С. П. ФИНИКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УЧПЕДГИЗ · 1952

С. П. ФИНИКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций, читанный в Московском городском педагогическом институте

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

*Допущено
Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия
для педагогических институтов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА — 1952

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Во втором издании в целях освобождения от излишнего материала изложение метрических свойств проведено в прямоугольной системе координат.

Чтобы запись суммы одним членом с одинаковыми („немыми") указателями не отличалась от общепринятой, указатели при однородных координатах точки подняты.

Использованы те замечания, которые были сделаны при обсуждении учебника в математической секции Учёного совета Министерства просвещения РСФСР, чтобы в отдельных случаях изменить редакцию или сделать незначительные дополнения:

1. Вектор вводится как физическая величина.
2. При введении сложного отношения подчёркнута независимость его от нормирования точек.
3. При определении умножения векторов векторное произведение вводится ранее скалярного произведения трёх векторов.
4. Геометрический смысл линейной зависимости аналитических точек выводится из рассмотрения ранга матрицы координат.
5. Введено (мелким шрифтом) понятие автополярного тетраэдра третьего рода, чтобы исчерпать все такие тетраэдры.
6. Введено (мелким шрифтом) понятие комплексных точек и комплексного проективного пространства.

С. Фиников

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий курс составлен из лекций, читанных мною в течение последних четырёх лет на первом курсе Московского городского педагогического института им. Потёмкина.

Два соображения руководили мною при выборе метода изложения. Первое относилось к самому содержанию курса. Аналитическая геометрия в своей главной части содержит теорию кривых и поверхностей второго порядка. Эту теорию нельзя изложить, оставаясь в области собственных точек эвклидова пространства. Вместо того чтобы, насилуя природу чисел, говорить в связи с асимптотами о „бесконечно удалённых“ точках, мне казалось проще ввести несобственные точки, систематически пользуясь однородными координатами.

Второе соображение касалось специфической трудности аналитической геометрии: обилия сложных выкладок и громоздких формул. Мне кажется, что это в значительной части происходит от употребления не свойственной задаче системы координат. Проективные свойства фигур должны изучаться в проективных координатах относительно координатного тетраэдра, аффинные — в аффинной системе координат относительно произвольной тройки некомпланарных векторов, метрические — в декартовых координатах относительно прямоугольного трёхгранника. В этой схеме нет места декартовой косоугольной системе координат. Мне кажется, она ещё сохраняется в курсах аналитической геометрии только по традиции. Отдавая дань этой традиции, я сохранил ряд формул косоугольной системы в первой части аналитической геометрии, но и там их можно опустить без всякого вреда.

Книга содержит в основном только тот материал, который был прочитан в аудитории. Однако, в зависимости от состава слушателей и целого ряда других причин, может возникнуть необходимость сокращения его. Поэтому я отметил звёздочкой те статьи и вопросы различной ценности, которые можно опустить, не нарушая общей структуры курса. В некоторых случаях под звёздочкой помещены для справок такие статьи, например эйлеровы углы, на которые имеется только беглая ссылка в основном тексте.

В заключение считаю приятным долгом высказать мою глубокую признательность профессору Д. И. Перепёлкину, который прочёл всю книгу в рукописи и передал мне целую тетрадь больших и малых замечаний, из которых некоторые были весьма существенны. Он же мне сообщил замечание о характере вершин автополярного тетраэдра.

С. Фиников

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

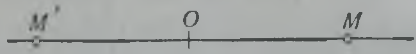
Глава I

ГЕОМЕТРИЯ НА ПРЯМОЙ

Для определения положения какой-либо точки M на прямой можно дать расстояние этой точки от произвольно заданной точки прямой O (начало координат). Нетрудно, однако, заметить, что на прямой имеются две точки M и M' на одном и том же расстоянии:

$$OM = OM',$$

по обе стороны от точки O (черт. 1). Следовательно, определение положения точки на прямой связано с определением отрезка OM не только по величине, но и по направлению.



Черт. 1.

Направленный отрезок называется *вектором*. Обратимся к введению понятия вектора.

§ 1. Понятие вектора

Среди величин, встречающихся при изучении природы, можно различить два вида. Одни из них вполне определяются числом. Таковы, например, встречающиеся в физике величины: масса тела, температура тела в точке, электрический или магнитный потенциал и т. д. Другие отличаются между собой не только числовым значением (напряжённостью, модулем), но и направленностью. Примерами могут служить физические величины: сила, скорость, ускорение движения. Первые из этих величин, определяемые одним числом, называются *скалярами*, вторые — *векторами*. Геометрически вектор может быть представлен направленным отрезком прямой $\overrightarrow{AB}$, где A и B — две точки пространства, взятые в определённом порядке: A — начало, B — конец вектора. Длина отрезка AB (существенно положительное число) называется длиной, или *модулем* вектора. Это величина силы, скорости или ускорения. Прямая $\overrightarrow{AB}$ вместе с перемещением по ней от A к B определяет направление вектора (силы, скорости, ускорения и т. д.).

Содержание понятия вектора вытекает из определения равенства векторов и суммы векторов.

Это значит, что всякая физическая величина, которая удовлетворяет этому определению равенства и для которой сумма определена по правилу сложения векторов, может быть признана вектором.

Определение 1. Два вектора называются *равными* —

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

при выполнении трёх условий:

1) отрезки AB и CD (модули векторов) равны —

$$AB = CD,$$

2) прямые AB и CD параллельны —

$$AB \parallel CD,$$

3) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на этих прямых *одинаково направлены.*

При этом векторы считаются одинаково направленными, если, сохраняя AB параллельным CD, можно перенести отрезок AB так, чтобы начало A совместилось с началом C, а конец B — с концом D.

Следствие 1. *Равенство векторов не нарушится, если один из векторов перенести в пространстве, сохраняя его длину и направление.*

Следовательно, всякий вектор можно перенести в начало координат, точнее, среди векторов, имеющих своё начало в начале координат, найдётся один вектор, равный произвольно заданному вектору пространства.

Вектор $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, называется *радиусом-вектором* точки M (конца вектора) и обозначается одной буквой $\overrightarrow{OM} = \mathbf{M}$. Длина вектора $\mathbf{M}$ (его модуль) обозначается той же буквой, но светлой: M.

Определение 2. *Суммой векторов* называется вектор, замыкающий ломаную линию, стороны которой являются слагаемыми векторами.

Например, на чертеже 2 суммой трёх векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ является вектор $\overrightarrow{AD}$:

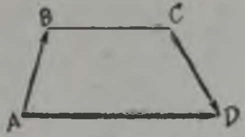
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}. \tag{1}$$

Это определение даёт правило построения суммы:

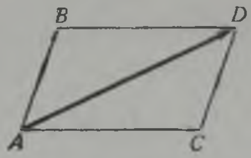
Чтобы получить сумму векторов, надо в конце первого слагаемого построить вектор, равный второму, в конце этого вектора — вектор, равный третьему, и т. д. Вектор, соединяющий начало первого слагаемого с концом последнего, является суммой векторов (черт. 2).

Для двух векторов это правило совпадает с **правилом параллелограма**.

Следствие 2. *Сумма двух векторов есть диагональ параллелограма, построенного на слагаемых.*



Черт. 2.



Черт. 3.

Действительно, в силу равенства и параллельности противоположных сторон параллелограма, имеем равенство векторов (черт. 3)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

Значит,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

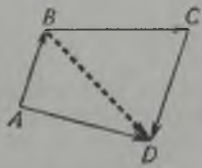
Теорема ассоциативности. *При сложении нескольких векторов можно любые два слагаемых (или более) заменить их суммой:*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}). \qquad (2)$$

Действительно, если в ломаной $ABCD$ соединить прямой две точки B и D (черт. 4), то суммы

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD},$$



Черт. 4.

очевидно, будут равны между собой, а так как

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD},$$

то мы и получаем требуемое равенство (2).

Доказательство теоремы легко распространяется на произвольное число слагаемых последовательным прибавлением к двум слагаемым третьего, к трём — четвёртого и т. д.

Теорема переместительности. *Сумма векторов не зависит от порядка слагаемых.*

Для двух векторов теорема прямо вытекает из правила параллелограма (черт. 3):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}, \qquad (3)$$

ибо в обоих случаях стороны AB и AC определяют один и тот же параллелограм $ABDC$.

Из теоремы ассоциативности вытекает возможность перестановки любых двух соседних слагаемых:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\ldots+\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}+\ldots+\overrightarrow{PQ}=$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\ldots+(\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM})+\ldots+\overrightarrow{PQ},$$

но по доказанному из формулы (3) имеем:

$$\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{KL}.$$

Значит,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\ldots+(\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM})+\ldots+\overrightarrow{PQ}=$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\ldots+(\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{KL})+\ldots+\overrightarrow{PQ}$$

и, окончательно,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\ldots+\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}+\ldots+\overrightarrow{PQ}=$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\ldots+\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{KL}+\ldots+\overrightarrow{PQ}.$$

Переставляя последовательно пары рядом стоящих слагаемых, можно расположить их в любом порядке.

§ 2. Умножение вектора на скаляр

Если слагаемые расположены на одной прямой, то и сумма векторов лежит на той же прямой. При этом могут быть два замечательных случая:

1. Все слагаемые одной длины и одного направления. Если вектор $\boldsymbol{a}$ повторяется слагаемым n раз, то мы будем говорить, что он умножается на целое число n:

$$\overbrace{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\ldots+\boldsymbol{a}}^{n \text{ раз}}=n\boldsymbol{a}. \tag{4}$$

При этом произведение сохраняет направление множимого и только длина (модуль) вектора увеличивается в n раз. Это даёт нам основание ввести общее определение.

Определение 1. *Произведением вектора на положительное число* называется вектор, параллельный множимому, одинаково с ним направленный и обладающий модулем, равным произведению модуля множимого на множитель.

2. Второй замечательный случай сложения получается, когда оба слагаемых равны по абсолютной величине (по модулю) и противоположно направлены. Такие векторы называются *противоположными*.

Введём определение:

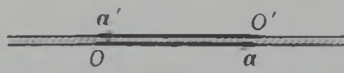
Определение 2. Вектор *равен нулю*, если его конец совпадает с началом, т. е. если его модуль равен нулю.

Нетрудно показать, что сумма противоположных векторов равна нулю. Действительно, при построении второго слагаемого $\boldsymbol{a}'$ в конце первого $\boldsymbol{a}$ (черт. 5) мы заметим, что конец его совпадает с началом первого слагаемого; начало ломаной совпадает с её концом. Длина замыкающей равна нулю, а следовательно, и сумма векторов равна нулю:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=0.$$

Противоположные векторы в сумме равны нулю.

Определение 3. Произведением вектора на отрицательное число называется вектор, параллельный множимому, противоположно направленный и обладающий модулем, равным произведению модуля множимого на абсолютную величину множителя.



Черт. 5.

Следствие 1. *При умножении вектора на минус единицу его направление меняется на противоположное.*

Следствие 2. *Вектор равен своему противоположному с обратным знаком:*

$$\boldsymbol{a}'=-\boldsymbol{a}. \qquad (5)$$

Определение 4. *Разностью* двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется такой третий вектор $\boldsymbol{x}$, что сумма векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{b}$ равна вектору $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}. \qquad \text{(a)}$$

Теорема. *Чтобы вычесть вектор, надо прибавить его с обратным знаком.*

Обозначим через $\boldsymbol{b}'$ вектор, противоположный вектору $\boldsymbol{b}$, и покажем, что

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}'. \qquad \text{(b)}$$

Действительно, внося $\boldsymbol{x}$ из равенства (b) в равенство (a), имеем:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a},$$

ибо

$$\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{b}=0$$

как сумма противоположных векторов.

Так как по формуле (5)

$$\boldsymbol{b}'=-\boldsymbol{b},$$

то и получаем из уравнения (b)

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

Теорема распределительности 1. *Чтобы умножить вектор на сумму скаляров, достаточно умножить его на каждое слагаемое и сложить полученные произведения:*

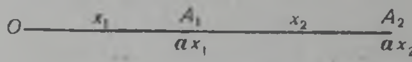
$$\boldsymbol{a}(x_1+x_2+x_3)=\boldsymbol{a}x_1+\boldsymbol{a}x_2+\boldsymbol{a}x_3. \qquad (6)$$

Достаточно доказать теорему для двух слагаемых:

$$\boldsymbol{a}(x_1+x_2)=\boldsymbol{a}x_1+\boldsymbol{a}x_2. \qquad \text{(c)}$$

Примем длину вектора $\boldsymbol{a}$ за единицу измерения длин. Тогда вектор $\boldsymbol{a}x_1$ будет содержать x_1 единиц длины, а вектор $\boldsymbol{a}x_2$ будет содержать x_2 единиц длины (черт. 6).

Если x_1 и x_2 — одного знака, то векторы $\boldsymbol{a}x_1$ и $\boldsymbol{a}x_2$ — одного направления, откладываются на прямой в одну сторону и длина суммы $\boldsymbol{a}x_1 + \boldsymbol{a}x_2$ равна сумме длин слагаемых $x_1 + x_2$, как это и имеет место для левой части формулы (с).

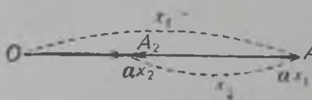


Черт. 6.

Если x_1 и x_2 — разных знаков, то векторы $\boldsymbol{a}x_1$ и $\boldsymbol{a}x_2$ — противоположно направлены. Их сумма

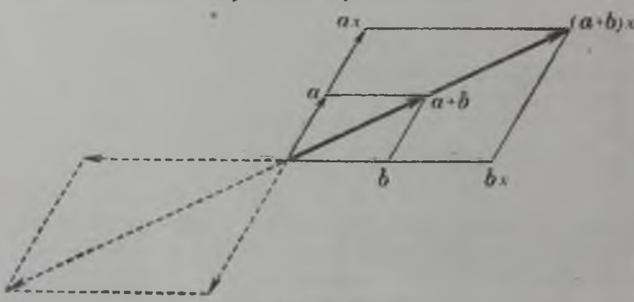
$$\boldsymbol{a}x_1 + \boldsymbol{a}x_2 = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2}$$

направлена в сторону слагаемого с бóльшим модулем (на черт. 7 в сторону $\boldsymbol{a}x_1$); модуль вектора $\overrightarrow{OA_2}$ равен разности модулей $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$. Нетрудно заметить, что именно так и происходит сложение двух действительных чисел x_1 и x_2 разных знаков: составляют разность их абсолютных величин (из большей вычитают меньшую) и приписывают знак большего (у нас x_1). Следовательно, сумма $x_1 + x_2$ и по абсолютной величине, и по знаку определит по формуле (с) вектор $\overrightarrow{OA_2}$.



Черт. 7.

Теорема распределительности II. *Чтобы умножить сумму векторов на скаляр, достаточно умножить на скаляр каждое слагаемое и сложить полученные произведения.*



Черт. 8.

Достаточно доказать теорему для суммы двух слагаемых, чтобы, переходя от n к $n+1$ слагаемому, доказать её для произвольного числа слагаемых:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,x = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}x. \tag{7}$$

Воспользуемся правилом параллелограма; векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и их сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ суть стороны и диагональ параллелограма. Если скаляр x — положительное число, то при умножении на x увеличатся в x раз и стороны, и диагональ; но при пропорциональном увеличении всех размеров параллелограм останется параллелограмом. Если x — отрицательно, то к этому добавится ещё изменение направления всех векторов на противоположное, но и это не нарушит фигуры параллелограма. Следовательно, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,x$ попрежнему будет диагональю параллелограма со сторонами $\boldsymbol{a}x$, $\boldsymbol{b}x$ и будет равняться сумме этих векторов (черт. 8).

§ 3. Векторы на прямой

Теорема. Если $\boldsymbol{A}$ — произвольный вектор на прямой, с неравным нулю модулем, то вектор

$$\boldsymbol{M}=x\boldsymbol{A}, \tag{8}$$

где x — произвольное действительное число (скаляр), *лежит на этой прямой* (или параллелен ей). Обратно, *всякий вектор прямой $\boldsymbol{M}$* (или вектор, ей параллельный) *может быть представлен в виде* (8).

Первая половина теоремы следует из определения умножения вектора на скаляр: длина вектора умножается на абсолютную величину скаляра; если скаляр — положительное число, то направление вектора вообще не меняется, если — отрицательное, то меняется на противоположное. В обоих случаях вектор $\boldsymbol{M}$ параллелен вектору $\boldsymbol{A}$, т. е. заданной прямой.

Чтобы доказать обратную теорему, достаточно принять скаляр x по абсолютной величине равным отношению модулей M и A, а по знаку — положительным, если векторы $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{A}$ одинаково направлены, и отрицательным, если — противоположно. При этом условии вектор $\boldsymbol{M}$ и произведение $x\boldsymbol{A}$ будут параллельны (в силу первой половины теоремы), одинаково направлены (в силу выбора знака скаляра x) и одной длины (в силу выбора абсолютной величины множителя x). Следовательно, по определению равенства векторов, $\boldsymbol{M}=x\boldsymbol{A}$. Векторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{M}$, удовлетворяющие уравнению (8), называются *линейно зависимыми.* Линейно независимые векторы не параллельны.

Следствие 1. *При заданных (параллельных) векторах $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{A}$ скаляр x формулы* (8) *вполне определён по величине и по знаку.*

Доказанная теорема и следствие из неё позволяют определять векторы на прямой при помощи одного числа (*координаты*).

Зададим на прямой произвольный, не равный нулю вектор $\boldsymbol{e}$. Всякий вектор $\boldsymbol{M}$ нашей прямой может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{M}=x\boldsymbol{e}, \tag{8'}$$

причём действительное число x вполне определено. Обратно, если вектор $\boldsymbol{e}$ дан, то всякое действительное число x определяет по формуле (8') вектор, параллельный вектору $\boldsymbol{e}$, и только один.

2 Зак. [illegible]

Вектор $\boldsymbol{e}$ называется *координатным вектором* прямой, его направление принимается за *положительное направление* прямой, а число x называется *координатой вектора* ($8'$) на прямой.

Следствие 2. *При заданном на прямой координатном векторе все равные между собой векторы, параллельные этой прямой, имеют вполне определённую одну и ту же координату (действительное число); каждой координате соответствует одна определённая совокупность равных между собой векторов.*

§ 4. Метод координат на прямой

Теперь нетрудно дать определение координаты точки на прямой.

Зададим на прямой произвольно выбранную точку O — начало координат и не равный нулю вектор $\boldsymbol{e}$ — координатный вектор.

Каждая точка прямой M определяет *радиус-вектор*

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{M}.$$

Радиус-вектор $\boldsymbol{M}$, как всякий вектор прямой, имеет при заданном координатном векторе $\boldsymbol{e}$ определённую координату x:

$$\boldsymbol{M} = x\boldsymbol{e}.$$

Эту координату мы будем называть *координатой точки* M.

Определение 1. *Координатой точки* на прямой называется координата её радиуса-вектора.

Определение 2. Задание начала координат (точки O) и координатного вектора $\boldsymbol{e}$ определяет *систему координат* на прямой.

Теорема. *При заданной системе координат каждая точка прямой имеет определённую координату x; каждая координата* (произвольное действительное число) *определяет единственную точку.*

Первую половину теоремы мы уже доказали. Чтобы доказать вторую половину, заметим, что при заданном координатном векторе $\boldsymbol{e}$ всякая координата x определяет один вектор $x\boldsymbol{e}$, правильнее сказать — совокупность равных между собой векторов $x\boldsymbol{e}$. Различные векторы этой совокупности различаются между собой положением своего начала. Только один из них

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{M} = x\boldsymbol{e}$$

имеет начало в начале координат O и называется радиусом-вектором своего конца, точки M. Эта точка и имеет число x своей координатой.

Определение 3. При произвольном выборе координатного вектора $\boldsymbol{e}$ система координат называется *аффинной*. Если вектор $\boldsymbol{e}$ имеет длину, равную единице, то система координат называется *декартовой системой координат*. При этом координатный вектор обозначается буквой $\boldsymbol{i}$.

Декартова система координат определяется:

1) началом координат,

2) положительным направлением на прямой,

3) единицей длины (масштаб).

Нетрудно заметить, что эти условия вполне определяют координатный единичный вектор $\boldsymbol{i}$, а следовательно (при заданном начале), и систему координат.

Прямая, на которой дана система координат, называется *осью.*

§ 5. Расстояние между двумя точками

Знание координат точек позволяет решать все задачи относительно точек на прямой.

Мы начнём с доказательства леммы, которая будет нам одинаково полезна и в геометрии на прямой, и на плоскости, и в пространстве.

Лемма. *Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, соединяющий точку M_1 с точкой M_2, равен разности радиусов-векторов его конца M_2 и начала M_1:*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1. \tag{9}$$

Соединим точки M_1, M_2 между собой и с началом координат O прямыми (черт. 9). По определению суммы векторов, имеем:

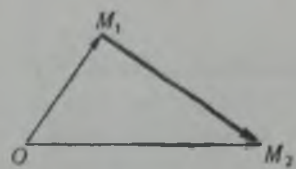
$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2},$$

или, вводя радиусы-векторы

$$\overrightarrow{OM_1} = \boldsymbol{M}_1, \quad \overrightarrow{OM_2} = \boldsymbol{M}_2$$

и разрешая равенство относительно $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1.$$



Черт. 9.

Задача I. *Даны две точки M_1 и M_2; найти вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, их соединяющий.*

В аналитической геометрии задать точки — значит дать их координаты:

$$M_1(x_1), \quad M_2(x_2).$$

Сами по себе координаты ничего не определяют. Чтобы они определяли точки, надо задать систему координат $(O;\ \boldsymbol{e})$. Тогда имеем радиусы-векторы точек по формуле (8′):

$$\boldsymbol{M}_1 = x_1\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{M}_2 = x_2\boldsymbol{e},$$

и формула (9) даст:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1 = x_2\boldsymbol{e} - x_1\boldsymbol{e} = (x_2 - x_1)\,\boldsymbol{e}. \tag{10}$$

Последнее преобразование основано на теореме распределительности I для умножения вектора на скаляр (6).

Задача II. *Найти расстояние между двумя точками* M_1 *и* M_2.

Расстояние между точками M_1 и M_2 есть модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$. Модуль вектора (10) равен произведению абсолютной величины его координаты $|x_2 - x_1|$ на модуль координатного вектора $|\boldsymbol{e}| = e$:

$$M_1M_2 = |x_2 - x_1| \cdot e.$$

Если система координат — декартова и координатный вектор $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{i}$ — единичный, то $e = 1$ и

$$M_1M_2 = |x_2 - x_1|.$$

Направленный отрезок M_1M_2 определяется координатой вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, т. е. разностью $x_2 - x_1$. Она определяет относительную длину отрезка M_1M_2: положительную, если направление отрезка M_1M_2 совпадает с направлением оси вектора $\boldsymbol{e}$, отрицательную, если противоречит.

§ 6. Деление отрезка в данном отношении

Задача III. *Даны две точки* M_1 *и* M_2 (черт. 10); *найти на прямой* M_1M_2 *третью точку* M *так, чтобы отношение*

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda \tag{11}$$

равнялось заданному числу λ.

Так как оба вектора $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ лежат на одной прямой, то по формуле (8) теоремы § 3 они пропорциональны; множитель про-

Черт. 10.

порциональности равен отношению их длин, т. е., согласно формуле (11), числу λ:

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}. \tag{12}$$

Согласно лемме (9),

$$\overrightarrow{M_1M} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}_1, \quad \overrightarrow{MM_2} = \boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}.$$

Следовательно, уравнение (12) принимает вид:

$$\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}_1 = \lambda(\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}).$$

Здесь искомым является радиус-вектор $\boldsymbol{M}$.

Применяя теорему распределительности II для умножения вектора на скаляр, получим:

$$\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}_1 = \lambda\boldsymbol{M}_2 - \lambda\boldsymbol{M},$$

$$\boldsymbol{M} + \lambda\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \lambda\boldsymbol{M}_2,$$

$$(1 + \lambda)\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \lambda\boldsymbol{M}_2. \tag{12'}$$

Отсюда, если $1+\lambda \neq 0$, имеем:

$$M = \frac{M_1 + \lambda M_2}{1+\lambda}. \tag{13}$$

Если x_1, x_2 и x суть координаты точек M_1, M_2 и M, то

$$M = xe, \; M_1 = x_1 e, \; M_2 = x_2 e.$$

Следовательно, применяя теорему распределительности I для умножения вектора на скаляр, имеем:

$$xe = \frac{x_1 e + \lambda x_2 e}{1+\lambda} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\, e$$

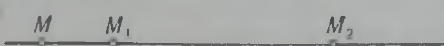
и

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{13'}$$

Формулы (13) и (13′) прямо вытекают из равенства (12) и, следовательно, сохраняют силу, пока равенство (12) имеет смысл. Между

Черт. 11.

тем равенство (12) не теряет смысла и при отрицательном значении λ, кроме $\lambda = -1$; при $\lambda = -1$ уравнение (12) приводится к противоречию (12′). При $\lambda < 0$ оно будет показывать только, что векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ противоположно направлены. Это будет соответствовать внешней точке деления, ибо теперь одинаково направлен с вектором $\overrightarrow{M_1M}$ вектор $\overrightarrow{M_2M}$ (противоположный вектору $\overrightarrow{MM_2}$). Если вектор $\overrightarrow{M_1M}$ направлен в сторону $\overrightarrow{M_1M_2}$, то $\overrightarrow{M_2M}$ идёт вне отрезка, и точка M лежит за точкой M_2 (черт. 11). В противном случае точка M лежит вне отрезка M_1M_2 за точкой M_1 (черт. 12).



Черт. 12.

Следовательно, формулы (13) и (13′) при положительном λ дают решение задачи деления отрезка внутренним образом („найти точку на отрезке M_1M_2 так, чтобы $M_1M : MM_2 = \lambda$"), а при отрицательном λ — деления отрезка внешним образом („найти точку на продолжении отрезка M_1M_2 так, чтобы $M_1M : MM_2 = \lambda$").

Глава II

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Векторы на плоскости

Все векторы, принадлежащие одной прямой, линейно зависимы, ибо они все пропорциональны одному координатному вектору прямой (§ 4).

Два вектора плоскости могут быть и линейно зависимы, если они параллельны (или один из них равен нулю), и линейно независимы, если они отличны от нуля и не параллельны.

Два линейно зависимых вектора называются *коллинеарными.*

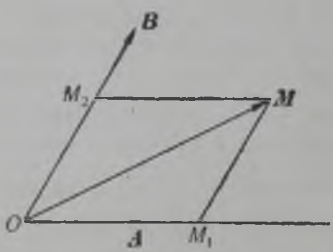
Подобно тому как любой вектор, параллельный данной прямой, линейно зависит от произвольно заданного не равного нулю вектора этой прямой, так векторы на плоскости могут быть линейно выражены через два независимых вектора плоскости.

Теорема. *Если* A *и* B *— два линейно независимых вектора плоскости, то при любых значениях скаляров* x_1 *и* x_2 *вектор*

$$M = x_1A + x_2B \qquad (1)$$

параллелен этой плоскости. Обратно, для всякого вектора плоскости существует единственная пара действительных чисел x_1 *и* x_2 *так, что вектор может быть представлен в виде* (1).

Первая половина теоремы непосредственно следует из определения сложения векторов и умножения их на скаляр: при умножении векторов A и B на скаляры x_1 и x_2 получаются векторы



Черт. 13.

$$M_1 = x_1A, \quad M_2 = x_2B,$$

соответственно параллельные векторам A и B, следовательно, параллельные плоскости. В таком случае и сумма

$$M = M_1 + M_2,$$

как замыкающая ломаной линии, обе стороны которой параллельны плоскости, сама будет лежать в плоскости, параллельной заданной, или просто в данной плоскости, если начало вектора M лежит в этой плоскости.

Чтобы доказать обратную теорему, возьмём произвольный вектор плоскости M и разложим его на две компоненты (слагающие) по векторам A и B.

Для этого проводим из начала O вектора M и из его конца M прямые, параллельные векторам A и B (черт. 13). Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения этих прямых с прямыми векторов A и B. Фигура OM_1MM_2, очевидно, — параллелограм и вектор $M = \overrightarrow{OM}$ — его диагональ, а $M_1 = \overrightarrow{OM_1}$, $M_2 = \overrightarrow{OM_2}$ — его стороны.

Следовательно,

$$M = M_1 + M_2.$$

Так как вектор $\overrightarrow{OM_1} = M_1$ лежит на одной прямой с не равным нулю вектором A, то по теореме § 3, гл. I, существует действительное число x_1 такое, что

$$M_1 = x_1 A,$$

и аналогично

$$M_2 = x_2 B,$$

а следовательно,

$$M = x_1 A + x_2 B.$$

Координаты вектора. ***Следствие.*** *Произвольный вектор плоскости* M (вместе со всеми векторами, ему равными) *может быть определён посредством двух действительных чисел* x^1 *и* x^2, *если на плоскости даны два линейно независимых вектора.*

Определение. Два действительных числа x^1, x^2, определяющих на плоскости вектор $\overrightarrow{M}$ относительно двух линейно независимых векторов плоскости e_1, e_2 по формуле

$$M = x^1 e_1 + x^2 e_2, \qquad (1')$$

называются *аффинными координатами* вектора относительно системы координат (e_1, e_2), а сами векторы e_1, e_2 — *координатными векторами.*

Теорема. *Если векторы равны, то равны и их одноимённые координаты.*

Если векторы

$$M = x^1 e_1 + x^2 e_2 \text{ и } \overrightarrow{AB} = x_*^1 e_1 + x_*^2 e_2$$

равны между собой, то

$$x^1 e_1 + x^2 e_2 = x_*^1 e_1 + x_*^2 e_2$$

или

$$(x^1 - x_*^1)\, e_1 + (x^2 - x_*^2)\, e_2 = 0,$$

но такое равенство при линейно независимых векторах e_1, e_2 невозможно. Следовательно,

$$x_*^1 = x^1, \; x_*^2 = x^2,$$

что и требовалось доказать.

Отсюда вытекает, что при заданной системе координат (e_1, e_2) пара чисел x^1, x^2 определяет совокупность равных между собой векторов.

Теорема. *При сложении векторов складываются одноимённые координаты, при умножении вектора на скаляр его координаты умножаются на скаляр.*

Эта теорема настолько очевидна, что мы её уже использовали при доказательстве предыдущей теоремы.

Пусть надо сложить векторы $\boldsymbol{M}_1 = x_1^1\boldsymbol{e}_1 + x_1^2\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{M}_2 = x_2^1\boldsymbol{e}_1 + x_2^2\boldsymbol{e}_2$. По теореме об ассоциативности и переместительности сложения векторов (§ 1, гл. I), имеем:

$$\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 = x_1^1\boldsymbol{e}_1 + x_1^2\boldsymbol{e}_2 + (x_2^1\boldsymbol{e}_1 + x_2^2\boldsymbol{e}_2) = x_1^1\boldsymbol{e}_1 + x_1^2\boldsymbol{e}_2 + x_2^1\boldsymbol{e}_1 + \\ + x_2^2\boldsymbol{e}_2 = x_1^1\boldsymbol{e}_1 + x_2^1\boldsymbol{e}_1 + x_1^2\boldsymbol{e}_2 + x_2^2\boldsymbol{e}_2,$$

но по теореме распределительности I (§ 2, гл. I)

$$x_1^1\boldsymbol{e}_1 + x_2^1\boldsymbol{e}_1 = (x_1^1 + x_2^1)\,\boldsymbol{e}_1, \quad x_1^2\boldsymbol{e}_2 + x_2^2\boldsymbol{e}_2 = (x_1^2 + x_2^2)\,\boldsymbol{e}_2.$$

Следовательно,

$$x_1^1\boldsymbol{e}_1 + x_1^2\boldsymbol{e}_2 + (x_2^1\boldsymbol{e}_1 + x_2^2\boldsymbol{e}_2) = (x_1^1 + x_2^1)\,\boldsymbol{e}_1 + (x_1^2 + x_2^2)\,\boldsymbol{e}_2.$$

§ 2. Декартовы и аффинные координаты на плоскости

Если задано начало координат O (некоторая произвольная точка плоскости), то всякая точка M на плоскости, так же как и на прямой, определяется своим радиусом-вектором

$$\boldsymbol{M} = \overrightarrow{OM}.$$

Если, кроме того, даны два линейно независимых вектора $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, то всякий вектор определяется своими координатами: $\boldsymbol{M} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2$.

В том числе будет определён и радиус вектора $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{M}$, а следовательно, и его конец, точка M.

Определение 1. *Координатами точки M* называются координаты её радиуса-вектора $\boldsymbol{M}$.

Очевидно, каждая точка M при заданном начале имеет один радиус-вектор и, следовательно, при заданных координатных векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — одну пару координат. Обратно, пара действительных чисел x_1, x_2 определяет при заданном начале и координатных векторах один радиус-вектор $\boldsymbol{M}$ и, следовательно, одну точку M.

Те условия, которые надо задать, чтобы пара чисел определяла точку, называются *системой координат*.

Они состоят из задания:

1) начала координат, т. е. точки O,

2) двух координатных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, которые ограничены условием: не равняться нулю и не быть параллельными друг другу.

При произвольной длине координатных векторов $\boldsymbol{e}_i$ система координат называется *аффинной*.

Если оба координатных вектора $\boldsymbol{e}_i$ имеют модуль (длину), равный единице (*единичные*), то система координат называется *декартовой*, вообще *косоугольной*. Декартова система координат *прямоугольна*, если координатные векторы единичны и взаимно перпендикулярны.

Выходящие из начала координат координатные векторы аффинной системы определяют две прямые, которые называются *осями коорди-*

нат, так как на каждой из них задано начало координат и лежит координатный вектор. В декартовой системе координат первая ось называется *осью абсцисс*, вторая — *осью ординат*. Соответственно этому первая координата x^1 называется *абсциссой* и обозначается буквой x, вторая x^2 — *ординатой* и обозначается буквой y. Координаты обычно записываются в скобках после той буквы, которой обозначена точка, например $M(x, y)$ или $M(x^1, x^2)$.

Декартова система координат определена при задании трёх условий:

1) начала координат O,

2) положительных направлений осей,

3) масштаба, т. е. единицы длины.

Действительно, задание положительных направлений осей и единицы длины вполне определяет на осях единичные векторы положительного направления, т. е. координатные векторы.

Понятию координаты точки можно дать ещё другой вид, если ввести понятие проекции точки и вектора на ось.

Определение 2. *Проекцией точки на ось* называется точка пересечения этой оси с прямой, проходящей через заданную точку параллельно другой оси. В частности, проекция называется *ортогональной*, если оси взаимно перпендикулярны; тогда проекцией точки служит основание перпендикуляра, опущенного из точки на ось.

Проекцией вектора на ось называется вектор, определяемый отрезком оси между проекциями начала и конца заданного вектора.

Нетрудно теперь заметить, что, разлагая радиус-вектор $\boldsymbol{M}$ на две компоненты по координатным векторам:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2, \quad \boldsymbol{M}_1 = x^1\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{M}_2 = x^2\boldsymbol{e}_2,$$

мы проектируем его на оси координат. Векторы $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ являются проекциями радиуса-вектора $\boldsymbol{M}$ на первую и вторую оси, а точки M_1 и M_2 — проекциями точки M на эти оси.

Отсюда следует: *каждая координата точки есть координата её проекции на соответствующую ось координат.*

Так как вектор на прямой при заданном координатном векторе вполне определяется своей координатой, то иногда проекцией вектора на ось называют координату проекции вектора на ось.

Отсюда вытекает основная теорема о проекции ломаной.

Теорема о проекции суммы векторов (ломаной). *Проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых.*

Действительно, примем ось проекций за ось координат; тогда координата проекции суммы векторов равна координате этой суммы по этой оси, а каждая координата суммы равна сумме одноимённых координат слагаемых.

Координаты точки теперь можно определить ещё короче: *каждая координата точки равна проекции её радиуса-вектора на соответствующую ось координат.*

§ 3. Деление отрезка в данном отношении

Обратимся к решению основных задач.

Задача I. *Даны на плоскости две точки* M_1 *и* M_2; *найти на прямой, их соединяющей, точку* M *так, чтобы отношение*

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$$

имело заданную величину, положительную, если оба отрезка M_1M *и* MM_2 *одинаково направлены, отрицательную, если противоположно направлены.*

По условию задачи, два вектора $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ лежат на одной прямой, а так как отношение их длин равно $|\lambda|$, то имеет место равенство:

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2},$$

причём оба вектора одинаково направлены, если λ положительно, и противоположно направлены, если λ отрицательно.

Так как всякий вектор равен разности радиусов-векторов конца и начала его (§ 5, гл. I):

$$\overrightarrow{M_1M} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}_1, \quad \overrightarrow{MM_2} = \boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M},$$

то предыдущее равенство напишется в виде

$$\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}_1 = \lambda(\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}),$$

или, в силу распределительности умножения,

$$\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}_1 = \lambda\boldsymbol{M}_2 - \lambda\boldsymbol{M},$$

или

$$\boldsymbol{M} + \lambda\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \lambda\boldsymbol{M}_2,$$

или

$$(1+\lambda)\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \lambda\boldsymbol{M}_2,$$

откуда, если $1+\lambda \neq 0$,

$$\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{M}_1 + \lambda\boldsymbol{M}_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

Если координаты наших точек в любой аффинной (или декартовой) системе координат суть $M_1(x_1^1, x_1^2)$, $M_2(x_2^1, x_2^2)$, $M(x^1, x^2)$, то

$$\boldsymbol{M}_1 = x_1^1\boldsymbol{e}_1 + x_1^2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{M}_2 = x_2^1\boldsymbol{e}_1 + x_2^2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{M} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2.$$

Тогда по правилу сложения векторов и умножения на скаляр имеем:

$$\frac{\boldsymbol{M}_1 + \lambda\boldsymbol{M}_2}{1+\lambda} = \frac{x_1^1\boldsymbol{e}_1 + x_1^2\boldsymbol{e}_2 + \lambda(x_2^1\boldsymbol{e}_1 + x_2^2\boldsymbol{e}_2)}{1+\lambda} = \frac{x_1^1 + \lambda x_2^1}{1+\lambda}\boldsymbol{e}_1 + \frac{x_1^2 + \lambda x_2^2}{1+\lambda}\boldsymbol{e}_2,$$

а так как при равенстве векторов равны их одноимённые координаты, то можно записать:

$$x^1 = \frac{x_1^1 + \lambda x_2^1}{1+\lambda}, \quad x^2 = \frac{x_1^2 + \lambda x_2^2}{1+\lambda}, \tag{2'}$$

или одной формулой:

$$x^i = \frac{x_1^i + \lambda x_2^i}{1+\lambda} \qquad (i = 1,\ 2).$$

В частности, для середины отрезка $\lambda = 1$ (когда оба отрезка M_1M и MM_2 равны) и формула принимает вид:

$$x^i = \frac{x_1^i + x_2^i}{2} \qquad (i = 1,\ 2). \tag{2''}$$

§ 4. Скалярное произведение векторов

Определение 1. *Скалярным произведением* двух векторов A и B называется произведение их модулей (длин) A и B на косинус угла между ними φ:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\varphi. \tag{3}$$

Следствие 1. *Скалярное произведение равно нулю, если векторы перпендикулярны:*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{если} \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

ибо при этом угол φ — прямой и косинус его равен нулю.

Следствие 2. *Скалярное произведение векторов равно произведению их модулей, если векторы параллельны и одинаково направлены.*

Действительно, в этом случае угол между векторами $\varphi = 0$ и, следовательно, $\cos\varphi = 1$.

Определение 2. *Квадратом вектора* называется скалярное произведение вектора самого на себя:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}.$$

Следствие 3. *Квадрат вектора равен квадрату его модуля:*

$$\mathbf{A}^2 = A^2. \tag{4}$$

Это предложение прямо вытекает из предыдущего, ибо вектор всегда параллелен сам себе.

Следствие 4. *Скалярное произведение двух единичных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно косинусу угла между ними:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos\varphi, \tag{4'}$$

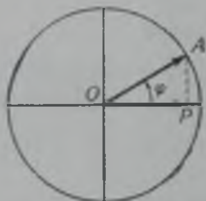
ибо теперь модули их равны единице: $a = b = 1$.

Скалярное произведение векторов тесно связано с понятием ортогональной проекции одного вектора на другой.

Определение 3. Будем называть *ортогональной проекцией вектора* на ось координату его проекции в декартовой прямоугольной системе координат. Ортогональная проекция равна длине отрезка оси между перпендикулярами из начала и конца вектора, взятой с положительным знаком, если направление отрезка совпадает с положительным направлением оси проекций, и с отрицательным знаком, если противоположно ему.

Теорема. *Ортогональная проекция вектора на ось равна скалярному произведению этого вектора на единичный вектор оси проекций.*

Проведём вектор $\boldsymbol{A}$ из точки O, лежащей на оси проекции, и опустим перпендикуляр AP из точки A на ось проекций (черт. 14).



Черт. 14.

Тогда точка P будет проекцией точки A, а вектор $\overrightarrow{OP}$ — проекцией вектора $\overrightarrow{OA}$.

Если вектор $\boldsymbol{A}$ вращать около точки O, то его конец A опишет окружность, которую можно рассматривать как тригонометрический круг, а проекцию OP — как линию косинуса для угла φ между вектором $\boldsymbol{A}$ и осью проекций.

Если положительное направление оси проекций выбрать за направление первого диаметра и буквой $\boldsymbol{e}$ обозначить единичный вектор, совпадающий с этим положительным направлением оси, то знак координаты вектора $\overrightarrow{OP}$ относительно координатного вектора $\boldsymbol{e}$ будет совпадать со знаком $\cos\varphi$, а так как по абсолютной величине

$$\cos\varphi = \frac{OP}{OA},$$

то

$$\overrightarrow{OP} = A\cos\varphi\cdot\boldsymbol{e},$$

где A — модуль вектора $\boldsymbol{A}$.

С другой стороны, по формуле (3), поскольку модуль $\boldsymbol{e}$ равен единице, имеем:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e} = A\cos\varphi,$$

откуда и следует теорема.

Следствие. *Скалярное произведение векторов* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *равно ортогональной проекции вектора* $\boldsymbol{A}$ *на вектор* $\boldsymbol{B}$, *умноженной на модуль вектора* $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \text{пр}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}\cdot B. \qquad (5)$$

Действительно, в правой части формулы (3) стоит произведение двух множителей: первый из них $A\cos\varphi$, т. е. проекция вектора $\boldsymbol{A}$ на вектор $\boldsymbol{B}$, а второй B, т. е. модуль вектора $\boldsymbol{B}$.

Из определения и его непосредственных следствий вытекают основные свойства скалярного произведения.

Переместительность. *При перестановке множителей величина скалярного произведения не меняется*:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}, \tag{6}$$

ибо и то и другое произведение равняется $AB\cos\varphi$.

Распределительность. *Произведение суммы векторов равно сумме произведений слагаемых*:

$$(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}. \tag{7}$$

По формуле (5)

$$(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\cdot\boldsymbol{B}=\text{пр}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\cdot B,$$

а по теореме о проекции ломаной (§ 2) ортогональная проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых:

$$\text{пр}\,(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)=\text{пр}\,\boldsymbol{A}_1+\text{пр}\,\boldsymbol{A}_2.$$

Так как при умножении суммы двух чисел на третье число множится каждое слагаемое, то

$$(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\cdot\boldsymbol{B}=\text{пр}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\,B=(\text{пр}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}_1+\text{пр}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}_2)\,B=$$
$$=\text{пр}_{\boldsymbol{B}}\,\boldsymbol{A}_1\cdot B+\text{пр}_{\boldsymbol{B}}\,\boldsymbol{A}_2\cdot B=\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B},$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Расстояние между двумя точками

Задачу определения расстояния естественно рассматривать в декартовой, прямоугольной системе координат.

Задача II. *Даны две точки*: $M_1(x_1^1, x_1^2)$ и $M_2(x_2^1, x_2^2)$. *Найти расстояние между ними.*

Если $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ — единичные координатные векторы, то радиусы-векторы точек M_1 и M_2 определяются формулами:

$$\boldsymbol{M}_1=x_1^1\boldsymbol{e}_1+x_1^2\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{M}_2=x_2^1\boldsymbol{e}_1+x_2^2\boldsymbol{e}_2.$$

По формуле (9) § 5, гл. I, вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ равен разности этих векторов:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1=(x_2^1-x_1^1)\,\boldsymbol{e}_1+(x_2^2-x_1^2)\,\boldsymbol{e}_2.$$

Квадрат вектора равен квадрату его модуля. Следовательно, расстояние $d=M_1M_2$ между этими точками, как существенно положительное число, т. е. модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, определяется по формуле:

$$d^2=\overrightarrow{M_1M_2}^2=\{(x_2^1-x_1^1)\,\boldsymbol{e}_1+(x_2^2-x_1^2)\,\boldsymbol{e}_2\}^2.$$

В силу распределительности скалярного произведения векторов, суммы векторов умножаются как многочлены. Следовательно, имеет место и формула квадрата суммы:

$$d^2 = (x_2^1 - x_1^1)^2 e_1^2 + 2(x_2^1 - x_1^1)(x_2^2 - x_1^2)\, e_1 \cdot e_2 + (x_2^2 - x_1^2)^2 e_2^2. \quad (8)$$

Откуда, в силу

$$e_1^2 = 1, \quad e_2^2 = 1, \quad e_1 \cdot e_2 = 0,$$

имеем:

$$d^2 = (x_1^1 - x_2^1)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2. \quad (8')$$

Если координатные векторы — единичны и угол между ними, т. е. угол между осями координат, равен ω, то $e_1 e_2 = \cos\omega$, а расстояние $d = M_1M_2$, как существенно положительное число, не зависит от порядка, в котором берутся точки M_1 и M_2 (можно положить $d = M_2M_1$), и мы получим:

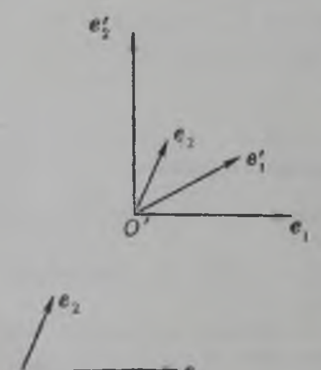
$$d^2 = (x_1^1 - x_2^1)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 + 2(x_1^1 - x_2^1)(x_1^2 - x_2^2)\cos\omega. \quad (8'')$$

§ 6. Преобразование координат

Координаты x^1, x^2 определяют положение точки на плоскости только при условии, что дана система координат — начало координат O и координатные векторы e_1, e_2, а для декартовой системы координат — начало, направление осей и масштаб.

Если изменить систему координат, то те же числа x^1, x^2 будут определять новые точки, а старые точки в новой системе координат получат новые координаты.

Задача определения координат точки по новой системе координат через её координаты по старой системе называется *задачей преобразования координат*.



Черт. 15.

Существуют два основных преобразования аффинной системы координат в аффинную (или, в частности, декартовой системы координат в декартову или аффинную): можно перенести начало координат в новую точку, не меняя координатных векторов („*преобразование начала*“), или, не меняя начала, можно изменить координатные векторы („*преобразование координатных векторов*“). Общее преобразование складывается из этих двух, ибо от любой системы $(O;\ e_1,\ e_2)$ к произвольно выбранной системе $(O';\ e_{1'},\ e_{2'})$ можно перейти двумя этапами: сначала изменить начало, т. е. перейти от системы $(O;\ e_1,\ e_2)$ к системе $(O';\ e_1,\ e_2)$, а затем преобразовать координатные векторы, т. е. от системы $(O';\ e_1,\ e_2)$ перейти к системе $(O';\ e_{1'},\ e_{2'})$ (черт. 15).

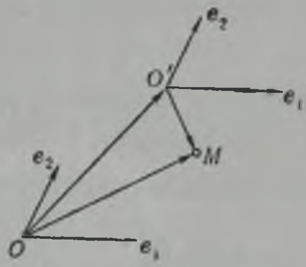
§ 7. Преобразование начала

Допустим, что начало координат перенесено из точки O в точку O' (черт. 16). Одна и та же точка M будет иметь различные радиусы-векторы:

$$M = \overrightarrow{OM} \quad \text{и} \quad M^* = \overrightarrow{O'M}.$$

По определению суммы векторов (1) § 1, гл. I,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}.$$



Черт. 16.

Так как координатные векторы e_1, e_2 остались неизменёнными, то можно сравнивать одноимённые координаты вектора, который получится после сложения, в левой и правой частях формулы.

Обозначим через x^1, x^2 и x_0^1, x_0^2 старые координаты (координаты по старой системе) точек M и O':

$$\overrightarrow{OM} = x^1 e_1 + x^2 e_2, \quad \overrightarrow{OO'} = x_0^1 e_1 + x_0^2 e_2.$$

Обозначим через X^1, X^2 координаты точки M по новой системе координат:

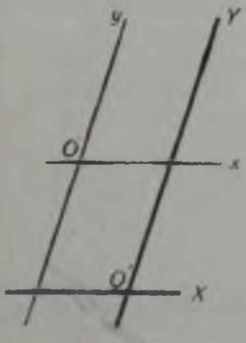
$$\overrightarrow{O'M} = X^1 e_1 + X^2 e_2.$$

При сложении векторов $\overrightarrow{OO'}$ и $\overrightarrow{O'M}$ одноимённые координаты сложатся:

$$\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = (X^1 + x_0^1)\, e_1 + (X^2 + x_0^2)\, e_2,$$

и мы получим после сравнения одноимённых координат:

$$\begin{aligned} x^1 &= X^1 + x_0^1; \\ x^2 &= X^2 + x_0^2. \end{aligned} \qquad (9)$$



Черт. 16а.

Эти формулы одинаково применимы и к аффинной, и к декартовой (косоугольной или прямоугольной) системам координат.

Можно было бы думать, что эти формулы следует разрешить относительно новых координат (неизвестных), но это не так: аналитическая геометрия, как правило, рассматривает уравнения, которые связывают координаты. При переходе от одной системы координат к другой надо преобразовать уравнение. При этом удобно иметь формулы преобразования в виде, решённом относительно старых координат, чтобы их можно было прямо подставлять в уравнение.

Пример. Координаты точки $M(x, y)$ в декартовой системе координат связаны уравнением

$$xy + 3x - 2y - 6 = 0. \tag{a}$$

Преобразовать это уравнение, перенеся начало координат в точку $O'(2, -3)$, и выяснить его геометрический смысл.

Формулы преобразования (9) принимают вид:

$$x = X + 2, \quad y = Y - 3.$$

Внося эти выражения в уравнение (a), получим:

$$(X+2)(Y-3) + 3(X+2) - 2(Y-3) - 6 = 0,$$

или, раскрывая скобки и приводя подобные члены,

$$XY = 0.$$

Следовательно,

$$\text{или } X = 0, \quad \text{или } Y = 0.$$

Точки M, координаты которых удовлетворяют первому уравнению, лежат на новой оси ординат; те точки, координаты которых удовлетворяют второму, лежат на новой оси абсцисс.

Следовательно, уравнение (a) определяет пару прямых, проходящих через точку O' $(2, -3)$ параллельно осям координат (черт. 16а).

§ 8. Преобразование координатных векторов

Теперь допустим, что начало координат остаётся неизменным, а координатные векторы преобразуются. Тогда радиус-вектор каждой точки M не изменится, но координаты его по старой (x^1, x^2) и по новой $(x^{1'}, x^{2'})$ системам координат будут различны.

Если обозначить через $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ координатные векторы старой системы координат, через $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$ — новой системы, то один и тот же радиус-вектор $\boldsymbol{M}$ будет равен

$$\boldsymbol{M} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 \text{ и } \boldsymbol{M} = x^{1'}\boldsymbol{e}_{1'} + x^{2'}\boldsymbol{e}_{2'},$$

откуда

$$x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 = x^{1'}\boldsymbol{e}_{1'} + x^{2'}\boldsymbol{e}_{2'}.$$

Если новые координатные векторы $\boldsymbol{e}_{i'}$ определяются через старые $\boldsymbol{e}_i$ формулами

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{1'} &= c^1_{1'}\boldsymbol{e}_1 + c^2_{1'}\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_{2'} &= c^1_{2'}\boldsymbol{e}_1 + c^2_{2'}\boldsymbol{e}_2, \end{aligned} \qquad c^1_{1'}c^2_{2'} - c^2_{1'}c^1_{2'} \neq 0, \tag{10}$$

то

$$x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 = x^{1'}(c^1_{1'}\boldsymbol{e}_1 + c^2_{1'}\boldsymbol{e}_2) + x^{2'}(c^1_{2'}\boldsymbol{e}_1 + c^2_{2'}\boldsymbol{e}_2),$$

и сравнение коэффициентов при $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ даст нам

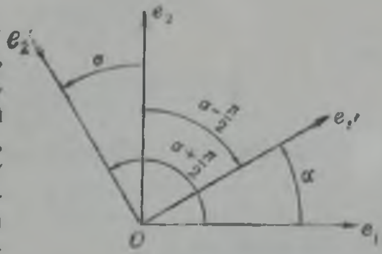
$$
\begin{aligned}
x^1 &= c^1_{1'} x^{1'} + c^1_{2'} x^{2'},\\
x^2 &= c^2_{1'} x^{1'} + c^2_{2'} x^{2'}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Если новые векторы $\boldsymbol{e}_{1'}$ и $\boldsymbol{e}_{2'}$ вполне произвольны при единственном условии, что они не параллельны между собой, то коэффициенты $c^k_{i'}$ тоже могут быть любыми числами, лишь бы координаты векторов $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$ не были пропорциональны, т. е. при условии:

$$c^1_{1'} c^2_{2'} - c^1_{2'} c^2_{1'} \neq 0.$$

Формулы (11) определяют тогда преобразование одной аффинной системы координат в другую с тем же началом.

Если старая и новая системы координат—декартовы прямоугольные, то в формулах (10) коэффициент $c^k_{i'}$ является ортогональной проекцией единичного вектора $\boldsymbol{e}_{i'}$ на ось $\boldsymbol{e}_k$, т. е. равен косинусу угла между ними. Если система $(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'})$ получена из системы $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ поворотом на угол α, то угол между векторами $\boldsymbol{e}_{1'}$ и $\boldsymbol{e}_1$ или $\boldsymbol{e}_{2'}$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен α и, значит, $c^1_{1'} = c^2_{2'} = \cos\alpha$; угол между $\boldsymbol{e}_{2'}$ и $\boldsymbol{e}_1$ больше α на $\frac{\pi}{2}$, угол между $\boldsymbol{e}_{1'}$ и $\boldsymbol{e}_2$ меньше α на $\frac{\pi}{2}$ (черт. 17). Следовательно,



Черт. 17.

$$c^1_{1'} = \cos\alpha,\ c^1_{2'} = \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha,\ c^2_{1'} = \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha,\tag{12}$$

$$c^2_{2'} = \cos\alpha,$$

и формулы (11) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\\
y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Пример. Декартовы прямоугольные координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{a}$$

Преобразовать это уравнение, повернув оси так, чтобы они образовали с осью абсцисс острые углы $\pm \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$.

Если новые координатные векторы $e_{i'}$ выбрать единичными и угол $\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$ обозначить буквой β, то получим: $e_{1'}e_1 = e_{2'}e_1 = \cos\beta$, $e_{1'}e_2 = -\sin\beta$, $e_{2'}e_2 = \sin\beta$.

Внося сюда $e_{i'}$ по формулам (10), получим:

$$c^1_{1'} = \cos\beta,\ c^2_{1'} = -\sin\beta,\ c^1_{2'} = \cos\beta,\ c^2_{2'} = \sin\beta,$$

и, в силу (11),

$$x = (x' + y')\cos\beta,\ y = -(x' - y')\sin\beta,$$

где x, y — старые координаты, x', y' — новые.

Внося эти значения в уравнение (a), получаем:

$$\frac{(x' + y')^2}{a^2}\cos^2\beta - \frac{(x' - y')^2}{b^2}\sin^2\beta = 1,$$

где

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a},\ \cos^2\beta = \frac{a^2}{a^2 + b^2},\ \sin^2\beta = \frac{b^2}{a^2 + b^2}.$$

Следовательно, преобразованное уравнение имеет вид:

$$\frac{(x' + y')^2}{a^2 + b^2} - \frac{(x' - y')^2}{a^2 + b^2} = 1$$

или окончательно:

$$x'y' = m^2, \qquad m = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}. \tag{b}$$

Уравнение (b) позволяет легко найти сколько угодно решений:

$$\begin{array}{c|l} x' & m,\ \frac{1}{2}m,\ \frac{1}{3}m,\ \frac{1}{4}m,\ \ldots,\ 2m,\ \ 3m,\ \ 4m,\ \ldots \\ \hline y' & m,\ 2m,\ \ 3m,\ \ 4m,\ \ldots,\ \frac{1}{2}m,\ \frac{1}{3}m,\ \frac{1}{4}m,\ \ldots \end{array}$$

и такие же значения с отрицательными знаками. Кривая неограниченно приближается к осям Ox' и Oy' по мере удаления точки в бесконечность (черт. 18).

Относительно старых осей координат она расположится симметрично, так как координаты x и y входят в уравнение (a) только в квадратах.

Заметим, что по самому построению $OC = AC = CB = m$, три точки O, A, B лежат на одной окружности и угол OAB — прямой. С другой стороны, по определению,

$$\angle\beta = \angle(x,\ y') = \angle AOB,$$

а так как $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$,

то

$$OA : AB = a : b.$$

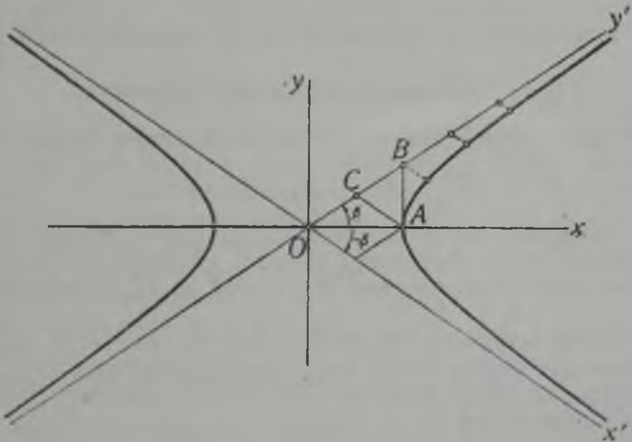
и поскольку гипотенуза OB равна

$$OB = 2m = \sqrt{a^2 + b^2},$$

то

$$OA = a, \quad AB = b.$$

Кривая называется *гиперболой*, а оси Ox', Oy', к которым она неограниченно приближается, никогда их не достигая, — её *асимптотами*.



Черт. 18.

§ 9. Общее преобразование координат

Выполняя последовательно преобразование начала по формулам (9):

$$x^1 = X^1 + c^1_{0'},$$
$$x^2 = X^2 + c^2_{0'},$$

а затем преобразование координатных векторов по формулам (11):

$$X^1 = c^1_{1'} x^{1'} + c^1_{2'} x^{2'},$$
$$X^2 = c^2_{1'} x^{1'} + c^2_{2'} x^{2'},$$

мы получим общее преобразование координат:

$$\begin{aligned} x^1 &= c^1_{1'} x^{1'} + c^1_{2'} x^{2'} + c^1_{0'}, \\ x^2 &= c^2_{1'} x^{1'} + c^2_{2'} x^{2'} + c^2_{0'}, \end{aligned} \qquad (14)$$

где $c^1_{0'}$, $c^2_{0'}$ — координаты нового начала по старой системе координат.

Внося сюда значения коэффициентов c^k_i по формулам (12), получим общее преобразование одной декартовой прямоугольной системы координат в другую декартову прямоугольную:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + c^1, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + c^2. \end{aligned} \qquad (15)$$

Глава III

УРАВНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ТОЧЕК

§ 1. Геометрический смысл уравнений

Если дано одно уравнение между координатами точки на плоскости

$$F(x^1, x^2) = 0, \qquad (1)$$

то оно позволяет все точки плоскости разделить на две категории: 1) множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению, и 2) множество точек, координаты которых не удовлетворяют уравнению.

Мы будем говорить, что первое из этих множеств составляет *геометрическое место точек*, определяемое уравнением (1).

Заметим, что это множество может быть пустым. Например, простейшее уравнение

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1 = 0$$

не допускает ни одной пары действительных чисел x^1, x^2, которые ему удовлетворяли бы, ибо $(x^1)^2$ и $(x^2)^2$, как квадраты действительных чисел, положительны (или равны нулю) и сумма трёх членов левой части не может быть меньше единицы.

Может случиться, что геометрическое место точек, определяемое уравнением (1), содержит только одну точку, например, начало координат для уравнения:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0,$$

или конечное число точек, или даже бесконечное множество, не образующее линии, например уравнение

$$1 + (x^2)^2 = \sin x^1.$$

Оно, очевидно, удовлетворяется только значениями $x^2 = 0$, $\sin x^1 = 1$, следовательно, определяет множество точек

$$x^1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x^2 = 0,$$

где k — любое целое число.

Нас будет интересовать в особенности тот случай, когда точки геометрического места непрерывно следуют одна за другой, образуя линию, как это имело место для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

в примере § 8, гл. II.

Заметим, что во всех случаях имеет место общий принцип, прямо вытекающий из определения уравнения геометрического места точек:

Точка $M(x^1, x^2)$ лежит на кривой, если её координаты удовлетворяют уравнению кривой.

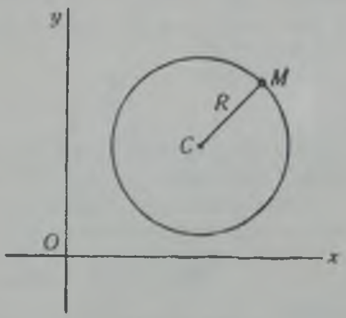
Координаты x^1, x^2, удовлетворяющие уравнению (1), называются *текущими координатами* точки кривой.

§ 2. Уравнение окружности

Если кривая линия определяется как геометрическое место точек, обладающих каким-нибудь общим свойством, то текущие координаты x^1, x^2 произвольной точки кривой нельзя положить равными двум произвольно заданным действительным числам; они должны удовлетворять некоторому условию, которое можно привести к виду уравнения (1).

Покажем это на примере окружности.

Пример. Составить уравнение окружности с центром $C(a, b)$ и радиусом R в декартовой прямоугольной системе координат (черт. 19).



Черт. 19.

Окружностью называется геометрическое место точек, расстояние которых от центра равно радиусу.

Рассмотрим произвольную точку окружности $M(x, y)$. Это должна быть *общая* точка окружности в том смысле слова, что всё то, что мы будем говорить относительно её, можно повторить относительно любой другой точки окружности.

По определению окружности, расстояние CM равно радиусу:

$$CM=R.$$

По формуле (8) § 5, гл. II, расстояние между двумя точками $C(a, b)$ и $M(x, y)$ равно

$$CM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

Следовательно, уравнение окружности имеет вид:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R. \tag{a}$$

Если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют этому уравнению, то $CM=R$, расстояние точки M от центра равно радиусу и точка лежит на окружности. Если они не удовлетворяют, то расстояние CM или больше, или меньше R и точка не лежит на окружности.

Полученное уравнение можно упростить. Возведём обе части в квадрат; мы получим:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{2}$$

Так обыкновенно записывается уравнение окружности. Поскольку радиус R — существенно положительное число, при извлечении корня мы должны брать только положительный знак перед радикалом. Следовательно, уравнение (2) равносильно уравнению (a). Если раскрыть скобки и перенести все члены в левую часть, то получим

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0. \tag{2'}$$

Мы видим, что это уравнение — второй степени, но из членов второй степени (сумма показателей при x и при y равна двум) имеется только два члена с квадратами (x^2 и y^2), причём коэффициенты у них одни и те же (оба равны единице). Это определяет уравнение окружности.

Уравнение

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0 \tag{3}$$

определяет окружность, если коэффициенты A, B, C удовлетворяют неравенству $A^2+B^2-C>0$.

Действительно, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и y в уравнениях (2′) и (3), получим три равенства:

$$2A=-2a, \quad 2B=-2b, \quad C=a^2+b^2-R^2,$$

откуда

$$a=-A, \; b=-B, \; R^2=A^2+B^2-C.$$

Эти уравнения дают действительные значения для a, b и R, если

$$A^2+B^2-C>0.$$

Только при выполнении этого неравенства уравнение (3) определяет окружность. Тем не менее говорят, что уравнение (3) всегда определяет окружность действительную, мнимую или нулевого радиуса, смотря по тому, получится ли $R^2>0$, или $R^2<0$, или $R^2=0$.

§ 3. Прямая

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $B(o, b)$ и образующей с осью абсцисс декартовой прямоугольной системы угол φ, где $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

Возьмём произвольную точку $M(x, y)$ на нашей прямой и рассмотрим две ломаные линии OPM и OBM, имеющие общее начало O и общий конец M (черт. 20).

По правилу сложения векторов (§ 1, гл. I), имеем:

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}.$$

Проектируя на две оси координат, получим, в силу теоремы (§ 2, гл. I):

$$\text{пр}\,\overrightarrow{OP}+\text{пр}\,\overrightarrow{PM}=\text{пр}\,\overrightarrow{OB}+\text{пр}\,\overrightarrow{BM},$$

или, подсчитывая проекции векторов как произведения длины вектора на косинус угла между вектором и осью проекций (§ 4, гл. II), получим для проекций на ось x и на ось y

$$OP\cdot\cos 0+PM\cdot\cos\frac{\pi}{2}=OB\cdot\cos\frac{\pi}{2}+BM\cos\varphi,$$

$$OP\cdot\cos\frac{\pi}{2}+PM\cdot\cos 0=OB\cdot\cos 0+BM\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right).$$

Если же внести значения

$$OP=x,\quad PM=y,\quad OB=b$$

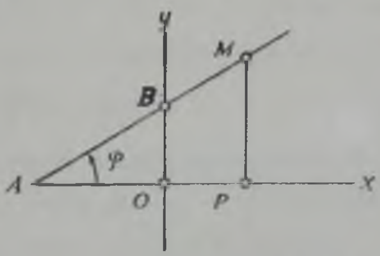
и подсчитать значения косинусов

$$\cos 0=1,\quad \cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi,$$

то будем иметь:

$$\begin{aligned} x&=BM\cdot\cos\varphi,\\ y&=b+BM\sin\varphi. \end{aligned}\qquad\text{(a)}$$



Черт. 20.

Для φ, лежащего в границах $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, значение $\cos\varphi$ отлично от нуля; следовательно, из первого уравнения можно найти $BM=\frac{x}{\cos\varphi}$. Подставляя во второе уравнение, получим:

$$y=kx+b,\quad\text{где}\quad k=\operatorname{tg}\varphi. \tag{4}$$

Следовательно, координаты x и y любой точки прямой удовлетворяют уравнению (4). Покажем теперь, что всякая точка с координатами x и $y=kx+b$ лежит на прямой, проходящей через точку $B(o,\ b)$ под углом φ к оси абсцисс. Для этого соединим точку $M(x,\ kx+b)$ с точкой $B(o,\ b)$ прямой линией BM и допустим, что эта прямая образует с осью абсцисс угол φ'. Тогда по формулам (a) получим:

$$x=BM\cos\varphi',\quad y=b+BM\sin\varphi'.$$

Внося сюда $y=kx+b$ и исключая x, получим:

$$kBM\cos\varphi'+b=b+BM\sin\varphi'$$

или

$$BM(k\cos\varphi'-\sin\varphi')=0;$$

но BM не равно нулю, если x не нуль; значит,

$$k\cos\varphi' - \sin\varphi' = 0 \quad \text{и} \quad k = \operatorname{tg}\varphi',$$

т. е. угол φ' равен углу φ и точка M лежит на прямой, проходящей через точку B под углом φ к оси абсцисс.

Говорят, что уравнение (4) определяет прямую. Коэффициент k называется *угловым коэффициентом*, ибо он определяет угол прямой с осью абсцисс, параметр b определяет отрезок OB, отсекаемый прямой на оси ординат.

Обратно, *всякое уравнение первой степени*

$$Ax + By + C = 0 \qquad A^2 + B^2 > 0$$

определяет прямую.

Действительно, если $B \neq 0$, то мы можем разрешить это уравнение относительно y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (4), если положить

$$k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}, \tag{4'}$$

следовательно, определяет прямую, проходящую через точку координатами $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ под углом $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{A}{B}\right)$ к оси абсцисс.

Если же $B = 0$, то, в силу $A^2 + B^2 > 0$, должен быть отличен от нуля коэффициент A, и мы можем разрешить уравнение относительно координаты x:

$$x = a, \quad a = -\frac{C}{A}. \tag{5}$$

Отсюда вытекает, что все точки геометрического места имеют одну и ту же абсциссу a и, следовательно, лежат на прямой, проходящей через точку $A(a, 0)$ параллельно оси ординат.

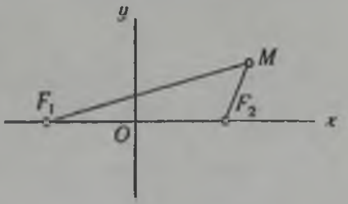
§ 4. Эллипс

Определение 1. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух заданных точек (*фокусов*) постоянна.

Если F_1 и F_2 — два фокуса и M — какая-нибудь точка эллипса, то

$$F_1M + F_2M = 2a, \qquad a = \text{const}. \tag{6}$$

Выберем систему координат так, чтобы она была хорошо связана с эллипсом. Так как нам даны два фокуса F_1 и F_2, внутренне связанные с эллипсом, то естественно за ось абсцисс принять фокальную прямую F_1F_2, начало координат поместить посередине между фокусами, и, наконец, чтобы иметь дело с прямоугольной системой, ось ординат провести перпендикулярно к оси абсцисс (черт. 21). Если обозначить заданное расстояние между фокусами через $2c$, то фокусы будут лежать на оси x по обе стороны от начала на расстоянии c от него. Их координаты будут $F_1(-c, 0)$ (левый фокус) и $F_2(c, 0)$ (правый фокус).



Черт. 21.

Из треугольника F_1MF_2 следует (сумма двух сторон треугольника всегда больше третьей):

$$F_1M + F_2M \geqslant F_1F_2.$$

Следовательно,

$$2a \geqslant 2c \text{ и } a \geqslant c;$$

но для $a = c$ треугольник F_1MF_2 вырождается, и точка M может быть только внутренней точкой отрезка F_1F_2. Для эллипса в собственном смысле слова мы должны выбирать

$$a > c. \tag{7}$$

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Тогда расстояния её от фокусов суть

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \tag{a}$$

и уравнение эллипса будет:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{6'}$$

Переносим второй корень в правую часть и возвышаем обе части в квадрат, чтобы освободиться от радикала:

$$(\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2})^2;$$

последовательные преобразования дают:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2,$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx,$$

и, наконец,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x. \tag{6''}$$

Определение 2. Отношение

$$\frac{c}{a} = e$$

называется *эксцентриситетом* эллипса.

Из неравенства (7) вытекает:

Следствие. *Эксцентриситет эллипса всегда меньше единицы:*

$$e < 1. \tag{7'}$$

Следовательно, уравнение эллипса (6'') можно написать в виде

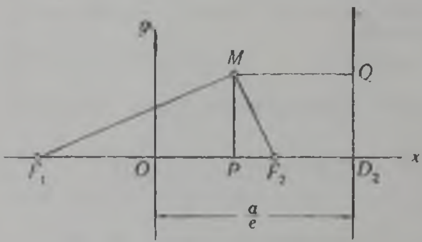
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-ex$$

или с помощью формулы (a):

$$F_2M=e\left(\frac{a}{e}-x\right). \tag{8}$$

Прежде чем продолжать преобразование уравнения, выясним геометрический смысл разности, которая стоит в скобках в правой части уравнения.

Отложим от начала координат O по оси абсцисс отрезок $OD_2=\frac{a}{e}$ (черт. 22). Так как $a>c$ и $e<1$, то $\frac{a}{e}>\frac{c}{e}>c$, и мы получим точку D_2 справа от фокуса F_2. Проведём через точку D_2 прямую, параллельную оси Oy. Будем называть её правой *директрисой* (левая директриса идёт параллельно оси Oy на таком же расстоянии слева от начала).



Черт. 22.

Расстояние точки M от директрисы определяется формулой:

$$d_2=MQ=PD_2=$$
$$=OD_2-OP,$$

но по построению $OD_2=\frac{a}{e}$, а $OP=x$ есть абсцисса точки M. Следовательно,

$$d_2=\frac{a}{e}-x,$$

и равенство (8) принимает вид:

$$r_2=F_2M=ed_2$$

или

$$r_2:d_2=e.$$

Мы получаем замечательное свойство эллипса, которое может служить его определением:

Отношение расстояния произвольной точки эллипса от фокуса к расстоянию её от соответствующей директрисы постоянно и равно эксцентриситету эллипса.

Мы здесь говорим „директриса, соответствующая фокусу", ибо, в силу полной симметрии определения эллипса относительно фокусов, всё, что говорится о правом фокусе, можно повторить о левом (заменяя везде c на $-c$). При этом получим уже другую директрису, расположенную слева от начала на таком же расстоянии $\frac{a}{e}$ от него.

§ 5. Каноническое уравнение эллипса

Возвращаемся к нашей задаче: привести уравнение эллипса к простейшему виду. Возвышаем в квадрат обе части уравнения (6″). Получаем:

$$(x-c)^2+y^2=a^2-2a\cdot\frac{c}{a}\cdot x+\frac{c^2}{a^2}x^2,$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2,$$

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2. \tag{9}$$

Так как $a>c$, то разность a^2-c^2 положительна, и мы можем обозначить её через b^2:

$$a^2-c^2=b^2. \tag{10}$$

Поскольку

$$1-\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

уравнение эллипса примет вид:

$$b^2\frac{x^2}{a^2}+y^2=b^2$$

или окончательно, после деления на b^2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{11}$$

Обратно, если x, y удовлетворяют уравнению (11), то, исключая b^2 по формуле (10), получим для них уравнение (9) и предыдущие. Извлекая квадратный корень, получим, однако, наряду с уравнением (6″) и уравнение

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-\left(a-\frac{c}{a}x\right), \tag{6*}$$

отличающееся знаком правой части, но поскольку в уравнении (11) каждое из двух положительных слагаемых левой части, в сумме составляющих единицу, не может быть больше единицы, имеем:

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1 \text{ и } \left|\frac{x}{a}\right|\leqslant 1, \tag{a}$$

а из формулы (10) следует:

$$c^2=a^2-b^2<a^2 \text{ и } c<a. \tag{b}$$

Перемножая неравенства (a) и (b) одного смысла, получим:

$$\left|\frac{x}{a}\right|c<a.$$

Следовательно, в сумме $a-\frac{c}{a}x$ абсолютная величина второго слагаемого $\left|\frac{c}{a}x\right|$ меньше, чем первого. Сумма имеет знак первого слагаемого, т. е. положительна, а правая часть уравнения (6*) — отрицательна. Так как радикал в левой части уравнения (6*) представляет арифметическое значение корня, т. е. действительное положительное число, то равенство (6*) несовместно с уравнением (11) и должно быть отброшено.

Таким же образом объясняется выбор знака при извлечении корня для получения равенства (6′). Быстрее можно прийти к нему, если заметить, что величина c вводилась посредством формулы (10), которая содержит только c^2, и, следовательно, допускает замену c на $-c$. Производя эту замену в уравнении (6″), получим:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x. \qquad (6''')$$

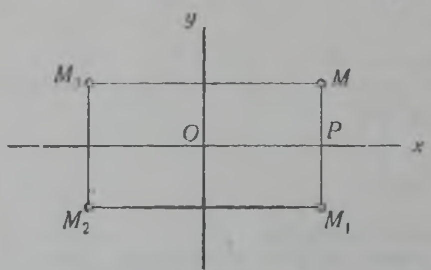
Складывая равенство (6″) и (6‴), непосредственно придём к равенству (6′), а отсюда с помощью формул (а) § 3 получим и равенство (6).

Следовательно, координаты x, y, удовлетворяющие уравнению (11), определяют точку, принадлежащую эллипсу.

Уравнение (11) называется *каноническим* уравнением эллипса.

Текущие координаты x и y входят сюда только в квадратах.

Если на эллипсе лежит точка $M(x, y)$, то будут лежать ещё три точки, координаты которых получаются изменением знака одной или обеих координат, $M_1(x, -y)$, $M_2(-x, -y)$, $M_3(-x, y)$ (черт. 23).



Черт. 23.

Так как точки M и M_1 имеют равные абсциссы, то они лежат на одной прямой MM_1, перпендикулярной к оси абсцисс; ординаты их равны по абсолютной величине, отличаясь только знаком. Следовательно, хорда MM_1 делится осью абсцисс в некоторой точке P пополам.

Так как $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса, то ось абсцисс делит пополам все перпендикулярные к ней хорды. То же самое можно сказать относительно оси ординат (если рассмотреть, например, точки M и M_3).

Определение 1. *Осью кривой* называется прямая, которая делит пополам перпендикулярные к ней хорды.

Пользуясь этим определением, выскажем полученный результат в виде теоремы.

Теорема. *В каноническом уравнении эллипс отнесён к своим осям.*

Определение 2. *Центром* кривой называется точка, которая делит пополам все проходящие через неё хорды.

Следствие. *Середина расстояния между фокусами есть центр эллипса.*

Действительно, в силу равенства по абсолютной величине одноимённых координат четырёх точек M, M_1, M_2, M_3 (черт. 23), четырёхугольник $MM_1M_2M_3$ является прямоугольником и начало координат O есть точка пересечения диагоналей MM_2 и M_1M_3. Отсюда прямо следует, что хорда MM_2 делится в точке O пополам, а так как точка

M — произвольная точка эллипса, то всякая хорда, проходящая через точку O, разделится в ней пополам.

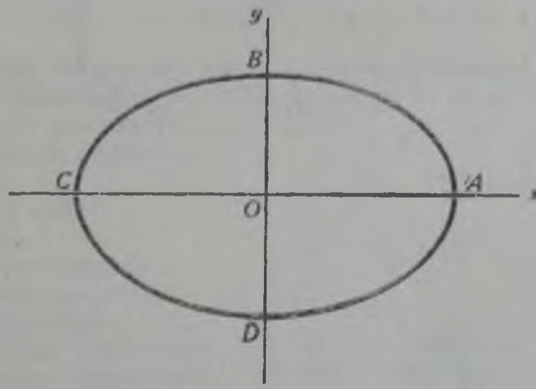
Эти результаты можно высказать ещё в другой форме, пользуясь понятием симметрии: точки M и M_1 симметричны относительно оси Ox, а точки M и M_3 — относительно оси Oy, или: оси координат суть *оси симметрии*, а начало — *центр симметрии* эллипса, заданного каноническим уравнением.

Определение 3. Точка пересечения кривой с её осью называется *вершиной* кривой.

Полагая в уравнении эллипса (11) ординату y равной нулю, найдём точки эллипса, расположенные на оси абсцисс:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ или } x^2 = a^2, \text{ или } x = \pm a;$$

точно так же для $x = 0$ имеем $y = \pm b$. Отсюда следует:



Черт. 24.

Теорема. *Эллипс имеет четыре вершины: по две на каждой оси* (черт. 24):

$$A(a, 0), \; C(-a, 0), \; B(0, b), \; D(0, -b).$$

Определение 4. Отрезок, отсекаемый кривой на её оси, называется *осью* в тесном смысле слова.

Так как отрезки $CA = 2a$, $DB = 2b$, то $2a$ и $2b$ — оси кривой (в тесном смысле слова), их половины a и b — *полуоси* эллипса.

Так как $a > b$, то a называется *большой полуосью*, а b — *малой*.

§ 6. Построение эллипса по точкам

Так как эллипс расположен симметрично относительно осей координат, то достаточно построить его в первой четверти (где обе координаты x и y положительны), чтобы потом по принципу симметрии представить форму эллипса и в других четвертях.

Определяя y из уравнения (11), получим:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}, \quad \text{или} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

и окончательно:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad (11')$$

где сохраняем только положительный знак, ибо рассматриваем точку в первой четверти.

Уравнение окружности с центром в начале и радиусом, равным большой полуоси эллипса, будет:

$$X^2 + Y^2 = a^2, \qquad (12)$$

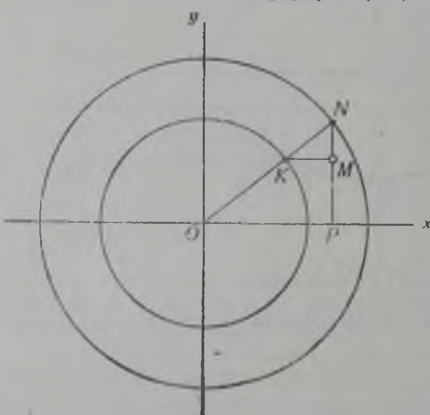
где текущие координаты обозначены прописными буквами.

Отсюда для точек в первой четверти имеем соотношение:

$$Y = \sqrt{a^2 - X^2}. \qquad (12')$$

Сравнивая значение ординаты y точки эллипса M [формула (11′)] и ординаты Y точки N [формула (12′)], принадлежащей окружности и имеющей ту же самую абсциссу $X = x$, получим:

$$y = \frac{b}{a}Y. \qquad (13)$$



Черт. 25.

Следовательно, чтобы построить ординату y эллипса для заданной абсциссы, надо изменить соответствующую ординату окружности v в отношении $b : a$.

Итак, проводим две окружности с общим центром O и радиусами $ON = a$ и $OK = b$ (черт. 25). Для произвольной заданной абсциссы $OP = x$ строим ординату большой окружности $PN = Y$. Точку N соединяем с центром O и из точки пересечения ON с малой окружностью (точка K) проводим прямую параллельно оси абсцисс до пересечения в точке M с ординатой PN.

Так как прямая KM, параллельная основанию OP треугольника ONP, делит боковые стороны на пропорциональные части, то

$$PM : OK = PN : ON.$$

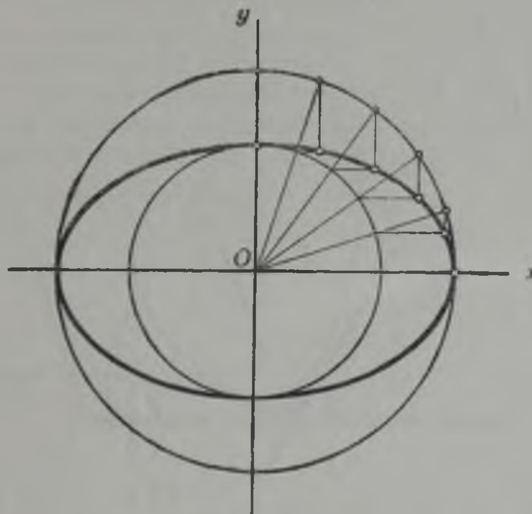
Но

$$OK = b, \quad ON = a \quad \text{и} \quad PN = Y;$$

следовательно,

$$PM = \frac{OK \cdot PN}{ON} = \frac{b}{a} Y$$

и по формуле (13) совпадает с ординатой y точки эллипса. Так как абсцисса этой точки $x = OP$, то точка M, имея координаты x и y, принадлежит эллипсу.



Черт. 26.

Повторяя это построение достаточное число раз, получим ряд точек, дающих представление о форме эллипса (черт. 26).

§ 7. Эллипс как проекция окружности

Формуле (13) можно дать хорошее геометрическое истолкование, если ввести понятие проекции линии на плоскость.

Определение. *Проекцией точки* M на плоскость ε называется основание P перпендикуляра MP, опущенного из точки M на эту плоскость.

Рассмотрим две плоскости ABD и CBD, образующие двугранный угол $\alpha = \angle ABC$ (черт. 27).

В каждой плоскости построим декартову прямоугольную систему координат. Ребро BD примем за общую ось абсцисс и точку O — за общее начало той и другой системы координат.

Если

$$Y = QM$$

ордината какой-нибудь точки M в плоскости CBD и P — проекция точки M на вторую плоскость ABD, то в треугольнике PQM обе стороны QM и QP перпендикулярны к ребру BD и образуют линейный угол двугранного угла наших плоскостей, $\angle PQM = \alpha$. Угол треугольника при точке P — прямой, ибо PM — перпендикуляр на плоскость ABD. Следовательно, ордината $y = QP$ точки P определяется как катет по гипотенузе:

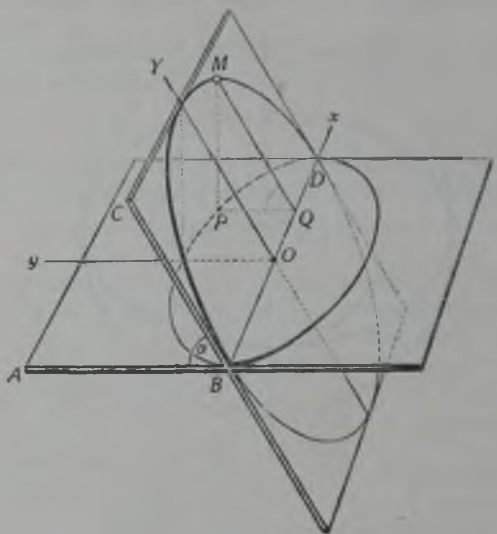
$$y = Y \cos \alpha. \tag{13'}$$

Если точка M пробегает окружность (12) и угол α выбран так, чтобы

$$\cos\alpha = \frac{b}{a},$$

то формула (13′) совпадает с уравнением (13), и точка P будет описывать эллипс (11).

Каждая точка этого эллипса есть проекция точки окружности; поэтому весь эллипс представляет собой проекцию окружности.



Черт. 27.

Теорема. Эллипс есть ортогональная проекция окружности; угол между плоскостями обеих кривых имеет косинусом отношение полуосей эллипса.

§ 8. Гипербола

Определение 1. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух точек плоскости (*фокусов*) по абсолютной величине постоянна.

Если F_1 и F_2 — два фокуса и M — какая-нибудь точка гиперболы, то

$$F_1M - F_2M = \pm 2a, \tag{14}$$

где a — постоянный отрезок.

Примем за ось абсцисс декартовой прямоугольной системы координат прямую F_1F_2, поместим начало координат O в середину фокального отрезка $F_1F_2 = 2c$; ось ординат пройдёт перпендикулярно к оси абсцисс (черт. 28).

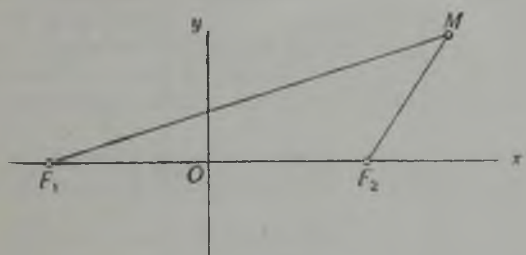
Так же как в случае эллипса, координаты фокусов будут $F_1(-c, 0)$ — левый и $F_2(c, 0)$ — правый фокусы. Если $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы, то

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \tag{a}$$

и уравнение гиперболы

$$\pm\sqrt{(x+c)^2+y^2} \mp \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{14'}$$

Это уравнение отличается от уравнения эллипса (6′) только знаком перед вторым квадратным корнем. Так как при приведении к каноническому виду мы последовательно уединяем каждый корень и освобождаемся от радикала, возвышая обе части уравнения в квадрат, а при возвышении в квадрат знак минус перед корнем не имеет



Черт. 28.

значения, то после освобождения от радикалов мы должны прийти к тому же самому уравнению, как и в случае эллипса. Единственное отличие в том, что теперь надо выбирать $c>a$.

Действительно, в треугольнике F_1F_2M разность двух сторон $F_1M - F_2M = 2a$ всегда меньше третьей стороны $F_1F_2 = 2c$.

Определение 2. Отношение $\frac{c}{a} = e$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Прямые, перпендикулярные к фокальному отрезку F_1F_2 и отстоящие на расстоянии $\frac{a}{e}$ от его середины, называются *директрисами* гиперболы.

Следствие. Эксцентриситет гиперболы больше единицы.

Если в уравнении (14′) взять верхние знаки, то, перенося второй радикал в правую часть и возвышая обе части в квадрат, получим уравнение (6″) с отрицательным знаком перед радикалом:

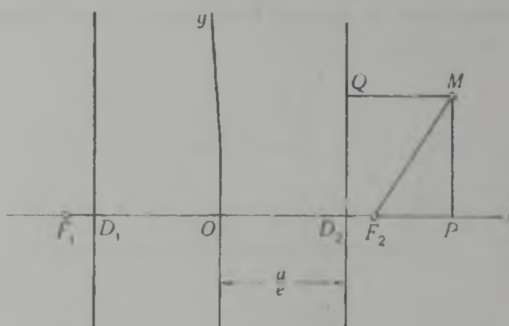
$$-\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x. \tag{15}$$

Заменяя радикал по формуле (а) его значением F_2M, получим уравнение (8) с обратными знаками правой части:

$$F_2M = e\left(x - \frac{a}{e}\right). \tag{15'}$$

При этом, очевидно, предполагается, что абсцисса x — положительна. Если она отрицательна, то, чтобы формула имела смысл (положительность расстояния F_2M), надо в уравнении (14′) брать нижние знаки. Это изменит знак у радикала в уравнении (15) и приведёт к положительному значению F_2M в формуле (15′).

Так как $a < c$ и $e > 1$, то $\frac{a}{e} < \frac{c}{e} < c$. Следовательно, откладывая от начала координат по оси Ox отрезок $OD_2 = \frac{a}{e}$, мы получим точку D_2 внутри фокального отрезка F_1F_2 (черт. 29).



Черт. 29.

Расстояние точки $M(x, y)$ от директрисы равно

$$d_2 = QM = D_2P = OP - OD_2 = x - \frac{a}{e}.$$

Расстояние (15′) принимает вид:

$$r_2 = F_2M = ed_2$$

и, следовательно,

$$r_2 : d_2 = e.$$

Такой же результат получим и для левого фокуса, и для левой директрисы. Следовательно, можем высказать предложение:

Отношение расстояния произвольной точки гиперболы от фокуса к расстоянию её от соответствующей директрисы — постоянно и равно эксцентриситету гиперболы.

§ 9. Каноническое уравнение гиперболы

Возвышая в квадрат обе части уравнения (15), получим то же самое уравнение (9), как и в случае эллипса. Но теперь $c > a$, поэтому определим b^2 посредством равенства

$$c^2 - a^2 = b^2. \tag{16}$$

Тогда получим:

$$-b^2\frac{x^2}{a^2}+y^2=-b^2$$

и, деля на $-b^2$, окончательно:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (17)$$

Так же, как для эллипса, можно доказать, что точка с координатами x, y, удовлетворяющими уравнению (17), удовлетворяет условию (14), т. е. принадлежит гиперболе.

Уравнение (17) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

Уравнение (17) (так же как каноническое уравнение эллипса) содержит только квадраты текущих координат; поэтому для одного значения x оно определяет два значения y, отличающихся между собой знаками, и наоборот. Следовательно, подобно эллипсу, в каноническом уравнении гипербола отнесена к центру и осям.

Середина расстояния между фокусами является *центром* гиперболы.

В отличие от эллипса гипербола имеет только две действительные вершины, именно: внося в уравнение (17) значение $y=0$, получим:

$$\frac{x^2}{a^2}=1 \quad \text{или} \quad x^2=a^2, \quad \text{или} \quad x=\pm a.$$

Ось Ox поэтому называется *действительной осью* гиперболы. Отрезок этой оси между вершинами равен $2a$; его половина a называется *действительной полуосью* гиперболы.

Ось Oy не встречает гиперболы. Внося в уравнение (17) значение $x=0$, получим:

$$\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad \text{или} \quad y^2=-b^2, \quad \text{или} \quad y=\pm ib, \quad i=\sqrt{-1}.$$

Вершины этой оси мнимы. Отсюда название *мнимой оси*, хотя сама прямая действительна. Поэтому же величина b, квадрат которой стоит в знаменателе при y^2 в каноническом уравнении гиперболы, называется *мнимой полуосью* гиперболы, хотя величина b — действительное число.

