько иной схеме процесса.

Допустим, что в потоке идеального газа под влиянием какого-либо возмущения (обтекание препятствия и др.) происходит резкая, практически мгновенная перестройка течения. Если предположить, что протяжение участка, на котором происходит эта перестройка, весьма мало, то процесс на нем протекает изолированно от внешних воздействий и подчиняется условию (3,2) для адиабатического перехода.

В этом случае уже нельзя считать равноценными оба направления перехода: от  $\lambda_1 < 1$  к  $\lambda_2 > 1$  и от  $\lambda_1 > 1$  к  $\lambda_2 < 1$ . Действительно, выше (см. § 2,16) было показано, что первый из них, т. е. переход от дозвукового течения к сверхзвуковому, сопровождается падением энтропии<sup>1</sup> ( $S_1 > S_2$ ). Последнее — в изолированной системе — противоречило бы второму началу термодинамики. Поэтому такая перестройка потока (адиабатический скачок разрежения), приводящая к переходу из дозвуковой области течения в сверхзвуковую, для идеального газа оказывается невозможной.

В противоположность этому, переход от  $\lambda_1 > 1$  к  $\lambda_2 < 1$ , т. е. резкое торможение (и сжатие) сверхзвукового потока и переход его к дозвуковому течению, отвечает росту энтропии ( $S_2 > S_1$ ) и, следовательно, термодинамически вполне допустим. Опыт показывает, что такого рода перестройка потока — адиабатический скачок уплотнения — весьма распространен в реальных сверхзвуковых течениях. При этом, как показывает опыт, протяженность скачка, т. е. участка, на котором претерпевают резкое изменение скорость движения и параметры со-

<sup>1</sup> См. формулу (2,166) и фиг. 2,34, а также соотношения между параметрами в двух сечениях теплового сопла для которых  $T_{02} = T_{01}$ , в табл. 2,10.

стояния, весьма невелика и соизмерима с длиной свободного пробега молекулы. Мы можем, следовательно, считать длину этого участка бесконечно малой, т. е. отождествить его с плоскостью сильного разрыва, по обе стороны которой значения скорости движения и параметров процесса различны. В этом случае термодинамический анализ позволяет связать между собой эти значения без какого-либо рассмотрения действительного процесса «внутри» скачка.

Следуя основной предпосылке о стационарности движения, мы будем считать скорость движения газа относительно скачка постоянной во времени. Такой схеме отвечает «остановленный» скачок, возникающий, например, при движении в трубах, или же скачок, движущийся с постоянной скоростью в неподвижном газе, например впереди снаряда, летящего в воздухе со сверхзвуковой скоростью.

Количественные соотношения, которым подчиняется прямой адиабатический скачок, легко получить из формул для теплового сопла (см. табл. 2,6), если положить в них, согласно формуле (3,2):

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}, \text{ при } \lambda_2 < 1.$$

Так, например, для отношения давлений, температур и плотностей в двух сечениях потока — до и после скачка — из соответствующих формул для теплового сопла, получим<sup>1</sup>:

для давления

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}; \quad (3,3)$$

для температуры:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_1^2}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \quad (3,4)$$

и для плотности газа:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \lambda_1^2. \quad (3,5)$$

Из этих формул видно, что все три параметра состояния ( $p$ ,  $\rho$  и  $T$ ) в скачке возрастают, причем рост этот тем больше, чем больше величина  $\lambda_1$ , коэффициента скорости для потока перед скачком.

<sup>1</sup> Выражения, связывающие параметры процесса с числом  $M$ , приведем без вывода в сводной табл. 3,1.

Из формулы (3,5), с учетом постоянства плотности тока, имеем также

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{\lambda_1^2}. \quad (3,6)$$

Эта формула, как и (3,2), определяет падение скорости движения в скачке.

С помощью уравнений (3,3) — (3,5) получим также выражения, связывающие между собой непосредственно параметры состояния до и после адиабатического скачка.

Так, для давления и плотности, получим:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{V_2}{V_1}}{\frac{V_2}{V_1} - \frac{k-1}{k+1}}. \quad (3,7)$$

Это выражение обычно называют уравнением ударной адиабаты.

Аналогично этому, связь между давлением и температурой, из (3,3) — (3,4) может быть выражена в виде

$$\frac{p_2}{p_1} = \lambda_1^2 \frac{T_2}{T_1}$$

и между температурой и плотностью из (3,4) — (3,5) в виде

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{\rho_2}{\rho_1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{\rho_2}{\rho_1}}. \quad (3,8)$$

Из уравнения (3,2) следует, что торможение газа в сколь угодно сильном скачке уплотнения происходит не полностью, а ограничено некоторой минимальной скоростью движения. Действительно, в предельном случае  $\lambda_1 = \lambda_{\max} =$

$= \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} (M_1 = \infty)$ , получим

$$\frac{\omega_{\min}}{\omega_1} = \lambda_2^2 = \lambda_{\min}^2 = \frac{k-1}{k+1}.$$

Соответствующее минимальное значение числа  $M$  после прямого скачка равно

$$M_{\min}^2 = \frac{k-1}{2k},$$

тогда как в общем случае связь между значениями числа  $M$  до и после скачка выражается соотношением:

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{k M_1^2 - \frac{k-1}{2}}. \quad (3,2)$$

В предельном случае бесконечно слабого скачка при  $\lambda_1 = 1$  из (3,3) — (3,6) получим

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_2}{w_1} = 1.$$

В этом случае адиабатический скачок вырождается в акустическую волну; выражение (3,7) следует заменить уравнением изоэнтропы.

В другом предельном случае — скачка бесконечно большой интенсивности — при  $\lambda_1 = \lambda_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$  или  $M_1 = \infty$ , получим

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\text{макс}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\text{макс}} = \infty$$

и

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\text{макс}} = \frac{k+1}{k-1}. \quad (3,9)$$

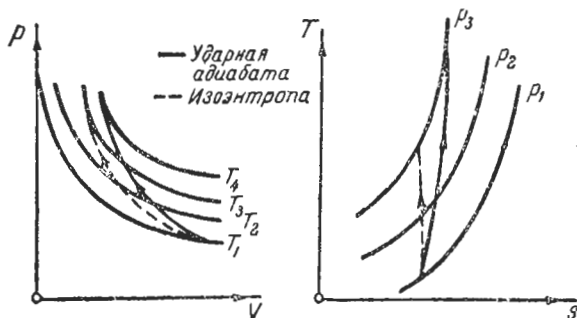
В отличие от изоэнтропического сжатия газа по уравнению  $\frac{p}{\rho^k} = \text{const}$ , где бесконечно большому приросту давления отвечало бы бесконечно большое увеличение плотности, ударное сжатие в скачке дает конечное предельное возрастание плотности. Например, при  $k = 1,4$ , плотность идеального газа в бесконечно сильном скачке возрастает в 6 раз, при  $k = 1,2$  — в 11 раз и т. д.<sup>1</sup>

Это отличие между обратимым адиабатическим (изоэнтропическим) сжатием и сжатием в ударной адиабате связано с ростом энтропии в последнем процессе, приводящем к более интенсивному разогреву газа (см. ниже фиг. 3,1).

Физически это объясняется наличием внутреннего трения. В простейшей, качественной схеме можно представить себе адиабатический скачок, как небольшой участок течения, на

<sup>1</sup> Для реальных газов следовало бы (как указал К. П. Станюкович) учесть, что при  $T \rightarrow \infty$  имеет место также  $k \rightarrow 1$ ; поэтому в пределе и здесь  $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\text{макс}} \rightarrow \infty$ .

котором сконцентрировано значительное трение. Весьма существенно, что приведенные здесь расчетные соотношения применяются к контрольным сечениям потока вне (по обе стороны) скачка уплотнения, но не к процессу внутри его, поскольку протяженность скачка соизмерима с длиной свободного пробега молекулы. Эти соотношения, в сущности, выра-



Фиг. 3.1. Изображение ударной адиабаты скачка уплотнения в  $pV$  и  $TS$ -координатах.

жают постоянство трех величин: плотности тока, полной энтальпии и полного импульса в двух весьма близких сечениях потока, вне зависимости от механизма процесса, происходящего между ними<sup>1</sup>.

Что касается параметров заторможенного газа, то отношение температур торможения, как и всегда в адиабатическом процессе, равно единице:  $\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1$ , тогда как полное давление и плотность меняются (в связи с ростом энтропии) согласно формуле:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{f_{02}}{f_{01}} = \lambda_1^2 \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_1^2}} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (3,10)$$

Предельному случаю бесконечно интенсивного скачка

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \text{ отвечает } \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)_{\text{макс}} = \left( \frac{f_{02}}{f_{01}} \right)_{\text{макс}} = 0$$

— давление и плотность торможения падают до нуля.

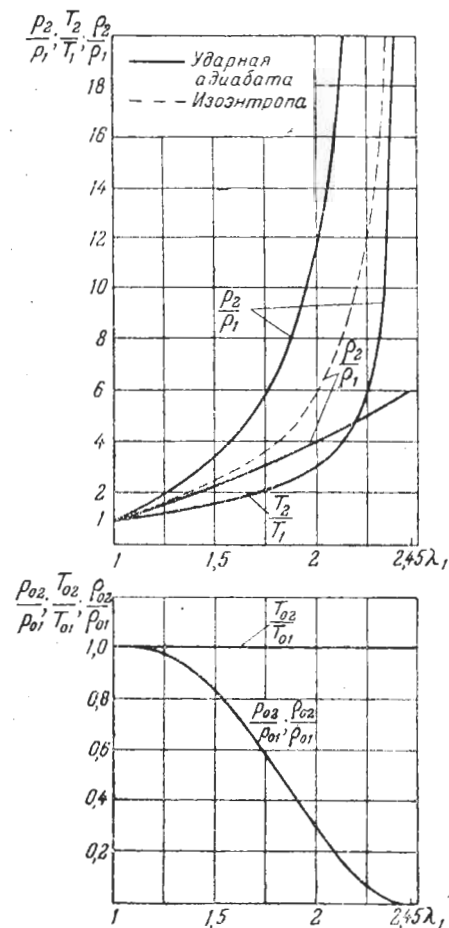
<sup>1</sup> Более того, применение «уравнений сохранения» для стационарного потока допустимо и в тех случаях, когда на участке между выбранными контрольными сечениями, в которых движение стационарно, течение имеет неустановившийся характер. Подробно о применении уравнения количества движения см. главу 3,4.

ТАБЛИЦА 3,1  
Основные соотношения для прямого адиабатического сечения

| Расчетная величина            | Символ                  | Расчетные формулы  |
|-------------------------------|-------------------------|--|
| Отношение давлений            | $\frac{p_2}{p_1}$       | $\frac{2k}{k+1} M_1^2 \frac{k-1}{k+1}$   |
| Отношение температур          | $\frac{T_2}{T_1}$       | $\left( \frac{2k}{k+1} M_1^2 \frac{k-1}{k+1} \right) \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{k+1 - M_1^2}$  |
| Отношение плотностей          | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\frac{\frac{k+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}$  |
| Отношение давлений торможения | $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ | $\left( \frac{\frac{k+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \frac{1}{\left( \frac{2k}{k+1} M_1^2 \frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}}$ |

Примечания: 1. Отношение скоростей  $\frac{w_2}{w_1} = \frac{c_1}{c_2}$ . 2. Отношение плотностей торможения  $\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}$ . 3.  $\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{I_{2-1}}{I_{1-1}}$ .

На фиг. 3,1 показано изображение ударной адиабаты в термодинамических диаграммах  $pV$  и  $TS$ .



Фиг. 3.2. Изменение параметров процесса в прямом скачке уплотнения в зависимости от величины коэффициента скорости перед скачком (для  $k=1,4$ ).

под углом к направлению движения. Схема косо́го скачка показана на фиг. 3,3,б. Как видно из нее, в косо́м скачке

На графике фиг. 3,2 нанесены кривые изменения всех параметров в прямом скачке, в зависимости от значения коэффициента скорости  $\lambda_1$ , перед скачком (для  $k=1,4$ ).

В табл. 3,1 сведены расчетные формулы, определяющие изменение состояния идеального газа в прямом скачке, в зависимости от коэффициента скорости  $\lambda_1$  или числа  $M_1$ , перед скачком.

### 3.2. КОСО́Й СКАЧОК УПЛОТНЕНИЯ<sup>1</sup>

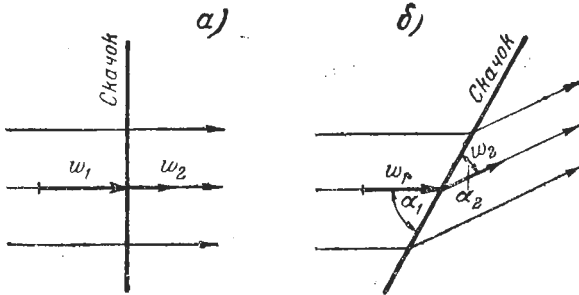
Рассмотренный в предыдущем разделе адиабатический скачок уплотнения называется прямым. Это название связано с тем, что плоскость скачка располагается перпендикулярно направлению движения (см. схему на фиг. 3,3,а). В связи с этим последнее при протекании газа через скачок не меняется.

Наряду с прямым скачком, как показывает опыт, в сверхзвуковых потоках возникают также „косо́е скачки“, расположенные

<sup>1</sup> О косо́х скачках см., например, цитированную выше книгу „Прикладная газовая динамика“, ч. 1 под ред. акад. С. А. Христиановича, „Экспериментальную аэродинамику“ ч. 1 акад. Б. Н. Юрьева (Оборонгиз, 1939), а также книгу Я. И. Левинсона „Аэродинамика больших скоростей“ (Оборонгиз, 1948), в которой популярно, но без ущерба для строгости, рассмотрены многие особенности скоростных потоков.

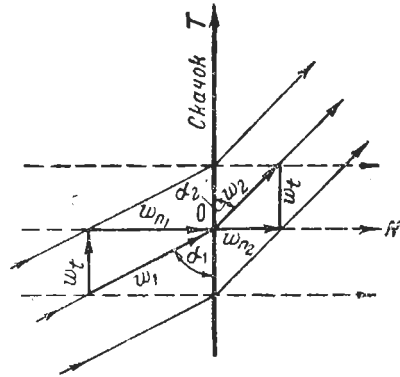
меняется не только величина, но и направление скорости движения. По существу эта схема отличается от рассмотренной ранее только кинематически.

Действительно, разложим абсолютное движение газа на два составляющих: относительное и переносное. Для этой



Фиг. 3,3. Схема образования адиабатического скачка.  
а — прямой скачок; б — косой скачок.

цели совместим начало координат  $O$  с какой-либо точкой в в плоскости скачка и направим оси координат  $N$  и  $T$  — нормально и тангенциально к ней (фиг. 3,4). При этом вместо вектора скорости  $w$  рассмотрим две его компоненты:  $w_n$  нормальную к плоскости скачка и  $w_t$  — касательную. Если принять, что система координат движется касательно к плоскости скачка в направлении оси  $T$  со скоростью, равной величине  $w_t$ , то для относительного движения газа (пунктир на схеме фиг. 3,4) мы приходим к схеме прямого скачка, аналогичного изображенному на фиг. 3,3,а. Роль скорости набегающего потока  $w_1$  в этом случае играет величина  $w_{n1}$  — нормальная составляющая абсолютной скорости движения.



Фиг. 3,4. Кинематическая схема косо́го скачка.

Складывая геометрически нормальную компоненту скорости после скачка  $w_{n2}$  с неизменной величиной  $w_t$ , мы снова приходим к скорости абсолютного движения  $w_2$ , отличной от  $w_1$  по величине и направлению (вектор  $w_2$  отклонен от оси  $T$  на угол  $\alpha_2 < \alpha_1$ , где  $\alpha$  — угол между направлением абсолютного движения и плоскостью скачка см. фиг. 3,4).



Таким образом, косой скачок уплотнения представляет собой прямой скачок (в направлении оси  $N$ ), сносимый в плоскости  $O-T$  (в направлении оси  $T$ ) переносной скоростью  $\omega_t$ . Эта кинематическая схема позволяет нам сохранить полностью все количественные соотношения и расчетные формулы, полученные в предыдущем разделе для прямого скачка, если заменить в них повсюду скорость движения  $\omega$  ее нормальной компонентой:

$$\omega_n = \omega \cdot \sin \alpha, \quad (3,11)$$

число  $M$  — модифицированным числом

$$M_n = \frac{\omega_n}{a} = M \cdot \sin \alpha, \quad (3,12)$$

температуру торможения  $T_0$  — величиной „частичной температуры торможения“:

$$T_{0n} = T + \frac{A\omega_n^2}{2g_c p} = T \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \right) \quad (3,13)$$

и т. д.<sup>1</sup>.

Например, изменение давления в косом скачке найдем из формулы (см. табл. 3,1):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_{n1}^2 - \frac{k-1}{k+1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 \cdot \sin^2 \alpha - \frac{k-1}{k+1}, \quad (3,14)$$

отношение температур до и после косого скачка из формулы:

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \frac{[2kM_{n1}^2 - (k-1)][2 + (k-1)M_{n1}^2]}{(k+1)^2 M_{n1}^2} = \\ &= \frac{[2kM_1^2 \sin^2 \alpha - (k-1)][2 + (k-1)M_1^2 \sin^2 \alpha]}{(k+1)^2 M_1^2 \cdot \sin^2 \alpha} \end{aligned} \quad (3,15)$$

и отношение плотностей из формулы:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{2} M_{n1}^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_{n1}^2} = \frac{\frac{k+1}{2} M_1^2 \sin^2 \alpha}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \sin^2 \alpha}. \quad (3,16)$$

<sup>1</sup> Не следует, разумеется, смешивать введенные здесь характеристики нормального к плоскости разрыва потока  $M_n$ ,  $T_{0n}$  и др. с величинами, обозначенными теми же индексами — в расчете политропических течений.

Что касается уравнения ударной адиабаты (3,7) или других формул, связывающих между собой термодинамические параметры  $p$ ,  $T$  и  $\rho$ , то они сохранятся без всяких изменений.

