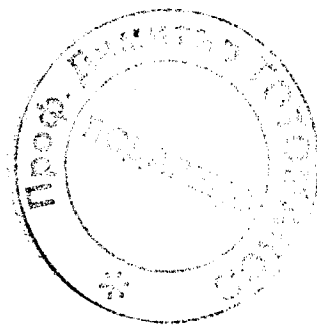


В. И. КРЫЛОВ, Л. Т. ШУЛЬГИНА

# СПРАВОЧНАЯ КНИГА ПО ЧИСЛЕННОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1966

617.2 (083)  
К 85  
УДК 517.3 (083.5)

#### АННОТАЦИЯ

В книге изложены правила вычисления интегралов, как простых, так и кратных, и даны правила численного нахождения интегральных преобразований Фурье и Лапласа и правила обращения преобразования Лапласа.

Чтобы облегчить выбор правила интегрирования, даны описания идей, лежащих в основе построения отдельных правил, что позволяет судить об условиях, при которых взятое правило может дать хорошую точность результата.

Приведен достаточно полный перечень вычислительных формул и даны таблицы численных значений коэффициентов и абсцисс, содержащихся в них.

Книга предназначена для лиц, занимающихся приложениями или теорией численного интегрирования, для преподавателей вузов, работников вычислительных центров и научно-инженерных институтов, аспирантов и студентов. Она будет полезным пособием для всех лиц, которым приходится иметь дело с научными и техническими расчетами.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
-----------------------	---

## ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Глава 1. Формулы приближенных квадратур и принципы их построения . . . . .	9
§ 1. О виде интеграла и квадратурной суммы . . . . .	9
§ 2. О принципах выбора коэффициентов и абсцисс квадратурной формулы . . . . .	10
Глава 2. Интегрирование функций, заданных таблично. Интерполяционные квадратуры . . . . .	12
§ 1. Об условиях построения приближенной квадратуры. Остаток . . . . .	12
§ 2. Интерполяционные методы вычисления интеграла по значениям функции. Правила Котеса . . . . .	15
§ 3. Правила интегрирования, имеющие степень точности ниже интерполяционной . . . . .	21
§ 4. Квадратурные формулы с пропущенными узлами . . . . .	24
§ 5. Правила интегрирования, в которых используются значения функции и производных . . . . .	28
Глава 3. Правила интегрирования, имеющие наивысшую степень точности . . . . .	34
§ 1. Вычисление интеграла по значениям функции . . . . .	34
§ 2. Формулы частного вида . . . . .	36
§ 3. Правила вычисления интеграла по значениям функции и производных . . . . .	43
Глава 4. Правила квадратур с несколькими заранее заданными узлами . . . . .	44
§ 1. Некоторые общие результаты . . . . .	44
§ 2. Правила частного вида . . . . .	46
§ 3. Вычисление интеграла по значениям функции и производных . . . . .	49
Глава 5. Квадратурные формулы с равными коэффициентами . . . . .	51
§ 1. Возможность построения формулы и нахождение ее узлов . . . . .	51
§ 2. Формулы частного вида . . . . .	52
Глава 6. Увеличение точности правил интегрирования и улучшение сходимости квадратурного процесса . . . . .	54
§ 1. О содержании задачи увеличения точности квадратуры . . . . .	54
§ 2. Увеличение порядка дифференцируемости $f$ и устранение ее особенностей . . . . .	57
§ 3. Разложение эйлерова вида остаточного члена квадратурной формулы . . . . .	59
§ 4. Увеличение точности правила интегрирования в случае существования короткого главного участка интегрирования в интегральном представлении остаточного члена . . . . .	65

§ 5. Улучшение сходимости последовательности приближенных значений интеграла . . . . .	67
<b>Глава 7. Численное преобразование Фурье . . . . .</b>	<b>72</b>
§ 1. Численное преобразование Фурье функции, заданной таблично . . . . .	72
§ 2. Замечание о приведении к квадратурам, имеющим наивысшую алгебраическую степень точности . . . . .	82
§ 3. О способах вычисления, основанных на приближении функции рациональными дробями . . . . .	84
<b>Глава 8. Численное обращение преобразования Лалласа. Преобразование Меллина . . . . .</b>	<b>87</b>
§ 1. Приведение интеграла Меллина к простейшему виду. Условия выбора параметров квадратурной формулы . . . . .	87
§ 2. Правило наивысшей степени точности . . . . .	90
§ 3. Правила вычислений с равными коэффициентами . . . . .	91
§ 4. Интерполяционный метод . . . . .	92
<b>Глава 9. Интегрирование периодических функций . . . . .</b>	<b>94</b>
§ 1. О задаче интегрирования периодической функции . . . . .	94
§ 2. Интерполяционные правила интегрирования . . . . .	94
§ 3. Правила вычислений, имеющие наивысшую тригонометрическую степень точности. . . . .	96
<b>Глава 10. Сходимость процесса приближенной квадратуры . . . . .</b>	<b>98</b>
§ 1. Содержание и значение для приложений проблемы сходимости . . . . .	98
§ 2. Сходимость интерполяционного квадратурного процесса . . . . .	99
§ 3. Сходимость общего квадратурного процесса в классах непрерывно дифференцируемых функций . . . . .	102

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

### ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

<b>Глава 11. Расчетная формула и устойчивость вычислений относительно роста погрешности . . . . .</b>	<b>105</b>
§ 1. Содержание задачи и правило вычислений . . . . .	105
§ 2. Признак устойчивости правила вычислений относительно роста погрешности . . . . .	106
<b>Глава 12. Интегрирование функции, заданной таблично . . . . .</b>	<b>108</b>
§ 1. Вычисления в точках, не близких к началу и концу таблицы . . . . .	103
§ 2. Вычисления вблизи начала и конца таблицы . . . . .	103
<b>Глава 13. О некоторых правилах интегрирования, имеющих наивысшую алгебраическую степень точности . . . . .</b>	<b>110</b>
§ 1. О принципах построения правил вычисления . . . . .	110
§ 2. Правила вычислений, в которых каждое значение функции используется на нескольких шагах . . . . .	111
§ 3. Правила вычислений, в которых используются несколько предшествующих значений интеграла . . . . .	114

## ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

### ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

<b>Глава 14. Построение формул кратного интегрирования . . . . .</b>	<b>117</b>
§ 1. Содержание задачи . . . . .	117
§ 2. Повторное применение квадратурных формул . . . . .	118
§ 3. Построение кубатурных формул на основе интерполяционных многочленов . . . . .	122

§ 4. Об общей задаче выбора параметров в правиле вычисления кратных интегралов . . . . .	125
§ 5. Симметричные кубатурные формулы . . . . .	126
Глава 15. Перенесение правил интегрирования на другие области . . . . .	127
§ 1. Преобразование одной области интегрирования в другую . . . . .	127
§ 2. Метод декартовых произведений . . . . .	129
§ 3. Формулы для конечных конусов . . . . .	131
Глава 16. Формулы для вычисления кратных интегралов . . . . .	132
§ 1. Введение . . . . .	132
§ 2. Таблицы кубатурных формул. . . . .	134

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ  
ЧИСЛОВЫЕ ТАБЛИЦЫ

Глава 17. Таблицы абсцисс и коэффициентов для правил вычислений, имеющих наивысшую алгебраическую степень точности . . . . .	158
Таблица 1. Вычисление интеграла в случае постоянной весовой функции.	158
Таблица 2. Вычисление интеграла $\int_0^1 x^\alpha f(x) dx$ при целом показателе степени $\alpha = 1(1)5$ . . . . .	163
Таблица 3. Интегрирование функций, имеющих степенную особенность: $\int_0^1 x^\alpha f(x) dx$ , $\alpha = -0,9(0,1)3$ , $\alpha \neq 0, 1, 2, 3$ . . . . .	166
Таблица 4. Вычисление интегралов вида: $\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\alpha f(x) dx$ , $\alpha = -0,9(0,1)3$ , $\alpha \neq 0$ . . . . .	184
Таблица 5. Интегрирование функций, имеющих логарифмические и степенные особенности: $\int_0^1 x^\alpha \lg \frac{e}{x} f(x) dx$ . . . . .	195
Таблица 6. Численное преобразование Лапласа и вычисление интеграла по полюсу с весом Чебышева — Лягерра: $\int_0^\infty x^s e^{-x} f(x) dx$ . . . . .	205
Таблица 7. Вычисление интеграла $\int_0^\infty x^s e^{-x} f(x) dx$ в случае функции $f(x)$ , ограниченной на полуоси $0 \leq x < \infty$ . . . . .	251
Таблица 8. Вычисление интеграла по оси $(-\infty, +\infty)$ с весом Чебышева — Эрмита: $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x) dx$ . . . . .	252
Глава 18. Таблицы абсцисс и коэффициентов для квадратурных формул, содержащих заданные узлы и имеющих наивысшую степень точности. . . . .	255
Таблица 9. Абсциссы и коэффициенты для правила интегрирования: $\int_0^1 f(x) dx \approx A_0 f(0) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ . . . . .	255

Т а б л и ц а 10. Абсциссы и коэффициенты для правила интегрирования:		
	$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx A_0 f(0) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \dots\dots\dots$	256
Т а б л и ц а 11. Абсциссы и коэффициенты для правила интегрирования:		
	$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 [f(-1) + f(1)] + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \dots\dots\dots$	258
Г л а в а 19. Таблицы для численного преобразования Фурье. . . . .		259
Т а б л и ц а 12. Синус-преобразование Фурье. Абсциссы и коэффициенты для правила интегрирования:		
	$\int_0^{\infty} (1 + \sin x) \frac{\Phi(x)}{(1+x)^s} dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\Phi(x_k)}{(1+x_k)^s} \dots\dots\dots$	259
Т а б л и ц а 13. Косинус-преобразование Фурье. Абсциссы и коэффициенты для правила интегрирования:		
	$\int_0^{\infty} (1 + \cos x) \frac{\Phi(x)}{(1+x)^s} dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\Phi(x_k)}{(1+x_k)^s} \dots\dots\dots$	268
Г л а в а 20. Таблицы для численного обращения преобразования Лапласа. . . . .		277
Т а б л и ц а 14. Узлы и коэффициенты для правила вычисления:		
	$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} p^{-s} e^{p} \Phi(p) dp \approx \sum_{k=1}^n A_k \Phi(p_k) \dots\dots\dots$	277
Т а б л и ц а 15. Таблица высокой точности узлов и коэффициентов для обращения преобразования Лапласа в случае $s = 1$ . . . . .		319
Т а б л и ц а 16. Значения координат узлов для правила вычисления с равными коэффициентами:		
	$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{e^p}{p} \Phi(p) dp \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi(p_k) \dots\dots\dots$	323
Библиография по численному интегрированию . . . . .		324
Библиографический справочник по таблицам узлов и коэффициентов для правил приближенного вычисления интегралов . . . . .		361

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Интегрирование является одной из самых распространенных математических операций. За два последних десятилетия значение вычислений очень сильно возросло во многих областях деятельности людей — научной, технической, организационной и т. д. Усилился и интерес к тому, чтобы научиться достаточно точно и с возможно малой затратой труда находить численные значения многообразных видов интегралов, с которыми приходится встречаться в самых разных вопросах.

Появилось много исследований по численному интегрированию, в частности, опубликовано большое количество вспомогательных таблиц. Они разбросаны по многочисленным статьям, напечатанным в специальных журналах, и известны, чаще всего, только узкому кругу людей, которые постоянно следят за развитием теории вычислений.

Чтобы сделать все эти результаты доступными для использования, необходимо было собрать их в одной книге вместе с некоторыми классическими результатами.

Мы хотели написать книгу, где были бы изложены не только основные результаты теории численного интегрирования, но которая могла бы принести пользу в практической счетной работе и содержала нужные для этого правила и таблицы.

Этим в значительной мере определился выбор содержания книги. Мы не стремились к энциклопедической полноте. В книгу включены только те вопросы численного интегрирования, которые, по нашему мнению, наиболее часто встречаются в реальных вычислениях. Эти вопросы мы хотели дать с возможно большей полнотой.

Мы далеки от мысли, что сделанный нами выбор является безупречным. Наша практика счетной работы ограничена, мы могли ошибиться и будем благодарны всем, кто пожелает дать советы по улучшению содержания книги.

Универсальных методов численного интегрирования практически не существует, и лицо, составляющее план вычислений, должно будет среди многих известных правил интегрирования избрать какое-либо одно. Но каждое правило рассчитано на вычисление интегралов с определенными свойствами и может дать удовлетворительный результат только в том случае, если интеграл, подлежащий вычислению, этими свойствами обладает.

Чтобы правильно сделать выбор, необходимо знать условия, при которых каждое правило может дать хороший по точности результат. Поэтому мы полагали, что в книге обязательно должны содержаться три следующих элемента:

1. Достаточно полный перечень правил интегрирования.
2. Краткое описание идей, положенных в основу построения каждого правила. Оно позволит выяснить условия, при которых взятое правило рационально применять, и облегчит задачу выбора правила.

3. Численные таблицы, необходимые для практического применения правил.

Мы считали полезным включить в книгу библиографию по численному интегрированию. Она была доведена нами до половины 1962 г.

Часть третья книги и библиография составлены Л. Т. Шульгиной. Остальное написано В. И. Крыловым.

Наши товарищи по работе — Н. С. Скобля, Л. Г. Кругликова, А. А. Пальцев, Н. П. Феденко и Т. К. Арлюк много помогали нам в вычислениях, библиографической работе и в подготовке рукописи книги. Мы приносим им глубокую благодарность.

Особую благодарность мы приносим Н. С. Скобля и Л. Г. Кругликовой за то, что они разрешили нам воспроизвести в книге составленные ими таблицы для численного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. Эти таблицы составили главу 19 и большую часть главы 20 книги.

Институт Математики  
Академии наук БССР  
Минск

*В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина*



# ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

---

### ГЛАВА 1

#### ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ КВАДРАТУР И ПРИНЦИПЫ ИХ ПОСТРОЕНИЯ

##### § 1. О виде интеграла и квадратурной суммы

В первой части книги будет рассматриваться задача нахождения численного значения определенного интеграла

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \quad (a < b). \quad (1.1.1)$$

Отрезок интегрирования  $[a, b]$  может быть любым,  $p(x)$  есть заданная функция, называемая «весом». Выделение ее из интегрируемой функции  $F(x) = p(x) f(x)$  позволяет во многих случаях повысить точность вычисления. В границах этого параграфа достаточно считать\*)  $p(x)$  любой интегрируемой функцией с конечным или бес-

конечным значением интеграла и такой, что  $\int_a^b |p(x)| dx > 0$ . Функция  $f(x)$  может быть произвольной функцией с конечными значениями, для которой интеграл имеет смысл.

Многие методы приближенного интегрирования, которые будут изложены ниже, основаны на возможности приближения функции  $f(x)$  алгебраическими или тригонометрическими многочленами или рациональными функциями. Точность такого приближения, как известно, зависит от порядка гладкости  $f(x)$ . В разложении на множители  $F(x) = p(x) f(x)$  функцию  $f(x)$  стремятся выбрать так, чтобы она обладала достаточно высоким порядком дифференцируемости или была аналитической функцией, особые точки которой лежат вдали от отрезка  $[a, b]$ . Что же касается весовой функции  $p(x)$ , то она должна содержать все «особенности» интегрируемой функции  $F(x)$  и быть по возможности простой.

В достаточно общем виде квадратурная формула, служащая для приближенного вычисления интеграла, может быть записана так, как указано ниже. В области определения функции  $f(x)$ , которая может быть шире отрезка  $[a, b]$ , рассмотрим систему

---

\*) Если интеграл (1.1.1) понимается в лебеговом смысле, то  $p(x)$  достаточно считать измеримой функцией, не эквивалентной нулю.

точек  $x_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n_j$ ;  $j = 0, \dots, m$ ) и построим приближенное равенство

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{n_j} A_{ij} f^{(j)}(x_{ij}) = Q(f). \quad (1.1.2)$$

В широком круге задач естественно считать, что абсциссы, или узлы  $x_{ij}$  формулы, лежат на отрезке интегрирования  $[a, b]$ . Мы не ввели такое предположение заранее, так как при выяснении идей построения формул вида (1.1.2) оно является необязательным и существует ряд задач, когда привлечение точек  $x_{ij}$ , лежащих вне  $[a, b]$ , может повысить точность вычислений. К таким задачам в некоторых случаях приводит проблема интегрирования функций  $f(x)$ , аналитических на  $[a, b]$  или имеющих высокий порядок гладкости в области, содержащей  $[a, b]$  внутри себя.

Обозначим  $n$  число слагаемых в квадратурной сумме  $Q(f)$ :

$$n = n_0 + \dots + n_m.$$

Формула (1.1.2) содержит  $2n$  параметров  $x_{ij}$  и  $A_{ij}$ . Однако не все они могут быть заданы произвольно. Число параметров каждого вида, остающихся произвольными, так же как и области их изменения, зависят от условий, в которых строится формула (1.1.2). Например, если ищется формула, предназначенная для вычисления интеграла в том случае, когда известна таблица значений  $f(x)$  и производных от нее, естественно считать, что абсциссы  $x_{ij}$  берутся из числа табличных значений аргумента. В этом случае мы либо совсем лишены права выбора  $x_{ij}$ , либо имеем только конечное число возможных комбинаций значений  $x_{ij}$ . Коэффициенты же  $A_{ij}$  остаются, вообще говоря, произвольными, и мы можем в основу выбора их положить любые принципы. Если же мы рассматриваем задачу об интегрировании функции  $f(x)$ , определенной каким-либо аналитическим выражением, когда значения ее в точках  $x_{ij}$  неизвестны и подлежат нахождению, в равенстве (1.1.2) естественно считать произвольными не только коэффициенты  $A_{ij}$ , но и абсциссы  $x_{ij}$  и воспользоваться возможностью выбора всех параметров для увеличения точности результата вычислений. Мы ограничимся указанием на эти два примера условий, которые могут быть поставлены при выборе  $A_{ij}$  и  $x_{ij}$  в равенстве (1.1.2).

## § 2. О принципах выбора коэффициентов и абсцисс квадратурной формулы

Ниже будут изложены некоторые из соображений, которыми руководствуются при выборе параметров  $A_{ij}$  и  $x_{ij}$ . Один из возможных путей выбора, приведший к плодотворным результатам в широком классе случаев, состоит в стремлении увеличить порядок, или степень точности равенства (1.1.2). Поясним идею его сначала на двух частных примерах.

Допустим, что отрезок интегрирования  $[a, b]$  имеет конечную длину. Известно, что на любом конечном отрезке непрерывную функцию всегда можно равномерно со сколь угодно высокой точностью приблизить при помощи алгебраического многочлена. При этом погрешность приближения может быть, очевидно, сделана тем меньшей, чем более высокой степени многочлен будет взят. Поэтому те параметры  $A_{ij}$  и  $x_{ij}$  в (1.1.2), выбором которых можно распорядиться, стремятся избрать так, чтобы это равенство было точным для алгебраических многочленов достаточно высокой степени. Можно ожидать, что (1.1.2) даст тогда хороший по точности результат при интегрировании многих непрерывных на  $[a, b]$  функций. Обычно говорят, что равенство имеет алгебраическую степень точности  $k$ , если оно верно для всех алгебраических много-

членов степени  $k$  и не верно для  $f = x^{k+1}$ . Указанный путь выбора параметров есть путь повышения степени точности.

Пусть теперь рассматривается интеграл  $\int_0^{2\pi} p(x)f(x)dx$ , в котором  $f(x)$  является  $2\pi$ -периодической функцией. При построении для него приближенной квадратурной формулы (1.1.2) параметры  $A_{ij}$  и  $x_{ij}$  естественно выбирать так, чтобы формула была точной для тригонометрических многочленов достаточно высокой или даже наивысшей возможной степени.

В достаточно общем виде задача построения квадратурных формул высокого и наивысшего порядка точности может быть высказана в следующих словах.

Пусть дано множество  $F$  функций  $f(x)$ . Выберем систему линейно независимых функций  $\omega_k(x)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) так, чтобы для любой функции  $f(x)$  и всякого  $\varepsilon > 0$

существовала такая линейная комбинация  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \omega_k(x)$ , что разность между

двумя интегралами  $\int_a^b p(x)f(x)dx$  и  $\int_a^b p(x)S_n(x)dx$  по абсолютной величине стала

меньше заданного  $\varepsilon$ . При этом, очевидно, указанная разность может быть сделана тем меньшей, чем большим будет взято  $n$ .

Можно ожидать, что формула (1.1.2) даст тем более высокую точность при вычислении интеграла  $\int_a^b pf dx$ , чем для большего числа первых функций  $\omega_k(x)$  она будет давать верный результат.

Подобно предыдущему, говорят, что равенство (1.1.2) имеет порядок точности  $s$ , если оно верно для  $f = \omega_k$  ( $k = 0, 1, \dots, s$ ) и не верно при  $f = \omega_{s+1}$ .

Изложенные наглядные соображения весьма просты и могут иметь только наводящее значение. Но все же они позволяют указать один из возможных путей для построения квадратурной формулы: параметры  $A_{ij}$  и  $x_{ij}$  можно стремиться выбрать так, чтобы равенство (1.1.2) имело возможно высокий порядок точности.

Особый интерес имеют такие квадратурные формулы (1.1.2), которые при фиксированных  $m$  и  $n_j$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ) имеют наивысший порядок точности. Их обычно называют квадратурными формулами Гауссова типа. Такое название принято потому, что впервые формула наивысшей степени точности была построена Гауссом.

Укажем еще на один общий принцип выбора абсцисс и коэффициентов формулы (1.1.2). Он многократно применялся в исследованиях в последние десятилетия, но, по-видимому, еще не привел к значительным вычислительным приложениям. Погреш-

ность приближенного интегрирования  $f(x)$  равна разности  $R(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - Q(f)$ . За величину, характеризующую точность формулы для всего класса  $F$ , может быть принята следующая верхняя грань:

$$R = \sup_f |R(f)|.$$

Она зависит от  $A_{ij}$  и  $x_{ij}$ . Эти параметры выбирают так, чтобы  $R$  имела наименьшую возможную величину. Значения  $A_{ij}$  и  $x_{ij}$ , при которых  $R$  достигает минимума, были найдены лишь в небольшом числе простых случаев.

Необходимо указать еще на одно условие, которому должен быть подчинен выбор коэффициентов  $A_{ij}$  формулы (1.1.2). При вычислениях значения  $f^{(j)}(x_{ij})$ , входящие в формулу, бывают известны или находятся приближенно на определенное число верных значащих цифр. Погрешности этих значений вызовут ошибку в вычислении суммы, стоящей справа в (1.1.2). Пусть, для простоты записи, величины  $f^{(j)}(x_{ij})$  вычислены одинаково точно, с ошибкой, не превосходящей  $\epsilon$ . Тогда погрешность вычисления суммы должна быть оценена величиной  $\epsilon \sum_{ij} |A_{ij}|$ . Если сумма  $\sum_{ij} |A_{ij}|$  велика, погрешность может достичь большого значения и сильно уменьшить точность вычисления интеграла. Поэтому при построении квадратурных формул обычно стремятся выбрать коэффициенты  $A_{ij}$  так, чтобы сумма их абсолютных величин была по возможности малой.

## ГЛАВА 2

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ТАБЛИЧНО. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КВАДРАТУРЫ

#### § 1. Об условиях построения приближенной квадратуры. Остаток

В границах этой главы весовую функцию  $\rho(x)$  будем считать такой, чтобы была обеспечена абсолютная сходимость интегралов, записываемых ниже. На знак  $\rho(x)$  не налагается никакого ограничения.

Мы будем считать, что известна таблица значений как самой функции  $f(x)$ , так и ее производных до некоторого порядка и для вычисления интеграла  $\int_a^b \rho f dx$  мы можем пользоваться только табличными значениями  $f, f', \dots$ . Для построения формулы (1.1.2) можно произвольно избирать коэффициенты  $A_{ij}$ , что же касается абсцисс  $x_{ij}$ , то они могут быть взяты только из числа табличных значений аргумента  $x$ .

Пусть  $x_{ij}$  выбраны. Для определения коэффициентов  $A_{ij}$  можно исходить из некоторой системы линейно независимых функций  $\omega_s(x)$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и требовать, чтобы равенство (1.1.2) точно выполнялось для некоторого числа  $p \leq n = \sum n_j$  первых функций  $\omega_s$ :

$$\int_a^b \rho(x) \omega_s(x) dx = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_j} A_{ij} \omega_s^{(j)}(x_{ij}) \quad (s = 1, 2, \dots, p). \quad (2.1.1)$$

Эти равенства можно рассматривать как систему  $p$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными величинами  $A_{ij}$ . Чтобы из нее можно было найти  $p$  величин  $A_{ij}$ , мы должны считать, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов  $\omega_s^{(j)}(x_{ij})$  ( $s = 1, 2, \dots, p$ ), равен числу  $p$ . Это условие является формальным требованием, которое следует предъявить к выбору функций  $\omega_s$ . Всюду ниже оно считается выполненным.  $n - p$  коэффициентов остаются произвольными и их значения должны быть найдены из дополнительных условий.

Особый интерес представляет случай, когда  $p = n$  и число уравнений (2.1.1) совпадает с числом коэффициентов  $A_{ij}$ . Тогда все  $A_{ij}$  определится однозначно из системы (2.1.1). Формулы этого вида называются интерполяционными. Такое название вызвано следующей связью между квадратурной формулой (1.1.2) и задачей интерполирования. Образует линейную комбинацию первых  $n$  функций  $\omega_s$ :  $S_n(x) = \sum_{s=1}^n a_s \omega_s(x)$ . Интерполируем после этого функцию  $f(x)$  при помощи  $S_n(x)$  по условиям:

$$S_n^{(j)}(x_{ij}) = \sum_{s=1}^n a_s \omega_s^{(j)}(x_{ij}) = f^{(j)}(x_{ij}) \quad (j = 0, 1, \dots, m; i = 1, \dots, n_j). \quad (2.1.2)$$

Равенства образуют линейную систему уравнений относительно  $a_s$ . Определитель ее совпадает с определителем системы (2.1.1) для  $p = n$  и будет отличен от нуля по сделанному предположению. Обозначив  $r(x)$  погрешность интерполирования

$$r(x) = f(x) - S_n(x) = f(x) - \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{n_j} L_{ij}(x) f^{(j)}(x_{ij}),$$

мы для интеграла будем иметь следующее точное представление:

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) f(x) dx &= \int_a^b p(x) S_n(x) dx + \int_a^b p(x) r(x) dx = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{n_j} A_{ij} f^{(j)}(x_{ij}) + R, \quad R = \int_a^b p(x) r(x) dx. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Отбросив здесь неизвестный остаток  $R$ , построим правило приближенной квадратуры:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{n_j} A_{ij} f^{(j)}(x_{ij}), \quad (2.1.4)$$

$$A_{ij} = \int_a^b p(x) L_{ij}(x) dx. \quad (2.1.5)$$

Оно будет совпадать с (1.1.2) для  $p = n$  ввиду того, что  $A_{ij}$  в (1.1.2) определяются при  $p = n$  однозначно. Коэффициенты (2.1.5) характеризуются тем, что равенство (2.1.4) выполняется точно для первых  $n$  функций  $\omega_s(x)$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ).

Формулы такого вида широко применяются при интегрировании таблично заданных функций или используются для построения других, более сложных формул, применяемых для этой цели.

Укажем на представление остатка  $R$  квадратурной формулы (2.1.4), рассчитанное на функции  $f(x)$ , непрерывно дифференцируемые  $n$  раз.

Предположим, что определитель Вронского

$$W(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1' & \dots & \omega_1^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_n & \omega_n' & \dots & \omega_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль нигде на отрезке интегрирования  $[a, b]$ , и рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка  $n$ :

$$L(y) = W^{-1} \begin{vmatrix} \omega_1 \dots \omega_1^{(n-1)} \omega_1^{(n)} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \omega_n \dots \omega_n^{(n-1)} \omega_n^{(n)} \\ y \dots y^{(n-1)} y^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Обозначим  $y(x, s)$  решение однородного уравнения  $L(y) = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям в точке  $x = s$ :

$$y^{(i)}|_{x=s} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-2), \quad y^{(n-1)}|_{x=s} = 1, \quad (2.1.6)$$

и введем  $n$  решений  $y_{ij}(x)$  ( $j = 0, 1, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n_j$ ) того же уравнения с начальными значениями:

$$y_{ij}^{(l)}(x_{pq}) = \delta_p^i \delta_q^j \delta_l^i, \quad \delta_r^s = \begin{cases} 1, & r = s, \\ 0, & r \neq s, \end{cases} \\ q = 0, 1, \dots, m; \quad p = 1, 2, \dots, n_j; \quad l = 0, 1, \dots, m.$$

Ввиду предполагаемого неравенства нулю определителя системы (2.1.2),  $y_{ij}(x)$  линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения  $L(y) = 0$ .

Для остатка  $r(x)$  интерполирования может быть построено\*) следующее выражение через функцию  $f(x)$ :

$$r(x) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}(x) \int_{x_{ij}}^x y^{(l)}(x_{ij}, s) L(f(s)) ds. \quad (2.1.7)$$

Отсюда сразу же получается представление остатка  $R$  квадратуры:

$$R = \int_a^b L(f(s)) \sum_{ij} y^{(i)}(x_{ij}, s) \int_a^b p(x) y_{ij}(x) [E(x-s) - E(x_{ij}-s)] dx ds, \\ E(x) = \frac{1}{2} [\text{sign } x + 1]. \quad (2.1.8)$$

Или, так как  $\int_a^b p(x) y_{ij}(x) dx = A_{ij}$  и  $\sum_{ij} y^{(i)}(x_{ij}, s) y_{ij}(x) = y(x, s)$ ,

$$R = \int_a^b L[f(s)] \left\{ \int_s^b p(x) y(x, s) dx - \sum_{ij} A_{ij} E(x_{ij}-s) y^{(i)}(x_{ij}, s) \right\} ds. \quad (2.1.9)$$

Ядро в этом интегральном представлении остатка  $R$ , стоящее в фигурных скобках под знаком интеграла, является погрешностью приближенной квадратуры функции  $y(x, s) E(x-s)$ .

\*) Е. Я. Ремез [1—3], Kneschke [1—2].

## § 2. Интерполяционные методы вычисления интеграла по значениям функции. Правила Котеса

В этом и двух следующих параграфах будут рассматриваться правила приближенного интегрирования, позволяющие вычислить интеграл по нескольким значениям функции  $f(x)$ :

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R. \quad (2.2.1)$$

Эта формула отвечает случаю  $m = 0$  в (2.1.1). Равенство (2.2.1) считается интерполяционным. Среди формул такого вида наибольшее значение в приложениях приобрели те, для получения которых выполняется алгебраическое интерполирование функции  $f(x)$  по ее значениям в точках  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Мы остановимся сейчас на правилах приближенных квадратур только этого вида. Методы квадратур, основанные на неалгебраическом интерполировании, будут рассмотрены ниже, в главах, посвященных вычислению интегралов специального вида.

Линейная комбинация  $S_n(x)$ , интерполирующая функцию  $f(x)$ , здесь будет алгебраическим многочленом степени  $n - 1$ :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \quad \omega(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Коэффициенты же  $A_k$  могут быть получены при помощи интегрирования интерполяционных множителей Лагранжа:

$$A_k = [\omega'(x_k)]^{-1} \int_a^b p(x) \omega(x) (x-x_k)^{-1} dx. \quad (2.2.2)$$

Квадратурные формулы с коэффициентами вида (2.2.2) характеризуются требованием, чтобы равенство (2.2.1) выполнялось точно всякий раз, когда  $f(x)$  есть произвольно взятый алгебраический многочлен степени, не большей  $n - 1$ .

Выражения для остаточного члена  $R$  формул (2.2.1), (2.2.2) легко получаются из многочисленных известных представлений остатка алгебраического интерполирования по значениям функции. Так, если воспользоваться выражением остатка через среднее значение производной порядка  $n$ , для  $R$  мы будем иметь следующее представление:

$$R = (n!)^{-1} \int_a^b p(x) \omega(x) f^{(n)}(\xi) dx. \quad (2.2.3)$$

В интегрируемой функции величина  $\xi$  зависит от значения переменной  $x$ . Общая же формула (2.1.9) для остатка в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$R = \int_a^b f^{(n)}(s) \left\{ \int_a^b p(x) \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} dx - \sum_{i=1}^n A_i \frac{(x_i-s)^{n-1}}{(n-1)!} E(x_i-s) \right\} ds. \quad (2.2.4)$$

Каждая интерполяционная формула (2.2.1) — (2.2.2) определяется расположением узлов  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Простейшим и основным случаем будет тот, когда функция  $f(x)$  дана в равноотстоящих точках. Пусть отрезок интегрирования  $[a, b]$  конечный и предположим, что он разделен на  $n$  равных частей длины  $h = \frac{b-a}{n}$ . Будем считать, что интегрируемая функция  $f(x)$  известна в точках  $x_k = a + kh$ . Если все  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) без исключений принять за узлы квадратурной формулы, то формула будет иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b p(x) f(x) dx &\approx \sum_{k=0}^n A_k f(a + kh), \\ A_k &= (b-a) B_k = (b-a) \frac{(-1)^{n-k}}{n! k! (n-k)!} \int_0^n p(a+ht) \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k} dt. \end{aligned} \right\} (2.2.5)$$

Числа  $B_k$ , определенные последним равенством, не зависят от промежутка интегрирования, и для них могут быть составлены таблицы значений в случае наиболее часто встречающихся весовых функций  $p(x)$ .

Равенство (2.2.5) называют часто формулой котесова вида. Остановимся более подробно на случае постоянной весовой функции  $p(x) = 1$ :

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{k=0}^n B_k f(a + kh) + R. \quad (2.2.6)$$

Котесом были вычислены  $B_k$  для  $n = 1(1)10$ . Числа, найденные им и после него другими авторами, приведены ниже:

$$p(x) = 1.$$

$$n = 1 \quad B_0 = B_1 = \frac{1}{2};$$

$$n = 2 \quad B_0 = B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_1 = \frac{4}{6};$$

$$n = 3 \quad B_0 = B_3 = \frac{1}{8}, \quad B_1 = B_2 = \frac{3}{8};$$

$$n = 4 \quad B_0 = B_4 = \frac{7}{90}, \quad B_1 = B_3 = \frac{32}{90}, \quad B_2 = \frac{12}{90};$$

$$n = 5 \quad B_0 = B_5 = \frac{19}{288}, \quad B_1 = B_4 = \frac{75}{288}, \quad B_2 = B_3 = \frac{50}{288};$$

$$n = 6 \quad B_0 = B_6 = \frac{41}{840}, \quad B_1 = B_5 = \frac{216}{840}, \quad B_2 = B_4 = \frac{27}{840}, \quad B_3 = \frac{272}{840};$$

$$n = 7 \quad B_0 = B_7 = \frac{751}{17280}, \quad B_1 = B_6 = \frac{3577}{17280}, \quad B_2 = B_5 = \frac{1323}{17280},$$

$$B_3 = B_4 = \frac{2989}{17280};$$



$$\begin{array}{l}
 n = 8 \quad B_0 = B_8 = \frac{989}{28\,350}, \quad B_1 = B_7 = \frac{5888}{28\,350}, \quad B_2 = B_6 = -\frac{928}{28\,350}, \\
 \quad \quad B_3 = B_5 = \frac{10\,496}{28\,350}, \quad B_4 = -\frac{4540}{28\,350}; \\
 n = 9 \quad B_0 = B_9 = \frac{2857}{89\,600}, \quad B_1 = B_8 = \frac{15\,741}{89\,600}, \quad B_2 = B_7 = \frac{1080}{89\,600}, \\
 \quad \quad B_3 = B_6 = \frac{19\,344}{89\,600}, \quad B_4 = B_5 = \frac{5778}{89\,600}; \\
 n = 10 \quad B_0 = B_{10} = \frac{16\,067}{598\,752}, \quad B_1 = B_9 = \frac{106\,300}{598\,752}, \quad B_2 = B_8 = -\frac{48\,525}{598\,752}, \\
 \quad \quad B_3 = B_7 = \frac{272\,400}{598\,752}, \quad B_4 = B_6 = -\frac{260\,550}{598\,752}, \quad B_5 = \frac{427\,368}{598\,752}.
 \end{array}$$

Для  $n = 11$  (1)20 коэффициенты формулы Котеса равны дробям, числители и знаменатели которых есть числа с многими знаками. Для упрощения записи мы представляли  $B_k$  в виде  $B_k = \frac{N_k}{D}$  и на стр. 18—19 привели таблицы значений  $N_k$  и  $D$ .

Если число узлов  $n + 1$  в формуле Котеса (2.2.6) нечетное, то алгебраическая степень точности формулы равна  $n + 1$  и остаток  $R$  ее представим в виде

$$R = \int_a^b f^{(n+2)}(x) K(x) dx,$$

$$K(x) = \frac{(b-x)^{n+2}}{(n+2)!} - \frac{b-a}{(n+1)!} \sum_{k=1}^n B_k E(a+kh-x)(a+kh-x)^{n+1}. \quad (2.2.7)$$

При этом  $K(x) \leq 0$  ( $a \leq x \leq b$ ).

На отрезке  $[a, b]$  существует число  $\xi$  такое, что для  $R$  верно равенство

$$R = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x \omega(x) dx, \quad (2.2.8)$$

$$\omega(x) = (x-a)(x-a-h) \dots (x-a-nh)$$

и множитель  $\int_a^b x \omega(x) dx$  отрицателен.

Если же число узлов  $n + 1$  четное, то алгебраическая степень точности (2.2.6) равна  $n$ . Для остатка  $R$  имеет место представление:

$$R = \int_a^b f^{(n+1)}(x) K(x) dx, \quad K(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} -$$

$$- \frac{b-a}{n!} \sum_{k=1}^n B_k E(a+kh-x)(a+kh-x)^n$$

и  $K(x) \leq 0$  [ $a \leq x \leq b$ ].

$k$	$N_k = N_{n-k}$	$k$	$N_k = N_{n-k}$
	$n = 11$		$n = 12$
0	+ 2 171 465	0	+ 1 364 651
1	+ 13 486 539	1	+ 9 903 168
2	- 3 237 113	2	- 7 587 864
3	+ 25 226 685	3	+ 35 725 120
4	- 9 595 542	4	- 51 491 295
5	+ 15 493 566	5	+ 87 516 288
	$D = 87\ 091\ 200$	6	- 87 797 136
			$D = 63\ 063\ 000$
	$n = 13$		$n = 14$
0	+ 6 137 698 213	0	+ 90 241 897
1	+ 42 194 238 652	1	+ 710 986 864
2	- 23 361 540 993	2	- 770 720 657
3	+ 116 778 274 403	3	+ 3 501 442 784
4	- 113 219 777 650	4	- 6 625 093 363
5	+ 154 424 590 209	5	+ 12 630 121 616
6	- 32 067 978 834	6	- 16 802 270 373
	$D = 301\ 771\ 008\ 000$	7	+ 19 534 438 464
			$D = 5\ 003\ 856\ 000$
	$n = 15$		$n = 16$
0	+ 105 930 069	0	+ 15 043 611 773
1	+ 796 661 595	1	+ 127 626 606 592
2	- 698 808 195	2	- 179 731 134 720
3	+ 3 143 332 755	3	+ 832 211 855 360
4	- 4 688 522 055	4	- 1 929 498 607 520
5	+ 7 385 654 007	5	+ 4 177 588 893 696
6	- 6 000 998 415	6	- 6 806 534 407 936
7	+ 3 056 422 815	7	+ 9 368 875 018 240
	$D = 6\ 199\ 345\ 152$	8	- 10 234 238 972 220
			$D = 976\ 924\ 698\ 750$
	$n = 17$		$n = 18$
0	+ 55 294 720 874 657	0	+ 203 732 352 169
1	+ 450 185 515 440 285	1	+ 1 848 730 221 900
2	- 542 023 437 008 852	2	- 3 212 744 374 395
3	+ 2 428 636 525 764 260	3	+ 15 529 830 312 096
4	- 4 768 916 800 123 440	4	- 42 368 630 685 840
5	+ 8 855 416 648 684 984	5	+ 103 680 563 465 808
6	- 10 905 371 859 790 660	6	- 198 648 429 867 720
7	+ 10 069 615 750 132 836	7	+ 319 035 784 479 840
8	- 3 759 785 974 054 070	8	- 419 127 951 114 198
	$D = 3\ 766\ 102\ 179\ 840\ 000$	9	+ 461 327 344 340 680
			$D = 15\ 209\ 113\ 920\ 000$

Продолжение

$k$	$N_k = N_{n-k}$	$k$	$N_k = N_{n-k}$
	$n = 19$		$n = 20$
0	+ 69 028 763 155 644 023	0	+ 19 470 140 241 329
1	+ 603 652 082 270 808 125	1	+ 187 926 090 380 000
2	— 926 840 515 700 222 955	2	— 389 358 194 177 500
3	+ 4 301 581 538 450 500 095	3	+ 1 985 969 159 340 000
4	— 10 343 692 234 243 192 788	4	— 6 208 948 835 889 375
5	+ 22 336 420 328 479 961 316	5	+ 17 019 387 776 517 504
6	— 35 331 888 421 114 781 580	6	— 37 389 734 671 290 000
7	+ 43 920 768 370 565 135 580	7	+ 68 869 287 574 320 000
8	— 37 088 370 261 379 851 390	8	— 105 499 014 813 701 250
9	+ 15 148 337 305 921 759 574	9	+ 136 324 521 798 440 000
	$D = 5 377 993 912 811 520 000$	10	— 148 192 526 607 280 936
			$D = 1 646 485 441 080 480$

На  $[a, b]$  существует точка  $\xi$  такая, что  $R = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x) dx$ . Множитель

$\int_a^b \omega(x) dx$  отрицателен.

По причинам, которые будут выяснены ниже, в приложениях применяются формулы Котеса, отвечающие небольшим значениям  $n$ . Ниже приведены наиболее употребительные из них.

При  $n = 1$  равенство (2.2.6) будет иметь вид:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi). \quad (2.2.9)$$

Это есть простейшая формула трапеций. Она имеет малую точность и в таком виде применяется в вычислениях весьма редко. Остаточный член ее  $R = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$  содержит множителем  $(b-a)^3$ , и если вторая производная  $f''$  есть мало изменяющаяся функция, то при уменьшении длины отрезка интегрирования  $b-a$  в  $k$  раз, остаток  $R$  уменьшится приблизительно в  $k^3$  раз. Этим можно воспользоваться для повышения точности результата.

Разделим отрезок  $[a, b]$  на некоторое число  $n$  равных частей длины  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Если простейшую формулу трапеций применить к каждому из частичных отрезков и сложить результаты, получим следующую «общую формулу трапеций»:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left[ \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right] - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad (2.2.10)$$

$$f_k = f(a + kh).$$

Тот же способ построения новых квадратурных формул для повышения точности результата при помощи деления на части отрезка интегрирования применим, очевидно, к любой квадратурной формуле и в дальнейшем не будет поясняться.

При  $n = 2$  (2.2.6) приводит к простейшему правилу парабол, или формуле Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(a+h) + f(b)] - \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{f^{(4)}(\xi)}{90},$$

$$h = (b-a)/2, \quad a < \xi < b. \quad (2.2.11)$$

Соответствующая «общая формула парабол» будет

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{3n} [f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) +$$

$$+ 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1})] - \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) \quad (2.2.12)$$

Число  $n$  считается четным.

Для  $n = 3$  из (2.2.6) получается ньютоново «правило трех восьмых» в его простейшем виде:

$$\int_a^b f(x) dx =$$

$$= (b-a) \left[ \frac{1}{8} f(a) + \frac{3}{8} f(a+h) + \frac{3}{8} f(a+2h) + \frac{1}{8} f(b) \right] - \frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi),$$

$$h = (b-a)/3, \quad a \leq \xi \leq b.$$

«Общее правило трех восьмых» имеет следующую форму:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{3h}{8} [f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + f_6 + \dots) +$$

$$+ 3(f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 + \dots)] - \frac{(b-a)^5}{80n^4} f^{(4)}(\xi),$$

$$h = (b-a)/n, \quad a \leq \xi \leq b. \quad (2.2.13)$$

Число  $n$  считается кратным 3.

Из сравнения остаточных членов равенств (2.2.12) и (2.2.13) вытекает, что погрешность «правила трех восьмых», вообще говоря, превосходит погрешность формулы Симпсона приблизительно вдвое, и поэтому (2.2.13) в вычислениях применяется реже, чем (2.2.12). При просмотре приведенной выше таблицы значений коэффициентов  $B_k$  бросается в глаза нерегулярность в распределении их значений. При  $n = 8$  и для всяких  $n \geq 10$  среди  $B_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) будут встречаться отрицательные\*). Более того, абсолютные величины  $B_k$  будут быстро возрастать при  $n \rightarrow \infty$  для всякого фиксированного  $k$ .

\*) С. Н. Бернштейн [2].

Возвратимся на время к общей формуле Котеса (2.2.5). Можно показать <sup>\*</sup>), что если весовая функция  $p(x)$  интегрируема на  $[a, b]$  и на концах  $a$  и  $b$  этого отрезка существуют производные  $p'(a)$  и  $p'(b)$ , то  $B_k$  имеют следующие асимптотические представления при больших  $n$ :

$$\left. \begin{aligned} B_k &= \frac{(-1)^{k-1} n!}{k! (n-k)! n \lg^2 n} \left[ \frac{p(0)}{k} + (-1)^n \frac{p(1)}{n-k} \right] [1 + O(\lg^{-1} n)] \quad (0 < k < n), \\ B_0 &= \frac{p(0)}{n \lg n} [1 + O(\lg^{-1} n)], \quad B_n = \frac{p(1)}{n \lg n} [1 + O(\lg^{-1} n)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.14)$$

Аналогичные, но несколько более сложные асимптотические представления для  $B_k$  могут быть построены <sup>\*\*</sup>), если допустить, что  $p(x)$  имеет в точках  $a$  и  $b$  особенности степенного типа:

$$p(x) = x^\alpha [1 + O(x)], \quad p(x) = (1-x)^\beta [1 + O(1-x)] \quad (\alpha, \beta > -1).$$

Из (2.2.14) видно, что при больших  $n$  числа  $B_k$  быстро возрастают и числа  $B_k$  и  $B_{k+1}$  будут иметь, вообще говоря, противоположные знаки.

### § 3. Правила интегрирования, имеющие степень точности ниже интерполяционной

Указанные в конце предыдущего параграфа особенности коэффициентов  $B_k$  делают формулу Котеса при больших  $n$  малоприменимой для вычислений.

Чтобы построить квадратурные формулы, не имеющие этих недостатков и предназначенные для интегрирования функций, заданных в системе равноотстоящих точек, идут обычно двумя путями. В этом параграфе мы остановимся на первом из них. Для определенности изложения будем считать, что функция  $p(x)$  неотрицательна.

Формула Котеса является интерполяционной, и ее коэффициенты  $A_k$  определяются требованием, чтобы равенство (2.2.5) выполнялось точно для многочленов степени  $n$ . Ослабим это условие и будем считать, что равенство (2.2.5) будет точным для всех степеней  $x$  от нулевой до некоторой степени  $m$ , меньшей числа  $n$ . Это дает систему  $m+1$  уравнений для  $A_k$ :

$$\int_a^b p(x) x^l dx = \sum_{k=0}^n A_k (a+kh)^l \quad (l = 0, 1, \dots, m). \quad (2.3.1)$$

Из них могут быть найдены  $m+1$  чисел  $A_k$ , остальные же  $n-m$  остаются произвольными. Выбором их можно, в некоторых случаях, распорядиться так, чтобы все  $A_k$  оказались положительными.

Этим последним требованием произвольные  $A_k$  определяются не вполне точно, и в выборе их еще остается большой произвол. Его используют обычно для того, чтобы получить формулу с рациональными коэффициентами, имеющими возможно малые знаменатели, что может упростить вычисления при счете на малых настольных машинах.

<sup>\*</sup>) Р. О. Кузьмин [2].

<sup>\*\*</sup>) Н. П. Феденко [1].

К квадратурным формулам такого типа принадлежит, по существу дела, общее правило трапеций (2.2.10) при  $n > 1$ , так же как общие правила парабол (2.2.12) и «трех восьмых» (2.2.13) для  $n > 3$ .

Приведем некоторые другие формулы этого вида. Все они относятся к случаю постоянной весовой функции:  $p(x) = 1$ . Потребуем, чтобы равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(a + kh)$$

выполнялось для всех многочленов степени  $n - 1$ . Соответствующая этому условию система (2.3.1) будет состоять из  $n$  независимых уравнений. Один из коэффициентов  $A_k$  остается произвольным, и полученное правило приближенного интегрирования может породить серию частных правил.

Произвольный параметр формул, обозначенный буквой  $\alpha$ , выбран так, чтобы была наглядной связь этих формул с правилами Котеса. При  $\alpha = 0$  эти формулы переходят в соответствующие формулы Котеса. При  $\alpha \neq 0$  алгебраическая степень точности формулы равна  $n - 1$ . Для сокращения записи принято обозначение  $f(a + kh) = f_k$ .

$$1. n = 2, \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} [(1 + \alpha)(f_0 + f_2) + (4 - 2\alpha)f_1].$$

При  $\alpha = 0$  получится правило Симпсона и при  $\alpha = \frac{1}{2}$  и  $\alpha = 2$  получаются частные случаи формулы трапеций.

$$2. n = 3, \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} [(1 + \alpha)f_0 + (3 - 3\alpha)f_1 + (3 + 3\alpha)f_2 + (1 - \alpha)f_3].$$

Если  $\alpha = 1$ , получается правило

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} [2f_0 + 6f_2],$$

связанное с приближенным интегрированием наивысшей алгебраической степени точности с одним фиксированным узлом  $x_1 = a$  и одним избираемым узлом  $x_2$ .

$$3. n = 4, \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{90} [(7 + \alpha)(f_0 + f_4) + (32 - 4\alpha)(f_1 + f_3) + (12 + 6\alpha)f_2].$$

При  $\alpha = 8$  и  $\alpha = 1/2$  отсюда получаются формулы Симпсона с тремя и пятью ординатами.

Отметим два частных правила:

$$\alpha = 2, \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{90} [9(f_0 + f_4) + 24(f_1 + f_2 + f_3)],$$

$$\alpha = -1, \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{15} [f_0 + f_2 + f_4 + 6(f_1 + f_3)].$$

$$4. n = 5, \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{288} [(19 + \alpha) f_0 + (75 - 5\alpha) f_1 + (50 + 10\alpha) f_2 + \\ + (50 - 10\alpha) f_3 + (75 + 5\alpha) f_4 + (19 - \alpha) f_5].$$

$$5. n = 6, \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{840} [(41 + \alpha) (f_0 + f_6) + (216 - 6\alpha) (f_1 + f_5) + \\ + (27 + 15\alpha) (f_2 + f_4) + (272 - 20\alpha) f_3].$$

При  $\alpha = 1$  получается формула Уэддла с коэффициентами простой арифметической природы

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{20} [f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6].$$

Укажем еще на две формулы, имеющие простое строение и отвечающие значениям  $\alpha = 7$  и  $\alpha = 9$ :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{420} [24(f_0 + f_6) + 87(f_1 + f_5) + 66(f_2 + f_3 + f_4)],$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{420} [25(f_0 + f_6) + 81(f_1 + f_2 + f_4 + f_5) + 46f_3].$$

Наконец, при  $\alpha = -\frac{9}{5}$  получится хорошо известная интерполяционная формула Харди, приведенная в § 4.

$$6. n = 7, \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{17280} [(751 + \alpha) f_0 + (3577 - 7\alpha) f_1 + \\ + (1323 + 21\alpha) f_2 + (2989 - 35\alpha) f_3 + (2989 + 35\alpha) f_4 + \\ + (1323 - 21\alpha) f_5 + (3577 + 7\alpha) f_6 + (751 - \alpha) f_7].$$

$$7. n = 8, \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{28350} [(989 + \alpha) (f_0 + f_8) + (5888 - 8\alpha) (f_1 + f_7) + \\ + (28\alpha - 928) (f_2 + f_6) + (10496 - 56\alpha) (f_3 + f_5) + (70\alpha - 4540) f_4].$$

Чтобы коэффициенты квадратурной суммы были неотрицательными, достаточно параметр  $\alpha$  выбрать так, чтобы было  $454 \leq 7\alpha \leq 1312$ .

Приведем две частные формулы достаточно простого вида, отвечающие значениям  $\alpha = 96$  и  $\alpha = \frac{1312}{7}$ :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{5670} [217(f_0 + f_8) + 1024(f_1 + f_3 + f_5 + f_7) + 352(f_2 + f_6) + 436f_4]$$

и

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{13 \cdot 230} [549(f_0 + f_8) + 2048(f_1 + f_7) + 2016(f_2 + f_6) + 4004f_4].$$

Последняя формула является интерполяционной и с ней, как и с формулой Харди, мы встретимся ниже еще раз в связи с другой задачей.

#### § 4. Квадратурные формулы с пропущенными узлами

Второй путь получения интерполяционных квадратурных формул, коэффициенты которых не имеют недостатков, присущих коэффициентам Котеса, часто связывают с проблемой сходимости интерполяционных квадратур. Чтобы сформулировать идею, положенную в основу построения, возвратимся к квадратурам с произвольным расположением узлов.

Нас будет интересовать погрешность вычисления интеграла:

$$R_n = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Величина ее зависит как от свойств функции  $f(x)$ , так и от выбора точек  $x_k$ .

Будем увеличивать число  $n$  абсцисс  $x_k$  неограниченно. При этом мы допускаем, что с ростом  $n$  будут не только добавляться новые абсциссы, но могут изменяться все узлы формулы, так что для каждого  $n$  узлы  $x_k$  могут иметь свое расположение на отрезке  $[a, b]$ .

Можно ожидать, по крайней мере в некоторых случаях, что с увеличением  $n$  точность вычисления интеграла будет возрастать и погрешность  $R_n$  будет убывать. Но будет ли при этом  $R_n$  стремиться к нулю, т. е. будет ли возможным приближенное вычисление интеграла со сколь угодно высокой точностью, и как для этого должны быть между собой связаны свойства  $f(x)$  и закон распределения узлов  $x_k$ ?

В первую очередь представляет интерес исследовать такую задачу для функций, аналитических на отрезке  $[a, b]$ , так как такие функции наиболее часто встречаются в приложениях.

Равностоящие узлы оказываются неблагоприятными для вычислений с высокой точностью. В случае таких узлов можно быть уверенным, что  $R_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , когда  $f(x)$  будет аналитической функцией, регулярной не только на отрезке  $[a, b]$ , но и в некоторой достаточно широкой области около этого отрезка. В главе, посвященной проблеме сходимости квадратурного процесса, эта область будет указана точно.

Естественно спросить, можно ли узлы  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) выбрать так, чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$  для всякой функции, аналитической на  $[a, b]$ ? Сосредоточим внимание на зависимости  $R_n$  от абсцисс  $x_k$ . Стремление  $R_n$  к нулю определяется двумя фактами: каким будет предельное распределение \*) узлов  $x_k$  на  $[a, b]$ , если оно существует, и по какому закону происходит стремление к этому предельному распределению.

Область около  $[a, b]$ , в которой  $f(x)$  должна быть аналитической для того, чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ , зависит, оказывается, только от предельного распределения узлов  $x_k$ .

\*) Понятие предельного распределения будет выяснено подробно в гл. 10.



Когда рассматриваются любые функции, аналитические на  $[a, b]$ , то на размеры области регулярности их около  $[a, b]$  не налагается никаких ограничений, и она может быть сколь угодно узкой. Для всех таких функций  $R_n$ , наверное, будет стремиться к нулю в том случае, когда предельное распределение узлов будет распределением Чебышева.

Пусть рассматривается отрезок  $-1 \leq x \leq 1$ . Распределение единичной массы на нем называется чебышевским, если плотность его есть  $\rho(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}$  ( $|x| < 1$ ).

На рис. 1 приведен график плотности  $\rho(x)$ , из которого видно, что вблизи концов отрезка масса располагается более плотно, чем около его середины. Припишем теперь каждой точке  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) массу  $\frac{1}{n}$ . Это будет также некоторое распределение единичной массы на  $[-1, 1]$ . Если окажется, что при  $n \rightarrow \infty$  такое распределение будет стремиться к распределению с плотностью  $\pi^{-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ , то говорят, что узлы  $x_k$  имеют при  $n \rightarrow \infty$  предельное распределение Чебышева.

Картина в случае любого отрезка  $[a, b]$  получается из только что описанной при помощи линейного преобразования.

Следует считать, по-видимому, что при интегрировании аналитических функций предельное распределение Чебышева для узлов  $x_k$  является наилучшим для стремления к нулю погрешности  $R_n$ .

Отсюда можно заключить, что если мы хотим улучшить точность приближенной квадратуры путем специального подбора узлов  $x_k$ , то их следует, вероятно, выбрать так, чтобы распределение их на  $[a, b]$  возможно лучше походило на распределение Чебышева. Узлы  $x_k$  при этом не будут равноотстоящими.

Если функция  $f(x)$  задана в системе равноотстоящих значений аргумента  $x_k = a + kh$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), как это считалось при построении квадратурной формулы Ньютона — Котеса, то мы имеем только одну возможность получить таблицу значений  $f(x)$  в неравноотстоящих точках: нужно пропустить некоторые табличные узлы. При этом отбрасывание табличных узлов следует, как выяснялось выше, выполнять так, чтобы оставшиеся узлы возможно более приближались к распределению Чебышева. Этими простыми и наглядными соображениями часто пользуются при построении интерполяционных квадратурных формул, в которых взяты не все равноотстоящие точки отрезка интегрирования.

Ниже дан достаточно подробный перечень правил с положительными коэффициентами с пропущенным одним или несколькими узлами и с симметричным расположением оставшихся узлов. Шаг между узлами приведен, для простоты записи, к единице.

Если квадратурная формула имеет степень точности  $m$ , то остаточный член формулы может быть выражен через производную порядка  $m + 1$  при помощи интеграла

следующего вида:  $R = \int_a^b f^{(m+1)}(t) K(t) dt$  [см., например, (2.2.4)], где функция

$K(t)$  не зависит от  $f$ . На множестве функций  $f$ , имеющих на  $[a, b]$  непрерывную производную  $f^{(m+1)}(t)$ , удовлетворяющую условию  $|f^{(m+1)}(t)| \leq M_{m+1}$ , верна оценка

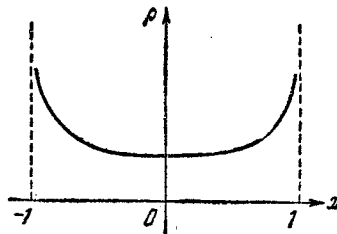


Рис. 1.

остатка  $|R| \leq M_{m+1} \int_a^b |K(t)| dt$ , являющаяся точной. Нахождение численного значения коэффициента  $\int_a^b |K(t)| dt$  связано с большими трудностями. Для приводимых ниже формул значения этого коэффициента не известны.

Для того чтобы при выборе правила интегрирования можно было приближенно оценить остаток формулы, приведены другие величины  $S$  и  $s$ , поясняемые ниже, которые проще вычисляются, но дают возможность судить о величине  $R$  менее точно, чем указанный выше коэффициент. Так как формулы интерполяционного типа \*),

остаток  $R$  для них равен интегралу от остатка интерполирования  $r(x)$ :  $R = \int_a^b p(x)r(x)dx$ , или, если воспользоваться одним из известных представлений для  $r(x)$  [см. (2.2.3)],

$$R = [(m+1)!]^{-1} \int_a^b p(x)\omega(x)f^{(m+1)}(\xi)dx.$$

Отсюда сразу же получается такая оценка:

$$|R| \leq M_{m+1}S, \quad S = [(m+1)!]^{-1} \int_a^b |p(x)\omega(x)|dx.$$

Как правило, эта оценка является неточной, так как  $S \geq \int_a^b |K|dx$  и равенство выполняется лишь в весьма редких случаях. Для формул, приводимых ниже,  $S$  будет, как можно видеть, значительно больше точного коэффициента  $\int_a^b |K|dx$ .

Если у функции  $f(x)$  производная  $f^{(m+1)}(x)$  мало изменяет свои значения на  $[a, b]$ , то в указанном выше выражении  $R$  производную  $f^{(m+1)}(\xi)$  можно считать величиной постоянной, равной значению  $f^{(m+1)}(\eta)$  в какой-либо точке  $\eta$  отрезка  $[a, b]$ :

$$R \approx f^{(m+1)}(\eta) \frac{1}{(m+1)!} \int_a^b p(x)\omega(x)dx.$$

В правой части стоит часть остатка, которую при сделанном предположении об  $f^{(m+1)}$  можно считать главной частью  $R$ . Ниже даны значения коэффициентов

$$s = \frac{1}{(m+1)!} \int_a^b p(x)\omega(x)dx \quad \text{и} \quad S \quad \text{для каждой из формул.} \quad *$$

\*) Необходимо отметить, что в части формул для получения приводимых в тексте коэффициентов в оценках остатка необходимо было считать некоторые узлы формулы двукратными точками интерполирования и в них предполагать заданными не только значения  $f(x)$ , но и значения первой производной  $f'(x)$ .

Если шаг  $h$  между узлами отличен от единицы, то значения  $s$  и  $S$  нужно заменить на  $sh^{m+2}$  и  $Sh^{m+2}$ , где  $m$  — алгебраическая степень точности соответствующей формулы. Например, если формулу 1 (Харди) записывать для интеграла  $\int_0^{6h} f(x) dx$ ,

то для нее будет  $s = \frac{9}{700} h^7$ ,  $S = \frac{1007}{18\,900} h^7$ .

$$1. \int_0^6 f(x) dx \approx 0,28(f_0 + f_6) + 1,62(f_1 + f_5) + 2,2f_3.$$

Степень точности равна 5 (J. F. Hardy),  $s = \frac{9}{700}$ ,  $S = \frac{1007}{18\,900}$ .

$$2. \int_0^6 f(x) dx \approx 0,39(f_0 + f_6) + 0,96(f_1 + f_5) + 1,65(f_2 + f_4).$$

Степень точности равна 5,  $s = -\frac{17}{175}$ ,  $S = \frac{713}{4725}$ .

$$3. \int_0^7 f(x) dx \approx \frac{1}{7200} [3934(f_0 + f_7) + 1715(f_1 + f_6) + 19\,551(f_2 + f_5)].$$

Степень точности равна 5,  $s = -\frac{20\,923}{43\,200}$ ,  $S = \frac{60\,763}{100\,800}$ .

$$4. \int_0^8 f(x) dx \approx \frac{1}{6615} [2196(f_0 + f_8) + 8192(f_1 + f_7) + 8064(f_2 + f_6) + 16\,016f_4].$$

Степень точности равна 7,  $s = -\frac{5248}{99\,225}$ ,  $S = \frac{123\,149}{1\,587\,600}$ .

$$5. \int_0^8 f(x) dx \approx \frac{1}{33\,075} [9836(f_0 + f_8) + 50\,112(f_1 + f_7) + 8288(f_2 + f_6) + 64\,064(f_3 + f_5)].$$

Степень точности равна 7,  $s = -\frac{1816}{99\,225}$ ,  $S = \frac{2}{27}$ .

$$6. \int_0^8 f(x) dx \approx \frac{1}{945} [108(f_0 + f_8) + 2048(f_1 + f_7) + 3248f_4].$$

Степень точности равна 5,  $s = \frac{4096}{7}$ ,  $S = \frac{6920}{7}$ .

$$7. \int_0^9 f(x) dx \approx \frac{1}{1600} [585(f_0 + f_9) + 2187(f_1 + f_8) + 4428(f_2 + f_6)].$$

Степень точности равна 5,  $s = -\frac{7533}{11\,200}$ ,  $S = \frac{309\,653}{60\,480}$ .



Общее число известных значений (2.5.1) обозначим  $n + 1$ :  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n + 1$ . Числа  $k_1, \dots, k_m$  называются кратностями соответствующих узлов.

Нужно построить приближенное равенство

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i-1} A_{ij} f^{(j)}(x_i), \quad (2.5.2)$$

которое позволяло бы вычислить интеграл с возможно хорошей точностью. В случае табличного задания  $f, f', \dots$  абсциссы  $x_i$  считаются фиксированными и могут быть взяты лишь из числа табличных значений. Коэффициенты же  $A_{ij}$  являются произвольными. Чаще всего  $A_{ij}$  избирают так, чтобы равенство (2.5.2) имело возможно высокую алгебраическую степень точности.

Наивысшая степень точности, которую можно достигнуть за счет выбора  $A_{ij}$  при произвольно фиксированных узлах  $x_i$ , характеризуется теоремой, формулируемой несколькими строками ниже.

Интерполируем функцию  $f(x)$  при помощи величин, входящих в таблицу (2.5.1). Интерполирующий многочлен, который мы обозначим  $H(x)$ , будет иметь степень не выше  $n$  и будет удовлетворять условиям

$$H^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad (i = 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, k_i - 1).$$

Многочлен  $H(x)$  может быть записан в виде  $H(x) = \sum_i \sum_j h_{ij}(x) f^{(j)}(x_i)$ , где  $h_{ij}(x)$

есть многочлены степени ровно  $n$  и для них известны определенные выражения\*). Функция  $f(x)$  может быть заменена интерполирующим многочленом  $H(x)$ . Коэффициенты  $A_{ij}$  при этом получают следующие значения:

$$A_{ij} = \int_a^b p(x) h_{ij}(x) dx. \quad (2.5.3)$$

Квадратурные формулы (2.5.2) с такими коэффициентами  $A_{ij}$ , по причине способа их получения, носят название интерполяционных. Просто проверяется, что для того чтобы формула (2.5.2) — (2.5.3) была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она была точной для всяких многочленов степени  $n$ .

Каждая интерполяционная формула (2.5.2) — (2.5.3) определяется выбором узлов  $x_i$  и указанием их кратностей  $k_i$ . При построении таких формул может оказаться в случае неудачного выбора  $x_i$  и  $k_i$ , что ее коэффициенты будут иметь большие абсолютные значения. Такие формулы мало пригодны для вычислений. Поэтому полезно привести наглядные соображения, которыми можно руководствоваться при выборе  $x_i$  и  $k_i$  и которые часто позволяют избежать указанного недостатка. Эти соображения аналогичны тем, которые были изложены в начале предыдущего параграфа в связи с построением формул, коэффициенты которых не имеют недостатков, присущих коэффициентам Котеса. Они связаны со сходимостью интерполяционного квадратурного процесса. Допустим, что в равенстве (2.5.2) мы неограниченно увеличиваем число  $m$  узлов  $x_i$ . При этом мы считаем, что с изменением  $m$  может изменяться как расположение узлов на отрезке  $[a, b]$ , так и кратности этих узлов.

\*) См., например, В. Л. Гончаров «Теория интерполирования и приближения функций», гл. 1, п°12, Гостехиздат, 1954.

Представим себе, что единичную массу мы разделим на  $n+1 = \sum_i k_i$  равных частей. Поместим в каждый узел  $x_i$  столько частей  $\frac{1}{n+1}$ , какова его кратность  $k_i$ . Мы получим некоторое распределение единичной массы на отрезке  $[a, b]$ .

Как и в случае простых узлов, можно быть уверенным, что для всякой аналитической на  $[a, b]$  функции  $f$  погрешность формулы (2.5.2) — (2.5.3) будет неограниченно убывать при  $m \rightarrow \infty$  только в том случае, когда указанное нами распределение единичной массы будет стремиться к чебышевскому распределению, плотность которого равна  $\pi^{-1} [(x-a)(b-x)]^{-1/2}$ . Поэтому можно думать, что чебышевское распределение для интегрирования аналитических функций является наилучшим предельным распределением. Узлы  $x_i$  и кратности их  $k_i$  естественно выбирать так, чтобы описанное выше распределение единичной массы по узлам  $x_i$  было возможно более сходным с распределением Чебышева. По сравнению со случаем простых узлов здесь в нашем распоряжении имеются дополнительные параметры — кратности  $k_i$  узлов, выбором которых мы можем воспользоваться для улучшения свойств квадратурной формулы;  $k_i$ , в частности, можно подобрать, очевидно, так, чтобы при равноотстоящих узлах  $x_k = a + kh$  ( $h = \frac{b-a}{m}$ ;  $k = 0, 1, \dots, m$ ) предельная функция рас-

пределения совпадала с чебышевской и, следовательно, погрешность квадратурной формулы (2.5.2) — (2.5.3) стремилась к нулю для всякой аналитической функции  $f$ .

Ниже приведено несколько квадратурных формул с положительными коэффициентами при значениях функции, предназначенных для интегрирования, когда известны таблицы значений самих функций и их первых производных в равноотстоящих точках.

При записи использовано обозначение

$$f(x_k) = f_k, f'(x_k) = f'_k.$$

$$1. \int_a^{a+h} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[ f_0 + f_1 - \frac{h}{6} (f'_1 - f'_0) \right], s = \frac{h^5}{720}.$$

Степень точности равна 3.

$$2. \int_a^{a+nh} f(x) dx \approx h \left[ \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right] - \frac{h^2}{12} (f'_n - f'_0).$$

$$3. \int_a^{a+2h} f(x) dx \approx \frac{h}{15} \{ 7(f_0 + f_2) + 16f_1 - h[f'_2 - f'_0] \}, s = \frac{h^7}{4725}.$$

Степень точности равна 5.