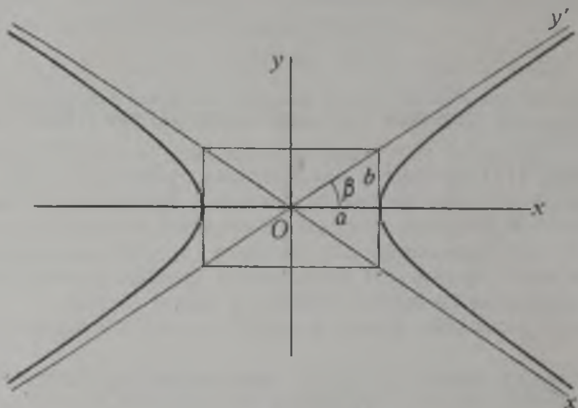
В § 8 главы II мы преобразовали уравнение гиперболы (17), изменив направление осей так, чтобы новые оси Ox', Oy' располагались по обе стороны оси Ox под углом β, определяемым уравнением:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}. \qquad (18)$$

Преобразованное уравнение

$$x'y'=m^2, \qquad m=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

позволило построить гиперболу по точкам. Мы видим, что гипербола состоит из двух раздельно лежащих ветвей, которые неограниченно приближаются к осям Ox', Oy' по мере удаления точек гиперболы в бесконечность (черт. 30). Эти новые оси Ox', Oy' мы назвали *асимптотами* гиперболы. Асимптоты служат диагоналями прямоуголь-



Черт. 30.

ника, построенного на осях гиперболы (см. черт. 30). Формула (18) определяет половину угла между асимптотами гиперболы.

§ 10. Парабола

Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек, равно отстоящих от заданных точки (*фокуса*) и прямой (*директрисы* параболы).

Пусть нам дан фокус F и директриса KL параболы (черт. 31). Выберем за ось абсцисс прямоугольной декартовой системы координат перпендикуляр FD, опущенный из фокуса на директрису; начало координат поместим в середине отрезка FD между фокусом и директрисой и выберем положительное направление оси Ox от директрисы к фокусу; ось Oy будет перпендикулярна к оси Ox.

Если обозначить буквой p расстояние фокуса от директрисы, то координаты фокуса будут $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$. Расстояние произвольной точки параболы $M(x,\ y)$ от фокуса равно

$$FM=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Расстояние той же точки от директрисы

$$QM=DP=DO+OP.$$

Так как $OP = x$ есть абсцисса точки M, а $DO = \frac{p}{2}$, то

$$QM = \frac{p}{2} + x.$$

Так как, по определению параболы, $FM = QM$, то получаем уравнение параболы:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x. \qquad \text{(a)}$$

Возвышая обе части в квадрат и преобразуя:

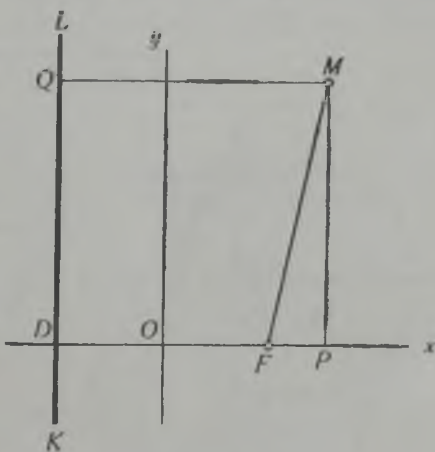
$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2,$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2,$$

получим:

$$y^2 = 2px. \qquad (19)$$

Если пара координат x, y удовлетворяет уравнению (19), то, возвращаясь назад, получим по извлечении корня равенство (a). Действительно, при положительном параметре p из уравнения (19) получается положительное значение для координаты x, а тогда, чтобы радикал в уравнении (a) имел положительное значение, надо при извлечении корня писать радикал с положительным знаком.



Черт. 31.

Уравнение (19) называется *каноническим уравнением параболы*.

Так как уравнение содержит координату y только в квадрате, то для одного (положительного) значения абсциссы x получим два значения $y = \pm\sqrt{2px}$, отличающихся знаком. Пара точек с координатами $(x, \pm\sqrt{2px})$ располагается на прямой, перпендикулярной к оси Ox, симметрично относительно этой оси координат.

Следовательно, ось Ox является *осью* параболы. Эта ось пересекает параболу только в одной точке — в начале координат; действительно, внося в уравнение (19) значение $y = 0$, немедленно получим $x = 0$. Следовательно, начало координат — *вершина* параболы.

Мы видим, что всякая прямая, перпендикулярная оси Ox, пересекает параболу в двух точках (на равном расстоянии от оси по обе стороны от неё), Сама ось ординат имеет с параболой только одну общую точку.

Внося в уравнение параболы $x = 0$, получим:

$$y^2 = 0$$

— квадратное уравнение с двумя равными корнями $y = 0$.

Будем говорить, что две точки пересечения оси ординат с параболой совпали, и называть ось ординат *касательной* параболы в её вершине.

В каноническом уравнении парабола отнесена к оси и касательной в вершине.

§ 11. Построение параболы по точкам

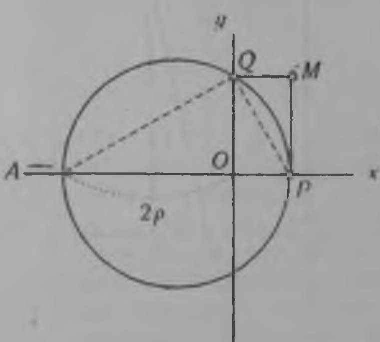
Каноническое уравнение параболы (19) приводит к простому способу построения точек параболы.

Будем рассматривать x и y как положительные числа. Уравнение

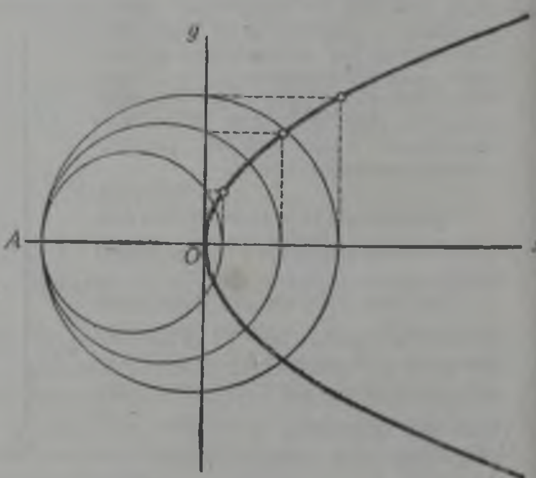
$$y = \sqrt{2px}$$

показывает, что y есть среднее пропорциональное между величиной $2p$ и абсциссой x.

Так как высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между отрезками гипотенузы, то построение



Черт. 32.



Черт. 33.

ординаты y точки параболы M по заданной её абсциссе x можно вести следующим способом:

Откладываем по оси абсцисс от начала координат налево (в отрицательном направлении оси абсцисс) постоянный отрезок $AO = 2p$, а направо — заданную абсциссу точки $OP = x$ (черт. 32). Строим на отрезке AP, как на диаметре, окружность PQA. Если Q есть точка пересечения окружности с осью Oy, то угол AQP, как вписанный угол окружности, опирающийся на диаметр, равен прямому углу; треугольник AQP — прямоугольный, и высота OQ, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу AP, есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы $AO = 2p$ и

$OP = x$:

$$OQ = \sqrt{AO \cdot OP} = \sqrt{2px} = y.$$

Проводя через точки P и Q прямые, параллельные осям координат, построим точку M с координатами x и $y = \sqrt{2px}$, т. е. одну из точек параболы.

Повторяя это построение для различных значений абсциссы x, получим произвольное число точек параболы (черт. 33).

Глава IV

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛИНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Уравнение, содержащее только одну текущую координату

Пусть уравнение геометрического места точек содержит только координату x:

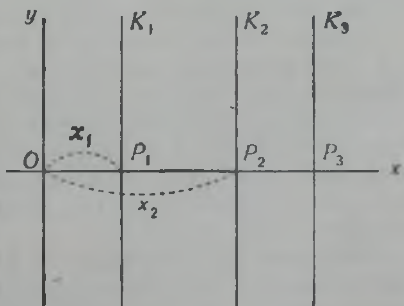
$$F(x) = 0. \qquad (1)$$

Если это уравнение не допускает ни одного действительного корня $x = x_1$, то геометрическое место точек, определяемое уравнением, — пустое, т. е. нет ни одной точки плоскости $M(x, y)$, координаты которой удовлетворяли бы уравнению, ибо для всякого действительного числа x левая часть уравнения $F(x)$ не равняется нулю. Если при этом уравнение (1) допускает мнимые корни, то говорят, что уравнение (1) определяет мнимую линию.

Если уравнение (1) имеет действительные корни

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad x = x_3, \ldots,$$

то все точки с абсциссой $x = x_1$ и произвольной ординатой y принадлежат нашему геометрическому месту точек, ибо координата y совершенно не входит в уравнение, а $F(x_1)$ по условию равно нулю (x_1 есть корень уравнения). Все точки с одной и той же абсциссой $x = x_1$ имеют одну и ту же проекцию на оси абсцисс, именно точку P_1, где $OP_1 = x_1$; они располагаются на прямой P_1K_1, проходящей через точку P_1 параллельно оси ординат (чертёж 34).

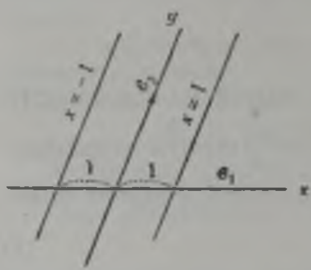


Черт. 34.

То же самое можно сказать относительно каждого другого корня $x = x_2$ или $x = x_3$. На оси абсцисс этот корень определяет единственную точку с абсциссой $x = x_2$ или $x = x_3$; пусть это будет точка P_2 или P_3. На плоскости все точки с одной абсциссой составляют прямую, параллельную оси ординат и проходящую через точку P_2 или P_3.

Таким образом, уравнение (1) определяет на плоскости столько прямых, параллельных оси ординат, сколько действительных корней $x = x_i$ оно допускает.

Теорема. *Уравнение, содержащее только одну текущую координату* (например, абсциссу), *определяет одну или несколько прямых, параллельных другой оси координат* (оси ординат) (*столько прямых, сколько действительных корней допускает уравнение*).



Черт. 35.

Можно сказать, что каждому мнимому корню уравнения (1) соответствует мнимая прямая, параллельная оси ординат (см. § 6, гл. VII).

Пример. Уравнение

$$(x')^2 - 1 = 0$$

имеет два корня:

$$x_1' = 1, \ x_2' = -1,$$

следовательно, определяет две прямые, параллельные вектору e_2 и отсекающие на первой оси равные отрезки (черт. 35).

§ 2. Точка пересечения двух линий

Даны две линии своими уравнениями:

$$F(x^1, \ x^2) = 0, \tag{a}$$

$$G(x^1, \ x^2) = 0. \tag{b}$$

Как найти точки их пересечения?

Каждая точка, лежащая на первой кривой, имеет координатами два действительных числа x^1, x^2, удовлетворяющих уравнению (a). Каждая точка, лежащая на второй кривой, имеет координатами два числа, удовлетворяющих второму уравнению (b). Точка пересечения лежит и на первой, и на второй кривой; её координаты удовлетворяют и первому, и второму уравнению. Следовательно, чтобы найти точки пересечения кривых (a) и (b), надо решить совместно систему уравнений (a) и (b). Отсюда:

Теорема. *Два уравнения с двумя неизвестными определяют, вообще говоря, координаты нескольких раздельно лежащих точек. Эти точки являются точками пересечения тех линий, которые определяются в отдельности первым и вторым из уравнений системы.*

Например, уравнения

$$x^2 + y^2 - 2x = 0, \tag{a'}$$

$$y = 0 \tag{b'}$$

определяют: первое — окружность (§ 2, гл. III), второе — прямую, а система (a′), (b′) определяет точки пересечения их. Исключая y, имеем: $x^2 - 2x = 0$,
откуда два решения системы

$$x = 0, \quad y = 0 \text{ и } x = 2, \quad y = 0$$

определяют две точки пересечения.

Оговорка „вообще говоря" имеет в виду тот случай, когда две заданные линии имеют общую часть.

Возьмём, например, две линии:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 - 1)\, x &= 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)\, y &= 0. \end{aligned} \tag{c}$$

Система (c) удовлетворена, если текущие координаты x, y обращают в нуль первый множитель, т. е. удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{c′}$$

Это уравнение определяет (§ 2, гл. III) окружность радиуса, равного единице, с центром в начале координат. Любую точку этой окружности можно рассматривать как общую точку (точку пересечения) линий (c). Окружность (c_1) является общей частью линий (c).

Если координаты x, y не обращают в нуль $x^2 + y^2 - 1$, то система (c) может быть удовлетворена только при обращении в нуль вторых множителей:

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Следовательно, кроме общей части (c_1), линии (c) пересекаются ещё только в одной точке — в начале координат.

§ 3. Инварианты преобразования координат

В аналитической геометрии каждая линия на плоскости определяется уравнением. Естественно прежде всего поставить вопрос о классификации линий по их уравнениям.

Для уравнений $F(x^1, y^2) = 0$
в аффинной системе координат существует рациональная классификация по виду функции $F(x^1, x^2)$, стоящей в левой части уравнения.

Определение 1. Уравнение называется *алгебраическим*, если его можно привести к виду, когда левая часть содержит многочлен с целыми положительными показателями от переменных x^1, x^2.

Все неалгебраические уравнения называются *трансцендентными*.

Будем называть степенью одночлена $a\,(x^1)^p\,(a^2)^q$ сумму показателей $p + q$ при переменных x^1 и x^2, а степенью многочлена $F(x^1, x^2)$ — наивысшую степень среди различных степеней его членов. Тогда мы можем ввести:

Определение 2. *Степенью* алгебраического уравнения называется степень многочлена, который стоит в его левой части.

Можно ли эту классификацию перевести на линии, определяемые уравнениями?

Законность поставленного вопроса оправдывается теми глубокими изменениями, которые производит преобразование координат. Достаточно посмотреть на уравнения (a) и (b) одной и той же гиперболы в § 8, гл. II.

Ограничим прежде всего изменение системы координат пределами аффинных координат, в том числе декартовых (косоугольных и прямоугольных).

Мы обнаружим, что существуют такие свойства уравнений, которые остаются *инвариантными*, т. е. не изменяющимися при всех допустимых преобразованиях координат.

Теорема 1. *При всех преобразованиях аффинной системы координат алгебраическое уравнение остаётся алгебраическим и степень его не повышается.*

В § 9, гл. II, мы вывели формулы общего преобразования аффинной системы координат:

$$\begin{aligned} x^1 &= c^1_{1'} x^{1'} + c^1_{2'} x^{2'} + c^1_{0'}, \\ x^2 &= c^2_{1'} x^{1'} + c^2_{2'} x^{2'} + c^2_{0'}. \end{aligned} \tag{2}$$

Чтобы преобразовать уравнение линии

$$F(x^1, x^2) = 0$$

при переходе от одной аффинной системы координат к другой, мы должны внести вместо переменных x^1, x^2 их выражения по формулам (2):

$$F(c^1_{1'} x^{1'} + c^1_{2'} x^{2'} + c^1_{0'}, \quad c^2_{1'} x^{1'} + c^2_{2'} x^{2'} + c^2_{0'}) = 0.$$

Если уравнение $F=0$ — алгебраическое, то левая часть его $F(x^1, x^2)$ — многочлен относительно переменных x^1, x^2. Рассмотрим один из членов этого многочлена. После преобразования координат этот член примет вид: $A(x^1)^p (x^2)^q = A(c^1_{1'} x^{1'} + c^1_{2'} x^{2'} + c^1_{0'})^p \times \times (c^2_{1'} x^{1'} + c^2_{2'} x^{2'} + c^2_{0'})^q$. Если раскрыть все скобки, то получим многочлен степени $p+q$ от новых переменных $x^{1'}$, $x^{2'}$.

Точно так же преобразуются все остальные члены многочлена $F(x^1, x^2)$.

После сложения всех многочленов, которые получатся от преобразования каждого члена многочлена $F(x^1, x^2)$, мы получим снова многочлен, который и будет стоять в левой части преобразованного уравнения:

$$\Phi(x^{1'}, x^{2'}) = F(c^1_{1'} x^{1'} + c^1_{2'} x^{2'} + c^1_{0'}, \quad c^2_{1'} x^{1'} + c^2_{2'} x^{2'} + c^2_{0'}).$$

Уравнение, следовательно, останется алгебраическим.

Так как после преобразования одночлена $A(x^1)^p (x^2)^q$ получается многочлен степени $p+q$, т. е. той самой степени, какую имел одночлен $A(x^1)^p (x^2)^q$, то после преобразования всего многочлена $F(x^1, x^2)$ не получится ни одного члена, степень которого была бы больше степени многочлена $F(x^1, x^2)$. Значит, при преобразовании аффинной системы координат в аффинную степень алгебраического уравнения не может повыситься.

Теорема 2. При любом преобразовании аффинной системы координат в аффинную трансцендентное уравнение не может сделаться алгебраическим и степень алгебраического уравнения не может понизиться.

Допустим, что после преобразования аффинной системы координат (2) трансцендентное уравнение

$$F(x^1, x^2) = 0 \tag{a}$$

станет алгебраическим:

$$\Phi(x^{1'}, x^{2'}) = 0. \tag{b}$$

Совершим обратный переход от системы координат $x^{1'}$, $x^{2'}$ к системе координат x^1, x^2. Решая уравнение (2) относительно переменных $x^{1'}$, $x^{2'}$, мы получим формулы того же самого вида:

$$\begin{aligned} x^{1'} &= C_1^{1'}x^1 + C_2^{1'}x^2 + C_0^{1'}, \\ x^{2'} &= C_1^{2'}x^1 + C_2^{2'}x^2 + C_0^{2'}, \end{aligned} \tag{2'}$$

ибо это — тоже преобразование аффинных координат. Это преобразование приведёт нас от уравнения $\Phi = 0$ обратно к уравнению $F = 0$.

В силу уже доказанной теоремы 1 алгебраическое уравнение $\Phi(x^{1'}, x^{2'}) = 0$ должно остаться алгебраическим; между тем уравнение $F(x^1, x^2) = 0$ было трансцендентным.

Таким образом, трансцендентное уравнение и после преобразования останется трансцендентным.

Точно так же доказывается и вторая половина теоремы.

Если уравнение $F = 0$ — алгебраическое и степень его равна n, а после преобразования координат уравнение $\Phi = 0$ имеет степень n', то по теореме 1

$$n' \leqslant n.$$

После обратного преобразования уравнение $\Phi = 0$ вернётся к виду $F = 0$. Это тоже преобразование аффинной системы координат в аффинную; теорема 1 имеет место; степень уравнения не повысится. Следовательно,

$$n \leqslant n'.$$

Два неравенства исключают друг друга. Следовательно, в обоих случаях имеет место знак равенства:

$$n' = n.$$

Степень уравнения не понижается. Отсюда:

Следствие. *Степень алгебраического уравнения между текущими координатами точки на плоскости есть инвариант преобразований аффинной системы координат в аффинную.*

Так как декартова система координат представляет частный случай аффинной системы координат, то все эти теоремы сохраняют силу и для преобразования декартовых координат.

Можно обратить внимание, что в примере преобразования уравнения гиперболы (гл. II, § 8) первоначальное уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

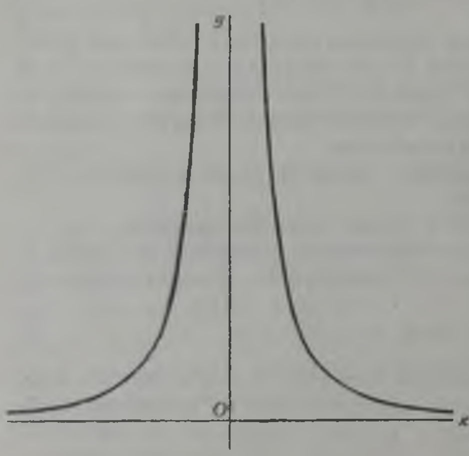
и преобразованное

$$x'y'=\frac{a^2+b^2}{4}$$

имеют различный вид, но оба они — алгебраические и оба — второй степени (ибо, по определению, степень члена $x'y'$ равна сумме показателей при x' и y').

§ 4. Классификация линий на плоскости

В силу доказанной теоремы об инвариантности степени алгебраического уравнения при всех преобразованиях аффинной системы координат можно построить рациональную классификацию линий на плоскости.



Черт. 36.

Определение 1. Линия называется *алгебраической*, если в аффинной (декартовой) системе координат определяется алгебраическим уравнением. Все неалгебраические линии называются *трансцендентными*.

Определение 2. Алгебраические линии делятся по *порядкам*. Порядком алгебраической линии называется степень её уравнения в любой аффинной системе координат.

Теорема об инвариантности степени алгебраического уравнения показывает, что для определения порядка алгебраической кривой безразлично, какую аффинную систему координат мы выберем.

Пример 1. В главе III, § 2—9, мы вывели уравнение окружности (2), эллипса (11), гиперболы (17), параболы (19). Всё это — уравнения второй степени. Следовательно, окружность, эллипс, гипербола, парабола — кривые второго порядка.

Пример 2. Если произвольно заданную прямую AB принять за ось абсцисс декартовой системы координат, то уравнение её напишется в виде

$$y=0.$$

Это — уравнение первой степени. Следовательно, прямая линия — линия первого порядка.

Пример 3. Линия

$$y = \frac{1}{x^2},$$

изображённая на чертеже 36, есть линия третьего порядка, ибо по освобождении от знаменателя уравнение линии принимает вид:

$$x^2y - 1 = 0.$$

В левой части стоит многочлен третьей степени, так как сумма показателей при x и y в первом члене равна 3.

Пример 4. Синусоида $y = \sin x$, логарифмика $y = \lg x$ дают примеры трансцендентных линий.

Аналитическая геометрия рассматривает только алгебраические кривые.

Деление линий по порядкам устанавливает естественную последовательность курса аналитической геометрии на плоскости. Мы будем рассматривать линии первого и второго порядка.

§ 5. Геометрический смысл порядка кривой

Пусть дана кривая n-го порядка

$$F(x^1, x^2) = 0$$

и произвольная прямая AB. Преобразуем систему координат, выбирая прямую AB за новую ось абсцисс.

Кривая в новой системе координат останется кривой n-го порядка. Пусть её уравнение примет вид:

$$\Phi(x^{1'}, x^{2'}) = 0. \tag{a}$$

Уравнение прямой AB, как уравнение оси абсцисс, примет вид:

$$x^{2'} = 0. \tag{b}$$

Найдём точки пересечения нашей кривой с прямой AB.

Для этого надо решить совместно систему уравнений (a) и (b).

Вносим в уравнение (a) значение $x^{2'} = 0$; мы получим:

$$\Phi(x^{1'}, 0) = 0.$$

Это — алгебраическое уравнение степени не выше чем n относительно неизвестной величины $x^{1'}$:

$$A_0(x^{1'})^n + A_1(x^{1'})^{n-1} + A_2(x^{1'})^{n-2} + \ldots + A_n = 0.$$

Все коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — известные числа, из которых некоторые могут равняться нулю. Если $A_0 = 0$, то степень уравнения понизится.

Так как уравнение степени n имеет не больше n корней, то прямая AB не может иметь больше чем n точек пересечения с кривой. Имеем:

Теорема. *Линия n-го порядка пересекается с произвольной прямой не более чем в n точках.*

Заметим, что прямая AB может вообще не иметь общих точек с кривой или наоборот входит в состав линии n-го порядка.

§ 6. Уравнение, левая часть которого разлагается на множители

Допустим, что все члены уравнения перенесены в левую часть и левая часть разлагается на два множителя:

$$F(x^1, x^2) \cdot \Phi(x^1, x^2) = 0. \tag{3}$$

Если точка $M_0(x_0^1, x_0^2)$ принадлежит кривой, определяемой уравнением (3), то координаты её x_0^1, x_0^2 удовлетворяют уравнению (3), т. е. обращают в нуль произведение

$$F(x_0^1, x_0^2) \cdot \Phi(x_0^1, x_0^2) = 0.$$

Если произведение двух множителей равно нулю, то или первый, или второй множитель равен нулю. Следовательно, все точки кривой можно разделить на две категории: 1) точки, координаты которых обращают в нуль первый множитель; они образуют кривую, определяемую уравнением:

$$F(x^1, x^2) = 0; \tag{3a}$$

2) точки, координаты которых обращают в нуль второй множитель и, следовательно, удовлетворяют уравнению:

$$\Phi(x^1, x^2) = 0. \tag{3b}$$

Каждая точка кривой (3) принадлежит или кривой (3a), или кривой (3b) (или той и другой одновременно). Отсюда следует, что кривая (3) есть совокупность двух линий: линии (3a) и линии (3b). Если оба множителя $F(x^1, x^2)$ и $\Phi(x^1, x^2)$ — многочлены, то мы будем говорить, что линия (3) распадается на две кривых: (3a) и (3b).

Теорема. *Если после перенесения всех членов в одну часть уравнения она разлагается на множители, то кривая, определяемая уравнением, распадается на простейшие; они определяются уравнениями, которые получаются, если приравнять нулю каждый множитель отдельно.*

Пример. Составить уравнение совокупности окружности радиуса, равного единице, с центром в точке $C(1,0)$ и оси абсцисс.

Окружность с центром $C(1,0)$ и радиусом $R = 1$ определяется в прямоугольной системе декартовых координат уравнением (2) § 2, гл. III:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0.$$

или для $a=1$, $b=0$, $R=1$

$$(x-1)^2+y^2-1=0,$$

или

$$x^2+y^2-2x=0. \tag{a}$$

Ось абсцисс имеет уравнение

$$y=0. \tag{b}$$

Следовательно, совокупность окружности (a) и оси абсцисс (b) определяется уравнением:

$$(x^2+y^2-2x)\,y=0.$$

§ 7. Пучок линий

Уравнение

$$F(x^1,\ x^2)+\lambda G(x^1,\ x^2)=0 \tag{4}$$

при заданных линейно независимых[1]) функциях $F(x^1,\ x^2)$ и $G(x^1,\ x^2)$ и различных значениях параметра λ определяет различные линии.

Определение 1. Совокупность линий (4) при всевозможных значениях параметра λ составляет семейство линий, которое называется *пучком линий.*

Линии

$$F(x^1,\ x^2)=0 \text{ и } G(x^1,\ x^2)=0 \tag{5}$$

составляют *базис* пучка. Первая принадлежит пучку со значением параметра $\lambda=0$. Вторую мы тоже включаем в пучок; она получается в пределе, когда параметр λ неограниченно возрастает.

Чтобы не делать исключения для второй линии базиса, удобно заменить параметр λ отношением

$$\lambda=\frac{q}{p}.$$

Тогда уравнение (4) по освобождении от знаменателя примет вид:

$$pF(x^1,\ x^2)+qG(x^1,\ x^2)=0. \tag{4'}$$

Каждая линия пучка соответствует паре чисел p, q и всем числам, им пропорциональным. Первая линия базиса соответствует значению $q=0$ и произвольному значению p; вторая — значению $p=0$ и произвольному значению q.

Теорема 1. *Всякая линия пучка проходит через точки пересечения его базисных линий.*

Действительно, координаты точки пересечения базисных линий (5) обращают в нуль функции $F(x^1,\ x^2)$ и $G(x^1,\ x^2)$. Но тогда равна нулю и их сумма с любым коэффициентом λ, т. е. уравнение (4) удовлетворяется при любом значении параметра λ. Значит, координаты каждой точки пересечения кривых (5) удовлетворяют уравнению любой линии пучка, а сама точка принадлежит всем линиям пучка.

---

[1]) Ни при каком постоянном значении λ уравнение (4) не становится тождеством.

Определение 2. Общие точки всех линий пучка (точки пересечения базисных линий) называются *центрами пучка*.

Теорема 2. *Через всякую точку плоскости, не совпадающую с центром пучка, проходит одна и только одна линия пучка.*

Пусть $M^*(x^1_*, x^2_*)$ — произвольная точка плоскости, не центр пучка. Покажем, что через неё проходит одна и только одна линия пучка. Внося значения x^1_*, x^2_* в уравнение пучка (4′), получим:

$$pF(x^1_*, x^2_*) + qG(x^1_*, x^2_*) = 0. \tag{a}$$

Если $G(x^1_*, x^2_*) \neq 0$, т. е. точка M^* не лежит на второй линии базиса (5), то из уравнения (а) получим отношение $\lambda = \frac{q}{p}$, именно

$$\lambda = -\frac{F(x^1_*, x^2_*)}{G(x^1_*, x^2_*)}; \tag{6}$$

это значение λ и определяет ту линию пучка, которая проходит через заданную точку.

Если

$$G(x^1_*, x^2_*) = 0 \text{ и } F(x^1_*, x^2_*) \neq 0,$$

то уравнение (а) даёт $p = 0$. Через точку M^* проходит вторая линия базиса.

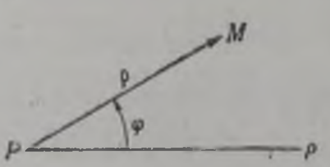
Если

$$F(x^1_*, x^2_*) = 0 \text{ и } G(x^1_*, x^2_*) = 0,$$

то уравнение (а) обращается в тождество, p и q неопределённы. В этом случае координаты x^1_*, x^2_* удовлетворяют обоим уравнениям базиса (5), и точка M^* совпадает с центром пучка, что противоречит условию теоремы.

§ 8. Полярная система координат

Теорема об инвариантности степени алгебраического уравнения и вся классификация линий по их уравнениям составляют особенность аффинной (в частности, декартовой) системы координат.



Черт. 37.

Чтобы показать возможность другой системы координат, где эта теорема не имеет места, мы рассмотрим сейчас *полярную систему координат* на плоскости.

Берём на плоскости точку (*полюс*) P и прямую (полупрямую или луч), выходящую из полюса (*полярная ось*), Pp (черт. 37).

Произвольную точку M можно определить, если задать модуль (абсолютную величину) её радиуса-вектора, $|\overrightarrow{PM}| = \rho$, и угол наклона радиуса-вектора к полярной оси: $\angle pPM = \varphi$, считая положительным направлением отсчёта угла поворот против часовой стрелки.

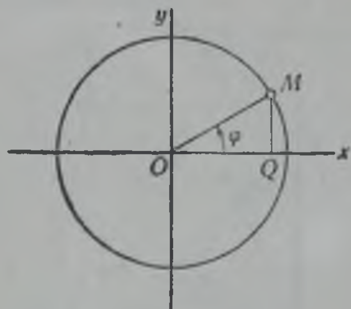
Эти два числа называются *полярными координатами* точки. Первая координата ρ называется *полярным радиусом-вектором* (хотя это не вектор, а скаляр, т. е. действительное число), вторая φ — *полярным углом*.

Почти очевидно, что они вполне определяют точку M и сами определяются по заданной точке, по крайней мере с точностью до произвольного слагаемого $2\pi k$ (k — целое число) для полярного угла φ. Впрочем, это с полной ясностью следует из формул преобразования декартовой системы координат в полярную.

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат, ось абсцисс которой совпадает с полярной осью (с одним и тем же положительным направлением), а начало координат помещается в полюсе (черт. 38).

Если радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ поворачивать около начала O, то конец его M опишет окружность, которую можно принять за тригонометрический круг для угла $\varphi = \angle QOM$. Для этого угла абсцисса $x = OQ$ точки M будет служить линией косинуса, а ордината $y = QM$ — линией синуса. Так как радиус тригонометрического круга OM равен полярному радиусу-вектору ρ, то по величине и знаку

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \tag{7}$$



Черт. 38.

Формулы (7) показывают, что полярные координаты вполне определяют декартовы, а следовательно, и положение точки на плоскости.

Обратно, при заданных декартовых координатах x, y уравнения (7) дают единственное положительное значение полярного радиуса-вектора

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{8a}$$

и вполне определённое значение тригонометрических функций полярного угла:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{8b}$$

т. е. единственное значение угла φ в пределах окружности; прибавление периода тригонометрических функций 2π не отразится на уравнениях (8b), и, следовательно, для любой точки плоскости полярный угол φ имеет бесчисленное множество значений, отличающихся между собой на целое число периодов.

Формулы (8b) теряют смысл для полюса, когда $x = 0$, $y = 0$. Нетрудно видеть, что полюс вполне определён, если задать только нулевое значение первой координаты $\rho = 0$. Полярный угол полюса по существу неопределёнен.

Обратимся теперь к уравнению линий в полярной системе координат.

Уравнение окружности радиуса, равного единице, с центром в точке (1,0) в декартовой системе имеет вид [см. уравнение (a) § 6]: $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Внося сюда значения x и y по формулам (7), получим после несложных преобразований: $\rho^2 - 2\rho \cos \varphi = 0$.

Это уравнение — трансцендентное, ибо содержит существенно тригонометрическую функцию текущей координаты φ.

Между тем уравнение окружности того же радиуса с центром в полюсе можно написать в виде уравнения первой степени: $\rho = 1$.

Таким образом, перенос полюса в центр окружности меняет трансцендентное уравнение на алгебраическое первой степени.

Поэтому установленная классификация кривых к полярной системе координат неприменима.

Глава V

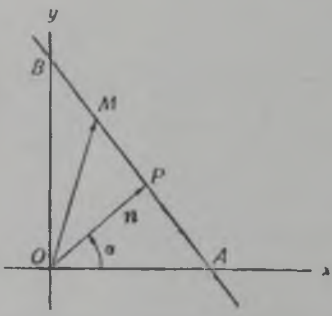
ЛИНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Нормальное уравнение прямой

Мы уже видели (§ 4, гл. IV), что прямая линия есть линия первого порядка. Сейчас мы дадим новое доказательство этой теоремы, которое приведёт нас к нормальному уравнению прямой, имеющему большое значение.

Теорема. *Прямая есть линия первого порядка.*

Хотя эта теорема имеет место и для аффинной системы координат, мы будем пользоваться декартовой прямоугольной системой, ибо только в этом случае параметры уравнения прямой получают простой геометрический смысл.



Черт. 39.

Положение произвольной прямой AB относительно декартовой прямоугольной системы координат можно определить, если задать вектор $\overrightarrow{OP}$ перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую, ибо прямую можно тогда построить, восставляя перпендикуляр к вектору $\overrightarrow{OP}$ в его конце P. В свою очередь вектор $\overrightarrow{OP}$ можно считать заданным, если известен его модуль p (расстояние от начала координат до прямой) и единичный вектор $\boldsymbol{n}$, имеющий с вектором $\overrightarrow{OP}$ одно и то же положительное направление (черт. 39).

Возьмём на прямой AB какую-нибудь точку M с координатами x, y. Из треугольника OPM следует очевидное равенство (по определению суммы векторов):

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}. \tag{a}$$

Здесь вектор $\overrightarrow{OP}$ как перпендикуляр, опущенный из начала координат на прямую AB, имеет модулем число p, а единичным вектором направления — вектор $\boldsymbol{n}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{OP}$ получится умножением единичного вектора $\boldsymbol{n}$ на модуль p:

$$\overrightarrow{OP} = p\boldsymbol{n}.$$

С другой стороны, $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{M}$ есть радиус-вектор точки M. Если обозначить буквами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ *единичные* координатные векторы, то радиус-вектор точки $M(x, y)$ разложится на компоненты по осям координат в виде

$$\boldsymbol{M} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2. \tag{b}$$

Равенство (a) принимает вид:

$$x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = p\boldsymbol{n} + \overrightarrow{PM}.$$

Умножаем обе части скалярно на вектор $\boldsymbol{n}$. Опуская равное нулю произведение $\overrightarrow{PM} \cdot \boldsymbol{n}$ (как скалярное произведение перпендикулярных векторов), получим:

$$x\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{n} + y\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{n} = p\boldsymbol{n}^2. \tag{c}$$

Здесь первые два произведения $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{n}$ как скалярные произведения единичных векторов равны косинусам углов с осями координат вектора $\boldsymbol{n}$, т. е. перпендикуляра OP, опущенного из начала координат на прямую AB. Квадрат единичного вектора $\boldsymbol{n}^2$ равен единице. Следовательно, обозначая через α угол перпендикуляра $\overrightarrow{OP}$ с осью абсцисс

$$\alpha = \angle xOP,$$

получим:

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \cos\alpha, \quad \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{n} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \boldsymbol{n}^2 = 1.$$

Внося эти соотношения в уравнение (c), получим предложение: *координаты x, y произвольной точки прямой удовлетворяют уравнению*

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{1}$$

Обратно, если равенство (1) имеет место, то из него следует равенство (c), которое можно написать в виде:

$$(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 - p\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} = 0,$$

или с помощью формулы (b):

$$(\boldsymbol{M} - p\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} = 0,$$

или, наконец, так как

$$\boldsymbol{M} - p\boldsymbol{n} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PM},$$

в виде.

$$\overrightarrow{PM} \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

Обращение в нуль скалярного произведения является условием перпендикулярности множителей. Значит, вектор $\overrightarrow{PM}$, соединяющий конец вектора $\overrightarrow{OP}$ с точкой M, перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{n}$ и, следовательно, лежит на прямой AB. Значит, лежит на прямой и точка M.

Таким образом, уравнение (1) определяет геометрическое место точек, лежащих на прямой AB.

Мы будем называть уравнение (1) *нормальным уравнением* прямой. Это уравнение первой степени. Следовательно, всякая прямая есть линия первого порядка.

§ 2. Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду

Мы переходим к доказательству обратной теоремы.

Теорема. *Всякое уравнение первой степени определяет прямую.*

Произвольное уравнение первой степени может содержать только три члена: член, содержащий первую степень координаты x, член, содержащий первую степень координаты y, и, наконец, свободный член. Обозначая буквами A, B, C произвольные коэффициенты, из которых некоторые могут равняться нулю, можно написать всякое уравнение первой степени в виде:

$$Ax + By + C = 0. \tag{2}$$

Это уравнение называется *общим уравнением прямой.*

Нам надо доказать, что это уравнение определяет прямую.

Так как всякая прямая определяется нормальным уравнением (1) или в прямоугольной системе координат уравнением (2), то нам надо доказать, что при подходящем выборе положительного числа p и угла α нормальное уравнение (1) будет равносильно заданному уравнению (2).

Так как и то и другое уравнения имеют все члены в левой части, следовательно, перенесение членов из одной части в другую исключено, то остаётся единственное преобразование, которое переводит уравнение (2) в уравнение, ему равносильное. Это преобразование состоит в умножении уравнения на постоянное число R. Следовательно, если можно найти p и α так, чтобы нормальное уравнение (1) было равносильно заданному уравнению (2), то при подходящем выборе нормирующего множителя R, параметров p и α нормальное уравнение (1) будет совпадать с уравнением

$$RAx + RBy + RC = 0. \tag{3}$$

При этом все три коэффициента уравнений (1) и (3) будут попарно равны:

$$\begin{aligned} RA &= \cos\alpha, \\ RB &= \sin\alpha, \\ RC &= -p. \end{aligned} \tag{4}$$

Возвышая в квадрат обе части каждого из первых двух уравнений и складывая их почленно, мы исключим угол α и получим уравнение для одной неизвестной:

$$R^2(A^2 + B^2) = 1,$$

откуда

$$R = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{5}$$

Чтобы это решение имело смысл, мы должны ограничить себя предположением, что коэффициенты при текущих координатах A и B не равны нулю одновременно. Это ограничение вполне естественно, ибо при $A=0$, $B=0$ уравнение (2) обращается в не имеющее смысла равенство $C=0$. В § 6 мы вернёмся к этому вопросу.

Из двух значений R формулы (5) только одно не приводит к противоречию — последнее уравнение (4). Действительно, так как параметр p, как модуль вектора $\overrightarrow{OP}$, всегда положителен, то из последнего уравнения (4) следует дополнительное требование на знак нормирующего множителя R: произведение RC должно быть отрицательным. Отсюда получаем правило знаков:

Знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена.

При этом условии последнее уравнение (4) даёт единственное положительное значение p. Два первых определяют величины $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, удовлетворяющие условию $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. Эти две функции дают единственное значение угла α в пределах одной окружности.

Условие, определяющее знак нормирующего множителя, теряет силу, если свободный член C равен нулю. В этом случае уравнение прямой удовлетворяется координатами $x=0$, $y=0$, т. е. прямая проходит через начало координат. Перпендикуляр, опущенный из начала на прямую, не имеет определённого положительного направления, и прямая имеет два нормальных уравнения, отличающихся друг от друга знаком.

Таким образом, всякое уравненение первой степени (3) при условии

$$A^2+B^2\neq 0$$

имеет одно и только одно ему равносильное нормальное уравнение (1) и, следовательно, определяет прямую. Если $C=0$, то уравнение (2) может двумя способами приводиться к нормальному виду.

Следствие. *Понятие линии первого порядка точно совпадает с понятием прямой линии.*

Этот результат легко распространяется на декартову косоугольную и даже на произвольную аффинную системы координат.

Теорема. *В произвольной аффинной системе координат всякое уравнение первой степени определяет прямую.*

Действительно, пусть нам дано уравнение первой степени (2) относительно текущих координат некоторой аффинной системы координат. Совершим преобразование координат и перейдём от заданной аффинной системы координат к декартовой прямоугольной. Так как любое преобразование аффинной системы не меняет степени алгебраического уравнения, то после преобразования мы получим относительно координат прямоугольной системы тоже уравнение первой степени. В прямоугольной системе это уравнение определяет прямую. Следовательно, и первоначальное уравнение относительно аффинной системы тоже определяет прямую.

§ 3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Так называется уравнение прямой, решённое относительно ординаты. Мы уже встречались с этим уравнением (§ 3, гл. III), но только для декартовой прямоугольной системы координат. Рассмотрим теперь уравнение первой степени относительно аффинной системы координат:

$$A_1x^1+A_2x^2+A_0=0. \tag{6}$$

Чтобы это уравнение можно было решить относительно координаты x^2, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент A_2 был отличен от нуля:

$$A_2\neq 0.$$

Тогда из уравнения (6) получим:

$$x^2=-\frac{A_1}{A_2}x^1-\frac{A_0}{A_2}.$$

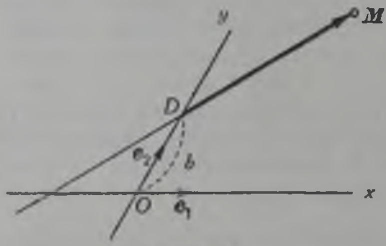
Введём обозначения:

$$k=-\frac{A_1}{A_2},\quad b=-\frac{A_0}{A_2}. \tag{7}$$

Наше уравнение напишется в виде:

$$x^2=kx^1+b. \tag{8}$$

Нетрудно выяснить геометрический смысл параметров.



Черт. 40.

Полагая в уравнении (8) $x^1=0$, получим $x^2=b$. Следовательно, прямая содержит точку $D(0, b)$ (черт. 40); это — точка пересечения прямой с осью ординат.

Так как вектор $\overrightarrow{OD}$ определяется формулой

$$\overrightarrow{OD}=b\boldsymbol{e}_2,$$

то в аффинной системе координат длина OD равна произведению параметра b на модуль координатного вектора $\boldsymbol{e}_2$:

$$OD=b\boldsymbol{e}_2.$$

Второй параметр k определяет направление прямой и носит название *углового коэффициента*.

Действительно, произвольный вектор $\overrightarrow{DM}$, лежащий на прямой между точками $D(0, b)$ и $M(x, y)$, определяется по общему правилу, как разность радиусов-векторов:

$$\overrightarrow{DM}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D}=(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)-b\boldsymbol{e}_2=x\boldsymbol{e}_1+(y-b)\boldsymbol{e}_2,$$

а так как уравнение (8) даёт

$$y - b = kx,$$

то

$$\overrightarrow{DM} = x(e_1 + ke_2). \tag{7'}$$

Здесь множитель x, очевидно, меняет длину вектора. Его направление зависит только от углового коэффициента k.

§ 4. Уравнение прямой в отрезках

Будем называть *отрезками*, отсекаемыми прямой на осях координат, координаты точек пересечения прямой с осями координат. Если обозначить их буквами a и b так, что координаты этих точек суть $(a, 0)$ и $(0, b)$, то, внося их в общее уравнение прямой (2), получим:

$$Aa + C = 0, \quad Bb + C = 0.$$

Допустим, что ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Внося в уравнение (2) значения

$$A = -\frac{C}{a}, \quad B = -\frac{C}{b}$$

и сокращая на $-C$, получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0. \tag{9}$$

Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках.*

Обратно, уравнение (9), как уравнение первой степени, определяет прямую. Полагая $y = 0$, т. е. отыскивая точку пересечения прямой с осью абсцисс, найдём:

$$\frac{x}{a} - 1 = 0, \quad \text{т. е.} \quad x = a.$$

Следовательно, a есть отрезок, отсекаемый прямой на оси абсцисс и аналогично b.

Уравнение (9) предполагает, что отрезки a и b вполне определены и не равны нулю, т. е. прямая пересекает оси координат в двух различных точках.

§ 5. Исследование уравнения прямой

Так называется выяснение геометрического смысла обращения в нуль одного (или нескольких) коэффициентов уравнения прямой

$$A_1x^1 + A_2x^2 + A_0 = 0.$$

I. Обращение в нуль коэффициента при текущей координате.

Теорема 1. Если уравнение прямой не содержит одной из текущих координат (абсциссы), то прямая параллельна соответствующей оси координат (оси абсцисс).

Действительно, если один из коэффициентов равен нулю, например, $A_1 = 0$, а другой $A_2 \neq 0$, то уравнение даст для x^2 постоянное значение, а геометрическое место точек с постоянной координатой x^2 составляет прямую, параллельную первой оси.

II. Отсутствие свободного члена.

Если $A_0 = 0$, то уравнение прямой

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 = 0$$

удовлетворится подстановкой координат начала $O(0, 0)$; следовательно, прямая проходит через начало.

Теорема 2. Если уравнение прямой не содержит свободного члена, то прямая проходит через начало координат.

III. Обращение в нуль двух коэффициентов.

Если одновременно

$$A_1 = 0, \ A_0 = 0,$$

то имеют место обе теоремы: прямая проходит через начало координат и параллельна первой оси координат.

Так как уравнение прямой содержит только один член

$$A_2 x^2 = 0$$

и коэффициент A_2 отличен от нуля (иначе уравнение прямой становится неопределённым), то координата x^2 каждой точки прямой равна нулю и прямая совпадает со второй осью координат.

Обращение в нуль обоих коэффициентов A_1 и A_2 одновременно мы теперь должны отвергнуть как не имеющее смысла, ибо оно приводит уравнение к противоречивому равенству

$$A_0 = 0,$$

так как A_0 — заданное число, по условию отличное от нуля. Мы ещё раз вернёмся к этому вопросу, когда плоскость будет расширена присоединением несобственных элементов (§ 4, гл. VI).

§ 6. Построение прямой по заданному уравнению

1. Рассмотрим произвольную аффинную систему координат. Если все три коэффициента A_1, A_2, A_0 в уравнении прямой отличны от нуля, то проще всего построить на чертеже прямую, отыскивая координаты точек пересечения её с осями координат, т. е. определяя отрезки a и b.

Пример. Построить прямую, заданную в декартовой косоугольной системе координат уравнением:

$$2x - 3y + 6 = 0.$$

Внося сюда координаты $(a, 0)$ или $(0, b)$, найдём:

$$a = -3, \quad b = 2.$$

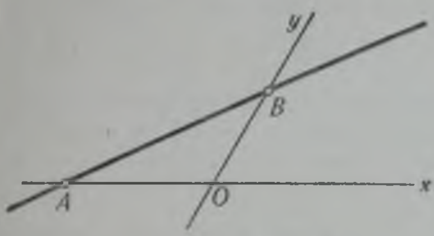
Строя точки $A(-3; 0)$, $B(0; 2)$ и соединяя их прямой, получим искомую прямую (черт. 41).

2. Если $C=0$, т. е. точки пересечения прямой с осями совпадают в начале координат, то предыдущее построение не годится, ибо даёт только одну точку прямой; мы можем взять тогда в качестве второй точки любую точку прямой, т. е. точку с произвольно заданной абсциссой.

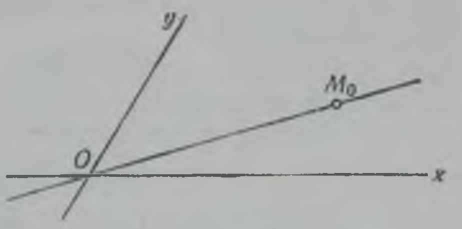
Пример. Построить прямую, заданную в декартовой косоугольной системе координат уравнением

$$2x-3y=0.$$

Прямая проходит через начало. Задаваясь значением $x=3$ (коэффициент при ординате y), мы получим $y=2$. Соединяя точки $O(0; 0)$ и $M_0(3; 2)$ прямой, получим искомую прямую (черт. 42).



Черт. 41.



Черт. 42.

Этот метод можно применить и в общем случае, если точки пересечения прямой с осями лежат близко одна к другой, так что построение прямой по этим двум точкам будет слишком грубым.

3. Если $A=0$ или $B=0$, то мы найдём только одну точку пересечения прямой с осями, но в этом случае прямая параллельна одной из осей координат, и построение элементарно.

§ 7. Расстояние точки от прямой

Задача. *Дана прямая AB своим уравнением и точка $M_1(x_1, y_1)$. Найти расстояние точки от прямой.*

Система координат декартова.

Расстояние точки от прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую AB (черт. 43).

Из треугольника PQM_1 с прямым углом при точке Q следует, что искомое расстояние QM_1 равно проекции вектора $\overrightarrow{PM_1}$ на направление перпендикуляра QM_1. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор перпендикуляра $\overrightarrow{OP}$, опущенного из начала на прямую AB. Тогда

$$\overrightarrow{OP}=p\mathbf{n},$$

и вектор $\overrightarrow{PM_1}$, как разность радиусов-векторов своего конца и начала, равен

$$\overrightarrow{PM_1}=\mathbf{M}_1-p\mathbf{n}.$$

С другой стороны, проекция вектора равна скалярному произведению проектируемого вектора на единичный вектор оси проекций.

Принимая за положительное направление оси проекций QM_1 направление вектора $\boldsymbol{n}$, получим искомое расстояние $d = QM_1$ в виде скалярного произведения:

$$d = \overrightarrow{PM}_1 \cdot \boldsymbol{n} = M_1 \cdot \boldsymbol{n} - p\boldsymbol{n}^2.$$

Так как

$$M_1 = x_1\boldsymbol{i}_1 + y_1\boldsymbol{i}_2, \quad M_1 \cdot \boldsymbol{n} = x_1\boldsymbol{i}_1 \cdot \boldsymbol{n} + y_1\boldsymbol{i}_2 \cdot \boldsymbol{n},$$

а скалярное произведение единичных векторов равно косинусу угла между ними:

$$\boldsymbol{i}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \cos\alpha, \quad \boldsymbol{i}_2 \cdot \boldsymbol{n} = \sin\alpha, \quad \boldsymbol{n}^2 = 1,$$

то для искомого расстояния точки от прямой получаем формулу

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p. \tag{10}$$

Этому выражению можно дать простую словесную формулировку, если заметить, что нормальное уравнение прямой пишется в виде

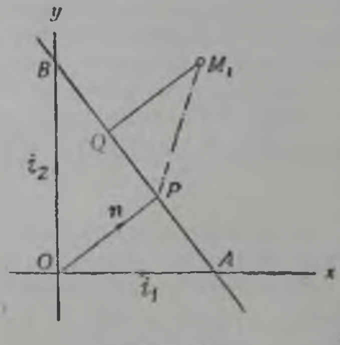
$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0.$$

Теорема. *Расстояние точки от прямой равно левой части нормального уравнения прямой с заменой текущих координат координатами заданной точки.*

Правило знаков. Формула (10) определяет расстояние точки от прямой не только по величине, но и по знаку, ибо расстояние d определялось, как скалярное произведение

$$d = \overrightarrow{PM}_1 \cdot \boldsymbol{n},$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, положительное направление которого совпадает с направлением перпендикуляра $\overrightarrow{OP}$, опущенного из начала координат на прямую AB.



Черт. 43.

Если вектор $\overrightarrow{PM}_1$ образует острый угол с этим направлением, т. е. если точка M_1 лежит от прямой AB по другую сторону начала координат, то скалярное произведение $\overrightarrow{PM}_1 \cdot \boldsymbol{n}$ положительно.

Таким образом, получаем правило знаков:

Расстояние точки от прямой по формуле (10) *положительно, если начало координат и заданная точка лежат по разные стороны от прямой.*

Чтобы запомнить это правило, достаточно представить себе, что линейная относительно координат x_1, y_1 формула (10) в силу непрерывности может изменить знак, только обращаясь в нуль. В нуль она обращается только на прямой.

Следовательно, прямая AB делит всю плоскость на две области. Для одной расстояние от прямой по формуле (10) положительно, для другой — отрицательно. Чтобы решить вопрос, для какой области формула даёт положительный знак, надо сделать опыт: подставить туда координаты начала $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; мы немедленно получим

$$d = -p.$$

Следовательно, для начала координат и для всех точек той области, где лежит начало, расстояние от прямой отрицательно, для точек по другую сторону прямой — положительно.

Правило знаков теряет смысл, если прямая проходит через начало, потому что вектор $\overrightarrow{OP}$ не имеет тогда определённого положительного направления. В этом случае знак нормирующего множителя (противоположный знаку свободного члена, который равен нулю, если прямая проходит через начало) становится неопределённым. Прямая имеет два нормальных уравнения, отличающихся знаком. Они дают расстояние точки от прямой с разными знаками.

Пример. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми:

$$x + y - 1 = 0,$$

$$x - y + 1 = 0.$$

Биссектриса есть геометрическое место точек, равноотстоящих от сторон угла.

Пусть $P(X, Y)$ — произвольная точка биссектрисы. Чтобы определить её расстояние от первой и второй прямой, надо привести их уравнения к нормальному виду и внести координаты точки P.

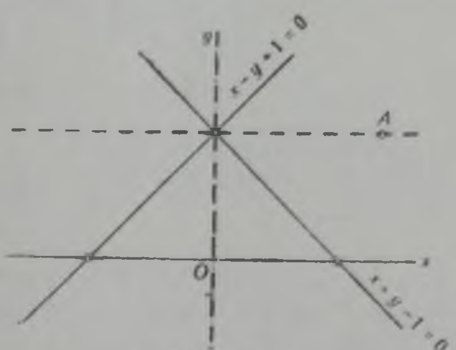
Нормирующие множители равны по абсолютной величине, но отличаются знаками в виду разных знаков свободных членов:

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad R_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$d_1 = \frac{X + Y - 1}{\sqrt{2}};$$

$$d_2 = -\frac{X - Y + 1}{\sqrt{2}}.$$



Черт. 44.

Приравнивая эти расстояния, получим уравнение биссектрисы:

$$\frac{X + Y - 1}{\sqrt{2}} = -\frac{X - Y + 1}{\sqrt{2}}$$

или

$$X = 0.$$

На второй биссектрисе, например для точки A (черт. 44), расстояние d_1 будет положительно, ибо прямая отделяет точку A от начала, а d_2 — отрицательно, ибо начало O и точка A лежат по одну сторону прямой. Так как в определении биссектрисы имеется в виду равенство расстояний по абсолютной величине, то надо теперь положить

$$d_1 = -d_2,$$

или

$$\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} = \frac{X-Y+1}{\sqrt{2}},$$

или

$$Y-1=0.$$

§ 8. Угол двух прямых

Углом двух прямых называется угол, на который надо повернуть первую прямую, чтобы она совпала со второй прямой (или чтобы стала ей параллельна).

Если прямые образуют с осью абсцисс углы φ_1 и φ_2, то при повороте первой прямой около точки пересечения её с осью абсцисс на угол θ угол прямой с осью абсцисс станет $\varphi_1+\theta$; если после поворота она станет параллельна второй прямой, то

$$\varphi_1+\theta=\varphi_2.$$

Следовательно, искомый угол двух прямых θ равен разности

$$\theta=\varphi_2-\varphi_1,$$

откуда в прямоугольной системе координат

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (11)$$

§ 9. Условие параллельности

Прямые параллельны, если $\varphi_1=\varphi_2$; отсюда по формулам (4) § 3, гл. IV, для декартовой прямоугольной системы координат прямо получаем:

$$k'=k.$$

То же самое следует из формул (7′) § 3, гл. V, для произвольной аффинной системы координат, ибо при параллельности прямых векторы $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{D'M'}$ двух прямых будут пропорциональны, откуда опять следует равенство угловых коэффициентов.

Так как по формуле (7) § 4

$$k=-\frac{A_1}{A_2},$$

то условие параллельности примет вид:

$$\frac{A_1}{A_1'}=\frac{A_2}{A_2'}.$$

Теорема. Прямые параллельны, если в их уравнениях коэффициенты при текущих координатах пропорциональны.

Пример. Через точку M_1 (1, —2) провести прямую параллельно прямой

$$2x^1-3x^2+7=0.$$

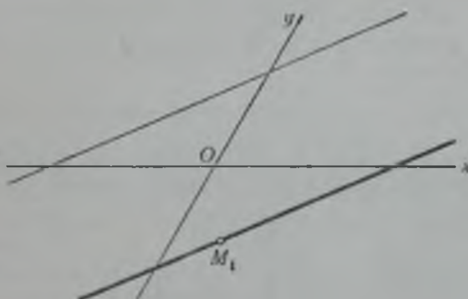
По условию параллельности коэффициенты A_1 и A_2 при текущих координатах искомой прямой должны быть пропорциональны числам 2 и —3:

$$A_1=2\lambda, \quad A_2=-3\lambda.$$

Так как λ не может равняться нулю, то мы можем сократить всё уравнение на λ и искать уравнение прямой в виде

$$2x^1-3x^2+A_0=0. \qquad (12)$$

Неизвестный коэффициент A_0 определяется из условия, что прямая проходит через точку M_1 (1, — 2) (черт. 45). Если точка лежит на



Черт. 45.

прямой, то её координаты удовлетворяют уравнению прямой. Вносим $x^1=1$, $x^2=-2$ и получаем:

$$2\cdot 1-3\cdot(-2)+A_0=0,$$

откуда

$$A_0=-8,$$

и уравнение прямой будет:

$$2x^1-3x^2-8=0.$$

При произвольном параметре C уравнение (12) определяет всякую прямую, параллельную данной.

Определение. Совокупность всех параллельных между собой прямых называется *пучком параллельных прямых.*

Следовательно, уравнение (12) при произвольном параметре A_0 определяет пучок параллельных прямых.

§ 10. Условие перпендикулярности

Для определения перпендикулярных прямых мы должны обратиться к декартовой прямоугольной системе координат.

Если прямые перпендикулярны, то $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\theta$ обращается в бесконечность; следовательно, знаменатель в формуле (14) обращается в нуль:

$$1 + k_1 k_2 = 0, \tag{13}$$

откуда

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}, \tag{13'}$$

или, в силу формулы (7) § 4,

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \tag{13''}$$

Пример. Опустить перпендикуляр из точки $M_1\,(1, -2)$ на прямую

$$2x - 3y + 7 = 0.$$

Пользуясь формулой (13″), мы перепишем условие перпендикулярности прямых в виде

$$\frac{A_2}{B_2} = -\frac{B_1}{A_1}.$$

Если обозначить через A, B коэффициенты искомой прямой, то условие её перпендикулярности к заданной прямой примет вид:

$$\frac{A}{B} = \frac{3}{2},$$

откуда

$$A = 3\lambda, \quad B = 2\lambda.$$

Полагая множитель пропорциональности равным единице: $\lambda = 1$, мы напишем уравнение искомой прямой в виде

$$3x + 2y + C = 0.$$

Коэффициент C определится из условия, что точка $M_1\,(1, -2)$ лежит на прямой. Внося её координаты в уравнение прямой, получим:

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + C = 0,$$

откуда

$$C = 1,$$

и уравнение прямой будет:

$$3x + 2y + 1 = 0.$$

§ 11. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку по заданному направлению

Решим в общем виде задачу проведения через заданную точку прямой, параллельной данной.

Задача. *Дана прямая:*

$$x^2 = k_0 x^1 + b_0;$$

провести через точку M_0 (x_0^1, x_0^2) прямую, ей параллельную.

Уравнение пучка параллельных прямых получится, если, сохраняя коэффициенты при текущих координатах, считать свободный член b произвольным параметром:

$$x^2 = k_0 x^1 + b. \tag{a}$$

Из этого пучка надо выбрать ту прямую, которая проходит через точку $M_0(x_0^1, x_0^2)$. Если точка лежит на прямой, то её координаты удовлетворяют уравнению прямой. Вносим координаты $x^1 = x_0^1$, $x^2 = x_0^2$ в уравнение (a) и получаем:

$$x_0^2 = k_0 x_0^1 + b.$$

Это уравнение определяет параметр b. Чтобы исключить его из уравнения (a), вычитаем из первого уравнения второе. Мы получим:

$$x^2 - x_0^2 = k_0 (x^1 - x_0^1). \tag{14}$$

Если в этом уравнении координаты точки $M_0(x_0^1, x_0^2)$ сохранять постоянными, а угловой коэффициент k менять, то уравнение (14) будет определять любую прямую, проходящую через точку M_0.

Определение. Совокупность прямых, проходящих через заданную точку, называется *пучком прямых*, а сама заданная точка — *центром* пучка.

Следовательно, при произвольном параметре k уравнение (14) определяет пучок прямых с центром в точке $M_0(x_0^1, x_0^2)$.

§ 12. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Задача. *Даны две точки $M_1(x_1^1, x_1^2)$ и $M_2(x_2^1, x_2^2)$. Составить уравнение прямой, проходящей через них.*

Уравнение произвольной прямой, проходящей через точку M_1, напишется в виде уравнения пучка прямых (14) с центром в точке M_1:

$$x^2 - x_1^2 = k(x^1 - x_1^1). \tag{a}$$

Здесь k — неизвестный параметр.

Если прямая (a) проходит через точку $M_2(x_2^1, x_2^2)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению прямой:

$$x_2^2 - x_1^2 = k(x_2^1 - x_1^1). \tag{b}$$

Если $x_2^1 - x_1^1 = 0$, то обе точки M_1 и M_2 находятся на одинаковом расстоянии от оси ординат, а прямая, их соединяющая, параллельна оси ординат и определяется уравнением:

$$x^1 = x^1_1.$$

Если $x^1_2 - x^1_1 \neq 0$, то уравнение (b) определит угловой коэффициент:

$$k = \frac{x^2_2 - x^2_1}{x^1_2 - x^1_1}.$$

Внося это значение в уравнение (a), получим искомое уравнение прямой. Если $x^2_2 = x^2_1$, то $k = 0$, и уравнение прямой будет:

$$x^2 = x^2_1.$$

Если $x^2_2 - x^2_1 \neq 0$, то искомое уравнение можно получить почленным делением уравнения (a) на уравнение (b):

$$\frac{x^2 - x^2_1}{x^2_2 - x^2_1} = \frac{x^1 - x^1_1}{x^1_2 - x^1_1}. \tag{15}$$

Гораздо симметричнее напишется это уравнение, если исходить из условия расположения точек на одной прямой.

§ 13. Условие расположения трёх точек на одной прямой

Задача. *Даны три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$; при каком условии они лежат на одной прямой?*

Пусть

$$Ax + By + C = 0 \tag{a}$$

есть уравнение прямой, проходящей через точки M_1, M_2, M_3. Тогда координаты каждой точки удовлетворяют этому уравнению:

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + C &= 0, \\ Ax_3 + By_3 + C &= 0. \end{aligned} \tag{b}$$

Обратно, если можно найти три числа A, B, C, не равных нулю одновременно, так, чтобы система (b) была удовлетворена, то уравнение (a) определит прямую, которой принадлежат все три точки. Относительно неизвестных A, B, C система (b) есть система линейных однородных уравнений. Она имеет всегда тривиальное решение $A = B = C = 0$, которое нам не годится. Система допускает ненулевые решения, если обращается в нуль определитель системы (определитель из коэффициентов при неизвестных A, B, C).

Следовательно, три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ лежат на одной прямой, если координаты их удовлетворяют условию:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

§ 14. Точка пересечения двух прямых

Пусть даны две прямые

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Точка пересечения этих прямых принадлежит и первой, и второй прямым; её координаты удовлетворяют и первому, и второму уравнениям, следовательно, являются общими решениями системы уравнений (а).

Если определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю, то решение существует и определяется формулами

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{17}$$

Прямые пересекаются в одной точке.

Если $D = 0$ и хотя бы один числитель (17) не нуль, то система (а) несовместна и прямые не имеют общей точки. Так как из равенства нулю определителя следует пропорциональность элементов двух строк:

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2,$$

то коэффициенты при текущих координатах в обоих уравнениях пропорциональны и прямые параллельны (§ 10).

Если не только знаменатель, но и оба числителя в формулах (17) равны нулю, то система неопределённа, коэффициенты при неизвестных и свободный член в уравнениях (а) пропорциональны. Обе прямые совпадают, и каждая точка двойной прямой может рассматриваться, как точка их пересечения.

Задача пересечения двух прямых получает новую, гораздо более стройную форму, если её рассматривать на плоскости, расширенной дополнением несобственных элементов.

Глава VI

ПРЯМАЯ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 1. Однородные координаты

Рассмотрим произвольную аффинную (в частности, декартову) систему координат. Введём вместо координат x, y произвольной точки M три числа x^1, x^2, x^0 посредством равенств

$$x = \frac{x^1}{x^0}, \qquad y = \frac{x^2}{x^0}. \tag{1}$$

Определение. Всякая тройка чисел x^1, x^2, x^0, удовлетворяющая уравнениям (1), называется *однородными координатами* точки. Координаты x, y будем называть *неоднородными*.

Каждая тройка чисел x^1, x^2, x^0 при условии

$$x^0 \neq 0$$

определяет по формулам (1) единственную пару неоднородных координат x, y и, следовательно, единственную точку на плоскости. Обратно, каждая точка M на плоскости имеет определённую пару неоднородных координат x, y и бесконечное множество троек однородных координат. Мы можем выбрать произвольное значение x^0, отличное от нуля; тогда x^1, x^2 определяется из уравнений (1) формулами:

$$x^1 = x \cdot x^0, \quad x^2 = y \cdot x^0.$$

Умножение третьей координаты x^0 на произвольное число умножает на то же число и две первые координаты x^1, x^2. Следовательно, каждой точке M плоскости соответствуют определённые отношения однородных координат

$$x^1 : x^2 : x^0.$$

Полагая в формулах (1) $x^0 = 1$, мы получим

$$x = x^1, \quad y = x^2, \quad x^0 = 1.$$

Следовательно, неоднородные координаты точки x, y и единица представляют частный случай однородных координат (x^1, x^2, x^0).

Уравнение прямой

$$A_1 x + A_2 y + A_0 = 0$$

после подстановки (1) примет вид:

$$A_1 \frac{x^1}{x^0} + A_2 \frac{x^2}{x^0} + A_0 = 0$$

и по освобождении от знаменателя —

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + A_0 x^0 = 0. \tag{2}$$

Прямая линия в однородных координатах определяется однородным уравнением первой степени и, обратно, всякое однородное уравнение первой степени определяет прямую, если только коэффициенты A и B не равны одновременно нулю.

Нетрудно заметить, что это замечание распространяется на любое алгебраическое уравнение.

Теорема. *Кривая n-го порядка определяется в однородных координатах однородным уравнением n-й степени.*

Например, уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

после замены x и y по формулам (1) принимает вид:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2 (x^0)^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2 (x^0)^2} = 1,$$

или после умножения обеих частей на $(x^0)^2$ —

$$\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}=(x^0)^2.$$

Однородность уравнения алгебраической кривой и послужила поводом для выбора названия однородных координат.

§ 2. Проективная плоскость

Условимся называть *точкой* тройку действительных чисел x^1, x^2, x^0 и все им пропорциональные tx^1, tx^2, tx^0 при единственном условии, что они не равны нулю одновременно.

Сами числа x^1, x^2, x^0 будем называть *однородными* координатами точки.

Так как геометрический смысл имеют только отношения однородных координат, а не сами координаты, то всякое равенство, содержащее однородные координаты точек, *должно быть инвариантно относительно умножения координат на произвольный множитель* — один и тот же для координат одной точки, но произвольно выбираемый для каждой точки в отдельности. В частности, геометрический смысл имеют только однородные уравнения между текущими однородными координатами точки.

Условимся называть *прямой* совокупность точек, координаты которых удовлетворяют однородному уравнению первой степени:

$$A_1x^1+A_2x^2+A_0x^0=0.$$

Совокупность всех точек $M(x^1,\ x^2,\ x^0)$ будем называть *проективной плоскостью*. При этом будем считать, что точка M непрерывно движется по плоскости при непрерывном изменении её координат x^1, x^2, x^0. В частности, точка M стоит на месте, если координаты изменяются пропорционально.

Неполную *модель проективной плоскости* получим, если отнесём эвклидову плоскость к произвольной декартовой или аффинной системе координат и будем рассматривать тройку чисел x^1, x^2, x^0 как однородные координаты точки M в этой системе координат.

Тогда каждой тройке чисел x^1, x^2, x^0 при условии $x^0 \neq 0$ будет соответствовать определённая точка M на эвклидовой плоскости. При непрерывном изменении координат она будет непрерывно перемещаться, при пропорциональном изменении будет стоять на месте. Точки, координаты которых удовлетворяют линейному однородному уравнению (2), будут лежать на одной прямой.

Модель проективной плоскости будет неполной, ибо на эвклидовой плоскости не найдётся точек, которые соответствовали бы тройке чисел x^1, x^2 и $x^0=0$.

Чтобы построить полную модель проективной плоскости, дополним эвклидову плоскость новыми точками с координатами x^1, x^2, $x^0=0$.

Будем называть эти точки *несобственными* точками плоскости. Все точки, которые уже ранее принадлежали эвклидовой плоскости, будем называть *собственными* точками плоскости.

Таким образом, точка $M(x^1,\ x^2,\ x^0)$ — собственная, если третья координата x^0 не равна нулю. Так как однородные координаты допускают умножение всех трёх координат на одно и то же число без изменения точки, то третью координату собственной точки всегда можно привести к единице, и тогда первые две координаты $x = \frac{x^1}{x^0}$ и $y = \frac{x^3}{x^0}$ будут абсциссой и ординатой точки $M(x,\ y,\ 1)$ в выбранной системе координат.

Если при этом

$$x^1 = 0,$$

то и абсцисса x равна нулю. Мы будем получать собственные точки оси ординат. Если

$$x^2 = 0,$$

то ордината y равна нулю; мы будем иметь собственные точки оси абсцисс.

Если третья координата равна нулю:

$$x^0 = 0, \tag{3}$$

то точка $M(x^1,\ x^2,\ 0)$ — несобственная. Так как умножение всех трёх координат на одно и то же число не меняет точки, то несобственная точка определяется отношением двух первых координат $x^1 : x^2$ или $x^2 : x^1$. Если при этом и первая координата x^1 равна нулю, то мы имеем несобственную точку оси ординат. Так как все три однородные координаты x^1, x^2, x^0 по условию не могут равняться нулю одновременно, то единственную не равную нулю координату x_2 можно привести к единице. Несобственную точку оси ординат можно определить координатами $(0,\ 1,\ 0)$.

Аналогично точка $A\ (1,\ 0,\ 0)$ есть несобственная точка оси абсцисс.

Определение. *Расширенной* называется эвклидова плоскость, дополненная несобственными элементами.

§ 3. Несобственные элементы расширенной плоскости

Можно отметить такие следствия, вытекающие из определения несобственных точек плоскости:

I. Равенство (3) можно рассматривать, как однородное уравнение первой степени между текущими координатами точки на плоскости.

Так как по условию всякое однородное уравнение первой степени определяет прямую, то и уравнение (3) определяет прямую. Все точки этой прямой — несобственные, и она содержит все несобственные точки плоскости.

Следствие 1. *Все несобственные точки плоскости образуют одну прямую, называемую несобственной прямой плоскости.*

II. Внося в уравнение произвольной прямой (2) значение

$$x^0 = 0,$$

получим:

$$A_1x^1 + A_2x^2 = 0,$$

откуда немедленно находим отношение координат $x^1 : x^2$. Вводя множитель пропорциональности λ, имеем

$$x^1 = \lambda A_2, \quad x^2 = -\lambda A_1. \tag{4}$$

Если $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, то уравнение (2) совпадает с уравнением несобственной прямой (3). Все точки такой прямой — несобственные.

Если $A_2 = 0$ и $A_1 \neq 0$, то получаем

$$x^1 = 0, \quad x^2 \neq 0, \quad x^0 = 0,$$

т. е. несобственную точку оси ординат.

Если $A_2 \neq 0$, то по формулам (4) отношение $x^2 : x^1$ получает вполне определённое значение:

$$x^2 : x^1 = -\frac{A_1}{A_2}. \tag{5}$$

Отсюда имеем:

Следствие 2. *Всякая собственная прямая плоскости имеет одну и только одну несобственную точку.*

Так как все несобственные точки плоскости принадлежат несобственной прямой, то определение несобственной точки прямой (2) есть задача отыскания точки пересечения этой прямой с несобственной прямой (3). Полученный результат хорошо согласуется с тем, что пара прямых пересекается только в одной точке.

III. Так как угловой коэффициент прямой (2) равен

$$k = -\frac{A_1}{A_2},$$

то формулу (5) можно переписать в виде

$$x^2 : x^1 = k. \tag{5'}$$

Значит, несобственная точка прямой вполне определяется её угловым коэффициентом, а так как параллельные прямые имеют один и тот же угловой коэффициент, то получаем:

Следствие 3. *Все параллельные прямые и только параллельные прямые имеют общую несобственную точку.*

IV. В § 3, гл. II, мы вывели формулы для координат точки $M(x, y)$, которая делит отрезок с концами M_1, M_2 в отношении $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$. Если координаты концов обозначить указателями $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, то эти формулы [(2') § 3, гл. II] примут вид:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{6}$$

Если для точки M ввести однородные координаты

$$x = \frac{x_1}{x^0}, \quad y = \frac{x^2}{x^0},$$

то формулы (6) можно переписать в виде:

$$x^1 = x_1 + \lambda x_2, \quad x^2 = y_1 + \lambda y_2, \quad x^0 = 1 + \lambda. \tag{6'}$$

Каждому значению λ, кроме $\lambda = -1$, соответствует некоторая собственная точка прямой M_1M_2: положительным значениям λ соответствуют внутренние точки отрезка M_1M_2, отрицательным — внешние. Значению $\lambda = 0$ соответствует точка M_1. Когда λ становится отрицательным и по абсолютной величине возрастает, точка M переходит через точку M_1 из внутренней части отрезка M_1M_2 наружу и по мере увеличения абсолютной величины λ продолжает удаляться от точки M_1.

Значению $\lambda = -1$ будет соответствовать несобственная точка O^* с координатами

$$x^1 = x_1 - x_2, \quad x^2 = y_1 - y_2, \quad x^0 = 0.$$

Так как при непрерывном изменении координат точка непрерывно двигается по плоскости, то мы должны считать, что несобственная точка прямой O^* лежит за всеми собственными точками прямой M_1M_2. При этом мы одинаково будем приближаться к той же самой несобственной точке, если, сохраняя λ отрицательным, будем уменьшать абсолютную величину λ от ∞ до 1, т. е. если выйдем из внутренней части отрезка M_1M_2 через точку M_2 и будем неограниченно удаляться за точку M_2.

Следствие 4. *Несобственная точка прямой располагается на ней за всеми собственными точками как в одну, так и в другую сторону прямой.*

На проективной плоскости прямую линию надо рассматривать, как замкнутую линию. На эвклидовой плоскости, дополненной несобственными точками, каждая собственная прямая замыкается своей единственной несобственной точкой.

§ 4. Исследование уравнения прямой

На расширенной плоскости всякое однородное уравнение первой степени

$$A_1x^1 + A_2x^2 + A_0x^0 = 0$$

определяет прямую. Исключение составляет только тот случай, когда все три коэффициента равны нулю: $Ai = 0$ ($i = 1, 2, 0$), и уравнение исчезает.

1. Если

$$A_1 = 0,$$

то уравнение определяет отношение координат x^2 и x^0:

$$x^2 : x^0 = -A_0 : A_2,$$

следовательно, определённую точку на оси ординат. Так как первая координата x^1 не содержится в уравнении и, значит, остаётся произвольной, то к паре чисел x^2, x^0 мы можем присоединить любое число x^1. Меняя первую координату точки x^1, мы заставим точку передвигаться параллельно оси абсцисс, ибо ордината $y = x^2 : x^0$ остаётся постоянной. Несобственная точка прямой, определяемая координатами $x^2 = 0$, $x^0 = 0$, лежит на оси абсцисс.

Аналогично, прямая параллельна оси ординат, если

$$A_2 = 0.$$

Несобственная точка её $x^1 = 0$, $x^0 = 0$ лежит на оси ординат.

2. Если

$$A_0 = 0,$$

то уравнение прямой удовлетворяется значениями $x^1 = 0$, $x^2 = 0$; следовательно, прямая проходит через начало. Несобственная точка её определяется координатами

$$x^2 : x^1 = -\frac{A_1}{A_2}, \quad x^0 = 0.$$

3. Если

$$A_2 = 0, \quad A_0 = 0,$$

то уравнение прямой принимает вид

$$A_1 x^1 = 0$$

и определяет ось ординат.

Аналогично, при условии

$$A_1 = 0, \quad A_0 = 0$$

уравнение определяет ось абсцисс.

4. Если

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0,$$

то уравнение прямой принимает вид

$$A_0 x^0 = 0,$$

т. е., поскольку $A_0 \neq 0$,

$$x^0 = 0$$

и определяет несобственную прямую.

§ 5. Точка пересечения двух прямых

Задача. *Найти точку пересечения двух прямых*

$$A'_1 x^1 + A'_2 x^2 + A'_0 x^0 = 0,$$
$$A''_1 x^1 + A''_2 x^2 + A''_0 x^0 = 0.$$

Так как координаты точки пересечения удовлетворяют обоим уравнениям, то задача сводится к совместному решению двух однородных уравнений первой степени.

Как известно, система двух однородных уравнений первой степени с тремя неизвестными имеет бесчисленное множество решений.

Если ранг матрицы из коэффициентов двух уравнений

$$\left\| \begin{matrix} A'_1 & A'_2 & A'_0 \\ A''_1 & A''_2 & A''_0 \end{matrix} \right\| \tag{7}$$

равен двум, т. е. не все определители второго порядка равны нулю, то значения неизвестных пропорциональны трём определителям матрицы:

$$x^1 : x^2 : x^0 = \left| \begin{matrix} A'_2 & A'_0 \\ A''_2 & A''_0 \end{matrix} \right| : \left| \begin{matrix} A'_0 & A'_1 \\ A''_0 & A''_1 \end{matrix} \right| : \left| \begin{matrix} A'_1 & A'_2 \\ A''_1 & A''_2 \end{matrix} \right|. \tag{7'}$$

Так как изменение множителя пропорциональности равносильно умножению всех трёх однородных координат на одно и то же число, а это не меняет точки (x^1, x^2, x^0), то общая точка вполне определена.

Точка пересечения — собственная, если

$$\left| \begin{matrix} A'_1 & A'_2 \\ A''_1 & A''_2 \end{matrix} \right| \neq 0,$$

ибо тогда $x^0 \neq 0$.

Точка пересечения — несобственная, если этот определитель равен нулю, т. е. если

$$A'_1 A''_2 - A''_1 A'_2 = 0. \tag{a}$$

Если

$$A'_1 = 0, \quad A'_2 = 0,$$

то первая прямая — несобственная; она содержит несобственную точку второй прямой, ибо содержит все несобственные точки плоскости.

Если A'_1 и A'_2 не равны нулю одновременно, например $A'_1 \neq 0$, то мы можем положить

$$A''_1 = \lambda A'_1.$$

Внося это значение в уравнение (а) и сокращая на A'_1, получим:

$$A''_2 = \lambda A'_2.$$

Если $A'_2 = 0$, то и $A''_2 = 0$, и обе прямые проходят через несобственную точку (0, 1, 0). Если $A'_2 \neq 0$, то коэффициенты при текущих координатах пропорциональны и прямые параллельны. Это можно было предвидеть.

Так как на эвклидовой плоскости непараллельные прямые всегда пересекаются, то они будут пересекаться и на расширенной плоскости и притом в собственной точке. Значит, если точка пересечения — несобственная, то это может быть или потому, что одна из прямых несобственная, или вследствие их параллельности, если обе прямые — собственные.

Решение (7′) теряет смысл, если все определители второго порядка матрицы (7) равны нулю. Ранг матрицы (7) будет равен единице, ибо обращение в нуль всех элементов матрицы (когда ранг матрицы равен нулю) геометрического смысла не имеет.

Если ранг равен единице, то система уравнений содержит только одно независимое уравнение: другое будет следствием первого. Всякое решение первого уравнения будет удовлетворять второму. Всякая точка первой прямой принадлежит второй, и наоборот. Обе прямые совпадают, и точка пересечения их становится неопределённой.

Итак, имеем:

Теорема. *На проективной плоскости всякие две прямые имеют общую точку. Если ранг матрицы коэффициентов равен двум, то точка пересечения — одна. Если ранг равен единице, то прямые совпадают и каждая точка их является их общей точкой.*

Если в качестве проективной плоскости взять эвклидову плоскость, дополненную несобственными элементами, то точка пересечения может быть и несобственной, если прямые эвклидовой плоскости параллельны или одна из них — несобственная.

§ 6. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Задача. *При каком условии три точки*

$$M(x^1,\ x^2,\ x^0),\quad M_1(x_1^1,\ x_1^2,\ x_1^0),\quad M_2(x_2^1,\ x_2^2,\ x_2^0)$$

лежат на одной прямой?

Если эта прямая определяется уравнением

$$A_1x^1 + A_2x^2 + A_0x^0 = 0, \tag{a}$$

где x^1, x^2, x^0 — текущие координаты, то координаты каждой из трёх точек M, M_1, M_2 должны удовлетворять этому уравнению:

$$\begin{gathered} A_1x^1 + A_2x^2 + A_0x^0 = 0, \\ A_1x_1^1 + A_2x_1^2 + A_0x_1^0 = 0, \\ A_1x_2^1 + A_2x_2^2 + A_0x_2^0 = 0. \end{gathered} \tag{b}$$

Следовательно, если существуют три числа A_1, A_2, A_0, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие системе (b), то существует прямая (a), проходящая через все три точки.

Относительно неизвестных A_i ($i = 1, 2, 0$) система (b) является системой трёх однородных уравнений первой степени с тремя неизвестными. Такая система вообще имеет решения, равные нулю, но такие решения для нас бесполезны, ибо при $A_i = 0$ ($i = 1, 2, 0$) уравнение (a) тождественно исчезает.

Чтобы система (b) допускала решения, отличные от нуля, необходимо и достаточно, чтобы определитель из коэффициентов при неизвестных A, B, C был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^0 \\ x_1^1 & x_1^2 & x_1^0 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Имеем предложение:

Три точки M, M_1, M_2 лежат на одной прямой при условии, что определитель (8) равен нулю.

Задача. *Составить уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 и M_2.*

Точка $M(x^1, x^2, x^0)$ лежит на одной прямой с точками M_1, M_2, если определитель (8) равен нулю. Следовательно, уравнение (8) можно рассматривать как уравнение геометрического места точек, расположенных на прямой, соединяющей точки M_1 и M_2.

Итак, прямая M_1M_2 определяется уравнением (8).

Это уравнение обращается в тождество и не определяет прямую, если по раскрытии определителя все коэффициенты при текущих координатах x^1, x^2, x^0 обращаются в нуль. При раскрытии определителя по элементам первой строки координаты x^1, x^2, x^0 умножаются на определители второго порядка матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^0 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^0 \end{matrix} \right\|. \tag{9}$$

Следовательно, прямая M_1M_2 становится неопределённой только при понижении ранга матрицы (9) до единицы. В таком случае элементы двух строк пропорциональны. Если же однородные координаты двух точек M_1 и M_2 пропорциональны, то точки совпадают.

Следовательно, на проективной плоскости, как и на эвклидовой, всякая пара несовпадающих точек M_1, M_2 определяет одну прямую.

Заметим, что на расширенной эвклидовой плоскости задача проведения прямой через две точки имеет более широкое значение и содержит, как частный случай, задачу проведения прямой через данную точку по заданному направлению.

Допустим, например, что точка M_2 — несобственная. Тогда по формуле (5′) § 3

$$x_2^2 : x_2^1 = k, \quad x_2^0 = 0,$$

где k — угловой коэффициент всех прямых, проходящих через точку M_2. Выбирая подходящим образом общий множитель у трёх однородных координат, мы можем положить

$$\begin{aligned} &x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \\ &x_1^0 = 1, \quad x_1^1 = x_1, \quad x_1^2 = y_1, \\ &x_2^0 = 0, \quad x_2^1 = 1, \quad x_2^2 = k. \end{aligned}$$

Уравнение (8) примет вид:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$-kx+y+kx_1-y_1=0,$$

или

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

§ 7. Пучок прямых

Задача. *При каком условии три прямые*

$$\begin{aligned} &A_1x^1+A_2x^2+A_0x^0=0,\\ &A'_1x^1+A'_2x^2+A'_0x^0=0,\\ &A''_1x^1+A''_2x^2+A''_0x^0=0 \end{aligned} \tag{a}$$

проходят через одну точку?

Если они проходят через одну точку, то координаты этой точки удовлетворяют всем трём уравнениям (a). Система трёх однородных уравнений первой степени с тремя неизвестными x^1, x^2, x^0 вообще имеет нулевое решение: $x^1=0$, $x^2=0$, $x^0=0$. Такое решение не определяет общей точки, ибо числа могут служить однородными координатами точки только при условии, что они не равны нулю одновременно.

Чтобы однородная система допускала ненулевые решения, необходимо и достаточно обращение в нуль определителя из всех коэффициентов при неизвестных. Отсюда следует:

Теорема. *Три прямые* (a) *пересекаются в одной точке, если*

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_0 \\ A'_1 & A'_2 & A'_0 \\ A''_1 & A''_2 & A''_0 \end{vmatrix}=0. \tag{10}$$

Задача. *Провести прямую через точку пересечения двух прямых*

$$\begin{aligned} &A'_1x^1+A'_2x^2+A'_0x^0=0,\\ &A''_1x^1+A''_2x^2+A''_0x^0=0. \end{aligned} \tag{b}$$

Задача неопределённа, ибо через одну точку проходит бесчисленное множество прямых (пучок прямых). Коэффициенты при текущих однородных координатах A_i в уравнении прямой

$$A_1x^1+A_2x^2+A_0x^0=0, \tag{11}$$

проходящей через точку пересечения прямых (b), должны удовлетворять условию (10).

Если ранг матрицы коэффициентов в уравнениях (b)

$$\begin{Vmatrix} A'_1 & A'_2 & A'_0 \\ A''_1 & A''_2 & A''_0 \end{Vmatrix} \tag{12}$$

меньше двух, т. е. все определители второго порядка матрицы равны нулю и среди уравнений (b) имеется только одно независимое, то условие (10) удовлетворено тождественно при любом выборе коэффициентов A_i. Геометрически это объясняется просто: если ранг матрицы (12) меньше двух, то прямые (b) совпадают, каждая точка этой двойной прямой является общей точкой их и всякая прямая проективной плоскости, имея общую точку с совпавшими прямыми (b), тем самым проходит через точку их пересечения.

Если ранг матрицы (12) равен двум, то по крайней мере один из определителей второго порядка не равен нулю. Допустим, что минор первого элемента A_1 определителя (10) не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} A'_2 & A'_0 \\ A''_2 & A''_0 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{c}$$

По теореме алгебры, если определитель n-го порядка равен нулю и ранг матрицы из последних $n-1$ строк равен $n-1$, то элементы первой строки линейно зависят от соответствующих элементов остальных строк с одними и теми же коэффициентами для всех элементов строки. Следовательно, существуют два числа p и q такие, что

$$\begin{aligned} A_1 &= pA'_1 + qA''_1, \\ A_2 &= pA'_2 + qA''_2, \\ A_0 &= pA'_0 + qA''_0. \end{aligned} \tag{13}$$

Внесём эти значения коэффициентов A_i в уравнение прямой (11); мы получим

$$(pA'_1 + qA''_1)\,x^1 + (pA'_2 + qA''_2)\,x^2 + (pA'_0 + qA''_0)\,x^0 = 0$$

или

$$p\,(A'_1x^1 + A'_2x^2 + A'_0x^0) + q\,(A''_1x^1 + A''_2x^2 + A''_0x^0) = 0. \tag{11'}$$

При произвольных параметрах p и q это уравнение определяет любую прямую, проходящую через точку пересечения заданных прямых (b).

Нетрудно заметить, что уравнение (11′) представляет частный случай уравнения пучка линий [формула (4′) § 7, гл. IV], когда обе базисные линии пучка $F=0$ и $G=0$ являются прямыми (b).

Имеем:

Теорема. *Пучок прямых имеет один центр и содержит все прямые плоскости, проходящие через центр пучка.*

Если в качестве модели проективной плоскости взять расширенную эвклидову (плоскость, дополненную несобственными элементами), то можно различать пучки с собственным центром и пучки с несобственным центром. Первые представляют совокупность всех прямых, пересекающихся в данной точке эвклидовой плоскости; вторые тоже определяют совокупность прямых, проходящих через центр пучка, но, поскольку центр пучка — несобственный, а прямые, проходящие через одну и ту же несобственную точку расширенной плоскости,— параллельны, то пучок с несобственным центром состоит из совокупности всех прямых эвклидовой плоскости, имеющих одно направление (параллельных между собой), вместе с несобственной прямой расширенной плоскости.

§ 8. Аналитические точки и действия над ними

Мы назвали (§ 2) точкой проективной плоскости тройку чисел x^1, x^2, x^0 и все им пропорциональные tx^1, tx^2, tx^0 (при условии, что они не равны нулю одновременно). Умножение всех трёх координат на одно и то же число t не меняет точки $M(x^1, x^2, x^0)$.

Теперь мы будем различать геометрическую точку M и аналитическую точку $\mathbf{M}$.

Две неоднородные координаты точки эвклидовой плоскости являются одновременно координатами её радиуса-вектора. Действия над векторами (первой ступени) идут параллельно действиям над их координатами: векторы равны, если равны их одноимённые координаты; при сложении векторов складываются одноимённые координаты, при умножении на скаляр — на скаляр умножается каждая координата.

На проективной плоскости точка определяется тремя однородными координатами. Эту точку мы теперь будем называть *геометрической точкой*, а вместо вектора введём понятие аналитической точки.

Определение 1. *Аналитической точкой* $\mathbf{M}$ называется совокупность трёх однородных координат геометрической точки $M(x^1, x^2, x^0)$ в том смысле слова, в котором говорят, что радиус-вектор $\mathbf{M}$ есть совокупность двух координат его конца $M(x, y)$. Координаты x^1, x^2, x^0 мы будем называть координатами аналитической точки $\mathbf{M}$ и записывать в скобках при букве, обозначающей аналитическую точку $\mathbf{M}(x^1, x^2, x^0)$ или короче $\mathbf{M}(x^i)$.

Умножение трёх однородных координат геометрической точки $M(x^1, x^2, x^0)$ на одно и то же число не меняет геометрическую точку, но изменяет аналитическую точку. Следовательно, одной и той же геометрической точке соответствует бесчисленное множество аналитических, координаты которых пропорциональны.