Из полученных формул следует весьма важное свойство косых скачков. В случае  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\sin \alpha = 1$ , косой скачок переходит в прямой. Другому предельному случаю косого скачка отвечает, однако, не равенство  $\alpha = 0$ , как это могло бы показаться на первый взгляд, а равенство

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{M_1}.$$

В этом случае, когда угол наклона скачка к направлению потока определяется условием

$$\sin \alpha = \frac{1}{M_1}, \quad (3,17)$$

косой скачок вырождается в бесконечно слабую волну (характеристику), так как из формул (3,14) — (3,16) следует:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1$$

при

$$M_1 = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Физически это соответствует равенству единице числа  $M$  в относительном движении:  $M_{rel} = 1$ . Такие вырожденные косые скачки в газовой динамике принято называть характеристиками. В случае распространения слабых возмущений в сверхзвуковом потоке поверхность характеристики ограничивает область возмущенного потока от области, в которую возмущения не проникают (сносятся потоком)<sup>1</sup>. Поясним это несколько подробнее. Пусть в некоторой точке в сверхзвуковом потоке возникло слабое (например, акустическое) возмущение. Это возмущение будет распространяться во все стороны непрерывно со скоростью, равной скорости звука. При этом в ряд последовательных моментов времени, через  $\tau = 1, 2, 3$  и т. д. секунд, центр возмущения будет находиться на расстоянии от начальной точки, равном соответственно  $w$ ;  $2w$ ;  $3w$  и т. д., где  $w$  — скорость потока. Для каждой из этих точек можно построить область возмущенного потока, представляющую из себя сферу с радиусом,

<sup>1</sup> Напомним, что картина распространения слабых возмущений по зволела нам (см. § 1,16) дать качественное физическое объяснение закона «обращения воздействий».

равным соответственно:  $\alpha$ ,  $2\alpha$ ,  $3\alpha$  и т. д., где  $a$  — скорость звука. Из условия  $w > a$  акустические волны никогда не смогут выйти за пределы конуса, огибающего все сферы. Поверхность этого конуса явится в данном примере осесимметричной характеристикой. Образующая конуса составит при этом с направлением движения угол  $\alpha$ , для которого

$$\sin \alpha_M = \frac{1}{M}.$$

В общем случае фронт косо́го скачка может быть, следовательно, расположен к потоку под углом  $\alpha$  в пределах

$$\alpha_M \leq \alpha \leq 90^\circ.$$

Мы видим, таким образом, что косо́й скачок является как бы ослабленным по сравнению с прямым в отношении абсолютной скорости  $w$ , поскольку во все формулы входит вместо числа  $M_1$  перед скачком величина  $M_{n1} = M_1 \sin \alpha < M_1$  и скачок как бы происходит при меньшем числе  $M$ .

Связывая между собой нормальные к скачку компоненты скорости движения до скачка и за ним соотношениями

$$w_{n1} \cdot w_{n2} = a_n^{*2}, \quad (3,18)$$

где

$$a_n^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_{0n}} \quad (3,19)$$

критическая скорость в относительном (нормальном к скачку) движении, и

$$w_{n1} = w_1 \sin \alpha_1; \quad w_{n2} = w_2 \cdot \sin \alpha_2,$$

нетрудно получить все необходимые соотношения для полного расчета<sup>1</sup>.

Как было показано выше, такой расчет по существу является чисто кинематическим и сводится к наложению переносного движения с постоянной скоростью  $w$ , на прямой скачок уплотнения, происходящий в относительном движении. В связи с этим и громоздкостью расчетных формул мы ограничимся приведением конечных результатов расчета, поскольку содержание его вполне понятно из изложенного.

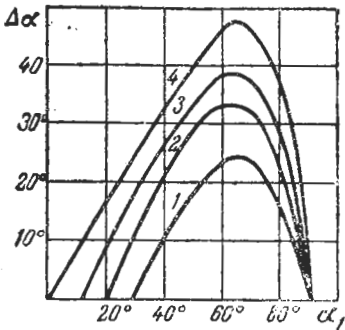
Наиболее существенные результаты такого расчета представлены на двух графиках (фиг. 3,5 и 3,6) для  $k=1,4$ . На первой из них показана зависимость угла отклонения потока

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

<sup>1</sup> Детали расчета см. указанные в сноске на стр. 246 источники, а также Г. Н. Абрамович, Газовая динамика ВРД. Изд. БНТ, 1947 г., стр. 87—100.

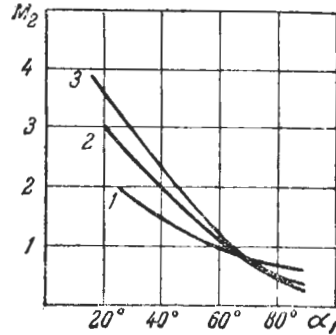
от числа  $M_1$  и угла  $\alpha_1$ . На втором — зависимость числа  $M$  за косым скачком  $M_2$  от  $M_1$  и угла  $\alpha_1$ . Как видно из фиг. 3,5, при любом числе  $M$  набегающего потока отклонение не превышает некоторой предельной величины ( $\sim 25^\circ$  при  $M=2$ ;  $\sim 34^\circ$  при  $M=3$ ;  $\sim 39^\circ$  при  $M=4$  и  $\sim 48^\circ$  при  $M=\infty$ ).

Наличие этого максимума угла отклонения потока в зависимости от величины  $\alpha_1$  объясняется тем, что в двух пре-



Фиг. 3,5. Зависимость угла отклонения потока от числа  $M$  перед косым скачком и угла наклона последнего.

1 —  $M_1 = 2$ ; 2 —  $M_1 = 3$ ; 3 —  $M_1 = 4$ ;  
4 —  $M_1 = \infty$ .



Фиг. 3,6. Зависимость числа  $M$  после косого скачка от величины его перед скачком и угла наклона последнего.

1 —  $M_1 = 2$ ; 2 —  $M_1 = 3$ ; 3 —  $M_1 = 4$ .

дельных случаях: при  $\alpha_1 = 90^\circ$  (прямой скачок) и при  $\alpha_1 = \arcsin \frac{1}{M_1}$  (характеристика),  $\Delta\alpha = 0$ , т. е. поток не меняет своего направления<sup>1</sup>.

Из графика на фиг. 3,6 видно, что при  $\alpha_1 \leq 60^\circ$  и числе  $M$  перед скачком  $M_1$  от 2 до 4 поток после косого скачка сохраняет сверхзвуковую (абсолютную) скорость. Только в узкой области  $\alpha_1 > 60^\circ$  (для  $M_1 = 2$ ) и  $\alpha_1 > 66^\circ$  (для  $M_1 = 4$ ) торможение в косом скачке приводит к дозвуковому потоку, как и прямой скачок (случай  $\alpha_1 = 90^\circ$ ). В связи с этим при торможении сверхзвукового потока после косого скачка может образоваться еще один прямой скачок, или один или несколько косых, замыкающихся обычно слабым прямым.

Такой вид торможения сверхзвукового потока представляет весьма значительный практический интерес в связи с возможностью снижения потерь в давлении по сравнению с прямым скачком. Не входя в детали, укажем два примера.

<sup>1</sup> В одной из работ покойного Я. И. Левинсона показано, что из двух ветвей каждой из кривых  $\Delta\alpha = f(\alpha_1)$  на фиг. 3,5 устойчивому движению за скачком отвечает только одна левая ветвь.

При полете летательного аппарата со сверхзвуковой скоростью при входе в воздухозаборный канал имеют место значительные потери полного давления, связанные с образованием скачков уплотнения. В этом случае работоспособность воздуха как рабочего тела в двигателе, будет тем больше, чем меньше эти потери. Поэтому организация входа, т. е. создание оптимальных систем скачков, приобретает решающее значение для применения таких аппаратов.

Второй пример возьмем из области внешней аэродинамики. Для уменьшения сопротивления воздуха в скоростных самолетах применяют крылья, наклоненные к направлению полета («стреловидные крылья»). В этом случае — вдали от фюзеляжа — воздух, обтекающий крыло, проходит через косой скачок, расположенный параллельно передней кромке плоскости крыла. В связи с этим сопротивление в определенной области чисел  $M$  падает сравнительно с прямым крылом, на котором образуется прямой скачок.

Подробный разбор этих примеров или других, им аналогичных, выходит за рамки этой книги.

### 3.3. АДИАБАТИЧЕСКИЙ СКАЧОК В ТЕЧЕНИИ РЕАЛЬНОГО ГАЗА

Приведенные выше формулы относились к движению идеального газа. Между тем образование ударных волн имеет большое значение для самых различных жидкостей и газов, которые (например, вода) по своим свойствам могут быть весьма далеки от идеального газа. Рассмотрим поэтому некоторые общие закономерности, не связанные с конкретной формой уравнения состояния.

При протекании жидкости через фронт прямого скачка сохраняются неизменными весовой расход (или плотность тока):

$$j = \text{const}; \quad \rho_2 w_2 = \rho_1 w_1,$$

сумма давления и удвоенного скоростного напора (поток импульса):

$$p + \rho w^2 = \text{const}; \quad p_2 + \rho_2 w_2^2 = p_1 + \rho_1 w_1^2$$

и полная энтальпия:

$$I_0 = \text{const}; \quad I_2 + \frac{A w_2^2}{2g} = I_1 + \frac{A w_1^2}{2g}.$$

Из двух первых уравнений мы можем написать

$$p_2 - p_1 = \rho w (w_1 - w_2)$$

или

$$p_2 - p_1 = \rho_2 w_2 w_1 - \rho_1 w_1 w_2 = w_1 w_2 (\rho_2 - \rho_1).$$

Произведение скоростей до и после скачка равно:

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (3,20)$$

Это соотношение, как видно из вывода, сохраняется в силе и для случая переменной полной энтальпии:  $I_0 \neq \text{const}$  (тепловые скачки, например детонационные волны см. ниже). Из последней формулы, используя условие  $\rho \omega = \text{const}$ , не трудно получить также следующие соотношения:

$$\omega_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}; \quad \omega_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

или

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \frac{(\rho_2 + \rho_1)(p_2 - p_1)}{\rho_1 \rho_2}. \quad (3,21)$$

Подставляя это выражение в уравнение энергии, найдем

$$\frac{I_2 - I_1}{A} = \frac{1}{2g\rho_1\rho_2} (\rho_1 + \rho_2)(p_2 - p_1) \quad (3,22)$$

или, переходя от плотности  $\rho$  к удельному объему  $V$ :

$$\frac{I_2 - I_1}{A} = \frac{V_1 + V_2}{2} (p_2 - p_1), \quad (3,22')$$

а также (в связи с равенством  $I = U + ApV$ ):

$$\frac{U_2 - U_1}{A} = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_1 - V_2). \quad (3,23)$$

Выражения (3,22)—(3,23) представляют наиболее общую форму записи ударной адиабаты<sup>1</sup>, они связывают между собой изменение энтальпии, или внутренней энергии с изменением давления и удельного объема жидкости. Так, например, изменение энтальпии, согласно (3,22'), равно произведению среднего удельного объема  $V_{cp} = \frac{V_1 + V_2}{2}$  на перепад давления  $p_2 - p_1$ , тогда как изменение внутренней энергии равно произведению среднего давления  $p_{cp} = \frac{p_1 + p_2}{2}$  на изменение удельного объема.

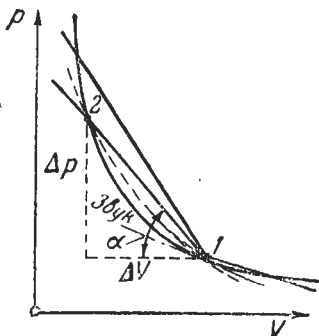
Эти соотношения делают весьма удобным расчет процесса в диаграмме  $pV$ .

<sup>1</sup> Для идеального газа, подставляя, например,  $I = c_p T = A \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{g\rho}$ , придем к уравнению (3,7).

Напомним, при этом, что величина  $w_1$  — скорость жидкости, притекающей к фронту ударной волны, в нашей схеме „остановленного скачка“ равна скорости распространения волны, относительно покоящейся жидкости. В связи с этим, формула

$$w_1^2 = gV_1^2 \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \quad (3,24)$$

(которая получается из приведенного выше выражения для  $w_1^2$  при переходе от плотности  $\rho$  к удельному объему  $V$ ), позволяет простым путем графически найти скорость распространения ударной волны по кривой в диаграмме  $pV$ . Действительно, величина  $w_1$  пропорциональна корню квадратному из тангенса угла секущей, проведенной из начальной точки:  $w_1 \sim \text{tg } \alpha$  (см. фиг. 3,7).



Фиг. 3,7. Графическое определение скорости распространения ударной волны в диаграмме  $pV$ .

При заданном начальном состоянии  $(p_1, V_1)$  на фиг. 3,7 мы получаем бесчисленное множество скоростей распространения, отвечающих различным конечным состояниям  $(p_2, V_2)$ . Чем круче угол наклона секущей на этом графике, тем больше скорость распространения  $w_1$  и тем больше конечное давление. Заметим, что это свойство ударной адиабаты сохраняется вне

зависимости от вида уравнения энергии, т. е. в равной мере относится к адиабатическим скачкам ( $I_0 = \text{const}$ ) и к тепловым ( $I_0 \neq \text{const}$ ). Этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем.

Изменяя начальное состояние при фиксированном конечном, получим ряд новых значений скорости распространения ударной волны. Таким образом, процесс сжатия в ударной волне зависит от начального состояния<sup>1</sup>.

На фиг. 3,7 легко найти также скорость распространения малых колебаний (звука). Этому случаю отвечает, очевидно, бесконечно слабая ударная волна, в которой сжатие жидкости протекает изоэнтропически. Поэтому, скорость звука, равная

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = -gV^2 \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_s$$

<sup>1</sup> Уравнение ударной адиабаты не может быть записано в виде  $f(p, V) = \text{const}$ ; начальное состояние  $(p_1, V_1)$  представляет особую точку кривой (см. Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газовую динамику, стр. 72—73). Аналогичные примеры (движение с трением или подводом тепла и др.) были рассмотрены выше (см. стр. 155 и др.).

определится графически предельным положением секущей к ударной адиабате при бесконечно малом изменении давления и удельного объема, т. е. наклоном касательной в начальной точке. Последнее означает, что в начальной точке  $(p_1, V_1)$  ударная адиабата касается изоэнтропы. Это обстоятельство позволяет графическим путем в диаграмме  $pV$  установить соотношение между скоростью распространения ударной волны и скоростью звука.

Так, например, из фиг. 3,7, построенной применительно к идеальному газу, видно, что для всех состояний, полученных в результате сжатия, скорости распространения ударной волны больше скорости звука в начальном состоянии:  $w_1 > a_1$ . В противоположность этому, для конечных состояний, соответствующих скачку разрежения (если бы такой был возможен) и лежащих на фиг. 3,7 ниже точки  $(p_1, V_1)$ , скорость распространения волны оказалась бы меньше скорости звука в начальном состоянии:  $w_1 < a_1$ . Аналогичное рассуждение можно применить и к конечному состоянию, поскольку скорость распространения волны относительно сжатого газа выражается аналогичной формулой:

$$w_2^2 = gV_2^2 \frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1}. \quad (3,24')$$

Если провести, например, через точку 2 новую кривую ударной адиабаты (пунктир на фиг. 3,7), для которой точка 2 будет начальной<sup>1</sup>, то из взаимного расположения касательной к этой кривой в точке 2 и секущей видно, что скорость звука в сжатом газе будет больше скорости распространения волны относительно его:  $w_2 < a_2$ . Этот вывод мы получили ранее из уравнения (3,1)  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ .

Как было показано выше, для идеального газа сжатие в ударной волне отвечает росту энтропии, а разрежение — ее падению. Последнее привело нас к выводу о невозможности существования адиабатических скачков разрежения в идеальном газе.

Рассмотрим теперь вкратце этот вопрос в общем виде<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Эта кривая из соображений симметрии пройдет также через состояние  $(p_1, V_1)$ , однако обе кривые с начальными точками 1 и 2 не сольются, как это было бы с изоэнтропами  $\left(\frac{p}{\rho^k} = \text{const}\right)$  при двух совпадающих точках.

<sup>2</sup> См. Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, стр. 80—86, а также Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1944, стр. 275—280.



Проведем расчет прироста энтропии в слабой ударной волне вблизи начального состояния. Напишем для средней температуры  $\bar{T}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\bar{T}\Delta S}{A} &= \frac{p_2 - p_1}{2} (V_2 + V_1) - \int_{dS=0} V dp = \\ &= \frac{V_1 - V_2}{2} (p_1 + p_2) + \int_{dS=0} p dV.\end{aligned}$$

Это равенство написано из следующих соображений. В общем случае прирост энтропии определяется соотношением

$$TdS = dU + A p dV = dI - AV dp,$$

или

$$\bar{T}\Delta S = U_2 - U_1 + A \int_1^2 p dV = I_2 - I_1 - A \int_1^2 V dp.$$

Разность внутренних энергий (или энтальпий) для сжатия в ударной волне определяется формулами (3,22), — (3,23). Что касается интеграла, то для слабой волны, не делая ощутимой погрешности, его следует взять вдоль кривой постоянной энтропии ( $dS=0$ ).

Обозначим для краткости  $V_2 - V_1 = \Delta V < 0$ . Разложим давление в точке 2 (вблизи 1) в ряд по степеням  $\Delta V$ :

$$p_2 = p_1 + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S \Delta V^2 + \dots$$

и подставим это выражение в формулу для расчета прироста энтропии.

Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{T}\Delta S}{A} &\approx -\frac{p_1}{2} \Delta V - \frac{p_1}{2} \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \Delta V^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S \Delta V^3 + \\ &+ p_1 \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \Delta V^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S \Delta V^3\end{aligned}$$

или, после сокращения, приближенно

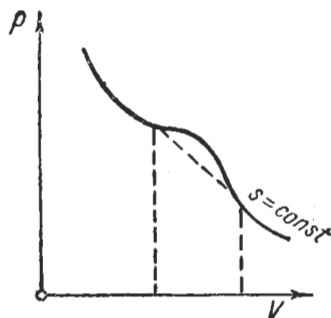
$$\bar{T} \cdot \Delta S \approx -\frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S \cdot \Delta V^3. \quad (3,25)$$

Отсюда следует, что знак  $\Delta S = S_2 - S_1$  в слабой волне определяется знаком второй производной давления по удельному объему при постоянной энтропии. Если  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S > 0$ , как это имеет место для подавляющего большинства веществ, то

$\Delta S > 0$  при  $\Delta V < 0$ , или  $\Delta p > 0$  — энтропия возрастает при сжатии в ударной волне. Этот вывод, в частности, относится к идеальному газу. Если же  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S < 0$ , то  $\Delta S > 0$  при  $\Delta V > 0$  или  $\Delta p < 0$ . В этом случае энтропия возрастала бы в адиабатической волне разрежения, тогда как волны сжатия оказались бы невозможными<sup>1</sup>.