$n$  — четное:

$$4. \int_a^{a+nh} f(x) dx \approx \frac{h}{15} [ 7(f_0 + 2f_2 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + f_n) + 16(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) ] - \frac{h^2}{15} (f'_n - f'_0).$$

$$3. \int_a^{a+3h} f(x) dx \approx \frac{3h}{80} [13(f_0 + f_3) + 27(f_1 + f_2) - 2h(f'_3 - f'_0)], \quad s = \frac{9h^7}{11\,200}.$$

Степень точности равна 5.  
n кратно 3:

$$\int_a^{a+nh} f(x) dx \approx \frac{3h}{80} [13(f_0 + 2f_3 + 2f_6 + \dots + 2f_{n-3} + f_n) + 27(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + \dots + f_7 + f_8 + \dots + f_{n-2} + f_{n-1})] - \frac{3h^2}{40} (f'_n - f'_0).$$

$$4. \int_a^{a+3h} f(x) dx \approx \frac{3h}{1120} \{155(f_0 + f_3) + 405(f_1 + f_2) + h[27(f'_2 - f'_1) - 19(f'_3 - f'_0)]\}, \quad s = \frac{9h^9}{343\,600}.$$

Степень точности равна 7.

$$5. \int_a^{a+4h} f(x) dx \approx \frac{2h}{945} [217(f_0 + f_4) + 512(f_1 + f_3) + 432f_2 - 30h(f'_4 - f'_0)],$$

$$s = \frac{16h^9}{99\,225}.$$

Степень точности равна 7.  
n кратно 4:

$$\int_a^{a+nh} f(x) dx \approx \frac{2h}{945} [217(f_0 + 2f_4 + 2f_8 + \dots + 2f_{n-4} + f_n) + 512(f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_7 + \dots + f_{n-3} + f_{n-1}) + 432(f_2 + f_6 + \dots + f_{n-2})] - \frac{4h^2}{63} (f'_n - f'_0).$$

$$6. \int_a^{a+4h} f(x) dx \approx \frac{2h}{945} \{305(f_0 + f_4) + 640(f_1 + f_3) - 2h[27(f'_4 - f'_0) + 96(f'_3 - f'_1)]\}, \quad s = \frac{52h^9}{99\,225}.$$

Степень точности равна 7.

$$7. \int_a^{a+4h} f(x) dx \approx \frac{2h}{135} [7(f_0 + f_4) + 128(f_1 + f_3) + 6h(f'_4 - f'_0)], \quad s = -\frac{32h^7}{1575}.$$

Степень точности равна 5.

$n$  кратно 4:

$$\int_a^{a+nh} f(x) dx \approx \frac{2h}{135} [7(f_0 + 2f_1 + 2f_3 + \dots + 2f_{n-4} + f_n) + 128(f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{n-1})] + \frac{4h^2}{45}(f'_n - f'_0).$$

$$8. \int_a^{a+4h} f(x) dx \approx \frac{2h}{8505} \{1601(f_0 + f_4) + 4096(f_1 + f_3) + 5616f_2 + 6h[128(f'_3 - f'_1) - 29(f'_4 - f'_0)]\}, \quad s = \frac{8h^{11}}{1\,964\,655}.$$

Степень точности равна 9.

$$9. \int_a^{a+5h} f(x) dx \approx \frac{5h}{6\,386\,688} \{446\,719(f_0 + f_5) + 968\,625(f_1 + f_4) + 1\,778\,000(f_2 + f_3) + 30h[-1479(f'_5 - f'_0) + 12\,575(f'_4 - f'_1) + 10\,900(f'_3 - f'_2)]\},$$

$$s = \frac{144\,425h^{13}}{230\,150\,670\,288}.$$

Степень точности равна 11.

$$10. \int_a^{a+5h} f(x) dx \approx \frac{5h}{145\,152} \{11\,701(f_0 + f_5) + 30\,375(f_1 + f_4) + 30\,500(f_2 + f_3) + 60h[-23(f'_5 - f'_0) + 50(f'_4 - f'_1)]\}, \quad s = \frac{2725h^{11}}{134\,120\,448}.$$

Степень точности равна 9.

$$11. \int_a^{a+5h} f(x) dx \approx \frac{5h}{48\,384} [4567(f_0 + f_5) + 10\,125(f_1 + f_4) + 9500(f_2 + f_3) - 660h(f'_5 - f'_0)], \quad s = \frac{125h^9}{254\,016}.$$

Степень точности равна 7.

$$12. \int_a^{a+5h} f(x) dx \approx \frac{5h}{192} [-29(f_0 + f_5) + 125(f_1 + f_4) + 20h(f'_5 - f'_0)],$$

$$s = -\frac{2375h^7}{10\,206}.$$

Степень точности равна 5.



$$13. \int_a^{a+6h} f(x) dx \approx \frac{h}{10\,010\,000} \{3\,310\,219 (f_0 + f_6) + 5\,014\,656 (f_1 + f_5) + \\ + 11\,161\,125 (f_2 + f_4) - 32\,966\,000 f_3 - 30h [10\,237 (f'_6 - f'_0) - 136\,512 (f'_5 - f'_1) - \\ - 242\,325 (f'_4 - f'_2)]\}, \quad s = \frac{3h^{15}}{200\,200}.$$

Степень точности равна 13.

$$14. \int_a^{a+6h} f(x) dx \approx \frac{h}{385\,000} \{144\,341 (f_0 + f_6) + 377\,784 (f_1 + f_5) + 475\,875 (f_2 + f_4) + \\ + 314\,000 f_3 - 60h [259 (f'_6 - f'_0) - 1134 (f'_5 - f'_1)]\}, \quad s = \frac{1077h^{13}}{308\,308\,000}.$$

Степень точности равна 11.

$$15. \int_a^{a+6h} f(x) dx \approx \frac{h}{7000} [3149 (f_0 + f_6) + 7776 (f_1 + f_5) + 6075 (f_2 + f_4) + 8000 f_3 - \\ - 420h (f'_6 - f'_0)], \quad s = \frac{9h^{11}}{77\,000}.$$

Степень точности равна 9.

$$16. \int_a^{a+6h} f(x) dx \approx \frac{h}{7000} \{1317 (f_0 + f_6) + 4608 (f_1 + f_5) + 15\,075 (f_2 + f_4) + \\ + 60h [(f'_6 - f'_0) + 72 (f'_5 - f'_1)]\}, \quad s = -\frac{157h^{11}}{539\,000}.$$

Степень точности равна 9.

$$17. \int_a^{a+6h} f(x) dx \approx \frac{h}{8750} \{5482 (f_0 + f_6) + 12\,393 (f_1 + f_5) + 16\,750 f_3 - 15h [62 (f'_6 - \\ - f'_0) + 243 (f'_5 - f'_1)]\}, \quad s = \frac{423h^{11}}{1\,078\,000}.$$

Степень точности равна 9.

$$18. \int_a^{a+6h} f(x) dx \approx \frac{1}{875} [217 (f_0 + f_6) + 1458 (f_1 + f_5) + 1900 f_3 + 15h (f'_6 - f'_0)], \\ s = -\frac{81h^9}{9800}.$$

Степень точности равна 7.

$$19. \int_a^{a+6h} f(x) dx \approx \frac{h}{7000} [4719 (f_0 + f_6) + 3456 (f_1 + f_5) + 12\,825 (f_2 + f_4) - \\ - 1020h (f'_6 - f'_0)], \quad s = \frac{9h^9}{98}.$$

Степень точности равна 7.

## ГЛАВА 3

## ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ, ИМЕЮЩИЕ НАИВЫСШУЮ СТЕПЕНЬ ТОЧНОСТИ

## § 1. Вычисление интеграла по значениям функции

В настоящей главе будут рассматриваться правила приближенного интегрирования, имеющие наивысшую алгебраическую степень точности. Мы начнем с простейшего случая, имеющего, по-видимому, наибольшее значение для приложений, когда интеграл вычисляется при помощи нескольких значений функции. Тогда квадратурная формула имеет вид

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (3.1.1)$$

Вес  $p(x)$  считается таким, что его произведение на многочлен любой степени есть интегрируемая функция на  $[a, b]$  и, кроме того,  $\int_a^b |p(x)| dx > 0$ .

Формула содержит  $2n$  параметров  $A_k$  и  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Выбором их можно рассчитывать сделать равенство точным для всяких многочленов, имеющих степень не выше  $2n - 1$ . По абсциссам  $x_k$  построим многочлен

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n. \quad (3.1.2)$$

Чтобы равенство (3.1.1) имело указанную выше степень точности, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1. Формула (3.1.1) — интерполяционная, т. е. коэффициенты ее имеют значения

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} dx. \quad (3.1.3)$$

2. Многочлен  $\omega(x)$  ортогонален на  $[a, b]$  по весу  $p(x)$  ко всякому многочлену  $Q(x)$  степени, меньшей  $n$ :

$$\int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx = 0. \quad (3.1.4)$$

В этой теореме остается открытым вопрос о существовании многочлена  $\omega(x)$ , выполняющего условие (3.1.4), и его единственности, так же как и вопрос о распределении корней  $\omega(x)$  в комплексной плоскости. В частном случае, особенно важно для приложений, когда  $p(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ , на эти вопросы можно дать простой ответ:

Если  $p(x) \geq 0$ , то многочлен  $\omega(x)$  вида (3.1.2), удовлетворяющий условию ортогональности (3.1.4), существует для любого  $n$ . Такой многочлен единственный, и корни  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) его действительны, различны и лежат внутри отрезка  $[a, b]$ . Поэтому для знакопостоянной весовой функции  $p(x)$  квадратурную формулу (3.1.1),

верную для многочленов степени  $2n - 1$ , всегда можно построить и при этом единственным способом. Кроме того,  $2n - 1$  будет наивысшей степенью точности (3.1.1), так как ни при каких  $A_k$  и  $x_k$  формула не может быть точной для всех многочленов степени  $2n$ .

В первой главе мы обращали внимание на желательность того, чтобы сумма модулей коэффициентов квадратурной формулы была по возможности малой. Для формулы вида (3.1.1), если она точна для  $f \equiv 1$ , коэффициенты  $A_k$  подчинены условию

$\sum_{k=1}^n A_k = \int_a^b p \, dx$ , и поэтому сумма модулей  $\sum_{k=1}^n |A_k|$  будет иметь наименьшее значение в том и только в том случае, когда все  $A_k$  будут иметь одинаковые знаки.

Если (3.1.1) имеет наивысшую степень точности  $2n - 1$ , то для коэффициентов ее  $A_k$  верно следующее равенство:

$$A_k = [\omega'(x_k)]^{-2} \int_a^b p(x) \omega^2(x) (x - x_k)^{-2} dx,$$

из которого следует, что при  $p(x) \geq 0$  все  $A_k$  будут положительны \*).

Рассмотрим погрешность формулы (3.1.1):  $R_n(f) = \int_a^b p f \, dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ .

Простейшими представлениями для  $R_n(f)$  являются следующие.

Если (3.1.1) верно для всех многочленов степени  $2n - 1$ ,  $f$  имеет непрерывную производную порядка  $2n$  и интеграл  $\int_a^b p f \, dx$  сходится, то верно равенство

$$R_n(f) = (2n!)^{-1} \int_a^b p(x) \omega^2(x) f^{(2n)}(\xi) \, dx, \quad (3.1.5)$$

где  $\xi$  есть некоторая точка на  $[a, b]$ , зависящая от  $x$ . Если же, кроме того,  $p(x)$  сохраняет свой знак на  $[a, b]$ , то существует такая точка  $\eta \in [a, b]$ , что

$$R_n(f) = f^{(2n)}(\eta) (2n!)^{-1} \int_a^b p(x) \omega^2(x) \, dx.$$

Равенства (3.1.1), точные для многочленов степени  $2n - 1$ , называют квадратурными формулами гауссова типа. Такое название принято в память того, что формула этого вида впервые была построена Гауссом для случая постоянной весовой функции.

Оказалось, что квадратурные процессы такого типа имеют весьма широкую область сходимости. Если  $p(x) \geq 0$ , отрезок  $[a, b]$  конечный и равенство (3.1.1) имеет наивысшую алгебраическую степень точности  $2n - 1$ , то погрешность  $R_n(f)$  будет стремиться к нулю при неограниченном возрастании  $n$  для всякой ограниченной функции  $f$ , для которой имеет смысл по Риману интеграл, стоящий в левой части равенства.

\*) При  $p(x) \geq 0$  для положительности  $A_k$  достаточно предположить, что равенство (3.1.1) точно для всех многочленов степени  $2n - 3$ .

## § 2. Формулы частного вида

Ниже дано описание квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности частного вида. Весовые функции в них избраны так, чтобы при помощи соответствующих формул можно было вычислять многие часто встречающиеся в приложениях интегралы.

I. Постоянная весовая функция  $p(x) = 1$  приводит к формуле Гаусса. Квадратурные формулы с таким весом наилучшую точность дают, как правило, в том случае, когда интегрируемая функция не имеет особенностей на отрезке интегрирования и обладает высоким порядком гладкости. Отрезок интегрирования предполагается конечным. Линейным преобразованием независимой переменной его всегда можно привести к  $[-1, 1]$ :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (3.2.1)$$

Степень точности равна  $2n - 1$ . Систему многочленов, ортогональную на  $[-1, 1]$  с постоянным весом, образуют многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Абсциссы  $x_k$  в формуле (3.2.1) являются нулями многочлена  $P_n$  степени  $n$ :  $P_n(x_k) = 0$

и коэффициенты  $A_k$  имеют значения  $A_k = \frac{2}{(1 - x_k^2) [P_n'(x_k)]^2}$  остаточному члену

$R(f)$  формулы Гаусса может быть придан следующий вид, если  $f$  имеет производную порядка  $2n$ , непрерывную на  $[-1, 1]$ :

$$R(f) = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!} \left[ \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right]^2 f^{(2n)}(\eta), \quad -1 < \eta < 1.$$

II. Весовая функция Якоби  $p(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta$  позволяет учитывать степенные особенности интегрируемой функции на концах отрезка интегрирования. При записи соответствующей квадратурной формулы, чтобы воспользоваться привычной записью многочленов Якоби, промежуток интегрирования приводят к  $[-1, 1]$  и формулу берут в виде

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f) \quad (\alpha, \beta > -1). \quad (3.2.2)$$

Степень точности ее  $2n - 1$ . Ортогональными на  $[-1, 1]$  с весом  $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  являются многочлены Якоби

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}].$$

Абсциссы  $x_k$  в (3.2.2) есть корни  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , коэффициенты же будут следующими:

$$A_k = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1) (1-x_k^2) [P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k)]^2}. \quad (3.2.3)$$

Остаточный член  $R(f)$  формулы представим в виде

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta) 2^{\alpha+\beta+2n+1} n! \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1) \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{(2n)! (\alpha+\beta+2n+1) \Gamma^2(\alpha+\beta+2n+1)}, \quad -1 < \eta < 1.$$

Квадратурная формула (3.2.2) содержит два параметра  $\alpha$  и  $\beta$  и из нее могут быть получены многие специализированные формулы, соответствующие наиболее распространенным видам степенных особенностей. Некоторые из них будут отмечены немного ниже. Предварительно же мы сделаем замечание о составлении таблиц коэффициентов  $A_k$  и абсцисс  $x_k$ , соответствующих этим частным случаям. В первую очередь, несомненно, интересен случай, когда интегрируемая функция имеет особенность только на одном из концов отрезка  $[-1, 1]$ , что отвечает либо  $\alpha = 0$ , либо  $\beta = 0$ .

Более общий случай, когда функция имеет особенности на обоих концах  $+1$  и  $-1$ , принципиально говоря, приводится к предыдущему, если отрезок интегрирования  $[-1, +1]$  разделить на два отрезка, например,  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$ . Но необходи-

мо принять во внимание, что если мы каждый из интегралов  $\int_{-1}^0$  и  $\int_0^1$  вычислим, взяв в квадратурной формуле по  $n$  точек, то, вообще говоря, мы получим точность меньшую,

чем если бы мы вычислили интеграл  $\int_{-1}^1$  по всему отрезку, взяв  $2n$  точек. Причина

этого почти очевидна. При вычислении интегралов по частичным отрезкам мы приближенно заменяем функцию  $f$  на каждом отрезке многочленом степени  $2n-1$ .

Когда же мы вычисляем интеграл  $\int_{-1}^1$  с  $2n$  точками, мы заменяем  $f$  на  $[-1, 1]$  мно-

гочленом степени  $4n-1$ , и эта последняя операция замены будет, как правило, более точной, чем каждая из двух предыдущих. Поэтому деление отрезка  $[-1, 1]$  на две части при сохранении общего числа точек, в которых вычисляются значения  $f$ , может быть связано с некоторой потерей точности. Наряду с таблицами, предусматривающими особенность интегрируемой функции только на одном конце отрезка  $[-1, 1]$ , в практике вычислений полезными будут также и менее часто применимые таблицы для функций, имеющих особенности на обоих концах  $-1$  и  $+1$ .

1. При  $\alpha = \beta = 0$  равенство (3.2.2) совпадает с формулой Гаусса (3.2.1).

2. Для  $\alpha = \beta = -1/2$  весовая функция есть  $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$  и соответствующие многочлены Якоби только постоянным множителем будут отличаться от многочленов Чебышева первого рода:

$$P_n^{(-0,5; -0,5)}(x) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1} (n-1)! n!} T_n(x).$$

В этом частном случае формула (3.2.2) будет иметь равные коэффициенты  $A_k$ :

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) + R_n, \quad x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad (3.2.4)$$

$$R_n = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

3. Пусть  $\alpha = \beta = 1/2$  и  $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ . Многочлен Якоби  $P_n^{(0,5; 0,5)}(x)$  постоянным множителем отличается от многочлена Чебышева второго рода:

$$P_n^{(0,5; 0,5)}(x) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n! (n+1)!} \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

корни которого суть  $x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Квадратурная формула (3.2.2) здесь имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx &= \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos \frac{k\pi}{n+1}\right) + R_n, \\ R_n &= \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, \quad -1 \leq \xi \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

4. При  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = -0,5$  и  $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  многочлены Якоби  $P_n^{(0,5; -0,5)}(x)$ , как и в обоих предшествующих случаях, имеют простое выражение через тригонометрические функции:

$$P_n^{(0,5; -0,5)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \theta}{\sin \frac{1}{2} \theta}, \quad x = \cos \theta.$$

Квадратурная формула (3.2.2) будет следующей:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x) dx &= \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} f\left(\cos \frac{2k\pi}{2n+1}\right) + R_n, \\ R_n &= \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, \quad -1 \leq \xi \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.6)$$

5. Интегралы вида  $\int_0^R r^k F(r) dr$  встречаются при вычислении кратных интегралов в полярных координатах. В случае  $k = 1$  интеграл  $\int_0^R r F(r) dr$  связан с вычислением двойного интеграла  $\iint_D f(r, \varphi) r dr d\varphi$  по плоской области. В случае  $k = 2$   $\int_0^R r^2 F(r) dr$  связан с интегрированием в шаровых координатах в трехмерном пространстве  $\iiint_D f(r, \varphi, \theta) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$  и т. д.

При помощи подстановки  $r = R \frac{1-x}{2}$  рассматриваемый интеграл приводится к частному виду (3.2.2), отвечающему значениям параметров  $\alpha = k$  и  $\beta = 0$ :

$$\int_0^R r^k F(r) dr = \left(\frac{R}{2}\right)^{k+1} \int_{-1}^1 (1-x)^k f(x) dx, \quad f(x) = F(r).$$

6. Как известно,  $n$ -кратное неопределенное интегрирование, то есть решение дифференциального уравнения  $y^{(n)} = f(x)$ , при некоторых начальных условиях приводится к нахождению значений многочлена и к вычислению интеграла

$\int_0^x (x-t)^n f(t) dt$ . Подстановкой  $t = x \frac{1+u}{2}$  последний преобразуется к форме

$(x/2)^{n+1} \int_{-1}^1 (1-u)^n \varphi(u) du$ ,  $\varphi(u) = f(t)$ , которая является частным случаем (3.2.2)

для  $\alpha = n$  и  $\beta = 0$ .

7. В приложениях встречаются интегралы по полуоси  $\int_0^{\infty} F(x) dx$ , в которых интегрируемая функция имеет степенную особенность в точке  $x=0$  и при  $x \rightarrow \infty$  убывает так же быстро, как некоторая степень  $\frac{1}{x}$ .  $F(x)$  часто можно предста-

вить в форме  $F(x) = \frac{x^\alpha}{(1+x)^\rho} \varphi(x)$ , где  $\rho > \alpha + 1$ ,  $\varphi(x)$  непрерывна при  $0 \leq x < \infty$

и имеет конечный предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \varphi(\infty)$ . В интеграле  $\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x)^\rho} \varphi(x) dx$  доста-

точно выполнить замену  $x = \frac{1-t}{1+t}$ , чтобы привести его к виду

$$2^{1-p} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^{p-\alpha-2} f(t) dt, \quad f(t) = \varphi(x),$$

являющемуся частным случаем (3.2.2) для  $\beta = p - \alpha - 2$ .

III. Будем иметь в виду задачу вычисления интеграла по полупрямой  $\int_0^{\infty} F(x) dx$ .

Функция  $F(x)$  считается непрерывной при  $0 < x < \infty$ , могущей иметь степенную особенность в точке  $x=0$  и убывающей для  $x \rightarrow \infty$  столь быстро, чтобы была обеспечена абсолютная сходимость интеграла. Когда  $F(x)$  убывает при неограниченном росте  $x$  со скоростью стремления к нулю степенной функции, то, как отмечалось несколькими строками выше, часто достаточно выполнить замену переменной интегрирования, чтобы привести интеграл к виду (3.2.2) и затем для вычислений воспользоваться квадратурной формулой с весом Якоби. Следующим по значению для приложений будет случай, когда  $F(x)$  убывает при росте  $x$  как некоторая показательная функция и представима в виде произведения  $F(x) = \exp(-\rho x^\delta) \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  возрастает настолько медленнее, чем убывает  $\exp(-\rho x^\delta)$ , что обеспечивается достаточно быстрое стремление  $F(x)$  к нулю. Показательный множитель  $\exp(-\rho x^\delta)$ , опреде-

ляющий поведение  $F$  при больших  $x$ , содержит параметры  $p$  и  $s$ . Чтобы освободиться от них и привести этот множитель к простейшему виду, обычно делают замену аргумента  $px^s = t$  и рассматривают интеграл в следующей канонической форме с весовой функцией Чебышева — Лягерра  $p(x) = x^s e^{-x}$ :  $\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx$ . Многочленами, ортогональными на  $[0, \infty)$  с весом  $x^s e^{-x}$ , являются многочлены Чебышева — Лягерра

$$L_n^{(s)}(x) = (-1)^n x^{-s} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{s+n} e^{-x}).$$

В квадратурной формуле наивысшей алгебраической степени точности

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n \quad (3.2.7)$$

абсциссы  $x_k$  являются корнями многочлена  $L_n^{(s)}$ :  $L_n^{(s)}(x_k) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и

$$A_k = \frac{n! \Gamma(s+n+1)}{x_k [L_n^{(s)'}(x_k)]^2},$$

$$R_n = \frac{n! \Gamma(s+n+1)}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad 0 < \xi < \infty.$$

Для всякой функции  $f(x)$ , непрерывной на полуоси  $[0, \infty)$  и при больших  $x$  удовлетворяющей следующему неравенству, ограничивающему скорость роста  $f(x)$ :  $|f(x)| \leq \frac{M}{x^{1+s+\varepsilon}} e^x$ , где  $\varepsilon > 0$ ,  $M > 0$ , квадратурный процесс (3.2.7) будет сходиться:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx.$$

Быстрота сходимости зависит от свойств функции  $f(x)$ . Если  $f(x)$  — ограниченная функция или даже стремящаяся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , то сходимость может стать настолько медленной, что для получения нужной точности необходимо будет взять  $n$  весьма большим, что сильно затрудняет применение (3.2.7). Причину затруднений, если пользоваться неточными наглядными терминами, легко можно указать. Равенство (3.2.7) в силу принципа, на котором оно построено, может дать удовлетворительную точность для функций  $f$ , которые допускают хорошее по точности приближение при помощи многочлена невысокой степени на отрезке вида  $[0, l]$  достаточно большой длины  $l$ , где вес  $x^s e^{-x}$  не очень близок к нулю.

Каждый алгебраический многочлен степени выше нулевой неограниченно возрастает при увеличении  $x$ . Поэтому многочлены, наверное, не будут благоприятным орудием для приближения ограниченных или стремящихся к нулю функций на «больших» отрезках  $[0, l]$ , что и вызывает медленную сходимость квадратурного процесса (3.2.7).

Чтобы получить правило интегрирования, имеющее лучшую точность и более быструю сходимость для указанных функций, следовало исходить не из системы степеней  $x$ , а воспользоваться приближением  $f(x)$  рациональными функциями, ограниченными на  $[0, \infty)$ . Пусть рассматриваются функции  $f(x)$ , поведение которых при



больших  $x$  достаточно точно характеризуется следующим рядом, который может быть расходящимся и иметь лишь асимптотический характер:

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{1+x} + \frac{a_2}{(1+x)^2} + \dots$$

В этом случае параметры  $x_k$  и  $A_k$  квадратурной формулы

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

естественно выбрать так, чтобы равенство было точным для  $2n$  рациональных функций  $(1+x)^{-k}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2n-1$ ). В четвертой части книги приведены небольшие таблицы  $x_k$  и  $A_k$  для такой формулы при двух значениях показателя  $s = 0, -1/2$  (табл. 7).

IV. Вычисление интеграла по всей числовой оси  $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$  очевидным образом может быть приведено к вычислению двух интегралов по полуоси  $[0, \infty)$ . Так поступают обычно в том случае, когда функция  $F(x)$  непрерывна на всей оси и при  $x \rightarrow \pm \infty$  убывает как некоторая степень  $\frac{1}{x}$ . Каждый из интегралов  $\int_0^{\infty} F(x) dx$  и

$\int_0^{\infty} F(-x) dx$  или их сумму  $\int_0^{\infty} [F(x) + F(-x)] dx$ , например, при помощи преобразования  $t = \frac{1}{1+x}$  приводят к интегралу с весом Якоби, как это было указано при рассмотрении способов вычисления интеграла по полуоси. Для приложений в первую очередь представляет интерес тот случай, когда функция  $F$  при удалении  $x$  на бесконечность будет убывать как показательная функция с четным отрицательным показателем степени и будет представима в форме  $F(x) = e^{-ax^{2p}} f(x)$ , где  $f$  может

возрастать медленнее, чем убывает  $e^{-ax^{2p}}$ . Множитель  $e^{-ax^{2p}}$  обычно приводят к простейшему виду  $e^{-x^2}$  и рассматривают правило квадратуры в такой канонической форме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n. \quad (3.2.8)$$

Ортогональными на оси  $(-\infty, \infty)$  многочленами являются многочлены Чебышева—Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Чтобы формула (3.2.8) имела наивысшую степень точности  $2n-1$ , абсциссы  $x_k$  в ней должны быть корнями  $H_n$ :  $H_n(x_k) = 0$ , и  $A_k$  иметь значения

$$A_k = 2^{n+1} n! \sqrt{\pi} [H'_n(x_k)]^{-2} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Когда  $f$  имеет непрерывную производную на  $(-\infty, \infty)$  порядка  $2n$ , то

$$R_n = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi).$$

При  $n \rightarrow \infty$  квадратурный процесс (3.2.8) сходится в весьма широком классе случаев: если  $f$  непрерывна на числовой оси и при больших  $|x|$  удовлетворяет условию  $|f(x)| \leq A e^{\alpha x} |x|^{-1-\varepsilon}$  ( $\varepsilon > 0$ ), то для нее  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ .

V. Выше рассматривались правила приближенных квадратур, отвечающие классическим весовым функциям — Якоби, Лягерра и Эрмита. Они могут оказать помощь при интегрировании в весьма большом числе случаев, но далеко не исчерпывают все типы интегралов, с которыми приходится иметь дело в приложениях. Это обстоятельство побудило вычислить абсциссы  $x_k$  и коэффициенты  $A_k$  для других весовых функций  $\rho(x)$ , позволяющих учитывать особенности интегрируемой функции иного вида, чем рассмотренные выше. Были составлены, например, краткие таблицы  $x_k$  и  $A_k$  для веса вида  $\rho(x) = x^\alpha \lg \frac{1}{x}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), который имеет логарифмическую и степенную особенность на одном из концов отрезка, или веса, имеющего особенности логарифмического вида на обоих концах этого отрезка (табл. 5). Рассматривался также случай, когда вес  $\rho(x)$  имеет степенную особенность в середине отрезка интегрирования \*).

VI. При построении квадратурной формулы наивысшей степени точности (3.1.1) функция  $f(x)$  считалась произвольной достаточно гладкой на  $[a, b]$ .

В некоторых случаях вычислитель обладает дополнительными сведениями, которые позволяют улучшить процесс вычисления и получить нужную точность с меньшей затратой труда. Как пример этого, рассмотрим нередко встречающуюся задачу

интегрирования четных и нечетных функций. Возьмем интеграл  $I = \int_0^1 f(x) dx$ . Он принадлежит к интегралам с постоянной весовой функцией и может быть вычислен при помощи формулы Гаусса. Пусть дополнительно будет известно, что  $f(x)$  есть четная достаточно гладкая функция. Тогда ее можно рассматривать как функцию от  $x^2$ :  $f(x) = \varphi(x^2)$ . Замена переменной  $x^2 = t$  приведет вычисляемый интеграл  $I$  к следующей форме:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \varphi(t) dt.$$

Здесь, очевидно, более рационально воспользоваться правилом квадратуры с весом Якоби  $\rho(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ . Если применить для вычислений квадратурную формулу с  $n$  узлами, то она будет верной в переменной  $x$  для всяких четных многочленов степени  $4n - 2$ .

Аналогично, если будет известно, что в интеграле  $I$  функция  $f(x)$  является гладкой нечетной функцией, то  $f(x)$  представима в виде

$$f(x) = x\varphi(x^2).$$

Прежняя замена  $x^2 = t$  преобразует интеграл  $I$  к виду

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(t) dt.$$

\*) См., например, И. П. Натансон [2].

Применение формулы Гаусса с  $n$  узлами ко второму интегралу приведет к квадратурной формуле, которая имеет степень точности  $4n - 1$  для нечетных многочленов  $f(x)$ , и даст, как правило, лучшую точность, чем применение той же формулы к исходному интегралу  $\int_0^1 f(x) dx$ , так как степень точности ее в этом случае будет  $2n - 1$ .

### § 3. Правила вычисления интеграла по значениям функции и производных

Правила приближенных квадратур наивысшей алгебраической степени точности, позволяющие найти значение интеграла по нескольким значениям функции и производных от нее, изучались, как и в интерполяционных квадратурах, преимущественно для частного случая кратных узлов\*), когда значения функции и производных задаются в одних и тех же точках:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i-1} A_{ij} f^{(j)}(x_i), \quad (3.3.1)$$

$$a \leq x_i \leq b, \quad x_i \neq x_j, \quad i \neq j.$$

Вес  $p(x)$  считается неотрицательной функцией и такой, что произведение  $p(x)$  на многочлен любой степени будет интегрируемым на  $[a, b]$ . Если в правую часть (3.3.1) входят только значения функции  $f(x)$  и формула имеет вид (3.1.1), то все  $k_i$  равны единице.

Каковы бы ни были  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), выбором коэффициентов  $A_{ij}$  всегда можно сделать равенство (3.3.1) точным для многочленов степени  $n$ , где  $n = k_1 + \dots + k_m - 1$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы правило (3.3.1) было интерполяционным. Этим условием определяются его коэффициенты  $A_{ij}$ . Остаются еще произвольными  $m$  абсцисс  $x_i$ . Вопрос о возможности специального выбора их, при котором повышается степень точности равенства (3.3.1), связан с узлами  $x_i$  формулы, имеющими нечетные кратности  $k_i$ . Пусть таких узлов будет  $p$ , и пусть это будут узлы  $x_1, x_2, \dots, x_p$ . Остальные  $m - p$  узлов  $x_{p+1}, \dots, x_m$  будут иметь четные кратности.

Введем многочлен  $\omega(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i)^{k_i}$ , характеризующий расположение узлов и их кратности. Можно легко показать, что ни при каком расположении  $x_i$  правило интегрирования (3.3.1) не может быть точным для всех многочленов степени  $n + p + 1$ , и для того, чтобы оно было верным для многочленов степени  $n + p$ , необходимо и достаточно выполнение двух условий: 1) равенство (3.3.1) должно быть интерполяционным и 2) для любого многочлена  $Q(x)$ , имеющего степень не больше  $p - 1$ , должно выполняться равенство

$$\int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx = 0. \quad (3.3.2)$$

\*) Роровісіу [1], Стапсу [3, 8, 9], Л. Чакалов [1].

Вопрос построения правила (3.3.1), имеющего наивысшую степень точности  $n + p$ , приводится к возможности такого выбора узлов  $x_i$ , при котором выполняется условие ортогональности (3.3.2). Достигнуть же этого можно только за счет выбора узлов  $x_i$  ( $i \leq p$ ) с нечетными кратностями.

Изберем узлы  $x_i$  ( $i > p$ ), имеющие четные кратности, произвольно на действительной оси и фиксируем их. Они могут быть взяты даже вне  $[a, b]$ . Рассмотрим теперь узлы с нечетными кратностями и выберем какой-либо порядок их расположения \*) на  $[a, b]$ . Как бы ни были фиксированы  $x_i$  ( $i > p$ ) и каким бы ни был взят порядок  $x_i$  ( $i \leq p$ ), последние узлы всегда могут быть избраны так, чтобы выполнялось условие (3.3.2). Все  $x_i$  ( $i \leq p$ ) будут различны между собой и будут лежать внутри  $[a, b]$ . Если при этом окажется, что  $x_i$  ( $i \leq p$ ) будут отличными от фиксированных узлов  $x_i$  ( $i > p$ ) четной кратности, то мы сможем построить правило (3.3.1) наивысшей степени точности  $n + p$ .

Но если условиться, что при совпадении в (3.3.1) двух узлов их кратности складываются\*\*), то правило (3.3.1) наивысшей степени точности  $n + p$  может быть построено, какими бы ни были  $x_i$  ( $i \leq p$ ), лишь бы было выполнено (3.3.2).

Каждому выбору  $x_i$  ( $i > p$ ) и каждому порядку расположения узлов нечетной кратности на  $[a, b]$  будет отвечать по меньшей мере одна формула (3.3.1) степени точности  $n + p$ . Вопрос об условиях единственности такой формулы в общем виде еще не имеет решения.

В частном случае\*\*\*), когда все узлы имеют нечетные и одинаковые кратности, перестановки узлов  $x_i$  не изменяют вида формулы и будет существовать лишь одна квадратурная формула наивысшей степени точности.

## ГЛАВА 4

### ПРАВИЛА КВАДРАТУР С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАРАНЕЕ ЗАДАННЫМИ УЗЛАМИ

#### § 1. Некоторые общие результаты

Если для вычисления интеграла можно пользоваться только значениями интегрируемой функции, то правило интегрирования, которое сейчас имеется в виду, можно в достаточно общей форме записать так:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \sum_{j=1}^m B_j f(a_j). \quad (4.1.1)$$

\*) Кратности  $k_i$  узлов считаются закрепленными за узлами и перестановка узлов есть перестановка пар чисел  $(x_i, k_i)$ .

\*\*) Если окажется, например, что  $x_1$  совпадает с  $x_{p+1}$ , то в правой части (3.3.1)

две суммы  $\sum_{j=0}^{k_1-1} A_{1j} f^{(j)}(x_1)$  и  $\sum_{j=0}^{k_{p+1}-1} A_{p+1,j} f^{(j)}(x_{p+1})$  должны быть объединены в

$$\sum_{j=0}^{k_1+k_{p+1}-1} A_{1j} f^{(j)}(x_1).$$

\*\*\*), Тиган [1].

Здесь узлы  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) задаются заранее. Остальные параметры  $A_k, x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) и  $B_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), число которых равно  $2n + m$ , подлежат определению.

Правила такого вида могут быть полезными, например, для решения граничных и многоточечных задач для дифференциальных уравнений или для интегрирования произвольных функций  $f$ , когда их значения  $f(a_j)$  в узлах  $a_j$  находятся просто.

В рамках настоящего параграфа считается, если не оговорены другие условия, что вес  $p(x)$  может быть любой функцией, произведение которой на всякую положительную степень аргумента является интегрируемым.

$2n + m$  параметров формулы можно пытаться выбрать так, чтобы равенство (4.1.1) выполнялось точно для всевозможных многочленов степени  $2n + m - 1$ . Чтобы сформулировать известные в этом направлении результаты, введем два следующих многочлена, связанных с расположением фиксированных узлов  $a_j$  и разыскиваемых узлов  $x_i$ :

$$\omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n) = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n,$$

$$\alpha(x) = (x - a_1) \dots (x - a_m) = x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m.$$

Для того чтобы правило (4.1.1) было точным для всех многочленов степени  $2n + m - 1$ , необходимо и достаточно выполнение двух требований:

1. Правило (4.1.1) является интерполяционным:

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x) \alpha(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k) \alpha(x_k)} dx, \quad B_j = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x) \alpha(x)}{(x - a_j) \omega(a_j) \alpha'(a_j)} dx. \quad (4.1.2)$$

2. Многочлен  $\omega(x)$  ортогонален на  $[a, b]$  по весу  $p(x) \alpha(x)$  ко всякому многочлену  $Q(x)$  степени меньшей  $n$ :

$$\int_a^b p(x) \alpha(x) \omega(x) Q(x) dx = 0. \quad (4.1.3)$$

Возможность построения равенства (4.1.1), верного для многочленов степени  $2n + m - 1$ , равносильна соблюдению двух следующих условий:

а) существует многочлен  $\omega(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots$ , обладающий свойством ортогональности (4.1.3),

б) корни многочлена  $\omega(x)$  лежат на  $[a, b]$ , различны между собой и отличны от фиксированных узлов  $a_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Существование  $\omega(x)$  можно гарантировать в том случае, когда произведение  $p(x) \alpha(x)$  сохраняет знак на отрезке  $[a, b]$ .

Допустим, что весовая функция  $p(x)$  такова, что для нее существует система многочленов  $\tilde{P}_k(x) = x^k + \dots$ , ортогональная на  $[a, b]$ . Предположим, кроме того, что существует единственный многочлен  $\omega(x)$ , выполняющий условие ортогональности (4.1.3). Можно показать, что  $\omega(x)$  имеет следующее выражение через многочлены  $\tilde{P}_k(x)$ :

$$\alpha(x) \omega(x) = \Delta^{-1} \begin{vmatrix} \tilde{P}_{n+m}(x) & \tilde{P}_{n+m}(a_1) & \dots & \tilde{P}_{n+m}(a_m) \\ \tilde{P}_{n+m-1}(x) & \tilde{P}_{n+m-1}(a_1) & \dots & \tilde{P}_{n+m-1}(a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{P}_n(x) & \tilde{P}_n(a_1) & \dots & \tilde{P}_n(a_m) \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tilde{P}_{n+m-1}(a_1) & \dots & \tilde{P}_{n+m-1}(a_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{P}_n(a_1) & \dots & \tilde{P}_n(a_m) \end{vmatrix}.$$

Если равенство (4.1.1) верно для всех многочленов степени  $2n + m - 1$ , то остаточный член равенства может быть представлен в форме

$$R = \int_a^b p(x) \alpha(x) \omega^2(x) \frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!} dx \quad (a \leq \xi \leq b). \quad (4.1.4)$$

Когда произведение  $p(x) \alpha(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ ,  $2n + m - 1$  будет наивысшей степенью точности (4.1.1) и остатку может быть придан более простой вид:

$$R = \frac{f^{(2n+m)}(\eta)}{(2n+m)!} \int_a^b p(x) \alpha(x) \omega^2(x) dx \quad (a \leq \eta \leq b). \quad (4.1.5)$$

## § 2. Правила частного вида

Будем считать  $p(x) \geq 0$ . Чтобы  $p(x) \alpha(x)$  сохраняло знак на  $[a, b]$ , нужно, чтобы узлы  $a_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) не лежали внутри  $[a, b]$ . Если избежать построения квадратурных формул с узлами, лежащими вне  $[a, b]$ , то можно рассматривать лишь два случая: 1) когда берется только один фиксированный узел на одном из концов отрезка интегрирования и 2) когда берутся два фиксированных узла по одному в точках  $a$  и  $b$ .

Пусть  $m = 1$  и  $a_1 = a$ .

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx A_0 f(a) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (4.2.1)$$

Наивысшая степень точности равна  $2n$ . Абсциссы  $x_k$  являются корнями многочлена степени  $n$  из ортогональной на  $[a, b]$  по весу  $\rho(x) = (x-a)p(x)$  системы многочленов  $\Pi_n(x)$ :  $\Pi_n(x_k) = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Если  $P_s(x)$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) образуют ортогональную систему по весу  $p(x)$ , то

$$\Pi_s(x) = \frac{K_s}{x-a} [P_{s+1}(x) P_s(a) - P_{s+1}(a) P_s(x)].$$

Коэффициенты  $A_0$  и  $A_k$  положительны и имеют приведенные ниже значения. Приписи считается, что многочлены  $\Pi_n(x) = \alpha_n x^n + \dots$  нормированы:

$$A_0 = \Pi_n^{-1}(a) \int_a^b p(x) \Pi_n(x) dx,$$

$$A_k = - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n (x_k - a) \Pi_n'(x_k) \Pi_{n+1}(x_k)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1} (x_k - a) \Pi_n'(x_k) \Pi_{n-1}(x_k)}.$$

Погрешность равенства (4.2.1) есть

$$R = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} \int_a^b p(x)(x-a)\omega^2(x) dx = \frac{1}{\alpha_n^2} \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}.$$

Отметим две квадратурные формулы частного вида. В первой из них отрезок интегрирования приведен к  $[0, 1]$  и вес равен единице:

$$\int_0^1 f(x) dx = A_0 f(0) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n. \quad (4.2.2)$$

$P_n^{(0,1)}(2x_k - 1) = 0$ , где  $P_n^{(0,1)}(t)$  есть многочлен Якоби для отрезка  $-1 \leq t \leq 1$ ;

$$A_0 = \frac{1}{(n+1)^2},$$

$$A_k = \frac{1}{4x_k^2(1-x_k)[P_n^{(0,1)'}(2x_k-1)]^2}.$$

Значения  $x_k$  и  $A_k$  для  $n=1(1)8$  даны в таблице 9.

Вторая формула предназначена для интегрирования функций по полюси  $[0, \infty)$  с весом Лягерра:

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx = A_0 f(0) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n \quad (s > -1). \quad (4.2.3)$$

Степень точности равна  $2n$ . Узлы  $x_k$  суть нули многочлена Лягерра степени  $n$  индекса  $s+1$ :  $L_n^{(s+1)}(x_k) = 0$  ( $k=1, \dots, n$ ),

$$A_k = \frac{n! \Gamma(s+n+2)}{x_k^2 [L_n^{(s+1)'}(x_k)]^2}, \quad A_0 = \Gamma(s+1) - \sum_{k=1}^n A_k,$$

$$R_n = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} n! \Gamma(s+n+2).$$

Для  $s=0$  значения  $x_k$  и  $A_k$  формулы (4.2.3) при  $n=1(1)15$  приведены в табл. 10.

Обратимся теперь ко второму случаю, когда в квадратурной формуле берутся два фиксированных узла на концах отрезка интегрирования:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = Af(a) + Bf(b) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n. \quad (4.2.4)$$

Наивысшая степень точности равна  $2n+1$ . В этом случае  $\alpha(x) = (x-a)(x-b)$ . Абсциссы  $x_k$  есть корни многочлена  $\Pi_n(x)$  степени  $n$ , ортогонального на  $[a, b]$  по весу  $\rho(x) = (x-a)(x-b)p(x)$  ко всякому многочлену меньшей степени. Если,

как выше, многочлены  $P_k(x)$  ортогональны на  $[a, b]$  по весу  $p(x)$ , то

$$\Pi_n(x) = \frac{K_n}{(x-a)(x-b)} \begin{vmatrix} P_{n+2}(x) & P_{n+2}(a) & P_{n+2}(b) \\ P_{n+1}(x) & P_{n+1}(a) & P_{n+1}(b) \\ P_n(x) & P_n(a) & P_n(b) \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $A_k$  и остаток  $R(f)$  имеют следующие значения:

$$A_k = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1} \Pi'_n(x_k) \Pi_{n-1}(x_k) (x_k - a) (x_k - b)},$$

$$A = [\omega(a)(a-b)]^{-1} \int_a^b p(x)(x-b)\omega(x) dx,$$

$$B = [\omega(b)(b-a)]^{-1} \int_a^b p(x)(x-a)\omega(x) dx,$$

$$\omega(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n) = \frac{1}{\alpha_n} \Pi_n(x),$$

$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b p(x)(x-a)(x-b)\omega^2(x) dx.$$

Вычисление параметров формулы было сделано для случая постоянной весовой функции. Чтобы удобнее было воспользоваться свойством симметрии, отрезок интегрирования  $[a, b]$  приведен к  $[-1, 1]$ :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_0 [f(-1) + f(1)] + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f). \quad (4.2.5)$$

Здесь  $\alpha(x) = 1 - x^2$ . Многочлен  $\omega(x)$  ортогонален на  $[-1, 1]$  с весом  $1 - x^2$  ко всякому многочлену степени, меньшей  $n$ , и будет только численным множителем отличаться от якобиевого многочлена  $P_n^{(1,1)}(x)$ :

$$\omega(x) = \frac{2^n n! \Gamma(n+3)}{\Gamma(2n+3)} P_n^{(1,1)}(x).$$

Параметры формулы и остаток определяются следующими равенствами:

$$A_k = 8 \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{(1-x_k^2)^2 [P_n^{(1,1)}(x_k)]^2}, \quad A_0 = \frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

$$R_n(f) = \frac{8(n+1)}{(2n+3)(n+2)} \left[ \frac{2^n n! (n+2)!}{(2n+3)!} \right]^2 \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \quad (-1 < \eta < 1).$$

Численные значения  $A_k$ ,  $A_0$  и  $x_k$  при  $n = 1$  (1)15 даны в табл. 11.



### § 3. Вычисление интеграла по значениям функции и производных

В более общей задаче<sup>\*</sup>), когда для вычисления интеграла могут быть использованы не только значения функции  $f$ , но и значения производных от нее, был рассмотрен случай кратных узлов. Правило вычисления будет следующим:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{r_k-1} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + \sum_{v=1}^s \sum_{\mu=0}^{q_v-1} B_{v\mu} f^{(\mu)}(a_v) + R. \quad (4.3.1)$$

Точки  $a_v$  ( $v = 1, \dots, s$ ) фиксированы и могут быть расположены на оси  $x$  или в комплексной плоскости произвольным образом, однако так, чтобы многочлен  $\alpha(x) = (x - a_1)^{q_1} \dots (x - a_s)^{q_s}$  был действительным и сохранял знак на  $[a, b]$ . Каким бы ни были  $x_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ),  $A_{kj}$  и  $B_{v\mu}$  всегда можно выбрать так, чтобы правило (4.3.1) сделать точным для всевозможных многочленов степени

$$n = (r_1 + \dots + r_m) + (q_1 + \dots + q_s) - 1.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы это правило интегрирования было интерполяционным. Под этим подразумевается нижеследующее. Рассмотрим многочлен  $P(x)$  степени  $\leq n$ , удовлетворяющий условиям

$$P^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k) \quad \begin{cases} k = 1, \dots, m, \\ j = 0, 1, \dots, r_k - 1; \end{cases} \quad P^{(\mu)}(a_v) = f^{(\mu)}(a_v) \quad \begin{cases} v = 1, \dots, s, \\ \mu = 0, 1, \dots, q_v - 1. \end{cases}$$

Он, очевидно, может быть записан в виде

$$P(x) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{r_k-1} L_{kj}(x) f^{(j)}(x_k) + \sum_{v=1}^s \sum_{\mu=0}^{q_v-1} M_{v\mu}(x) f^{(\mu)}(a_v),$$

где  $L_{kj}(x)$  и  $M_{v\mu}(x)$  есть многочлены степени  $n$ .

Равенство (4.3.1) называется интерполяционным, если его коэффициенты имеют значения.

$$A_{kj} = \int_a^b p(x) L_{kj}(x) dx, \quad B_{v\mu} = \int_a^b p(x) M_{v\mu}(x) dx.$$

Дальнейшее увеличение степени точности может быть достигнуто только за счет специального выбора узлов  $x_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Пусть вес  $p(x)$  есть неотрицательная функция. Подобно тому, как это имело место в § 3 гл. 3 для равенства (3.3.1), узлы  $x_k$ , имеющие четную кратность  $r_k$ , в задаче увеличения степени точности являются бесполезными в том смысле, который будет выяснен несколькими строками ниже.

Будем считать, что такие узлы  $x_k$  выделены, абсциссам  $x_k$  приданы произвольные значения и они присоединены к фиксированным узлам  $a_v$ . После этого в первой сумме справа в (4.3.1) останутся только узлы  $x_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) с нечетной кратностью.

<sup>\*</sup>) См., например, Станси [9].

Наивысшая степень точности (4.3.1) равна  $n + m$ , и она достигается, если узлы  $x_k$  выбрать так, чтобы многочлен  $\omega(x) = (x - x_1)^{r_1} \dots (x - x_m)^{r_m}$  обладал следующим свойством ортогональности:

$$\int_a^b p(x) \alpha(x) \omega(x) Q(x) dx = 0, \quad (4.3.2)$$

где  $Q(x)$  есть любой многочлен степени  $< m$  и  $\alpha(x) = (x - a_1)^{q_1} \dots (x - a_s)^{q_s}$ . Можно показать, что каковы бы ни были узлы  $a_\nu$  (фиксированные заранее и присоединенные к ним узлы  $x_k$  четной кратности, задаваемые произвольно), существует многочлен  $\omega(x)$  указанного выше вида, для которого выполняется условие ортогональности (4.3.2). Такой многочлен может оказаться не единственным\*). Если при этом окажется, что корни\*\*)  $x_k$  многочлена  $\omega(x)$  отличны от узлов  $a_\nu$ , то формула (4.3.1), имеющая наивысшую степень точности  $n + m$ , может быть построена. Если же некоторые из  $x_k$  совпадут с  $a_\nu$ , то формула (4.3.1) в том виде, как она записана, со степенью точности  $n + m$  не существует. Вид правой части равенства должен быть тогда изменен. А именно, следует считать, что кратности совпадающих узлов  $x_k$  и  $a_\nu$  складываются. В таком измененном виде формула (4.3.1) всегда может быть построена.

Значения  $x_k$ ,  $A_{kj}$  и  $B_{\nu k}$  были найдены лишь в небольшом числе простых частных случаев, когда параметры эти могут быть получены в явном виде\*\*\*).

Ниже приведены три примера формул такого вида, в каждом из которых можно указать простые правила для вычисления абсцисс и коэффициентов при помощи таблиц, помещенных в последней части книги.

$$I. \quad \int_0^1 f(x) dx \approx C_0 f(0) + C_1 f'(0) + \sum_{k=1}^n B_k f(x_k). \quad (4.3.3)$$

Степень точности равна  $2n + 1$ . Сравним (4.3.3) с правилом интегрирования, имеющим наивысшую алгебраическую степень точности  $2n - 1$ :

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (4.3.4)$$

Значения  $x_k$  и  $A_k$  для этой формулы можно найти в табл. 2 при  $\alpha = 2$ .

Абсциссы  $x_k$  в обоих правилах (4.3.3) и (4.3.4) совпадают. Коэффициенты же  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $B_k$  вычисляются при помощи коэффициентов  $A_k$  посредством равенств

$$B_k x_k^2 = A_k \quad (k = 1, \dots, n), \quad C_0 + \sum_{k=1}^n B_k = 1, \quad C_1 + \sum_{k=1}^n x_k B_k = \frac{1}{2}.$$

$$II. \quad \int_0^\infty x^s e^{-x} f(x) dx \approx C_0 f(0) + C_1 f'(0) + \sum_{k=1}^n B_k f(x_k). \quad (4.3.5)$$

\* ) В случае, когда кратности  $r_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) одинаковы, многочлен  $\omega(x)$  единственный.

\*\* ) Они будут располагаться внутри  $[a, b]$ .

\*\*\* ) Станси [9].

Степень точности равна  $2n + 1$ . Если сравнить это правило с правилом наивысшей алгебраической степени точности  $2n - 1$  для интегрирования с весовой функцией Лягерра  $x^{s+2}e^{-x}$

$$\int_0^{\infty} x^{s+2} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (4.3.6)$$

то можно видеть, что  $x_k$  в (4.3.5) и (4.3.6) одинаковы, коэффициенты же в (4.3.5) могут быть найдены при помощи соотношений

$$B_k x_k^2 = A_k, \quad C_0 + \sum_{k=1}^n B_k = \Gamma(s+1), \quad C_1 + \sum_{k=1}^n x_k B_k = \Gamma(s+2).$$

Значения  $x_k$  и  $A_k$  формулы (4.3.6) для некоторых  $s$  приведены в табл. 6.

$$\text{III.} \quad \int_0^1 f(x) dx \approx C_0 [f(0) + f(1)] + C_1 [f'(1) - f'(0)] + \sum_{k=1}^n B_k f(x_k). \quad (4.3.7)$$

Степень точности равна  $2n + 3$ . Сравнение (4.3.7) с правилом наивысшей степени точности  $2n - 1$  для вычисления интеграла по отрезку  $[0, 1]$  с яковбеновой весовой функцией  $x^2(1-x)^2$

$$\int_0^1 x^2 (1-x)^2 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (4.3.8)$$

позволяет прийти к заключению, что  $x_k$  в (4.3.7) и (4.3.8) одинаковы и имеют место следующие равенства, позволяющие найти  $C_0$ ,  $C_1$  и  $B_k$ :

$$B_k x_k^2 (1-x_k)^2 = A_k, \quad C_0 + \sum_{k=1}^n B_k (1-x_k)^2 (1+2x_k) = \frac{1}{2},$$

$$C_1 + \sum_{k=1}^n B_k (1-x_k)^2 x_k = \frac{1}{12}.$$

Значения  $x_k$  и  $A_k$  приведены в табл. 4 при  $\alpha = 2$ .

## ГЛАВА 5

### КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С РАВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

#### § 1. Возможность построения формулы и нахождение ее узлов

Изучалась задача вычисления интеграла по нескольким значениям функции. В достаточно общем виде правило интегрирования может быть записано в следующей форме:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx C_n \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (5.1.1)$$

Весовая функция  $p(x)$  — любая, для которой произведение ее на многочлен произвольной степени является интегрируемым.

Формула (5.1.1) содержит  $n + 1$  параметров  $C_n$  и  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), и можно надеяться выбрать их так, чтобы равенство выполнялось точно для всех многочленов степени  $n$ .

Равенства (5.1.1), обладающие степенью точности, не меньшей  $n$ , называют формулами Чебышева.

Если потребовать, чтобы (5.1.1) было точным для многочлена нулевой степени  $f \equiv 1$ , то получится  $\int_a^b p(x) dx = nC_n$ , и условие  $\int_a^b p dx \neq 0$  поэтому является необ-

ходимым для возможности построения формулы Чебышева. Если не налагать на расположение  $x_k$  никаких ограничений и считать, что точки  $x_k$  могут лежать в любом месте комплексной плоскости, то указанное условие будет и достаточным для существования формулы Чебышева. Система уравнений для нахождения  $x_k$  получится, если потребовать, чтобы равенство (5.1.1) выполнялось для  $f = x^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$s_i = x_1^i + x_2^i + \dots + x_n^i = C_n^{-1} \int_a^b p x^i dx \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.1.2)$$

Вводят многочлен

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n,$$

имеющий  $x_i$  своими корнями. Уравнения (5.1.2) позволяют с помощью известных соотношений Ньютона между симметрическими функциями  $s_i$  и  $A_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) корней многочлена, найти единственным образом многочлен  $\omega(x)$  и построить, следовательно, формулу Чебышева (5.1.1).

Если же на узлы  $x_k$  наложить естественное в задаче интегрирования условие, чтобы все  $x_k$  принадлежали отрезку интегрирования  $[a, b]$ , то это условие будет выполняться не при всяком числе узлов  $n$  и не для всякой весовой функции  $p(x)$ .

Равенство (3.2.4), имеющее степень точности  $2n - 1$ , дает пример весовой функции  $p(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ), для которой формула Чебышева существует при всех значениях  $n$ . При вычислениях  $x_k$  для других весовых функций каждый раз случалось, что среди  $x_k$  оказывались комплексные или действительные, но лежащие вне  $[a, b]$ . Это обстоятельство заставило высказать не проверенную до настоящего времени гипотезу о том, что если формула Чебышева (5.1.1) с узлами, лежащими на  $[a, b]$ , существует для бесконечного числа значений  $n$ , то  $p(x)$  есть весовая функция Чебышева:  $p(x) = C[(x - a)(b - x)]^{-1/2}$ .

## § 2. Формулы частного вида

Для случая постоянной весовой функции, ввиду симметрии расположения узлов, формулу Чебышева обычно записывают в виде

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

Для  $n = 1(1)7, 9$  узлы  $x_k$  имеют приводимые ниже значения:

$$n = 1 \quad \omega(x) = x, \quad x_1 = 0;$$

$$n = 2 \quad \omega(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad x_2 = -x_1 = 3^{-\frac{1}{2}} = 0,57735 \ 02691;$$

$$n = 3 \quad \omega(x) = x^3 - \frac{1}{2}x, \quad x_3 = -x_1 = 2^{-\frac{1}{2}} = 0,70710 \ 67812, \quad x_2 = 0;$$

$$n = 4 \quad \omega(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45},$$

$$x_4 = -x_1 = 0,79465 \ 44723, \quad x_3 = -x_2 = 0,18759 \ 24741;$$

$$n = 5 \quad \omega(x) = x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{72}x,$$

$$x_5 = -x_1 = 0,83249 \ 74870, \quad x_4 = -x_2 = 0,37454 \ 14096, \quad x_3 = 0;$$

$$n = 6 \quad \omega(x) = x^6 - x^4 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{105},$$

$$x_6 = -x_1 = 0,86624 \ 68181,$$

$$x_5 = -x_2 = 0,42251 \ 86538,$$

$$x_4 = -x_3 = 0,26663 \ 54015;$$

$$n = 7 \quad \omega(x) = x^7 - \frac{7}{6}x^5 + \frac{119}{360}x^3 - \frac{149}{6480}x,$$

$$x_7 = -x_1 = 0,88386 \ 17008,$$

$$x_6 = -x_2 = 0,52965 \ 67753,$$

$$x_5 = -x_3 = 0,32391 \ 18105,$$

$$x_4 = 0;$$

$$n = 9 \quad \omega(x) = x^9 - \frac{3}{2}x^7 + \frac{27}{40}x^5 - \frac{57}{560}x^3 + \frac{53}{22400}x,$$

$$x_9 = -x_1 = 0,91158 \ 93007,$$

$$x_8 = -x_2 = 0,60101 \ 86554,$$

$$x_7 = -x_3 = 0,52876 \ 17831,$$

$$x_6 = -x_4 = 0,16790 \ 61842,$$

$$x_5 = 0.$$

При  $n = 8$  и  $n \geq 10$  среди  $x_k$  всегда будут существовать комплексные  $*$ ), и формула Чебышева с действительными узлами не может быть построена.

Для формулы Чебышева при весе Якоби  $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) и некоторых значениях  $\alpha$  и  $\beta$  была получена оценка значения  $n$ , начиная с которого среди узлов  $x_k$  будут обязательно существовать комплексные  $**$ ).

Формулы Чебышева для интегралов по неограниченной области рассматривались для классических весовых функций Эрмита и Лягерра  $***$ ).

$*$ ) См., например, С. Н. Бернштейн [2], [6].

$**$ ) Н. И. Ахиезер [1].

$***$ ) Н. Е. Salzer [12].

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

$$n = 1 \quad \omega(x) = x, \quad x_1 = 0;$$

$$n = 2 \quad \omega(x) = x^2 - \frac{1}{2}, \quad x_2 = -x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$n = 3 \quad \omega(x) = x^3 - \frac{3}{4}x, \quad x_3 = -x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad x_2 = 0.$$

При  $n \geq 4$  среди  $x_k$  обязательно существуют комплексные.

$$2. \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

$$n = 1 \quad \omega(x) = x - 1, \quad x_1 = 1;$$

$$n = 2 \quad \omega(x) = x^2 - 2x, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Для всех  $n \geq 3$  среди  $x_k$  существуют комплексные.

В более общем правиле

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f(x) dx \approx \frac{1}{n} \Gamma(\alpha + 1) \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

доказано\*), что формула Чебышева с узлами  $x_k$ , лежащими на  $[0, \infty)$ , возможна лишь при  $n < 0,5(\alpha^2 + \alpha + 3 + \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^3 + 3\alpha^2 + 10\alpha + 9})$ , если  $n$  — четное, и  $n < 0,5(\alpha^2 + \alpha + 5 + \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^3 + 7\alpha^2 + 22\alpha + 17})$ , если  $n$  — нечетное.

## ГЛАВА 6

### УВЕЛИЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРАВИЛ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ КВАДРАТУРНОГО ПРОЦЕССА

#### § 1. О содержании задачи увеличения точности квадратуры

Для определенности записи будем иметь в виду задачу вычисления интеграла по нескольким значениям функции. Остаточный член квадратурной формулы

$$R(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (6.1.1)$$

имеет смысл погрешности приближенного интегрирования. Точное значение  $R(f)$  неизвестно. Для увеличения точности интегрирования нужно из  $R(f)$  выделить такую его часть, которая была бы эффективно вычисляемой и которую можно при некоторых условиях считать «главной частью» остатка и затем добавить ее к квадратурной сумме  $\sum A_k f(x_k)$ . Во многих случаях это позволяет значительно увеличить точность резуль-

\*) А. Х. Турецкий [6].

тата вычислений. В этой главе будет дано описание наиболее употребительных способов увеличения точности.

Величина остатка  $R(f)$  зависит от двух причин: от свойств интегрируемой функции и от выбора правила интегрирования, т. е. от выбора квадратурной суммы  $\sum A_k f(x_k)$ . В соответствии с этим можно уменьшить погрешность интегрирования  $R(f)$  либо путем предварительной подготовки для интегрирования функции  $f$ , что делается обычно при помощи выделения из функции  $f$  ее «особой части», интегрирование которой дает главную часть  $R(f)$ , либо путем улучшения квадратурной формулы при помощи добавления к ней новых членов, также образующих главную часть остатка.

1. Каждое правило квадратур

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (6.1.2)$$

рассчитывается на некоторую гладкость интегрируемой функции  $f$ . Например, можно ожидать, что правило парабол (2.2.12) даст хорошую точность, если  $f$  будет непрерывна на всем отрезке  $[a, b]$  и на каждом из частичных отрезков  $[a, a+2h]$ ,  $[a+2h, a+4h]$ , ... может быть достаточно хорошо приближена многочленом второй или третьей степени.

Формула Гаусса (3.2.1) с  $n$  абсциссами может, наверное, дать высокую точность, если  $f$  допускает хорошее приближение на  $[-1, +1]$  многочленом степени  $2n-1$ .

Если избранное правило интегрирования имеет алгебраическую степень точности  $m$ , то при применении его можно рассчитывать получить «малую погрешность» только в том случае, когда  $f$  имеет непрерывные производные до порядка, не меньшего числа  $m$ . Если же порядок дифференцируемости  $f$  будет меньше  $m$  или даже функция  $f$  будет неограниченной, как это имеет место для несобственных интегралов некоторых типов, то вычисление интеграла при помощи взятого квадратурного правила очень часто связано с большой погрешностью. Для увеличения порядка дифференцируемости представляют  $f$  в виде суммы двух слагаемых

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (6.1.3)$$

которые выбирают так, чтобы одно из них, например  $f_1(x)$ , содержало все особенности  $f(x)$  или главную часть их. При этом  $f_1(x)$  должно быть таким, чтобы интеграл

$\int_a^b \rho f_1 dx$  легко вычислялся точно. Другое же слагаемое должно иметь непрерывные

производные порядка, большего  $m$ , для того чтобы интеграл  $\int_a^b \rho f_2 dx$  можно было с достаточной точностью вычислить с помощью взятого правила квадратур.

Наиболее часто применяемые способы разложения  $f(x)$  на «особенную» и «гладкую» части  $f_1$  и  $f_2$  будут изложены в следующем параграфе.

Будем теперь считать, что функция  $f$  имеет непрерывные производные порядка большего  $m$ . Погрешность интегрирования  $R(f)$  может быть представлена в виде

$$R(f) = \int_a^b f^{(m+1)}(t) K(t) dt, \quad (6.1.4)$$

где  $K(t)$  не зависит от  $f$  и  $\int_a^b K(t) dt \neq 0$ . Одно только повышение порядка дифферен-

цируемости  $f$  здесь может не привести к большому увеличению точности интегрирования. В самом деле, если заменить  $f$  какой-либо другой функцией  $f_2(x)$ , имеющей высокий порядок дифференцируемости или даже аналитической на  $[a, b]$ , но такой, что производная  $f_2^{(m+1)}(x)$  будет близкой к  $f^{(m+1)}(x)$ , то остаток  $R(f)$  мало изменится при такой замене.

При разложении  $f(x)$  на слагаемые (6.1.3) мы должны в этих условиях стремиться к тому, чтобы, как и раньше, интеграл  $\int_a^b p f_1 dx$  вычислялся точно при помощи известных функций. Слагаемое же  $f_2(x)$  должно быть таким, чтобы погрешность его интегрирования

$$R(f_2) = \int_a^b f_2^{(m+1)} K dt$$

была меньше, чем погрешность (6.1.4) интегрирования  $f$ .

Для достижения последней цели  $f_2$  выбирают так, чтобы значения, принимаемые  $f_2^{(m+1)}$  на  $[a, b]$ , были по абсолютной величине меньше значений, принимаемых  $f^{(m+1)}$ .

Можно указать тип интегралов, часто встречающихся в приложениях, для которых просто указать путь выбора  $f_2$ , во многих случаях позволяющий уменьшить погрешность вычислений.

Пусть  $f(x)$  есть аналитическая функция на  $[a, b]$  с особыми точками, лежащими вне  $[a, b]$ . Выберем те особые точки, которые могут оказать наиболее сильное влияние на величину погрешности  $R(f)$  и, следовательно, на значения  $f^{(m+1)}(x)$ . Обычно это есть особые точки, ближайшие к  $[a, b]$ . Чтобы устранить из  $f$  особенности, отвечающие этим точкам, строят функцию  $f_1(x)$ , которая интегрируется с весом  $p(x)$  точно и во взятых точках имеет те же особенности, что и  $f(x)$ . Например, если во взятых точках  $f(x)$  имеет полюсы, то за  $f_1(x)$  может быть принята, по меньшей мере в некоторых случаях, рациональная функция с теми же полюсами и с такими же полярными членами в них, что и  $f(x)$ .

После этого полагают

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

Так как при построении  $f_1$  особые точки, сильно влиявшие на величину погрешности, устраняются, можно ожидать, что погрешность интегрирования  $f_2$  при помощи избранного правила будет меньше, чем погрешность интегрирования  $f$ .

2. Предположим теперь, что функция  $f$  является достаточно гладкой, так что большое значение погрешности  $R(f)$  объясняется лишь недостаточной точностью рассматриваемого правила интегрирования.

Чтобы увеличить точность квадратурной формулы, следует добавить к сумме  $\sum A_k f(x_k)$  новый член, который был бы главной частью остатка  $f(x)$ . Если при этом требуемая точность не будет достигнута, то мы должны найти остаток вновь построенной формулы, выделить из него главную часть и т. д. В результате получится разложение остатка в ряд по «главным частям» последовательных порядков. Некоторые методы такого разложения будут описаны ниже.



## § 2. Увеличение порядка дифференцируемости $f$ и устранение ее особенностей

Правила разложения (6.1.3) интегрируемой функции  $f$  на особенную и гладкую части связаны с видом весовой функции. Ниже будет рассматриваться интеграл с постоянным весом  $\int_a^b f(x) dx$ , и на примере такого интеграла мы постараемся выяснить

идеи способов увеличения порядка дифференцируемости  $f(x)$ . В этом простом случае достаточно воспользоваться формулой Тейлора или алгебраическим интерполированием\*) функции  $f$ . Для других весовых функций  $\rho(x)$  в некоторых случаях бывает целесообразнее пользоваться интерполированием по другой системе функций.

Пусть интеграл имеет следующую форму:

$$\int_a^b (x - x_1)^\alpha \varphi(x) dx, \quad (6.2.1)$$

где  $x_1$  есть некоторая точка отрезка  $[a, b]$ . Показатель степени  $\alpha$  считается большим  $-1$  и отличным от целого числа. Функция  $\varphi(x)$  предполагается непрерывной на  $[a, b]$  и в точке  $x_1$  дифференцируемой  $m$  раз, при этом  $\varphi(x_1) \neq 0$ .

Разложим  $\varphi(x)$  при помощи формулы Тейлора по степеням  $x - x_1$ , выделим некоторое число  $k \leq m$  первых членов и затем положим  $f(x) = (x - x_1)^\alpha \varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , где

$$f_1(x) = (x - x_1)^\alpha \left[ \varphi(x_1) + \frac{x - x_1}{1!} \varphi'(x_1) + \dots + \frac{(x - x_1)^k}{k!} \varphi^{(k)}(x_1) \right],$$

$$f_2(x) = (x - x_1)^\alpha \left[ \varphi(x) - \varphi(x_1) - \frac{x - x_1}{1!} \varphi'(x_1) - \dots - \frac{(x - x_1)^k}{k!} \varphi^{(k)}(x_1) \right].$$

Интеграл  $\int_a^b f_1(x) dx$  вычисляется точно в элементарных функциях. Функция  $f_2(x)$  в точке  $x_1$  имеет порядок дифференцируемости на  $k + 1$  единиц выше, чем  $f(x)$ , и интеграл  $\int_a^b f_2(x) dx$  поэтому может быть вычислен при помощи механических квадратов,

вообще говоря, с лучшей точностью, нежели (6.2.1). Число  $k$ , от которого зависит порядок дифференцируемости  $f_2(x)$ , избирается в зависимости от квадратурной формулы, примененной к вычислениям так, чтобы порядок дифференцируемости  $f_2$  был ниже того, на который рассчитана эта формула.

Аналогичное разложение  $f$  может быть выполненным и в том случае, когда  $f$  имеет на отрезке интегрирования несколько особых точек степенного типа.

Пусть рассматривается интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_n)^{\alpha_n} \varphi(x) dx. \quad (6.2.2)$$

\*) Формула Тейлора связана с задачей алгебраического интерполирования  $f$  с одним многократным узлом.