Пропорциональное изменение координат аналитической точки называется *нормированием* её.

Определение 2. *Аналитические точки равны*, если равны их координаты.

2. *Произведением аналитической точки* $\mathbf{M}$ *на скаляр* t называется такая аналитическая точка $t\mathbf{M}$, все координаты которой получены из одноимённых координат точки $\mathbf{M}$ умножением на скаляр t.

3. *Суммой аналитических точек* $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ называется такая аналитическая точка $\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2$, каждая координата которой получена сложением одноимённых координат слагаемых $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$.

Отсюда вытекают теоремы о геометрическом смысле сложения аналитических точек и умножения на скаляр.

Теорема I. Если аналитические точки **M** *и* $\mathbf{M}_1$ *пропорциональны*

$$\mathbf{M} = t\mathbf{M}_1, \qquad t \text{ — скаляр,} \tag{14}$$

то они определяют одну и ту же геометрическую точку M; обратно: две аналитические точки **M** *и* $\mathbf{M}_1$ *одной геометрической точки пропорциональны, т. е. существует скаляр t, удовлетворяющий уравнению* (14).

Теорема непосредственно вытекает из определения точки (геометрической) на проективной плоскости и однородных координат её. Скаляр t получается как общее отношение пропорциональных координат точек $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}$.

Аналитические точки называются *линейно зависимыми*, если они удовлетворяют линейному однородному уравнению со скалярными коэффициентами, которые не равны нулю одновременно. Примером такого соотношения может служить уравнение (14). Следовательно, две линейно зависимые точки $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_1$ определяют одну и ту же геометрическую точку. Обратно, две линейно независимые точки определяют различные геометрические точки.

Теорема II. *Если аналитическая точка* **M** *линейно зависит от двух линейно независимых точек* $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$:

$$\mathbf{M} = p\mathbf{M}_1 + q\mathbf{M}_2, \tag{15}$$

то её геометрическая точка M лежит на прямой M_1M_2, которая соединяет геометрические точки M_1 и M_2. Обратно, если точка M лежит на прямой, соединяющей две несовпадающие геометрические точки M_1 и *M_2, то их аналитические точки связаны соотношением* (15), *т. е. существуют скаляры p и q, удовлетворяющие этому соотношению.*

Первая половина теоремы следует из того, что по правилу сложения и умножения на скаляр аналитических точек координаты точек $\mathbf{M}(x^i)$, $\mathbf{M}_1(x_1^i)$, $\mathbf{M}_2(x_2^i)$ удовлетворяют уравнениям

$$x^i = px_1^i + qx_2^i, \qquad (i = 1, 2, 0), \tag{15'}$$

где указатель i принимает значения 1, 2 и 0.

Внося эти значения вместо элементов первой строки определителя (8) § 6, мы заметим, что элементы первой строки представляют линейные комбинации из соответствующих элементов второй и третьей строк, откуда прямо следует обращение определителя в нуль:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^0 \\ x_1^1 & x_1^2 & x_1^0 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, три точки лежат на одной прямой.

Обратно, если точка M лежит на прямой M_1M_2, то определитель (8) обращается в нуль. При этом элементы второй и третьей строк не пропорциональны, ибо точки M_1 и M_2 различны. Значит, условие алгебраической теоремы § 7 удовлетворено, и элементы первой строки линейно зависят от одноимённых элементов двух других строк, т. е. имеют место формулы (15′), откуда вытекает и искомое равенство (15).

Замечание. В дальнейшем мы нередко будем говорить для краткости: три точки $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ лежат на одной прямой, подразумевая, что на одной прямой лежат одноимённые геометрические точки M, M_1, M_2. Это условие позволяет нам высказать следствие:

Следствие. *Три линейно зависимые точки* $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ *лежат на одной прямой, и обратно — три линейно независимые точки не лежат на одной прямой.*

Действительно, поскольку три коэффициента a, b, c линейной зависимости

$$a\boldsymbol{M}+b\boldsymbol{M}_1+c\boldsymbol{M}_2=0 \tag{a}$$

не могут равняться нулю одновременно, мы можем считать один из них, например a, отличным от нуля, а тогда, деля равенство (а) на a, мы приведём его к виду (15).

§ 9. Проективные координаты на плоскости

Теорема III. *Если три аналитические точки* $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_3$ линейно независимы (*не лежат на одной прямой*), *то всякая аналитическая точка* $\boldsymbol{M}$, *принадлежащая плоскости, может быть представлена в виде*

$$\boldsymbol{M}=p^1\boldsymbol{M}_1+p^2\boldsymbol{M}_2+p^3\boldsymbol{M}_3, \tag{16}$$

где p^i $(i=1, 2, 3)$ — *вполне определённые скаляры.*

Обозначим через $\boldsymbol{M}(x^i)$, $\boldsymbol{M}_1(x_1^i)$, $\boldsymbol{M}_2(x_2^i)$, $\boldsymbol{M}_3(x_3^i)$ координаты этих точек. Тогда уравнение (16) можно переписать по правилу сложения аналитических точек и умножения их на скаляр в виде:

$$\begin{aligned} p^1x_1^1+p^2x_2^1+p^3x_3^1&=x^1,\\ p^1x_1^2+p^2x_2^2+p^3x_3^2&=x^2,\\ p^1x_1^0+p^2x_2^0+p^3x_3^0&=x^0. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь определитель системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 \end{vmatrix}\neq 0,$$

ибо три точки M_1, M_2, M_3 не лежат на одной прямой. Значит система (17) имеет вполне определённое решение p^1, p^2, p^3, что и доказывает теорему.

Определение. Если A_1, A_2, A_0 — три линейно независимые аналитические точки (не лежащие на одной прямой), то три числа x^1, x^2, x^0, удовлетворяющие уравнению

$$M = x^1 A_1 + x^2 A_2 + x^0 A_0, \tag{16'}$$

называются *проективными* (однородными) *координатами* точки M относительно координатного треугольника $A_1 A_2 A_0$.

Одна и та же аналитическая точка M имеет координаты x^1, x^2, x^0 относительно треугольника $A_1 A_2 A_0$ и координаты $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{0'}$ относительно треугольника $A_{1'} A_{2'} A_{0'}$.

Переход от координат x^1, x^2, x^0 к координатам $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{0'}$ аналитической точки M называется *преобразованием проективных координат.*

Чтобы получить формулы преобразования проективных координат, допустим, что вершины нового координатного треугольника $A_{1'} A_{2'} A_{0'}$ имеют по старой системе координаты

$$A_{1'}\,(c^1_{1'},\ c^2_{1'},\ c^0_{1'}), \quad A_{2'}\,(c^1_{2'},\ c^2_{2'},\ c^0_{2'}), \quad A_{0'}\,(c^1_{0'},\ c^2_{0'},\ c^0_{0'}).$$

Следовательно, каждая из вершин $A_{i'}$ нового координатного треугольника линейно выражается через вершины старого по формулам:

$$A_{i'} = c^1_{i'} A_1 + c^2_{i'} A_2 + c^0_{i'} A_0, \qquad (i = 1', 2', 0'). \tag{b}$$

С другой стороны, поскольку точка M имеет координаты x^i относительно треугольника $A_1 A_2 A_0$ и координаты $x^{i'}$ относительно треугольника $A_{1'} A_{2'} A_{0'}$, по формуле (16′) имеем:

$$M = x^1 A_1 + x^2 A_2 + x^0 A_0 = x^{1'} A_{1'} + x^{2'} A_{2'} + x^{0'} A_{0'}.$$

Внося сюда значения $A_{i'}$ по формулам (b), мы получим:

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + x^0 A_0 = x^{1'} (c^1_{1'} A_1 + c^2_{1'} A_2 + c^0_{1'} A_0) +$$
$$+ x^{2'} (c^1_{2'} A_1 + c^2_{2'} A_2 + c^0_{2'} A_0) + x^{0'} (c^1_{0'} A_1 + c^2_{0'} A_2 + c^0_{0'} A_0)$$

или, перенося все члены в левую часть и собирая вместе члены с одной и той же буквой A_i,

$$X^1 A_1 + X^2 A_2 + X^0 A_0 = 0, \tag{c}$$

где

$$X^i = x^i - c^i_{1'} x^{1'} - c^i_{2'} x^{2'} - c^i_{0'} x^{0'}, \qquad (i = 1, 2, 0).$$

Поскольку три вершины координатного треугольника $A_1 A_2 A_0$ линейно независимы, соотношение (c) не должно связывать точки A_i, т. е. все коэффициенты X^i должны равняться нулю, откуда непосредственно получаем формулы преобразования координат:

$$x^i = c^i_{1'} x^{1'} + c^i_{2'} x^{2'} + c^i_{0'} x^{0'}, \qquad (i = 1, 2, 0). \tag{18}$$

Следствие. *Формулы преобразования проективных координат имеют вид линейной подстановки* (18) *с постоянными коэффи-*

циентами $c^i_{k'}$, ограниченными единственным требованием, чтобы определитель подстановки не равнялся нулю:

$$\det|c^i_{k'}| = \begin{vmatrix} c^1_{1'} & c^1_{2'} & c^1_{0'} \\ c^2_{1'} & c^2_{2'} & c^2_{0'} \\ c^0_{1'} & c^0_{2'} & c^0_{0'} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Заметим, что формулы (17)

$$x^i = x^i_1 p^1 + x^i_2 p^2 + x^i_3 p^3, \qquad (i = 1, 2, 0)$$

представляют частный случай системы (18), где x^i — однородные координаты точки M по любой аффинной системе координат, а точки $M_1(x^i_1)$, $M_2(x^i_2)$, $M_3(x^i_3)$ и их координаты занимают место вершин нового координатного треугольника и их координат $A_{1'}$, $(c^i_{1'})$, $A_{2'}$, $(c^i_{2'})$, $A_{0'}$, $(c^i_{0'})$; наконец, p^1, p^2 и p^3 суть проективные координаты $x^{i'}$ точки M.

Следовательно, *преобразование однородных аффинных* (в частности, декартовых) *координат в проективные совершается по общим формулам* (18).

Теорема. *Преобразование проективной системы координат не меняет степени алгебраического однородного уравнения.*

Пусть нам дано алгебраическое однородное уравнение степени n относительно текущих координат x^1, x^2, x^0 и пусть

$$A(x^1)^k (x^2)^l (x^0)^m \qquad (k + l + m = n)$$

один из членов этого уравнения. Заменяя здесь координаты x^1, x^2, x^0 по формулам (18), получим:

$$\begin{aligned} &A(x^1)^k (x^2)^l (x^0)^m = \\ &= A(c^1_{1'}x^{1'} + c^1_{2'}x^{2'} + c^1_{0'}x^{0'})^k (c^2_{1'}x^{1'} + c^2_{2'}x^{2'} + c^2_{0'}x^{0'})^l (c^0_{1'}x^{1'} + \\ &\qquad + c^0_{2'}x^{2'} + c^0_{0'}x^{0'})^m. \end{aligned}$$

Так как в правой части мы имеем $k + l + m = n$ множителей и каждый множитель — первой степени относительно новых координат $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{0'}$, то по раскрытии скобок получим однородный многочлен степени n. Многочлены той же степени получаются от каждого члена уравнения. Следовательно, преобразованное уравнение будет иметь ту же степень.

Следствие. *В проективных координатах относительно любого координатного треугольника прямая определяется уравнением первой степени.*

Из определения проективных координат следует, что две координаты каждой вершины координатного треугольника равны нулю. Действительно, если, например, $M = A_1$, то по формуле (16′) имеем:

$$A_1 = x^1 A_1 + x^2 A_2 + x^0 A_0. \qquad \text{(d)}$$

Так как вершины координатного треугольника A_1, A_2, A_0 линейно независимы, то равенство (d) должно быть удовлетворено тождественно, т. е.

$$x^1 = 1, \quad x^2 = 0, \quad x^0 = 0.$$

Итак, у каждой вершины A_i *координатного треугольника только координата* x^i *отлична от нуля*; она равна единице, если не только геометрическая точка лежит в вершине A_i, но и аналитическая точка совпадает с вершиной A_i.

Этот результат легко получается и из теоремы I § 8. Таким же образом получим, что *каждая точка прямой* A_1A_2 *координатного треугольника* $A_1A_2A_0$ *имеет третью координату* x^0, *равную нулю.*

Действительно, по теореме II § 8 всякая точка P прямой A_1A_2 линейно зависит от вершин A_1, A_2. Полагая по формуле (15)

$$P = p^1 A_1 + p^2 A_2$$

и сравнивая с формулой (16′)

$$P = x^1 A_1 + x^2 A_2 + x^0 A_0,$$

мы немедленно получим:

$$p^1 A_1 + p^2 A_2 = x^1 A_1 + x^2 A_2 + x^0 A_0$$

и, следовательно,

$$x^1 = p^1, \quad x^2 = p^2, \quad x^0 = 0.$$

Отметим, наконец, ещё одно очевидное следствие формулы (16′). *Все точки с одним и тем же отношением проективных координат* $x^1 : x^2$ *лежат на прямой, проходящей через вершину* A_0.

Действительно, пусть

$$P = x^1 A_1 + x^2 A_2$$

— некоторая точка прямой A_1A_2. Всякая точка M с тем же отношением первых двух координат имеет координаты $M(\rho x^1, \rho x^2, x^0)$ и может быть представлена формулой:

$$M = \rho (x^1 A_1 + x^2 A_2) + x^0 A_0$$

или

$$M = \rho P + x^0 A_0,$$

что и доказывает предложение, ибо точка $\rho P + x^0 A_0$ лежит на прямой A_0P.

§ 10. Проективные координаты на расширенной плоскости

На расширенной плоскости можно одновременно рассматривать и аффинные (в частности декартовы) и проективные координаты. При этом можно заметить, что аффинные и даже декартовы координаты представляют частный случай проективных, когда одна сторона координатного треугольника — несобственная.

Теорема. Всякая аффинная система координат совпадает с проективной относительно координатного треугольника, образованного двумя осями аффинной системы и несобственной прямой плоскости.

Действительно, определим вершины координатного треугольника относительно заданной аффинной системы координатами: $A_0(0,\ 0,\ 1)$, $A_1(1,\ 0,\ 0)$, $A_2(0,\ 1,\ 0)$ и рассмотрим произвольную точку M с неоднородными аффинными координатами x, y.

Проективные координаты этой точки относительно треугольника $A_0A_1A_2$ определяются из уравнения:

$$M = x^1A_1 + x^2A_2 + x^0A_0;$$

полагая общий множитель трёх однородных аффинных координат точки M равным ρ и имея в виду координаты точек A_i, получим по формулам (18):

$$\rho x = x^1, \quad \rho y = x^2, \quad \rho = x^0;$$

мы видим, что любая точка имеет те же самые координаты по той и другой системе координат, что и доказывает их эквивалентность.

Обратная теорема. *Проективные координаты относительно треугольника с несобственной стороной суть аффинные координаты относительно системы с началом в собственной вершине координатного треугольника и координатными векторами, определяемыми двумя первыми координатами несобственных вершин его.*

Теорема становится очевидной, если координаты аналитических точек в основном равенстве (16) подсчитать по аффинной системе координат, но она допускает и непосредственную поверку.

Допустим, что вершины координатного треугольника $A_{1'}, A_{2'}, A_{0'}$ заданы, например, в декартовой прямоугольной системе координат с началом O и координатными векторами i_1, i_2 посредством координат $A_{1'}(c^1_{1'},\ c^2_{1'},\ 0)$, $A_{2'}(c^1_{2'},\ c^2_{2'},\ 0)$, $A_{0'}(c^1_{0'},\ c^2_{0'},\ 1)$.

Построим аффинную систему координат с началом в точке A_0 и координатными векторами

$$\begin{aligned} e_{1'} &= c^1_{1'}i_1 + c^2_{1'}i_2, \\ e_{2'} &= c^1_{2'}i_1 + c^2_{2'}i_2. \end{aligned} \tag{19}$$

Пусть точка M имеет декартовы координаты x, y, проективные координаты $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{0'}$ и аффинные $x^{1'}_*$, $x^{2'}_*$. Тогда по формулам преобразования координат (14) § 9, гл. II, и (18) этой главы получим:

$$x = c^1_{1'}x^{1'}_* + c^1_{2'}x^{2'}_* + c^1_{0'}, \quad x = c^1_{1'}x^{1'} + c^1_{2'}x^{2'} + c^1_{0'}x^{0'},$$

$$y = c^2_{1'}x^{1'}_* + c^2_{2'}x^{2'}_* + c^2_{0'}, \quad y = c^2_{1'}x^{1'} + c^2_{2'}x^{2'} + c^2_{0'}x^{0'},$$

$$1 = x^{0'}.$$

Сравнивая значения x и y левого и правого столбцов и внося $x^{0'} = 1$, получим:

$$c^1_{1'}(x^{1'}_* - x^{1'}) + c^1_{2'}(x^{2'}_* - x^{2'}) = 0,$$

$$c^2_{1'}(x^{1'}_* - x^{1'}) + c^2_{2'}(x^{2'}_* - x^{2'}) = 0.$$

Так как векторы (19) непараллельны и определитель системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} c^1_{1'}, & c^1_{2'} \\ c^2_{1'}, & c^2_{2'} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система допускает только нулевые решения:

$$x^{1'}_* - x^{1'} = 0, \quad x^{2'}_* - x^{2'} = 0,$$

т. е. аффинные координаты точки совпадают с проективными, что и доказывает теорему.

Следствие. *На расширенной плоскости каждой несобственной точке $A(a, b, 0)$ соответствует вектор*

$$\boldsymbol{e} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2;$$

все прямые, параллельные ему, проходят через эту несобственную точку. Однородные координаты точки A и координаты вектора $\boldsymbol{e}$ даны по аффинной системе $(0; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

Мы знаем, что на всякой собственной прямой есть одна несобственная точка, координаты которой $(a, b, 0)$ своим отношением определяют угловой коэффициент прямой:

$$b : a = k.$$

С другой стороны, вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, соединяющий точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет координатами разности: $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$, которые своим отношением определяют угловой коэффициент прямой M_1M_2:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Следовательно, вектор $\boldsymbol{e}$ с координатами a, b лежит на прямой, проходящей через несобственную точку $A(a, b, 0)$.

Теперь мы можем добавить, что всякому вектору $\boldsymbol{e}$ соответствует одна аналитическая несобственная точка с теми же двумя первыми координатами по любой аффинной системе координат. Преобразование аффинной системы координат не нарушит этого соответствия.

Глава VII

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Общее уравнение кривой второго порядка

В однородных координатах x^1, x^2, x^0 относительно произвольного координатного треугольника или относительно аффинной или декартовой системы координат уравнение второй степени может содержать шесть членов: три члена с квадратами текущих координат $(x^1)^2$, $(x^2)^2$, $(x^0)^2$ и три члена с произведениями x^1x^2, x^2x^0, x^0x^1.

Уравнение называется *общим*, если коэффициенты обозначены буквами так, что при специальном выборе значений их получается любое произвольно заданное уравнение второй степени. Для удобства запоминания коэффициенты в общем уравнении обозначаются одной буквой a_{ik} с двумя указателями так, чтобы при произведении x^ix^k стоял коэффициент $2a_{ik}$, а при квадрате $(x^i)^2$ — коэффициент a_{ii}. Коэффициенты при произведении различных координат обозначаются через $2a_{ik}$ ради удобства записи последующих формул. Это не стесняет общности формул, ибо число a_{ik} может быть и дробным. Если уравнение кривой содержит член $3x^1x^2$, то мы скажем, что $a_{12}=\frac{3}{2}$.

Таким образом, уравнение кривой второго порядка пишется в виде:

$$a_{11}(x^1)^2+2a_{12}x^1x^2+a_{22}(x^2)^2+2a_{10}x^1x^0+2a_{20}x^2x^0+a_{00}(x^0)^2=0. \quad (1)$$

В неоднородных координатах x, y его легко написать, если принять $x^0=1$, а x^1 и x^2 заменить через x и y:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0. \quad (2)$$

Первые три члена называются *старшими членами*.

Линию порядка k нередко обозначают символом c^k, следовательно, линию второго порядка можно обозначить c^2.

§ 2. Определение кривой второго порядка пятью точками

Общее уравнение кривой второго порядка содержит шесть коэффициентов, но существенны только пять отношений, ибо всё уравнение можно умножить, не меняя его корней, на любое число и, следовательно, один коэффициент, не равный нулю, можно привести к единице.

Отсюда вытекает, что кривая второго порядка определяется пятью условиями, например пятью точками.

Пример. Провести кривую второго порядка через пять точек

$$M_1(0,0),\ M_2(0,1),\ M_3(1,0),\ M_4(1,1),\ M_5(1,2).$$

Система координат — аффинная.

Так как каждая точка M_i лежит на кривой, то её координаты удовлетворяют уравнению кривой. Внося в общее уравнение кривой (2) координаты пяти точек M_i, получим пять условий на коэффициенты a_{ik}:

$$a_{00}=0,\quad a_{22}+2a_{20}=0,\quad a_{11}+2a_{10}=0,\quad a_{12}=0,\quad a_{22}+a_{20}=0.$$

Отсюда следует, что все коэффициенты, кроме a_{11}, a_{10}, равны нулю. Если $a_{11}=0$, то и $a_{10}=0$ и все остальные $a_{ik}=0$, и уравнение кривой исчезает. Следовательно, $a_{11}\neq 0$. Сокращая всё уравнение на a_{11}, мы приведём этот коэффициент к единице и получим:

$$a_{11}=1,\quad 2a_{10}=-1,$$

и, следовательно, уравнение линии будет:

$$x^2-x=0.$$

Так как левая часть уравнения разлагается на множители:

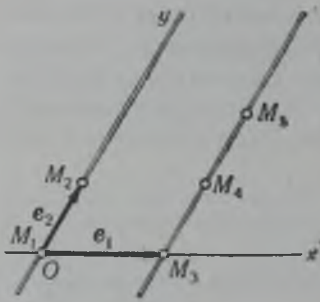
$$x(x-1)=0,$$

то линия второго порядка распадается на две прямые:

$$1)\ x = 0, \quad 2)\ x - 1 = 0.$$

Первая из них есть ось ординат, а вторая параллельна оси ординат (черт. 46).

Это можно было предвидеть. Три заданные точки M_3, M_4, M_5 имеют абсциссу $x = 1$, следовательно, лежат на одной прямой $x = 1$. Мы видели (§ 5, гл. IV), что кривая n-го порядка пересекается с произвольной прямой не более чем в n точках. Следовательно, прямая $x = 1$ может иметь не более двух точек пересечения с искомой кривой. Так как она несёт три точки её, то все её точки принадлежат этой линии, т. е. линия второго порядка распадается на пару прямых. Одна прямая есть прямая $x = 1$. Чтобы найти вторую, достаточно заметить, что две остальные точки M_1 и M_2, не лежащие на прямой $x = 1$, должны лежать на второй прямой. Так как абсциссы их равны нулю, то они лежат на оси ординат. Значит, вторая прямая, составляющая искомую линию второго порядка, есть ось ординат.

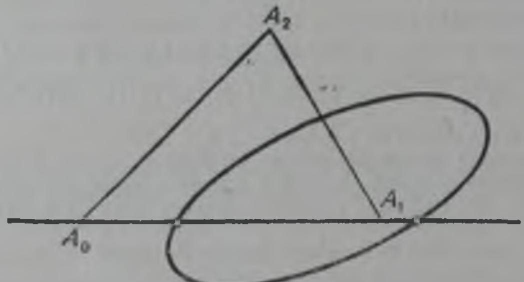


Черт. 46.

§ 3. Пересечение кривой второго порядка с прямой. Касательная

Рассмотрим кривую второго порядка c^2 на расширенной плоскости. Отнесём её к координатному треугольнику с двумя несобственными вершинами, т. е. к аффинной или даже просто к декартовой системе координат.

Так как число точек пересечения линии c^2 с прямой не зависит от выбора системы координат, то мы можем выполнить преобразование координат, принимая заданную прямую за сторону A_0A_1 координатного треугольника (ось абсцисс).



Черт. 47.

Если мы допустим, что это преобразование уже выполнено, то точки пересечения линии c^2 с прямой будут определяться уравнениями:

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{10}x^1x^0 + 2a_{20}x^2x^0 + a_{00}(x^0)^2 = 0,$$

$$x^2 = 0$$

или, внося значение $x^2=0$ в первое уравнение,

$$a_{11}(x^1)^2+2a_{10}x^1x^0+a_{00}(x^0)^2=0. \tag{3}$$

Это уравнение определяет два значения отношения $x^1:x^0$, т. е. две точки пересечения прямой $x^2=0$ с кривой. Могут представиться различные случаи:

I. Если $a_{11}\neq 0$, то x^0 не может равняться нулю (ибо предположение $x^0=0$ привело бы при $a_{11}\neq 0$ к равенству $x^1=0$, т. е. к обращению в нуль всех трёх координат, что исключается). Деля все члены уравнения на $(x^0)^2$, получим квадратное уравнение для отношения $\frac{x^1}{x^0}$:

$$a_{11}\left(\frac{x^1}{x^0}\right)^2+2a_{10}\frac{x^1}{x^0}+a_{00}=0,$$

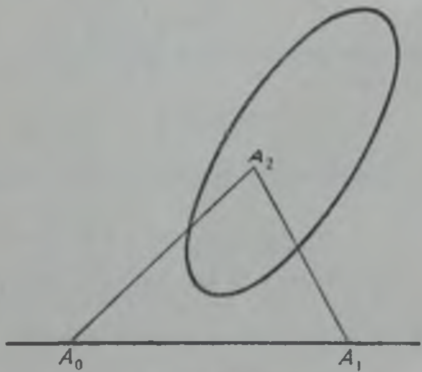
откуда

$$\frac{x^1}{x^0}=\frac{-a_{10}\pm\sqrt{a_{10}^2-a_{11}\cdot a_{00}}}{a_{11}}.$$

a) Если $a_{10}^2-a_{11}a_{00}>0$, то под корнем стоит положительная величина, оба корня действительны и определяют две точки пересечения (черт. 47).

b) Если $a_{10}^2-a_{11}a_{00}<0$, то под корнем стоит отрицательное число, корень мним, и точек пересечения нет (черт. 48). Но поскольку уравнение допускает два различных решения, мы будем говорить, что прямая пересекает кривую c^2 в двух мнимых точках.

c) Если $a_{10}^2-a_{11}a_{00}=0$, то подкоренное выражение равно нулю и оба решения уравнения совпадают. Мы будем говорить, что прямая *касается* кривой (черт. 49).



Черт. 48.

На чертежах 47—49 изображён произвольный координатный треугольник проективной плоскости.

Пример. Дана кривая в декартовой системе координат

$$x^2+y^2+2x-y-5=0.$$

Найти касательные, параллельные оси ординат.

Прямая, параллельная оси ординат, определяется уравнением $x=a$. Вносим значение $x=a$ в уравнение кривой:

$$y^2-y+a^2+2a-5=0.$$

Корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ совпадают, если $b^2-4ac=0$.

В данном случае это условис принимает вид:

$$1 - 4(a^2 + 2a - 5) = 0$$

или

$$4a^2 + 8a - 21 = 0,$$

откуда

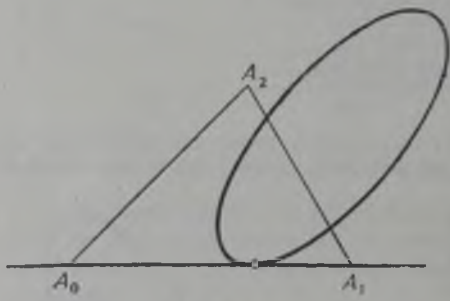
$$a = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{21}{4}}$$

или

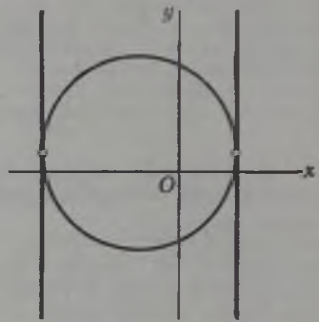
$$a = -1 \pm \frac{5}{2},$$

т. е.

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = -\frac{7}{2}.$$



Черт. 49.



Черт. 50.

Кривая имеет две касательные, параллельные оси ординат (черт. 50):

$$x = \frac{3}{2}, \quad x = -\frac{7}{2}.$$

На чертеже 50 взята прямоугольная система координат.

§ 4. Пересечение кривой второго порядка с прямой. Асимптота

Возвращаясь к исследованию уравнения (3), рассмотрим второй случай:

II. Пусть

$$a_{11} = 0, \quad a_{10} \neq 0.$$

Уравнение (3) принимает теперь вид:

$$x^0 (2a_{10}x^1 + a_{00}x^0) = 0.$$

Произведение может равняться нулю только при обращении в нуль одного из множителей. Имеем решения:

1) $x^0 = 0$,

2) $2a_{10}x^1 + a_{00}x^0 = 0$ или $x^1 : x^0 = -\frac{a_{00}}{2a_{10}}$.

Первое решение соответствует точке пересечения x^1, $x^2 = 0$, $x^0 = 0$, т. е. вершине A_1 (черт. 51). На расширенной плоскости — это несобственная точка оси абсцисс, если $x^0 = 0$ — несобственная прямая. Вторая точка пересечения — собственная (черт. 52).

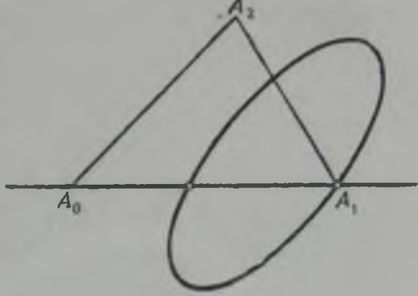
На чертеже 51 изображён произвольный координатный треугольник проективной плоскости; на чертеже 52 тот же случай для аффинной системы координат на расширенной плоскости.

III. Допустим теперь, что

$$a_{11} = 0, \quad a_{10} = 0, \quad a_{00} \neq 0.$$

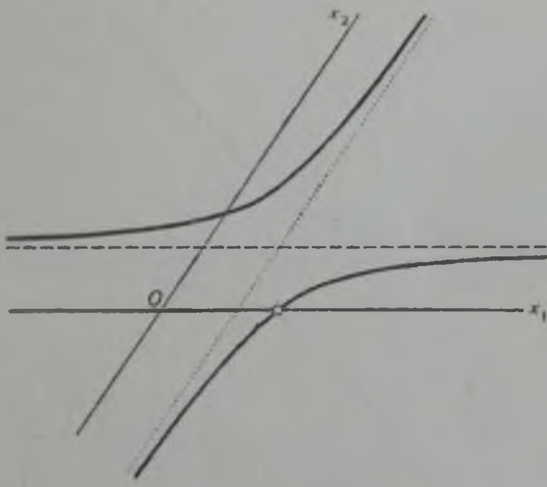
Уравнение (3) принимает вид:

$$a_{00}(x^0)^2 = 0.$$



Черт. 51.

Имеем два совпадающих корня $x^0 = 0$. Кривая касается оси A_0A_1 в точке A_1 (черт. 53). На расширенной плоскости обе точки пере-



Черт. 52.

сечения — несобственные, совпадающие; прямая касается кривой в несобственной точке (черт. 54).

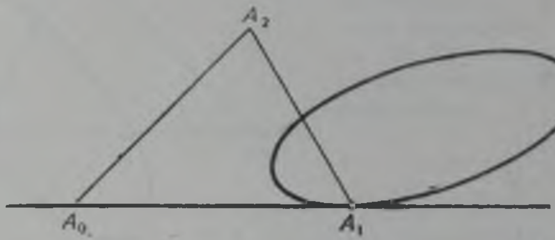
Такая касательная называется *асимптотой*.

На чертеже 53 изображён произвольный координатный треугольник проективной плоскости, на чертеже 54 — тот же случай для аффинной системы координат на расширенной плоскости.

IV. Наконец, можно предположить:

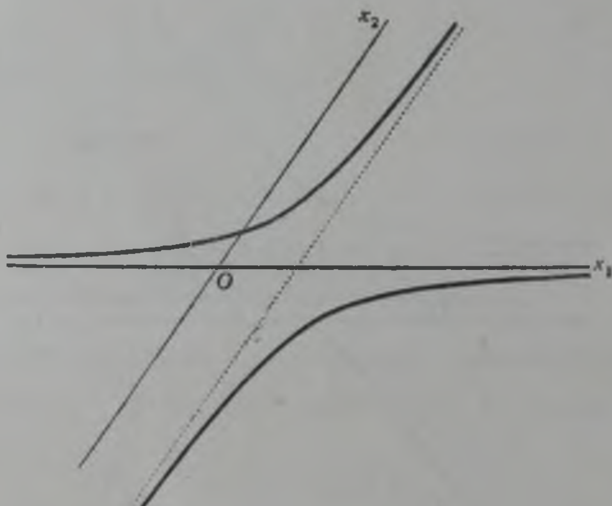
$$a_{11} = 0, \quad a_{10} = 0, \quad a_{00} = 0. \tag{a}$$

В таком случае уравнение (3) исчезает тождественно. Всякая точка прямой есть точка пересечения с кривой. Кривая распадается



Черт. 53.

на пару прямых, и одна из прямых этой пары есть заданная прямая $x^2 = 0$.



Черт. 54.

Если внести в уравнение (1) значения (a), то получим уравнение кривой в виде:

$$2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{20}x^2x^0 = 0$$

или

$$x^2(2a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + 2a_{20}x^0) = 0.$$

Так как левая часть уравнения разлагается на два множителя первой степени, то кривая распадается на пару прямых:

$$1)\ x^2 = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ 2a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + 2a_{20}x^0 = 0.$$

Первая из них есть ось абсцисс.

§ 5. Несобственные точки кривой второго порядка

Среди прямых расширенной плоскости есть одна исключительная. Эта прямая — несобственная. Поведение кривой второго порядка по отношению к этой прямой в значительной степени определяет форму кривой. Поэтому в основу классификации кривых второго порядка на расширенной плоскости кладётся число несобственных точек кривой.

Чтобы найти несобственные точки кривой второго порядка (1), надо решить уравнение кривой совместно с уравнением несобственной прямой.

Выберем систему координат так, чтобы сторона A_1A_2 была несобственной прямой. Она определяется уравнением

$$x^0 = 0.$$

Внося это значение в уравнение кривой (1), получим квадратное уравнение относительно координат

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 = 0. \tag{4}$$

Это уравнение определяет пару прямых, которые пересекают несобственную прямую $x^0 = 0$ в тех же точках, что и кривая (1).

Три случая могут представиться:

1. Дискриминант уравнения (4) (дискриминант старших членов) положителен:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \tag{5}$$

$$\Delta > 0,$$

тем самым a_{11} и a_{22} отличны от нуля. Корни уравнения (4) — мнимы (кроме тривиальных $x^1 = x^2 = 0$). Следовательно, прямая $x^0 = 0$ пересекает кривую в мнимых точках, т. е. не встречается с кривой, иными словами, вся кривая (1) (если она имеет действительные точки) состоит только из собственных точек эвклидовой плоскости; при подходящем масштабе она вся поместится на чертеже. Кривая называется *эллипсом*.

2. Дискриминант отрицателен:

$$\Delta < 0.$$

Трёхчлен, стоящий в левой части уравнения (4), разлагается на действительные множители первой степени. Линия, определяемая уравнением (4), распадается на пару действительных прямых.

Если при этом

$$a_{22} \neq 0,$$

то квадратное уравнение для углового коэффициента $k=\frac{x^2}{x^1}$:

$$a_{22}k^2+2a_{12}k+a_{11}=0, \tag{4'}$$

имеет два действительных корня:

$$k=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{22}}.$$

Обозначая эти два корня через k_1 и k_2, мы можем написать уравнение (4) в виде

$$a_{22}(x^2-k_1x^1)(x^2-k_2x^1)=0.$$

Следовательно, несобственные точки кривой лежат в несобственных точках прямых, которые в неоднородных координатах определяются уравнениями

$$y=k_1x \quad \text{и} \quad y=k_2x.$$

Если $a_{22}=0$, то уравнение (4) принимает вид:

$$x^1(a_{11}x^1+2a_{12}x^2)=0.$$

Линия c^2 распадается на прямые, которые в неоднородных координатах напишутся:

$$x=0, \quad a_{11}x+2a_{12}y=0.$$

Они и несут несобственные точки кривой.

Кривая называется *гиперболой*.

3. Если дискриминант равен нулю:

$$\Delta=0, \text{ т. е. } a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0, \tag{5'}$$

то левая часть уравнения (4) есть полный квадрат.

Если $a_{22}\neq 0$, то, умножая обе части уравнения (4) на a_{22} и заменяя $a_{11}a_{22}$ на a_{12}^2, мы представим уравнение в виде:

$$(a_{12}x^1+a_{22}x^2)^2=0.$$

Если $a_{22}=0$, то в силу условия (5′) будем иметь $a_{12}=0$, и уравнение (4) примет вид:

$$a_{11}(x^1)^2=0.$$

В обоих случаях уравнение имеет кратный корень. Несобственная прямая $x^0=0$ имеет две совпадающие общие точки с кривой, следовательно, должна считаться касательной. Кривая, касающаяся несобственной прямой, называется *параболой*.

4. Наконец, следует рассмотреть ещё особый случай, когда все три коэффициента обращаются в нуль:

$$a_{11}=0, \quad a_{12}=0, \quad a_{22}=0,$$

и уравнение (4) пропадает (обращается в тождество). В этом случае все точки несобственной прямой $x^0=0$ принадлежат кривой, т. е. прямая входит в состав кривой. Действительно, уравнение (1) принимает теперь вид:

$$x^0(2a_{10}x^1+2a_{20}x^2+a_{00}x^0)=0,$$

и кривая распадается на пару прямых:

$$x^0=0 \quad \text{и} \quad 2a_{10}x^1+2a_{20}x^2+a_{00}x^0=0,$$

из которых первая будет несобственной.

Заметим, что эта классификация кривых второго порядка имеет смысл только на расширенной плоскости. На проективной плоскости все прямые равноправны. Свойства кривых по отношению к несобственной прямой расширенной плоскости принадлежат к числу аффинных свойств плоскости. Поэтому классификация кривых второго порядка по числу несобственных точек на эллипсы, гиперболы и параболы называется аффинной классификацией. Она сохраняется и в эвклидовой геометрии.

§ 6. Мнимые точки плоскости

В § 3, гл. VI, мы дополнили эвклидову плоскость несобственными элементами и после этого любые две прямые плоскости стали иметь одну общую точку — собственную или несобственную. Для пересечения кривой второго порядка с прямой этого уже недостаточно. Координаты точки пересечения определяются (§ 3) из квадратного уравнения, корни которого могут быть и действительными, и мнимыми (прямая идёт мимо кривой). Так же обстоит дело при отыскании точек пересечения произвольных алгебраических кривых. Чтобы можно было формулировать теорему: *две алгебраические кривые порядка p и q пересекаются в pq точках*, надо ввести точки с комплексными координатами (и, кроме того, понятие кратных точек пересечения: касательная к кривой второго порядка имеет с кривой две совпадающие общие точки).

Понятие плоскости комплексных точек вводится так же, как мы вводим в § 2, гл. VI, понятие проективной плоскости.

Будем называть *точкой* или *комплексной точкой* совокупность двух комплексных чисел x и y. Сами числа x и y будем называть *координатами* точки. Совокупность всех комплексных точек (x, y) будем называть *плоскостью*.

Поскольку каждое комплексное число определяется двумя действительными числами

$$x=x'+ix'', \quad y=y'+iy'' \qquad (i=\sqrt{-1}), \tag{6}$$

двумерная комплексная плоскость с точки зрения четырёх действительных чисел x', x'', y', y'', определяющих положение точки (x, y), является многообразием четырёх („*действительных*“) измерений.

Точка (x, y) называется *действительной*, если её координаты x и y — действительные числа, т. е. если $x''=0$, $y''=0$. Следовательно, комплексная плоскость содержит двумерное многообразие действительных точек (x', y'), которые можно отождествить с точками эвклидовой плоскости, если x' и y' рассматривать как аффинные (или декартовы) неоднородные координаты точки на плоскости.

Будем называть *прямой линией* на комплексной плоскости (x, y) совокупность точек, координаты которых удовлетворяют уравнению первой степени:

$$Ax + By + C = 0, \tag{7}$$

где A, B, C — произвольные комплексные числа (A и B не равны нулю одновременно). Если коэффициенты A, B, C — действительны (или станут действительными по сокращении на подходящий множитель), то прямая (7) называется *действительной*.

От неоднородных координат x, y можно перейти к однородным (комплексным) координатам x^1, x^2, x^0 посредством равенств

$$x = \frac{x'}{x^0}, \quad y = \frac{x^3}{x^0} \qquad x^0 \neq 0$$

и дополнить комплексную плоскость (x, y) несобственными (комплексными) точками $(x^1, x^2, x^0 = 0)$.

Теорема. *Действительная прямая* (7) *содержит все точки прямой*

$$Ax' + By' + C' = 0 \tag{7'}$$

эвклидовой плоскости и, кроме того, двумерное многообразие комплексных точек.

Действительно, внося значения (6) в уравнение (7), получим:

$$Ax' + By' + C + i(Ax'' + By'') = 0. \tag{a}$$

Равенство нулю комплексного числа имеет следствием обращение в нуль его действительной и мнимой части. Следовательно, из уравнения (a) вытекает:

$$Ax' + By' + C = 0, \tag{8a}$$

$$Ax'' + By'' = 0. \tag{8b}$$

Второе уравнение удовлетворяется значениями $x'' = 0$, $y'' = 0$; тогда точка (x, y) будет действительной и будет принадлежать эвклидовой прямой (7'). Общее решение системы (8ab), получится, если к любому решению уравнения (8a) присоединить значения x'', y'', пропорциональные числам B и A.

Теорема. *Комплексная прямая* (7) *имеет только одну действительную точку.*

Действительно, пусть A, B, C — комплексные числа

$$A = A' + iA'', \quad B = B' + iB'', \quad C = C' + iC'' \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

где A', B', C' не пропорциональны A'', B'', C'' (иначе можно было бы сократить уравнение (7) на комплексное число $A' + iA''$ и прямая (7) была бы действительной).

Вноси значения (6) в уравнения (7), получим:

$$(A'+iA'')(x'+ix'')+(B'+iB'')(y'+iy'')+C'+iC''=0$$

или:

$$A'x'+B'y'+C'-A''x''-B''y''+i(A'x''+B'y''+A''x'+B''y'+C'')=0,$$

откуда, обращая в нуль действительную и мнимую части, получим систему:

$$\begin{aligned} A'x'+B'y'-A''x''-B''y''&=-C', \\ A''x'+B''y'+A'x''+B'y''&=-C''. \end{aligned} \tag{9}$$

Чтобы найти действительные точки комплексной прямой (7), надо здесь положить $x''=0$, $y''=0$. Мы получим систему:

$$\begin{aligned} A'x'+B'y'&=-C'. \\ A''x'+B''y'&=-C''. \end{aligned} \tag{9'}$$

Расширенный ранг системы (ранг матрицы коэффициентов и правых частей) равен 2, ибо коэффициенты A', B', C' и A'', B'', C'' не пропорциональны. Следовательно, она определит одну действительную точку прямой (7) — собственную или несобственную.

Теорема. *Две комплексные прямые пересекаются в одной (вообще комплексной) точке.*

Глава VIII

ПРОЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Изучение проективных свойств связано с понятием полярной сопряжённости, а это понятие основывается на понятии гармонической четвёрки точек. Поэтому нам придётся остановиться на некоторых свойствах сложного отношения и гармонизма четвёрки точек на прямой.

§ 1. Сложное отношение четырёх точек на прямой

Определение 1. *Простым отношением трёх собственных точек* $(M_1M_2;\ M)$ на прямой называется отношение, в котором точка M делит отрезок M_1M_2:

$$(M_1M_2;\ M)=\frac{M_1M}{MM_2}. \tag{1}$$

Определение 2. *Сложным отношением четырёх собственных точек* на прямой $(M_1M_2;\ MM^*)$ называется отношение двух простых отношений $(M_1M_2;\ M)$ и $(M_1M_2;\ M^*)$:

$$(M_1M_2;\ MM^*)=\frac{M_1M}{MM_2}:\frac{M_1M^*}{M^*M_2}, \tag{2}$$

при этом все отрезки M_1M, MM_2 и т. д. определяются и по величине, и по знаку, как координаты соответствующих векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{MM_2}$ и т. д. на прямой при произвольном задании на этой прямой координатного вектора.

Следствие 1. *Простое отношение (а, следовательно, и сложное отношение) не зависит от выбора координатного вектора на прямой.*

Действительно, при изменении длины координатного вектора и числитель, и знаменатель отношения (1) умножатся на одно и то же число, при изменении положительного направления они изменят знак, но всё это не отразится на величине отношения.

Следствие 2. *Сложное отношение не изменится, если поменять местами первую пару точек со второй.*

Действительно, если разделить первую дробь на вторую в формуле (2), то получим:

$$(M_1M_2;\ MM^*)=\frac{M_1M\cdot M^*M_2}{MM_2\cdot M_1M^*},$$

$$(MM^*;\ M_1M_2)=\frac{MM_1\cdot M_2M^*}{M_1M^*\cdot MM_2}.$$

Мы видим, что оба отношения отличаются только знаком двух множителей:

$$MM_1=-M_1M,\quad M_2M^*=-M^*M_2,$$

но это не отразится на знаке самого отношения.

Следствие 3. *Сложное отношение меняет свою величину на обратную, если поменять местами точки одной пары:*

$$(M_1M_2;\ MM^*)=(M_1M_2;\ M^*M)^{-1},$$

ибо при этом меняются местами числитель и знаменатель отношения

$$(M_1M_2;\ M):(M_1M_2;\ M^*).$$

Следствие 4. *Сложное отношение $(M_1M_2; MM^*)$ отрицательно, если одна точка второй пары лежит внутри отрезка M_1M_2, а другая — вне его. Сложное отношение положительно, если обе точки лежат внутри отрезка M_1M_2 или обе вне его.*

Действительно, в первом случае одно простое отношение, например $(M_1M_2;\ M)$, положительно, если точка M лежит внутри отрезка M_1M_2, а другое отрицательно. Во втором случае оба простых отношения — одного знака: оба положительны, если M и M^* лежат внутри отрезка M_1M_2, или оба отрицательны, если они лежат вне его.

Замечание. В первом случае говорят, что две пары точек M_1, M_2 и M, M^* *разделяют друг друга*; во втором — *не разделяют.*

Лемма. *Если три собственные аналитические точки $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}$ удовлетворяют соотношению*

$$\mathbf{M}=p\mathbf{M}_1+q\mathbf{M}_2, \tag{a}$$

то простое отношение их равно

$$(M_1M_2;\ M)=\frac{q}{p}\cdot\frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad \text{(b)}$$

где x_1^i, x_2^i — однородные аффинные координаты точек M_1, M_2.

Действительно, деля координаты точки M_1 на x_1^0 и умножая коэффициент p на x_1^0 и выполняя аналогичное преобразование для M_2 и q, мы не изменим соотношения (a); между тем координаты точек $\widetilde{M}_1$, $\widetilde{M}_2$ станут неоднородными $\widetilde{M}_1(x_1,\ y_1,\ 1)$, $\widetilde{M}_2(x_2,\ y_2,\ 1)$, и для новых коэффициентов

$$\widetilde{p}=px_1^0,\quad \widetilde{q}=qx_2^0$$

и координат x^i точки M мы получим соотношения:

$$x^1=\widetilde{p}x_1+\widetilde{q}x_2,$$
$$x^2=\widetilde{p}y_1+\widetilde{q}y_2,$$
$$x^0=\widetilde{p}+\widetilde{q},$$

откуда неоднородные координаты точки M равны

$$x=\frac{\widetilde{p}x_1+\widetilde{q}x_2}{\widetilde{p}+\widetilde{q}},\quad y=\frac{\widetilde{p}y_1+\widetilde{q}y_2}{\widetilde{p}+\widetilde{q}},$$

и по формуле (13″) § 7, гл. I, имеем:

$$\lambda=(M_1M_2;\ M)=\widetilde{q}:\widetilde{p}=\frac{qx_2^0}{px_1^0}.$$

Из доказанной леммы вытекает, что проективные координаты точек не дают возможности вычислять простое отношение трёх точек. Действительно, если две вершины координатного треугольника совпадают с точками M_1, M_2, то $(p,\ q,\ 0)$ являются проективными координатами точки M, как это следует из сравнения формул (a) с уравнением (16′) § 9, гл. VI. Между тем для определения простого отношения (b) надо знать ещё x_1^0, x_2^0.

Теорема. *Если собственные аналитические точки M_1, M_2, M, M^* удовлетворяют соотношениям:*

$$M=pM_1+qM_2,\quad M^*=p^*M_1+q^*M_2, \qquad \text{(3a)}$$

то сложное отношение их равно

$$(M_1M_2;\ MM^*)=\frac{q}{p}:\frac{q^*}{p^*}.$$

Действительно, по формуле (b) простые отношения определяются в виде:

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{q}{p}\cdot\frac{x_2^0}{x_1^0};\quad \frac{M_1M^*}{M^*M_2}=\frac{q^*}{p^*}\cdot\frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad \text{(3b)}$$

откуда

$$(M_1M_2;\ MM^*) = \frac{M_1M}{MM_2} : \frac{M_1M^*}{M^*M_2} = \frac{q}{p} : \frac{q^*}{p^*}. \tag{3c}$$

Формула (3с) является определением сложного отношения.

Замечание. На проективной плоскости простое отношение не может быть определено. Отношение проективных координат $\frac{q}{p}$ является инвариантом трёх *аналитических* точек $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ и $\boldsymbol{M}$, но не *геометрических*: для тех же геометрических точек M_1, M_2 и M отношение $\frac{q}{p}$ принимает различные значения в зависимости от выбора нормирования. При умножении точек $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ на скаляры ρ_1 и ρ_2 координаты p и q разделятся соответственно на ρ_1 и ρ_2 и отношение $\frac{q}{p}$ умножится на $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, как это сейчас же видно из формул (3b): если третьи координаты точек M_1, M_2 выбрать равными единице: $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 1$, то $\left(\frac{q}{p}\right)_1 = \frac{M_1M}{MM_2}$; если взять $x_1^0 = \rho_1$, $x_2^0 = \rho_2$, то $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{q}{p}\frac{\rho_2}{\rho_1}$. Следовательно,

$$\frac{q}{p} = \left(\frac{q}{p}\right)_1 \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \frac{q^*}{p^*} = \left(\frac{q^*}{p^*}\right)_1 \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

откуда

$$\frac{q}{p} : \frac{q^*}{p^*} = \left(\frac{q}{p}\right)_1 : \left(\frac{q^*}{p^*}\right)_1.$$

Сложное отношение четырёх точек (3с) *есть инвариант четырёх геометрических точек.*

§ 2. Сложное отношение четырёх прямых одного пучка

Определение 1. *Простым отношением трёх направленных прямых одного пучка* $(m_1m_2;\ m)$ с собственным центром называется отношение

$$(m_1m_2;\ m) = \frac{\sin(m_1m)}{\sin(mm_2)}. \tag{4}$$

Здесь символом (m_1m) обозначается угол, на который надо повернуть около общей точки в положительном направлении (против часовой стрелки) прямую m_1, чтобы её положительное направление совпало с положительным направлением прямой m (черт. 55).

Если изменить положительное направление вращения, то каждый угол изменится на дополнение до 2π, т. е. новый угол $(m_1m)^*$ связан со старым формулой

$$(m_1m)^* = 2\pi - (m_1m),$$

откуда

$$\sin(m_1m)^* = -\sin(m_1m).$$

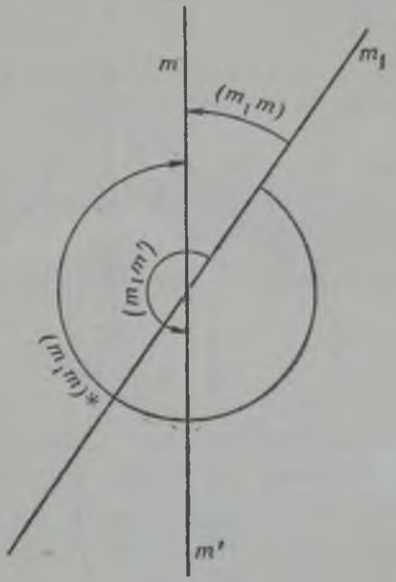
Отсюда, между прочим, следует, что вместо того чтобы поворачивать прямую m_1 в положительном направлении, можно поворачивать её в отрицательном, если при этом угол (m_1m), а значит, и его синус, брать с противоположным знаком.

Если изменить положительное направление прямой m, то угол (m_1m) увеличится на π:

$$(m_1m') = (m_1m) + \pi.$$

Следовательно,

$$\sin(m_1m') = -\sin(m_1m').$$



Черт. 55.

Так как числитель и знаменатель отношения (4) в обоих случаях меняют знак одновременно, то простое отношение не изменится.

Следствие 1. *Простое отношение трёх прямых одного пучка не зависит от выбора положительного направления вращения на плоскости или от выбора положительного направления на прямой m.*

Следствие 2. *Простое отношение $(m_1m_2;\ m)$ положительно, если прямая m проходит внутри положительного угла (m_1m_2)*, т. е. угла, описываемого положительным направлением прямой m_1, когда она поворачивается против часовой стрелки до совпадения с прямой m_2.

Определение 2. *Сложным отношением четырёх прямых* одного пучка $(m_1m_2;\ mm^*)$ с собственным центром называется отношение двух простых отношений $(m_1m_2;\ m)$ и $(m_1m_2;\ m^*)$:

$$(m_1m_2;\ mm^*) = \frac{\sin(m_1m)}{\sin(mm_2)} : \frac{\sin(m_1m^*)}{\sin(m^*m_2)}. \tag{5}$$

Следствие 1. *Сложное отношение четырёх прямых пучка не зависит от выбора положительного направления на этих прямых.*

Действительно, каждая прямая, например m_1, входит в формулу (5) два раза под видом $\sin(m_1m)$ и $\sin(m_1m^*)$. Каждый из этих синусов при изменении направления прямой m_1 меняет знак. При двух переменах знака сложное отношение знак сохранит.

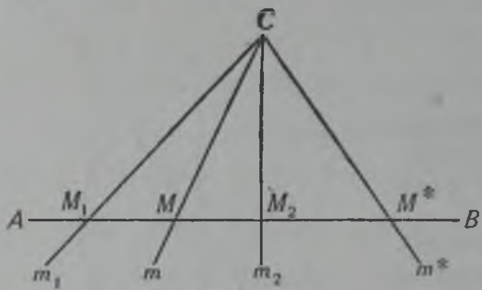
Следствие 2. *Сложное отношение четырёх прямых отрицательно, если прямые одной пары лежат в смежных углах, образованных прямыми другого. Оно положительно, если они лежат в одном и том же углу.*

Действительно, в первом случае два простых отношения имеют разные знаки, а во втором — один и тот же знак.

Замечание. В первом случае две пары *разделяют* друг друга, во втором — *не разделяют.*

О п р е д е л е н и е 3. Четыре прямых пучка *проектируют* четыре точки прямой, если каждая прямая проходит через соответствующую ей точку.

Теорема. *Сложное отношение четырёх точек одной прямой равно сложному отношению четырёх прямых проектирующего пучка.* Обозначим буквами M_1, M_2, M, M^* точки пересечения прямых m_1, m_2, m, m^* с произвольной прямой AB (черт. 56). Согласуем положительное вращение на плоскости с положительным направлением прямой AB так, чтобы угол (m_1m) был положительным, если положителен отрезок M_1M.



Черт. 56.

Треугольники M_1CM, MCM_2, M_1CM^*, M^*CM_2 имеют общую вершину в центре пучка C, а основания их расположены на одной прямой AB. Следовательно, высота у каждого треугольника — одна и та же, и площади их относятся, как основания:

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{\text{пл. } \triangle M_1CM}{\text{пл. } \triangle MCM_2}; \quad \frac{M_1M^*}{M^*M_2}=\frac{\text{пл. } \triangle M_1CM^*}{\text{пл. } \triangle M^*CM_2}.$$

С другой стороны, площадь каждого треугольника равна произведению двух сторон на синус угла между ними. Так как каждый угол, например

$$\angle M_1CM=(m_1m),$$

равен углу между прямыми пучка, то

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{M_1C}{M_2C}\cdot\frac{\sin(m_1m)}{\sin(mm_2)}, \quad \frac{M_1M^*}{M^*M_2}=\frac{M_1C}{M_2C}\cdot\frac{\sin(m_1m^*)}{\sin(m^*m_2)}.$$

Эти два равенства справедливы и по величине, и по знаку, если отношение $\frac{M_1C}{M_2C}$ считать положительным. Действительно, каждый угол при вершине треугольника меньше π, и знак его синуса зависит только от знака самого угла. Если принять за положительные те направления прямых m_1, m_2, m, m^*, которые идут от общей вершины треугольников к их основаниям, и каждый угол, например (m_1m), отсчитывать, поворачивая прямую m_1 так, чтобы она описывала $\angle M_1CM$ при вершине треугольника с учётом положительного или отрицательного направления, то, поскольку положительное направление прямой AB согласовано с положительным направлением вращения около вершины C, знак $\sin(m_1m)$ будет всегда совпадать со знаком отрезка M_1M.

Деля одно отношение на другое и сокращая множитель $\frac{M_1C}{M_2C}$, получим по величине и по знаку:

$$\frac{M_1M}{MM_2}:\frac{M_1M^*}{M^*M_2}=\frac{\sin(m_1m)}{\sin(mm_2)}:\frac{\sin(m_1m^*)}{\sin(m^*m_2)},$$

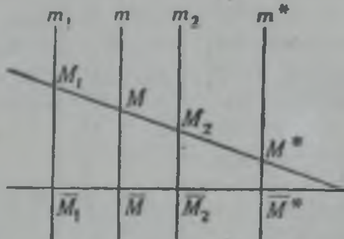
что и требуется доказать.

Теорема. *Четвёрка параллельных прямых высекает на каждой секущей четвёрку точек с одним и тем же сложным отношением.*

Действительно, параллельные прямые m_1, m_2, m, m^* делят стороны угла (а также параллельные прямые) на пропорциональные отрезки. Значит, каждое простое отношение равно своему соответствующему на второй секущей (черт. 56а):

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{\overline{M}_1\overline{M}}{\overline{M}\,\overline{M}_2},$$

следовательно, и сложные отношения равны.



Черт. 56а.

Определение 4. *Сложным отношением четырёх прямых пучка с несобственным центром* называется сложное отношение четвёрки точек, высекаемых ими на произвольной секущей.

Следствие. *Теорема о сохранении сложного отношения при проектировании распространяется на все прямые и все проектирующие пучки проективной плоскости.*

Понятие сложного отношения позволяет выяснить геометрический смысл проективных координат точки.

Пусть x^1, x^2, x^0 являются координатами точки M относительно координатного треугольника $A_1A_2A_0$ и точка E — точка единиц, т. е. та точка плоскости, все координаты которой равны единице. Следовательно,

$$M=x^1A_1+x^2A_2+x^0A_0,$$

$$E=A_1+A_2+A_0.$$

Спроектируем эти две точки из какой-нибудь вершины, например A_0, координатного треугольника на прямую A_1A_2. Так как отношение координат $x^1:x^2$ для всякой точки прямой, проходящей через вершину A_0, одно и то же, а для точки прямой A_1A_2 координата x_0 равна нулю, то за проекции точек M и E можно принять аналитические точки M_0 и E_0, определяемые формулами:

$$M_0=x^1A_1+x^2A_2,$$

$$E_0=A_1+A_2.$$

Сложное отношение четырёх точек A_1, A_2, M_0 и E_0 по формуле (3) равно отношению проективных координат точки M:

$$(A_1A_2;\ M_0E_0) = x^2 : x^1.$$

Отсюда следует:

Теорема. *Отношение проективных координат $x^2:x^1$ точки M равно сложному отношению пары вершин A_1, A_2 координатного треугольника и проекций точки M и точки единиц E из третьей вершины A_0 на сторону A_1A_2 координатного треугольника.*

§ 3. Гармоническая четвёрка

Определение. Если сложное отношение четырёх точек одной прямой M_1, M_2, M, M^* или четырёх лучей одного пучка m_1, m_2, m, m^* равно минус единице, то четвёрка элементов называется *гармонической*; говорят, что первая пара M_1, M_2 *гармонически разделяет* вторую M, M^*, или две пары образуют *гармоническую четвёрку*, или точка M *гармонически сопряжена* точке M^* относительно точек M_1 и M_2.

Так как

$$(M_1M_2;\ MM^*) = \frac{M_1M}{MM_2} : \frac{M_1M^*}{M^*M_2} = -1, \tag{5'}$$

то

$$\frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{M_1M^*}{M^*M_2}. \tag{5''}$$

Следовательно, точки M и M^* делят отрезок M_1M_2 в одном и том же (по абсолютной величине) отношении, но разного знака; если одна из них делит отрезок внутренним образом, то другая внешним. Этот факт можно высказать в виде предложения:

Следствие 1. *Две пары гармонической четвёрки разделяют друг друга.*

Например, середина M отрезка M_1M_2 делит его в отношении $\lambda = 1$; несобственная точка прямой M^* делит всякий отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda^* = -1$. Следовательно,

$$(M_1M_2;\ MM^*) = \lambda : \lambda^* = -1.$$

Следствие 2. *Всякий отрезок гармонически разделяется его серединой и несобственной точкой этой прямой.*

Следствие 3. *Две биссектрисы гармонически разделяют стороны угла.*

Пересечём стороны m_1, m_2 угла прямой, перпендикулярной к биссектрисе m (черт. 57). Если M_1, M_2, M — точки пересечения секущей с прямыми m_1, m_2, m и C — вершина угла, то треугольник M_1CM_2 — равнобедренный:

$$M_1C = M_2C,$$

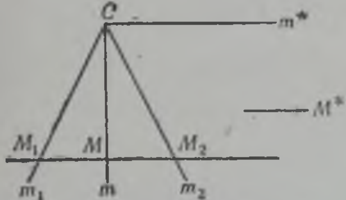
ибо по построению секущей M_1M_2 биссектриса m перпендикулярна к основанию. Так как биссектриса внешнего угла m^* параллельна основанию, то она пересекает его в несобственной точке M^*. Отсюда

$$(m_1 m_2;\ mm^*) = (M_1 M_2;\ MM^*) = -1,$$

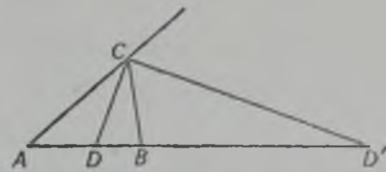
и четвёрка прямых m_1, m_2, m, m^* — гармоническая.

Следствие 4. *Точки пересечения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине треугольника с его основанием гармонически разделяют две вершины при основании треугольника.*

Действительно, боковые стороны AC, BC треугольника ABC и биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине DC, $D'C$ проектируют точки пересечения их с основанием A, B, D, D'



Черт. 57.



Черт. 58.

(черт. 58). Так как четвёрка прямых — гармоническая, то гармоническая и четвёрка точек A, B, D, D'.

Теорема. *Гармоническая четвёрка допускает не только перестановку двух пар точек, но и перестановку точек каждой пары в отдельности.*

Теорема вытекает из второго и третьего следствий § 1, если принять во внимание, что сложное отношение гармонической четвёрки равно -1 и, следовательно, обратная величина его тоже равна -1.

§ 4. Полярная сопряжённость точек относительно кривой второго порядка

Мы теперь возвращаемся к теории кривых второго порядка. Отнесём кривую к произвольному координатному треугольнику $A_1A_2A_0$ и рассмотрим пару точек на плоскости M и M^*.

Определение. *Пара точек* плоскости M и M^* *полярно сопряжена* относительно кривой второго порядка c^2, если точки M и M^* гармонически разделяют точки пересечения M_1, M_2 прямой MM^* с кривой c^2.

Пусть нам даны две точки $\boldsymbol{M}(X^1,\ X^2,\ X^0)$ и $\boldsymbol{M}^*(x_*^1,\ x_*^2,\ x_*^0)$. Произвольная точка $\mathscr{M}(x^1,\ x^2,\ x^0)$ прямой MM^* может быть представлена с помощью скаляра λ в виде линейной комбинации:

$$\mathscr{M} = \boldsymbol{M}^* + \lambda \boldsymbol{M}.$$

Каждая из трёх координат x^i точки $\mathscr{M}$ будет определяться по формуле:

$$x^i = x_*^i + \lambda X^i, \qquad (i = 1,\ 2,\ 0). \tag{6}$$

Если эта точка $\mathscr{M}$ прямой MM^* лежит на кривой c^2, то её координаты (6) удовлетворяют уравнению этой кривой:

$$\Phi(x^i) \equiv a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{00}(x^0)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{20}x^2x^0 + \\ + 2a_{10}x^1x^0 = 0. \qquad (7)$$

Вносим сюда значения x^i по формуле (6); мы получим квадратное уравнение относительно параметра λ:

$$\Phi(x^i_* + \lambda X^i) = a_{11}(x^1_* + \lambda X^1)^2 + a_{22}(x^2_* + \lambda X^2)^2 + a_{00}(x^0_* + \lambda X^0)^2 + \\ + 2a_{12}(x^1_* + \lambda X^1)(x^2_* + \lambda X^2) + 2a_{20}(x^2_* + \lambda X^2)(x^0_* + \lambda X^0) + \\ + 2a_{10}(x^1_* + \lambda X^1)(x^0_* + \lambda X^0) = 0, \qquad (8)$$

которое можно записать в виде:

$$P\lambda^2 + 2Q\lambda + R = 0. \qquad (8')$$

Два корня λ_1 и λ_2 этого уравнения будут определять две точки пересечения прямой MM^* с кривой c^2:

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}^* + \lambda_1 \boldsymbol{M},$$
$$\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}^* + \lambda_2 \boldsymbol{M}.$$

По формуле (3) сложное отношение этих четырёх точек равно

$$(M_1M_2;\ MM^*) = \lambda_1 : \lambda_2.$$

Следовательно, четвёрка точек M, M^*, M_1, M_2 — гармоническая, если

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1,$$

или

$$\lambda_1 = -\lambda_2,$$

или

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

По свойству корней квадратного уравнения:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2\frac{Q}{P}.$$

Следовательно, четвёрка M, M^*, M_1, M_2 — гармоническая, если

$$Q = 0.$$

З а м е ч а н и е. При выводе условия полярной сопряжённости точек M и M^* мы неявно предполагали, что корни λ_1 и λ_2 действительны и, следовательно, прямая MM^* пересекает кривую c^2 в двух действительных точках M_1 и M_2. В этом ограничении нет надобности. Существенно, чтобы сумма корней уравнения (8′) равнялась нулю. Если условие $Q = 0$ удовлетворено, мы будем называть четвёрку точек M, M^*, M_1, M_2 гармонической, пару точек M, M^* — полярно сопряжённой относительно кривой c^2, хотя бы точки M_1, M_2 были мнимы и прямая MM^* не встречала кривую c^2.

§ 5. Полярная форма

Обратимся к подсчёту коэффициентов P, Q, R уравнения (8′).

Чтобы получить свободный член R, достаточно положить в уравнении (8) параметр $\lambda = 0$; мы будем иметь:

$$R = \Phi(x_*^i) = a_{11}(x_*^1)^2 + a_{22}(x_*^2)^2 + a_{00}(x_*^0)^2 + 2a_{12}x_*^1x_*^2 + \\ + 2a_{20}x_*^2x_*^0 + 2a_{10}x_*^1x_*^0.$$

Аналогично, коэффициент P при λ^2 получится, если положить $x_*^i = 0$:

$$P = \Phi(X^i) = a_{11}(X^1)^2 + a_{22}(X^2)^2 + a_{00}(X^0)^2 + 2a_{12}X^1X^2 + \\ + 2a_{20}X^2X^0 + 2a_{10}X^1X^0.$$

Обращаемся к вычислению коэффициента при первой степени λ.

Нетрудно заметить, что уравнение (7) содержит члены только двух видов: члены с квадратом координаты $(x^i)^2$ и члены с удвоенным произведением $2x^ix^k$, где указатели i и k принимают значения 1, 2 или 0. После подстановки выражения (6) члены с квадратом координаты принимают вид, например:

$$a_{11}(x^1)^2 = a_{11}(x_*^1 + \lambda X^1)^2 = a_{11}\{(x_*^1)^2 + \underline{2\lambda x_*^1X^1} + \lambda^2(X^1)^2\};$$

а члены с произведением представятся в виде, например:

$$2a_{12}x^1x^2 = 2a_{12}(x_*^1 + \lambda X^1)\cdot(x_*^2 + \lambda X^2) = \\ = 2a_{12}[x_*^1x_*^2 + \underline{\lambda(x_*^1X^2 + x_*^2X^1)} + \lambda^2X^1X^2].$$

Выбирая отсюда члены с первой степенью λ (подчёркнуты), давая указателям i и k все значения 1, 2 и 0 и вынося 2λ за скобку, мы получим в скобках значение коэффициента Q. Он будет содержать члены вида:

$$a_{ii}x_*^iX^i + a_{ik}(x_*^iX^k + x_*^kX^i) \qquad \textit{не суммировать!}$$

Повторяя эти члены для значения i, $k = 1, 2, 0$, получим:

$$Q = a_{11}x_*^1X^1 + a_{22}x_*^2X^2 + a_{00}x_*^0X^0 + \\ + a_{12}(x_*^1X^2 + x_*^2X^1) + a_{20}(x_*^2X^0 + x_*^0X^2) + a_{10}(x_*^1X^0 + x_*^0X^1). \qquad (9)$$

Однородный многочлен носит название *формы*. Однородный многочлен второй степени называется квадратичной формой. Таким образом, левая часть уравнения кривой второго порядка есть квадратичная форма относительно трёх переменных x^1, x^2, x^0:

$$\Phi(x^i) = a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{00}(x^0)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{20}x^2x^0 + 2a_{10}x^1x^0.$$

Выражение (9) линейно и относительно переменных x_*^1, x_*^2, x_*^0 и относительно переменных X^1, X^2, X^0. Эта билинейная (т. е. дважды линейная) форма называется *полярной формой* от квадратичной формы $\Phi(x)$. Мы её будем обозначать той же буквой Φ с двумя сериями переменных:

$$\Phi(x_*^i;\ X^i) = a_{11}x_*^1X^1 + a_{22}x_*^2X^2 + a_{00}x_*^0X^0 + a_{12}(x_*^1X^2 + x_*^2X^1) +$$
$$+ a_{20}(x_*^2X^0 + x_*^0X^2) + a_{10}(x_*^1X^0 + x_*^0X^1). \tag{9'}$$

Правило составления полярной формы:

При составлении полярной формы $\Phi(x_*^i;\ X^i)$ для данной квадратичной формы $\Phi(x_*^i)$ *квадраты координат* $(x^i)^2$ *заменяются произведением одноимённых координат первой и второй точки* $x_*^iX^i$, *а удвоенные произведения* $2x^ix^k$ — *суммой произведений из координаты первой точки на координату второй, и наоборот:* $x_*^iX^k + x_*^kX^i$.

Этому правилу можно придать ещё другую форму. Соберём в выражении (9′) члены с переменными X^1, X^2, X^0 и вынесем их за скобки. Мы получим:

$$\Phi(x_*^i; X^i) = (a_{11}x_*^1 + a_{12}x_*^2 + a_{10}x_*^0)X^1 + (a_{21}x_*^1 + a_{22}x_*^2 + a_{20}x_*^0)X^2 +$$
$$+ (a_{01}x_*^1 + a_{02}x_*^2 + a_{00}x_*^0)X^0,$$
$$a_{ik} = a_{ki},$$

или:

$$\Phi(x_*^i;\ X^i) = \frac{1}{2}\Phi_1(x_*^i)X^1 + \frac{1}{2}\Phi_2(x_*^i)X^2 + \frac{1}{2}\Phi_0(x_*^i)X^0, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_*^i) &= 2(a_{11}x_*^1 + a_{12}x_*^2 + a_{10}x_*^0),\\ \Phi_2(x_*^i) &= 2(a_{21}x_*^1 + a_{22}x_*^2 + a_{20}x_*^0),\\ \Phi_0(x_*^i) &= 2(a_{01}x_*^1 + a_{02}x_*^2 + a_{00}x_*^0). \end{aligned} \tag{11}$$

Выражение $\Phi_k(x_*^i)$ называется *частной производной* от формы $\Phi(x^i)$ по переменной x^k.

При составлении частной производной по переменной x^k коэффициенты сохраняются без изменения, квадрат $(x^k)^2$ заменяется удвоенной переменной $2x^k$, первая степень её x^k заменяется единицей, а члены, не содержащие x^k, выбрасываются.

Пользуясь введёнными обозначениями, мы можем записать уравнение (8′) в виде:

$$\Phi(X^i)\lambda^2 + 2\Phi(x_*^i;\ X^i)\lambda + \Phi(x_*^i) = 0. \tag{12}$$

Для условия полярной сопряжённости пары точек мы получаем:

Теорема. *Две точки плоскости $M^*(x^i_*)$ и $M(X^i)$ полярно сопряжены относительно кривой второго порядка*

$$\Phi(x^i) = 0,$$

если координаты их обращают в нуль полярную форму:

$$\Phi(x^i_*;\ X^i) = 0. \tag{13}$$

§ 6. Поляра

Определение. *Полярой* точки M^* относительно кривой второго порядка c^2 называется геометрическое место точек, полярно сопряжённых точке M^*, которая называется *полюсом*.

Пусть нам дана кривая второго порядка c^2

$$\Phi(x) = 0$$

и некоторая точка плоскости $M^*(x^i_*)$. Точка $M(X^i)$ — полярно сопряжена точке M^*, если координаты её удовлетворяют условию (13).

Следовательно, геометрическое место точек, полярно сопряжённых точке M^*, определяется уравнением (13), где X^i надо рассматривать как текущие координаты. Если воспользоваться формулой (10), то уравнение поляры примет вид:

$$\Phi_1(x_*)X^1 + \Phi_2(x_*)X^2 + \Phi_0(x_*)X^0 = 0. \tag{14}$$

Это уравнение первой степени относительно текущих координат X^i; следовательно, имеем:

Теорема. *Поляра произвольной точки плоскости относительно кривой второго порядка — прямая линия.*

Теорема взаимности. *Если из двух пар полюсов и поляр кривой первый полюс лежит на второй поляре, то первая поляра проходит через второй полюс.*

Действительно, если точка A лежит на поляре точки B, то она полярно сопряжена ей, ибо поляра точки B есть геометрическое место точек, полярно сопряжённых точке B. Свойство полярной сопряжённости точек — взаимное: если точка A сопряжена точке B, то и точка B сопряжена точке A. Между тем все точки, полярно сопряжённые точке A, лежат на её поляре. Следовательно, на этой поляре поместится и точка B.

Аналитически это вытекает из симметрии полярной формы относительно двух серий переменных x^i_* и X^i. Нетрудно проверить, что правая часть формулы (9′) не изменится, если везде вместо x^i_* поставить X^i, и наоборот. Следовательно,

$$\Phi(x_*;\ X) \equiv \Phi(X;\ x_*). \tag{15}$$

Между тем условие, что точка $A(X^1_*, X^2_*, X^0_*)$ лежит на поляре

$$\Phi(x_*;\ X) = 0 \tag{a}$$

точки $B(x_*^1,\ x_*^2,\ x_*^0)$, получается подстановкой координат X_*^i точки A в уравнение поляры (a) вместо текущих координат X^i:

$$\Phi(x_*;\ X_*) = 0, \tag{a$'$}$$

а условие, что точка B лежит на поляре точки A

$$\Phi(X_*;\ x) = 0, \tag{b}$$

получится, если в уравнение (b) подставить координаты точки $B(x_*^i)$:

$$\Phi(X_*;\ x_*) = 0. \tag{b$'$}$$

В силу формулы (15) оба условия (a′) и (b′) совпадают, что и доказывает теорему.

Следствие. *Если полюс M пробегает прямую линию a, то его поляра m вращается около полюса A прямой a.*

§ 7. Касательная

Понятие полярной сопряжённости пары точек M, M^* мы распространили и на тот случай, когда прямая MM^* не пересекает кривую c^2. Общие точки M_1, M_2 прямой MM^* и кривой c^2 в этом случае мнимы, а уравнение (8′) имеет комплексные корни λ_1, λ_2. Однако, если $\lambda_1+\lambda_2=0$, то мы условились (§ 4) говорить, что четвёрка точек M, M^*, M_1, M_2 — гармоническая, а пара действительных точек M, M^* — полярно сопряжена.

Мы теперь сделаем ещё одно обобщение понятия полярной сопряжённости пары точек, распространяя его и на тот случай, когда одна из точек, например M^*, лежит на самой кривой. При этом мы примем за о п р е д е л е н и е: *пара точек M, M^* полярно сопряжена, если координаты их обращают в нуль полярную форму* (13).

Теорема 1. *Точки кривой c^2 и только точки кривой сами себе сопряжены относительно этой кривой.*

Действительно, если в условие сопряжённости точек $M(X^i)$ и $M^*(x_*^i)$

$$\Phi(x_*;\ X) = 0$$

внести значения

$$X^i = x_*^i,$$

то мы получим уравнение (7) самой кривой c^2:

$$\Phi(x_*) = 0,$$

надо только воспользоваться формулой (9′), которая после замены $X^i = x_*^i$ прямо приведёт к равенству:

$$\Phi(x_*;\ x_*) = \Phi(x_*). \tag{9*}$$

Теорема 2. *Геометрическое место точек, полярно сопряжённых относительно кривой c^2 точке, принадлежащей этой кривой, является касательной, проведённой к кривой c^2 в этой точке.*

Пусть M и M^* полярно сопряжены относительно кривой c^2, и M^* лежит на кривой c^2:

$$\Phi(x_*;\ X) = 0,\ \Phi(x_*) = 0. \tag{a}$$

Точка пересечения прямой MM^* с кривой c^2

$$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{M}^* + \lambda_i \boldsymbol{M} \tag{b}$$

определяется из уравнения (12):

$$\Phi(X)\lambda^2 + 2\Phi(x_*;\ X)\lambda + \Phi(x_*) = 0.$$

Внося сюда значения (a), получаем:

$$\Phi(X)\lambda^2 = 0.$$

Так как $\Phi(X) \neq 0$, если точка M не лежит на кривой, то оба корня λ равны нулю, и прямая MM^* пересекает кривую c^2 в двух совпадающих точках. Внося

$$\lambda = 0$$

в формулу (b), имеем:

$$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{M}^*.$$

Мы знаем, что геометрическое место точек, полярно сопряжённых одной точке M^*, есть прямая линия — поляра точки M^*. Мы теперь видим, что эта прямая, т. е. прямая, соединяющая точку M^* с какой-нибудь её полярно сопряжённой точкой M, пересекает кривую c^2 в двух совпадающих точках, следовательно, является касательной к кривой c^2, и точка касания этой касательной есть точка M^*, ибо это единственная точка прямой, общая с кривой c^2.

Мы можем высказать эту теорему ещё в другой форме:

Следствие. *Если полюс лежит на кривой, то поляра становится касательной к кривой с точкой касания в полюсе.*

Теорема 3. *Из всех прямых плоскости только касательные к кривой c^2 проходят через свои собственные полюсы.*

Действительно, если поляра точки $M^*(x_*)$

$$\Phi(x_*,\ X) = 0$$

проходит через свой полюс, то её уравнение удовлетворяется координатами полюса $X_*^i = x_*^i$:

$$\Phi(x_*;\ x_*) = 0.$$

Следовательно, полюс M^* самосопряжён и лежит на кривой, а его поляра касается кривой.

Пример. Найти касательную к кривой

$$4x^2 - 2xy + y^2 - 4x + y = 0$$

в точке $A(1,0)$.

Нетрудно проверить, что точка A лежит на кривой: её координаты удовлетворяют уравнению кривой.

В однородных координатах уравнение кривой принимает вид:

$$4(x^1)^2 - 2x^1x^2 + (x^2)^2 - 4x^1x^0 + x^2x_0 = 0.$$

Отсюда частные производные по x^1, x^2 и x^0 равны:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(x) = 8x^1 - 2x^2 - 4x^0, && \Phi_1(1, 0, 1) = 4, \\ &\Phi_2(x) = -2x^1 + 2x^2 + x^0, && \Phi_2(1, 0, 1) = -1, \\ &\Phi_0(x) = -4x^1 + x^2, && \Phi_0(1, 0, 1) = -4. \end{aligned}$$

В последнем столбце стоят значения этих производных в точке A с однородными координатами $x^1 = 1$, $x^2 = 0$, $x^0 = 1$. Следовательно, по формуле (14) уравнение поляры точки A принимает вид:

$$4X^1 - X^2 - 4X^0 = 0.$$

Так как полюс A лежит на кривой, то поляра — касательная.

§ 8. Поляры внешних и внутренних точек

Все точки плоскости, кроме точек самой кривой c^2, делятся по отношению к этой кривой на точки внешние и внутренние.

Определение. Точка, не лежащая на кривой второго порядка, называется *внешней* точкой, если через неё проходит касательная к кривой. Точка называется *внутренней*, если через неё не проходит касательной к кривой.

Теорема. *Поляра внешней точки пересекает кривую.*

Пусть A — внешняя точка относительно кривой второго порядка c^2, AB — касательная, проходящая через точку A, и B — её точка касания.

Так как касательная AB есть поляра своей точки касания B и проходит через точку A, то по теореме взаимности поляра точки A пройдёт через точку B. Эта поляра не будет касательной, ибо её полюс A не лежит на кривой c^2, а так как она имеет с кривой общую точку B, то должна пересекать её, что и требовалось доказать.

Теорема. *Из внешней точки можно провести к кривой две касательные. Поляра точки есть хорда прикосновения их.*

Поскольку поляра внешней точки A пересекает кривую c^2 и одна из точек пересечения B действительна и не совпадает со второй, то должна существовать вторая точка пересечения C. Поляра точки C касается кривой в точке C, ибо точка C есть точка кривой; вместе с тем она проходит через точку A, ибо её полюс C лежит на поляре точки A. Таким образом, через точку A проходят две касательные к кривой AB и AC. Больше не может быть, ибо по доказанному точки касания должны лежать на поляре точки A, а эта прямая пересекает кривую в двух точках.

Следствие. Поляра внутренней точки не пересекает кривую. Действительно, если бы прямая a пересекала кривую, то касательные к кривой в точках пересечения проходили бы через полюс прямой a, который тем самым стал бы внешней точкой для кривой.

§ 9. Полярно сопряжённая пара прямых

Мы имеем два признака полярной сопряжённости пары точек:

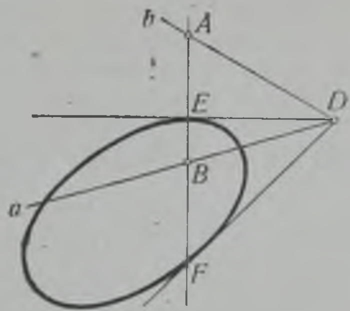
1) пара точек M, M^* полярно сопряжена относительно кривой c^2, если они разделяют гармонически две точки пересечения прямой MM^* с кривой c^2;

2) точки M, M^* полярно сопряжены, если каждая из них лежит на поляре другой (достаточно, чтобы одна лежала на поляре другой, а вторая будет лежать по теореме взаимности).

Второе определение непосредственно распространяется на прямые.

Определение. *Пара прямых a и b полярно сопряжена* относительно кривой c^2, если каждая из них проходит через полюс другой.

Достаточно, чтобы одна проходила через полюс второй, тогда по теореме взаимности и вторая пройдёт через полюс первой.



Черт. 59.

Если прямые a и b пересекаются во внешней точке, то для них имеет место теорема, аналогичная первому определению полярной сопряжённости точек.

***Теорема.** Пара полярно сопряжённых прямых, пересекающихся во внешней точке, гармонически разделяет две касательные, проведённые к кривой из этой точки.*

Пусть D—какая-то внешняя точка относительно кривой c^2 (черт. 59). Пусть её поляра пересекает кривую c^2 в точках E и F; тогда DE и DF будут служить касательными, проведёнными к кривой из точки D. Допустим, что две полярно сопряжённые прямые a и b, проведённые из точки D, пересекают её поляру EF в точках B (прямая a) и A (прямая b).

По определению полярной сопряжённости каждая из прямых a, b несёт на себе полюс другой. Так как обе прямые проходят через точку D, то полюсы их должны лежать на поляре точки D, т. е. на прямой EF. Отсюда следует, что полюс прямой a должен лежать в точке пересечения прямой b с прямой EF, т. е. в точке A. Аналогично точка B служит полюсом прямой b. Так как полюс сопряжён со всеми точками своей поляры, то точки A и B полярно сопряжены и четвёрка точек A, B, E, F—гармоническая:

$$(AB;\ EF) = -1.$$

Сложное отношение четвёрки проектирующих прямых DA, DB, DE, DF тоже равно минус единице:

$$(DA,\ DB;\ DE,\ DF) = -1.$$

Следовательно, эти прямые образуют гармоническую четвёрку, что и доказывает теорему.

§ 10. Вырождение полярного соответствия

До сих пор мы неявно предполагали, что каждой точке плоскости соответствует одна определённая поляра. Рассмотрим теперь вырождение полярного соответствия, когда существует точка, для которой поляра неопределённа.

Допустим, что поляра точки $M^*(x_*^i)$ неопределённа. Тогда в уравнении поляры (14) все три коэффициента при текущих координатах X^i должны обращаться в нуль:

$$\Phi_1(x_*) = 0, \quad \Phi_2(x_*) = 0, \quad \Phi_0(x_*) = 0,$$

или, если воспользоваться формулами (11):

$$\begin{aligned} a_{11}x_*^1 + a_{12}x_*^2 + a_{10}x_*^0 &= 0, \\ a_{21}x_*^1 + a_{22}x_*^2 + a_{20}x_*^0 &= 0, \\ a_{01}x_*^1 + a_{02}x_*^2 + a_{00}x_*^0 &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Система трёх однородных уравнений с тремя неизвестными вообще имеет только нулевые решения, но значения $x_*^1 = 0$, $x_*^2 = 0$, $x_*^0 = 0$ не определяют точки на проективной плоскости. Система (16) допускает ненулевые решения, если определитель системы

$$\mathscr{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix}, \tag{17}$$

который мы будем называть *дискриминантом уравнения кривой*, равен нулю:

$$\mathscr{D} = 0. \tag{17'}$$

При этом условии существует точка $M^*(x_*^i)$, поляра которой неопределённа, иначе говоря — точка, полярно сопряжённая со всякой точкой плоскости. Мы будем говорить, что полярное соответствие вырождается, а точку M^* с неопределённой полярой будем называть *особой точкой* полярного соответствия. Имеем:

Теорема 1. *Полярное соответствие кривой вырождается, если дискриминант её уравнения равен нулю.*

Теорема 2. *Особая точка полярного соответствия всегда принадлежит кривой.*

Так как особая точка полярного соответствия полярно сопряжена со всякой точкой плоскости, то она сопряжена и сама с собой, а самосопряжённая точка принадлежит кривой (§ 7, теорема 1).

То же самое мы получим как следствие системы (16).

Из формулы (9′), если туда внести $X^i = x_*^i$, следует:

$$\Phi(x_*;\ x_*) = \Phi(x_*),$$

а так как

$$\Phi(x_*;\ X) = \frac{1}{2}\Phi_1(x_*)X^1 + \frac{1}{2}\Phi_2(x_*)X^2 + \frac{1}{2}\Phi_0(x_*)X^0,$$

то

$$2\Phi(x^*) = x_*^1\Phi_1(x^*) + x_*^2\Phi_2(x^*) + x_*^0\Phi_0(x^*). \tag{18}$$

Значит, если координаты точки M^* удовлетворяют (16), то они обращают в нуль и уравнение кривой, что и требовалось доказать.

Будем предполагать, что ранг определителя $\mathscr{D}$ равен двум, т. е. сам определитель равен нулю, но не все миноры второго порядка равны нулю. Тогда система (16) содержит два независимых уравнения и вполне определяет отношение координат $x_*^1 : x_*^2 : x_*^0$, т. е. одну точку M^* на проективной плоскости. Имеем:

Теорема 3. *Если ранг дискриминанта $\mathscr{D}$ равен двум, то полярное соответствие допускает одну и только одну особую точку.*

Пусть теперь точка $M(X_i)$ — какая-то точка плоскости, не лежащая на кривой c^2. Мы знаем, что прямая MM^* пересекает кривую в точках

$$M_i = M^* + \lambda_i M,$$

где λ определяется из уравнения (12) § 5:

$$\Phi(X)\lambda^2 + 2\Phi(x_*;\ X)\lambda + \Phi(x_*) = 0.$$

В силу уравнений (16) оно теперь принимает вид:

$$\Phi(X)\lambda^2 = 0,$$

откуда, так как $\Phi(X) \neq 0$, имеем два корня $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Всякая прямая M^*M, проходящая через особую точку M^*, имеет с кривой c^2 только одну общую точку M^*, если хотя бы одна точка M этой прямой не принадлежит кривой c^2.

Отсюда следует, что прямая M^*M вся принадлежит кривой, если найдётся на плоскости точка M, принадлежащая кривой. Это видно и из уравнения (12), где теперь все три коэффициента обращаются в нуль и λ становится неопределённым. Возможны два случая:

1. Кривая c^2, кроме особой точки полярного соответствия M^*, имеет ещё хотя бы одну точку A; тогда по доказанному вся прямая AM^* принадлежит кривой. Этого мало: так как поляра точки A проходит через эту точку, поскольку точка A принадлежит кривой c^2, и проходит через точку M^*, которая полярно сопряжена со всякой

точкой плоскости, в том числе и с точкой A, то она совпадает с прямой AM^*. Значит, в пучке прямых с центром в точке A прямую AM^* следует рассматривать как касательную. Все остальные прямые пучка пересекают кривую c^2 в точке A, следовательно, должны иметь с ней ещё одну общую точку. Если B — одна из этих точек, то, поскольку она принадлежит кривой c^2, вся прямая BM^* принадлежит кривой, и кривая c^2 распадается на пару прямых AM^* и BM^*.

2. Кривая c^2, кроме точки M^*, не имеет ни одной точки, т. е. вся состоит только из одной действительной точки. Если поместить вершину координатного треугольника $A_0(0, 0, 1)$ в точку M^*, то уравнения (16) должны удовлетворяться значениями $x^1_* = 0$, $x^2_* = 0$, $x^0_* = 1$. Внося туда эти значения, мы немедленно получим:

$$a_{10} = 0, \quad a_{20} = 0, \quad a_{00} = 0,$$

и уравнение кривой c^2 примет вид:

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}(x^1)(x^2) + a_{22}(x^2)^2 = 0. \tag{19}$$

Левая часть уравнения (19) разлагается на два множителя первой степени, но теперь эти множители должны иметь мнимые коэффициенты, ибо кривая c^2 имеет только одну точку и её уравнение (19) имеет корнями только одну пару действительных чисел $x^1 = 0$, $x^2 = 0$. Говорят, что кривая c^2 распадается на пару мнимых прямых с одной действительной точкой, точкой их пересечения (см. § 6, гл. VII).