Графически условие  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S > 0$  означает, что кривая изоэнтропического процесса в координатах  $pV$  имеет выпуклость книзу, а условие  $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S < 0$  — выпуклость

кверху (фиг. 3,8). Как указал Я. Б. Зельдович<sup>2</sup>, такой вид изоэнтропии вероятен для области однофазных состояний газа с большой молярной теплоемкостью, вблизи критической точки жидкость—газ, где, следовательно, возможно образование адиабатических скачков разрежения, в противоположность обычным ударным волнам сжатия. И. И. Новиков<sup>3</sup> получил аналогичный результат для области двухфазного состояния (влажный пар) для участка быстрого убывания показателя  $k$  при росте давления (для водяного пара при  $p \approx 215—225$  атм).



Фиг. 3,8. Аномалия кривой изоэнтропического процесса в диаграмме  $pV$  (для выпуклого участка кривой возможны адиабатические волны разрежения).

## Глава 3,2. ТЕПЛОВЫЕ СКАЧКИ В ГАЗОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

### 3,4. ОБЩИЕ СХЕМЫ ТЕПЛОВЫХ СКАЧКОВ

Движение идеального газа под влиянием изолированного теплового воздействия было подробно рассмотрено во второй части — при расчете изменения состояния в тепловом сопле.

<sup>1</sup> Отметим, что производная  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S$  пропорциональна производной  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_S = \left(\frac{\partial a^2}{\partial \rho}\right)_S$ , где  $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$  — квадрат скорости звука. Таким образом, условие  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S > 0$  отвечает увеличению скорости звука при изоэнтропическом сжатии, а  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S < 0$  — падению ее.

<sup>2</sup> См. Я. Б. Зельдович, Журнал экспериментальной и теоретической физики, № 4, 1946 г.

<sup>3</sup> См. И. И. Новиков, О существовании ударных волн разрежения. Доклады Академии наук СССР, т. 59, № 9, 1948.

Мы вернемся теперь вновь к этой задаче, придав ей, однако, несколько иное содержание. Допустим, что выделение тепла происходит на весьма малом участке канала, столь малом, что, вне зависимости от формы последнего, можно считать площадь поперечного сечения на этом участке течения постоянной. Помимо этого, будем считать, что движение происходит при постоянном секундном весовом расходе и не сопровождается обменом механической энергией (работой) с окружающей средой. Наконец, в связи с малой длиной рассматриваемого участка течения можно пренебречь также работой трения.

В этом случае, отвлекаясь от действительного закона изменения переменных внутри этого участка, мы можем использовать все формулы, полученные выше в теории теплового сопла, для расчета изменения состояния движущегося газа на границах выделенного участка.

Такие резкие изменения принято называть скачками или сильными разрывами<sup>1</sup>, примером может служить рассмотренный выше адиабатический скачок, теория которого, в сущности, легко получается как частный случай общих соотношений для тепловых скачков, если принять во всех формулах:

$$q_{1-2} = 0 \text{ или } \frac{T_{02}}{T_{01}} = 1.$$

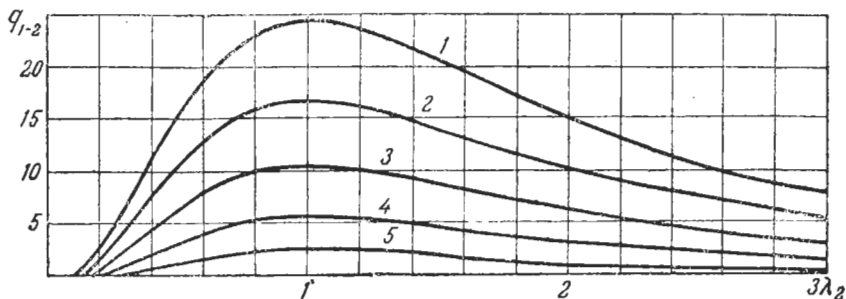
Не вдаваясь вначале в физическую природу теплового скачка, мы можем непосредственно установить основные его свойства, применяя те же соотношения, что и в теории теплового сопла. Ограничимся при этом более простым случаем прямого теплового скачка, имея в виду, что расчет косоуго теплового скачка, как и адиабатического, может быть получен наложением на прямой скачок добавочного переносного движения со скоростью, параллельной плоскости разрыва. На фиг. 3,9 изображено семейство кривых для зависимости относительного прироста температуры торможения  $q = \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = \frac{T_{02}}{T_{01}} - 1$  от коэффициента скорости для разных величин  $\lambda_1$ . Используем эти кривые<sup>2</sup>, построенные согласно формуле (3,1) предыдущего раздела, для того, чтобы выяс-

<sup>1</sup> В сильном разрыве (например, адиабатическом скачке) терпят разрыв сами переменные: давление, температура и т. д. В отличие от этого в слабых разрывах (например, в акустической волне) значения переменных по обе стороны разрыва одинаковы, а разрыв терпят производные (например,  $\frac{dw}{dx}$  и т. п.).

<sup>2</sup> Фиг. 3,9 аналогична фиг. 2,14, но отличается от нее наличием сверхзвуковой области течения.

нить, какого рода тепловые скачки могут иметь место в газовых течениях.

Для большей ясности обратимся к схеме с одной кривой (фиг. 3,10). При практически мгновенном выделении некоторого конечного количества тепла  $q$  в каком-либо сечении



Фиг. 3,9. Зависимость коэффициента скорости после теплового скачка от безразмерной характеристики тепловыделения и коэффициента скорости перед скачком.

1 -  $\lambda_1 = 0,1$ ; 2 -  $\lambda_1 = 0,12$ ; 3 -  $\lambda_1 = 0,15$ ; 4 -  $\lambda_1 = 0,2$ ; 5 -  $\lambda_1 = 0,3$ .

дозвукового потока (т. е. при заданном значении  $\lambda_1 < 1$ ) происходит расширение газа в пределах дозвуковой области (переход от  $\lambda_1$  к  $\lambda'_2$  на фиг. 3,10 по наклонной стрелке, отмеченной на конце индексом „1“).

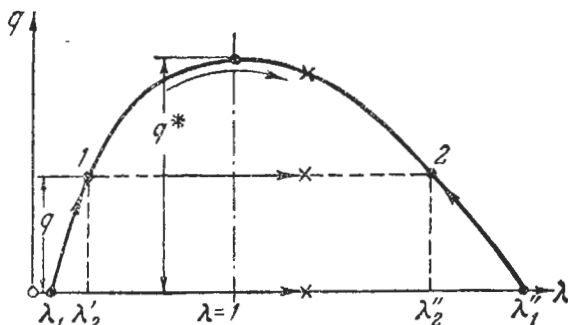
Пределом этого расширения служит „тепловой кризис“, т. е. достижение значения коэффициента скорости за скачком  $\lambda_2 = 1$  (при выделении критического количества тепла, отвечающего безразмерной характеристике  $q^* = \frac{T_0^* - T_{01}}{T_{01}}$ , или соответственно абсолютного количества тепла

$$Q_{\max} = Q^* = c_p \Delta T_0^* = c_p q^* T_{01}$$

— для заданного начального значения числа  $\lambda_1$ ).

Уместно остановиться здесь на следующем вопросе. Допустим, что при заданной величине  $\lambda_1$  происходит в скачке (или в тепловом сопле) выделение количества тепла  $Q$ , превышающего критическое значение  $Q_{\max}$ , например, при сгорании смеси, конденсации влаги и т. п. В этом случае неизбежно произойдет такая перестройка потока (вызванная ростом сопротивления), что величина  $\lambda_1$  упадет до некоторого значения  $\lambda'_1 < \lambda_1$ , для которого выделившееся количество тепла является в точности критическим. Таким образом, нарушение условий, при которых возможно стационарное

движение, за счет выделения количества тепла, превышающего максимально допустимое:  $Q > Q_1^*$ , всегда приводит к перестройке течения и снижению величины  $\lambda_1$  до установления соответствия между расходом газа и количеством подводимого тепла<sup>1</sup>. Совершенно неверным было бы обратное заключение, а именно: будто задание величины  $\lambda_1$  может определить предельное тепловыделение и привести в прак-



Фиг. 3,10. Схема теплового скачка в дозвуковом потоке.

тических условиях, например, к незавершенному горению в фронте пламени или неполной конденсации влаги в скачке конденсации и т. п. Как правило, именно выделение тепла подчиняется независимым кинетическим законам; вводя в уравнение термодинамики потока суммарную величину выделения тепла, мы определяем соответствующее ей значение  $\lambda_1$  в случае критического подогрева.

Формально, уравнение (3,1), связывающее между собой три величины:  $q$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в виде равенства:

$$q = \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_1^2 \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 (1 + \lambda_2^2)^2} \quad (3,1)$$

при заданных значениях  $q$  и  $\lambda_1 < 1$ , дает два корня для величины  $\lambda_2$  после теплового скачка:

$$\lambda_2' < 1 \text{ и } \lambda_2'' > 1.$$

Первый корень отвечает стрелке с индексом „1“ на фиг. 3,10, второй — пересечению сверхзвуковой ветви кривой  $q(\lambda)$  с пунктирной прямой  $q = \text{const}$ , в точке 2, причем

$$\lambda_2'' = \frac{1}{\lambda_2'}.$$

<sup>1</sup> Принципиально возможно также установление нестационарного колебательного режима течения.

Этот корень  $\lambda_2'' > 1$  следует, однако, отбросить по физическим соображениям, так как переход из  $\lambda_1$  в  $\lambda_2''$  содержит в себе нереализуемый в действительности адиабатический скачок разрежения, при котором, как было показано выше, должна была бы упасть энтропия газа<sup>1</sup>.

Действительно, переход из  $\lambda_1$  в  $\lambda_2''$  мог бы быть осуществлен двояко: во-первых, тепловым скачком из  $\lambda_1$  в  $\lambda_2'$  при выделении тепла  $q$  и последующим адиабатическим расширением до  $\lambda_2'' = \frac{1}{\lambda_2'}$ ; либо же, во-вторых, вначале адиабати-

ческим скачком разрежения из  $\lambda_1$  в  $\lambda_1'' = \frac{1}{\lambda_1}$ , а затем торможением сверхзвукового потока при выделении тепла  $q$ :  $\lambda_1'' \rightarrow \lambda_2''$ . Разумеется, что выбор последовательности скачков не влияет на конечный результат, однако, оба варианта перехода из  $\lambda_1$  в состояние  $\lambda_2''$  физически не реализуемы, так как противоречат второму закону термодинамики.

Мы должны также в общем случае отбросить, как невозможный, и переход из точки  $\lambda_2'$  в  $\lambda_2''$  вдоль кривой  $q = q(\lambda)$ , так как осуществление его требует наличия теплового сопла, т. е. последовательной смены подвода тепла в дозвуковом течении при возрастании скорости от  $w_1$  до  $w = a^*$  и отвода тепла в сверхзвуковом потоке. Гипотетически такой случай можно себе представить, например, при последовательном протекании экзотермической и эндотермической реакции, или в других специфических условиях (энергетически неравновесные процессы; запаздывание диссоциации). Эти схемы, осуществление которых возможно при исключительных условиях, здесь не рассматриваются.

Поэтому для дозвуковой области течения выделение тепла приводит к однозначному изменению состояния: расширению газа и увеличению числа  $M$  (или коэффициента скорости  $\lambda$ ) при ограничении:  $\lambda_2 \leq 1$ ;  $M_2 \leq 1$ .

Знак равенства соответствует здесь „тепловому кризису“.

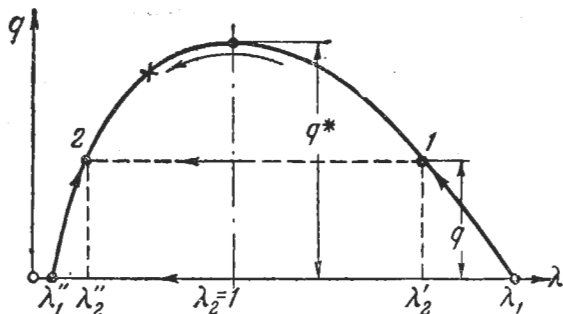
Не так обстоит дело в сверхзвуковой области течения (см. схему на фиг. 3,11).

Из той же формулы (3,1) при заданных значениях величин  $q$  и  $\lambda_1 > 1$  мы снова найдем два корня:  $\lambda_2' > 1$  и  $\lambda_2'' < 1$ , связанные между собой уравнением прямого адиабатического скачка (3,2)  $\lambda_2' \cdot \lambda_2'' = 1$ .

<sup>1</sup> Для того, чтобы подчеркнуть невозможность теплового скачка из области  $\lambda_1 < 1$  в сверхзвуковую область, на фиг. 3,10 соответствующие стрелки снабжены на концах знаком  $\times$ .

Однако, в отличие от дозвукового течения, в сверхзвуковом потоке оба значения  $\lambda_2$  могут быть реализованы. При простом тепловом скачке — в пределах сверхзвуковой области (стрелка с индексом „1“ на фиг. 3,11)—мы переходим от  $\lambda_1$  к  $\lambda_2' \geq 1$ . Как и раньше, пределом здесь служит тепловой кризис, т. е. достижение значения  $\lambda_2 = \lambda^* = 1$  при выделении критического количества тепла  $q^*$ .

Переход в состояние  $\lambda_2'' < 1$  в дозвуковой области течения (в точку 2 на фиг. 3,11) может быть снова осуществлен двояко:



Фиг. 3,11. Схема теплового скачка в сверхзвуковом потоке.

Во-первых, его можно представить в виде последовательной системы теплового скачка  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2'$  по стрелке „1“, а затем адиабатического скачка уплотнения:  $\lambda_2' \rightarrow \lambda_2'' = \frac{1}{\lambda_2'} \leq 1$  (переход из точки 1 в 2).

Во-вторых, его можно осуществить при обратной последовательности скачков—вначале адиабатического  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_1'' = \frac{1}{\lambda_1}$ , а затем теплового  $\lambda_1'' \rightarrow \lambda_2'' \leq 1$ . Знак равенства в этих выражениях опять-таки соответствует тепловому кризису<sup>1</sup> ( $q = q^*$ ;  $\lambda_2 = 1$ ).

Наконец, так же как и в предыдущем случае, следует исключить переход из состояния 1 в 2 вдоль по кривой  $q = q(\lambda)$ , возможный только в специфической обстановке гипотетического теплового сопла (например, „переконденсация“ с последующим испарением и т. п.). Поэтому реальное значение могут играть только два перехода из области  $\lambda_1 > 1$  в дозвуковую.

Хотя конечное состояние газа (при  $\lambda_2'' < 1$ ) и не зависит от последовательности скачков и с расчетной точки зрения

<sup>1</sup> В условиях теплового кризиса ( $q = q^*$ ) в первом случае происходит чисто тепловой скачок ( $\lambda_1 \rightarrow \lambda^* = 1$ ), а во втором сначала адиабатический  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_3$ , а затем тепловой  $\lambda_3 \rightarrow \lambda^* = 1$  в дозвуковом потоке.

обе схемы идентичны, для построения физической модели процесса действительный путь перехода имеет существенное значение. Более того, выяснение фактической последовательности скачков имеет решающее значение в отборе физически реализуемых конечных состояний в том или ином реальном процессе.

Таким образом, для сверхзвуковой области течения мы всегда имеем два физически возможных конечных состояния  $\lambda_2' > 1$  и  $\lambda_2'' < 1$  (смыкающиеся в пределе при тепловом кризисе). Для перехода в состояние  $\lambda_2'' < 1$  мы имеем также две принципиально возможные последовательности скачков с ударной волной в начале либо в конце процесса.

Выбор той либо иной схемы сложного теплового скачка и отбор физически возможных конечных состояний должен производиться в каждом конкретном случае, исходя из механизма процесса.

### 3.5. ПРИМЕРЫ ТЕПЛОВЫХ СКАЧКОВ

Для рассматриваемого круга вопросов значительный интерес могут представить два вида тепловых скачков: распространение детонации и горения, а также так называемые «скачки конденсации». Физическую сущность этих процессов мы будем считать известной и только вкратце напомним основную схему явления.

В теории горения известны два механизма распространения пламени в горючих газовых средах: нормальное горение и детонация. Отчетливые представления о механизме распространения горения и детонации были заложены в работах выдающегося русского физика проф. В. А. Михельсона; они получили свое развитие в трудах школы акад. Н. Н. Семенова, благодаря которым эта отрасль науки достигла весьма высокого современного уровня.

В первом из названных выше процессов речь идет о так называемом медленном или нормальном распространении пламени, происходящем вследствие передачи тепла теплопроводностью (молекулярной и молярной при турбулентном движении) от зоны горения к свежей смеси. Фронт пламени представляет собой в этом случае сравнительно узкую зону, толщина которой, по расчетам Я. Б. Зельдовича<sup>1</sup>, порядка

<sup>1</sup> Для наиболее медленно горящих смесей (6% метана и 94% воздуха) Я. Б. Зельдович приводит значения скорости распространения порядка 5 м/сек и толщины фронта ~ 0,6 мм. Для наиболее быстро горящих смесей (гремучая смесь  $2\text{H}_2 + \text{O}_2$ ) соответственно ~ 10 м/сек и ~ 0,003 мм. Существенно, что в обоих случаях толщина зоны во много раз больше длины свободного пробега (см. Я. Б. Зельдович, Теория горения и детонации в газах. Изд. Академии наук СССР, 1944 г.).



тысячных или сотых долей миллиметра. Сами скорости нормального распространения пламени в неподвижном газе составляют величины от нескольких сантиметров до нескольких метров в секунду и только при турбулентном горении достигают десятков метров в секунду<sup>1</sup>. Незначительные размеры зоны горения, в которой протекают в основном химические реакции, позволяют отождествить ее с тепловым скачком. При этом, как и ранее, можно в порядке грубого приближения пренебречь изменением физических констант газа, его состава и числа молекул, вызванным протекающим химической реакцией, т. е. оперировать со средними значениями физических констант  $c_p$ ,  $R$  и т. д.