Выделим сначала точку  $x_1$  и первый множитель  $(x - x_1)^{\alpha_1}$ , произведение же остальных множителей  $(x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_n)^{\alpha_n} \varphi(x)$  разложим по степеням  $x - x_1$ . Взяв в разложении  $k_1$  первых членов, можно, как в предыдущем случае, разложить  $f(x)$  на слагаемые:

$$f(x) = [f(x) - f_1(x)] + f_1(x),$$

где  $f_1(x)$  есть произведение  $(x - x_1)^{\alpha_1}$  на указанный отрезок разложения Тейлора, а  $f(x) - f_1(x)$  имеет в точке  $x_1$  производные более высокого порядка, чем  $f$ .

Сходным образом строятся разложения  $f$  для других особых точек  $x_k$  ( $k = 2, \dots, \dots, n$ ):

$$f(x) = [f(x) - f_k(x)] + f_k(x). \quad (6.2.3)$$

После этого заданный интеграл разбивается на два:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b [f_1(x) + \dots + f_n(x)] dx + \int_a^b [f(x) - f_1(x) - \dots - f_n(x)] dx, \quad (6.2.4)$$

первый из которых вычисляется точно. Функция же, стоящая под знаком второго интеграла, будет иметь, если  $\varphi$  достаточно гладкая, порядок дифференцируемости выше, чем  $f$ .

Описанный способ использования ряда Тейлора для повышения дифференцируемости  $f(x)$  применим, очевидно, всегда в том случае, когда интеграл имеет вид

$$\int_a^b \psi(x) \varphi(x) dx,$$

где  $\psi(x)$  имеет особенность в некоторой точке  $x_1$  отрезка интегрирования и является

такой, что интегралы  $\int_a^b \psi(x) (x - x_1)^k dx$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) вычисляются точно, а  $\varphi(x)$

имеет в точке  $x_1$  производные до некоторого достаточно высокого порядка. К этому

виду принадлежит, например, интеграл  $\int_a^b (x - x_1)^\alpha |g^p| |x - x_1| \varphi(x) dx$ , где  $\alpha > -1$

и  $p$  есть целое число.

До настоящего места предполагалось, что особые точки  $x_1, \dots, x_n$  функции  $f$  лежат на отрезке  $[a, b]$ , и в соответствии с этим считалось  $\alpha_1, \dots, \alpha_n > -1$ . Но те же самые идеи могут быть применены и в том случае, когда  $f(x)$  есть аналитическая функция переменной  $x$ , особые точки которой лежат вне  $[a, b]$ , и мы стремимся к тому, чтобы устранить эти особенности у интегрируемой функции или по меньшей мере ослабить влияние их на величину погрешности интегрирования.

Пусть, например,  $x_1$  лежит вне  $[a, b]$ , функция  $f$  имеет в  $x_1$  полюс порядка  $m$  и представима в виде  $f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x - x_1)^m}$ , где  $\varphi(x)$  есть регулярная функция в достаточно широкой области, содержащей внутри себя  $[a, b]$  и  $x_1$ . Разложим  $\varphi(x)$  по степеням  $x - x_1$  и выделим все члены со степенями до  $k$  включительно, считая  $k \geq m$  и затем положим

$$f_1(x) = (x - x_1)^{-m} \sum_{\nu=0}^k \frac{(x - x_1)^\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x_1), \quad f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

Интеграл  $\int_a^b f_1(x) dx$  вычисляется точно в элементарных функциях, функция же  $f_2(x)$  не будет иметь особенности в точке  $x_1$  и интегрирование ее при помощи правила (6.1.1) будет более точным, чем интегрирование  $f$ .

Если же  $m$  есть дробное число и  $f$  имеет ветвление в точке  $x_1$ , то при помощи указанного выше преобразования можно ослабить влияние точки  $x_1$  на точность интегрирования и уменьшить численное значение погрешности  $R(f)$ .

Аналогично поступают в том случае, когда нужно устранить несколько полюсов или ослабить несколько особенностей  $f(x)$  другого вида.

### § 3. Разложение эйлерова вида остаточного члена квадратурной формулы

Способы разложения остатка приближенной квадратуры в ряд по главным частям возрастающих порядков зависят от свойств ядра  $K(x)$  в интегральном представлении остатка (6.3.1).

Остановимся сначала на разложениях, связанных с известными формулами Эйлера — Маклорена. Если правило интегрирования (6.1.1) имеет алгебраическую степень точности  $m - 1$ , остаток его  $R(f)$  представим в виде следующего интеграла

$$R(f) = \int_a^b f^{(m)}(x) K(x) dx, \quad (6.3.1)$$

где ядро  $K(x)$  не зависит от  $f$ . Будем считать отрезок интегрирования  $[a, b]$  конечным. Если  $K(x)$  мало изменяется на  $[a, b]$ , то «главным значением»  $K(x)$ , оказывающим наибольшее влияние на численное значение  $R(f)$ , будет среднее значение  $K(x)$ . Чтобы выделить из  $R(f)$  главную часть, достаточно положить

$$K(x) = C_0 + [K(x) - C_0] \quad C_0 = (b - a)^{-1} \int_a^b K(x) dx,$$

$$\begin{aligned} R(f) &= C_0 \int_a^b f^{(m)}(x) dx + \int_a^b f^{(m)}(x) [K(x) - C_0] dx = \\ &= C_0 [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \int_a^b f^{(m+1)}(t) L_1(t) dt, \end{aligned}$$

$$L_1(t) = \int_a^t [C_0 - K(x)] dx.$$

Здесь  $C_0 [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)]$  есть первый поправочный член квадратурной формулы, а  $\int_a^b f^{(m+1)}(t) L_1(t) dt$  — новый остаток. Если это преобразование выполнять  $s$  раз, получится нижеследующий аналог формулы Эйлера — Маклорена:

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) f(x) dx &= \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C_0 [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \dots + \\ &+ C_{s-1} [f^{(m+s-2)}(b) - f^{(m+s-2)}(a)] + R_s(f). \quad (6.3.2) \end{aligned}$$

Коэффициенты  $C_i$  и остаток  $R_s(f)$  могут быть найдены рекурсионно:

$$L_0(t) = K(t), \quad C_i = (b-a)^{-1} \int_a^b L_i(x) dx, \quad L_{i+1}(t) = \int_a^t [C_i - L_i(x)] dx,$$

$$R_s(f) = \int_a^b f^{(m+s)}(t) L_s(t) dt$$

или при помощи следующих их выражений через многочлены Бернулли:

$$\left. \begin{aligned} C_i &= \frac{(b-a)^{i-1}}{i!} \int_a^b K(t) B_i\left(\frac{t-a}{b-a}\right) dt = \frac{(b-a)^{m+i-1}}{(m+i)!} R\left[B_{m+i}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right], \\ L_s(t) &= -\frac{(b-a)^{s-1}}{s!} \int_a^b K(x) \left[ B_s^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - B_s^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] dx = \\ &= -\frac{(b-a)^{m+s-1}}{(m+s)!} R_x \left[ B_{m+s}^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - B_{m+s}^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right]. \end{aligned} \right\} (6.3.3)$$

Здесь  $B_p(x)$  есть многочлен Бернулли степени  $p$  и  $B_p^*(x)$  есть 1-периодическая функция, совпадающая с  $B_p(x)$  при  $0 \leq x < 1$ ;  $B_p$  — число Бернулли.

Ниже приводятся формулы вида (6.3.2) для правил интегрирования частного вида.

1. Формула Эйлера — Маклорена. Она применяется для увеличения точности общего правила трапеций (2.2.10):

$$\int_a^b f(x) dx = T_n - \sum_{k=1}^{v-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + R_{2v}(f) =$$

$$= T_n - \frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)] + \frac{h^4}{720} [f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)] - \frac{h^6}{30240} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] +$$

$$+ \frac{h^8}{1209600} [f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)] - \frac{h^{10}}{47900160} [f^{(9)}(b) - f^{(9)}(a)] + \dots + R_{2v}(f), \quad (6.3.4)$$

$$T_n = h \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + \frac{1}{2} f(b) \right],$$

$$R_{2v}(f) = \frac{h^{2v+1}}{(2v)!} \int_0^1 [B_{2v}(u) - B_{2v}] \sum_{p=0}^{v-1} f^{(2v)}(a+hp+hu) du,$$

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Многочлен  $B_{2v}(u) - B_{2v}$  сохраняет знак  $(-1)^v$  на промежутке  $0 < u < 1$ .

Если  $f^{(2v)}(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то существует такая точка  $\xi \in [a, b]$ , что для остатка  $R_{2v}(f)$  верно равенство

$$R_{2v}(f) = -\frac{h^{2v+1} n}{(2v)!} B_{2v} f^{(2v)}(\xi). \quad (6.3.5)$$

Если, кроме того,  $f^{(2\nu)}(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ , то

$$R_{2\nu}(f) = -\theta(2 - 2^{-2\nu+1}) \frac{h^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)], \quad 0 < \theta < 1.$$

Можно указать условия, при которых для остатка  $R_{2\nu}(f)$  верна теорема лейбницава типа. Пусть  $f$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $2\nu + 2$  и при любых  $x \in [a, b]$  либо  $f^{(2\nu)}(x) \geq 0$  и  $f^{(2\nu+2)}(x) \geq 0$ , либо  $f^{(2\nu)}(x) \leq 0$  и  $f^{(2\nu+2)}(x) \leq 0$ . Тогда  $R_{2\nu}(f)$  имеет тот же знак, что и

$$-\frac{h^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)],$$

и по абсолютной величине не больше этого члена разложения.

Применение (6.3.4) к вычислениям требует знания значений производных  $f, f', \dots$  в точках  $a$  и  $b$ . Если функция  $f$  дана таблицей значений  $f_k = f(a + kh)$ , мы должны для применения (6.3.4) выразить производные через значения  $f_k$ .

Если предположить, что можно пользоваться значениями  $f$  только в точках отрезка  $[a, b]$ , то при нахождении производных в точке  $a$  (или  $b$ ) естественно выполнить интерполирование их по значениям  $f_0, f_1, f_2, \dots$  (или  $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots$ ). Это приводит к равенству Грегори

$$\int_a^b f(x) dx = T_n - \frac{h}{12} (\Delta f_{n-1} - \Delta f_0) - \frac{h}{24} (\Delta^2 f_{n-2} + \Delta^2 f_0) - \frac{19h}{720} (\Delta^3 f_{n-3} - \Delta^3 f_0) - \\ - \frac{3h}{160} (\Delta^4 f_{n-4} + \Delta^4 f_0) - \frac{863h}{60480} (\Delta^5 f_{n-5} - \Delta^5 f_0) - \frac{275h}{24192} (\Delta^6 f_{n-6} + \Delta^6 f_0) - \dots - \\ - C_k h (\Delta^k f_{n-k} + (-1)^k \Delta^k f_0) + R_1(f), \quad C_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_0^1 x(x-1)\dots(x-k) dx. \quad (6.3.6)$$

Если же допустить, что для вычисления  $f'(a), f''(a), \dots$  [или  $f'(b), f''(b), \dots$ ] можно использовать также значения  $f$  в точках  $x_k = a + kh$ , лежащих вне отрезка  $[a, b]$ , то можно получить видоизменение формулы Эйлера — Маклорена с центральными разностями (Гаусс), которое во многих случаях будет более благоприятно для вычислений, чем (6.3.6):

$$\int_a^b f(x) dx = T_n - \frac{h}{12} \cdot \frac{1}{2} [(\Delta f_n + \Delta f_{n-1}) - (\Delta f_0 + \Delta f_{-1})] + \frac{11h}{720} \cdot \frac{1}{2} [(\Delta^3 f_{n-1} + \\ + \Delta^3 f_{n-2}) - (\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2})] - \frac{191h}{60480} \cdot \frac{1}{2} [(\Delta^5 f_{n-2} + \Delta^5 f_{n-3}) - (\Delta^5 f_{-2} + \Delta^5 f_{-3})] + \\ + \frac{2497h}{3628800} \cdot \frac{1}{2} [(\Delta^7 f_{n-3} + \Delta^7 f_{n-4}) - (\Delta^7 f_{-3} + \Delta^7 f_{-4})] + \dots + \\ + C_{2k} h \cdot \frac{1}{2} [(\Delta^{2k-1} f_{n-k+1} + \Delta^{2k-1} f_{n-k}) - (\Delta^{2k-1} f_{-k+1} + \Delta^{2k-1} f_{-k})] + R, \quad (6.3.7) \\ C_{2k} = \frac{1}{(2k)!} \int_0^1 (u+k-1)(u+k-2)\dots(u-k) du, \quad R = n C_{2k+2} f^{(2k)}(\xi).$$

Наряду с (6.3.4) мы укажем на аналогичную формулу, которую иногда называют второй формулой Эйлера — Маклорена. По величине погрешности она близка к (6.3.4) и может применяться для увеличения точности правила прямоугольников, в котором абсциссы берутся в серединах частичных отрезков  $[a_k, a_{k+1}]$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= h \left[ f\left(a + \frac{1}{2}h\right) + f\left(a + \frac{3}{2}h\right) + \dots + f\left(b - \frac{1}{2}h\right) \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{v-1} \frac{h^{2k} (1 - 2^{-2k+1}) B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \\ &+ \frac{h^{2v+1}}{(2v)!} \int_0^1 \left[ B_{2v}^*\left(\frac{1}{2} - t\right) - B_{2v}\left(\frac{1}{2}\right) \right] \sum_{i=0}^{n-1} f^{(2v)}(a + ih + ht) dt = \\ &= hS_n + \frac{h^2}{24} [f'(b) - f'(a)] - \frac{7h^4}{5760} [f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)] + \frac{31h^6}{967680} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] - \\ &- \frac{127h^8}{154828800} [f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)] + \dots + \bar{R}_{2v}(f). \quad (6.3.8) \end{aligned}$$

Функция  $B_{2v}^*\left(\frac{1}{2} - t\right) - B_{2v}\left(\frac{1}{2}\right)$ , стоящая под знаком интеграла в остатке  $\bar{R}_{2v}(f)$ , сохраняет знак  $(-1)^v$  на  $[0, 1]$ , и для  $\bar{R}_{2v}(f)$  верны утверждения:

Если  $f$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $2v$ , то существует такая точка  $\bar{\xi} \in [a, b]$ , что для остатка  $\bar{R}_{2v}(f)$  верно равенство

$$\bar{R}_{2v}(f) = \frac{h^{2v+1}}{(2v)!} (1 - 2^{-2v+1}) B_{2v} f^{(2v)}(\bar{\xi}). \quad (6.3.9)$$

Сравнение этого представления остатка с (6.3.5) позволяет утверждать, что если  $f^{(2v)}(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ , то остатки формул (6.3.4) и (6.3.8) имеют противоположные знаки. Последнее может иметь значение для контроля точности результатов вычислений.

Если  $f^{(2v)}(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ , то

$$\bar{R}_{2v}(f) = \bar{\Theta} (2 - 2^{-2v+1}) \frac{h^{2v} B_{2v}}{(2v)!} [f^{(2v-1)}(b) - f^{(2v-1)}(a)], \quad 0 < \bar{\Theta} < 1. \quad (6.3.10)$$

Если  $f$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $2v+2$  и при любых  $x \in [a, b]$  либо  $f^{(2v)}(x) \geq 0$  и  $f^{(2v+2)}(x) \geq 0$ , либо  $f^{(2v)}(x) \leq 0$  и  $f^{(2v+2)}(x) \leq 0$ , то остаток  $\bar{R}_{2v}(f)$  имеет тот же знак, что и член разложения

$$\frac{h^{2v} (1 - 2^{-2v+1}) B_{2v}}{(2v)!} [f^{(2v)}(b) - f^{(2v)}(a)],$$

и не больше его по абсолютной величине.

Как и для (6.3.4), для второй формулы Эйлера — Маклорена (6.3.8) могут быть построены видоизменения, в которых производные заменены их выражениями через

конечные разности функции. Ниже приведено одно из таких видоизменений, в котором производные  $f^{(2k-1)}(b)$  и  $f^{(2k-1)}(a)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) заменены выражениями через центральные разности (Гаусс):

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{1}{2}h + kh\right) + h \sum_{k=1}^{v-1} C_{2k} \left[ \Delta^{2k-1} f\left(a + \frac{1}{2}h + nh - kh\right) - \Delta^{2k-1} f\left(a + \frac{1}{2}h - kh\right) \right] + \bar{R}_{2v} = hS_n + \frac{h}{24} \left[ \Delta f\left(a + nh - \frac{1}{2}h\right) - \Delta f\left(a - \frac{1}{2}h\right) \right] - \frac{17h}{5760} \left[ \Delta^3 f\left(a + nh - \frac{3}{2}h\right) - \Delta^3 f\left(a - \frac{3}{2}h\right) \right] + \frac{367h}{967680} \left[ \Delta^5 f\left(a + nh - \frac{5}{2}h\right) - \Delta^5 f\left(a - \frac{5}{2}h\right) \right] - \frac{27859h}{464486400} \left[ \Delta^7 f\left(a + nh - \frac{7}{2}h\right) - \Delta^7 f\left(a - \frac{7}{2}h\right) \right] + \dots$$

$$C_{2k} = \frac{1}{(2k)!} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2(t^2-1^2)\dots(t^2-(k-1)^2) dt, \quad \bar{R}_{2v} = h^{2v+1} C_{2v} f^{(2v)}(\xi). \quad (6.3.11)$$

2. Правило увеличения точности общей формулы парабол (2.2.12) имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx = V_n + \sum_{k=2}^{v-1} \frac{(2h)^{2k}}{3(2k)!} (1 - 2^{-2k+2}) B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + R_{2v}(f) =$$

$$= V_n - \frac{h^4}{180} [f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)] + \frac{h^6}{1512} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] - \frac{h^8}{14400} [f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)] + \dots + R_{2v}(f), \quad (6.3.12)$$

где

$$V_n = \frac{h}{3} \{ f(a) + f(b) + 2[f(a+2h) + \dots + f(a+(n-2)h)] + 4[f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h)] \},$$

$$R_{2v}(f) = \frac{(2h)^{2v+1}}{3(2v)!} \int_0^1 \left\{ B_{2v}(u) - B_{2v} + 2 \left[ B_{2v}^* \left( \frac{1}{2} - u \right) - B_{2v} \left( \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \sum_{\rho=0}^{\frac{n}{2}-1} f^{(2v)}(a + 2\rho h + 2hu) du.$$

Функция, стоящая в фигурных скобках в интегральном представлении остатка, сохраняет знак  $(-1)^{v-1}$  при  $0 < u < 1$ , и для остатка  $R_{2v}(f)$  верны утверждения, аналогичные тем, которые были высказаны об остатке формулы Эйлера — Маклорена (6.3.4).

Если  $f^{(2\nu)}(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$R_{2\nu}(f) = \frac{nh(2h)^{2\nu}}{3(2\nu)!} (1 - 2^{-2\nu+2}) B_{2\nu} f^{(2\nu)}(\xi). \quad (6.3.13)$$

Если, кроме того,  $f^{(2\nu)}(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ , то

$$R_{2\nu}(f) = 2\theta \frac{(2h)^{2\nu}}{3(2\nu)!} (1 - 2^{-2\nu}) B_{2\nu} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)], \quad 0 < \theta < 1.$$

Пусть  $f$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $2\nu + 2$ . Если при всяких  $x \in [a, b]$  будет или  $f^{(2\nu)}(x) \geq 0$  и  $f^{(2\nu+2)}(x) \geq 0$ , или  $f^{(2\nu)}(x) \leq 0$  и  $f^{(2\nu+2)}(x) \leq 0$ , то  $R_{2\nu}(f)$  имеет тот же знак, что и

$$\frac{(2h)^{2\nu}}{3(2\nu)!} (1 - 2^{-2\nu+2}) B_{2\nu} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)],$$

и по абсолютному значению не больше этого члена формулы.

3. Для общего правила трех восьмых (2.2.13) равенство эйлера вида (6.3.2) будет следующим \*):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\sim V_n + \sum_{k=2} \frac{(3h)^{2k}}{8(2k)!} (1 - 3^{-2k+2}) B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] = \\ &= V_n - \frac{h^4}{80} [f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)] + \frac{h^6}{336} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] - \\ &\quad - \frac{13h^8}{19200} [f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)] + \dots, \quad (6.3.14) \end{aligned}$$

$$V_n = \frac{3}{8} h [f_0 + f_n + 2(f_3 + f_6 + f_9 + \dots) + 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + f_7 + f_8 + \dots)].$$

4. Остановимся еще на правиле увеличения точности квадратурной формулы гауссова типа (3.2.2) для весовой функции Якоби  $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ . Для нее правило Эйлера (6.3.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx &\sim \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C_0 [f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(-1)] + \\ &\quad + C_1 [f^{(2n)}(1) - f^{(2n)}(-1)] + \dots, \\ C_0 &= \frac{2^{\alpha+\beta+2n} n!}{(2n)! (\alpha + \beta + 2n + 1)} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma^2(\alpha + \beta + 2n + 1)}, \\ C_1 &= C_0 \frac{\beta - \alpha}{(\alpha + \beta + 2n)(2n + 1)} \left[ \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + 2n + 2} + 2n \right]. \end{aligned}$$

\* ) Знаком  $\sim$  обозначено соответствие между интегралом и рядом. Ряд может быть расходящимся.



Для ультрасферического случая  $\alpha = \beta$  коэффициенты  $C_i$  нечетных индексов  $i$  все равны нулю и

$$C_0 = \frac{2^{2\alpha} n! \Gamma(2\alpha + n + 1)}{(2n)! (2\alpha + 2n + 1)} \left[ \frac{2^n \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(2\alpha + 2n + 1)} \right]^2,$$

$$C_2 = C_0 \frac{2\alpha + 2n + 1}{(2n + 1)(2n + 2)} \left[ \frac{2n^2 + 2(2\alpha + 1)n + 2\alpha - 1}{(2\alpha + 2n - 1)(2\alpha + 2n + 1)(2\alpha + 2n + 3)} + \frac{n(n - 1)}{(2\alpha + 2n - 1)(2\alpha + 2n + 1)} - \frac{(n + 1)(2n + 1)}{3(2\alpha + 2n + 1)} \right].$$

В частном случае формулы Гаусса (3.2.1) для интегрирования с постоянным весом  $\rho(x) = 1$  ( $\alpha = \beta = 0$ ) формула эйлера вида будет

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \sim \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \frac{1}{(2n + 1)!} \left[ \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right]^2 \left\{ [f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(-1)] + \frac{1}{2n + 2} \left[ \frac{2n^2 + 2n - 1}{(2n - 1)(2n + 1)(2n + 3)} + \frac{n(n - 1)}{(2n - 1)(2n + 1)} - \frac{n + 1}{3} \right] \times \right. \\ \left. \times [f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(-1)] + \dots \right\}.$$

#### § 4. Увеличение точности правила интегрирования в случае существования короткого главного участка интегрирования в интегральном представлении остаточного члена

Пусть правило интегрирования

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f) \quad (6.4.1)$$

имеет алгебраическую степень точности  $m - 1$ . Остаток представим в виде интеграла

$$R(f) = \int_a^b f^{(m)}(x) K(x) dx.$$

Допустим, что на  $[a, b]$  существует участок  $[\alpha, \beta]$ , вне которого ядро интеграла  $K(x)$  принимает «малые значения» и быстро убывает при удалении от  $[\alpha, \beta]$ . В образовании численного значения  $R(f)$  интегрирование по  $[\alpha, \beta]$  будет играть главную роль. Если, кроме того,  $f^{(m)}(x)$  будет мало изменяться на  $[\alpha, \beta]$ , то для выделения из  $R(f)$  главной части достаточно выбрать на  $[\alpha, \beta]$  какую-либо точку  $\alpha_0$  и разложить  $R(f)$  на два слагаемых:

$$R(f) = f^{(m)}(\alpha_0) \int_a^b K(x) dx + \int_a^b [f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\alpha_0)] K(x) dx.$$

Первое слагаемое дает главную часть остатка. Для уменьшения второго слагаемого можно воспользоваться выбором  $\alpha_0$ . Когда ядро  $K(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ , за  $\alpha_0$  следует выбрать абсциссу той точки, вблизи которой концентрируются наибольшие по модулю значения  $K(x)$ , и считать  $\alpha_0$  равным средней абсциссе по весу  $K(x)$ :

$$\alpha_0 = \left[ \int_a^b K(x) dx \right]^{-1} \int_a^b xK(x) dx.$$

Это приведет к следующему разложению остатка:

$$R(f) = C_0 f^{(m)}(\alpha_0) + \int_a^b f^{(m+2)}(x) K_1(x) dx,$$

$$C_0 = \int_a^b K(x) dx, \quad K_1(x) = \int_a^b K(x) [E(x-t) - E(\alpha_0-t)](x-t) dt.$$

Если повторить указанные преобразования несколько раз, получится правило увеличения точности квадратуры (6.4.1):

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C_0 f^{(m)}(\alpha_0) + C_1 f^{(m+2)}(\alpha_1) + \dots +$$

$$+ C_{\nu-1} f^{(m+2\nu-2)}(\alpha_{\nu-1}) + \int_a^b f^{(m+2\nu)}(x) K_\nu(x) dx, \quad (6.4.2)$$

$$K_0(x) = K(x), \quad K_{i+1}(x) = \int_a^b K_i(t) [E(t-x) - E(\alpha_0-x)](t-x) dt,$$

$$C_i = \int_a^b K_i(x) dx, \quad \alpha_i = C_i^{-1} \int_a^b xK_i(x) dx.$$

Когда  $K(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ , все  $K_i(x)$  будут иметь тот же знак, что и  $K(x)$ .

Ниже приводятся равенства вида (6.4.2) для некоторых квадратурных формул, имеющих наивысшую алгебраическую степень точности.

В правиле (3.2.2) с весовой функцией Якоби  $p(x) = (1-x)^p(1+x)^q$  главный участок интегрирования в остатке  $R(f)$  будет тем меньше, чем больше будет какой-либо из показателей степени  $p$  или  $q$ . Равенство (6.4.2) с одним уточняющим членом будет следующим:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C_0 f^{(2n)}(\alpha_0) + \dots,$$

$$C_0 = \frac{2^{p+q+2n+1} n! \Gamma(p+n+1) \Gamma(q+n+1) \Gamma(p+q+n+1)}{(2n)! \Gamma(p+q+2n+1) \Gamma(p+q+2n+2)}, \quad (6.4.3)$$

$$\alpha_0 = \frac{q-p}{2n+1} \left[ \frac{n}{p+q+2n} + \frac{n+1}{p+q+2n+2} \right].$$

В ультрасферическом случае  $p = q$  все  $\alpha_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), ввиду симметрии, обращаются в нуль и правило увеличения точности (6.4.2) будет таким:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^p f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \frac{2^{2p+2n+1} \Gamma^2(p+n+1) \Gamma(2p+n+1)}{(2n)! \Gamma(2p+2n+1) \Gamma(2p+2n+2)} \times$$

$$\times \left\{ f^{(2n)}(0) + \frac{1}{2 \cdot 2n+1} \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot 2n+3} + \frac{(n-1)n}{2 \cdot 2n-1} \right] f^{(2n+2)}(0) + \dots \right\};$$

Для интегралов (3.2.7) и (3.2.8) с весами Лягерра  $p(x) = x^s e^{-x}$  и Эрмита  $p(x) = e^{-x^2}$  правила (6.4.2) имеют следующий вид:

$$\int_0^\infty x^s e^{-x} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \frac{n! \Gamma(s+n+1)}{(2n)!} f^{(2n)}(\alpha_0) + \dots, \quad (6.4.4)$$

$$\alpha_0 = 1 + s + \frac{2n^2}{2n+1}.$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} \left[ f^{(2n)}(0) + \right.$$

$$\left. + \frac{n^2 + n + 1}{2(2n+1)(2n+2)} f^{(2n+2)}(0) + \dots \right]. \quad (6.4.5)$$

### § 5. Улучшение сходимости последовательности приближенных значений интеграла

При приближенном вычислении интеграла по какому-либо квадратурному правилу \*)

$$I(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^n f(x_k^n) = Q_n(f), \quad (6.5.1)$$

после того как избран вид правила вычисления — трапеций, парабол, Гаусса и др., необходимо определить число  $n$  слагаемых в квадратурной сумме  $Q_n(f)$ , при котором можно получить нужную точность.

Принципиально говоря, это можно сделать путем анализа остатка правила (6.5.1). Но выполнить анализ часто бывает трудно, или даже невозможно, и тогда для нахождения численного значения интеграла обычно задают, пользуясь опытом или какими-либо другими ориентировочными соображениями, несколько значений для  $n$  — чаще всего два-три значения — и находят соответствующие им приближенные значения  $Q_n(f)$  интеграла.

Простое сравнение этих значений позволяет иногда судить о точности, с которой найден интеграл  $I(f)$ . Например, как правило, считают, что первые десятичные знаки,

\*) Во всех последующих рассуждениях правило (6.5.1) считается сходящимся:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = I(f).$$

одинаковые во всех найденных значениях  $Q_n(f)$ , будут вместе с тем верными знаками  $I(f)$ .

Но это есть лишь первое и грубое следствие, которое можно извлечь из результатов вычислений. В связи с задачей получения более точных сведений рассматривалась следующая проблема улучшения сходимости последовательности приближенных значений интеграла  $I(f)$ .

Обозначим выбранные значения  $n$  через  $n_1, n_2, \dots, n_j, \dots$  и рассмотрим последовательность соответствующих им

$$Q_{n_1}(f), Q_{n_2}(f), \dots, Q_{n_j}(f), \dots \quad (6.5.2)$$

Необходимо было указать правило, по которому (6.5.2) можно преобразовать в новую последовательность

$$S_1, S_2, \dots, S_j, \dots, \quad (6.5.3)$$

сходящуюся к тому же пределу  $I(f)$ , но более быстро\*), чем (6.5.2).

Правила преобразования могут быть весьма разнообразными. Наряду со специальными правилами, предназначенными для последовательностей, сходящихся по некоторому определенному частному закону и, следовательно, применимыми к квадратурным процессам частного вида, могут быть построены общие правила преобразований, применимые к любым последовательностям (6.5.2) и к любым квадратурным процессам.

Приводимые ниже методы улучшения сходимости основаны, по сути дела, на идее интерполирования.

Мы начнем с рассмотрения одного частного преобразования, часто применяемого в счетной практике.

Пусть узлы  $x_k^n$  в правиле интегрирования (6.5.1) являются равноотстоящими с шагом  $h$ :

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_k A_k(h) f(x_0 + kh) = Q(h, f), \quad (6.5.4)$$

$$a \leq x_0 < a + h, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Суммирование по  $k$  выполняется от нуля до  $n-1$  или  $n$  в зависимости от того, будет ли  $x_0 > a$  или  $x_0 = a$ .

\*) В общем виде задача улучшения сходимости последовательности может быть высказана следующим образом: дана произвольная сходящаяся последовательность чисел  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ . По ней нужно построить новую последовательность  $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ , сходящуюся к тому же самому пределу  $u$ , но более быстро, чем заданная последовательность.

Эта задача равносильна аналогичной задаче для ряда, которая изучалась с большой обстоятельностью в конце прошлого и начале текущего столетия. В случае рядов рассматривались преимущественно линейные преобразования одного ряда в другой. Задача улучшения сходимости последовательности имеет свои особенности, которые делают нелинейные преобразования, такие как  $\delta^2$ -процесс Эйткена и некоторые другие, для последовательностей более естественными, чем для рядов. Мы будем излагать теорию улучшения сходимости последовательности только в той мере, как она применяется в настоящее время в численном интегрировании.

Допустим, что остаток  $R(h, f) = \int_a^b pf \, dx - Q(h, f)$  будет малой величиной порядка  $m$  относительно  $h$ :

$$R(h, f) = h^m C(h), \quad C(h) \rightarrow C \neq 0 \quad (h \rightarrow 0). \quad (6.5.5)$$

Например, из формулы Эйлера — Маклорена (6.3.4) следует, что при  $f'(b) - f'(a) \neq 0$  погрешность общего правила трапеции (2.2.10) будет иметь второй порядок малости относительно  $h$ . Аналогично из (6.3.12) видно, что для  $f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a) \neq 0$  погрешность общего правила парабол (2.2.12) имеет порядок малости, равный четырем. Для любого  $h$  будет верно следующее точное равенство:

$$I(f) = Q(h, f) + h^m C(h).$$

Если  $h$  взято достаточно малым, то  $C(h)$  будет близким к предельному значению  $C$  и будет приблизительно верным приведенное ниже выражение для интеграла  $I(f)$ , содержащее одну неизвестную постоянную величину  $C$ :

$$I(f) \approx Q(h, f) + h^m C.$$

Предположим теперь, что вычисления по правилу (6.5.4) выполнены для двух значений  $h_1$  и  $h_2$  шага  $h$ . Для каждого из этих значений  $h$  будет справедливо предыдущее равенство, и это дает возможность исключить неизвестную величину  $C$  и получить для  $I(f)$  уточненное значение

$$I(f) \approx Q(h_1, f) + h_1^m \frac{Q(h_2, f) - Q(h_1, f)}{h_1^m - h_2^m} = \frac{h_1^m Q(h_2, f) - h_2^m Q(h_1, f)}{h_1^m - h_2^m}. \quad (6.5.6)$$

В частном, наиболее часто встречающемся случае, когда для вычисления второго значения интеграла шаг  $h$  делится пополам:  $h_1 = h$ ,  $h_2 = \frac{1}{2}h$ , предыдущее правило принимает более простую формулу:

$$I(f) = \frac{2^m Q\left(\frac{1}{2}h, f\right) - Q(h, f)}{2^m - 1}. \quad (6.5.7)$$

Если выбрана убывающая последовательность значений  $h$ :  $h_1 > h_2 > \dots$  ( $h_j \rightarrow 0$ ) и рассматривается соответствующая им последовательность  $Q(h_j, f)$ , то (6.5.6) можно истолковать как первый шаг в преобразовании  $Q(h_j, f)$  в новую последовательность

$$S_j = \frac{h_j^m Q(h_{j+1}, f) - h_{j+1}^m Q(h_j, f)}{h_j^m - h_{j+1}^m}, \quad (6.5.8)$$

которая будет, вообще говоря, сходиться к  $I(f)$  более быстро, чем  $Q(h_j, f)$ .

Вместе с тем (6.5.8) можно рассматривать как правило интерполирования предельного значения  $\lim_{h \rightarrow 0} Q(h, f) = I(f)$  по двум соседним членам последовательности  $Q(h_j, f)$ .

С целью получить более точное правило, чем (6.5.8), можно для интерполирования  $I(f)$  привлечь больше значений  $Q(h, f)$ . Пусть из последовательности  $Q(h_j, f)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) взято  $r+1$  величин:  $Q(h_j, f) = Q_j$ ,  $Q(h_{j+1}, f) = Q_{j+1}, \dots, \dots, Q(h_{j+r}, f) = Q_{j+r}$ . Выбор семейства функций, при помощи которых выполняется интерполирование  $I(f)$ , тесно связан со свойствами остатка  $R(h, f) = I(f) - Q(h, f)$ . В большом числе практически важных правил интегрирования (6.5.4) остаток будет четной функцией  $h$ . Тогда, при принятом выше предположении о порядке малости остатка, для интерполирования могут быть взяты многочлены вида

$$\varphi(h) = a_0 + a_m h^m + a_{m+2} h^{m+2} + \dots + a_{m+2r-2} h^{m+2r-2}.$$

Коэффициенты  $a_0, a_m, \dots, a_{m+2r-2}$  выбираются так, чтобы выполнялись условия

$$\varphi(h_s) = Q_s, \quad s = j, j+1, \dots, j+r.$$

После этого приближенно полагают

$$I(f) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = a_0 = \frac{\Delta(Q)}{\Delta}, \quad (6.5.9)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ h_j^m & h_{j+1}^m & \dots & h_{j+r}^m \\ h_j^{m+2} & h_{j+1}^{m+2} & \dots & h_{j+r}^{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_j^{m+2r-2} & h_{j+1}^{m+2r-2} & \dots & h_{j+r}^{m+2r-2} \end{vmatrix}, \quad \Delta(Q) = \begin{vmatrix} Q_j & Q_{j+1} & \dots & Q_{j+r} \\ h_j^m & h_{j+1}^m & \dots & h_{j+r}^m \\ h_j^{m+2} & h_{j+1}^{m+2} & \dots & h_{j+r}^{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_j^{m+2r-2} & h_{j+1}^{m+2r-2} & \dots & h_{j+r}^{m+2r-2} \end{vmatrix}.$$

При  $r = 1$  отсюда, как частный случай, получается двухчленное правило (6.5.8).

Если  $r = 2$ , получится более точное трехчленное правило, которое, для упрощения обозначений, мы запишем, считая  $j = 1$ :

$$I(f) \approx [Q_1 h_2^m h_3^m (h_3^2 - h_2^2) + Q_2 h_3^m h_1^m (h_1^2 - h_3^2) + Q_3 h_1^m h_2^m (h_2^2 - h_1^2)] : \\ : [h_2^m h_3^m (h_3^2 - h_2^2) + h_3^m h_1^m (h_1^2 - h_3^2) + h_1^m h_2^m (h_2^2 - h_1^2)], \dots \quad (6.5.10)$$

В частности, если для получения следующего приближенного значения интеграла предыдущий шаг делится пополам:  $h_1 = h, h_2 = \frac{1}{2}h, h_3 = \frac{1}{4}h$ , это правило принимает простой вид:

$$I(f) \approx \frac{15 \cdot 2^m Q_2 - 3Q_1 - 3 \cdot 2^{m+2} Q_3}{15 \cdot 2^m - 3 - 3 \cdot 2^{m+2}}. \quad (6.5.11)$$

Если остаток квадратуры  $R(h, f)$  не является четной функцией  $h$ , то для интерполирования  $I(f)$  применяют многочлены

$$\psi(h) = a_0 + a_m h^m + a_{m+1} h^{m+1} + \dots + a_{m+r-1} h^{m+r-1}.$$

В этом случае, после того как выполнены условия  $\psi(h_s) = Q_s$  ( $s = j, \dots, j+r$ ), получится правило для нахождения  $I(f)$ , отличное от (6.5.11):

$$I(f) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \psi(h) = a_0 = \frac{\delta(Q)}{\delta}, \quad (6.5.12)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ h_j^m & h_{j+1}^m & \dots & h_{j+r}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_j^{m+r-1} & h_{j+1}^{m+r-1} & \dots & h_{j+r}^{m+r-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Q_j & Q_{j+1} & \dots & Q_{j+r} \\ h_j^m & h_{j+1}^m & \dots & h_{j+r}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_j^{m+r-1} & h_{j+1}^{m+r-1} & \dots & h_{j+r}^{m+r-1} \end{vmatrix} = \delta^r(Q) = \begin{vmatrix} h_j^{m+r} & h_{j+1}^{m+r} & \dots & h_{j+r}^{m+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_j^{m+r-1} & h_{j+1}^{m+r-1} & \dots & h_{j+r}^{m+r-1} \end{vmatrix}$$

Для  $r = 1$  отсюда вновь получится (6.5.8). При  $r = 2$ , т. е. для трехчленного интерполирования  $I(f)$ , если правило записать при  $j = 1$ , будет

$$I(f) \approx [Q_1 h_2^m h_3^m (h_3 - h_2) + Q_2 h_3^m h_1^m (h_1 - h_3) + Q_3 h_1^m h_2^m (h_2 - h_1)] : \\
 : [h_2^m h_3^m (h_3 - h_2) + h_3^m h_1^m (h_1 - h_3) + h_1^m h_2^m (h_2 - h_1)]. \quad (6.5.13)$$

Когда для нахождения каждого следующего значения  $Q_j$  шаг  $h$  делится пополам, т. е.  $h_1 = h, h_2 = \frac{1}{2}h, h_3 = \frac{1}{4}h$ , это равенство примет более простую форму:

$$I(f) \approx \frac{Q_1 - 3 \cdot 2^m Q_2 + 2^{2m+1} Q_3}{1 - 3 \cdot 2^m + 2^{2m+1}}. \quad (6.5.14)$$

До сих пор излагались правила улучшения сходимости для простейшего случая, когда погрешность квадратуры  $R(h, f)$  представима в виде  $R(h, f) = h^m C(h)$ , где  $C(h) \rightarrow C \neq 0 (h \rightarrow 0)$ , где  $m$  не зависит от  $n$ .

В других, более сложных случаях может быть полезным метод обычного алгебраического интерполирования, излагаемый ниже.

Вернемся к общему квадратурному правилу (6.5.1). Введя для удобства записи величину  $h = \frac{1}{n}$ , не имеющую сейчас смысла «шага», запишем (6.5.1) в виде

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k^h f(x_k^h) + R(h, f) = Q(h, f) + R(h, f). \quad (6.5.15)$$

Ввиду предположенной сходимости квадратурного процесса, будет  $\lim_{h \rightarrow 0} Q(h, f) = I(f)$ .

Пусть избрана последовательность  $h_j (j = 1, 2, \dots; h_j \rightarrow 0, j \rightarrow \infty)$  значений  $h$ , для которой вычисляются квадратурные суммы  $Q(h_j, f) = Q_j$ .

Предположим, что из последовательности значений  $Q_j$  взято  $r + 1$  членов  $Q_{j+1}, \dots, Q_{j+r}$ . Для интерполирования  $Q(h, f)$  по этим величинам возьмем алгебраический многочлен \*) степени  $r$  от  $h$ :

$$\varphi(h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_r h^r, \quad (6.5.16)$$

\*) Выбор алгебраического многочлена в качестве средства интерполирования не всегда будет наилучшим, так как характер зависимости многочлена от  $h$  может быть не согласован с законом сходимости  $Q(h, f) \rightarrow I(f) (h \rightarrow 0)$ . Например, функция  $f$  аналитическая на  $[a, b]$ , квадратурный процесс наивысшей алгебраической степени точности сходится по закону, близкому к геометрической прогрессии, знаменатель которой будет, вообще говоря, тем меньше, чем шире область аналитичности  $f$ . В этом случае для усиления скорости сходимости последовательности  $Q_j (h = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots)$  предпочтительнее, по-видимому, было бы пользоваться  $\delta^2$ -процессом Эйткена, или его видоизменениями.

по частичным отрезкам суммированы, получится общее правило трапеций:

$$\int_a^b f(x) \sin \alpha x dx = f_0 \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{\sin \alpha h}{\alpha h} \right) \cos \alpha x_0 + \frac{1 - \cos \alpha h}{\alpha^2 h} \sin \alpha x_0 \right] +$$

$$+ 2 \frac{1 - \cos \alpha h}{\alpha^2 h} \sum_{i=1}^{n-1} f_i \sin \alpha x_i + f_n \left[ \frac{1 - \cos \alpha h}{\alpha^2 h} \sin \alpha x_n - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{\sin \alpha h}{\alpha h} \right) \cos \alpha x_n \right] + R = T_n + R, \quad (7.1.6)$$

$$R = \frac{h}{\alpha^2} \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} f''(x_i + hu) [u \sin \alpha x_{i+1} + (1-u) \sin \alpha x_i - \sin \alpha (x_i + uh)] du.$$

Сходные вычисления для интеграла с функцией  $\cos \alpha x$  приведут к следующему правилу:

$$\int_a^b f(x) \cos \alpha x dx = f_0 \left[ \frac{1 - \cos \alpha h}{\alpha^2 h} \cos \alpha x_0 - \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{\sin \alpha h}{\alpha h} \right) \sin \alpha x_0 \right] +$$

$$+ 2 \frac{1 - \cos \alpha h}{\alpha^2 h} \sum_{i=1}^{n-1} f_i \cos \alpha x_i + f_n \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{\sin \alpha h}{\alpha h} \right) \sin \alpha x_n + \frac{1 - \cos \alpha h}{\alpha^2 h} \cos \alpha x_n \right] + R,$$

$$(7.1.7)$$

$$R = \frac{h}{\alpha^2} \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} f''(x_i + uh) [u \cos \alpha x_{i+1} + (1-u) \cos \alpha x_i - \cos \alpha (x_i + uh)] du.$$

Из равенств (7.1.6) и (7.1.7) сразу же получаются правила трапеций для преобразований Фурье. Допустим, что функция  $f(x)$  дана в системе равноотстоящих точек  $x_i = ih$  ( $i = 0, 1, \dots$ ), и предположим, кроме того, что при  $x \rightarrow \infty$   $f(x)$  настолько быстро стремится к нулю, что обеспечивается абсолютная сходимость интегралов (7.1.1) и (7.1.2). Для определенности будем, например, считать, что при всех достаточно больших  $x$  выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq A x^{-1-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

Если (7.1.6) применить к интегралу  $\int_0^{mh} f(x) \sin \alpha x dx$  и перейти к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , будем иметь следующее представление синус-преобразования Фурье:

$$S(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{\sin \alpha h}{\alpha h} \right) f_0 + 2 \frac{1 - \cos \alpha h}{\alpha^2 h} \sum_{i=1}^{\infty} f_i \sin \alpha ih + R, \quad (7.1.8)$$

$$f_i = f(ih), \quad R = \frac{h}{\alpha^2} \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} f''(ih + uh) [u \sin \alpha (i+1)h + (1-u) \sin \alpha ih -$$

$$- \sin \alpha (ih + uh)] du.$$

Отсюда, после отбрасывания остатка  $R$ , получится правило для приближенного вычисления  $S(\alpha)$ , которое может оказаться полезным для функций, быстро стремящихся к нулю при возрастании  $x$ .



Аналогично, для косинус-преобразования Фурье

$$C(\alpha) = \frac{1 - \cos \alpha h}{\alpha^2 h} f_0 + 2 \frac{1 - \cos \alpha h}{\alpha^2 h} \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cos \alpha i h + R, \quad (7.1.9)$$

$$R = \frac{h}{\alpha^2} \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} f''(ih + uh) [u \cos \alpha (i+1)h + (1-u) \cos \alpha ih - \cos \alpha (ih + uh)] du.$$

Положим \*)  $n = 2$ . Обозначим середину отрезка интегрирования  $c = (b+a)/2$ , половину его длины  $h = \frac{1}{2}(b-a)$  и запишем правило (7.1.3) в виде

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x) \sin \alpha x dx = A_{-1} f(c-h) + A_0 f(c) + A_1 f(c+h) + R. \quad (7.1.10)$$

Интерполирование  $f(x)$  здесь выполняется по трем значениям  $f(c-h)$ ,  $f(c)$ ,  $f(c+h)$ . Коэффициенты и остаток соответствующего правила вычисления интеграла (7.1.10) имеют приведенные ниже значения:

$$\begin{aligned} A_{-1} &= \mu \sin \alpha (c-h) + \nu \cos \alpha (c-h), & A_0 &= \lambda \sin \alpha c, \\ A_1 &= \mu \sin \alpha (c+h) - \nu \cos \alpha (c+h); & \lambda &= 4h (\alpha h)^{-2} [(\alpha h)^{-1} \sin \alpha h - \cos \alpha h], \\ & \mu &= h (\alpha h)^{-2} [1 + \cos^2 \alpha h - (\alpha h)^{-1} \sin 2\alpha h], \\ & \nu &= \alpha^{-1} [1 + (2\alpha h)^{-1} \sin 2\alpha h - (\alpha h)^{-2} 2 \sin^2 \alpha h], \end{aligned}$$

$$R = \int_{c-h}^{c+h} f'''(x) K_s(x; c, h, \alpha) dx, \quad (7.1.11)$$

$$K_s(x; c, h, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_x^{c+h} (t-x)^2 \sin \alpha t dt - A_1 \cdot \frac{1}{2} (c+h-x)^2 & (x > c), \\ \frac{1}{2} \int_x^{c+h} (t-x)^2 \sin \alpha t dt - A_0 \cdot \frac{1}{2} (c-x)^2 - A_1 \cdot \frac{1}{2} (c+h-x)^2 & (x < c). \end{cases}$$

Ядро  $K_s(x; c, h, \alpha)$  есть остаток интегрирования функции  $\frac{1}{2}(t-x)^2 E(t-x)$  по переменной  $t$  при помощи правила (7.1.10).

Сходное правило для интеграла  $\int_{c-h}^{c+h} f(x) \cos \alpha x dx$ , которое легко получается после замены  $\cos \alpha x$  на  $\sin(\alpha x + \frac{\pi}{2})$  и использования (7.1.10), (7.1.11), будет следующим:

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x) \cos \alpha x dx = B_{-1} f(c-h) + B_0 f(c) + B_1 f(c+h) + R, \quad (7.1.12)$$

$$B_{-1} = \mu \cos \alpha (c-h) - \nu \sin \alpha (c-h), \quad B_0 = \lambda \cos \alpha c,$$

\*) L. N. J. Filon.

$$B_1 = \mu \cos \alpha (c + h) + \nu \sin \alpha (c + h),$$

$$R = \int_{c-h}^{c+h} f'''(x) K_c(x; c, h, \alpha) dx,$$

$\lambda, \mu, \nu$  имеют те же значения, что и в (7.1.11).  $K_c(x; c, h, \alpha)$  есть остаток интегрирования по  $t$  при помощи (7.1.12) функции  $\frac{1}{2}(t-x)^2 E(t-x)$ , и представление его получается из (7.1.11), если заменить  $\sin \alpha t$  на  $\cos \alpha t$  и  $A_0, A_1$  на  $B_0$  и  $B_1$ .

Вновь будем считать, что в интегралах Фурье (7.1.1) и (7.1.2) функция  $f(x)$  задана в системе равноотстоящих точек  $x_i = ih$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) и при больших  $x$  выполняет условие  $|f(x)| \leq Ax^{-1-\epsilon}$  ( $\epsilon > 0$ ). Если полуось  $[0, \infty)$  разделить на участки длины  $2h$ :  $[0, 2h], [2h, 4h], \dots$  и к интегралу по каждому из таких участков применить правило (7.1.10), когда рассматривается  $S(\alpha)$ , либо правило (7.1.12), когда рассматривается  $C(\alpha)$ , получим следующие правила для численного выполнения синус- и косинус-преобразований Фурье:

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx = \\ &= \nu f(0) + 2\mu \sum_{i=1}^{\infty} f(2ih) \sin 2i\alpha h + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} f[(2i+1)h] \sin (2i+1)\alpha h + R, \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{2ih}^{(2i+2)h} f'''(x) K_s(x; (2i+1)h, h, \alpha) dx;$$

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx = \\ &= \mu f(0) + 2\mu \sum_{i=1}^{\infty} f(2ih) \cos 2i\alpha h + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} f[(2i+1)h] \cos (2i+1)\alpha h + R. \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

В последнем равенстве (7.1.14) остаток  $R$  может быть записан в той же форме, что и в (7.1.13), с тем различием, что ядро остатка  $K_s(x; (2i+1)h, h, \alpha)$  должно быть заменено на  $K_c(x; (2i+1)h, h, \alpha)$ .

Пусть  $n = 3$ . Правила вычисления для этого случая будут аналогами ньютонова правила трех восьмых для постоянной весовой функции.

Запишем равенство (7.1.3) при  $n = 3$  в виде

$$\int_a^{a+3h} f(x) \sin \alpha x dx = A_0 f(a) + A_1 f(a+h) + A_2 f(a+2h) + A_3 f(a+3h) + R. \quad (7.1.15)$$

Если выполнить алгебраическое интерполирование  $f(x)$  по четырем значениям  $f(a+kh)$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) и потребовать, чтобы равенство без остатка выполнялось

точно при любых  $f(a + kh)$ , для коэффициентов получатся значения

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{6\alpha^4 h^3} [\lambda_0 \cos \alpha a + \mu_0 \sin \alpha a], \\ A_3 &= \frac{1}{6\alpha^4 h^3} [-\lambda_0 \cos \alpha (a + 3h) + \mu_0 \sin \alpha (a + 3h)], \\ A_1 &= \frac{1}{2\alpha^4 h^3} [\lambda_1 \cos \alpha (a + h) + \mu_1 \sin \alpha (a + h)], \\ A_2 &= \frac{1}{2\alpha^4 h^3} [-\lambda_1 \cos \alpha (a + 2h) + \mu_1 \sin \alpha (a + 2h)], \\ \lambda_0 &= 2(3 - \alpha^2 h^2) \sin 3\alpha h - 6\alpha h \cos 3\alpha h - 6\alpha h (2 - \alpha^2 h^2), \\ \mu_0 &= 2(3 - \alpha^2 h^2) \cos 3\alpha h + 6\alpha h \sin 3\alpha h - (6 - 11\alpha^2 h^2), \\ \lambda_1 &= 8\alpha h \cos 2\alpha h - 3(2 - \alpha^2 h^2) \sin 2\alpha h + 10\alpha h \cos \alpha h - 6(1 - \alpha^2 h^2) \sin \alpha h, \\ \mu_1 &= -3(2 - \alpha^2 h^2) \cos 2\alpha h - 8\alpha h \sin 2\alpha h + 6(1 - \alpha^2 h^2) \cos \alpha h + 10\alpha h \sin \alpha h. \end{aligned}$$

Относительно остаточного члена  $R$ , имеющего сложное выражение, мы отметим только, что он может быть представлен посредством  $f^{(4)}(x)$  в форме

$$R = \int_a^{a+3h} f^{(4)}(x) K_s(x; a, h, \alpha) dx, \quad (7.1.16)$$

где  $K_s(x; a, h, \alpha)$  есть остаток приближенного интегрирования по  $t$  функции  $E(t-x) \frac{(t-x)^3}{3!}$  при помощи правила (7.1.15).

Сходное правило вычисления интеграла с функцией  $\cos \alpha x$  имеет вид

$$\int_a^{a+3h} f(x) \cos \alpha x dx = B_0 f(a) + B_1 f(a+h) + B_2 f(a+2h) + B_3 f(a+3h) + R, \quad (7.1.17)$$

$$B_0 = \frac{1}{6\alpha^4 h^3} [\mu_0 \cos \alpha a - \lambda_0 \sin \alpha a],$$

$$B_3 = \frac{1}{6\alpha^4 h^3} [\mu_0 \cos \alpha (a + 3h) + \lambda_0 \sin \alpha (a + 3h)],$$

$$B_1 = \frac{1}{2\alpha^4 h^3} [\mu_1 \cos \alpha (a + h) - \lambda_1 \sin \alpha (a + h)],$$

$$B_2 = \frac{1}{2\alpha^4 h^3} [\mu_1 \cos \alpha (a + 2h) + \lambda_1 \sin \alpha (a + 2h)],$$

$$R = \int_a^{a+3h} f^{(4)}(x) K_c(x; a, h, \alpha) dx.$$

$K_c(x; a, h, \alpha)$  есть остаток интегрирования по  $t$  функции  $\frac{1}{3!} E(t-x)(t-x)^3$  по правилу (7.1.17).

Для численного осуществления преобразований Фурье (7.1.1) и (7.1.2) полюсь  $[0, \infty)$  разделим на участки  $[0, 3h]$ ,  $[3h, 6h]$ , ... Если к интегралу по каждому участку применить правила (7.1.15) — (7.1.17) и результаты суммировать по всем участкам, получим при прежних предположениях об  $f(x)$  следующие представления

$S(\alpha)$  и  $C(\alpha)$ :

$$\begin{aligned}
 S(\alpha) = & \int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx = \frac{\lambda_0}{6\alpha^4 h^3} f(0) + \frac{\mu_0}{6\alpha^4 h^3} \sum_{k=1}^{\infty} f(3kh) \sin \alpha 3kh + \\
 & + \frac{\mu_1}{2\alpha^4 h^3} \sum_{k=0}^{\infty} \{f[(3k+1)h] \sin \alpha (3k+1)h + f[(3k+2)h] \sin \alpha (3k+2)h\} + \\
 & + \frac{\lambda_1}{2\alpha^4 h^3} \sum_{k=0}^{\infty} \{f[(3k+1)h] \cos \alpha (3k+1)h - f[(3k+2)h] \cos \alpha (3k+2)h\} + R,
 \end{aligned} \tag{7.1.18}$$

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{3h} f^{(4)}(3kh+x) K_s(3kh+x; 3kh, h, \alpha) dx;$$

$$\begin{aligned}
 C(\alpha) = & \frac{\mu_0}{6\alpha^4 h^3} f(0) + \frac{\mu_0}{3\alpha^4 h^3} \sum_{k=1}^{\infty} f(3kh) \cos \alpha 3kh + \\
 & + \frac{\mu_1}{2\alpha^4 h^3} \sum_{k=0}^{\infty} \{f[(3k+2)h] \cos \alpha (3k+2)h + f[(3k+1)h] \cos \alpha (3k+1)h\} + \\
 & + \frac{\lambda_1}{2\alpha^4 h^3} \sum_{k=0}^{\infty} \{f[(3k+2)h] \sin \alpha (3k+2)h - f[(3k+1)h] \sin \alpha (3k+1)h\} + R,
 \end{aligned} \tag{7.1.19}$$

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{3h} f^{(4)}(3kh+x) K_c(3kh+x; 3kh, h, \alpha) dx.$$

Положим  $n = 4$ . Если выполнить интерполирование  $f(x)$  по пяти значениям в точках  $x_k = a + kh$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ), то для вычисления интеграла по отрезку  $[a, a + 4h]$  получатся приведенные ниже правила интегрирования, верные для всяких алгебраических многочленов четвертой степени:

$$\begin{aligned}
 \int_a^{a+4h} f(x) \sin \alpha x dx \approx & A_0 f(a) + A_1 f(a+h) + A_2 f(a+2h) + \\
 & + A_3 f(a+3h) + A_4 f(a+4h), \tag{7.1.20}
 \end{aligned}$$

$$\theta = h\alpha,$$

$$\lambda_0 = (22\theta^2 - 24) \cos 4\theta + (6\theta^3 - 36\theta) \sin 4\theta + 24\theta^4 - 70\theta^2 + 24,$$

$$\mu_0 = (6\theta^3 - 36\theta) \cos 4\theta + (24 - 22\theta^2) \sin 4\theta + 50\theta^3 - 60\theta,$$

$$\lambda_1 = (28\theta^2 - 24) \cos 3\theta + (8\theta^3 - 42\theta) \sin 3\theta + (24 - 52\theta^2) \cos \theta + (54\theta - 240\theta^3) \sin \theta,$$

$$\mu_1 = (8\theta^3 - 42\theta) \cos 3\theta + (24 - 28\theta^2) \sin 3\theta + (240\theta^3 - 54\theta) \cos \theta + (24 - 52\theta^2) \sin \theta,$$

$$\mu_2 = (6\theta^3 - 24\theta) \cos 2\theta + (12 - 19\theta^2) \sin 2\theta;$$

$$A_0 = h(24\theta^3)^{-1} [\lambda_0 \cos \alpha a + \mu_0 \sin \alpha a],$$

$$A_1 = -h(6\theta^3)^{-1} [\lambda_1 \cos \alpha(a+h) + \mu_1 \sin \alpha(a+h)],$$

$$A_2 = h\theta^{-5}\mu_2 \sin \alpha (a + 2h),$$

$$A_3 = -h(6\theta^5)^{-1} [-\lambda_1 \cos \alpha (a + 3h) + \mu_1 \sin \alpha (a + 3h)],$$

$$A_4 = h(24\theta^5)^{-1} [-\lambda_0 \cos \alpha (a + 4h) + \mu_0 \sin \alpha (a + 4h)];$$

$$\int_a^{a+4h} f(x) \cos \alpha x dx \approx B_0 f(a) + B_1 f(a+h) + B_2 f(a+2h) + \\ + B_3 f(a+3h) + B_4 f(a+4h), \quad (7.1.21)$$

$$B_0 = h(24\theta^5)^{-1} [\mu_0 \cos \alpha a - \lambda_0 \sin \alpha a],$$

$$B_1 = -h(6\theta^5)^{-1} [\mu_1 \cos \alpha (a+h) - \lambda_1 \sin \alpha (a+h)],$$

$$B_2 = h\theta^{-5}\mu_2 \cos \alpha (a+2h),$$

$$B_3 = -h(6\theta^5)^{-1} [\mu_1 \cos \alpha (a+3h) + \lambda_1 \sin \alpha (a+3h)],$$

$$B_4 = h(24\theta^5)^{-1} [\mu_0 \cos \alpha (a+4h) + \lambda_0 \sin \alpha (a+4h)].$$

При помощи (7.1.20), (7.1.21) без труда получают следующие правила численного синус- и косинус-преобразований:

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx \approx h(24\theta^5)^{-1} \lambda_0 f(0) + h(12\theta^5)^{-1} \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} f(4kh) \sin \alpha 4kh + \\ + h\theta^{-5}\mu_2 \sum_{k=0}^{\infty} f[(4k+2)h] \sin \alpha (4k+2)h + \\ + h(6\theta^5)^{-1} \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} \{f[(4k+3)h] \cos \alpha (4k+3)h - f[(4k+1)h] \cos \alpha (4k+1)h\} - \\ - h(6\theta^5)^{-1} \mu_1 \sum_{k=0}^{\infty} \{f[(4k+3)h] \sin \alpha (4k+3)h + f[(4k+1)h] \sin \alpha (4k+1)h\}; \quad (7.1.22)$$

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx \approx h(24\theta^5)^{-1} \mu_0 f(0) + h(12\theta^5)^{-1} \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} f(4kh) \cos \alpha 4kh + \\ + h\theta^{-5}\mu_2 \sum_{k=0}^{\infty} f[(4k+2)h] \cos \alpha (4k+2)h - \\ - h(6\theta^5)^{-1} \mu_1 \sum_{k=0}^{\infty} \{f[(4k+1)h] \cos \alpha (4k+1)h + f[(4k+3)h] \cos \alpha (4k+3)h\} + \\ + h(6\theta^5)^{-1} \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} \{f[(4k+1)h] \sin \alpha (4k+1)h - f[(4k+3)h] \sin \alpha (4k+3)h\}.$$

Выше были изложены правила вычисления преобразований Фурье в том случае, когда известна таблица значений  $f(x)$  в равноотстоящих точках  $x_k = kh$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Могут быть построены сходные правила, когда считаются заданными в точках  $x_k$  не только значения  $f(x_k)$ , но и значения производных до некоторого порядка.

Мы остановимся на случае, когда в точках  $x_k$  известны значения  $f(x_k)$  и  $f'(x_k)$ ; рассмотрим две простейшие формулы такого вида.

Возьмем  $\int_a^b f(x) \sin \alpha x dx$  и для построения правила вычисления интерполируем  $f(x)$  по значениям  $f(a)$ ,  $f'(a)$  и  $f(b)$ ,  $f'(b)$ . Если заменить  $f(x)$  интерполяционным многочленом, получится равенство

$$\int_a^b f(x) \sin \alpha x dx = A_0 f(a) + A_1 f(b) + A'_0 f'(a) + A'_1 f'(b) + R, \quad (7.1.23)$$

$$h = b - a,$$

$$\lambda_0 = 6\alpha h \cos \alpha h - 12 \sin \alpha h + \alpha h (6 + \alpha^2 h^2), \quad \mu_0 = -6\alpha h \sin \alpha h - 12 \cos \alpha h + 12,$$

$$\lambda_1 = 2\alpha h \cos \alpha h - 6 \sin \alpha h + 4\alpha h, \quad \mu_1 = -2\alpha h \sin \alpha h - 6 \cos \alpha h + 6 - \alpha^2 h^2,$$

$$A_0 = \alpha^{-4} h^{-3} [\lambda_0 \cos \alpha a + \mu_0 \sin \alpha a], \quad A_1 = \alpha^{-4} h^{-3} [-\lambda_0 \cos \alpha b + \mu_0 \sin \alpha b],$$

$$A'_0 = \alpha^{-4} h^{-2} [\lambda_1 \cos \alpha a + \mu_1 \sin \alpha a], \quad A'_1 = \alpha^{-4} h^{-2} [\lambda_1 \cos \alpha b - \mu_1 \sin \alpha b],$$

$$R = \int_a^b f^{(4)}(t) K_s(t; a, h, \alpha) dt,$$

$$K_s(t; a, h, \alpha) = \int_a^b \frac{(x-t)^3}{3!} \sin \alpha x dx - A_1 \frac{(b-t)^3}{3!} - A'_1 \frac{(b-t)^2}{2!}.$$

Равенство (7.1.23) без остатка  $R$  выполняется точно, когда  $f(x)$  есть произвольный многочлен третьей степени. Применение его к численному синус-преобразованию Фурье, если считать, что при больших  $x$  функция  $f(x)$  удовлетворяет неравенствам  $|f|, |f'| < Mx^{-1-\epsilon}$ , приводит к правилу

$$S(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx = \lambda_0 \alpha^{-4} h^{-3} f(0) + \lambda_1 \alpha^{-4} h^{-2} f'(0) + \\ + 2\mu_0 \alpha^{-4} h^{-3} \sum_{k=1}^{\infty} f(kh) \sin \alpha kh + 2\lambda_1 \alpha^{-4} h^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} f'(kh) \cos \alpha kh + R, \quad (7.1.24)$$

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^h f^{(4)}(kh+t) K_s(kh+t, kh, h, \alpha) dt.$$

Сходные правила вычислений для интегралов с функцией косинус будут следующими:

$$\int_a^b f(x) \cos \alpha x dx = B_0 f(a) + B_1 f(b) + B'_0 f'(a) + B'_1 f'(b) + R, \quad (7.1.25)$$

$$B_0 = \alpha^{-3} h^{-3} [\mu_0 \cos \alpha a - \lambda_0 \sin \alpha a], \quad B_1 = \alpha^{-4} h^{-3} [\mu_0 \cos \alpha b + \lambda_0 \sin \alpha b],$$

$$B'_0 = \alpha^{-4} h^{-2} [\mu_1 \cos \alpha a - \lambda_1 \sin \alpha a], \quad B'_1 = \alpha^{-4} h^{-2} [-\mu_1 \cos \alpha b - \lambda_1 \sin \alpha b],$$

$$R = \int_a^b f^{(4)}(t) K_c(t; a, h, \alpha) dt,$$

$$K_c(t; a, h, \alpha) = \int_t^b \frac{(x-t)^3}{3!} \cos \alpha x dx - B_1 \frac{(b-t)^3}{3!} - B_1' \frac{(b-t)^2}{2!};$$

$$C(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx = \alpha^{-4} h^{-3} \mu_0 f(0) + \alpha^{-4} h^{-2} \mu_1 f'(0) + \\ + 2\alpha^{-4} h^{-3} \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} f(kh) \cos \alpha kh - 2\alpha^{-4} h^{-2} \mu_1 \sum_{k=1}^{\infty} f'(kh) \sin \alpha kh + R, \quad (7.1.26)$$

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^h f^{(4)}(kh+t) K_c(kh+t; kh, h, \alpha) dt.$$

Рассмотрим <sup>\*</sup>), наконец, интеграл  $\int_{c-h}^{c+h} f(x) \sin \alpha x dx$  и предположим, что в точках  $c-h, c, c+h$  известны значения  $f(x)$  и  $f'(x)$ . Если выполнить интерполирование  $f(x)$  по этим шести значениям и заменить функцию  $f(x)$  интерполяционным многочленом, получится правило интегрирования, верное для алгебраических многочленов пятой степени:

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x) \sin \alpha x dx \approx A_{-1} f(c-h) + A_0 f(c) + A_1 f(c+h) + \\ + A'_{-1} f'(c-h) + A'_0 f'(c) + A'_1 f'(c+h), \quad (7.1.27)$$

$$A_{-1} = hS \cos \alpha (c-h) + hR \sin \alpha (c-h),$$

$$A'_{-1} = -h^2 Q \cos \alpha (c-h) - h^2 P \sin \alpha (c-h),$$

$$A_0 = hN \sin \alpha c,$$

$$A'_0 = -h^2 M \cos \alpha c,$$

$$A_1 = -hS \cos \alpha (c+h) + hR \sin \alpha (c+h),$$

$$A'_1 = -h^2 Q \cos \alpha (c+h) + h^2 P \sin \alpha (c+h);$$

$$\theta = \alpha h,$$

$$\theta^6 M = 16\theta (15 - \theta^2) \cos \theta + 48 (2\theta^2 - 5) \sin \theta,$$

$$\theta^6 N = 16\theta (3 - \theta^2) \sin \theta - 48\theta^2 \cos \theta,$$

$$\theta^6 P = 2\theta (\theta^2 - 24) \sin \theta \cos \theta + 15 (\theta^2 - 4) \cos^2 \theta + \theta^4 - 27\theta^2 + 60,$$

$$\theta^6 Q = 2 [\theta (12 - 5\theta^2) + 15 (\theta^2 - 4) \sin \theta \cos \theta + 2\theta (24 - \theta^2) \cos^2 \theta],$$

$$\theta^6 R = 2 [\theta (156 - 7\theta^2) \sin \theta \cos \theta + 3 (60 - 17\theta^2) \cos^2 \theta - 15 (12 - 5\theta^2)],$$

$$\theta^6 S = \theta (\theta^4 + 8\theta^2 - 24) + \theta (7\theta^2 - 156) \cos^2 \theta + 3 (60 - 17\theta^2) \sin \theta \cos \theta.$$

<sup>\*</sup>) E. A. Flinn.