Имеем теорему:

Теорема 4. *Если полярное соответствие кривой c^2 вырождается и ранг дискриминанта $\mathcal{D}$ равен двум, то кривая c^2 распадается на пару прямых действительных или мнимых с действительной общей точкой в особой точке полярного соответствия.*

Справедлива и обратная теорема:

Теорема 5. *Если кривая c^2 распадается на пару действительных или мнимых прямых, то дискриминант её уравнения $\mathcal{D}$ равен нулю и полярное соответствие вырождается с особой точкой в точке пересечения пары прямых c^2.*

Достаточно отнести кривую к координатному треугольнику с одной вершиной A_0 в точке пересечения пары прямых c^2, чтобы получить уравнение (19):

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 = 0,$$

из которого всё и будет следовать, а именно: определитель $\mathcal{D} = 0$, ибо все элементы последнего столбца равны нулю; ранг его равен двум, ибо первый минор не равен нулю; наконец, система (16) удовлетворяется значениями $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^0 = 1$, т. е. особой точкой является вершина A_0. Преобразование координат не меняет ранг дискриминанта $\mathcal{D}$, ибо ранг $\mathcal{D}$ равен числу независимых уравнений системы (16), т. е. степени произвола решения системы, а произвол решения не может меняться при преобразовании координат.

§ 11. Вырождение полярного соответствия с понижением ранга дискриминанта $\mathscr{D}$ до единицы

Допустим, что ранг дискриминанта $\mathscr{D}$ равен единице; следовательно, система (16) содержит только одно независимое уравнение, два других являются его следствиями.

Одно однородное уравнение первой степени определяет прямую. Следовательно, геометрическое место особых точек — особая прямая (прямолинейный ряд точек). Так как особая точка полярного соответствия всегда принадлежит кривой, то особая прямая входит в состав кривой c^2.

Нетрудно заметить, что кривая не будет больше содержать ни одной точки. Действительно, если бы ещё одна точка плоскости M принадлежала кривой c^2, то, соединяя точку M с любой точкой M^* особой прямой, мы обнаружили бы, что уравнение (12), определяющее точки пересечения прямой MM^* с кривой c^2, обращается в тождество и прямая MM^* принадлежит кривой. Так как точка M^* при этом может совпадать с любой точкой особой прямой, то весь пучок прямых с центром в точке M принадлежал бы кривой c^2, что, очевидно, невозможно.

Теорема. *Если ранг дискриминанта $\mathscr{D}$ равен единице, то полярное соответствие вырождается; существует особая прямая, каждая точка которой обладает неопределённой полярой. Кривая c^2 состоит из дважды взятой особой прямой.*

Справедлива и обратная теорема. *Если кривая c^2 состоит из дважды взятой прямой, то ранг дискриминанта $\mathscr{D}$ равен единице.*

§ 12. Вырождение кривой второго порядка на расширенной плоскости

Если мы будем рассматривать кривую c^2 на расширенной плоскости, то надо будет различать случай собственной особой точки от случая несобственной особой точки.

При вырождении кривой с рангом дискриминанта $\mathscr{D}$, равным двум, мы попрежнему будем иметь кривую c^2, состоящую из пары пересекающихся, действительных или мнимых прямых. Если особая точка — собственная, эти пересекающиеся прямые и на эвклидовой плоскости останутся пересекающимися. Если особая точка — несобственная, то на эвклидовой плоскости мы будем иметь пару параллельных прямых.

Заметим, что после перенесения начала координат в особую точку полярного соответствия (что, конечно, возможно только, если эта точка — собственная) мы попрежнему получим уравнение кривой c^2 в виде уравнения (19). Так как однородные координаты x^1, x^2 пропорциональны абсциссе x и ординате y, то сохранятся только старшие члены уравнения. Дискриминант уравнения (19) совпадёт с дискриминантом старших членов, а от знака дискриминанта зависит разложение трёхчлена (19) на два действительных или мнимых множителя первой степени.

Отсюда:

Теорема. *При обращении в нуль дискриминанта $\mathcal{D}$ гипербола распадается на пару действительных прямых, а эллипс — на пару мнимых прямых с одной действительной точкой пересечения.*

Для параболы $\Delta = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = 0$; если a_{11} (или a_{22}) — не нуль, то можно положить $a_{12} = ka_{11}$, $a_{22} = k^2a_{11}$ и уравнение

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{10} \\ ka_{11} & k^2a_{11} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix} \equiv -a_{11}(a_{20} - ka_{10})^2 = 0$$

даст $a_{20} = ka_{10}$. Первые два уравнения (16) будут линейно зависимы, а два последних примут вид

$$a_{11}(x_*^1 + kx_*^2) + a_{10}x_*^0 = 0,$$

$$a_{10}(x_*^1 + kx_*^2) + a_{00}x_*^0 = 0,$$

откуда $x_*^0 = 0$ и особая точка полярного соответствия — несобственная. Если же $a_{11} = a_{20} = 0$, то в силу $\Delta = 0$ и $a_{12} = 0$ и уравнение кривой

$$x^0(2a_{10}x^1 + 2a_{20}x^2 + a_{00}x^0) = 0$$

покажет, что кривая распадается на пару прямых, из которых первая ($x^0 = 0$) — не собственная.

Теорема. *При вырождении парабола распадается на пару собственных параллельных прямых или на пару прямых, состоящих из одной собственной прямой и другой несобственной.*

Если ранг дискриминанта $\mathcal{D}$ равен единице, то на расширенной плоскости возможны два случая: особая прямая полярного соответствия может быть собственной прямой или несобственной прямой.

Глава IX

АФФИННЫЕ СВОЙСТВА КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Проективные, аффинные и метрические свойства геометрических образов

В предыдущих главах мы много раз говорили о проективных, аффинных или метрических свойствах прямых линий. Сейчас, когда мы переходим от проективных к аффинным свойствам кривой второго порядка, будет целесообразно выяснить, на чём основано различие между ними. Заметим, что более подробно мы сможем остановиться на этом в главе VII* второй части, но уже сейчас легко обнаружить, что эти три точки зрения на геометрию тесно связаны с выбором той или другой системы координат.

Мы имеем три основные системы координат: декартову прямоугольную, аффинную и проективную.

Если нам заданы точки своими координатами, прямые или кривые — своими уравнениями относительно декартовой прямоугольной системы координат, то мы можем вычислить длины отрезков, углы между прямыми, площади фигур и т. д., пользуясь только координатами точек или коэффициентами уравнений относительно этих координат и не интересуясь вопросом, где именно на плоскости и как заданы начало и оси координат.

Если мы возьмём общую аффинную систему координат и будем предполагать, что нам даны координаты точек, уравнения линий относительно этой системы, но неизвестно, как выбрана сама аффинная система координат, т. е. неизвестно, какой длины координатные векторы, какой угол они образуют, то мы сразу заметим, что наши знания о свойствах фигур будут ограничены. Мы, например, не сумеем определить расстояние между двумя точками, ибо формула (8) § 5, гл. II, дающая это расстояние в аффинной системе координат, содержит, кроме координат пары точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, ещё квадраты координатных векторов и их скалярное произведение. Следовательно, при одном задании координат расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ будет различно в зависимости от выбора координатных векторов. Мы не можем определить угла между прямыми, даже угла между осями координат $x=0$ и $y=0$, ибо это прямо связано с величиной скалярного произведения $e_1 \cdot e_2$. Но мы можем отличить параллельные прямые от непараллельных. Сумеем вычислить простое отношение трёх точек на прямой, найти середину отрезка, различить эллипс, гиперболы и параболы.

Ещё более ограничатся наши сведения и поэтому станут более общими, если мы будем пользоваться проективными координатами относительно произвольного координатного треугольника при том же непременном условии, что проективные координаты точек, уравнения линий даны, а форма координатного треугольника, выбор его вершин неизвестны. Мы тогда не сумеем, например, отличить параллельные прямые, ибо всякая пара прямых будет пересекаться, а будет ли точка пересечения собственной или несобственной без знания координатного треугольника, нельзя определить.

Если вершины A_1 и A_2 — несобственные, то обращение третьей координаты x^0 в нуль характеризует несобственные точки, а при другом выборе вершин этот признак теряет силу.

Мы не сумеем вычислить простого отношения трёх точек на прямой M_1, M_2 и $M = pM_1 + qM_2$, ибо, кроме проективных координат p и q, надо знать третьи координаты x_1^0, x_2^0 точек M_1 и M_2 относительно какой-нибудь аффинной системы координат. Мы не сумеем отличить эллипс от гиперболы или параболы, ибо это связано с определением точек пересечения кривой с несобственной прямой, положение которой при произвольном выборе координатного треугольника не определено.

Мы сможем, однако, вычислить сложное отношение, значит — строить теорию поляр, исследовать вырождение кривых, определять касательные.

Все те свойства фигур, которые могут быть выражены через проективные координаты точек, независимо от выбора того или другого координатного треугольника, называются *проективными*. Поскольку аффинную систему координат можно рассматривать как специальный случай проективной, когда одна сторона координатного треугольника становится несобственной, все проективные свойства тем самым имеют место и в аффинной геометрии, но специально *аффинными* называются те свойства фигур, которые не принадлежат проективной геометрии и могут быть выражены посредством аффинных координат точек независимо от выбора аффинной системы координат. Наконец, *метрическими* называются все те свойства фигур, которые не являются аффинными и тем более проективными и могут быть представлены с помощью декартовых координат.

Совокупность проективных, аффинных или метрических свойств фигур образует проективную, аффинную или метрическую геометрию.

Так как аффинная система координат эквивалентна проективной относительно координатного треугольника с одной несобственной стороной, то все свойства кривых второго порядка относительно несобственной прямой являются аффинными. Поэтому рассмотренная выше классификация кривых по числу точек пересечения с несобственной прямой называется аффинной. Особенности вырождения линий второго порядка в зависимости от принадлежности к типу эллипса, гиперболы или параболы тоже принадлежат аффинной геометрии.

В этой главе мы систематически рассмотрим аффинные свойства полярного соответствия. С этой целью достаточно будет рассмотреть те образы, которые будут получаться, когда полюс или поляра станут несобственными.

§ 2. Центр кривой второго порядка

Определение. *Центром* кривой второго порядка называется полюс несобственной прямой.

Допустим, что несобственная прямая не проходит через свой полюс.

Так как полюс полярно сопряжён с каждой точкой поляры, то четвёрка точек: центр C, любая точка C^* несобственной прямой и две точки M_1, M_2 пересечения прямой CC^* с кривой c^2 образуют гармоническую четвёрку:

$$(CC^*;\ M_1M_2) = -1.$$

Среди этих четырёх точек одна C^* — несобственная; следовательно (следствие 2, § 3, гл. VIII), другая точка первой пары — центр C — есть середина отрезка M_1M_2. Так как при этом центр C — собственная точка плоскости, то имеем:

Теорема. Собственный центр кривой делит пополам каждую хорду, которая через него проходит.

Мы знаем, что полюс будет внешней точкой, внутренней или будет лежать на кривой c^2 в зависимости от того, пересекает ли поляра кривую c^2 или не пересекает, или касается кривой.

Так как несобственная прямая пересекает гиперболу, не пересекает эллипс и касается параболы, то центр гиперболы лежит вне гиперболы, центр эллипса внутри его, а центр параболы совпадает с точкой касания несобственной прямой.

Теорема. *Центр эллипса — внутренняя точка, центр гиперболы — внешняя, центр параболы совпадает с несобственной точкой параболы.*

Обратимся к определению координат центра. Отнесём кривую c^2 к произвольной аффинной системе координат и допустим, что поляра точки $M^*(x_*^i)$

$$\Phi_1(x_*)\,X^1 + \Phi_2(x_*)\,X^2 + \Phi_0(x_*)\,X^0 = 0 \tag{a}$$

есть несобственная прямая

$$X^0 = 0. \tag{b}$$

Так как уравнения (a) и (b) должны быть равносильны, то коэффициенты при X^1 и X^2 в уравнении (a) должны обращаться в нуль:

$$\Phi_1(x_*) = 0, \quad \Phi_2(x_*) = 0 \tag{1}$$

или, в силу формул (11) § 5, гл. VIII:

$$\begin{aligned} a_{11}x_*^1 + a_{12}x_*^2 + a_{10}x_*^0 &= 0, \\ a_{21}x_*^1 + a_{22}x_*^2 + a_{20}x_*^0 &= 0, \end{aligned} \tag{1$'$}$$

откуда

$$\frac{x_*^1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{22} & a_{20} \end{vmatrix}} = \frac{x_*^2}{\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{vmatrix}} = \frac{x_*^0}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{2}$$

Так как третья однородная координата пропорциональна дискриминанту старших членов, то мы снова получаем, что центр у параболы — несобственный. Полагая в уравнениях (1′) $x_*^0 = 0$, получим для отношения двух первых координат значения

$$x_*^2 : x_*^1 = -a_{11} : a_{12} = -a_{12} : a_{22}. \tag{3}$$

Равенство двух последних отношений следует из обращения в нуль дискриминанта старших членов:

$$a_{12}^2 = a_{11}a_{22} \quad \text{или} \quad a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22}.$$

Если дискриминант старших членов Δ не равен нулю, т. е. если мы имеем одну из *центральных* кривых (кривых с собственным центром) — эллипс или гиперболу, то из пропорций (2) получим неоднородные координаты центра:

$$x_0 = \frac{x_*^1}{x_*^0} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{10} \\ a_{22} & a_{20} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{x_*^2}{x_*^0} = \frac{\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{2$'$}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Уравнение кривой принимает особенно простой вид, если начало аффинной системы координат поместить в центре. В таком случае говорят, что к р и в а я о т н е с е н а к ц е н т р у.

Теорема. *Если кривая отнесена к центру, то уравнение кривой не содержит членов с первыми степенями неоднородных координат.*

Действительно, в этом случае уравнения (1′) удовлетворяются значениями:

$$x_*^1 = 0, \quad x_*^2 = 0, \quad x_*^0 \neq 0.$$

Внося эти значения x_*^i в уравнение (1′), получаем:

$$a_{10} = 0, \; a_{20} = 0.$$

Следовательно, уравнение (2) § 1, гл. VII, принимает вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{00} = 0.$$

Членов с первыми степенями x и y оно не содержит.

Точно так же формулы (1′) покажут нам, что центр параболы будет лежать в несобственной точке оси абсцисс и, следовательно,

$$x_*^1 \neq 0, \quad x_*^2 = 0, \quad x_*^0 = 0,$$

если

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0.$$

При этом уравнение (2) § 1, гл. VII, принимает вид:

$$a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \tag{4}$$

Имеем:

Теорема. *Если ось абсцисс провести через несобственный центр параболы, то уравнение её определяет абсциссу через ординату рационально в виде квадратного трёхчлена.*

Заметим, наконец, что уравнения (1′) составляют первые два уравнения системы (16) (§ 10, гл. VIII), определяющей особую точку вырождающегося полярного соответствия. Так как при обращении дискриминанта $\mathscr{D}$ в нуль система (16) содержит только два независимых уравнения, то для кривой c^2, распадающейся на пару пересекающихся прямых, особая точка полярного соответствия — центр кривой.

Теорема. *Если кривая c^2 распадается на пару прямых, то центр кривой лежит в точке пересечения пары прямых c^2.*

§ 3. Кривые второго порядка с неопределённым центром

Центр кривой c^2 — неопределённый, если ранг системы (1′) равен единице, т. е. если коэффициенты обоих уравнений (1′) пропорциональны.

Так как одно однородное уравнение первой степени определяет прямую, то в случае неопределённости центра геометрическое место центров есть прямая (*линия центров*).

Поскольку все три определителя матрицы коэффициентов (2) теперь равны нулю, следовательно, и последний определитель — дискриминант старших членов — равен нулю, кривая c^2 — парабола, но это не будет произвольной параболой. Элементы двух первых строк дискриминанта $\mathscr{D}$ пропорциональны, и дискриминант обращается в нуль, т. е. кривая c^2 вырождается. Так как это — парабола, то она распадается на пару параллельных прямых (если ранг $\mathscr{D}$ равен двум) или на пару совпадающих прямых (если ранг $\mathscr{D}$ равен единице).

Имеем:

Теорема. *Кривая с неопределённым центром есть парабола, распадающаяся на пару параллельных прямых, которые могут совпадать.*

Так как центр делит пополам всякую хорду, которая проходит через него, а линия центров вся состоит из центров, то она делит пополам отрезок, отсекаемый на произвольной прямой парой параллельных прямых c^2. Значит, линия центров располагается между ними на равном расстоянии.

§ 4. Диаметр кривой второго порядка

Определение 1. *Диаметром* кривой второго порядка называется поляра несобственной точки.

Так как центр есть полюс несобственной прямой, то по теореме взаимности всякий диаметр должен проходить через центр.

Следствие 1. *Все диаметры проходят через центр и обратно; всякая прямая, проходящая через центр, есть диаметр.*

Можно сказать иначе, что все диаметры кривой c^2 образуют пучок с центром в центре кривой. Так как центр параболы — несобственная точка, то пучок диаметров параболы есть пучок с несобственным центром.

Следствие 2. *Несобственная прямая является диаметром параболы. Все остальные диаметры параболы параллельны между собой.*

Теорема. *Всякий собственный диаметр кривой есть геометрическое место середин параллельного пучка хорд, проходящих через полюс диаметра.*

Пусть несобственная точка A^* есть полюс диаметра a. Проведём через полюс A^* произвольную прямую b, и пусть она пересекает кривую c^2 в точках M_1, M_2, а диаметр a — в точке P (черт. 60).

Так как точка P лежит на поляре точки A^*, то эти точки — полярно сопряжены относительно кривой c^2 и, следовательно, четвёрка точек

$$(A^*P;\quad M_1M_2) = -1$$

гармоническая. Так как первая точка первой пары, точка A^*, несобственная, то вторая точка P делит пополам отрезок M_1M_2:

$$M_1P = PM_2,$$

что и доказывает теорему.

Определение 2. Хорда кривой c^2 *сопряжена* диаметру, если прямая, на которой она лежит, полярно сопряжена этому диаметру, т. е. проходит через его полюс.

Отсюда имеем следствие:

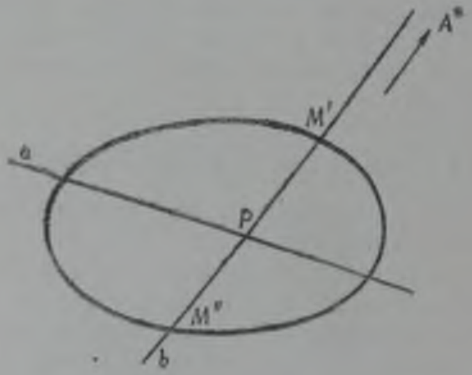
Следствие. *Всякий диаметр делит пополам сопряжённые ему хорды.*

Обратимся к составлению уравнения диаметра, сопряжённого хордам, с угловым коэффициентом k.

Как известно (§ 4, гл. V), угловым коэффициентом k прямой b

$$A_1x^1 + A_2x^2 + A_0x^0 = 0$$

в произвольной аффинной системе координат называется отношение



Черт 60.

коэффициентов при первых двух текущих координатах, взятое с обратным знаком:

$$k = -\frac{A_1}{A_2}.$$

В § 3, гл. VI, мы определили координаты несобственной точки A^* прямой b:

$$x_*^2 : x_*^1 = -\frac{A_1}{A_2}, \quad x_*^0 = 0.$$

Полагая $x_*^1 = 1$, если прямая b не параллельна оси ординат, мы можем принять координаты точки A^* равными

$$x_*^1 = 1, \quad x_*^2 = k, \quad x_*^0 = 0.$$

Так как хорда b сопряжена диаметру a и, следовательно, проходит через его полюс, то полюс этот должен совпадать с точкой A^*. С другой стороны, в силу симметрии полярной формы относительно двух серий координат, уравнение поляры (14) § 6, гл. VIII, можно написать в виде:

$$\Phi_1(X)x_*^1 + \Phi_2(X)x_*^2 + \Phi_0(X)x_*^0 = 0. \qquad (5)$$

Внося сюда координаты x_*^i точки A^*, получим уравнение искомого диаметра:

$$\Phi_1(X) + k\Phi_2(X) = 0 \tag{6}$$

или, в силу формулы (11) § 5, гл. VIII:

$$a_{11}X^1 + a_{12}X^2 + a_{10}X^0 + k(a_{21}X^1 + a_{22}X^2 + a_{20}X^0) = 0. \tag{6'}$$

§ 5. Сопряжённые диаметры

Определение. *Сопряжёнными диаметрами* кривой c^2 называются полярно сопряжённые диаметры. Каждый из них проходит через полюс другого. Соответствие пар сопряжённых диаметров называется *инволюцией* сопряжённых диаметров.

Начнём с рассмотрения произвольного пучка прямых.

Теорема. *Если кривая второго порядка c^2 не вырождается и центр пучка не лежит на кривой, то для каждой прямой пучка имеется одна и только одна полярно сопряжённая прямая пучка. Если центр пучка лежит на кривой c^2, то полярная сопряжённость прямых пучка вырождается: все прямые пучка полярно сопряжены касательной к кривой в центре пучка.*

Действительно, если центр пучка A не принадлежит кривой c^2 и какая-нибудь прямая b этого пучка имеет полюсом точку B (отличную от точки A, ибо поляра точки A не принадлежит пучку), то пучок содержит только одну прямую, полярно сопряжённую прямой b, именно прямую AB.

Если точка A принадлежит кривой, то её поляра a проходит через свой полюс A и является касательной к кривой c^2 в точке A. Эта поляра несёт на себе полюсы всех прямых пучка, следовательно, полярно сопряжена всем прямым пучка, в том числе и самой себе.

Мы видели, что при вырождении кривой c^2 в пару прямых центр её лежит в точке пересечения двух прямых пары, т. е. на самой кривой, но в этом случае полярное соответствие вырождается и теорема не имеет места. Из нераспадающихся кривых c^2 только у параболы центр лежит на самой кривой в несобственной точке.

Отсюда имеем следствия:

Следствие 1. *Каждому диаметру эллипса или гиперболы соответствует один, ему сопряжённый.*

Следствие 2. *Все диаметры параболы сопряжены несобственной прямой, которая сама является диаметром параболы.*

Заметим, что хотя все диаметры параболы имеют один и тот же сопряжённый диаметр (несобственную прямую), но сопряжённые хорды различных диаметров не параллельны между собой. Понятие параллельности не приложимо к несобственной прямой: поскольку она все прямые плоскости встречает в несобственных точках, она должна была бы быть параллельной всем прямым плоскости одновременно.

Теорема. *Если диаметр пересекает кривую, то касательные в концах диаметра параллельны его сопряжённому диаметру.*

Действительно, если диаметр пересекает кривую c^2, то его полюс — внешняя точка, а диаметр является хордой прикосновения двух касательных, проведённых к кривой из полюса. Так как касательные в концах диаметра проходят через его полюс, то они параллельны сопряжённому диаметру.

Для параболы эта теорема сохраняет силу, если параллельность сопряжённому диаметру (в силу неопределённости этого понятия) заменить параллельностью сопряжённым хордам диаметра.

В дальнейшем мы будем называть сопряжёнными направлениями направления сопряжённых диаметров, а для параболы — направления диаметра и сопряжённой ему хорды.

§ 6. Условие сопряжённости двух направлений k и $\tilde{k}$

Теорема. *Если диаметры a и b сопряжены, то и их полюсы A и B — полярно сопряжены, и наоборот.*

Действительно, в силу сопряжённости диаметр b проходит через полюс A, но полюс B сопряжён со всеми точками своей поляры, следовательно, и с точкой A.

Обратно, если полюсы A и B полярно сопряжены, то каждый диаметр a, содержа все точки, полярно сопряжённые своему полюсу A, должен пройти и через точку B, следовательно, будет сопряжён диаметру b.

Обращаемся к выводу условия сопряжённости.

Так как полюсы A и B наших диаметров полярно сопряжены, то координаты их $A(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^0)$ и $B(x^1, x^2, x^0)$ должны обращать в нуль полярную форму (9') (§ 5, гл. VIII), которая для несобственных точек A и B, т. е. при $x^0 = 0$, $\tilde{x}^0 = 0$, принимает вид:

$$a_{11}x^1\tilde{x}^1 + a_{12}(x^1\tilde{x}^2 + x^2\tilde{x}^1) + a_{22}x^2\tilde{x}^2 = 0. \tag{7}$$

Так как полюсы диаметров — несобственные точки, то A — несобственная точка диаметра b, а B — несобственная точка диаметра a. Если k и $\tilde{k}$ — угловые коэффициенты диаметров a и b, то, так же, как и ранее, получим координаты точек A и B:

$$\tilde{x}^1 = 1, \ \tilde{x}^2 = \tilde{k}, \ \tilde{x}^0 = 0; \quad x^1 = 1, \ x^2 = k, \ x^0 = 0.$$

Внося эти значения в уравнение (7), получим:

$$a_{11} + a_{12}(k + \tilde{k}) + a_{22}k\tilde{k} = 0. \tag{7'}$$

Имеем:

Теорема. *Угловые коэффициенты k и $\tilde{k}$ сопряжённых направлений удовлетворяют условию (7').*

Решая уравнение (7') относительно $\tilde{k}$, получим:

$$\tilde{k} = -\frac{a_{11} + a_{12}k}{a_{12} + a_{22}k}. \tag{7''}$$

Уравнение кривой c^2 упрощается, если оси координат сопряжены, т. е. координатные векторы e_1, e_2 аффинной системы координат параллельны паре сопряжённых диаметров. В таком случае говорят, что кривая отнесена к сопряжённым направлениям.

Следствие. *Если кривая отнесена к сопряжённым направлениям, то уравнение кривой не содержит члена с произведением текущих координат* x^1x^2.

Действительно, теперь полюсы A и B диаметров лежат на оси Oy и на оси Ox. Следовательно,

$$x^1 = 1,\ x^2 = 0,\ x^0 = 0;\ \tilde{x}^1 = 0,\ \tilde{x}^2 = 1,\ \tilde{x}^0 = 0.$$

Внося эти значения в формулу (7), немедленно получим:

$$a_{12} = 0.$$

Для параболы формула (7″) преобразуется. Так как дискриминант Δ равен нулю:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

то имеем пропорцию:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

откуда следует производная пропорция при любом k:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{11} + a_{12}k}{a_{12} + a_{22}k}.$$

Следовательно,

$$\tilde{k} = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

При любом угловом коэффициенте хорды получаем один и тот же угловой коэффициент диаметра.

Если же внести в формулу (7′) значение

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}},$$

то коэффициент при $\tilde{k}$ и свободный член обратятся в нуль, и $\tilde{k}$ становится неопределённым. Это вполне согласуется со следствием 2 § 5.

§ 7. Асимптоты

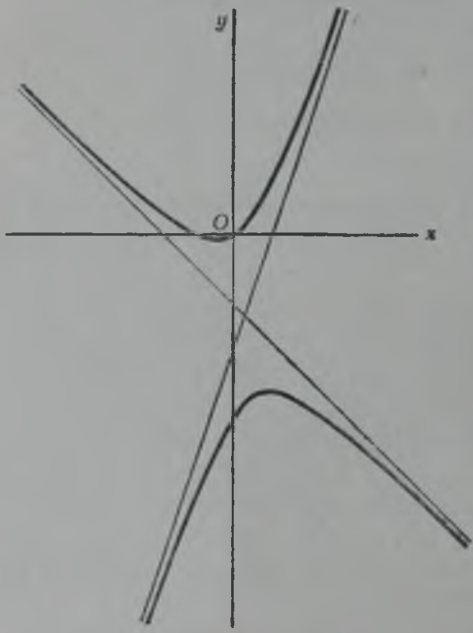
Определение. *Асимптотой* называется касательная к кривой второго порядка в несобственной точке.

Так как гипербола имеет две несобственные точки, то она имеет две асимптоты. Эллипс не имеет несобственных точек и не имеет асимптот. У параболы — одна несобственная точка и, следовательно, одна асимптота, но так как парабола касается несобственной прямой, то несобственная прямая плоскости и будет касательной к параболе в несобственной точке, т. е. единственной асимптотой параболы.

Имеем теорему:

Теорема. *Гипербола имеет две собственные асимптоты. Эллипс не имеет действительных асимптот. Парабола имеет только одну асимптоту, и этой асимптотой является несобственная прямая плоскости.*

Так как несобственная прямая является полярой центра, то касательные к кривой c^2 в точках её пересечения с несобственной прямой, т. е. асимптоты, проходят через центр.



Черт. 61.

Следовательно, асимптота всегда проходит через центр кривой, а потому является диаметром кривой.

Вместе с тем асимптота есть касательная, а касательная отличается от остальных прямых тем, что она проходит через собственный полюс (точка касания), а потому сама себе полярно сопряжена.

Имеем теорему:

Теорема. *Асимптота есть самосопряжённый диаметр кривой.*

Это вполне определяет асимптоту.

Обратимся к составлению уравнения асимптоты.

Прежде всего надо найти угловой коэффициент асимптоты. Так как асимптота сама себе сопряжена, то угловой коэффициент диаметра и угловой коэффициент сопряжённой хорды для неё совпадают:

$$\tilde{k} = k.$$

Внося это значение в условие сопряжённости (7'), получаем для углового коэффициента асимптоты квадратное уравнение:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0. \tag{8}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (4') § 5, гл. VII, которое определяло угловые коэффициенты прямых, несущих несобственные точки кривой.

Если дискриминант Δ отрицателен:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0,$$

т. е. кривая — гипербола, то уравнение (8) определяет два действительных корня k_1 и k_2, которые дают два асимптотических направления для двух асимптот гиперболы.

Так как k_1 и k_2 в то же время угловые коэффициенты сопряжённых хорд асимптот, то, внося их в уравнение сопряжённых диаметров (6′), получим уравнение асимптоты.

Пример. Найти асимптоты гиперболы

$$3x^2+2xy-y^2+2x-4y=0.$$

Асимптотические направления определяются из уравнения

$$3+2k-k^2=0,$$

откуда

$$k=1\pm\sqrt{1+3};\ k_1=3,\ k_2=-1.$$

Уравнение диаметра, сопряжённого хордам направления k, напишется в виде:

$$6x+2y+2+k(2x-2y-4)=0.$$

Внося $k_1=3$ и $k_2=-1$, получим две асимптоты (черт. 61):

$$y=3x-\frac{5}{2},$$

$$y=-x-\frac{3}{2}.$$

§ 8. Построение кривой по заданной паре асимптот

Теорема. Асимптоты гармонически разделяют каждую пару сопряжённых диаметров.

Действительно, в пучке диаметров, центром которого является центр кривой, асимптоты служат касательными к кривой.

Значит, наша теорема является специальным случаем теоремы § 9, гл. VIII, о гармонической четвёрке из двух касательных и пары полярно сопряжённых прямых одного пучка, если центр этого пучка выбрать в центре кривой.

Теорема. Если гиперболу и её две асимптоты пересечь произвольной прямой, не проходящей через центр, то два отрезка прямой между гиперболой и асимптотами равны между собой.

Если M_1 и M_2 — точки пересечения прямой с гиперболой, а P_1 и P_2 — с её асимптотами, то нам надо доказать, что

$$P_1M_1=M_2P_2.$$

Проведём диаметр CN^*, параллельный прямой M_1M_2, и диаметр CN, сопряжённый ей. Пусть N^* и N — точки пересечения их с прямой P_1P_2, точка N^*, конечно, — несобственная. Так как пара сопряжённых диаметров CN^*, CN и асимптоты CP_1, CP_2 образуют гармоническую четвёрку, то и точки пересечения их с нашей прямой гармонически сопряжены:

$$(N^*N;\ P_1P_2)=-1,$$

но одна из точек первой пары N^* — несобственная, значит, другая — середина отрезка P_1P_2, т. е.

$$P_1N=NP_2. \tag{a}$$

С другой стороны, так как CN — диаметр, сопряжённый хорде $M'M''$, то он делит её пополам:

$$M_1N = NM_2. \tag{b}$$

Вычитая из равенства (a) равенство (b), мы и получим:

$$P_1M_1 = M_2P_2.$$

Задача. *Даны две асимптоты и одна точка гиперболы. Построить её.*

Здесь идёт речь о построении гиперболы по точкам.

Пусть даны асимптоты a и b и точка O (черт. 62).

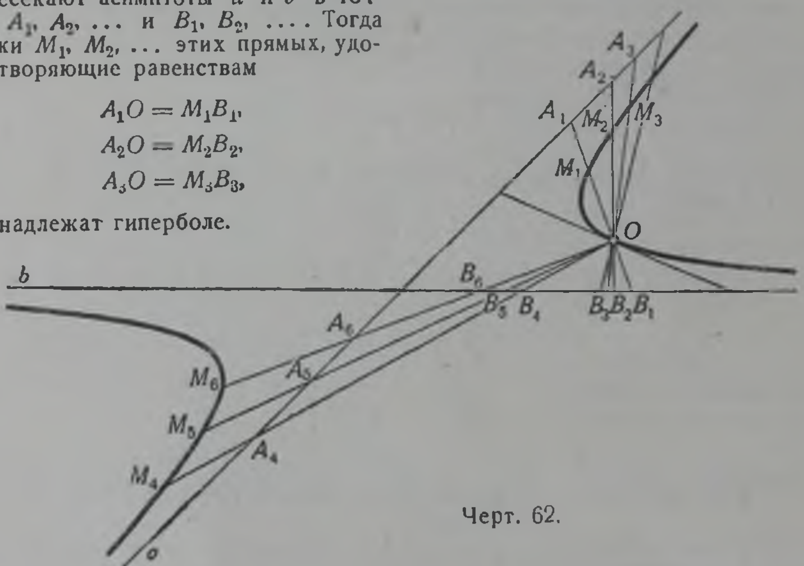
Проводим пучок прямых с центром в точке O. Пусть прямые пучка пересекают асимптоты a и b в точках A_1, A_2, ... и B_1, B_2, ... Тогда точки M_1, M_2, ... этих прямых, удовлетворяющие равенствам

$$A_1O = M_1B_1,$$

$$A_2O = M_2B_2,$$

$$A_3O = M_3B_3,$$

принадлежат гиперболе.



Черт. 62.

§ 9*. Пучок линий второго порядка

Теория пучка кривых второго порядка позволяет получить в готовом виде уравнение двух асимптот гиперболы.

Пучком (§ 7, гл. IV) называется совокупность линий, определяемая уравнением:

$$\Phi(x^i) + \lambda\Psi(x^i) = 0, \tag{9}$$

где Φ и Ψ — однородные многочлены одной степени от текущих координат x^1, x^2, x^0 и λ — произвольный параметр. Чтобы получить пучок линии второго порядка, надо взять Φ и Ψ в виде однородных многочленов второй степени.

Центры пучка определяются системой:

$$\Phi(x^i) = 0, \quad \Psi(x^i) = 0. \tag{10}$$

Исключая по правилам алгебры одну координату, например x^0, получим для двух других x^1 и x^2 однородное уравнение четвёртой степени.

Имеем:

Теорема 1. Пучок линий второго порядка имеет четыре центра.

Эти центры могут быть действительными все четыре (черт. 63 *a*) или только два (черт. 63 *b*), или все четыре могут быть мнимыми (черт. 63 *c*) — в зависимости от числа действительных корней уравнения четвёртой степени, получаемого после исключения x^0 из системы (10).

Если центры действительны, все линии пучка проходят через них.

Уравнение четвёртой степени, результат исключения x_0 из уравнений (10), может иметь кратные корни. В таком случае некоторые центры будут совпадать.

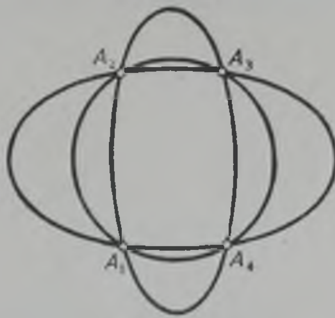
Теорема 2. Если пучок имеет двойной (двукратный) центр, то все кривые пучка имеют там общую касательную.

Действительно, если две кривые пучка

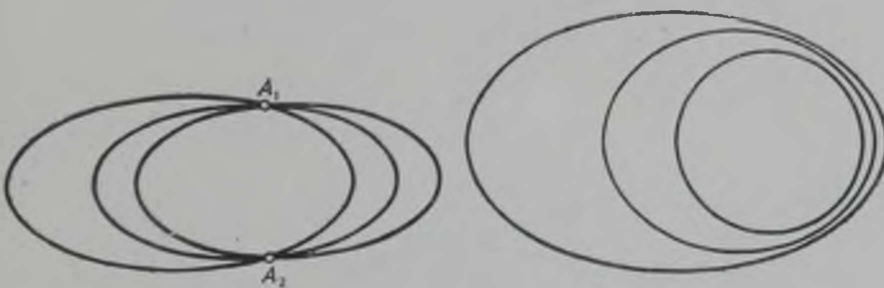
$$\Phi(x^i) = 0 \text{ и } \Psi(x^i) = 0$$

пересекаются в точках A и B, а в точке E имеют двукратную точку пересечения (черт. 64), то так же будут себя вести и любые две линии пучка (9):

$$\begin{aligned} \Phi(x^i) + \lambda_1 \Psi(x^i) = 0, \\ \Phi(x^i) + \lambda_2 \Psi(x^i) = 0, \end{aligned} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad (10')$$



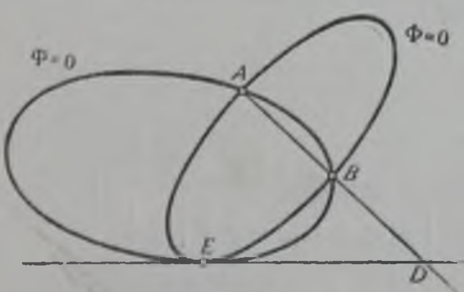
a



b *c*

Черт. 63.

ибо система (10') при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, очевидно, эквивалентна системе (10) и по исключении x^0 будет приводить к тому же самому уравнению четвёртой степени для координат x^1, x^2.

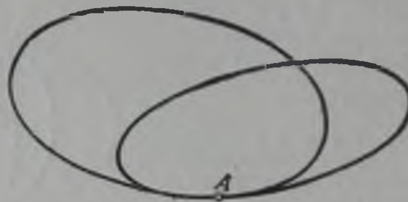


Черт. 64.

Обозначим буквой D точку пересечения касательной к кривой $\Phi(x^i) = 0$ в точке E с прямой AB (черт. 64) и определим параметр λ в уравнении (9) так, чтобы кривая c^2 пучка (9) проходила через точку D. Так как три точки кривой c^2, именно: A, B и D, лежат на прямой AB, то вся прямая AB входит в состав кривой c^2. Кривая c^2 распадается на пару прямых; вторая прямая этой пары должна проходить через точку E и иметь там с кривой $\Phi(x^i) = 0$ двукратную точку пересечения. Этому условию удовлетворяет прямая ED, касательная к кривой $\Phi(x^i) = 0$ в точке E, но она должна иметь в точке E двукратную точку пересечения и со всеми другими линиями пучка. Следовательно, все линии пучка имеют в точке E одну и ту же касательную ED.

Заметим, что существуют пучки, имеющие один простой центр и один тройной (черт. 65). Нас будет особенно интересовать тот случай, когда пучок имеет два двойных центра A и B. Тогда все кривые пучка проходят через точки A и B и имеют там общие касательные (см. черт. 68).

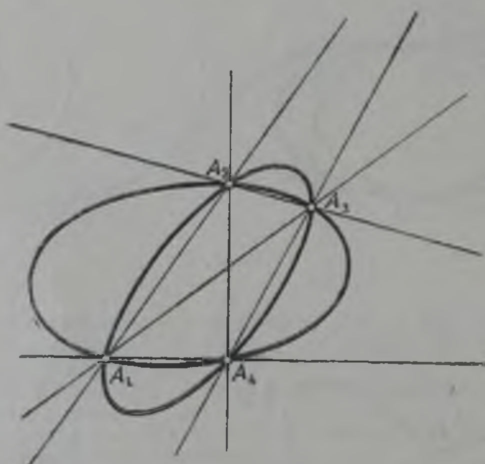
Теорема 3. *Среди линий пучка кривых второго порядка существуют три, распадающиеся на пару прямых. Две из них могут быть мнимы.*



Черт. 65.

Действительно, пусть уравнения линий базиса имеют вид:

$$\Phi(x^i) = a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + \ldots + a_{00}(x^0)^2,$$
$$\Psi(x^i) = b_{11}(x^1)^2 + 2b_{12}x^1x^2 + \ldots + b_{00}(x^0)^2.$$



Черт. 66.

Тогда уравнение произвольной кривой пучка будет:

$$\Psi + \lambda\Psi = (a_{11} + \lambda b_{11})(x^1)^2 + 2(a_{12} + \lambda b_{12})x^1x^2 + \ldots +$$
$$+ (a_{00} + \lambda b_{00})(x^0)^2.$$

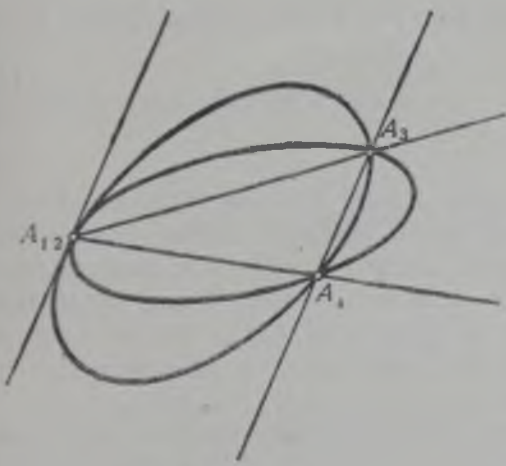
Чтобы эта линия распадалась на пару прямых, необходимо и достаточно обращение в нуль дискриминанта уравнения кривой:

$$\mathscr{D} = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{12} + \lambda b_{12} & a_{10} + \lambda b_{10} \\ a_{21} + \lambda b_{21} & a_{22} + \lambda b_{22} & a_{20} + \lambda b_{20} \\ a_{01} + \lambda b_{01} & a_{02} + \lambda b_{02} & a_{00} + \lambda b_{00} \end{vmatrix} = 0.$$

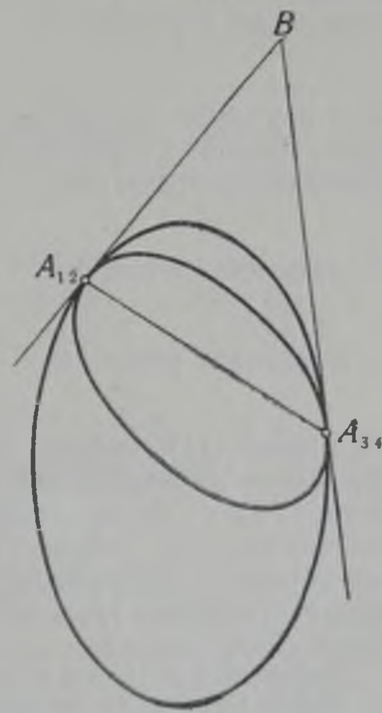
Это уравнение третьей степени относительно параметра λ. Три корня его соответствуют трём распадающимся кривым пучка. Один корень кубичного уравнения всегда действителен, два других могут быть мнимыми. Отсюда и вытекает теорема.

Если пучок имеет четыре действительных центра A_1, A_2, A_3, A_4 (черт. 66), то три распадающиеся линии пучка легко можно обнаружить, если иметь в виду, что каждая пара прямых должна по одному разу проходить через все четыре центра. Это будут пары прямых:

1) A_1A_2 и A_3A_4,
2) A_1A_3 и A_2A_4,
3) A_1A_4 и A_2A_3.



Черт. 67.



Черт. 68.

Если центры A_1 и A_2 совпадают, то прямая A_1A_2 обращается в касательную (черт. 67). Две последние пары прямых дают одну и ту же линию второго порядка, именно: пару прямых $A_{12}A_3$, $A_{12}A_4$. Всего получаем две распадающиеся линии, из которых вторая считается два раза:

1) касательная в точке A_{12} и прямая A_3A_4,
2) и 3) прямые $A_{12}A_3$ и $A_{12}A_4$.

Если, кроме того, центры A_2 и A_4 совпадают, то прямая A_3A_4 тоже обращается в касательную, а прямые A_1A_3, A_1A_4, совпадая, дают дважды взятую хорду (черт. 68). Всего имеется две распадающиеся линии, из которых вторая считается дважды:

1) касательные $A_{12}B$ в точке A_{12} и $A_{34}B$ в точке A_{34},
2) и 3) дважды взятая прямая $A_{12}A_{34}$.

§ 10*. Уравнение пары асимптот

Начнём с задачи:

Задача. *Составить уравнение пары касательных к кривой второго порядка*

$$\Phi(x^i) = 0,$$

проведённых из внешней точки B.

Поляра b внешней точки B пересекает кривую. Пусть A_1 и A_2 будут точки пересечения. Тогда A_1B и A_2B будут искомыми касательными.

Этот простой по идее способ решения требует вычисления координат точек A_1 и A_2, что может приводить к ненужным сложностям.

Составим уравнение пучка кривых второго порядка, касающихся кривой $\Phi(x^i)=0$ в точках A_1 и A_2. Одной линией базиса этого пучка будет сама кривая

$$\Phi(x^i)=0.$$

За вторую линию базиса можно принять распадающуюся кривую пучка, именно: дважды взятую прямую A_1A_2. Если поляра b точки B определяется уравнением

$$\varphi(x^i)=0,$$

то уравнение второй линии базиса будет $\varphi^2=0$ и уравнение пучка —

$$\Phi+\lambda\varphi^2=0. \tag{11}$$

Выписывая уравнение

$$\mathscr{D}=0$$

для кривой (11), получим уравнение первой степени относительно λ, ибо, кроме дважды взятой линии $\varphi=0$ (второй линии базиса), мы имеем только одну распадающуюся кривую пучка (11), именно пару касательных BA_1, BA_2 из точки B к нашей кривой. Внося единственный корень λ уравнения $\mathscr{D}=0$ в уравнение (11), мы и получим искомое уравнение пары касательных, проведённых из точки B.

Приложим этот метод к решению следующей задачи:

Задача. *Составить уравнение пары асимптот гиперболы, заданной в аффинной системе координат уравнением:*

$$\Phi(x^i)=0.$$

Эта задача составляет частный случай предыдущей, ибо асимптоты кривой суть касательные к кривой, проведённые из центра.

Внешняя точка B теперь будет центром кривой. Поляра точки B, как поляра центра, есть несобственная прямая. Её уравнение

$$x^0=0.$$

Значит, уравнение пучка (11) принимает вид:

$$\Phi(x^i)-\lambda(x^0)^2=0; \tag{11$'$}$$

знак минус перед λ взят, чтобы было удобнее писать дальнейшие формулы.

Уравнение $\mathscr{D}=0$ напишется теперь в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{12}$$

Если элементы последнего столбца представим в виде разностей $a_{10}-0$, $a_{20}-0$, $a_{00}-\lambda$, то определитель (12) можно представить в виде разности определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{01} & a_{02} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая второй определитель по элементам последнего столбца и пользуясь обозначениями (5) (§ 5, гл. VII) и (17) (§ 10, гл. VIII), получим:

$$\mathscr{D} - \lambda\Delta = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{\mathscr{D}}{\Delta},$$

ибо для гиперболы $\Delta < 0$.

Внося это значение λ в уравнение (11′), получим уравнение пары асимптот:

$$\Phi(x^i) - \frac{\mathscr{D}}{\Delta}(x^0)^2 = 0. \qquad (13)$$

Пример. Найти асимптоты кривой

$$x^2 + 2xy - 3y^2 + 2x - 4y = 0.$$

Выписывая уравнение (13) при $x^0 = 1$, получим:

$$x^2 + 2xy - 3y^2 + 2x - 4y - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = 0,$$

или:

$$x^2 + 2xy - 3y^2 + 2x - 4y - \frac{5}{4} = 0.$$

Это уравнение и определяет пару асимптот. Определяя отсюда одну из координат, например x, получим:

$$x = -(y+1) \pm \sqrt{(y+1)^2 + 3y^2 + 4y + \frac{5}{4}},$$

откуда два решения

$$x = y + \frac{1}{2}, \quad x = -3y - \frac{5}{2}$$

суть уравнения двух асимптот кривой.

Глава X

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Главные направления

В силу рассуждений, которые мы приводим (в § 1, гл. IX), метрические свойства кривой c^2 изучаются в декартовой прямоугольной системе координат. Это прежде всего относится к определению длин отрезков и величин углов и всего, что с ними связано, ибо прямоугольная декартова система координат получается из аффинной, если задать длины координатных векторов (единичных) и угол между ними $\left(\text{координатный угол } \omega = \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому первый вопрос, который мы здесь ставим, относится к перпендикулярности сопряжённых направлений.

Определение. *Главными направлениями* называются направления, одновременно сопряжённые и перпендикулярные. Диаметры, имеющие главные направления, называются *осями* кривой.

Следовательно, оси составляют пару сопряжённых и перпендикулярных диаметров.

Теорема. *У всякой кривой второго порядка существует одна пара действительных главных направлений.*

Угловые коэффициенты сопряжённых направлений k и $\tilde{k}$ удовлетворяют равенству (7′) § 6, гл. IX:

$$a_{11}+a_{12}(k+\tilde{k})+a_{22}k\tilde{k}=0. \tag{1a}$$

Перпендикулярные направления k и $\tilde{k}$ удовлетворяют уравнению (113) § 10, гл. V:

$$1+k\tilde{k}=0. \tag{1b}$$

Главные направления должны удовлетворять и тому и другому условию.

Поскольку теперь

$$k\tilde{k}=-1, \quad k+\tilde{k}=\frac{a_{22}-a_{11}}{a_{12}}, \tag{1′}$$

угловые коэффициенты k_1, k_2 главных направлений определяются из квадратного уравнения:

$$a_{12}k^2+(a_{11}-a_{22})k-a_{12}=0, \tag{2}$$

откуда

$$k=\frac{a_{22}-a_{11}\pm\sqrt{(a_{22}-a_{11})^2+4a_{12}^2}}{2a_{12}}. \tag{3}$$

Под корнем стоит существенно положительное число; значит, корни всегда действительны.

Два действительных корня k_1, k_2 определяют два взаимно перпендикулярных направления: из уравнения (2) следует, что произведение корней равно минус единице:

$$k_1k_2=-1,$$

а это в прямоугольной системе координат есть условие перпендикулярности. Следовательно, кривая имеет одну пару действительных главных направлений.

§ 2. Кривые с неопределёнными главными направлениями

Нам остаётся рассмотреть последнюю возможность — обращение дискриминанта уравнения (2) в нуль, что влечёт за собой совпадение корней квадратного уравнения.

Нетрудно заметить, что в области действительных коэффициентов a_{ik} это возможно только при условии обращения в нуль в отдельности каждого из квадратов, под знаком квадратного корня в формуле (3):

$$a_{12}=0,\ a_{11}-a_{22}=0. \tag{4}$$

В этом случае все коэффициенты уравнения (2) обращаются в нуль, уравнение исчезает при любом выборе углового коэффициента k, уравнения (1ab) совпадают, и оба дают для заданного k одно и то же значение $\tilde{k}=-\frac{1}{k}$.

Следовательно, угловой коэффициент k остаётся произвольным, и каждая пара взаимно перпендикулярных направлений будет сопряжена.

Обращаясь к условиям (4), заметим, что при $a_{11}=0$, а следовательно, и $a_{22}=0$ уравнение кривой будет распадаться на пару прямых, из которых одна — несобственная (§ 5, гл. VII). Для такой кривой понятие главных направлений теряет смысл, ибо несобственная прямая параллельна всякой прямой плоскости.

Если $a_{11}\neq 0$, то мы можем привести этот коэффициент к единице, деля всё уравнение кривой на a_{11}. Предполагая, что это приведение уже сделано, и внося $a_{11}=1$, $a_{22}=1$, $a_{12}=0$ в уравнение (2) § 1, гл. VII, мы получим уравнение кривой в виде:

$$x^2+y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0. \tag{5}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (3) § 2, гл. III, и, следовательно, определяет окружность — действительную, мнимую или окружность нулевого радиуса (распадающуюся на пару мнимых прямых с одной действительной точкой).

Имеем:

Теорема. *Если главные направления неопределённы, то кривая является окружностью действительной, мнимой или распадающейся.*

Таким образом, теорема § 1 доказана во всей общности: всякая кривая второго порядка имеет одну пару главных направлений, кроме окружности, у которой всякие взаимно перпендикулярные направления являются главными, и распадающихся кривых, содержащих несобственную прямую, для которых это понятие теряет смысл.

§ 3. Характеристическое уравнение

Исследование главных направлений можно провести гораздо более симметрично с помощью характеристического уравнения.

Мы обращаемся снова к системе уравнений (1ab). Так как оба уравнения должны давать для $\tilde{k}$ одно и то же значение, то коэффициенты при $\tilde{k}$ и свободные члены должны быть пропорциональны. Обозначим множитель пропорциональности буквой s. Мы получим:

$$a_{11}+a_{12}k=\frac{a_{12}+a_{22}k}{k}=s,$$

или

$$
\begin{aligned}
a_{11} + a_{12}k &= s, \\
a_{12} + a_{22}k &= ks.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Два уравнения (6) определят одно и то же значение k, если расширенный определитель системы равен нулю:

$$
X(s) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0. \tag{7}
$$

В раскрытом виде уравнение (7) напишется в форме:

$$
s^2 - s(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \tag{7'}
$$

Это уравнение называется *характеристическим.*

Теорема. *Корни характеристического уравнения всегда действительны.*

Это является прямым следствием теоремы § 1.

Теорема. *Только для окружности корни характеристического уравнения совпадают, главные направления становятся неопределёнными и всякая пара взаимно перпендикулярных направлений сопряжена.*

Действительно, условие равенства корней (7′)

$$
(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0
$$

легко преобразуется к виду:

$$
(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0.
$$

Отсюда для действительных коэффициентов a_{ik} получим:

$$
a_{12} = 0, \quad a_{11} = a_{22}, \tag{8}
$$

что, как мы видели (§ 2), приводит к окружности.

Теорема. *Два неравных корня характеристического уравнения по формулам* (6) *определяют единственную пару главных направлений кривой второго порядка.*

Действительно, умножая второе уравнение (6) на $\tilde{k}$ и прибавляя к первому, получим:

$$
a_{11} + a_{12}(k + \tilde{k}) + a_{22}k\tilde{k} = s\,[1 + k\tilde{k}]. \tag{a}
$$

Если же уравнения (6) написать для второго корня характеристического уравнения s' и углового коэффициента $\tilde{k}$, и второе уравнение умножить на угловой коэффициент k, то получим:

$$
a_{11} + a_{12}(k + \tilde{k}) + a_{22}k\tilde{k} = s'\,[1 + k\tilde{k}]. \tag{b}
$$

Вычитая из уравнения (a) уравнение (b) и сокращая полученный результат на неравную нулю разность $s - s'$, получим:

$$
1 + k\tilde{k} = 0.
$$

и уравнение (а) даст:

$$a_{11}+a_{12}(k+\tilde{k})+a_{22}k\tilde{k}=0. \tag{9}$$

Два направления k и $\tilde{k}$ будут сопряжены и перпендикулярны.

§ 4. Инвариантность корней характеристического уравнения

Одна и та же кривая может определяться различными уравнениями.

Условимся все члены уравнения переносить в левую часть и не умножать обе части уравнения на одно и то же число.

Тогда преобразование левой части уравнения возможно только при изменении системы координат. Мы будем рассматривать только декартову прямоугольную систему координат.

Преобразуя текущие координаты x, y по формулам (15) § 9, гл. II, мы получим уравнение той же кривой в координатах x', y'. При этом коэффициенты a_{ik} при степенях x', y' в преобразованном уравнении будут, конечно, отличаться от коэффициентов a_{ik} в первоначальном уравнении.

Определение. *Инвариантом* кривой второго порядка относительно преобразования координат называется такая функция от коэффициентов a_{ik} уравнения кривой, которая сохраняет своё значение после преобразования, т. е. является той же самой функцией от новых коэффициентов a'_{ik}:

$$F(a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{00})=F(a'_{11},\ a'_{12},\ \ldots,\ a'_{00}). \tag{10}$$

Теорема. *Корни характеристического уравнения инвариантны относительно преобразования координат.*

Рассмотрим пучок кривых второго порядка (§ 7, гл. IV):

$$F(x,\ y)-\lambda\Phi(x,\ y)=0, \tag{11}$$

где базисная кривая $F=0$ есть произвольно заданная кривая второго порядка c^2:

$$F(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00},$$

а кривая $\Phi=0$ — произвольная окружность радиуса, равного единице, с центром $C(a,\ b)$:

$$\Phi(x,\ y)=(x-a)^2+(y-b)^2-1.$$

Совершим преобразование координат по формулам (15), § 9, гл. II. Многочлен $F(x,\ y)$ преобразуется в новый многочлен:

$$F(x,\ y)=F'(x',\ y')=a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+$$
$$+2a'_{10}x'+2a'_{20}y'+a'_{00},$$

так, что уравнение $F'(x',\ y')=0$ будет определять ту же кривую c^2 по новой системе координат; многочлен $\Phi(x,\ y)$ перейдёт в многочлен $\Phi'(x', y')$ — левую часть уравнения окружности с тем же радиусом и с центром в той же точке C, но с новыми координатами a', b':

$$\Phi(x, y) = \Phi(x', y') = (x' - a')^2 + (y' - b')^2 - 1,$$

а параметр λ останется неизменным, ибо при изменении системы координат преобразуются только координаты точек.

Если мы выберем из пучка (11) параболу, то она останется параболой и после преобразования. Чтобы кривая (11) была параболой, надо, чтобы дискриминант Δ равнялся нулю.

Поскольку по раскрытии скобок имеем

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + \ldots - 1$$

и, значит,

$$F(x, y) - \lambda\Phi(x, y) = (a_{11} - \lambda)x^2 + 2a_{12}xy + (a_{22} - \lambda)y^2 + \ldots,$$

то обращение дискриминанта старших членов в нуль приводит к уравнению:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Это уравнение в точности совпадает с характеристическим уравнением (7), если неизвестную λ заменить на s.

Так как после преобразования координат кривая (11) останется параболой, а дискриминант старших членов нового уравнения будет равен нулю, то то же значение λ будет удовлетворять уравнению (12), если его написать для коэффициентов a'_{ik}.

Таким образом, в любой системе прямоугольных декартовых координат характеристическое уравнение кривой второго порядка имеет те же самые корни.

§ 5. Инварианты кривой второго порядка

Выполняя общее преобразование декартовых координат в уравнении кривой второго порядка, мы получим новые коэффициенты a'_{ik} как функции от старых a_{ik} и трёх параметров, определяющих новую систему координат: координат нового начала c_1, c_2 и угла α между старой и новой осями абсцисс.

Так как уравнение кривой второго порядка содержит шесть коэффициентов a_{ik}, то мы получим шесть уравнений. Исключая параметры c_1, c_2 и α, мы можем получить не более трёх соотношений между коэффициентами a_{ik}, a'_{ik}. Если бы их было больше, то это означало бы, что параметры преобразования c_1, c_2, α связаны с коэффициентами a'_{ik} только двумя уравнениями и, следовательно, при фиксированных a'_{ik} один из параметров остаётся произвольным. Значит, можно было бы непрерывно менять систему координат так, что уравнения всех кривых второго порядка будут оставаться неизменными. Это для произвольной кривой второго порядка невозможно, ибо, например, асимптоты гиперболы вполне определяются её уравнением, а всякое преобразование координат изменит или координаты центра, или угловые коэффициенты асимптот.

Отсюда вытекает:

Теорема. *Общая кривая второго порядка имеет не более трёх инвариантов преобразования координат.*

Эти три инварианта мы можем все обнаружить.

Первые два инварианта составят корни характеристического уравнения.

Так как корни квадратного уравнения иррационально связаны с коэффициентами, то удобнее будет взять две симметрические функции корней: их сумму $s_1 + s_2$ и произведение $s_1 s_2$.

Составляя сумму и произведение корней уравнения (7′), получим инварианты:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= a_{11} + a_{22}, \\
I_2 &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Чтобы найти третий инвариант, мы можем прибегнуть к тому же приёму, который привёл нас к инвариантности корней характеристического уравнения. Вернёмся к пучку линий второго порядка (11) и будем искать среди кривых пучка

$$F(x, y) - \lambda \Phi(x, y) = 0$$

вырождающиеся кривые. Так как в полной записи всех членов имеем

$$
\begin{gathered}
F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00}, \\
\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2b + a^2 + b^2 - 1,
\end{gathered}
$$

то обращение в нуль дискриминанта из всех коэффициентов приведёт нас к кубичному уравнению относительно λ (ср. § 9*, гл. IX):

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{10} + \lambda a \\
a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{20} + \lambda b \\
a_{10} + \lambda a & a_{20} + \lambda b & a_{00} - \lambda(a^2 + b^2 - 1)
\end{vmatrix} = 0. \tag{14}
$$

Корни этого уравнения инвариантны относительно преобразования декартовой системы координат на том же основании, что и выше.

Произведение трёх корней $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ кубического уравнения

$$\mathscr{A}\lambda^3 + \mathscr{B}\lambda^2 + \mathscr{C}\lambda + \mathscr{D} = 0$$

равно отношению (с обратным знаком) свободного члена к коэффициенту при λ^3. Следовательно,

$$I_3 = \frac{\mathscr{D}}{\mathscr{A}}$$

есть инвариант кривой второго порядка относительно преобразования декартовой системы координат.

Чтобы вычислить свободный член $\mathscr{D}$ в уравнении (14), надо положить там $\lambda = 0$. Мы получим:

$$\mathscr{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix}.$$

Чтобы вычислить член с третьей степенью λ, надо положить равными нулю все члены, не содержащие λ, т. е. положить $a_{ik} = 0$. Вынося из каждого столбца за знак определителя множитель λ и сокращая на λ^3, получим:

$$\mathscr{A} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ -0 & -1 & b \\ a & b & 1 - a^2 - b^2 \end{vmatrix} = 1.$$

Итак, имеем третий (и последний) инвариант:

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Легко видеть, что этот инвариант не зависит от предыдущих, ибо он содержит такие коэффициенты из уравнения кривой a_{10}, a_{20}, a_{00}, которых нет в первых двух инвариантах.

Глава XI

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Автополярный треугольник

Определение. Треугольник называется *автополярным* относительно кривой второго порядка, если каждая вершина его служит полюсом стороны треугольника.

Существует два вида автополярных треугольников. Автополярные треугольники I (первого) рода имеют полюсом каждой стороны противоположную вершину треугольника. Автополярные треугольники II (второго) рода образованы двумя касательными к кривой и хордой прикосновения.

Теорема 1. *Существует автополярный треугольник I рода, одна вершина которого — произвольная точка плоскости, не принадлежащая кривой c^2, а другая — произвольная точка поляры первой вершины, тоже не принадлежащая кривой.*

Пусть A_0 — произвольная точка, не лежащая на кривой. Обозначим её поляру буквой a_0. Пусть A_1 — произвольная точка поляры a_0, не лежащая на кривой. Поляра a_1 точки A_1 по теореме взаимности проходит через точку A_0 и пересекает прямую a_0 в точке A_2, отличной от точки A_1, ибо точка A_1 не лежит на кривой и её поляра не проходит через свой полюс. Точка A_2 лежит на полярах a_0 и a_1; значит, её поляра проходит через их полюсы A_0 и A_1. Треугольник $A_0A_1A_2$ — автополярный первого рода.

Теорема 2. *Существуют только два вида автополярных треугольников невырождающейся кривой второго порядка: первого или второго рода.*

Мы только что видели (теорема 1), что, выбирая систематически первую и вторую вершины координатного треугольника не на кривой, мы приходим к автополярному треугольнику первого рода.

Докажем, что треугольник с одной вершиной на кривой может быть только автополярным треугольником второго рода.

Если вершина A_0 треугольника лежит на кривой, то поляра a_0 становится касательной и проходит через точку A_0. Другая вершина стороны a_0 — точка A_2 — не принадлежит к кривой. Её поляра a_2 по теореме взаимности проходит через точку A_0 и в этой точке пересекает кривую, ибо касательной служит прямая a_0. Если A_1 — вторая точка пересечения прямой a_2 с кривой, то треугольник $A_0A_1A_2$—автополярный второго рода, ибо поляра точки A_1 как точки кривой проходит через эту точку и в то же время проходит через точку A_2, ибо её полюс A_1 лежит на поляре a_2 точки A_2. Другого автополярного треугольника с вершинами A_0 и A_2 нет, ибо сторона A_1A_2 треугольника, чтобы он был автополярный, должна иметь полюсом точку A_1, поскольку сторона A_0A_2 имеет полюсом A_0 и сторона A_0A_1 — вершину A_2; а на стороне A_0A_1, кроме точки A_0, есть только одна точка кривой — точка A_1.

Теорема. *Если кривая отнесена к автополярному треугольнику первого рода, то её уравнение содержит только члены с квадратами текущих координат.*

Действительно, каждые две вершины автополярного треугольника первого рода полярно сопряжены, ибо поляра каждой вершины проходит через две другие. Мы знаем, что координаты вершин координатного треугольника все, кроме одной, равны нулю, например $A_1(1,\ 0,\ 0)$, $A_2(0,\ 1,\ 0)$; внося эти значения в условие полярной сопряжённости (9′), (13) § 5, гл. VIII (полярная форма), немедленно получим

$$a_{12} = 0.$$

Таким же образом получим $a_{10} = 0$, $a_{20} = 0$.

Уравнение кривой будет иметь вид:

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{00}(x^0)^2 = 0. \tag{1}$$

Теорема. *Если кривая отнесена к автополярному треугольнику второго рода, то её уравнение содержит только один член с квадратом текущей координаты и один член с произведением однородных координат.*

Если вершины $A_0(0, 0, 1)$ и $A_1(1, 0, 0)$ лежат на кривой, то, внося эти координаты в уравнение кривой, немедленно получим:

$$a_{00}=0, \quad a_{11}=0.$$

С другой стороны, так как A_2 есть полюс стороны A_0A_1, то пары точек A_2 и A_0, A_2 и A_1 — полярно сопряжены; следовательно,

$$a_{02}=0, \quad a_{12}=0.$$

Уравнение кривой получает вид:

$$a_{22}(x^2)^2+2a_{01}x^0x^1=0. \tag{2}$$

§ 2. Канонические уравнения кривых второго порядка в проективных координатах

Любую кривую второго порядка можно отнести к автополярному треугольнику первого рода (теорема 1, § 1) или второго рода (теорема 2, § 1). Её уравнение примет соответственно вид уравнения (1) или (2).

В силу большей симметричности для приведения к каноническому виду пользуются уравнением (1).

Так как дискриминант $\mathscr{D}$ для уравнения (1) равен

$$\mathscr{D}=a_{11}a_{22}a_{00},$$

то у невырождающейся кривой второго порядка все коэффициенты уравнения (1) отличны от нуля.

Совершим теперь преобразование проективных координат, сохранив тот же координатный треугольник (геометрический), но изменив аналитические точки вершин. Обозначим новые аналитические точки вершин и их координаты буквами $A_{1'}(c^1_{1'}, 0, 0)$, $A_{2'}(0, c^2_{2'}, 0)$, $A_{0'}(0, 0, c^0_{0'})$. Формулы (18) § 9, гл. VI, примут теперь вид:

$$x^1=c^1_{1'}x^{1'}, \quad x^2=c^2_{2'}x^{2'}, \quad x^0=c^0_{0'}x^{0'}, \tag{a}$$

и уравнение (1) после преобразования координат примет вид:

$$a_{11}(c^1_{1'})^2(x^{1'})^2+a_{22}(c^2_{2'})^2(x^{2'})^2+a_{00}(c^0_{0'})^2(x^{0'})^2=0. \tag{1'}$$

Так как параметры преобразования $c^1_{1'}$, $c^2_{2'}$, $c^0_{0'}$ — вполне произвольные действительные числа, то мы можем выбрать

$$(c^1_{1'})^2=\frac{1}{|a_{11}|}, \quad (c^2_{2'})^2=\frac{1}{|a_{22}|}, \quad (c^0_{0'})^2=\frac{1}{|a_{00}|},$$

и тогда все коэффициенты уравнения будут равны или $+1$ или -1.

Различные уравнения будут отличаться друг от друга только числом положительных или отрицательных квадратов.

Разность между числом положительных и отрицательных членов называется *сигнатурой* формы.

Так как всё уравнение можно умножить на -1, то существенно различны только два вида канонических уравнений:

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^0)^2=0, \tag{3}$$
$$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^0)^2=0. \tag{4}$$

Действительно, меняя в случае надобности все знаки на противоположные, мы можем два квадрата сделать положительными, а пользуясь равноправностью вершин автополярного треугольника, мы можем обозначить буквой x^0 ту координату, квадрат которой один входит со знаком минус. Уравнения (3) и (4) определяют существенно различные кривые второго порядка. Уравнение (3) не допускает ни одной тройки действительных корней, кроме тривиальной $x^1=0$, $x^2=0$, $x^0=0$, которой не соответствует точка на плоскости. Следовательно, все точки кривой — мнимые и сама кривая (3) — мнимая. Уравнение (4) определяет действительную кривую второго порядка, ибо при любых действительных значениях x^1 и x^2 координата x^0 тоже будет действительна.

Теорема. *В проективной геометрии существуют только два вида канонических уравнений невырождающихся кривых второго порядка, которые определяют мнимую и действительную кривую.*

* Аналогично можно получить канонические уравнения распадающихся кривых второго порядка.

Теорема. *В проективной геометрии существуют три канонических уравнения распадающихся кривых второго порядка:*

$$(x^1)^2+(x^3)^2=0, \tag{5}$$
$$(x^1)^2-(x^3)^2=0, \tag{6}$$
$$(x^1)^2=0. \tag{7}$$

Если ранг дискриминанта $\mathscr{D}$ равен двум, то для уравнения (1)

$$\mathscr{D}=a_{11}a_{22}a_{00}=0,$$

т. е. один из коэффициентов равен нулю. Левая часть уравнения (1) содержит только два члена. Ввиду полной равноправности вершин автополярного треугольника мы можем обозначить буквами x^1 и x^2 те координаты, которые содержатся в уравнении. Так же, как и раньше, мы приведём коэффициенты a_{11}, a_{22} к положительной или отрицательной единице. В зависимости от того, будут ли оба оставшиеся члена одного знака или разных знаков, получим канонические уравнения (5) или (6).

Если ранг $\mathscr{D}$ равен 1, то не только сам определитель равен нулю, но и все его миноры второго порядка равны нулю, т. е. из трёх коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{00} два равны нулю. Обозначим буквой x^1 ту координату, квадрат которой один только останется в уравнении (1). После приведения коэффициента a_{11} к единице получим каноническое уравнение (7).

Уравнение (5) определяет пару мнимых прямых, (6) — пару действительных, (7) — пару совпадающих. *

§ 3. Канонические уравнения кривых второго порядка в аффинных координатах

На расширенной плоскости естественно выбрать за одну сторону автополярного треугольника несобственную прямую. Тогда полюс этой стороны будет центром кривой. В зависимости от положения центра мы будем иметь два случая:

I. Центральные кривые — эллипс и гипербола

У этих кривых центр собственный, следовательно, не принадлежит кривой, и мы можем выбрать автополярный треугольник первого рода с вершиной в центре.

Относя кривую к автополярному треугольнику, мы получаем уравнение (1). Если сторона a_0 координатного треугольника — несобственная прямая, то вершина A_0 — центр кривой. Вершины A_1 и A_2 — несобственные точки и полярно сопряжены. Следовательно, стороны a_1 и a_2 составляют пару сопряжённых диаметров. Кривая отнесена к центру и сопряжённым диаметрам.

Меняя нормирование вершин по формулам (а) § 2, приведём все коэффициенты к положительной или отрицательной единице. Однако число канонических уравнений теперь будет больше, чем в произвольной системе проективных координат, ибо одна сторона координатного треугольника a_0 закреплена: она совпадает с несобственной прямой. Следовательно, мы не можем по своему произволу назвать буквой x^0 ту координату, которая входит в уравнение (4) с отрицательным знаком.

Получаем:

Теорема. *В аффинных координатах существует три вида канонических уравнений невырождающихся центральных кривых второго порядка, которые определяют мнимый эллипс, действительный эллипс и гиперболу:*

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^0)^2=0, \tag{8}$$

$$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^0)^2=0, \tag{9}$$

$$(x^1)^2-(x^2)^2-(x^0)^2=0. \tag{10}$$

Мы говорим здесь об аффинных координатах, так как проективные координаты относительно координатного треугольника с несобственной стороной эквивалентны аффинным координатам.

Уравнение (8) определяет мнимую кривую; эта линия называется мнимым эллипсом, ибо дискриминант старших членов $\Delta=1>0$. Остальные два уравнения определяют действительные кривые. Из них кривая (9) — эллипс, а кривая (10) — гипербола.

II. Парабола

Если центр — несобственный, то автополярный треугольник с несобственной стороной — второго рода. Обращаясь к уравнению (2) и выполняя над ним преобразование (а) § 2, получим уравнение:

$$a_{22}(c^2_{2'})^2(x^{2'})^2+2a_{01}c^0_{0'}c^1_{1'}x^{0'}x^{1'}=0. \tag{2'}$$

Каждый из коэффициентов этого уравнения выбором нормирования вершин можно привести по абсолютной величине к единице. При этом мы не можем изменить знак первого коэффициента (если $c^2_{2'}$ — действительное число), но мы можем дать любое положительное или отрицательное значение второму. Следовательно, мы получим только одно каноническое уравнение параболы:

$$(x^2)^2 - x^0 x^1 = 0. \tag{11}$$

Теорема. *Существует в аффинных координатах только одно каноническое уравнение параболы. В каноническом уравнении парабола отнесена к диаметру и сопряжённой касательной.*

Так как A_1 — несобственный центр кривой, то A_0A_1 — диаметр; его полюс A_2 лежит на стороне A_0A_2, которая тем самым сопряжена диаметру A_0A_1; а так как A_0 лежит на кривой, то A_0A_2 — касательная.

* III. Распадающиеся кривые второго порядка

Аналогично можно получить канонические уравнения вырождающихся кривых второго порядка. Они получаются из уравнений (8—11), если один из коэффициентов или два заменяются нулём.

Теорема. *В аффинных координатах существует семь канонических уравнений распадающихся кривых второго порядка:*

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0, \quad (x^1)^2 + (x^0)^2 = 0, \tag{12}$$

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0, \quad (x^1)^2 - (x^0)^2 = 0, \quad x^1 x^0 = 0, \tag{13}$$

$$(x^1)^2 = 0, \qquad (x^0)^2 = 0. \tag{14}$$

Уравнения (12) определяют пару мнимых прямых с собственной и с несобственной точкой пересечения. Уравнения (13) определяют пару действительных прямых: пересекающихся, параллельных и пару прямых, содержащих одну собственную и одну несобственную прямые. Уравнения (14) определяют пару совпадающих прямых: собственную и несобственную.

§ 4. Канонические уравнения кривых второго порядка в декартовых координатах

Декартовы косоугольные координаты отличаются от аффинных только тем, что координатные векторы единичны. Поэтому здесь произвольное нормирование вершин координатного треугольника исключается, и преобразование (а) § 2 не имеет места.

Мы можем попрежнему отнести кривую к автополярному треугольнику с несобственной стороной. Для центральных кривых мы получим уравнение (1), для параболы — уравнение (2), но мы не можем привести коэффициенты к единице. Мы можем только посредством деления на коэффициент, отличный от нуля, привести этот один коэффициент к единице.

Мы получим, следовательно, те же типы канонических уравнений невырождающихся кривых (8—11) и вырождающихся (12—14). Каждый член (кроме одного) будет иметь коэффициент вполне определённой величины; знак коэффициента в уравнениях (8—14) уже предписан; следовательно, нам придётся его обозначить сообразно его знаку через плюс или минус, $\frac{1}{a'^2}$ или $\frac{1}{b'^2}$.

Коэффициент одного из членов уравнения может быть приведён к единице делением обеих частей уравнения на подходящее число. Таким образом, уравнения примут вид:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+1=0, \tag{8'}$$

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0, \tag{9'}$$

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-1=0, \tag{10'}$$

$$y^2-2p'x=0. \tag{11'}$$

Эти кривые — мнимый эллипс, действительный эллипс, гипербола и парабола. Для параболы коэффициент обозначен через $2p'$, так как изменением направления оси Ox знак его может быть изменён.

Аналогично пишутся уравнения распадающихся кривых второго порядка.

В силу теоремы о действительности главных направлений мы можем принять их за направление осей координат (сторон координатного треугольника A_0A_1 и A_0A_2). Мы получим уравнения того же вида (8'—11'), но теперь кривые будут отнесены к прямоугольной декартовой системе координат (к центру и осям кривой), и для каждой кривой такое уравнение станет вполне определённым.

Действительно, каждая кривая второго порядка, кроме окружности, имеет единственную пару осей. С каждой кривой связана единственная система декартовых прямоугольных координат, имеющая у центральной кривой центр своим началом, а оси кривой — осями координат, у параболы вершину — началом, а единственную (собственную) ось и касательную в вершине — осями координат. Отнеся кривую к этой системе координат, мы получим для каждой кривой c^2 вполне определённое уравнение, которое и называется *каноническим уравнением кривой c^2 на эвклидовой плоскости.* У окружности оно тоже вполне определено независимо от того, как выбраны прямоугольные оси, если начало помещено в центре кривой.

§ 5. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Инварианты кривой чрезвычайно облегчают преобразование уравнения кривой к каноническому виду.

Теорема. *Корни характеристического уравнения равны коэффициентам при квадратах текущих координат в уравнении кривой, отнесённой к главным направлениям.*

Действительно, главные направления сопряжены, а потому в силу следствия § 6, гл. IX, коэффициент a_{12} равен нулю. Поэтому характеристическое уравнение (7) § 3, гл. X, принимает вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & 0 \\ 0 & a_{22}-s \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(a_{11}-s)(a_{22}-s)=0,$$

откуда имеем два корня:

$$s_1=a_{11}, \quad s_2=a_{22},$$

что доказывает теорему.

Так как корни характеристического уравнения инвариантны, то те же значения они будут иметь при любом выборе системы координат.

Если кривая — центральная, то остаётся найти свободный член.

Для этого можно использовать третий инвариант (15) § 5, гл. X. Для уравнения (1) в прямоугольной системе координат второй и третий инварианты принимают вид:

$$I_2=a_{11}a_{22}, \quad I_3=a_{11}a_{22}a_{00};$$

следовательно,

$$a_{00}=\frac{I_3}{I_2}. \tag{15}$$

Если мы приводим к каноническому виду параболу, то один из корней характеристического уравнения равен нулю, ибо

$$I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$$

и при $a_{12}=0$ произведение $a_{11}a_{22}=0$. Вычисляя инварианты I_1, I_3 для уравнения (2), получим:

$$I_1=a_{22}, \quad I_3=-a_{22}a_{10}^2,$$

если предположить $a_{11}=0$ и $a_{22}\neq 0$.

Отсюда

$$a_{10}^2=-\frac{I_3}{I_1}. \tag{16}$$

Заметим, что для уравнения с действительными коэффициентами правая часть формулы (16) всегда будет положительна. В этом нетрудно убедиться непосредственным вычислением.

Так как при $\Delta=0$ старшие члены представляют полный квадрат, то уравнение произвольной параболы, проходящей через начало координат, можно написать в виде:

$$(\alpha x+\beta y)^2+2ax+2by=0$$

и, значит,

$$I_1=\alpha^2+\beta^2>0, \quad I_3=\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & a \\ \alpha\beta & \beta^2 & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=-a^2\beta^2-b^2\alpha^2+2ab\alpha\beta=-(a\beta-b\alpha)^2\leqslant 0,$$

т. е.

$$-\frac{I_3}{I_1}\geqslant 0.$$

Пример. Привести уравнение кривой

$$4x^2+6xy-4y^2+2x-3y-1=0$$

к каноническому виду.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-s & 3 \\ 3 & -4-s \end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad s^2-25=0$$

имеет корни $s_1=5$, $s_2=-5$. Так как инвариант I_3 имеет значение

$$I_3=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix}=11,$$

то

$$a_{00}=-\frac{I_3}{s_1s_2}=\frac{11}{25}.$$

Каноническое уравнение кривой будет

$$-5x^2+5y^2+\frac{11}{25}=0$$

или

$$\frac{x^2}{\frac{11}{125}}-\frac{y^2}{\frac{11}{125}}=1.$$

§ 6*. Инвариантные характеристики различных типов линий второго порядка

Представляет интерес вопрос, как по общему уравнению кривой второго порядка определить её тип.

Три основных вида кривых: эллипс, гипербола и парабола, различаются знаком дискриминанта старших членов, т. е. инварианта I_2. Таким образом, гипербола и парабола вполне определяются инвариантом I_2; остаётся различить мнимый эллипс (8′) от действительного (9′).

Заметим, что для уравнения (1) в декартовой прямоугольной системе инварианты имеют значения:

$$I_1=a_{11}+a_{22}, \quad I_2=a_{11}a_{22}, \quad I_3=a_{11}a_{22}a_{00}.$$

Для эллипса $I_2>0$; следовательно, знак I_3 определяет знак a_{00}, а знак I_1 — общий знак a_{11} и a_{22}. Эллипс будет мнимым, если они одного знака. Отсюда такая таблица:

эллипс мнимый	$I_2>0,\ I_1I_3>0$,
действительный	$I_2>0,\ I_1I_3<0$,
гипербола	$I_2<0$,
парабола	$I_2=0$.

*Глава XII**

ФОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Ортогональная инволюция полярно сопряжённых прямых пучка

Мы назвали инволюцией соответствие сопряжённых диаметров. Для параболы эта инволюция вырождается, ибо все диаметры сопряжены одному и тому же — несобственному. У центральных кривых все диаметры распадаются на пары взаимно сопряжённых.

Такое соответствие существует не только в пучке диаметров.

Если взять пучок прямых с центром в произвольной точке A, то легко заметить, что прямые пучка разбиваются на пары полярно сопряжённых прямых. По определению, прямые b и b' полярно сопряжены, если каждая из них проходит через полюс другой прямой. Если точка A не лежит на кривой, то её поляра a не проходит через точку A. На этой поляре лежат полюсы всех прямых пучка A. Если B есть полюс прямой b, то полярно сопряжённая прямая b' проходит через точку B; она проходит через точку A, если она принадлежит пучку A. Две точки A и B вполне определяют прямую b'. При этом по теореме взаимности полюс прямой b' будет лежать на прямой b. Такое соответствие полярно сопряжённых прямых пучка тоже можно назвать *инволюцией*.

Инволюция полярно сопряжённых прямых пучка вырождается, если центр пучка A лежит на кривой c^2. Тогда две точки A и B, центр пучка и полюс прямой b всегда будут определять одну и ту же прямую — поляру точки A, т. е. касательную в этой точке к кривой c^2. Это вполне аналогично вырождению инволюции сопряжённых диаметров параболы.

Инволюция сопряжённых диаметров окружности представляет замечательную особенность: она ортогональна. Каждая пара сопряжённых диаметров взаимно перпендикулярна.

Можно поставить вопрос:

Существует ли для произвольной кривой второго порядка такой пучок прямых, в котором инволюция полярно сопряжённых прямых было бы ортогональна?

Если такой пучок существует, то центр его называется *фокусом* кривой. Следовательно, наш вопрос сводится к определению фокусов кривой.

Определение 1. *Фокусом* кривой второго порядка называется центр пучка с ортогональной инволюцией полярно сопряжённых прямых.

Следствие 1. В фокусе каждая пара полярно сопряжённых прямых перпендикулярна.

Можно ещё сказать: в фокусе каждая прямая проходит через полюс прямой, к ней перпендикулярной.

Следствие 2. Центр окружности есть её фокус.

Следствие 3. Фокус всегда лежит внутри кривой.

Действительно, в фокусе каждая прямая перпендикулярна к своей сопряжённой, следовательно, не совпадает с ней, значит, нет самосопряжённых прямых, т. е. касательные, проведённые к кривой c^2 из фокуса, мнимы, а это и означает, что фокус — внутренняя точка кривой.

Следствие 4. Фокус лежит на оси кривой.

Действительно, соединим фокус F с центром C кривой c^2. Прямая FC будет диаметром и, как диаметр, полярно сопряжена своим сопряжённым хордам. Среди этих хорд найдётся одна, проходящая через фокус F. Как прямая фокального пучка (F), она перпендикулярна к своей полярно сопряжённой, т. е. к диаметру FC, а диаметр, перпендикулярный к сопряжённым ему хордам, есть ось кривой.

Определение 2. *Директрисой* называется поляра фокуса.

Следствие 1. Директриса, как поляра внутренней точки, не пересекает кривую.

Следствие 2. Директриса окружности, как поляра центра, — несобственная прямая.

Следствие 3. Директриса параллельна одному из главных направлений.

Действительно, директриса, как поляра фокуса, должна нести на себе полюс того диаметра, который проходит через фокус. Этот диаметр — ось кривой c^2. Его полюс — несобственная точка второй оси. Поскольку директриса проходит через несобственную точку второй оси, она ей параллельна.

§ 2. Мнимые касательные из фокуса к кривой

Будем рассматривать кривую c^2 на комплексной плоскости. Мы видели, что фокус, если он существует, — внутренняя точка, и касательные, проведённые из фокуса к кривой, мнимы. Эти мнимые касательные весьма замечательны. Так как в фокальном пучке каждая прямая полярно сопряжена своей перпендикулярной, то, если отнести кривую к прямоугольной декартовой системе координат, угловые коэффициенты k и $\tilde{k}$ пары полярно сопряжённых прямых связаны уравнением

$$k\tilde{k} = -1.$$

В каждом пучке касательные сами себе сопряжены. Полагая $\tilde{k} = k$, получаем для угловых коэффициентов пары касательных, проведённых из фокуса, уравнение

$$k^2 = -1$$

или

$$k = \pm i, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Определение 1. Прямые с угловым коэффициентом $\pm i$ называются *изотропными* прямыми плоскости.

Следствие. Касательные к кривой из фокуса имеют изотропное направление.

Распространяя на мнимые прямые все понятия и соотношения между действительными прямыми, исходя из формул, выведенных для действительных прямых, мы приходим для изотропных прямых к пародоксальным заключениям. Вот некоторые из них:

1. *При повороте плоскости около начала координат изотропные прямые не двигаются.*

Действительно, пара изотропных прямых, проходящих через начало координат, определяется уравнениями:

$$y = \pm ix, \qquad i = \sqrt{-1},$$

или

$$x^2 + y^2 = 0. \tag{1}$$

Повернём оси координат по формулам (13) § 8, гл. II. Уравнение изотропных прямых (1) не изменится. Повернём теперь всю плоскость вместе с осями координат так, чтобы оси заняли прежнее положение; координаты точки при этом не меняются и, следовательно, после поворота плоскости относительно старых осей изотропные прямые будут определяться теми же уравнениями и, следовательно, при повороте плоскости останутся на месте.

2. *Расстояние любых двух точек на изотропной прямой равно нулю.*

Действительно, левая часть уравнения (1) равна квадрату расстояния произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на изотропной прямой, от начала координат. Это расстояние в силу уравнения (1) равно нулю. Если же $OM = 0$ и $OM' = 0$, то и $MM' = OM' - OM = 0$.

3. *Изотропная прямая перпендикулярна сама к себе.*

Так как её угловой коэффициент равен

$$k = i, \qquad i = \sqrt{-1},$$

то угловой коэффициент перпендикулярной прямой

$$\bar{k} = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{i} = -\frac{i}{i \cdot i} = -\frac{i}{-1} = i$$

совпадает с ней.

4. *Изотропные прямые проходят через мнимые несобственные точки, общие всем окружностям.*

Действительно, общее уравнение окружности (3) § 2, гл. III, в однородных координатах напишется в виде:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + 2Ax^1x^0 + 2Bx^2x^0 + C(x^0)^2 = 0.$$

Пересекая её несобственной прямой

$$x^0 = 0,$$

получим одни и те же несобственные точки любой окружности:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0, \quad x^0 = 0.$$

Они принадлежат изотропным прямым (1).

Определение 2. Мнимые несобственные точки окружности называются *циклическими* точками плоскости. Однородные координаты циклических точек можно задать двумя тройками чисел:

$$(1,\ i,\ 0), \quad (1,\ -i,\ 0).$$

Следствие. *Мнимые касательные, проведённые из любого фокуса к кривой второго порядка, проходят через циклические точки плоскости.*

§ 3. Уравнение кривой второго порядка, отнесённой к фокусу

Рассмотрим пучок кривых второго порядка, касающихся в двух двойных центрах, которым мы пользовались в § 9*, гл. IX, для вывода уравнения пары асимптот. Мы тогда видели, что этот пучок содержит только две распадающиеся кривые второго порядка: пару касательных AB и AC в центрах B и C пучка и дважды взятую хорду прикосновения BC (черт. 69). Все эти результаты можно распространить на изотропные прямые; изотропная прямая касается кривой, если при совместном решении их уравнений получаются равные корни.

Допустим, что точка пересечения касательных — фокус кривой, а хорда прикосновения BC — его поляра — директриса. Как найти кривую по заданному фокусу и директрисе?

Поместим фокус в начале координат, и пусть

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

есть уравнение директрисы, а уравнение пары касательных из фокуса определяется уравнением (1).

Примем эти две распадающиеся кривые: 1) дважды взятую директрису (2) и 2) пару касательных (1) за базисные линии нашего пучка кривых. Любая кривая пучка определится уравнением:

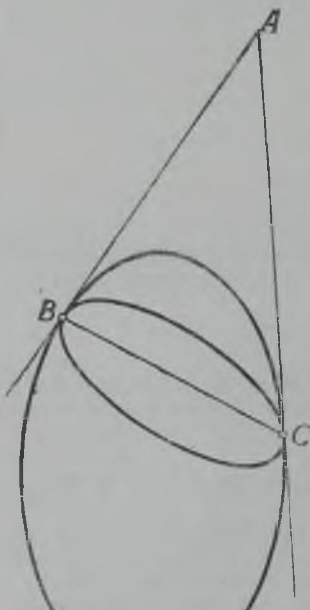
$$(Ax + By + C)^2 - \lambda(x^2 + y^2) = 0. \tag{3}$$

Так как все кривые пучка имеют касательными пару изотропных прямых (1), то для всех их начало координат служит фокусом, а хорда прикосновения (2) — директрисой. Таким образом, ответом на поставленный вопрос — найти кривую c^2 с заданным фокусом и директрисой — является пучок кривых (3).

§ 4. Эксцентриситет кривой второго порядка

Уравнение (3) допускает очень простое геометрическое истолкование. Разделим обе части уравнения (3) на сумму квадратов A^2+B^2 и перенесём второй член в правую часть:

$$\left[\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right]^2=\frac{\lambda}{A^2+B^2}(x^2+y^2). \tag{3'}$$



Черт. 69.

В квадратных скобках стоит левая часть нормального уравнения директрисы (2) с заменой текущих координат координатами некоторой точки $M(x, y)$ кривой, т. е. расстояние этой точки M от директрисы, а в правой — квадрат расстояния $\sqrt{x^2+y^2}$ той же точки M от начала координат, т. е. от фокуса. Координаты точки $M(x, y)$ подчинены одному условию: они удовлетворяют уравнению кривой (3).

Обозначая коэффициент пропорциональности через

$$e^{-2}=\frac{\lambda}{A^2+B^2},$$

мы дадим величине e название *эксцентриситета* кривой и будем иметь теорему:

Теорема. *Отношение расстояния произвольной точки кривой от фокуса к расстоянию её от директрисы постоянно и равно эксцентриситету кривой.*

Эта теорема показывает, что введённое теперь понятие фокуса и директрисы совпадает с тем, которым мы пользовались в главе III.

§ 5. Число фокусов кривой второго порядка

Теорема. *Центральная кривая второго порядка имеет четыре фокуса, из них только два — действительных.*

Так как касательные из фокусов проходят через циклические точки плоскости, то число фокусов равняется числу точек пересечения попарно касательных, проведённых к кривой из циклических точек.