Применяя схему теплового скачка к фронту нормального горения, мы заранее должны отказаться от выбора физически реализуемой скорости распространения пламени. Действительно, при медленном горении механизм воспламенения, как отмечалось выше, определяется распространением тепла от зоны горения к свежей смеси. В соответствии с этим в установившемся состоянии действительной скорости распространения большое значение играют кинетические процессы (теплопроводность, скорости химических реакций, турбулентность потока и пр.), не учитываемые уравнениями термодинамики потока. Поэтому в этой задаче мы можем только установить соотношения между параметрами газа вдали от фронта пламени — до него и за ним — при любой термодинамически возможной скорости распространения горения. Особый интерес представит здесь отыскание предельных соотношений для максимальной скорости распространения горения в условиях теплового кризиса. Опираясь на хорошо известные опытные данные, мы будем трактовать фронт пламени при нормальном горении, как тепловой скачок в дозвуковом течении. В соответствии с этим (фиг. 3,10) заданному значению  $\lambda_1$  перед скачком, при заданной также величине  $q$ , будет отвечать всегда одно и то же значение  $\lambda_2 \leq 1$  после скачка.

Обратимся теперь к детонации. В отличие от медленного горения, детонационное горение, как известно, распространяется с огромными скоростями порядка километров в секунду и сопровождается значительными разрушительными действиями. Последние свидетельствуют о возникновении в самой волне (и особенно при обтекании ею препятствий) весьма высоких давлений. Известно также, что скорость распространения детонационной волны превосходит скорость звука в начальной смеси, при этом в газовой смеси заданного состава детонация распро-

---

<sup>1</sup> В этом случае значительно возрастают также размеры зоны горения сравнительно с данными, приведенными выше для нормального распространения пламени.

страняется всегда с одной и той же скоростью, значение которой мало зависит от наличия примесей (в незначительных количествах), первоначального давления среды или размеров трубы. Огромные скорости распространения детонации позволяют при анализе ее исключить из рассмотрения кинетические процессы (теплопроводность, химическую кинетику и пр.), существенные для медленного горения. В связи с этим мы вправе ожидать в этом случае значительно больших результатов от термодинамического расчета, чем в случае медленного горения, а именно, возможности определения стационарной скорости распространения детонационной волны.

Физическая картина явления распространения детонации, согласно современным представлениям<sup>1</sup>, рисуется в следующем виде.

Детонационная волна представляет собой последовательное сочетание двух скачков: адиабатической плоской волны, осуществляющей сжатие и воспламенение свежей смеси и следующей за нею зоны горения. Хотя в целом весь фронт детонационной волны обладает весьма малой протяженностью, однако первый слой его — адиабатический скачок уплотнения — занимает ничтожную долю всей волны и простирается всего лишь на расстояние порядка длин свободного пробега молекулы. Поэтому ударную волну сжатия, идущую в голове детонационной волны, можно с достаточной точностью считать теплоизолированной и пренебрегать не только внешним теплопроводом, но и протеканием в ней химической реакции, требующим для своего осуществления, как известно, многих сотен и тысяч столкновений между молекулами. Поскольку ударная (адиабатическая) волна уплотнения всегда распространяется со сверхзвуковой скоростью, значение коэффициента скорости  $\lambda_1 > 1$ . В соответствии с этим коэффициент скорости в начале второй зоны — волны горения —  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} < 1$ , а сама зона горения, как и в случае нормального распространения пламени, представляет собой тепловой скачок разрежения в дозвуковом течении, в конце которого коэффициент скорости  $\lambda_3 \leq 1$ . Таким образом, детонационная волна представляет собой два последовательных скачка — адиабатический, переводящий газ из сверхзвукового движения в дозвуковое, и тепловой — в дозвуковом потоке (фиг. 3,11). Более подробная схема волны будет рассмотрена ниже.

<sup>1</sup> См., например, Я. Б. Зельдович, Теория горения и детонации в газах. Изд. Академии наук СССР, 1944; А. А. Гриб, Влияние места инициирования на параметры воздушной ударной волны при детонации взрывчатых газовых смесей. Прикл. матем. и механика, т. 8, № 4, 1944, а также цитированную выше книгу „Механика сплошных сред“ акад. Л. Д. Ландау и Е. М. Лившица.

Другим видом тепловых скачков являются процессы быстрого изменения агрегатного состояния. Обычно речь идет о конденсации водяных паров, содержащихся в воздухе, в связи с чем эти скачки, наблюдающиеся в сверхзвуковых аэродинамических трубах, получили название „скачков конденсации“. Элементарный расчет их может быть также произведен, исходя из общей теории тепловых скачков, если пренебречь изменением плотности газового потока и считать, что весь эффект конденсации сводится к освобождению скрытой теплоты парообразования<sup>1</sup>. Скачки конденсации могут иметь место как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом потоке. В первом случае ( $\lambda_1 < 1$ ) они представляют собой тепловой скачок разрежения и ограничены условием  $\lambda_2 \leq 1$  (после скачка); во втором ( $\lambda_1 > 1$ ) — тепловой скачок уплотнения и ограничены условием  $\lambda_2 \geq 1$ . Возможно также наложение на скачок конденсации следующего за ним адиабатического скачка с переходом в дозвуковую область ( $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_2} < 1$ ), однако такое совпадение является, вообще говоря, случайным, так как адиабатическая волна отнюдь не является для скачка конденсации<sup>2</sup> столь же обязательным элементом, как для детонационной волны.

### 3.6. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СХЕМА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ

Схематизируя тепловой или адиабатический скачок, как волну, распространяющуюся в газе, мы исходили до сих пор из обращенной гидродинамической схемы: полагали, что газ притекает к скачку со скоростью  $w_1$ , равной по величине и обратной по направлению скорости распространения волны в неподвижном газе. Такая схема практически реализуется, например, в соплах аэродинамических труб, где скачки (адиабатические и конденсационные) располагаются неподвижно относительно стенок трубы, а газ притекает к ним со скоростью, равной скорости распространения волны в неподвижной среде. Аналогичная схема может быть принята также для различных горелок и камер сгорания, в которые втекает газ со скоростью,

<sup>1</sup> Такое соотношение имеет место для водяного пара; для паров легко кипящих жидкостей (например, эфиров), можно себе представить обратное соотношение, когда сжатие, связанное с выделением теплоты испарения, меньше, чем расширение сверхзвукового потока, вызываемое уменьшением массы газов. В этом случае скачки конденсации явились бы скачками разрежения в сверхзвуковых потоках и сжатия в дозвуковых.

<sup>2</sup> О скачках конденсации см. статью С. З. Беленького (Доклады Академии наук СССР, т. 48, стр. 172, 1945 г.).

равной скорости распространения пламени, движущегося ему навстречу и поэтому неподвижного, относительно постороннего наблюдателя, или стенок камеры.

В других случаях происходит обратное. Например, при распространении горения или детонации в неподвижной смеси фронт волны движется со скоростью  $w_1$  относительно неподвижной свежей смеси. В том или другом случае существенное значение имеет относительная скорость движения волны в газе, поэтому обе схемы практически равноценны. Учитывая, однако, что после прохождения скачка неподвижный ранее газ приходит в движение (следуя за волной или двигаясь в обратном направлении), условимся о переходе от одной схемы к другой.

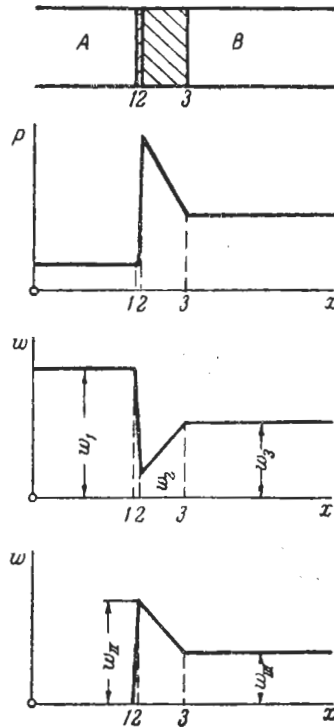
Выберем для общности более сложный случай — двухслойной (детонационной) волны — см. фиг. 3,12. Полагая в первом случае скачок неподвижным, а газ, протекающим через него в направлении 1-2-3, обозначим символами  $w_1, w_2$  и  $w_3$ , а также  $\rho_1, \rho_2$  и  $\rho_3$ ;  $T_1, T_2$  и  $T_3$  и т. д. — скорость движения газа относительно скачка, давление, температуру и т. д. — соответственно в сечениях 1, 2 и 3. Абсолютные значения скорости движения газа относительно неподвижного наблюдателя мы получим, если будем считать теперь газ слева от волны неподвижным, а волну — бегущей справа налево со скоростью  $w_1$ . В этом случае скорость движения газа в сечении 2 за адиабатической волной будет равна:

$$w_{II} = w_1 - w_2, \tag{3,25'}$$

а в сечении 3 в конце зоны горения:

$$w_{III} = w_1 - w_3. \tag{3,26}$$

Положительные значения абсолютной скорости движения газа ( $w_{II} > 0$  или  $w_{III} > 0$ ) будут отвечать, очевидно, движению газа в одном направлении с волной. Наоборот, случай,



Фиг. 3,12. Схема детонационной волны.

когда одно из значений ( $w_{II}$  или  $w_{III}$ ) окажется отрицательным, будет означать движение газа в сторону, противоположную направлению распространения волны.

Этими соотношениями мы воспользуемся в дальнейшем. Перейдем теперь к расчету количественных соотношений, считая вначале скачок неподвижным, а газ, притекающий к нему со скоростью  $w_1$ . Этому расчету посвятим следующую главу, причем будем вести его для случая двухслойной детонационной волны. Все состояния, описывающие распространение горения, будут в этом случае содержаться в общем расчете — применительно ко второму слою волны. Поэтому для общности сохраним в случае нормального распространения пламени индексы „2“ — перед зоной горения и „3“ — в конце ее<sup>1</sup>.

Что касается скачка конденсации, то расчетные формулы для него также будут отвечать индексам „2“ — „3“ по обе стороны чисто-теплого скачка, причем в случае скачка конденсации в дозвуковом потоке коэффициент скорости до скачка  $\lambda_2 < 1$  и после скачка  $\lambda_3 \leq 1$ , тогда как для сверхзвукового потока соответственно будет  $\lambda_2 > 1$  и  $\lambda_3 \geq 1$ . Знак равенства в обоих случаях, как и ранее, отвечает тепловому кризису.

## Глава 3,3. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

### 3.7. ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА В ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЕ

Прежде всего выпишем расчетные формулы, связывающие значения всех параметров в двух сечениях потока — до и после теплового скачка. Из сказанного ранее очевидно, что такими формулами для любого теплового скачка являются соотношения, приведенные выше для течения газа в тепловом сопле (см. табл. 2,6).

Воспользуемся этими формулами для того, чтобы несколько подробнее рассмотреть соотношения для каждой из двух зон детонационной волны.

Для адиабатического скачка уплотнения 1—2 (фиг. 3,12), подставляя в формулы табл. 2,6 значение коэффициента скорости  $\lambda_2$  после скачка, удовлетворяющее уравнению прямого скачка (3,2),  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ , получим расчетные формулы, приведенные в главе 3,1 и собранные в сводной табл. 3,1.

Обратимся поэтому сразу к соотношениям для второго слоя волны — зоны горения 2-3, представляющей собой

<sup>1</sup> В дальнейшем (см. § 3,3) для упрощения в случае простого (однослойного) теплового скачка будут приняты индексы „1“ — „2“.

чисто-тепловой скачок, для предельного случая критического подогрева. Подставим значение  $\lambda_3 = 1$  в формулы табл. 2,6 и заменим индексы „1“—„2“ соответственно индексами „2“—„3“. При этом, с учетом равенства  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ , для начального сечения зоны горения в детонационной волне получим:

$$\frac{p_3^*}{p_2} = \frac{1}{1+k \frac{1-\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2}} = \frac{1}{1+k \frac{\lambda_1^2-1}{\lambda_1^2+1}}, \quad (3,27)$$

$$\frac{T_3^*}{T_2} = \frac{1+\lambda_2^2}{2\lambda_2^2 \left(1+k \frac{1-\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2}\right)} = \frac{1+\lambda_1^2}{2 \left(1+k \frac{\lambda_1^2-1}{\lambda_1^2+1}\right)}, \quad (3,28)$$

$$\frac{\rho_3^*}{\rho_2} = \frac{w_2}{a_3^*} = \frac{2\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2} = \frac{2}{1+\lambda_1^2}. \quad (3,29)$$

В этих формулах первые выражения (через  $\lambda_2$ ) относятся непосредственно к тепловому скачку 2-3 (как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом течении), тогда как вторые позволяют рассчитать изменение параметров состояния в зоне горения детонационной волны в зависимости от коэффициента скорости распространения волны  $\lambda_1$ . В этом втором случае очевидно:

$$\lambda_1 > 1; \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} < 1.$$

Следует заметить, что для зоны горения детонационной волны имеется минимальная скорость распространения:

$$\lambda_{2, \text{мин}} = \frac{1}{\lambda_{1, \text{макс}}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}.$$

В нормальном распространении пламени это ограничение отсутствует и  $\lambda_{2, \text{мин}} = 0$ .

Аналогичным путем получим также соотношения для параметров заторможенного газа:

$$\frac{T_{03}^*}{T_{02}} = \left(\frac{1+\lambda_2^2}{2\lambda_2}\right)^2 = \left(\frac{1+\lambda_1^2}{2\lambda_1}\right)^2; \quad (3,30)$$

$$\frac{r_{03}^*}{\rho_{03}} = \frac{1 + \lambda_2^2}{2} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{\frac{2}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{1 + \lambda_1^2}{2\lambda_1} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_1^2}}{\frac{2}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad (3,31)$$

$$\frac{\rho_{03}^*}{\rho_{03}} = \frac{2\lambda_2^2}{1 + \lambda_2^2} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{\frac{2}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{2\lambda_1^2}{1 + \lambda_1^2} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_1^2}}{\frac{2}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (3,32)$$

Характер изменения всех параметров в тепловом скачке в зависимости от величины  $\lambda_2$  перед скачком для дозвуковой и сверхзвуковой области течения показан на графике на фиг. 3,13 (для  $k=1,4$ ). Как видно из этого графика, в полном соответствии с теорией теплового сопла, результатом выделения тепла в дозвуковом потоке является падение давления и плотности, а также аналогичных параметров заторможенного газа и рост скорости и температуры торможения. Что касается температуры, то, как и следовало ожидать на основании изложенного ранее, прирост ее имеет место в пределах:

$$0 < \lambda_2^2 < \frac{k+1}{3k-1} \left( 0 < M_2^2 < \frac{1}{k} \right),$$

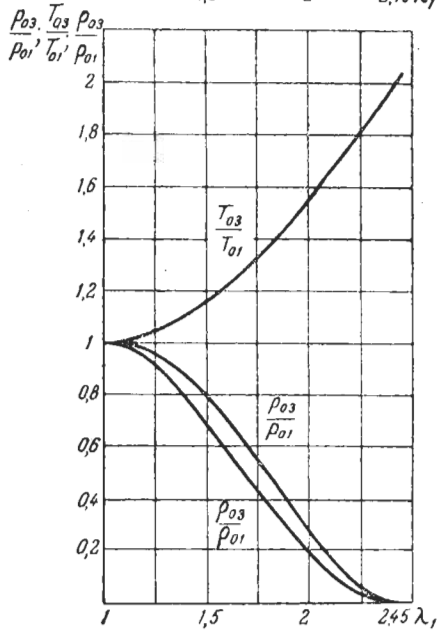
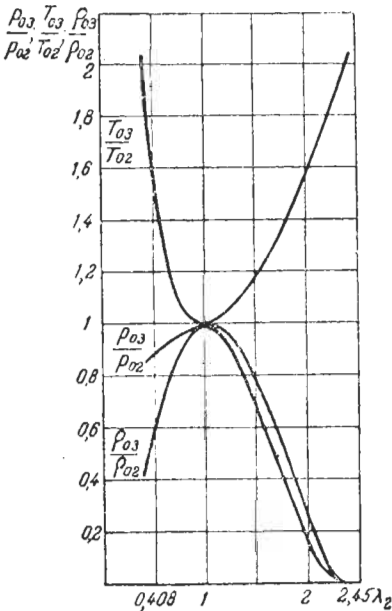
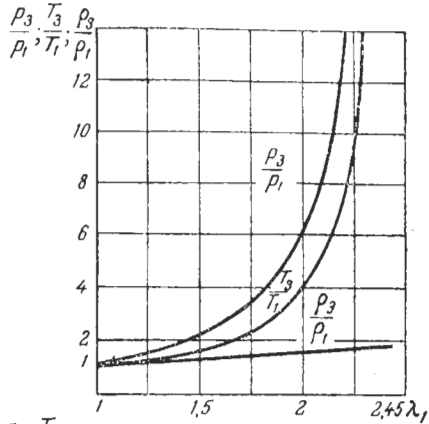
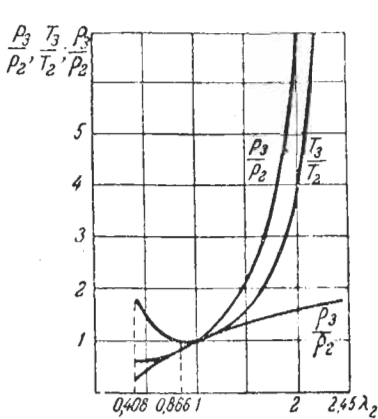
после чего температура падает.

При выделении тепла в сверхзвуковом потоке статическое давление, температура и плотность растут, скорость падает, тогда как характер изменения параметров заторможенного газа сохраняется тем же, что и в дозвуковом потоке.

Мы можем также без труда выписать ряд выражений, относящихся к полному изменению параметров в детонационной волне (интервал 1-3). Учитывая, что формулы для этого случая получаются из предыдущих простой заменой индекса „2“ на индекс „1“ в первом ряду уравнений (3,27)—(3,32), приведем их сразу в сводной таблице.

Характер изменения всех параметров в детонационной волне в зависимости от коэффициента скорости распространения волны показан на фиг. 3,14 (для  $k=1,4$ ).

Напомним, что данные, изображенные на фиг. 3,14 (а также формулы, приведенные в табл. 3,2), относятся к случаю критического разогрева в зоне горения детонационной волны  $\lambda_3=1$ . Как будет показано ниже, именно этот случай относится к стационарному распространению детонации.



Фиг. 3,13. Изменение параметров газа в тепловом скачке (при  $\lambda_3=1$ ) в зависимости от значения коэффициента скорости перед скачком (случай  $\lambda_2 < 1$  — фронт пламени; случай  $\lambda_2 > 1$  — скачок конденсации).

Фиг. 3,14. Изменение параметров газа в детонационной волне в зависимости от величины коэффициента скорости перед волной.

Прежде чем доказать это, рассмотрим вкратце еще некоторые количественные соотношения, общие для всех тепловых скачков. Более подробный анализ общих свойств будет дан ниже в § 3,9.