Из (7.1.27) легко получается правило для численного синус-преобразования Фурье:

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx \approx hSf(0) + 2hR \sum_{k=1}^{\infty} f(2kh) \sin \alpha 2kh + \\ + hN \sum_{k=0}^{\infty} f[(2k+1)h] \sin \alpha (2k+1)h - h^2Qf'(0) - \\ - 2h^2Q \sum_{k=1}^{\infty} f'(2kh) \cos \alpha 2kh - h^2M \sum_{k=0}^{\infty} f'[(2k+1)h] \cos \alpha (2k+1)h. \quad (7.1.28)$$

Для интегралов с функцией косинус правила вычислений будут такими:

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x) \cos \alpha x dx \approx B_{-1}f(c-h) + B_0f(c) + B_1f(c+h) + \\ + B'_{-1}f'(c-h) + B'_0f'(c) + B'_1f'(c+h), \quad (7.1.29)$$

$$B_{-1} = hR \cos \alpha (c-h) - hS \sin \alpha (c-h), \\ B'_{-1} = -h^2P \cos \alpha (c-h) + h^2Q \sin \alpha (c-h), \\ B_0 = hN \cos \alpha c, \quad B'_0 = h^2M \sin \alpha c, \\ B_1 = hR \cos \alpha (c+h) + hS \sin \alpha (c+h), \\ B'_1 = h^2P \cos \alpha (c+h) + h^2Q \sin \alpha (c+h);$$

$$C(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx \approx hRf(0) + 2hR \sum_{k=1}^{\infty} f(2kh) \cos \alpha 2kh + \\ + hN \sum_{k=0}^{\infty} f[(2k+1)h] \cos \alpha (2k+1)h - h^2Pf'(0) + \\ + 2h^2Q \sum_{k=1}^{\infty} f'(2kh) \sin \alpha 2kh + h^2M \sum_{k=0}^{\infty} f'[(2k+1)h] \sin \alpha (2k+1)h. \quad (7.1.30)$$

## § 2. Замечание о приведении к квадратурам, имеющим наивысшую алгебраическую степень точности

В этом и следующем параграфах считается, что функция  $f(x)$  задана аналитически и при численном преобразовании Фурье можно распорядиться выбором точек, в которых необходимо будет вычислять значения  $f(x)$ . Чтобы сделать задачу выбора узлов квадратурной формулы не зависящей от значения частоты  $\alpha$ , выполним замену  $\alpha x = x'$  и интегралы (7.1.1), (7.1.2) запишем в форме

$$\alpha S(\alpha) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \sin x dx, \quad (7.2.1)$$



$$\alpha C(\alpha) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cos x \, dx. \quad (7.2.2)$$

Способ приведения этих интегралов к интегралам с положительной весовой функцией, о котором будет говориться ниже, может быть полезным в вычислениях в том случае, когда функция  $f(x)$  будет быстро убывать при  $x \rightarrow \infty$  и частота  $\alpha$  имеет небольшие значения.

Если в (7.2.1) полуось интегрирования  $[0, \infty)$  разделить на отрезки длины  $\pi$ :  $[k\pi, (k+1)\pi]$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), то интеграл можно привести к следующему виду:

$$\alpha S(\alpha) = \int_0^{\pi} F(x) \sin x \, dx, \quad (7.2.3)$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f\left(\frac{k\pi + x}{\alpha}\right). \quad (7.2.4)$$

Когда функция  $f(x)$  имеет высокий порядок гладкости и достаточно быстро убывает при неограниченном возрастании  $x$ ,  $F(x)$  также будет иметь высокий порядок гладкости, и к вычислению (7.2.3) можно применить известные правила интегрирования, имеющие наивысшую алгебраическую степень точности. При выборе частного правила такого вида рациональными являются два следующих пути.

1. Естественной весовой функцией для (7.2.3) будет  $\sin x$ . Соответствующая такому весу квадратурная формула может быть построена на основании общих правил, изложенных в § 1 гл. 3. Так как абсциссы  $x_k$  и коэффициенты  $A_k$  для веса  $p(x) = \sin x$  не табулированы, вычисления здесь практически возможны лишь при малом числе узлов  $x_k$  в квадратурной формуле.

2. За вес можно принять близкую к  $\sin x$  по своему характеру на  $0 \leq x \leq \pi$  якобиеву весовую функцию  $p(x) = x(\pi - x)$ , соответствующую случаю  $\alpha = \beta = 1$ . Интеграл (7.2.3) можно привести к виду

$$\alpha S(\alpha) = \int_0^{\pi} x(\pi - x) \Phi(x) \, dx, \quad \Phi(x) = F(x) \frac{\sin x}{x(\pi - x)}$$

и воспользоваться известными таблицами для интегралов с весом Якоби.

Так как отношение  $\frac{\sin x}{x(\pi - x)}$  есть целая функция  $x$ , переход от естественного веса  $\sin x$  к весу Якоби  $p(x) = x(\pi - x)$  не повлечет, вообще говоря, за собой заметной потери точности.

При вычислении сходным путем интеграла (7.2.2), можно отделить от полуоси

$[0, \infty)$  отрезок  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , оставшуюся часть  $\left[\frac{\pi}{2}, \infty\right)$  разделить на отрезки длины  $\pi$ :  $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ ,  $\left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$ , ... и привести интеграл к форме

$$\alpha C(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cos x \, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x) \cos x \, dx, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f\left(\frac{k\pi + x}{\alpha}\right).$$

К вычислению каждого из последних интегралов можно применить квадратурные правила с якобиевым весом. Для этого достаточно первый из них преобразовать к виду

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx, \quad \left[ \varphi(x) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cos x \left/ \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right. \right]$$

и второй — к виду

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2 \right] \varphi(x) dx, \quad \left\{ \varphi(x) = \left[ \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2 \right]^{-1} \cdot F(x) \cos x \right\},$$

либо можно, что менее экономно по количеству труда, полюсь  $[0, \infty)$  разбить на отрезки длины  $\frac{\pi}{2}$ , преобразовать интеграл  $\alpha C(\alpha)$  к виду

$$\alpha C(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x F(x) dx, \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f\left(\frac{k\pi + x}{\alpha}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f\left(\frac{k\pi - x}{\alpha}\right),$$

и затем воспользоваться правилом квадратур для веса Якоби, приведя интеграл к виду

$$\alpha C(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-1} F(x) \cos x.$$

### § 3. О способах вычисления, основанных на приближении функции рациональными дробями

Если  $f(x)$  будет медленно убывать при  $x \rightarrow \infty$ , то методы численного выполнения преобразований Фурье, изложенные выше, будут требовать для достижения высокой точности нахождения значений  $f(x)$  в большом числе точек. Применение их к вычислениям становится поэтому затруднительным. В связи с этим возникла потребность в создании таких способов вычисления интегралов (7.1.1), (7.1.2), которые заранее учитывали бы скорость убывания  $f(x)$  при больших  $x$  и требовали нахождения  $f(x)$  в возможно малом числе точек.

В первую очередь следовало, по-видимому, рассмотреть такие часто встречающиеся в научных и технических задачах функции  $f(x)$ , которые при больших значениях  $x$  убывают со скоростью некоторой отрицательной степени  $x$  и представимы в виде

$f(x) = \frac{F(x)}{(1+x)^s}$  ( $s > 0$ ), где  $F(x)$  непрерывна на полуоси  $[0, \infty)$  и имеет конечный предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty)$ .

Для построения квадратурной формулы необходимо было избрать систему функций  $\omega_n(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) таких, чтобы  $F(x)$  можно было хорошо приблизить ли-

нейными комбинациями  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \omega_k(x)$ , выбирая в них коэффициенты  $a_k$ . Простейшими элементарными функциями такого рода будут рациональные функции. Если не делать относительно  $F(x)$  никаких дополнительных предположений и считать  $F(x)$  любой функцией, обладающей указанными свойствами, то в качестве  $\omega_n(x)$  может быть взята какая угодно достаточно полная система рациональных функций  $\frac{r(x)}{q(x)}$ , у которых степень числителя  $r(x)$  не выше степени знаменателя  $q(x)$ , и нули  $q(x)$  лежат в комплексной плоскости вне  $[0, \infty)$  и не сгущаются нигде к этой полуоси.

Выбор таких функций  $\frac{r(x)}{q(x)}$  должен быть подчинен тогда лишь одному ограничению: все величины, необходимые для построения правила квадратур, о котором речь будет идти ниже, должны быть эффективно находимыми и подсчет их должен требовать не слишком большого труда. Чтобы удовлетворить этому последнему условию и сохранить связь с теорией ортогональных многочленов, за  $\omega_n(x)$  были приняты дроби

$$\frac{1}{(1+x)^n} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Перед построением правила вычисления интегралы (7.1.1), (7.1.2) целесообразно предварительно преобразовать. Для определенности записи будем иметь в виду интеграл с функцией  $\sin \alpha x$  (7.1.1). Все изложенное может быть повторено для косинус-преобразования (7.1.2).

Чтобы весовая функция, с которой позже нам придется иметь дело, была неотрицательной, преобразуем  $S(\alpha)$  к виду

$$S(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) (1 + \sin \alpha x) dx - \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Второй из интегралов не зависит от частоты  $\alpha$  и его, при сделанном предположении о возможности представления  $f(x)$  в форме  $f(x) = F(x) (1+x)^{-s}$  с непрерывным множителем  $F(x)$  на  $[0, \infty)$ , подстановкой  $t = (1+x)^{-1}$  можно привести к

интегралу с весом Якоби  $\int_0^1 t^{s-1} F\left(\frac{1}{t} - 1\right) dt$  и вычислить при помощи соответствующих таблиц.

Мы остановим свое внимание на первом из интегралов:

$$I = \int_0^{\infty} f(x) (1 + \sin \alpha x) dx.$$

С целью сделать абсциссы и коэффициенты не зависящими от  $\alpha$ , выполняют

подстановку  $\alpha x = x'$ :

$$I = \int_0^{\infty} \varphi(x) (1 + \sin x) dx, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Предположим теперь, что  $\varphi(x)$  представима в виде  $\varphi(x) = (1+x)^{-s} \Phi(x)$ , где  $\Phi(x)$  непрерывна при  $0 \leq x < \infty$ , имеет  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = \Phi(\infty)$ , и рассмотрим следующее правило вычисления  $I$ :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1 + \sin x}{(1+x)^s} \Phi(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A'_k \Phi(x_k) \quad (s > 1, \quad 0 \leq x_k < \infty); \quad (7.3.1)$$

$A'_k$  и  $x_k$  выбираются так, чтобы равенство выполнялось точно для  $\Phi(x) = (1+x)^{-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n-1$ ).

При помощи известных результатов о квадратурах высшей алгебраической степени точности, изложенных в § 1 гл. 3, можно показать, что такой выбор  $A'_k$  и  $x_k$  возможен при всяком  $n$ . Величины  $t_k = \frac{1}{1+x_k}$  должны быть корнями многочлена  $P_n(t)$  степени  $n$  от аргумента  $t = \frac{1}{1+x}$ , ортогонального ко всякому многочлену  $Q(t)$  того же аргумента  $t$  степени, меньшей  $n$ , в смысле равенства

$$\int_0^{\infty} \frac{1 + \sin x}{(1+x)^s} P_n(t) Q(t) dx = 0.$$

Коэффициенты же  $A'_k$  должны иметь значения

$$A'_k = \int_0^{\infty} \frac{1 + \sin x}{(1+x)^s} \frac{\omega(t)}{(t-t_k)\omega'(t_k)} dx, \quad \omega(t) = (t-t_1) \dots (t-t_n).$$

Для вычисления коэффициентов и абсцисс была принята другая форма записи правила интегрирования, несущественно отличающаяся от (7.3.1):

$$I = \int_0^{\infty} [1 + \sin x] \frac{\Phi(x)}{(1+x)^s} dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\Phi(x_k)}{(1+x_k)^s}. \quad (7.3.2)$$

$$A_k = A'_k (1+x_k)^s, \quad s > 1.$$

Величины  $x_k$  и  $A_k$  для  $n = 1(1)8$  и для восемнадцати часто встречающихся значений показателя степени  $s$  приведены в табл. 12.

В таблице 13 приведены значения  $x_k$  и  $A_k$  квадратурной формулы

$$\int_0^{\infty} [1 + \cos x] \frac{\Phi(x)}{(1+x)^s} dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\Phi(x_k)}{(1+x_k)^s}, \quad (7.3.3)$$

верной при  $\Phi(x) = (1+x)^{-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n-1$ ).

Правило (7.3.3) связано с косинус-преобразованием Фурье.

## ГЛАВА 8

## ЧИСЛЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА

### § 1. Приведение интеграла Меллина к простейшему виду. Условия выбора параметров квадратурной формулы

Обращение одностороннего преобразования Лапласа  $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx$  дается интегралом Меллина

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xp} F(p) dp \quad (0 < x < \infty). \quad (8.1.1)$$

Функция  $F(p)$  является аналитической, регулярной в комплексной полуплоскости справа от некоторой прямой, параллельной мнимой оси. Всегда можно считать, что этой прямой является мнимая ось плоскости  $p$  и особые точки  $F(p)$  лежат либо на самой мнимой оси, либо слева от нее. За  $c$  может быть взято любое, сколь угодно малое положительное число:  $c = \varepsilon > 0$ . Такое приведение достигается при помощи параллельного переноса осей координат и всюду ниже считается выполненным.

В интеграл (8.1.1) входит еще параметр  $x$ . Чтобы сделать выбор коэффициентов и узлов правила квадратур, о котором будет говориться ниже, не зависящим от значения  $x$ , выполняют замену  $px = p'$ . После этого интеграл Меллина будет приведен к следующей канонической форме:

$$I(\Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p \Phi(p) dp, \quad (8.1.2)$$

$$\Phi(p) = F(p/x).$$

Перед изложением способов вычисления этого интеграла необходимо сделать предварительное замечание. Хорошо известно, что преобразование Меллина тесно связано с преобразованием Фурье и легко может быть приведено к нему. Если в (8.1.1) положить  $p = c + i\tau$  ( $-\infty < \tau < \infty$ ) и принять  $t$  за переменную интегрирования, то интегралу без труда можно придать следующую форму:

$$f(x) = \frac{e^{cx}}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} [F(c + i\tau) + F(c - i\tau)] \cos x\tau d\tau + \right. \\ \left. + i \int_0^{\infty} [F(c + i\tau) - F(c - i\tau)] \sin x\tau d\tau \right\}.$$

Это позволяет, принципиально говоря, преобразование Меллина свести к косинус- и синус-преобразованиям Фурье и выполнить его путем известных для последних преобразований методов. Но такой путь, по-видимому, весьма часто будет требовать затраты большой вычислительной работы, так как известные методы численного преобразования Фурье не учитывают особенностей функции  $F$ , связанных с обращением

преобразования Лапласа. В частности, в них не учитывается форма области регулярности  $F(p)$ , что является существенным в преобразовании Лапласа, и характер поведения  $F(p)$  при удалении точки  $p$  на бесконечность.

Возвратимся к (8.1.2). Для вычисления интеграла строятся правила, аналогичные обычным:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p \Phi(p) dp \approx \sum_{k=1}^n A_k \Phi(p_k). \quad (8.1.3)$$

Точки  $p_k$  могут быть расположены в любом месте справа от мнимой оси и  $A_k$  могут быть комплексными числами. Остановимся сейчас на принципах выбора этих параметров.

Будем исходить из некоторой системы аналитических функций  $\omega_1(p), \omega_2(p), \dots$ , регулярных в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$ .

Образует линейную комбинацию  $s_m(p) = \sum_{v=1}^m a_v \omega_v(p)$  и допустим, что функции  $\omega_v(p)$  взяты так, чтобы при помощи подбора  $m$  и  $a_v$  можно было  $\Phi(p)$  приблизить линейной комбинацией  $s_m(p)$  сколь угодно точно в любой части вида  $\operatorname{Re} p \geq \varepsilon > 0$  правой полуплоскости\*).

После избрания  $\omega_v(p)$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) параметрами  $A_k$  и  $p_k$ , численные значения которых являются произвольными, естественно распорядиться так, чтобы равенство (8.1.3) выполнялось точно для возможно большего числа первых функций  $\omega_v(p)$ .

Чтобы описать правила выбора функций  $\omega_v(p)$ , необходимо обратить внимание на некоторые простые особенности функций  $F(p)$ , являющихся лапласовыми изображениями. Выше говорилось о том, что  $F(p)$  регулярна в полуплоскости вида  $\operatorname{Re} p > d$ . Кроме того,  $F(p)$  стремится к нулю при удалении  $p$  на бесконечность, если выполнено условие  $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$ ; при этом стремление к нулю для большого числа функций  $F(p)$  будет происходить со скоростью некоторой степени  $\frac{1}{p}$  и  $F(p)$  будет представима в виде

произведения  $F(p) = \left(\frac{1}{p}\right)^s G(p)$  ( $\arg p = 0$  при  $p > 0$ ), где  $G(p)$  — функция, ограниченная либо в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > d$ , либо в секторе  $|\arg p| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, |p| > R$ .

Сходными свойствами будут обладать и функции  $\Phi(p)$  в канонической форме интеграла Меллина (8.1.2):  $\Phi(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$  и представима

в виде  $\Phi(p) = \frac{1}{p^s} \varphi(p)$ , где  $\varphi(p)$  ограничена в полуплоскостях вида  $\operatorname{Re} p \geq \delta > 0$

или в указанных выше секторах. Будем считать, что показатель степени  $s$ , определяющий скорость стремления  $\Phi(p)$  к нулю, нам известен, и интеграл (8.1.2) мы заме-

ним на  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{e^p}{p^s} \varphi(p) dp$ . Для него будем строить правило вычисления вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{e^p}{p^s} \varphi(p) dp = \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p_k) + R(\varphi). \quad (8.1.4)$$

\*) При выяснении наглядных соображений, которые лежат в основании принципа выбора  $\omega_v(p)$  и параметров  $p_k, A_k$ , мы не будем останавливаться на описании условий, при которых такое приближение возможно.

Простейшими функциями  $\omega_\nu(p)$ , которые могут быть взяты для приближения  $\varphi(p)$ , будут рациональные функции  $\frac{Q(p)}{P(p)}$ , у которых нули знаменателя лежат либо слева от мнимой оси, либо на самой оси и степень числителя  $Q(p)$  не больше степени знаменателя.

Если не делать никаких дополнительных предположений о функции  $\varphi(p)$  и строить правило интегрирования (8.1.4), от которого можно было бы ожидать, что оно будет пригодным для вычисления интегралов от всякой функцией  $\varphi(p)$  указанного выше вида, то за систему функций  $\omega_\nu(p)$  можно взять любую достаточно полную систему рациональных дробей, обладающих перечисленными свойствами. Единственное дополнительное требование, которому следует подчинить такую систему дробей, состоит в том, что для нее задача нахождения параметров  $A_k$  и  $p_k$  должна быть эффективно разрешимой.

Наиболее просто за функции  $\omega_\nu(p)$  было принять систему степеней  $\frac{1}{p}$ :  $\omega_\nu(p) = \frac{1}{p^{\nu-1}}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ). Для такой системы функций были в некоторых случаях произведены вычисления  $A_k$  и  $p_k$ . Для более узких классов функций  $\varphi(p)$  и, следовательно, преобразований Лапласа частного вида может быть указан другой выбор системы  $\omega_\nu(p)$ , когда свойства  $\omega_\nu(p)$  будут более тесно связаны со свойствами  $\varphi(p)$ . Приводимые ниже примеры поясняют эту мысль достаточно наглядно.

В весьма большом числе случаев функции  $F(p)$  оказываются однозначными и особыми точками их являются полюсы с конечным числом мест их сгущения. Последние могут располагаться на конечном расстоянии или на бесконечности. Часто в приложениях встречаются три следующих типа расположения особых точек  $F(p)$ .

1. Полюсы  $F(p)$  сгущаются в некоторой точке  $\alpha$ , лежащей в конечной части плоскости. Начало координат можно всегда перенести в эту точку и считать \*)  $\alpha = 0$ . Каждый полюс функции  $F(p)$  будет вместе с тем полюсом  $\varphi(p)$  и последние будут сгущаться к началу координат  $p = 0$ .

В этих условиях система обратных степеней  $p$ :  $\omega_\nu(p) = \frac{1}{p^{\nu-1}}$  будет давать удобное орудие для приближения  $\varphi(p)$ , и можно ожидать, что правило квадратур, построенное на их основе, будет давать хорошую точность.

2. Полюсы  $F(p)$  сгущаются к бесконечности и располагаются вблизи мнимой оси или прямой линии, ей параллельной, по закону, асимптотически близкому к расположению точек арифметической прогрессии  $a \pm vhi$  ( $v = 0, 1, \dots$ ). Здесь можно рассчитывать получить лучшее по точности правило интегрирования, если за основу для построения (8.1.4) принять не обратные целые степени  $\frac{1}{p^{\nu-1}}$ , а рациональные

функции  $\frac{1}{p - a \pm vhi}$  и их степени.

3. Особые точки  $F(p)$  лежат вблизи отрицательной действительной полуоси  $-\infty < p < 0$ , асимптотически приближаясь к точкам  $-(a + vh)$  ( $v = 0, 1, \dots$ ). Как и в предыдущем случае, здесь более выгодно пользоваться не отрицательными степенями  $p$ , а изменить выбор функций  $\omega_\nu(p)$ , взяв, например,  $\omega_\nu(p) = \frac{1}{p + a + vh}$ .

\*) При этом может оказаться, что в канонической форме интеграла (8.1.4) нельзя взять сколь угодно малым и значения  $\epsilon$  будут ограничены снизу некоторым числом, большим нуля.

## § 2. Правило наивысшей степени точности

Параметры  $A_k$  и  $p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) правила вычисления (8.1.4) выбираются так, чтобы равенство выполнялось точно для первых  $2n$  отрицательных степеней  $p$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} p^{-s} e^p p^{-v} dp = \frac{1}{\Gamma(s+v)} = \sum_{k=1}^n A_k p_k^{-v} \quad (v = 0, 1, \dots, 2n-1). \quad (8.2.1)$$

Этим требованием  $A_k$  и  $p_k$  определяются единственным образом. Если ввести многочлен степени  $n$  от  $\frac{1}{p}$ :

$$\begin{aligned} P_n(1/p) &= (-1)^n e^{-p} p^{n+s-1} \frac{d^n}{dp^n} (e^p p^{-n-s+1}) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)(n+s-1)(n+s)\dots(n+s+k-2)}{k!} p^{-k}, \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

то  $p_k$  должны быть корнями этого многочлена, коэффициенты же  $A_k$  должны иметь значения

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} p^{-s} e^p L_k(p^{-1}) dp, \quad L_k(p^{-1}) = \prod_{j=1}^n (p^{-1} - p_j^{-1}) \left[ \prod_{j=1}^{n'} (p_k^{-1} - p_j^{-1}) \right]^{-1}. \quad (8.2.3)$$

Знак  $'$ , стоящий у произведения  $\Pi$ , означает, что должен быть пропущен множитель, отвечающий значению  $j = k$ .

Если ввести переменную  $x = \frac{1}{p}$ , то можно показать, что многочлены  $P_n(x)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$x^2 P_n'' + (sx - 1) P_n' - n(n + s - 1) P_n = 0,$$

из которого легко получается система уравнений для нахождения значений  $p_k$ :

$$\sum_{j=1}^n \frac{2}{p_k - p_j} + 1 - \frac{2n - 2 + s}{p_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8.2.4)$$

Система имеет простой физический смысл в теории плоского электрического поля. Через многочлены  $P_n(x)$  коэффициенты  $A_k$  имеют следующие выражения:

$$A_k = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!(2n-2+s)}{\Gamma(n+s-1) P_{n-1}(x_k) P_n'(x_k)}. \quad (8.2.5)$$

В таблице 14 даны значения  $A_k$  и  $p_k$  для  $n = 1(1)10$  и  $s = 0,1(0,1)3$ ,

$$s = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \frac{11}{4}; \quad s = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}.$$



### § 3. Правила вычислений с равными коэффициентами

Идеи Чебышева о построении квадратурных формул с равными коэффициентами могут быть перенесены \*) и на преобразование Меллина:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} p^{-s} e^p \varphi(p) dp \approx \frac{1}{n\Gamma(s)} \sum_{k=1}^n \varphi(p_k). \quad (8.3.1)$$

Множитель, стоящий перед суммой в правой части, получится, если потребовать, чтобы равенство было верным для  $\varphi(p) \equiv 1$ . Узлы формулы  $p_k$  находятся из требования, чтобы формула давала точный результат для  $n$  первых отрицательных степеней  $p$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} p^{-s} e^p p^{-\nu} dp = \frac{1}{\Gamma(s+\nu)} = \frac{1}{n\Gamma(s)} \sum_{k=1}^n p_k^{-\nu} = \frac{s_\nu}{n\Gamma(s)} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Эти равенства дают значения сумм  $s_\nu$  отрицательных степеней  $p_k$ .

Если ввести многочлен  $\omega_n(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n$ , для которого  $x_k = \frac{1}{p_k}$  будут корнями, то соотношения Ньютона между  $A_k$  и  $s_k$  позволят последовательно найти коэффициенты  $A_k$ . В рассматриваемом случае эти соотношения будут следующими:

$$\begin{aligned} \frac{n\Gamma(s)}{\Gamma(s+1)} + A_1 &= 0, \\ \frac{n\Gamma(s)}{\Gamma(s+2)} + A_1 \frac{n\Gamma(s)}{\Gamma(s+1)} + 2A_2 &= 0, \\ \frac{n\Gamma(s)}{\Gamma(s+3)} + A_1 \frac{n\Gamma(s)}{\Gamma(s+2)} + A_2 \frac{n\Gamma(s)}{\Gamma(s+1)} + 3A_3 &= 0, \\ \dots &\dots \dots \\ \frac{n\Gamma(s)}{\Gamma(s+n)} + A_1 \frac{n\Gamma(s)}{\Gamma(s+n-1)} + \dots + nA_n &= 0. \end{aligned}$$

Значения  $A_k$ , найденные отсюда, при произвольном  $s$  имеют громоздкий вид. Вычисления были сделаны в случае  $s = 1$ . Первые десять многочленов  $\omega_k(x)$  приведены ниже:

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= x - 1, \\ \omega_2(x) &= x^2 - 2x + \frac{3}{2}, \\ \omega_3(x) &= x^3 - 3x^2 + \frac{15}{4}x - \frac{29}{12}, \\ \omega_4(x) &= x^4 - 4x^3 + 7x^2 - \frac{62}{9}x + \frac{289}{72}, \end{aligned}$$

\*) Salzer [14].

$$\omega_5(x) = x^5 - 5x^4 + \frac{45}{4}x^3 - \frac{535}{36}x^2 + \frac{1805}{144}x - \frac{1627}{240},$$

$$\omega_6(x) = x^6 - 6x^5 + \frac{33}{2}x^4 - \frac{82}{3}x^3 + \frac{481}{16}x^2 - \frac{4537}{200}x + \frac{27769}{2400},$$

$$\omega_7(x) = x^7 - 7x^6 + \frac{91}{4}x^5 - \frac{1631}{36}x^4 + \frac{4417}{72}x^3 - \frac{1\,06351}{1800}x^2 +$$

$$+ \frac{53\,02619}{1\,29600}x - \frac{180\,44381}{9\,07200},$$

$$\omega_8(x) = x^8 - 8x^7 + 30x^6 - \frac{628}{9}x^5 + \frac{4037}{36}x^4 - \frac{3277}{25}x^3 + \frac{9\,22919}{8100}x^2 -$$

$$- \frac{29\,22187}{39690}x + \frac{1455\,11171}{42\,33600},$$

$$\omega_9(x) = x^9 - 9x^8 + \frac{153}{4}x^7 - \frac{407}{4}x^6 + \frac{3027}{16}x^5 - \frac{1\,03911}{400}x^4 +$$

$$+ \frac{6\,50239}{2400}x^3 - \frac{84\,99571}{39200}x^2 + \frac{414\,78457}{3\,13600}x - \frac{15146\,11753}{254\,01600},$$

$$\omega_{10}(x) = x^{10} - 10x^9 + \frac{95}{2}x^8 - \frac{1280}{9}x^7 + \frac{43235}{144}x^6 - \frac{1\,70381}{360}x^5 + \frac{14\,90251}{2592}x^4 -$$

$$- \frac{173\,63761}{31752}x^3 + \frac{4151\,58089}{10\,16064}x^2 - \frac{32552\,25203}{137\,16864}x + \frac{14\,23249\,22009}{13716\,86400}.$$

Значения корней  $x_k = 1/p_k$  этих многочленов и узлов  $p_k$  формулы (8.3.1) для  $n = 1(1)10$  приведены в табл. 16.

#### § 4. Интерполяционный метод

При рассмотрении интеграла Меллина

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xp} F(p) dp \quad (8.4.1)$$

будем считать, что  $F(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq c$  ( $c > 0$ ). Допустим, кроме того, что  $F(p)$  при  $p \rightarrow \infty$  стремится к нулю как некоторая отрицательная степень  $p$  и  $F(p)$  представима в виде  $F(p) = p^{-s} \Phi(p)$ , где  $\Phi(p)$  — функция, ограниченная в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq c$ . Интеграл Меллина (8.4.1) будем брать в форме

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p^{-s} e^{xp} \Phi(p) dp. \quad (8.4.2)$$

Пусть на полуоси  $[c, \infty)$  взяты  $n$  произвольных точек  $c \leq p_1 < p_2 < \dots < p_n$  и в них известны значения  $\Phi(p_k)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) функции  $\Phi$ . Для интерполирования  $\Phi$  по этим значениям берут обычно простейшие рациональные функции переменной  $p$ . Построим многочлен  $L\left(\frac{1}{p}\right)$  от переменной  $\frac{1}{p}$  степени  $\leq n-1$ , удовлетворяющий

условиям  $L\left(\frac{1}{p_k}\right) = \Phi(p_k)$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Такой многочлен дается следующей формулой Лагранжа вида:

$$L\left(\frac{1}{p}\right) = \sum_{k=1}^n L_k\left(\frac{1}{p}\right) \Phi(p_k),$$

$$L_k\left(\frac{1}{p}\right) = \prod_{l=1}^n (p^{-1} - p_l^{-1}) \left[ \prod_{j=1}^n (p_k^{-1} - p_j^{-1}) \right]^{-1}. \quad (8.4.3)$$

Знак', стоящий у произведения П, означает, что должен быть пропущен множитель, отвечающий  $j = k$ .

Если в (8.4.2) заменить  $\Phi(p)$  приближенно многочленом  $L\left(\frac{1}{p}\right)$ , получится следующее приближенное правило вычисления интеграла Меллина:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xp} p^{-s} \Phi(p) dp \approx \sum_{k=1}^n A_k(x) \Phi(p_k), \quad (8.4.4)$$

$$A_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xp} p^{-s} L_k\left(\frac{1}{p}\right) dp.$$

Предположим теперь, что мы знаем разложение многочленов  $L_k\left(\frac{1}{p}\right)$  по степеням  $\frac{1}{p}$ :

$$L_k\left(\frac{1}{p}\right) = \sum_{v=0}^{n-1} a_{kv} p^{-v}. \quad (8.4.5)$$

Тогда коэффициенты  $A_k(x)$  легко вычисляются и имеют значения

$$A_k(x) = \sum_{v=0}^{n-1} a_{kv} \frac{x^{s+v-1}}{\Gamma(s+v)}. \quad (8.4.6)$$

Для возможности применения (8.4.4) к вычислениям необходимо либо составление таблицы значений многочленов  $A_k(x)$ , либо (что является более удобным при применении вычислительных машин) составление таблицы значений коэффициентов  $a_{kv}$  формулы (8.4.6). Некоторые результаты в этом направлении были получены в случае равноотстоящих точек  $p_k$ . Предположим, что  $\Phi(p)$  дана в точках  $p_k = \alpha + kh$  ( $h > 0$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $\alpha + h \geq c$ ). Не ограничивая общности и выполняя, если потребуется, преобразование  $p = \alpha + p'h$ , мы можем считать, что  $h = 1$  и точки  $p_k$  являются целыми:  $p_k = k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). В этом случае при  $s = 1$  были составлены\*) небольшие таблицы значений коэффициентов  $A_k(x)$  для  $n = 1(1)6$  при  $x = 0,0(0,1)6,0$ ; для  $n = 7$  при  $x = 0,0(0,2)7,0$ ; для  $n = 8$  при  $x = 0,0(0,2)8,0$  и для  $n = 9, 10$  при  $x = 0,0(1)n$ .

\*) Salzer [16]. Обозначения отличны от принятых в книге.

## ГЛАВА 9

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

## § 1. О задаче интегрирования периодической функции

В этой главе будет рассматриваться задача интегрирования периодической функции по отрезку, длина которого равна величине периода. Не уменьшая общности задачи, можно считать период равным  $2\pi$ . Предполагается, что интеграл приведен к следующей форме, аналогичной рассмотренной в предыдущих главах:

$$\int_0^{2\pi} p(x) f(x) dx. \quad (9.1.1)$$

Вес  $p(x)$  — произвольная интегрируемая функция, не эквивалентная нулю,  $f(x)$  — любая периодическая функция, имеющая достаточно высокий порядок гладкости. Выделение  $p(x)$  имеет здесь такую же цель, как и раньше: оно позволит повысить точность интегрирования, так как при помощи  $p(x)$  можно учитывать особенности интегрируемой функции или какие-нибудь другие ее свойства, заранее известные.

Интеграл (9.1.1) имеет тот же вид, что и (1.1.1), но рассматривается сейчас при других предположениях, и это заставляет положить другие принципы в основание построения правил его вычисления. Предположение о периодичности и гладкости функции  $f$  для интеграла (9.1.1) означает, что сама функция  $f$  и производные от нее до некоторого порядка являются непрерывными на  $[0, 2\pi]$  и на концах отрезка  $x = 0$  и  $x = 2\pi$  принимают одинаковые значения. Это обстоятельство побуждает для приближения функции  $f$  на  $[0, 2\pi]$  взять не алгебраические, а тригонометрические многочлены и при построении правила интегрирования исходить из системы функций  $1, \cos kx, \sin kx$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Мы рассмотрим только задачу о вычислении интеграла (9.1.1) при помощи нескольких значений функции  $f^*$ ):

$$\int_0^{2\pi} p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (9.1.2)$$

Параметры  $A_k$  и  $x_k$ , численными значениями которых можно, по условиям задачи, распорядиться, избирают обычно так, чтобы равенство было точным для тригонометрических многочленов возможно высокой степени.

## § 2. Интерполяционные правила интегрирования

Абсциссы  $x_k$  формулы (9.1.2) считаются фиксированными и удовлетворяющими условиям  $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n < 2\pi$ . Интерполируем функцию  $f(x)$  по ее значениям в узлах  $x_k$  при помощи тригонометрического многочлена  $T(x)$  какого-либо вида

$$f(x) = T(x) + r(x) = \sum_{k=1}^n l_k(x) f(x_k) + r(x) \quad (9.2.1)$$

\*) Более общее правило, когда для вычисления интеграла можно пользоваться не только значениями  $f$ , но и значениями производных от заданной функции, рассматривалось в работах Н. П. Кеда [2—4].

и заменим  $f(x)$  в интеграле (9.1.1) ее выражением (9.2.1):

$$\int_0^{2\pi} p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R, \quad (9.2.2)$$

$$A_k = \int_0^{2\pi} p(x) l_k(x) dx, \quad R = \int_0^{2\pi} p(x) r(x) dx. \quad (9.2.3)$$

После отбрасывания  $R$  отсюда получится правило для приближенного вычисления интеграла.

Естественные способы интерполирования  $f$  зависят от значения  $n$ . Пусть  $n$  — число нечетное:  $n = 2p + 1$ . Тогда интерполирование функции  $f$  может быть выполнено при помощи тригонометрического многочлена степени  $p$  общего вида

$$T(x) = T_p(x) = a_0 + \sum_{j=1}^p (a_j \cos jx + b_j \sin jx). \quad (9.2.4)$$

Многочлены  $l_k(x)$  здесь будут

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k) 2 \sin \frac{1}{2}(x - x_k)}, \quad \omega(x) = \prod_{j=1}^n \sin \frac{1}{2}(x - x_j). \quad (9.2.5)$$

Если по таким  $l_k(x)$  вычислить коэффициенты  $A_k$ , то правило интегрирования

$$\int_0^{2\pi} p f dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

будет точным для любых тригонометрических многочленов степени  $p$ .

Когда  $n$  есть число четное,  $n = 2p$ , то при выборе интерполирующего многочлена  $T(x)$  чаще всего встают на один из двух путей, указанных ниже.

1. Функцию  $f(x)$  можно интерполировать при помощи тригонометрического многочлена степени  $p$  вида

$$T(x) = S_p(x) = T_{p-1}(x) + b_p \sin px = a_0 + \sum_{j=1}^{p-1} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) + b_p \sin px. \quad (9.2.6)$$

Многочлены  $l_k(x)$  в этом случае есть

$$l_k(x) = \frac{\omega(x) \sin \frac{1}{2}(x - x_k + 2\delta)}{\omega'(x_k) 2 \sin \frac{1}{2}(x - x_k) \sin \delta}, \quad 2\delta = \sum_{j=1}^n x_j. \quad (9.2.7)$$

Интерполирование при помощи  $S_p(x)$  возможно не всегда и условием возможности его

будет требование  $\delta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j \neq l\pi \quad (l = 1, 2, \dots)$ . Коэффициенты  $A_k$  правила квадратур находятся по многочленам (9.2.7) и правило интегрирования с такими  $A_k$  будет точным для всяких многочленов (9.2.6).

2. Функцию  $f(x)$  интерполируют при помощи многочлена

$$T(x) = C_p(x) = T_{p-1}(x) + a_p \cos px. \quad (9.2.8)$$

Здесь

$$l_k(x) = \frac{\omega(x) \cos \frac{1}{2}(x - x_k + 2\delta)}{\omega'(x_k) 2 \sin \frac{1}{2}(x - x_k) \cos \delta}$$

и условием возможности интерполирования при помощи  $C_p(x)$  будет соблюдение неравенства  $\delta \neq \left(l - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (l = 1, 2, \dots)$ . Коэффициенты  $A_k$  вычисляются по приведенным выше  $l_k(x)$ , как указано в (9.2.3). Соответствующее правило интегрирования будет точным всякий раз, когда  $f(x)$  будет многочленом вида (9.2.8).

### § 3. Правила вычислений, имеющие наивысшую тригонометрическую степень точности

- Формула (9.1.2) содержит  $2n$  параметров  $A_k$  и  $x_k$  и выбором их можно надеяться сделать равенство точным для всяких тригонометрических многочленов  $T_{n-1}(x)$  степени  $n - 1$ , что равносильно точному выполнению уравнений

$$\sum_{k=1}^n A_k = \int_0^{2\pi} p(x) dx, \quad (9.3.1)$$

$$\sum_{k=1}^n A_k \cos jx_k = \int_0^{2\pi} p(x) \cos jx dx, \quad \sum_{k=1}^n A_k \sin jx_k = \int_0^{2\pi} p(x) \sin jx dx, \\ j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Число этих условий равно  $2n - 1$ . Можно ожидать, что один из параметров формулы (9.1.2) останется произвольным. Обычно считают, что произвольным остается один из узлов формулы (9.1.2), и либо придают ему определенное значение, либо выбирают этот узел так, чтобы равенство (9.1.2) было точным, кроме  $f = T_{n-1}(x)$ , еще для одной из двух функций  $\sin nx$  или  $\cos nx$ .

Кроме многочлена  $T_p(x)$  целой степени  $p$  (9.2.4), мы будем рассматривать многочлен  $T_{p+\frac{1}{2}}(x)$  полуцелой степени  $p + \frac{1}{2}$ , определив его равенством

$$T_{p+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{j=0}^p \left[ a_j \cos \left( j + \frac{1}{2} \right) x + b_j \sin \left( j + \frac{1}{2} \right) x \right]. \quad (9.3.2)$$

Многочлен  $\omega_{\frac{n}{2}}(x) = A \prod_{j=1}^n \sin \frac{1}{2}(x - x_j)$  будет целого или полуцелого порядка в зависимости от четности или нечетности  $n$ .

В теории квадратур доказывается, что для точного выполнения равенства (9.1.2) при всяком многочлене степени  $n - 1$ :  $f(x) = T_{n-1}(x)$  необходимо и достаточно соблюдение двух условий:

1. Равенство (9.1.2) является интерполяционным и его коэффициенты имеют значения, указанные в предыдущем параграфе.
2. Многочлен  $\omega_{n/2}(x)$  ортогонален по весу  $\rho(x)$  на  $[0, 2\pi]$  ко всякому тригонометрическому многочлену целой или полуцелой степени  $\frac{n}{2} - 1$ :

$$\int_0^{2\pi} \rho(x) \omega_{n/2}(x) T_{\frac{n}{2}-1}(x) dx = 0. \quad (9.3.3)$$

Можно показать, что при  $\rho(x) \geq 0$  условие (9.3.3) определяет многочлен  $\omega_{n/2}(x)$  с точностью до старших коэффициентов  $a_{n/2}$  и  $b_{n/2}$  единственным образом. Коэффициенты же  $a_{n/2}$  и  $b_{n/2}$  можно задавать произвольно. Корни  $x_1, \dots, x_n$  многочлена  $\omega_{n/2}(x)$  будут простыми и будут лежать на отрезке  $0 \leq x < 2\pi$ . Правило интегрирования (9.1.2), имеющее степень точности  $n - 1$ , для неотрицательной весовой функции может быть, следовательно, построено при всяких  $n$ .

Остановимся более подробно на случае постоянной весовой функции  $\rho(x) = 1$

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (9.3.4)$$

Среди правил этого вида наивысшую тригонометрическую степень точности будет иметь простейшее правило прямоугольников с равноотстоящими абсциссами и равными коэффициентами.

Заметим, прежде всего, что ни при каких  $A_k$  и  $x_k$  (9.3.4) не может быть точным для всех многочленов степени  $n$ , и число  $n - 1$  является наивысшей тригонометрической степенью точности этого равенства.

Разделим  $[0, 2\pi]$  на  $n$  одинаковых частей и на первом частичном отрезке выберем произвольную точку  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < \frac{2\pi}{n}$ ). При любом  $\alpha$  равенство

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) \quad (9.3.5)$$

будет верным для всех тригонометрических многочленов степени  $n - 1$ . Оно содержит произвольный параметр  $\alpha$ . Выбором его иногда распоряжаются так, чтобы сделать правило (9.3.5) точным для многочленов частного вида степени  $n$ .

Если положить  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ , то правило (9.3.5) будет точным для всяких многочленов вида

$$S_n(x) = T_{n-1}(x) + b_n \sin nx.$$

Если же считать  $\alpha = \frac{\pi}{2n}$  или  $\alpha = \frac{3\pi}{2n}$ , то (9.3.5) будет верным для много-членов вида

$$C_n(x) = T_{n-1}(x) + a_n \cos nx.$$

## ГЛАВА 10

### СХОДИМОСТЬ ПРОЦЕССА ПРИБЛИЖЕННОЙ КВАДРАТУРЫ

#### § 1. Содержание и значение для приложений проблемы сходимости

Вопрос о сходимости квадратурного процесса есть, по существу, вопрос о возможности вычислить рассматриваемый интеграл со сколь угодно высокой точностью. Задачи, изучаемые в проблеме сходимости, имеют преимущественно теоретическое значение, но знание теорем о сходимости поможет лицу, производящему вычисление, ориентироваться в выборе правила интегрирования, которое может дать значение интеграла с предписанной точностью.

Мы будем рассматривать бесконечную последовательность правил интегрирования

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{j=0}^m \sum_{l=1}^{n_l} A_{lj}^{(l)} f^{(l)}(x_{lj}^{(l)}) + R_l(f) = Q_l(f) + R_l(f). \quad (10.1.1)$$

Каждому значению  $l = 1, 2, \dots$  отвечают свои значения абсцисс  $x_{lj}^{(l)}$  и коэффициентов  $A_{lj}^{(l)}$ . Квадратурный процесс считается заданным, если известны две таблицы:

$$\{A_{lj}^{(l)}\} \text{ и } \{x_{lj}^{(l)}\}. \quad (10.1.2)$$

Говорят, что процесс (10.1.1) сходится для функций  $f$ , если

$$\lim_{l \rightarrow \infty} Q_l(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx.$$

Погрешность приближенного интегрирования  $R_l(f)$  зависит от свойств функции  $f$  и от таблиц (10.1.2), и нужно выяснить, как свойства таблиц должны быть связаны со свойствами  $f$ , чтобы было  $\lim_{l \rightarrow \infty} R_l(f) = 0$ . В практике вычислений такая задача воз-

никает каждый раз, когда решается вопрос о выборе правила интегрирования. При построении же теории сходимости ставить и решать эту задачу для каждой индивидуально заданной функции  $f$  не целесообразно и постановку задачи обычно изменяют. Рассматривают класс  $F$  функций  $f$ , обладающих некоторым общим для них свойством, и стремятся выяснить условия, при которых будет иметь место сходимость для всех функций класса  $F$ .

Среди общих проблем сходимости наибольшее внимание было уделено двум следующим задачам:

1. Дан класс  $F$  функций  $f$  и нужно выяснить свойства, какими должны обладать таблицы (10.1.2), чтобы процесс сходился для всякой функции из  $F$ .



2. Даны таблицы (10.1.2) и нужно найти класс  $F$  функций, для которых квадратурный процесс сходится.

Главнейшие результаты, полученные в обеих этих задачах и представляющие, по мнению авторов, интерес для вычислений, приведены во втором и третьем параграфах.

## § 2. Сходимость интерполяционного квадратурного процесса

В общей теории сходимости исследовались преимущественно интерполяционные квадратурные процессы с кратными и простыми узлами:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{s=1}^m \sum_{j=0}^{k_s-1} A_{sj}^{(l)} f^{(j)}(x_s^{(l)}) + R_l(f), \quad l = 1, 2, \dots \quad (10.2.1)$$

Узлы  $x_s^{(l)}$  предполагаются лежащими на  $[a, b]$ . Кратности  $k_s$  узлов формулы и их число  $m$  могут изменяться вместе с  $l$ . В записи равенства это не отмечено, чтобы не усложнять обозначений. Каждое равенство такого вида определяется двумя таблицами:

$$\{x_s^{(l)}\} \text{ и } \{k_s\}. \quad (10.2.2)$$

Коэффициенты  $A_{sj}^{(l)}$  зависят от этих таблиц и могут быть вычислены при помощи (2.5.3).

Функция  $f(z)$  считается аналитической, регулярной в некоторой области  $D$ , содержащей отрезок  $[a, b]$  внутри себя. Одной из наиболее существенных характеристик свойств  $f$  является размер и форма области  $D$ . Непосредственно ясно, что чем дальше от  $[a, b]$  отстоит граница  $D$ , тем более гладким будет поведение  $f$  на  $[a, b]$  и тем более вероятной будет сходимость процесса интегрирования (10.2.1) при  $l \rightarrow \infty$ . Ниже приведено несколько теорем, устанавливающих зависимость между формой области  $D$  и таблицами (10.2.2), при которой можно быть уверенным в сходимости процесса (10.2.1). Условия сходимости, указанные в теоремах, по-видимому, не могут быть существенно ослаблены, если требовать, чтобы процесс сходил для любой весовой функции  $p(x)$ . Введем область, являющуюся суммой двух замкнутых кругов с центрами в точках  $a$  и  $b$  и радиусами, равными длине  $b - a$  отрезка интегрирования, и обозначим ее  $\kappa$  (рис. 2).

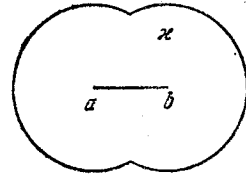


Рис. 2.

1. Если  $f(z)$  регулярна в области  $\kappa$ , то квадратурный процесс (10.2.1) будет сходиться при любых таблицах (10.2.2), лишь бы только узлы  $x_s^{(l)}$  принадлежали  $[a, b]$

и сумма кратностей узлов  $n = \sum_{s=1}^m k_s$  неограниченно возрастала при  $l \rightarrow \infty$ .

Пусть таблицы (10.2.2) заданы. Область регулярности  $f(z)$ , при которой можно гарантировать сходимость процесса (10.2.1), как оказывается, связана с простыми предельными свойствами таблиц (10.2.2). Чтобы сформулировать соответствующий результат исследований, потребуется ввести несколько понятий из теории функций распределения и теории логарифмического потенциала. При помощи их необходимые факты могут быть сформулированы в наглядной форме.

Единичную массу разделим на  $n = n(l) = \sum_{s=1}^m k_s$  одинаковых частей и каждому узлу  $x_s^{(l)}$  припишем  $k_s$  таких частей. Получится некоторое распределение массы на отрезке  $[a, b]$ . Введем теперь функцию распределения узлов и кратностей  $\mu_l(x)$  на  $[a, b]$ , положив  $\mu_l(x)$  равным сумме масс, лежащих строго левее точки  $x$  при  $a \leq x < b$  и  $\mu_l(b) = 1$ . Функция  $\mu_l(x)$  будет кусочно-постоянной на  $[a, b]$  со скачками величины  $\frac{k_s}{n}$  в точках  $x_s^{(l)}$ .

Функция распределения  $\mu(x)$ , отвечающая произвольному расположению единичной массы на  $[a, b]$ , определяется следующими свойствами: а)  $\mu(a) = 0$ , б) при  $a < x < b$   $\mu(x)$  — монотонная неубывающая функция  $x$ , непрерывная слева в каждой точке, в)  $\mu(b) = 1$ .

Рассмотрим произвольную последовательность функций распределения  $\mu^i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Обычно говорят, что последовательность  $\mu^i(x)$  сходится в основном к функции распределения  $\mu(x)$  и пишут  $\mu^i(x) \rightarrow \text{осн. } \mu(x)$ , если в каждой точке непрерывности  $\mu(x)$  будет  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu^i(x) = \mu(x)$ .

Относительно таблиц (10.2.2) мы предположим, что для них существует \*) некоторая функция распределения  $\mu(x)$ , к которой в основном будут сходиться построенные выше функции  $\mu_l(x)$ :  $\mu_l(x) \rightarrow \text{осн. } \mu(x)$ ; в этом случае будем говорить, что таблицы (10.2.2) имеют предельное распределение узлов и кратностей с функцией  $\mu(x)$ .

Построим логарифмический потенциал \*\*)

$$U(x, y) = \int_a^b \lg \frac{1}{|z - t|} d\mu(t). \quad (10.2.3)$$

В нем  $z = x + iy$  есть комплексная координата точки плоскости и  $|z - t|$  — расстояние от  $t$  до  $z$ .

Вне отрезка  $[a, b]$  потенциал  $U(x, y)$  есть гармоническая функция переменных  $x, y$ . Рассмотрим ее линии уровня  $L_C$ :

$$U(x, y) = C.$$

Если  $C$  есть большое по абсолютной величине отрицательное число,  $L_C$  будет близка к окружности большого радиуса с центром в середине отрезка  $[a, b]$ . При возрастании  $C$  линия  $L_C$  будет сжиматься и область  $\Delta_C$ , ею ограниченная, будет уменьшаться. Будем увеличивать  $C$  до тех пор, когда  $L_C$  соприкоснется с отрезком  $[a, b]$ . Пусть это произойдет при  $C = \gamma$ . В нашем вопросе особый интерес будет иметь линия уровня  $L_\gamma$  и область  $\Delta_\gamma$ , ею ограниченная.

\*) Случай произвольных таблиц (10.2.2) может быть сведен к рассматриваемому при помощи теоремы Хелли о выборе.

\*\*) Интеграл понимается в смысле Стильтьеса — Римана. Читатели, не знакомые с теорией таких интегралов, могут предположить, что функция  $\mu(t)$  имеет непрерывную производную  $\mu'(t)$  и интеграл (10.2.3) заменить римановым интегралом

$$U(x, y) = \int_a^b \lg \frac{1}{|z - t|} \mu'(t) dt.$$

Может быть доказана справедливость следующего утверждения:

2. Если функция  $f(z)$  регулярна в замкнутой области  $\Delta_\gamma$ , то квадратурный процесс (10.2.1), отвечающий таблицам (10.2.2), сходится при условии, что сумма кратностей  $n = \sum_{s=1}^m k_s$  неограниченно возрастает вместе с  $l$ .

Остановимся на частных случаях этого общего результата и рассмотрим сначала равномерное предельное распределение узлов и кратностей.

Для облегчения записи допустим, что отрезок интегрирования  $[a, b]$  приведен к  $[0, 1]$ . Для этого отрезка функция равномерного распределения будет совпадать с  $\mu(x) = x$ . Соответствующий ей логарифмический потенциал (10.2.3) есть

$$U(x, y) = \int_0^1 \lg \frac{1}{|z-t|} dt.$$

Его линии уровня  $U(x, y) = C$  изображены на рис. 3.  $L_\gamma$  является линией уровня, проходящей через концы отрезка  $[0, 1]$ , и область  $\Delta_\gamma$ , в которой

$$U(x, y) \geq 1,$$

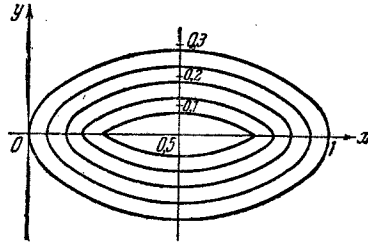


Рис. 3.

состоит из этой линии и части плоскости, лежащей внутри нее. Наибольший размер  $\Delta_\gamma$  по горизонтали равен единице, а наибольший размер по вертикали равен приблизительно 0,5 и получается в пересечении  $\Delta_\gamma$  с прямой  $x = \frac{1}{2}$ .

3. Если таблицы (10.2.2) имеют равномерное предельное распределение узлов и кратностей и если  $f(z)$  регулярна в области  $\Delta_\gamma$ , то квадратурный процесс (10.2.1) сходится. Из этой теоремы видно, что при равномерном предельном распределении для гарантии возможности сколь угодно точного вычисления интеграла при помощи (10.2.1) нужно, чтобы функция  $f(z)$  была регулярной не только на отрезке  $[0, 1]$ , но и в достаточно широкой области около него.

Со случаем равномерного предельного распределения в задаче интерполяционных квадратур мы встретились выше при изучении правила Котеса (гл. 2, § 2). В этом правиле, если отрезок интегрирования приведен к  $[0, 1]$ , за узлы  $x_k$  берутся равноотстоящие точки  $x_k = \frac{k}{n}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) и кратности их считаются равными единице, так как для вычислений привлекаются только значения функции  $f$  в этих точках.

В связи с изложенным возникает следующий вопрос: можно ли указать такие таблицы (10.2.2), чтобы отвечающий им интерполяционный квадратурный процесс сходился для всякой функции, аналитической на отрезке интегрирования? Может быть легко указано требование, которое достаточно предъявить к таблицам (10.2.2), чтобы это осуществлялось.

Будем считать, что отрезок  $[a, b]$  приведен к  $[-1, 1]$ .

4. Если таблицы (10.2.2) имеют предельную функцию  $\mu(x)$  распределения узлов и кратностей и она является функцией Чебышева

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (10.2.4)$$

и если  $f(z)$  регулярна на отрезке  $[-1, 1]$ , то интерполяционный квадратурный процесс для нее сходится.

Этот результат устанавливает связь между таблицами узлов  $\{x_s^{(l)}\}$  и кратностей  $\{k_s\}$ , достаточную для сходимости процесса. Одну из таблиц, например  $\{x_s^{(l)}\}$ , можно задавать произвольно, подчинив ее только одному весьма общему условию, чтобы множество узлов  $x_s^{(l)}$  было всюду плотным на  $[-1, 1]$ . Затем по  $x_s^{(l)}$  можно так подобрать таблицу кратностей  $k_s$ , чтобы процесс приближенного интегрирования (10.2.1) сошелся для всякой аналитической функции.

Например, в правиле интегрирования (10.2.1) можно избрать равноотстоящие узлы  $x_s = a + sh \left( h = \frac{b-a}{n}, s = 0, 1, \dots, n \right)$  и им приписать такие кратности  $k_s$ , чтобы в пределе получилось чебышевское распределение, обеспечивающее указанную сходимость. При этом, очевидно, кратности узлов, лежащих вблизи концов отрезка  $[a, b]$ , должны быть больше, чем кратности узлов, лежащих вблизи середины отрезка.

Можно, наоборот, задать таблицу кратностей узлов, считая, например, все кратности  $k_s$  равными единице. Это будет означать, что рассматривается правило вычисления интеграла только по значениям функции:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{s=1}^m A_s^{(l)} f(x_s^{(l)}) + R_l(f). \quad (10.2.5)$$

Затем узлы  $x_s^{(l)}$  этой формулы можно подобрать так, чтобы таблица  $\{x_s^{(l)}\}$  имела предельную функцию распределения Чебышева. Узлы  $x_s^{(l)}$  при этом более густо расположатся вблизи концов отрезка интегрирования и менее густо около его середины.

В частности, известно, что корни ортогональной системы многочленов при любой знакопостоянной весовой функции  $p(x)$ , почти везде положительной, имеют предельной функцией распределения функцию Чебышева. Поэтому, если за узлы  $x_s^{(l)}$  принять корни многочлена степени  $m$  из этой системы, процесс квадратур (10.2.5) будет сходиться для всякой  $f(x)$ , аналитической на  $[a, b]$ .

Условия сходимости интерполяционных квадратурных процессов в классах дифференцируемых функций могут быть получены как частные случаи из теорем, приведенных в следующем параграфе.

### § 3. Сходимость общего квадратурного процесса в классах непрерывно дифференцируемых функций

Будем рассматривать условия сходимости правил вычисления (10.1.1) с произвольно задаваемыми узлами  $x_{ij}^{(l)}$  и коэффициентами  $A_{ij}^{(l)}$  и ограничим себя наиболее исследованным и важным для приложений случаем, когда все  $k_s$  равны единице и интеграл вычисляется по нескольким значениям функции  $f$ :

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{s=1}^n A_s^{(n)} f(x_s^{(n)}) + R_n(f) = Q_n(f) + R_n^*(f). \quad (10.3.1)$$

Квадратурный процесс определяется двумя бесконечными треугольными таблицами

$$A_s^{(n)}, \quad x_s^{(n)} \quad (s = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots). \quad (10.3.2)$$

Условия сходимости его в настоящее время найдены для большого числа классов функций. Ниже приведены некоторые из известных результатов для случаев, которые имеют наибольший интерес в практике вычислений. Отрезок интегрирования  $[a, b]$  считается конечным и вес  $\rho(x)$  может быть любой интегрируемой функцией. Узлы  $x_s^{(n)}$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) перенумерованы в порядке роста от  $a$  к  $b$ .

Возьмем множество всех функций, непрерывных на  $[a, b]$ . Верно нижеследующее утверждение:

1. Для того чтобы квадратурный процесс (10.3.1) сходиллся для всякой непрерывной на  $[a, b]$  функции  $f$ , необходимо и достаточно выполнение двух условий:

а) процесс сходится для всякого многочлена от  $x$ , что равносильно выполнению равенств

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x^p) = \int_a^b \rho(x) x^p dx, \quad p = 0, 1, 2, \dots; \quad (10.3.3)$$

б) существует число  $K$  такое, что при  $n = 1, 2, \dots$  будет

$$\sum_{s=1}^n |A_s^{(n)}| \leq K; \quad (10.3.4)$$

В частном случае, когда правило (10.3.1) является интерполяционным, первое из условий будет выполнено, так как если  $f(x)$  есть многочлен некоторой степени  $m$ ,

то при  $n > m$  будет  $Q_n(f) = \int_a^b \rho f dx$ , и поэтому необходимым и достаточным условием

сходимости интерполяционного квадратурного процесса для любой непрерывной функции  $f$  будет выполнение неравенства (10.3.4) при  $n = 1, 2, \dots$ .

2. Рассмотрим теперь функции, непрерывно дифференцируемые на  $[a, b]$ .

Для того чтобы процесс (10.3.1) сходиллся для всякой функции  $f$ , непрерывно дифференцируемой на  $[a, b]$ , необходимо и достаточно выполнение условий:

а) процесс (10.3.1) сходится для всякого многочлена;

б) существует число  $K$  такое, что при  $n = 1, 2, \dots$  выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} & |A_1^{(n)}| (x_2^{(n)} - x_1^{(n)}) + |A_1^{(n)} + A_2^{(n)}| (x_3^{(n)} - x_2^{(n)}) + \dots \\ & \dots + |A_1^{(n)} + \dots + A_n^{(n)}| (b - x_n^{(n)}) \leq K. \end{aligned} \quad (10.3.5)$$

Если процесс интегрирования (10.3.1) интерполяционный, первое из условий выполняется автоматически и выполнение неравенств (10.3.5) является необходимым и достаточным условием сходимости такого процесса в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Более трудно проверяемым является признак сходимости процесса для функций, порядок дифференцируемости которых выше первого.

Введем кусочно-постоянную функцию  $F_{n0}(x)$ , характеризующую распределение узлов  $x_s^{(n)}$  и значения коэффициентов  $A_s^{(n)}$ :

$$F_{n0}(x) = \sum_{s=1}^n A_s^{(n)} E(x - x_s^{(n)}),$$

и наряду с ней будем рассматривать первообразные функции любого порядка  $r$ , удовлетворяющие условию  $F_{nr}^{(j)}(a) = 0$  ( $j = 0, 1, \dots, r-1$ ):

$$F_{nr}(x) = \int_a^x F_{n0}(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt = \sum_{s=1}^n A_s^{(n)} E(x - x_s^{(n)}) \frac{(x - x_s^{(n)})^{r-1}}{(r-1)!}.$$

3. Для того чтобы квадратурный процесс (10.3.1) сходилась для всякой функции  $f(x)$ , имеющей на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $r$ , необходимо и достаточно выполнение двух требований:

- а) процесс сходится для всякого многочлена;
- б) существует число  $K$  такое, что

$$\int_a^b |F_{nr}(x)| dx \leq K \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10.3.6)$$

Для интерполяционного квадратурного процесса первое из условий, очевидно, выполняется, и проверке подлежит лишь неравенство (10.3.6).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

---

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

---

ГЛАВА 11

РАСЧЕТНАЯ ФОРМУЛА И УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ  
ОТНОСИТЕЛЬНО РОСТА ПОГРЕШНОСТИ

§ 1. Содержание задачи и правило вычислений

Во второй части книги рассматривается задача вычисления функции

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (x_0 \leq x \leq X) \quad (11.1.1)$$

на сетке равноотстоящих значений аргумента

$$x_k = x_0 + kh \quad (h > 0; k = 0, 1, \dots, N; N = \left[ \frac{X - x_0}{h} \right]).$$

Пусть вычисления начаты, доведены до точки  $x_n$  и составлена следующая таблица значений  $y_k \approx y(x_k)$ :

$x$	$y$
$x_0$	$y_0$
$x_1$	$y_1$
·	·
·	·
·	·
$x_n$	$y_n$
$x_{n+1}$	

Для нахождения  $y_{n+1}$  можно воспользоваться любыми ранее найденными значениями  $y_k$  ( $k \leq n$ ) и значениями  $f(x)$ , которыми допустимо пользоваться в вычислениях по условиям задачи. Если  $f$  задана таблицей значений в точках  $x_k$ , то мы вправе пользоваться только известными табличными ее значениями. Если же  $f$  дана аналитически, мы можем распорядиться выбором тех значений аргумента, которые войдут в избираемую нами расчетную формулу.

В достаточно общей для многих приложений форме правило вычислений  $y_{n+1}$  можно записать в следующем виде:

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i y_{n-i} + h \sum_{j=1}^m B_{nj} f(\xi_{nj}). \quad (11.1.2)$$

Коэффициенты  $A_i$  предполагаются не зависящими от  $n$  и, следовательно, одинаковыми для всех шагов вычислений. Что же касается коэффициентов  $B_{nj}$ , то равенство (11.1.2) допускает зависимость их от  $n$ . Это связано с тем, что в начале вычислений, когда число  $x$  близко к  $x_0$ , и в конце вычислений при  $x$ , близком к  $X$ , вычисления проводятся в некоторых случаях по формулам, отличным от тех, которые применяются при счете вдали от концов отрезка  $[x_0, X]$ . Говорят, что (11.1.2) имеет алгебраическую степень точности  $k$ , если (11.1.2) верно при всяких  $n$  для любого многочлена  $y(x) = P_k(x)$  степени  $k$  и не точно для  $y(x) = x^{k+1}$  хотя бы при одном значении  $n$ .

Равенство (11.1.2) содержит  $m + p + 1$  коэффициентов  $A_i$  и  $B_{nj}$ . Кроме того, в некоторых случаях можно распорядиться выбором некоторых абсцисс  $\xi_{nj}$ . Все эти параметры стремятся избрать так, чтобы равенство имело достаточно высокую алгебраическую степень точности. Формула (11.1.2) дает возможность найти лишь приближенные значения  $y(x_k)$ . Если в него подставить точные значения функции  $y(x_n)$ , то равенство не будет выполняться и в правую часть необходимо ввести дополнительный член

$$y(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^p A_i y(x_{n-i}) + h \sum_{j=1}^m B_{nj} f(\xi_{nj}) + r_{n+1}. \quad (11.1.3)$$

Величину  $r_{n+1}$  называют погрешностью (11.1.2) на шаге  $n + 1$ .

При записи правила в форме (11.1.2) предполагалось, что вычисления выполняются без округлений. Равенство должно быть дополнено указанием числа верных знаков, с которым вычисляется правая часть. Если операцию округления чисел обозначить фигурными скобками, то реальная расчетная формула будет следующей:

$$y_{n+1} = \left\{ \sum_{i=0}^p A_i y_{n-i} + h \sum_{j=1}^m B_{nj} f(\xi_{nj}) \right\}_n, \quad (11.1.4)$$

или, если погрешность округления назвать  $-\alpha_{n+1}$ ,

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i y_{n-i} + h \sum_{j=1}^m B_{nj} f(\xi_{nj}) - \alpha_{n+1}. \quad (11.1.5)$$

Чтобы начать вычисления при помощи (11.1.4), необходимо знать величины  $y_0, y_1, \dots, y_p$ , которые образуют начало расчетной таблицы.

## § 2. Признак устойчивости правила вычислений относительно роста погрешности

Задача неопределенного интегрирования имеет одну особенность, которой нет в проблеме вычисления определенного интеграла. Обычно вычисления выполняются на большое число шагов, а это налагает на выбор правила вычислений дополнительные требования.



На каждом шаге вычислений совершается некоторая погрешность. Такие погрешности при увеличении числа шагов будут постепенно накапливаться и, если расчетная формула (11.1.4) выбрана неудачно, рост погрешности может быть весьма быстрым и сделает невозможным вычисления на много шагов. Поэтому к вычислительному правилу, кроме обычных требований достаточно высокой степени точности и простоты самого правила, необходимо предъявить еще одно условие — погрешность вычислений должна расти достаточно медленно.

Если из равенства (11.1.3), которому удовлетворяют точные значения  $y(x_k)$  функции (11.1.1), почленно вычесть равенство (11.1.5), для погрешности  $e_k = y(x_k) - y_k$  будем иметь

$$e_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i e_{n-i} + r_{n+1} + \alpha_{n+1}. \quad (11.2.1)$$

Это есть линейное уравнение в конечных разностях порядка  $p+1$ . Погрешности  $e_0, \dots, e_p$  значений  $y_0, \dots, y_p$ , образующих начало расчетной таблицы, следует считать известными, а все следующие значения погрешности  $e_n$  ( $n > p$ ) должны быть найдены из уравнения (11.2.1). Относительно начальных значений погрешности и значений  $r_k$  и  $\alpha_k$  обычно бывают известными лишь верхние границы их абсолютных величин:

$$|e_i| \leq \varepsilon \quad (i = 0, \dots, p), \quad |r_k| \leq r \quad \text{и} \quad |\alpha_k| \leq \alpha \quad (k \geq p+1).$$

При этих условиях быстрота роста  $e_n$  при увеличении  $n$  зависит прежде всего от коэффициентов  $A_i$ . Мы укажем предварительно на одно из их свойств, которым будут обладать  $A_i$  во всех практически важных случаях. Если считать, что приближенное уравнение (11.1.2) имеет хотя бы нулевую степень точности, т. е. является верным

для  $y = 1$  и  $f(x) \equiv 0$ , то для  $A_i$  должно выполняться равенство  $1 = \sum_{i=0}^p A_i$ .

Общее решение уравнения для погрешности  $e_k$  (11.2.1) зависит от корней характеристического уравнения

$$\lambda^{p+1} = \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i} \quad (11.2.2)$$

и их кратностей. Чем больше будут модули корней и чем выше кратности корней с большими модулями, тем более быстрым может быть рост  $e_n$  при увеличении  $n$ .

Отмеченное выше свойство коэффициентов  $A_i$  означает, что  $\lambda = 1$  есть корень (11.2.2). Для того чтобы  $e_n$  имело наименьший возможный порядок роста при  $n \rightarrow \infty$ , следует потребовать, чтобы уравнение (11.2.2) не имело корней, модули которых больше единицы, и чтобы корни, по модулю равные единице, имели кратность не выше первой.

Эти простые факты лежат в основе признака устойчивости:

Для того чтобы правило вычислений (11.1.2) было устойчивым относительно роста погрешности  $e_k$ , необходимо и достаточно, чтобы для корней  $\lambda_s$  ( $s = 1, \dots, p+1$ ) уравнения (11.2.2) было выполнено неравенство  $|\lambda_s| \leq 1$ ; при этом, если  $|\lambda_s| = 1$ , корень должен иметь первую кратность.

## ГЛАВА 12

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ТАБЛИЧНО

§ 1. Вычисления в точках, не близких к началу  
и концу таблицы

Предположим, что значения интегрируемой функции  $f(x)$  известны в равноотстоящих точках  $x_k = x_0 + kh$  и в тех же точках нужно вычислить значения интеграла (11.1.1).

Допустим, как и выше, что вычисления доведены до значений  $(x_n, y_n)$  и нахождение подлежит  $y_{n+1}$ . Если принять, что при разыскании  $y_{n+1}$  можно воспользоваться лишь одним предшествующим значением  $y_n$ , то будет иметь место следующее точное равенство:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx. \quad (12.1.1)$$

Для нахождения интеграла, стоящего справа, необходимо интерполировать функцию  $f$  на отрезке  $x_n \leq x \leq x_{n+1}$  по ее значениям в точках  $x_k$ . В условиях задачи для интерполирования целесообразно воспользоваться точками  $x_k$ , ближайшими к отрезку  $[x_n, x_{n+1}]$ , и расположенными симметрично относительно его середины. Интерполирование может быть выполнено при помощи формулы Бесселя и приведет к следующему равенству:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \left[ \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 f_{n-2} + \Delta^4 f_{n-1}}{2} - \right. \\ \left. - \frac{191}{60480} \frac{\Delta^6 f_{n-3} + \Delta^6 f_{n-2}}{2} + \dots + C_k \frac{\Delta^{2k} f_{n-k} + \Delta^{2k} f_{n-k+1}}{2} \right] + R_{nk}. \quad (12.1.2)$$

После отбрасывания остатка  $R_{nk}$  получится приближенная расчетная формула, которая может быть применена для вычисления  $y_{k+1}, \dots, y_{N-k}$  ( $N = \left[ \frac{X - x_0}{h} \right]$ ).