Так как на плоскости имеется две циклические точки и из каждой точки, не лежащей на кривой (случай окружности, проходящей через циклические точки, исключается), можно провести к ней две касательные (действительные или мнимые), то при определении фокусов надо иметь в виду четыре прямые. Число точек их пересечений равно числу сочетаний из четырёх прямых по две, ибо на проективной плоскости каждая пара прямых пересекается. Так как

$$C_4^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=6,$$

то четыре касательные из циклических точек к кривой пересекаются между собой в шести точках. Среди этих точек надо считать и две циклические точки, ибо через каждую проходит по две прямых.

Таким образом, остаются четыре точки, которые составляют четыре фокуса кривой второго порядка, но не все они действительны.

Касательные изотропного направления мнимы, но и мнимые прямые могут пересекаться в действительных точках, если левые части их уравнений — комплексно-сопряжённые, т. е. одно уравнение переходит в другое изменением знака у мнимой единицы i. Такими и будут уравнения касательных, проходящих через различные циклические точки, ибо и координаты этих точек получаются одна из другой переменой знака у множителя i. Так как среди четырёх прямых может быть только две пары комплексно-сопряжённых, то только два фокуса будут действительны. Два других составят пару мнимых точек, лежащих на действительной прямой и между собой комплексно-сопряжённых.

Оговорка относительно собственного центра кривой необходима, ибо только у центральных кривых все касательные, проведённые из циклических точек к кривой, различны. У параболы несобственная прямая является касательной, и с ней совпадают две касательные, проведённые из циклических точек. Мы рассмотрим этот случай в § 7.

§ 6. Фокусы центральных кривых второго порядка

Рассуждения предыдущего параграфа дают метод отыскания всех фокусов кривой второго порядка. Удобно будет рассмотреть отдельно центральные кривые второго порядка и отдельно параболы.

Исключая из рассмотрения вырождающиеся кривые, мы можем все центральные кривые второго порядка задать уравнением:

$$Ax^2 + By^2 - 1 = 0. \tag{4}$$

Нам надо искать касательные к этой кривой из циклической точки плоскости. Прямые, проходящие через циклические точки, имеют изотропное направление, следовательно, угловые коэффициенты равны $\pm i$. Их уравнение имеет вид:

$$y = \pm\, ix + b, \tag{5}$$

при этом положительный или отрицательный знак соответствует той или другой циклической точке плоскости.

Выбираем для определённости положительный знак и ищем точки пересечения линий (4) и (5). Исключая y, получим:

$$Ax^2 + B(ix + b)^2 - 1 = 0,$$

или

$$(A - B)\, x^2 + 2iBbx + Bb^2 - 1 = 0.$$

Это уравнение будет иметь кратные корни, и прямая (5) будет касательной, если дискриминант уравнения равен нулю:

$$(A - B)(Bb^2 - 1) - (iBb)^2 = 0,$$

или

$$(A - B)\, Bb^2 - A + B + B^2b^2 = 0,$$

или

$$ABb^2 = A - B,$$

откуда

$$b = \pm\sqrt{\frac{A - B}{AB}} = \pm\sqrt{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}}.$$

Меняя в случае необходимости название осей координат, т. е. обозначая первую координату буквой y, а вторую — буквой x, мы всегда можем считать

$$\frac{1}{A} > \frac{1}{B},$$

при этом b будет мнимым:

$$b = \pm i\sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

и касательные из первой циклической точки будут определяться уравнениями:

$$y = i\left(x \pm \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}\right).$$

Аналогично, для второй циклической точки касательные имеют уравнения:

$$y = -i\left(x \pm \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}\right).$$

Эти касательные пересекаются попарно в двух действительных точках (единственные действительные точки, которые на них лежат):

$$y = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}.$$

Для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеем:

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad \frac{1}{A} > \frac{1}{B}.$$

Следовательно, фокусы эллипса имеют координаты:

$$y = 0, \quad x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Они лежат на большой оси эллипса.

Для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеем:

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = -\frac{1}{b^2};$$

значит, снова

$$\frac{1}{A} > \frac{1}{B}.$$

Фокусы гиперболы имеют координаты $y = 0$, $x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$. Они лежат на действительной оси гиперболы.

§ 7. Фокусы параболы

Парабола в задаче определения фокусов представляет особенность. Прямая, проходящая через две циклические точки, т. е. несобственная прямая плоскости, касается параболы. Следовательно, совпадают две из четырёх касательных к кривой, проходящих через циклические точки плоскости. Точка пересечения их становится неопределённой. Две другие касательные пересекают несобственную прямую в циклических точках. Остаётся только один действительный собственный фокус параболы.

Задавая параболу уравнением

$$y^2-2px=0,$$

ищем точки пересечения её с прямой

$$y=lx+b. \tag{6}$$

Исключая x, имеем:

$$y=l\frac{y^2}{2p}+b,$$

или:

$$ly^2-2py+2pb=0,$$

откуда, приравнивая дискриминант уравнения нулю, получаем уравнение для определения параметра b в уравнении касательной (6):

$$l2pb-p^2=0,$$

или

$$b=\frac{p^2}{2pl}=\frac{lp}{2l^2}=-l\frac{p}{2},$$

и единственное уравнение собственной касательной через первую циклическую точку $y=l\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

Уравнение касательной через вторую циклическую точку получим изменением знака при множителе l: $y=-l\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

Эти две касательные пересекаются в точке $y=0$, $x=\frac{p}{2}$. Это и есть единственный фокус параболы.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

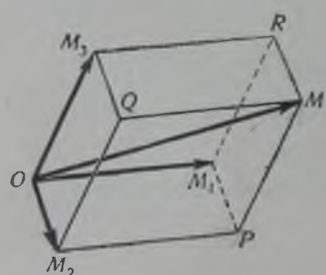
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Глава I

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Координаты вектора

Определения равенства векторов, их суммы или разности, произведения вектора на скаляр и скалярного произведения векторов были даны независимо от числа измерений той области, в которой находятся векторы, и сохраняют свою силу для векторов в пространстве.



Черт. 70.

Теоремы о векторах *коллинеарных* (параллельных) или *компланарных* (параллельных одной плоскости) мы теперь дополним третьей теоремой о четырёх векторах пространства.

Лемма. *Каждый вектор равен сумме своих проекций на три некомпланарные оси:*

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3. \qquad (1)$$

Проведём через точку M — конец вектора $\mathbf{M}$ — три плоскости, каждую параллельно двум из трёх осей. Мы получим параллелепипед $OM_1PM_2M_3RMQ$ (черт. 70).

Точка M_1 называется *проекцией* точки M на первую ось, вектор $\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{M}_1$ — *проекцией вектора* $\overrightarrow{OM} = \mathbf{M}$ на первую ось и аналогично для других осей.

Тогда по известному свойству параллелепипеда противоположные стороны равны и параллельны, откуда получаем равенство векторов:

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{M_1P},\ \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{PM}.$$

Следовательно, равенство (1) превращается в очевидное следствие определения суммы векторов:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM}.$$

Отсюда следует теорема:

Теорема [1]). *Если $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — три некомпланарных вектора, то для всякого вектора пространства $\boldsymbol{M}$ можно найти единственным образом три скаляра x^1, x^2, x^3 так, что будет иметь место тождество*

$$\boldsymbol{M} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3. \tag{2}$$

Действительно, в силу определения равенства векторов (§ 1, гл. I, часть первая) мы можем считать все векторы проведёнными из одной точки O (*начала координат*). Будем считать осями прямые, на которых лежат координатные векторы $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. По доказанной лемме имеем равенство (1).

Так как вектор $\boldsymbol{M}_1$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{e}_1$ (оба лежат на одной оси), то найдётся скаляр x^1, так что

$$\boldsymbol{M}_1 = x^1\boldsymbol{e}_1,$$

и аналогично для двух других осей. Внося эти выражения в формулу (1), мы получим искомое равенство (2).

Определение. Скаляры x^1, x^2, x^3, удовлетворяющие тождеству (2), называются *координатами* вектора M относительно координатных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

В силу ассоциативности сложения из формулы (2) следует, что при сложении векторов складываются одноимённые координаты, а так как каждая координата вектора есть координата его проекции на соответствующую ось координат, то та же теорема может быть высказана в форме: *ортогональная проекция суммы векторов равна сумме ортогональных проекций слагаемых*, где под ортогональной проекцией вектора попрежнему подразумеваем координату проекции вектора на ось прямоугольной декартовой системы координат.

Теперь теорема распределительности скалярного произведения распространяется и на векторы, не лежащие в одной плоскости.

§ 2. Аффинная и декартова (прямоугольная) системы координат

Определение. *Координатами* точки M называются координаты радиуса-вектора этой точки.

Чтобы радиус-вектор был определён, должно быть дано начало координат. Поэтому система координат определена, если дано начало O и три некомпланарных координатных вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Такая система координат называется *аффинной*.

Следствие. *При заданной системе координат* (O; $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) *каждая координата точки является координатой проекции этой точки на каждую из трёх осей координат.*

Проектирование точки на ось производится плоскостями, параллельными двум другим осям координат.

---

[1]) Аналогичные теоремы для прямой и плоскости даны в § 3, гл. I, и § 1, гл. II, часть первая.

Аффинная система координат $(O;\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)$ становится *декартовой*, если координатные векторы $\boldsymbol{e}_i$ единичны.

Декартова система координат прямоугольна, если координатные векторы не только единичны, но и ортогональны.

Единичные ортогональные векторы мы будем обозначать буквами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ или, когда надо будет использовать систему указателей, — символами $\boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{k}$. По определению скалярного произведения векторов, они удовлетворяют тождествам:

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1, \quad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0. \tag{3}$$

Благодаря этому декартова система координат значительно сокращает выкладки во всех метрических вопросах.

Теорема. *Скалярное произведение двух векторов в прямоугольной декартовой системе координат:*

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{i}_1 + a^2\boldsymbol{i}_2 + a^3\boldsymbol{i}_3,$$
$$\boldsymbol{b} = b^1\boldsymbol{i}_1 + b^2\boldsymbol{i}_2 + b^3\boldsymbol{i}_3$$

равно сумме произведений одноимённых координат:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3. \tag{4}$$

Действительно, по теореме о распределительности скалярного произведения при умножении суммы векторов на сумму каждое слагаемое первой суммы умножается на каждое слагаемое второй. При этом, в силу соотношений (3), сохранятся только произведения одноимённых координат, и мы получим формулу (4).

Следствие 1. *Квадрат вектора равен сумме квадратов его координат:*

$$\boldsymbol{a}^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2. \tag{5}$$

Следствие 2. *Векторы перпендикулярны, если сумма произведений одноимённых координат равна нулю:*

$$a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 = 0. \tag{6}$$

Формулы (4), (5) и (6) имеют место только для прямоугольной системы декартовых координат. Косоугольная система не представляет значительных преимуществ перед аффинной; поэтому, а также ввиду большой сложности формул мы ею не будем пользоваться.

Координаты точки относительно прямоугольной декартовой системы координат обозначаются буквами x, y, z и носят название *абсциссы*, *ординаты* и *аппликаты*.

§ 3. Угол двух векторов

Скалярное произведение позволяет легко определить модуль вектора и угол двух векторов.

Задача 1. *Найти модуль вектора*

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{i}_1 + a^2\boldsymbol{i}_2 + a^3\boldsymbol{i}_3.$$

Так как квадрат вектора равен квадрату его модуля, то по формуле (5):

$$\boldsymbol{a}^2 = a^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2,$$

откуда

$$a = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}. \qquad (5')$$

Задача II. *Найти угол между векторами*

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{i} + a^2\boldsymbol{j} + a^3\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b^1\boldsymbol{i} + b^2\boldsymbol{j} + b^3\boldsymbol{k}.$$

Так как скалярное произведение двух векторов равно произведению модулей множителей на косинус угла между ними (§ 4, гл. II, часть первая):

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\varphi,$$

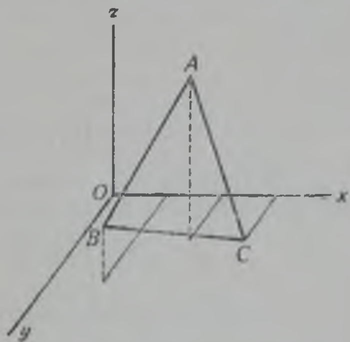
а модули векторов определяются через их квадраты:

$$a = \sqrt{\boldsymbol{a}^2},\ b = \sqrt{\boldsymbol{b}^2},$$

то угол определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2}\sqrt{\boldsymbol{b}^2}} \qquad (7)$$

или, в координатах, по формулам (4) и (5):



Черт. 71.

$$\cos\varphi = \frac{a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\cdot\sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2}}. \qquad (7')$$

Пример. Найти $\angle ABC$ треугольника с вершинами в точках $A(2, 1, 3)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, 1, 0)$ (черт. 71).

Так как каждый вектор равен разности радиусов-векторов своего конца и начала (§ 5, гл. I, часть первая), то

$$\overrightarrow{BA} = A - B = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

По формуле (7′) имеем:

$$\cos\angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\sqrt{\overrightarrow{BA}^2}\cdot\sqrt{\overrightarrow{BC}^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{6}.$$

§ 4. Расстояние между двумя точками

Задача III. *Найти расстояние между двумя точками* $M_1(x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ *и* $M_2(x_2^1, x_2^2, x_2^3)$.

Если точки M_1, M_2 отнесены к аффинной системе координат с началом O и координатными векторами $\boldsymbol{e}_i$, то по формуле (2) радиусы-векторы точек имеют вид:

$$M_1 = x_1^1 e_1 + x_1^2 e_2 + x_1^3 e_3,$$

$$M_2 = x_2^1 e_1 + x_2^2 e_2 + x_2^3 e_3.$$

Так как каждый вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ равен разности радиуса-вектора конца M_2 и радиуса-вектора начала M_1, то

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2^1 - x_1^1)\, e_1 + (x_2^2 - x_1^2)\, e_2 + (x_2^3 - x_1^3)\, e_3.$$

Но квадрат вектора равен квадрату его модуля (§ 4, гл. II, часть первая), значит, обозначая искомое расстояние (модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$) буквой d:

$$d = M_1M_2,$$

имеем:

$$d^2 = \{(x_2^1 - x_1^1)\, e_1 + (x_2^2 - x_1^2)\, e_2 + (x_2^3 - x_1^3)\, e_3\}^2. \tag{8}$$

В прямоугольной декартовой системе координат $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ эта формула принимает вид:

$$d^2 = (x_2^1 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_1^2)^2 + (x_2^3 - x_1^3)^2. \tag{8'}$$

§ 5. Деление отрезка в данном отношении

Задача IV. *Даны две точки $M_1(x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ и $M_2(x_2^1, x_2^2, x_2^3)$. Найти на прямой M_1M_2 точку $M(x^i)$ так, чтобы она делила отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{q}{p}$:*

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{q}{p}. \tag{9}$$

Решение задачи и ответ ничем не отличаются от той же задачи на плоскости (§ 3, гл. II, часть первая).

В силу соотношения (9) и коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$, они связаны уравнением:

$$\overrightarrow{M_1M} = \frac{q}{p}\overrightarrow{MM_2}.$$

Каждый из них равен разности радиусов-векторов конца и начала:

$$\overrightarrow{M_1M} = M - M_1, \quad \overrightarrow{MM_2} = M_2 - M.$$

Следовательно,

$$M - M_1 = \frac{q}{p}(M_2 - M),$$

откуда

$$M = \frac{pM_1 + qM_2}{p + q}. \tag{10}$$

В зависимости от знака λ, деление будет внутренним или внешним. Середине отрезка M_1M_2 соответствует значение $\lambda = \frac{q}{p} = 1$:

$$M = \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

Для значения $\lambda = -1$ собственной точки не найдётся.

§ 6. Ориентация тройки векторов

Рассмотрим тройку ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, образующих три ребра прямоугольного трёхгранника T. Перемещая трёхгранник T в пространстве, мы можем совместить его вершину с началом координат прямоугольной декартовой системы координат. Затем, поворачивая трёхгранник T около вершины, можем совместить вектор $\boldsymbol{e}_1$ с положительным направлением оси абсцисс (с координатным вектором $\boldsymbol{i}_1$). Наконец, поворачивая его около оси абсцисс, мы можем совместить вектор $\boldsymbol{e}_2$ трёхгранника с положительным направлением оси ординат (с координатным вектором $\boldsymbol{i}_2$). После этого положение трёхгранника T относительно координатной системы будет вполне определено. Третье ребро трёхгранника $\boldsymbol{e}_3$, как общий перпендикуляр к двум первым рёбрам в вершине его, совпадёт с осью аппликат, но вектор $\boldsymbol{e}_3$ может и не совпасть с координатным вектором $\boldsymbol{i}_3$: располагаясь на оси z, он может быть направлен в отрицательную сторону её.

Таким образом, все прямоугольные трёхгранники с заданной нумерацией векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ делятся на два класса: те трёхгранники, которые могут быть приведены к совпадению с координатным трёхгранником выбранной системы координат (O; $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$), и те, которые приводятся к совпадению с трёхгранником (O; $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $-\boldsymbol{i}_3$). Мы будем говорить, что первый класс трёхгранников отличается от второго своей ориентацией.

Определение. Два прямоугольных трёхгранника с заданной нумерацией осей *обладают одной ориентацией*, если они *конгруэнтны*, т. е. подходящее перемещение приводит их к совпадению, — разной ориентацией, если они *симметричны*, т. е. после подходящего перемещения один симметричен другому относительно плоскости.

Отсюда *нумерация осей трёхгранника вводит его ориентацию*.

Чтобы различить эти два класса трёхгранников, достаточно заметить, что три пальца правой или левой руки можно расположить так, что они образуют рёбра прямоугольного трёхгранника, и эти трёхгранники будут разной ориентации. Отсюда название трёхгранники *правой* или *левой ориентации* или просто правые и левые трёхгранники, правая или левая система координат.

Следствие 1. *Изменение направления одного вектора меняет ориентацию трёхгранника.*

Мы видим, что трёхгранники ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) и ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $-\boldsymbol{e}_3$) — разной ориентации.

Следствие 2. Изменение нумерации двух векторов (перестановка указателей) *меняет ориентацию.*

Действительно, если вектор $\boldsymbol{e}_3$ трёхгранника T совпадает с положительным направлением оси z, а векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ с координатными векторами $\boldsymbol{i}_2$ и $\boldsymbol{i}_1$, то поворотом на прямой угол около оси z трёхгранника T мы совместим вектор $\boldsymbol{e}_1$ с вектором $\boldsymbol{i}_1$, а вектор $\boldsymbol{e}_2$ с вектором $-\boldsymbol{i}_2$. Ориентации $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и $(\boldsymbol{i}_1, -\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ одинаковы и противоположны ориентации $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$.

Следствие 3. Круговая замена указателей $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$, $(\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3, \boldsymbol{i}_1)$, $(\boldsymbol{i}_3, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2)$ *не меняет ориентации трёхгранника*, ибо круговая замена достигается чётным числом транспозиций и имеет результатом чётное число перемен знаков.

Понятие ориентации распространяется на косоугольные трёхгранники. Для этого достаточно заметить, что на ориентированном трёхграннике каждый вектор $\boldsymbol{e}_3$ устанавливает положительную (которая глядит в сторону $\boldsymbol{e}_3$) сторону плоскости двух других векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$; на положительной стороне плоскости поворот (на угол меньше π) от первого вектора $\boldsymbol{e}_1$ ко второму $\boldsymbol{e}_2$ устанавливает вращение по стрелке часов (от большого пальца к указательному на ладони левой руки) у левых трёхгранников, против стрелки часов — у правых. Это определение ориентации непосредственно прилагается к любому косоугольному трёхграннику.

Ориентацию трёхгранника, совпадающую с ориентацией выбранной координатной системы, мы будем называть *положительной*.

§ 7. Векторное произведение

Определение. *Векторным произведением* $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор, перпендикулярный к обоим множителям, имеющий модулем произведение модулей ab, умноженное на синус угла $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$,

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = ab \sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \tag{11}$$

и образующий с ними трёхгранник положительной ориентации.

Следствие 1. Модуль векторного произведения равен площади параллелограма, построенного на векторах-множителях.

Действительно, площадь параллелограма равна произведению двух его смежных сторон, умноженному на синус угла между ними.

Следствие 2. Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю.

Такие векторы параллельны и синус угла между ними равен нулю.

Следствие 3. Скалярный множитель выносится за скобку векторного произведения:

$$\boldsymbol{a} \times (\varphi \boldsymbol{b}) = \varphi (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \qquad \varphi \text{ — скаляр.} \tag{12}$$

Теорема антикоммутативности. *При перестановке множителей векторное произведение меняет знак:*

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}. \tag{13}$$

При определении ориентации трёхгранника, образованного векторным произведением и его двумя множителями, перемножаемые векторы нумеруются в том порядке, в котором они входят при умножении. Поэтому изменение порядка множителей имеет следствием изменение нумерации двух векторов и при сохранении положительной ориентации трёхгранника, в силу следствия 2 § 6, вызовет изменение направления их произведения на противоположное, т. е. умножение произведения на -1.

Следствие 4. *Для трёх координатных векторов $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ декартовой прямоугольной системы координат векторное произведение двух векторов равно третьему с положительным или отрицательным знаком в зависимости от сохранения порядка нумерации множителей и произведения:*

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}_1\times\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{i}_3,\quad \boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{i}_3=\boldsymbol{i}_1,\quad \boldsymbol{i}_3\times\boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{i}_2,\\ &\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{i}_1=-\boldsymbol{i}_3,\ \boldsymbol{i}_3\times\boldsymbol{i}_2=-\boldsymbol{i}_1,\ \boldsymbol{i}_1\times\boldsymbol{i}_3=-\boldsymbol{i}_2.\end{aligned}\tag{14}$$

§ 8. Теорема распределительности

Теорема распределительности. *Векторное произведение суммы векторов равно сумме векторных произведений слагаемых на тот же самый вектор-множитель:*

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2.\tag{15}$$

Введём новый вектор $\boldsymbol{b}_3$, полагая

$$\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=0.\tag{16}$$

Тогда равенство (15) можно написать в эквивалентной форме:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_3=0,\tag{15$'$}$$

если значение $\boldsymbol{b}_3$, найденное из (16), подставить в равенство (15) и все члены перенести в одну часть. Обратно из равенств (15′), (16) вытекает равенство (15).

Равенство (16) показывает, что ломаная, определяющая по правилу сложения сумму $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3$, — замкнутая. На чертеже (черт. 72) она образует треугольник $B_1B_2B_3$, где

$$\boldsymbol{b}_1=\overrightarrow{B_1B_2},\ \boldsymbol{b}_2=\overrightarrow{B_2B_3},\ \boldsymbol{b}_3=\overrightarrow{B_3B_1}.$$

Если построить в точках B_i векторы

$$\overrightarrow{B_iA_i}=\boldsymbol{a}\qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

и соединить вершины A_i, то получим трёхгранную призму $B_1B_2B_3A_1A_2A_3$, боковые грани которой являются теми параллелограмами, площади которых равны модулям векторных произведений:

$$s_i=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_i|=\text{пл. } B_iB_{i+1}A_{i+1}A_i.$$

Сами векторные произведения.

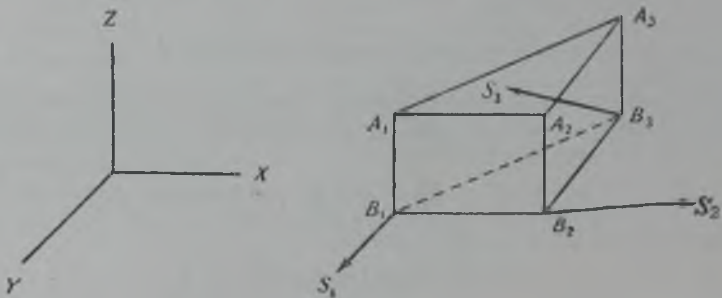
$$s_i = a \times b_i = \overrightarrow{B_iA_i} \times \overrightarrow{B_iB_{i+1}}$$

перпендикулярны к плоскостям своих параллелограмов $B_iB_{i+1}A_{i+1}A_i$ и, образуя трёхгранники положительной ориентации из векторов $a_i = \overrightarrow{B_iA_i}$, $b_i = \overrightarrow{B_iB_{i+1}}$, $s_i = \overrightarrow{B_iC_i}$, направлены из вершин B_i во внешнюю область трёхгранной призмы.

Чтобы доказать равенство нулю суммы векторов $s_1 + s_2 + s_3$, достаточно показать, что равна нулю сумма их проекций на произвольное направление p.

$$s_1 \cos(s_1,\ p) + s_2 \cos(s_2,\ p) + s_3 \cos(s_3,\ p) = 0. \qquad (17)$$

Здесь угол $(s_i,\ p)$ между векторами s_i и p равен углу между плоскостью векторов a, b_i, перпендикулярной к вектору s_i, и плоскостью π,



Черт. 72.

перпендикулярной к вектору p, поскольку площадь проекции равна площади проектируемой плоской фигуры на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекций, каждое из слагаемых в левой части равенства (17) равно площади проекции боковой грани призмы на плоскость π.

Примем за плоскость проекций плоскость чертежа. Тогда те же параллелограмы $B_iB_{i+1}A_{i+1}A_i$ можно рассматривать как проекции граней. Если вектор p, перпендикулярный к плоскости проекций, направлен от плоскости чертежа к наблюдателю, то передние грани дадут положительные проекции, а задняя — отрицательную и для нашего расположения чертежа равенство (17) примет вид:

$$\text{пл. } B_1B_2A_2A_1 + \text{пл. } B_2B_3A_3A_2 - \text{пл. } B_1B_3A_3A_1 = 0; \qquad (17')$$

если сюда прибавить с противоположными знаками площади проекции верхнего и нижнего оснований призмы, которые равны между собой, то равенство не нарушится:

$$\text{пл. } B_1B_2A_2A_1 + \text{пл. } B_2B_3A_3A_2 + \text{пл. } A_1A_2A_3 - \text{пл. } B_1B_3A_3A_1 - \\ - \text{пл. } B_1B_2B_3 = 0; \qquad (18)$$

между тем в новом виде равенство становится очевидным, ибо при проектировании на произвольную плоскость выпуклого замкнутого многогранника на каждый кусок площади многоугольника $B_1B_2B_3A_3A_1$ накладываются две проекции с разными знаками от передней и задней грани замкнутого многогранника, которые при сложении взаимно уничтожаются. Если доказана справедливость равенства (18), то тем самым доказана и теорема (15).

Заметим, что теорема сочетательности для векторного умножения не имеет места:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}. \tag{a}$$

Действительно, произведение $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ перпендикулярно и к вектору $\boldsymbol{b}$, и к вектору $\boldsymbol{c}$, а векторное произведение левой части перпендикулярно к произведению $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ и тем самым параллельно плоскости векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Между тем векторное произведение правой части по тем же основаниям параллельно плоскости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Эти плоскости содержат только один общий вектор $\boldsymbol{b}$ (и все ему коллинеарные). Значит, если оба векторные произведения совпадают, то они параллельны вектору $\boldsymbol{b}$, который таким образом должен быть перпендикулярен и вектору $\boldsymbol{a}$ (первый множитель левой части) и вектору $\boldsymbol{c}$ (второй множитель правой части). Если это не имеет места, то неравенство (a) доказано.

Правило подсчёта векторного произведения. *В декартовых прямоугольных координатах каждая координата векторного произведения* $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ *равна адъюнкту вектора* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ или $\boldsymbol{k}$ в определителе

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\end{vmatrix}. \tag{19}$$

Для доказательства достаточно перемножить по правилу умножения многочленов оба вектора:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a^1\boldsymbol{i}_1+a^2\boldsymbol{i}_2+a^3\boldsymbol{i}_3)\times(b^1\boldsymbol{i}_1+b^2\boldsymbol{i}_2+b^3\boldsymbol{i}_3),$$

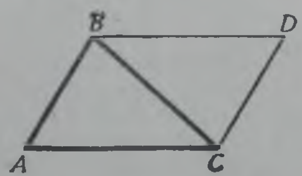
и воспользоваться формулами (14).

§ 9. Площадь треугольника по координатам вершин

Задача. *Найти площадь треугольника ABC по координатам вершин* $A\ (1,\ 2,\ 3)$, $B(2,\ -1,\ 5)$, $C(3,\ 2,\ -5)$.

Площадь треугольника ABC составляет половину площади параллелограма $ABDC$ (черт. 73), а эта площадь равна модулю векторного произведения

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}.$$



Черт. 73.

Вычисляем векторы:

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{k};$$

их произведение по формуле (17) равно:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 24i + 12j + 6k,$$

а модуль произведения равен:

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{24^2 + 12^2 + 6^2} = 6\sqrt{21},$$

откуда искомая площадь треугольника равна:

$$\text{пл. } ABC = 3\sqrt{21}.$$

§ 10. Скалярное произведение трёх векторов

Определение. *Скалярным произведением* трёх векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называется скалярное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на векторное произведение двух других $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

$$(\boldsymbol{abc}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}). \tag{20}$$

Теорема. *Скалярное произведение трёх векторов равно определителю из девяти координат этих векторов*:

$$(\boldsymbol{abc}) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Действительно, по формуле (19), векторное произведение $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} + j\begin{vmatrix} b^3 & b^1 \\ c^3 & c^1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Составляя скалярное произведение с вектором

$$\boldsymbol{a} = ia^1 + ja^2 + ka^3,$$

получим:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = a^1\begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} + a^2\begin{vmatrix} b^3 & b^1 \\ c^3 & c^1 \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix},$$

т. е. разложение определителя (21) по элементам первой строки.

Следствие 1. *При вычислении скалярного произведения трёх векторов* $(\boldsymbol{abc})$ *безразлично, какие векторы умножаются векторно, если сохраняется порядок трёх множителей*:

$$(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}, \tag{22a}$$

ибо в результате получается тот же определитель (21).

Следствие 2. Произведение $(\boldsymbol{abc})$ *меняет знак при перестановке двух множителей:*

$$(\boldsymbol{abc}) = -(\boldsymbol{acb}). \tag{22b}$$

Следствие 3. Произведение $(\boldsymbol{abc})$ *не меняется при круговой перестановке множителей:*

$$(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab}), \tag{22c}$$

ибо такая перестановка эквивалентна чётному числу транспозиций.

Следствие 4. Скалярное произведение трёх векторов обладает свойством распределительности относительно каждого своего множителя:

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{bc}) = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{bc}) + (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{bc}). \tag{22d}$$

Это прямо вытекает из аналогичного свойства определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 + a_2^1 & a_1^2 + a_2^2 & a_1^3 + a_2^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Теорема. *Скалярное произведение* $(\boldsymbol{abc})$ *равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *как на рёбрах, и взятому с положительным или отрицательным знаком в зависимости от ориентации тройки векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, равен произведению его высоты на площадь основания.

Основанием можно считать параллелограм, построенный на векторах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$; его площадь равна модулю векторного произведения $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}|$.

Высота параллелепипеда $\boldsymbol{abc}$ равна проекции третьей стороны $\boldsymbol{a}$ на перпендикуляр $\boldsymbol{n}$ к плоскости параллелограма $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Если за положительное направление вектора $\boldsymbol{n}$ принять направление перпендикулярного к плоскости $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ векторного произведения $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, то, согласно формуле (5) (§ 4, гл. II, часть первая), скалярное произведение

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = np_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{a} \cdot |\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}|$$

будет равно произведению высоты $np_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{a}$ на площадь основания $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}|$, т. е. объёму параллелепипеда. Это произведение положительно, если положительна проекция $np_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{a}$, т. е. если угол вектора $\boldsymbol{a}$ с перпендикуляром $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ острый, а для этого необходимо и достаточно, чтобы ориентация векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ совпадала с ориентацией произведения $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ и двух его множителей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, которая по условию положительна.

Следствие 5. Необходимое и достаточное условие компланарности трёх векторов есть обращение их скалярного произведения в нуль; ибо при этом параллелепипед и объём его обращаются в нуль.

Следствие 6. Скалярное произведение трёх векторов с двумя равными множителями равно нулю.

Теорема. *Скалярное произведение трёх векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *равно произведению определителя из всех координат множителей на скалярное произведение координатных векторов.*

Действительно, пусть

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{b} = b^1\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2 + b^3\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{c} = c^1\boldsymbol{e}_1 + c^2\boldsymbol{e}_2 + c^3\boldsymbol{e}_3$$

или короче:

$$\boldsymbol{a} = a^i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{b} = b^i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{c} = c^i\boldsymbol{e}_i,$$

если условиться записывать сумму произведений одним членом с двумя одинаковыми верхним и нижним указателями. В дальнейшем всегда два одинаковых указателя наверху и внизу в одном члене будут означать суммирование.

Скалярное произведение этих трёх множителей, в силу теоремы распределительности, равно:

$$(\boldsymbol{abc}) = (a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3)\,(b^1\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2 + b^3\boldsymbol{e}_3)\,(c^1\boldsymbol{e}_1 + c^2\boldsymbol{e}_2 + c^3\boldsymbol{e}_3) =$$
$$= a^2b^3c^3\,(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3) + a^1b^3c^2\,(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2) + a^2b^1c^3\,(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3) + a^2b^3c^1\,(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1) +$$
$$+ a^3b^1c^2\,(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) + a^3b^2c^1\,(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1).$$

Здесь мы уже выбросили как равные нулю те члены, где в скалярном произведении повторяется два одинаковых множителя. Переставляя в натуральный порядок множители произведения координатных векторов $(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)$ и учитывая изменение знака при перестановке каждой пары множителей, мы получим положительный или отрицательный знак, в зависимости от чётности или нечётности числа транспозиций

$$(\boldsymbol{abc}) = \{a^1b^2c^3 - a^1b^3c^2 - a^2b^1c^3 + a^2b^3c^1 + a^3b^1c^2 - a^3b^2c^1\}\,(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3).$$

Нетрудно заметить, что в фигурных скобках стоит определитель; следовательно,

$$(\boldsymbol{abc}) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}\,(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3). \qquad (23)$$

Следствие. Все скалярные произведения трёх векторов изменят знак, если от правой системы координат перейти к левой.

§ 11. Объём тетраэдра

Задача. *Найти объём тетраэдра с вершинами в точках*

$$M_1(x_1^i), \quad M_2(x_2^i), \quad M_3(x_3^i), \quad M(x^i). \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Мы записываем в скобках при названии точки одну из трёх координат x_i, предполагая, что указатель i принимает три значения: 1, 2 и 3.

Объём тетраэдра $MM_1M_2M_3$ равен одной шестой объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{MM_2}$, $\overrightarrow{MM_3}$. Так как каждый из них равен разности радиусов-векторов конца и начала:

$$\overrightarrow{MM_i} = M_i - M,$$

а радиусы-векторы определяются через координатные векторы e_i по формуле (2):

$$M = x^i e_i, \quad M_1 = x_1^i e_i, \quad M_2 = x_2^i e_i, \quad M_3 = x_3^i e_i,$$

то объём тетраэдра определяется формулой:

$$\text{объём } MM_1M_2M_3 = \frac{1}{6}\{(x_1^i - x^i)e_i, (x_2^i - x^i)e_i, (x_3^i - x^i)e_i\} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1^1 - x^1 & x_1^3 - x^2 & x_1^3 - x^3 \\ x_2^1 - x^1 & x_3^2 - x^2 & x_3^3 - x^3 \\ x_3^1 - x^1 & x_3^2 - x^2 & x_3^3 - x^3 \end{vmatrix} \cdot (e_1 e_2 e_3). \qquad (24)$$

Глава II

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

§ 1. Преобразование начала

Задача преобразования координат заключается в отыскании координат x^i произвольной точки M по новой системе $(O'; e_{i'})$, если они даны по старой системе $(O; e_i)$. Она распадается на две: преобразование начала —

$$(O; e_i) \to (O'; e_i),$$

и преобразование координатных векторов —

$$(O'; e_i) \to (O'; e_{i'}).$$

Из этих двух преобразований складывается общее преобразование:

$$(O; e_i) \to (O'; e_i) \to (O'; e_{i'}).$$

Преобразование начала координат меняет радиус-вектор точки. Если

$$M = \overrightarrow{OM} \text{ и } M^* = \overrightarrow{O'M},$$

то по правилу сложения векторов имеем:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M},$$

или

$$M = \overrightarrow{OO'} + M^*. \qquad (a)$$

Если обозначим через x^i и X^i — старые и новые координаты точки M, а через $c^i_{0'}$ — координаты нового начала O' по старой системе, то, проектируя на оси координат равенство (а), получим:

$$x^i = X^i + c^i_{0'} \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (1)$$

§ 2. Преобразование координатных векторов

Обозначим через $\boldsymbol{e}_i$ координатные векторы старой системы, через $\boldsymbol{e}'_i$ — новой и через $c^i_{k'}\begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ k' = 1', 2', 3' \end{pmatrix}$ — координаты вектора $\boldsymbol{e}_{k'}$ по старой системе.

Тогда получим:

$$\boldsymbol{e}_{k'} = c^1_{k'}\boldsymbol{e}_1 + c^2_{k'}\boldsymbol{e}_2 + c^3_{k'}\boldsymbol{e}_3$$

или, короче,

$$\boldsymbol{e}_{k'} = c^i_{k'}\boldsymbol{e}_i \qquad \begin{pmatrix} \text{суммирование по} \\ i = 1, \ 2, \ 3 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Так как по формуле (2) § 1, гл. I, имеем для старых X^i и новых $x^{i'}$ координат точки M

$$\boldsymbol{M} = X^i\boldsymbol{e}_i = x^{k'}\boldsymbol{e}_{k'} \qquad \begin{pmatrix} \text{суммирование по} \\ i = 1, 2, 3 \\ k = 1', 2', 3' \end{pmatrix},$$

то, заменяя векторы $\boldsymbol{e}_{k'}$ по формулам (2), получим:

$$X^i\boldsymbol{e}_i = x^{k'}c^i_{k'}\boldsymbol{e}_i \qquad \begin{pmatrix} \text{суммирование по} \\ i = 1, 2, 3 \\ k = 1', 2', 3' \end{pmatrix},$$

или

$$(X^i - c^i_{k'}x^{k'})\boldsymbol{e}_i = 0.$$

Так как векторы $\boldsymbol{e}_i$ — некомпланарны, а потому не могут быть связаны линейным соотношением, то все скобки равны нулю:

$$X^i = c^i_{k'}x^{k'} \qquad \begin{pmatrix} \text{суммирование по} \\ k' = 1', 2', 3' \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Записывая в развёрнутом виде сумму, получим:

$$X^i = c^i_{1'}x^{1'} + c^i_{2'}x^{3'} + c^i_{3'}x^{3'}. \qquad (3')$$

Внося эти выражения в формулу (1), получим общее преобразование аффинной системы координат:

$$x^i = c^i_{1'}x^{1'} + c^i_{3'}x^{2'} + c^i_{3'}x^{3'} + c^i_{0'}. \qquad (4)$$

Так как в аффинной системе координат координатные векторы вполне произвольны, то и координаты $c^i_{k'}$ векторов $\boldsymbol{e}_{k'}$ ничем не связаны. Имеем:

Теорема. *Наиболее общее аффинное преобразование координат определяется линейной подстановкой* (4) *с произвольными действи-*

тельными коэффициентами, ограниченными неравенством:

$$\begin{vmatrix} c^1_{1'}, & c^1_{2'}, & c^1_{3'}, \\ c^2_{1'}, & c^2_{2'}, & c^2_{3'}, \\ c^3_{1'}, & c^3_{2'}, & c^3_{3'} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (5)$$

Необходимость ограничения (5) объясняется тем, что новые координатные векторы $\boldsymbol{e}_{i'}$ не могут быть компланарны, а, следовательно, скалярное произведение трёх векторов $(\boldsymbol{e}_{1'}\ \boldsymbol{e}_{2'}\ \boldsymbol{e}_{3'})$ не может равняться нулю. Отсюда с помощью формулы (23) § 10, гл. I, прямо получается неравенство (5).

§ 3. Определитель прямоугольного преобразования

Так называется преобразование декартовой прямоугольной системы координат. В этом случае каждый коэффициент преобразования $c^i_{k'}$ есть косинус угла между старой осью за номером i и новой осью за номером k'.

Действительно, умножая скалярно на вектор $\boldsymbol{i}_j$ обе части уравнения (2), которые мы перепишем теперь в виде:

$$\boldsymbol{i}_{k'} = c^i_{k'}\boldsymbol{i}_i \qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по} \\ i = 1,\ 2,\ 3\end{pmatrix}, \quad (2')$$

получим:

$$\boldsymbol{i}_{k'} \cdot \boldsymbol{i}_j = c^i_{k'}\boldsymbol{i}_i \cdot \boldsymbol{i}_j \qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по} \\ i = 1,\ 2,\ 3\end{pmatrix},$$

или, поскольку в правой части произведение $\boldsymbol{i}_i \cdot \boldsymbol{i}_j$ равно нулю, если $i \neq j$, и обращается в единицу только для одного значения $i = j$, а произведение двух единичных векторов $\boldsymbol{i}_{k'} \cdot \boldsymbol{i}_j$ равно косинусу угла между ними,

$$\cos(\boldsymbol{i}_{k'},\ \boldsymbol{i}_j) = c^j_{k'}, \qquad (6)$$

где скобками $(\boldsymbol{i}_{k'},\ \boldsymbol{i}_j)$ обозначен угол между этими векторами.

Определитель прямоугольного преобразования обладает целым рядом замечательных свойств, которые прямо вытекают из формулы (2′), если помнить, что каждая тройка векторов $\boldsymbol{i}_{k'}$ и $\boldsymbol{i}_i$ составлена из единичных и взаимно перпендикулярных векторов.

Свойства определителя прямоугольного преобразования:

1. *Сумма квадратов элементов одной строки равна единице*, ибо квадрат единичного вектора $\boldsymbol{i}_{k'}$ равен единице, а квадрат вектора равен сумме квадратов его координат:

$$(\boldsymbol{i}_{k'})^2 = (c^1_{k'})^2 + (c^2_{k'})^2 + (c^3_{k'})^2 = 1. \qquad (7a)$$

2. *Сумма произведений соответствующих элементов двух строк равна нулю*, ибо скалярное произведение двух ортогональных векто-

ров $\boldsymbol{i}_{k'}$ и $\boldsymbol{i}_{j'}$ равно нулю, а скалярное произведение равно сумме произведений одноимённых координат:

$$\boldsymbol{i}_{k'} \cdot \boldsymbol{i}_{j'} = c^1_{k'} c^1_{j'} + c^2_{k'} c^2_{j'} + c^3_{k'} c^3_{j'} = 0. \tag{7b}$$

3. *Эти теоремы имеют место и для суммы квадратов элементов одного столбца или суммы произведений соответствующих элементов двух столбцов*, ибо по формуле (6) каждый элемент $c^i_{k'}$ есть косинус угла k'-го нового вектора с i-м старым, и, следовательно, $c^i_{1'}$, $c^i_{2'}$, $c^i_{3'}$ суть проекции вектора $\boldsymbol{i}_i$ на оси новой системы, т. е. его координаты:

$$\boldsymbol{i}_i = c^{k'}_i \boldsymbol{i}_{k'}. \tag{2''}$$

4. *Определитель прямоугольного преобразования равен* ± 1.

Действительно, по § 10 гл. I, такой определитель равен объёму куба $(\boldsymbol{i}_{1'} \boldsymbol{i}_{2'} \boldsymbol{i}_{3'})$, построенного на новых координатных векторах. Так как они единичны, то объём по абсолютной величине равен единице. Положительная или отрицательная единица получается в зависимости от того, будет ли ориентация двух троек векторов $\boldsymbol{i}_k$ и $\boldsymbol{i}_{k'}$ одинакова или противоположна.

5. *Каждый элемент определителя равен своему адъюнкту с тем же или с обратным знаком в зависимости от сохранения ориентации тройкой координатных векторов.*

Действительно, адъюнкты элементов первой строки суть определители матрицы, образованной двумя последними строками, т. е. координаты векторного произведения $\boldsymbol{i}_{2'} \times \boldsymbol{i}_{3'}$ векторов $\boldsymbol{i}_{2'}$, $\boldsymbol{i}_{3'}$. Оно перпендикулярно к ним и, следовательно, коллинеарно вектору $\boldsymbol{i}_{1'}$; модуль произведения тоже равен единице, как площадь квадрата $(\boldsymbol{i}_{2'}, \boldsymbol{i}_{3'})$, но положительное направление произведения $\boldsymbol{i}_{2'} \times \boldsymbol{i}_{3'}$ вместе с множителями $\boldsymbol{i}_{2'}$ и $\boldsymbol{i}_{3'}$ всегда образует тройку векторов одной ориентации с координатной тройкой $\{\boldsymbol{i}_\alpha\}$, а тройка $\{\boldsymbol{i}_{\alpha'}\}$ может быть другой ориентации.

§ 4*. Эйлеровы углы

Определитель прямоугольного преобразования содержит девять элементов, но мы видели, что они связаны целым рядом соотношений. Среди этих соотношений имеется шесть независимых, которые выражают требования, чтобы три новых координатных вектора $\boldsymbol{i}_{k'}$ были единичны (модуль равен единице) и взаимно перпендикулярны:

$$(\boldsymbol{i}_{1'})^2 = (\boldsymbol{i}_{2'})^2 = (\boldsymbol{i}_{3'})^3 = 1, \quad \boldsymbol{i}_{1'} \cdot \boldsymbol{i}_{2'} = \boldsymbol{i}_{2'} \cdot \boldsymbol{i}_{3'} = \boldsymbol{i}_{3'} \cdot \boldsymbol{i}_{1'} = 0.$$

Значит, девять элементов определителя прямоугольного преобразования зависят от трёх произвольных параметров.

В качестве таких параметров Эйлер предлагает три угла последовательных поворотов, которыми можно перевести прямоугольный трёхгранник $Oxyz$ в любой другой прямоугольный трёхгранник $Ox'y'z'$ той же ориентации (например, оба — левые). Допустим, что плоскость $Ox'y'$ пересекает плоскость Oxy по прямой $O\xi$; положительное направление оси $O\xi$ выбираем так, чтобы трёхгранник $Ozz'\xi$ был тоже правым (черт. 74). При этих условиях первый поворот совершается около оси Oz на угол $\varphi = \angle xO\xi$ так, чтобы ось Ox совпала с прямой $O\xi$. Второй поворот совершается около оси $O\xi$ на угол $\theta = \angle zOz'$ так, чтобы ось Oz совместилась с осью Oz' и, следовательно, совпали плоскости Oxy и $Ox'y'$. Третий поворот совершается около оси Oz' на угол $\psi = \angle \xi Ox'$. Он сохраняет положение оси Oz и совмещает ось Ox с осью Ox'. Так как оба трёхгранника одной ориентации, то совмещение двух пар осей Oz с Oz' и Ox с Ox' необходимо приведёт к совпадению и третьей пары Oy, Oy'.

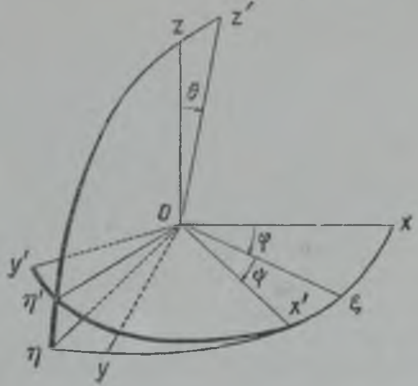
Три угла $\varphi = \angle xO\xi$, $\psi = \angle \xi Ox'$ и $\theta = \angle zOz'$ называются *эйлеровыми углами*.

Если первый поворот переводит трёхгранник $Oxyz$ в трёхгранник $O\xi\eta z$, то координата z остаётся неизменной, а координаты x, y преобразуются в координаты ξ, η по формулам поворота прямоугольных осей координат на плоскости на угол φ:

$$x = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi,$$
$$y = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi, \quad z = z.$$

Второй поворот переводит трёхгранник $O\xi\eta z$ в трёхгранник $O\xi\eta' z'$ поворотом на угол θ около оси $O\xi$. Следовательно, координата ξ остаётся неизменной:

$$\xi = \xi, \quad \eta = \eta' \cos \theta - z' \sin \theta,$$
$$z = \eta' \sin \theta + z' \cos \theta.$$



Черт. 74.

Третий поворот переводит трёхгранник $O\xi\eta'z'$ в трёхгранник $Ox'y'z'$ поворотом на угол ψ около оси Oz':

$$\xi = x' \cos \psi - y' \sin \psi, \quad \eta' = x' \sin \psi + y' \cos \psi, \quad z' = z'.$$

По исключении из этих равенств промежуточных величин ξ, η, η' получим:

$$x = x' (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) - y' (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta) + \\ + z' \sin \varphi \sin \theta,$$

$$y = x' (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta) - y' (\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta) - \\ - z' \cos \varphi \sin \theta,$$

$$z = x' \sin \psi \sin \theta + y' \cos \psi \sin \theta + z' \cos \theta.$$

§ 5. Инвариант преобразования аффинных координат

Теорема 1. *Всякое преобразование аффинной системы координат оставляет алгебраическое уравнение между координатами точки алгебраическим и не повышает его степени.*

Пусть мы имеем алгебраическое уравнение

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Левая часть его — многочлен; пусть

$$A (x^1)^p (x^2)^q (x^3)^r$$

— один из членов этого многочлена. Чтобы совершить преобразование координат, надо внести сюда вместо координат x^i их выражение по формулам (4) этой главы. Так как после преобразования в правой части тождества

$$A(x^1)^p (x^2)^q (x^3)^r = A(c^1_{k'}x^{k'} + c^1_{0'})^p (c^2_{k'}x^{k'} + c^2_{0'})^q (c^3_{k'}x^{k'} + c^3_{0'})^r$$

содержится всего $p+q+r=m$ линейных множителей, а при умножении степеней показатели складываются, то после раскрытия скобок мы получим весьма разнообразные произведения степеней, но сумма показателей при $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$ не может быть больше, чем m, т. е. не больше степени этого члена по старой системе координат.

Складывая после преобразования все члены уравнения, мы получим в левой части уравнения многочлен; следовательно, уравнение останется алгебраическим и степень его не возрастёт.

Теорема 2. *Преобразование аффинных координат не может трансцендентное уравнение сделать алгебраическим и не может понизить степень алгебраического уравнения.*

Действительно, если при переходе от координат (x^i) к координатам $(x^{i'})$ трансцендентное уравнение стало бы алгебраическим или степень алгебраического понизилась бы, то обратное преобразование от $(x^{i'})$ к (x^i) должно было бы вернуть к прежнему уравнению, т. е. сделать алгебраическое уравнение трансцендентным или повысить степень алгебраического уравнения, что невозможно в силу теоремы 1.

Обе теоремы можно высказать в виде одного предложения:

Следствие. *Степень алгебраического уравнения между координатами точки есть инвариант преобразований аффинной системы координат.*

Глава III

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО УРАВНЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ТОЧЕК

§ 1. Уравнение геометрического места точек

Рассмотрим уравнение между тремя координатами точки в пространстве относительно произвольной аффинной системы координат:

$$F(x^1,\ x^2,\ x^3) = 0. \tag{1}$$

Все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению, образуют геометрическое место точек, определяемое этим уравнением.

Могут представиться различные случаи.

Могут быть уравнения, не допускающие ни одного решения в виде тройки действительных чисел, например:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 1 = 0.$$

Тогда множество точек, определяемое уравнением, будет пустым.

Могут быть уравнения, допускающие только одно решение или конечное число решений, например:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0.$$

Тогда геометрическое место состоит из одной или конечного числа точек (в нашем примере из начала координат).

Может случиться, что уравнение определяет линию, например уравнение

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0.$$

Оно даёт

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0,$$

но так как x^3 остаётся произвольной, то координаты любой точки третьей оси координат удовлетворяют уравнению.

Если не накладывать никаких ограничений на функцию, стоящую в левой части уравнения (1), то определяемое им геометрическое место точек может быть более сложной структуры, например в виде бесконечного множества точек, сколь угодно плотно заполняющего пространство и не образующего ни в какой своей части поверхности.

Для алгебраических уравнений дело обстоит проще. Задаваясь произвольно значениями

$$x^1 = x_0^1, \; x^2 = x_0^2,$$

где x_0^1, x_0^2 — два числа, мы получим алгебраическое уравнение для третьей координаты:

$$F(x_0^1, \; x_0^2, \; x^3) = 0,$$

которое будет иметь конечное число действительных корней (не большее степени уравнения). Каждому корню x^3 будет соответствовать точка, лежащая на прямой, которая проходит через точку $P(x_0^1, \; x_0^2, \; 0)$ параллельно третьей оси.

При непрерывном изменении значений координат x^1, x^2 корень уравнения x^3, если только он не станет мнимым, будет меняться непрерывно, и, вообще говоря, точка опишет поверхность. Слова „вообще говоря“ означают, что это будет иметь место, если не налагать специальных ограничений на вид многочлена $F(x^1, x^2, x^3)$ вблизи рассматриваемой точки.

Мы будем говорить, что уравнение (1) „вообще“ определяет поверхность.

Следствие. *Точка лежит на поверхности, если координаты точки удовлетворяют уравнению поверхности.*

Координаты точки, удовлетворяющей уравнению (1), называются *текущими координатами.*

§ 2. Уравнение сферы

Если поверхность определяется как геометрическое место точек, обладающих общим свойством, то можно составить уравнение поверхности; для этого надо только выразить налагаемое на точки поверхности требование с помощью уравнения между координатами точки.

Рассмотрим в виде примера составление уравнения сферы.

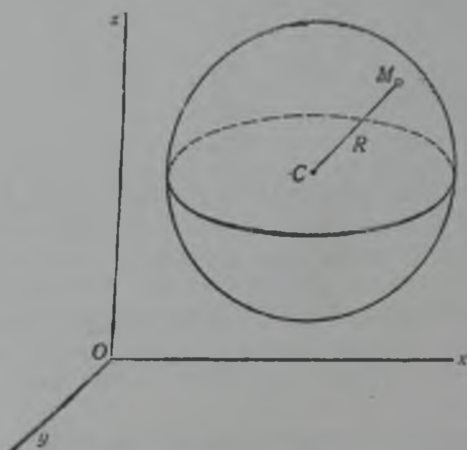
Задача. *Составить уравнение сферы с центром в точке C и радиусом R.*

Отнесём сферу к декартовой прямоугольной системе координат (черт. 75). Пусть a, b, c будут координаты центра C; рассмотрим какую-нибудь точку $M(x, y, z)$ сферы. Расстояние этой точки от центра C определяется по формуле (8′) § 4, гл. I:

$$MC = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.$$

По условию, это расстояние должно равняться радиусу. Следовательно, координаты каждой точки сферы удовлетворяют уравнению:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R. \tag{a}$$



Черт. 75.

Обратно, если координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению (а), то расстояние точки M от центра C равно радиусу и точка лежит на сфере.

Возвышая обе части уравнения в квадрат, чтобы освободиться от радикала, получаем уравнение сферы в виде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2. \tag{2}$$

§ 3. Уравнение между двумя координатами

Допустим, что уравнение содержит только две координаты:

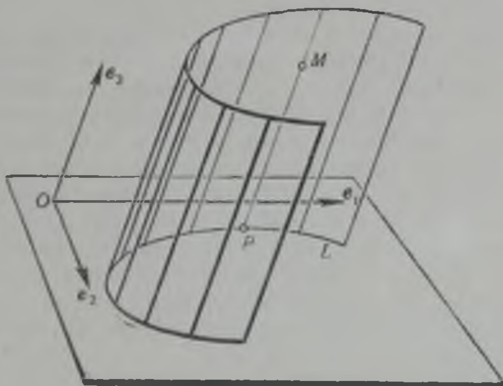
$$F(x^1, x^2) = 0. \tag{3}$$

На плоскости первых двух координатных векторов такое уравнение, вообще говоря, определяет некоторую линию L (черт. 76).

Рассмотрим какую-нибудь точку P этой линии. Так как она лежит в плоскости первых двух осей координат, то третья координата равна нулю: $x^3=0$. Следовательно, её координаты суть $P(x_0^1, x_0^2, 0)$. Они, по условию, удовлетворяют уравнению (3), но также будут удовлетворять уравнению координаты любой точки

$$M(x_0^1, x_0^2, x^3)$$

с теми же самыми значениями x_0^1, x_0^2, ибо уравнение (3) не содержит координаты x^3, и, следовательно, любое задание этой координаты не изменит величины левой части уравнения.



Черт. 76.

Точки $P(x_0^1, x_0^2, 0)$ и $M(x_0^1, x_0^2, x^3)$ лежат на одной прямой, проходящей через точку P параллельно третьей оси, ибо из формул

$$P = x_0^1 e_1 + x_0^2 e_2, \quad M = x_0^1 e_1 + x_0^2 e_2 + x^3 e_3$$

следует:

$$\overrightarrow{PM} = M - P = x^3 e_3; \quad M = P + x^3 e_3.$$

Меняя x^3, мы будем перемещаться по прямой PM, не покидая поверхности. Таким образом, поверхность образована прямыми, параллельными третьей оси и пересекающими кривую L.

Определение. *Цилиндрической поверхностью или цилиндром* называется поверхность, образованная прямой, которая двигается, всё время пересекая заданную линию и оставаясь параллельной заданному вектору.

Заданная линия L при этом называется *направляющей* цилиндра, а прямая PM — его *образующей*.

Имеем теорему:

Теорема. *Одно уравнение между двумя координатами точки в пространстве определяет цилиндр с образующими, параллельными третьей оси.*

§ 4. Уравнения линии

Линия в пространстве определяется, как пересечение двух поверхностей. Например, прямую линию определяют, как пересечение двух плоскостей, окружность — как пересечение сферы и плоскости.

Теорема. *Два уравнения относительно трёх координат точки*

$$\begin{aligned} F(x^1,\ x^2,\ x^3) = 0, \\ \Phi(x^1,\ x^2,\ x^3) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

определяют в пространстве линию.

Действительно, каждое из уравнений (4) определяет поверхность. Координаты x^1, x^2, x^3, удовлетворяющие и первому, и второму уравнениям (4), определяют точки, принадлежащие и первой и второй поверхностям, т. е. точки, лежащие на линии пересечения этих поверхностей. Обратно, координаты каждой точки этой линии удовлетворяют системе (4). Следовательно, система уравнений (4) определяет линию, именно — линию пересечения поверхностей, которые определяются отдельно первым и вторым уравнениями системы.

Эта теорема, как и все теоремы этой главы, нуждается в целом ряде оговорок. Система (4) может быть противоречива, и тогда определяемое ею множество точек будет пустым.

Две функции F и Φ могут разлагаться на множители, имея общий множитель:

$$F = \varphi F_1, \quad \Phi = \varphi \Phi_1.$$

Тогда координаты x^i, удовлетворяющие уравнению поверхности

$$\varphi(x^1,\ x^2,\ x^3) = 0,$$

обратят в нуль и F, и Φ, следовательно, будут удовлетворять системе (4); значит, система (4) будет определять не линию, а поверхность.

Все эти случаи мы исключаем при формулировании теоремы.

Теорема. *Три уравнения*

$$F(x^1,\ x^2,\ x^3) = 0, \quad \Phi(x^1,\ x^2,\ x^3) = 0, \quad \Psi(x^1,\ x^2,\ x^3) = 0 \tag{5}$$

определяют точки пересечения трёх поверхностей: $F = 0$, $\Phi = 0$ и $\Psi = 0$.

Действительно, решая их совместно, получим, вообще говоря, несколько (конечное число) решений. Каждое решение (x_0^i) удовлетворяет каждому из уравнений (5); следовательно, точка $M_0(x_0^i)$ лежит на каждой из поверхностей F, Φ и Ψ и, будучи общей точкой, называется точкой пересечения их.

§ 5. Классификация поверхностей

Теоремы § 5, гл. II, позволяют ввести рациональную классификацию поверхностей по их уравнениям в аффинной системе координат.

Определение. Поверхность называется *алгебраической*, если её уравнение — алгебраическое, т. е. может быть приведено к виду равенства нулю многочлена от текущих координат. Все неалгебраические поверхности называются *трансцендентными*.

Порядком алгебраической поверхности называется степень её уравнения.

Например, всякая плоскость есть поверхность первого порядка, ибо она определится уравнением

$$x^3 = 0,$$

если её принять за плоскость $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ аффинной системы координат.

Следствие 1. *Поверхность n-го порядка пересекается с произвольной плоскостью по кривой не выше n-го порядка.*

Действительно, если принять эту плоскость за плоскость $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ координатной системы, так что она будет определяться уравнением

$$x^3 = 0,$$

то линия пересечения её с поверхностью (1) будет определяться системой из этих двух уравнений. Внося в уравнение (1) значение $x^3 = 0$, получим уравнение не выше n-й степени:

$$F(x^1, x^2, 0) = 0, \tag{a}$$

между двумя координатами x^1, x^2. Поскольку каждая точка нашей линии лежит в координатной плоскости $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, мы можем рассматривать это уравнение, как уравнение линии на плоскости.

Так как степень уравнения равна n, то линия — n-го порядка.

Следствие 2. *Произвольная прямая пересекает поверхность n-го порядка не более чем в n точках.*

Если мы проведём через нашу прямую плоскость, то она пересечёт поверхность по линии n-го порядка. Точки пересечения поверхности с прямой суть точки пересечения этой линии с прямой, а тогда наше предложение вытекает из общей теоремы о числе точек пересечения кривой n-го порядка с произвольной прямой (§ 5, гл. IV, часть первая).

Замечание. Эти следствия имеют полную силу только при условии, если будем учитывать не только действительные, но и мнимые линии.

Аналитическая геометрия рассматривает только алгебраические поверхности.

§ 6. Распадение поверхности

Теорема. *Если левая часть уравнения алгебраической поверхности разлагается в произведение, а правая часть равна нулю, то поверхность распадается, и уравнения составляющих получаются, если приравнять нулю каждый множитель левой части в отдельности.*

Рассмотрим уравнение

$$F(x^1, x^2, x^3) \cdot \Phi(x^1, x^2, x^3) = 0, \tag{6}$$

где F и Φ — многочлены относительно текущих координат x^1, x^2, x^3, и допустим, что координаты точки $M(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ удовлетворяют уравнению (6), т. е. обращают произведение $F \cdot \Phi$ в нуль. Это может осуществиться только одним из двух способов: или обращается в нуль первый множитель

$$F(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = 0, \tag{6a}$$

и тогда точка M_0 лежит на поверхности (6a), или, если $F \neq 0$, то обращается в нуль второй множитель:

$$\Phi(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = 0, \tag{6b}$$

т. е. точка M_0 принадлежит поверхности (6b).

Таким образом, все точки поверхности (6) принадлежат или поверхности (6a), или (6b). С другой стороны, каждая точка поверхностей (6a, b), очевидно, принадлежит поверхности (6), ибо произведение равно нулю, если один из его множителей равен нулю. Следовательно, поверхность (6) распадается на поверхности $F = 0$ и $\Phi = 0$.

§ 7. Пучок поверхностей

Определение. Пучком поверхностей называется семейство поверхностей, определяемое уравнением:

$$pF(x^1, x^2, x^3) + q\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0, \tag{7}$$

где постоянное

$$\lambda = \frac{q}{p}$$

называется *параметром* пучка. При различных значениях постоянных p и q получаются все поверхности пучка.

Поверхности

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi(x^1, x^2, x^3) = 0$$

образуют *базис* пучка.

Следствие 1. *Каждая поверхность пучка проходит через линию пересечения базисных поверхностей пучка*

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0, \quad \Phi(x^1, x^2, x^3) = 0. \tag{8}$$

Действительно, допустим, что точка $M_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ принадлежит этой линии, и, следовательно, координаты (x_0^i) обращают в нуль обе функции F и Φ. Тогда после подстановки (x_0^i) в уравнение (7) и первое, и второе слагаемые обратятся в нуль, каковы бы ни были значения коэффициентов p и q. Так как координаты (x_0^i) удовлетворяют уравнению (7), то точка $M_0(x_0^i)$ лежит на поверхности (7), а поскольку p и q ничем не связаны, точка $M_0(x_0^i)$ будет лежать на любой поверхности пучка (7).

Следствие 2. Через каждую точку пространства, не лежащую на линии пересечения базисных поверхностей, проходит одна и только одна поверхность пучка.

Пусть точка $M_1(x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ не лежит на линии (8); следовательно,

$$F(x_1^1, x_1^2, x_1^3), \quad \Phi(x_1^1, x_1^2, x_1^3) \tag{a}$$

не равны нулю одновременно.

Внося координаты x_1^i в уравнения (7), мы получим условия на параметр $\lambda = \frac{q}{p}$ той поверхности пучка, которая проходит через точку M_1:

$$pF(x_1^1, x_1^2, x_1^3) + q\Phi(x_1^1, x_1^2, x_1^3) = 0, \tag{b}$$

откуда, если $\Phi(x_1^1, x_1^2, x_1^3) \neq 0$,

$$\lambda = \frac{q}{p} = -\frac{F(x_1^1, x_1^2, x_1^3)}{\Phi(x_1^1, x_1^2, x_1^3)}.$$

Если $\Phi(x_1^1, x_1^2, x_1^3) = 0$, то, по условию, $F(x_1^1, x_1^2, x_1^3) \neq 0$, и уравнение (b) даст

$$p = 0,$$

что соответствует второй поверхности базиса $\Phi = 0$; если

$$F(x_1^1, x_1^2, x_1^3) = 0, \quad \Phi \neq 0,$$

то

$$q = 0,$$

и мы получаем первую поверхность базиса $F = 0$, т. е. во всяком случае одну определённую поверхность.

§ 8. Связка поверхностей

Определение 1. *Связкой поверхностей* называется семейство поверхностей, определяемых уравнением

$$pF(x^1, x^2, x^3) + q\Phi(x^1, x^2, x^3) + r\Psi(x^1, x^2, x^3) = 0, \tag{9}$$

где

$$\lambda = \frac{q}{p}, \quad \mu = \frac{r}{p}$$

суть *параметры* связки.

Поверхности

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0, \quad \Phi(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad \text{и} \quad \Psi(x^1, x^2, x^3) = 0 \tag{a}$$

образуют *базис* связки.

Следствие 1. Каждая поверхность связки проходит через все точки пересечения поверхностей базиса.

Действительно, если $M_0(x_0^i)$ есть точка пересечения трёх поверхностей базиса, то координаты (x_0^i) удовлетворяют всем уравнениям, т. е. обращают в нуль все три функции F, Φ и Ψ. Они обратят тогда в нуль и левую часть уравнения (9), притом при всяком значении коэффициентов p, q, r. Значит, точка $M_0(x_0^i)$ будет лежать на всех поверхностях связки.

Определение 2. Точки пересечения базисных поверхностей связки называются *центрами* связки.

Следствие 2. *Через каждую точку M_1, не принадлежащую к числу центров связки, проходит семейство поверхностей связки, которое образует пучок.*

Пусть $M_1(x_1^i)$ — точка, не принадлежащая к числу центров связки. Её координаты не удовлетворяют системе трёх уравнений (a), стало быть, после подстановки координат (x_1^i) три функции F, Φ или Ψ не обращаются в нуль одновременно.

Внесём эти координаты в уравнение (9); мы получим уравнение.

$$pF(x_1^1, x_1^2, x_1^3) + q\Phi(x_1^1, x_1^2, x_1^3) + r\Psi(x_1^1, x_1^2, x_1^3) = 0, \qquad \text{(b)}$$

где по крайней мере один из коэффициентов F, Φ или Ψ не равен нулю. Если $\Psi \neq 0$, то мы можем найти отсюда параметр r и найденное выражение подставить в уравнение (9). Мы получим уравнение, линейное относительно параметров p и q, следовательно, уравнение вида (7), которое и определит пучок. Каждая поверхность пучка будет проходить через точку M_1, ибо уравнение (b) будет удовлетворено.

Глава IV

ПЛОСКОСТИ В ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно к заданному вектору

Во всех вопросах метрической теории в эвклидовом пространстве мы будем пользоваться декартовой прямоугольной системой координат.

Задача. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно к вектору $\mathbf{N}$.*

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат, и пусть M будет произвольная точка искомой плоскости.

Так как вектор $\overrightarrow{M_1M}$ имеет две точки, общие с плоскостью (начало и конец), то он весь лежит в плоскости, а все прямые плоскости перпендикулярны к вектору N, который перпендикулярен к плоскости. В силу перпендикулярности векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и N дают скалярное произведение, равное нулю:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \mathbf{N} = 0. \qquad \text{(a)}$$

Так как всякий вектор равен разности радиусов-векторов своих конца и начала, то

$$\overrightarrow{M_1M} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_1, \qquad \text{(b)}$$

и уравнение (a) принимает вид:

$$(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_1)\cdot\boldsymbol{N}=0. \tag{1}$$

Обратно, если радиус-вектор $\boldsymbol{M}$ удовлетворяет уравнению (1), то, в силу соотношения (b), имеет место равенство нулю произведения (a), и, следовательно, вектор $\overrightarrow{M_1M}$ перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{N}$, а поскольку точка M_1 лежит в искомой плоскости, то и весь вектор $\overrightarrow{M_1M}$, и его конец M лежат в плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{N}$.

Мы получаем таким образом уравнение плоскости, написанное для радиуса-вектора произвольной точки её.

Если $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ суть координаты этих точек и A, B, C — координаты вектора $\boldsymbol{N}$, так что

$$\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_1=(x-x_1)\boldsymbol{i}+(y-y_1)\boldsymbol{j}+(z-z_1)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{N}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k},$$

то, перемножая скалярно векторы по формуле (4) § 2, гл. I, мы напишем уравнение (1) в координатной форме:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{1'}$$

Так как произвольная плоскость определяется уравнением первой степени, то имеем:

Теорема. *Плоскость есть поверхность первого порядка.*

Если в уравнении (1′) закрепить координаты x_1, y_1, z_1, т. е. точку M_1, и менять коэффициенты A, B, C, то мы получим связку плоскостей (9) § 8, гл. III. Базисными плоскостями связки служат плоскости

$$x-x_1=0,\quad y-y_1=0,\quad z-z_1=0,$$

а центром — точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

§ 2. Нормальное уравнение плоскости

Нормальное уравнение плоскости получится, если выбрать вектор, перпендикулярный к плоскости, единичным и поместить точку M_1 на плоскости в ту точку P (проекция начала), которая является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Единичный вектор, перпендикулярный к плоскости и имеющий направление перпендикуляра $\overrightarrow{OP}$, опущенного из начала координат O на плоскость, мы будем обозначать буквой $\boldsymbol{n}$, а длину этого перпендикуляра — буквой p:

$$p=OP.$$

Радиус-вектор точки P, как вектор, перпендикулярный плоскости (P — основание перпендикуляра), следовательно, коллинеарный вектору $\boldsymbol{n}$ и одинаково направленный, может быть представлен в виде:

$$\boldsymbol{P} = \overrightarrow{OP} = p\boldsymbol{n}.$$

Внося это выражение в уравнение (1) вместо $\boldsymbol{M}_1$ и раскрывая скобки, получим:

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n} - p\boldsymbol{n}^2 = 0,$$

или, так как $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор и $\boldsymbol{n}^2 = 1$:

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n} - p = 0. \tag{2}$$

Это уравнение плоскости называется *нормальным*.

Если ввести текущие координаты точки $M(x, y, z)$ и обозначить координаты единичного вектора $\boldsymbol{n}$ как косинусы углов его α, β, γ с осями координат:

$$\boldsymbol{M} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

то уравнение (2) напишется в координатной форме:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{2'}$$

Это уравнение замечательно тем, что для каждой плоскости оно вполне определено, кроме плоскостей, проходящих через начало координат. Оно содержит три независимых параметра: расстояние плоскости от начала координат p, существенно положительная величина, и два параметра, определяющих направление вектора $\boldsymbol{n}$. По формуле (3), вектор $\boldsymbol{n}$ задан тремя координатами: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, но он — единичный, а потому квадрат его равен единице; по формуле (5) § 2, гл. I, это условие принимает вид:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{4}$$

Неполная определённость нормального уравнения для плоскостей, проходящих через начало координат, объясняется тем, что в этом случае становится неопределённым положительное направление вектора $\overrightarrow{OP}$ — перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат, так как в этом случае длина вектора $\overrightarrow{OP}$ равна нулю, точка P совпадает с началом координат. Следовательно, можно изменить знак у всех координат $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ вектора $\boldsymbol{n}$, не нарушая нормальности уравнения.

§ 3. Приведения уравнения плоскости к нормальному виду

Мы переходим к доказательству второй половины основной теоремы, приведённой в § 1.

Теорема. *Поверхность первого порядка есть плоскость*, иными словами: всякое уравнение первой степени определяет плоскость.

Берём общее уравнение первой степени:

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{5}$$

Если ввести радиус-вектор текущей точки плоскости $M(x, y, z)$ и новый вектор N посредством формул

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}, \\ \mathbf{N} &= A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}, \end{aligned} \tag{6}$$

то по правилу скалярного умножения:

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}=Ax+By+Cz,$$

и уравнение (5) принимает вид:

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}+D=0. \tag{5'}$$

Сравнивая это уравнение с нормальным уравнением плоскости (2), мы видим, что при одинаковой общей структуре они отличаются в двух отношениях: 1) нормальное уравнение содержит единичный вектор $\mathbf{n}$, в то время как в общем уравнении вектор $\mathbf{N}$, определяемый формулой (6), имеет произвольную длину и 2) свободный член нормального уравнения $-p$ всегда отрицателен в то время, как в общем уравнении (5′) D может иметь произвольное значение.

Отсюда вытекает способ приведения общего уравнения (5) к нормальному виду.

Надо прежде всего сделать вектор $\mathbf{N}$ единичным. Для этого надо его разделить на его модуль:

$$N=\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Затем надо получить отрицательный знак у свободного члена, а для этого надо переменить знаки, если свободный член D положителен.

Соединяя вместе эти две операции, мы видим, что нам надо умножить обе части общего уравнения на нормирующий множитель

$$R=\pm\frac{1}{N}=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{7}$$

причём знак нормирующего множителя должен быть противоположен знаку свободного члена.

Таким образом, всякое уравнение первой степени (5) может быть приведено к нормальному виду. Так как нормальное уравнение определяет плоскость, то и общее уравнение (5) определяет плоскость.

Формула (7) теряет смысл, если

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0,$$

но в этом случае уравнение (5) не содержит текущих координат, сводится к невозможному равенству $D=0$ и на эвклидовой плоскости не имеет смысла.

З а м е ч а н и е. Основная теорема об эквивалентности поверхности первого порядка и плоскости распространяется и на произвольную аффинную систему координат.

Действительно, преобразование аффинной системы координат сохраняет степень алгебраического уравнения; следовательно, плоскость, определяемая уравнением первой степени в декартовой системе координат, будет определяться уравнением первой степени и в аффинной. Обратно, всякое уравнение первой степени относительно аффинных координат останется первой степени и после перехода к декартовым прямоугольным и, следовательно, будет определять плоскость.

Рассуждения, которые мы провели, чтобы привести уравнение плоскости к нормальному виду, дают нам, кроме того, замечательный результат. Вектор $\boldsymbol{N}$, определяемый формулой (6), перпендикулярен к плоскости (5). Мы запишем этот результат в виде отдельной теоремы.

Теорема. *Коэффициенты при текущих координатах в уравнении плоскости*

$$Ax+By+Cz+D=0$$

служат координатами вектора

$$\boldsymbol{N}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}, \tag{6'}$$

перпендикулярного плоскости.

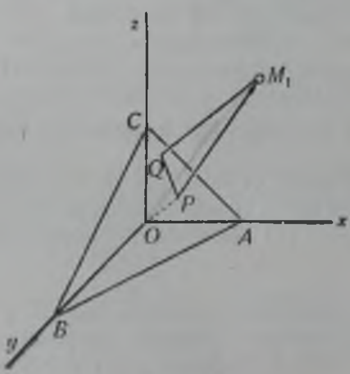
Мы будем называть его *вектором нормали* к плоскости.

§ 4. Расстояние точки от плоскости

Задача. *Найти расстояние точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ от плоскости*

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n}-p=0.$$

Расстояние точки M_1 от плоскости измеряется длиной перпендикуляра M_1Q, опущенного из точки M_1 на плоскость (черт. 77). Так как плоскость перпендикулярна к прямой QM_1, то всякая точка P этой плоскости проектируется на прямую QM_1 в точку Q, а вектор $\overrightarrow{PM_1}$ — в отрезок QM_1. Относительная (взятая со знаком) длина проекции равна скалярному произведению проектируемого вектора $\overrightarrow{PM_1}$ на единичный вектор оси проекций. Выбирая за такой вектор единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости, мы получим искомое расстояние по величине и по знаку в виде:



Черт. 77.

$$d=QM_1=\overrightarrow{PM_1}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{a}$$

При этом расстояние d будет положительно, если отрезок QM_1 направлен в положительном направлении единичного вектора $\boldsymbol{n}$, т. е.

если точка M_1 лежит по другую сторону плоскости по отношению к началу координат.

Выберем за точку плоскости точку P — основание перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат:

$$\boldsymbol{P} = p\boldsymbol{n}.$$

Внося в уравнение (а) значение вектора (разность радиусов-векторов конца и начала)

$$\overrightarrow{PM_1} = \boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{M}_1 - p\boldsymbol{n},$$

получим:

$$d = (\boldsymbol{M}_1 - p\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{n} - p\boldsymbol{n}^2$$

или

$$d = \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{n} - p. \tag{8}$$

Этой формуле можно дать словесную формулировку:

Расстояние точки от плоскости равно левой части нормального уравнения плоскости с заменой текущих координат координатами данной точки.

Пример. Составить уравнение плоскостей, которые делят пополам угол между плоскостями:

$$x + y - 2z - 1 = 0,$$

$$x + y + 2z + 1 = 0.$$

Плоскости, равноделящие двугранный угол, можно определить как геометрическое место точек, равно отстоящих от граней двугранного угла.

Рассмотрим произвольную точку $M(X, Y, Z)$ равноделящей плоскости. Её расстояние от заданных плоскостей определяется величиной левой части нормального уравнения соответственно каждой из этих плоскостей с заменой текущих координат координатами точки M.

Нормирующие множители обоих уравнений равны по абсолютной величине, но различны по знаку: у первого уравнения он положителен, у второго — отрицателен (ибо положителен свободный член $+1$):

$$R = \pm \frac{1}{\sqrt{1+1+4}} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно, искомые расстояния равны:

$$d_1 = \frac{X + Y - 2Z - 1}{\sqrt{6}}, \quad d_2 = -\frac{X + Y + 2Z + 1}{\sqrt{6}}. \tag{b}$$

Для одной равноделящей эти расстояния равны с теми же знаками, для другой — с противоположными знаками. Дело в том, что определение равноделящей как геометрического места точек не учитывает знака расстояния точки от плоскости. Между тем это расстояние по формуле (8) имеет знак, и при переходе через плоскость знак меняется. Чтобы перейти с одной равноделящей на другую, надо пересечь одну и только одну плоскость. Значит, для второй равноделящей изменится знак расстояния от одной плоскости (которую мы пересекали при переходе с одной равноделящей на другую), для другой — расстояние сохраняет знак.

Вносл выражения (b) в уравнения

$$d_1 = d_2, \quad d_1 = -d_2,$$

получаем искомые уравнения равноделящих:

$$1)\ X + Y = 0;$$

$$2)\ 2Z + 1 = 0.$$

§ 5. Уравнение плоскости в отрезках

Рассмотрим в произвольной аффинной системе координат уравнение плоскости

$$A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3 + A_0 = 0. \tag{9}$$

Допустим, что все коэффициенты A_i отличны от нуля. Найдём пересечение плоскости с осями координат. Пусть точка $\mathscr{A}_1$ $(a^1, 0, 0)$ первой оси лежит на плоскости; тогда её координаты удовлетворяют уравнению плоскости. Внося их в уравнение (9), имеем:

$$A_1a^1 + A_0 = 0, \quad a^1 = -\frac{A_0}{A_1}, \tag{10}$$

и аналогично для других осей. Исключая теперь коэффициенты

$$A_i = -\frac{A_0}{a^i},$$

мы получим (после внесения этих выражений в уравнение (9) и сокращения на $-A_0$):

$$\frac{x^1}{a^1} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} = 1. \tag{11}$$

В декартовой системе координат величина a^i, как координата точки $\mathscr{A}_i$ на прямой, даёт по величине и направлению отрезок оси $O\mathscr{A}_i$ и называется *отрезком*, отсекаемым плоскостью на оси координат. Мы сохраним это название и в аффинной системе координат и будем называть уравнение (11) *уравнением плоскости в отрезках*.

§ 6. Построение плоскости по её уравнению

Пусть нам дана плоскость своим уравнением относительно аффинной (в частности, декартовой прямоугольной) системы координат:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Чтобы построить её, рассмотрим случаи:

1. Если все коэффициенты уравнения отличны от нуля, то можно найти координаты трёх различных точек пересечения плоскости с осями координат. По трём точкам нетрудно построить плоскость.

Например, дана плоскость в прямоугольной декартовой системе координат:

$$2x + y + 2z = 2.$$

Отрезки равны

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1.$$

Положение плоскости определяется треугольником $\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}$, который высекается на ней плоскостями координат (черт. 78).

2. Если отсутствует одна из текущих координат, например координата z, то надо считать один из коэффициентов равным нулю, например коэффициент C.

По формуле (10) мы не найдём координаты точки пересечения с осью Oz, т. е. плоскость будет параллельна оси Oz.

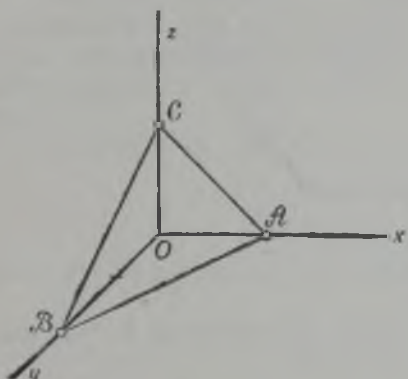
Например, дана плоскость в аффинной системе координат:

$$2x^1 + x^2 = 2.$$

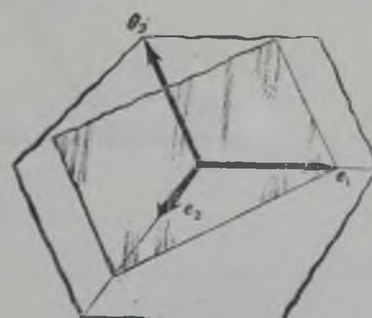
Отрезки на первых двух осях равны

$$a = 1, \quad b = 2.$$

Координаты x^3 в уравнении нет; плоскость параллельна оси e_3 (черт. 79).



Черт. 78.



Черт. 79

3. Если уравнение плоскости не содержит свободного члена, то по формуле (10) все отрезки на осях координат равны нулю; плоскость проходит через начало координат.

Это даёт нам одну точку плоскости. Чтобы построить плоскость, надо найти ещё две точки. Их можно искать в координатных плоскостях.

Например, дана плоскость в декартовой системе координат:

$$2x - y - 2z = 0.$$

Плоскость проходит через начало координат, ибо уравнение её не содержит свободного члена.

Полагая $z = 0$, мы можем принять

$$x = 1, \; y = 2.$$

С другой стороны, полагая $y = 0$, мы удовлетворим уравнению значениями

$$x = 1, \quad z = 1.$$

Эти точки определяют положение плоскости (черт. 79а).

4. Если уравнение не содержит свободного члена и одной из текущих координат (например, z), то плоскость проходит через начало координат и параллельна оси Oz, т. е. содержит ось Oz. Достаточно построить ещё одну точку, чтобы определить её положение.

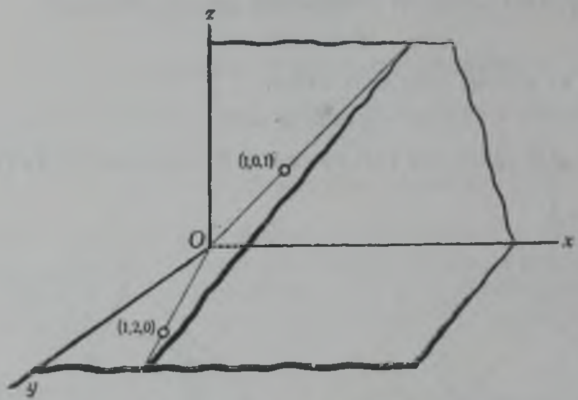
Например, для плоскости

$$x - 2y = 0$$

достаточно указать точку

$$x=2, \quad y=1, \quad z=0.$$

5. Если отсутствуют две текущие координаты, то плоскость параллельна двум осям координат; в декартовой прямоугольной системе координат она



Черт. 79а.

будет перпендикулярна к третьей оси. Отрезок, отсекаемый на третьей оси, определяет её положение.

Например, для плоскости

$$2z=3$$

отрезок c равен $\frac{3}{2}$.

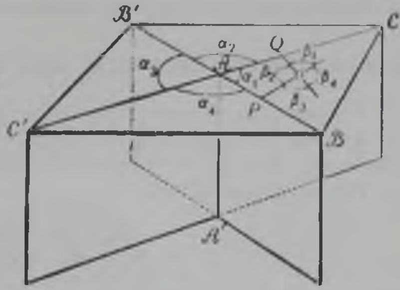
6. Если отсутствуют две текущие координаты и свободный член, то плоскость пройдёт, кроме того, через начало координат и совпадёт с координатной плоскостью, например

$$z=0.$$

§ 7. Угол двух плоскостей

Двугранный угол измеряется линейным углом, который можно построить, пересекая двугранный угол плоскостью, перпендикулярной к его ребру.

Так как углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны (если они оба острые или оба тупые) или в сумме составляют два прямых (если один острый, а другой тупой), то можно измерять двугранный угол посредством угла между перпендикулярами, опущенными на его грани из произвольной точки пространства, например из начала координат. Достаточно провести через два перпендикуляра из начала координат OP, OQ плоскость, которая тем самым будет перпендикулярна к граням двугранного угла и, значит, к его ребру, чтобы получить в этой плоскости четыре угла: α_1, α_2, α_3, α_4, попарно равных (черт. 80). Они будут служить линейными углами четырёх двугранных углов, образованных пересечением двух плоскостей $\mathscr{C}'\mathscr{A}\mathscr{A}'$ и $\mathscr{B}\mathscr{A}\mathscr{A}'$. В той же плоскости $\mathscr{B}\mathscr{C}\mathscr{B}'\mathscr{C}'$ лежат четыре угла β_1, β_2 β_3, β_4, образованные перпендикулярами OP, OQ. Стороны углов α_i и β_i соответственно перпендикулярны, ибо перпендикуляр OP к плоскости $\mathscr{A}\mathscr{A}'\mathscr{B}$ перпендикулярен ко всякой прямой $\mathscr{A}\mathscr{B}$, лежащей в этой плоскости.



Черт. 80.

Отсюда и следует попарное равенство углов α_i и β_i:

$$\alpha_i = \beta_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

т. е. четыре угла между двумя плоскостями соответственно равны углам между векторами, перпендикулярными к этим плоскостям.

Следовательно, определение угла между плоскостями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

сводится к определению угла между их векторами нормали

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_1 = A_1\boldsymbol{i} + B_1\boldsymbol{j} + C_1\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{N}_2 = A_2\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + C_2\boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{b}$$

откуда по формуле (7′) § 3, гл. I, имеем для угла φ между плоскостями (a) формулу:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{12}$$

Теорема. *Угол между плоскостями равен углу между их векторами нормали, определяемому по формуле* (12).

При этом мы устанавливаем для каждой плоскости положительную сторону, которая определяется направлением её вектора нормали $\boldsymbol{N}$. Угол двух плоскостей определяется как угол, на который надо повернуть одну из них, чтобы её положительная сторона совпала с положительной стороной другой.

Отсюда вытекают условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Условие параллельности. *Две плоскости параллельны, если коэффициенты при текущих координатах их уравнений пропорциональны*:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{13}$$

Действительно, плоскости (a) параллельны, если параллельны их векторы нормали $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$, т. е. если пропорциональны координаты этих векторов (b).

Условие перпендикулярности. *Две плоскости* (a) *перпендикулярны, если*

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0, \tag{14}$$

ибо при этом условии перпендикулярны их векторы нормали $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$.

§ 8. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Рассмотрим общую аффинную систему координат $(O;\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)$.

Задача 1. *Провести плоскость через точку $M_1(x_1^i)$ параллельно векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.*

Пусть точка $M(x^i)$ — произвольная точка плоскости. Вектор

$$\overrightarrow{M_1M}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_1=(x^i-x_1^i)\,\boldsymbol{e}_i \quad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по}\\ i=1,\ 2,\ 3\end{matrix}\right)$$

лежит в искомой плоскости, а так как векторы

$$\boldsymbol{a}=a^i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{b}=b^i\boldsymbol{e}_i \quad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по}\\ i=1,\ 2,\ 3\end{matrix}\right)$$

параллельны плоскости, то три вектора $\overrightarrow{M_1M}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ компланарны и скалярное произведение их равно нулю (§ 6, гл. I):

$$(\overrightarrow{M_1M}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})=0. \tag{a}$$

Обратно, если это произведение равно нулю, то векторы компланарны, и, следовательно, точка M лежит в плоскости, проходящей через точку M_1, параллельно векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Так как

$$\overrightarrow{M_1M}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_1,$$

то уравнение (a) принимает вид:

$$(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})=0, \tag{15}$$

или в координатной форме, по формуле (13) § 6, гл. I,

$$\begin{vmatrix} x^1-x_1^1 & x^2-x_1^2 & x^3-x_1^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}=0. \tag{15'}$$

В декартовой системе координат можно было найти вектор нормали искомой плоскости по формуле

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

и тогда задача решалась бы уравнением (1) § 1.

Задача 2. *Провести плоскость через три точки:* $M_1(x_1^i)$, $M_2(x_2^i)$, $M_3(x_3^i)$.

Эту задачу можно привести к предыдущей, если положить

$$a = \overrightarrow{M_1M_2} = M_2 - M_1,$$

$$b = \overrightarrow{M_1M_3} = M_3 - M_1,$$

так как векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$, лежащие в плоскости, конечно, будут ей параллельны.

Уравнение плоскости напишется в виде:

$$(M - M_1,\ \ M_2 - M_1,\ \ M_3 - M_1) = 0, \tag{16}$$

или

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_1^1 & x^2 - x_1^2 & x^3 - x_1^3 \\ x_2^1 - x_1^1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 \\ x_3^1 - x_1^1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 \end{vmatrix} = 0. \tag{16'}$$

Глава V

ПРЯМЫЕ В ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Уравнения прямой

Пользуемся общей аффинной системой координат.

Задача. *Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0^i)$ параллельно вектору L*

$$L = l^i e_i \qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по} \\ i = 1, 2, 3\end{pmatrix}.$$

Вектор L будем называть *вектором направления прямой.*

Пусть точка $M(x^i)$ — произвольная точка прямой.

$$\text{Вектор } \overrightarrow{M_0M} = M - M_0 = (x^i - x_0^i)\, e_i \qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по} \\ i = 1, 2, 3\end{pmatrix}$$

лежит на прямой, следовательно, параллелен (коллинеарен) вектору L. По теореме о коллинеарных векторах (§ 3, гл. I, часть первая) найдётся скаляр t так, что

$$\overrightarrow{M_0M} = tL. \tag{a}$$

Обратно, если уравнение (а) имеет место, то вектор $\overrightarrow{M_0M}$ параллелен вектору L, и точка M лежит на прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору L.