ТАБЛИЦА 3,2  
Основные соотношения для детонационной волны

| Расчетная величина              | Связь                         | Расчетные формулы  |   |
|---------------------------------|-------------------------------|--|---|
| Отношение давлений              | $\frac{p_3}{p_1}$             | $\frac{1+kM_1^2}{1-k}$   | $\frac{1}{1-k \frac{\lambda_1^2-1}{\lambda_1^2+1}}$   |
| Отношение температур            | $\frac{T_3}{T_1}$             | $\frac{(1+kM_1^2)^2}{(1+k)^2 M_1^2}$   | $\frac{1+\lambda_1^2}{2\lambda_1^2} \cdot \frac{1}{1-k \frac{\lambda_1^2-1}{\lambda_1^2+1}}$                            |
| Отношение плотностей            | $\frac{\rho_3}{\rho_1}$       | $\frac{(1+k)M_1^2}{1+kM_1^2}$  | $\frac{2\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2}$  |
| Отношение температур торможения | $\frac{T_{03}}{T_{01}}$       | $\frac{(1+kM_1^2)^2}{2(1+k)M_1^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)}$                                  | $\left(\frac{1+\lambda_1^2}{2\lambda_1}\right)^3$   |
| Отношение давлений торможения   | $\frac{p_{03}}{p_{01}}$       | $\frac{1+kM_1^2}{1+k} \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$        | $\frac{1+\lambda_1^2}{2} \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{\frac{2}{k+1}}\right)^{\frac{1}{k-1}}$            |
| Отношение плотностей торможения | $\frac{\rho_{03}}{\rho_{01}}$ | $\frac{(1+k)M_1^2}{1+kM_1^2} \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ | $\frac{2\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2} \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{\frac{2}{k+1}}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ |

Примечание: 1.  $\frac{w_3}{w_1} = \frac{\rho_1}{\rho_3}$ ; 2.  $\frac{i_2}{j_1} = 1$ .

Формулы табл. 3,2 получаются непосредственно из аналогичных формул табл. 2,6 для теплового кризиса при подстановке в них  $M_3 = \lambda_3 = 1$ , а также перемножением выражений для адиабатического скачка, т. е. зоны (1-2) и зоны горения (2-3).

Используем формулы, связывающие значения коэффициента скорости до теплового скачка  $\lambda_1$  и после него  $\lambda_3$  (а также на границе между адиабатическим скачком и зоной горения  $\lambda_2$ ) с относительным количеством выделившегося тепла. В качестве характеристики последнего возьмем отношение температур торможения:

$$\frac{T_{03}}{T_{01}} = \frac{T_{03}}{T_{02}} = 1 + \frac{Q}{c_p T_{01}} = 1 + q.$$

Из формулы (2,107) для теплового сопла, имеем:

$$\frac{T_{03}}{T_{01}} = \frac{\lambda_3^2(1+\lambda_2^2)^2}{\lambda_2^2(1+\lambda_3^2)^2} = \frac{\lambda_3^2(1+\lambda_1^2)^2}{\lambda_1^2(1+\lambda_3^2)^2}. \quad (3,33)$$

Последнее выражение представляет собой биквадратное уравнение относительно коэффициента скорости  $\lambda_2$  или  $\lambda_3$ . Извлекая из обеих частей уравнения (3,33) квадратный корень и преобразуя полученное выражение, получим:

$$\lambda_2^2 - \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{02}} \frac{1+\lambda_3^2}{\lambda_3}} \lambda_2 + 1 = 0 \quad (3,34)$$

или

$$\lambda_3^2 - \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{02}} \cdot \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2^2}} \cdot \lambda_3 + 1 = 0. \quad (3,34')$$

Решим сначала первое из приведенных выше квадратных уравнений.

Имеем:

$$\lambda_2 = \frac{1+\lambda_3^2}{2\lambda_3} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda_3^2}{(1+\lambda_3^2)^2} \cdot \frac{T_{02}}{T_{03}}} \right] \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{02}}}. \quad (3,35)$$

В этом выражении для коэффициента скорости  $\lambda_2$  оба знака перед квадратным корнем отвечают физически реальным процессам. В случае зоны горения или скачка конденсации в дозвуковом потоке, когда  $\lambda_3 < 1$ , следует выбрать отрицательное значение радикала. Случаю  $\lambda_2 > 1$ , т. е. скачку конденсации (или другому скачку с тепловыделением в сверхзвуковом потоке<sup>1</sup>), соответствует положительный знак перед корнем.

Характер зависимости величины  $\lambda_2$  от отношения температур торможения  $\frac{T_{03}}{T_{02}}$  для разных значений коэффициента скорости  $\lambda_3$  показан на фиг. 3,15 (для  $k=1,4$ ).

Для предельных условий теплового кризиса ( $\lambda_3=1$ ) уравнение (3,35) упрощается и переходит в следующие равенства:

$$\lambda_2^* = \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{02}}} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{T_{02}}{T_{03}}} \right) \quad (3,36)$$

— для скачка в дозвуковом потоке и

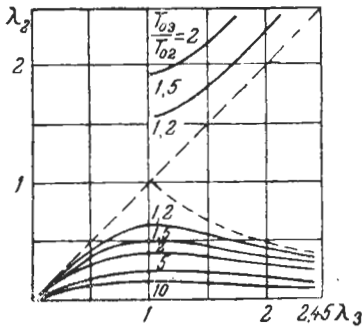
$$\lambda_2^* = \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{02}}} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{T_{02}}{T_{03}}} \right) \quad (3,37)$$

<sup>1</sup> Происходящему непосредственно в сверхзвуковой зоне, т. е. без предшествующего адиабатического скачка. Наличие последнего, как указывалось, типично для волны детонации.

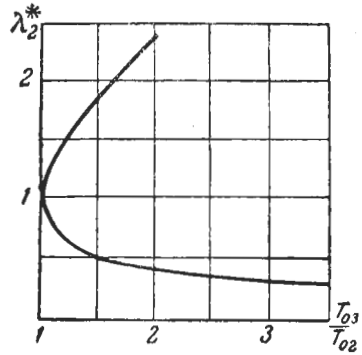
— для скачка в сверхзвуковом потоке. В первом из этих случаев, если тепловой скачок следует за адиабатическим (волна детонации), коэффициент скорости распространения первой зоны — скачка уплотнения, очевидно, равен:

$$\lambda_1^* = \frac{1}{\lambda_2^*} = \frac{\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{03}}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{T_{02}}{T_{03}}}}. \quad (3,38)$$

Напомним, что  $T_{02} = T_{01}$ , так как выделение тепла в адиабатическом скачке отсутствует. На фиг. 3,16 показана зависимость величин  $\lambda_2^*$  и  $\lambda_1^*$  от отношения температур торможения  $\frac{T_{03}}{T_{02}}$ . Выражения (3,36) и (3,38) являются предельными. Они определяют, в частности, максимальные возмож-



Фиг. 3,15. Зависимость коэффициента скорости перед зоной горения от отношения температур торможения и значения коэффициента скорости за волной.



Фиг. 3,16. Зависимость критического значения коэффициента скорости перед зоной горения от отношения температур торможения.

ные значения скорости воздуха на входе в цилиндрическую камеру сгорания (3,36)<sup>1</sup> в тех случаях, когда последующая организация потока не препятствует достижению значения  $\lambda_3 = 1$  на выходе из камеры. В других случаях, например при наличии примыкающего к камере сгорания сопла, критическая скорость устанавливается в узком сечении сопла, а на выходе из камеры  $\lambda_3 < 1$ . При заданном значении  $\lambda_3$  расчет  $\lambda_2$  следует вести по формуле (3,35).

<sup>1</sup> Отметим, что реальные предельные значения  $\lambda_2^*$  в камерах сгорания будут меньше вследствие потерь на гидравлические сопротивления. Это обстоятельство, указанное Г. Ф. Кнорре, здесь не рассматривается.

3.8. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЕТОНАЦИИ<sup>1</sup>

Обратимся теперь к случаю детонационной волны ( $\lambda_1 > 1$ ;  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} < 1$ ). Решим квадратное уравнение (3,34) относительно величины  $\lambda_3$ —коэффициента скорости распространения конца зоны горения детонационной волны.

Из (3,34') имеем:

$$\lambda_3 = \frac{1 + \lambda_2^2}{2\lambda_2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda_2^2}{(1 + \lambda_2^2)^2} \cdot \frac{T_{03}}{T_{01}}} \right] \sqrt{\frac{T_{01}}{T_{03}}} \quad (3,39)$$

(здесь для детонационной волны выбран знак минус перед радикалом).

Коэффициент скорости  $\lambda_2$ —непосредственно за скачком уплотнения—обычно существенно меньше единицы; если при этом и относительный прирост температуры торможения в области горения невелик ( $\frac{T_{03}}{T_{01}} \approx 1$ ), то формулу (3,39) можно значительно упростить:

$$\lambda_3 \approx \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2^2} \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{01}}} \approx \lambda_2 \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{01}}} = \lambda_2 \sqrt{1 + \frac{Q}{c_p T_{01}}} \quad (3,40)$$

(так как  $\lambda_2^2 \ll 1$  при сделанных предположениях).

Из формулы (3,40) видно, что при слабом относительном разогреве ( $\frac{Q}{c_p T_{01}} \approx 0$ ) коэффициент скорости продуктов сгорания  $\lambda_3$  будет весьма близок к коэффициенту скорости за скачком уплотнения  $\lambda_2$ .

Чем сильнее скачок уплотнения, т. е. чем больше скорость распространения ударной волны, тем выше температура торможения исходной смеси  $T_{01} = T_{02}$ , согласно равенству:

$$T_{01} = \frac{T_1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}$$

В пределе при бесконечно быстрой ударной волне ( $M_1 = \infty$ ;  $\lambda_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ ), получим  $T_{01} = \infty$  и  $\frac{Q}{c_p T_{01}} = 0$ . Заметим также, что рост температуры  $T_2$  за скачком приводит к повышению роли термической диссоциации и, следовательно, к умень-

<sup>1</sup> В § 3,8, так же как и в предыдущем и в двух последующих, мы следуем работе Г. Н. Абрамовича и автора этой книги по механике распространения детонации в газах, краткое содержание которой было опубликовано в Докладах Академии наук СССР т. 55, № 2, 1947 г.

шению абсолютной разности температур торможения:  $\Delta T_0 = \frac{Q}{c_p} = (T_{02} - T_{01})$ .

Таким образом, с усилением ударной волны уменьшается как относительный разогрев газа  $q = \frac{Q}{c_p T_{01}}$ , так и коэффициент скорости для продуктов сгорания  $\lambda_3$ .

Для того чтобы сделать этот вывод еще более очевидным, перепишем уравнение (3,40), введя в него вместо переменной температуры  $T_{01}$  постоянную температуру холодного газа  $T_1$ :

$$\lambda_3 \approx \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{1 + \frac{Q}{c_p T_1} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2\right)}. \quad (3,41)$$

Горение, протекающее за фронтом очень сильной ударной волны, начинается на столь высоком температурном уровне, что может вызвать лишь относительно небольшой прирост температуры торможения. Поэтому в пределе имеем:

$$\lambda_{3\text{пред}} \approx \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1},$$

т. е. детонационная волна сближается с обычным скачком уплотнения. В частности, для максимальной скорости ударной волны при  $M_1 = \infty$ ;  $\lambda_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ , получим:

$$\lambda_{3\text{мин}} \approx \lambda_{2\text{мин}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (\lambda_3 \approx 0,41 \text{ для } k=1,4 \text{ и } \lambda_3 \approx 0,3 \text{ для } k=1,2)$$

или

$$M_{3\text{мин}} \approx M_{2\text{мин}} = \sqrt{\frac{k-1}{2k}} (M_3 \approx 0,38 \text{ для } k=1,4 \text{ и } M_3 \approx 0,29 \text{ для } k=1,2).$$

Изложенные выше соображения позволяют представить себе процесс образования стационарной волны детонации в следующем виде. Обычно детонационная волна возникает в результате местного взрыва в горючей смеси. В области взрыва развиваются весьма высокие давления, и от нее устремляется очень сильная ударная волна. При прохождении через холодную горючую смесь эта волна, как указывалось выше, вызывает значительный разогрев газа и может довести его до воспламенения.

Например, при скорости распространения ударной волны всего лишь 2000 м/сек и начальной температуре газа  $T_1 = 400^\circ \text{K}$ , чему при  $R = 30 \frac{\text{кгм}}{\text{кг град}}$  и  $k=1,4$  отвечает  $T_{01} \approx 2400^\circ \text{K}$ , имеем:

$$\lambda_1^* \approx 900 \text{ м/сек}; \quad \lambda_1 \approx 2,2, \quad \lambda_2 \approx 0,45.$$

Температура газа за скачком уплотнения, согласно формуле (3,4), будет равна  $T_2 \approx 2300^\circ \text{K}$ , т. е. вполне достаточна для воспламенения горючей газовой смеси.

Именно в этом случае — при воспламенении горючей смеси ударной волной — за последней возникает зона горения, образующая в совокупности с ударной волной волну детонационную.

Поскольку вблизи центра взрыва скорость распространения волны и интенсивность ее весьма велики, то скорости газа в начале области горения и в конце ее будут близки между собой и существенно ниже критической скорости:

$$\lambda_3 \approx \lambda_2 \ll 1.$$

Однако, с удалением от центра взрыва волна детонации будет ослабляться и скорость распространения ее  $\lambda_1$  падать. В связи с этим будет происходить снижение температуры торможения в начале области горения ( $T_{02} = T_{01}$ ) и рост скорости газа  $\left(\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}\right)$ .

Одновременно, как видно из приведенных выше уравнений, будет возрастать относительный подогрев газа  $\left(\frac{\Delta T_0}{T_{01}}\right)$  и скорость движения продуктов сгорания ( $\lambda_3$ ). Очевидно, что когда детонационная волна ослабится настолько, что коэффициент скорости  $\lambda_3$  окажется равным критическому значению ( $\lambda_3 = 1$ ), дальнейшее снижение коэффициента скорости распространения детонации  $\lambda_1$  окажется невозможным.

В этом, в частности, сказывается отличие детонационной волны от простой ударной. Последняя, возникнув в результате взрыва, при распространении в инертной среде непрерывно затухает по мере удаления от центра взрыва, пока не вырождается в волну акустическую. Физическая причина, приводящая к затуханию волн, в обоих случаях одна и та же. Она состоит в том, что вслед за ударной или детонационной волной в газе устремляется волна разрежения, догоняющая и ослабляющая первую до тех пор, пока газы не будут выходить из фронта волны со скоростью, равной скорости распространения возмущений (скорости звука). Именно этому условию и отвечает тепловой кризис ( $\lambda_3 = 1$ ) на границе зоны горения детонационной волны.

Таким образом, процесс детонации, начавшийся от взрыва, будет непрерывно ослабевать до тех пор, пока скорость распространения волны не снизится до минимального значения  $\lambda_1^* = \lambda_{1\text{мин}}$ , отвечающего наступлению теплового кризиса в зоне горения. С этого момента распространение детонационной волны приобретает устойчивый стационарный характер,

поскольку волна оказывается независимой от образующегося за нею разрежения. Дальнейшее падение величины  $\lambda_1$  и возрастание  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ , т. е. переход за значение  $\lambda_3^* = 1$ , хотя и не противоречит приведенным выше соображениям об устойчивости, однако требует перемены знака воздействия, т. е. перехода от подвода тепла к отводу его („тепловое сопло“). В результате мы получаем единственное стационарное значение скорости распространения одномерной волны детонации — при тепловом кризисе в зоне горения.

Этот вывод, полученный Г. Н. Абрамовичем и автором этой книги, совпадает с хорошо известным в теории детонации правилом отбора минимальной скорости распространения детонационной волны. Существенно, что выведенное выше для наглядности для затухания детонационной волны, образовавшейся в результате взрыва, правило отбора сохраняется для стационарной скорости процесса и для всех других случаев вне зависимости от механизма возникновения детонации. В частности, при переходе детонационной волны из широкой трубки в более узкую отчетливо наблюдается резкое ускорение волны и движение ее на небольшом участке со скоростью в два-три раза выше минимальной. В таком виде процесс продолжается, однако, чрезвычайно недолго; скорость распространения резко падает, пока вновь не достигает стационарного значения, в точности отвечающего тепловому кризису в зоне горения.

Следует отметить хорошее совпадение результатов термодинамического расчета скорости распространения детонации в газах с многочисленными экспериментами. Подробное изложение этого вопроса выходит из рамки настоящей книги<sup>1</sup>.

Остановимся теперь на некоторых дополнительных соотношениях, существенных для расчета стационарной скорости детонации и предельной скорости распространения горения.

### 3.9. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В § 3.7 были получены основные количественные соотношения, определяющие изменение параметров в сложном тепловом скачке в целом, и в каждой из областей детонационной волны в отдельности. Представляет значительный интерес, не ограничиваясь этим, привести ряд формул и выражений, наглядно иллюстрирующих физические закономерности.

Прежде всего выведем более удобные расчетные уравнения для определения скорости распространения теплового скачка

---

<sup>1</sup> По этому поводу см. цитированные выше работы (см. сноску на стр. 265 и др.).

в предельных условиях теплового кризиса. Для этой цели вернемся к уравнению (3,30):

$$\frac{T_{03}^*}{T_{01}} = \left( \frac{\lambda_1^2 + 1}{2\lambda_1} \right)^2 = \left( \frac{1 + \lambda_2^2}{2\lambda_2} \right)^2,$$

которое перепишем также в виде:

$$q = \left( \frac{\lambda_1^2 - 1}{2\lambda_1} \right)^2 = \left( \frac{1 - \lambda_2^2}{2\lambda_2} \right)^2, \quad (3,30')$$

где, как и ранее, величина

$$q = \frac{T_{03}}{T_{01}} - 1 = \frac{Q}{c_p T_{01}}$$

— безразмерная характеристика подогрева. Введем также дополнительно другую безразмерную характеристику подогрева, равную отношению выделившегося тепла к исходной энтальпии смеси:

$$\vartheta = \frac{\Delta T_0}{T_1} = \frac{Q}{c_p T_1}. \quad (3,42)$$

Величины  $\vartheta$  и  $q$  связаны между собой очевидным равенством:

$$q = \vartheta \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \right).$$

В силу этого мы можем переписать уравнение (3,30') в виде:

$$\vartheta \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \right) = \left( \frac{\lambda_1^2 - 1}{2\lambda_1} \right)^2$$

или, после преобразований:

$$\lambda_1^4 - 2 \frac{1+2\vartheta}{1+4\frac{k-1}{k+1}\vartheta} \lambda_1^2 + 1 = 0. \quad (3,43)$$

Отсюда находим коэффициент скорости распространения:

$$\lambda_1^2 = \frac{1+2\vartheta}{1+4\frac{k-1}{k+1}\vartheta} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{1+4\frac{k-1}{k+1}\vartheta}{1+2\vartheta}} \right]. \quad (3,44)$$

В уравнении (3,44) мы выбрали положительный знак перед радикалом, отвечающий стационарному распространению детонационной волны. Эта же формула пригодна для расчета предельной скорости распространения скачка конденсации в сверхзвуковом потоке ( $\lambda_1 > 1$ ).