Если  $f(x)$  имеет непрерывную производную порядка  $2k + 2$ , то для  $R_{nk}$  верно представление

$$R_{nk} = h^{2k+3} \frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!} \int_0^{\frac{1}{2}} (u+k)(u+k-1) \dots (u-k-1) du, \quad (12.1.3)$$

где  $\xi$  — некоторая точка отрезка  $[x_n - kh, x_n + (k+1)h]$ .

## § 2. Вычисления вблизи начала и конца таблицы

Применение для вычислений правила (12.1.2) с разностями до порядка  $2k$  требует знания значений  $f$  на отрезке  $[x_{n-k}, x_{n+k+1}]$ . Если точка  $x_n$  лежит близко к началу или концу таблицы значений  $f$ , может оказаться, что это правило будет либо неприменимым, либо нужно будет знать  $f$  в точках, лежащих вне отрезка  $[x_0, X]$ .

Можно указать видоизменения правила (12.1.2), которые могут применяться для вычислений вблизи концов таблицы. Вид соответствующих формул зависит от степени удаленности разыскиваемого значения  $y_{n+1}$  от конца таблицы. Ниже приведены три формулы для вычислений вблизи  $x_0$ :

$$y(x_1) = y(x_0) + h \left[ \frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 f_0 - \frac{19}{720} \Delta^4 f_0 + \frac{1}{160} \Delta^5 f_0 + \dots + C_k \Delta^k f_0 \right] + R_{nk} \quad (k \geq 2), \quad C_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 u(u-1) \dots (u-k+1) du, \quad (12.2.1)$$

$$R_{nk} = h^{k+2} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \int_0^1 u(u-1) \dots (u-k) du, \quad x_0 \leq \xi \leq x_k;$$

$$y(x_2) = y(x_1) + h \left[ \frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_0 + \Delta^2 f_1}{2} + \frac{11}{720} \Delta^4 f_0 - \frac{11}{1440} \Delta^5 f_0 + \frac{271}{60480} \Delta^6 f_0 + \dots + D_k \Delta^k f_0 \right] + R_{nk} \quad (k \geq 4),$$

$$D_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 (u+1)u(u-1) \dots (u-k+2) du, \quad (12.2.2)$$

$$R_{nk} = h^{k+2} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \int_0^1 (u+1)u(u-1) \dots (u-k+1) du, \quad x_0 \leq \xi \leq x_k;$$

$$y(x_3) = y(x_2) + h \left[ \frac{f_2 + f_3}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_1 + \Delta^2 f_2}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 f_0 + \Delta^4 f_1}{2} - \frac{191}{60480} \Delta^6 f_0 + \frac{191}{120960} \Delta^7 f_0 + \dots + \varepsilon_k \Delta^k f_0 \right] + R_{nk} \quad (k \geq 6),$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 (u+2)u(u+1) \dots (u-k+3) du, \quad (12.2.3)$$

$$R_{nk} = h^{k+2} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \int_0^1 (u+2)u(u+1) \dots (u-k+2) du, \quad x_0 \leq \xi \leq x_k.$$

Аналогичные правила для вычисления вблизи конечной точки  $x_N$  таблицы могут быть получены из приведенных равенств путем переноса отсчета в  $x_N$  и изменения направления оси  $ox$ :

$$y(x_N) = y(x_{N-1}) + h \left[ \frac{f_N + f_{N-1}}{2} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{N-2} - \frac{1}{24} \Delta^3 f_{N-3} - \frac{19}{720} \Delta^4 f_{N-4} - \frac{1}{160} \Delta^5 f_{N-5} - \dots - (-1)^{k-1} C_k \Delta^k f_{N-k} \right] + R'_{nk} \quad (k \geq 2); \quad (12.2.1')$$

$$y(x_{N-1}) = y(x_{N-2}) + h \left[ \frac{f_{N-2} + f_{N-1}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{N-2} + \Delta^2 f_{N-3}}{2} + \frac{11}{720} \Delta^4 f_{N-4} + \right. \\ \left. + \frac{11}{1440} \Delta^5 f_{N-5} + \frac{271}{60480} \Delta^6 f_{N-6} + \dots + (-1)^k D_k \Delta^k f_{N-k} \right] + R'_{nk} \quad (k \geq 4); \quad (12.2.2')$$

$$y(x_{N-2}) = y(x_{N-3}) + h \left[ \frac{f_{N-3} + f_{N-2}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{N-4} + \Delta^2 f_{N-3}}{2} + \right. \\ \left. + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 f_{N-5} + \Delta^4 f_{N-4}}{2} - \frac{191}{60480} \Delta^6 f_{N-6} - \right. \\ \left. - \frac{191}{120960} \Delta^7 f_{N-7} - \dots - (-1)^{k-1} e_k \Delta^k f_{N-k} \right] + R'_{nk} \quad (k \geq 6). \quad (12.2.3')$$

Остатки  $R'_{nk}$  формул (12.2.1') — (12.2.3') получаются из остатков  $R_{nk}$  соответствующих формул (12.2.1) — (12.2.3) при помощи умножения на  $(-1)^{k+1}$  и замены условия  $x_0 \leq \xi \leq x_k$  на условие  $x_{N-k} \leq \xi \leq x_N$ .

## ГЛАВА 13

### О НЕКОТОРЫХ ПРАВИЛАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ, ИМЕЮЩИХ НАИВЫСШУЮ АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ СТЕПЕНЬ ТОЧНОСТИ

#### § 1. О принципах построения правил вычисления

В этой главе мы будем считать, что функция  $f(x)$ , подлежащая интегрированию, задана при всяких  $x$  на отрезке  $[x_0, X]$ , и мы можем пользоваться при вычислениях ее значениями в любых точках этого отрезка.

Возвратимся к общему расчетному правилу (11.1.3). Оно содержит параметры  $p, m, A_i, B_{nj}$  и  $\xi_{nj}$ , выбором которых можно распорядиться.

Очевидно, что чем больше слагаемых будет содержаться в суммах, стоящих справа в (11.1.3), тем большей точности мы можем достигнуть при помощи выбора  $A_i, B_{nj}$  и  $\xi_{nj}$ . Поэтому  $p$  и  $m$  при построении формулы (11.1.3) считают фиксированными и рассматривают лишь проблему выбора  $A_i, B_{nj}$  и  $\xi_{nj}$ . По причинам, которые были описаны в первой главе, эти параметры обычно выбирают так, чтобы равенство (11.1.3) имело возможно более высокую алгебраическую степень точности. Такой способ выбора параметров формулы тесно связан с задачей получения значений интеграла (11.1.1) с погрешностью, не превышающей заданной границы, при возможно малом числе значений функций  $y$  и  $f$  на каждый шаг вычислений. Главная часть труда чаще всего тратится на нахождение значений  $f$ , поэтому наибольший интерес представляет задача уменьшения числа слагаемых в сумме  $h \sum_I B_{nj} f(\xi_{nj})$ .

При неопределенном интегрировании, когда вычисления выполняются для многих значений верхней границы  $x_n$ , существует еще один путь для сбережения вычислительного труда, которого нет в случае определенных интегралов: можно правила вычислений строить так, чтобы каждое значение функции  $f$  применялось при нахождении не одного, а нескольких значений интеграла  $y(x)$ . В параграфах 2 и 3 дано описание нескольких правил вычисления неопределенного интеграла, построенных на основе обоих указанных выше принципов — достижения наивысшей алгебраической степени точности и использования значений  $y_k$  и  $f$  на нескольких шагах расчета.

## § 2. Правила вычислений, в которых каждое значение функции используется на нескольких шагах

Вновь предположим, что вычисления доведены до точки  $x_n$ , и допустим, что для нахождения  $y_{n+1}$  привлекается только одно предшествующее значение  $y_n$ . Точное выражение  $y(x_{n+1})$  будет

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx. \quad (13.2.1)$$

Пусть для вычисления последнего интеграла на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$  берется  $m$  узлов  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ :  $x_n \leq \alpha < \beta < \dots < \lambda < x_{n+1}$  и, кроме того, берутся  $a$  узлов  $\alpha + p_i h$  ( $i = 1, \dots, a$ ), сходственных\*)  $\alpha, b$  узлов  $\beta + q_i h$  ( $i = 1, \dots, b$ ), сходственных  $\beta, \dots, l$  узлов  $\lambda + t_i h$  ( $i = 1, \dots, l$ ), сходственных  $\lambda$ . Распределение последних узлов среди табличных точек  $x_k$  определяется числами  $p_i, \dots, t_i$ , которые могут иметь любые целые положительные или отрицательные значения, отличные от нуля. Общее число всех узлов обозначим  $N + 1$ :  $N + 1 = a + \dots + l + m$ .

Рассмотрим равенство

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx \approx A_0 f(\alpha) + \sum_{i=1}^a A_i f(\alpha + p_i h) + \dots + L_0 f(\lambda) + \sum_{i=1}^l L_i f(\lambda + t_i h). \quad (13.2.2)$$

Если  $a, \dots, l, p_i, \dots, t_i$  считать заданными, оно будет содержать  $N + 1 + m$  произвольных параметров  $\alpha, \dots, \lambda, A_i, \dots, L_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ). Их выбирают так, чтобы равенство (13.2.2) имело наивысшую алгебраическую степень точности. Чтобы сформулировать результаты, полученные в этом направлении, введем следующие многочлены, связанные с узлами формулы:

$$\omega(x) = (x - \alpha) \dots (x - \lambda),$$

$$\omega_\alpha(x) = \prod_{i=1}^a (x - \alpha - p_i h), \dots, \omega_\lambda(x) = \prod_{i=1}^l (x - \lambda - t_i h), \quad \Omega(x) = \omega_\alpha(x) \dots \omega_\lambda(x). \quad (13.2.3)$$

Какими бы ни были числа  $a, \dots, l, p_i, \dots, t_i$ , параметры  $\alpha, \dots, \lambda, A_i, \dots, L_i$  могут быть выбраны так, чтобы правило (13.2.2) было верным для всяких многочленов степени  $N + m$ . Для этого необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1. Правило (13.2.2) является интерполяционным.
2. Для любого многочлена  $Q(x)$ , степень которого меньше  $m$ , должно выполняться равенство

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega(x) \omega(x) Q(x) dx = 0. \quad (13.2.4)$$

$N + m$  есть наивысшая алгебраическая степень точности (13.2.2).

\*) Точки  $\alpha + kh$ , отвечающие различным целым  $k$ , называются сходственными.

Если  $f(x)$  на отрезке, содержащем все узлы формулы и точки  $x_n, x_{n+1}$ , имеет непрерывную производную порядка  $N + m + 1$ , то на этом отрезке существует точка  $\xi$  такая, что для остатка  $R(f)$  формулы (13.2.2) наивысшей степени точности  $N + m$  верно равенство

$$R(f) = \frac{f^{(N+m+1)}(\xi)}{(N+m+1)!} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega(x) \omega^2(x) dx. \quad (13.2.5)$$

Ниже приведены примеры формул такого типа для случаев одного, двух и трех узлов на каждый шаг.

**I. Правило вычислений с одним узлом на каждый шаг.** Пусть на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$  взята одна точка  $\alpha_n$  и, кроме того, привлечены по  $k$  ближайших сходственных точек слева и справа от  $\alpha_n$  (рис. 4). Наивысшая степень точности равна  $2k + 1$  и она может

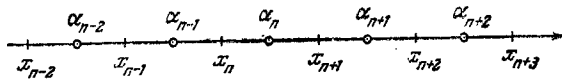


Рис. 4.

быть достигнута, если точка  $\alpha_n$  является серединой отрезка  $[x_n, x_{n+1}]$ :  $\alpha_n = x_n + \frac{1}{2}h$ . Расчетное правило и его остаток здесь будут следующими:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \left[ f(\alpha_n) + \frac{1}{24} \Delta^2 f(\alpha_n - h) - \frac{17}{5760} \Delta^4 f(\alpha_n - 2h) + \right. \\ \left. + \frac{367}{967680} \Delta^6 f(\alpha_n - 3h) - \frac{27859}{464486400} \Delta^8 f(\alpha_n - 4h) + \right. \\ \left. + \frac{1295803}{122624409600} \Delta^{10} f(\alpha_n - 5h) + \dots + C_k \Delta^{2k} f(\alpha_n - kh) \right] + R, \quad (13.2.6)$$

$$C_k = \frac{1}{(2k)!} \int_{-0,5}^{0,5} t^2 (t^2 - 1^2) \dots [t^2 - (k-1)^2] dt,$$

$$R = h^{2k+3} \frac{f^{(2k+3)}(\xi)}{(2k+3)!} \int_{-0,5}^{0,5} t^2 (t^2 - 1^2) \dots (t^2 - k^2) dt.$$

**II. Правила вычислений с двумя узлами на каждый шаг.** Схема расположения узлов указана на рис. 5. На отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$  берутся два узла  $\alpha_n, \beta_n$  и к ним при-

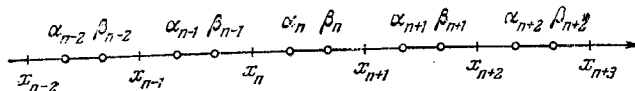


Рис. 5.

соединяются по одинаковому числу ближайших сходственных узлов справа и слева от  $[x_n, x_{n+1}]$ . Вид частных правил, приводимых ниже, зависит от количества

дополнительных узлов, присоединяемых к  $\alpha_n$  и  $\beta_n$ . Степени точности видны из записей остаточных членов или их оценок.

$$1. y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \{0,48690\ 23179 [f(\alpha_n) + f(\beta_n)] + \\ + 0,01309\ 76821 [f(\beta_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})]\} + R,$$

$$\alpha_n = x_n + h \cdot 0,23333\ 80763, \quad \beta_n = x_n + h \cdot 0,76666\ 19237,$$

$$R \approx -0,00000\ 305h^7 f^{(6)}(\xi), \quad \beta_{n-1} \leq \xi \leq \alpha_{n+1}.$$

$$2. y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \{0,48309\ 24404 [f(\alpha_n) + f(\beta_n)] + \\ + 0,01737\ 14226 [f(\beta_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - 0,00046\ 38630 [f(\alpha_{n-1}) + f(\beta_{n+1})]\} + R,$$

$$\alpha_n = x_n + h \cdot 0,23896\ 17210, \quad \beta_n = x_n + h \cdot 0,76103\ 82790,$$

$$|R| \leq 0,00000\ 008h^9 M_8, \quad M_8 = \max_x |f^{(8)}(x)|, \quad \alpha_{n-1} \leq x \leq \beta_{n+1}.$$

$$3. y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \{0,48259\ 37250 [f(\alpha_n) + f(\beta_n)] + 0,01797\ 22221 [f(\beta_{n-1}) + \\ + f(\alpha_{n+1})] - 0,00057\ 82647 [f(\alpha_{n-1}) + f(\beta_{n+1})] + \\ + 0,00001\ 23177 [f(\beta_{n-2}) + f(\alpha_{n+2})]\} + R,$$

$$\alpha_n = x_n + h \cdot 0,23963\ 00931, \quad \beta_n = x_n + h \cdot 0,76036\ 99069,$$

$$|R| \leq 0,00000\ 0003h^{11} M_{10}, \quad M_{10} = \max_x |f^{(10)}(x)|, \quad \beta_{n-2} \leq x \leq \alpha_{n+2}.$$

$$4. y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \{0,47911\ 31668 [f(\alpha_n) + f(\beta_n)] + \\ + 0,02153\ 22932 [f(\beta_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - 0,00136\ 32927 [f(\alpha_{n-1}) + f(\beta_{n+1})] + \\ + 0,00012\ 36065 [f(\beta_{n-2}) + f(\alpha_{n+2})] - 0,00000\ 57738 [f(\alpha_{n-2}) + f(\beta_{n+2})]\} + R,$$

$$\alpha_n = x_n + h \cdot 0,24346\ 00865, \quad \beta_n = x_n + h \cdot 0,75653\ 99135,$$

$$|R| \leq 0,00000\ 00001h^{13} M_{12}, \quad M_{12} = \max_x |f^{(12)}(x)|, \quad \alpha_{n-2} \leq x \leq \beta_{n+2}.$$

III. Правила вычислений с тремя узлами на шаг. Расположение узлов указано на рис. 6. На промежутке  $[x_n, x_{n+1}]$  берутся три узла  $\alpha_n, \beta_n$  и  $\gamma_n$  и к ним присоеди-

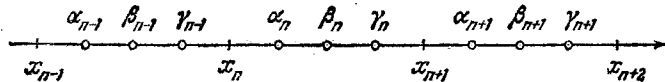


Рис. 6.

няются справа и слева по одному, двум или трем сходственным узлам из соседних промежутков. Ниже приведены три соответствующие расчетные формулы.

$$1. y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \{0,40010\ 36566 f(\beta_n) + 0,29348\ 93491 [f(\alpha_n) + f(\gamma_n)] + \\ + 0,00645\ 88226 [f(\gamma_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})]\} + R, \quad \alpha_n = x_n + h \cdot 0,13518\ 35561,$$

$$\beta_n = x_n + h \cdot 0,5, \quad \gamma_n = x_n + h \cdot 0,86481\ 64439,$$

$$|R| \leq 0,00000\ 00024h^6 M_8, \quad M_8 = \max_x |f^{(8)}(x)|, \quad \gamma_{n-1} \leq x \leq \alpha_{n+1}.$$

$$2. y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \{0,38762 \ 75418f(\beta_n) + 0,29781 \ 27562 [f(\alpha_n) + f(\gamma_n)] + \\ + 0,00848 \ 08932 [f(\gamma_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - 0,00010 \ 74203 [f(\beta_{n-1}) + f(\beta_{n+1})] \} + R, \\ \alpha_n = x_n + h \cdot 0,14145 \ 83289, \ \beta_n = x_n + h \cdot 0,5, \\ \gamma_n = x_n + h \cdot 0,85854 \ 16711,$$

$$|R| \leq 0,00000 \ 00000 \ 02h^{11}M_{10}, \ M_{10} = \max_x |f^{(10)}(x)|, \ \beta_{n-1} \leq x \leq \beta_{n+1}.$$

$$3. y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \{0,38134 \ 28493f(\beta_n) + 0,29986 \ 68413 [f(\alpha_n) + f(\gamma_n)] + \\ + 0,00967 \ 80471 [f(\gamma_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - 0,00022 \ 28947 [f(\beta_{n-1}) + f(\beta_{n+1})] + \\ + 0,00000 \ 65816 [f(\alpha_{n-1}) + f(\gamma_{n+1})] \} + R, \ \alpha_n = x_n + h \cdot 0,14469 \ 85558, \\ \beta_n = x_n + h \cdot 0,5, \ \gamma_n = x_n + h \cdot 0,85530 \ 14442,$$

$$|R| \leq 0,00000 \ 00000 \ 003h^{13}M_{12}, \ M_{12} = \max_x |f^{(12)}(x)|, \ \alpha_{n-1} \leq x \leq \gamma_{n+1}.$$

### § 3. Правила вычислений, в которых используются несколько предшествующих значений интеграла

При решении задачи, содержание которой указано в названии параграфа, рассматривались правила вычисления, имеющие следующую форму:

$$y(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{r+s} A_i y(x_{n+1-i}) + h \sum_{j=1}^s B_j f(x_{n+1-j}) + h \sum_{j=1}^l C_j f(\xi_{nj}) + R. \quad (13.3.1)$$

В правую часть равенства входит  $r + 2s + 2l$  параметров  $A_i, B_j, C_j$  и  $\xi_{nj}$ , выбором которых можно распорядиться. На значения абсцисс  $\xi_{nj}$  не налагалось никаких ограничений и все параметры выбирали так, чтобы равенство (13.3.1) без остатка  $R$  имело наивысшую возможную алгебраическую степень точности.

Как показали исследования, наивысшая степень точности в этой задаче равна \*)  $r + 2s + 2l - 2$ , и она может быть достигнута многими способами. Распределим точки  $\xi_{nj}$  произвольным образом по промежуткам между  $x_{n-r-s}, x_{n-r-s+1}, \dots, x_n, x_{n+1}$ . Если заранее указать, сколько из общего числа  $l$  точек  $\xi_{nj}$  должно попасть в каждый из таких промежутков, то положения  $\xi_{nj}$  всегда можно выбрать и при этом единственным образом так, чтобы (13.3.1) имело наивысшую степень точности  $r + 2s + 2l - 2$ . Но оценка погрешности равенства будет наименьшей в том случае, когда все точки  $\xi_{nj}$  будут лежать в последнем из указанных промежутков  $[x_n, x_{n+1}]$ .

Введем многочлен  $\Pi(x)$ , связанный с расположением узлов  $\xi_{nj}$ :

$$\Pi(x) = (x - \xi_{n1}) \cdot \dots \cdot (x - \xi_{nl}).$$

Если считать, что (13.3.1) имеет степень точности  $r + 2s + 2l - 2$  и функция  $f(x)$  является  $r + 2s + 2l - 1$  раз непрерывно дифференцируемой на отрезке  $x_{n-s-r} \leq x \leq x_{n+1}$ , то остаток формулы (13.3.1) представим в виде

$$R = \frac{h^{r+2s}}{(r+2s+2l)!} \frac{(r+s)! s!}{(r+2s+2l)!} \Pi^2(x_{n+1}) f^{(r+2l+2s-1)}(\xi), \ x_{n-s-r+1} \leq \xi \leq x_{n+1}.$$

\*) Равенство (13.3.1) выполняется точно, если  $f$  есть произвольный многочлен степени  $r + 2s + 2l - 2$ , и неверно, когда  $f$  есть многочлен степени  $r + 2s + 2l - 1$ .



В приведенных ниже правилах частного вида считалось, что узлы  $\xi_{nj}$  лежат на промежутке  $[x_n, x_{n+1}]$ . Абсциссы  $\xi_{nj}$  записаны в виде  $\xi_{nj} = x_n + t_j h$  ( $0 < t < 1$ ).

1.  $r = 0, s = 1$ .

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \left[ B_1 f(x_n) + \sum_{j=1}^l C_j f(x_n + t_j h) \right] + R.$$

Эта расчетная формула получится, если в равенстве

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = y(x_n) + h \int_0^1 \varphi(t) dt \quad (\varphi(t) = f(x_n + ht))$$

интеграл вычислить приближенно при помощи квадратурного правила наивысшей степени точности с одним фиксированным узлом  $t = 0$ :

$$\int_0^1 \varphi(t) dt \approx A_0 \varphi(0) + \sum_{j=1}^n A_j \varphi(t_j)$$

[гл. 4, § 2, (4.2.2)]. Коэффициенты и значения  $t_j$  даны в табл. 9.

2.  $r = 1, s = 1$ .

$$y(x_{n+1}) = A_1 y(x_n) + A_2 y(x_{n-1}) + h \left[ B_1 f(x_n) + \sum_{j=1}^l C_j f(x_n + t_j h) \right] + R,$$

$$R = \theta \frac{2h^{2l+3}}{(2l+3)!} \left[ \frac{l!(l+1)!}{(2l+1)!} \right]^2 f^{(2l+2)}(\xi), \quad x_{n-1} \leq \xi \leq x_{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Степень точности равна  $2l + 1$ .

При  $l = 1, 2, 3, 4$  коэффициенты и  $t_j$  имеют следующие значения:

$l = 1$		
$A_1 = 0,9705 \ 6275$		$B_1 = 0,3431 \ 458$
$A_2 = 0,0294 \ 3725$		
$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071 \ 068$		$C_1 = 0,6862 \ 915$
$l = 2$		
$A_1 = 0,9988 \ 86413$		$B_1 = 0,1334 \ 818$
$A_2 = 0,0011 \ 13587$		
$t_1 = 0,3879 \ 073$		$C_1 = 0,5221 \ 058$
$t_2 = 0,8593 \ 118$		$C_2 = 0,3455 \ 260$
$l = 3$		
$A_1 = 0,9999 \ 5863 \ 964$		$B_1 = 0,0709 \ 5688$
$A_2 = 0,0000 \ 4136 \ 036$		
$t_1 = 0,2312 \ 666$		$C_1 = 0,3458 \ 379$
$t_2 = 0,6124 \ 982$		$C_2 = 0,3776 \ 724$
$t_3 = 0,9177 \ 954$		$C_3 = 0,2055 \ 739$

$$l = 4$$

$$\begin{array}{ll} A_1 = 0,9999\ 9852\ 0444 & B_1 = 0,0440\ 7358 \\ A_2 = 0,0000\ 0147\ 9556 & \\ t_1 = 0,1507\ 625 & C_1 = 0,2361\ 168 \\ t_2 = 0,4352\ 756 & C_2 = 0,3128\ 314 \\ t_3 = 0,7366\ 581 & C_3 = 0,2713\ 300 \\ t_4 = 0,9462\ 337 & C_4 = 0,1356\ 498 \end{array}$$

3.  $r = 0$ ,  $s = 2$ .

$$y(x_{n+1}) = A_1 y(x_n) + A_2 y(x_{n-1}) + h \left[ B_1 f(x_n) + B_2 f(x_{n-1}) + \sum_{j=1}^l C_j f(x_n + t_j h) \right] + R.$$

Степень точности равна  $2l + 2$ .

$$R = \theta h^{2l+4} \frac{4}{(2l+4)!} \left[ \frac{l!(l+1)!}{(2l+1)!} \right]^2 f^{(2l+3)}(\xi), \quad x_{n-1} \leq \xi \leq x_{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Значения  $t_j$  и коэффициентов при  $l=1, 2, 3, 4$  помещены в приведенной ниже таблице.

$$l = 1$$

$$\begin{array}{ll} A_1 = 0,8374\ 9085 & B_1 = 0,4921\ 8941 \\ A_2 = 0,1625\ 0915 & B_2 = 0,0445\ 3258\ 4 \\ t_1 = 0,7403\ 1242 & C_1 = 0,6257\ 8716 \end{array}$$

$$l = 2$$

$$\begin{array}{ll} A_1 = 0,9922\ 3367 & B_1 = 0,1640\ 716 \\ A_2 = 0,0077\ 6632\ 6 & B_2 = 0,0015\ 6068\ 9 \\ t_1 = 0,4207\ 573 & C_1 = 0,5242\ 954 \\ t_2 = 0,8717\ 520 & C_2 = 0,3178\ 386 \end{array}$$

$$l = 3$$

$$\begin{array}{ll} A_1 = 0,9996\ 3737\ 05 & B_1 = 0,0814\ 3433 \\ A_2 = 0,0003\ 6262\ 95 & B_2 = 0,0000\ 5699\ 653 \\ t_1 = 0,2515\ 111 & C_1 = 0,3609\ 307 \\ t_2 = 0,6333\ 509 & C_2 = 0,3658\ 920 \\ t_3 = 0,9235\ 139 & C_3 = 0,1920\ 487 \end{array}$$

$$l = 4$$

$$\begin{array}{ll} A_1 = 0,9999\ 8423\ 368 & B_1 = 0,0488\ 5024 \\ A_2 = 0,0000\ 1576\ 632 & B_2 = 0,0000\ 0203\ 0488 \\ t_1 = 0,1627\ 293 & C_1 = 0,2491\ 361 \\ t_2 = 0,4540\ 978 & C_2 = 0,3124\ 621 \\ t_3 = 0,7493\ 776 & C_3 = 0,2613\ 448 \\ t_4 = 0,9492\ 874 & C_4 = 0,1282\ 206 \end{array}$$

# ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

### ГЛАВА 14

## ПОСТРОЕНИЕ ФОРМУЛ КРАТНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

### § 1. Содержание задачи

Пусть нужно вычислить интеграл вида  $\int_D f(x) dx$ , где  $D$  — область в  $n$ -мерном евклидовом пространстве,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — точка этого пространства,  $dx$  — элементарный объем. Задача приближенного вычисления кратного интеграла более трудна и значительно менее исследована по сравнению со случаем одной переменной. Большие трудности вызваны не только громоздкостью всех вычислений, связанных с наличием большого числа переменных. Усложняет задачу также разнообразие видов областей интегрирования.

Как и в одномерном случае, чаще всего за приближенное значение интеграла принимается линейная комбинация конечного числа значений функции

$$\int_D f(x) dx \approx \sum_{k=1}^N a_k f(x^{(k)}). \quad (14.1.1)$$

Формулы вида (14.1.1) будем называть формулами численного кратного интегрирования или кубатурными формулами;  $a_k$  называют коэффициентами, а  $x^{(k)}$  — узлами формулы. Если равенство (14.1.1) записать в виде

$$\int_D f(x) dx = \sum_{k=1}^N a_k f(x^{(k)}) + R(f), \quad (14.1.2)$$

то остаток  $R(f)$  формулы будет давать погрешность замены интеграла суммой. Одной из основных характеристик формулы (14.1.2) является степень точности этой формулы. Подобно одномерному случаю, мы будем говорить, что (14.1.2) имеет алгебраическую степень точности  $m$ , если остаток  $R(f)$  равен нулю при условии, что  $f$  — произвольный многочлен от  $x_1, x_2, \dots, x_n$  степени  $\leq m$ :

$$f(x) \equiv p(x) = \sum_l C_l x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \quad (m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq m) \quad (14.1.3)$$

существует хотя бы один многочлен степени  $m+1$ , для которого остаток отличен от нуля.

Степень точности кубатурной формулы, вообще говоря, не позволяет оценить величину остатка  $R(f)$  численного интегрирования, но при помощи ее можно судить о

порядке малости остатка и о скорости стремления его к нулю при уменьшении размеров области.

В правило кубатур (14.1.1) в качестве параметров входят коэффициенты  $a_k$  и точки  $x^{(k)}$ , и так как каждая точка определяется  $n$  координатами  $[x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)}]$ , то общее количество численных параметров, содержащихся в (14.1.1), равно  $N(n+1)$ . Но не все они могут быть произвольными, и число параметров, выбором которых можно распорядиться, зависит от условий, при которых вычисляется интеграл.

Если требовать, чтобы правило (14.1.1) имело алгебраическую степень точности  $m$ , то параметры формулы следует выбрать так, чтобы (14.1.1) было верным для функций вида  $f = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$  при  $m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq m$ . Число этих условий равно

$$\frac{1}{n!} (m+1)(m+2) \dots (m+n) = \frac{(m+n)!}{m! n!}.$$

Оно весьма быстро возрастает при увеличении  $m$  и  $n$ . Поэтому в кубатурной сумме, стоящей справа в (14.1.1), чтобы выполнить указанные условия, необходимо брать много слагаемых  $a_k f(x^{(k)})$  даже при небольших значениях  $m$  и  $n$ . Отметим, в частности, что в случае фиксированных узлов, который встречается, например, в задаче интегрирования функций, полученных из эксперимента или заданных таблично, правило (14.1.1) будет содержать только  $N$  параметров  $a_k$  и для достижения степени точности  $m$  необходимо брать особенно большое число  $N$  членов суммы:

$$N \geq \frac{1}{n!} (m+1) \dots (m+n).$$

Такие правила интегрирования обычно имеют невысокую степень точности при большом числе членов кубатурной суммы. Поэтому при вычислении многократных интегралов особенное значение имеют те правила, в которых не только коэффициенты  $a_k$ , но и узлы  $x^{(k)}$  выбираются так, чтобы правило давало точный результат для многочленов возможно более высокой степени.

В следующих параграфах будет рассмотрено несколько способов построения кубатурных формул.

## § 2. Повторное применение квадратурных формул

Одним из простейших путей построения кубатурных формул является повторное применение известных правил квадратур к приближаемому интегралу. Этот путь основан на одном из способов точного вычисления кратных интегралов, а именно, на способе вычисления интегралов путем повторного интегрирования. Пусть нужно приблизительно вычислить интеграл

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (14.2.1)$$

где область интегрирования  $D$  есть прямоугольник  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ . Двойной интеграл может быть приведен к двум простым интегралам:

$$I = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Применим какое-либо правило приближенной квадратуры к внешнему интегралу:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^m a_i \int_c^d f(x_i, y) dy + R'. \quad (14.2.2)$$

Каждое слагаемое суммы в правой части равенства (14.2.2) содержит интеграл, который также можно вычислить при помощи одного из правил приближенного интегрирования:

$$\int_c^d f(x_i, y) dy = \sum_{j=1}^n b_j f(x_i, y_j) + R_i. \quad (14.2.3)$$

Для интеграла (14.2.1) получится следующее представление:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} f(x_i, y_j) + R. \quad (14.2.4)$$

Здесь  $c_{ij} = a_i b_j$  и  $R = R' + \sum_{i=1}^m a_i R_i$ .

Пусть квадратурная формула, примененная к внешнему интегралу, точна для одночленов вида  $x^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, (m-1)$ , и квадратурная формула (14.2.3) точна для одночленов  $y^l$ ,  $l = 0, 1, \dots, n-1$ . Тогда формула (14.2.4) будет точна для одночленов вида  $x^k y^l$ , где  $k = 0, 1, \dots, m-1$ ;  $l = 0, 1, \dots, n-1$ .

Для простоты мы брали одну и ту же квадратурную формулу для вычисления интегралов, входящих в сумму (14.2.2). Если считать, что для вычисления каждого из интегралов применяется свое правило квадратур, то вместо (14.2.4) получится более сложная формула

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j f(x_i, y_j) + R, \quad (14.2.5)$$

где

$$R = R' + \sum_{i=1}^m a_i R_i.$$

Например, если к вычислению внешнего интеграла в (14.2.1) и интегралов, входящих в сумму (14.2.2), применить формулу Симпсона, то получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = & \frac{(b-a)(d-c)}{36} \left\{ f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) + \right. \\ & + 4 \left[ f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right] + \\ & \left. + 16f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right\} + R. \quad (14.2.6) \end{aligned}$$

Остаток  $R$  имеет вид

$$R = R' + \frac{b-a}{6} [R_1 + 4R_2 + R_3],$$

где  $R'$  — остаток, полученный при применении формулы Симпсона к внешнему интегралу, и  $R_1, R_2, R_3$  — остатки при применении формулы к интегралам, входящим в сумму правой части равенства (14.2.3) соответственно.

Для  $R$  можно получить следующее выражение:

$$R = - \frac{(b-a)^5 (d-c)}{2^6 \cdot 45} \frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta_1)}{\partial x^4} - \frac{(d-c)^5 (b-a)}{2^6 \cdot 45} \frac{\partial^4 f(\xi_2, \eta_2)}{\partial y^4} - \frac{(d-c)^5 (b-a)^5}{2^{12} 45^2} \frac{\partial^8 f(\xi_3, \eta_3)}{\partial x^3 \partial y^4}$$

где точки  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$  лежат в области интегрирования. Из этого равенства видно, что формула (14.2.6) точна для произвольных многочленов третьей степени относительно  $x$  и третьей степени относительно  $y$ .

Мы рассмотрели случай, когда область интегрирования есть прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Если область интегрирования  $D$  определяется неравенствами  $a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ , то интеграл по этой области, очевидно, можно записать в виде

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Обозначим  $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$  знаком  $F(x)$ :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx. \quad (14.2.7)$$

Применим к интегралу в правой части равенства (14.2.7) некоторую квадратурную формулу

$$\int_a^b F(x) dx \approx \sum_{i=1}^n a_i F(x_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f(x_i, y) dy.$$

Теперь, вычислив интегралы в последней сумме по каким-либо правилам приближенных квадратур, мы получим кубатурную формулу

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} f(x_i, y_{ij}).$$

Все высказанные выше соображения можно перенести на  $n$ -кратные интегралы ( $n > 2$ ). Рассуждения и формулы при этом становятся более сложными.

Рассмотренный метод приводит к формулам с большим числом узлов. Так, в формуле (14.2.4) нужно вычислить значения функции в  $m \cdot n$  точках. Поэтому при построении правил интегрирования указанным сейчас способом целесообразно использовать квадратурные формулы наивысшей степени точности.

На выбор правил приближенной квадратуры, которые применяются для вычисления интегралов  $\int_a^b F dx$  и  $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f dy$ , до сих пор мы не налагали никаких ограни-

чений. Но этот выбор должен быть связан как со свойствами функции  $f(x, y)$ , так и со свойствами области интегрирования  $D$ .

Мы остановимся сейчас на последней связи. Будем считать, что  $D$  лежит в конечной части плоскости  $xy$ , и  $f(x, y)$  есть произвольная достаточно гладкая функция в  $D$ . Если  $D$  — прямоугольник  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ , рассмотренный в начале параграфа, то для вычисления каждого из указанных интегралов можно применить формулу Гаусса. Но для других областей  $D$  эта формула не всегда даст наилучший результат, так как в ней весовая функция является постоянной и не будет учитывать влияния на  $F(x)$  формы области  $D$ .

Для интеграла  $I = \int_a^b F(x) dx$  естественной весовой функцией является разность  $p(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x)$  и для вычислений его разумно преобразовать к виду

$$I = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] \Phi(x) dx, \quad \Phi(x) = \frac{F(x)}{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)}.$$

Но столь полный учет влияния формы области на выбор весовой функции  $p(x)$ , по-видимому, не целесообразен, так как он требовал бы вычисления для каждой области интегрирования своих коэффициентов  $a_i$  и абсцисс  $x_i$ . Обычно естественную весовую функцию  $p(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x)$  заменяют классической весовой функцией, по своему характеру близкой к ней, и такой, чтобы коэффициенты и узлы формулы гауссова вида для нее были известны. Во многих случаях полезной здесь является весовая функция Якоби. Пусть показатели  $\alpha$  и  $\beta$  можно выбрать так, чтобы отношение  $g(x) = [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] / (x-a)^\beta (b-x)^\alpha$  было ограничено сверху и снизу положительными числами

$$0 < m \leq g(x) \leq M < \infty.$$

В этом случае интеграл  $I = \int_a^b F(x) dx$  приводят к виду

$$I = \int_a^b (x-a)^\beta (b-x)^\alpha \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) = (x-a)^{-\beta} (b-x)^{-\alpha} F(x),$$

и вычисляют при помощи правила квадратур с весом Якоби.

Если отношение  $g(x)$  является достаточно гладкой функцией при  $a \leq x \leq b$ , такой переход от естественного веса  $\varphi_2(x) - \varphi_1(x)$  к весу Якоби не будет связан с большой потерей точности. Например, если область  $D$  имеет форму, изображенную на рис. 7, и контур области имеет в точке  $A$  касание первого порядка с прямой  $x = a$ , то за весовую функцию Якоби можно принять  $\sqrt{x-a}$  и интеграл  $I$  для вычислений привести к виду

$$I = \int_a^b \sqrt{x-a} \psi(x) dx, \quad \psi(x) = (x-a)^{-\frac{1}{2}} F(x).$$

Как пример интеграла, при вычислении которого выбор квадратурной формулы целесообразно согласовать со свойством области интегрирования, мы рассмотрим интеграл по единичному кругу  $x^2 + y^2 \leq 1$  в плоскости  $xy$ . Если такой интеграл

вычислять в полярных координатах, то его можно записать в следующем виде:

$$I = \int_0^1 r \left\{ \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) d\varphi \right\} dr = \int_0^1 rF(r) dr.$$

В плоскости  $(r, \varphi)$  областью интегрирования, как и в (14.2.1), является прямоугольник  $\{0 \leq r \leq 1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ . Но выбор правила Гаусса для интегрирования по каждой из переменных здесь нельзя считать целесообразным. Если принять во внимание наличие множителя  $r$  и периодичность зависимости  $f(r, \varphi)$  от переменной  $\varphi$ , то, по-видимому, большей точности можно ожидать, если при интегрировании по  $r$  избрать правило наивысшей алгебраической степени точности с весовой функцией  $r$  (часть I, гл. 3) и при вычислении интеграла по  $\varphi$ :

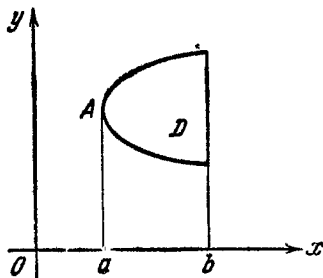


Рис. 7.

$$F(r) = \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) d\varphi$$

взять правило прямоугольников с равноотстоящими значениями  $\varphi$  (часть I, гл. 3):

$\varphi_k = \frac{k}{n} 2\pi$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ). Аналогичным образом можно поступать и при вычислении интеграла по шару. В более общем случае, когда область интегрирования в полярных координатах определяется неравенствами  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq R(\varphi)$ ,

интеграл  $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\varphi)} f(r, \varphi) r dr d\varphi$  после замены  $r = R(\varphi)\rho$  приводится к виду

$$I = \int_0^{2\pi} R^2(\varphi) \int_0^1 f(R\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi) d\varphi,$$

и для интегрирования по  $\rho$  и  $\varphi$  следует избрать те же правила, о которых говорилось несколькими строками выше.

### § 3. Построение кубатурных формул на основе интерполяционных многочленов

Для построения формул численного интегрирования в пространстве любого числа  $n$  ( $n \geq 1$ ) измерений часто применяют замену подынтегральной функции каким-нибудь интерполяционным многочленом с последующим интегрированием его.

Пусть нам дан интеграл

$$I = \int_D f(x) dx. \quad (14.3.1)$$

Здесь, как и ранее,  $D$ -область в  $n$ -мерном евклидовом пространстве,  $x$ -вектор с координатами  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $dx$  — элементарный объем. По функции  $f(x)$  построим



интерполяционный многочлен, совпадающий с ней в узлах  $x^{(i)}$ :

$$f(x) = f(x^{(1)})P_1(x) + f(x^{(2)})P_2(x) + \dots + f(x^{(N)})P_N(x) + R, \quad (14.3.2)$$

где  $P_i$  являются многочленами, равными единице в точке  $x^{(i)}$  и нулю во всех остальных узлах интерполирования, а  $R$  — остаток интерполирования.

Заменим в (14.3.1)  $f(x)$  многочленом (14.3.2):

$$I = \sum_{i=1}^N f(x^{(i)}) \int_D P_i(x) dx + R_1. \quad (14.3.3)$$

Так как  $P_i(x)$  не зависят от  $f$ , коэффициенты при  $f(x^{(i)})$  в сумме вычисляются один раз для всех интегрируемых функций  $f$ . Обозначим  $c_i$  их численные значения:

$$I = \sum_{i=1}^N c_i f(x^{(i)}) + R_1. \quad (14.3.4)$$

Отбросив  $R_1$ , мы получим правило приближенного кратного интегрирования.  $R_1$  есть остаток кубатурной формулы

$$R_1 = \int_D R dx.$$

При построении интерполирующего многочлена чаще всего встают на один из двух указанных ниже путей. Первый из них выбирают в том случае, когда стремятся выполнить интерполирование при помощи многочлена низкой степени. Возможность интерполирования здесь будет зависеть от расположения узлов  $x^{(i)}$ . Если же хотят воспользоваться хорошо известным и удобным аппаратом интерполирования функций одного аргумента, то избирают второй путь. Интерполяционный многочлен в этом случае может быть построен всегда, но будет иметь, вообще говоря, степень более высокую, чем наименьшая возможная. Мы выясним идею обоих способов на примере функций двух аргументов  $f(x, y)$ .

1. Пусть в области  $D$  плоскости  $xy$  нужно интерполировать функцию  $f(x, y)$  так, чтобы интерполирование было верным для многочленов от  $x, y$  степени  $m$ . Произвольный многочлен степени  $m$  от двух переменных  $P(x, y) = \sum_{i+j \leq m} a_{ij} x^i y^j$  имеет

$N = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$  коэффициентов. В области  $D$  возьмем  $N$  точек  $M_s(x_s, y_s)$  и  $a_{ij}$  выберем так, чтобы выполнялись условия

$$P(x_s, y_s) = f(x_s, y_s) \quad (s = 1, \dots, N). \quad (14.3.5)$$

Их можно рассматривать как систему  $N$  линейных уравнений для нахождения коэффициентов  $a_{ij}$ . Определитель системы зависит от положения точек  $M_s$ . Если он отличен от нуля, то система имеет решение и при этом единственное. Многочлен  $P(x, y)$ , совпадающий с  $f(x, y)$  в  $N$  точках  $M_s$ , тогда существует и будет единственным.

Для построения соответствующего взятым точкам  $M_s$  интерполяционного правила интегрирования

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{s=1}^N c_s f(x_s, y_s) \quad (14.3.6)$$

можно было бы найти представление многочлена  $P(x, y)$  в форме

$$P(x, y) = \sum_{s=1}^N P_s(x, y) f(x_s, y_s)$$

и затем положить  $c_s = \iint_D P_s(x, y) dx dy$ .

Ввиду сложности вычислений, которые требуются для нахождения многочленов  $P_s(x, y)$ , предпочтительно искать непосредственно коэффициенты  $c_s$ , минуя  $P_s(x, y)$ . Для этого достаточно записать, что равенство (14.3.6) является точным для всех функций  $f(x, y) = x^i y^j$  ( $i + j \leq m$ ) и полученную систему линейных уравнений решить относительно  $c_s$ .

II. Пусть область интегрирования  $D$  в плоскости  $xy$  определяется системой неравенств  $[a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)]$ . На отрезке  $a \leq x \leq b$  оси  $Ox$  выберем  $n$  точек  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$  и интерполируем  $f(x, y)$  по переменной  $x$  при помощи ее значений  $f(x_i, y)$ :

$$f(x, y) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i) \omega'_n(x_i)} f(x_i, y); \quad \omega_n(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n).$$

Возьмем сечение области  $D$ :  $[x = x_i; \varphi_1(x_i) \leq y \leq \varphi_2(x_i)]$ , и выберем число  $m = m(i)$  значений второй координаты  $y$ :  $\varphi_1(x_i) \leq y_{i1} < y_{i2} < y_{i3} < \dots < y_{im(i)} \leq \varphi_2(x_i)$ . Если  $f(x_i, y)$  интерполировать по значениям  $f(x_i, y_{ij})$  ( $j = 1, \dots, m(i)$ ), то для  $f(x, y)$  получим следующее интерполяционное представление:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m(i)} \frac{\omega_n(x) \tilde{\omega}_{m(i)}(y)}{(x-x_i)(y-y_{ij}) \omega'_n(x_i) \tilde{\omega}'_{m(i)}(y_{ij})} f(x_i, y_{ij}) + R = P(x, y) + R,$$

$$\tilde{\omega}_{m(i)}(y) = (y-y_{i1}) \dots (y-y_{im(i)}).$$

Интерполирующий многочлен  $P(x, y)$  будет иметь, вообще говоря, степень  $n-1$  по переменной  $x$  и степень  $m(i)-1$  по переменной  $y$ .

Из (14.3.7) получается интерполяционная кубатурная формула

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m(i)} c_{ij} f(x_i, y_{ij}) + R_1, \quad (14.3.8)$$

$$c_{ij} = a_i b_{ij}, \quad a_i = \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i) \omega'_n(x_i)} dx, \quad b_{ij} = \int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} \frac{\tilde{\omega}_{m(i)}(y)}{(y-y_{ij}) \tilde{\omega}'_{m(i)}(y_{ij})} dy.$$

Отметим, что  $a_i$  и  $b_{ij}$  являются коэффициентами интерполяционных правил для однократных интегралов [(2.2.2), гл. 2]. В случае равноотстоящих точек  $x_i$  и  $y_{ij}$ .

$x_i = a + (i-1)h$ ,  $h = \frac{b-a}{n-1}$  и  $y_{ij} = \varphi_1(x_i) + (j-1)l$ ,  $l = [\varphi_2(x_i) - \varphi_1(x_i)] / (m(i)-1)$ , они приводятся к коэффициентам Котеса (гл. 2, § 2).

В качестве примера рассмотрим интегрирование по прямоугольной области на плоскости. Пусть

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy. \quad (14.3.9)$$

Будем строить кубатурную формулу с узлами, образованными пересечением прямых:

$$\begin{aligned} x &= a + ih = x_i & (i = 0, 1, \dots, n), \\ y &= c + jl = y_j & (j = 0, 1, \dots, m), \end{aligned}$$

где  $h = \frac{b-a}{n}$  и  $l = \frac{d-c}{m}$ . В этом случае  $f(x, y)$  можно представить с помощью интерполяционного многочлена следующим образом:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) \frac{\omega_n(x) \tilde{\omega}_m(y)}{(x-x_i)(y-y_j) \omega'_n(x_i) \tilde{\omega}'_m(y_j)} + R. \quad (14.3.10)$$

Здесь  $\omega_n(x)$  — произведение разностей вида  $x - x_i$ ,  $\tilde{\omega}_m(y)$  — произведение разностей  $y - y_j$ . Правило (14.3.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} f(x_i, y_j) + R_1, \quad c_{ij} = a_i b_j, \quad (14.3.11) \\ a_i &= \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i) \omega'_n(x_i)} dx, \quad b_j = \int_c^d \frac{\tilde{\omega}_m(y)}{(y-y_j) \tilde{\omega}'_m(y_j)} dy, \\ \omega_n(x) &= \prod_{i=0}^n (x - a - ih), \quad \tilde{\omega}_m(y) = \prod_{j=0}^m (y - c - jl). \end{aligned}$$

Формула (14.3.11) будет точна для произвольного многочлена степени  $n$  относительно  $x$  и степени  $m$  относительно  $y$ .

#### § 4. Об общей задаче выбора параметров в правиле вычисления кратных интегралов

Как и раньше, рассмотрим задачу построения кубатурной формулы вида

$$\int_R f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N a_i f(x^{(i)}); \quad (14.4.1)$$

$R$  — область в  $n$ -мерном пространстве,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $dx$  — элемент объема.

Кубатурная сумма, стоящая справа в (14.4.1), содержит  $N(n+1)$  численных параметров —  $N$  коэффициентов  $a_i$  и  $N \cdot n$  координат узлов  $x^{(i)}$ . Будем считать их произвольными и поставим задачу об их выборе. Для кратных интегралов эту задачу формулируют так, как указано ниже. Предположим, что выбрана последовательность функций  $\omega_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Возьмем  $s$  первых функций  $\omega_j$  и поставим своей целью число слагаемых  $N$  в сумме (14.4.1) и численные параметры формулы выбрать

так, чтобы равенство было точным для  $f = \omega_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ). Если взять  $N$  достаточно большим, то для систем функций  $\omega_j$ , встречающихся в приложениях, достигнуть этого обычно можно не одним, а бесконечным числом способов, так как при этом некоторые численные параметры остаются произвольными. Ставится задача за счет выбора произвольных параметров достигнуть точного выполнения (14.4.1) для  $f = \omega_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) при достаточно малом или даже наименьшем возможном числе  $N$  слагаемых в кубатурной сумме. Формулы с минимальным числом членов или совсем не содержат произвольных параметров и тогда они могут быть, как правило, построены единственным способом, или в них остаются такие параметры и тогда выбором их можно воспользоваться для каких-либо целей, например, для упрощения правила интегрирования.

Задача повышения алгебраической степени точности для правила (14.4.1) исследовалась и получила частичное решение в том случае, когда за функции  $\omega_j$  принялись следующие простейшие многочлены \*):

$$1, x_i, x_i x_j, x_i x_j x_k, \dots, 1 \leq i \leq j \leq k \leq \dots \leq n. \quad (14.4.2)$$

Пусть нужно построить правило (14.4.1), точное для всех алгебраических многочленов от  $x_1, \dots, x_n$  до степени  $m$  включительно. Если потребовать, чтобы (14.4.1) было верным для всяких многочленов (14.4.2) до степени  $m$  включительно, получится система  $\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}{n!}$  уравнений для определения  $a_i, x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Система линейна относительно  $a_i$  и нелинейна при  $m \geq 2$  относительно  $x_k^{(i)}$ . При решении системы естественно требовать, чтобы число неизвестных параметров было не меньше числа уравнений:

$$N(n+1) \geq \frac{(m+1)\dots(m+n)}{n!}. \quad (14.4.3)$$

Задача построения кубатурных формул с наименьшим числом узлов  $N$  решена при  $m = 1$  и  $m = 2$  для интегралов любой кратности  $n$ . Именно, для  $m = 1$  оказывается  $N = 1$  и формула имеет вид

$$\int_R f(x) dx \approx |R| f(x^{(0)}),$$

где  $|R|$  — мера области  $R$  и  $x^{(0)}$  — центр тяжести области. Для  $m = 2$  соответствующая формула имеет  $N = n + 1$  узлов\*\*). Для  $m > 2$  задача рассматривалась в отдельных случаях\*\*\*).

## § 5. Симметричные кубатурные формулы

При построении формул численного интегрирования в случае многомерных областей большое значение имеют кубатурные формулы для симметричных областей с узлами и коэффициентами, также обладающими свойством симметрии. Такие формулы обладают высокой степенью точности при малом числе разных коэффициентов и

\*) Рассматривалась аналогичная задача для интеграла, вычисляемого по сфере, и параметры формулы выбирались так, чтобы результат вычислений был точным для сферических функций достаточно высокого порядка (С. Л. С о б о л е в [6]).

\*\*) Н. С. Т h a c h e r [1], см. также А. Н. S t r o u d [2].

\*\*\*) Р. A p e l l [1], R a d o n [1], Г е о р г и е в [2].

могут быть получены при помощи небольших вычислений. Например, чтобы построить кубатурную формулу для интегрирования по трехмерной области, степень точности которой равна 7, нужно решить систему из 120 уравнений нелинейного характера. В случае же симметричной области и симметричной формулы эта задача сводится к системе семи алгебраических уравнений, которая просто решается \*).

Назовем область  $R$  в  $n$ -мерном пространстве симметричной в том случае, если из того, что некоторая точка  $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$  принадлежит  $R$ , следует, что все точки, полученные из  $x$  перестановкой координат и переменных знаков у координат, также принадлежат  $R$ .

Справедливо следующее утверждение: интеграл по симметричной области  $R$  от любого одночлена, содержащего нечетную степень какой-либо координаты, есть нуль; интеграл от произведения четных степеней зависит только от показателей степеней и не зависит от их порядка. Назовем формулу численного интегрирования симметричной, если все узлы можно разбить на группы, при этом каждая группа представляет собой множество симметричных точек и значения интегрируемой функции в узлах, принадлежащих одной и той же группе, берутся с одинаковыми коэффициентами. Тогда, если  $\sum a_j f(x_{(j)})$  — симметричная кубатурная сумма, приближающая интеграл по симметричной области  $R$ , то для того, чтобы она имела степень точности  $2k+1$ , необходимо и достаточно, чтобы формула была точна для всех одночленов вида  $x_1^{2k_1} x_2^{2k_2} \dots x_n^{2k_n}$ , где  $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n \leq k$  и все показатели неотрицательные.

Ввиду относительной простоты до сих пор в основном строились симметричные кубатурные формулы по симметричным областям.

## ГЛАВА 15

### ПЕРЕНЕСЕНИЕ ПРАВИЛ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НА ДРУГИЕ ОБЛАСТИ

#### § 1. Преобразование одной области интегрирования в другую

Как уже указывалось раньше, разнообразие областей интегрирования затрудняет построение кубатурных формул. Поэтому было бы очень полезно уметь переносить кубатурные формулы, построенные для приближенного интегрирования по одной области, на интегрирование по другим областям. Осуществить это можно несколькими способами, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки.

Пусть известна формула приближенного интегрирования по области  $R$ . Если нам нужно построить формулу для области  $S$ , то мы можем найти преобразование, переводящее область  $R$  в область  $S$ , с помощью которого из формулы для интегрирования по области  $R$  получается формула для области  $S$  \*\*).

Рассмотрим этот способ несколько подробнее. Пусть мы имеем формулу интегрирования вида

$$\int_R p(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^m a_i f(x^{(i)}), \quad (15.1.1)$$

где  $R$  —  $n$ -мерная область в евклидовом пространстве  $E_n$ ,  $x$  — вектор в пространстве  $E_n$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — действительные числа,  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$  — узлы кубатурной формулы, находящиеся в области определения  $f$ . Будем считать, что весовая

\*) P. C. Hammer and A. W. Wymore [1].

\*\*) P. C. Hammer and A. W. Wymore [1].

функция  $p(x)$  и функция  $f(x)$  определены и непрерывны в  $R$ . Через  $dx$  мы, как обычно, обозначили элементарный объем в пространстве  $E_n$ . Пусть мы хотим построить кубатурную формулу, подобную формуле (15.1.1), для приближенного интегрирования по области  $S$  из пространства  $E_n$ , и пусть существует преобразование  $J$  с непрерывным и не обращающимся в нуль якобианом, которое переводит  $R$  в  $S$ :  $y = Jx$ , где  $x \in R$ ,  $y \in S$ .

Заметим, что  $dy = |J| dx$ , где  $|J|$  — абсолютное значение якобиана. Для простоты будем считать  $J$  аффинным преобразованием, тогда  $|J|$  — постоянная величина.

Теперь запишем для функции  $g(y) = f(x)$ , определенной и непрерывной в  $S$ , следующую кубатурную формулу, получающуюся из (15.1.1) при преобразовании  $y = Jx$ :

$$\int_S p_1(y) g(y) dy \approx \sum_{i=1}^m b_i g(y^{(i)}), \quad (15.1.2)$$

где  $p_1(y) = p(x)$ ,  $b_i = |J| a_i$ ,  $y^{(i)} = Jx^{(i)}$ . Так как при аффинном преобразовании степени многочленов сохраняются, то степени точности правил (15.1.1) и (15.1.2) одинаковы.

Таким образом, имея (15.1.1) для некоторой области  $R$ , мы можем без труда получить (15.1.2) для интегрирования по области  $S$  той же степени точности, если, конечно, известно преобразование, переводящее  $R$  в  $S$ . Так, например, известные формулы для сферы можно сразу же перевести в формулы для некоторого эллипсоида.

Необходимо заметить, что если преобразование  $y = Jx$  не будет аффинным, то алгебраическая степень точности правила интегрирования при переходе от (15.1.1) к (15.1.2) не будет, вообще говоря, сохраняться.

**П р и м е р.** Для единичной сферы  $R$  с центром в начале координат известна кубатурная формула:

$$\begin{aligned} \int_R f(x, y, z) dx dy dz &\approx 0,6981317 [f(0,7745967; 0; 0) + f(-0,7745967; 0; 0) + \\ &+ f(0; 0,7745967; 0) + f(0; -0,7745967; 0) + f(0; 0; 0,7745967) + \\ &+ f(0; 0; -0,7745967)] = \\ &= \frac{2}{9} \pi [f(\sqrt{0,6}; 0; 0) + f(-\sqrt{0,6}; 0; 0) + f(0; \sqrt{0,6}; 0) + \\ &+ f(0; -\sqrt{0,6}; 0) + f(0; 0; \sqrt{0,6}) + f(0; 0; -\sqrt{0,6})], \quad (15.1.3) \end{aligned}$$

которая имеет третью степень точности. Пусть нужно построить кубатурную формулу для эллипсоида  $S$ :

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} + \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1.$$

Преобразованием, переводящим указанную выше сферу в этот эллипсоид, будет

$$\bar{x} = ax, \quad \bar{y} = by, \quad \bar{z} = cz.$$

Якобиан этого преобразования равен

$$J = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}.$$

Из формулы (15.1.3) теперь получаем кубатурную формулу для  $S$ :

$$\int_S f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} \approx \frac{2}{9} abc [f(\sqrt{0,6a}; 0; 0) + f(-\sqrt{0,6a}; 0; 0) + f(0; \sqrt{0,6b}; 0) + f(0; -\sqrt{0,6b}; 0) + f(0; 0; \sqrt{0,6c}) + f(0; 0; -\sqrt{0,6c})].$$

Эта формула также имеет степень точности, равную 3.

Применимость рассмотренного метода ограничена тем фактом, что в случае более сложных областей часто бывает трудно найти подходящее преобразование.

## § 2. Метод декартовых произведений

Суть \*) этого способа перенесения кубатурных формул на другие области интегрирования заключается в следующем. Пусть  $R$  — область в  $n$ -мерном евклидовом пространстве — есть декартово произведение двух областей  $R_1$  и  $R_2$  в евклидовых пространствах меньшего числа измерений. Тогда, если обозначим  $y \in R_1$  и  $z \in R_2$ , каждое  $x \in R$  можно, очевидно, записать в виде  $(y, z)$ . В таком случае при наличии кубатурных формул для областей  $R_1$  и  $R_2$  мы можем без особого труда получить формулу для области  $R$ .

Рассмотрим это несколько подробнее. Определим сначала, что мы будем называть классом декартовых произведений функций. Если  $F_1$  — класс функций, определенных в  $R_1$ , а  $F_2$  — класс функций, определенных в  $R_2$ , то классом декартовых произведений  $F = F_1 \times F_2$  функций, определенных в области  $R = R_1 \times R_2$ , называется класс всех функций  $f(y, z)$  таких, что  $f(y, z) \in F_1$  для каждого  $z \in R_2$  и  $f(y, z) \in F_2$  для каждого  $y \in R_1$ .

Так, например, если классы функции  $F_1$  и  $F_2$ , определенных на  $R_1$  и  $R_2$ , можно представить как линейные комбинации базисных функций  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_q$  и  $g_1, g_2, \dots, g_q$  соответственно, то  $F = F_1 \times F_2$  есть тогда класс с базисными функ-

циями  $\varphi_i g_j$ , т. е.  $f \in F$  можно записать в виде  $f = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q c_{ij} \varphi_i g_j$ .

Проиллюстрируем это на следующем примере. Пусть  $F_1$  — класс многочленов от  $x$  степени меньшей либо равной  $k$ , а  $F_2$  — класс многочленов от  $y$ , степень которых также меньше либо равна  $k$ .

Тогда классом декартовых произведений  $F = F_1 \times F_2$  будет множество многочленов от  $x, y$  вида  $P(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_{ij} x^i y^j$ . Это множество многочленов, очевидно, включает все многочлены степени  $\leq k$  от двух переменных. Предположим теперь, что имеются формулы численного интегрирования с весовыми функциями  $p_1(y)$  и  $p_2(z)$  по областям  $R_1$  и  $R_2$  соответственно. Функционалы ошибок этих формул можно записать в виде

$$E(R_1, f_1) = \sum a_i f_1(y_i) - \int_{R_1} p_1(y) f_1(y) dy, \quad (15.2.1)$$

$$E(R_2, f_2) = \sum b_j f_2(z_j) - \int_{R_2} p_2(z) f_2(z) dz, \quad (15.2.2)$$

причем функции  $f_1(y)$  и  $f_2(z)$  определены и непрерывны в  $R_1$  и  $R_2$  соответственно.

\*) Содержание этого параграфа тесно связано с § 2 гл. 14.

Рассмотрим теперь функцию  $f(x) = f(y, z)$ , которая определена и непрерывна в  $R = R_1 \times R_2$ .

Пусть имеется формула численного интегрирования по области  $R$  с весом  $p_1(y) p_2(z)$  с функционалом ошибки

$$E(R, f) = \sum_i \sum_j a_i b_j f(y_i, z_j) - \int_{R_1} \int_{R_2} p_1(y) p_2(z) f(y, z) dy dz. \quad (15.2.3)$$

Допустим теперь, что  $f_1$  принадлежит некоторому классу функций  $F_1$ ,  $f_2$  — некоторому классу  $F_2$ , а функция  $f$  принадлежит классу  $F$ , который, как и выше, является классом декартовых произведений функций, принадлежащих  $F_1$  и  $F_2$ . Пусть для этих функций  $f_1, f_2$  и  $f$  существуют формулы численного интегрирования с функционалами ошибок (15.2.1), (15.2.2) и (15.2.3) соответственно. Тогда из условия, что  $E(R_1, f_1) = 0$  и  $E(R_2, f_2) = 0$ , следует, что  $E(R, f) = 0$ .

Если  $F_1, F_2$  и  $F$  — классы многочленов, рассмотренных ранее, то из вышесказанного выше утверждения вытекает следующее.

Пусть квадратурные формулы

$$\int_{R_1} p_1(y) f_1(y) dy \approx \sum_{i=1}^n a_i f_1(y_i), \quad (15.2.4)$$

$$\int_{R_2} p_2(z) f_2(z) dz \approx \sum_{j=1}^n b_j f_2(z_j) \quad (15.2.5)$$

имеют степень точности  $k$ . Тогда формула

$$\int_{R_1} \int_{R_2} p_1(y) p_2(z) f(y, z) dy dz \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j f(y_i, z_j) \quad (15.2.6)$$

будет точна для произвольного многочлена от  $y$  и  $z$ , степень которого по  $y$  при фиксированном  $z$  равна  $k$  и степень по  $z$  при фиксированном  $y$  — также равна  $k$ .

Таким образом, при наличии формул (15.2.4) и (15.2.5) можно легко получить формулу (15.2.6) для области с большим числом измерений.

В качестве примера построим кубатурную формулу типа формулы Лягерра для квадранта. Пусть мы имеем 5-точечную формулу для весовой функции  $e^{-x}$  на интервале  $[0, \infty]$ , которая справедлива для всякого многочлена 9-й степени. Тогда формула

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 a_i a_j f(x_i, y_j) \approx \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} f(x, y) dx dy$$

точна для каждого многочлена вида  $\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 c_{ij} x^i y^j$ . Очевидно, это множество полиномов включает все многочлены степени  $\leq 9$  от двух переменных.

Комбинируя формулы Гаусса и Лягерра, мы можем получить формулу численного интегрирования по полуполосе.

Все известные формулы могут быть использованы для получения формул численного интегрирования по областям с большим числом измерений.



### § 3. Формулы для конечных конусов

Если область интегрирования — конечный конус, опирающийся на основание, кубатурная формула для которого известна, то можно без труда получить формулу численного интегрирования по данному конусу\*).

Предположим, что мы имеем  $n$ -мерную область  $R$ , расположенную в гиперплоскости  $x = 1$  в пространстве  $E_{n+1}$ . Пусть  $(\xi, 1)$  — точка области  $R$ , где  $\xi$  — точка  $n$ -мерного пространства. Очевидно, множество точек  $xR$ , где  $0 \leq x \leq 1$ , является конусом  $C$  в пространстве  $E_{n+1}$  с основанием  $R$  и вершиной в начале координат пространства  $E_{n+1}$ . Пусть теперь функция  $f(\xi, x)$  определена в конусе  $C$ , и мы предполагаем, что имеется формула численного интегрирования для основания  $R$ :

$$\int_R f(\xi, 1) dv_n \approx \sum_I a_j f(\xi_j, 1), \quad (15.3.1)$$

где  $dv_n$  — элементарный объем в пространстве  $E_n$ ,  $(\xi_j, 1)$  — точки на основании  $R$ ,  $a_j$  — как всегда, коэффициенты кубатурной формулы.

Теперь мы хотим получить формулу численного интегрирования по области  $C$ . Очевидно, справедливо равенство:

$$\int_C f(\xi, x) dv = \int_0^1 dx \int_{xR} f(\xi, x) dv_n, \quad (15.3.2)$$

где  $dv$  — элементарный объем в пространстве  $E_{n+1}$ . Нам нужно получить правило вычисления для интеграла

$$I = \int_{xR} f(\xi, x) dv_n.$$

Мы имеем формулу (15.3.1) для интегрирования по области  $R$ .

Якобиан аффинного преобразования, переводящий область  $R$  в  $xR$ , есть

$$J = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} = x^n.$$

Принимая во внимание сказанное в § 1 гл. 15, мы можем записать, что

$$\int_{xR} f(\xi, x) dv_n \approx \sum_I |x^n| a_j f(x\xi_j, x) = x^n \sum_I a_j f(x\xi_j, x), \quad (15.3.3)$$

причем формула (15.3.3) имеет ту же степень точности, что и формула (15.3.1). Обозначим теперь  $\sum_I a_j f(x\xi_j, x) = g(x)$ . Тогда

$$\int_C f(\xi, x) dv \approx \int_0^1 x^n g(x) dx. \quad (15.3.4)$$

Пусть интеграл, стоящий в правой части (15.3.4), вычислен:

$$\int_0^1 x^n g(x) dx \approx \sum_i b_i g(x_i). \quad (15.3.5)$$

\*) P. C. Hammer, O. J. Marlowe, A. H. Stroud [1].

Принимая во внимание (15.3.4) и (15.3.5), получаем формулу численного интегрирования по конусу  $C$ :

$$\int_C f(\xi, x) dv \approx \sum_i \sum_j b_{ij} a_j f(x_i \xi_j, x_i). \quad (15.3.6)$$

Если формула (15.3.1) точна для произвольных многочленов от координат точки  $\xi$  степени  $k$  и формула (15.3.5) точна для произвольных многочленов от  $x$  степени  $l$ , то равенство (15.3.6) будет точным для произвольных многочленов от  $x$  и координат точки  $\xi$ , имеющих по  $x$  степень не выше  $k$  при фиксированной точке  $\xi$  и степень не выше  $l$  по координатам  $\xi$  при фиксированном  $x$ .

С помощью этого метода можно строить формулы для  $(n+1)$ -мерных симплексов, начиная от формулы численного интегрирования по линейному отрезку. Для этого нужно иметь формулы интегрирования по отрезку  $[0, 1]$  с весом  $x^n$ . При вычислении таких интегралов можно воспользоваться табл. 2, приведенной в четвертой части книги, где даны узлы и коэффициенты такой квадратурной формулы для случая  $n = 1(1)5$  с числом абсцисс  $m = 1(1)8$ .

Если для отрезка взять формулу Гаусса с  $m$  узлами и для вычисления интегралов вида  $\int_0^1 x^n g(x) dx$  использовать тоже формулу наивысшей степени точности с  $m$

узлами, то получим для симплекса в  $(n+1)$ -мерном пространстве формулу с  $m^{n+1}$  узлами, степень точности которой равна  $2m-1$  по каждой из координат. Среди других способов перенесения формул численного интегрирования на другие области можно назвать метод разбиения области на такие подобласти, для которых приближенные формулы известны. Тогда искомая формула представится как сумма (или разность) известных формул. Иногда бывает возможно приближенно заменить область одной или несколькими областями, для которых формулы численного интегрирования известны.