Внося в уравнение (а) выражение вектора $\overrightarrow{M_0M}$ через радиусы-векторы, получим *уравнение в параметрической форме*:

$$M - M_0 = tL, \tag{1}$$

или то же уравнение в координатной форме (если векторы равны, то равны их одноимённые координаты):

$$x^i - x_0^i = tl^i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (1')$$

Система уравнения (1′) состоит из трёх уравнений для трёх координат точки M и параметра t; при различных значениях t формулы (1′) дадут все координаты x^i любой точки M на прямой.

Чтобы получить уравнения только между заданными величинами (координатами вектора $\boldsymbol{L}$ и точки M_0) и текущими координатами, надо исключить параметр t.

Возможны три случая:

1. Ни одна из координат l^i вектора $\boldsymbol{L}$ не равна нулю. Вектор $\boldsymbol{L}$ (а значит, и прямая) не параллелен координатным плоскостям.

Мы можем определить из каждого уравнения (1′) значение параметра t:

$$t = \frac{x^i - x_0^i}{l^i}$$

и сравнить полученные выражения:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{l^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{l^2} = \frac{x^3 - x_0^3}{l^3}. \qquad (2)$$

Здесь — два независимых уравнения по числу знаков равенства. Они иногда называются каноническими, хотя и не определяются заданием прямой, ибо, очевидно, точку M_0 можно выбирать где угодно на прямой, и перемещение точки M_0 по прямой меняет уравнения.

2. Одна из координат вектора направления, например l^3, равна нулю. Вектор $\boldsymbol{L}$, а значит, и прямая параллельны плоскости $(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$.

Одно из уравнений (1′) (третье) совсем не содержит параметра t. Уравнения (2) принимают вид:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{l^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{l^2}, \quad x^3 - x_0^3 = 0. \qquad (2a)$$

3. Две координаты, например l^1, l^2, равны нулю. Вектор $\boldsymbol{L}$, а значит, и прямая параллельны третьей оси.

Два уравнения (1′) не содержат параметра:

$$x^1 - x_0^1 = 0, \quad x^2 - x_0^2 = 0. \qquad (2b)$$

Они составляют все уравнения прямой. Третья координата произвольна, и третье уравнение

$$x^3 - x_0^3 = tl^3$$

может служить только для определения параметра t (что нас не интересует).

Канонические уравнения (2) и ещё более параметрические (1), (1′) имеют большое значение в теории прямой, ибо вводят основные элементы, определяющие прямую: координаты некоторой точки M_0, через которую прямая проходит, и, особенно, вектор направления $\boldsymbol{L}$, параллельный прямой.

§ 2. Прямая, проходящая через две точки

Система координат аффинная.

Задача. *Провести прямую через две точки* $M_1(x_1^i)$ и $M_2(x_2^i)$.

Мы можем принять за вектор направления $\boldsymbol{L}$ вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, соединяющий две заданные точки: он лежит на прямой и тем самым ей параллелен:

$$\boldsymbol{L} = \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1 = (x_2^i - x_1^i)\,\boldsymbol{e}_i \quad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по}\\ i = 1,\ 2,\ 3\end{matrix}\right).$$

Уравнения прямой (1) примут вид:

$$\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}_1 = t(\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1). \tag{3}$$

Если ни одна из разностей $x_2^i - x_1^i$ не равна нулю, то можно написать уравнения (3) в канонической форме (2):

$$\frac{x^1 - x_1^1}{x_2^1 - x_1^1} = \frac{x^2 - x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{x^3 - x_1^3}{x_2^3 - x_1^3}. \tag{3'}$$

§ 3. Приведение системы уравнений прямой к каноническому виду

Пусть прямая задана в аффинной системе координат уравнениями двух плоскостей:

$$\begin{aligned} A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3 + A_0 = 0,\\ B_1x^1 + B_2x^2 + B_3x^3 + B_0 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Как привести эту систему к виду (2)?

Заметим прежде всего, что две плоскости в эвклидовом пространстве не всегда определяют прямую: они могут быть параллельны, и тогда они не будут иметь ни одной общей точки (собственной).

Плоскости параллельны, если коэффициенты при текущих координатах пропорциональны (ранг матрицы коэффициентов равен единице). Следовательно, чтобы система (4) определяла прямую, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{Vmatrix}$$

равнялся двум, т. е. по крайней мере один из определителей матрицы, например первый, был отличен от нуля:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда систему (4)

$$A_1x^1+A_2x^2=-A_3x^3-A_0,$$
$$B_1x^1+B_2x^2=-B_3x^3-B_0$$

можно разрешить относительно неизвестных x_1, x_2:

$$x^1=\frac{\begin{vmatrix}-A_3x^3-A_0, & A_2\\ -B_3x^3-B_0, & B_2\end{vmatrix}}{\Delta_1},\quad x^2=\frac{\begin{vmatrix}A_1, & -A_3x^3-A_0\\ B_1, & -B_3x^3-B_0\end{vmatrix}}{\Delta_1}.$$

Эти формулы линейны относительно координаты x_3:

$$x^1=-\frac{\begin{vmatrix}A_0 & A_2\\ B_0 & B_2\end{vmatrix}}{\Delta_1}-\frac{\begin{vmatrix}A_3 & A_2\\ B_3 & B_2\end{vmatrix}}{\Delta_1}x^3,\quad x^2=-\frac{\begin{vmatrix}A_1 & A_0\\ B_1 & B_0\end{vmatrix}}{\Delta_1}-\frac{\begin{vmatrix}A_1 & A_3\\ B_1 & B_3\end{vmatrix}}{\Delta_1}x^3.$$

Они имеют вид:

$$x^1=x_0^1+l^1x^3,\quad x^2=x_0^2+l^2x^3.$$

Вводя параметр t посредством уравнения

$$x^3=t,$$

мы приведём их к виду (1′):

$$x^i=x_0^i+tl^i \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

где

$$x_0^3=0,\quad l^3=1.$$

Первое из этих допущений показывает, что мы выбрали точку M_0 на прямой в точке пересечения её с координатной плоскостью ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$). Существование этой точки пересечения следует из условия $\Delta_1\neq 0$.

Заметим, что определение вектора направления прямой в декартовой системе координат (что наиболее интересно) может быть сделано по формуле:

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ — векторы нормалей плоскостей (4):

$$\boldsymbol{N}_1=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{N}_2=B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k}.$$

Действительно, искомый вектор направления $\boldsymbol{L}$, параллельный линии пересечения плоскостей (4), должен быть параллелен каждой плоскости в отдельности, следовательно, перпендикулярен к вектору нормали той и другой; а векторное произведение и определяет вектор, перпендикулярный к обоим множителям. Все остальные векторы этого направления отличаются от него только скалярным множителем. Меняя модуль или положительное направление на прямой, мы можем считать $\boldsymbol{L}$ равным этому векторному произведению.

Пример. Привести к каноническому виду систему уравнений прямой:

$$2x+2y+z-1=0,$$
$$x+y+2z-2=0.$$

Матрица

$$\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

имеет ранг 2, но первый определитель равен нулю. Можно решать систему, например, относительно y и z.

Исключая y или z (например, способом уравнения коэффициентов), находим:

$$z = 1, \quad y = -x.$$

Полагая $x = t$, получим систему ($1'$) в виде:

$$x = t, \; y = -t, \; z = 1.$$

§ 4. Угол двух прямых

Система координат декартова — прямоугольная.

Угол двух прямых равен углу между векторами направлений их $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$.

По формуле (7) § 3, гл. I, имеем для угла φ между прямыми формулу:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2}{\sqrt{\boldsymbol{L}_1^2} \cdot \sqrt{\boldsymbol{L}_2^2}}, \tag{6}$$

или, в координатной форме, если

$$\boldsymbol{L}_1 = l_1\boldsymbol{i} + m_1\boldsymbol{j} + n_1\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{L}_2 = l_2\boldsymbol{i} + m_2\boldsymbol{j} + n_2\boldsymbol{k},$$

имеем:

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{6'}$$

Отсюда:

1. Условие параллельности. *Прямые параллельны, если их векторы направлений коллинеарны:*

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{7}$$

2. Условие перпендикулярности. *Прямые перпендикулярны, если*

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \tag{8}$$

Пример. Провести через начало координат прямую параллельно прямой:

$$\begin{aligned} 2x + y - z + 3 &= 0, \\ 5x + 4y + 11z - 4 &= 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Мы можем найти вектор направления прямой по формуле (5), и тогда ответ напишется в форме уравнения ($1'$), но можно решить задачу проще. Нетрудно заметить, что через прямую, параллельную ребру двугранного угла, всегда можно провести плоскости, параллельные его граням, — стоит только из какой-нибудь точки заданной прямой провести прямые, параллельные сторонам линейного угла, построенного для заданного двугранного. Вместе с заданной прямой они и определят две плоскости, параллельные его граням.

Плоскости (а) можно рассматривать как грани двугранного угла, ребром которого служит заданная прямая. Мы можем искать прямую, ей параллельную, отыскивая плоскости, параллельные плоскостям (а) и проходящие через начало координат.

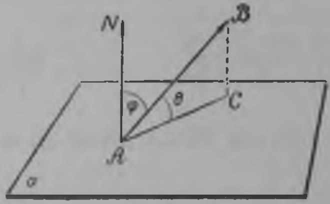
Уравнения таких плоскостей пишутся непосредственно. Параллельные плоскости имеют общий вектор нормали (или коллинеарные векторы); следовательно, можно сохранить те же коэффициенты при текущих координатах. Что касается свободного члена, то он должен равняться нулю, ибо плоскости проходят через начало координат. Следовательно, искомая прямая определяется уравнениями:

$$2x + y - z = 0,$$
$$5x + 4y + 11z = 0.$$

§ 5. Угол прямой и плоскости

Углом прямой с плоскостью называется угол прямой с её проекцией на плоскость.

Если прямая пересекает плоскость α в точке $\mathscr{A}$ (если она параллельна, то угол их равен нулю), то плоскость $\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}$, содержащая прямую $\mathscr{A}\mathscr{B}$ и её проекцию $\mathscr{A}\mathscr{C}$, перпендикулярна к плоскости α и, следовательно, будет содержать вектор нормали $\overrightarrow{\mathscr{A}N}$, проведённый из точки $\mathscr{A}$ (черт. 81). При этом $\angle N\mathscr{A}\mathscr{C}$, как угол перпендикуляра с плоскостью, равен прямому, и углы $\varphi = \angle N\mathscr{A}\mathscr{B}$ и $\theta = \angle \mathscr{B}\mathscr{A}\mathscr{C}$ — дополнительные:



Черт. 81.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta; \quad \cos\varphi = \sin\theta.$$

Угол φ определяется по формуле (7) § 3, гл. I, как угол векторов $N = \overrightarrow{\mathscr{A}N}$ и $L = \overrightarrow{\mathscr{A}\mathscr{B}}$. Следовательно, угол θ между прямой и плоскостью определяется через свой синус:

$$\sin\theta = \frac{N \cdot L}{\sqrt{N^2} \cdot \sqrt{L^2}}, \tag{9}$$

или в координатной форме в декартовой прямоугольной системе координат, если

$$N = Ai + Bj + Ck, \quad L = li + mj + nk,$$

имеем:

$$\sin\theta = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{9'}$$

Отсюда:

1. Условие параллельности. *Прямая параллельна плоскости, если она перпендикулярна к её вектору нормали*, т. е. при условии:

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{10}$$

При этом $\sin\theta = 0$ и $\theta = 0$ (или π).

Это условие сохраняет свою силу и в аффинной системе координат. Действительно, уравнение (1′) § 1, гл. IV,

$$A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) + A_3(x^3 - x_0^3) = 0 \tag{a}$$

определяет уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0^i)$, как уравнение связи плоскостей (9) § 8, гл. III, с базисными плоскостями

$$x_1^1 - x_0^1 = 0, \quad x_2^2 - x_0^2 = 0, \quad x_3^3 - x_0^3 = 0,$$

которые определяют центр связки $M_0(x_0^i)$.

В силу параллельности прямой и плоскости мы можем перенести вектор направления прямой $\boldsymbol{L}$ так, чтобы он лёг на плоскость.

Если мы поместим точку M в конце вектора

$$\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{L},$$

который равен вектору направления прямой, то координаты их будут равны:

$$l^i = x^i - x_0^i, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Внося эти значения в уравнение (a), мы непосредственно получим условие (10):

$$A_1l^1 + A_2l^2 + A_3l^3 = 0. \tag{10′}$$

2. Условие перпендикулярности. *Прямая перпендикулярна плоскости, если она параллельна её вектору нормали*, т. е. при условии

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \tag{11}$$

Пример. Опустить из точки $M_1(1, 2, 1)$ перпендикуляр на плоскость

$$2x - z = 11.$$

Искомая прямая проходит через точку $M_1(1, 2, 1)$ и имеет вектором направления вектор нормали

$$\boldsymbol{N} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$$

или вектор, ему коллинеарный. Полагая $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{N}$, напишем уравнения прямой в виде (1′) § 1:

$$\begin{aligned} x - 1 &= 2t, \\ y - 2 &= 0, \\ z - 1 &= -t, \end{aligned}$$

или в форме (2a):

$$\frac{x-1}{2}=\frac{z-1}{-1}, \quad y-2=0.$$

§ 6. Условие расположения прямой в плоскости

Система координат аффинная.

Задача. *Даны плоскость и прямая:*

$$A_1x^1+A_2x^2+A_3x^3+A_0=0,$$
$$\frac{x^1-x_0^1}{l^1}=\frac{x^2-x_0^2}{l^2}=\frac{x^3-x_0^3}{l^3}.$$

При каком условии прямая лежит в плоскости?

Если плоскость содержит прямую, то она содержит и её точку $M_0(x_0^i)$ и, кроме того, если прямая лежит в плоскости, то она несомненно ей параллельна, т. е. имеет место тождество (10′).

Следовательно, необходимо, чтобы удовлетворялись равенства

$$\begin{gathered} A_1x_0^1+A_2x_0^2+A_3x_0^3+A_0=0, \\ A_1l^1+A_2l^2+A_3l^3=0. \end{gathered} \tag{a}$$

Обратно, из условий (a) следует, что прямая параллельна плоскости и имеет с ней общую точку, — значит, целиком лежит в плоскости.

§ 7. Плоскость, проходящая через точку и прямую

Система координат аффинная.

Задача. *Дана прямая*

$$\frac{x^1-x_0^1}{l^1}=\frac{x^2-x_0^2}{l^2}=\frac{x^3-x_0^3}{l^3}$$

и точка $M_1(x_1^i)$. Написать уравнение плоскости, которая их содержит.

Условия задачи эквивалентны следующим: написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_0(x_0^i)$ и $M_1(x_1^i)$ параллельно вектору $\boldsymbol{L}=l^i\boldsymbol{e}_i$; или ещё иначе: написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0^i)$ параллельно двум векторам $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\boldsymbol{L}$.

Внося в уравнение (15) § 8, гл. IV, вместо вектора $\boldsymbol{a}$ вектор

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_0M_1}=\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{M}_0,$$

получим:

$$(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_0,\ \boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{M}_0,\ \boldsymbol{L})=0, \tag{12}$$

или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & x^2 - x_0^2 & x^3 - x_0^3 \\ x_1^1 - x_0^1 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 \\ l^1 & l^2 & l^3 \end{vmatrix} = 0. \tag{12'}$$

Ту же задачу можно решить иначе, как это будет видно из примера.

Пример. Провести плоскость через начало координат и прямую:

$$\begin{aligned} 2x - y + z + 1 &= 0, \\ 4x - 2y + 3z + 2 &= 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Все плоскости, проходящие через прямую, принадлежат пучку плоскостей (7) § 7, гл. III, с базисными плоскостями (a):

$$p(2x - y + z + 1) + q(4x - 2y + 3z + 2) = 0. \tag{b}$$

Так как искомая плоскость проходит через начало координат, то для неё уравнение (b) должно удовлетворяться значениями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Внося их туда, получим:

$$p + 2q = 0.$$

Полагая $q = 1$, будем иметь $p = -2$ и, подсчитывая коэффициенты уравнения (b), получим уравнение искомой плоскости

$$z = 0.$$

§ 8. Условие пересечения двух прямых

Система координат аффинная.

Задача. *Даны прямые*:

$$\begin{aligned} M &= M_1 + tL_1, \\ M &= M_2 + tL_2. \end{aligned} \tag{a}$$

При каком условии они лежат в одной плоскости?

Если они лежат в одной плоскости, то эта плоскость, очевидно, содержит точки M_1, M_2 и, следовательно, вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = M_2 - M_1.$$

Значит, три вектора L_1, L_2 и $\overrightarrow{M_1M_2}$ параллельны одной плоскости (компланарны), а тройное скалярное произведение их равно нулю (следствие 5, § 10, гл. I). Мы нашли необходимое условие расположения прямых (a) в одной плоскости:

$$(L_1L_2,\ M_2 - M_1) = 0. \tag{13}$$

Оно достаточно. Если условие (13) удовлетворено, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ будет параллелен плоскости, проходящей через точку M_1 параллельно векторам L_1, L_2, но он имеет с этой плоскостью общую точку M_1, следовательно, целиком в ней лежит. По тем же соображениям в этой плоскости будет лежать и та и другая прямая: каждая из них параллельна плоскости и имеет с ней общую точку M_1 или M_2.

Заметим, что прямые, находясь в одной плоскости, или пересекаются, или параллельны.

§ 9*. Дважды векторное произведение трёх векторов

Теорема. *Для всяких трёх векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *имеет место тождество*

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}). \tag{14}$$

Обозначая искомое произведение буквой $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

и помня, что векторное произведение $\boldsymbol{x}$ перпендикулярно к своим множителям, будем иметь:

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = 0, \quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}) = 0. \tag{a}$$

Обращение в нуль тройного произведения имеет следствием линейную зависимость векторов

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b} + x_2\boldsymbol{c}.$$

Откуда, подставляя в первое уравнение (a), получим:

$$x_1(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) + x_2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) = 0,$$

или, вводя скалярный множитель пропорциональности t,

$$x_1 = t(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}), \quad x_2 = -t(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$$

и значит:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = t\{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\}. \tag{b}$$

Остаётся определить коэффициент t.

Заметим прежде всего, что *без стеснения общности можно считать вектор* $\boldsymbol{c}$ *перпендикулярным к вектору* $\boldsymbol{b}$. Действительно, разложим $\boldsymbol{c}$ на два компонента, из которых первый параллелен вектору $\boldsymbol{b}$, а второй к нему перпендикулярен:

$$\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_2.$$

Тогда будем иметь:

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times (\lambda\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_2) = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}_2;$$

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_2) - (\lambda\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_2)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_2) - \boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b});$$

первый компонент пропадает и в левой, и в правой части равенства (b). Следовательно, мы можем считать $\boldsymbol{c}$ перпендикулярным к $\boldsymbol{b}$.

Аналогично, можно считать, что *вектор* $\boldsymbol{a}$ *перпендикулярен к произведению* $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, ибо компонент, параллельный ему, пропадает и в левой, и в правой части равенства (b). Если $\boldsymbol{a}$ перпендикулярно к произведению $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы.

Заметим ещё, что равенство (b), очевидно, не зависит от выбора координатных векторов. Поэтому для простоты счёта мы можем выбрать векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ параллельными $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Тогда

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{i} + a^2\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{b} = b\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{c} = c\boldsymbol{j};$$

значит,

$$b \times c = bck, \quad ac = a^2c, \quad ab = a^1b,$$

откуда

$$a \times (b \times c) = (a^1i + a^2j) \times bck = a^2bci - a^1bcj,$$

$$b(ac) - c(ab) = a^2bci - a^1bcj$$

и, следовательно, $t = 1$, т. е. теорема доказана.

§ 10*. Теорема Лапласа

Теорема. *Для всяких четырёх векторов* a, b, c *и* d *имеет место тождество*:

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c). \tag{15}$$

Обозначим

$$x = c \times d;$$

тогда

$$I = (a \times b) \cdot (c \times d) = (a \times b) \cdot x = (abx) = a \cdot (b \times x). \tag{a}$$

С другой стороны, по формуле (14):

$$b \times x = b \times (c \times d) = c(b \cdot d) - d(b \cdot c).$$

Внося это в уравнение (a), получим тождество (15).

§ 11*. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

Две прямые

$$\begin{aligned} M &= M_1 + tL_1, \\ M &= M_2 + tL_2 \end{aligned} \tag{a}$$

скрещиваются, если они не лежат в одной плоскости.

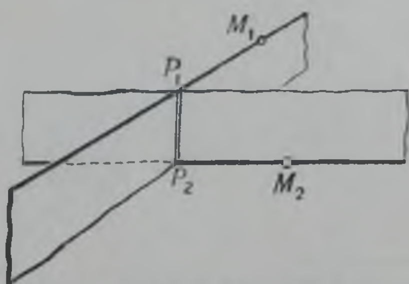
Расстояние между ними измеряется отрезком их общего перпендикуляра между точками пересечения с прямыми.

Направление такого перпендикуляра определяется формулой:

$$L = L_1 \times L_2.$$

Как векторное произведение вектор L перпендикулярен к обоим множителям, т. е. к обеим прямым.

Существование прямой, перпендикулярной к обеим заданным прямым и пересекающейся с ними, легко доказывается, если через каждую прямую провести плоскость, параллельную вектору L. Линия пересечения этих двух плоскостей должна быть сама параллельна вектору L, т. е. перпендикулярна к обеим прямым, а так как по построению она лежит с каждой из них в одной плоскости, то она и пересекает каждую.



Черт. 82.

Обозначим эти точки пересечения P_1, P_2 (черт. 82). Возьмём какие-нибудь две точки, например M_1 и M_2, на наших прямых и спроектируем на прямую P_1P_2. Нетрудно видеть, что проекцией точки M_1 будет точка P_1, а M_2 спроектируется в P_2. Для этого надо только доказать, что отрезок M_1P_1 перпендикулярен к P_1P_2, но это очевидно, ибо M_1P_1 есть отрезок первой прямой, перпендикулярной к своему общему перпендикуляру P_1P_2.

Отсюда вытекает равенство:

$$P_1P_2 = \text{пр.}_L \overrightarrow{M_1M_2}.$$

Величина проекции определяется скалярным произведением проектируемого вектора на единичный вектор оси проекции.

Проектируется вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = M_2 - M_1.$$

Что касается до единичного вектора оси проекций, то он получится, если мы разделим вектор L на его модуль.

Чтобы определить модуль вектора L, возвышаем его в квадрат, пользуясь формулой Лапласа (15):

$$L^2 = \boldsymbol{L}^2 = (\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2)^2 = (\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2) \cdot (\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2) = L_1^2 L_2^2 - (\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2)^2,$$

и искомое расстояние равно

$$d = P_1P_2 = \frac{(\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1) \cdot (\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2)}{\sqrt{L_1^2 L_2^2 - (\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2)^2}}. \qquad (16)$$

§ 12*. Перпендикуляр, опущенный из точки на прямую

Задача. *Дана прямая*

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + t\boldsymbol{L} \qquad (a)$$

и точка M_1. Найти уравнение и длину перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую (a).

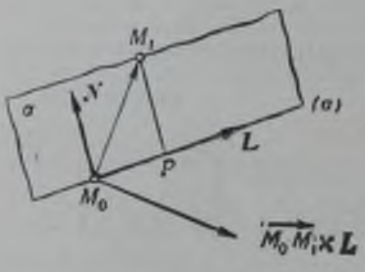
Определим прежде всего направление этого перпендикуляра. С этой целью заметим, что векторное произведение

$$\overrightarrow{M_0M_1} \times \boldsymbol{L} \qquad (b)$$

определяет вектор, перпендикулярный к прямой (a) и к прямой M_0M_1, т. е. к плоскости α, определяемой прямой (a) и точкой M_1 (черт. 83). Умножая векторно это произведение ещё раз на $\boldsymbol{L}$, получим вектор

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{L} \times (\overrightarrow{M_0M_1} \times \boldsymbol{L}),$$

перпендикулярный к вектору (b), т. е. лежащий в плоскости α (или параллельный ей) и в то же время перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{L}$, т. е. к прямой (a). Это и есть вектор, дающий направление перпендикуляра M_1P, опущенного из точки M_1 на прямую (a).



Черт. 83.

Теперь уравнение искомого перпендикуляра напишется по формуле (1) §1:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + t\boldsymbol{N}.$$

Длина перпендикуляра получится, как высота параллелограма со сторонами $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\boldsymbol{L}$:

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \boldsymbol{L}|}{|\boldsymbol{L}|}. \qquad (17)$$

Эта задача иногда проще решается другим способом, как мы это покажем на следующем примере.

Пример. Опустить перпендикуляр из начала координат на прямую

$$\begin{aligned} x+y&=0, \\ z-1&=0 \end{aligned} \tag{c}$$

и найти его длину.

Вектор направления $\boldsymbol{L}$ прямой получается как векторное произведение векторов нормалей

$$\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{k}$$

в виде

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}.$$

Искомый перпендикуляр можно представить как пересечение следующих плоскостей:

1) плоскости, проходящей через прямую (c) и начало координат; этому удовлетворяет первая из базисных плоскостей (c):

$$x+y=0; \tag{d$_1$}$$

2) плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к прямой (c). Принимая за вектор нормали вектор $\boldsymbol{L}$, имеем уравнение:

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{L}=0$$

или

$$x-y=0. \tag{d$_2$}$$

Два уравнения (d_1) и (d_2) определяют ось Oz:

$$x=0, \quad y=0.$$

Далее решение задачи очевидно, ибо ось z пересекает прямую (c) в точке (0, 0, 1) на расстоянии единицы длины от начала координат.

Глава VI

ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Однородные координаты точки

Возьмём произвольную аффинную систему координат с началом O и координатными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Если радиус-вектор точки M равен

$$\boldsymbol{M} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3,$$

то три числа x, y, z называются аффинными координатами точки M.

Введём четыре числа x^1, x^2, x^3, x^0 так, чтобы имели место равенства:

$$x=\frac{x^1}{x^0}, \quad y=\frac{x^2}{x^0}, \quad z=\frac{x^3}{x^0}. \tag{1}$$

Тогда каждой четвёрке чисел x^α ($\alpha=0, 1, 2, 3$), если $x^0\neq 0$, соответствует по формулам (1) тройка аффинных координат (x, y, z) и, следовательно, точка в пространстве.

Обратно, каждой точке M, т. е. тройке аффинных координат (x, y, z), соответствует бесконечное множество четвёрок (x^α), пропорциональных между собой, ибо формулы (1) определяют только отношения чисел $x^1 : x^2 : x^3 : x^0$ и допускают умножение всех их на одно число.

Четыре числа (x^α), удовлетворяющие равенствам (1), называются *однородными координатами* точки в пространстве, потому что всякое алгебраическое уравнение между тремя координатами x, y, z после подстановки (1) и умножения на подходящую степень x^0 становится однородным относительно координат x^1, x^2, x^3, x^0.

Старые координаты x, y, z в отличие от однородных называются *неоднородными*.

Если выбрать $x^0 = 1$, то формулы (1) дадут

$$x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3.$$

Следовательно, неоднородные координаты можно рассматривать как частный случай однородных, когда четвёртая координата выбрана равной единице.

§ 2. Проективное пространство

Проективное пространство можно ввести абстрактным способом с помощью таких определений.

Определение I. *Точкой* называется четвёрка действительных чисел x^1, x^2, x^3, x^0, не равных одновременно нулю, и все им пропорциональные tx^1, tx^2, tx^3, tx^0. Самые числа (x^α) $(\alpha = 1, 2, 3, 0)$ называются *координатами* (однородными) этой точки.

Точки проективного пространства подчиняются требованиям:

1. Умножение всех четырех координат на одно число не меняет точки.

2. Совокупность точек, координаты которых удовлетворяют одному однородному уравнению первой степени

$$A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3 + A_0x^0 = 0, \tag{2}$$

называется *плоскостью*.

3. Совокупность точек, координаты которых удовлетворяют двум независимым однородным уравнениям первой степени

$$A_\alpha x^\alpha = 0, \quad B_\alpha x^\alpha = 0 \qquad (\text{суммирование по } \alpha = 1, 2, 3, 0), \tag{3}$$

называется *прямой*.

Следствие. *Две плоскости всегда пересекаются по прямой.*

Определение II. Совокупность всех точек называется *проективным пространством*.

Постулат. Точка перемещается в проективном пространстве непрерывно при непрерывном изменении отношений своих однородных координат.

§ 3. Расширенное эвклидово пространство

В качестве *модели проективного пространства* можно рассмотреть расширенное эвклидово пространство, т. е. эвклидово пространство, дополненное несобственными элементами.

Возьмём в эвклидовом пространстве произвольную аффинную (в частности, можно взять декартову) систему координат. Тогда каждой четвёрке чисел (x^α) при условии $x^0 \neq 0$ будет соответствовать точка M, однородные координаты которой равняются числам x^α. Умножение четвёрки чисел (x^α) на одно число не переместит точку M. Каждой плоскости (2), если коэффициенты A_1, A_2, A_3 не равны нулю одновременно, соответствует плоскость эвклидова пространства. Каждой прямой (3), если ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{Vmatrix} \tag{4}$$

равен двум, соответствует прямая эвклидова пространства, и при непрерывном изменении координат (x^α) точка M будет перемещаться непрерывно.

Мы видим, что в этом соответствии элементов проективного и эвклидова пространства есть целый ряд исключений: в проективном пространстве остаются точки, плоскости, прямые, которым нет соответствующих образов в эвклидовом пространстве. Чтобы это отображение было полным, надо эвклидово пространство дополнить новыми элементами, которые будем называть несобственными в отличие от собственных точек, прямых и плоскостей, которые составляют эвклидово пространство.

Постулат. Расширенное пространство содержит, кроме точек эвклидова пространства (собственных точек), ещё *несобственные*, которые соответствуют точкам с последней координатой x^0, равной нулю.

Теорема. *На всякой собственной прямой расширенного эвклидова пространства есть одна несобственная точка, которая лежит за всеми собственными точками и является общей предельной точкой при неограниченном удалении точки по прямой в ту или другую сторону.*

Собственная прямая определяется системой (3) с матрицей коэффициентов (4) ранга, равного двум. Вносим туда значение $x^0 = 0$, получаем для определения x^1, x^2, x^3 систему

$$A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3 = 0,$$
$$B_1x^1 + B_2x^2 + B_3x^3 = 0,$$

откуда следует, что неизвестные пропорциональны определителям матрицы (4):

$$x^1 : x^2 : x^3 = \begin{vmatrix} A_2A_3 \\ B_2B_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_3A_1 \\ B_3B_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1A_2 \\ B_1B_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Так как ранг матрицы (4) равен двум, то не все определители (5) равны нулю. Формулы (5) вполне определяют отношения координат x^i $(i = 1, 2, 3)$, а вместе с равенством $x^0 = 0$ дают единственную точку проективного пространства, которая и является единственной несобственной точкой прямой.

Эта точка является предельной точкой, следующей за всеми собственными точками прямой, ибо при неограниченном уменьшении величины x^0 неоднородные координаты точки x, y, z неограниченно возрастают и точка M удаляется по прямой, а несобственная точка получается в пределе для $x^0 = 0$ безразлично при стремлении к нулю от положительных или от отрицательных значений x^0. Это особенно отчётливо видно, если прямая (3) проходит через начало координат $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = 0$, т. е. при условии $A_0 = 0$, $B_0 = 0$. Тогда координаты любой точки прямой определяются отношениями (5); при уменьшении x^0 остальные три координаты x^i не меняются, а вследствие неограниченного возрастания неоднородных координат x, y, z точка удаляется в бесконечность.

Следствие 1. *Параллельные прямые проходят через одну и ту же несобственную точку.*

Действительно, по формулам (5) § 3, гл. V, три определителя (5) можно принять за координаты вектора направления L прямой (3). Эти же определители по формулам (5) определяют координаты несобственной точки этой прямой. Так как при параллельности прямых векторы направлений параллельны, а координаты их пропорциональны, то и несобственная точка у них одна.

Следствие 2. *Первые три координаты несобственной точки служат координатами вектора направления L всех прямых, содержащих эту точку.*

Теорема. *Если ранг матрицы* (4) *равен единице, а ранг расширенной матрицы* (*из всех коэффициентов*) *системы* (3) *равен двум, то система определяет несобственную прямую, все точки которой несобственные.*

Действительно, из условий теоремы следует, что коэффициенты A_i, $B_i (i = 1, 2, 3)$ системы пропорциональны. Умножением на подходящий множитель всех членов одного уравнения их можно уравнять:

$$A_i = B_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

и тогда, заменяя второе уравнение разностью обоих уравнений, придём к системе (6), эквивалентной системе (3):

$$\begin{aligned} A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3 + A_0x^0 &= 0, \\ B_0^*x^0 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Так как $B_0^* = B_0 - A_0$ — не нуль, поскольку при ранге, равном двум, система должна содержать два независимых уравнения, то второе уравнение даёт:

$$x^0 = 0.$$

Значит, все точки такой прямой — несобственные.

Следствие. *Параллельные плоскости пересекаются по несобственной прямой.*

Действительно, при пропорциональности коэффициентов

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}$$

две плоскости (3) параллельны, и обратно, если плоскости параллельны, то коэффициенты пропорциональны и линия пересечения определяется системой (6).

Теорема. *Всякая собственная плоскость содержит одну несобственную прямую.*

Плоскость (2) — собственная, если не все коэффициенты A_i $(i=1, 2, 3)$ одновременно равны нулю. Присоединим к уравнению (2) условие, что точка M — несобственная:

$$x^0=0.$$

Мы получим систему (6), которая определяет несобственную прямую.

Теорема. *Все несобственные точки пространства составляют одну несобственную плоскость.*

Действительно, условие, что точка M — несобственная:

$$x^0=0, \tag{7}$$

представляет однородное уравнение первой степени, следовательно, определяет плоскость. Эта плоскость не может быть собственной, ибо все коэффициенты A_i $(i=1, 2, 3)$ равны нулю. Следовательно, это — несобственная плоскость пространства. Такая плоскость только одна, ибо при условии $A_i=0$ уравнение (2) содержит только один член. На коэффициент A_0 уравнение может быть сокращено, и мы придём к единственному уравнению (7), определяющему несобственную плоскость.

§ 4. Точка пересечения трёх плоскостей

Задача. *Даны три плоскости*

$$A_\alpha x^\alpha=0,\quad B_\alpha x^\alpha=0,\quad C_\alpha x^\alpha=0 \qquad \left(\begin{array}{c}\text{суммирование по}\\ \alpha=0,1,2,3\end{array}\right). \tag{8}$$

Найти их точку пересечения.

Если точка принадлежит всем трём плоскостям, то координаты её удовлетворяют всем трём уравнениям.

Мы имеем систему трёх однородных уравнений с четырьмя неизвестными x^α $(\alpha=0, 1, 2, 3)$.

Могут представиться три различных случая:

1. Если ранг матрицы

$$\left\|\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_0\\ B_1 & B_2 & B_3 & B_0\\ C_1 & C_2 & C_3 & C_0\end{matrix}\right\| \tag{9}$$

равен трём, то система (8) вполне определяет отношение координат $x^1:x^2:x^3:x^0$ точки пересечения плоскостей. Эти координаты пропорциональны четырём определителям матрицы (9):

$$x^1 : x^2 : x^3 : x^0 =$$

$$= \begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_0 \\ B_2 & B_3 & B_0 \\ C_2 & C_3 & C_0 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} A_3 & A_0 & A_1 \\ B_3 & B_0 & B_1 \\ C_3 & C_0 & C_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Следовательно, точка пересечения плоскостей вполне определена.

Если при этом последний определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

то $x^0 = 0$ и точка пересечения плоскостей — несобственная.

2. Если ранг матрицы (9) равен двум, то среди уравнений (8) только два независимых. Эти уравнения определяют прямую. Точка пересечения плоскостей (8) — неопределённа, ибо они все проходят через одну прямую, образуя пучок.

Если при этом ранг определителя (11) равен единице, т. е. все определители второго порядка равны нулю, то и ранг матрицы (4) § 3 равен единице, и плоскости (8) параллельны, а линия их пересечения — несобственная.

3. Если ранг матрицы (9) равен единице, то система (8) содержит только одно независимое уравнение. Все плоскости (8) совпадают и все точки их общие.

Если при этом ранг определителя (11) равен 0, т. е. все элементы его равны нулю, то все три плоскости совпадают с несобственной плоскостью

$$x^0 = 0.$$

§ 5. Условие, что четыре точки лежат в одной плоскости

Даны четыре точки $M(x^{\alpha})$, $M_1(x_1^{\alpha})$, $M_2(x_2^{\alpha})$, $M_3(x_3^{\alpha})$; найдём, при каком условии они лежат в одной плоскости.

Если

$$A_{\alpha} X^{\alpha} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \text{суммирование по} \\ \alpha = 0, 1, 2, 3 \end{pmatrix} \quad (\text{a})$$

есть уравнение плоскости, содержащей все четыре точки, то координаты их должны удовлетворять этому уравнению:

$$A_{\alpha} x^{\alpha} = 0, \ A_{\alpha} x_1^{\alpha} = 0, \ A_{\alpha} x_2^{\alpha} = 0, \ A_{\alpha} x_3^{\alpha} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \text{суммирование по} \\ \alpha = 0, 1, 2, 3 \end{pmatrix}. \quad (\text{b})$$

Четыре равенства (b) следует рассматривать как уравнения для неизвестных коэффициентов A_{α} уравнения плоскости (a).

Так как система (b) содержит четыре уравнения на четыре неизвестных A_0, A_1, A_2, A_3, то решение всегда существует, но это решение, в силу однородности уравнений, — нулевое:

$$A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0.$$

При этих значениях коэффициентов уравнение (a) исчезает тождественно и плоскости не существует. Чтобы обеспечить существование общей плоскости для четырёх точек, надо иметь решения A_α, не равные одновременно нулю.

Однородная система (b) имеет решения, отличные от нуля, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^0 \\ x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^0 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^0 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Теорема. *Четыре точки* $M(x^\alpha)$, $M_1(x_1^\alpha)$, $M(x_2^\alpha)$, $M_3(x_3^\alpha)$ *лежат в одной плоскости, если координаты их удовлетворяют условию* (12).

Если в уравнении (12) координаты точки $M(x^\alpha)$ рассматривать, как текущие координаты, то это будет уравнением плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3. Действительно, уравнение удовлетворено, если точка $M(x^\alpha)$ лежит в этой плоскости, и не удовлетворено, если точка $M(x^\alpha)$ не лежит в плоскости.

Уравнение (12) исчезает тождественно, и три точки M_1, M_2, M_3 не определяют плоскости, если ранг матрицы координат

$$\begin{Vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^0 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^0 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^0 \end{Vmatrix} \tag{12'}$$

равен 2, когда все определители третьего порядка этой матрицы равны нулю. Такие три точки лежат на одной прямой. Обратно, если три точки M_i $(i = 1, 2, 3)$ лежат на одной прямой, то уравнение (12) не определяет плоскости, и ранг матрицы (12) не больше 2.

Теорема. *Три точки* $M_1(x_1^\alpha)$, $M_2(x_2^\alpha)$, $M_3(x_3^\alpha)$ *лежат на одной прямой, если ранг матрицы координат* (12) *меньше* 3, *и обратно.*

§ 6. Аналитические точки

Определение. *Аналитической точкой* **M** называется совокупность четырёх однородных координат точки, т. е. вектор с четырьмя компонентами, координаты которого равны четырём однородным координатам геометрической точки M.

Определения: 1. Равенство. Аналитические точки *равны*, если равны их координаты.

2. Сложение. При сложении аналитических точек складываются одноимённые координаты.

3. Умножение на скаляр. При умножении аналитической точки на скаляр каждая координата умножается на скаляр.

Умножение аналитической точки на скаляр иногда называется *нормированием* её.

Из этих определений вытекают теоремы:

Теорема 1. *Две линейно зависимые аналитические точки*

$$M = x^1 A_1 \tag{13}$$

определяют одну и ту же геометрическую точку A_1. Обратно, если геометрические точки M и A_1 совпадают, то существует единственное значение скаляра x^1, удовлетворяющего уравнению (13).

Первая половина теоремы следует из основного свойства однородных координат (§ 1): однородные координаты точки допускают умножение всех координат на одно число. Вторая половина вытекает из очевидного замечания, что при пропорциональности двух четвёрок чисел множитель пропорциональности вполне определён, как отношение любой пары одноимённых координат.

Теорема 2. *Три аналитические точки, связанные линейным однородным соотношением*

$$M = x^1 A_1 + x^2 A_2, \tag{14}$$

определяют три геометрические точки одной прямой. Обратно, если точка M лежит на прямой A_1A_2, то существует единственная пара скаляров x^1, x^2, удовлетворяющая соотношению (14).

Первая половина теоремы следует из замечания, что соотношению (14) удовлетворяют одноимённые координаты точек $M(X^\alpha)$, $A_1(a_1^\alpha)$, $A_2(a_2^\alpha)$; следовательно, ранг матрицы (12′) для этих точек снижается, и точки лежат на одной прямой. Обратно, если точки M, A_1, A_2 лежат на одной прямой и точки A_1, A_2 линейно независимы, то ранг матрицы (12) равен 2. По теореме алгебры, элементы X^α одной строки линейно зависят от элементов a_1^α, a_2^α двух других, откуда следует соотношение (14) для аналитических точек. Коэффициенты x^1, x^2 вполне определяются системой двух уравнений:

$$X^\alpha = a_1^\alpha x^1 + a_2^\alpha x^2 \qquad (\alpha = \alpha_1,\ \alpha_2), \tag{14′}$$

где указатели α_1, α_2 выбраны так, чтобы определитель системы $\det|a_i^\alpha|$ был отличен от нуля. Это всегда возможно, если A_1, A_2 линейно независимы.

Теорема 3. *Если четыре аналитические точки удовлетворяют линейному однородному соотношению*

$$M = x^1 A_1 + x^2 A_2 + x^3 A_3, \tag{15}$$

то они лежат в одной плоскости. Обратно, если треугольник $A_1A_2A_3$ не вырождается и точка M лежит в его плоскости, то *при всяком выборе аналитических точек* M, A_i *существуют три скаляра* x^i, *удовлетворяющие соотношению* (15).

Поскольку соотношению (15) удовлетворяют одноимённые координаты точек $M(X^\alpha)$, $A_i(a_i^\alpha)$ $(i=1, 2, 3)$, определитель (12) для них обращается в нуль, и точки лежат в одной плоскости. Обратно, если точки M, A_i лежат в одной плоскости и три точки A_i — линейно независимы, то определитель (12) для X^α, a_i^α равен нулю, а ранг матрицы (12′) для a_i^α равен 3 и по теореме алгебры элементы X^α одной строки определителя линейно зависят от соответствующих элементов a_i^α трёх остальных, откуда следует соотношение (15) для аналитических точек. Коэффициенты x^1, x^2, x^3 вполне определяются системой трёх уравнений:

$$X^\alpha = a_1^\alpha x^1 + a_2^\alpha x^2 + a_3^\alpha x^3 \qquad (\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \tag{15′}$$

где указатели α_1, α_2, α_3 выбраны так, чтобы определитель системы $\det|a_\beta^\alpha|$ был отличен от нуля.

Теорема 4. *Если тетраэдр* $A_1A_2A_3A_0$ *не вырождается, то для всякой аналитической точки* M *и при всяком выборе аналитических точек* A_i *существует единственная четвёрка чисел* x^α, *удовлетворяющих равенству*:

$$M = x^1A_1 + x^2A_2 + x^3A_3 + x^0A_0. \tag{16}$$

Достаточно показать, что координаты точек $M(X^\alpha)$, $A_\beta(a_\beta^\alpha)$, где $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 0$, удовлетворяют уравнениям вида (16), если точки A_β линейно независимы, или, другими словами, что существует четвёрка чисел x^1, x^2, x^3, x^0, удовлетворяющих системе четырёх уравнений:

$$X^\alpha = a_1^\alpha x^1 + a_2^\alpha x^2 + a_3^\alpha x^3 + a_0^\alpha x^0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 0), \tag{16′}$$

если $\det|a_\beta^\alpha| \neq 0$. Поскольку определитель системы отличен от нуля, эта система имеет вполне определённое решение x^1, x^2, x^3, x^0, что и доказывает теорему.

§ 7. Проективные координаты

Определение. Скаляры x^1, x^2, x^3, x^0, удовлетворяющие уравнению (16), называются *однородными проективными координатами* точки M относительно *координатного тетраэдра* $A_1A_2A_3A_0$.

Задать координатный тетраэдр — значит дать четыре *аналитические точки* A_α, линейно независимые.

Четыре точки A_α *линейно независимы*, если координаты их не обращают в нуль определитель (12) § 5.

Если

$$x^3 = 0,$$

то формула (16) принимает вид:

$$P = x^1A_1 + x^2A_2 + x^0A_0. \tag{17}$$

где мы изменили обозначение точки M на точку P. Следовательно, точка P лежит в плоскости $A_1A_2A_0$, и координаты x^1, x^2, x^0 являются проективными координатами точки P относительно координатного треугольника $A_1A_2A_0$.

Из уравнений (16) и (17) следует:

$$M = P + x^3A_3. \tag{16'}$$

Следовательно, точка P лежит на прямой MA_3; мы можем сказать, что точка M проектируется из точки A_3 на плоскость $A_1A_2A_0$ в точку P. При изменении одной только координаты x^3 точка P не будет меняться, и точка M будет двигаться по прямой PA_3.

Если

$$x^2 = 0, \quad x^3 = 0,$$

то формула (16) принимает вид:

$$Q = x^1A_1 + x^0A_0, \tag{18}$$

где мы вместо M поставили Q. Точка Q лежит на прямой A_1A_0, и координаты x^1, x^0 суть проективные координаты точки Q относительно пары точки A_1, A_0.

Из уравнений (16) и (18) получим:

$$M = Q + x^2A_2 + x^3A_3. \tag{16''}$$

Следовательно, точка Q лежит в плоскости MA_2A_3. Можно сказать, что точка Q есть проекция точки M на прямую A_1A_0 из ребра A_2A_3.

Если сохранять x^0, x^1 неизменными и менять x^2 и x^3, то точка Q останется неизменной и точка M будет двигаться в плоскости QA_2A_3.

§ 8. Проективные координаты в расширенном пространстве

Теорема. *Аффинные и в частности декартовы координаты являются специальным случаем проективных, когда три вершины координатного тетраэдра — несобственные.*

Действительно, пусть дана произвольная аффинная система координат. Выберем вершины координатного тетраэдра в аналитических точках

$$A_1(1,\ 0,\ 0,\ 0), \quad A_2(0,\ 1,\ 0,\ 0), \quad A_3(0,\ 0,\ 1,\ 0), \quad A_0(0,\ 0,\ 0,\ 1),$$

где в скобках стоят однородные координаты относительно заданной аффинной системы, и пусть координаты точки M по той же системе будут $M(x,\ y,\ z,\ 1)$.

Тогда из равенства (16), сравнивая одноимённые (аффинные) координаты левой и правой части, получим:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^0 = 1.$$

Обратно, если относительно какой-нибудь, например декартовой, системы координат за вершины координатного тетраэдра выбраны аналитические точки

$$A_1(c^1_1, c^2_1, c^3_1, 0), \quad A_2(c^1_2, c^2_2, c^3_2, 0), \quad A_3(c^1_3, c^2_3, c^3_3, 0), \quad A_0(c^1_0, c^2_0, c^3_0, 1),$$

то мы выберем начало и координатные векторы аффинной системы следующим образом:

$$O(c^1_0,\ c^2_0,\ c^3_0), \quad \boldsymbol{e}_i = c^1_i\boldsymbol{i}_1 + c^2_i\boldsymbol{i}_2 + c^3_i\boldsymbol{i}_3.$$

Тогда, переходя от декартовой системы к аффинной системе $(O;\ \boldsymbol{e}_i)$, мы получим для тех же аналитических точек A_α в аффинной системе координаты:

$$A_1(1,\ 0,\ 0,\ 0),\quad A_2(0,\ 1,\ 0,\ 0),\quad A_3(0,\ 0,\ 1,\ 0),\quad A_0(0,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Действительно, неоднородные декартовы координаты

$$E_1(c_1^1,\ c_1^2,\ c_1^3),\ E_2(c_2^1,\ c_2^2,\ c_2^3),\ E_3(c_3^1,\ c_3^2,\ c_3^3),\ O(c_0^1,\ c_0^2,\ c_0^3)$$

определяют точки E_i, каждая из которых лежит в конце вектора $\boldsymbol{e}_i$, проведённого из точки O, которая совпадает с геометрической точкой A_0.

В аффинной системе координат $(O;\ \boldsymbol{e}_i)$ эти точки имеют координаты:

$$E_1(1,\ 0,\ 0),\ E_2(0,\ 1,\ 0),\ E_3(0,\ 0,\ 1),\ O(0,\ 0,\ 0),$$

откуда прямо вытекает равенство одноимённых координат заданной проективной системы и выбранной аффинной.

§ 9. Преобразование проективной системы координат

Пусть аналитическая точка $\boldsymbol{M}$ имеет координаты (x^α) относительно тетраэдра $\{A_\alpha\}$ и координаты $(x^{\beta'})$ относительно тетраэдра $\{A_{\beta'}\}$. Тогда по формуле (16) § 6:

$$\boldsymbol{M} = x^\alpha A_\alpha = x^{\beta'} A_{\beta'},\qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по}\\ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\\ \beta' = 0',\ 1',\ 2',\ 3'\end{pmatrix}. \tag{a}$$

Пусть теперь вершины $A_{\beta'}$ имеют координатами относительно тетраэдра $\{A_\alpha\}$ величины $c_{\beta'}^1,\ c_{\beta'}^2,\ c_{\beta'}^3,\ c_{\beta'}^0$.

$$A_{\beta'} = c_{\beta'}^\alpha A_\alpha,\qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по}\\ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Внося это в формулу (a), получим:

$$x^\alpha A_\alpha = x^{\beta'} c_{\beta'}^\alpha A_\alpha,\qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по}\\ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\\ \beta' = 0',\ 1',\ 2',\ 3'\end{pmatrix},$$

или:

$$(x^\alpha - c_{\beta'}^\alpha x^{\beta'})\, A_\alpha = 0.$$

Так как тетраэдр $\{A_\alpha\}$ не вырождается, точки A_α не лежат в одной плоскости и не могут быть связаны линейной зависимостью, то коэффициенты при точках A_α должны равняться нулю. Значит,

$$x^\alpha = c_{\beta'}^\alpha x^{\beta'},\qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по}\\ \beta' = 0',\ 1',\ 2',\ 3'\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Эти формулы и определяют преобразование координат при переходе от тетраэдра $\{A_\alpha\}$ к тетраэдру $\{A_{\beta'}\}$.

Коэффициенты $c^{\alpha}_{\beta'}$ преобразований (19) — произвольные действительные числа при условии, что определитель преобразования не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c^0_{0'} & c^1_{0'} & c^2_{0'} & c^3_{0'} \\ c^0_{1'} & c^1_{1'} & c^2_{1'} & c^3_{1'} \\ c^0_{2'} & c^1_{2'} & c^2_{2'} & c^{3'}_{2'} \\ c^0_{3'} & c^1_{3'} & c^2_{3'} & c^3_{3'} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (20a)$$

При этом условии четыре точки

$$A_{1'}(c^{\alpha}_{1'}),\ A_{2'}(c^{\alpha}_{2'}),\ A_{3'}(c^{\alpha}_{3'})\ \text{и}\ A_{0'}(c^{\alpha}_{0'})$$

не лежат в одной плоскости и определяют невырождающийся координатный тетраэдр $\{A_{\beta'}\}$ новой системы координат.

Так как формулы (19) линейны, однородны относительно старых (x^{α}) и новых $(x^{\beta'})$ координат, то преобразование проективных координат оставляет алгебраическое уравнение алгебраическим и не меняет его степени (§ 5, гл. II). Следовательно, на проективные координаты распространяется метод классификации поверхностей по их уравнениям. Поверхность n-го порядка при любом выборе координатного тетраэдра определяется уравнением n-й степени. В частности, всякое уравнение первой степени определяет плоскость. Всякая прямая определяется двумя уравнениями первой степени и т. д.

Уравнение (12) в произвольных проективных координатах попрежнему определяет плоскость (ибо оно первой степени), проходящую через точки $M_1(x^{\alpha}_1)$, $M_2(x^{\alpha}_2)$, $M_3(x^{\alpha}_3)$, так как после подстановки в уравнение (12), например

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}_1,$$

мы получим тождество, поскольку определитель с двумя равными строками равен нулю.

§ 10. Конус

Теоремы гл. III, сформулированные для произвольной аффинной системы координат, сохраняют свою силу и для проективных координат.

В частности, если уравнение поверхности не содержит одной из текущих координат, например координаты x^3:

$$F(x^1,\ x^2,\ x^0) = 0, \qquad (21)$$

то в координатной плоскости $A_0A_1A_2$, т. е. при $x^3 = 0$, оно определяет линию L.

Если любую точку P этой линии соединить прямой с вершиной A_3, то по формуле (16′) произвольная точка этой прямой определяется аналитической точкой:

$$M = P + x^3 A_3,$$

т. е. будет иметь те же самые координаты x^1, x^2, x^0 и произвольную координату x^3. Эти координаты при всяком значении x^3 удовлетворяют уравнению (21), ибо это уравнение не содержит координаты x^3. Следовательно, всякая прямая PA_3 лежит на поверхности, поверхность описана прямой PA_3, когда точка P пробегает линию L, и является конусом с вершиной в точке A_3.

Теорема. *Уравнение, не содержащее текущей координаты* x^3, *определяет конус с вершиной в точке* A_3. *Если оно не содержит и координаты* x^2, *то конус распадается на плоскости, проходящие через ребро* A_2A_3.

Вторая половина теоремы становится очевидной, если заметить, что однородное уравнение

$$F(x^1,\ x^0) = 0 \tag{21a}$$

определяет одно или несколько значений отношения $x^1 : x^0$, т. е. одну или несколько точек Q_1, Q_2, ... на прямой A_0A_1. По формуле (16″), всякая точка плоскости QA_2A_3

$$M = Q + x^2A_2 + x^3A_3$$

имеет те же самые координаты x^0, x^1, что и точка Q, следовательно, её координаты при любых x^2, x^3 удовлетворяют уравнению (21a). Значит, каждая плоскость QA_2A_3 входит в состав поверхности, и поверхность состоит только из этих плоскостей.

§ 11. Пучок и связка плоскостей

Творема. *Если ранг матрицы*

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_0 \end{Vmatrix} \tag{22}$$

равен двум, то уравнение

$$pA_\alpha x^\alpha + qB_\alpha x^\alpha = 0 \quad \left(\begin{matrix} \text{суммирование по} \\ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \end{matrix} \right) \tag{23}$$

при произвольных параметрах p *и* q *определяет пучок плоскостей пересекающихся по прямой*

$$A_\alpha x^\alpha = 0,\ B_\alpha x^\alpha = 0. \tag{24}$$

Эта прямая называется *осью* пучка.

Теорема прямо следует из § 7, гл. III, но она очевидна и непосредственно. Уравнение (23) — первой степени относительно координат x^α, следовательно, определяет плоскость. Если координаты x^α удовлетворяют системе (24), то уравнение (23) тоже будет удовлетворено, следовательно, плоскость (23) проходит через прямую при всяких значениях отношения $p : q$.

Если ранг матрицы (22) равен единице, то плоскости (24) совпадают, а так как всякая точка плоскости (24) принадлежит плоскости (23), то весь пучок совпадёт в одну плоскость.

Теорема. Если ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_0 \end{matrix} \right\| \tag{25}$$

равен трём, то уравнение

$$pA_\alpha x^\alpha + qB_\alpha x^\alpha + rC_\alpha x^\alpha = 0 \qquad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по} \\ \alpha = 0, 1, 2, 3\end{matrix}\right) \tag{26}$$

при произвольных параметрах p, q, r определяет связку плоскостей с центром в точке:

$$A_\alpha x^\alpha = 0, \; B_\alpha x^\alpha = 0, \; C_\alpha x^\alpha = 0. \tag{27}$$

Теорема вытекает из результатов § 8, гл. III, но она очевидна и непосредственно.

Уравнение первой степени (26) всегда определяет плоскость. Она проходит через точку (27), так как уравнение (26) является следствием системы (27).

Требование, касающееся ранга матрицы (25), необходимо, чтобы система (27) определяла одну точку. Если ранг матрицы (25) равен двум, то система (27) определит прямую, ибо одно уравнение будет следствием двух других. В таком случае уравнение (26) определит пучок плоскостей, а не связку. Если ранг матрицы (25) равен единице, то три плоскости (27) совпадают, и вся связка (26) совпадёт с этой плоскостью.

§ 12*. Комплексное проективное пространство

Комплексное проективное пространство определяется так же, как действительное проективное пространство (§ 2), только однородные координаты его точек

$$z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha, \; i = \sqrt{-1} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 0) \tag{28}$$

— комплексные числа.

Если все $y^\alpha = 0$, то точка (z^α) — *действительная*. Совокупность действительных точек комплексного проективного пространства можно отождествить с совокупностью точек действительного проективного пространства. Кроме них, комплексное пространство содержит собственно комплексные точки (*мнимые*). Поскольку три независимых отношения комплексных однородных координат (28) — тоже комплексные числа, а каждое комплексное число z определяется двумя действительными числами x и y, трёхмерное комплексное пространство является многообразием шести (*действительных*) измерений.

Плоскость в комплексном пространстве определяется уравнением:

$$C_\alpha z^\alpha = 0, \; C_\alpha = A_\alpha + iB_\alpha \quad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по} \\ \alpha = 1, 2, 3, 0\end{matrix}\right). \tag{29}$$

Если отношения коэффициентов C_α — действительны, например все B_α равны нулю, то плоскость называется *действительной*; она содержит многообразие действительных точек, которые можно отождествить с плоскостью

$$A_\alpha x^\alpha = 0 \qquad \begin{pmatrix} \text{суммирование по} \\ \alpha = 1, 2, 3, 0 \end{pmatrix} \tag{30a}$$

действительного пространства. Кроме того, она содержит мнимые точки, многообразие которых зависит от четырёх действительных параметров, именно: два произвольных параметра, от которых зависит отношение x^α, удовлетворяющих уравнению (30а), и два независимых параметра, от которых зависят y^α, определяемые уравнением

$$A_\alpha y^\alpha = 0 \qquad \begin{pmatrix} \text{суммирование по} \\ \alpha = 1, 2, 3, 0 \end{pmatrix}. \tag{30b}$$

Таких параметров два, а не три, ибо делением четырех координат z^α на z^0, если z^0 не равно нулю, мы приведём x^0 к единице и y^0 к нулю.

Если B_α не все нули, то плоскость (29) содержит только одну прямую действительного пространства. Действительно, внося в уравнение (29) значения (28) и приравнивая нулю отдельно действительную и мнимую части, получим на 8 неизвестных x^α, y^α два уравнения:

$$A_\alpha x^\alpha - B_\alpha y^\alpha = 0, \quad A_\alpha y^\alpha + B_\alpha x^\alpha = 0 \quad \begin{pmatrix} \text{суммирование по} \\ \alpha = 1, 2, 3, 0 \end{pmatrix}$$

которые в силу однородности попрежнему определят многообразие комплексных точек четырёх *действительных* измерений. Среди них действительные точки $y^\alpha = 0$ определяются системой

$$A_\alpha x^\alpha = 0, \quad B_\alpha x^\alpha = 0 \qquad \begin{pmatrix} \text{суммирование по} \\ \alpha = 1, 2, 3, 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку делением уравнения (29) на C_0 получим $A_0 = 1$, $B_0 = 0$, эти два уравнения независимы и в действительном проективном пространстве определяют прямую.

Аналогично прямая

$$C_\alpha z^\alpha = 0, \quad C'_\alpha z^\alpha = 0 \qquad \begin{pmatrix} \text{суммирование по} \\ \alpha = 1, 2, 3, 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

содержит одномерное многообразие комплексных точек, т. е. многообразие, зависящее от двух действительных параметров. Внося сюда значения (28) и приравнивая нулю отдельно действительную и мнимую части, получим четыре уравнения:

$$A_\alpha x^\alpha - B_\alpha y^\alpha = 0, \quad A_\alpha y^\alpha + B_\alpha x^\alpha = 0,$$
$$A'_\alpha x^\alpha - B'_\alpha y^\alpha = 0, \quad A'_\alpha y^\alpha + B'_\alpha x^\alpha = 0.$$

Полагая $y^\alpha = 0$, мы получим для определения действительных точек прямой систему:

$$A_\alpha x^\alpha = 0, \quad B_\alpha x^\alpha = 0, \quad A'_\alpha x^\alpha = 0, \quad B'_\alpha x^\alpha = 0. \tag{32}$$

Если определитель системы не равен нулю, то система допускает только нулевые решения, которые не определяют точки. Следовательно, в общем случае прямая (31) не имеет ни одной действительной точки. Если определитель

$$\det | A_\alpha B_\alpha A'_\alpha B'_\alpha | \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 0),$$

где четыре строки определителя получаются при четырёх значениях указателя α, имеет ранг 3, то прямая имеет только одну действительную точку.

Если ранг определителя равен двум, то система (32) определяет прямую действительного проективного пространства. Примем её за ребро A_1A_2 координатного тетраэдра. Тогда система (32) удовлетворяется значениями $x^3 = 0$, $x^0 = 0$; следовательно,

$$A_1 = A_2 = A'_1 = A'_2 = B_1 = B_2 = B'_1 = B'_2 = 0, \text{ т. е.}$$
$$C_1 = C_2 = C'_1 = C'_2 = 0,$$

и система (31) эквивалентна системе

$$z^3 = 0, \quad z^0 = 0. \tag{31'}$$

Следовательно, прямая (31) является действительной прямой комплексного проективного пространства, содержащей, кроме действительных точек ребра A_1A_2, ещё многообразие комплексных точек, определяемых произвольным заданием четырёх действительных параметров x^1, x^2, y^1, y^2, из которых существенны только два, ибо делением всех z^α на z^1 (если $z^1 \neq 0$) приведём x' к единице, с ay' — к нулю.

Таким образом, прямые комплексного проективного пространства делятся на три класса: 1) прямые, не имеющие действительных точек; 2) прямые с одной действительной точкой и 3) действительные прямые, содержащие все точки прямой действительного пространства и ещё многообразие комплексных точек двух *действительных* измерений.

*Глава VII**

ПРОЕКТИВНЫЕ И АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Проективные преобразования пространства

Формулам (19) § 9, гл. VI, можно дать новое истолкование.

Проективное пространство мы определили (§ 2, гл. VI) как совокупность точек, где каждая точка есть четверка координат и все им пропорциональные.

Мы видим теперь, что та же точка может определяться другой четвёркой чисел, если перейти к другому координатному тетраэдру.

Рассмотрим, для определённости, модель проективного пространства в виде расширенного эвклидова пространства. Одна и та же четвёрка чисел (x^α) определит точку M, если пространство отнести к координатному тетраэдру $A_0A_1A_2A_3$, и точку $\overline{M}$, если его отнести к тетраэдру $A_{0'}A_{1'}A_{2'}A_{3'}$. Меняя координатный тетраэдр, мы переместим все точки.

Определение. *Проективным преобразованием пространства* называется соответствие точек пространства

$$M \longrightarrow \overline{M},$$

определяемых одними и теми же координатами (x^α), первая точка — относительно координатного тетраэдра $\{A_\alpha\}$, вторая — относительно тетраэдра $\{A_{\alpha'}\}$.

Следствие 1. *Проективное преобразование переводит вершины первого координатного тетраэдра в соответствующие вершины второго.*

Действительно, вершина тетраэдра, например A_1, всегда имеет относительно своего тетраэдра координаты $A_1(1, 0, 0, 0)$. Так как координаты вершины $A_{1'}$ относительно своего тетраэдра будут тоже $A_1'(1, 0, 0, 0)$, то точка A_1 преобразуется в точку $A_{1'}$.

Следствие 2. *При одновременном преобразовании точки M и координатного тетраэдра $\{A_\alpha\}$ проективные координаты точки не меняются.*

Следствие 3. *Проективное преобразование определяется заданием четырёх аналитических точек — вершин нового координатного тетраэдра $\{A_\alpha\}$, не лежащих в одной плоскости*; следовательно, наиболее общее проективное преобразование зависит от 16 параметров c^α_β (координат вершин A_α) относительно тетраэдра $\{\overline{A}_\alpha\}$.

Для преобразований точек проективного пространства весьма существенно определение этих точек однородными координатами. Эти координаты вводятся в излишнем числе (четыре вместо трёх) так, что все четвёрки координат tx^α с произвольным множителем t определяют ту же геометрическую точку M, что и координаты x^α.

Поэтому умножение всех 16 коэффициентов c^α_β на одно и то же число умножит все координаты $\overline{x}^\alpha$ и не изменит геометрическую точку $\overline{M}$.

Наиболее общее проективное преобразование пространства зависит от 15 существенных параметров — отношений коэффициентов c^α_β.

Следствие 4. *Проективное преобразование переводит прямые линии в прямые линии, плоскости — в плоскости, вообще поверхности n-го порядка — в поверхности n-го порядка.*

Действительно, поскольку преобразованные точки $\overline{M}$ имеют те же координаты по новой системе, что и точки M по старой, то одно и то же уравнение определяет поверхность S относительно тетраэдра $\{A_\alpha\}$ и преобразованную поверхность S' относительно нового тетраэдра $\{A_{\alpha'}\}$.

§ 2. Аналитическое представление проективного преобразования

Не следует думать, что проективное преобразование применимо только к модели проективного пространства в виде расширенного эвклидова. Чтобы показать, что оно имеет место для общего проективного пространства, выведем формулы аналитического представления его.

Мы видели, что точки M и $\overline{M}$ имеют координаты (x^α): первая относительно тетраэдра $\{A_\alpha\}$, вторая — относительно $\{\overline{A}_\alpha\}$. Найдём координаты точки $\overline{M}$ относительно старого тетраэдра $\{A_\alpha\}$.

Это — задача преобразования координат. Даны координаты точки $\overline{M}(x^\alpha)$ относительно тетраэдра $\{\overline{A}_\alpha\}$, найти её координаты $(\overline{x}^\alpha)$ относительно тетраэдра $\{A_\alpha\}$. Обращаясь к формулам преобразования координат (20) § 9, гл. VI, мы должны заменить $x^{\beta'}$ на x^β и x^α на $\overline{x}^\alpha$.

$$\overline{x}^\alpha = c^\alpha_\beta x^\beta \qquad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по}\\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3\end{matrix}\right), \qquad (1)$$

где c^α_β — координаты вершин $\overline{A}_{\alpha'}$ нового тетраэдра относительно старого $\{A_\alpha\}$.

Теорема. *В координатах относительно произвольного координатного тетраэдра проективное преобразование пространства определяется линейными формулами* (1), *где* M (x^β) — *произвольная точка пространства и* $\overline{M}(\overline{x}^\alpha)$ — *её преобразование. Коэффициенты* c^α_β — *произвольные действительные числа с определителем преобразования, отличным от нуля.*

Следствие. *Преобразование, обратное преобразованию* (1), — *тоже проективное, оно определяется формулами*:

$$x^\beta = \overline{c}^\beta_\alpha \overline{x}^\alpha, \qquad (2)$$

где $\overline{c}^\beta_\alpha$ — *приведённые миноры элементов* c^α_β, т. е. миноры определителя подстановки (20а) § 9, гл. VI, делённые на сам определитель. Здесь под обратным преобразованием подразумевается преобразование

$$\overline{M} \to M,$$

переводящее точку $\overline{M}$ в точку M.

Формулы (2) получаются разрешением системы (1) относительно неизвестных x^β. Это разрешение возможно, так как определитель (20а) § 9, гл. VI, нашей системы не равен нулю.

§ 3. Группа проективных преобразований

Определение. Совокупность преобразований S_c, где буквой c обозначены r параметров c_1, c_2, ... c_r, определяющих преобразование S_c совокупности, образует *группу преобразований*, если она обладает двумя свойствами:

1. Каждое преобразование совокупности допускает обратное преобразование, которое тоже принадлежит этой совокупности.

2. Произведение любых двух преобразований совокупности S_a и S_b есть некоторое третье преобразование S_c той же совокупности

$$S_b S_a = S_c.$$

Определение. Если преобразование S_a переводит точку M в точку $\overline{M}$:

$$M \to \overline{M} \quad \text{или} \quad \overline{M} = S_a M,$$

и преобразование S_b переводит точку $\overline{M}$ в точку $\overline{\overline{M}}$:

$$\overline{M} \to \overline{\overline{M}} \quad \text{или} \quad \overline{\overline{M}} = S_b \overline{M},$$

то преобразование S_c называется *произведением преобразований* $S_b S_a$, если оно переводит точку M в точку $\overline{\overline{M}}$:

$$M \to \overline{\overline{M}} \quad \text{или} \quad \overline{\overline{M}} = S_b \overline{M} = S_b (S_a M) = S_b S_a M = S_c M.$$

Совокупность проективных преобразований удовлетворяет и первому и второму требованиям: мы видели, что каждое проективное преобразование (1) допускает обратное преобразование (2), и это преобразование — тоже проективное, т. е. принадлежит той же совокупности проективных преобразований. Она удовлетворяет и второму требованию.

Действительно, если преобразование S_a переводит точку $M(x^\alpha)$ в точку $\overline{M}(\overline{x}^\beta)$, где

$$\overline{x}^\beta = a^\beta_\alpha x^\alpha \qquad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по}\\ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3\end{matrix}\right), \qquad \text{(a)}$$

и преобразование S_b переводит точку $\overline{M}(\overline{x}^\beta)$ в точку $\overline{\overline{M}}(\overline{\overline{x}}^\gamma)$, где

$$\overline{\overline{x}}^\gamma = b^\gamma_\beta \overline{x}^\beta \qquad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по}\\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3\end{matrix}\right), \qquad \text{(b)}$$

то, исключая из формул (a) и (b) координаты $\overline{x}^\beta$, получим формулы преобразования, определяющие произведение:

$$\overline{\overline{x}}^\gamma = b^\gamma_\beta a^\beta_\alpha x^\alpha \qquad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по}\\ \alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3\end{matrix}\right). \qquad \text{(c)}$$

Оно определяется линейными однородными формулами и, следовательно, является проективным преобразованием.

Это, впрочем, очевидно и из самого определения проективного преобразования. Если преобразование S_a переводит тетраэдр $\{A_\alpha\}$ в тетраэдр $\{A_{\alpha'}\}$, а преобразование S_b переводит тетраэдр $\{A_{\alpha'}\}$ в тетраэдр $\{A_{\alpha''}\}$, то произведение $S_b S_a$ переведёт $\{A_\alpha\}$ в $\{A_{\alpha''}\}$.

Если мы примем эти тетраэдры за координатные, то одни и те же координаты (x_α) определят

точку	M	относительно тетраэдра	$\{A_\alpha\}$,
„	$\overline{M}$	„ „	$\{A_{\alpha'}\}$,
„	$\overline{\overline{M}}$	„ „	$\{A_{\alpha''}\}$,

причём

$$\begin{array}{lll} \text{преобразование } S_a & \text{переводит} & M \to \overline{M}, \\ \quad\text{"} \qquad S_b & \quad\text{"} & \overline{M} \to \overline{\overline{M}}, \\ \quad\text{"} \qquad S_b S_a & \quad\text{"} & M \to \overline{\overline{M}}. \end{array}$$

Все эти преобразования — проективные, ибо непосредственно удовлетворяют определению § 1.

Отсюда следует теорема:

***Теорема.** Совокупность проективных преобразований образует группу.*

Другой пример группы представляет *совокупность всех движений пространства*:

1. Всякому движению пространства, как одно целое, можно поставить в соответствие обратное, которое тоже будет перемещением пространства.

2. Произведение двух движений двумя шагами переведёт всё пространство в новое положение, которое является перемещением старого; следовательно, произведение движений принадлежит совокупности движений.

Отсюда следует:

***Теорема.** Совокупность перемещений пространства образует группу.*

§ 4. Проективная геометрия

Пусть нам дано пространство и в нём группа преобразований Какая-нибудь фигура E_0 различными преобразованиями группы переводится в различные фигуры E_1, E_2, ... Рассмотрим совокупность всех фигур $\{E\}$, получаемых из фигуры E_0 преобразованиями группы. Общие свойства всех фигур $\{E\}$ называются *инвариантами группы преобразований.*

Например, группа перемещений пространства переводит окружность C_0 в различные положения C_1, C_2, ... Рассмотрим совокупность окружностей $\{C\}$, полученных из одной окружности C_0 всевозможными перемещениями пространства. Окружности этой совокупности $\{C\}$ обладают общими свойствами, например величиной радиуса, длиной окружности и т. д. Все они составляют инварианты окружности относительно группы преобразований.

Определение. *Геометрией группы преобразований* данного пространства называется совокупность свойств фигур, инвариантных относительно преобразований группы.

Таким образом, *метрической геометрией* называется геометрия группы перемещений пространства.

Определение. *Проективной геометрией* называется геометрия группы проективных преобразований.

Отсюда проективными свойствами фигур называются те, которые принадлежат проективной геометрии, т. е. не изменяются при преобразованиях проективной группы.

Теорема. *Проективными свойствами фигур являются те и только те свойства, которые могут быть выражены через проективные координаты точек фигуры.*

Действительно, по определению проективного преобразования координаты (x^α) любой точки пространства M относительно какого-нибудь тетраэдра $\{A_\alpha\}$ и координаты преобразованной точки $\overline{M}$ относительно преобразованного тетраэдра $\{A_{\alpha'}\}$ совпадают. Поскольку проективные координаты не меняются, то и те свойства фигур, которые через них выражены, останутся инвариантными.

Так как проективные координаты точек вполне определяют их, а следовательно, определяют и фигуру, из этих точек составленную, то все проективные свойства фигуры определяются проективными координатами её точек и могут быть через них выражены.

Нетрудно заметить, что длина отрезка не сохраняется при проективных преобразованиях. Мы можем принять данный отрезок за сторону A_1A_2 координатного тетраэдра $\{A_\alpha\}$. При проективном преобразовании последний может быть переведён в произвольно выбранный тетраэдр $\{A_{\alpha'}\}$; следовательно, отрезок A_1A_2 может быть переведён в произвольный отрезок $A_{1'}A_{2'}$.

Точно так же не сохраняются углы, площади, объёмы, отношения отрезков.

Заметим, что уже формула расстояния между двумя точками на плоскости в косоугольной декартовой системе координат содержит не только координаты концов отрезка, но и косинус угла между осями координат.

Если при преобразовании координат угол между осями изменится, то при тех же координатах точек (относительно новой системы координат) расстояние между ними изменится.

Теорема. *Сложное отношение четырёх точек на прямой есть инвариант группы проективных преобразований.*

Действительно, если задано четыре точки M_k $(k=1, 2, 3, 4)$ прямой A_1A_2 координатами относительно вершин A_1, A_2 координатного тетраэдра

$$M_k = x_k^1A_1 + x_k^2A_2 \qquad (k=1, 2, 3, 4)$$

то, исключая A_1, A_2, получим:

$$M_j = \frac{x_j^1x_2^2 - x_j^2x_2^1}{x_1^1x_2^2 - x_2^1x_1^2}M_1 + \frac{x_j^2x_1^1 - x_j^1x_1^2}{x_1^1x_2^2 - x_2^1x_1^2}M_2 \qquad (j=3, 4),$$

и по формулам (3) § 1, гл. VIII, части I, сложное отношение равно:

$$(M_1M_2;\ M_3M_4) = \frac{\dfrac{x_1^1}{x_1^2} - \dfrac{x_3^1}{x_3^2}}{\dfrac{x_3^1}{x_3^2} - \dfrac{x_2^1}{x_2^2}} : \frac{\dfrac{x_1^1}{x_1^2} - \dfrac{x_4^1}{x_4^2}}{\dfrac{x_4^1}{x_4^2} - \dfrac{x_2^1}{x_2^2}}.$$

Так как оно выражено через проективные координаты точек, то остаётся инвариантным при проективном преобразовании. Кроме того, однородные координаты входят только в виде отношений $x_k^1 : x_k^2$. Следовательно, сложное отношение четырёх точек есть инвариант четырёх геометрических точек, т. е. не меняется при произвольном изменении нормирования любой из четырёх точек.

Заметим ещё, что инвариантом является порядок алгебраической поверхности, ибо преобразование проективных координат точки не меняет степени алгебраического уравнения.

§ 5. Группа аффинных преобразований

Теорема. *Совокупность проективных преобразований, оставляющих неподвижной одну плоскость, образует группу.*

Действительно:

1) каждое преобразование совокупности допускает о б р а т н о е: это — обратное проективное преобразование. Оно принадлежит совокупности: если прямое преобразование переводит точки неподвижной плоскости в точки этой же плоскости, то обратное преобразование вернёт их назад и, следовательно, оставит плоскость неподвижной;

2) п р о и з в е д е н и е двух преобразований совокупности, как произведение двух проективных преобразований, будет тоже проективным преобразованием. Оно принадлежит совокупности, ибо, поскольку ни первое, ни второе преобразование не перемещает неподвижной плоскости, то и последовательное выполнение первого и второго преобразований оставит её неподвижной.

Так как вся эта совокупность преобразований составляет часть группы проективных преобразований, то её называют *подгруппой* этой группы.

О п р е д е л е н и е. *Аффинными* преобразованиями расширенного пространства называются проективные преобразования, оставляющие неподвижной несобственную плоскость пространства.

Следствие. *Совокупность аффинных преобразований составляет подгруппу группы проективных преобразований.*

Чтобы выделить проективные преобразования, оставляющие неподвижной одну плоскость пространства, проще всего принять эту плоскость за одну из граней всех координатных тетраэдров, присвоенных преобразованиям подгруппы. Если эта плоскость — несобственная, то мы должны выбирать три вершины, например A_1, A_2, A_3, несобственными. Если и исходный тетраэдр так же расположен, то относительно него четвёртые координаты этих точек будут равны нулю:

$$c_{1'}^0 = 0, \quad c_{2'}^0 = 0, \quad c_{3'}^0 = 0. \tag{a}$$

Нормируя четвёртую вершину A_0, мы можем её четвёртую координату привести к единице (она не равна нулю, ибо точка A_0 заведомо в несобственной плоскости не лежит):

$$c_{0'}^0 = 1. \tag{b}$$

Координаты относительно такого тетраэдра (см. § 8, гл. VI) суть аффинные координаты точки. Отсюда следует:

Теорема. *Аффинное преобразование переводит всякую точку пространства M в другую точку $\overline{M}$ с теми же аффинными координатами относительно новой аффинной системы координат.*

Следствие. *Аффинное преобразование определяется заданием точки (начала координат) и трёх произвольных векторов (координатных), не лежащих в одной плоскости.*

Теорема. *Аффинное преобразование определяется в произвольных аффинных неоднородных координатах формулами*

$$\overline{x}^i = c^i_k x^k + c^i_0 \qquad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по } k,\\ i,\ k = 1,\ 2,\ 3\end{matrix}\right), \qquad (3)$$

где определитель

$$\begin{vmatrix} c^1_1 & c^1_2 & c^1_3 \\ c^2_1 & c^2_2 & c^2_3 \\ c^3_1 & c^3_2 & c^3_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Действительно, внося в уравнение (1) значения (a) и (b), получим:

$$\begin{aligned} \overline{X}^i &= c^i_\beta X^\beta, \\ \overline{X}^0 &= X^0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по } \beta,\\ i = 1,\ 2,\ 3;\\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\end{matrix}\right),$$

где мы обозначили однородные координаты прописными буквами X^α ($\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3$), чтобы отличить их от неоднородных x^i ($i = 1,\ 2,\ 3$).

Если разделить первое равенство почленно на второе и положить

$$x^i = \frac{X^i}{X^0}, \quad \overline{x}^i = \frac{\overline{X}^i}{\overline{X}^0},$$

то и придём к формулам (3).

Следствие. *Наиболее общее аффинное преобразование зависит от 12 параметров.*

§ 6. Аффинная геометрия

Аффинной геометрией называется геометрия группы аффинных преобразований. Это геометрия инвариантов всех аффинных преобразований. Так как при одновременном преобразовании точки и координатной системы аффинные координаты точки сохраняются, то в аффинной геометрии имеют место те и только те свойства фигур, которые можно выразить через аффинные координаты её точек.

Так как группа аффинных преобразований является подгруппой группы проективных преобразований, то все инварианты проективной геометрии тем самым будут инвариантами и аффинной, но не наоборот.

В аффинной геометрии нет понятия длины отрезка. Любой отрезок можно принять за координатный вектор e_1 первоначальной системы координат; аффинным преобразованием он переводится в любой вектор $e_{1'}$ произвольной длины. Следовательно, длина отрезка не является инвариантом группы аффинных преобразований. Точно так же не сохраняются углы (например, угол векторов e_1 и e_2), площади, объёмы. Не сохраняется отношение непараллельных отрезков (например, отношение модулей векторов e_1 и e_2 переходит в произвольно заданное отношение модулей $e_{1'} : e_{2'}$), но уже сохраняется отношение параллельных отрезков.

Теорема. *Простое отношение трёх точек на прямой есть инвариант группы аффинных преобразований.*

По формуле (10) § 5, гл. I, отношение

$$\frac{q}{p} = \frac{M_1M}{MM_2}$$

двух отрезков одной прямой удовлетворяет соотношению

$$M = \frac{pM_1 + qM_2}{p+q},$$

откуда три координаты $M(x^i)$, $M_1(x_1^i)$, $M_2(x_2^i)$ связаны равенством

$$x^i = \frac{px_1^i + qx_2^i}{p+q}$$

и

$$\frac{q}{p} = \frac{x^i - x_1^i}{x_2^i - x^i}.$$

Так как отношение выражено через аффинные координаты, то оно является инвариантом.

§ 7. Группа перемещений пространства

Перемещением пространства называется такое аффинное преобразование его, которое сохраняет длины всех отрезков. Отсюда вытекает, что группа перемещений есть подгруппа группы аффинных преобразований.

Формула расстояния между двумя точками в аффинной системе координат (8) § 4, гл. I, содержит коэффициентами при аффинных координатах скалярные произведения координатных векторов

$$e_1^2,\ e_2^2,\ e_3^2,\ e_1\ e_2,\ e_2\ e_3,\ e_3\ e_1.$$

Следовательно, аффинное преобразование сохраняет длины всех отрезков, если сохраняет величины этих шести произведений. Отсюда вытекает сохранение модулей координатных векторов (сохранение их квадратов) и сохранение углов между ними (попарные произведения).

Два случая могут представиться в зависимости от того, сохраняется ли тройное произведение $(e_1\ e_2\ e_3)$ или меняет знак.

В первом случае мы имеем перемещение первого рода (движение), во втором — перемещение второго рода (зеркальное отображение).

Поскольку раз взятая тройка координатных векторов при всех преобразованиях группы перемещается как одно целое, сохраняя длины и углы, целесообразно начальную тройку векторов выбрать более рационально: все векторы взять единичными и взаимно перпендикулярными.

Имеем:

Теорема. *Всякое перемещение пространства переводит произвольную точку его M в другую точку $\overline{M}$ так, что они определяются одной и той же тройкой декартовых координат — каждая точка относительно своей системы координат. Перемещение — первого рода, если обе системы координат одной ориентации.*

Следствие. *Декартовы прямоугольные координаты точки не меняются, если точка перемещается вместе с системой координат.*

Теорема. *Относительно декартовой прямоугольной системы координат перемещение пространства определяется формулами* (3) *при условии, что определитель, составленный из коэффициентов c_k^i $(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$, есть определитель прямоугольного преобразования.*

Следствие. *Группа перемещений зависит от шести параметров.*

Число 6 составляется из трёх свободных членов c_0^i и трёх параметров, определяющих определитель прямоугольного преобразования (§ 3, гл. II), например трёх эйлеровых углов (§ 4*, гл. II).

Глава VIII

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Общее уравнение поверхности второго порядка

Поверхность второго порядка определяется однородным уравнением второй степени относительно четырёх однородных (декартовых прямоугольных, аффинных или проективных) координат точки x^1, x^2, x^3, x^0.

Это уравнение можно записать коротко:

$$a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0 \qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по}\\ \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ 3\end{pmatrix}, \tag{1}$$

если применить условие записи суммы только одним слагаемым с тем, что два раза повторенные указатели α и β означают суммирование, именно: каждый указатель, независимо один от другого, принимает значения 0, 1, 2, 3; при этом

$$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}. \tag{a}$$

В полной записи имеем:

$$a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+a_{33}(x^3)^2+a_{00}(x^0)^2+2a_{12}x^1x^2+2a_{13}x^1x^3+$$
$$+2a_{10}x^1x^0+2a_{23}x^2x^3+2a_{20}x^2x^0+2a_{30}x^3x^0=0. \qquad (1')$$

Двойка в коэффициенте, например в $2a_{12}x^1x^2$, появилась потому, что, полагая $\alpha=1$, $\beta=2$ или $\alpha=2$, $\beta=1$, получим, в силу условия (а), два подобных члена:

$$a_{12}x^1x^2+a_{21}x^2x^1=2a_{12}x^1x^2.$$

Уравнение (1′) содержит четыре члена с квадратами координат: $a_{11}(x^1)^2$, $a_{22}(x^2)^2$, $a_{33}(x^3)^2$, $a_{00}(x^0)^2$, и шесть членов с произведениями координат, по числу сочетаний из четырёх элементов (α, $\beta=0$, 1, 2, 3) по два. Всего уравнение содержит $4+6=10$ членов, следовательно, 10 произвольных коэффициентов.

Так как всё уравнение можно, не изменяя его решений, умножить на произвольное число, то существенны только отношения коэффициентов. Уравнение содержит 9 таких отношений; следовательно, поверхность второго порядка определяется девятью условиями, например заданием девяти точек, принадлежащих поверхности.

§ 2. Пересечение поверхности с прямой

При преобразовании координатного тетраэдра уравнение поверхности (1) переходит в новое уравнение второй степени. Так как мы всегда можем принять за ребро A_1A_0 координатного тетраэдра произвольно заданную прямую, то достаточно определить пересечение поверхности с ребром A_1A_0 координатного тетраэдра.

Прямая A_1A_0 определяется уравнениями

$$x^2=0, \quad x^3=0. \qquad (2)$$

Следовательно, координаты точки пересечения определяются совместным решением уравнений (1) и (2). Внося значения координат (2) в уравнение (1), получим для определения отношения $x_1:x_0$ квадратное уравнение:

$$a_{11}(x^1)^2+2a_{10}x^1x^0+a_{00}(x^0)^2=0. \qquad (3)$$

Это квадратное уравнение имеет два корня $x^1:x^0$ действительных и различных, мнимых сопряжённых или совпадающих:

1. Если корни действительны и различны, то каждое значение отношения $x^1:x^0$ вместе со значениями $x^2=0$, $x^3=0$ определяет точку пересечения прямой A_1A_0 с поверхностью. В частности, если $a_{11}=0$, то один из корней будет $x^0=0$, т. е. одна из точек пересечения совпадает с вершиной A_0.

2. Если корни — мнимые, то прямая A_1A_0 не встречает поверхности. Говорят, что прямая пересекает поверхность в двух *мнимых точках* (см. § 12, гл. VI).

3. Если корни совпадают, то прямая имеет только одну точку, общую с поверхностью, и называется *касательной*.

Определение. *Касательной* называется прямая, имеющая на расширенной плоскости только одну общую точку с поверхностью.

4. Наконец, может случиться, что все коэффициенты уравнения (3) равны нулю:

$$a_{11}=0, \quad a_{10}=0, \quad a_{00}=0,$$

и уравнение (3) удовлетворено тождественно.

Отношение $x^1 : x^0$ остаётся неопределённым, и всякая точка прямой A_1A_0 принадлежит поверхности, т. е. прямая A_1A_0 (*прямолинейная образующая*) лежит на поверхности.

Имеем:

Теорема. *Прямая пересекает поверхность второго порядка в двух точках — действительных, мнимых или совпадающих, или лежит на поверхности.*

§ 3. Пересечение поверхности с плоскостью

Пусть нам задана произвольная плоскость α. Примем её за грань $A_1A_2A_0$ координатного тетраэдра. Тогда она будет определяться уравнением:

$$x^3=0. \tag{4}$$

Уравнение (1) и уравнение (4) определяют линию пересечения поверхности (1) с плоскостью (4). Внося $x^3=0$ в уравнение (1), получим уравнение:

$$a_{ik}x^ix^k=0 \qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по}\\ i,\ k=0,\ 1,\ 2\end{pmatrix}, \tag{5}$$

или

$$a_{11}(x^1)^2+2a_{12}x^1x^2+a_{22}(x^2)^2+2a_{10}x^1x^0+$$
$$+2a_{20}x^2x^0+a_{00}(x^0)^2=0. \tag{5'}$$

Это уравнение, если рассматривать его как уравнение между тремя координатами x^1, x^2, x^0 точки на плоскости $A_1A_2A_0$, определяет линию пересечения поверхности с плоскостью $x^3=0$.

Так как уравнение (5) — второй степени, то эта линия — второго порядка.

Теорема. *Всякая плоскость пересекает поверхность второго порядка по кривой второго порядка.*

Возможны четыре случая:

1. Уравнение (5) определяет действительную невырождающуюся кривую второго порядка. Плоскость $x^3=0$ пересекает поверхность.

2. Уравнение (5) определяет мнимую линию, не существует тройки действительных чисел x^0, x^1, x^2, удовлетворяющих уравнению (5). Плоскость $x^3=0$ не встречает поверхности (см. § 12, гл. VI).

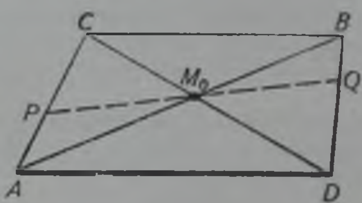
3. Кривая второго порядка (5) распадается на пару прямых. В зависимости от того, будет ли это пара мнимых прямых, действительных или совпадающих, имеем снова три случая:

a) Кривая (5) распадается на пару мнимых прямых (см. § 12, гл. VI) с одной действительной точкой пересечения M_0. Тогда всякая прямая, лежащая в плоскости $x^3 = 0$ и проходящая через точку M_0, имеет только одну общую точку с поверхностью и, следовательно, будет касательной (черт. 84). Плоскость $x^3 = 0$ несёт пучок касательных с центром в точке M_0, а потому называется *касательной плоскостью*. Точка M_0 называется *точкой касания*.

b) Кривая (5) распадается на пару действительных прямых AB и CD с точкой пересечения M_0 (черт. 85). Всякая прямая, лежащая в плоскости $x^3 = 0$, проходящая через точку M_0 и не совпадающая с прямыми AB и CD (например, прямая PQ), имеет с поверхностью только одну общую точку M_0 и, следовательно, является касательной. Плоскость $x^3 = 0$ несёт пучок касательных с центром в точке M_0 и называется касательной плоскостью, а точка M_0— точкой касания её.

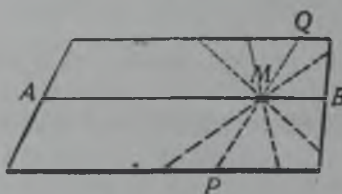
Есть существенная разница между первым и вторым случаем. В первом случае касательная плоскость имеет только одну общую

Черт. 84.



Черт. 85.

точку с поверхностью (точку касания). Такая точка называется *эллиптической*. Во втором случае касательная плоскость пересекает поверхность по паре прямых AB, CD. и точка касания является точкой пересечения их. Такая точка называется *гиперболической*, а прямые AB и CD — *прямолинейными образующими* поверхности.



Черт. 86.

c) Кривая (5) распадается на пару совпадающих прямых AB. Какую бы точку M мы ни взяли на прямой AB, она будет служить центром пучка касательных, ибо произвольная прямая PQ, лежащая в плоскости $x^3 = 0$, проходящая через точку M и не совпадающая с прямой AB, имеет только одну общую точку с поверхностью (точку M) и, следовательно, касается поверхности (черт. 86).