Для максимальной скорости распространения нормального горения следует, очевидно, выбрать знак минус перед радикалом. В этом случае <sup>1</sup>:

$$\lambda_1^2 = \frac{1 + 2\vartheta}{1 + 4 \frac{k-1}{k+1} \vartheta} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{1 + 4 \frac{k-1}{k+1} \vartheta}{1 + 2\vartheta}} \right]. \quad (3,45)$$

Тождественная формула сохранится, однако, и для детонации—для коэффициента скорости за скачком  $\lambda_2$ , если в уравнение (3,45) вместо параметра  $\vartheta = \frac{\Delta T_0}{T_1}$  подставить величину  $\vartheta' = \frac{\Delta T_0}{T_2}$ , т. е. отнести тепловыделение к энтальпии газа за адиабатическим скачком.

В практически интересных случаях, когда величина  $\vartheta > 1$ , взамен уравнений (3,44)—(3,45) можно с ничтожной ошибкой (менее 2%) принять приближенно <sup>2</sup>:

$$\lambda_1^2 \approx \frac{2 + 4\vartheta}{1 + 4 \frac{k-1}{k+1} \vartheta} \quad (3,46)$$

-- для стационарной детонационной волны и

$$\lambda_1^2 \approx \frac{1}{2 + 4\vartheta} \quad (3,47)$$

— для предельной скорости нормального горения.

На фиг. 3,17 и 3,18 изображены графики зависимости  $\lambda_1 = \lambda(\vartheta)$  и  $M_1 = M(\vartheta)$ , построенные согласно формулам (3,46)—(3,47) для газовой смеси при  $k=1,4$ .

Как видно из этих графиков, кривые, отвечающие предельным скоростям распространения, касаются оси ординат в точках  $\lambda_1 = M_1 = 1$  (акустическая волна в инертном газе,  $\vartheta=0$ ). Верхние ветви обеих кривых—в сверхзвуковой области движения—отвечают установившейся минимальной скорости распространения детонации; нижние ветви—в дозвуковой области—максимальной скорости горения, т. е. предельно возможной скорости нормального распространения пламени.

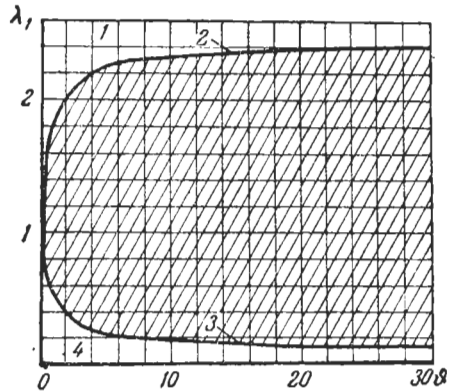
<sup>1</sup> Отметим, во избежание недоразумений, что в формуле (3,45) и далее в этом разделе индекс „1“ относится к скорости распространения пламени.

<sup>2</sup> Например, для холодной смеси бензина и воздуха ( $T_1 \approx 300^\circ\text{K}$ ) при стехиометрическом соотношении  $\vartheta \approx 6,5$ .

Эти кривые дают, таким образом, единое представление о скорости распространения горения. При этом в сверхзвуковой области — над кривой — лежат значения, соответствующие неустановившемуся, стационарно невозможному режиму детонации, тогда как в дозвуковой — ниже кривой — бесчисленное

Фиг. 3,17. Зависимость коэффициента скорости распространения детонационной волны от безразмерной характеристики подогрева.

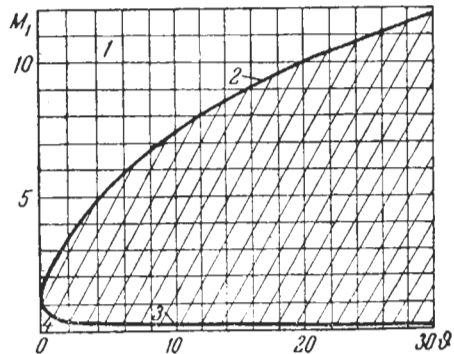
1 — область нестационарной детонации; 2 — стационарная скорость детонации; 3 — предельная скорость нормального горения; 4 — область стационарного нормального горения.



множество значений, отвечающих возможным режимам стационарного нормального горения при малых скоростях движения газа. Наконец режимы, отвечающие заштрихованной области, не могут быть реализованы в связи с явлением теплового кризиса (т. е. невозможностью перейти через скорость звука при одностороннем воздействии — подводе тепла).

Фиг. 3,18. Зависимость числа  $M$  для распространения детонационной волны от безразмерной характеристики подогрева.

1 — область нестационарной детонации; 2 — стационарная скорость детонации; 3 — предельная скорость нормального горения; 4 — область стационарного нормального горения.



Именно этим следует объяснить, повидимому, что переход от нормального горения к детонации, как показывают опыты в трубах, осуществляется скачкообразно.

Из графиков на фиг. 3,17 и 3,18 видна также еще одна интересная деталь явления. Достаточно самого незначительного теплового воздействия, чтобы предельная скорость нормального горения стала существенно ниже, а стационарная скорость детонации существенно выше скорости звука.

Приведем также простые приближенные формулы для расчета разрежения<sup>1</sup> в зоне горения стационарной детонационной волны (для  $\theta > 1$ ):

$$\frac{p_2}{p_3} \approx 1 + \frac{1+k+8\theta}{1+\frac{1}{k}+8\theta} \quad (3,48)$$

и в фронте нормального горения при максимальной скорости пламени:

$$\frac{p_2}{p_3} \approx 1 + k \frac{1+4\theta}{3+4\theta}. \quad (3,49)$$

Остановимся теперь более подробно на некоторых общих свойствах неадиабатических одномерных волн для идеального газа. Из уравнений неразрывности и импульсов в виде:

$$p_3 - p_1 = \rho_1 \omega_1^2 - \rho_3 \omega_3^2 = \omega_1 \omega_3 (\rho_3 - \rho_1)$$

следует, что в любом случае скачка давлений справедливо соотношение, выведенное нами в главе 3,1:

$$\frac{p_3 - p_1}{\rho_3 - \rho_1} = \omega_1 \cdot \omega_3. \quad (3,20)$$

С другой стороны, из уравнения энергии нетрудно получить с учетом (3,20) следующее соотношение, справедливое для скачка при подводе или отводе тепла<sup>2</sup>:

$$\frac{p_3 - p_1}{\rho_3 - \rho_1} = a_3^{*2} + \frac{\rho_1}{\rho_3 - \rho_1} (a_3^{*2} - a_1^{*2}). \quad (3,50)$$

<sup>1</sup> Эти формулы легко вывести из приводимых ранее зависимостей  $\frac{p_2}{p_1} = f(\lambda_1)$  и выражений (3,46) — (3,47) для коэффициента скорости распространения волны. Вывод аналогичных зависимостей для других параметров предоставляем читателю.

<sup>2</sup> Приведем вкратце вывод уравнения (3,50). Из уравнений энергии имеем:

$$c_p (T_{01} - T_1) = \frac{A \omega_1^2}{2g}; \quad c_p (T_{03} - T_3) = \frac{A \omega_3^2}{2g}.$$

Заменив  $T = \frac{p}{\rho g R}$ , получим:  $p_1 = \rho_1 g R T_{01} - \frac{AR}{c_p} \rho \omega_1^2$ ;

$$p_3 = \rho_3 g R T_{03} - \frac{AR}{c_p} \rho_3 \omega_3^2,$$

откуда

$$p_3 - p_1 = \rho_3 g R T_{03} - \rho_1 g R T_{01} - \frac{AR}{c_p} (\rho_3 \omega_3^2 - \rho_1 \omega_1^2)$$

Приравнивая правые части уравнений (3,20) и (3,50) друг другу и заменяя:

$$\frac{\rho_1}{\rho_3 - \rho_1} = \frac{1}{\frac{\rho_3}{\rho_1} - 1} = \frac{1}{\frac{w_1}{w_3} - 1} = \frac{w_3}{w_1 - w_3},$$

получим следующее соотношение между скоростями движения и критическими скоростями:

$$w_1 w_3 (w_1 - w_3) = a_3^{*2} w_1 - a_1^{*2} w_3. \quad (3,51)$$

В частном случае, когда подвод тепла отсутствует, мы снова приходим к соотношению

$$w_1 w_3 = a^{*2} \quad (3,2')$$

— для адиабатического скачка уплотнения. В интересующем нас случае теплового кризиса, т. е. при  $\lambda_3 = 1$  и  $w_3 = a_3^*$ , уравнение (3,51) переходит в следующее простое равенство:

$$(w_1 - a_3^*)^2 = a_3^{*2} - a_1^{*2}. \quad (3,52)$$

Из последнего выражения следует:

$$w_1 = a_3^* \pm \sqrt{a_3^{*2} - a_1^{*2}}. \quad (3,53)$$

Как и ранее, мы имеем здесь два решения, отвечающие минимальной скорости детонации (положительный корень  $w_1 > a_3^*$ ) и максимальной скорости нормального горения (отрицательный корень;  $w_1 < a_3^*$ ).

Уравнение (3,53) определяет абсолютную величину скорости распространения скачка относительно неподвижного газа, или, что то же, скорости притекания газа к неподвижному

или

$$p_3 - p_1 = \rho_3 g R T_{03} - \rho_1 g R T_{01} + \frac{k-1}{k} w_1 w_3 (\rho_3 - \rho_1);$$

с учетом уравнения (3,20) и равенства  $a^{*2} = \frac{2k}{k+1} g R T_0$ , имеем:

$$\frac{p_3 - p_1}{\rho_3 - \rho_1} = \frac{\rho_3 a_3^{*2} - \rho_1 a_1^{*2}}{\rho_3 - \rho_1} = a_3^{*2} + \frac{\rho_1}{\rho_3 - \rho_1} (a_3^{*2} - a_1^{*2}), \quad (3,50)$$

фронту скачка. Полученные ранее соотношения относились именно к этой схеме, когда скачок предполагался неподвижным, а газ проходящим через него.

### 3.10. РАСЧЕТ АБСОЛЮТНЫХ СКОРОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

Рассмотрим теперь, какой вид приобретут все выражения, если перейти к нормальной схеме распространения волны детонации или горения со скоростью  $w_1$ , в неподвижном газе (см. схему на фиг. 3,12).

В этом случае, как было указано выше, за фронтом ударной волны будут следовать невоспламенившиеся газы со скоростью:

$$w_{II} = w_1 - w_2, \quad (3,25)$$

а позади области горения будут двигаться продукты сгорания со скоростью:

$$w_{III} = w_1 - w_3. \quad (3,26)$$

Нетрудно видеть, что в случае детонации, когда:

$$w_1 > w_3 > w_2,$$

обе величины  $w_{II}$  и  $w_{III}$  будут положительны. Это означает, что как фронт пламени, так и продукты сгорания движутся в том же направлении, что и фронт ударной волны, однако скорость частиц газа в фронте пламени выше, чем в продуктах сгорания:

$$w_1 > w_{II} > w_{III}$$

Иные соотношения получатся в случае нормального горения, когда:

$$w_1 = w_2 < w_3.$$

Величина  $w_{II}$  будет здесь отрицательной, т. е. движение продуктов сгорания будет происходить в сторону, противоположную направлению движения фронта пламени.

В условиях теплового кризиса при стационарном режиме детонации и при предельной скорости нормального горения, когда  $w_3 = a_3^*$  и  $\lambda_3 = 1$ , из формулы (3,53), с учетом (3,26) следует:

$$w_{III} = w_1 - w_3 = \pm \sqrt{a_3^{*2} - a_1^{*2}}. \quad (3,54)$$

Знак плюс, как и везде, отвечает детонации, знак минус — нормальному горению.

Найдем теперь выражения для коэффициентов скорости в абсолютном движении. Для фронта ударной волны:

$$\lambda_1 = \frac{w_1}{a_1^*} = \frac{w_1^*}{a_2^*}, \text{ так как } a_1^* = a_2^*.$$

Для частиц газа, следующих непосредственно за фронтом ударной волны,

$$\lambda_{II} = \frac{w_{II}}{a_1^*} = \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}. \quad (3,55)$$

Наконец, для продуктов сгорания, согласно формуле (3,54), будем иметь:

$$\lambda_{III} = \frac{w_{III}}{a_3^*} = \pm \sqrt{1 - \frac{a_1^{*2}}{a_3^{*2}}} = \pm \sqrt{1 - \frac{T_{01}}{T_{03}}},$$

отсюда с помощью уравнения (3,35)

$$\frac{T_{01}}{T_{03}} = \left( \frac{2\lambda_1}{1 + \lambda_1^2} \right)^2$$

найдем:

$$\lambda_{III} = \frac{\lambda_1^2 - 1}{\lambda_1^2 + 1}. \quad (3,56)$$

При  $\lambda_1 > 1$  (детонация) величина  $\lambda_{III} > 0$ ; при  $\lambda_1 < 1$  (нормальное горение)  $\lambda_{III} < 0$ . В частном случае  $\lambda_1 = 1$  имеет место  $\lambda_{III} = 0$ , т. е. при движении волны со скоростью звука, когда детонация и горение вырождаются в обычную акустическую волну, газ остается неподвижным. Этот случай отвечает инертной среде ( $\vartheta = 0$ ).

Определим также максимальные значения скорости движения продуктов сгорания, отвечающие бесконечно большой калорийности смеси ( $\vartheta = \infty$ ). Для детонации при  $\vartheta = \infty$  имеем  $\lambda_1^2 = \frac{k+1}{k-1} = \lambda_{\text{макс}}^2$ ; в соответствии с этим уравнение (3,56) дает:

$$\lambda_{III \text{ макс}} = \frac{1}{k}. \quad (3,57)$$

В случае нормального горения при  $\vartheta = \infty$ ,  $\lambda_1 = 0$  соответственно:

$$\lambda_{III \text{ макс}} = -1. \quad (3,58)$$

Таким образом, абсолютная скорость движения продуктов сгорания при прямом тепловом скачке никогда (т. е. ни при детонации, ни при нормальном горении) не превышает скорости звука. В противоположность этому, скорость движения частиц газа за фронтом ударной волны, как это видно из формулы (3,55), может быть выше звуковой, если:

$$\lambda_{II} = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} > 1$$

или

$$\lambda_1^2 - \lambda_1 - 1 > 0,$$

т. е. при  $\lambda_1 > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,62$  и  $M_1 > 2$  (для  $k = 1,4$ ).

Максимальное значение скорости газа за фронтом ударной волны будет, очевидно, достигнуто при  $M_1 = \infty$  и  $\lambda_1^2 = \frac{k+1}{k-1}$ ; оно будет равно:

$$\lambda_{II \text{ макс}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}. \quad (3,59)$$

При  $k = 1,4$ ,  $\lambda_{II} \approx 2,04$  и  $M_{2 \text{ макс}} \approx 3,4$ .

Нетрудно показать, что абсолютные скорости газа в начале и конце зоны горения в детонационной волне связаны между собой предельно простым соотношением:

$$w_{II} = 2w_{III}. \quad (3,60)$$

(абсолютная скорость движения газа во фронте пламени при детонации всегда вдвое выше скорости движения продуктов сгорания). Для доказательства напомним отношение<sup>1</sup>:

$$\frac{w_{II}}{w_{III}} = \frac{\lambda_{II}}{\lambda_{III}} \frac{a_1^{*2}}{a_3^{*2}} = \frac{\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}}{\frac{\lambda_1^2 - 1}{\lambda_1^2 + 1}} \cdot \frac{2\lambda_1}{1 + \lambda_1^2} = 2.$$

Приведем также простое соотношение для предельного падения давления в зоне горения. Из формул (3,27) и (3,56) имеем:

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 \pm k\lambda_{III}. \quad (3,61)$$

<sup>1</sup> Здесь используются выражения (3,55)—(3,56) и (3,35).

Знак минус берется при нормальном горении, знак плюс — при детонации. В предельных случаях смеси бесконечно большой калорийности ( $\vartheta = \infty$ ) и максимальной скорости движения продуктов сгорания имеем:

а) при стационарной детонации ( $\lambda_{III} = \frac{1}{k}$ )

$$\left(\frac{p_2}{p_3}\right)_{\text{макс}} = 2; \quad (3,62)$$

б) при максимальной скорости нормального горения ( $\lambda_{III} = -1$ )

$$\left(\frac{p_2}{p_3}\right)_{\text{макс}} = 1 + k. \quad (3,63)$$

Таким образом, в предельном случае горючей смеси бесконечно большой калорийности в случае нормального горения (при  $\lambda_3 = 1$ ) давление падает во фронте пламени сильнее, чем в зоне горения детонационной волны при аналогичных условиях ( $\vartheta = \infty$ ;  $\lambda_3 = 1$ ).

Значительные повышения давления происходят при встрече детонационной волны с препятствием.

Для изэнтропийного торможения частиц газа, движущихся за фронтом горения со скоростью  $w_{III}$  (напомним, что всегда для детонации и медленного горения  $w_{III} \leq a_3^*$ ;  $\lambda_{III} \leq 1$ ) полное давление будет равно:

$$\frac{p_{03}}{p_3} = \frac{1}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{III}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}. \quad (3,64)$$

Аналогичная формула будет относиться также и к торможению частиц газа за ударной волной для режима  $\lambda_{II} < 1$ :

$$\frac{p_{02}}{p_2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{II}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}. \quad (3,65)$$

Для сверхзвуковых режимов при  $\lambda_{II} > 1$ , в случае, когда торможение начнется с прямого скачка уплотнения, переводящего поток к дозвуковой скорости  $\lambda_{II}^1 = \frac{1}{\lambda_{II}}$  и к давлению,



определяемому формулой (3,3), полное давление будет равно:

$$\frac{p_{02}}{p_2} = \frac{\lambda_{II}^2}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{II}^2\right) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_{II}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \quad (3,66)$$

Например, при  $\lambda_1^2 = \frac{k+1}{k-1}$ , т. е.  $\lambda_{II} \approx 2,042$  (для  $k=1,4$ ), получим предельное повышение давления при торможении на тупом препятствии:

$$\frac{p_{02}}{p_2} \approx 15,$$

или по сравнению с давлением в продуктах сгорания:

$$\frac{p_{02}}{p_3} \approx 30.$$

При встрече волны с остроносим препятствием могут образоваться косые скачки уплотнения, подчиняющиеся своим закономерностям. Этих вопросов, равно как расчета косых детонационных волн, мы не будем здесь касаться.