## ГЛАВА 16

### ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

#### § 1. Введение

Ниже (табл. 1—10) приведен перечень формул для приближенного вычисления кратных интегралов. В каждом случае приводятся узлы и коэффициенты формулы, степень точности, количество узлов. Приведены главные члены остатков в тех случаях, когда они известны. В записи формул использованы некоторые сокращенные обозначения. Так, в табл. 3—10 буквой  $r$  обозначена степень точности приводимой формулы, буквой  $m$  — число узлов. В табл. 1 и 8 введены следующие обозначения при записи главных членов остатков формул:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^2}; & \nabla^{2k+2} f &= \nabla^2(\nabla^{2k} f); & D^1 f &= \sum_{t, u=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^2 \partial x_u^2}; \\ D^{1k+1} f &= D^1(D^{1k} f); & I^6 f &= \sum_{t, u, s} \frac{\partial^6 f}{\partial x_t^2 \partial x_u^2 \partial x_s^2}; & Q^8 f &= \sum_{t, u, s, w} \frac{\partial^8 f}{\partial x_t^2 \partial x_u^2 \partial x_s^2 \partial x_w^2}, \end{aligned}$$

причем суммы здесь берутся по всем комбинациям  $t, u, s, w$ , но таким, что в каждой из них  $t, u, s, w$  все различны.

В таблицах 1 и 2 приведены симметричные кубатурные формулы по симметричным областям. Записываются эти формулы следующим способом. Условимся, что  $v_i$  будет обозначать ненулевую первую координату точки, у которой все остальные координаты — нули:  $(v_i, 0, \dots, 0)$ . Здесь и ниже  $i=1, 2, \dots$ . Если кубатурная формула включает такую точку, то по требованию симметрии она будет включать все точки, полученные путем перестановок координат и перемен знака у ненулевой координаты. Таким образом, мы получаем подмножество  $2n$  ( $n$ —число измерений пространства) точек, которое определяется заданием  $v_i$ . Все точки этого подмножества входят в кубатурную формулу с одним и тем же коэффициентом, который будем обозначать через  $a_i$ . Буквой  $\xi_i$  будем обозначать две равные координаты точки:  $(\xi_i, \xi_i, 0, 0, \dots, 0)$ . Тогда симметричная кубатурная формула будет включать в качестве узлов все точки, полученные из этой точки перестановками координат и переменной знаков. Буква  $\xi_i$  полностью определяет множество  $2n(n-1)$  узлов, которые входят в формулу с коэффициентом, обозначенным  $b_i$ ;  $\eta_i$  будет обозначать ненулевые равные координаты множества из  $\frac{4}{3} n(n-1)(n-2)$  точек, которые можно получить из точки  $(\eta_i, \eta_i, \eta_i, 0, 0, \dots, 0)$  указанным выше способом;  $c_i$  — коэффициент кубатурной формулы, стоящий множителем перед значениями функции  $f$  во всех точках этого множества;  $a_0$  есть коэффициент при  $f(0, 0, \dots, 0)$ .

Пример. Рассмотрим формулу, помещенную в табл. 1, случай  $n=2$ , № 11. В таблице она записана следующим образом:

№	Узлы	Коэффициенты	Число точек	Степень точности	Главный член остатка
11	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 1$	$a_0 = 16/9$ $a_1 = 4/9$ $b_1 = 1/9$	9	3	$\frac{1}{45} (\nabla^4 f_0 - 2D^4 f_0)$

Число  $a_0 = 16/9$  является коэффициентом при значении функции  $f$  в точке  $(0, 0)$ ,  $v_1 = 1$  обозначает множество четырех следующих точек:  $(1, 0)$ ;  $(-1, 0)$ ;  $(0, 1)$ ;  $(0, -1)$ . Значения функции в этих точках входят в кубатурную формулу с коэффициентом  $a_1 = 4/9$ . Число  $\xi_1 = 1$  определяет множество точек  $(1, 1)$ ;  $(1, -1)$ ;  $(-1, 1)$ ;  $(-1, -1)$ . Коэффициент  $b_1 = 1/9$  стоит общим множителем перед значениями функции в этих точках.

Таким образом, указанная формула может быть записана так:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{16}{9} f(0, 0) + \frac{4}{9} [f(1, 0) + f(-1, 0) + f(0, 1) + f(0, -1)] + \frac{1}{9} [f(1, 1) + f(1, -1) + f(-1, 1) + f(-1, -1)] + \frac{1}{45} \left[ \frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial x_2^4} \right] + \dots$$

Формулы классифицируются по областям интегрирования. В табл. 8 приводятся правила численных кубатур, дающие указанные в таблице главные члены ошибки при интегрировании гармонических функций. Некоторые кубатурные формулы с весом указаны в табл. 9. Эти формулы удобны для вычисления моментов функций двух переменных.

## § 2. Таблицы кубатурных формул

Таблица 1

$n$ -мерный куб с вершинами  $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$

$n = 2$

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов	Степень точности
1	$v_1 = 0,81649\ 65809\ 277260$	$a_1 = 1$	4	3
2	$\xi_1 = 1/\sqrt{3}$	$b_1 = 1$	4	3
3	$v_1 = 2$	$a_0 = 20/6$ $a_1 = 1/6$	5	3
4	$v_1 = 0,77459\ 66692\ 414834$ $\xi_1 = 0,77459\ 66692\ 414834$	$a_0 = 0,79012\ 34567\ 901235$ $a_1 = 0,49382\ 71604\ 938272$ $b_1 = 0,30864\ 19753\ 086420$	9	5
5	$v_1 = 1$ $v_2 = 0,5$ $\xi_1 = 1$	$-a_0 = 112/45$ $a_1 = 4/45$ $a_2 = 64/45$ $b_1 = 1/9$	13	5
6	$v_1 = 0,92582\ 00997\ 725515$ $\xi_1 = 0,38055\ 44332\ 083157$ $\xi_2 = 0,80597\ 97829\ 185987$	$a_1 = 0,24197\ 53086\ 419753$ $b_1 = 0,52059\ 29166\ 673945$ $b_2 = 0,23743\ 17746\ 906302$	12	7
7	$v_1 = 1$ $v_2 = 2/3$ $v_3 = 1/3$ $\xi_1 = 1$ $\xi_2 = 1/2$	$a_0 = 5388/945$ $a_1 = 111/945$ $a_2 = 405/945$ $-a_3 = 1863/945$ $b_1 = 49/945$ $b_2 = 896/945$	21	7

Продолжение табл. 1

 $n = 2$ 

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов	Степень точности	Главный член остатка
8	$v_1 = 1$	$a_0 = 4/3$ $a_1 = 2/3$	5	3	$\frac{1}{45} (\nabla^4 f_0 - 7D^4 f_0)$
9	$\xi_1 = 1$	$a_0 = 8/3$ $b_1 = 1/3$	5	3	$\frac{1}{45} (\nabla^4 f_0 + 8D^4 f_0)$
10	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 1$	$a_1 = 4/3$ $-b_1 = 1/3$	8	3	$\frac{1}{45} (\nabla^4 f_0 - 22D^4 f_0)$
11	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 1$	$a_0 = 16/9$ $a_1 = 4/9$ $b_1 = 1/9$	9	3	$\frac{1}{45} (\nabla^4 f_0 - 2D^4 f_0)$
12	$v_1 = \sqrt{7/15}$ $\xi_1 = \sqrt{7/9}$	$a_1 = 40/49$ $b_1 = 9/49$	8	5	$\frac{4}{6!} \left( -\frac{212}{14175} \nabla^6 + \frac{1612}{4725} \nabla^2 D^4 \right) f_0$
13	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 1$	$a_0 = 88/45$ $a_1 = 16/45$ $b_1 = 7/45$	9	5	$\frac{1}{45} \nabla^4 f_0$
14	$v_1 = 1$ $v_2 = \sqrt{5/11}$	$a_0 = 256/225$ $a_1 = 8/45$ $a_2 = 121/225$	9	5	$-\frac{4}{6!} \left( \frac{4\nabla^6 + 268\nabla^2 D^4}{1155} \right) f_0$
15	$v_1 = 1$ $v_2 = \sqrt{2/5}$	$-a_0 = 8/9$ $a_1 = 10/9$ $a_2 = 1/9$	9	5	$\frac{4}{6!} \left( \frac{2\nabla^6 + 344\nabla^2 D^4}{525} \right) f_0$

 $n = 3$

Продолжение табл. 1

Узлы	Коэффициенты		Число узлов	Степень точности
$v_1 = 0,77459\ 66692\ 414834$ $\xi_1 = 0,77459\ 66692\ 414834$	$a_0 = 2,07407\ 40740\ 740741$ $-a_1 = 0,24691\ 35802\ 469136$ $b_1 = 0,61728\ 39506\ 172840$		19	5
$v_1 = 0,5$ $v_2 = 1$ $\eta_1 = 1$	$-a_0 = 496/45$ $a_1 = 128/45$ $a_2 = 8/45$ $c_1 = 1/9$		21	5
$v_1 = 0,84841\ 80114\ 722525$ $\xi_1 = 1,10641\ 28986\ 267175$ $\eta_1 = 0,65281\ 64721\ 016912$	$a_0 = 0,78807\ 34827\ 442106$ $a_1 = 0,49936\ 90023\ 077203$ $b_1 = 0,03230\ 37423\ 340374$ $c_1 = 0,47850\ 84494\ 251273$		27	7
$v_1 = 1,27958\ 18594\ 182734$ $\xi_1 = 0,70009\ 72875\ 523367$ $\eta_1 = 0,85504\ 42581\ 681327$	$a_0 = 0,94789\ 45552\ 646438$ $a_1 = 0,04242\ 99394\ 912215$ $b_1 = 0,50327\ 55687\ 554778$ $c_1 = 0,09477\ 73728\ 402868$		27	7
$v_1 = 0,92582\ 00997\ 725515$ $\xi_1 = 0,92582\ 00997\ 725515$ $\eta_1 = 0,73411\ 25287\ 521153$ $\eta_2 = 0,40670\ 31864\ 267161$	$a_1 = 0,29574\ 75994\ 513032$ $b_1 = 0,09410\ 15089\ 163237$ $c_1 = 0,22470\ 31747\ 656014$ $c_2 = 0,41233\ 38622\ 714356$		34	7
$v_1 = \sqrt{3/5}$ $\xi_1 = \sqrt{3/5}$ $\eta_1 = \sqrt{3/5}$	$a_0 = 3440/5103$ $a_1 = 2312/5103$ $b_1 = 1364/5103$ $c_1 = 893/5103$	27	5	$\frac{32}{25 \cdot 71} (-\nabla^6 + 3\nabla^2 D^4) f_0$
$v_1 = \sqrt{3/5}$ $\xi_1 = \sqrt{3/5}$ $\eta_1 = \sqrt{3/5}$	$a_0 = 512/729$ $a_1 = 320/729$ $b_1 = 200/729$ $c_1 = 1000/5832$	27	5	$\frac{32}{25 \cdot 71} (-\nabla^6 + 3\nabla^2 D^4 - 3I^6) f_0$

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов	Степень точности
1	$v_1 = \sqrt{\frac{n}{3}}$	$a_1 = \frac{2^{n-1}}{n}$	$2n$	3
2	$v_1 = \sqrt{3/5}$ $\xi_1 = \sqrt{3/5}$	$a_0 = \frac{2^{n-1}}{81} (25n^2 - 115n + 162)$ $a_1 = \frac{2^{n-1}}{81} (70 - 25n)$ $b_1 = \frac{25 \cdot 2^{n-1}}{162}$	$2n^2 + 1$	5

Таблица 2

$n$ -мерный шар с центром в начале координат с единичным радиусом

$$n = 2$$

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов	Степень точности
1	$\xi_1 = 0,5$	$b_1 = 0,25\pi$	4	3
2	$v_1 = 0,7071067811865475$	$a_1 = 0,7853981633974483$	4	3
3	$v_1 = 0,7071067811865475$ $\xi_1 = 0,7071067811865475$	$a_0 = 0,5235987755982989$ $a_1 = 0,5235987755982989$ $b_1 = 0,1308996938995747$	9	5
4	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 0,5$	$a_0 = 0,5235987755982989$ $a_1 = 0,5235987755982989$ $b_1 = 0,1308996938995747$	9	5
5	$v_1 = 0,8660254037844386$ $\xi_1 = 0,3229149920674005$ $\xi_2 = 0,6441713103894646$	$a_1 = 0,2327105669325773$ $b_1 = 0,3870777960062264$ $b_2 = 0,1656098004586446$	12	7

$$n = 3$$

Продолжение табл. 2

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов	Степень точности
1	$v_1 = 0,77459\ 66692\ 414834$	$a_1 = 0,69813\ 17007\ 977318$	6	3
2	$v_1 = 0,65465\ 36707\ 079771$ $\xi_1 = 0,65465\ 36707\ 079771$	$a_0 = 0,27925\ 26803\ 190927$ $a_1 = 0,32579\ 47937\ 056082$ $b_1 = 0,16289\ 73968\ 528041$	19	5
3	$v_1 = 0,68225\ 91268\ 536840$ $\eta_1 = 0,60820\ 48823\ 194740$	$a_1 = 0,55236\ 11797\ 267854$ $c_1 = 0,10932\ 78908\ 032098$	14	5
4	$v_1 = 1,23875\ 84445\ 019331$ $\eta_1 = 0,41897\ 65704\ 395655$	$a_1 = 0,50824\ 60976\ 245486$ $c_1 = 0,48548\ 03182\ 764577$	14	5
5	$v_1 = 0,83269\ 56271\ 382924$ $\xi_1 = 0,74765\ 06947\ 169606$ $\eta_1 = 0,42945\ 49987\ 784796$	$a_0 = 0,41560\ 03482\ 691997$ $a_1 = 0,19944\ 83077\ 968051$ $b_1 = 0,03806\ 76101\ 171267$ $c_1 = 0,26496\ 10860\ 413550$	27	7
6	$v_1 = 0,94104\ 48241\ 002225$ $\xi_1 = 0,54604\ 14781\ 242386$ $\eta_1 = 0,66049\ 83415\ 547611$	$a_0 = 0,44413\ 96821\ 009518$ $a_1 = 0,09573\ 84071\ 760634$ $b_1 = 0,25083\ 85364\ 520637$ $c_1 = 0,02001\ 97052\ 755367$	27	7
7	$v_1 = \sqrt{\frac{7}{2817}(245 - \sqrt{17770})}$ $v_2 = \sqrt{\frac{7}{2817}(245 + \sqrt{17770})}$ $\xi_1 = \sqrt{\frac{7}{18}}$ $\eta_1 = \sqrt{\frac{7}{27}}$	$a_1 = \frac{2\pi}{108045} \left( 2965 + \frac{227816}{\sqrt{17770}} \right)$ $a_2 = \frac{2\pi}{108045} \left( 2965 - \frac{227816}{\sqrt{17770}} \right)$ $b_1 = \frac{432\pi}{12005}$ $c_1 = \frac{729\pi}{24010}$	32	7



Продолжение табл. 2

 $n = 4$ 

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов	Степень точности
1	$v_1 = \frac{\sqrt{39 - 3\sqrt{41}}}{8}$ $v_2 = \frac{\sqrt{39 + 3\sqrt{41}}}{8}$ $\xi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\eta_1 = \frac{1}{2}$	$a_1 = \frac{\pi^2}{2880} \left( 33 + \frac{109}{\sqrt{41}} \right)$ $a_2 = \frac{\pi^2}{2880} \left( 33 - \frac{109}{\sqrt{41}} \right)$ $b_1 = \frac{\pi^2}{480}$ $c_1 = \frac{\pi^2}{120}$	72	7

Для любого  $n$ 

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов	Степень точности
1	$v_1 = \sqrt{\frac{n}{n+2}}$	$a_1 = \frac{1}{2n} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$	$2n$	3
2	$v_1 = \sqrt{\frac{3}{n+4}}$ $\xi_1 = \sqrt{\frac{3}{n+4}}$	$a_0 = \frac{n^3 - 3n^2 - 10n + 36}{18n + 36} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$ $- a_1 = \frac{n^2 - 16}{18n + 36} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$ $b_1 = \frac{n + 4}{36n + 72} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$	$2n^2 + 1$	5

Продолжение табл. 2

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов	Степень точности
3	$v_1 = \sqrt{\beta_n - \sqrt{\beta_n^2 - \frac{n}{n+4}} \beta_n}$ $v_2 = \sqrt{\beta_n + \sqrt{\beta_n^2 - \frac{n}{n+4}} \beta_n}$ $\xi_1 = \sqrt{\frac{n+4}{2(n+6)}}$ $\eta_1 = \sqrt{\frac{n+4}{3(n+6)}}$	$a_1 = \frac{\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\gamma_n}{2\sqrt{\beta_n^2 - \frac{n}{n+4}} \beta_n}$ $a_2 = \frac{\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\delta_n}{2\sqrt{\beta_n^2 - \frac{n}{n+4}} \beta_n}$ $b_1 = \frac{4\pi^{n/2}(n+6)^2(5-n)}{n\Gamma(n/2)(n+2)(n+4)^3}$ $c_1 = \frac{27\pi^{n/2}(n+6)^2}{4n\Gamma(n/2)(n+2)(n+4)^3}$	$2/3n(2n^2 - 3n + 7)$	7

В формуле №3 таблицы 2 в случае произвольного  $n$  использованы обозначения

$$\beta_n = \frac{(n+4)^3(n^2 - 9n + 38)}{(n+6)(n^4 + n^3 - 28n^2 + 60n + 1216)};$$

$$\gamma_n = \left[ \frac{1}{n} - Q_n \left( \frac{n+6}{n+4} \right)^3 \right] \left( \beta_n + \sqrt{\beta_n^2 - \frac{n}{n+4}} \beta_n \right) - \frac{1}{n+2} + Q_n \left( \frac{n+6}{n+4} \right)^2;$$

$$\delta_n = \frac{1}{n+2} - Q_n \left( \frac{n+6}{n+4} \right)^2 - \left[ \frac{1}{n} - Q_n \left( \frac{n+6}{n+4} \right)^3 \right] \left( \beta_n - \sqrt{\beta_n^2 - \frac{n}{n+4}} \beta_n \right);$$

$$Q_n = \frac{(n-1)(n+22)}{2(n+2)(n+4)(n+6)}.$$

Таблица 3

Формула для численного интегрирования по квадрату с вершинами  
 $(1,1)$ ;  $(-1,1)$ ;  $(1,-1)$ ;  $(-1,-1)$

$$r = 9, \quad m = 39$$

$i$	Коэффициенты	Узлы	
		$x_i$	$y_i$
1	-2,5299145	0	0
2—5	1,1666667	$\pm 0,6546537$	$\pm 0,2581989$
6,7	1,8016448	0,	$\pm 0,7037316$
8,9	1,0931624	$\pm 1$	0
10—13	-0,5332435	$\pm 1$	$\pm 0,2581989$
14—17	-0,9452709	$\pm 1$	$\pm 0,7037316$
18—21	0,42887840	$\pm 1$	$\pm 0,7559289$
22—25	0,5030548	$\pm 1$	$\pm 1$
26,27	0,03220126	0	$\pm 1$
28—31	-1,1666667	$\pm 0,6546537$	$\pm 1$
32—35	0,4786287	$\pm 0,5384693$	$\pm 1$
36—39	0,2369268	$\pm 0,9061798$	$\pm 1$

Таблица 4

Формулы для численного интегрирования по кругу  $x^2 + y^2 \leq 1$

$$1. \quad r = 5, \quad m = 7$$

$i$	Узлы	
	$x_i$	$y_i$
1	0	0
2, 3	$\pm 0,81649 \ 65809 \ 277260$	0
4—7	$\pm 0,40824 \ 82904 \ 638630$	$\pm 0,70710 \ 67811 \ 865471$

$i$	Коэффициенты $A_i$		
1	0,78539	81633	974483
2,3	0,39269	90816	987242
4—7	0,39269	90816	987242

Продолжение табл. 4

2.

 $r = 5,$  $m = 7$ 

$x_i$	0	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$
$y_i$	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$A_i$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$					

3.

 $r = 7,$  $m = 16$ 

$i$	Коэффициенты $A_i$	Узлы	
		$x_i$	$y_i$
1—4	$\frac{\pi}{15}$	$\pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}$	$\pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}$
5—8	$\frac{\pi}{15}$	$\pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}$	$\pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}$
9—12	$\frac{\pi(3 - \sqrt{5})}{60(3 + \sqrt{5})}$	$\pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}$	$\pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}$
13—16	$\frac{\pi(3 + \sqrt{5})}{60(3 - \sqrt{5})}$	$\pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}$	$\pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}$

4.

 $r = 9, m = 21$ 

$i$	Коэффициенты $A_i$	Узлы	
		$x_i$	$y_i$
1	0,34906585	0	0
2,3	0,16100217	$\pm 0,59586158$	0
4—7	0,16100217	$\pm 0,48206214$	$\pm 0,35023865$
8—11	0,16100217	$\pm 0,18413135$	$\pm 0,56669804$
12,13	0,11825050	$\pm 0,91921106$	0
14—17	0,11825050	$\pm 0,74365736$	$\pm 0,54029870$
18—21	0,11825050	$\pm 0,28405183$	$\pm 0,87422167$

Продолжение табл. 4

5.

 $r = 9, m = 21$ 

$i$	Узлы	
	$x_i$	$y_i$
1	0	0
2—5	$\pm 0,55050\ 43204\ 538557$	$\pm 0,22802\ 63556\ 769715$
6—9	$\pm 0,22802\ 63556\ 769715$	$\pm 0,55050\ 43204\ 538557$
10, 11	$\pm 0,91921\ 10607\ 898046$	0
12, 13	0	$\pm 0,91921\ 10607\ 898046$
14—17	$\pm 0,7932084745126058$	$\pm 0,46450\ 97310\ 495256$
18—21	$\pm 0,4645097310495256$	$\pm 0,79320\ 84745\ 126058$

$i$	Коэффициенты $A_i$
1	0,34906 58503 988659
2—5	0,20125 27133 278051
6—9	0,20125 27133 278051
10, 11	0,10129 18735 702551
12, 13	0,10129 18735 702551
14—17	0,09716 72002 859332
18—21	0,09716 72002 859332

6.

 $r = 11, m = 32$ 

$i$	Узлы	
	$x_i$	$y_i$
1, 2	$\pm 0,33571\ 06870\ 197288$	0
3, 4	0	$\pm 0,33571\ 06870\ 197288$
5—8	$\pm 0,23738\ 33033\ 084449$	$\pm 0,23738\ 33033\ 084449$
9, 10	$\pm 0,70710\ 67811\ 865475$	0
11, 12	0	$\pm 0,70710\ 67811\ 865475$
13—16	$\pm 0,61253\ 69400\ 823741$	$\pm 0,35326\ 83074\ 300921$
17—20	$\pm 0,35326\ 83074\ 300921$	$\pm 0,61253\ 69400\ 823741$
21—24	$\pm 0,81574\ 80497\ 746617$	$\pm 0,47101\ 32205\ 252606$
25—28	$\pm 0,47101\ 32205\ 252606$	$\pm 0,81574\ 80497\ 746617$
29, 30	$\pm 0,94196\ 51451\ 198933$	0
31, 32	0	$\pm 0,94196\ 51451\ 198933$

Продолжение табл. 4

$i$	Коэффициенты $A_i$
1, 2	0, 10908 30782 496456
3, 4	0, 10908 30782 496456
5—8	0, 10908 30782 496456
9, 10	0, 11610 47224 304262
11, 12	0, 11610 47224 304262
13—16	0, 11648 05639 842198
17—20	0, 11648 05639 842198
21—24	0, 07271 57433 213629
25—28	0, 07271 57433 213629
29, 30	0, 07273 46698 565653
31, 32	0, 07273 46698 565653

7.

 $r = 15, m = 64$ 

$i$	Узлы	
	$x_i$	$y_i$
1—4	$\pm 0, 25843 61661 674054$	$\pm 0, 05140 61496 288813$
5—8	$\pm 0, 05140 61496 288813$	$\pm 0, 25843 61661 674054$
9—12	$\pm 0, 56342 63397 544869$	$\pm 0, 11207 24670 846205$
13—16	$\pm 0, 11207 24670 846205$	$\pm 0, 56342 63397 544869$
17—20	$\pm 0, 47764 97869 993547$	$\pm 0, 31915 53840 796721$
21—24	$\pm 0, 31915 53840 796721$	$\pm 0, 47764 97869 993547$
25—28	$\pm 0, 80280 16728 473508$	$\pm 0, 15968 71812 824163$
29—32	$\pm 0, 15968 71812 824163$	$\pm 0, 80280 16728 473508$
33—36	$\pm 0, 68058 23955 716280$	$\pm 0, 45475 06180 649039$
37—40	$\pm 0, 45475 06180 649039$	$\pm 0, 68058 23955 716280$
41—44	$\pm 0, 21909 16025 980981$	$\pm 0, 14639 23286 035535$
45—48	$\pm 0, 14639 23286 035535$	$\pm 0, 21909 16025 980981$
49—52	$\pm 0, 94612 39423 417719$	$\pm 0, 18819 57532 057769$
53—56	$\pm 0, 18819 57532 057769$	$\pm 0, 94612 39423 417719$
57—60	$\pm 0, 80208 51487 551318$	$\pm 0, 53593 61621 905023$
61—64	$\pm 0, 53593 61621 905023$	$\pm 0, 80208 51487 551318$

$i$	Коэффициенты $A_i$
1—4	0, 03415 05695 624825
5—8	0, 03415 05695 624825
9—12	0, 06402 42008 621985
13—16	0, 06402 42008 621985
17—20	0, 06402 42008 621985
21—24	0, 06402 42008 621985

Продолжение табл. 4

$i$	Коэффициенты $A_i$
25—28	0,06402 42008 621985
29—32	0,06402 42008 621985
33—36	0,06402 42008 621985
37—40	0,06402 42008 621985
41—44	0,03415 05695 624825
45—48	0,03415 05695 624825
49—52	0,03415 05695 624825
53—56	0,03415 05695 624825
57—60	0,03415 05695 624825
61—64	0,03415 05695 624825

8\*).  $r = 9, m = 21$ 

$$I \approx \pi \left[ \frac{1}{9} f(0, 0) + \frac{16-3\sqrt{6}}{360} \sum_{i=0}^9 f\left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{6}}{10}} \cdot A_{10}^i\right) + \right. \\ \left. + \frac{16+3\sqrt{6}}{360} \sum_{i=0}^9 f\left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{6}}{10}} \cdot A_{10}^i\right) \right].$$

9.  $r = 13, m = 43$ 

$$I \approx \pi \left[ \frac{1}{16} f(0, 0) + 0,0235 \sum_{i=0}^{13} f(0,401 \cdot A_{14}^i) + \right. \\ \left. + 0,0277 \sum_{i=0}^{13} f(0,768 \cdot A_{14}^i) + 0,0158 \sum_{i=0}^{13} f(0,955 \cdot A_{14}^i) \right].$$

10.  $r = 11, m = 28$ 

$$I \approx \sum_{i=1}^2 A_i \sum_{j=1}^{12} f\left(r_i \cos \frac{\pi}{6} j, r_i \sin \frac{\pi}{6} j\right) + \sum_{i=1}^3 B_i \sum_{j=1}^4 f\left(R_i \cos \frac{\pi}{2} j, R_i \sin \frac{\pi}{2} j\right).$$

Штрих у знака суммы означает, что пропускаются слагаемые при  $j = 3, 6, 9, 12$ .  
 Параметры формулы имеют следующие значения:

$$r_1 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{0,4}}{3}}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{0,4}}{3}}, \\ A_1 = \frac{340+125\sqrt{0,4}}{10368} \pi, \quad A_2 = \frac{340-125\sqrt{0,4}}{10368} \pi,$$

\*)  $A_j^i$  — вершины  $j$ -угольника, вписанного в круг единичного радиуса с центром в начале координат.

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \sqrt{\frac{31 - \sqrt{601}}{60}}, \\
 R_2 &= \sqrt{\frac{3}{5}}, \\
 R_3 &= \sqrt{\frac{31 + \sqrt{601}}{60}}, \\
 B_1 &= \frac{\pi}{20736} \left( 857 + \frac{12707}{\sqrt{601}} \right), \\
 B_2 &= \frac{125 \pi}{3456}, \\
 B_3 &= \frac{\pi}{20736} \left( 857 - \frac{12707}{\sqrt{601}} \right).
 \end{aligned}$$

11.  $r = 15$ ,  $m = 44$ .

$$\begin{aligned}
 I \approx \sum_{i=1}^2 A_i \sum_{j=0}^7 f \left( r_i \cos(2j+1) \frac{\pi}{8}, r_i \sin(2j+1) \frac{\pi}{8} \right) + \\
 + \sum_{i=1}^3 B_i \sum_{j=0}^3 f \left( R_i \cos(2j+1) \frac{\pi}{4}, R_i \sin(2j+1) \frac{\pi}{4} \right) + \\
 + \sum_{i=1}^4 C_i \sum_{j=0}^3 f \left( \rho_i \cos j \frac{\pi}{2}, \rho_i \sin j \frac{\pi}{2} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \sqrt{\frac{21 - \sqrt{21}}{28}}, & r_2 &= \sqrt{\frac{21 + \sqrt{21}}{28}}, \\
 A_1 &= \frac{5096 + 343 \sqrt{21}}{253125} \pi, & A_2 &= \frac{5096 - 343 \sqrt{21}}{253125} \pi, \\
 R_1 &= \sqrt{\frac{69 - \sqrt{1401}}{112}}, & R_2 &= \sqrt{\frac{5}{7}}, & R_3 &= \sqrt{\frac{69 + \sqrt{1401}}{112}}, \\
 B_1 &= \frac{\pi}{432 \cdot 10^5} \left( 1055 \, 603 + \frac{26076047}{\sqrt{1401}} \right), \\
 B_2 &= \frac{16807}{8 \cdot 10^5} \pi, \\
 B_3 &= \frac{\pi}{432 \cdot 10^5} \left( 1055 \, 603 - \frac{26076047}{\sqrt{1401}} \right).
 \end{aligned}$$

Числа  $\rho_1^2$ ,  $\rho_2^2$ ,  $\rho_3^2$ ,  $\rho_4^2$  суть корни многочлена

$$\begin{aligned}
 P_4(z) &\equiv z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta = \\
 &= z^4 + \frac{1}{22 \, 058 \, 008} (-47 \, 224 \, 002z^3 + 32 \, 262 \, 915z^2 - 7382 \, 700z + 352 \, 125).
 \end{aligned}$$



Приближенные значения  $\rho_i^2$ :

$$\begin{aligned}\rho_1^2 &= 0,063\,940\,099; & \rho_2^2 &= 0,333\,770\,714; \\ \rho_3^2 &= 0,763\,591\,027; & \rho_4^2 &= 0,979\,598\,732.\end{aligned}$$

Коэффициенты  $C_i$  определяются равенствами:

$$8\rho_i^8 P_4'(\rho_i^2) C_i = \left[ \frac{1}{10} \rho_i^6 + \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{10} \alpha \right) \rho_i^4 + \left( \frac{1}{14} + \frac{1}{12} \alpha + \frac{1}{10} \beta \right) \rho_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{16} + \frac{1}{14} \alpha + \frac{1}{12} \beta + \frac{1}{10} \gamma \right] \pi.$$

Приближенные значения коэффициентов:

$$\begin{aligned}C_1 &= 0,039\,881\pi; & C_2 &= 0,034\,856\pi; \\ C_3 &= 0,021\,084\pi; & C_4 &= 0,005\,320\pi.\end{aligned}$$

### Таблица 5

Формулы для численного интегрирования по  $n$ -мерному шару единичного радиуса с центром в начале координат.

1.  $n = 3$ ,  $r = 3$ ,  $m = 6$

$$\frac{1}{4\pi} \iiint_V f dv \approx \frac{1}{18} \sum_{i=1}^6 f_{\rho=\sqrt{3/5}}(A_i),$$

$A_i$  — вершины октаэдра, вписанного в шар радиуса  $\rho = \sqrt{\frac{3}{5}}$ ,  $f_{\rho=\sqrt{3/5}}(A_i)$  — значения подынтегральной функции в точках  $A_i$ .

2.  $n = 3$ ,  $r = 5$ ,  $m = 13$

$$\frac{1}{4\pi} \iiint_V f dv \approx \frac{4}{75} f(0, 0, 0) + \frac{7}{300} \sum_{i=1}^{12} f_{\rho=\sqrt{5/7}}(A_i),$$

$A_i$  — вершины икосаэдра, вписанного в шар радиуса  $\rho = \sqrt{\frac{5}{7}}$ .

3.  $n = 3$ ,  $r = 7$ ,  $m = 33$

$$\frac{1}{4\pi} \iiint_V f dv \approx \frac{16}{525} f(0, 0, 0) + \frac{27}{1400} \sum_{i=1}^{12} f_{\rho=\sqrt{5/7}}(A_i) + \frac{1}{280} \sum_{i=1}^{20} f_{\rho=1}(B_i),$$

$A_i$  — вершины икосаэдра, вписанного в шар с радиусом  $\rho = \sqrt{\frac{5}{7}}$ ,  $B_i$  — вершины додекаэдра, причем  $B_i$  лежат на перпендикулярах из центра икосаэдра на его грани.

Формулы для численного интегрирования по  $n$ -мерному шару  $D$ :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$$

$$1. \quad r = 4p - 1, \quad m = (2p)^n$$

$$\int_D f(x) dx \approx \frac{\pi}{2^p} \sum_{j=1}^p A_j r_j^{n-1} \sum_{i=1}^{4p} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-2}=1}^{2p} P_{i_1}^{(n-3)} P_{i_2}^{(n-4)} \dots P_{i_{n-2}}^{(0)} \times \\ \times F\left(r_j, \varphi_1^{(i_1)}, \varphi_2^{(i_2)}, \dots, \varphi_{n-2}^{(i_{n-2})}, \frac{\pi}{2^p} i\right).$$

Здесь функция

$$F(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) = \\ = f(r \cos \varphi_1, r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \dots, r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1})$$

построена по функции  $f(x)$  заменой декартовых координат сферическими:

$$x_1 = r \cos \varphi_1, \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ \dots \dots \dots$$

$$x_{n-2} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-3} \cos \varphi_{n-2},$$

$$x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1},$$

$$x_n = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1},$$

$$r > 0, \quad 0 \leq \varphi_i \leq \pi, \quad i = 1, 2, \dots, n-2; \quad 0 \leq \varphi_{n-1} < 2\pi.$$

Параметры формулы определяются следующим образом:

$$\varphi_{n-k-2}^{(i)} = \arccos t_i^{(k)};$$

$t_i^{(k)}$  и  $P_i^{(k)}$  суть узлы и коэффициенты квадратурной формулы гауссова типа с весом  $(1-t^2)^{k/2}$  на промежутке  $[-1, 1]$  и с  $2p$  узлами [см. § 1 гл. 3]:

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{k}{2}} \psi(t) dt \approx \sum_{i=1}^{2p} P_i^{(k)} \psi(t_i^{(k)}),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-3.$$

Если  $n$  — четное, то

$$r_j = \sqrt{i_j}, \\ A_j = \frac{D_j}{2r_j^{n-1}},$$

где  $t_j$  и  $D_j$  — узлы и коэффициенты квадратурной формулы гауссова типа для

промежутка  $[0, 1]$  и веса  $t^{\frac{n}{2}-1}$ :

$$\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} \psi(t) dt \approx \sum_{j=1}^p D_j \psi(t_j).$$

Если  $n$  — нечетное, то  $r_j$  суть положительные узлы квадратурной формулы гауссова типа с  $2p$  узлами для промежутка  $[-1, 1]$  и веса  $r^{n-1}$ :

$$\int_{-1}^1 r^{n-1} \psi(r) dr \approx \sum_{j=-p}^p E_j \psi(r_j), \quad r_j = -r_{-j},$$

а  $A_j$  определяются равенствами

$$A_j = \frac{E_j}{r_j^{n-1}}.$$

Штрих у знака суммы означает, что опускается слагаемое, отвечающее  $j = 0$ .

$$2. \quad r = 4p + 1, \quad m = 2p(2p + 1)^{n-1} + 1;$$

$$\int_D f(x) dx \approx$$

$$\approx Bf(0, 0, \dots, 0) + \frac{\pi}{2p+1} \sum_{j=1}^p B_j \rho_j^{n-1} \sum_{l=1}^{4p+2} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-2}=1}^{2p+1} Q_{i_1}^{(n-3)} Q_{i_2}^{(n-4)} \dots Q_{i_{n-2}}^{(0)} \times \\ \times F(\rho_j, \theta_1^{(i_1)}, \theta_2^{(i_2)}, \dots, \theta_{n-2}^{(i_{n-2})}, \frac{\pi}{2p+1} i).$$

Функция  $F$  определяется так же, как в формуле 1. Параметры формулы имеют следующие значения:

$$\theta_{n-k-2}^{(l)} = \arccos \tau_l^{(k)};$$

$\tau_l^{(k)}$  и  $Q_l^{(k)}$  суть узлы и коэффициенты квадратурной формулы гауссова типа с весом  $(1-t^2)^{k/2}$  на промежутке  $[-1, 1]$  и с  $2p+1$  узлами:

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{k/2} \psi(t) dt \approx \sum_{l=1}^{2p+1} Q_l^{(k)} \psi(\tau_l^{(k)}),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-3.$$

Если  $n$  — четное, то

$$\rho_j = \sqrt{\tau_j},$$

$$B = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} G,$$

$$B_j = \frac{G_j}{2\rho_j^{n-1}},$$

где  $\tau_j$ ,  $G$  и  $G_j$  — узлы и коэффициенты квадратурной формулы для промежутка  $[0, 1]$  и веса  $t^{\frac{n}{2}-1}$  наивысшей степени точности с одним фиксированным узлом  $t=0$  [см. (4.2.1)]:

$$\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} \psi(t) dt \approx G\psi(0) + \sum_{j=1}^p G_j \psi(\tau_j).$$

Если  $n$  — нечетное, то  $\rho_j$  суть положительные узлы квадратурной формулы гауссова типа с весом  $\rho^{n-1}$  на промежутке  $[-1, 1]$  и с  $2p+1$  узлами:

$$\int_{-1}^1 \rho^{n-1} \psi(\rho) d\rho \approx \sum_{j=-p}^p H_j \psi(\rho_j),$$

а  $B$  и  $B_j$  определяются равенствами

$$B = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} H_0, \quad B_j = \frac{H_j}{\rho_j^{n-1}}.$$

Т а б л и ц а 6

Формулы для  $n$ -мерного симплекса  
с вершинами  $(0, 0, \dots, 0)$ ;  
 $(1, 0, \dots, 0)$ ; ...;  $(0, 0, \dots, 1)$

1.  $n = 2, \quad r = 2, \quad m = 3$

$x_i$	$1/6$	$2/6$	$1/6$
$y_i$	$1/6$	$1/6$	$2/6$
$A_i$	$1/6$		

2.  $n = 2, \quad r = 3, \quad m = 4$

$x_i$	$1/3$	$1/3$	$3/3$	$1/3$
$y_i$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$3/3$ *
$A_i$	$-27/96$		$25/96$	

Продолжение табл. 6

3.  $n = 2, \quad r = 5, \quad m = 7$ 

$x_i$	$1/8$	$\frac{6 + \sqrt{15}}{21}$	$\frac{9 - 2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6 + \sqrt{15}}{21}$	$\frac{6 - \sqrt{15}}{21}$	$\frac{9 + 2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6 - \sqrt{15}}{21}$
$y_i$	$1/8$	$\frac{9 - 2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6 + \sqrt{15}}{21}$	$\frac{6 + \sqrt{15}}{21}$	$\frac{9 + 2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6 - \sqrt{15}}{21}$	$\frac{6 - \sqrt{15}}{21}$
$A_i$	$9/80$	$\frac{155 + \sqrt{15}}{2400}$			$\frac{155 - \sqrt{15}}{2400}$		

4.  $n = 3, \quad r = 2, \quad m = 4$ 

$x_i$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$
$y_i$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$
$z_i$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$
$A_i$	$1/24$			

5.  $n = 3, \quad r = 3, \quad m = 5$ 

$x_i$	$1/4$	$1/6$	$3/6$	$1/6$	$1/6$
$y_i$	$1/4$	$1/6$	$1/6$	$3/6$	$1/6$
$z_i$	$1/4$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$3/6$
$A_i$	$-18/120$	$9/120$			

Продолжение табл. 6

6.  $n$  — произвольное,  $r = 3$ ,  $m = 2n + 3$ 

Узлы $v_i$	Коэффициенты $A_i$
$v_0 = \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right)$	$A_0 = - \frac{(n+1)^2 (n-3)}{(n+2)(n+3)} S_n(1)^*$
$v_1 = (0, 0, \dots, 0)$ $v_2 = (1, 0, \dots, 0)$ ..... $v_{n+1} = (0, 0, \dots, 1)$	$A_1 = A_2 = \dots = A_{n+1} =$ $= \frac{3}{(n+1)(n+2)(n+3)} S_n(1)$
$v_{n+2} = \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$ $v_{n+3} = \left( 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$ $v_{n+4} = \left( \frac{1}{n}, 0, \dots, \frac{1}{n} \right)$ ..... $v_{2n+2} = \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, 0 \right)$	$A_{n+2} = A_{n+3} = \dots = A_{2n+2} =$ $= \frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} S_n(1)$
*) $S_n(1) = \frac{1}{n!}$ — объем $n$ -симплекса.	

Таблица 7

## Формулы численного интегрирования по параболическим областям

1.  $r = 2$ ,  $m = 5$ 

$$\int_{-a}^a \int_0^b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) f(x, y) dx dy \approx \frac{4}{210} ab \left[ 4f(0, 0) + 4f(0, b) + \right. \\ \left. + 7f(-a, 0) + 7f(a, 0) + 48f\left(0, \frac{1}{2}b\right) \right].$$

2.  $r = 5$ ,  $m = 13$ 

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) f(x, y) dx dy \approx \frac{8}{20790} ab \left[ 344f(0, 0) + 248f(0, \pm b) + \right. \\ \left. + 768f\left(0, \pm \frac{1}{2}b\right) + 165f(\pm a, 0) + 704f\left(\pm \frac{1}{2}a, 0\right) + 704f\left(\pm \frac{1}{2}a, \pm \frac{1}{2}b\right) \right].$$

Таблица 8

Формулы численного интегрирования гармонических функций по  $n$ -мерному кубу с вершинами  $(\pm h, \pm h, \pm h, \pm h, \dots, \pm h)$  \*)

$$n = 2$$

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов	Главный член остатка
1	$\xi_1 = 1$	$a_0 = 56/60$ $b_1 = 1/60$	5	$-\frac{32}{5} \frac{h^8}{9!} D^8 f_0$
2	$v_1 = 1$	$a_0 = 19/15$ $-a_1 = 1/15$	5	$\frac{28}{5} \cdot \frac{h^8}{9!} D^8 f_0$
3	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 1$	$a_0 = 132/120$ $-a_1 = 4/120$ $b_1 = 1/120$	9	$-\frac{4}{5} \cdot \frac{h^8}{9!} D^8 f_0$
4	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 1$	$-a_0 = 1/15$ $a_1 = 3/15$ $b_1 = 1/15$	9	$-\frac{412}{5} \frac{h^8}{9!} D^8 f_0$
5	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 1$	$a_1 = 56/300$ $b_1 = 19/300$	8	$-40 \frac{h^8}{9!} D^8 f_0$
6	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 1$	$+a_0 = 10/9$ $-a_1 = 32/900$ $b_1 = 7/900$	9	$\frac{1952}{1365} \cdot \frac{h^{12}}{12!} D^{12} f_0$

$$n = 3$$

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов	Главный член остатка
1	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 1$	$a_0 = 12048/7560$ $-a_1 = 626/7560$ $-b_1 = 61/7560$	19	$\frac{1198}{945} \frac{h^8}{8!} D^8 f_0$

\*) Все формулы табл. 8 даны для интеграла  $I$ , равного:

$$I = \frac{1}{(2h)^n} \int_{-h}^h \int_{-h}^h \dots \int_{-h}^h f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Продолжение табл. 8

 $n = 4$ 

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов	Главный член остатка
1	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 1$	$a_0 = 13056/7560$ $- a_1 = 504/7560$ $- b_1 = 61/7560$	33	$\frac{1198}{945} \frac{h^8}{8!} D^8 f_0 + \frac{3619}{315} \frac{h^8}{8!} Q^8 f_0$

 $n = 5$ 

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов
1	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 1$	$a_0 = 13820/7560$ $- a_1 = 382/7560$ $- b_1 = 61/7560$	51

 $n = 6$ 

№ п/п	Узлы	Коэффициенты	Число узлов
1	$v_1 = 1$ $\xi_1 = 1$	$a_0 = 14340/7560$ $- a_1 = 260/7560$ $- b_1 = 61/7560$	73

Таблица 9

Кубатурные формулы с весом

 $n = 2$ 1.  $r = 6, m = 8$ 

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} x^{2k+1} f(x, y) dx dy \approx \frac{8}{26k+55} [f(1, 0) - f(-1, 0)] +$$

$$+ \frac{32 \cdot 2^{1/2} (2k+7)^{3/2} (2k+5)^{1/2}}{9(4k+5)^{1/2} (2k+3)^{3/2} (26k+55)} \left[ f\left(\sqrt{\frac{(4k+5)(2k+3)}{2(2k+7)(2k+5)}}, 0\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(-\sqrt{\frac{(4k+5)(2k+3)}{2(2k+7)(2k+5)}}, 0\right) \right] + \frac{5(2k+5)^{1/2}}{9(2k+3)^{3/2}} \left[ f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) - f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right].$$



$$2. r = 5, m = 8$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^{2k+2} f(x, y) dx dy \approx \frac{8}{26k+55} [f(1, 0) - f(-1, 0)] + \\ + \frac{32(2k+7)}{9(2k+3)(26k+55)} \left[ f\left(\sqrt{\frac{(4k+5)(2k+3)}{2(2k+7)(2k+5)}}, 0\right) + \right. \\ \left. + f\left(-\sqrt{\frac{(4k+5)(2k+3)}{2(2k+7)(2k+5)}}, 0\right) + \frac{5}{9(2k+3)} \times \right. \\ \left. \times \left[ f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right] \right].$$

$$3. r = 5, m = 4$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^{2k+1} y^{2l+1} f(x, y) dx dy \approx \frac{(2k+5)^{1/2} (2l+5)^{1/2}}{(2k+3)^{3/2} (2l+3)^{3/2}} \times \\ \times \left[ f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+5}}, \sqrt{\frac{2l+3}{2l+5}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+5}}, -\sqrt{\frac{2l+3}{2l+5}}\right) - \right. \\ \left. - f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+5}}, -\sqrt{\frac{2l+3}{2l+5}}\right) - f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+5}}, \sqrt{\frac{2l+3}{2l+5}}\right) \right].$$

$$4. r = 6, m = 8$$

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} x^{2k+1} f(x, y) dx dy \approx \frac{(2k+3)!! \pi}{(2k+6)!!} \left\{ \frac{2}{5} [f(1, 0) - f(-1, 0)] + \right. \\ \left. + \frac{4}{15} \frac{(2k+8)^{3/2}}{(2k+3)^{3/2}} \left[ f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+8}}, 0\right) - f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+8}}, 0\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{(2k+8)^{3/2}}{6(2k+3)^{3/2}} \left[ f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+8}}, \sqrt{\frac{3}{2k+8}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+8}}, -\sqrt{\frac{3}{2k+8}}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+8}}, \sqrt{\frac{3}{2k+8}}\right) - f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+8}}, -\sqrt{\frac{3}{2k+8}}\right) \right] \right\}.$$

$$5. r = 5, m = 8$$

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} x^{2k+2} f(x, y) dx dy \approx \frac{(2k+3)!!}{(2k+6)!!} \pi \left\{ \frac{2}{5} [f(1, 0) - f(-1, 0)] + \right. \\ \left. + \frac{4(2k+8)}{15(2k+3)} \left[ f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+8}}, 0\right) + f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+8}}, 0\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2k+8}{6(2k+3)} \left[ f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+8}}, \sqrt{\frac{3}{2k+8}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+8}}, -\sqrt{\frac{3}{2k+8}}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+8}}, \sqrt{\frac{3}{2k+8}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+8}}, -\sqrt{\frac{3}{2k+8}}\right) \right] \right\}.$$

$$6. r = 5, m = 4$$

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^{2k+1} y^{2l+1} f(x, y) dx dy &\approx \frac{\Gamma(k + 3/2) \Gamma(l + 3/2) (k+l+4)}{2\Gamma(k+l+4) \sqrt{(2k+3)(2l+3)}} \times \\ &\times \left[ f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+2l+8}}, +\sqrt{\frac{2l+3}{2k+2l+8}}\right) + \right. \\ &+ f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+2l+8}}, -\sqrt{\frac{2l+3}{2k+2l+8}}\right) - \\ &- f\left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+2l+8}}, -\sqrt{\frac{2l+3}{2k+2l+8}}\right) - \\ &\left. - f\left(-\sqrt{\frac{2k+3}{2k+2l+8}}, \sqrt{\frac{2l+3}{2k+2l+8}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Таблица 10

Формулы для численного интегрирования по сфере

$$S: x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

$$1. n = 3, r = 9, m = 32$$

$$\int_S f(x) dS \approx \frac{5\pi}{42} \sum_{i=1}^{12} f(A_i) + \frac{9\pi}{70} \sum_{i=1}^{20} f(B_i),$$

$A_i$  — вершины икосаэдра, вписанного в  $S$ ;  $B_i$  — вершины вписанного в  $S$  додекаэдра, причем  $B_i$  лежат на перпендикулярах, опущенных из центра икосаэдра на его грани.

$$2. n — \text{любое}, r = 2p - 1, m = 2p^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \int_S f(x) dS &\approx \\ &\approx \frac{\pi}{p} \sum_{j=1}^{2p} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-2}=1}^p P_{i_1}^{(n-3)} P_{i_2}^{(n-4)} \dots P_{i_{n-2}}^{(0)} F(\varphi_1^{(i_1)}, \varphi_2^{(i_2)}, \dots, \varphi_{n-2}^{(i_{n-2})}, \frac{\pi}{p} j). \end{aligned}$$

Здесь функция

$$\begin{aligned} F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) &= \\ &= f(\cos \varphi_1, \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \dots, \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}) \end{aligned}$$



ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ  
**ЧИСЛОВЫЕ ТАБЛИЦЫ**

ГЛАВА 17

**ТАБЛИЦЫ АБСЦИСС И КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ПРАВИЛ ВЫЧИСЛЕНИЙ,  
 ИМЕЮЩИХ НАИВЫСШУЮ АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ СТЕПЕНЬ ТОЧНОСТИ**

Таблица 1. Вычисление интеграла в случае постоянной весовой функции  
 Формула Гаусса. Глава 3, § 2, (3.2.1).

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Степень точности равна  $2n - 1$ . Коэффициенты  $A_k$  и абсциссы  $x_k$  обладают следующей симметрией относительно  $x = 0$ :

$$x_{n+1-k} = -x_k, \quad A_{n+1-k} = A_k$$

В таблице даны абсциссы узлов, лежащих на отрезке  $0 \leq x < 1$  и перенумерованных в порядке убыви  $x$ , и соответствующие коэффициенты.

Литература: Gawlik H. [1], Davis P. and Rabinowitz P. [2, 4].

Таблица 1

n	k	$x_k = -x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$
2	1	0,57735 02691 89625 76451	1,00000 00000 00000 00000
	2	0,77459 66692 41483 37704	0,55555 55555 55555 55556
3	1	0,86113 63115 94052 57522	88888 88888 88888 88889
	2	33998 10435 84856 26480	0,34785 48451 37453 85737
4	1	0,90617 98459 38663 99280	65214 51548 62546 14263
	2	53846 93101 05683 09104	0,23692 68850 56189 08751
5	1	0,90617 98459 38663 99280	47862 86704 99366 46804
	2	53846 93101 05683 09104	56888 88888 88888 88889
6	1	0,93246 95142 03152 02781	0,17132 44923 79170 34504
	2	66120 93864 66264 51366	36076 15730 48138 60757
	3	23861 91860 83196 90863	46791 39345 72691 04739

Т а б л и ц а 1 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k = -x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$
7	1	0, 94910 79123 42758 52453	0, 12948 49661 68869 69327
	2	74153 11855 99394 43986	27970 53914 89276 66790
	3	40584 51513 77397 16691	38183 00505 05118 94495
	4	00000 00000 00000 00000	41795 91836 73469 38776
8	1	0, 96028 98564 97536 23168	0, 10122 85362 90376 25915
	2	79666 64774 13626 73959	22238 10344 53374 47054
	3	52553 24099 16328 98582	31370 66458 77887 28734
	4	18343 46424 95649 80494	36268 37833 78361 98297
9	1	0, 96816 02395 07626 08984	0, 08127 43883 61574 41197
	2	83603 11073 26635 79430	18064 81606 94857 40406
	3	61337 14327 00590 39731	26061 06964 02935 46232
	4	32425 34234 03808 92904	31234 70770 40002 84007
	5	00000 00000 00000 00000	33023 93550 01259 76316
10	1	0, 97390 65285 17171 72008	0, 06667 13443 08688 13759
	2	86506 33666 88984 51073	14945 13491 50580 59315
	3	67940 95682 99024 40623	21908 63625 15982 04400
	4	43339 53941 29247 19080	26926 67193 09996 35509
	5	14887 43389 81631 21089	29552 42247 14752 87017
11	1	0, 97822 86581 46056 99280	0, 05566 85671 16173 66648
	2	88706 25997 68095 29908	12558 03694 64904 62464
	3	73015 20055 74049 32409	18629 02109 27734 25143
	4	51909 61292 06811 81593	23319 37645 91990 47992
	5	26954 31559 52344 97233	26280 45445 10246 66218
	6	00000 00000 00000 00000	27292 50867 77900 63071
12	1	0, 98156 06342 46719 25069	0, 04717 53363 86511 82719
	2	90411 72563 70474 85668	10693 93259 95318 43096
	3	76990 26741 94304 68704	16007 83285 43346 22633
	4	58731 79542 86617 44730	20316 74267 23065 92175
	5	36783 14989 98180 19375	23349 25365 38354 80876
	6	12523 34085 11468 91547	24914 70458 13402 78500
13	1	0, 98418 30547 18588 14947	0, 04048 40047 65315 87952
	2	91759 83992 22977 96521	09212 14998 37728 44792
	3	80157 80907 33309 91279	13887 35102 19787 23846
	4	64234 93394 40340 22064	17814 59807 61945 73828
	5	44849 27510 36446 85288	20781 60475 36888 50231
	6	23045 83159 55134 79407	22628 31802 62897 23841
	7	00000 00000 00000 00000	23255 15532 30873 91019
14	1	0, 98628 38086 96812 33884	0, 03511 94603 31751 86303
	2	92843 48836 63573 51734	08015 80871 59760 20981
	3	82720 13150 69764 99319	12151 85706 87903 18469
	4	68729 29048 11685 47015	15720 31671 58193 53457

Таблица 1 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k = -x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$
14	5	51524 86363 58154 09197	18553 83974 77937 81374
	6	31911 23689 27889 76044	20519 84637 21295 60397
	7	10805 49487 07343 66207	21526 38534 63157 79020
15	1	0, 98799 25180 20485 42849	0, 03075 32419 96117 26835
	2	93727 33924 00705 90431	07036 60474 88108 12471
	3	84820 65834 10427 21620	10715 92204 67171 93501
	4	72441 77313 60170 04742	13957 06779 26154 31445
	5	57097 21726 08538 84754	16626 92058 16993 93355
	6	39415 13470 77563 36990	18616 10000 15562 21103
	7	20119 40939 97434 52230	19843 14853 27111 57646
	8	00000 00000 00000 00000	20257 82419 25561 27288
16	1	0, 98940 09349 91649 93260	0, 02715 24594 11754 09485
	2	94457 50230 73232 57608	06225 35239 38647 89286
	3	86563 12023 87831 74388	09515 85116 82492 78481
	4	75540 44083 55003 03390	12462 89712 55533 87205
	5	61787 62444 02643 74845	14959 59888 16576 73208
	6	45801 67776 57227 38634	16915 65193 95002 53819
	7	28160 35507 79258 91323	18260 34150 44923 58887
	8	09501 25098 37637 44019	18945 06104 55068 49629
20	1	0, 99312 85991 85094 92479	0, 01761 40071 39152 11831
	2	96397 19272 77913 79127	04060 14298 00386 94133
	3	91223 44282 51325 90587	06267 20483 34109 06357
	4	83911 69718 22218 82339	08327 67415 76704 74873
	5	74633 19064 60150 79261	10193 01198 17240 43504
	6	63605 36807 26515 02545	11819 45319 61518 41731
	7	51086 70019 50827 09800	13168 86384 49176 62690
	8	37370 60887 15419 56067	14209 61093 18382 05133
	9	22778 58511 41645 07808	14917 29864 72603 74679
	10	07652 65211 33497 33375	15275 33871 30725 85070
24	1	0, 99518 72199 97021 36018	0, 01234 12297 99987 19955
	2	97472 85559 71309 49820	02853 13886 28933 66318
	3	93827 45520 02732 75852	04427 74388 17419 80617
	4	88641 55270 04401 03421	05929 85849 15436 78075
	5	82000 19859 73902 92195	07334 64814 11080 30573
	6	74012 41915 78554 36424	08619 01615 31953 27592
	7	64809 36519 36975 56925	09761 86521 04113 88827
	8	54542 14713 88839 53566	10744 42701 15965 63478
	9	43379 35076 26045 13849	11550 56680 53725 60135
	10	31504 26796 96163 37439	12167 04729 27803 39120
	11	19111 88674 73616 30916	12583 74563 46828 29612
	12	06405 68928 62605 62609	12793 81953 46752 15697
	1	0, 99644 24975 73954 44995	0, 00912 42825 93094 51774
	2	98130 31653 70872 75369	02113 21125 92771 25975

Таблица I (продолжение)

$n$	$k$	$x_k = -x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	
28	3	95425 92806 28938 19725	03290 14277 82304 37998	
	4	91563 30263 92132 07387	04427 29347 59004 22784	
	5	86589 25225 74395 04894	05510 73456 75716 74543	
	6	80564 13709 17179 17145	06527 29239 66999 59579	
	7	73561 08780 13631 77203	07464 62142 34568 77902	
	8	65665 10940 38864 96122	08311 34172 28901 21839	
	9	56972 04718 11401 71931	09057 17443 93032 84094	
	10	47587 42249 55118 26103	09693 06579 97929 91585	
	11	37625 15160 89078 71022	10211 29675 78060 76981	
	12	27206 16276 35178 07768	10605 57659 22846 41791	
	13	16456 92821 33380 77128	10871 11922 58294 13525	
	14	05507 92898 84034 27043	11004 70130 16475 19628	
	32	1	0, 99726 38618 49481 56354	0, 00701 86100 09470 09660
		2	98561 15115 45268 33540	01627 43947 30905 67061
3		96476 22555 87506 43077	02539 20653 09262 05945	
4		93490 60759 37739 68917	03427 38629 13021 43310	
5		89632 11557 66052 12397	04283 58980 22226 68066	
6		84936 76137 32569 97013	05099 80592 62376 17620	
7		79448 37959 67942 40696	05868 40934 78535 54714	
8		73218 21187 40289 68039	06582 22227 76361 84684	
9		66304 42669 30215 20098	07234 57941 08848 50623	
10		58771 57572 40762 32904	07819 38957 87070 30647	
11		50689 99089 32229 39002	08331 19242 26946 75522	
12		42135 12761 30635 34536	08765 20930 04403 81114	
13		33186 86022 82127 64978	09117 38786 95763 88471	
14		23928 73622 52137 07454	09384 43990 80804 56564	
15	14447 19615 82796 49349	09563 87200 79274 85942		
16	04830 76656 87738 31623	09654 00885 14727 80057		
36	1	0, 99783 04624 84085 83620	0, 00556 57196 64245 04536	
	2	98858 64789 02212 23807	01291 59472 84065 57441	
	3	97202 76910 49697 94934	02018 15152 97735 47153	
	4	94827 29843 99507 54520	02729 86214 98568 77909	
	5	91749 77745 15659 06608	03421 38107 70307 22992	
	6	87992 98008 90397 13198	04087 57509 23644 89547	
	7	83584 71669 92475 30642	04723 50834 90265 97842	
	8	78557 62301 32206 51283	05324 47139 77759 91909	
	9	72948 91715 93556 58209	05886 01442 45324 81731	
	10	66800 12365 85521 06210	06403 97973 55015 48956	
	11	60156 76581 35980 53508	06874 53238 35736 44261	
	12	53068 02859 26245 16164	07294 18850 05653 06135	
	13	45586 39444 33420 26721	07659 84106 45870 67453	
	14	37767 25471 19689 21632	07968 78289 12071 60191	
15	29668 49953 44028 27050	08218 72667 04339 70952		
16	21350 08923 16865 57894	08407 82189 79661 93493		
17	12873 61038 09384 78865	08534 66857 39338 62749		
18	04301 81984 73708 60723	08598 32756 70394 74749		

Таблица 1 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k = -x_n + 1 - k$	$A_k = A_n + 1 - k$
40	1	0, 99823 77097 10559 20035	0, 00452 12770 98533 19126
	2	99072 62386 99457 00645	01049 82845 31152 81362
	3	97725 99499 83774 26266	01642 10583 81907 88871
	4	95791 68192 13791 65580	02224 58491 94166 95726
	5	93281 28082 78676 53336	02793 70069 80023 40110
	6	90209 88069 68874 29673	03346 01952 82547 84739
	7	86595 95032 12259 50382	03878 21679 74472 01764
	8	82461 22308 33311 66320	04387 09081 85673 27199
	9	77830 56514 26519 38769	04869 58076 35072 23206
	10	72731 82551 89927 10328	05322 78469 83936 82436
	11	67195 66846 14179 54838	05743 97690 99391 55137
	12	61255 38896 67980 23795	06130 62424 92928 93917
	13	54946 71250 95128 20208	06480 40134 56601 03807
	14	48307 58016 86178 71291	06791 20458 15233 90383
	15	41377 92043 71605 00152	07061 16473 91286 77970
	16	34199 40908 25758 47301	07288 65823 95804 05906
	17	26815 21850 07253 68114	07472 31690 57968 26420
	18	19269 75807 01371 09972	07611 03619 00626 24237
	19	11608 40706 75255 20848	07703 98181 64247 96559
	20	03877 24175 06050 82193	07750 59479 78424 81126
48	1	0, 99877 10072 52426 11860	0, 00315 33460 52305 83862
	2	99353 01722 66350 75755	00732 75539 01276 26210
	3	98412 45837 22826 85774	01147 72345 79234 53948
	4	97059 15925 46247 25046	01557 93157 22943 84873
	5	95298 77031 60430 86072	01961 61604 57355 52781
	6	93138 66907 06554 33311	02357 07608 39324 37914
	7	90587 91367 15569 67282	02742 65097 08356 94820
	8	87657 20202 74247 88591	03116 72278 32798 08890
	9	84358 82616 24393 53071	03477 72225 64770 43889
	10	80706 62040 29442 62708	03824 13510 65830 70632
	11	76715 90325 15740 33925	04154 50829 43464 74921
	12	72403 41309 23814 65467	04467 45608 56694 28042
	13	67787 23796 32663 90521	04761 66584 92490 47482
	14	62886 73967 76513 62400	05035 90355 53854 47496
	15	57722 47260 83972 70382	05289 01894 85193 66710
	16	52316 09747 22233 03368	05519 95036 99984 16287
	17	46690 29047 50958 40454	05727 72921 00403 21570
	18	40868 64819 90716 72992	05911 48396 98395 63575
	19	34875 58862 92160 73816	06070 44391 65893 88005
	20	28736 24873 55455 57674	06203 94231 59892 66390
	21	22476 37903 94689 06122	06311 41922 86254 02566
	22	16122 23560 68891 71806	06392 42385 84648 18662
	23	09700 46992 09462 69893	06446 61644 35950 08221
	24	03238 01709 62869 36203	06473 76968 12683 92250



Таблица 2. Вычисление интеграла  $\int_0^1 x^\alpha f(x) dx$  при целом показателе степени  $\alpha = 1(1)5$ .

$$\int_0^1 x^\alpha f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Степень точности  $2n - 1$ . Глава 3, § 2, интеграл с весовой функцией Якоби.  
Литература: Крылов В. И., Лугин В. В., Янович Л. А. [1], Fishman H. [1], Hammer P., Marlowe O., Stroud A. [1].

$\alpha = 1$

$\alpha = 2$

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
1	1	0,666666666667	0,500000000000	0,750000000000	0,333333333333	1	1
	1	0,355051025722	0,181958618256	0,455848155989	0,100785882080	1	1
2	2	844948974278	318041381744	877485177345	232547451254	2	2
	1	0,212340538239	0,069826979901	0,294997790112	0,029950703009	1	2
3	2	590533135559	229241106360	652996233962	146246269260	2	3
	3	911412040487	200931913739	927005975927	157136361065	3	3
4	1	0,139759864344	0,031180970950	0,204148582103	0,010352240750	1	4
	2	416409567631	129847547608	482952704896	068633887173	2	4
	3	723156986362	203464568010	761399262448	143458789799	3	4
	4	942895803885	135506913431	951499450553	110888415611	4	4
5	1	0,098535085799	0,015747914522	0,148945787053	0,004113825203	1	5
	2	304535726646	073908870073	365666527369	032055600723	2	5
	3	562025189753	146386987085	610113612934	089200161222	3	5
	4	801986582126	167174638094	826519679228	126198961900	4	5
	5	960190142949	096781590227	965421060082	081764784286	5	5
6	1	0,073054328680	0,008738301814	0,113194383822	0,001831075807	1	6
	2	230766137970	043955165551	284318872688	015720297185	2	6
	3	441328481228	098661150891	490963586835	051289571130	3	6
	4	663015309719	140792553788	697563081977	094577186749	4	6
	5	851921400332	135542497232	868436058342	107376499737	5	6
	6	970683572840	072310330726	974095444906	062538702727	6	6
7	1	0,056262560537	0,005214362203	0,088816833437	0,000892688034	1	7
	2	180240691737	027408356722	226482753409	008162925632	2	7
	3	352624717113	066384696465	399978486721	029422211290	3	7
	4	547153626331	107125065696	585997855403	063146378709	4	7
	5	734210177215	127390897300	759445873952	091733803280	5	7
	6	885320946839	110509258191	896910970852	0906988824613	6	7
	7	977520613561	055967363423	979867226227	049276501776	7	7
8	1	0,044633955290	0,003295191442	0,071491035040	0,000468517784	1	8
	2	144366257042	017842902656	184228296417	004474521713	2	8
	3	286824757144	045439319505	330447728176	017246853780	3	8
	4	454813315197	079199599492	494402921816	040814426389	4	8
	5	628067835417	106047359436	658348008523	068447183422	5	8
	6	785691520604	112505799471	804524831511	085284769172	6	8
	7	908676392100	091119023636	917099382514	076818093267	7	8
	8	982220084853	044550804362	983902240448	039778957807	8	8

Таблица 2 (продолжен

 $\alpha = 3$  $\alpha = 4$ 

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k
1	1	0, 800000000000	0, 250000000000	0, 833333333333	0, 200000000000	1
2	1	0, 529857935895	0, 066905249807	0, 586336582323	0, 049082492278	1
	2	898713492677	183094750193	913663417677	150917507722	2
3	1	0, 363264630217	0, 016479059283	0, 420113059337	0, 010469042183	1
	2	698811269164	104599897557	733889355208	080276673456	2
	3	937924100620	128921043161	945997585455	109254284361	3
4	1	0, 261477788831	0, 004658367060	0, 312135492847	0, 002516351647	1
	2	535846446088	042541724143	578915659562	029169382162	2
	3	790283229969	109004368939	812891516616	087067712064	3
	4	957847080566	093795539859	962723997641	081246554127	4
5	1	0, 196212007397	0, 001520689371	0, 239792044802	0, 000696977078	1
	2	417100211822	016957324863	460933674532	010210541725	2
	3	648570004237	060444953204	680059232741	044024469505	3
	4	845605149974	100316504465	860886343676	082712713102	4
	5	969435703493	070760528097	972614418534	062355298589	5
6	1	0, 152273161784	0, 000561710874	0, 189469583922	0, 000219413995	1
	2	331300457038	007085315932	372751156014	003726784439	2
	3	532411566729	030526192226	567572372855	019956264693	3
	4	725602778330	068443281768	748836497506	052239954293	4
	5	881616684437	088300991241	892385158447	074649150313	5
	6	976795351682	055082507960	978985231256	049208432267	6
7	1	0, 121427128832	0, 000229904127	0, 153241438869	0, 000077073707	1
	2	268363440311	003147596407	306326522542	001447008789	2
	3	440866460623	015312167126	476540093001	008926967613	3
	4	618604028432	040995168604	646389302520	028547842753	4
	5	780253551966	069750098107	797716689815	055224874164	5
	6	906362534145	076556561363	914219900565	066021845935	6
	7	981769914514	044008504265	983343830467	039754387040	7
8	1	0, 099001757710	0, 000102460078	0, 126372974378	0, 000029709230	1
	2	221243507350	001485684083	255529052078	000598950038	2
	3	369123900012	007855073841	403641298894	004077924135	3
	4	528545431202	023631580668	558316675790	014909933450	4
	5	683993248432	047454379812	706009542883	034719950661	5
	6	820283949679	067361839393	833671542039	054910097291	6
	7	924093712899	066182035322	929995716053	058000565268	7
	8	985293440085	035926946803	986463197885	032752869927	8

Т а б л и ц а 2 (продолжение)

$\alpha = 5$

n	k	$x_k$	$A_k$
1	1	0,857142857143	0,166666666667
	2	0,630791593830	0,038337562737
2	1	924763961726	128329103930
	2	0,467983235455	0,007297003638
	3	761623969699	064596612296
3	1	952210976664	094773050733
	2	0,356893729050	0,001534479748
	3	614669389855	021428404631
	4	831079003860	072056364165
4	1	966588646465	071647418122
	2	0,279693124812	0,000369715499
	3	498709827030	006729690430
	4	706333818921	033767744958
	5	873402727872	070071339705
5	1	975193834698	055728176075
	2	0,224468995404	0,000101325820
	3	409533350456	002187925655
	4	597789048417	013969653085
	5	768413604608	041486346981
	6	901350733849	064458859164
6	1	980797208441	044462555961
	2	0,183828768301	0,000031104606
	3	340807595106	000755383832
	4	507940524029	005660413704
	5	670363410111	020959298175
	6	812588465990	045104981582
	7	920856417255	057907613539
7	1	984667450786	036247871229
	2	0,153150661610	0,000010531645
	3	287264403884	000278358615
	4	434627406699	002335341500
	5	584518566563	010044614388
	6	725126409713	026485301118
	7	845189487931	045885653201
	8	935043507456	051534223832
8	1	987460508524	030092642368

Таблица 3. Интегрирование функций, имеющих степенную особенность:

$$\int_0^1 x^\alpha f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad \alpha = -0,9(0,1) 3, \quad \alpha \neq 0, 1, 2, 3.$$

Степень точности  $2n - 1$ . Глава 3, § 2, интеграл с весовой функцией Якоби.  
Литература: Крылов В. И., Лугин В. В., Янович Л. А. [1].  
Числа в таблице напечатаны в нормализованном виде. Справа в скобках указан показатель степени десяти, на которую нужно умножить это число:  
0,90969091(-1) = 0,090909091.