Плоскость $x^3 = 0$ касается поверхности, но точка касания — неопределённа: любая точка прямой AB является точкой касания. Плоскость касается поверхности вдоль всей прямолинейной образующей. Точка M (т. е. любая точка прямой AB) называется *параболической*.

4. Если все коэффициенты уравнения (5) равны нулю, то линия пересечения — неопределённа, плоскость (4) целиком принадлежит поверхности, и поверхность распадается.

Таким образом, имеем следующие предложения:

Определение. *Касательной* называется плоскость, пересекающая поверхность по паре прямых, *точкой касания* — общая точка этих прямых.

Теорема. *Касательная плоскость несёт пучок касательных к поверхности с центром в точке касания.*

Определение. Точка поверхности с определённой касательной плоскостью называется *эллиптической*, *гиперболической* или *параболической*, в зависимости от того, распадается ли линия пересечения поверхности с касательной плоскостью на пару мнимых, действительных и различных или совпадающих прямых.

Мы увидим в следующей главе, что в каждой точке поверхности имеется одна касательная плоскость, но могут быть особые точки, например вершина конуса, где касательная плоскость неопределённа. Такие точки мы сейчас не рассматриваем.

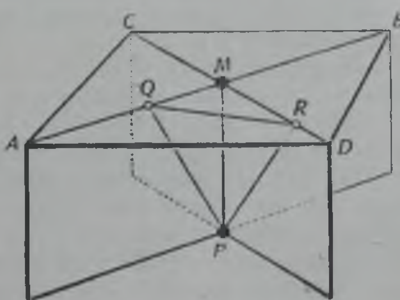
§ 4. Эллиптические, гиперболические и параболические точки поверхности

Теорема 1. *Если одна точка поверхности гиперболическая, то и все точки гиперболические.*

Пусть точка M — гиперболическая, т. е. существует в этой точке одна касательная плоскость и она пересекает поверхность по паре прямолинейных образующих AB и CD (черт. 87).

Пусть P — произвольная точка поверхности. Докажем, что через неё проходят тоже две прямолинейные образующие.

Проведём плоскость ABP. Она пересекает поверхность по кривой второго порядка. В состав линии пересечения входит прямая AB. Следовательно, линия пересечения распадается на пару прямых. Так как точка P принадлежит и поверхности и плоскости ABP, то она лежит на линии пересечения. Следовательно, вторая прямая пары проходит через точку P и, находясь в одной плоскости с прямой AB, пересекает её в какой-то точке Q. Эту точку мы должны полагать отличной от точки M, иначе в точке M мы имели бы две касательные плоскости: плоскость $ACBD$ и плоскость ABP.



Черт. 87.

Аналогично, плоскость CDP пересечёт поверхность по паре прямых: одна из них — прямая CD, другая — какая-то прямая PR.

Плоскость QPR пересекает поверхность по паре прямых PQ, PR и, следовательно, касается её в точке P. Точка P — гиперболическая точка поверхности, ибо только одна плоскость PQR касается поверхности в точке P.

Действительно, допустим, что в точке P существует ещё касательная плоскость α. Если она пересекает прямые AB и CD в точках Q и R, то она совпадает с плоскостью PQR. Допустим, что она пересекает AB в точке Q', отличной от точки Q. Так как линия пересечения поверхности касательной плоскостью α распадается на пару прямых, пересекающихся в точке касания P, а точка Q' принадлежит линии пересечения, т. е. одной из прямых пары, то эта прямая совпадает с прямой PQ', которая, следовательно, целиком принадлежит поверхности; но тогда плоскость PQQ' будет содержать три прямые поверхности: PQ, PQ' и $QQ' \equiv AB$. Такая плоскость (§ 3, случай 4) целиком принадлежит поверхности. Поэтому любая плоскость β, проходящая через прямую MR, пересечёт поверхность по двум прямым: по прямой MR и по линии пересечения её с плоскостью PQM. Значит, в точке M поверхность имеет две касательные плоскости: плоскость PQM и плоскость β, что противоречит условию.

Следствие 1. *Через гиперболическую точку поверхности проходит пара прямолинейных образующих.*

Следствие 2. *В каждой гиперболической точке существует одна касательная плоскость.*

Теорема 2. *Если одна точка поверхности — параболическая, то и все точки — параболические.*

Если точка A — параболическая, то через неё проходит одна прямолинейная образующая AB. Все её точки — параболические. Пусть P — какая-то точка поверхности, не принадлежащая прямой AB. Если она гиперболическая, то по теореме 1 все точки поверхности, в том числе и точка A, — гиперболические, что противоречит условию.

Если точка P — эллиптическая, то через неё не проходит прямолинейных образующих. Между тем плоскость ABP пересекает поверхность по кривой второго порядка, которая содержит в своём составе прямую AB и, следовательно, распадается на пару прямых. Вторая прямая пары должна пройти через точку P, ибо она принадлежит и поверхности и плоскости.

Поскольку точка P не эллиптическая и не гиперболическая, она должна быть параболической, что и требовалось доказать.

Прямолинейная образующая, проходящая через точку P, лежит в одной плоскости с прямой AB и, следовательно, её пересекает.

Так как это можно повторить относительно любой пары образующих, то все образующие между собой пересекаются. Это может осуществляться только двумя способами: или все прямые проходят через одну точку, и поверхность является конусом; или они все лежат в одной плоскости, и поверхность есть плоскость (сдвоенная).

Все точки конуса, кроме его вершины, — параболические. Вершина конуса — особая точка; к ней классификация точек поверхности неприложима. Всякая плоскость, проходящая через вершину конуса, — касательная плоскость, ибо пересекает конус по двум прямым: действительным и различным, если плоскость проходит через две образующие, мнимым, если она не содержит ни одной образующей, или, наконец, совпадающим, если плоскость содержит только одну образующую конуса, следовательно, касается его вдоль этой образующей. Значит, вершина обладает свойствами эллиптической, гиперболической и параболической точки одновременно. Неприложима эта классификация и к точкам распадающихся поверхностей. Всякая плоскость пространства касается поверхности, распадающейся на пару плоскостей, в точке пересечения с ребром, ибо пересекает плоскости по двум прямым с общей точкой на ребре.

Имеем:

Теорема*. Поверхность второго порядка с параболическими точками есть конус.*

Следствие*. Все нераспадающиеся поверхности второго порядка делятся на три типа: 1) поверхности с эллиптическими точками, не имеющие прямолинейных образующих, 2) поверхности с гиперболическими точками, которые несут две системы образующих, и 3) поверхности с параболическими точками; этот класс содержит только конические поверхности. Они имеют одну систему образующих.*

Первый пример. Примером поверхности с эллиптическими точками может служить сфера:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; \tag{a}$$

нетрудно показать, что плоскость

$$y = 1 \tag{b}$$

касается поверхности. Линия пересечения поверхности (a) с плоскостью (b) определяется системой (a, b) или эквивалентной системой

$$x^2 + z^2 = 0, \qquad y = 1. \tag{c}$$

Левая часть первого уравнения (c) разлагается на мнимые множители

$$(x + iz)(x - iz) = 0.$$

Следовательно, линия пересечения распадается на пару мнимых прямых:

$$1)\quad x + iz = 0,\quad y = 1, \qquad 2)\quad x - iz = 0,\quad y = 1,$$

пересекающихся в точке $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$. Отсюда плоскость (b) — касательная плоскость с точкой касания (0, 1, 0). Эта точка — эллиптическая, а следовательно, и все остальные точки — эллиптические.

Второй пример. Примером поверхности с гиперболическими точками может служить поверхность вращения гиперболы около мнимой оси:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1. \tag{a'}$$

Плоскость (b) пересекает поверхность (a′) по линии

$$x^2 - z^2 = 0, \qquad y = 1, \tag{c'}$$

которая распадается на пару действительных прямых:

$$1)\quad x + z = 0,\quad y = 1; \qquad 2)\quad x - z = 0,\quad y = 1.$$

Следовательно, плоскость (b) касается с поверхностью (a′) в точке (0, 1, 0). Это точка — гиперболическая.

Поскольку x^2+y^2 (квадрат расстояния точки поверхности от оси z) сохраняет постоянное значение при постоянном z, все сечения поверхности плоскостями $z=\text{const}$ — окружности с центром на оси z. Это доказывает, что поверхность (a′) — поверхность вращения. Плоскость $y=0$, проходящая через ось вращения, сечёт поверхность по гиперболе

$$x^2-z^2=1, \quad y=0,$$

которая и описывает поверхность вращением около оси z.

Третий пример. Примером поверхности с параболическими точками служит конус:

$$x^2+y^2-z^2=0. \tag{a″}$$

Плоскость

$$y=z \tag{b″}$$

пересекает поверхность по линии

$$x^2=0, \quad y=z, \tag{c″}$$

которая представляет сдвоенную прямую. Следовательно, каждая точка этой прямой, кроме начала координат, — параболическая. Начало координат — особая точка (вершина конуса). Поверхность образована движением прямой, проходящей через начало координат под углом 45° к оси z. Если обозначить буквой ρ расстояние точки поверхности (a″) от оси z:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

то уравнение (a″) примет вид:

$$\rho^2=z^2, \quad \text{откуда} \quad \rho=|z|,$$

что и доказывает предложение.

Глава IX

ТЕОРИЯ ПОЛЮСОВ И ПОЛЯРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

§ 1. Пара полярно сопряжённых точек

Определение. Две точки M и M^* *полярно сопряжены* относительно поверхности второго порядка:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0 \qquad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по}\\ \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ 3\end{matrix}\right), \tag{1}$$

если прямая MM^* пересекает её в двух точках M_1 и M_2 так, что четвёрка точек гармонически сопряжена:

$$(M_1M_2;\ MM^*)=-1.$$

Следствие. *Если точка M и M^* полярно сопряжены относительно поверхности второго порядка S, то они полярно сопряжены и относительно кривой второго порядка, получаемой пересечением поверхности плоскостью, проходящей через прямую MM^*.*

Всякая аналитическая точка прямой MM^* может быть представлена линейно через аналитические точки $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}^*$ в виде

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}^*+\lambda\mathbf{M}. \tag{2}$$

Если координаты этих точек обозначить через

$$M(x^\alpha),\ M^*(x_*^\alpha),\ M(X^\alpha),$$

то уравнение (2) перепишется в координатном виде:

$$x^\alpha = x_*^\alpha + \lambda X^\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3). \qquad (2')$$

Внося значения x^α и x^β в уравнение (1), получим:

$$a_{\alpha\beta}(x_*^\alpha + \lambda X^\alpha)(x_*^\beta + \lambda X^\beta) = 0$$

или:

$$a_{\alpha\beta}x_*^\alpha x_*^\beta + \lambda a_{\alpha\beta}(x_*^\alpha X^\beta + x_*^\beta X^\alpha) + \lambda^2 a_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = 0. \qquad (3)$$

Если координаты точек $M^*(x_*^\alpha)$ и $M(X^\alpha)$ даны, то квадратное уравнение (3) определит два корня λ_1 и λ_2, которые соответствуют двум точкам пересечения прямой MM^* с поверхностью S:

$$M_1 = M^* + \lambda_1 M,$$
$$M'' = M^* + \lambda_2 M. \qquad (2'')$$

Если эти точки расположены на оси A_0A_1, то сложное отношение их по формуле (3с) § 1, гл. VIII, часть первая, равно:

$$(M_1M_2;\quad M^*M) = \lambda_1 : \lambda_2. \qquad (a)$$

Так как преобразование координатного тетраэдра сохраняет величины λ_1, λ_2 и, конечно, не изменит сложного отношения, то формула (а) сохранит свою силу в общем случае.

Если эта четвёрка точек гармоническая, то

$$\lambda_1 : \lambda_2 = -1$$

или

$$\lambda_1 = -\lambda_2$$

и

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \qquad (b)$$

а так как по свойству корней квадратного уравнения

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{a_{\alpha\beta}(x_*^\alpha X^\beta + x_*^\beta X^\alpha)}{a_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta},$$

то условие (b) запишется в виде:

$$a_{\alpha\beta}(x_*^\alpha X^\beta + x_*^\beta X^\alpha) = 0. \qquad (4)$$

Теорема. *Пара точек* $M^*(x_*^\alpha)$ *и* $M(X^\alpha)$ *полярно сопряжена, если координаты их удовлетворяют уравнению* (4).

§ 2. Полярная форма

Левая часть уравнения поверхности второго порядка (1)

$$\Phi(x) = a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \qquad \begin{pmatrix} \text{суммирование по} \\ \alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

есть квадратичная форма. Левая часть уравнения (4), линейная относительно двух серий координат $\underset{*}{x}^\alpha$ и X^α, называется *полярной формой* этой квадратичной формы.

Полярная форма (4) может быть представлена в виде:

$$a_{\alpha\beta}(\underset{*}{x}^\alpha X^\beta + \underset{*}{x}^\beta X^\alpha) = a_{\alpha\beta}\underset{*}{x}^\alpha X^\beta + a_{\alpha\beta}\underset{*}{x}^\beta X^\alpha.$$

Обозначим во втором слагаемом указатель β буквой α, а вместо буквы α будем писать букву β и используем тождество

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \tag{a}$$

мы получим:

$$a_{\alpha\beta}\underset{*}{x}^\beta X^\alpha = a_{\beta\alpha}\underset{*}{x}^\alpha X^\beta = a_{\alpha\beta}\underset{*}{x}^\alpha X^\beta. \tag{b}$$

Делая эту замену, мы приведём левую часть уравнения (4) к виду

$$a_{\alpha\beta}\underset{*}{x}^\alpha X^\beta + a_{\alpha\beta}\underset{*}{x}^\beta X^\alpha = 2a_{\alpha\beta}\underset{*}{x}^\alpha X^\beta.$$

Итак, точки $M^*(\underset{*}{x}^\alpha)$ и $M(X^\alpha)$ полярно сопряжены, если

$$a_{\alpha\beta}\underset{*}{x}^\alpha X^\beta = 0. \tag{4'}$$

Если выписать это уравнение более подробно для $\beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, то получим:

$$a_{\alpha 0}\underset{*}{x}^\alpha X^0 + a_{\alpha 1}\underset{*}{x}^\alpha X^1 + a_{\alpha 2}\underset{*}{x}^\alpha X^2 + a_{\alpha 3}\underset{*}{x}^\alpha X^3 = 0. \tag{6}$$

Теорема. *Коэффициент при каждой букве X^β полярной формы равен половине частной производной от её квадратичной формы* (5) *по переменному x^β.*

Действительно, например,

$$a_{\alpha 1}x^\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1}a_{11}\{(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + \ldots\} =$$
$$= a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 + a_{10}x^0 = a_{11}x^1 + a_{21}x^2 + a_{31}x^3 + a_{01}x^0.$$

Заметим ещё, что из соотношения (b) следует:

$$a_{\alpha\beta}\underset{*}{x}^\alpha X^\beta = a_{\alpha\beta}X^\alpha \underset{*}{x}^\beta. \tag{7}$$

Следствие. *Полярная форма симметрична относительно двух серий своих переменных $\underset{*}{x}^\alpha$ и X^α.*

§ 3. Полярная плоскость

Теорема. *Геометрическое место точек, полярно сопряжённых заданной точке M^* (x^α_*), есть плоскость.*

Действительно, если координаты (x^α_*) считать заданными, а координаты (X^α) — переменными, то уравнение (6), как уравнение первой степени относительно координат X^α, определяет плоскость.

Определение. *Полярной плоскостью точки M^* (x^α_*) называется геометрическое место точек, ей полярно сопряжённых.* Точка M^* называется *полюсом* её полярной плоскости.

Теорема взаимности. *Если полярная плоскость точки M^* проходит через точку M^{**}, то и, наоборот, полярная плоскость точки M^{**} проходит через точку M^*.*

Полярные плоскости точек $M^*(x^\alpha_*)$ и $M^{**}(x^\alpha_{**})$ определяются уравнениями

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha_* X^\beta = 0, \quad a_{\alpha\beta}x^\alpha_{**} X^\beta = 0.$$

Условия, что первая плоскость проходит через точку M^{**} или что вторая плоскость проходит через точку M^*, напишутся в виде равенств:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha_* x^\beta_{**} = 0, \quad a_{\alpha\beta}x^\alpha_{**} x^\beta_* = 0.$$

Эти два условия эквивалентны в силу формулы (7), откуда и следует теорема.

§ 4. Касательная плоскость

Определение полярной сопряжённости точек теряет смысл, если одна из точек M^* лежит на поверхности, но уравнение полярной плоскости (6) сохранится. Покажем, что оно определяет касательную плоскость, если полюс — точка M^* — есть точка поверхности.

Если точка M^* лежит на поверхности, то

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha_* x^\beta_* = 0.$$

Пусть $M(X^\alpha)$ — точка плоскости (6), следовательно,

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha_* X^\beta = a_{\alpha\beta}x^\beta_* X^\alpha = 0.$$

Уравнение (3) примет теперь вид:

$$\lambda^2 a_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = 0. \tag{3'}$$

Допустим сначала, что точка M не принадлежит поверхности; тогда коэффициент при λ^2 в уравнении (3′) не равен нулю. Следовательно, оба корня уравнения равны нулю:

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0.$$

Отсюда по формулам (2″):

$$M_1 = M^*, \ M_2 = M^*.$$

Прямая M^*M имеет только одну точку, общую с поверхностью (точку M^*), значит, касается её.

Если же точка $M(X^\alpha)$ лежит на поверхности, то

$$a_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = 0$$

и уравнение (3′) исчезает тождественно. Следовательно, вся прямая M^*M принадлежит поверхности.

Поскольку линия пересечения плоскости (6) с поверхностью содержит в своём составе прямую M^*M, она распадается на пару прямых — действительных, мнимых или совпадающих, следовательно, эта плоскость — касательная плоскость поверхности и её полюс M^* — точка касания.

Теорема. *Если полюс лежит на поверхности, то полярная плоскость касается поверхности в её полюсе.*

Следствие 1. *Если полюс лежит в своей полярной плоскости, то он принадлежит поверхности.*

Действительно, внося в уравнение (4′) вместо текущих координат X^β координаты полюса x^β_*, получим уравнение поверхности:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha_* x^\beta_* = 0.$$

Следствие 2. *Только точки поверхности сами себе сопряжены.*

Следствие 3. *В каждой точке поверхности (кроме особой) имеется одна определённая касательная плоскость.*

Точка называется *особой*, если её полярная плоскость неопределённа.

§ 5. Вырождение полярного соответствия

Соответствие полярной плоскости её полюсу становится неопределённым, и одному полюсу M^* соответствует бесконечное множество полярных плоскостей, если все четыре коэффициента в уравнении полярной плоскости (6) обращаются в нуль:

$$a_{\alpha 0} x^\alpha_* = 0, \ a_{\alpha 1} x^\alpha_* = 0, \ a_{\alpha 2} x^\alpha_* = 0, \ a_{\alpha 3} x^\alpha_* = 0, \tag{8}$$

или в полной записи:

$$\begin{aligned} a_{00} x^0_* + a_{10} x^1_* + a_{20} x^2_* + a_{30} x^3_* &= 0, \\ a_{01} x^0_* + a_{11} x^1_* + a_{21} x^2_* + a_{31} x^3_* &= 0, \\ a_{02} x^0_* + a_{12} x^1_* + a_{22} x^2_* + a_{32} x^3_* &= 0, \\ a_{03} x^0_* + a_{13} x^1_* + a_{23} x^2_* + a_{33} x^3_* &= 0. \end{aligned} \tag{8′}$$

Четыре координаты x^α_* особой точки M^* определяются системой четырёх однородных уравнений первой степени. Такая система вообще допускает только тривиальное решение $x^\alpha_* = 0$. Эти четыре числа не определяют точки, ибо однородные координаты не могут одновременно обращаться в нуль. Следовательно, поверхность второго порядка вообще не допускает особых точек полярного соответствия.

Для того чтобы существовала особая точка, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (8) был равен нулю:

$$\mathscr{D}_4 = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Если ранг этого определителя равен трём, т. е. не все миноры третьего порядка равны нулю, то среди четырёх уравнений системы (8) будет три независимых. Система определит отношение однородных координат, т. е. одну точку M_0, для которой полярная плоскость будет неопределённой.

Теорема. *Если ранг дискриминанта $\mathscr{D}_4$ равен трём, то существует точка M_0, полярно сопряжённая со всякой точкой пространства. Поверхность есть конус и M_0 — вершина его.*

Нам остаётся доказать только вторую половину теоремы.

Так как полярная плоскость точки M_0 неопределённа, то всякая плоскость, проходящая через точку M_0, будет касательной плоскостью и, следовательно, пересечёт поверхность по паре прямых — действительных и различных, мнимых или совпадающих. Отсюда следует, что поверхность представляет геометрическое место прямых, проходящих через точку M_0.

Действительно, точка M_0 принадлежит поверхности, ибо полюс, лежащий в своей полярной плоскости, всегда принадлежит поверхности, а плоскость, проходящая через точку M_0, является его полярной плоскостью (как и всякая другая). Если же какая-нибудь точка P принадлежит поверхности, то плоскость, проходящая через точки M_0 и P, как касательная, пересечёт поверхность по паре прямых, которые пересекаются в точке M_0 (в точке касания); одна из них пройдёт через точку P.

§ 6. Вырождение полярного соответствия с рангом дискриминанта, равным двум

Если ранг дискриминанта $\mathscr{D}_4$ равен двум, т. е. все определители третьего порядка равны нулю и хотя бы один определитель второго порядка — не нуль, то среди четырёх уравнений системы (8) будут два независимых. Два уравнения первой степени определяют прямую линию. Каждая точка этой прямой является особой точкой полярного соответствия. Все они принадлежат поверхности.

Теорема. *Если ранг дискриминанта $\mathscr{D}_4$ равен двум, то существует прямая линия AB, каждая точка которой полярно сопряжена со всеми остальными точками поверхности. Поверхность распадается на пару плоскостей, пересекающихся по прямой AB.*

Только вторую половину теоремы надо доказать.

Допустим, что точка P, не лежащая на прямой AB, принадлежит поверхности. Плоскость ABP является полярной плоскостью любой точки прямой AB (ибо все точки этой прямой — особые). Она проходит через все точки этой прямой, следовательно, является касательной плоскостью в каждой точке её. Касательная плоскость пересекает поверхность по паре прямых, пересекающихся в точке касания. Одна прямая из этой пары будет сама прямая AB. Вторая прямая должна проходить через точку P, ибо эта точка принадлежит поверхности. Она должна проходить и через точку касания, а так как плоскость ABP касается поверхности в каждой точке прямой AB, то поверхности будет принадлежать весь пучок прямых, проходящих через точку P и пересекающих прямую AB, т. е. вся плоскость ABP.

Отсюда следует, что поверхность может состоять из двух плоскостей действительных, мнимых или совпадающих. Мы увидим, что последний случай относится уже к следующей степени вырождения полярного соответствия.

§ 7. Вырождение полярного соответствия с рангом дискриминанта, равным единице

Если ранг дискриминанта $\mathscr{D}_4$ равен единице, то среди уравнений (8) только одно — независимое. Одно уравнение первой степени определяет плоскость. Следовательно, существует плоскость, все точки которой — особые (полярно сопряжены со всякой точкой пространства). Всякая плоскость α — полярная плоскость для любой точки этой особой плоскости, а для тех точек особой плоскости, через которые плоскость α проходит, она будет касательной плоскостью.

Допустим, что существует точка P, принадлежащая поверхности и не лежащая в особой плоскости. Тогда поверхности будет принадлежать каждая прямая PM_0, где M_0 — любая точка особой плоскости. Действительно, плоскость PM_0A, где A — любая точка, проходит через точку M_0, следовательно, будучи полярной плоскостью точки M_0, является в ней касательной плоскостью, а потому пересекает поверхность по паре прямых, и одна из этих прямых пройдёт через точку P, если она принадлежит поверхности, и через точку M_0, поскольку M_0 есть точка касания.

Так как M_0 — любая точка особой плоскости, то поверхности будет принадлежать вся связка прямых M_0P, проходящих через точку P, что, очевидно, невозможно. Значит, все точки поверхности принадлежат особой плоскости.

Теорема. *Если ранг дискриминанта $\mathscr{D}_4$ равен единице, то поверхность распадается на дважды взятую плоскость, все точки которой — особые точки полярного соответствия.*

Глава X

АВТОПОЛЯРНЫЙ ТЕТРАЭДР

§ 1. Полярная сопряжённость плоскостей и прямых

Определение 1. Две плоскости α и β называются *полярно сопряжёнными*, если каждая из них проходит через полюс другой плоскости.

По теореме взаимности, если плоскость α проходит через полюс плоскости β, то и, обратно, плоскость β пройдёт через полюс плоскости α, и они будут полярно сопряжены.

Плоскость сама себе полярно сопряжена, если она проходит через свой собственный полюс.

Следствие. *Самосопряжённая плоскость служит касательной плоскостью поверхности.*

Возьмём две плоскости α_1 и α_2; проведём через их полюсы A_1 и A_2 какие-нибудь плоскости β_1 и β_2. Их полюсы B_1 и B_2 по теореме взаимности должны лежать и в плоскости α_1, и в плоскости α_2, т. е. на линии их пересечения. Теперь нетрудно видеть, что всякая плоскость α из пучка плоскостей с осью B_1B_2 полярно сопряжена и плоскости β_1 и плоскости β_2; значит, её полюс лежит на пересечении этих плоскостей, т. е. на прямой A_1A_2. Наоборот, плоскости пучка с осью A_1A_2 имеют полюсы на прямой B_1B_2.

Каждая точка прямой A_1A_2 полярно сопряжена каждой точке прямой B_1B_2, ибо она является полюсом плоскости, проходящей через прямую.

Определение 2. Пара прямых называется *полярно сопряжённой*, если каждая точка одной прямой полярно сопряжена каждой точке другой.

Следствие 1. *Каждая прямая имеет только одну себе полярно сопряжённую прямую, именно — линию пересечения двух плоскостей, полюсы которых лежат на первой прямой.*

Следствие 2. *Каждая точка прямой является полюсом для её полярно сопряжённой прямой относительно кривой второго порядка, получаемой сечением поверхности плоскостью, проходящей через вторую прямую и выбранную точку первой.*

Определение 3. Прямая *сама себе сопряжена*, если она совпадает со своей сопряжённой.

Следствие. *На самосопряжённой прямой каждая точка сама себе сопряжена, каждая плоскость пучка, имеющего эту прямую своей осью, сама себе сопряжена.*

Если точка сама себе сопряжена, то она лежит в своей полярной плоскости; такая полярная плоскость является касательной плоскостью, а её полюс — точкой касания. Следовательно, самосопряжённая точка есть точка поверхности.

Следствие. *Самосопряжённая прямая лежит на поверхности, являясь прямолинейной образующей её.*

§ 2. Автополярный тетраэдр I рода

Определение. *Автополярным тетраэдром* называется тетраэдр, каждая вершина которого является полюсом одной из его граней.

Существует три вида автополярных тетраэдров.

В *автополярном тетраэдре* I (первого) рода каждая вершина является полюсом противоположной грани.

Теорема. *У всякой поверхности второго порядка существует автополярный тетраэдр I рода, одна вершина которого лежит в произвольной точке пространства (не на поверхности), другая — в произвольной точке полярной плоскости первой вершины (не на поверхности) и третья — в произвольной точке линии пересечения первых двух полярных плоскостей (тоже не на поверхности).*

Возьмём произвольную точку пространства A, не лежащую на поверхности. Её полярная плоскость α не проходит через точку A.

В плоскости α берём произвольную точку B, не принадлежащую поверхности. Её полярная плоскость проходит через точку A (ибо B лежит в полярной плоскости точки A) и не содержит точки B, ибо B не принадлежит поверхности.

Линия пересечения плоскостей (α, β) полярно сопряжена прямой AB, соединяющей их полюсы. Эти прямые не совпадают, ибо плоскости α и β не содержат свои полюсы A и B. Прямая (α, β), как несамосопряжённая, не лежит на поверхности. Следовательно, на ней найдётся точка C, не принадлежащая поверхности. Полярная плоскость γ этой точки проходит через точки A и B по теореме взаимности и не проходит через точку C, ибо точка C не принадлежит поверхности. Следовательно, плоскость γ пересекает прямую (α, β) в какой-нибудь точке D, отличной от точки C.

Так как D принадлежит трём плоскостям α, β и γ, то её полярная плоскость проходит через полюсы их A, B и C и совпадает с плоскостью ABC.

Тетраэдр $ABCD$ является автополярным, ибо каждая вершина полярно сопряжена противоположной грани.

§ 3. Автополярный тетраэдр II рода

Определение. *Автополярным тетраэдром* II (второго) рода называется тетраэдр, у которого две вершины служат полюсами двух граней, которым они принадлежат, а каждая из двух других полярно сопряжена противоположной грани.

Теорема. *У всякой поверхности второго порядка существует автополярный тетраэдр II рода, две вершины которого — произвольные точки поверхности, не принадлежащие одной прямолинейной образующей, а третья — произвольная точка линии пересечения их касательных плоскостей, не лежащая на поверхности.*

Возьмём какие-нибудь две точки поверхности A и B, не лежащие на одной прямолинейной образующей. Пусть α и β — касательные плоскости поверхности в точках A и B.

Так как прямая AB не принадлежит поверхности и, следовательно, не самосопряжена, то линия пересечения касательных плоскостей (α, β), ей полярно сопряжённая, тоже не самосопряжена и не лежит на поверхности.

Возьмём на ней произвольную точку C, не принадлежащую поверхности. Полярная плоскость её (плоскость γ) по теореме взаимности проходит через точки A и B (ибо C лежит в плоскостях α и β) и не проходит через точку C (ибо C не принадлежит поверхности). Следовательно, плоскость γ пересекает прямую $(\alpha\beta)$ в некоторой точке D, отличной от точки C, и полярная плоскость ее δ проходит через точки A, B и C, ибо D лежит на пересечении их полярных плоскостей α, β и γ.

Тетраэдр $ABCD$ — автополярный. Точка A есть полюс плоскости ACD, точка B — плоскости BCD, точка C — плоскости ABD и точка D — плоскости ABC.

Заметим, что совершенно так же можно построить автополярный тетраэдр II рода, если в произвольной касательной плоскости α взять пару полярно сопряжённых точек C и D (не на поверхности). Прямая CD, не принадлежащая поверхности, будет иметь полярно сопряжённой прямую AB, пересекающую поверхность в паре точек A, B, из которых одна есть точка касания плоскости α. Тетраэдр $ABCD$ будет автополярным II рода.

§ 4. Автополярный тетраэдр III рода

По самому построению тетраэдр I рода является наиболее общим автополярным тетраэдром, вершины которого не лежат на поверхности.

Действительно, в таком автополярном тетраэдре каждая вершина должна быть полюсом противоположной грани; поэтому три другие вершины можно искать только в полярной плоскости первой.

Чтобы получить автополярный тетраэдр II рода, надо взять по крайней мере одну вершину его на поверхности. Тогда на поверхности будет лежать ещё одна вершина. Действительно, полярная плоскость первой вершины A, лежащей на поверхности, проходит через свой полюс, и, кроме того, содержит ещё две вершины B и C; их полярные плоскости пройдут через вершину A. Останется одна грань тетраэдра, которая лежит против вершины A, и одна вершина D, которая лежит в этой грани и должна быть её полюсом, если тетраэдр — автополярный. Мы получаем автополярный тетраэдр II рода.

Чтобы получить новый автополярный тетраэдр, нам надо выбрать одну из тех вершин, которые принадлежат касательной плоскости в точке A, например вершину B, так, чтобы она принадлежала поверхности. Это возможно, если точка A — гиперболическая точка поверхности, ибо тогда касательная плоскость ABC пересекает поверхность по двум образующим. Точку B надо выбрать на одной из таких образующих.

Полярная плоскость точки B пройдёт через точку A (ибо точка B лежит в её полярной плоскости) и через точку B (ибо B, как точка поверхности, самосопряжена), следовательно, пересекает касательную плоскость ABC по прямой AB. Третья вершина C грани ABC не принадлежит полярной плоскости точки B, и полярная плоскость точки не проходит через точку B; следовательно, вершина C служит полюсом грани ACD. Точка C лежит в ней, следовательно, принадлежит поверхности и AC — вторая прямолинейная образующая, лежащая в касательной плоскости точки A. Наконец, четвёртая вершина D должна быть полюсом четвёртой грани BCD. Это — тоже точка поверхности, ибо принадлежит своей полярной плоскости, а рёбра BD и CD — прямолинейные образующие.

Теорема. *Третий и последний автополярный тетраэдр имеет все четыре вершины на поверхности и все четыре грани его служат касательными плоскостями поверхности в их полюсах. Четыре ребра* (из шести) *служат прямолинейными образующими поверхности.*

Тетраэдр III рода можно построить только для поверхности с гиперболическими точками. Первая вершина A — произвольная точка поверхности, две следующие B и C — произвольные точки прямолинейных образующих AB и AC, проходящих через точку A, и последняя вершина D — точка пересечения образующих BD и CD, проходящих через B и C.

§ 4*. Автополярный тетраэдр конической поверхности

У конуса все точки пространства полярно сопряжены с вершиной конуса. Поэтому полярная плоскость любой точки пространства проходит через вершину конуса; всякая плоскость имеет полюсом вершину конуса. Для плоскостей, не проходящих через вершину, это будет единственный полюс. Для плоскости, проходящей через вершину, полюс будет неопределённым.

Теорема. *Все точки прямой, проходящей через вершину конуса, и только они одни имеют общую полярную плоскость.*

Допустим, что точки $M^*(x_*^\alpha)$ и $M_1(x_1^\alpha)$ имеют общую полярную плоскость. Тогда коэффициенты в уравнениях полярных плоскостей их (6) § 2, гл. IX, должны быть пропорциональны:

$$a_{\alpha\beta}x_*^\alpha = \lambda a_{\alpha\beta}x_1^\alpha \quad \begin{pmatrix}\text{суммирование по } \alpha; \\ \alpha, \quad \beta = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3\end{pmatrix}; \tag{a}$$

или:

$$a_{\alpha\beta}(x_*^\alpha - \lambda x_1^\alpha) = 0,$$

откуда, если положить

$$x_0^\alpha = x_*^\alpha - \lambda x_1^\alpha, \tag{b}$$

получим

$$a_{\alpha\beta}x_0^\alpha = 0 \quad \begin{pmatrix}\text{суммирование по } \alpha; \\ \alpha, \quad \beta = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3\end{pmatrix}. \tag{c}$$

Уравнения (c) совпадают с уравнениями (8) § 5, гл. IX, которые определяют вершину конуса, а из уравнений (b) следует, что вершина конуса $M_0(x_0^\alpha)$ лежит на прямой M_1M^*.

Обратно, из уравнения (b), если M_0 — вершина конуса, следует пропорциональность коэффициентов (a) и, следовательно, совпадение полярных плоскостей.

Теорема. *Автополярный тетраэдр конуса всегда имеет одной из вершин вершину конуса.*

Действительно, одна грань тетраэдра, например плоскость α, не проходит через вершину конуса (иначе все грани проходят через одну точку — и тетраэдр вырождается). Полюс этой грани должен совпасть с вершиной конуса. Остальные три вершины тетраэдра лежат в плоскости α и образуют автополярный треугольник относительно линии пересечения конуса с плоскостью α.

Глава XI

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Уравнение поверхности второго порядка, отнесённой к автополярному тетраэдру I рода

Теорема. *Уравнение поверхности второго порядка, отнесённой к автополярному тетраэдру I рода, не содержит членов с произведениями текущих координат.*

Действительно, каждая вершина служит полюсом противоположной грани; следовательно, каждая пара вершин, например A_1 и A_2, полярно сопряжена.

Вносим координаты их $A_1(1, 0, 0, 0)$ и $A_2(0, 1, 0, 0)$ в условие полярной сопряжённости (4′), § 2, гл. IX:

$$a_{11}x_*^1X^1+a_{12}(x_*^1X^2+x_*^2X^1)+a_{22}x_*^2X^2+\ \dots\ +a_{00}x_*^0X^0=0,$$

и немедленно получаем:

$$a_{12}=0,$$

ибо только этот член содержит неравные нулю координаты $x_*^1=1$ и $X^2=1$.

Так же докажем обращение в нуль всех коэффициентов $a_{\alpha\beta}$, где $\alpha\neq\beta$. Сохраняются только члены с квадратами текущих координат.

Следствие. *Уравнение всякой поверхности второго порядка может быть приведено к виду:*

$$a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+a_{33}(x^3)^2+a_{00}(x^0)^2=0, \qquad (1)$$

если отнести её к автополярному тетраэдру I рода.

§ 2. Каноническая форма уравнения поверхности второго порядка в проективном пространстве

Задание четырёх вершин автополярного тетраэдра, как геометрических точек, ещё не определяет координатного тетраэдра. Чтобы система проективных координат была определена, надо дать четыре аналитические точки. Следовательно, после приведения уравнения поверхности к виду (1) возможно ещё нормирование вершин координатного тетраэдра.

Вершины координатного тетраэдра A_α, как аналитические точки, можно заменить, не меняя геометрических точек, по формулам:

$$A_{0'} = \rho_0 A_0, \quad A_{1'} = \rho_1 A_1, \quad A_{2'} = \rho_2 A_2, \quad A_{3'} = \rho_3 A_3.$$

Пользуясь формулами (20) § 9, гл. VI, мы, должны, согласно формулам (19) § 9, гл. VI, положить:

$$c^1_{1'} = \rho_1, \quad c^2_{2'} = \rho_2, \quad c^3_{3'} = \rho_3, \quad c^0_{0'} = \rho_0 \tag{2}$$

и все остальные $c^\alpha_{\alpha'}$ равными нулю.

Мы получим:

$$x^0 = x^{0'}\rho_0, \quad x^1 = x^{1'}\rho_1, \quad x^2 = x^{2'}\rho_2, \quad x^3 = x^{3'}\rho_3. \tag{3}$$

Внося эти значения в уравнение (1), получим:

$$a_{11}\rho_1{}^2 (x^{1'})^2 + a_{22}\rho_2{}^2 (x^{2'})^2 + a_{33}\rho_3{}^2 (x^{3'})^2 + a_{00}\rho_0{}^2 (x^{0'})^2 = 0. \tag{1'}$$

Так как величины ρ_α произвольны, то мы можем выбрать их так, чтобы

$$|a_{11}\rho_1{}^2| = 1,$$

и точно так же для a_{22}, a_{33} и a_{00}. Тогда все коэффициенты в преобразованном уравнении будут равны по модулю единице.

Изменить знак коэффициента мы не можем, если оставаться в действительной области и, следовательно, считать все квадраты $\rho_\alpha{}^2$ положительными.

Так как все четыре вершины A_α координатного тетраэдра равноправны, то мы можем по нашему произволу приписывать указатели 0 или 3 тем координатам, которые входят в уравнение с отрицательными коэффициентами. Таким образом, одно уравнение должно отличаться от другого числом отрицательных квадратов. Разность между числом положительных и числом отрицательных квадратов называется *сигнатурой* формы.

Возможность умножения всех членов уравнения на минус единицу приводит к трём и только трём различным уравнениям невырождающейся поверхности второго порядка:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^0)^2 = 0, \tag{4a}$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^0)^2 = 0, \tag{4b}$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^0)^2 = 0. \tag{4c}$$

Здесь после преобразования координат мы снова стали обозначать текущие координаты буквами x^α.

В комплексном проективном пространстве коэффициенты c^α_β преобразования проективных координат, т. е. координаты вершин A_β нового координатного тетраэдра, — комплексные числа. Следовательно, величины ρ_i по формулам (2) могут быть выбраны чисто мнимыми, а их квадраты отрицательными. При этом уравнение каждой из поверхностей (4abc) может быть приведено к виду (4a). Следовательно, в комплексном проективном пространстве существует только одно каноническое уравнение невырождающейся поверхности второго порядка.

§ 3. Классификация поверхностей второго порядка в проективном пространстве

Теорема. *В действительном проективном пространстве существуют три и только три различных невырождающихся поверхности второго порядка, определяемых в каноническом виде уравнениями* (4a), (4b) *и* (4c).

Мы видели, что всякое однородное уравнение второй степени с неравным нулю дискриминантом $\mathscr{D}_4$ может быть приведено преобразованием координат к одному из трёх уравнений (4a), (4b) или (4c). С другой стороны, одно и то же уравнение относительно различных координатных тетраэдров определяет проективно эквивалентные поверхности, т. е. поверхности, которые переходят одна в другую проективным преобразованием. Следовательно, нам осталось только показать, что три поверхности (4a), (4b) и (4c) проективно различны, т. е. никакое проективное преобразование с действительными коэффициентами не может перевести одну поверхность в другую.

Лемма 1. *Поверхность* (4a) — *единственная мнимая невырождающаяся поверхность второго порядка в проективном пространстве.*

Действительно, уравнение (4a) не допускает действительных, не нулевых решений x^α, ибо сумма квадратов действительных чисел может равняться нулю только при условии, что все x^α равны нулю; четвёрка чисел $x^\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, 3, 0)$ не определяет точки. Следовательно, поверхность (4a) не содержит ни одной действительной точки (см. § 12, гл. VI).

Поверхности (4b) и (4c) имеют действительные точки, например $x^1 = 0$, $x^3 = 0$, $x^2 = 1$, $x^0 = 1$. Следовательно, при $\mathscr{D}_4 \neq 0$ уравнение (4a) определяет единственную мнимую поверхность второго порядка.

Лемма 2. *Все точки поверхности* (4b) — *эллиптические.*

Достаточно доказать, что одна из точек поверхности — эллиптическая; тогда по общей теореме (§ 4, гл. VIII) все остальные точки тоже будут эллиптические. В § 4, гл. VIII, уравнение (a) первого примера отличается от уравнения (4b) только тем, что вместо однородных координат x^α введены неоднородные $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^0 = 1$.

Мы доказали, что точка (0, 1, 0) — эллиптическая, откуда и следует теорема.

Лемма 3. *Все точки поверхности* (4c) — *гиперболические.*

Достаточно доказать, что одна точка — гиперболическая. Это мы сделали в примере втором § 4, гл. VIII, рассматривая точку (0, 1, 0), т. е. точку $x^1 = 0$, $x^2 = 1$, $x^3 = 0$, $x^0 = 1$.

В эллиптической точке поверхности касательная плоскость не пересекает поверхности; следовательно, в окрестности эллиптической точки поверхность лежит по одну сторону этой касательной плоскости. Поверхность, обладающая этим свойством в каждой своей точке, называется *овалоидом*.

Мы видели, что через эллиптическую точку поверхности второго порядка не проходит прямолинейных образующих, через каждую гиперболическую точку проходит две прямолинейные образующие. Поэтому поверхность второго порядка с гиперболическими точками называется линейчатой поверхностью второго порядка.

В действительном проективном пространстве коэффициенты $c^{\alpha}_{\alpha'}$ преобразования координат действительны; следовательно, действительные координаты x^{α} и после преобразования остаются действительными. Значит, мнимая поверхность (4a) не может после преобразования координат сделаться действительной. С другой стороны, прямая линия при проективном преобразовании переходит в прямую линию. Следовательно, линейчатая поверхность (4c) не может перейти в овалоид (4b).

Теорема. *В действительном проективном пространстве существует одна мнимая поверхность второго порядка и две проективно различных действительных: овалоид* (4b) *и линейчатая поверхность второго порядка* (4c).

§ 4*. Сигнатура формы

Доказанная теорема о проективно различных поверхностях второго порядка прямо следует из основной теоремы алгебры об инерции квадратичных форм.

Теорема инерции. *Число положительных квадратов в канонической форме уравнения не зависит от выбора автополярного тетраэдра, если при преобразовании координат обе части уравнения не умножались на отрицательное число.*

Поскольку разность между числом положительных и числом отрицательных квадратов в каноническом виде квадратичной формы называется её *сигнатурой*, имеем:

Следствие. *Сигнатура есть инвариант преобразований проективной системы координат и, следовательно, инвариант группы проективных преобразований пространства.*

Уравнение (4a) имеет сигнатуру 4 или 0 (если изменить все знаки), уравнение (4b) — сигнатуру 3 или 1, уравнение (4c) — сигнатуру 2. Следовательно, они определяют различные поверхности второго порядка в проективном пространстве.

§ 5*. Внутренние и внешние точки поверхности

Определение. Точка пространства по отношению к поверхности называется *внешней*, если из неё можно провести к поверхности касательную.

Пусть из точки A проведена к поверхности касательная и точка B — её точка касания. Так как точка касания полярно сопряжена со всеми точками касательной (и даже со всеми точками касательной плоскости), то точки A и B полярно сопряжены, и точка B лежит в полярной плоскости точки A.

Обратно, если точка B лежит на пересечении полярной плоскости точки A с поверхностью, то по теореме взаимности точка A лежит в касательной плоскости поверхности, проведённой в точке B, и, следовательно, прямая AB есть касательная.

Теорема. *Касательные к поверхности из внешней точки A образуют конус второго порядка с вершиной в точке A. Линия прикосновения конуса к поверхности лежит в полярной плоскости точки A.*

Нам остаётся только показать, что конус касательных будет второго порядка.

Допустим, что точка A принята за вершину координатного автополярного тетраэдра A_3. Тогда по формуле (21) § 10, гл. VI, уравнение конуса совпадает с уравнением линии пересечения конуса с плоскостью $A_1 A_2 A_0$, но эта плоскость — полярная плоскость точки A и пересечение её с поверхностью есть линия прикосновения конуса к поверхности. Так как сечение поверхности второго порядка плоскостью есть кривая второго порядка, уравнение этой линии в плоскости $A_1A_2A_0$ — второй степени. В пространстве это уравнение определяет конус, следовательно, описанный конус — второго порядка.

Теорема. *Все вершины координатного тетраэдра в уравнении* (4a) — *внутренние точки поверхности, в уравнении* (4c) — *внешние, в уравнении* (4b) *вершина A_0 — внутренняя точка, а остальные вершины — внешние.*

Для первого уравнения пересечение поверхности координатной плоскостью $A_1A_2A_3$ определяется системой:

$$x^0 = 0, \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0. \tag{a}$$

В отдельности первое уравнение определяет плоскость $A_1A_2A_3$, а второе

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0 \tag{5a}$$

— конус с вершиной в точке A_0, проходящий через линию (a). Так как эта линия есть пересечение поверхности (4a) с полярной плоскостью точки A_0, то каждая точка её P является точкой касания прямой A_0P с поверхностью, и конус (5a) является конусом, описанным около поверхности (4a), с вершиной в точке A_0.

Так как левая часть уравнения (5a) представляет сумму квадратов, и уравнение (в действительной области) может быть удовлетворено только нулевыми значениями:

$$x^1 = 0, \quad x^3 = 0, \quad x^3 = 0,$$

то конус мним, имея только одну действительную точку — вершину A_0 и, следовательно, согласно определению, точку A_0 следует считать внутренней точкой поверхности.

Для уравнения (4b) мы получим такой же результат, если будем пересекать поверхность плоскостью

$$x^0 = 0,$$

но для других координатных плоскостей, например для плоскости $A_0A_1A_2$, мы получим действительную линию пересечения

$$x^3 = 0, \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2 = 0$$

и действительный, описанный из вершины A_3 конус

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2 = 0. \tag{5b}$$

Три точки A_1, A_2, A_3 — внешние точки поверхности, а точка A_0 — внутренняя.

Для уравнения (4c) сечение поверхности любой координатной плоскостью — действительное, ибо после обращения в нуль любой координаты левая часть уравнения будет содержать члены разных знаков. Следовательно, все вершины — внешние точки поверхности.

Так как одну из вершин автополярного тетраэдра можно поместить в любую точку пространства, имеем:

Следствие. *Поверхность* (4a) *имеет только внутренние точки, поверхность* (4c) — *только внешние точки. Поверхность* (4b) *разделяет пространство на две области — область внутренних и область внешних точек.*

§ 6*. Классификация вырождающихся поверхностей

Мы видели, что конические поверхности обладают автополярными тетраэдрами, одна из вершин которых совпадает с вершиной конуса. Поэтому уравнение конической поверхности может быть приведено к виду уравнения (1).

При этом определитель $\mathscr{D}_4$ должен иметь ранг не выше, чем три (§ 5, гл. IX).

Этот определитель имеет вид:

$$\mathscr{D}_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{00} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{00}.$$

Обращение его в нуль возможно только при обращении в нуль одного из коэффициентов.

Таким образом, уравнение конической поверхности содержит только три члена, например:

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{00}(x^0)^2 = 0.$$

Выбором аналитических точек A_α (нормирования вершин тетраэдра) можно привести все коэффициенты к плюс или минус единице, но без изменения знака. Мы получим, следовательно, два различных уравнения в зависимости от того, будут ли все члены одного знака или один из них будет иметь знак, противоположный знаку двух других:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^0)^2 = 0, \tag{6a}$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2 = 0. \tag{6b}$$

Первое из этих уравнений определяет *мнимый конус* с одной действительной точкой — вершиной конуса. Действительно, уравнение (6a) допускает только одну тройку действительных корней:

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0, \quad x^0 = 0,$$

которая вместе с произвольным, не равным нулю значением четвёртой координаты, например $x^3 = 1$, определяет единственную действительную точку конуса — его вершину $A_3(0, 0, 1, 0)$.

Уравнение (6b) определяет *действительный конус*, ибо при любых значениях x^1, x^2 мы всегда получим действительные значения x^0.

$$x^0 = \pm \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}\ .$$

§ 7*. Вырождение второй и третьей степени

Вырождение второй степени имеет место, если ранг дискриминанта $\mathscr{D}_4$ равен двум. Тогда не только коэффициент a_{33}, но и ещё один коэффициент уравнения, например a_{22}, должен обращаться в нуль, чтобы все определители третьего порядка равнялись нулю. Получим уравнение:

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{00}(x^0)^2 = 0.$$

Нормируя аналитические точки A_α, приведём абсолютную величину каждого из коэффициентов к единице. В зависимости от знаков их мы получим одно из двух уравнений:

$$(x^1)^2 + (x^0)^2 = 0, \tag{7a}$$

$$(x^1)^2 - (x^0)^2 = 0. \tag{7b}$$

Первое уравнение определяет пару мнимых плоскостей (см. § 12, гл. VIII)

$$x^1 \pm ix^0 = 0 \qquad\qquad (i = \sqrt{-1})$$

с действительной линией пересечения

$$x^1 = 0, \quad x^0 = 0.$$

Второе определяет пару действительных плоскостей:

$$x^1 + x^0 = 0, \quad x^1 - x^0 = 0.$$

Наконец, вырождение третьей степени получается при ранге $\mathscr{D}_4$, равном единице. Тогда уравнение содержит только один квадрат

$$(x^0)^2 = 0 \tag{8}$$

и определяет дважды взятую плоскость

$$x^0 = 0.$$

§ 8. Относительный инвариант преобразования проективных координат

Определение. *Инвариантом* преобразования координат называется такая функция от коэффициентов уравнения поверхности второго порядка, которая не меняется при преобразовании координат (ср. § 3, гл. IV, часть первая, и § 5, гл. II). *Относительным инвариантом* называется функция, которая при преобразовании координат умножается на степень определителя подстановки.

Теорема. Дискриминант из всех коэффициентов уравнения $\mathscr{D}_4$ есть относительный инвариант преобразования проективных координат; при преобразовании координат он умножается на квадрат определителя подстановки.

Применим к уравнению поверхности второго порядка

$$a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0 \qquad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по}\\ \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ 3\end{matrix}\right)$$

общее преобразование проективных координат

$$x^{\alpha}=c^{\alpha}_{\alpha'}x^{\alpha'}.$$

Мы получим:

$$a_{\alpha\beta}c^{\alpha}_{\alpha'}c^{\beta}_{\beta'}x^{\alpha'}x^{\beta'}=0 \qquad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по}\\ \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ 3\\ \alpha',\ \beta'=0',\ 1',\ 2',\ 3'\end{matrix}\right).$$

Следовательно, коэффициенты уравнения

$$a_{\alpha'\beta'}x^{\alpha'}x^{\beta'}=0 \qquad (\text{суммирование по } \alpha',\ \beta')$$

той же поверхности в новой системе координат равны:

$$a_{\alpha'\beta'}=a_{\alpha\beta}c^{\alpha}_{\alpha'}c^{\beta}_{\beta'} \qquad (\text{суммирование по } \alpha,\ \beta). \quad (9)$$

Рассмотрим теперь произведение дискриминанта $\mathscr{D}_4$:

$$\mathscr{D}_4\equiv\det|a_{\alpha\beta}|=\begin{vmatrix}a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03}\\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \qquad (a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}),$$

на определитель преобразования c:

$$c\equiv\det|c^{\alpha}_{\beta'}|=\begin{vmatrix}c^{0}_{0'} & c^{0}_{1'} & c^{0}_{2'} & c^{0}_{3'}\\ c^{1}_{0'} & c^{1}_{1'} & c^{1}_{2'} & c^{1}_{3'}\\ c^{2}_{0'} & c^{2}_{1'} & c^{2}_{2'} & c^{2}_{3'}\\ c^{3}_{0'} & c^{3}_{1'} & c^{3}_{2'} & c^{3}_{3'}\end{vmatrix}.$$

По правилу умножения определителей, каждый элемент произведения

$$\mathscr{D}_4\cdot c=\det|a_{\alpha\beta}|\cdot\det|c^{\beta}_{\beta'}|=\det|b_{\alpha\beta'}| \qquad (a)$$

равен сумме произведений элементов строки за номером α первого определителя на элементы столбца за номером β' второго:

$$b_{\alpha\beta'}=a_{\alpha\beta}c^{\beta}_{\beta'}=a_{\alpha 0}c^{0}_{\beta'}+a_{\alpha 1}c^{1}_{\beta'}+a_{\alpha 2}c^{2}_{\beta'}+a_{\alpha 3}c^{3}_{\beta'}. \qquad (10)$$

Внесём эти выражения в формулу (9):

$$a_{\alpha'\beta'} = a_{\alpha\beta}c^{\alpha}_{\alpha'}c^{\beta}_{\beta'} = b_{\alpha\beta'}c^{\alpha}_{\alpha'} \qquad \text{(суммирование по } \alpha, \beta).$$

Мы получим ту же формулу (10) для умножения двух определителей:

$$\mathscr{D}'_4 = \det|a_{\alpha'\beta'}| = \det|b_{\alpha\beta'}|\cdot\det|c^{\alpha}_{\alpha'}|, \qquad \text{не суммировать!}$$

только теперь для получения элемента $a_{\alpha'\beta'}$ произведения умножается каждый элемент столбца за номером β' первого определителя на соответствующие элементы столбца за номером α' второго.

Внося сюда значение определителя $|b_{\alpha\beta'}|$ по формуле (a), получим формулу произведения определителей

$$\det|a_{\alpha'\beta'}| = \det|a_{\alpha\beta}|\cdot\det|c^{\beta}_{\beta'}|\cdot\det|c^{\alpha}_{\alpha'}|, \qquad \text{не суммировать!}$$

или

$$\mathscr{D}'_4 = \mathscr{D}_4 \cdot c^2, \tag{11}$$

что и требовалось доказать.

Теорема. *Ранг дискриминанта $\mathscr{D}_4$ есть инвариант преобразования проективных координат.*

Для ранга, равного четырём, это следует из доказанной теоремы. Геометрически это очевидно, ибо ранг дискриминанта, равный трём, есть необходимый и достаточный признак, что поверхность есть конус; ранг, равный двум, показывает, что поверхность распадается на пары действительных или мнимых поверхностей; ранг, равный единице, есть признак сдвоенной плоскости.

Теорема допускает алгебраическое доказательство.

Следствие. *В действительном проективном пространстве определитель $\mathscr{D}_4$ всегда сохраняет определённый знак.*

В самом деле, в действительном пространстве определитель преобразования c есть действительное число, и его квадрат c^2 всегда положителен. Умножение дискриминанта $\mathscr{D}_4$ на c^2 не изменит его знака. Знак определителя $\mathscr{D}_4$ сохранится и при умножении уравнения на отрицательное число, ибо дискриминант $\mathscr{D}_4$ относительно коэффициентов уравнения является однородным многочленом четвёртой степени и при изменении знаков всех элементов не меняется.

Так как для уравнений (4a) и (4c)

$$\mathscr{D}_4 = 1,$$

а для уравнения (4b)

$$\mathscr{D}_4 = -1,$$

то при отрицательном знаке дискриминанта $\mathscr{D}_4$ уравнение в проективных координатах всегда определяет действительную поверхность эллиптического типа.

Чтобы различить мнимую поверхность (4a) от действительной поверхности гиперболического типа (4c), заметим, что мнимая поверхность в пересечении с любой плоскостью пространства даёт мнимую линию, а поверхность с действительными прямолинейными образующими пересекается со всякой плоскостью по действительной линии, ибо плоскость и прямая в проективном пространстве всегда пересекаются.

Глава XII

АФФИННАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Несобственная кривая поверхности второго порядка

В проективном пространстве все плоскости равноправны; в аффинном пространстве одна плоскость (несобственная) занимает особенное положение: аффинное преобразование оставляет несобственную плоскость инвариантной. Поэтому в аффинном пространстве естественно классифицировать поверхности второго порядка по характеру их линий пересечения с несобственной плоскостью.

Отнесём поверхность к аффинной системе координат или лучше к эквивалентной ей проективной системе координат, вершины координатного тетраэдра которой имеют в аффинной системе однородные координаты A_0 (0, 0, 0, 1), A_1 (1, 0, 0, 0), A_2 (0, 1, 0, 0), A_3 (0, 0, 1, 0).

Линия пересечения поверхности второго порядка

$$a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0 \qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по}\\ \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ 3\end{pmatrix} \tag{1}$$

с несобственной плоскостью

$$x^0=0 \tag{a}$$

определяется системой (a) и (1) или системой (a) и (2):

$$a_{ik}x^{i}x^{k}=0 \qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по}\\ i,\ k=1,\ 2,\ 3\end{pmatrix}. \tag{2}$$

§ 2. Классификация поверхностей второго порядка

Геометрию на несобственной плоскости можно рассматривать только с проективной точки зрения. Следовательно, на ней можно различать только пять различных линий второго порядка:

I. Две невырождающиеся линии второго порядка:

1) мнимая линия, не имеющая ни одной действительной точки;

2) действительная линия второго порядка.

II. Три распадающиеся:

3) пара мнимых прямых с одной действительной точкой пересечения;

3*a*) пара действительных прямых;

3*b*) пара совпадающих прямых.

Сообразно этому поверхности второго порядка делятся на три типа:

1. *Эллипсоид* — не имеет несобственных точек.

2. *Гиперболоиды* — пересекают несобственную плоскость по невырождающейся действительной кривой второго порядка.

3. *Параболоиды* — пересекают несобственную плоскость по линии, распадающейся на пару прямых; следовательно, несобственная плоскость касается поверхности.

Так как условием вырождения линии (2) является обращение в нуль дискриминанта из всех коэффициентов уравнения (§ 10, 11, гл. VIII, часть первая), т. е. определителя

$$\mathscr{D}_3 = \det |a_{ik}| \qquad (i,\ k = 1, 2, 3),$$

то равенство

$$\mathscr{D}_3 = 0 \tag{3}$$

определяет параболоид.

Три случая распадения несобственной линии второго порядка соответствуют трём различным способам касания поверхности с несобственной плоскостью:

3a. Если пересечение поверхности с несобственной (касательной) плоскостью — пара мнимых прямых с одной действительной точкой их пересечения, то эта точка (точка касания) — эллиптическая точка. В таком случае и все остальные точки — эллиптические.

Поверхности называются *эллиптическим параболоидом.*

3b. Если линия пересечения с несобственной плоскостью — пара действительных прямых, то точка их пересечения (точка касания с несобственной плоскостью) — гиперболическая точка поверхности. Все точки поверхности — гиперболические.

Поверхность называется *гиперболическим параболоидом.*

3c. Если линия (2) вырождается в пару совпадающих прямых, то ранг дискриминанта $\mathscr{D}_3$:

$$\mathscr{D}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

равен единице. Каждая точка этой сдвоенной прямой является точкой касания поверхности с несобственной плоскостью. Все эти точки — параболические точки поверхности; следовательно, и все остальные точки поверхности — параболические, и поверхность вырождается.

Таким образом, существуют только два параболоида: эллиптический и гиперболический.

Нетрудно заметить, что у эллипсоида все точки эллиптические, т. е. он не имеет действительных прямолинейных образующих. Действительно, каждая прямая имеет одну несобственную точку, а у эллипсоида несобственных точек нет.

Мы увидим дальше, что гиперболоиды могут быть и с эллиптическими, и с гиперболическими точками.

§ 3. Центр поверхности второго порядка

Определение. *Центром* поверхности называется полюс несобственной прямой.

Следствие 1. *Из невырождающихся поверхностей второго порядка эллипсоид и гиперболоид имеют собственный центр. У параболоида центр несобственный.*

Действительно, если центр поверхности — несобственная точка, то он лежит в несобственной плоскости. Если же полюс принадлежит своей полярной плоскости, то эта плоскость — касательная плоскость, а полюс — точка касания.

Только параболоиды касаются несобственной плоскости. Только параболоиды имеют несобственный центр. Центр параболоида лежит на самом параболоиде, именно в той точке, где он касается несобственной плоскости.

Поэтому эллипсоид и гиперболоиды называются *центральными поверхностями* второго порядка.

Следствие 2. *Собственный центр делит пополам каждую хорду, которая проходит через него.*

Действительно, центр поверхности C, как полюс несобственной плоскости, полярно сопряжён со всякой несобственной точкой M^*. Следовательно, пара точек C и M^* гармонически разделяет две точки M_1, M_2, в которых прямая CM^* пересекает поверхность.

Так как несобственная точка гармонически сопряжена середине отрезка относительно его концов, то центр C составляет середину отрезка M_1M_2, т. е. середину хорды M_1M_2.

Следствие 3. *Центр конуса совпадает с его вершиной, если вершина — собственная. Если вершина несобственная, то конус (цилиндр) имеет линию центров, которая проходит через несобственную вершину его.*

Действительно, у конуса вершина полярно сопряжена со всякой точкой, следовательно, является полюсом всякой плоскости, в том числе и несобственной; значит, вершина служит центром. Если плоскость не проходит через вершину, то у неё имеется только один полюс — вершина. Для плоскостей, проходящих через вершину, полюсом служит всякая точка полярно сопряжённой прямой, которая всегда проходит через вершину.

У цилиндра (конус с несобственной вершиной) несобственная плоскость проходит через вершину, значит, её полюсом служит всякая точка полярно сопряжённой прямой. Это и будет линия центров цилиндра.

§ 4. Координаты центра

Если дан полюс M_0 (x_0^α), то полярная плоскость определяется уравнением (4′) § 2, гл. IX:

$$a_{\alpha\beta}x_0^\alpha X^\beta = 0, \tag{4}$$

где X^β — текущие координаты плоскости. Если эта плоскость — несобственная, то она содержит любую несобственную точку с координатами $(X^1, X^2, X^3, X^0 = 0)$.

Внося эти координаты в уравнение (4), получим:

$$a_{\alpha1}x_0^\alpha X^1 + a_{\alpha2}x_0^\alpha X^2 + a_{\alpha3}x_0^\alpha X^3 = 0.$$

Так как X^1, X^2, X^3 — вполне произвольны, то должны обращаться в нуль коэффициенты:

$$a_{\alpha 1}x_0^{\alpha} = 0, \quad a_{\alpha 2}x_0^{\alpha} = 0, \quad a_{\alpha 3}x_0^{\alpha} = 0, \tag{5}$$

или, если выписать подробно:

$$\begin{aligned} a_{11}x_0^1 + a_{21}x_0^2 + a_{31}x_0^3 + a_{01}x_0^0 &= 0, \\ a_{12}x_0^1 + a_{22}x_0^2 + a_{32}x_0^3 + a_{02}x_0^0 &= 0, \\ a_{13}x_0^1 + a_{23}x_0^2 + a_{33}x_0^3 + a_{03}x_0^0 &= 0. \end{aligned} \tag{5'}$$

Отсюда прямо следует, что при совпадении центра с началом координат:

$$x_0^1 = 0, \quad x_0^2 = 0, \quad x_0^3 = 0, \quad x_0^0 = 1$$

три уравнения дают:

$$a_{01} = 0, \quad a_{02} = 0, \quad a_{03} = 0,$$

т. е. уравнение не содержит членов с первой степенью x^0.

Следствие. *Если поверхность отнесена к центру, то уравнение поверхности не содержит членов с первыми степенями неоднородных координат.*

Уравнения (5′) совпадают с тремя последними уравнениями системы (8′) § 5, гл. IX, которые определяют вершину конуса. Следовательно, вершина конуса является его центром, как мы уже видели.

Координаты центра пропорциональны определителям матрицы коэффициентов системы (5′).

Центр — собственный, если координата x_0^0 не равна нулю. Она пропорциональна первому определителю матрицы:

$$\mathscr{D}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Так как определитель равен дискриминанту старших членов $\mathscr{D}_3$, а он обращается в нуль только для параболоидов, то только параболоиды имеют несобственный центр.

§ 5. Поверхности с неопределённым центром

Координаты центра неопределённы, если ранг матрицы коэффициентов системы (5′) равен двум, т. е. если все определители третьего порядка равны нулю. При этом система (5′) содержит только два независимых уравнения и, следовательно, определяет прямую — ***линию центров***.

Так как матрица коэффициентов (5′) содержит три последние строки определителя $\mathscr{D}_4$ [формула (9) § 5, гл. IX], а определители третьего порядка матрицы являются адъюнктами элементов первой строки, то обращение их в нуль влечёт за собой обращение в нуль самого определителя $\mathscr{D}_4$, т. е. вырождение поверхности.

Так как коэффициенты уравнения поверхности второго порядка симметричны:

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha},$$

то определитель $\mathscr{D}_4$ [формула (9) § 5, гл. IX] симметричен относительно главной диагонали. Поэтому матрица коэффициентов системы (5′) совпадает с матрицей, образованной тремя последними столбцами определителя $\mathscr{D}_4$. Следовательно, система (8′) § 5, гл. IX, если ранг её равен трём, даёт для x^0 значение, равное нулю. Таким образом, если ранг определителя $\mathscr{D}_4$ равен трём и поверхность является конусом, то вершина этого конуса — несобственная. Такой конус называется *цилиндром.*

Теорема. *Из всех нераспадающихся поверхностей второго порядка только цилиндр имеет линию центров; она проходит через несобственную вершину цилиндра.*

Если ранг определителя $\mathscr{D}_4$ равен двум, то поверхность распадается на пару плоскостей (не совпадающих). При этом ранг матрицы коэффициентов системы (5′) не может быть выше двух.

Теорема. *Линия пересечения пары плоскостей является линией центров поверхности второго порядка, которую они образуют.*

§ 6. Плоскость центров

Поверхность второго порядка имеет плоскость центров, если система (5′) имеет ранг, равный единице, т. е. содержит только одно независимое уравнение.

Как мы только что видели, в силу симметрии коэффициентов

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha},$$

матрица коэффициентов системы (5′) совпадает с тремя последними столбцами определителя $\mathscr{D}_4$, т. е. с матрицей, образованной коэффициентами при координатах x^1, x^2, x^3 [(8′) § 5, гл. IX].

Если эта система (8′) § 5, гл. IX, содержит два независимых уравнения, то, поскольку ранг матрицы коэффициентов при x^1, x^2, x^3 равен единице, эти коэффициенты пропорциональны, и система допускает одновременное исключение трёх неизвестных x^1, x^2, x^3.

Следовательно, одно из уравнений системы можно привести к виду:

$$x^0 = 0.$$

Это показывает, что при наличии двух независимых уравнений системы (8′) § 5, гл. IX, она определяет прямую, лежащую в несобственной плоскости, и поверхность распадается на пару параллельных плоскостей.

С другой стороны, если ранг системы (8′) § 5, гл. IX, равен единице, то система (5′), как часть предыдущей, имеет также ранг, равный единице. Поверхность распадается на пару совпадающих плоскостей (сдвоенная плоскость), которая и является плоскостью центров.

Теорема. *Поверхность имеет плоскость центров, если ранг системы* (5′) *равен единице.*

Если ранг определителя $\mathscr{D}_4$ равен двум, то поверхность распадается на пару параллельных плоскостей; если ранг $\mathscr{D}_4$ равен единице, то она представляет сдвоенную плоскость, и место центров совпадает с ней.

§ 7. Диаметральная плоскость

Определение. *Диаметральной плоскостью* называется полярная плоскость несобственной точки.

Следствие 1. *Диаметральные плоскости образуют связку плоскостей с центром в центре поверхности.*

Это прямо следует из теоремы взаимности: полюс диаметральной плоскости лежит в несобственной плоскости; следовательно, диаметральная плоскость проходит через полюс несобственной плоскости, т. е. через центр поверхности.

Следствие 2. *Диаметральные плоскости эллипсоида и гиперболоидов образуют связку с собственным центром. Связка диаметральных плоскостей параболоида — несобственная.*

Это следует из того, что только у параболоида центр — несобственный.

Следствие 3. *Диаметральная плоскость (собственная) делит пополам все хорды, проходящие через её полюс.*

Если M^* — несобственный полюс диаметральной плоскости α и M — точка пересечения прямой MM^* с плоскостью α, а M_1 и M_2 — с поверхностью, то четвёрка точек (M_1, M_2, M, M^*) — гармонически сопряжена по определению полярной плоскости и её полюса.

Так как одна из точек четвёрки (точка M^*) — несобственная, то другая точка пары (точка M) является серединой отрезка, образованного точками второй пары.

§ 8. Уравнение диаметральной плоскости, сопряжённой хордам данного направления

Определение. *Сопряжёнными хордами* диаметральной плоскости называются хорды, которые при продолжении пройдут через её полюс.

Так как полюс диаметральной плоскости — несобственная точка, то все прямые, проходящие через неё, параллельны между собой.

Чтобы написать уравнение диаметральной плоскости, сопряжённой хордам, параллельным вектору

$$l = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3,$$

заметим прежде всего, что все эти хорды проходят через несобственную точку $L(\xi^1, \xi^2, \xi^3, 0)$ (следствие 2 § 3, гл. VI). Следовательно, диаметральная плоскость, сопряжённая хордам, параллельным вектору l, имеет полюсом точку L.

Чтобы написать уравнение этой диаметральной плоскости, надо только внести в уравнение полярной плоскости (4') § 2, гл. IX:

$$a_{\alpha\beta} x_*^\alpha x^\beta = 0 \qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по} \\ \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3\end{pmatrix},$$

вместо координат полюса $M^*(x_*^\alpha)$, координаты точки $L(\xi^1, \xi^2, \xi^3, 0)$. Полагая

$$x_*^i = \xi^i, \quad x_*^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

получим

$$a_{i\beta}\xi^i x^\beta = 0 \tag{6}$$

или

$$a_{1\beta}x^\beta\xi^1 + a_{2\beta}x^\beta\xi^2 + a_{3\beta}x^\beta\xi^3 = 0. \tag{6'}$$

Мы видим, что диаметральные плоскости образуют связку и параметрами связки являются координаты ξ^i несобственного полюса, или, что одно и то же, координаты ξ^i вектора, параллельного её сопряжённым хордам.

Центр связки (6') определяется системой

$$a_{1\beta}x^\beta = 0, \quad a_{2\beta}x^\beta = 0, \quad a_{3\beta}x^\beta = 0.$$

Так как эти уравнения совпадают с уравнениями (5), то центр связки есть центр поверхности (следствие 1, § 7).

§ 9. Диаметры поверхности второго порядка

Определение 1. *Диаметром* поверхности второго порядка называется прямая, полярно сопряжённая несобственной прямой.

По определению, прямая, полярно сопряжённая данной прямой, есть геометрическое место точек, полярно сопряжённых всем точкам данной прямой.

Так как всякая несобственная прямая лежит в несобственной плоскости, а все точки несобственной плоскости полярно сопряжены с её полюсом, т. е. с центром поверхности, то центр всегда принадлежит геометрическому месту точек, полярно сопряжённых всем точкам любой несобственной прямой.

Отсюда вытекают:

Следствие 1. *Диаметры невырождающейся поверхности образуют связку прямых с центром в центре поверхности.*

Следствие 2. *Все диаметры параболоида параллельны.*

Определение 2. Плоскости, проходящие через прямую (несобственную), полярно сопряжённую диаметру, называются плоскостями, *сопряжёнными* диаметру.

Следствие 3. *Диаметральная плоскость, сопряжённая диаметру, делит пополам параллельные ему хорды.*

Можно высказать это следствие ещё в такой форме: если диаметральная плоскость сопряжена диаметру, то и диаметр сопряжён плоскости, т. е. проходит через полюс плоскости.

Это прямо следует из того, что все точки диаметра, в том числе и несобственная, полярно сопряжены всем точкам полярно сопряжённой (несобственной) прямой.

Так как несобственная точка диаметра полярно сопряжена центру поверхности (как всякая несобственная точка), а также всем точкам несобственной прямой l, то её полярная плоскость совпадает с диаметральной плоскостью, проходящей через прямую l. Отсюда следует, что несобственная точка диаметра есть полюс сопряжённой ему диаметральной плоскости, а значит, диаметр, проходящий через её полюс, сопряжён этой диаметральной плоскости, и все прямые, параллельные этому диаметру, как сопряжённые нашей диаметральной плоскости, делятся ею пополам.

Теорема. *Диаметр есть геометрическое место центров параллельных сечений поверхности плоскостями, сопряжёнными диаметру.*

Действительно, пусть l — диаметр поверхности и l^* — полярно сопряжённая несобственная прямая его. Произвольная плоскость α, проходящая через прямую l^*, пересекает диаметр l в точке C, которая, в силу следствия 2 § 1, гл. X, служит полюсом прямой l^* относительно линии пересечения λ поверхности с плоскостью α. Так как прямая l^* — несобственная, то полюс её — центр кривой λ.

§ 10. Сопряжённые диаметры

Определение. Пара диаметров *сопряжена*, если каждый из них лежит в диаметральной плоскости, сопряжённой другому диаметру.

Так как диаметр, лежащий в диаметральной плоскости, пересекает несобственную прямую этой плоскости, то определение можно высказать в другой форме.

Следствие 1. *Пара диаметров сопряжена, если каждый из них пересекает несобственную прямую, полярно сопряжённую другому диаметру.*

Если первый диаметр CM^*, а второй CN^* несут несобственные точки M^* и N^*, то точка N^* должна лежать на несобственной прямой l^*, полярно сопряжённой диаметру CM^*. А так как любая пара точек двух полярно сопряжённых прямых — полярно сопряжена, то несобственные точки M^* и N^* пары сопряжённых диаметров — полярно сопряжены.

Обратно, если несобственные точки M^* и N^* полярно сопряжены, то точка N^* лежит на прямой l^*, полярно сопряжённой диаметру CM^*, ибо прямая l^* содержит все несобственные точки, полярно сопряжённые точке M^*.

Отсюда вытекает:

Следствие 2. *Пара диаметров сопряжена, если их несобственные точки полярно сопряжены.*

Это определение распространяется на любые прямые.

Определение 2. Две прямые *сопряжены*, если их несобственные точки полярно сопряжены.

Следствие. *Прямые, параллельные сопряжённым диаметрам, сопряжены.*

§ 11. Условие сопряжённости двух направлений

Рассмотрим два вектора:

$$\xi = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3,$$
$$\eta = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 + \eta^3 e_3.$$

Будем искать условие, при выполнении которого прямые, параллельные векторам ξ и η, будут сопряжены.

Согласно следствию 2 § 3, гл. VI, прямые, параллельные вектору ξ, проходят через несобственную точку $X^*(\xi^1, \xi^2, \xi^3, 0)$, а параллельные вектору η — через несобственную точку $Y^*(\eta^1, \eta^2, \eta^3, 0)$.

Условие сопряжённости векторов ξ и η сводится, следовательно, к полярной сопряжённости пары несобственных точек $X^*(\xi^1, \xi^2, \xi^3, 0)$ и $Y^*(\eta^1, \eta^2, \eta^3, 0)$. Внося координаты этих точек в условие полярной сопряжённости (4′) § 2, гл. IX, получим условие сопряжённости векторов:

$$a_{ik}\xi^i\eta^k = 0 \qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по}\\ i,\ k = 1, 2, 3\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Теорема. *Векторы ξ и η определяют пару сопряжённых направлений поверхности, если координаты их удовлетворяют условию* (7).

§ 12. Тройка сопряжённых диаметров

Теорема. *Для каждой пары сопряжённых диаметров существует один вполне определённый третий диаметр, сопряжённый первому и второму.*

Действительно, два диаметра сопряжены, если полярно сопряжены их несобственные точки.

Если дана пара полярно сопряжённых несобственных точек M^* и N^*, то существует единственная несобственная точка P^*, которая полярно сопряжена и точке M^* и точке N^*; это — точка пересечения поляр этих точек относительно линии второго порядка c^2, получаемой от пересечения поверхности несобственной плоскостью, ибо полярная сопряжённость относительно поверхности для точек, лежащих в несобственной плоскости, равносильна полярной сопряжённости относительно линии пересечения поверхности несобственной плоскостью.

Следствие 1. *Если точки образуют вершины треугольника, автополярного относительно несобственной кривой поверхности, то диаметры, проходящие через них, образуют тройку сопряжённых диаметров.*

Следствие 2. *Каждый диаметр тройки сопряжённых диаметров сопряжён диаметральной плоскости, проходящей через два других диаметра.*

Теорема. *Если поверхность отнесена к тройке сопряжённых направлений, то уравнение поверхности не содержит членов с произведениями неоднородных координат.*

Поверхность отнесена к тройке сопряжённых направлений, если оси координат сопряжены; в таком случае несобственные точки осей попарно полярно сопряжены. Так как векторы осей суть координатные векторы

$$\xi = e_1, \qquad \eta = e_2, \qquad \zeta = e_3,$$

то несобственные точки осей имеют координаты

$$X^*(1,\ 0,\ 0,\ 0), \qquad Y^*(0,\ 1,\ 0,\ 0), \qquad Z^*(0,\ 0,\ 1,\ 0).$$

Внося их попарно в условие сопряжённости (7), получим немедленно:

$$a_{12} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{31} = 0.$$

Среди коэффициентов $a_{ik} (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$ не обращаются в нуль только a_{11}, a_{22}, a_{33}, откуда и следует теорема.

Глава XIII

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Канонические уравнения центральных поверхностей второго порядка в аффинной геометрии

Если несобственная плоскость не является касательной плоскостью поверхности и, следовательно, полюс её (центр поверхности) — собственная точка, то можно отнести поверхность к автополярному тетраэдру I рода, одна грань которого совпадает с несобственной плоскостью.

Допустим, что имеем одну из центральных поверхностей второго порядка. Отнесём её к автополярному тетраэдру, у которого плоскость $x^0 = 0$ — несобственная, следовательно, вершина A_0 находится в центре поверхности, а остальные три A_1, A_2, A_3 — несобственные точки, именно: вершины произвольного треугольника, автополярного относительно несобственной кривой второго порядка поверхности.

Так как тетраэдр автополярный, то уравнение поверхности сохранит только члены с квадратами однородных координат:

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + a_{00}(x^0)^2 = 0. \tag{a}$$

При надлежащем выборе аналитических точек A_i в вершинах тетраэдра мы приведём все коэффициенты с сохранением знаков к плюс или минус единице. Уравнение получит вид:

$$\pm(x^1)^2 \pm (x^2)^2 \pm (x^3)^2 \pm (x^0)^2 = 0,$$

где тот или другой знак напишется в зависимости от знака коэффициентов уравнения (a).

Всё это совершенно аналогично такому же преобразованию в проективном пространстве. Далее вступают в силу особенности аффинного пространства, и мы получаем больше аффинно-различных типов поверхностей, чем имели в проективном пространстве.

Вершины координатного тетраэдра теперь неравноправны: A_0 теперь — собственная точка (центр поверхности), а три остальные A_1, A_2, A_3 — несобственные. Не безразлично, будет ли входить в уравнение поверхности с обратным знаком член $(x^0)^2$ или одна из других текущих координат $(x^1)^2$, $(x^2)^2$ или $(x^3)^2$.

Мы будем иметь, как и раньше (§ 5, гл. XI), одну мнимую поверхность (сигнатура 4):

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^0)^2=0, \tag{1}$$

две *поверхности с эллиптическими точками* (сигнатура 2):

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^0)^2=0, \tag{2}$$

$$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2+(x^0)^2=0, \tag{3}$$

и только одну *поверхность с гиперболическими точками* (сигнатура 0):

$$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2-(x^0)^2=0, \tag{4}$$

ибо при двух отрицательных членах квадрат $(x^0)^2$ всегда одного знака с каким-нибудь другим квадратом, например $(x^3)^2$.

Поверхность (2) есть эллипсоид, ибо несобственная линия её, определяемая уравнениями

$$x^0=0, \quad (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0,$$

мнима.

Если систему координат считать декартовой прямоугольной, то уравнение (2) определит сферу радиуса, равного единице. Следовательно, любой эллипсоид может быть получен аффинным преобразованием из сферы единичного радиуса.

Теорема. *Поверхность, определяемая уравнением* (3), *есть двухполостный гиперболоид.*

Несобственная линия поверхности (3)

$$x^0=0, \quad (x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2=0$$

— действительная; следовательно, эта поверхность — гиперболоид. Она не имеет прямолинейных образующих, подобно эллипсоиду, и состоит из двух раздельно лежащих полостей. Действительно, плоскость

$$x^3=0$$

не пересекает поверхности; линия пересечения

$$x^3=0, \quad (x^1)^2+(x^2)^2+(x^0)^2=0$$

мнима. Между тем плоскости

$$x^3 = +2x^0$$

или

$$x^3 = -2x^0$$

пересекают её по действительным кривым

$$x^3 = \pm 2x^0, \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 - 3(x^0)^2 = 0.$$

Теорема. Поверхность, определяемая уравнением (4), *есть однополостный гиперболоид.*

Поверхность (4) — тоже гиперболоид: несобственная линия действительна и совпадает с несобственной линией поверхности (3)

$$x^0 = 0, \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0.$$

Эта поверхность несёт два семейства прямолинейных образующих, ибо все точки её гиперболические. Она имеет только одну полость.

Действительно, при доказательстве теоремы 1 § 4, гл. VIII, мы видели, что любая пара точек M и P поверхности гиперболического типа может быть соединена ломаной MQP, состоящей из двух кусков прямолинейных образующих MQ и QP, следовательно, целиком лежащей на поверхности.

Так как на прямой только одна несобственная точка, то один из двух отрезков одной прямой, соединяющих точки M и Q, состоит только из собственных точек. То же самое можно сказать относительно отрезка QP.

Если же точка Q сама — несобственная, то мы возьмём ломаную MRP, составленную из другой пары прямолинейных образующих. Если точка R — собственная, то одна из ломаных MRP состоит из собственных точек, и теорема доказана.

Если точка R — тоже несобственная, то прямая QR — несобственная, и касательные плоскости MQR и PQR, проведённые в точках M и P, параллельны.

Так как все касательные плоскости поверхности не могут быть параллельны, то достаточно взять точку P' с непараллельной касательной плоскостью, чтобы перейти из точки M в точку P', а из точки P' в точку P, не покидая поверхности и пользуясь только собственными точками.

Поверхность (4) имеет одну полость.

В неоднородных координатах центральные поверхности второго порядка определяются уравнениями:

мнимый эллипсоид —

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0, \tag{1'}$$

действительный эллипсоид —

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{2'}$$

двуполостный гиперболоид —

$$-x^2-y^2+z^2=1, \tag{3'}$$

однополостный гиперболоид —

$$x^2+y^2-z^2=1. \tag{4'}$$

§ 2. Центральные поверхности второго порядка в декартовой косоугольной системе координат

Декартова косоугольная система координат отличается от аффинной только тем, что координатные векторы в декартовой системе единичны (длина каждого вектора равна единице), тогда как в аффинной системе они вполне произвольны (при условии некомпланарности).

Как ни выбирать автополярный тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$ с несобственной плоскостью $A_1A_2A_3$, точку A_0 (центр) можно принять за начало декартовой системы координат, прямые A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 (тройка сопряжённых направлений) — за оси координат, и тогда в однородных декартовых координатах x^0, x^1, x^2, x^3 уравнение поверхности примет вид:

$$a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+a_{33}(x^3)^2+a_{00}(x^0)^2=0. \tag{a}$$

Мы только не можем привести коэффициенты к плюс или минус единице, ибо не можем менять длину координатных векторов, и, следовательно, преобразование (3) § 2, гл. XI, недопустимо.

Будем предполагать, что поверхность не вырождается и, следовательно, дискриминант

$$\mathscr{D}_4=a_{11}a_{22}a_{33}a_{00}$$

не равен нулю. Тогда все коэффициенты в уравнении (а) отличны от нуля. Деля обе части уравнения на $-a_{00}$ и переходя к неоднородным координатам, получим, ограничиваясь действительными поверхностями (2), (3) и (4), уравнения эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1, \tag{2''}$$

двухполостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=-1, \tag{3''}$$

однополостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1. \tag{4''}$$

В таком виде пишутся уравнения этих поверхностей, если их отнести к декартовой косоугольной системе координат с началом в центре поверхности (полюс несобственной плоскости $x_0=0$) и координатными осями в виде тройки сопряжённых диаметров.

Знаменатели a', b', c' суть (действительные или мнимые) *полудиаметры*. Действительно, подставляя в эти уравнения $y=0$, $z=0$, чтобы найти точки пересечения поверхности с осью Ox, мы получим для эллипсоида (2″) и однополостного гиперболоида (4″)

$$x^2 = a'^2; \quad x = \pm a'.$$

Отрезок диаметра между двумя точками пересечения равен $2a'$; значит, a' — полудиаметр.

Для двуполостного гиперболоида (3″) имеем:

$$x^2 = -a'^2, \quad x = \pm ia' \qquad \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

Поверхность не пересекает оси Ox. Величина a' называется *мнимым полудиаметром* гиперболоида.

Очевидно, у эллипсоида все полудиаметры — действительны; у однополостного гиперболоида a' и b' — действительные полудиаметры, c' — мнимый полудиаметр; у двуполостного гиперболоида, наоборот, c' — действительный, a' и b' — мнимые полудиаметры.

§ 3. Уравнение поверхности второго порядка, отнесённой к автополярному тетраэдру II рода

Отнесём поверхность второго порядка к автополярному тетраэдру II рода $A_0A_1A_2A_3$, где A_0 и A_3 — две точки поверхности, A_1 и A_2 — пара полярно сопряжённых точек, лежащих на линии пересечения касательных плоскостей первых двух точек (§ 3, гл. X).

Пусть

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{суммирование по}\\ \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3\end{array}\right) \qquad \text{(a)}$$

уравнение поверхности. По условию, точки $A_0(0, 0, 0, 1)$ и $A_3(0, 0, 1, 0)$ лежат на поверхности; значит, координаты их удовлетворяют её уравнению, откуда

$$a_{00} = 0, \quad a_{33} = 0.$$

Кроме того, каждая из точек $A_1(1, 0, 0, 0)$ и $A_2(0, 1, 0, 0)$ полярно сопряжена с тремя другими. По формулам (4′) § 2, гл. IX, отсюда следуют равенства:

$$a_{10} = 0, \; a_{12} = 0, \; a_{13} = 0, \; a_{20} = 0, \; a_{23} = 0.$$

Уравнение (а) принимает вид:

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{03}x^0x^3 = 0. \qquad (5)$$

Теорема. *Всякая поверхность второго порядка, отнесённая к автополярному тетраэдру II рода, определяется уравнением вида* (5).

Нормируя вершины $\{A_\alpha\}$ координатного тетраэдра, т. е. выполняя преобразование (3) § 2, гл. XI, не меняющее геометрических точек, мы получим уравнение поверхности в виде:

$$a_{11}\rho_1^2(x^{1'})^2 + a_{22}\rho_2^2(x^{2'})^2 + 2a_{03}\rho_0\rho_3x^{0'}x^{3'} = 0. \qquad (5')$$

Отсюда следует, что выбором действительных чисел ρ_a мы можем привести коэффициенты a_{11} и a_{22}, сохраняя знак, к положительной или отрицательной единице, а у коэффициента a_{03}, кроме того, изменить по произволу знак, если, конечно, эти коэффициенты не равны нулю.

Так как дискриминант

$$\mathscr{D}_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{03} \\ 0 & 0 & a_{03} & 0 \end{vmatrix} = -a_{11}a_{22}a_{03}^2$$

равен нулю при обращении одного из оставшихся коэффициентов в нуль, то уравнения невырождающихся поверхностей в проективных координатах могут быть приведены к одному из двух видов:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 2x^0x^3, \tag{6}$$

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 = 2x^0x^3. \tag{7}$$

Первое уравнение определяет действительную поверхность эллиптического типа (с эллиптическими точками), ибо

$$\mathscr{D}_4 < 0,$$

второе — действительную поверхность гиперболического типа (с действительными прямолинейными образующими), ибо

$$\mathscr{D}_4 > 0.$$

Мнимые поверхности второго порядка исключены, ибо при отнесении поверхности к автополярному тетраэдру II рода мы должны были предположить существование действительных точек A_0 и A_3.

§ 4. Канонические уравнения параболоидов в аффинной геометрии

При подходящем выборе координатного тетраэдра любая действительная поверхность может быть представлена уравнениями (4b), (4c) § 2, гл. XI, или (6), (7): поверхность с эллиптическими точками (§ 3, гл. VIII) — уравнениями (4b) или (6), с гиперболическими точками (§ 3, гл. VIII) — уравнениями (4c) или (7).

Не так дело будет обстоять, если мы захотим пользоваться аффинными координатами. Координатный тетраэдр имеет одну грань несобственную. Для центральных поверхностей несобственная плоскость не является касательной, значит, можно построить автополярный тетраэдр I рода с несобственной гранью. Параболоиды касаются несобственной плоскости. Следовательно, для этих поверхностей автополярный тетраэдр с несобственной гранью всегда будет II рода.

Поэтому в аффинной системе координат для параболоидов канонические уравнения могут быть только вида уравнений (6) или (7).

При этом надо считать несобственной или плоскость $x^3=0$ или плоскость $x^0=0$, ибо при выводе этих уравнений только эти две плоскости тетраэдра касаются поверхности.

Полагая, как всегда, несобственной плоскостью плоскость

$$x^0=0,$$

мы должны считать вершину A_0 координатного тетраэдра единственной собственной вершиной его, началом координат аффинной системы. Она лежит на параболоиде, и плоскость $A_0A_1A_2$, т. е. плоскость

$$x^3=0,$$

является собственной касательной плоскостью. Следовательно, из четырёх вершин автополярного тетраэдра вершины A_1 и A_2 полярно сопряжены противоположным граням и не принадлежат параболоиду, а точки A_0 и A_3 лежат на параболоиде и служат точками касания двух остальных граней. Таким образом, вершина A_3 — точка касания несобственной плоскости, т. е. несобственный центр параболоида.

Так как координатный тетраэдр — автополярный, то три несобственные вершины его A_1, A_2, A_3 образуют автополярный треугольник для (вырождающейся) несобственной кривой поверхности, а три оси аффинной системы A_0A_1, A_0A_2 и A_0A_3 составляют тройку сопряжённых направлений. Только одна из этих прямых A_0A_3 проходит через центр A_3 и является диаметром параболоида.

Так как при подходящем выборе аффинной системы координат уравнение произвольного параболоида приводится к одному из двух видов (6) или (7), то подходящим аффинным преобразованием (переводящим заданный координатный тетраэдр в тетраэдр $A_{0'}A_{1'}A_{2'}A_{3'}$) произвольный параболоид может быть приведён к одному из двух видов: или к параболоиду (6), или к параболоиду (7).