### 3.11. ИЗОБРАЖЕНИЕ ДЕТОНАЦИИ В $pV$ -ДИАГРАММЕ

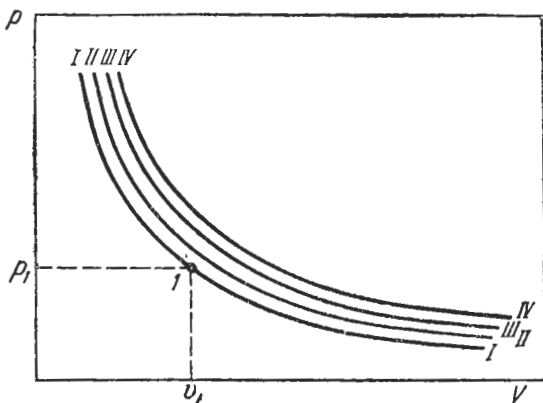
В литературе по теории детонации принято изображение процесса в  $pV$ -диаграмме. Отсылая интересующихся подробностями к соответствующим источникам<sup>1</sup>, ограничимся здесь краткой интерпретацией полученных выше выводов применительно к диаграмме  $pV$ .

Можно показать, что геометрическое место термодинамически возможных конечных состояний газа после теплового скачка изображается в диаграмме  $pV$  кривой гиперболического вида, не проходящей через начальную точку  $(p_1, V_1)$ , отвечающую исходному состоянию газа до скачка.

Это хорошо видно, например, на фиг. 3,19, на которой изображен ряд кривых  $II-II$ ,  $III-III$ ,  $IV-IV$  (ударных адиабат для процесса с тепловыделением), отвечающих различному количеству тепла, выделяющегося в скачке. Только в пределе при  $Q=0$ , т. е. при вырождении теплового скачка в адиабатиче-

<sup>1</sup> Например, к цитированным выше книгам. Особо следует отметить анализ процесса детонации в диаграмме  $pV$ , выполненный проф. В. А. Михельсоном в его замечательной диссертации „О нормальной скорости воспламенения гремучих газовых смесей“, опубликованной в 1890 г. и сохранившей значительный интерес до настоящего времени (см. В. А. Михельсон. Собрание сочинений, т. I, изд. 1930).

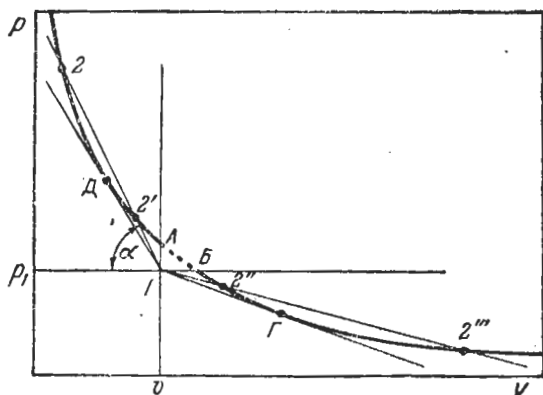
ский (кривая I—I фиг. 3,19), ударная адиабата для адиабатической ударной волны проходит через начальную точку I. Выберем теперь одну из кривых (для  $Q > 0$ ) и проведем из



Фиг. 3,19. Ударные адиабаты для теплового скачка в  $pV$ -диаграмме ( $Q_{IV} > Q_{III} > Q_{II} > Q_I = 0$ ).

начальной точки семейство прямых линий до пересечения с кривой (фиг. 3,20).

Все прямые, проведенные внутри угла, образованного двумя касательными в области более высокого, сравнительно с



Фиг. 3,20. Определение скорости распространения теплового скачка в  $pV$ -диаграмме.

исходным, давления и меньшего удельного объема (точка Д) и в области пониженного давления и увеличенного удельного объема (точка Г), имеют общие точки с адиабатой.

При анализе изображения ударной адиабаты в диаграмме  $pV$  мы видели, что тангенс угла наклона прямой (например,

$I-2$ ) к оси абсцисс  $\operatorname{tg} \alpha$  — пропорционален квадрату скорости распространения теплового скачка —  $w_1$  [см. формулу (3,24)]:

$$\operatorname{tg} \alpha \sim w_1^2$$

или

$$w_1 \sim \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Основываясь на этом выражении, следует отбросить все значения скорости  $w_1$ , лежащие вне касательных  $I-D$  и  $I-G$ , а также все точки ударной адиабаты на участке  $AB$  между изохорой  $I-A$  и изобарой  $I-B$ , которым отвечает мнимая скорость распространения.

Следовательно, все физически возможные конечные состояния газа после скачка расположены в двух областях кривой — выше точки  $A$  — в области сжатия и ниже точки  $B$  — в области расширения.

Нетрудно показать, что точкам касания  $D$  и  $G$  соответственно в области повышенных и пониженных, сравнительно с исходным, давлений отвечает условие теплового кризиса. Иными словами, в точках  $D$  и  $G$  скорость движения газа относительно скачка равна местной скорости звука<sup>1</sup>:

$$w_D = a_D^*$$

и

$$w_G = a_G^*.$$

Основываясь на результатах, изложенных ранее, мы можем теперь без вывода разъяснить все возможные конечные режимы и указать последовательность явлений, к ним приводящую.

В области расширения газа в простом тепловом скачке с одним только подводом тепла возможные конечные состояния ограничиваются участком  $B-G$  (до теплового кризиса). Дальнейший участок кривой и все лежащие на нем точки (например,  $2'''$ ) следует отбросить, так как переход к ним связан с адиабатическим скачком разрежения (например,  $2''-2'''$ ), противоречащим второму закону термодинамики.

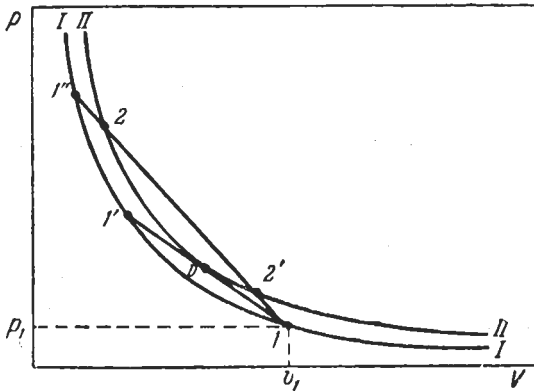
Таким образом, тепловые скачки в области дозвуковых скоростей возможны при любых значениях скорости распространения  $w_1$  в пределах от 0 (изобара  $I-B$ ) до максимальной скорости, отвечающей тепловому кризису ( $I-G$ ). Для распространения пламени эта область отвечает нормальному горению.

В области повышенных давлений принципиально возможны все конечные состояния, лежащие выше точки  $A$ , и, следо-

<sup>1</sup> В этих точках имеет место касание ударной адиабаты и изоэнтропы.

вательно, все отвечающие им скорости распространения теплового скачка в пределах от минимальной скорости при тепловом кризисе ( $I-D$ ) до бесконечно большой (изохора  $I-A$ ). Каждому значению секущей в этих пределах соответствуют два конечные состояния газа (например, точки  $2$  и  $2'$ ). Только для касательной  $I-D$  конечное состояние будет однозначным.

Сравнивая между собой состояния газа в точках  $2$  и  $2'$ , нетрудно установить, что второе из них отвечает простому тепловому скачку в пределах сверхзвуковой области (например, скачку конденсации  $I-2'$ ). В противоположность этому, переход из точки  $I$  в точку  $2$  может быть совершен путем адиабата-



Фиг. 3,21. Схема тепловых скачков в  $pV$ -диаграмме.

тического скачка уплотнения  $I-1''$  и последующего теплового скачка  $1''-2$  (фиг. 3,21). Таким образом, именно этот тип сложного теплового скачка отвечает распространению детонационной волны.

Поэтому для процесса распространения детонации следует исключить все конечные состояния типа  $2'$  на участке  $A-D$ .

Из всех возможных конечных состояний газа на участке кривой от точки  $D$  и выше для стационарного теплового скачка следует отобрать одно только значение в точке  $D$  при минимальной скорости распространения детонации. Действительно, можно показать, что в точке  $2$  скорость продуктов сгорания относительно скачка меньше звука. Поэтому разрежение, следующее за ударной волной, будет догонять и ослаблять ее, пока не наступит тепловой кризис в точке  $D$ .

Таким образом, мы снова приходим к тем же выводам, что и ранее: точка  $D$  соответствует минимальной скорости детонации, единственно реальной в условиях теплового кризиса. Все состояния типа точки  $2$  отвечают неустановившемуся процес-

су детонации, тогда как точки типа  $Z'$  — простому тепловому скачку в сверхзвуковом потоке, например, скачку конденсации.

Приведенная схема изображения процесса распространения тепловых скачков в диаграмме  $pV$  содержит в себе все выводы, полученные выше при подробном анализе процесса. Достоинством ее является применимость к детонации реальных газов, а также конденсированных веществ.

## Глава 3,4. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ К ГАЗОВЫМ ТЕЧЕНИЯМ

### 3,12. УРАВНЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Последнюю, дополнительную, главу книги мы посвятим краткому изложению вопроса о применении к расчетам первого уравнения Эйлера, т. е. уравнения количества движения для потока жидкости.

Вопрос этот имеет большое значение для решения практических задач по термодинамике потока, в особенности для тех случаев, когда речь идет о взаимодействии потока с внесенным в него твердым телом. В качестве примера, имеющего известный общий интерес в связи с развитием двигателей, в заключительном разделе рассмотрим вкратце элементарную схему расчета реакции струи.

До сих пор при решении различных задач мы исходили, главным образом, из дифференциальных уравнений термодинамики потока. Исключением явились только рассмотренные в этой (третьей) части книги примеры разрывных течений — скачков. Для последних, по самому смыслу задачи, необходимо было применять уравнения в конечной форме.

Для уравнений неразрывности и энергии (и, конечно, уравнения состояния) переход от дифференциальных соотношений к интегральным не представляет в большинстве случаев каких-либо затруднений. Не так обстоит дело с обобщенным уравнением Бернулли. Только в некоторых частных случаях это уравнение преобразуется к удобному для расчета конечных соотношений виду; например, при движении по каналу постоянного сечения в отсутствии механической работы и трения имеем:

$$p + \rho \omega^2 = \text{const.} \quad (2,33)$$

В этой форме оно было использовано нами при расчете тепловых и адиабатических скачков. В общем случае интегрирование уравнения Бернулли не всегда возможно из-за отсутствия сведений о связи  $p$  и  $\rho$  в процессе. Поэтому большое значение имеет для расчета, в первую очередь, механических

эффектов в газовых течениях, применение уравнения количества движения. Особенность последнего состоит в том, что при удачном выборе ограничивающего контура удастся получить ряд существенных результатов без учета (зачастую — и без знания) механизма процесса.

Как известно из механики, закон количества движения формулируется следующим образом: импульс силы равен изменению количества движения. В применении к одномерному движению жидкости уравнение количества движения для потока (первое уравнение Эйлера) может быть записано в виде:

$$P = \frac{G_2}{g} w_2 - \frac{G_1}{g} w_1, \quad (3,67)$$

где  $P$  — проекция на направление движения равнодействующей всех сил, приложенных к жидкости;

$G_2$ ,  $G_1$ ,  $w_2$  и  $w_1$  — соответственно секундные весовые расходы и скорости в двух сечениях потока.

В частном случае движения с постоянным весовым расходом ( $G_2 = G_1 = G = \text{const}$ ) уравнение Эйлера (3,67) упрощается и переходит в следующее:

$$P = \frac{G}{g} (w_2 - w_1). \quad (3,68)$$

Например, при движении без трения по цилиндрическому каналу в случае, когда единственными силами, действующими на жидкость, являются силы давления, результирующая сила  $P$  равна <sup>1</sup>:

$$P = F(p_1 - p_2).$$

В этом случае мы снова приходим к уравнению

$$p_1 - p_2 = \frac{G}{gF} (w_2 - w_1) = \rho w (w_2 - w_1)$$

или

$$p + \rho w^2 = \text{const}, \quad (2,38)$$

полученному ранее при интегрировании уравнения Бернулли в виде

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{dw^2}{2} = 0 \quad (2,36)$$

при условии  $\rho w = \text{const}$ . В этом частном случае уравнение Бернулли в конечной форме совпадает с уравнением количества движения.

<sup>1</sup> Мы учитываем здесь только давление на торцевые поверхности жидкости на выбранном участке 1—2, так как проекция сил давления, действующих на боковую поверхность жидкости, на направление движения равна нулю для цилиндрического канала.

Из рассмотренного примера, между прочим, следует, что результирующая сила, приложенная к жидкости со стороны стенок цилиндрического канала и, следовательно, равная ей по величине и обратная по направлению сила реакции, приложенная к стенкам канала, равна нулю. Это означает, что при сколь угодно значительном подводе энергии к газу, движущемуся по цилиндрической трубе (например, при сжигании топлива в цилиндрической камере сгорания, открытой с обеих сторон<sup>1)</sup>), не возникает реактивной силы. Иными словами, цилиндрическая труба «не создает тяги».

В общем случае движения в трубе постоянного сечения сила  $P$  равна

$$P = (p_1 - p_2)F - P_r - P_T,$$

где  $P_r$  и  $P_T$  — соответственно сила трения и сила, действующая на жидкость от какого-либо устройства (машины), передающего ей механическую энергию.

Для бесконечного малого контура, приравнявая дифференциал равнодействующей силы  $dP$  изменению количества движения, получим:

$$dP = Fdp - dP_r - dP_T = \frac{G}{g} dw. \quad (3,69)$$

Это уравнение, после деления на произведение  $\rho F$ , переходит в обобщенное уравнение Бернулли:

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{dw^2}{2} + g dL_T + g dL_r = 0, \quad (1,4)$$

где  $dL_T = -\frac{dP_T}{\gamma F}$  и  $dL_r = -\frac{dP_r}{\gamma F}$  — элементарные работа трения и техническая работа, приходящиеся на 1 кг жидкости. В дальнейшем будем для упрощения считать, что обмен механической энергией отсутствует ( $dL_T = 0$ ).

Из уравнения (3,69) можно двояко рассчитать силу, действующую на жидкость, или равную ей по величине и обратную по направлению реакцию, приложенную к стенкам канала. Этот расчет можно выполнить, во-первых, путем вычисления интеграла сил давления и сопротивления:

$$P = \int Fdp - \int dP_r, \quad (3,70)$$

если известно распределение их по контуру.

<sup>1</sup> Здесь — в одномерной схеме потока — не рассматривается внешнее обтекание трубы (отрыв потока от передних кромок ее, искривление линий тока и т. п.).

Во-вторых, вычисление силы  $P$  возможно по изменению количества движения:

$$P = \frac{G}{g} (\omega_2 - \omega_1) \quad (3,68)$$

(для случая  $G = \text{const}$  или по уравнению (3,67) при переменном весовом расходе). Второй путь расчета является во многих случаях более простым и доступным, так как не связан с проникновением в сущность процессов, происходящих внутри контура. Практически оказывается наиболее целесообразным объединение обоих методов расчета, т. е. выбор такого контура, на границах которого известны скорости или давления. При этом умелый выбор контура, ограничивающего поток, в значительной мере предрешает эффективность применения уравнения Эйлера.

В следующих разделах этой главы рассмотрим простейшие примеры применения этого уравнения к течению с переменным расходом по трубе постоянного сечения и к расчету основной характеристики реактивных двигателей — реакции струи (или, как это принято называть в теории этих двигателей, — «тяги»). Заметим, что вычисление реактивной силы представляет значительный интерес так же и потому, что величина ее легко определяется в эксперименте и может служить дополнительной суммарной характеристикой при изучении какого-либо процесса (например, при определении полноты сгорания и т. п.). В этих примерах мы не будем входить в детали вопроса, а ограничимся изложением элементарных сведений.

### 3.13. ТЕЧЕНИЕ С ПЕРЕМЕННЫМ РАСХОДОМ

В качестве первого примера, иллюстрирующего применение уравнения количества движения, рассмотрим течение газа с переменным расходом в цилиндрической трубе.

Представим себе следующую схему процесса (см. фиг. 3,22,а). На весьма малом участке канала постоянного сечения к основному потоку газа добавляется бесконечно малая масса жидкости  $dG$  (условно показанная на фиг. 3,22,а вытекающей из отдельной трубы). Примем при этом, что проекция скорости движения жидкости на направление движения основного потока равна  $\omega_{жс}$ .

Для показанного пунктиром на схеме контура, в пренебрежении трением, результирующая сила, действующая на жидкость внутри контура, равна разности сил давления, приложенных к торцевым поверхностям канала. Эту силу мы должны приравнять изменению количества движения. Последнее складывается из разности количества движения, выносимого



потоком из контура и вносимого в него как основным потоком, так и дополнительной массой жидкости. Таким образом:

$$Fp - F(p + dp) = \frac{G + dG}{g}(\omega + d\omega) - \frac{G}{g}\omega - \frac{dG}{g}\omega_{жс}$$

После преобразований, отбрасывая члены второго порядка малости и заменяя из уравнения неразрывности:  $G = F\rho g\omega$ , получим:

$$dp + \rho\omega d\omega + (\omega - \omega_{жс})d(\rho\omega) = 0. \quad (3,71)$$

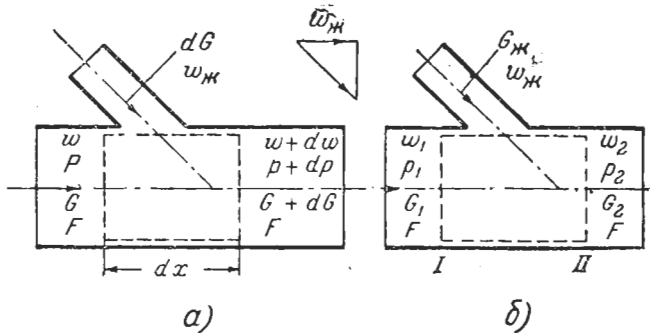
В частном случае  $\omega_{жс} = 0$  при пренебрежимо малой абсолютной скорости жидкости в направлении потока имеем:

$$dp + d(\rho\omega^2) = 0, \quad (3,72)$$

или

$$p + \rho\omega^2 = \text{const}, \quad (2,38)$$

как и в случае движения с неизменным весовым расходом по каналу постоянного сечения.