Показатель, равный нулю, опущен.

$\alpha = -0,9$

$\alpha = -0,8$

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
1	1	0,90909091(-1)	0,10000000(2)	0,16666667	0,50000000(1)	1	1
	1	0,24666893(-1)	0,89968526(1)	0,48604395(-1)	0,40957118(1)	1	1
2	2	68501053	10031474(1)	70139560	90428815	2	2
	2	0,11217435(-1)	0,83538941(1)	0,22587190(-1)	0,35461575(1)	1	1
3	3	37349786	12257064(1)	39083337	10559185(1)	2	3
	3	85057882	42039950	85581021	39792400	3	3
4	1	0,63768857(-2)	0,79081389(1)	0,12972086(-1)	0,31843480(1)	1	1
	2	22607661	12560357(1)	23929364	10356294(1)	2	2
	3	60023218	60297750	60946303	55557925	3	4
	4	91379320	23284789	91604902	22444339	4	4
5	1	0,41059682(-2)	0,75733391(1)	0,84019179(-2)	0,29239337(1)	1	1
	2	14984794	12451006(1)	15968538	98855484	2	2
	3	42608387	66575131	43542140	59523578	3	3
	4	72859843	36762403	73382451	34809783	4	5
	5	94411105	14818498	94527548	14417787	5	5
6	1	0,28625286(-2)	0,73080612(1)	0,58799955(-2)	0,27248124(1)	1	1
	2	10612683	12236094(1)	11359319	94044100	2	2
	3	31304011	68815060	32132326	59809350	3	6
	4	56855261	42810497	57487947	39658677	4	4
	5	80528416	24940990	80847176	23961337	5	5
	6	96089051	10266394	96156661	10045291	6	6
7	1	0,21088281(-2)	0,70899145(1)	0,43434514(-2)	0,25659756(1)	1	1
	2	78930481(-1)	12000285(1)	84743495(-1)	89659559	2	2
	3	23798575	69419603	24506185	58801295	3	3
	4	44784318	45751262	45419868	41463011	4	7
	5	66749805	30212103	67185915	28546497	5	5
	6	85405281	18087792	85612294	17531682	6	6
	7	97112289	75349387(-1)	97154922	74003978(-1)	7	7
8	1	0,16178233(-2)	0,69055989(1)	0,33387767(-2)	0,24352826(1)	1	1
	2	60927975(-1)	11770194(1)	65562960(-1)	85772279	2	2
	3	18632999	69290463	19232564	57340884	3	3
	4	35868593	47203400	36462726	41896338	4	8
	5	55206285	33154941	55686187	30783878	5	5
	6	73737927	22583539	74047178	21605064	6	6
	7	88677166	13739281	88818578	13395375	7	7
	8	97781390	57665468(-1)	97809952	56787243(-1)	8	8

Таблица 3 (продолжение)

$\alpha = -0,7$

$\alpha = -0,6$

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
1	1	0,23076923	0,33333333(1)	0,28571429	0,25000000(1)	1	1
2	1	0,71751798(-1)	0,25107410(1)	0,94081338(-1)	0,17459750(1)	1	2
	2	71612699	82259236	72944807	75402495	2	
3	1	0,34034274(-1)	0,20348623(1)	0,45500209(-1)	0,13292608(1)	1	3
	2	40716810	92080058	42259600	81140884	2	
	3	86068441	37767046	86523712	35933033	3	
4	1	0,19739827(-1)	0,17366666(1)	0,26642369(-1)	0,10802043(1)	1	4
	2	25202963	86605252	26431708	73318262	2	
	3	61826053	51400124	62665595	47731255	3	
	4	91818919	21661298	92022244	20930056	4	
5	1	0,12859075(-1)	0,15307234(1)	0,17453188(-1)	0,91495256	1	5
	2	16928714	79701264	17866565	65127159	2	
	3	44444137	53495817	45316133	48308656	3	
	4	73884815	33026048	74368122	31391774	4	
	5	94639222	14037859	94746415	13677155	5	
6	1	0,90331759(-2)	0,13786335(1)	0,12305692(-1)	0,79698819	1	6
	2	12094083	73458912	12817502	58201243	2	
	3	32939527	52294645	33726544	45978343	3	
	4	58101544	36836687	58696952	34301209	4	
	5	81155489	23046335	81453871	22190220	5	
	6	96221968	98334015(-1)	96285087	96301650(-1)	6	
7	1	0,66903188(-2)	0,12608803(1)	0,91378210(-2)	0,70829149	1	7
	2	90496719(-1)	68120673	96192543(-1)	52526837	2	
	3	25199985	50136140	25880475	43010105	3	
	4	46040133	37697432	46645708	34377864	4	
	5	67610370	27015521	68023648	25605312	5	
	6	85813444	17005004	86008979	16505629	6	
	7	97196311	72705322(-1)	97236512	71451043(-1)	7	
8	1	0,51528849(-2)	0,11664858(1)	0,70515761(-2)	0,63899121	1	8
	2	70169362(-1)	63588090	74748335(-1)	47863874	2	
	3	19823053	47785568	20404770	40084767	3	
	4	37045272	37321639	37616612	33361397	4	
	5	56155460	28638936	56614474	26693820	5	
	6	74349054	20690123	74643822	19834245	6	
	7	88956467	13066576	89090965	12751958	7	
	8	97837806	55935161(-1)	97864950	55108079(-1)	8	

Таблица 3 (продолжение)

 $\alpha = -0,5$  $\alpha = -0,4$ 

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
1	1	0,33333333	0,20000000(1)	0,37500000	0,16666667(1)	1	1
2	1	0,11558711	0,13042903(1)	0,13627767	0,10211225(1)	1	2
	2	74155575	69570969	75261122	64554420	2	2
3	1	0,56939116(-1)	0,93582787	0,68314882(-1)	0,69254632	1	3
	2	43719785	72152315	45104389	64670578	2	3
	3	86949939	34264898	87349837	32741456	3	3
4	1	0,33648268(-1)	0,72536757	0,40731104(-1)	0,51284918	1	4
	2	27618478	62741329	28762637	61202981	2	4
	3	63467748	44476207	64235056	41573831	3	4
	4	92215661	20245707	92399881	19603937	4	4
5	1	0,22163569(-1)	0,59104845	0,26972394(-1)	0,40240972	1	5
	2	18783157	53853344	19679418	45004537	2	5
	3	46159736	43817272	46976429	39906098	3	5
	4	74833463	29890270	75281847	28507133	4	5
	5	94849393	13334269	94948399	13007925	5	5
6	1	0,15683407(-1)	0,49829409	0,19153986(-1)	0,32857832	1	6
	2	13530001	46698507	14231934	37895170	2	6
	3	34494238	40633485	35243407	36082314	3	6
	4	59275013	32015666	59836512	29949022	4	6
	5	81742801	21387865	82022730	20634696	5	6
	6	96346128	94350673(-1)	96405191	92476332(-1)	6	6
7	1	0,11675872(-1)	0,43052771	0,14295610(-1)	0,27613657	1	7
	2	10183270	41039693	10741849	32446462	2	7
	3	26548116	37107679	27203338	32186035	3	7
	4	47237154	31440633	47815000	28832581	4	7
	5	68426202	24303714	68818457	23100039	5	7
	6	86199133	16031617	86384130	15581204	6	7
	7	97275575	70238921(-1)	97313547	69066880(-1)	7	7
8	1	0,90273770(-2)	0,37890122	0,11073694(-1)	0,23716579	1	8
	2	79300560(-1)	36520683	83826396(-1)	28208773	2	8
	3	20977937	33831304	21542799	28777477	3	8
	4	38177105	29919198	38727094	26915777	4	8
	5	57063582	24925794	57503120	23315145	5	8
	6	74931738	19031702	75213043	18278449	6	8
	7	89222197	12450705	89350282	12162002	7	8
	8	97891421	54304919(-1)	97917242	53524665(-1)	8	8

Таблица 3 (продолжение)

$\alpha = -0,3$

$\alpha = -0,2$

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
0,41176471	0,14285714 (1)	0,44444444	0,12500000 (1)	1	1
0,15617102 76274790	0,82661338 60195805	0,17529121 77207722	0,68624424 56375576	1 2	2
0,79599055 (-1) 46419567 87725790	0,53140221 58371980 31344941	0,90769263 (-1) 47670759 88079900	0,41923855 53015795 30060350	1 2 3	3
0,47868532 (-1) 29875561 64969830 92575547	0,37654584 47227684 38973932 19000942	0,55041555 (-1) 30950224 65674171 92743245	0,28467526 41464126 36634995 18433353	1 2 3 4	4
0,31864189 (-1) 20556174 47767580 75714207 95043661	0,28479658 37968528 36482109 27229880 12696968	0,36825426 (-1) 21414169 48534456 76131405 95135387	0,20773637 32308552 33469821 26047645 12400344	1 2 3 4 5	5
0,22706575 (-1) 14923603 35974796 60382186 82294079 96462371	0,22537312 31066612 32184355 28074820 19926620 90674236 (-1)	0,26331553 (-1) 15605272 36689103 60912725 82557241 96517757	0,15942520 25705404 28827667 26370407 19259970 88940323 (-1)	1 2 3 4 5 6	6
0,16989177 (-1) 11295087 27846544 48379747 69200819 86564178 97350474	0,18431713 25928839 28056553 26509104 21984859 15152777 67932979 (-1)	0,19749548 (-1) 11843060 28478113 48931868 69573668 86739475 97386397	0,12694121 20923577 24571461 24432605 20949835 14744860 66835399 (-1)	1 2 3 4 5 6 7	7
0,13184653 (-1) 88325984 (-1) 22099574 39266904 57933406 75487970 89475332 97942438	0,15454490 22031871 24508102 24285627 21844719 17570564 11885134 52766356 (-1)	0,15354978 (-1) 92799321 (-1) 22648469 39795842 58354746 75756737 89597454 97967031	0,10394574 17382843 21021843 21974348 20499549 16904505 11619429 52029085 (-1)	1 2 3 4 5 6 7 8	8

Таблица 3 (продолжение)

 $\alpha = -0,1$  $\alpha = 0,1$ 

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
1	1	0,47368421	0,11111111 (1)	0,52380952	0,90909091	1	1
2	1	0,19366591	0,58109910	0,22829869	0,43594968	1	2
	2	78069306	53001201	79609156	47314123	2	
3	1	0,10180800	0,33816271	0,12343985	0,23169099	1	3
	2	48862797	48419910	51086245	40980478	2	
	3	88414030	28874930	89028787	26759513	3	
4	1	0,62233955 (-1)	0,22035163	0,07662331	0,13957560	1	4
	2	31991459	36655336	33980235	29171865	2	
	3	66349994	34522436	67622952	30864997	3	
	4	92903506	17898175	93203619	16914668	4	
5	1	0,41844219 (-1)	0,15528059	0,05201370	0,91961155 (-1)	1	5
	2	22254080	27707488	23882112	20805402	2	
	3	49278231	30807532	50700782	26338474	3	
	4	76534243	24950938	77299764	22981810	4	
	5	95223771	12117095	95391219	11587290	5	
6	1	0,30020339 (-1)	0,11564058	0,03755934	0,64606602 (-1)	1	6
	2	16277176	21449866	17592533	15277626	2	
	3	37386980	25922354	38735864	21188471	3	
	4	61428780	24816304	62419838	22094017	4	
	5	82812589	18631446	83301210	17477183	5	
	6	96571433	87270825 (-1)	96673960	84111338 (-1)	6	
7	1	0,22570408 (-1)	0,89688423 (-1)	0,02837127	0,47603519 (-1)	1	7
	2	12385828	17036038	13455940	11568342	2	
	3	29098400	21614062	30306459	16929382	3	
	4	49471811	22571246	50516840	19389633	4	
	5	69937366	19987574	70638667	18255761	5	
	6	86910210	14356104	87238692	13631217	6	
	7	97421359	65772434 (-1)	97488545	63744041 (-1)	7	
8	1	0,17579897 (-1)	0,71747443 (-1)	0,02217654	0,36381506 (-1)	1	8
	2	97246301 (-1)	13843025	10606050	90023444 (-1)	2	
	3	23189676	18117729	24249753	13639517	3	
	4	40317203	19936549	41330305	16535252	4	
	5	58767429	19266537	59567920	17092390	5	
	6	76019553	16277065	76528128	15126664	6	
	7	89716753	11364262	89947261	10883259	7	
	8	97991043	51311993 (-1)	98037401	49935140 (-1)	8	



Таблица 3 (продолжение)

$\alpha = 0,2$

$\alpha = 0,3$

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
0,54545455	0,83333333	0,56521739	0,76923077	1	1
0,24461811 80300094	0,38436353 44896980	0,26031346 80945398	0,34212427 42710650	1 2	2
0,13401470 52125029 89312211	0,19579153 37942151 25812029	0,14442049 53119518 89581291	0,16733773 35261023 24928281	1 2 3	3
0,08379809 34930748 68223169 93344322	0,11361811 26234810 29274899 16461813	0,09094740 35853813 68801063 93479300	0,93648250(-1) 23706740 27819257 16032255	1 2 3 4	4
0,05714684 24671358 51381529 77663785 95470606	0,72472106(-1) 18196787 24454537 22095602 11339197	0,06230212 25444783 52043132 78016130 95547298	0,57874662(-1) 16003914 22763222 21267085 11101390	1 2 3 4 5	5
0,04139639 18236367 39387996 62895959 83535119 96722954	0,49494676(-1) 13025297 19252133 20898594 16946333 82615077(-1)	0,04527071 18871209 40025952 63359832 83762488 96770523	0,38444270(-1) 11173227 17546659 19798374 16443325 81170645(-1)	1 2 3 4 5 6	6
0,03134134 13983365 30894854 51022714 70976903 87396769 97520840	0,35568592(-1) 96367373(-1) 15067693 18026462 17475114 13292898 62775693(-1)	0,03435193 14505749 31473214 51517987 71307260 87550941 97552314	0,26956595(-1) 80804415(-1) 13457730 16791410 16744878 12969347 61836108(-1)	1 2 3 4 5 6 7	7
0,02454065 11042729 24768963 41823569 59956245 76774260 9058654 98059787	0,26583223(-1) 73426269(-1) 11905062 15112683 16132219 14598652 10656380 49273879(-1)	0,02694406 11476691 25281167 42308308 60336950 77015188 90167587 98081657	0,19708052(-1) 60303039(-1) 10432625 13843529 15245784 14099104 10437945 48629793(-1)	1 2 3 4 5 6 7 8	8

Таблица 3 (продолжение)

 $\alpha = 0,4$  $\alpha = 0,5$ 

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
1	1	0,58333333	0,71428571	0,60000000	0,66666667	1	1
2	1	0,27541431	0,30704611	0,28994920	0,27755600	1	2
	2	81549478	40723961	82116191	38911067	2	
3	1	0,15465322	0,14444467	0,16471029	0,12578267	1	3
	2	54072585	32881982	54986850	30760237	2	
	3	89837094	24102122	90080583	23328162	3	
4	1	0,09806363	0,78043234 (—1)	0,10514028	0,65680520 (—1)	1	4
	2	36750664	21517097	37622451	19609626	2	
	3	69357887	26482894	69894801	25252735	3	
	4	93608895	15624257	93733425	15236254	4	
5	1	0,06747297	0,46764300 (—1)	0,07265351	0,38187347 (—1)	1	5
	2	26202870	14147983	26946079	12567315	2	
	3	52686426	21239737	53312195	19863080	3	
	4	78357361	20491173	78688006	19763338	4	
	5	95621431	10873248	95693131	10654199	5	
6	1	0,04917715	0,30230581 (—1)	0,05311104	0,24036268 (—1)	1	6
	2	19497225	96392758 (—1)	20114575	83602629 (—1)	2	
	3	40650221	16038857	41261267	14701058	3	
	4	63811941	18783679	64252744	17846008	4	
	5	83983589	15966160	84198682	15513018	5	
	6	96816728	79775415 (—1)	96861629	78426933 (—1)	6	
7	1	0,03739906	0,20690927 (—1)	0,04047906	0,16064641 (—1)	1	7
	2	15023126	68170536 (—1)	15535528	57842190 (—1)	2	
	3	32041816	12059732	32600922	10841059	3	
	4	52003007	15669771	52478105	14648809	4	
	5	71630017	16060845	71945441	15419235	5	
	6	87701353	12659674	87848141	12363053	6	
	7	97582998	60924030 (—1)	97612922	60038276 (—1)	7	
8	1	0,02938367	0,14802385 (—1)	0,03185660	0,11249376 (—1)	1	8
	2	11907914	49845471 (—1)	12336375	41451233 (—1)	2	
	3	25786517	91756877 (—1)	26285159	80982346 (—1)	3	
	4	42784755	12708249	43253135	11690143	4	
	5	60710266	14426092	61076414	13666928	5	
	6	77251081	13626017	77482097	13177558	6	
	7	90274141	10227517	90378395	10024686	7	
	8	98103058	48002225 (—1)	98123977	47390550 (—1)	8	

Таблица 3 (продолжение)

$\alpha = 0,6$

$\alpha = 0,7$

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
0,61538462	0,62500000	0,62962963	0,58823529	1	1
0,30394556 82648922	0,25249637 37250363	0,31742960 83150657	0,23099876 35723653	1 2	2
0,17459027 55864706 90312631	0,11039269 28859070 22601661	0,18429267 56708346 90534028	0,97569525 (-1) 27148149 21918428	1 2 3	3
0,11217175 38470254 70412878 93853181	0,55766305 (-1) 17939080 24117466 14866823	0,11915325 39295083 70913113 93968433	0,47728327 (-1) 16468761 23067261 14514675	1 2 3 4	4
0,07783848 27674847 53921177 79008556 95762515	0,31481891 (-1) 11213190 18615375 19079533 10443713	0,08302315 28389589 54514064 79319476 95829696	0,26179601 (-1) 10046796 17481335 18436136 10241302	1 2 3 4 5	5
0,05706808 20723414 41859531 64682672 84408012 96905278	0,19303850 (-1) 72871328 (-1) 13510078 16977877 15082237 77122903 (-1)	0,06104436 21323893 42445431 65102135 84611809 96947728	0,15645718 (-1) 63814661 (-1) 12446399 16172673 14672301 75861179 (-1)	1 2 3 4 5 6	6
0,04358857 16042989 33150784 52943598 72253784 87991437 97642112	0,12603317 (-1) 49343026 (-1) 97747709 (-1) 13717460 14816639 12078723 59177729 (-1)	0,04672447 16545539 33691644 53399788 72555288 88131365 97670597	0,99824173 (-2) 42305903 (-1) 88385259 (-1) 12866079 14249982 11805977 58341335 (-1)	1 2 3 4 5 6 7	7
0,03436020 12762056 26777232 43713667 61435607 77708389 90480422 98144440	0,86412723 (-2) 34667121 (-1) 71709697 (-1) 10774894 12962759 12752051 98290697 (-1) 46794177 (-1)	0,03689197 13184936 27262873 44166556 61788049 77930103 90530293 98164460	0,67033372 (-2) 29149064 (-1) 63699390 (-1) 99501855 (-1) 12308646 12347956 96403086 (-1) 46212539 (-1)	1 2 3 4 5 6 7 8	8

Таблица 3 (продолжение)

 $\alpha = 0,8$  $\alpha = 0,9$ 

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
1	1	0,64285714	0,55555556	0,65517241	0,52631579	1	1
2	1	0,33042626	0,21240044	0,34295925	0,19618806	1	2
	2	83624041	34315512	84071422	33012773	2	
3	1	0,19381781	0,86785780(-1)	0,20316661	0,77640996(-1)	1	3
	2	57519783	25602228	58300869	24200159	2	
	3	90745495	21274749	90947688	20667320	3	
4	1	0,12608067	0,41146953(-1)	0,13295052	0,35709765(-1)	1	4
	2	40097889	15168681	40879565	14014161	2	
	3	71396431	22093544	71863692	21188808	3	
	4	94079432	14178635	94186410	13857634	4	
5	1	0,08820328	0,21943412(-1)	0,09337507	0,18527012(-1)	1	5
	2	29090706	90369704(-1)	29778578	81585096(-1)	2	
	3	55091511	16447834	55654135	15503554	3	
	4	79621198	17829896	79914131	17257884	4	
	5	95894775	10046514	95957851	98589297(-1)	5	
6	1	0,06503631	0,12787738(-1)	0,06904064	0,10533046(-1)	1	6
	2	21916158	56129291(-1)	22500352	49573904(-1)	2	
	3	43019367	11493515	43581718	10637406	3	
	4	65511523	15424541	65911205	14728278	4	
	5	84810294	14281822	85003672	13909527	5	
	6	96989027	74639748(-1)	97029222	73456723(-1)	6	
7	1	0,04988385	0,79761214(-2)	0,05306404	0,64248729(-2)	1	7
	2	17043213	36445513(-1)	17536045	31538417(-1)	2	
	3	34223731	80137046(-1)	34747269	72847206(-1)	3	
	4	53846963	12086237	54285400	11370544	4	
	5	72850184	13716480	73138690	13213612	5	
	6	88268043	11544161	88401583	11292666	6	
	7	97698401	57528096(-1)	97725548	56737070(-1)	7	
8	1	0,03944961	0,52472780(-2)	0,04203094	0,41420537(-2)	1	8
	2	13605001	24633643(-1)	14022235	20917594(-1)	2	
	3	27742211	56754597(-1)	28215371	50712823(-1)	3	
	4	44612003	92053900(-1)	45050200	85313094(-1)	4	
	5	62133935	11700175	62473453	11133389	5	
	6	78147380	11963861	78360353	11598468	6	
	7	90678076	94580672(-1)	90773838	92820304(-1)	7	
	8	98184053	45645102(-1)	98203231	45091352(-1)	8	

Таблица 3 (продолжение)

$\alpha = 1,1$

$\alpha = 1,2$

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
1	1	0,67741936	0,47619048	0,68750000	0,45454545	1	1
2	1	0,36672286	0,16939191	0,37799485	0,15823074	1	2
	2	84896342	30679857	85277439	29631471	2	
3	1	0,22134147	0,63103634 (-1)	0,23017162	0,57281831 (-1)	1	3
	2	59778696	21758961	60478479	20691817	2	
	3	91326594	19549723	91504359	19034545	3	
4	1	0,14650621	0,27380403 (-1)	0,15318748	0,24168840 (-1)	1	4
	2	42382860	12063422	43106027	11235875	2	
	3	72753199	19560674	73176892	18826314	3	
	4	94389145	13256912	94485289	12975473	4	
5	1	0,10368027	0,13469227 (-1)	0,10880785	0,11587083 (-1)	1	5
	2	31116042	67172785 (-1)	31766323	61238108 (-1)	2	
	3	56737214	13844758	57258742	13114314	3	
	4	80475142	16206248	80743922	15722075	4	
	5	96078351	95038403 (-1)	96135942	93356366 (-1)	5	
6	1	0,07707462	0,72978173 (-2)	0,08109897	0,61327676 (-2)	1	6
	2	23645081	39117148 (-1)	24205887	34933305 (-1)	2	
	3	44673103	91694044 (-1)	45202815	85384765 (-1)	3	
	4	66682835	13473341	67055434	12906838	4	
	5	85375886	13214915	85555086	12890535	5	
	6	97106473	71198907 (-1)	97143609	70120886 (-1)	6	
7	1	0,05947709	0,42616551 (-2)	0,06270547	0,35058804 (-2)	1	7
	2	18507322	23915341 (-1)	18985840	20947466 (-1)	2	
	3	35769544	60638893 (-1)	36268685	55516041 (-1)	3	
	4	55137104	10106401	55550867	95471706 (-1)	4	
	5	73697367	12290830	73967930	11866939	5	
	6	88659680	10818414	88784436	10594640	6	
	7	97777963	55218130 (-1)	97803274	54488569 (-1)	7	
8	1	0,04725675	0,26406024 (-2)	0,04989754	0,21305007 (-2)	1	8
	2	14848163	15285878 (-1)	15256839	13149054 (-1)	2	
	3	29143643	40821864 (-1)	29598987	36766614 (-1)	3	
	4	45905576	73643920 (-1)	46323106	68585402 (-1)	4	
	5	63134099	10111023	63455567	96493709 (-1)	5	
	6	78773900	10919094	78974715	10602992	6	
	7	90959541	89474052 (-1)	91049600	87882775 (-1)	7	
	8	98240397	44022993 (-1)	98258409	43507476 (-1)	8	

Таблица 3 (продолжение)

 $\alpha = 1,3$  $\alpha = 1,4$ 

n	k	$\alpha_k$	$A_k$	$\alpha_k$	$A_k$	k	n
1	1	0, 69696970	0, 43478261	0, 70588235	0, 41666667	1	1
2	1	0, 38888599	0, 14826651	0, 39941424	0, 13932846	1	2
	2	85639703	28651610	85984502	27733821	2	
3	1	0, 23883349	0, 52211086 (-1)	0, 24732976	0, 47770550 (-1)	1	3
	2	61154017	19711628	61806572	18808878	2	
	3	91674963	18545524	91838830	18080733	3	
4	1	0, 15980197	0, 21437591 (-1)	0, 16634830	0, 19100995 (-1)	1	4
	2	43811173	10490070	44498973	98158033 (-1)	2	
	3	73587432	18138813	73985431	17494109	3	
	4	94578187	12705619	94668000	12446655	4	
5	1	0, 11391536	0, 10021849 (-1)	0, 11900058	0, 87118795 (-2)	1	5
	2	32404745	55989786 (-1)	33031620	51331892 (-1)	2	
	3	57767597	12440877	58264249	11818755	3	
	4	81005321	15262986	81259641	14827196	4	
	5	96191864	91732339 (-1)	96246187	90163392 (-1)	5	
6	1	0, 08512502	0, 51837381 (-2)	0, 08915064	0, 44055058 (-2)	1	6
	2	24759165	31300324 (-1)	25305043	28133392 (-1)	2	
	3	45722301	79657441 (-1)	46231864	74446413 (-1)	3	
	4	67419629	12376433	67775710	11879150	4	
	5	85729908	12580198	85900512	12283062	5	
	6	97179803	69074793 (-1)	97215090	68059237 (-1)	6	
7	1	0, 06594571	0, 29018819 (-2)	0, 06919593	0, 24158287 (-2)	1	7
	2	19459662	18414733 (-1)	19928826	16244343 (-1)	2	
	3	36760084	50936382 (-1)	37243927	46831823 (-1)	3	
	4	55956883	90303377 (-1)	56355377	85519271 (-1)	4	
	5	74232890	11465685	74492422	11085489	5	
	6	88906457	10379147	89025834	10171506	6	
	7	97828015	53777919 (-1)	97852204	53085458 (-1)	7	
8	1	0, 05255467	0, 17299618 (-2)	0, 05522657	0, 14132052 (-2)	1	8
	2	15662646	11355150 (-1)	16065580	98425311 (-2)	2	
	3	30048619	33194784 (-1)	30492646	30039987 (-1)	3	
	4	46734085	93970972 (-1)	47138675	59754074 (-1)	4	
	5	63771346	62171830 (-1)	64081592	88121104 (-1)	5	
	6	79171713	10301335	79365002	10013250	6	
	7	91137872	86342733 (-1)	91224410	84851610 (-1)	7	
	8	98276055	43003830 (-1)	98293347	42511652 (-1)	8	

Таблица 3 (продолжение)

$\alpha = 1,5$

$\alpha = 1,6$

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
1	1	0,71428571	0,40000000	0,72222222	0,38461538	1	1
2	1	0,40959652	0,13127568	0,41944884	0,12399100	1	2
	2	86313075	26872432	86626544	26062438	2	
3	1	0,25566333	0,43862346 (-1)	0,26383716	0,40406577 (-1)	1	3
	2	62437314	17975335	63047335	17203845	2	
	3	91996354	17638431	92147896	17217036	3	
4	1	0,17282535	0,17090947 (-1)	0,17923227	0,15352867 (-1)	1	4
	2	45170068	92043887 (-1)	45825067	86483966 (-1)	2	
	3	74371464	16888577	74746070	16318974	3	
	4	94754881	12197940	94838970	11958881	4	
5	1	0,12406151	0,76090280 (-2)	0,12909637	0,66753783 (-2)	1	5
	2	33647251	47184038 (-1)	34251932	43478535 (-1)	2	
	3	58749144	11242935	59222703	10708995	3	
	4	81507171	14413079	81748181	14019155	4	
	5	96298980	88646788 (-1)	96350306	87179968 (-1)	5	
6	1	0,09317384	0,37633366 (-2)	0,09713279	0,32303270 (-2)	1	6
	2	25843649	25362514 (-1)	26375107	22929634 (-1)	2	
	3	46731795	69694674 (-1)	47222374	65352580 (-1)	3	
	4	68123950	11412308	68464612	10973490	4	
	5	86067052	11998348	86229670	11725337	5	
	6	97249504	67072910 (-1)	97283076	66114573 (-1)	6	
7	1	0,07245439	0,20221417 (-2)	0,07571945	0,17013145 (-2)	1	7
	2	20393372	14377091 (-1)	20853340	12764573 (-1)	2	
	3	37720391	43144030 (-1)	38189648	39822861 (-1)	3	
	4	56746562	81084022 (-1)	57130644	76966099 (-1)	4	
	5	74746695	10724904	74995870	10382606	5	
	6	89142651	99713178 (-1)	89256991	97782089 (-1)	6	
	7	97875859	52410499 (-1)	97898999	51752391 (-1)	7	
8	1	0,05791175	0,11610230 (-2)	0,06060883	0,95898060 (-3)	1	8
	2	16465639	85617605 (-2)	16862822	74729760 (-2)	2	
	3	30931172	27246077 (-1)	31364301	24765406 (-1)	3	
	4	47537028	55893767 (-1)	47929294	52353968 (-1)	4	
	5	64386452	84320263 (-1)	64686070	80750015 (-1)	5	
	6	79554687	97379330 (-1)	79740871	94746355 (-1)	6	
	7	91309265	83407222 (-1)	91392486	82007510 (-1)	7	
	8	98310296	42030557 (-1)	98326911	41560175 (-1)	8	

Таблица 3 (продолжение)

 $\alpha = 1,7$  $\alpha = 1,8$ 

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
1	1	0,72972973	0,37037037	0,73684211	0,35714286	1	1
2	1	0,42898630	0,11737631	0,43822315	0,11134892	1	2
	2	86925932	25299405	87212168	24579393	2	
3	1	0,27185436	0,37337547 (-1)	0,27971807	0,34600872 (-1)	1	3
	2	63637655	16488170	64209226	15822848	2	
	3	92293792	16815112	92434352	16431351	3	
4	1	0,18556841	0,13842679 (-1)	0,19183334	0,12524541 (-1)	1	4
	2	46464549	81414460 (-1)	47089065	76780334 (-1)	2	
	3	75109756	15782392	75462999	15276216	3	
	4	94920400	11728931	94999296	11507582	4	
5	1	0,13410357	0,58808396 (-2)	0,13908169	0,52013592 (-2)	1	5
	2	34845944	40158127 (-1)	35429561	37174170 (-1)	2	
	3	59685331	10213021	60137410	97515386 (-1)	3	
	4	81982928	13644066	82211656	13286570	4	
	5	96400226	85760534 (-1)	96448798	84386242 (-1)	5	
6	1	0,10120580	0,27854738 (-2)	0,10521134	0,24122591 (-2)	1	6
	2	26899540	20786366 (-1)	27417069	18892208 (-1)	2	
	3	47703867	61376766 (-1)	48176533	57729243 (-1)	3	
	4	68797945	10560511	69124188	10171392	4	
	5	86388507	11463359	86543692	11211796	5	
	6	97315838	65183060 (-1)	97347819	64277264 (-1)	6	
7	1	0,07898961	0,14383523 (-2)	0,08226343	0,12216418 (-2)	1	7
	2	21308772	11367023 (-1)	21759711	10151617 (-1)	2	
	3	38651864	36825082 (-1)	39107200	34113301 (-1)	3	
	4	57507821	73137329 (-1)	57878282	69572489 (-1)	4	
	5	75240101	10057378	75479538	97481029 (-1)	5	
	6	89368931	95918291 (-1)	89478548	94118503 (-1)	6	
	7	97921640	51110514 (-1)	97943797	50484277 (-1)	7	
8	1	0,06331650	0,79614136 (-3)	0,06603352	0,66415614 (-3)	1	8
	2	17257129	65438715 (-2)	17648563	57481380 (-2)	2	
	3	31792130	22557402 (-1)	32214756	20587411 (-1)	3	
	4	48315617	49102802 (-1)	48696135	46112050 (-1)	4	
	5	64980583	77392834 (-1)	65270125	74232775 (-1)	5	
	6	79923650	92226638 (-1)	80103119	89813731 (-1)	6	
	7	91474119	80650527 (-1)	91554210	79334439 (-1)	7	
	8	98343202	41100154 (-1)	98359178	40650157 (-1)	8	



Таблица 3 (продолжение)

$\alpha = 1,9$

$\alpha = 2,1$

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
1	1	0,74358974	0,34482759	0,75609756	0,32258064	1	1
2	1	0,44717286	0,10583871	0,46426106	0,96139199 (-1)	1	2
	2	87486104	23898888	88000124	22644145	2	
3	1	0,28743148	0,32151246 (-1)	0,30242022	0,27967252 (-1)	1	3
	2	64762937	15203078	65820067	14083750	2	
	3	92569865	16064556	92826800	15377589	3	
4	1	0,19802677	0,11369115 (-1)	0,21019879	0,94539038 (-2)	1	4
	2	47699139	72533944 (-1)	48877936	65044059 (-1)	2	
	3	75806248	14798088	76464433	13917662	3	
	4	95075775	11294365	95221911	10890606	4	
5	1	0,14402947	0,46175801 (-2)	0,15382965	0,36773219 (-2)	1	5
	2	36003045	34485173 (-1)	37120630	29854911 (-1)	2	
	3	60579304	93214558 (-1)	61433913	85447546 (-1)	3	
	4	82434597	12945529	82863978	12308709	4	
	5	96496074	83054985 (-1)	96586943	80513780 (-1)	5	
6	1	0,10920797	0,20976020 (-2)	0,11716937	0,16043180 (-2)	1	6
	2	27927813	17213102 (-1)	28929407	14389426 (-1)	2	
	3	48640618	54376641 (-1)	49543984	48442081 (-1)	3	
	4	69443569	98043382 (-1)	70062613	91300491 (-1)	4	
	5	86695352	10970072	86988569	10514032	5	
	6	97379045	63396141 (-1)	97439341	61704010 (-1)	6	
7	1	0,08553958	0,10421246 (-2)	0,09209402	0,76771190 (-3)	1	7
	2	22206197	90911384 (-2)	23085989	73480308 (-2)	2	
	3	39555811	31655082 (-1)	40433458	27390080 (-1)	3	
	4	58242212	66248950 (-1)	58951173	60246464 (-1)	4	
	5	75714321	94537529 (-1)	76170469	89061115 (-1)	5	
	6	89585914	92379644 (-1)	89794164	89073327 (-1)	6	
	7	97965486	49873118 (-1)	98007520	48693917 (-1)	7	
8	1	0,06875873	0,55660497 (-3)	0,07422939	0,39602221 (-3)	1	8
	2	18037128	50642508 (-2)	18805674	39643536 (-2)	2	
	3	32632273	18825737 (-1)	33452344	15828797 (-1)	3	
	4	49070983	43356677 (-1)	49804187	38465476 (-1)	4	
	5	65554823	71255310 (-1)	66110178	65796283 (-1)	5	
	6	80279368	87501636 (-1)	80622550	83157925 (-1)	6	
	7	91632802	78057509 (-1)	91785658	75614638 (-1)	7	
	8	98374850	40209851 (-1)	98405310	39357150 (-1)	8	

ЧИСЛОВЫЕ ТАБЛИЦЫ

Т а б л и ц а 3 (продолжение)

$\alpha = 2, 2$

$\alpha = 2, 3$

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
0, 76190476	0, 31250000	0, 76744186	0, 30303030	1	1
0, 47242293 88241578	0, 91854511 (-1) 22064549	0, 48034453 88473484	0, 87893615 (-1) 21517669	1 2	2
0, 30970197 66325003 92948703	0, 26173795 (-1) 13577125 15055495	0, 31684621 66815120 93066524	0, 24547268 (-1) 13101794 14746509	1 2 3	3
0, 21617751 49447589 76780147 95291768	0, 86574354 (-2) 61732872 (-1) 13511690 10699280	0, 22208498 50004664 77087423 95359610	0, 79488817 (-2) 58672600 (-1) 13126372 10514510	1 2 3 4	4
0, 15868019 37665215 61847277 83070826 96630630	0, 32976045 (-2) 27856754 (-1) 81934627 (-1) 12011079 79300224 (-1)	0, 16349665 38200639 62251753 83272698 96673212	0, 29660523 (-2) 26038324 (-1) 78641571 (-1) 11726189 78122467 (-1)	1 2 3 4 5	5
0, 12113181 29420485 49983715 70362684 87130349 97468459	0, 14105828 (-2) 13199756 (-1) 45811200 (-1) 88199759 (-1) 10298753 60891176 (-1)	0, 12508069 29905231 50415761 70656713 87269052 97496922	0, 12443981 (-2) 12133589 (-1) 43376547 (-1) 85262634 (-1) 10091378 60099356 (-1)	1 2 3 4 5 6	6
0, 09537004 23519382 40862780 59296537 76392091 89895179 98027891	0, 66272883 (-3) 66305494 (-2) 25537167 (-1) 57532690 (-1) 86511393 (-1) 87500594 (-1) 48124877 (-1)	0, 09864389 23948498 41285953 59636036 76609575 89994201 98047850	0, 57416760 (-3) 59970818 (-2) 23844605 (-1) 54990134 (-1) 84077176 (-1) 85978222 (-1) 47568917 (-1)	1 2 3 4 5 6 7	7
0, 07697283 19185668 33855074 50162790 66381070 80789648 91860000 98420116	0, 33608271 (-3) 35216514 (-2) 14552532 (-1) 36292134 (-1) 63291527 (-1) 81116248 (-1) 74445670 (-1) 38944155 (-1)	0, 07972040 19562823 34253047 50516219 66647587 80953856 91933002 98434649	0, 28630597 (-3) 31363538 (-2) 13401597 (-1) 34278582 (-1) 60922764 (-1) 79155207 (-1) 73309794 (-1) 38539699 (-1)	1 2 3 4 5 6 7 8	8

Таблица 3 (продолжение)

$\alpha = 2,4$

$\alpha = 2,5$

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
1	1	0,77272727	0,29411765	0,77777778	0,28571429	1	1
2	1	0,48803602	0,84223306 (-1)	0,49550703	0,80814606 (-1)	1	2
	2	88696398	20989434	88910835	20489968	2	
3	1	0,32385610	0,23067949 (-1)	0,33073474	0,21718899 (-1)	1	3
	2	67291068	12655118	67753459	12234735	2	
	3	93180465	14449852	93290714	14164804	3	
4	1	0,22792151	0,73165045 (-2)	0,23368751	0,67503839 (-2)	1	4
	2	50549576	55838834 (-1)	51082720	53210020 (-1)	2	
	3	77386598	12760264	77677994	12412044	3	
	4	95425521	10335967	95489583	10163344	4	
5	1	0,16827835	0,26755277 (-2)	0,17302473	0,24200931 (-2)	1	5
	2	38727126	24379815 (-1)	39244892	22863977 (-1)	2	
	3	62647632	75550530 (-1)	63035188	72645410 (-1)	3	
	4	83469774	11453282	83662224	11191657	4	
	5	96714730	76978958 (-1)	96755223	75868233 (-1)	5	
6	1	0,12901507	0,11013020 (-2)	0,13293409	0,97763803 (-3)	1	6
	2	30383754	11175758 (-1)	30856160	10313231 (-1)	2	
	3	50840327	41119999 (-1)	51257609	39025403 (-1)	3	
	4	70944884	82477814 (-1)	71227373	79834949 (-1)	4	
	5	87404777	98915025 (-1)	87537620	96987470 (-1)	5	
	6	97524752	59327749 (-1)	97551969	58575596 (-1)	6	
7	1	0,10191461	0,49915801 (-3)	0,10518132	0,43538140 (-3)	1	7
	2	24373383	54362974 (-2)	24794081	49385825 (-2)	2	
	3	41703109	22295811 (-1)	42114376	20876179 (-1)	3	
	4	59969822	52605290 (-1)	60298040	50365915 (-1)	4	
	5	76823037	81751555 (-1)	77032590	79528127 (-1)	5	
	6	90091292	84503943 (-1)	90186505	83075620 (-1)	6	
	7	98067409	47025593 (-1)	98086579	46494481 (-1)	7	
8	1	0,08247126	0,24479459 (-3)	0,08522455	0,21003643 (-3)	1	8
	2	19937148	28000605 (-2)	20308653	25057325 (-2)	2	
	3	34646346	12361685 (-1)	35035053	11420335 (-1)	3	
	4	50864589	32410653 (-1)	51208011	30675635 (-1)	4	
	5	66909838	58680583 (-1)	67167925	56556730 (-1)	5	
	6	81115249	77270563 (-1)	81273900	75458354 (-1)	6	
	7	92004700	72205686 (-1)	92075129	71132090 (-1)	7	
	8	98448917	38143522 (-1)	98462928	37755373 (-1)	8	

Т а б л и ц а 3 (пр

$\alpha = 2,6$

$\alpha = 2,7$

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
0, 78260870	0, 27777778	0, 78723404	0, 27027027
0, 50276668 89117271	0, 77642129 (-1) 20013565	0, 50982362 89316146	0, 74683551 19558672
0, 33748519 68202869 93397449	0, 20485512 (-1) 11838525 13890702	0, 34411048 68639840 93500836	0, 19355141 11464582 13626931
0, 23938344 51604477 77961911 95551873	0, 62421003 (-2) 50767076 (-1) 12080508 99963520 (-1)	0, 24500983 52115207 78238637 95612464	0, 57844777 48493061 11764551 98347222
0, 17773529 39754146 63414687 83850211 96794729	0, 21947862 (-2) 21475734 (-1) 69911673 (-1) 10940668 74788907 (-1)	0, 18240961 40255092 63786380 84033889 96833284	0, 19954421 20201880 67336157 10699711 73739677
0, 13683694 31322555 51667796 71504349 87667671 97578593	0, 87039566 (-3) 95347655 (-2) 37078332 (-1) 77324545 (-1) 95127567 (-1) 57842172 (-1)	0, 14072291 31783041 52071071 71775975 87795020 97604644	0, 77708483 88306417 35265879 74937883 93331991 57126791
0, 10844317 25210637 42519881 60620832 77238342 90279897 98105372	0, 38095553 (-3) 44957528 (-2) 19572811 (-1) 48260893 (-1) 77400953 (-1) 81691237 (-1) 45975175 (-1)	0, 11169938 25623096 42919744 60938335 77440396 90371518 98123800	0, 33434529 41008186 18374296 46280116 75364517 80348890 45467287
0, 08797951 20677352 35419245 51546591 67421951 81420979 92144322 98476687	0, 18082037 (-3) 22474510 (-2) 10566669 (-1) 29062100 (-1) 54543043 (-1) 73714871 (-1) 70087811 (-1) 37375011 (-1)	0, 09073540 21043257 35799001 51880435 67672011 81583254 92212313 98490202	0, 15617169 20202228 97911665 27559763 52632383 72036639 69071718 37002205

Таблица 3 (продолжение)

$\alpha = 2,8$

$\alpha = 2,9$

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
1	1	0,79166667	0,26315789	0,79591837	0,25641026	1	1
2	1	0,51668602	0,71919176 (-1)	0,52336167	0,69331570 (-1)	1	2
	2	89507868	19123872	89692818	18707869	2	
3	1	0,35061356	0,18316797 (-1)	0,35699733	0,17360899 (-1)	1	3
	2	69064888	11111189	69478497	10776794	2	
	3	93601029	13372920	93698175	13128142	3	
4	1	0,25056726	0,53713758 (-2)	0,25605636	0,49975209 (-2)	1	4
	2	52615259	46372896 (-1)	53104965	44393128 (-1)	2	
	3	78508444	11463161	78771591	11175407	3	
	4	95671424	96782017 (-1)	95728818	95265532 (-1)	4	
5	1	0,18704735	0,18185502 (-2)	0,19164823	0,16611403 (-2)	1	5
	2	40747927	19030810 (-1)	41232842	17952301 (-1)	2	
	3	64150511	64906930 (-1)	64507310	62613150 (-1)	3	
	4	84213407	10468230	84388904	10245704	4	
	5	96870921	72719305 (-1)	96907673	71726625 (-1)	5	
6	1	0,14459133	0,69563716 (-3)	0,14844160	0,62432741 (-3)	1	6
	2	32237719	81924265 (-2)	32686688	76127840 (-2)	2	
	3	52467611	33576464 (-1)	52857584	31999689 (-1)	3	
	4	72042406	72666945 (-1)	72303792	70504347 (-1)	4	
	5	87919749	91597624 (-1)	88041940	89921541 (-1)	5	
	6	97630139	56428797 (-1)	97655098	55747568 (-1)	6	
7	1	0,11494923	0,29429308 (-3)	0,11819202	0,25976427 (-3)	1	7
	2	26031504	37477923 (-2)	26435905	34315292 (-2)	2	
	3	43314083	17270514 (-1)	43703013	16252473 (-1)	3	
	4	61250680	44414378 (-1)	61557995	42655284 (-1)	4	
	5	77638852	73413690 (-1)	77833808	71543699 (-1)	5	
	6	90461420	79046780 (-1)	90549649	77783207 (-1)	6	
	7	98141872	44970447 (-1)	98159600	44484300 (-1)	7	
8	1	0,09349150	0,13530234 (-3)	0,09624716	0,11757241 (-3)	1	8
	2	21406382	18198220 (-2)	21766742	16426607 (-2)	2	
	3	36174395	90854794 (-2)	36545500	84422696 (-2)	3	
	4	52209643	26159349 (-1)	52534314	24852481 (-1)	4	
	5	67918200	50818078 (-1)	68160608	49093972 (-1)	5	
	6	81734090	70420397 (-1)	81882450	68863088 (-1)	6	
	7	92279131	68082733 (-1)	92344807	67119831 (-1)	7	
	8	98503479	36636734 (-1)	98516524	36278383 (-1)	8	

Таблица 4. Вычисление интегралов вида

$$I = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\alpha f(x) dx:$$

$$I \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad \alpha = -0,9(0,1)3; \quad \alpha \neq 0.$$

Степень точности  $2n - 1$ . Узлы  $x_k$  и коэффициенты  $A_k$  обладают следующим свойством симметрии:

$$x_k = 1 - x_{n+1-k}, \quad A_k = A_{n+1-k}.$$

Глава 3, § 2, интеграл с весовой функцией Якоби.

Литература: Крылов В. И., Лугин В. В., Янович Л. А. [1].

Числа в таблице напечатаны в нормализованном виде. Справа в скобках указан показатель степени десяти, на которую нужно умножить это число:

$$0,435\ 645\ 35(-1) = 0,043\ 564\ 535.$$

Показатель, равный нулю, опущен.

$n$	$k$	$x_k = 1 - x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$
		$\alpha = -0,9$	
1	1	0,50000000	0,19714640(2)
2	1	0,43564535(-1)	0,98573197(1)
3	1	0,15877082(-1)	0,87620620(1)
	2	50000000	21905155(1)
4	1	0,81916414(-2)	0,81642657(1)
	2	28416192	16930541(1)
5	1	0,49942699(-2)	0,77558082(1)
	2	18032587	14991197(1)
	3	50000000	12047835(1)
6	1	0,33619634(-2)	0,74478878(1)
	2	12389203	13906973(1)
	3	36034988	10187346(1)
7	1	0,24170765(-2)	0,72022567(1)
	2	90129770(-1)	13186918(1)
	3	26941893	91933076
	4	50000000	83408090
8	1	0,18212860(-2)	0,69989025(1)
	2	68420739(-1)	12658673(+1)
	3	20805851	85651642
	4	39689565	73603352

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ВИДА  $\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\alpha f(x) dx$

Таблица 4 (продолжение)

$x_k = 1-x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$x_k = 1-x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$k$	$n$
$\alpha = -0,8$		$\alpha = -0,7$			
0,5000000	0,95015014 (1)	0,5000000	0,60096237 (1)	1	1
0,77422873 (-1)	0,47507507 (1)	0,10471529	0,30048118 (1)	1	2
0,30331782 (-1)	0,38458458 (1)	0,43564535 (-1)	0,22536089 (1)	1	3
5000000	18098098 (1)	5000000	15024059 (1)	2	3
0,16093107 (-1)	0,33647110 (1)	0,23701680 (-1)	0,18632721 (1)	1	4
29116538	13860397 (1)	29752271	11415397 (1)	2	4
0,99577684 (-2)	0,30477759 (1)	0,14868133 (-1)	0,16146533 (1)	1	5
18743569	11919697 (1)	19406792	95613016	2	5
5000000	10220102 (1)	5000000	86805675	3	5
0,67647270 (-2)	0,28167283 (1)	0,10188010 (-1)	0,14390385 (1)	1	6
12996797	10733760 (1)	13573398	83752651	2	6
36313716	86064637	36576334	72824683	3	6
0,48937351 (-2)	0,26377905 (1)	0,74139450 (-2)	0,13068144 (1)	1	7
95153228 (-1)	99031564	99976741 (-1)	75297919	2	7
27307448	76575207	27655744	63942688	3	7
5000000	71378492	5000000	61118282	4	7
0,37040344 (-2)	0,24934718 (1)	0,56358041 (-2)	0,12028195 (1)	1	8
72569945 (-1)	92740681	76588022 (-1)	68867176	2	8
21180885	70144483	21541194	57639463	3	8
39837428	62842728	39979094	53692599	4	8
$\alpha = -0,6$		$\alpha = -0,5$			
0,5000000	0,42261692 (1)	0,5000000	0,31415927 (1)	1	1
0,12732200	0,21130846 (1)	0,14644661	0,15707963 (1)	1	2
0,55738342 (-1)	0,14869855 (1)	0,66987298 (-1)	0,10471976 (1)	1	3
5000000	12521983 (1)	5000000	10471976 (1)	2	3
0,31021381 (-1)	0,11682059 (1)	0,38060234 (-1)	0,78539816	1	4
30332833	94487872	30865828	78539816	2	4
0,19709727 (-1)	0,97136754	0,24471742 (-1)	0,62831853	1	5
20027667	77264809	20610737	62831853	2	5
5000000	73813793	5000000	62831853	3	5
0,13616177 (-1)	0,83640365	0,17037087 (-1)	0,52359878	1	6
14121868	65958055	14644661	52359878	2	6
36824341	61710041	37059048	52359878	3	6
0,99648522 (-2)	0,73748697	0,12536044 (-1)	0,44879895	1	7
10461592	57864487	10908426	44879895	2	7
27988132	53515014	28305813	44879895	3	7
5000000	52360523	5000000	44879895	4	7
0,76063973 (-2)	0,66154910	0,96073598 (-2)	0,39269908	1	8
80483871 (-1)	51739456	84265194 (-1)	39269908	2	8
21887764	47509569	22221488	39269908	3	8
40114985	45904525	40245484	39269908	4	8

Таблица 4 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k = 1 - x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$x_k = 1 - x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$k$	$n$
$\alpha = -0,4$							
1	1	0,50000000	0,24153442 (1)	0,50000000	0,18990379 (+1)	1	1
2	1	0,16290007	0,12076721 (1)	0,17725139	0,94951897	1	2
3	1	0,77422873 (-1)	0,76851861	0,87138588 (-1)	0,58026159	1	1
	2	50000000	87830698	50000000	73851475	2	3
4	1	0,44828553 (-1)	0,55248724	0,51337853 (-1)	0,40126349	1	1
	2	31357458	65518486	31812840	54825547	2	4
5	1	0,29146878 (-1)	0,42627564	0,33730416 (-1)	0,29924763	1	1
	2	21159857	51372195	21678326	42200314	2	5
	3	50000000	53534902	50000000	45653639	3	3
6	1	0,20441272 (-1)	0,34434036	0,23821337 (-1)	0,23466550	1	1
	2	15143906	41851004	15621463	33659732	2	6
	3	37281606	44479171	37493032	37825615	3	3
7	1	0,15119018 (-1)	0,28723886	0,17706791 (-1)	0,19070651	1	1
	2	11339360	35091778	11755440	27635166	2	2
	3	28609864	37708586	28901252	31737397	3	7
	4	50000000	38485920	50000000	33017364	4	4
8	1	0,11631619 (-1)	0,24536473	0,13673212 (-1)	0,15916165	1	1
	2	87938748 (-1)	30074780	91510539 (-1)	23217433	2	2
	3	22543177	32542673	22853567	27031488	3	8
	4	40370938	33613281	40491666	28786810	4	4
$\alpha = -0,2$							
1	1	0,50000000	0,15169642 (1)	0,50000000	0,12260975 (1)	1	1
2	1	0,18991316	0,75848212	0,20119285	0,61304874	1	2
3	1	0,96213574 (-1)	0,44730997	0,10471529	0,35031357	1	1
	2	50000000	62234430	50000000	52547035	2	3
4	1	0,57600150 (-1)	0,29846637	0,63627526 (-1)	0,22615693	1	1
	2	32236245	46001575	32631264	38689182	2	4
5	1	0,38219547 (-1)	0,21557472	0,42612879 (-1)	0,15849167	1	1
	2	22168994	34808657	22634341	28815813	2	5
	3	50000000	38964165	50000000	33279789	3	3
6	1	0,27171508 (-1)	0,16433677	0,30487298 (-1)	0,11760289	1	1
	2	16078974	27215130	16517897	22109395	2	6
	3	37694227	32199404	37885991	27435190	3	3
7	1	0,20293598 (-1)	0,13024010	0,22874669 (-1)	0,90976674 (-1)	1	1
	2	12157600	21901729	12546680	17456770	2	2
	3	29180848	26753685	29449439	22585136	3	7
	4	50000000	28337574	50000000	24330602	4	4
8	1	0,15727086 (-1)	0,10627920	0,17788931 (-1)	0,72639916 (-1)	1	1
	2	94985958 (-1)	18052153	98369883 (-1)	14126533	2	2
	3	23153328	22502416	23443078	18769755	3	8
	4	40607956	24665723	40720076	21144588	4	4
$\alpha = -0,1$							



ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ВИДА  $\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\alpha f(x) dx$ 

Таблица 4 (продолжение)

n	k	$x_k = 1-x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$x_k = 1-x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	k	n
$\alpha = 0,1$							
1	1	0,50000000	0,82144331	0,50000000	0,67867867	1	1
2	1	0,22049150	0,41072166	0,22883693	0,33933933	1	2
3	1	0,12022274	0,22247423	0,12732200	0,17965024	1	3
	2	50000000	37649485	50000000	31937820	2	
4	1	0,75024586 (-1)	0,13539592	0,80416745 (-1)	0,10647532	1	4
	2	33347904	27532574	33674378	23286402	2	
5	1	0,51111595 (-1)	0,89765123 (-1)	0,55218466 (-1)	0,68809691 (-1)	1	5
	2	23497485	19931973	23898882	16643601	2	
	3	50000000	24327360	50000000	20818727	3	
6	1	0,37002702 (-1)	0,63327318 (-1)	0,40197695 (-1)	0,47409471 (-1)	1	6
	2	17345043	14772804	17735487	12140410	2	
	3	38244018	19966629	38411501	17052577	3	
7	1	0,28004438 (-1)	0,46799759 (-1)	0,30547123 (-1)	0,34285900 (-1)	1	7
	2	13283571	11256053	13642702	90975639 (-1)	2	
	3	29955407	16158183	30196028	13691186	3	
	4	50000000	17955908	50000000	15433188	4	
8	1	0,21922340 (-1)	0,35846639 (-1)	0,23988020 (-1)	0,25746105 (-1)	1	8
	2	10483067	87982116 (-1)	10801537	69954393 (-1)	2	
	3	23991752	13130354	24257674	11009167	3	
	4	40931757	15558935	41033750	13354717	4	
$\alpha = 0,3$							
1	1	0,50000000	0,56340222	0,50000000	0,46957436	1	1
2	1	0,23647686	0,28170111	0,24350541	0,23478718	1	2
3	1	0,13403747	0,14606724	0,14040252	0,11945313	1	3
	2	50000000	27126774	50000000	23066810	2	
4	1	0,85618779 (-1)	0,84454917 (-1)	0,90640586 (-1)	0,67484340 (-1)	1	4
	2	33982315	19724619	34273410	16730284	2	
5	1	0,59232155 (-1)	0,53270829 (-1)	0,63154434 (-1)	0,41596225 (-1)	1	5
	2	24282229	13929945	24648867	11683186	2	
	3	50000000	17826165	50000000	15271819	3	
6	1	0,43348782 (-1)	0,35880801 (-1)	0,46454956 (-1)	0,27414654 (-1)	1	6
	2	18111815	10008328	18474893	82741892 (-1)	2	
	3	38572011	14573703	38726019	12463063	3	
7	1	0,33071840 (-1)	0,25411930 (-1)	0,35576722 (-1)	0,19028019 (-1)	1	7
	2	13986413	73811971 (-1)	14320235	60096604 (-1)	2	
	3	30427146	11613171	30650261	98603010 (-1)	3	
	4	50000000	13269101	50000000	11411909	4	
8	1	0,26049772 (-1)	0,18719002 (-1)	0,28105575 (-1)	0,13757327 (-1)	1	8
	2	11107433	55866773 (-1)	11400080	44797614 (-1)	2	
	3	24512588	92444361 (-1)	24759903	77734035 (-1)	3	
	4	41131438	11467097	41225997	98498122 (-1)	4	

Таблица 4 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k = 1 - x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$x_k = 1 - x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$k$	$n$
		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,6$			
1	1	0,5000000	0,39269908	0,50000000	0,32936512	1	1
2	1	0,25000000	0,19634954	0,25602498	0,16468256	1	2
3	1	0,14644661	0,98174770 (-1)	0,15219583	0,81034275 (-1)	1	1
	2	50000000	19634954	50000000	16729657	2	3
4	1	0,95491503 (-1)	0,54269678 (-1)	0,10018032	0,43887455 (-1)	1	1
	2	34549150	14207986	34810842	12079510	2	4
5	1	0,66987298 (-1)	0,32724924 (-1)	0,70732891 (-1)	0,25916814 (-1)	1	1
	2	25000000	98174770 (-1)	25336710	82640445 (-1)	2	5
	3	50000000	13089969	50000000	11225060	3	3
6	1	0,49515566 (-1)	0,21122173 (-1)	0,52530252 (-1)	0,16395531 (-1)	1	1
	2	18825510	68583264 (-1)	19164388	56983007 (-1)	2	6
	3	38873953	10664410	39016204	91304022 (-1)	3	3
7	r	0,38060234 (-1)	0,14377362 (-1)	0,40521122 (-1)	0,10951552 (-1)	1	1
	2	14644661	49087385 (-1)	14960145	40213907 (-1)	2	2
	3	30865828	83797408 (-1)	31074270	71276456 (-1)	3	7
	4	50000000	98174770 (-1)	50000000	84481288 (-1)	4	4
8	1	0,30153690 (-1)	0,12028237 (-1)	0,32192612 (-1)	0,76401822 (-2)	1	1
	2	11697778	35056400 (-1)	11982808	29121440 (-1)	2	2
	3	25000000	65449847 (-1)	25233231	55174233 (-1)	3	8
	4	41317591	84635057 (-1)	41405372	72776705 (-1)	4	4
		$\alpha = 0,7$		$\alpha = 0,8$			
1	1	0,50000000	0,27694303	0,50000000	0,23337911	1	1
2	1	0,26163435	0,13847152	0,26687380	0,11668956	1	2
3	1	0,15767340	0,67137705 (-1)	0,16290007	0,55808049 (-1)	1	1
	2	50000000	14266762	50000000	12176301	2	3
4	1	0,10471529	0,35666906 (-1)	0,10910418	0,29113364 (-1)	1	1
	2	35059642	10280461	35296578	87576193 (-1)	2	4
5	1	0,74393454 (-1)	0,20646402 (-1)	0,77971287 (-1)	0,16534780 (-1)	1	1
	2	25659975	69674792 (-1)	25970680	58829147 (-1)	2	5
	3	50000000	96300645 (-1)	50000000	82651259 (-1)	3	3
6	1	0,55498888 (-1)	0,12811635 (-1)	0,58421542 (-1)	0,10071367 (-1)	1	1
	2	19492190	47448624 (-1)	19809524	39589380 (-1)	2	6
	3	39153126	78211257 (-1)	39285045	67028810 (-1)	3	3
7	1	0,42958371 (-1)	0,84029226 (-2)	0,45371168 (-1)	0,64899751 (-2)	1	1
	2	15267109	33034726 (-1)	15565947	27206036 (-1)	2	2
	3	31275975	60675461 (-1)	31471302	51690411 (-1)	3	7
	4	50000000	72716814 (-1)	50000000	62606269 (-1)	4	4
8	1	0,34221047 (-1)	0,57627632 (-2)	0,36237880 (-1)	0,43774642 (-2)	1	1
	2	12261436	23595935 (-1)	12533908	19175365 (-1)	2	2
	3	25459925	46565253 (-1)	25680389	39341360 (-1)	3	8
	4	41492482	62547551 (-1)	41576052	53794167 (-1)	4	4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ВИДА  $\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\alpha f(x) dx$

Т а б л и ц а 4 (продолжени

$x_k = 1-x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$x_k = 1-x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$k$
$\alpha = 0,9$		$\alpha = 1,0$		
0,50000000	0,19705138	0,50000000	0,16666667	1
0,27178227	0,98525691 (-1)	0,27639320	0,83333333 (-1)	1
0,16789442	0,46526021 (-1)	0,17267316	0,38888889 (-1)	1
50000000	10399934	50000000	88888889 (-1)	2
0,11335425	0,23857148 (-1)	0,11747234	0,19618739 (-1)	1
35522566	74668543 (-1)	35738424	63714594 (-1)	2
0,81468711 (-1)	0,13305005 (-1)	0,84888052 (-1)	0,10752210 (-1)	1
26269631	49738559 (-1)	26557560	42104933 (-1)	2
50000000	70964256 (-1)	50000000	60952381 (-1)	3
0,61298437 (-1)	0,79603281 (-2)	0,64129926 (-1)	0,63229471 (-2)	1
20116951	33093623 (-1)	20414991	27711567 (-1)	2
39412258	57471740 (-1)	39535039	49298820 (-1)	3
0,47758875 (-1)	0,50426114 (-2)	0,50121002 (-1)	0,39395250 (-2)	1
15857025	22458515 (-1)	16140686	18580051 (-1)	2
31660583	44067364 (-1)	31844127	37593803 (-1)	3
50000000	53914402 (-1)	50000000	46439909 (-1)	4
0,38242153 (-1)	0,33466668 (-2)	0,40233046 (-1)	0,25737620 (-2)	1
12800458	15627316 (-1)	13061307	12768463 (-1)	2
25834909	33272920 (-1)	26103752	28167069 (-1)	3
41657203	46278788 (-1)	41730052	39824039 (-1)	4
$\alpha = 1,1$		$\alpha = 1,2$		
0,50000000	0,14118557	0,50000000	0,11976682	1
0,28073549	0,70592785 (-1)	0,28483426	0,59883412 (-1)	1
0,17725139	0,32581285 (-1)	0,18164273	0,27354151 (-1)	1
50000000	76022999 (-1)	50000000	65058522 (-1)	2
0,12146484	0,16184586 (-1)	0,12533777	0,13390031 (-1)	1
35944890	54408198 (-1)	36142626	46493381 (-1)	2
0,88231614 (-1)	0,87232128 (-2)	0,91501673 (-1)	0,71023631 (-2)	1
26835138	35683872 (-1)	27102978	30274317 (-1)	2
50000000	52371399 (-1)	50000000	45013464 (-1)	3
0,66916461 (-1)	0,50450917 (-2)	0,69658580 (-1)	0,40421949 (-2)	1
20704123	23242110 (-1)	20984792	19522685 (-1)	2
39653640	42305583 (-1)	39768294	36318532 (-1)	3
0,52457187 (-1)	0,30932314 (-2)	0,54767175 (-1)	0,24399951 (-2)	1
16417250	15402762 (-1)	16687016	12793162 (-1)	2
32022221	32091568 (-1)	32195131	27411056 (-1)	3
50000000	40010448 (-1)	50000000	34478398 (-1)	4
0,42209859 (-1)	0,19901552 (-2)	0,44171998 (-1)	0,15466381 (-2)	1
13316661	10457966 (-1)	13566718	85850756 (-2)	2
26307171	23866298 (-1)	26505398	20239497 (-1)	3
41812705	34278365 (-1)	41887261	29512201 (-1)	4

Таблица 4 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k = 1 - x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$x_k = 1 - x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$k$	$n$	$n$	$k$
$\alpha = 1,3$									
1	1	0,50000000	0,10172540	0,50000000	0,86500539 (-1)	1	1		
2	1	0,28871144	0,50862700 (-1)	0,29238630	0,43250270 (-1)	1	2	1	1
	1	0,18585957	0,23009317 (-1)	0,18991316	0,19388052 (-1)	1		2	1
3	2	50000000	55706767 (-1)	50000000	47724435 (-1)	2	3	1	1
	1	0,12909676	0,11107061 (-1)	0,13274712	0,92354105 (-2)	1		3	1
4	2	36332232	39755640 (-1)	36514251	34014859 (-1)	2	4	1	1
	1	0,94700459 (-1)	0,58015875 (-2)	0,97830155 (-1)	0,47532823 (-2)	1		4	1
5	2	27361642	25710341 (-1)	27611650	21854620 (-1)	2	5	1	1
	3	50000000	38701544 (-1)	50000000	33284735 (-1)	3		5	1
	1	0,72356883 (-1)	0,32510304 (-2)	0,75012025 (-1)	0,26239378 (-2)	1			
6	2	21257413	16421372 (-1)	21522372	13830745 (-1)	2	6		
	3	39879214	31190299 (-1)	39986599	26795587 (-1)	3		6	
	1	0,57050805 (-1)	0,19329519 (-2)	0,59307998 (-1)	0,15373511 (-2)	1			
7	2	16950268	10644660 (-1)	17207271	88718057 (-2)	2			
	3	32363108	23426460 (-1)	32526382	20031827 (-1)	3	7		
	4	50000000	29717257 (-1)	50000000	25618571 (-1)	4		7	
	1	0,46118961 (-1)	0,12075757 (-2)	0,48050330 (-1)	0,94693840 (-3)	1			
8	2	13811665	70626705 (-2)	14051676	58219233 (-2)	2			
	3	26698557	17177733 (-1)	26887154	14590330 (-1)	3	8		
	4	41959816	25414721 (-1)	42030457	21891078 (-1)	4		8	
$\alpha = 1,5$									
1	1	0,50000000	0,73631078 (-1)	0,50000000	0,62736213 (-1)	1	1		
2	1	0,29587585	0,36815539 (-1)	0,29919517	0,31368107 (-1)	1	2	1	1
	1	0,19381378	0,16362462 (-1)	0,19757081	0,13828950 (-1)	1		2	1
3	2	50000000	40906154 (-1)	50000000	35078313 (-1)	2	3	1	1
	1	0,13629380	0,76960238 (-2)	0,13974151	0,64261858 (-2)	1		3	1
4	2	36689176	29119515 (-1)	36857457	24941921 (-1)	2	4	1	1
	1	0,10089289	0,39051827 (-2)	0,10389073	0,32166176 (-2)	1		4	1
5	2	27853477	18593202 (-1)	28087565	15831301 (-1)	2	5	1	1
	3	50000000	28634308 (-1)	50000000	24640376 (-1)	3		5	1
	1	0,77624698 (-1)	0,21247201 (-2)	0,80195627 (-1)	0,17256962 (-2)	1			
6	2	21780026	11663045 (-1)	22030712	98463594 (-2)	2	6		
	3	40090634	23027774 (-1)	40191488	19796051 (-1)	3		6	
	1	0,61538741 (-1)	0,12272233 (-2)	0,63743083 (-1)	0,98302296 (-3)	1			
7	2	17458274	74058417 (-2)	17703513	61912530 (-2)	2			
	3	32685170	17137812 (-1)	32839677	14668980 (-1)	3	7		
	4	50000000	22089323 (-1)	50000000	19049702 (-1)	4		7	
	1	0,49965758 (-1)	0,74556115 (-3)	0,5186496 (-1)	0,58922895 (-3)	1			
8	2	14286921	48082392 (-2)	14517559	39781499 (-2)	2			
	3	27071085	12401679 (-1)	27250635	10548632 (-1)	3	8		
	4	42099266	18860060 (-1)	42166322	16252096 (-1)	4		8	
$\alpha = 1,6$									

Таблица 4 (продолжение)