Следовательно, в аффинном пространстве, т. е. с точностью до аффинного преобразования, существуют только два различных параболоида. Первый из них имеет эллиптические точки и называется *эллиптическим параболоидом*. Второй имеет гиперболические точки и называется *гиперболическим*. В неоднородных координатах их уравнения имеют вид:

$$x^2+y^2=2z, \tag{6'}$$

$$x^2-y^2=2z. \tag{7'}$$

§ 5. Уравнения параболоидов в декартовой косоугольной системе координат

Если вместо аффинной системы рассмотреть декартову косоугольную систему координат, то преобразование (3) § 2, гл. XI, станет недопустимым, ибо все координатные векторы единичны, и нормирование вершин A_α, три первые координаты которых совпадают с координатами векторов осей координат, невозможно.

Деля уравнение (5) на $-a_{03}(x^0)^2$ и переходя к неоднородным координатам, мы получим два типа уравнений:

$$\frac{x^2}{p'}+\frac{y^2}{q'}=2z, \tag{6''}$$

$$\frac{x^2}{p'}-\frac{y^2}{q'}=2z, \tag{7''}$$

которые определяют эллиптические и гиперболические параболоиды в эвклидовом пространстве.

Эти уравнения нельзя назвать каноническими, ибо в зависимости от выбора диаметра A_0A_3 и пары сопряжённых направлений A_0A_1 и A_0A_2 величины p' и q' у одного и того же параболоида будут меняться.

§ 6*. Классификация вырождающихся поверхностей второго порядка в аффинной геометрии

1. Если ранг дискриминанта $\mathscr{D}_4$ равен трём, то один из коэффициентов уравнения (1) § 1, гл. XI, и только один равен нулю. Нормируя вершины A_α координатного тетраэдра, мы придём в зависимости от знака коэффициентов к двум видам уравнения (6a) и (6b) § 6*, гл. XI, но теперь в аффинном пространстве мы должны принять во внимание исключительность координатной грани

$$x^0=0$$

— несобственной плоскости.

Мы получим две мнимые поверхности:

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0, \tag{8}$$

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^0)^2=0. \tag{9}$$

Первое уравнение определяет *мнимый конус* с вершиной в начале координат. В неоднородных координатах он определяется уравнением

$$x^2+y^2+z^2=0. \tag{8'}$$

Второе уравнение определяет мнимый конус с несобственной вершиной A_3, т. е. *мнимый цилиндр* с образующей параллельной третьей оси, уравнение которого в неоднородных координатах напишется в виде:

$$x^2+y^2+1=0. \tag{9'}$$

Уравнение действительного конуса (6b) § 6*, гл. XI, в аффинном пространстве получит три различные формы:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2=0, \tag{10}$$

$$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^0)^2=0, \tag{11}$$

$$(x^1)^2-(x^2)^2-(x^0)^2=0, \tag{12}$$

или в неоднородных координатах:

$$x^2+y^2-z^2=0, \tag{10'}$$

$$x^2+y^2-1=0, \tag{11'}$$

$$x^2-y^2-1=0. \tag{12'}$$

Первое определяет единственный *действительный конус*, а два других определяют *эллиптический* и *гиперболический цилиндры*. Названия их объясняются формой направляющей линии второго порядка в плоскости $z=0$.

Третий вид цилиндра получится, если обратиться к уравнению (5) § 3. Оставаясь при условии, что ранг дискриминанта $\mathscr{D}_4$ равен трём, мы должны положить равным нулю один из коэффициентов a_{11} или a_{22}. После нормирования вершин тетраэдра (или нормирования длин координатных векторов e_1, e_2, e_3) мы придём к одному уравнению:

$$(x^2)^2=2x^0x^3, \tag{13}$$

или в неоднородных координатах:

$$y^2=2z. \tag{13'}$$

Это тоже цилиндр с образующими, параллельными первой оси, и с направляющей параболой. Он называется *параболическим цилиндром*.

2. Если ранг дискриминанта $\mathscr{D}_4$ равен двум, то поверхность распадается на пару плоскостей.

Уравнения (7a), (7b) § 7*, гл. XI, дадут теперь четыре вида, и уравнение (6), (7) § 3 — ещё один. Они записаны в таблице, где в первом столбце стоит однородное уравнение, во втором — неоднородное и в третьем — геометрический смысл их:

$(x^1)^2+(x^3)^2=0,$	$x^2+y^2=0$	Пара мнимых плоскостей с собственной линией пересечения.
$(x^1)^2+(x^0)^2=0,$	$x^2+1=0$	Пара мнимых параллельных плоскостей.
$(x^1)^2-(x^2)^2=0,$	$x^2-y^2=0$	Пара пересекающихся плоскостей.
$(x^1)^2-(x^0)^2=0,$	$x^2-1=0$	Пара параллельных собственных плоскостей.
$x^0x^3=0.$	—	Пара плоскостей — собственной и несобственной.

3. Если ранг дискриминанта $\mathscr{D}_4$ равен единице, то поверхность распадается на пару совпадающих плоскостей.

Уравнение (8) § 7*, гл. XI, даст теперь два вида:

$(x^1)^2=0,$	$x^2=0$	Сдвоенная собственная плоскость.
$(x^0)^2=0.$	—	Сдвоенная несобственная плоскость.

§ 7. Плоские сечения поверхности второго порядка

Мы видели (§ 3, гл. VIII), что всякая плоскость сечёт поверхность второго порядка по кривой второго порядка действительной, мнимой или вырождающейся. В аффинном пространстве кривые второго порядка делятся на эллипсы, гиперболы и параболы. Мы можем, следовательно, задать себе вопрос: какие из этих кривых могут лежать на заданной поверхности?

Эллипсоид (2) не имеет несобственных точек; следовательно, всякое сечение эллипсоида не имеет их.

Теорема 1. *Все плоские сечения эллипсоида — эллипсы.*

Каждый из гиперболоидов (3) или (4) можно пересечь плоскостью и по эллипсу, и по гиперболе, и по параболе.

Действительно, гиперболоид пересекается с несобственной плоскостью по несобственной невырождающейся кривой второго порядка l^*. Какая-нибудь плоскость α пересекает несобственную плоскость по прямой a^*. Несобственные точки линии пересечения поверхности плоскостью α совпадают с точками пересечения прямой a^* с кривой второго порядка l^*. Прямая a^* может пересекать кривую l^* в двух точках; тогда плоское сечение поверхности будет иметь две несобственные точки и будет гиперболой. Она может касаться кривой l^*; тогда плоское сечение будет иметь только одну несобственную точку и будет параболой. Наконец, прямая a^* может не иметь общих точек с кривой l^*; тогда плоское сечение не будет иметь несобственных точек и будет эллипсом.

Теорема 2. *Гиперболоиды несут все три вида кривых второго порядка: эллипвы, гиперболы и параболы.*

Эллиптический параболоид (6′) § 4 имеет только одну несобственную точку C^*, где он касается несобственной плоскости. Если несобственная прямая a^* плоскости α проходит через точку C^*, то сечение поверхности плоскостью α — парабола. Если прямая a^* не проходит через точку C^*, то — эллипс.

Теорема 3. *Эллиптический параболоид пересекается произвольной плоскостью по эллипсу — действительному, мнимому или вырождающемуся, и только плоскости, параллельные его диаметрам, секут этот параболоид по параболам с одной и той же несобственной точкой.*

Гиперболический параболоид (7′) § 4 пересекается с несобственной плоскостью по паре действительных прямых l^*, которые пересекаются в его несобственном центре C^*.

Если несобственная прямая a^* секущей плоскости α проходит через точку C^*, то плоское сечение поверхности имеет одну несобственную точку и будет параболой. Если прямая a^* не проходит через точку C^*, то, находясь в одной (несобственной) плоскости с прямыми l^*, прямая a^* пересекает каждую из этих прямых в одной точке, и эти две точки не совпадают, поскольку общая точка C^* прямых l^* не лежит на прямой a^*. Плоское сечение имеет две несобственные точки и является гиперболой.

Теорема 4. *Гиперболический параболоид пересекается произвольной плоскостью по гиперболе, и только плоскости, параллельные его диаметрам, секут параболоид по параболам.*

Что касается вырождающихся поверхностей второго порядка, то конус (10) § 6*, подобно гиперболоиду, пересекается несобственной плоскостью по невырождающейся кривой второго порядка и, следовательно, несёт вс виды кривых c^2. Отсюда они и носят название конических сечений.

Что касается цилиндров (11). (12), (13) § 6*, то цилиндр есть конус с несобственной вершиной, а плоскость, проходящая через вершину конуса, сечёт его по паре прямых.

У эллиптического цилиндра (11) несобственные прямые — мнимые с одной действительной точкой — несобственной вершиной C^* цилиндра. Если секущая плоскость α не проходит через точку C^*, то плоское сечение поверхности не имеет несобственных точек и является эллипсом. Если плоскость α проходит через несобственную вершину C^*, то она пересекает цилиндр по паре прямых с общей несобственной точкой C^*, следовательно, по паре параллельных действительных, мнимых или совпадающих прямых (*образующих*).

У гиперболического цилиндра (12) несобственные прямые действительны. Плоскость α пересекает их в двух точках, и плоское сечение поверхности — гипербола, если только плоскость не проходит через несобственную вершину C^* цилиндра (общую точку пары несобственных прямых цилиндра); в этом случае плоское сечение поверхности имеет только одну несобственную точку, но, поскольку плоскость проходит через вершину, линия пересечения распадается на пару параллельных прямых.

Наконец, у параболического цилиндра (13) несобственная кривая вырождается в сдвоенную прямую:

$$x^2 = 0, \quad x^0 = 0.$$

Всякая плоскость α, не параллельная образующим, пересекает её в одной точке, отличной от несобственной вершины цилиндра $x^0 = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = 0$, и плоское сечение, имея одну несобственную точку, является параболой. Если плоскость параллельна образующим, но не параллельна диаметрам направляющей параболы, т. е. пересекает несобственную прямую цилиндра в его несобственной вершине, то плоское сечение поверхности распадается на две образующие цилиндра. Если плоскость параллельна образующим цилиндра и диаметрам его направляющей параболы, т. е. проходит через несобственную образующую цилиндра, то линия сечения состоит из одной собственной и одной несобственной образующих.

Теорема 5. *Конус пересекается плоскостями по всем трём видам кривых второго порядка, эллиптический цилиндр — по эллипсам или по двум (может быть совпадающим) образующим, гиперболический цилиндр — по гиперболам или по паре образующих и параболический цилиндр — по параболам или по паре образующих, из которых одна может быть несобственной или даже две, если секущая плоскость — несобственная.*

§ 8. Параллельные плоские сечения поверхности второго порядка

Сечения произвольной поверхности второго порядка двумя параллельными плоскостями имеют одни и те же несобственные точки, ибо параллельные плоскости пересекают несобственную плоскость по одной и той же прямой. Параллельное перенесение кривой сохраняет несобственные точки её. Сдвинув кривые так, чтобы их центры совпали с началом, мы уничтожим члены с первыми степенями неоднородных координат (§ 4, гл. XII), а так как несобственные точки кривой определяются старшими членами уравнения [уравнение (2) § 1, гл, XII], то уравнения двух параллельных сечений поверхности после параллельного переноса будут отличаться только величиной свободного члена. Это значит, что две кривые отличаются только масштабом. Действительно, уменьшая длину всех координатных векторов в ρ раз, где

$$\rho = \sqrt{|a_{00}|},$$

мы выполним преобразование координат

$$x^i = \rho x^{i'}, \quad x^0 = x^{0'}.$$

Сокращая после этого всё уравнение на $\rho^2 = |a_{00}|$, мы приведём свободный член к единице.

Аффинное преобразование пространства, которое получается при переходе от одной аффинной системы координат к другой с теми же осями и пропорциональным изменением модулей координатных векторов, называется *подобным преобразованием*. Фигуры, получаемые таким преобразованием, называются *подобными* исходным.

Имеем:

Теорема. *Сечение поверхности второго порядка параллельными плоскостями подобны.*

§ 9*. Асимптотический конус

Определение 1. *Асимптотой* поверхности второго порядка называется касательная поверхности в несобственной точке. *Асимптотической* называется плоскость, касательная к поверхности в несобственной точке.

Следствие 1. *Все асимптоты эллиптического параболоида — несобственные.*

Действительно, эллиптический параболоид касается несобственной плоскости, которая и будет содержать все касательные в единственной несобственной точке параболоида, являясь его единственной асимптотической плоскостью.

Следствие 2. *Гиперболический параболоид, кроме несобственной плоскости, имеет ещё два пучка параллельных собственных асимптотических плоскостей, которые проходят через одну или другую несобственную прямую параболоида. Каждая асимптотическая плоскость содержит одну прямолинейную образующую параболоида; все прямые плоскости, параллельные этой образующей, суть асимптоты.*

Действительно, плоскость, проходящая через несобственную прямолинейную образующую, должна пересекать параболоид по паре прямых, следовательно, касаться параболоида в несобственной точке. Если вторая прямая пары — тоже несобственная, то асимптотическая плоскость совпадает с несобственной плоскостью. Если эта прямая — собственная образующая параболоида, то асимптотическая плоскость — собственная и содержит пучок касательных параболоида в несобственной точке этой образующей. Все прямые этого пучка, т. е. прямые асимптотической плоскости, параллельные той образующей, которую она содержит, являются асимптотами.

Определение 2. *Асимптотическим конусом* называется описанный около поверхности второго порядка конус, линия прикосновения которого — несобственная.

Следствие 1. *Все образующие асимптотического конуса — асимптоты, все касательные плоскости его — асимптотические плоскости поверхности.*

Первая часть предложения очевидна, ибо образующие описанного конуса касаются поверхности, а поскольку линия прикосновения — несобственная, то и точки касания этих касательных — несобственные, а сами касательные — асимптоты.

Вторая часть вытекает из очевидного предложения, что в точке касания двух поверхностей они имеют общую касательную плоскость.

Следствие 2. Только гиперболоиды имеют асимптотический конус.

Действительно, эллипсоид не имеет несобственной линии; следовательно, асимптотический конус его мним. У параболоида несобственная кривая распадается на пару прямых — действительных или мнимых; следовательно, асимптотический конус вырождается. Гиперболоиды пересекают несобственную плоскость по действительной, невырождающейся кривой второго порядка l^*. Описанный около гиперболоида вдоль линии l^* конус и будет асимптотическим.

Мы видели в § 4*, гл. XI, что линия прикосновения описанного конуса лежит в полярной плоскости его вершины. Так как асимптотический конус касается вдоль линии, лежащей в несобственной плоскости, то его вершина должна лежать в полюсе несобственной плоскости, т. е. в центре поверхности. Так как образующие его проходят через точки несобственной кривой гиперболоида, то имеем:

Теорема. *Асимптотический конус гиперболоида проектирует несобственную линию его из центра поверхности.*

Следствие. *Если поверхность отнесена к центру, то уравнение асимптотического конуса получается отбрасыванием свободного члена в уравнении поверхности.*

В общем случае асимптотический конус гиперболоида

$$a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = 0 \tag{a}$$

определяется уравнением:

$$a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} + \lambda\,(x^0)^2 = 0, \tag{14}$$

где

$$\lambda = -\frac{\mathscr{D}_4}{\mathscr{D}_3}. \tag{15}$$

Действительно, уравнение (14) при произвольном λ определяет пучок поверхностей, имеющий базисом поверхность (a) и сдвоенную несобственную плоскость

$$(x^0)^2 = 0. \tag{b}$$

Так как всякая плоскость пространства пересекает эту сдвоенную плоскость по сдвоенной прямой, следовательно, касается её, то вдоль общей линии пучка поверхностей поверхности (a) и (b) касаются, а, следовательно, все поверхности пучка касаются друг друга. Среди них будет и описанный конус (асимптотический, ибо линия прикосновения — несобственная). Чтобы найти конус среди поверхностей пучка (14), надо потребовать, чтобы дискриминант $\mathscr{D}_4^*$ для уравнения (14) равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{00}+\lambda & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда прямо получаем формулу (15).

Если поверхность отнесена к центру, то

$$a_{01} = 0, \quad a_{02} = 0, \quad a_{03} = 0$$

и

$$\mathscr{D}_4 = a_{00}\mathscr{D}_3.$$

Следовательно,

$$\lambda = -a_{00},$$

что и доказывает предложение.

§ 10*. Инварианты поверхности второго порядка относительно преобразования аффинной системы координат

Относительный инвариант преобразования проективных координат останется относительным инвариантом и для преобразования аффинных координат, ибо аффинные координаты являются специальным видом проективных.

Определитель преобразования

$$\det|c^{\alpha}_{\alpha'}|$$

теперь будет равняться определителю преобразования координатных векторов. Действительно, сравнивая формулы (4) § 2, гл. II, которые дают преобразование аффинной системы координат, с формулами преобразования проективных координат (20) § 9, гл. VI, мы получим

$$c^0_{k'} = 0, \quad c^0_{0'} = 1 \qquad (k' = 1, 2, 3)$$

и

$$e_{i'} = c^i_{i'} e_i \qquad \begin{pmatrix}\text{суммирование по}\\ i = 1, 2, 3\end{pmatrix}.$$

Значит, определитель преобразования равен:

$$\det|c^{\alpha}_{\alpha'}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c^1_{0'} & c^1_{1'} & c^1_{2'} & c^1_{3'} \\ c^2_{0'} & c^2_{1'} & c^2_{2'} & c^2_{3'} \\ c^3_{0'} & c^3_{1'} & c^3_{2'} & c^3_{3'} \end{vmatrix} = \det|c^i_{i'}|,$$

и, следовательно, по формуле (11) § 8, гл. XI,

$$\mathscr{D}'_4 = \mathscr{D}_4 \cdot (\det|c^i_{i'}|)^2. \tag{16}$$

Теорема. Дискриминанты $\mathscr{D}_3$ и $\mathscr{D}_4$ суть относительные инварианты преобразования аффинной системы координат.

Для дискриминанта $\mathscr{D}_4$ теорема уже доказана. Инвариантность дискриминанта $\mathscr{D}_3$ прямо следует из формулы (15). Действительно, так как при преобразовании уравнения (14) координата x^0 не меняется и параметр пучка λ остаётся без изменения, то отношение $\frac{\mathscr{D}_4}{\mathscr{D}_3}$ есть абсолютный инвариант, а дискриминант $\mathscr{D}_3$ — относительный инвариант:

$$\mathscr{D}'_3 = \mathscr{D}_3 \cdot (\det|c^i_{i'}|)^2.$$

§ 11*. Прямолинейные образующие

Кроме конуса и цилиндров, прямолинейные образующие имеют только две поверхности гиперболического типа: однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Это мы уже видели в § 5, гл. XI. Мы теперь возвращаемся к этому вопросу, чтобы показать особенность расположения прямолинейных образующих у параболоида.

Нетрудно заметить, что плоскость

$$y = 1$$

является касательной плоскостью однополостного гиперболоида [формула (4′) § 1]:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1. \qquad \text{(a)}$$

Действительно, линия пересечения их определяется системой

$$y = 1, \quad x^2 - z^2 = 0.$$

Так как второе уравнение распадается, то линия пересечения состоит из двух прямых:

$$y = 1, \ x - z = 0; \qquad \text{(17a)}$$

$$y = 1, \ x + z = 0, \qquad \text{(17b)}$$

и плоскость $y = 1$ касается поверхности.

Пучок плоскостей, проходящих через одну из этих прямых, сечёт поверхность по парам прямых с одной неподвижной прямой — осью пучка. Подвижная прямая опишет одно семейство образующих.

Уравнение пучка имеет вид:

$$y - 1 = \lambda (x - z), \qquad \text{(b)}$$

уравнение поверхности (a) можно написать в виде:

$$(x + z)(x - z) + (y + 1)(y - 1) = 0.$$

Рассматривая совместно эти два уравнения, вносим во второе значение $y - 1$, взятое из первого. Мы получаем:

$$(x - z)[x + z + \lambda (y + 1)] = 0.$$

Обращение в нуль первого множителя приводит, в силу уравнения (b), к системе (17a), т. е. к оси пучка плоскостей. Обращение в нуль второго множителя, если иметь в виду уравнение (b), приводит к системе

$$\left.\begin{aligned} y - 1 &= \lambda (x - z), \\ y + 1 &= -\frac{1}{\lambda}(x + z), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(18)}$$

определяющей первую систему прямолинейных образующих.

Если исходить из прямой (17b), то придём ко второй системе:

$$\left.\begin{aligned} y - 1 &= \mu (x + z), \\ y + 1 &= -\frac{1}{\mu}(x - z). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(19)}$$

Уравнения (18) и (19), где λ и μ — произвольные параметры, определяют две системы прямолинейных образующих однополостного гиперболоида.

Для гиперболического параболоида (7′) § 4

$$x^2 - y^2 = 2z \qquad \text{(a′)}$$

мы возьмём плоскость

$$z = 0.$$

Линия пересечения их определяется системой

$$x^2 - y^2 = 0, \quad z = 0,$$

которая и даёт две прямые:

$$x - y = 0, \quad z = 0, \qquad \text{(20a)}$$

$$x + y = 0, \quad z = 0, \qquad \text{(20b)}$$

лежащие на поверхности.

Пучок плоскостей, имеющий осью первую прямую, определится уравнением:

$$z = \lambda (x - y). \tag{b'}$$

Линия пересечения этой плоскости с поверхностью (a′), уравнение которой можно написать в виде

$$(x + y)(x - y) = 2z, \tag{c'}$$

определяется двумя уравнениями (b′) и (c′). Внося во второе уравнение значение z, взятое из первого, получим:

$$(x - y)(x + y - 2\lambda) = 0.$$

Обращение в нуль первого множителя в силу уравнения (b′) приводит немедленно к оси пучка (20a). Обращение в нуль второго, если присоединить уравнение (b′), даст систему

$$\begin{gathered} z = \lambda (x - y), \\ x + y = 2\lambda, \end{gathered} \tag{21}$$

которая определяет при произвольном параметре λ одну систему прямолинейных образующих параболоида. Если исходить из прямой (20b), то получим вторую систему:

$$\begin{gathered} z = \mu (x + y), \\ x - y = 2\mu. \end{gathered} \tag{22}$$

Уравнения (21) и (22) *определяют две системы прямолинейных образующих гиперболического параболоида.*

Теперь мы можем обратиться к особенности расположения прямолинейных образующих гиперболического параболоида. Второе уравнение (21) содержит параметр λ только в свободном члене. Значит, определяет плоскости, параллельные плоскости

$$x + y = 0. \tag{23a}$$

Этой плоскости будут параллельны все образующие первой системы. Образующие второй системы параллельны плоскости

$$x - y = 0. \tag{23b}$$

Плоскости (23a, b) называются *опорными* плоскостями гиперболического параболоида.

Глава XIV

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Характеристическое уравнение

Мы теперь переходим к метрической теории поверхностей второго порядка и поэтому будем пользоваться декартовой прямоугольной системой координат.

Единичные взаимно перпендикулярные векторы осей координат будем обозначать $\boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{k}$.

Основной вопрос этой теории заключается в возможности пользоваться автополярным тетраэдром (гл. X) в прямоугольной системе координат.

Мы уже писали уравнение поверхности второго порядка в косоугольной декартовой системе координат, координатный тетраэдр которой был автополярен (§ 2, 5, гл. XIII). Для этого надо было направить оси координат по трём сопряжённым направлениям. Следовательно, наш вопрос сводится к существованию таких трёх направлений, которые были бы и взаимно сопряжены и взаимно перпендикулярны.

Определение. Три направления, попарно сопряжённые и попарно перпендикулярные, называются *главными направлениями* поверхности второго порядка.

Диаметральная плоскость, сопряжённая главному направлению, называется *главной плоскостью* поверхности. Диаметр главного направления называется *осью* поверхности.

Обратимся к доказательству основной теоремы о существовании одной тройки главных направлений.

Рассмотрим три вектора ξ, η, ζ, определяемых относительно прямоугольной системы координат с координатными векторами $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$:

$$\xi = \xi^1 \boldsymbol{i}_1 + \xi^2 \boldsymbol{i}_2 + \xi^3 \boldsymbol{i}_3, \quad \eta = \eta^i \boldsymbol{i}_i, \ \zeta = \zeta^i \boldsymbol{i}_i \qquad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по}\\ i = 1,\ 2,\ 3\end{matrix}\right).$$

Если они попарно сопряжены и перпендикулярны, то должны быть удовлетворены условия сопряжённости (7) § 11, гл. XII, и перпендикулярности (6) § 2, гл. I,

$$a_{ik}\xi^i\eta^k = 0, \ a_{ik}\eta^i\zeta^k = 0, \ a_{ik}\zeta^i\xi^k = 0, \qquad \left(\begin{matrix}\text{суммирование по}\\ i,\ k = 1,\ 2,\ 3\end{matrix}\right).$$

$$\xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2 + \xi^3\zeta^3 = 0, \ \eta^1\zeta^1 + \eta^2\zeta^2 + \eta^3\zeta^3 = 0, \ \zeta^1\xi^1 + \zeta^2\xi^2 + \zeta^3\xi^3 = 0. \quad (1)$$

Выпишем полностью уравнения, относящиеся к координатам ξ^i:

$$\begin{aligned} a_{i1}\xi^i\eta^1 + a_{i2}\xi^i\eta^2 + a_{i3}\xi^i\eta^3 &= 0, \\ \xi^1\eta^1 + \quad \xi^2\eta^2 + \quad \xi^3\eta^3 &= 0 \end{aligned} \qquad (\textit{не суммировать!}) \qquad (2)$$

и такие же два уравнения с заменой η^i на ζ^i.

Если первый вектор ξ задать произвольно, т. е. дать три числа ξ^1, ξ^2, ξ^3, то система (2) определит вплоть до произвольного общего множителя неизвестные η^1, η^2, η^3, т. е. второй вектор η, сопряжённый и ортогональный первому. Третьего вектора ζ, сопряжённого и перпендикулярного первому, не будет существовать, ибо система двух независимых линейных однородных уравнений вполне определяет отношения неизвестных η^i.

Для того чтобы вектор ξ допускал два сопряжённых и перпендикулярных вектора, координаты ξ^i должны удовлетворять условию, чтобы ранг системы (2) был равен единице, т. е. чтобы коэффициенты при неизвестных η^i были пропорциональны. Обозначая через s множитель пропорциональности, мы напишем три уравнения:

$$a_{i1}\xi^i = s\xi^1, \ a_{i2}\xi^i = s\xi^2, \ a_{i3}\xi^i = s\xi^3.$$

Перенося все члены в одну часть, получим систему трёх однородных уравнений для ξ^i.

$$\begin{aligned} (a_{11} - s)\,\xi^1 + a_{12}\xi^2 + a_{13}\xi^3 &= 0, \\ a_{21}\xi^1 + (a_{22} - s)\,\xi^2 + a_{23}\xi^3 &= 0, \\ a_{31}\xi^1 + a_{32}\xi^2 + (a_{33} - s)\,\xi^3 &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Такая система вообще допускает только нулевые решения $\xi^1=\xi^2=$ $=\xi^3=0$, которые не определяют вектора ξ. Чтобы существовали не равные одновременно нулю решения, система должна быть ранга, равного двум, т. е. определитель системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Это уравнение носит название *характеристического уравнения Бине.*

Для каждого действительного корня уравнения (4) система (3) вполне определяет совокупность коллинеарных векторов (ξ), т. е. отношение $\xi^1:\xi^2:\xi^3$, а для этих ξ^i система (2) имеет ранг, равный единице, т. е. сводится к одному уравнению так, что каждый вектор η или ζ, перпендикулярный к ξ, тем самым будет сопряжён с ним.

Мы увидим, что решать систему (2) не придётся. Характеристическое уравнение всегда имеет действительные корни, и если они различны, то определяют по формулам (3) тройку взаимно сопряжённых и перпендикулярных векторов.

Предварительно нам надо доказать замечательное свойство инвариантности корней характеристического уравнения. Оно имеет большое значение в задаче приведения уравнения поверхности к каноническому виду, но сейчас оно необходимо нам для доказательства основной теоремы о действительности всех трёх корней характеристического уравнения.

§ 2. Инвариантность корней характеристического уравнения

Теорема. Корни характеристического уравнения (4) *инвариантны относительно преобразований декартовой прямоугольной системы координат.*

Мы хотим показать, что корни уравнения (4), написанного для поверхности

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0 \tag{5}$$

в системе декартовых прямоугольных координат (x^α), где $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$, $x^0=1$, и корни уравнения (4) для той же поверхности в новой системе декартовых прямоугольных координат $(x^{\alpha'})$:

$$a_{\alpha'\beta'}x^{\alpha'}x^{\beta'}=0, \tag{5'}$$

равны между собой.

С этой целью мы покажем, что то же самое уравнение (4) получается при решении другого вопроса, который можно формулировать следующим образом:

Найти все параболоиды среди пучка поверхностей второго порядка, имеющего базисом произвольно заданную поверхность (5) и сферу радиуса, равного единице:

$$\Phi(x^\alpha)\equiv(x^1-ax^0)^2+(x^2-bx^0)^2+(x^3-cx^0)^2-(x^0)^2=0. \tag{6}$$

Уравнение пучка можно написать в виде:

$$a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}-s\Phi(x^{\alpha})=0, \tag{7}$$

где s — параметр пучка.

Так как старшие члены уравнения сферы, т. е. члены второй степени относительно координат $x^i (i=1, 2, 3)$, содержат только три квадрата в уравнении

$$\Phi\equiv(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-2x^0(ax^1+bx^2+cx^3)+$$
$$+(x^0)^2(a^2+b^2+c^2-1)=0, \tag{6'}$$

то обращение в нуль дискриминанта старших членов $\mathcal{D}_3$, определяющее параболоиды пучка (§ 2, гл. XII), приведёт к уравнению:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix}=0,$$

которое в точности совпадает с характеристическим уравнением Бине (4). Таким образом, одно и то же уравнение, одни и те же корни s_1, s_2, s_3 определяют по формулам (3) главные направления, а после подстановки в уравнение (7) дают три параболоида, которые содержатся в пучке (7).

Произведём преобразование декартовой системы координат. Мы должны будем подставить в уравнение (7) вместо старых координат x^{α}, x^{β} их выражения по формулам преобразования через новые. При этом левая часть уравнения (5) преобразуется в левую часть уравнения (5'); левая часть уравнения сферы (6) преобразуется в новое уравнение той же сферы:

$$\Phi'\equiv(x^{1'}-a'x^{0'})^2+(x^{2'}-b'x^{0'})^2+(x^{3'}-c'x^{0'})^2-(x^{0'})^2=0,$$

где штрихом a', b', c' обозначены новые коэффициенты, получающиеся после преобразования. Значения параметра пучка, которые соответствуют параболоидам, останутся неизменными.

Следовательно, преобразованное уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{1'1'}-s & a_{1'2'} & a_{1'3'} \\ a_{2'1'} & a_{2'2'}-s & a_{2'3'} \\ a_{3'1'} & a_{3'2'} & a_{3'3'}-s \end{vmatrix}=0 \tag{4'}$$

должно определять те же корни s_1, s_2, s_3, что и первоначальное (4). Это и означает, что корни характеристического уравнения инвариантны относительно преобразования декартовой прямоугольной системы координат.

§ 3. Теорема существования в случае трёх простых корней характеристического уравнения

Характеристическое уравнение, как уравнение третьей степени (нечётной), всегда имеет один действительный корень. Обозначим его через s_3.

Каждому корню характеристического уравнения, в том числе и корню s_3, соответствует определённое отношение значений неизвестных

$$\xi^1 : \xi^2 : \xi^3$$

в решениях системы (3) и некоторый вектор ξ, лучше сказать, некоторое направление, определяемое совокупностью коллинеарных векторов.

Повернём систему координат так, чтобы ось Oz совпала с этим направлением. В силу теоремы об инвариантности корней характеристического уравнения, значение выбранного корня s_3 при этом не изменится, но координаты вектора ξ станут другими. Они будут определяться из системы (3), написанной для преобразованного уравнения.

Чтобы не вводить коэффициентов $a_{i'k'}$ со штрихами, будем предполагать, что это преобразование уже сделано и уравнение (5) относится к новой системе координат. Тогда вектор ξ будет лежать на оси Oz, и из трёх координат ξ^i только ξ^3 будет отлична от нуля. Внося значения $\xi^1 = 0$, $\xi^2 = 0$, $s = s_3$ в уравнение (3) и помня, что $\xi^3 \neq 0$, мы немедленно получим:

$$a_{13} = 0, \; a_{23} = 0, \; a_{33} - s_3 = 0. \tag{8}$$

Внесём теперь эти значения a_{ik} в уравнения (4). Оно примет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} - s & 0 \\ 0 & 0 & s_3 - s \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(s - s_3) \cdot \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Один из корней $s = s_3$ выделяется, а для остальных двух получается уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Это уравнение имеет вид характеристического уравнения для кривой второго порядка. Мы можем даже указать те кривые, к которым оно относится.

Рассмотрим сечение поверхности (5) плоскостью

$$z = h. \tag{a}$$

Преобразуя уравнение (5) к неоднородным координатам и внося туда значение $z = h$, получим уравнение:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + s_3h^2 + 2a_{30}h + a_{00} = 0. \tag{10}$$

Система уравнений (a) и (10) определяет линию пересечения l. Так как уравнение (10) не содержит текущей координаты z, то оно определяет цилиндр с образующими параллельными оси Oz, проходящий через линию l, а поскольку секущая плоскость $z=h$ параллельна плоскости xOy, то сечение цилиндра (10) плоскостью $z=0$ даёт линию l_0, равную линии l. Линию l_0 можно определить одним уравнением (10), как уравнением между двумя координатами точки на плоскости. Главные направления этой линии определяются системой (6′) § 3, гл. X, часть первая, если туда внести $k=\frac{\xi^2}{\xi^1}$,

$$\begin{aligned}(a_{11}-s)\,\xi^1+a_{12}\xi^2&=0,\\ a_{21}\xi^1+(a_{22}-s)\,\xi^2&=0,\end{aligned}\tag{11}$$

где s есть любой корень характеристического уравнения (9) и ξ^1, ξ^2 — координаты вектора, имеющего главное направление:

$$e=\xi^1 i_1+\xi^2 i_2.$$

Следовательно, уравнение (9) есть характеристическое уравнение плоских сечений поверхности, перпендикулярных к вектору главного направления, соответствующего выделенному корню характеристического уравнения (4).

Отсюда вытекает прежде всего:

Теорема. *Все три корня характеристического уравнения поверхности действительны.*

Действительно, один корень кубического уравнения s_3 всегда действителен; что касается двух других, то они определяются из характеристического уравнения (9), написанного для кривой второго порядка на плоскости, а это уравнение (§ 3, гл. X, часть первая) имеет всегда действительные корни.

Теорема. *Три направления, соответствующие трём различным корням характеристического уравнения поверхности второго порядка, составляют единственную тройку главных направлений поверхности.*

Нам надо доказать, что они взаимно сопряжены и взаимно перпендикулярны.

Заметим прежде всего, что система (3), если туда внести значения коэффициентов a_{i3} по формулам (8), принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-s)\,\xi^1+a_{12}\xi^2&=0,\\ a_{21}\xi^1+(a_{22}-s)\,\xi^2&=0,\\ (s_3-s)\,\xi^3&=0.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

Первые два уравнения совпадают с системой (11), а третье, если $s\neq s_3$, даёт $\xi^3=0$.

Следовательно, г л а в н ы е н а п р а в л е н и я п л о с к и х с е ч е н и й п о в е р х н о с т и п л о с к о с т я м и, п е р п е н д и к у л я р н ы м и к в е к т о р у ζ, с о в п а д а ю т с н а п р а в л е н и я м и в е к т о р о в ξ и η, с о о т в е т с т в у ю щ и х д в у м д р у г и м к о р н я м х а р а к т е р и с т и ч е с к о г о у р а в н е н и я п о в е р х н о с т и, е с л и т о л ь к о э т и к о р н и н е р а в н ы п е р в о м у к о р н ю s_3.

Отсюда прямо следует, что два направления ξ и η перпендикулярны между собой (как главные направления кривой второго порядка) и перпендикулярны к направлению ζ, поскольку они лежат в плоскости, перпендикулярной к нему.

Остаётся показать, что они взаимно сопряжены.

Мы докажем более общую лемму.

Лемма. *Любое направление, определяемое характеристическим уравнением и системой* (3), *сопряжено с каждым направлением, которое перпендикулярно к нему.*

Умножим три уравнения (3) соответственно на ζ^1, ζ^2, ζ^3 и сложим. Собирая члены, содержащие множитель s, получим:

$$a_{ik}\xi^k\zeta^i = s\sum \xi^i\zeta^i. \tag{13}$$

Если направление $\xi = \xi^k l_k$ перпендикулярно к вектору $\zeta = \zeta_k l_k$, то

$$\sum \xi^i\zeta^i = \xi^1\zeta^1 + \xi^2\zeta^2 + \xi^3\zeta^3 = 0,$$

и уравнение (13) даёт условие сопряжённости

$$a_{ik}\xi^k\zeta^i = 0,$$

что и требовалось доказать.

Отсюда вытекает справедливость нашей теоремы: так как три вектора ξ, η, ζ взаимно перпендикулярны, то они и взаимно сопряжены.

Таким образом, в случае простых корней характеристического уравнения мы доказали не только теорему существования, но и теорему единственности тройки главных направлений.

Теорема. *Корни характеристического уравнения поверхности второго порядка равны коэффициентам при квадратах текущих координат в уравнении поверхности, отнесённой к главным направлениям.*

Действительно, так как главные направления взаимно сопряжены, то уравнение поверхности, отнесённой к главным направлениям, не содержит членов с произведениями текущих координат (§ 12, гл. XII):

$$a_{12} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{31} = 0.$$

Следовательно, характеристическое уравнение принимает вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - s & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} - s \end{vmatrix} = (a_{11} - s)(a_{22} - s)(a_{33} - s) = 0,$$

откуда следует теорема.

§ 4. Теорема существования в случае равенства двух корней характеристического уравнения

Допустим теперь, что характеристическое уравнение (4) имеет один двукратный корень

$$s_1 = s_2$$

и один простой s_3.

Мы примем вектор ζ, который соответствует корню s_3, за направление оси Oz, и, повторяя рассуждения § 3, придём к заключению, что характеристическое уравнение (9) определяет два других корня, которые по условию равны между собой: $s_1 = s_2$. Если они не равны нулю, то, согласно результатам § 3, гл. X, часть первая, плоские сечения (10) — окружности, и главные направления их неопределённы, т. е. любая пара взаимно перпендикулярных направлений сопряжена относительно этой кривой.

Выберем какую-нибудь пару взаимно перпендикулярных векторов ξ, η в плоскости кривой (10). Они сопряжены относительно этой окружности, поэтому их координаты удовлетворяют системе (11), а следовательно, при $\xi^3 = 0$, $\eta^3 = 0$ и системе (12). Таким образом, тройка векторов ξ, η, ζ может быть получена из характеристического уравнения (4) и системы (3) [при нашем выборе системы координат — из системы (12)]. Так как они взаимно перпендикулярны, то в силу леммы § 3 и взаимно сопряжены.

Теорема существования тройки главных направлений доказана. Теорема единственности не имеет места, ибо из двух векторов ξ, η один может быть выбран произвольно в плоскости, перпендикулярной к вектору ζ.

Если $s_1 = s_2 = 0$, то $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, и уравнение (10), как уравнение первой степени, определяет в пространстве плоскость, которая пересекается с плоскостью $z = h$ по прямой, параллельной плоскости xOy. Вторая прямая линии пересечения плоскости $z = h$ с поверхностью — несобственная, в чём можно убедиться, если заметить, что в однородных координатах уравнение (10) останется уравнением второй степени, но будет содержать в левой части общим множителем x^0. Следовательно, поверхность — цилиндр с образующими, параллельными плоскости xOy. Так как несобственная плоскость содержит только одну образующую цилиндра, то цилиндр — параболический. Главные направления по существу неопределённы, ибо при $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{12} = a_{23} = 0$ условие сопряжённости (7) § 11, гл. XII, для векторов ξ, η, ζ принимает вид

$$\xi^3\eta^3 = 0, \quad \eta^3\zeta^3 = 0, \quad \zeta^3\xi^3 = 0$$

и будет удовлетворено для любых векторов ξ, η при $\xi^3 = \eta^3 = 0$. Мы можем, в частности, выбрать за тройку направлений направление образующих и два главных направления параболы, получаемой сечением цилиндра, перпендикулярно к образующим.

Теорема. *Если характеристическое уравнение имеет один двукратный корень, не равный нулю, то главные направления поверхности неопределённы, зависят от одного произвольного параметра. Направление, соответствующее третьему (простому) корню характеристического уравнения, вполне определено, а два других могут быть выбраны произвольно, лишь бы все вместе образовали тройку взаимно перпендикулярных направлений. Сечения поверхности плоскостями, параллельными этим двум направлениям, — окружности, и поверхность является поверхностью вращения.*

Только последнее утверждение требует ещё доказательства.

Если поверхность имеет собственный центр, то мы примем его за начало координат. Ось Oz, если она соответствует простому корню характеристического уравнения, станет диаметром (осью поверхности) и будет нести центры сечений поверхности сопряжёнными, т. е. перпендикулярными плоскостями. Так как все эти сечения — окружности, то поверхность допускает вращение около оси Oz и носит название *поверхности вращения.*

Если $s_3 = 0$, то $\mathscr{D}_3 = 0$ и поверхность — параболоид (§ 2, гл. XII). Уравнения (5′) § 4, гл. XII, определяющие координаты центра, дают определённые конечные значения первых двух координат центра. Следовательно, ось Oz попрежнему будет диаметром, и мы получим тот же результат: рассматриваемая поверхность есть параболоид вращения около оси Oz.

§ 5. Равенство трёх корней характеристического уравнения

Если характеристическое уравнение имеет трёхкратный корень, то мы всё же можем принять направление вектора, координаты которого удовлетворяют системе (3) для этого (единственного) корня s_1, за направление оси Oz, и это даст нам значение коэффициентов

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{33} = s_1.$$

Характеристическое уравнение выделит один корень, а два других, равных первому, будут удовлетворять уравнению (9). Так как эти корни между собой равны (и равны первому), то сечения плоскостями, перпендикулярными оси Oz, являются окружностями; уравнение (10) определяет эти окружности. Следовательно (§ 2, гл. X; § 5, гл. XI, часть первая),

$$a_{12} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = s_2,$$

а так как $s_1 = s_2$, то окончательно имеем условия:

$$a_{12} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33}. \tag{14}$$

Уравнение поверхности принимает вид:

$$a_{11}(x^2 + y^2 + z^2) + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0,$$

и определяет сферу, если $a_{11} \neq 0$.

Главные направления неопределённы, ибо при условии (14) уравнения (3) исчезают тождественно. С другой стороны, у сферы всякая диаметральная плоскость делит пополам перпендикулярные к ней хорды, следовательно, сопряжена с перпендикулярным к ней диаметром.

Теорема. *Если три корня характеристического уравнения равны между собой и отличны от нуля, то главные направления неопределённы, и поверхность есть сфера. Если все три корня равны нулю, то поверхность распадается на пару плоскостей, одна из которых — несобственная.*

Последнее утверждение станет очевидным, если заметить, что все три корня характеристического уравнения равны нулю только при обращении в нуль коэффициентов всех старших членов уравнения, а тогда из оставшихся членов можно вынести за скобку (в однородной форме уравнения) координату x^0. Поверхность распадается на пару плоскостей, ибо левая часть разлагается на множители, и уравнение одной из плоскостей будет:

$$x^0 = 0.$$

§ 6. Канонические уравнения поверхностей второго порядка в эвклидовом пространстве

Декартова прямоугольная система координат представляет частный вид декартовой косоугольной. Как только мы доказали для каждой поверхности второго порядка существование главных направлений и, следовательно, существование автополярного тетраэдра с несобственной гранью и прямоугольным трёхгранным углом в собственной вершине, так мы можем отнести поверхность второго порядка к такому тетраэдру и писать уравнения § 2, 5, гл. XIII, в декартовой прямоугольной системе координат.

При этом мы будем иметь то преимущество, что каждая поверхность второго порядка, кроме поверхностей вращения, обладает только одной тройкой главных направлений, и, следовательно, у каждой поверхности будет только одно каноническое уравнение в прямоугольной системе координат.

Впрочем, и поверхности вращения (в частности, сфера) в этом отношении не составляют исключения. Поверхности вращения, как мы видели, обладают тем свойством, что поворот поверхности на любой угол около оси вращения оставляет её неизменной. Такой поворот, как мы знаем, достигается тем, что вращают оси координат, сохраняя те же координаты для повёрнутых точек и, следовательно, то же уравнение для повёрнутой поверхности. Так как повёрнутая поверхность совпадает с первоначальной, то одно и то же уравнение определяет её по отношению к первоначальной системе координат и по отношению к системе, повёрнутой на любой угол.

Для прямоугольной системы координат мы будем писать коэффициенты без штрихов и называть уравнения *каноническими* уравнениями поверхности второго порядка в эвклидовом (метрическом) пространстве.

Центральные поверхности второго порядка:

мнимый эллипсоид —

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0, \tag{15}$$

действительный эллипсоид —

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{16}$$

двуполостный гиперболоид —

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{17}$$

однополостный гиперболоид —

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{18}$$

Центральные поверхности отнесены к центру и осям.

Параболоиды:

эллиптический параболоид —

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \tag{19}$$

гиперболический параболоид —

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z. \tag{20}$$

Конусы и цилиндры:

мнимый конус —

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{21}$$

действительный конус —

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{22}$$

мнимый цилиндр —

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0, \tag{23}$$

эллиптический цилиндр —

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{24}$$

гиперболический цилиндр —

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{25}$$

параболический цилиндр —

$$y^2=2px. \tag{26}$$

§ 7. Инварианты преобразований декартовой прямоугольной системы координат

В задаче приведения уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду существенную помощь оказывают инварианты поверхности относительно преобразований системы координат.

Инвариантом называется такая функция от коэффициентов уравнения поверхности второго порядка, которая сохраняет своё значение при преобразовании координат.

Мы будем рассматривать инварианты относительно преобразований декартовой прямоугольной системы координат в декартову прямоугольную.

Теорема. *Существует не более четырёх независимых инвариантов произвольной поверхности второго порядка относительно преобразований декартовой прямоугольной системы координат.*

Положение произвольного прямоугольного трёхгранника зависит от шести параметров: трёх координат его вершины (начала координат) и трёх параметров, определяющих поворот трёхгранника, например трёх эйлеровых углов (см. § 4*, гл. II).

Отсюда вытекает, что формулы преобразования декартовой прямоугольной системы координат дают старые координаты x, y, z произвольной точки в функциях от новых координат x', y', z' этой точки и шести параметров q_1, q_2, $\ldots$, q_6, определяющих положение новой системы координат относительно старой.

После подстановки этих выражений в уравнение поверхности второго порядка левая часть уравнения преобразуется в многочлен второй степени относительно новых координат x', y', z'. Десять коэффициентов $a_{\alpha'\beta'}$ нового уравнения будут функциями от коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ первоначального и шести параметров преобразования

$$a_{\alpha'\beta'} = F_{\alpha\beta}(a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{00},\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_6). \tag{27}$$

Исключая из этих десяти уравнений шесть параметров преобразования, мы получим четыре уравнения, связывающих только коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha'\beta'}$ первоначального и преобразованного уравнений.

Действительно, если бы этих уравнений было больше, например пять, то систему десяти уравнений (27) можно было заменить системой пяти уравнений, не содержащих параметров q, и только пяти других уравнений, которые содержат параметры преобразования. Так как шесть параметров были бы связаны только пятью уравнениями, то один из них оставался бы произвольным; меняя его, мы существенно меняли бы систему координат, не изменяя уравнения поверхности. Так как изменение положения координатного трёхгранника с сохранением прежних координат определяет движение пространства, то это означало бы, что существует такое непрерывное движение пространства, которое оставляет поверхность неподвижной. Для произвольной поверхности это невозможно. Например, для центральной поверхности второго порядка всякое перемещение пространства сдвинет прямоугольный трёхгранник с главными направлениями осей и вершиной в центре поверхности. Если поверхность имеет один центр и одну тройку главных направлений, то при перемещении трёхгранника переместится и поверхность.

Каждый инвариант $I(a_{\alpha\beta})$ определяет уравнение

$$I(a_{\alpha\beta}) = I(a_{\alpha'\beta'}), \tag{27'}$$

связывающее коэффициенты первоначального и преобразованного уравнений. Следовательно, не может быть больше четырёх независимых инвариантов.

Инварианты зависимы, если один из них является функцией от остальных, так что соответствующее ему уравнение (27′) является следствием от предыдущих.

Теорема. *Существует ровно четыре независимых инварианта произвольной поверхности второго порядка относительно преобразований декартовой прямоугольной системы координат:*

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{28}$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Первые три инварианта являются коэффициентами характеристического уравнения (4) § 1. Если раскрыть определитель (4), то уравнение примет вид:

$$s^3 - I_1 s^2 + I_2 s - I_3 = 0,$$

откуда следует:

$$I_1 = s_1 + s_2 + s_3, \quad I_2 = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1, \quad I_3 = s_1 s_2 s_3. \tag{28′}$$

Так как корни характеристического уравнения s_1, s_2, s_3 инвариантны, то инвариантны и величины I_1, I_2, I_3.

Так как по формуле (16) § 10*, гл. XIII, дискриминант $\mathscr{D}_4$ умножается на квадрат определителя преобразования тройки координатных векторов:

$$\mathscr{D}'_4 = \mathscr{D}_4 \cdot (\det|c^i_{i'}|)^2 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ i' = 1', 2', 3' \end{pmatrix},$$

а определитель прямоугольного преобразования (§ 3, гл. II) по абсолютной величине равен единице, то $I_4 = \mathscr{D}_4$ при преобразовании декартовой прямоугольной системы координат не меняется.

Все четыре инварианта независимы. Независимость первых трёх следует из того, что они позволяют определить три корня характеристического уравнения, а эти корни по теореме § 3, гл. XIV, равны коэффициентам a_{11}, a_{22}, a_{33} в уравнении поверхности, отнесённой к главным направлениям, следовательно, независимы. Что касается четвёртого инварианта I_4, то он не может быть вычислен из трёх первых, ибо содержит другие коэффициенты, например a_{00}.

§ 8. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

Так как корни характеристического уравнения поверхности второго порядка равны коэффициентам при квадратах текущих координат, если поверхность отнести к главным направлениям, а коэффициенты при членах с произведениями неоднородных координат равны нулю, то коэффициенты при старших членах определяются непосредственно из характеристического уравнения. Так как канонические уравнения невырождающихся поверхностей второго порядка (15)—(20) содержат, кроме старших членов, только по одному члену (свободный член в уравнении центральной поверхности и член с первой степенью текущей координаты в уравнении параболоида), то неизвестный коэффициент такого члена определяется из значения четвёртого инварианта I_4 (см. пример). Уравнение конуса совсем не содержит ни одного члена, кроме старших. Таким образом, для этих поверхностей инварианты целиком определяют коэффициенты уравнения.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение поверхности

$$2xy + 2yz - 2xz - 4x + 1 = 0. \qquad \text{(a)}$$

Прежде всего, надо определить корни характеристического уравнения.

Подсчитываем инварианты:

$$I_1 = 0,\ \ I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$s^3 - 3s + 2 = 0,$$

или

$$(s + 2)(s^2 - 2s + 1) = 0.$$

Оно имеет корни:

$$s_1 = s_2 = 1,\ s_3 = -2.$$

Так как они отличны от нуля, то уравнение (a) определяет центральную поверхность (гиперболоид, поскольку корни разных знаков). Следовательно, каноническое уравнение имеет вид:

$$s_1x^2 + s_2y^2 + s_3z^2 + a_{00} = 0. \qquad \text{(b)}$$

Подсчитываем четвёртый инвариант для уравнений (a) и (b). Так как

$$I_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{00} \end{vmatrix},$$

то

$$2 = a_{00}s_1s_2s_3 \text{ и } a_{00} = -1.$$

Следовательно, каноническое уравнение поверхности будет:

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 1.$$

Это однополостный гиперболоид вращения.

§ 9*. Инварианты поверхностей, допускающих движение в себе

Число инвариантов повышается, если поверхность имеет неопределённый центр (собственный или несобственный) или неопределённые главные направления, ибо в обоих случаях оси поверхности становятся неопределёнными, и каноническое уравнение поверхности не меняется, когда координатный трёхгранник перемещается, оставаясь каноническим (например, при параллельном переносе, когда вершина трёхгранника — начало координат — описывает линию центров), т. е. когда поверхность допускает движение в себе.

Если центр неопределённый, то поверхность — цилиндр. Значит, один параметр преобразования координат, определяющий положение начала на линии центров (или на образующей, проходящей через вершину направляющей параболы у параболического цилиндра), остаётся неопределённым; по исключении из уравнений системы (27) пяти параметров преобразования шестой исключится сам собой, и система приведётся к пяти уравнениям вида (27′), т. е. поверхность допускает пять независимых инвариантов.

То же самое мы будем иметь для поверхности вращения. Шар допускает три независимых поворота около своего центра. Значит, число его инвариантов увеличивается на три единицы, т. е. до семи. Эти семь инвариантов сферы нетрудно указать. Они состоят из инварианта $\mathscr{D}_4$ и шести коэффициентов старших членов уравнения, ибо, очевидно, в уравнении сферы (2) § 2, гл. III, все старшие члены не меняются при преобразовании координат.

Из остальных случаев представляет интерес только определение пятого инварианта поверхности с линией центров или с плоскостью центров.

Если поверхность имеет линию центров, то матрица коэффициентов в уравнениях системы, определяющей координаты центра

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \end{Vmatrix}, \qquad \text{(a)}$$

имеет ранг, равный двум.

Составим пучок поверхностей:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta - \lambda\{(x^1 - ax^0)^2 + (x^2 - bx^0)^2 + (x^3 - cx^0)^2 + (x^0)^2\} = 0, \qquad \text{(b)}$$

где базисными являются заданная поверхность и мнимая сфера. Поверхность пучка (b) вырождается в конус, если дискриминант $\mathcal{D}_4$ равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{10}+\lambda a \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{20}+\lambda b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{30}+\lambda c \\ a_{01}+\lambda a & a_{02}+\lambda b & a_{03}+\lambda c & a_{00}-\lambda(a^2+b^2+c^2+1) \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(c)}$$

Это уравнение четвёртой степени относительно λ:

$$A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0.$$

При преобразовании координат λ не меняется, а поскольку корни уравнения инвариантны, то и отношения коэффициентов инвариантны. Вообще говоря, они будут содержать и координаты центра сферы a, b, c, т. е. будут совместными инвариантами поверхности и сферы. Инварианты поверхности получаются исключением величин a, b, c.

Подсчитывая коэффициенты, имеем:

$$A_0 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \\ a & b & c & -a^2-b^2-c^2-1 \end{vmatrix}$$

или, умножая элементы первого столбца на a, второго на b, третьего на c и прибавляя к последнему, получим:

$$A_0 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Свободный член A_4 получается, если положить $\lambda=0$, и равен дискриминанту $\mathcal{D}_4$, а так как для поверхности с неопределённым центром дискриминант $\mathcal{D}_4$ равен нулю, то и A_4 есть нуль.

Чтобы найти коэффициент A_3 при первой степени λ, заметим, что, вынося любой элемент в разложении определителя за скобку из всех членов, которые содержат его множителем, мы получим в скобке адъюнкт элемента. Чтобы получить λ в первой степени, достаточно взять в каждом элементе то слагаемое, которое содержит λ в первой степени, а в его адъюнкте положить $\lambda=0$. В силу того, что ранг матрицы (a) равен двум, адъюнкты всех элементов последней строки или последнего столбца равны нулю. Таким образом, остаются только первых три диагональных элемента. Следовательно,

$$A_3 = -\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{10} \\ a_{31} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{03} & a_{00} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix},$$

и пятый инвариант равен:

$$I_5 = -\frac{A_3}{A_0} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{10} \\ a_{31} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{03} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix}. \qquad (29)$$

Если поверхность имеет плоскость центров, то матрица (a) имеет ранг, равный единице, т. е. все определители второго порядка равны нулю.

Чтобы вычислить коэффициент A_2 при λ^2, надо заметить, что всякий определитель второго порядка из матрицы определителя (с), если его вынести за скобки в разложении определителя (с), умножается на дополнительный определитель, получаемый вычёркиванием столбцов и строк первого. Если в первом определителе сохранить только члены, содержащие λ, а во втором — не содержащие, то и получим все члены с λ^2. При этом матрица (а) содержит все определители второго порядка из матрицы (с), кроме тех, куда входит элемент a_{00}. Таким образом, сохранятся только первые три диагональных определителя. Значит,

$$A_2\lambda^2 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{30} \\ a_{03} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{01} & a_{00} \end{vmatrix},$$

и шестой инвариант для поверхностей с плоскостью центров равен:

$$I_6 = \frac{A_2}{A_0} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{01} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{30} \\ a_{03} & a_{00} \end{vmatrix}. \qquad (30)$$

§ 10*. Инвариантные характеристики поверхностей второго порядка

Основное и практически важное приложение теории инвариантов поверхностей второго порядка даёт решение вопроса, как по общему уравнению узнать, какую поверхность оно определяет, и как написать его в каноническом виде.

Так как параболоиды однозначно определяются равенством нулю дискриминанта $I_3 = 0$, то прежде всего возникает вопрос, как можно отличить эллипсоид от гиперболоида. По определению, линия пересечения эллипсоида несобственной плоскостью мнима, а гиперболоида — действительна; этому соответствуют в каноническом уравнении эллипсоида одинаковые знаки у трёх квадратов текущих (неоднородных) координат, а в уравнении гиперболоида — разные. Так как коэффициенты при квадратах координат в каноническом уравнении равны корням характеристического уравнения, то всё сводится к вопросу алгебры.

При каком условии на коэффициенты корни характеристического уравнения

$$s^3 - I_1 s^3 + I_2 s - I_3 = 0 \qquad (a)$$

будут одного знака? Ответ можно формулировать в виде теоремы:

Теорема. *Необходимое и достаточное условие, чтобы поверхность, заданная в декартовых прямоугольных координатах уравнением*

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0,$$

была эллипсоидом, выражается двумя неравенствами:

$$I_2 > 0, \quad I_1 I_3 > 0, \qquad (31)$$

которые должны иметь место одновременно.

Необходимость условия. После отнесения к центру и осям первые три инварианта поверхности получают значение:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad I_2 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11}, \quad I_3 = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

В канонических уравнениях (15) и (16) все три коэффициента a_{11}, a_{22}, a_{33} положительны; следовательно, положительны и инварианты I_1, I_2, I_3, а тогда условие (31) удовлетворено. Если переменить все знаки уравнения на противоположные, то все коэффициенты станут отрицательными, инвариант I_2 знак сохранит, инварианты I_1 и I_3 переменят знак, но их произведение останется положительным, и условие (31) будет удовлетворено.

Достаточность условия. Допустим, что условие (31) удовлетворено и при этом I_1 и I_3 оба отрицательны. Введём обозначения

$$I_1 = -p^2, \quad I_2 = q^2, \quad I_3 = -r^2.$$

Уравнение (а) принимает вид:

$$s^3 + p^2 s^2 + q^2 s + r^2 = 0.$$

При положительном s левая часть всегда больше нуля. Значит, все корни отрицательны.

Если же I_1 и I_3 положительны, следовательно,

$$I_1 = p^2, \quad I_2 = q^2, \quad I_3 = r^2,$$

то мы внесём в уравнение (а), кроме этих значений, подстановку $s = -s'$. Меняя знак у всех членов, получим:

$$s'^3 + p^2 s'^2 + q^2 s' + r^2 = 0,$$

откуда опять следует, что все корни s' отрицательны, значит, корни s положительны. В обоих случаях три корня s одного знака и поверхность — эллипсоид.

Следствие. *Для того чтобы поверхность второго порядка была гиперболоидом, необходимо и достаточно, чтобы из двух чисел I_2 и $I_1 I_3$ хотя бы одно было отрицательно.*

Теорема. *Инвариант I_4 положителен, если сигнатура формы, стоящей в левой части канонического уравнения центральной невырождающейся поверхности, равна нулю или четырём, отрицателен, если сигнатура равна двум.*

Это прямо следует из значения этого инварианта для канонического уравнения:

$$I_4 = a_{11} a_{22} a_{33} a_{00}.$$

Заметим, что I_4, как произведение четырёх коэффициентов, не изменяет знака при умножении всех членов уравнения поверхности на отрицательное число.

Для уравнений (15) и (18) инвариант I_4 положителен, для уравнений (16) и (17) — отрицателен.

Отсюда вытекают такие признаки для распознавания центральных невырождающихся поверхностей второго порядка:

Типы поверхностей второго порядка	Инвариантные характеристики	Инварианты, определяющие коэффициенты канонического уравнения
Эллипсоиды:		
мнимый (15)	$I_1 \cdot I_3 > 0$, $I_2 > 0$, $I_4 > 0$	I_1, I_2, I_3, I_4
действительный (16)	$I_1 \cdot I_3 > 0$, $I_2 > 0$, $I_4 < 0$	I_1, I_2, I_3, I_4
Гиперболоиды:	Хотя бы одно из чисел $I_1 \cdot I_3$, I_2 отрицательно	
двуполостный (17)	$I_4 < 0$	I_1, I_2, I_3, I_4
однополостный (18)	$I_4 > 0$	I_1, I_2, I_3, I_4

Типы поверхностей второго порядка	Инвариантные характеристики	Инварианты, определяющие коэффициенты канонического уравнения
Параболоиды:		
эллиптический (19)	$I_3 = 0,\ I_4 > 0$	$I_1,\ I_2,\ I_4$
гиперболический (20)	$I_3 = 0,\ I_4 < 0$	$I_1,\ I_2,\ I_4$
Конусы:		
мнимый (21)	$I_1 \cdot I_3 > 0,\ I_2 > 0,\ I_4 = 0$	$I_1,\ I_2,\ I_3$
действительный (22)	Хотя бы одно из чисел $I_4 = 0$ $I_1 \cdot I_3,\ I_2$ отрицательно	$I_1,\ I_2,\ I_3$
Цилиндры:		
мнимый (23)	$I_1 \cdot I_5 > 0,\ I_2 > 0,\ I_3 = 0,\ I_4 = 0$	$I_1,\ I_2,\ I_5$
эллиптический (24)	$I_1 \cdot I_5 < 0,\ I_2 > 0,\ I_3 = 0,\ I_4 = 0$	$I_1,\ I_2,\ I_5$
гиперболический (25)	$I_2 < 0,\ I_3 = 0,\ I_4 = 0$	$I_1,\ I_2,\ I_5$
параболический (26)	$I_1 \cdot I_5 < 0,\ I_2 = 0,\ I_3 = 0,\ I_4 = 0$	$I_1,\ \ I_5$
Пара плоскостей с собственной осью:		
мнимых $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$I_2 > 0$, ранг I_4 равен 2	$I_1,\ I_2$
действительных $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$I_2 < 0$, „ I_4 „ 2	$I_1,\ I_2$
Пара плоскостей с несобственной осью:		
параллельные плоскости действительные $\frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	$I_6 < 0,\ I_2 = 0$, ранг I_4 равен 2	$I_1,\ I_6$
параллельные плоскости мнимые $\frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	$I_6 > 0,\ I_2 = 0$, „ I_4 „ 2	$I_1,\ I_6$
собственная и несобственная плоскости $x_3 x_0 = 0$	$a_{ik} = 0 \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$	—
Сдвоенные плоскости:		
собственная $z^2 = 0$	Ранг I_3 и I_4 равен 1	—
несобственная $x_0^2 = 0$	Все $a_{\alpha\beta} = 0$, кроме a_{00}	—

Приложение. **Аффинная классификация поверхностей второго порядка**

Несобственная линия		Ранг	3		2		1
		Сигнатура	3	1	2	0	
Поверхности второго порядка	Ранг	Сигнатура					
	4	4	Мнимый эллипсоид $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^0)^2=0$				
		2	Действительный эллипсоид $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^0)^2=0$	Двуполостный гиперболоид $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2+(x^0)^2=0$	Эллиптический параболоид $(x^1)^2+(x^2)^2-2x^3x^0=0$		
		0		Однополостный гиперболоид $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2-(x^0)^2=0$	Гиперболический параболоид $(x^1)^2-(x^2)^2-2x^3x^0=0$		
		3	Мнимый конус $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0$		Мнимый цилиндр $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^0)^2=0$		
		1		Действительный конус $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2=0$	Эллиптический цилиндр $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^0)^2=0$	Гиперболический цилиндр $(x^1)^2-(x^2)^2+(x^0)^2=0$	Параболический цилиндр $(x^3)^2-2x^2x^0=0$

Все эти признаки инвариантны и относительно преобразования декартовых прямоугольных координат, и относительно умножения уравнения на произвольное число. Для канонических уравнений они удовлетворяются, а так как они охватывают все типы поверхностей и взаимно исключают друг друга, то вполне определяют поверхность. Действительно, какую бы поверхность второго порядка мы ни взяли, найдётся только один признак, которому она удовлетворяет, и нет ни одной поверхности другого типа, которая могла бы ему удовлетворить.

Глава XV

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1*. Сечение поверхности второго порядка произвольной плоскостью

Мы знаем, что сечение поверхности второго порядка плоскостью есть кривая второго порядка.

Не так трудно определить элементы этой линии.

Центр всякого плоского сечения (§ 9, гл. XII) всегда лежит на диаметре, сопряжённом параллельной сечению диаметральной плоскости. Такой диаметр можно определить, как пересечение двух диаметральных плоскостей, несобственные полюсы которых лежат в заданной плоскости.

Чтобы определить главные направления, заметим прежде всего, что проектирование параллельными прямыми на произвольно заданную плоскость переводит любую пару сопряжённых диаметров кривой второго порядка в пару сопряжённых диаметров проекции.

Действительно, согласно теореме § 2, гл. VIII, часть первая, гармоническая четвёрка точек проектируется из произвольной точки гармонической четвёркой прямых одного пучка. Если этот пучок пересечь произвольной плоскостью, то получится четвёрка точек на прямой, а так как при сечении четвёрки прямых одного пучка произвольной прямой сложное отношение сохраняется, то получаемая четвёрка точек будет тоже гармоническая. Следовательно, при проектировании кривой второго порядка из произвольной точки на какую-нибудь плоскость полюс и его поляра относительно кривой второго порядка перейдут в полюс и поляру относительно проекций этой линии. Если кривая проектируется из несобственной точки, то несобственные точки плоскости первой кривой будут проектироваться пучком несобственных прямых, и несобственная прямая перейдёт в несобственную прямую второй плоскости. Полюс первой прямой спроектируется в полюс второй несобственной прямой, т. е. центр кривой перейдёт в центр её проекции, и полярно сопряжённые диаметры — в полярно сопряжённые диаметры проекции.

Проектируя заданную кривую второго порядка, например на плоскость xOy, мы можем написать условие сопряжённости диаметров проекции. Возвращаясь к оригиналу, мы найдём условие сопряжённости диаметров заданной кривой. Сопряжённые и в то же время перпендикулярные направления дадут пару главных направлений кривой.

§ 2. Сечения эллипсоида плоскостями, параллельными главным плоскостям

Несравненно проще исследовать сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям. В этом случае плоскость оригинала (плоскость линии сечения) и плоскость проекции параллельны, а сечения цилиндра параллельными линиями равны. Это прямо следует из того очевидного факта, что всякая хорда данной линии равна своей проекции, как отрезки параллельных между параллельными.

Рассмотрим эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Пересечём его плоскостью

$$z=h.$$

Исключая координату z, получим уравнение цилиндра, проходящего через линию пересечения и имеющего образующие, параллельные оси Oz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1. \tag{a}$$

Это уравнение вместе с уравнением

$$z=0$$

определит сечение цилиндра плоскостью xOy, т. е. проекцию рассматриваемой линии на плоскость xOy. Если рассматривать уравнение (a), как уравнение только между двумя координатами точки на плоскости, то оно непосредственно определяет проекцию. Поднимая эту проекцию на расстояние h от плоскости xOy, получим линию пересечения.

Перенося члены, не содержащие текущих координат, в правую часть, имеем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}. \tag{b}$$

Так как левая часть всегда положительна, то для действительности кривой (b) необходимо:

$$1-\frac{h^2}{c^2}\geqslant 0 \text{ или } h^2\leqslant c^2.$$

Эллипсоид пересекают только те плоскости, которые находятся от плоскости xOy на расстоянии, не большем c. Если $h=c$ или $h=-c$, то уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

распадается на пару мнимых прямых и плоскость $z=h$ касается эллипсоида.

Полагая

$$q=\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

делим уравнение (b) на q^2 и получаем уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \qquad (a_1=aq, \quad b_1=bq) \tag{2}$$

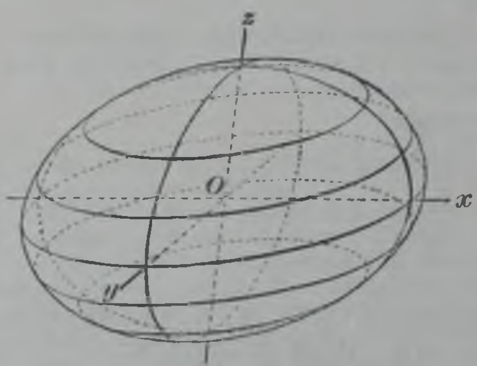
с полуосями a_1, b_1.

Меняя h от 0 до c, мы меняем q от 1 до 0 и получаем семейство подобных эллипсов.

Чтобы правильно разместить их в пространстве, заметим, что правая вершина большой оси эллипса имеет координаты:

$$x=a_1=aq=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

$$y=0, \quad z=h.$$



Черт. 88.

Исключая параметр h, получаем уравнение геометрического места вершин больших осей сечений эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости xOy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0. \tag{c_1}$$

Это — сечение эллипсоида (1) плоскостью xOz. Аналогично, вершины малых осей семейства кривых (2) образуют в пространстве эллипс:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0, \tag{c_2}$$

который является сечением эллипсоида координатной плоскостью yOz.

Если вычертить опорные кривые (c_1), (c_2), то кривые (2) сами лягут на своё место и дадут представление о форме эллипсоида (черт. 88).

§ 3. Сечения однополостного гиперболоида плоскостями, параллельными главным плоскостям

Рассмотрим сечение однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

плоскостями

$$z=h.$$

Уравнение проектирующего цилиндра получаем исключением текущей координаты z:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}. \tag{a}$$

Это же уравнение определяет проекцию, если его рассматривать, как уравнение только между двумя координатами x и y.

Здесь h может принимать любые значения, ибо правая часть всегда положительна.

Полагая

$$q=\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

и деля уравнение (a) на q^2, имеем уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \quad (a_1=aq,\ b_1=bq) \quad (4)$$

с полуосями a_1, b_1.

Меняя h от нуля до бесконечности, мы меняем q от 1 до бесконечности и получаем семейство подобных эллипсов.

Правая вершина эллипса (4) имеет координаты

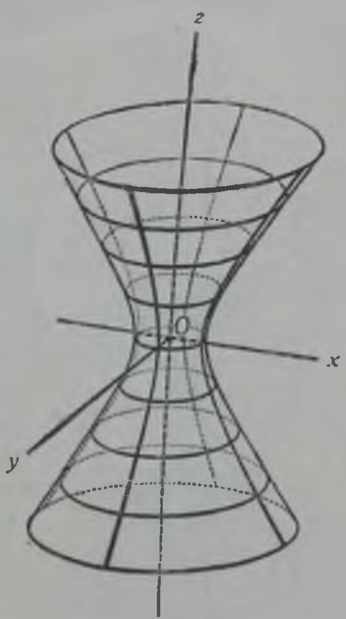
$$x_1=a_1=aq=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},$$
$$y=0, \quad z=h,$$

или, по исключении параметра h, получим геометрическое место вершин больших осей эллипсов (4):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0. \qquad (\mathrm{b}_1)$$

Аналогично, геометрическое место вершин малых осей эллипсов (4) определяется уравнением:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0. \qquad (\mathrm{b}_2)$$



Черт. 89.

Та и другая кривая — гиперболы, получаемые сечением гиперболоида соответственно плоскостью xOz или yOz.

Вычерчивая кривые (b_1), (b_2), размещаем эллипсы (4) и получаем форму однополостного гиперболоида (черт. 89)

§ 4. Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями, параллельными главным плоскостям

Уравнение двуполостного гиперболоида получается из уравнения (3) изменением знака свободного члена:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (5)$$

Мы можем повторить рассуждения § 3, вводя необходимые изменения знаков.

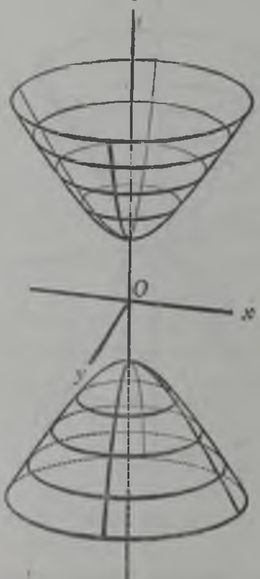
Сохраняя прежнюю нумерацию формул, мы получаем уравнение цилиндра, проектирующего линию пересечения гиперболоида (5) с плоскостью $z=h$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1. \tag{a}$$

Чтобы правая часть была неотрицательна и линия сечения была действительна, надо иметь:

$$\frac{h^2}{c^2}-1 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad h^2 \geqslant c^2.$$

Для $-c<h<c$ плоскость $z=h$ не пересекает гиперболоида; плоскости $z=c$ и $z=-c$ касаются его.



Черт. 90.

Полагая

$$q=\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$$

и деля уравнение (a) на q^2, получаем уравнение проектирующего цилиндра и в то же время уравнение самой проекции в виде:

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \qquad (a_1=aq, \quad b_1=bq). \tag{6}$$

Здесь h можно менять от $\pm c$ до бесконечности, причём q будет меняться от 0 до бесконечности.

Правая вершина эллипса (6) имеет координаты:

$$x=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, \quad y=0, \quad z=h,$$

откуда получаем уравнение геометрического места правых (и левых) вершин большой оси:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad y=0 \tag{$\mathfrak{b}_1$}$$

и аналогично получим геометрическое место вершин другой оси:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad x=0. \tag{$\mathfrak{b}_2$}$$

Та и другая кривая — гиперболы; они могут быть получены сечением гиперболоида плоскостью xOz или yOz.

В отличие от однополостного гиперболоида отрицательный знак правой части уравнений (5), ($\mathfrak{b}_1$) и ($\mathfrak{b}_2$) меняет теперь характер оси: например, для гиперболы ($\mathfrak{b}_1$) ось Ox стала мнимой (не пересекает гиперболы), а ось Oz — действительной.

Вычерчивая кривые ($\mathfrak{b}_1$), ($\mathfrak{b}_2$) и размещая эллипсы (6), получаем форму двуполостного гиперболоида (черт. 90).

§ 5. Сечения эллиптического параболоида плоскостями главного направления

Пересекаем параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p>0, \quad q>0) \tag{7}$$

плоскостью

$$z=h.$$

Цилиндр, проектирующий линию пересечения, определяется уравнением:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h. \tag{a}$$

Это же уравнение, как уравнение только между двумя координатами, определяет проекцию.

Для положительности правой части необходимо

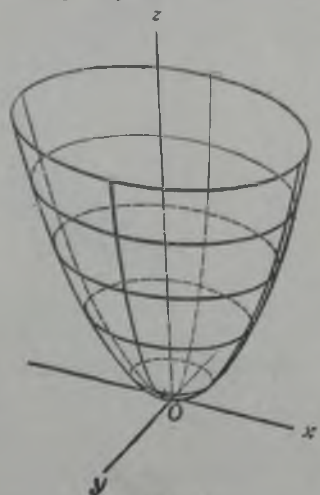
$$h>0;$$

только при этом условии линия пересечения будет действительной, ибо левая часть всегда положительна. Если $h=0$, то линия (a) распадается на пару мнимых прямых и плоскость становится касательной.

При положительном h делим обе части уравнения на $2h$ и получаем уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1, \tag{8}$$

$$(a_1=\sqrt{2ph}, \quad b_1=\sqrt{2qh}).$$



Черт. 91.

Меняя h от 0 до бесконечности, меняем a_1 и b_1 тоже от 0 до бесконечности.

Правая вершина эллипсов (8) имеет координаты:

$$x=a_1=\sqrt{2ph}, \quad y=0, \quad z=h,$$

откуда уравнение геометрического места вершин большой оси есть

$$x^2=2pz, \quad y=0, \tag{$\mathfrak{b}_1$}$$

а вершин другой оси —

$$y^2=2qz, \quad x=0. \tag{$\mathfrak{b}_2$}$$

Это две параболы; они получаются сечением параболоида плоскостями xOz и yOz.

Строя опорные параболы ($\mathfrak{b}_1$) и ($\mathfrak{b}_2$), размещаем эллипсы (8) и получаем форму параболоида (черт. 91).

§ 6. Сечения гиперболического параболоида плоскостями главного направления

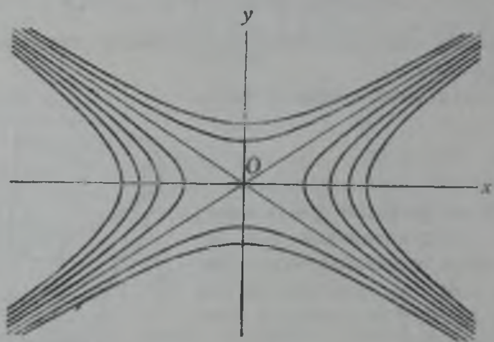
Гиперболический параболоид определяется уравнением:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z. \tag{9}$$

Оно получается из уравнения (7) изменением знака параметра q.

Поэтому все последующие уравнения получаются из уравнений § 5 изменением знака параметра q.

Сохраняя нумерацию формул, имеем уравнение цилиндра, проек-



Черт. 92.

тирующего линию пересечения параболоида (9) с плоскостью $z = h$:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h. \tag{a}$$

Это уравнение определяет проекцию, если его рассматривать как уравнение между двумя координатами точки на плоскости.

Здесь h — вполне произвольно. Если $h = 0$, то уравнение (а) определяет пару прямых: значит, плоскость $z = 0$ — касательная плоскость поверхности; она пересекает поверхность, ибо точка касания (начало координат) — гиперболическая точка поверхности, как и все другие точки её.

При положительном h делим уравнение (а) на $2h$, при отрицательном — на $-2h$. Результат можно записать одним уравнением, поставив в правой части двойной знак:

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = \pm 1, \qquad a_1 = \sqrt{2p|h|}, \quad b_1 = \sqrt{2q|h|}. \tag{10}$$

Верхний знак соответствует положительному h.

Меняя h от $-\infty$ до $+\infty$, мы будем получать семейство подобных гипербол; они имеют одну и ту же пару осей и одни и те же асимптоты. Два значения параметра h с одной и той же абсолютной величиной и противоположными знаками соответствуют паре сопряжённых гипербол: они имеют одни и те же полуоси a_1, b_1, но действительная полуось одной гиперболы становится мнимой для другой; поэтому две сопряжённые гиперболы располагаются по разные стороны одной и той же пары асимптот (черт. 92).

Координаты правой вершины гипербол $h > 0$ определяются формулами:

$$x = a_1 = \sqrt{2ph}, \quad y = 0, \quad z = h,$$

откуда уравнение геометрического места этих вершин напишется в виде:

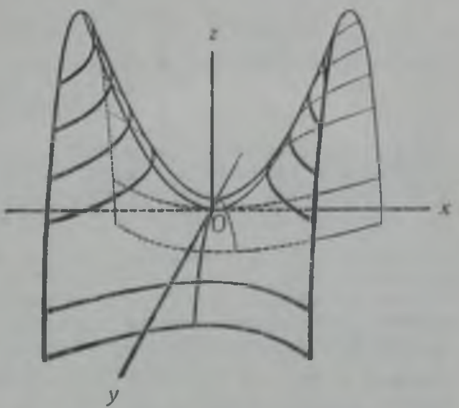
$$x^2 = 2pz, \quad y = 0. \qquad (\mathfrak{b}_1)$$

Аналогично для вершин сопряжённых гипербол $h < 0$, так как $|h| = -h$, имеем:

$$y = b_1 = \sqrt{2q|h|} = \sqrt{-2qh}, \quad x = 0, \quad z = h$$

и

$$y^2 = -2qz, \quad x = 0. \qquad (\mathfrak{b}_2)$$



Черт. 93.

Уравнения $(\mathfrak{b}_1)$ и $(\mathfrak{b}_2)$ определяют две параболы, которые являются вместе с тем линиями пересечения параболоида плоскостями xOz и yOz.

Отрицательный знак в правой части уравнения $(\mathfrak{b}_2)$ показывает, что парабола, касаясь оси Oy в начале координат, располагается в полуплоскости yOz с отрицательными значениями z (ниже оси Oy).

Вычерчивая опорные параболы $(\mathfrak{b}_1)$, $(\mathfrak{b}_2)$ и размещая гиперболы (10), получаем форму гиперболического параболоида (черт. 93).

§ 7*. Круговые сечения и циклические точки поверхности второго порядка

Среди эллипсов эвклидовой плоскости особое место занимают окружности. Поэтому естественно поставить вопрос о круговых сечениях поверхности второго порядка.

Так как окружность является специальным видом эллипса, то круговые сечения могут быть только на тех поверхностях второго порядка, которые имеют эллиптические сечения: сюда относятся эллипсоиды, гиперболоиды обоих видов и эллиптические параболоиды.

Параллельные сечения поверхности второго порядка подобны, поэтому достаточно рассмотреть сечения поверхности плоскостями, проходящими через начало координат. Если такая плоскость даёт в сечении с поверхностью окружность, то и все параллельные плоскости будут пересекать её по окружностям — действительным или мнимым.

Мы знаем, что все окружности плоскости проходят через одну и ту же пару мнимых несобственных точек плоскости, так называемых циклических точек (§ 2, гл. XII, часть первая), определяемых на плоскости xOy уравнением:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0, \quad x^0 = 0. \tag{11}$$

Обратно, всякая кривая второго порядка, проходящая через циклические точки, есть окружность, ибо старшие члены уравнения удовлетворяют условию $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ (§ 2, гл. X, часть первая).

Всякая сфера

$$(x^1 - ax^0)^2 + (x^2 - bx^0)^2 + (x^3 - cx^0)^2 - R^2 (x^0)^2 = 0$$

пересекает несобственную плоскость по одной и той же мнимой окружности

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0, \quad x^0 = 0, \tag{12}$$

которая называется *абсолютным кругом* несобственной плоскости.

Так как окружность всегда лежит на какой-нибудь сфере, то циклические точки всех плоскостей пространства лежат на абсолютном круге (12).

Несобственная линия поверхности второго порядка

$$a_{ik}x^i x^k = 0, \quad x^0 = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{13}$$

пересекает абсолютный круг в четырёх точках, попарно комплексно сопряжённых (пара точек называется комплексно сопряжённой, если все четыре координаты одной точки получаются из соответствующих координат другой заменой i на $-i$, где $i = \sqrt{-1}$). Действительно, два квадратных однородных уравнения относительно трёх неизвестных всегда допускают четыре решения для отношений неизвестных. Эти значения — попарно комплексно сопряжённые, если коэффициенты уравнений действительные. Следовательно, поверхность второго порядка имеет четыре циклические точки, попарно комплексно сопряжённые.

Через каждую пару комплексно сопряжённых циклических точек поверхности можно провести действительную плоскость, которая пересечёт поверхность по окружности, ибо линия пересечения содержит ту пару циклических точек, которая, принадлежа поверхности, в то же время принадлежит секущей плоскости, а значит, принадлежит и линии пересечения их.

Единственное исключение представляет гиперболический параболоид. Он пересекает несобственную плоскость по паре действительных прямых. На них и расположены циклические точки гиперболического параболоида. Каждая несобственная прямолинейная образующая содержит пару комплексно сопряжённых циклических точек. Значит, действительная плоскость, содержащая эту пару, пройдёт через несобственную образующую, и линия пересечения её с поверхностью не будет окружностью, а распадётся на пару прямых — одну собственную и другую несобственную.

Если отнести поверхность к главным направлениям, то старшие члены уравнения сведутся к трём (или у параболоида к двум) квадратам, коэффициенты которых равны корням s_1, s_2, s_3 характеристического уравнения.

Уравнение несобственной линии (13) поверхности примет вид:

$$s_1 (x^1)^2 + s_2 (x^2)^2 + s_3 (x^3)^2 = 0, \quad x^0 = 0.$$

Пара уравнений:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

$$s_1 x_1^2 + s_2 x_2^2 + s_3 x_3^2 = 0$$

определяет решение:

$$\frac{x_1^2}{s_3 - s_2} = \frac{x_2^2}{s_1 - s_3} = \frac{x_3^2}{s_2 - s_1}.$$

Полагая корни характеристического уравнения различными:

$$s_3 > s_2 > s_1,$$

и фиксируя подходящим образом множитель пропорциональности, мы получим:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \sqrt{s_3 - s_2},$$

$$x_2 = \pm i\sqrt{s_3 - s_1}, \quad x_3 = \pm\sqrt{s_2 - s_1}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Четыре комбинации знаков x_2 и x_3 дадут четыре циклические точки поверхности.

Через пары комплексно сопряжённых точек проходят плоскости

$$\sqrt{s_2 - s_1}x_1 \pm \sqrt{s_3 - s_2}x_3 = 0. \tag{14}$$

Следовательно, плоскости круговых сечений параллельны средней оси поверхности (соответствующей среднему по величине корню характеристического уравнения); главные плоскости поверхности, проходящие через эту ось, служат им биссекторами.

У поверхностей вращения два корня характеристического уравнения равны и одна из разностей $s_2 - s_1$ или $s_3 - s_2$ обращается в нуль. Две системы круговых сечений совпадают.

У сферы все корни характеристического уравнения совпадают, обе разности $s_2 - s_1$ и $s_3 - s_2$ равны нулю, и уравнения (14) становятся неопределёнными. Всякая плоскость сечёт сферу по окружности.

§ 8*. Круговые сечения центральных поверхностей второго порядка

Для трёхосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c) \tag{15}$$

имеем:

$$s_1 = \frac{1}{a^2}, \quad s_2 = \frac{1}{b^2}, \quad s_3 = \frac{1}{c^2}.$$

Уравнения (14) принимают вид:

$$\sqrt{a^2 - b^2}\,\frac{x}{a} \pm \sqrt{b^2 - c^2}\,\frac{z}{c} = 0. \tag{16}$$

Чтобы найти сферу, на которой лежат окружности сечений, обратим внимание на тождество:

$$\left(\sqrt{a^2 - b^2}\,\frac{x}{a} + \sqrt{b^2 - c^2}\,\frac{z}{c}\right)\left(\sqrt{a^2 - b^2}\,\frac{x}{a} - \sqrt{b^2 - c^2}\,\frac{z}{c}\right) +$$

$$+ b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = x^2 + y^2 + z^2 - b^2.$$

В левой части у нас стоит левая часть уравнения пучка поверхностей второго порядка, имеющего базисом поверхность (15) и пару плоскостей (16), а в правой части стоит левая часть уравнения сферы.

Следовательно, сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0 \tag{17}$$

принадлежит рассматриваемому пучку и проходит через линии пересечения поверхности (15) с каждой из плоскостей (16). Так как центр сферы лежит в плоскости сечения (в начале координат), то радиус сферы равен радиусу окружностей. Обе окружности имеют радиус, равный средней полуоси эллипсоида.

Аналогично из тождества

$$b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\left\{\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{x}{a}+\sqrt{b^2-c^2}\,\frac{z}{c}+\lambda(a^2-c^2)\right\}\times$$

$$\times\left\{\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{x}{a}-\sqrt{b^2-c^2}\,\frac{z}{c}+\lambda(a^2+c^2)\right\}=$$

$$=x^2+y^2+z^2+2\lambda\sqrt{a^2-b^2}\,ax+2\lambda\sqrt{b^2-c^2}\,cz+\lambda^2(a^4-c^4)-b^2$$

вытекает, что плоскость

$$\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{x}{a}+\sqrt{b^2-c^2}\,\frac{z}{c}+\lambda(a^2-c^2)=0, \qquad \text{(a)}$$

где λ — произвольный параметр, сечёт эллипсоид (15) по окружности, лежащей на сфере

$$(x+\lambda a\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2+(z+\lambda c\sqrt{b^2-c^2})^2+b^2\,[\lambda^2(a^2-c^2)-1]=0.$$

Центр этой сферы с координатами

$$C(-\lambda a\sqrt{a^2-b^2},\quad 0,-\lambda c\sqrt{b^2-c^2})$$

при всяком λ лежит в плоскости (a). Если

$$\lambda^2(a^2-c^2)=1,$$

то радиус сферы равен нулю и, следовательно, окружность сечения стягивается в точку, а плоскость (a) касается эллипсоида. Точка касания

$$C^*\left(\pm a\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},\ 0,\ \pm c\,\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\right)$$

носит название *точки округления*. Два знака, которые получает λ при извлечении корня, и два знака в уравнении (16) дадут четыре комбинации знаков плюс и минус. Эллипсоид имеет четыре точки округления.

У гиперболоидов

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 1 \qquad (a<b) \qquad (18)$$

имеем:

$$s_1=-\frac{1}{a^2},\quad s_2=-\frac{1}{b^2},\quad s_3=\frac{1}{c^2}.$$

Следовательно, по формуле (14) плоскости, секущие гиперболоид по окружностям, определяются уравнениями:

$$\sqrt{b^2-a^2}\,\frac{x}{a}\pm\sqrt{b^2+c^2}\,\frac{z}{c}=0. \qquad (19)$$

Плоскости круговых сечений параллельны оси y.

§ 9*. Круговые сечения эллиптического параболоида

У эллиптического параболоида

$$-\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=-2z \qquad (q>p>0) \qquad (20)$$

имеем:

$$s_1=-\frac{1}{p},\qquad s_2=-\frac{1}{q},\qquad s_3=0.$$

Уравнение (14) принимает вид:

$$\sqrt{\frac{q-p}{p}}\,x \pm z = 0. \tag{21}$$

Плоскость

$$\sqrt{\frac{q-p}{p}}\,x + z + \lambda - p = 0,$$

где λ — произвольный параметр, пересекает параболоид (20) по окружности лежащей на сфере:

$$(x + \sqrt{p(q-p)})^2 + y^2 + (z + \lambda - q)^2 + q(2\lambda - p - q) = 0.$$

Центр сферы $C(-\sqrt{p(q-p)},\ 0,\ q-\lambda)$ лежит в плоскости сечения.

При

$$\lambda = \frac{p+q}{2}$$

сфера сжимается в точку, плоскость касается поверхности и точка касания

$$C^*\left(-\sqrt{p(q-p)},\ \ 0, \frac{q-p}{2}\right)$$

является точкой округления. Для другого знака в уравнении (21) получим вторую точку округления. Параболоид имеет две точки округления.

Редактор *А. А. Борисов*
Техн. редактор *Н. Н. Махова*
Корректор *Г. А. Покровский*

Подписано к печати 24/IV 1952 г.
А02941. Бумага $60 \times 92^{1}/_{16}$. Бумажных листов 10,25. Печатных листов 20,5.
Учётно-изд. листов 21,65.
Тираж 25 тыс. экз. Заказ 3182.
Цена без переплета 6 р. 50 к..
Переплет 1 р.
(Номинал по прейскуранту 1952 г.)

4-я типография им. Евг. Соколовой
Главполиграфиздата
при Совете Министров СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

5=

Ц[illegible] [illegible] руб. 60 коп.

[illegible]