Фиг. 3,22.

В другом частном случае при  $\omega_{жс} = \omega$ , т. е. при пренебрежимо малой относительной скорости движения дополнительной массы (по отношению к основному потоку), соответственно имеем:

$$dp + \rho\omega d\omega = 0. \quad (3,73)$$

Для интегрирования этого уравнения необходима дополнительная связь между переменными (например, между давлением и плотностью — уравнение изоэнтропы, политропы и т. п.).

Оба эти предположения ( $\omega_{жс} = 0$  и  $\omega_{жс} = \omega$ ) были использованы в расчете испарения и конденсации жидкости в по-

токе газа (см. §§ 2,21 и 2,22). С помощью уравнения (3,71) можно решить ту же задачу в общем виде для любого значения скорости движения жидкости.

Заметим, что уравнение (3,71) было получено в предположении бесконечно малого подвода массы на бесконечно малом участке канала. Это условие не является, однако, обязательным для применения уравнения количества движения.

Обращаясь к схеме на фиг. 3,22,б, нетрудно аналогичным путем составить в конечной форме уравнение количества движения для выбранного контура:

$$F(p_1 - p_2) = \frac{G_2}{g} w_2 - \frac{G_1}{g} w_1 - \frac{G_{жс}}{g} w_{жс}.$$

С учетом равенств

$$G_1 = Fg\rho_1 w_1; \quad G_2 = Fg\rho_2 w_2; \quad G_2 - G_1 = G_{жс}$$

полученное уравнение можно переписать в виде:

$$p_1 - p_2 = \rho_2 w_2^2 - \rho_1 w_1^2 - (\rho_2 w_2 - \rho_1 w_1) w_{жс}. \quad (3,74)$$

При  $w_{жс} = 0$  мы вновь приходим к равенству:

$$p + \rho w^2 = \text{const.} \quad (2,38)$$

В другом частном случае при  $w_{жс} = w_2$  имеем:

$$p_1 - p_2 = \rho_1 w_1 (w_2 - w_1). \quad (3,75)$$

Это уравнение отвечает, например, скачку конденсации, при котором конденсат увлекается основным потоком с относительной скоростью, практически равной нулю.

В случае  $w_{жс} = w_1$ , отвечающем, например, частичному осушению насыщенного пара, вместо (3,75) мы имеем бы

$$p_1 - p_2 = \rho_2 w_2 (w_2 - w_1). \quad (3,76)$$

Таким образом, уравнение количества движения позволяет нам без рассмотрения детального механизма явления получить конечное соотношение.

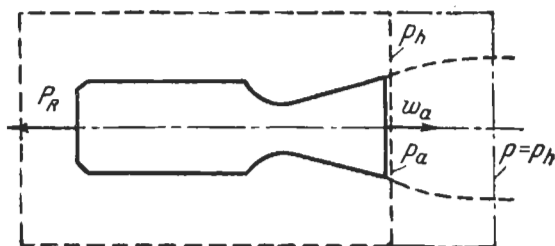
Как было показано выше на примере задачи об испарении и конденсации, принятие того либо иного предположения в отношении обмена количеством движения существенным образом сказывается на результатах расчета.

Заметим в заключение, что наши расчеты относились к движению по каналу постоянного сечения, или к «скачкам», в которых изменение сечения канала пренебрежимо мало, так как процесс сосредоточен на весьма малой длине канала. Для ка-

нала переменного сечения в расчете следует учесть также проекции на направление движения сил давления, приложенных к боковым стенкам.

### 3.14. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА РЕАКЦИИ СТРУИ

В этом разделе проиллюстрируем применение уравнения Эйлера на частном случае взаимодействия потока жидкости с помещенным в нем твердым телом. Аналогичный метод расчета может быть применен к расчету сопротивления тела, находящегося в потоке, если на границах рассматриваемого контура течение можно считать одномерным.



Фиг. 3,23. Схема к расчету реакции струи.

Допустим, что из ракетного двигателя, схема которого изображена на фиг. 3,23, происходит истечение струи жидкости или газа со скоростью  $w_a$ . Давление в выходном сечении сопла обозначим  $p_a$ , а в окружающей среде —  $p_h$ . В общем случае, очевидно,  $p_a \neq p_h$ . (Если режим истечения газа сверхкритический, т. е. число  $M$  на выходе  $M_a > 1$ , то давление на срезе сопла не зависит от величины противодавления, а определяется начальным давлением в камере и процессом изменения состояния в сопле.) Частный случай равенства  $p_a = p_h$  называется „расчетным режимом“ истечения.

Выбирая ограничивающий контур, как это указано на фиг. 3,23 (пунктиром), применим к нему уравнение количества движения.

Результирующая сила  $P$ , входящая в это уравнение, в рассматриваемом примере равна проекции на направление движения интеграла сил давления и сопротивления, действующих на поверхность расположенного внутри контуров аппарата  $P_R$  и силы давления, приложенной к выходной поверхности сопла и равной произведению площади сечения  $F_a$  на разность давлений. Эту силу мы должны прирав-

нять количеству движения, выносимому струей из контура, поскольку скорость втекания газа в контур равна нулю.

В результате имеем:

$$P = P_R - F_a(p_a - p_h) = \frac{G}{g} w_a$$

или

$$P_R = \frac{G}{g} w_a + F_a(p_a - p_h), \quad (3,77)$$

где  $P_R$  — реакция струи<sup>1</sup> (тяги);

$F_a$  — выходное сечение сопла.

Если бы выбрали контур вдаль от выходного сечения сопла, где давление в струе и окружающей среде одинаково, уравнение (3,77) упростилось бы и приняло вид

$$P_R = \frac{G}{g} w'. \quad (3,77')$$

В этом случае, однако, мы ввели бы в него неизвестную, вообще говоря, величину скорости движения жидкости  $w'$  — вдаль от выходного сечения сопла аппарата. Между тем, расчеты, приведенные во второй части книги, позволяют без труда определить скорость истечения  $w_a$  при заданных условиях (например, состоянии газа в камере и отношении площадей критического и выходного сечения сопла).

Величина

$$w' = g \frac{P_R}{G} = w_a + g \frac{p_a - p_h}{i_a}, \quad (3,78)$$

которую обычно называют приведенной скоростью истечения, характеризует эффективность процесса в двигателе<sup>2</sup>.

Выясним также зависимость  $w'$  от режима истечения, т. е. от отношения давления на срезе сопла к давлению в окружающей среде.

Заметим предварительно, что разность  $p_a - p_h$ , равная нулю при истечении с дозвуковой скоростью, может быть в случае сверхзвукового истечения как положительной, так

<sup>1</sup> Направленная в сторону, противоположную  $w_a$ ; знак минус в (3,77) отброшен.

<sup>2</sup> В теории двигателей для оценки эффективности обычно пользуются другой характеристикой, пропорциональной  $w'$ , а именно:

$$P_{уд} = \frac{P_R}{G} = \frac{w'}{g} \left[ \frac{\text{кг.сек}}{\text{кг}} \right],$$

которую называют удельной тягой или единичным импульсом (равным тяге, создаваемой расходом газов в 1 кг в секунду).

и отрицательной. Первому отвечает истечение с недорасширением ( $p_a > p_h$ ), второму — с перерасширением ( $p_a < p_h$ ). В последнем случае газовая струя по выходе из сопла приходит к давлению окружающей среды путем одного или нескольких скачков уплотнения. Нетрудно убедиться, что максимум величины  $w'$  приходится на „расчетный режим“ истечения, т. е. случай, когда в выходном срезе сопла устанавливается давление  $p_a = p_h$ .

Для доказательства вычислим производную от  $w'$  по  $p_a$  из формулы (3,78), считая  $p_h = \text{const}$  и приравняем ее нулю:

$$\frac{dw'}{dp_a} = \frac{dw}{dp_a} + \frac{g}{j_a} - g \frac{p_a - p_h}{j_a^2} \frac{dj_a}{dp_a} = 0.$$

Из приведенного выше уравнения Бернулли (2,36) следует:

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{dw^2}{2} = 0,$$

или

$$\frac{dw}{dp_a} = -\frac{g}{j_a}.$$

Производная плотности тока по давлению, входящая множителем в последний член выражения  $\frac{dw'}{dp_a}$  положительна, как это следует, например, из того же уравнения ( $p + \rho w^2 = \text{const}$ ;  $\frac{dj_a}{dp_a} > 0$  плотность тока при истечении из сопла растет при росте и падает при падении давления в выходном сечении — см., например, фиг. 2,27). Поэтому условием экстремума приведенной скорости истечения является равенство давлений на срезе и в окружающей среде:

$$\frac{dw'}{dp_a} = 0 \quad \text{при} \quad p_a = p_h.$$

Нетрудно убедиться и в том, что экстремум этот — максимум

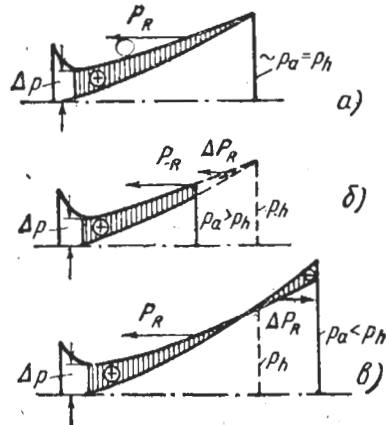
$$\left( \frac{d^2w'}{dp_a^2} = -\frac{g}{j_a^2} \frac{dj_a}{dp_a} < 0 \quad \text{при} \quad p_a = p_h \right).$$

Полученный результат означает, что при расчетном режиме работы сопла приведенная скорость истечения (совпадающая в этом случае с действительной:  $w' = w_a$  при  $p_a = p_h$ ) максимальна. В случае  $p_a \neq p_h$

$$w' = w_a + \frac{g}{j_a} (p_a - p_h),$$

при этом, если имеет место недорасширение ( $p_a > p_h$ ), то падение первого члена в этой формуле — скорости истечения — сказывается на величине  $w'$  сильнее, чем положительная статическая добавка  $\frac{g}{j_a}(p_a - p_h)$ . Наоборот, при перерасширении струи в сопле ( $p_a < p_h$ ) влияние отрицательного в этом случае второго слагаемого, уменьшающего величину  $w'$ , превышает прирост ее за счет увеличения действительной скорости истечения  $w_a$ .

Физически это легко объяснить, если представить себе распределение давления внутри расширяющегося конуса сопла Лаваля (см. фиг. 3,24)<sup>1</sup>. При расчетном режиме истечения ( $p_a = p_h$ ; фиг. 3,24,а) избыточное давление внутри сопла создает результирующую силу (тягу), направленную в сторону, противоположную истечению струи. В случае  $p_a > p_h$  (укороченное сопло; фиг. 3,24,б) мы теряем часть давления, входящую на отброшенный участок. Наконец, в случае  $p_a < p_h$  (перерасширение; фиг.



Фиг. 3,24. Влияние режима истечения на величину реакции струи. а — расчетный режим; б — истечение с недорасширением; в — истечение с перерасширением.

3,24в) на дополнительный участок сопла действует сила, направленная в сторону истечения и уменьшающая суммарную тягу. Существенно, что применение уравнения Эйлера приводит к правильному результату без рассмотрения детальной картины распределения давления внутри двигателя.

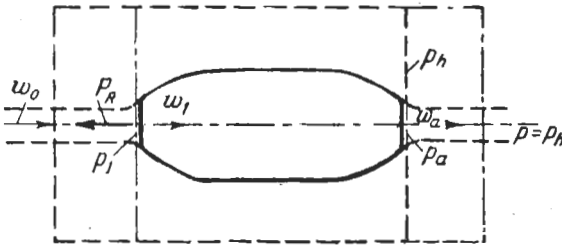
В качестве второго примера расчета реакции струи рассмотрим схему простейшего воздушно-реактивного двигателя, показанную на фиг. 3,25. Выбирая ограничивающий контур, как это показано на рисунке (пунктиром), применим к нему уравнение количества движения. Примем, что на всей поверхности контура, кроме выходного сечения сопла, давление постоянно и равно давлению в окружающей среде. Помимо этого, пренебрегая внешним обтеканием аппарата, примем, что скорость воздуха, относительно аппарата, повсюду одинакова и равна скорости полета —  $w_0$ .

<sup>1</sup> На фиг. 3,24 показано сопло в разрезе и нижняя половина его, симметричная верхней, отброшена.

В этом случае, как и в предыдущем, проекция результирующей силы  $P$  на направление движения складывается из силы  $P_R$ , с которой аппарат действует на жидкость, и сил давления, действующих на выходное сечение сопла:

$$P = P_R - F_a(p_a - p_h).$$

Изменение количества движения складывается здесь из разности количества движения воздушной струи на входе и



Фиг. 3,25. Схема к расчету реакции струи.

выходе в контур и количества движения массы, поступающей в аппарат изнутри контура (топлива):

$$\frac{G_a}{g} (w_a - w_0) + \frac{G_T}{g} w_a.$$

В соответствии с этим имеем:

$$P_R = \frac{G_a}{g} (w_a - w_0) + \frac{G_T}{g} w_a + F_a(p_a - p_h). \quad (3,79)$$

В отличие от уравнения (3,77) тяга двигателя здесь явным образом зависит от скорости полета  $w_0$  (равной скорости втекания воздуха в контур<sup>1</sup>). Второй член в уравнении (3,79) представляет собой количество движения, выносимое добавочной массой (топливом); обычно он невелик и может быть без заметной погрешности отброшен. Что касается влияния „статической добавки“  $F_a(p_a - p_h)$ , то к ней относится все сказанное в предыдущем примере.

<sup>1</sup> Если бы мы провели ограничивающий контур по плоскости входного отверстия двигателя, то в связи с изменением сечения струи воздуха при входе должны были бы ввести в уравнение вместо скорости полета  $w_0$  скорость втекания воздуха  $w_1$  и ввести также поправку на разность статических давлений в этом сечении и окружающей среде.

В частном случае расчетного режима истечения при  $p_a = p_h$ , пренебрегая членом  $\frac{G_T}{g} w_a$ , имеем:

$$P_R = \frac{G_a}{g} (w_a - w_0). \quad (3,80)$$

В двух предельных случаях тяга, очевидно, обращается в нуль. Во-первых, это имеет место при  $w_0 = 0$ , так как это равенство означает также отсутствие расхода воздуха через двигатель:  $G_a = 0$  и, следовательно,  $P_R = 0$ . Во-вторых, тяга такого двигателя обращается в нуль при равенстве скорости истечения скорости полета  $w_a = w_0$ .

Оптимальные условия работы как по максимуму тяги, так и по максимуму эффективности, очевидно, соответствуют некоторому значению скорости полета аппарата в пределах  $0 < w_0 < w_a$ .

Более детальный анализ этих вопросов составляет предмет специальных курсов и выходит за рамки этой книги.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Абрамович, О тепловом кризисе в газовом течении (Доклады Академии наук СССР, т. 54, № 7, 1946). Газовая динамика ВРД. Изд. БНТ, 1947.

2. Г. Н. Абрамович и Л. А. Вулис, К механике распространения детонации и горения (Доклады Академии наук СССР, т. 55, № 2, 1947).

3. С. З. Беленький, О конденсационных скачках (Доклады Академии наук СССР, т. 48, № 3, 1945).

4. М. П. Вукалович и И. И. Новиков, Уравнения состояния реальных газов. Госэнергоиздат, 1948.

5. Л. А. Вулис, О переходе через скорость звука в газовом течении (Доклады Академии наук СССР, т. 54, № 8, 1946). О влиянии трения на переход через скорость звука (Доклады Академии наук СССР, т. 54, № 9, 1946). О законе обращения в течении реального газа (Доклады Академии наук СССР, т. 56, № 8, 1947). Газовая динамика (стационарные одномерные течения). Монография, изд. МАИ им. С. Орджоникидзе, 1949.

6. А. А. Гринб, Влияние места иницирования на параметры воздушной волны при детонации взрывчатых газовых смесей (Прикладная математика и механика, т. 8, № 4, 1944).

7. А. А. Гухман, К теории предельных состояний движущегося газа (Журнал технической физики, т. 9, № 5, 1939). Исследование движения газа по трубе с большой скоростью при наличии теплообмена (Журнал технической физики, т. 10, № 20, 1940).

8. В. С. Жуковский, Техническая термодинамика, ОНТИ, изд. II, 1940.

9. Я. Б. Зельдович, Теория горения и детонации в газах. Изд. Академии наук СССР, 1944. Теория ударных волн и введение в газовую динамику. Изд. Академии наук СССР, 1946.

10. Б. М. Киселев, О расчете одномерных газовых течений (Прикладная математика и механика, т. 11, № 1, 1947).

11. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Статистическая физика ГТТИ, 1940; Механика сплошных сред ГТТИ, 1944.

12. Я. И. Левинсон, Аэродинамика больших скоростей. Оборонгиз, 1948.

13. М. А. Михеев, Основы теплопередачи. Госэнергоиздат, 1949.

14. В. А. Михельсон, О нормальной скорости воспламенения гремучих газовых смесей. Собрание сочинений, т. 1, изд. 1930.

15. И. И. Новиков, Об одном парадоксе предельных состояний течения газов (Известия Академии наук СССР, ОТН, № 7—8, 1945). Замечания к теории предельных состояний течения газов (Известия Академии наук СССР, ОТН № 10—11, 1945). О существовании ударных волн разрежения (Доклады Академии наук СССР, т. 59, № 9, 1948).

16. К. И. Страхович, Прикладная газодинамика. ОНТИ, 1937.

17. Ф. И. Франкль, С. А. Христианович и Р. Н. Алексеева, Основы газовой динамики. Труды ЦАГИ, № 24, 1938.

18. С. А. Христианович, В. А. Гальперин, М. Д. Миллиончиков и Л. А. Симонов, Прикладная газовая динамика, ч. 1. Под редакцией акад. С. А. Христиановича. Изд. 1948.

19. С. А. Христианович, О расчете эжектора. „Промышленная аэродинамика“. Изд. БНТ, 1944.

20. Б. Н. Юрьев, Экспериментальная аэродинамика, т. 1, Оборонгиз, 1939.