$x_k = 1-x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$x_k = 1-x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	k	n
$\alpha = 1,7$		$\alpha = 1,8$			
0,5000000	0,53500358 (-1)	0,5000000	0,45661131 (-1)	1	1
0,30235765	0,26750179 (-1)	0,30537526	0,22830565 (-1)	1	2
0,20119285	0,11703203 (-1)	0,20468779	0,99163062 (-2)	1	
5000000	30093952 (-1)	5000000	25828518 (-1)	2	3
0,14309463	0,53758712 (-2)	0,14635730	0,45049753 (-2)	1	
37019505	21374308 (-1)	37175697	18325590 (-1)	2	4
0,10682568	0,26557468 (-2)	0,10969969	0,21975067 (-2)	1	
28314323	13489897 (-1)	28534128	11502978 (-1)	2	5
5000000	21209071 (-1)	5000000	18260162 (-1)	3	
0,8272556 (-1)	0,14055634 (-2)	0,85215248 (-1)	0,11478309 (-2)	1	
22274744	83215965 (-2)	22512417	70400750 (-2)	2	6
40289322	17023019 (-1)	40384283	14642059 (-1)	3	
0,65921119 (-1)	0,78994144 (-3)	0,68072992 (-1)	0,63669032 (-3)	1	
17943210	51830723 (-2)	18177574	43447659 (-2)	2	
32990092	12561564 (-1)	33136595	10761607 (-1)	3	7
5000000	16431203 (-1)	5000000	14175004 (-1)	4	
0,53747714 (-1)	0,46732630 (-3)	0,55613839 (-1)	0,37187530 (-3)	1	
14743742	32969230 (-2)	14965613	27367141 (-2)	2	
27425375	89783665 (-2)	27597274	76466346 (-2)	3	8
42231098	14007564 (-1)	42295463	12075341 (-1)	4	
$\alpha = 1,9$		$\alpha = 2,0$			
0,5000000	0,38999753 (-1)	0,5000000	0,33333333 (-1)	1	1
0,30825875	0,19499876 (-1)	0,31101776	0,16666657 (-1)	1	2
0,20806290	0,84117114 (-2)	0,21132486	0,71428571 (-2)	1	
5000000	22176330 (-1)	5000000	19047619 (-1)	2	3
0,14953343	0,37811991 (-2)	0,15262670	0,31784202 (-2)	1	
37326376	15718677 (-1)	37471860	13488247 (-1)	2	4
0,11251464	0,18220671 (-2)	0,11527234	0,15136647 (-2)	1	
28747331	98152923 (-2)	28954260	83805152 (-2)	2	5
5000000	15725034 (-1)	5000000	13544974 (-1)	3	
0,87665471 (-1)	0,93966368 (-3)	0,90077002 (-1)	0,77102146 (-3)	1	
22744005	59615919 (-2)	22969768	50528707 (-2)	2	6
40476509	12598621 (-1)	40566129	10842775 (-1)	3	
0,70198879 (-1)	0,51461542 (-3)	0,72298987 (-1)	0,41704679 (-3)	1	
18406806	36465635 (-2)	18631093	30541619 (-2)	2	
33279352	92234014 (-2)	33418522	79081926 (-2)	3	7
5000000	12230582 (-1)	5000000	10554525 (-1)	4	
0,57463203 (-1)	0,29584481 (-3)	0,59295712 (-1)	0,23765011 (-3)	1	
15183312	22751308 (-2)	15396969	18941120 (-2)	2	
27764683	65163188 (-2)	27928351	55562438 (-2)	3	8
42357582	10411582 (-1)	42418417	89786658 (-2)	4	

Таблица 4 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k = 1 - x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$x_k = 1 - x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$k$	$n$
		$\alpha = 1,3$		$\alpha = 1,4$			
1	1	0,50000000	0,10172540	0,50000000	0,86500539(-1)	1	1
2	1	0,28871144	0,50862700(-1)	0,29238630	0,43250270(-1)	1	2
3	1	0,18585957	0,23009317(-1)	0,18991316	0,19388052(-1)	1	3
	2	50000000	55706767(-1)	50000000	47724435(-1)	2	
4	1	0,12909676	0,11107061(-1)	0,13274712	0,92354105(-2)	1	4
	2	36332232	39755640(-1)	36514251	34014859(-1)	2	
5	1	0,94700459(-1)	0,58015875(-2)	0,97830155(-1)	0,47532823(-2)	1	5
	2	27361642	25710341(-1)	27611650	21854620(-1)	2	
	3	50000000	38701544(-1)	50000000	33284735(-1)	3	
6	1	0,72356883(-1)	0,32510304(-2)	0,75012025(-1)	0,26239378(-2)	1	6
	2	21257413	16421372(-1)	21522372	13830745(-1)	2	
	3	39879214	31190299(-1)	39986599	26795587(-1)	3	
7	1	0,57050805(-1)	0,19329519(-2)	0,59307998(-1)	0,15373511(-2)	1	7
	2	16950268	10644660(-1)	17207271	88718057(-2)	2	
	3	32363108	23426460(-1)	32526382	20031827(-1)	3	
	4	50000000	29717257(-1)	50000000	25018571(-1)	4	
8	1	0,46118961(-1)	0,12075757(-2)	0,48050330(-1)	0,94693840(-3)	1	8
	2	13811665	70626705(-2)	14051676	58219233(-2)	2	
	3	26698657	17177733(-1)	26887154	14590330(-1)	3	
	4	41959816	25414721(-1)	42030457	21891078(-1)	4	
		$\alpha = 1,5$		$\alpha = 1,6$			
1	1	0,50000000	0,73631078(-1)	0,50000000	0,62736213(-1)	1	1
2	1	0,29587585	0,36815539(-1)	0,29919517	0,31368107(-1)	1	2
3	1	0,19381378	0,16362462(-1)	0,19757081	0,13828950(-1)	1	3
	2	50000000	40906154(-1)	50000000	35078313(-1)	2	
4	1	0,13629380	0,76960238(-2)	0,13974151	0,64261858(-2)	1	4
	2	36689176	29119515(-1)	36857457	24941921(-1)	2	
5	1	0,10089289	0,39051827(-2)	0,10389073	0,32166176(-2)	1	5
	2	27853477	18593202(-1)	28087565	15831301(-1)	2	
	3	50000000	28634308(-1)	50000000	24640376(-1)	3	
6	1	0,77624698(-1)	0,21247201(-2)	0,80195627(-1)	0,17256962(-2)	1	6
	2	21780026	11663045(-1)	22030712	98463594(-2)	2	
	3	40090634	23027774(-1)	40191488	19796051(-1)	3	
7	1	0,61538741(-1)	0,12272233(-2)	0,63743083(-1)	0,98302296(-3)	1	7
	2	17458274	74058417(-2)	17703513	61912530(-2)	2	
	3	32685170	17137812(-1)	32839677	14668980(-1)	3	
	4	50000000	22089323(-1)	50000000	19049702(-1)	4	
8	1	0,49365758(-1)	0,74556115(-3)	0,5186496(-1)	0,58922895(-3)	1	8
	2	14286921	48082392(-2)	14517559	39781499(-2)	2	
	3	27071085	12401679(-1)	27250635	10548632(-1)	3	
	4	42099266	18860060(-1)	42166322	16252096(-1)	4	

Таблица 4 (продолжение)

k	$x_k = 1-x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$x_k = 1-x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	k	n
$\alpha = 1,7$						
1	0,50000000	0,53500358 (-1)	0,50000000	0,45661131 (-1)	1	1
1	0,30235765	0,26750179 (-1)	0,30537526	0,22830565 (-1)	1	2
1	0,20119285	0,11703203 (-1)	0,20468779	0,99163062 (-2)	1	3
2	50000000	30093952 (-1)	50000000	25828518 (-1)	2	
1	0,14309463	0,53758712 (-2)	0,14635730	0,45049753 (-2)	1	4
2	37019505	21374308 (-1)	37175697	18325590 (-1)	2	
1	0,10682568	0,26557468 (-2)	0,10969969	0,21975067 (-2)	1	5
2	28314323	13489897 (-1)	28534128	11502978 (-1)	2	
3	50000000	21209071 (-1)	50000000	18260162 (-1)	3	
1	0,82725556 (-1)	0,14055634 (-2)	0,85215248 (-1)	0,11478309 (-2)	1	6
2	22274744	83215965 (-2)	22512417	70400750 (-2)	2	
3	40289322	17023019 (-1)	40384283	14642659 (-1)	3	
1	0,65921119 (-1)	0,78994144 (-3)	0,68072992 (-1)	0,63669032 (-3)	1	7
2	17943210	51830723 (-2)	18177574	43447659 (-2)	2	
3	32990092	12561564 (-1)	33136595	10761607 (-1)	3	
4	50000000	16431203 (-1)	50000000	14175004 (-1)	4	
1	0,53747714 (-1)	0,46732630 (-3)	0,55613839 (-1)	0,37187530 (-3)	1	8
2	14743742	32969230 (-2)	14965613	27367141 (-2)	2	
3	27425375	89783665 (-2)	27597274	76466346 (-2)	3	
4	42231098	14007564 (-1)	42295463	12075341 (-1)	4	
$\alpha = 1,9$						
1	0,50000000	0,38999753 (-1)	0,50000000	0,33333333 (-1)	1	1
1	0,30825875	0,19499876 (-1)	0,31101776	0,16666657 (-1)	1	2
1	0,20806290	0,84117114 (-2)	0,21132486	0,71428571 (-2)	1	3
2	50000000	22176330 (-1)	50000000	19047619 (-1)	2	
1	0,14953343	0,37811991 (-2)	0,15262670	0,31784202 (-2)	1	4
2	37326376	15718677 (-1)	37471860	13488247 (-1)	2	
1	0,11251464	0,18220671 (-2)	0,11527234	0,15136647 (-2)	1	5
2	28747331	98152923 (-2)	28954260	83805152 (-2)	2	
3	50000000	15725034 (-1)	50000000	13544974 (-1)	3	
1	0,87665471 (-1)	0,93966368 (-3)	0,90077002 (-1)	0,77102146 (-3)	1	6
2	22744005	59615919 (-2)	22969768	50528707 (-2)	2	
3	40476509	12598621 (-1)	40566129	10842775 (-1)	3	
1	0,70198879 (-1)	0,51461542 (-3)	0,72298987 (-1)	0,41704679 (-3)	1	7
2	18406806	36465685 (-2)	18631093	30541619 (-2)	2	
3	33279352	92234014 (-2)	33418522	79081936 (-2)	3	
4	50000000	12230582 (-1)	50000000	10554525 (-1)	4	
1	0,57463203 (-1)	0,29584481 (-3)	0,59295712 (-1)	0,23765011 (-3)	1	8
2	15183312	22751308 (-2)	15396969	18941120 (-2)	2	
3	27764683	65163188 (-2)	27928351	55562438 (-2)	3	
4	42357382	10411582 (-1)	42418417	89786608 (-2)	4	

Таблица 4 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k = 1 - x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$x_k = 1 - x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$k$	$n$
		$\alpha = 2,1$		$\alpha = 2,2$			
1	1	0,50000000	0,28508625 (-1)	0,50000000	0,24396946 (-1)	1	1
2	1	0,31366100	0,14254312 (-1)	0,31619634	0,12198473 (-1)	1	2
3	1	0,21447988	0,60712812 (-2)	0,21753366	0,51651191 (-2)	1	3
	2	50000000	16366062 (-1)	50000000	14066707 (-1)	2	
4	1	0,15564058	0,26754296 (-2)	0,15857834	0,22549462 (-2)	1	4
	2	37612441	11578883 (-1)	37748388	99435266 (-2)	2	
5	1	0,11797455	0,12597149 (-2)	0,12062297	0,10501299 (-2)	1	5
	2	29155218	71597404 (-2)	29350489	61202433 (-2)	2	
	3	50000000	11669714 (-1)	50000000	10056199 (-1)	3	
6	1	0,92450618 (-1)	0,63401343 (-3)	0,94787092 (-1)	0,52241086 (-3)	1	6
	2	23189950	42863101 (-2)	23404780	36389706 (-2)	2	
	3	40653263	93339888 (-2)	40738025	80370913 (-2)	3	
7	1	0,74373552 (-1)	0,33881825 (-3)	0,76422830 (-1)	0,27590973 (-3)	1	7
	2	18850613	25776425 (-2)	19065536	21706561 (-2)	2	
	3	33554254	67830908 (-2)	33686688	58201599 (-2)	3	
	4	50000000	91095216 (-2)	50000000	78634942 (-2)	4	
8	1	0,61111309 (-1)	0,19078799 (-3)	0,62909963 (-1)	0,15356855 (-3)	1	8
	2	15606710	15790495 (-2)	15812655	13180969 (-2)	2	
	3	28088417	47401930 (-2)	28245011	40460942 (-2)	3	
	4	42477725	77442818 (-2)	42535662	66807132 (-2)	4	
		$\alpha = 2,3$		$\alpha = 2,4$			
1	1	0,50000000	0,20890038 (-1)	0,50000000	0,17896663 (-1)	1	1
2	1	0,31863094	0,10445019 (-1)	0,32097128	0,89483317 (-2)	1	2
3	1	0,22049150	0,43979027 (-2)	0,22335833	0,37475919 (-2)	1	3
	2	50000000	12094232 (-1)	50000000	10401480 (-1)	2	
4	1	0,16144308	0,19028431 (-2)	0,16423772	0,16075365 (-2)	1	4
	2	37879952	85421757 (-2)	38007363	73407952 (-2)	2	
5	1	0,12321922	0,87679326 (-3)	0,12576489	0,73315165 (-3)	1	5
	2	29540338	52344590 (-2)	29725014	44791384 (-2)	2	
	3	50000000	86675332 (-2)	50000000	74720832 (-2)	3	
6	1	0,97087194 (-1)	0,43127686 (-3)	0,99351686 (-1)	0,35668352 (-3)	1	6
	2	23614473	30917522 (-2)	23819235	26287232 (-2)	2	
	3	40820520	69219898 (-2)	40900848	59629249 (-2)	3	
7	1	0,78447097 (-1)	0,22517940 (-3)	0,80446643 (-1)	0,18416172 (-3)	1	7
	2	19276023	18297593 (-2)	19482227	15438669 (-2)	2	
	3	33815955	49956522 (-3)	33942182	42893648 (-2)	3	
	4	50000000	67888560 (-2)	50000000	58618764 (-2)	4	
8	1	0,64691675 (-1)	0,12391699 (-3)	0,66456466 (-1)	0,10022601 (-3)	1	8
	2	16014919	11016232 (-2)	16213611	92178051 (-3)	2	
	3	28398261	34553441 (-2)	28548283	29522471 (-2)	3	
	4	42592280	57641345 (-2)	42647628	49740780 (-2)	4	



Таблица 4 (продолжение)

k	$x_k = 1-x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$x_k = 1-x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	k	n
$\alpha = 2,5$						
1	0,50000000	0,15339808 (-1)	0,50000000	0,13154367 (-1)	1	1
1	0,32322330	0,76699039 (-2)	0,32539243	0,65771836 (-2)	1	2
1	0,22613872	0,31957933 (-2)	0,22883693	0,27271249 (-2)	1	3
2	50000000	89482213 (-2)	50000000	77001174 (-2)	2	
1	0,16696503	0,13595011 (-2)	0,16962763	0,11508840 (-2)	1	4
2	38130835	63104028 (-2)	38250567	54262997 (-2)	2	
1	0,12826150	0,61389671 (-3)	0,13071049	0,51471537 (-3)	1	5
2	29904748	38346476 (-2)	30079759	32843867 (-2)	2	
3	50000000	64427193 (-2)	50000000	55561632 (-2)	3	
1	0,10158132	0,29549443 (-3)	0,10377684	0,24519677 (-3)	1	6
2	24019258	22365739 (-2)	24214723	19041673 (-2)	2	
3	40979102	51378356 (-2)	41055370	44278196 (-2)	3	
1	0,82421773 (-1)	0,15091445 (-3)	0,84372799 (-1)	0,12390202 (-3)	1	7
2	19684292	13038230 (-2)	19882358	11020505 (-2)	2	
3	34065485	36840982 (-2)	34185977	31651997 (-2)	3	
4	50000000	50621366 (-2)	50000000	43720628 (-2)	4	
1	0,68204380 (-1)	0,81245428 (-4)	0,69935479 (-1)	0,65999098 (-4)	1	8
2	16408837	77215919 (-3)	16600698	64751344 (-3)	2	
3	28695192	25235474 (-2)	28839095	21580394 (-2)	3	
4	42701753	42929519 (-2)	42754700	37056317 (-2)	4	
$\alpha = 2,7$						
1	0,50000000	0,11285232 (-1)	0,50000000	0,96856944 (-2)	1	1
1	0,32748361	0,56426159 (-2)	0,32950141	0,48428472 (-2)	1	2
1	0,23145692	0,23286986 (-2)	0,23400241	0,19896969 (-2)	1	3
2	50000000	66278346 (-2)	50000000	57063006 (-2)	2	
1	0,17222801	0,97519490 (-3)	0,17476852	0,82705790 (-3)	1	4
2	38366744	46674210 (-2)	38479539	40157893 (-2)	2	
1	0,13311330	0,43209328 (-3)	0,13547126	0,36315922 (-3)	1	5
2	30250251	28143055 (-2)	30416417	24124998 (-2)	2	
3	50000000	47924342 (-2)	50000000	41343763 (-2)	3	
1	0,10593898	0,20377094 (-3)	0,10806846	0,16958889 (-3)	1	6
2	24405803	16221710 (-2)	24592662	13827543 (-2)	2	
3	41129734	38166740 (-2)	41202272	32905040 (-2)	3	
1	0,86300044 (-1)	0,10190619 (-3)	0,88203835 (-1)	0,83957378 (-4)	1	7
2	20076556	93226822 (-3)	20267013	78926058 (-3)	2	
3	34303764	27201783 (-2)	34418944	23383787 (-2)	3	
4	50000000	37765265 (-2)	50000000	32625010 (-2)	4	
1	0,71649843 (-1)	0,53722072 (-4)	0,73347564 (-1)	0,43812839 (-4)	1	8
2	16789290	54354122 (-3)	16974707	45670774 (-3)	2	
3	28980094	18462421 (-2)	29118286	15801272 (-2)	3	
4	42806510	31991105 (-2)	42857224	27621994 (-2)	4	

Т а б л и ц а 4 (продолжение)

$x_k = 1 - x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$
$\alpha = 2,9$	
0,5000000	0,83161237 (-2)
0,33145003	0,41580619 (-2)
0,23647686 50000000	0,17010253 (-2) 49140731 (-2)
0,17725139 38589113	0,70201045 (-3) 34560514 (-2)
0,13778569 30578436 50000000	0,30556154 (-3) 20688738 (-2) 35672531 (-2)
0,11016598 24775454 41273059	0,14133454 (-3) 11793380 (-2) 28373893 (-2)
0,90084504 (-1) 20453848 34531615 50000000	0,69281537 (-4) 66868981 (-3) 20107071 (-2) 28187669 (-2)
0,75028748 (-1) 17157036 29253764 42906879	0,35796862 (-4) 38410334 (-3) 13528904 (-2) 23852712 (-2)
$\alpha = 3,0$	
0,50000000	0,71428571 (-2)
0,33333333	0,35714286 (-2)
0,23888352 50000000	0,14550265 (-2) 42328042 (-2)
0,17967874 38695617	0,59634090 (-3) 29750877 (-2)
0,14005785 30736481 50000000	0,25736956 (-3) 17748575 (-2) 30784031 (-2)
0,11223224 24954325 41342162	0,11794114 (-3) 10063875 (-2) 24471000 (-2)
0,91942388 (-1) 20637175 34641866 50000000	0,57258916 (-4) 56694293 (-3) 17293969 (-2) 24356596 (-2)
0,76693513 (-1) 17336364 29386617 42955513	0,29298611 (-4) 32332878 (-3) 11587611 (-2) 20600401 (-2)

**Таблица 5. Интегрирование функций, имеющих логарифмические и степенные особенности:**

$$\int_0^1 x^\alpha \lg \frac{e}{x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_{kf}(x_k),$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{4}{5}; \alpha = 0(1)5.$$

Степень точности  $2n - 1$ . Глава 3, § 1 и 2.  
Литература: Крылов В. И., Пальцев А. А. [1-2].

$$\alpha = -\frac{4}{5} \qquad \alpha = -\frac{3}{4}$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0,05092592592593	30,0000000000	0,07200000000000	20,0000000000
2	0,01723829857222 0,6281443022021	28,34568851082 1,654311489175	0,02438287159052 0,6372328548805	18,44604292379 1,55395706211
3	0,008781351762414 0,3307774179966 0,8281918381364	26,9433631789 2,49350036735 0,563136453754	0,01238910143363 0,3390280809811 0,8312011487993	17,17238349564 2,281856853229 0,5457596511350
4	0,00536785774135 0,1996869110488 0,568582600901 0,903486864283	25,827115474 2,9239428602 0,96485487399 0,28408679153	0,007553848473127 0,2057103471707 0,5733703576845 0,904767370674	16,1841142665 2,61771993315 0,919760082275 0,278405718113
5	0,00363991775512 0,132968947933 0,399074827891 0,708020514927 0,938638030938	24,914512349 3,1718164353 1,2274462304 0,51436619725 0,17185878814	0,00511075638311 0,137386119244 0,403694714461 0,710797664199 0,939288191653	15,392359347 2,7883518259 1,1513671198 0,49857309038 0,16934861678
6	0,002639703745 0,09475782270 0,2920449711 0,5467762215 0,7917958254 0,9576653428	24,1478797 3,32471314 1,40975292 0,680834338 0,321400925 0,115418986	0,003699203409 0,09809375077 0,29604836933 0,55000985123 0,79349938184 0,95803758779	14,73831138 2,877861040 1,303448994 0,6520092405 0,3142709621 0,1140983792
7	0,0020067337 0,070914981 0,22187196 0,42830589 0,65091582 0,84491512 0,96907140	23,48961 3,423088 1,540913 0,8076978 0,4348885 0,2208344 0,08296904	0,00280745447 0,0735097734 0,225249299 0,431480497 0,653176479 0,846020676 0,969303488	14,184686 2,9235065 1,4065737 0,76465938 0,42131286 0,21707030 0,082190842
8	0,001579791 0,05505989 0,1738521 0,3420859 0,5354877 0,7248555 0,8803597 0,9764313	22,9145 3,48786 1,63797 0,906464 0,526032 0,303026 0,161589 0,0625671	0,0023068967 0,057130590 0,17669359 0,34501205 0,53792563 0,72646829 0,88111270 0,97658544	13,70698 2,943785 1,478123 0,849082 0,504888 0,295692 0,159380 0,0620706

Таблица 5 (продолжение)

$$\alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0, 1093750000000	12, 00000000000	0, 18518518518519	6, 0000000000000
2	0, 037376786629618 0, 65185398260115	10, 59396155609 1, 406038443914	0, 065553792879546 0, 67869929869165	4, 8293343961102 1, 1706656038898
3	0, 018988243981934 0, 3526282496977 0, 8360742455061	9, 500492103659 1, 980928270966 0, 518579625374	0, 033583341171831 0, 3788161515100 0, 8452014939278	4, 000882927580 1, 528582861726 0, 470534210694
4	0, 01155867830387 0, 2157432893881 0, 5812229589478 0, 9068534466922	8, 68625718714 2, 19334735551 0, 85107543160 0, 269320025755	0, 02049128913039 0, 2354730483855 0, 596306102496 0, 910817378279	3, 43029868424 1, 58230753068 0, 734810943900 0, 252582841187
5	0, 0078060828015 0, 144785726351 0, 411325754513 0, 715355489648 0, 940351759486	8, 0551484232 2, 2679227799 1, 0378314834 0, 47380831615 0, 16528899735	0, 0138439020825 0, 159509502778 0, 426191863524 0, 724145452483 0, 942392135100	3, 0153933729 1, 5450646140 0, 85224832789 0, 42964431234 0, 15764937281
6	0, 005640262764 0, 10370191918 0, 30269053275 0, 55534258806 0, 79629928654 0, 95864829669	7, 547958539 2, 282100594 1, 147544229 0, 6075361159 0, 3029120202 0, 1119485019	0, 009998966416 0, 1149446145 0, 3157466552 0, 5657272491 0, 8017222433 0, 9598276833	2, 69936628 1, 47994839 0, 900358328 0, 530415483 0, 282060894 0, 107850626
7	0, 00427374923 0, 0778823929 0, 230869715 0, 436733422 0, 656904819 0, 847840303 0, 969685064	7, 1286314 2, 2677132 1, 2125530 0, 6992027 0, 39996663 0, 21101453 0, 080918531	0, 00757104837 0, 0866930215 0, 241985652 0, 447031697 0, 664176240 0, 851377615 0, 970425518	2, 4498655 1, 4085742 0, 91319509 0, 58853436 0, 36166293 0, 19969512 0, 078472797
8	0, 0033546487 0, 060625934 0, 18143258 0, 34986566 0, 54195654 0, 72912944 0, 88235356 0, 97683926	6, 774169 2, 239367 1, 250409 0, 7629406 0, 4720374 0, 2840185 0, 1558014 0, 05125640	0, 005937844 0, 06769490 0, 1908472 0, 3594279 0, 5498586 0, 7343293 0, 8847731 0, 9773336	2, 24732 1, 33880 0, 907591 0, 620653 0, 414325 0, 262605 0, 149031 0, 0596820

Таблица 5 (продолжение)

$$\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha = -\frac{1}{4}$$

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
0,25600000000000	3,75000000000000	0,28862973760933	3,11111111111111
0,094764434768744 0,70232832648792	2,7548233974104 0,99517660258961	0,10937037232223 0,71303681348344	2,187263494135 0,9238476169764
0,04923208849711 0,4033844765985 0,8534960780077	2,10684245024 1,21337192047 0,429785629288	0,05727552603071 0,4150490566319 0,8573500969319	1,60830595602 1,09108387136 0,411721283722
0,03022242233854 0,254525623468 0,610487999358 0,914497482300	1,6920572168 1,1791269233 0,64120030909 0,23761555084	0,0352921656989 0,263768619794 0,617244805813 0,916235527638	1,2504457395 1,0287630456 0,60117460737 0,23072771863
0,020480991468 0,17396380754 0,44044245455 0,73247287232 0,94431307484	1,408335151 1,090092023 0,7092818866 0,3916675737 0,1506233651	0,023966137203 0,18106368961 0,44733053202 0,73646534682 0,94523002819	1,012811738 0,9262443425 0,6500675951 0,3746634743 0,1473239610
0,0148175377 0,126098593 0,328417854 0,575697243 0,806895442 0,960948810	1,2031656 0,99563795 0,71732092 0,46640521 0,26345344 0,10401692	0,0173607250 0,131621560 0,334599658 0,580525048 0,809389305 0,961487945	0,84527417 0,82659730 0,64368029 0,43846693 0,25489847 0,10219395
0,011230223 0,095498145 0,25286644 0,45701079 0,67117933 0,85477118 0,97113436	1,048309 0,9087485 0,6993399 0,4996405 0,3284494 0,1893539 0,07615844	0,013168354 0,099882523 0,25820916 0,4618768 0,6745796 0,8564144 0,9714771	0,721582 0,739142 0,615566 0,461762 0,313493 0,184518 0,0750486
0,00881235 0,0747972 0,200120 0,368757 0,557523 0,739354 0,887105 0,977809	0,92748 0,83209 0,67058 0,50980 0,36563 0,24350 0,14275 0,058180	0,01033881 0,07834819 0,2046952 0,3733292 0,5612645 0,7417994 0,8882381 0,9780403	0,626929 0,654489 0,579986 0,463619 0,344141 0,234720 0,139771 0,0574553

Таблица 5 (продолжение)

$$\alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\alpha = 0$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0, 30727023319616	2, 812500000000	0, 375000000000	2, 000000000000
2	0, 11808157491602 0, 71913744239867	1, 927236033372 0, 8852639666283	0, 15226872653042 0, 74134829474617	1, 2437990197345 0, 7562009802655
3	0, 06214523550649 0, 4218544062404 0, 8595745138464	1, 38452815396 1, 02643788776 0, 401533958290	0, 08179801956147 0, 4476896175330 0, 8678622606315	0, 816532355478 0, 818419858107 0, 365047786415
4	0, 0383845677510 0, 269222163656 0, 621195414841 0, 917247242934	1, 0558832153 0, 95083955367 0, 57900711696 0, 22677011407	0, 0510435826208 0, 290349870283 0, 636257848291 0, 921074497348	0, 57735188187 0, 70845547716 0, 50205875479 0, 21213388618
5	0, 02610141041 0, 1852802664 0, 4513883312 0, 9457667819 0, 7388076202	0, 841435221 0, 842829140 0, 617799318 0, 145408543 0, 365027779	0, 03491731795 0, 2018124881 0, 4670717607 0, 9478179175 0, 7477939601	0, 431530095 0, 591123192 0, 508902554 0, 138195246 0, 330248913
6	0, 0189234081 0, 134915626 0, 338259224 0, 583372207 0, 810856679 0, 961804768	0, 69249996 0, 74190228 0, 60414288 0, 42284081 0, 24998526 0, 10112880	0, 0254118543 0, 147932805 0, 352530320 0, 594399766 0, 816516768 0, 963024076	0, 33603426 0, 49320389 0, 47413029 0, 36772771 0, 23183272 0, 097071138
7	0, 01436168 0, 1025053 0, 2613828 0, 4647570 0, 6765879 0, 8573836 0, 9716790	0, 583974 0, 655381 0, 571200 0, 440836 0, 304995 0, 181717 0, 0743973	0, 019336386 0, 11292733 0, 27381691 0, 47598784 0, 68438787 0, 86113816 0, 97246039	0, 2699387 0, 4153877 0, 4287540 0, 3686273 0, 2741883 0, 1712071 0, 07189647
8	0, 0112801 0, 0804771 0, 207420 0, 376043 0, 563480 0, 743246 0, 888908 0, 978177	0, 50188 0, 58280 0, 53261 0, 43840 0, 33206 0, 22968 0, 13804 0, 057029	0, 01521569 0, 08897148 0, 2181604 0, 3866775 0, 5721317 0, 7488795 0, 8915109 0, 9787066	0, 222176 0, 353883 0, 383815 0, 353169 0, 289048 0, 211060 0, 131467 0, 0553812

Таблица 5 (продолжение)

$\alpha = \frac{1}{5}$

$\alpha = \frac{1}{4}$

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
0,43275732531931	1,5277777777778	0,44581618655693	1,4400000000000
0,18506084106268 0,76052542714377	0,87017834692829 0,65759943084949	0,19300946082648 0,76491118230257	0,8034541191584 0,6365458808416
0,1014906621320 0,4714617022343 0,8752760654850	0,524673513164 0,668836019822 0,334268244793	0,106392288279 0,477106790713 0,877007616691	0,47463428786 0,63804619846 0,32731951368
0,0640180249859 0,310410063243 0,650217655375 0,924579401433	0,34496775575 0,54342070577 0,44020924309 0,19918007316	0,067292634410 0,31526455401 0,65354784289 0,92540956040	0,3065957716 0,5105842511 0,4266470733 0,1961729040
0,04407742423 0,2178052327 0,4819182699 0,7562048674 0,9497260035	0,242274894 0,428072021 0,425194841 0,300603372 0,131632649	0,04640906242 0,2217195757 0,4855056837 0,7582234119 0,9501822434	0,212067047 0,396636088 0,407337092 0,293875671 0,130084101
0,0322154837 0,160681491 0,366229824 0,604875237 0,821859411 0,964170965	0,17872422 0,33924180 0,37827172 0,32242745 0,21579893 0,093313651	0,0339572067 0,163825441 0,369568369 0,607412007 0,823148228 0,964447043	0,15437187 0,31040709 0,35834672 0,31237413 0,21208261 0,092417576
0,02458677 0,1232238 0,2859107 0,4867695 0,6918302 0,8647065 0,9732014	0,136881 0,272823 0,327730 0,311307 0,247782 0,161703 0,0695521	0,025936358 0,12577666 0,28887082 0,48939723 0,69363741 0,86557095 0,97338062	0,1168464 0,2468251 0,3072391 0,2988584 0,2417732 0,1594688 0,06898894
0,0193896 0,0974181 0,228650 0,396967 0,580454 0,754277 0,893999 0,979212	0,10796 0,22293 0,28203 0,28772 0,25325 0,19464 0,12542 0,053823	0,0204658 0,0995206 0,231233 0,399487 0,582484 0,755591 0,894603 0,979335	0,091193 0,19963 0,26185 0,27380 0,24525 0,19084 0,12399 0,053447

Таблица 5 (продолжение)

$\alpha = \frac{1}{3}$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$n$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0,46647230320700	1,31250000000000	0,50400000000000	1,11111111111111
2	0,20602518633858 0,771894948884836	0,70840898200026 0,60409101799974	0,2311727938478 0,7847500248170	0,563506688078 0,547604423033
3	0,1145290746316 0,4862659779174 0,8797938637866	0,404751206833 0,591426197890 0,316322595277	0,1306458367817 0,5036989776361 0,8850189436936	0,301965461216 0,512849512566 0,296296137329
4	0,072768308340 0,32321723699 0,65896400990 0,92675483650	0,2539703044 0,4616884337 0,4054928947 0,1913483673	0,0837605633758 0,3386204966684 0,6693182745701 0,9293098588799	0,179079171906 0,381722347840 0,367961571865 0,182348019500
5	0,05032553280 0,2281697636 0,4913786438 0,7615164580 0,9509251507	0,171308166 0,350545001 0,379862629 0,283204854 0,127579350	0,05825361783 0,2407973368 0,5027411583 0,7678472209 0,9523484764	0,114999409 0,277251608 0,332316292 0,263705843 0,122837959
6	0,0368917146 0,169026512 0,375057994 0,611569722 0,825256384 0,964898140	0,12199098 0,26872755 0,32808750 0,29660760 0,20612597 0,090960402	0,0428658046 0,179282335 0,385764728 0,619630765 0,829328906 0,965767823	0,078431846 0,20414115 0,27694444 0,26838317 0,19503527 0,088175226
7	0,028215176 0,13001171 0,29375357 0,49371851 0,69660356 0,86698797 0,97367427	0,09055620 0,2097342 0,2764988 0,2795472 0,2322316 0,1558624 0,06806961	0,03287344 0,1384059 0,3033318 0,5021482 0,7023694 0,8697362 0,9742431	0,0560297 0,153607 0,225686 0,245659 0,214768 0,149061 0,0663004
8	0,0222859 0,103016 0,235504 0,403641 0,585826 0,757751 0,895596 0,979537	0,069452 0,16679 0,23193 0,25242 0,23266 0,18475 0,12166 0,052830	0,0260180 0,109971 0,243918 0,411783 0,592354 0,761960 0,897528 0,979928	0,041516 0,11816 0,18348 0,21563 0,21002 0,17344 0,11723 0,051639



Таблица 5 (продолжение)

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = \frac{3}{4}$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0,53710937500000	0,96000000000000	0,55221637866266	0,8979591836735
2	0,25513975456739 0,79629959240308	0,4597950389336 0,5002049610664	0,2666864358904 0,8016427141525	0,418678455987 0,479280727687
3	0,1465033926384 0,5200373850796 0,8898249296142	0,231868767604 0,449592978928 0,278538253468	0,1543206588070 0,5278260169668 0,8920855911452	0,205065993702 0,422495913731 0,270397276240
4	0,0947658240077 0,353383607174 0,679078496577 0,931698175057	0,13024663764 0,31934718464 0,33578277643 0,17412340128	0,100260299557 0,360535895545 0,683750971672 0,932834633121	0,11219715068 0,29410378753 0,32138584411 0,17027240135
5	0,06627811558 0,2530688369 0,5136180727 0,7738579693 0,9536938899	0,0797467552 0,222515190 0,292856130 0,246357489 0,118424436	0,07031662443 0,2590741773 0,5188836091 0,7767505326 0,9543392697	0,0671142206 0,200505373 0,275618318 0,238390730 0,116330542
6	0,0489577563 0,189342826 0,396121508 0,627368712 0,833219828 0,966596574	0,052145198 0,15763528 0,23580164 0,24393715 0,18493033 0,085550404	0,052040566 0,19430002 0,40117360 0,63112230 0,83510079 0,96699645	0,04298729 0,1392985 0,2182387 0,2329302 0,1802105 0,08429401
7	0,03764931 0,1466960 0,3126668 0,5103047 0,7079229 0,8723754 0,9747884	0,0358769 0,114466 0,186001 0,217068 0,199208 0,142762 0,0646183	0,040075802 0,15080115 0,31724566 0,51428444 0,71062348 0,87365605 0,97505272	0,02903405 0,09940133 0,1694292 0,2044418 0,1920595 0,1397854 0,06380798
8	0,0298601 0,116875 0,252166 0,419708 0,598679 0,766026 0,899392 0,980306	0,025698 0,085231 0,14669 0,18537 0,19028 0,16315 0,11308 0,050498	0,03181804 0,1203061 0,2562281 0,4235916 0,6017698 0,7680087 0,9002986 0,9804894	0,0204523 0,0728405 0,131638 0,172255 0,181364 0,158360 0,111103 0,0499463

Таблица 5 (продолжение)

$$\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\alpha = 1$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0,56086005830904	0,8641975308642	0,59259259259259	0,75000000000000
2	0,2734770575100 0,8047221513618	0,396700169332 0,467497361533	0,29963485045502 0,81617666786957	0,3246359748705 0,4253640251295
3	0,1589728154312 0,5323838166039 0,8933995238392	0,191002276345 0,407468730483 0,265726524036	0,1772793380308 0,5497989435884 0,8983598201929	0,146349259074 0,355162712492 0,248488028435
4	0,103551830095 0,364756322424 0,686491262989 0,933499065790	0,10289005194 0,28003963790 0,31322850206 0,16803933896	0,11666141766 0,38112537135 0,69700557840 0,93603378339	0,07421692084 0,2323575099 0,2837819690 0,1596436002
5	0,07274613091 0,2626364016 0,5219896150 0,7784515309 0,9547181600	0,0607034310 0,188597745 0,265971025 0,233817130 0,115108200	0,08249754948 0,2765843628 0,5340297261 0,7850086407 0,9561743467	0,0414884816 0,149226450 0,231900513 0,216926844 0,110457710
6	0,0539005211 0,197251060 0,404165539 0,633338799 0,836209512 0,967231928	0,038406796 0,12955452 0,20852607 0,22667549 0,17747744 0,083557217	0,061406056 0,20888171 0,41584741 0,64194749 0,84050170 0,96814189	0,02501539 0,09808471 0,1749434 0,2039959 0,1672295 0,08073109
7	0,04154288 0,1532513 0,3199651 0,5166417 0,7122203 0,8744124 0,9752087	0,0256565 0,0914958 0,160369 0,197339 0,187955 0,138051 0,0633312	0,04748633 0,1629540 0,3306392 0,5258478 0,7184366 0,8773507 0,9758141	0,0160026 0,0665140 0,129669 0,172043 0,172801 0,131478 0,0614917
8	0,0330037 0,122358 0,258646 0,425897 0,603601 0,769182 0,900835 0,980598	0,017894 0,066413 0,12350 0,16495 0,17629 0,15559 0,10995 0,049621	0,0378217 0,130514 0,268174 0,434941 0,610763 0,773761 0,902925 0,981020	0,010732 0,046509 0,096447 0,13938 0,15783 0,14522 0,10552 0,048359

Таблица 5 (продолжение)

$\alpha = 2$

$\alpha = 3$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0,703125000000	0,444444444444	0,768000000000	0,312500000000
2	0,4091189149805 0,8582756472117	0,153522898038 0,290921546407	0,4910785497177 0,8849942674688	0,0928135307541 0,219686469246
3	0,260963894968 0,620904240201 0,917665273633	0,052601480774 0,20490482554 0,18693813813	0,331815061774 0,673011188721 0,930909120363	0,025872934180 0,13729764617 0,14932941964
4	0,17979234787 0,45222741288 0,7406549031 0,94631995027	0,02050825965 0,1088561577 0,1875937738 0,1274862534	0,23740196803 0,50914381839 0,77345438830 0,9537986623	0,008171565377 0,06213928777 0,1362808127 0,1059083341
5	0,131095712 0,339678338 0,586260972 0,812791542 0,962266588	0,0090070456 0,056777404 0,13004345 0,15682641 0,091790141	0,177737805 0,393270754 0,628083041 0,834283719 0,966892371	0,0029344705 0,027376751 0,082994414 0,12076841 0,078425951
6	0,099729708 0,26301767 0,46812123 0,67960759 0,85901696 0,97203716	0,004360304 0,03062039 0,08275118 0,1291826 0,1285267 0,06900338	0,13786740 0,31099626 0,51194693 0,71014571 0,87371875 0,97509476	0,001176520 0,01250373 0,04591424 0,08942707 0,1032757 0,06020271
7	0,07838585 0,2090811 0,3795161 0,5671020 0,7459068 0,8902185 0,9784519	0,00228352 0,0172552 0,0519423 0,0945671 0,119171 0,105558 0,0536674	0,1099844 0,2512846 0,4219374 0,6017827 0,7685185 0,9006658 0,9805773	0,000517000 0,00600739 0,0250331 0,0581760 0,0876195 0,0875638 0,0475829
8	0,0632207 0,169922 0,312585 0,476229 0,643016 0,794192 0,912195 0,982888	0,0012751 0,010154 0,032958 0,066499 0,096609 0,10656 0,087502 0,042888	0,0897508 0,206880 0,352181 0,511932 0,670340 0,811255 0,919863 0,984425	0,00024520 0,0030384 0,013840 0,036241 0,064224 0,082011 0,074384 0,038514

Таблица 5 (продолжение)

 $\alpha = 4$  $\alpha = 5$ 

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0,81018518518518	0,24000000000000	0,83965014577259	0,19444444444444
2	0,5540220025252 0,9033760735169	0,0640204739454 0,175979526055	0,6036072919418 0,9167629162841	0,0478808255581 0,146563618886
3	0,391587638977 0,712743612547 0,940533517108	0,015207127592 0,10068799887 0,12410487354	0,442281856149 0,743996745769 0,947832691077	0,010011952631 0,078366668276 0,10606582354
4	0,28904479121 0,55562075351 0,79897212580 0,95947118624	0,004044301122 0,04014069126 0,1053364329 0,09047857482	0,3350881952 0,5942309793 0,8193760017 0,9639166299	0,00230841797 0,0281906321 0,0850256194 0,0789197749
5	0,221362624 0,439195062 0,662305672 0,851390389 0,970519572	0,0012252973 0,015383027 0,057783334 0,097199585 0,068408758	0,261686663 0,478900595 0,690816488 0,865322593 0,973437736	0,0006048250 0,0096104232 0,042796860 0,080800491 0,060631845
6	0,17467375 0,35360216 0,54919550 0,73540077 0,88566722 0,97755618	0,000417325 0,006099645 0,02843601 0,06594537 0,08573593 0,05336573	0,20963576 0,39157329 0,58123010 0,75663119 0,89556565 0,97957907	0,0001786682 0,003374324 0,01907061 0,05095570 0,07295847 0,04790667
7	0,1412228 0,2898020 0,4590651 0,6313428 0,7874515 0,9093119 0,9823251	0,000157112 0,00255125 0,0137393 0,0388227 0,0675438 0,0744643 0,0427217	0,171535 0,324955 0,491809 0,656838 0,803534 0,916583 0,983787	0,000058644 0,00124988 0,0082981 0,0275377 0,0539826 0,0645658 0,0387516
8	0,11648 0,24135 0,38765 0,54311 0,69378 0,82572 0,92631 0,98571	0,0000644 0,0011288 0,0067349 0,021780 0,045421 0,065457 0,064474 0,034940	0,142870 0,273411 0,419577 0,570568 0,714122 0,838127 0,931802 0,986803	0,00021083 0,00049094 0,0036584 0,014098 0,033694 0,053755 0,056761 0,031966

Таблица 6. Численное преобразование Лапласа и вычисление интеграла по полосу с весом Чебышева — Лигерра:

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

$$s = 0(1)5; s = -\frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right) \frac{11}{4}; s = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right) \frac{8}{3}.$$

Степень точности  $2n - 1$ . Глава 3, § 2, (3.2.7).

Литература: Айзенштат В. С., Крылов В. И., Метельский А. С. [1]; Rabinowitz P., Weiss G. [1]; Salzer H. and Zucker R. [1].  
 Числа в таблице напечатаны в нормализованном виде. Справа в скобках указана показатель степени десяти, на которую нужно умножить это число:

$$0,10389\ 25650\ 16(-1) = 0,01038\ 92565\ 016.$$

Показатель, равный нулю, опущен.

n	k	$x_k$	$A_k$
$s = 0$			
1	1	1,00000 0000000	1,00000 00000 00
2	1	0,58578 6437627	0,85355 33905 93
	2	3,41421 3562373	0,14644 66094 07
3	1	0,41577 4556783	0,71109 30099 29
	2	2,29428 0360279	0,27851 77335 69
	3	6,28994 5082937	0,10389 25650 16(-1)
4	1	0,32254 76896193 92 312	0,60315 41043 41633 602
	2	1,74576 11011583 46 58	0,35741 86924 37799 687
	3	4,53662 02969211 27 98	0,38887 90851 50053 843(-1)
	4	9,39507 09123011 33 13	0,53929 47055 61327 450(-3)
5	1	0,26356 0319718	0,52175 56105 83
	2	1,41340 3059107	0,39866 68110 83
	3	3,59642 5771041	0,75942 44968 17(-1)
	4	7,08581 0005859	0,36117 58679 92(-2)
	5	12,64080 0844276	0,23369 97238 58(-4)
6	1	0,22284 6604179	0,45896 46739 50
	2	1,18893 2101673	0,41700 08307 72
	3	2,93273 6326059	0,11337 33820 74
	4	5,77514 3569105	0,10399 19745 31(-1)
	5	9,83746 7418383	0,26101 72028 15(-3)
	6	15,98287 3980602	0,89854 79064 30(-6)
7	1	0,19304 3676560	0,40931 89517 01
	2	1,02666 4895339	0,42183 12778 62

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$
$s = 0$			
7	3	2, 56787 67449 51	0, 14712 63486 58
	4	4, 90035 30845 26	0, 20633 51446 87 (-1)
	5	8, 18215 34445 63	0, 10740 10143 28 (-2)
	6	12, 73418 02917 98	0, 15865 46434 86 (-4)
	7	19, 39572 78622 63	0, 31703 15479 00 (-7)
8	1	0, 17027 96323 05101 000	0, 36918 85893 41637 530
	2	0, 90370 17767 99379 912	0, 41878 67808 14342 956
	3	2, 25108 66298 66130 69	0, 17579 49866 37171 806
	4	4, 26670 01702 87658 79	0, 33343 49226 12156 515 (-1)
	5	7, 04590 54023 93465 70	0, 27945 36235 22567 252 (-2)
	6	10, 75851 60101 80995 2	0, 90705 08773 35821 310 (-4)
	7	15, 74067 86412 78004 6	0, 84857 46716 27253 154 (-6)
	8	22, 86313 17368 89264 1	0, 10480 01174 87151 038 (-8)
9	1	0, 15232 22277 32	0, 33612 64217 98
	2	0, 80722 00227 42	0, 41121 39804 24
	3	2, 00513 51556 19	0, 19928 75253 71
	4	3, 78347 39733 31	0, 47460 56276 57 (-1)
	5	6, 20495 67778 77	0, 55996 26610 79 (-2)
	6	9, 37298 52516 88	0, 30524 97670 93 (-3)
	7	13, 46623 69110 92	0, 65921 23026 08 (-5)
	8	18, 83359 77889 92	0, 41107 69330 35 (-7)
	9	26, 37407 18909 27	0, 32908 74030 35 (-10)
10	1	0, 13779 34705 40	0, 30844 11157 65
	2	0, 72945 45495 03	0, 40111 99291 55
	3	1, 80834 29017 40	0, 21806 82876 12
	4	3, 40143 36978 55	0, 62087 45609 87 (-1)
	5	5, 55249 61400 64	0, 95015 16975 18 (-2)
	6	8, 33015 27467 64	0, 75300 83885 88 (-3)
	7	11, 84378 58379 00	0, 28259 23349 60 (-4)
	8	16, 27925 78313 78	0, 42493 13984 96 (-6)
	9	21, 99658 58119 81	0, 18395 64823 98 (-8)
	10	29, 92069 70122 74	0, 99118 27219 61 (-12)
11	1	0, 12579 64421 88	0, 28493 32128 94
	2	0, 66541 82558 39	0, 38972 08895 28
	3	1, 64715 05458 72	0, 23278 18318 49
	4	3, 09113 81430 35	0, 76564 45354 62 (-1)
	5	5, 02928 44015 80	0, 14393 28276 74 (-1)
	6	7, 50988 78638 07	0, 15188 80846 48 (-2)
	7	10, 60595 09995 47	0, 85131 22435 47 (-4)
	8	14, 43161 37580 64	0, 22924 03879 57 (-5)
	9	19, 17885 74032 15	0, 24863 53702 77 (-7)
	10	25, 21770 93396 78	0, 77126 26933 69 (-10)
	11	33, 49719 28471 76	0, 28837 75868 32 (-13)

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$
$s = 0$			
12	1	0, 11572 21173 58020 675	0, 26473 13710 55443 190
	2	0, 61175 74845 15130 665	0, 37775 92758 73137 982
	3	1, 51261 02697 76418 79	0, 24408 20113 19877 564
	4	2, 83375 13377 43507 23	0, 90449 22221 16809 307 (-1)
	5	4, 59922 76394 18348 48	0, 20102 38115 46340 965 (-1)
	6	6, 84452 54531 15177 35	0, 26639 73541 86531 588 (-2)
	7	9, 62131 68424 56867 04	0, 20323 15926 62999 392 (-3)
	8	13, 00605 49933 06347 7	0, 83650 55856 81979 875 (-5)
	9	17, 11685 51874 62255 7	0, 16684 93876 54091 026 (-6)
	10	22, 15109 03793 97005 7	0, 13423 91030 51500 415 (-8)
	11	28, 48796 72509 84000 3	0, 30616 01635 03502 078 (-11)
	12	37, 09912 10444 66920 3	0, 81480 77467 42624 168 (-15)
13	1	0, 10714 23884 72	0, 24718 87084 30
	2	0, 56613 18990 40	0, 36568 88229 01
	3	1, 39856 43364 51	0, 25256 24200 58
	4	2, 61699 71084 06	0, 10347 07580 24
	5	4, 23884 59290 17	0, 26432 75441 56 (-1)
	6	6, 29225 62711 40	0, 42203 96040 27 (-2)
	7	8, 81500 19411 87	0, 41188 17704 73 (-3)
	8	11, 86140 35888 11	0, 23515 47398 15 (-4)
	9	15, 51076 20377 04	0, 73173 11620 25 (-6)
	10	19, 88463 56638 80	0, 11088 41625 70 (-7)
	11	25, 18526 38646 78	0, 67708 26692 21 (-10)
	12	31, 80038 63019 47	0, 11599 79959 91 (-12)
	13	40, 72300 86692 66	0, 22450 93203 89 (-16)
14	1	0, 09974 75070 33	0, 23181 55771 45
	2	0, 52685 76488 52	0, 35378 46915 98
	3	1, 30062 91212 51	0, 25873 46102 45
	4	2, 43080 10787 31	0, 11548 28935 57
	5	3, 93210 28222 93	0, 33192 09215 93 (-1)
	6	5, 82553 62183 02	0, 61928 69437 01 (-2)
	7	8, 14024 01415 65	0, 73989 03778 67 (-3)
	8	10, 91649 95073 66	0, 54907 19466 84 (-4)
	9	14, 21080 50111 61	0, 24095 85764 09 (-5)
	10	18, 10489 22202 18	0, 58015 43981 68 (-7)
	11	22, 72338 16282 69	0, 68193 14692 49 (-9)
	12	28, 27298 17232 48	0, 32212 07751 89 (-11)
	13	35, 14944 36605 92	0, 42213 52440 52 (-14)
	14	44, 36608 17111 17	0, 60923 75022 29 (-18)
15	1	0, 09330 78120 17	0, 21823 48859 40
	2	0, 49269 17403 02	0, 34221 01779 23
	3	1, 21559 54120 71	0, 26302 75779 42
	4	2, 26994 95262 04	0, 12642 58181 06
	5	3, 66762 27217 51	0, 40206 85492 10 (-1)
	6	5, 42533 66274 14	0, 85638 77803 61 (-2)

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	
		$s=0$		
15	7	7, 56591 62266 13	0, 12124 36147 21 (-2)	
	8	10, 12022 85680 19	0, 11167 43923 44 (-3)	
	9	13, 13028 24821 76	0, 64599 26762 02 (-5)	
	10	16, 65440 77083 30	0, 22263 16907 10 (-6)	
	11	20, 77647 88994 49	0, 42274 30384 98 (-8)	
	12	25, 62389 42267 29	0, 39218 97267 04 (-10)	
	13	31, 40751 91697 54	0, 14565 15264 07 (-12)	
	14	38, 53068 33064 86	0, 14830 27051 11 (-15)	
	15	48, 02608 55726 86	0, 16005 94906 21 (-19)	
	16	1	0, 08764 94104 78927 8403	0, 20615 17149 57800 994
		2	0, 46269 63289 15080 832	0, 33105 78549 50884 166
		3	1, 14105 77748 31226 86	0, 26579 75776 44214 153
		4	2, 12928 36450 98380 62	0, 13629 69342 96377 540
		5	3, 43708 66338 93206 65	0, 47328 92869 41252 190 (-1)
		6	5, 07801 86145 49767 91	0, 11299 90008 03394 532 (-1)
7		7, 07033 85350 48234 13	0, 18490 70943 52631 086 (-2)	
8		9, 43831 43363 91938 78	0, 20427 19153 08278 460 (-3)	
9		12, 21422 33688 66158 7	0, 14844 58687 39812 988 (-4)	
10		15, 44152 73687 81617 1	0, 68283 19330 87119 956 (-6)	
11		19, 18015 68567 53134 9	0, 18810 24841 07967 321 (-7)	
12		23, 51590 56939 91908 5	0, 28623 50242 97388 162 (-9)	
13		28, 57872 97428 82140 4	0, 21270 79233 22410 297 (-11)	
14		34, 58339 87022 86625 8	0, 62979 67002 51785 779 (-14)	
15		41, 94045 26476 88332 6	0, 50504 73700 03551 282 (-17)	
16		51, 70116 03395 43318 4	0, 41614 62370 37285 519 (-21)	
20	1	0, 07053 98896 91988 7534	0, 16874 68018 51113 862	
	2	0, 37212 68180 01611 444	0, 29125 43620 06068 282	
	3	0, 91658 21024 83273 565	0, 26668 61028 67001 289	
	4	1, 70730 65310 28343 88	0, 16600 24532 69506 840	
	5	2, 74919 92553 09432 13	0, 74826 06466 87923 705 (-1)	
	6	4, 04892 53138 50886 92	0, 24964 41730 92832 211 (-1)	
	7	5, 61517 49708 61616 51	0, 62025 50844 57223 685 (-2)	
	8	7, 45901 74536 71063 31	0, 11449 62386 47690 824 (-2)	
	9	9, 59439 28695 81096 77	0, 15574 17730 27811 975 (-3)	
	10	12, 03880 25469 64316 3	0, 15401 44086 52249 157 (-4)	
	11	14, 81429 34426 30740 0	0, 10864 86366 51798 235 (-5)	
	12	17, 94889 55205 19376 0	0, 53301 20909 55671 475 (-7)	
	13	21, 47878 82402 85011 0	0, 17579 81179 05058 200 (-8)	
	14	25, 45170 27931 86905 5	0, 37255 02402 51232 087 (-10)	
	15	29, 93255 46317 00612 0	0, 47675 29251 57819 052 (-12)	
	16	35, 01343 42404 79000 0	0, 33728 44243 36243 841 (-14)	
	17	40, 83305 70567 28571 1	0, 11550 14339 50039 883 (-16)	
	18	47, 61999 40473 46502 1	0, 15395 22140 58234 355 (-19)	
	19	55, 81079 57500 63898 9	0, 52864 42725 56915 783 (-23)	
20	66, 52441 65256 15753 8	0, 16564 56612 49902 330 (-27)		



Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$
$s = 0$			
24	1	0, 05901 98521 81507 9770	0, 14281 19733 34781 851
	2	0, 31123 91461 98483 727	0, 25877 41075 17423 903
	3	0, 76609 69055 45936 646	0, 25880 67072 72869 802
	4	1, 42559 75908 03613 09	0, 18332 26889 77778 025
	5	2, 29256 20586 32190 29	0, 98166 27262 99188 922 (-1)
	6	3, 37077 42642 08997 72	0, 40732 47815 14086 460 (-1)
	7	4, 66508 37934 67170 79	0, 13226 01940 51201 567 (-1)
	8	6, 18153 51187 36765 41	0, 33693 49058 47830 355 (-2)
	9	7, 92753 92471 72152 18	0, 67216 25640 93547 890 (-3)
	10	9, 91209 80150 77706 02	0, 10446 12146 59275 180 (-3)
	11	12, 14610 27117 29765 6	0, 12544 72197 79933 332 (-4)
	12	14, 64273 22895 96674 3	0, 11513 15812 73727 992 (-5)
	13	17, 41799 26465 08978 7	0, 79608 12959 13363 026 (-7)
	14	20, 49146 00826 16424 7	0, 40728 58987 54999 966 (-8)
	15	23, 88732 98481 69733 2	0, 15070 08226 29258 492 (-9)
	16	27, 63593 71743 32717 4	0, 39177 36515 05845 138 (-11)
	17	31, 77604 13523 74723 3	0, 68941 81052 95808 569 (-13)
	18	36, 35840 58016 51621 7	0, 78198 00782 45944 847 (-15)
	19	41, 45172 04848 70767 0	0, 53501 88813 01003 760 (-17)
	20	47, 15310 64451 56323 0	0, 20105 17464 55550 347 (-19)
	21	53, 60857 45446 95069 8	0, 36057 65864 55295 904 (-22)
	22	61, 05853 14472 18761 6	0, 24518 18845 87840 269 (-25)
	23	69, 96224 00351 05030 4	0, 40883 01593 68065 782 (-29)
	24	81, 49827 92339 48885 4	0, 55753 45788 32835 675 (-33)
28	1	0, 05073 46248 49873 8876	0, 12377 88439 54286 428
	2	0, 26748 72686 40741 084	0, 23227 92769 00901 161
	3	0, 65813 66283 54791 519	0, 24751 18960 36477 212
	4	1, 22397 18083 84907 72	0, 19230 71131 32382 827
	5	1, 96676 76124 73777 70	0, 11640 53617 21130 006
	6	2, 88888 33260 30321 89	0, 56345 90536 44773 065 (-1)
	7	3, 99331 16592 50114 14	0, 22066 36432 62588 079 (-1)
	8	5, 28373 60628 43442 56	0, 70258 87635 58386 773 (-2)
	9	6, 76460 34042 43505 15	0, 18206 07892 69585 487 (-2)
	10	8, 44121 63282 71324 49	0, 38334 43038 57123 177 (-3)
	11	10, 31985 04629 93260 1	0, 65350 87080 69439 831 (-4)
	12	12, 40790 34144 60671 7	0, 89713 62053 41076 834 (-5)
	13	14, 71408 51641 35748 8	0, 98470 12256 24928 887 (-6)
	14	17, 24866 34156 08056 3	0, 85640 75852 67304 245 (-7)
	15	20, 02378 33299 51712 7	0, 58368 38763 13834 429 (-8)
	16	23, 05389 01350 30296 0	0, 30756 38877 84230 228 (-9)
	17	26, 35629 73744 01317 6	0, 12325 90952 72442 282 (-10)
	18	29, 95196 68335 96182 1	0, 36821 73674 10831 200 (-12)
	19	33, 86660 55165 84459 2	0, 79987 90575 96890 965 (-14)
	20	38, 13225 44101 94646 8	0, 12249 22500 32408 341 (-15)
	21	42, 78967 23707 72576 3	0, 12711 24295 03067 374 (-17)
	22	47, 89207 16336 22743 7	0, 84885 93367 68654 320 (-20)

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$
$s = 0$			
28	23	53, 51129 79596 64294 2	0, 34024 55379 42551 185 (-22)
	24	59, 74879 60846 41240 8	0, 74201 56588 86748 513 (-25)
	25	66, 75697 72839 06469 6	0, 76004 13205 80173 769 (-28)
	26	74, 78677 81523 39161 8	0, 28739 10317 94039 581 (-31)
	27	84, 31783 71072 27043 1	0, 25418 22903 88931 800 (-35)
	28	96, 58242 06275 27319 1	0, 16613 75878 02903 396 (-40)
	1	0, 04448 93658 33267 0184	0, 10921 83419 52384 971
	2	0, 23452 61095 19618 537	0, 21044 31079 38813 234
3	0, 57688 46293 01886 426	0, 23521 32296 69848 005	
4	1, 07244 87538 17817 63	0, 19590 33359 72881 043	
5	1, 72240 87764 44645 44	0, 12998 37862 86071 761	
6	2, 52833 67064 25794 88	0, 70578 62386 57174 415 (-1)	
7	3, 49221 32730 21994 49	0, 31760 91250 91750 703 (-1)	
8	4, 61645 67697 49767 39	0, 11918 21483 48385 571 (-1)	
9	5, 90395 85041 74243 95	0, 37388 16294 61152 479 (-2)	
10	7, 35812 67331 86241 11	0, 98080 33066 14955 132 (-3)	
11	8, 98294 03242 12596 10	0, 21486 49188 01364 188 (-3)	
12	10, 78301 86325 39972 1	0, 39203 41967 98794 720 (-4)	
13	12, 76369 79867 42725 1	0, 59345 41612 86863 288 (-5)	
14	14, 93113 97555 22557 3	0, 74164 04578 66755 222 (-6)	
15	17, 29245 43367 15314 8	0, 76045 67879 12078 148 (-7)	
16	19, 85586 03403 36054 7	0, 63506 02226 62580 674 (-8)	
17	22, 63088 90131 96774 5	0, 42813 82971 04092 888 (-9)	
18	25, 62863 60224 59247 8	0, 23058 99491 89133 608 (-10)	
19	28, 86210 18163 23474 7	0, 97993 79288 72709 406 (-12)	
20	32, 34662 91539 64737 0	0, 32378 01657 72926 646 (-13)	
21	36, 10049 48057 51973 8	0, 81718 23443 42071 943 (-15)	
22	40, 14571 97715 39441 5	0, 15421 33833 39382 337 (-16)	
23	44, 50920 79957 54938 0	0, 21197 92290 16361 861 (-18)	
24	49, 22439 49873 08639 2	0, 20544 29673 78804 543 (-20)	
25	54, 33372 13333 96907 3	0, 13469 82586 63739 516 (-22)	
26	59, 89250 91621 34018 2	0, 56612 94130 39735 937 (-25)	
27	65, 97537 72879 35052 8	0, 14185 60545 46303 691 (-27)	
28	72, 68762 80906 62708 6	0, 19133 75494 45422 431 (-30)	
29	80, 18744 69779 13523 1	0, 11922 48760 09822 236 (-33)	
30	88, 73534 04178 92398 7	0, 26715 11219 24013 699 (-37)	
31	98, 82954 28682 83972 6	0, 13386 16942 10625 628 (-41)	
32	111, 75139 80979 37695	0, 45105 36193 89897 424 (-47)	
$s = 1$			
1	1	0, 20000 000 (+1)	0, 10000 000 (+1)
2	1	0, 12679 492 (+1)	0, 78867 513
	2	47 320 508 (+1)	211 32 486

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$
$s = 1$			
3	1	0, 93582 223	0, 58868 148
	2	33054 073 (+1)	39121 606
	3	77587 705 (+1)	20102 460 (-1)
4	1	0, 74329 19279 81431 435	0, 44687 05932 18776 310
	2	25716 35007 64627 847 (+1)	47763 57723 63068 313
	3	57311 78751 68909 963 (+1)	74177 78473 10521 364 (-1)
	4	10953 89431 26831 905 (+2)	13158 49686 30324 014 (-2)
5	1	0, 61703 085	0, 34801 454
	2	21129 660 (+1)	50228 067
	3	46108 332 (+1)	14091 592
	4	83990 670 (+1)	87198 930 (-2)
	5	14260 103 (+2)	68973 324 (-4)
6	1	0, 52766 812	0, 27765 014
	2	17962 998 (+1)	49391 058
	3	38766 415 (+1)	20300 430
	4	69188 166 (+1)	24668 820 (-1)
	5	11234 610 (+2)	76304 277 (-3)
	6	17645 964 (+2)	31150 394 (-5)
7	1	0, 46102 422	0, 22621 060
	2	15635 862 (+1)	46970 871
	3	33520 505 (+1)	25312 252
	4	59162 972 (+1)	47803 109 (-1)
	5	94206 994 (+1)	31004 598 (-2)
	6	14194 166 (+2)	54484 669 (-4)
	7	21092 177 (+2)	12633 399 (-6)
8	1	0, 40938 35732 03185 153	0, 18763 25414 05723 668
	2	13849 63184 80313 988 (+1)	43898 53607 31142 368
	3	29562 54550 16886 207 (+1)	28999 60707 81313 351
	4	51819 43101 04007 138 (+1)	75141 38461 66973 434 (-1)
	5	81617 09688 14581 733 (+1)	79326 46648 70734 492 (-2)
	6	12070 05512 68371 548 (+2)	30864 21368 13304 225 (-3)
	7	17249 73552 61489 875 (+2)	33489 58209 79709 614 (-5)
	8	24585 95524 36527 819 (+2)	47213 92823 19322 132 (-8)
9	1	0, 36817 845	0, 15803 092
	2	12433 580 (+1)	40658 258
	3	26460 338 (+1)	31498 248
	4	46168 825 (+1)	10377 552
	5	72217 865 (+1)	15577 638 (-1)
	6	10567 321 (+2)	10248 720 (-2)
	7	14835 914 (+2)	25800 211 (-4)
	8	20382 182 (+2)	18335 596 (-6)
	9	28118 343 (+2)	16543 295 (-9)

Таблица 6 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$
$s = 1$			
10	1	0, 33452 868	0, 13485 655
	2	11282 534 (+1)	37492 434
	3	23958 699 (+1)	33024 713
	4	41668 410 (+1)	13152 888
	5	64873 530 (+1)	25842 064 (-1)
	6	94283 548 (+1)	24896 458 (-2)
	7	13101 724 (+2)	10948 848 (-3)
	8	17696 488 (+2)	18812 754 (-5)
	9	23577 787 (+2)	91526 850 (-8)
	10	31682 801 (+2)	55013 035 (-11)
11	1	0, 30652 670	0, 11639 267
	2	10327 974 (+1)	34514 542
	3	21896 119 (+1)	33795 700
	4	37990 476 (+1)	15702 451
	5	58949 112 (+1)	38209 576 (-1)
	6	85272 920 (+1)	49347 805 (-2)
	7	11771 007 (+2)	32585 242 (-3)
	8	15742 260 (+2)	10064 157 (-4)
	9	20635 806 (+2)	12285 169 (-6)
	10	26826 350 (+2)	42355 352 (-9)
	11	35274 391 (+2)	17517 730 (-12)
12	1	0, 28285 83482 39914 112	0, 10145 37656 65592 267
	2	95232 60413 64613 503	31769 94833 62918 101
	3	20164 92138 57768 073 (+1)	33998 62713 74452 795
	4	34923 54069 77802 504 (+1)	17953 25994 39199 819
	5	54054 91020 01572 284 (+1)	52031 93903 53283 915 (-1)
	6	77928 13940 41241 498 (+1)	84916 17435 76890 271 (-2)
	7	10707 38868 89890 908 (+2)	76713 57972 78597 991 (-3)
	8	14227 15236 37899 807 (+2)	36362 09120 38435 440 (-4)
	9	18471 99663 42299 991 (+2)	81845 67007 79946 096 (-6)
	10	23641 78375 24008 953 (+2)	73231 54100 40323 253 (-8)
	11	30120 05862 61063 443 (+2)	18397 02434 42130 593 (-10)
	12	38889 28437 60953 185 (+2)	53776 28522 27037 045 (-14)
13	1	0, 26258 840	0, 89202 112 (-1)
	2	88355 031	29268 595
	3	18690 338 (+1)	33785 055
	4	32324 187 (+1)	19877 889
	5	49935 756 (+1)	66663 419 (-1)
	6	71806 105 (+1)	13183 398 (-1)
	7	98328 082 (+1)	15310 004 (-2)
	8	13005 622 (+2)	10106 220 (-3)
	9	16779 614 (+2)	35596 325 (-5)
	10	21277 912 (+2)	60101 473 (-7)
	11	26705 034 (+2)	40422 643 (-9)
	12	33452 785 (+2)	75713 768 (-12)
	13	42524 448 (+2)	15998 517 (-15)

Таблица 6 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$
$s = 1$			
14	1	0, 24503 301	0, 79033 183 (-1)
	2	82408 222	27002 626
	3	17418 724 (+1)	33273 198
	4	30091 325 (+1)	21478 092
	5	46416 341 (+1)	81535 558 (-1)
	6	66613 415 (+1)	18941 947 (-1)
	7	90983 027 (+1)	27052 168 (-2)
	8	11993 703 (+2)	23300 626 (-3)
	9	15404 988 (+2)	11610 820 (-4)
	10	19414 993 (+2)	31220 597 (-6)
	11	24149 758 (+2)	40472 473 (-8)
	12	29818 105 (+2)	20891 176 (-10)
	13	36819 624 (+2)	29744 615 (-13)
	14	46177 430 (+2)	46317 821 (-17)
15	1	0, 22968 050	0, 70502 429 (-1)
	2	77214 491	24955 891
	3	16310 531 (+1)	32553 312
	4	28151 446 (+1)	22772 709
	5	43371 641 (+1)	96188 058 (-1)
	6	62146 428 (+1)	25634 285 (-1)
	7	84711 640 (+1)	43566 472 (-2)
	8	11138 332 (+2)	46745 577 (-3)
	9	14258 910 (+2)	30799 238 (-4)
	10	17892 053 (+2)	11883 905 (-5)
	11	22122 620 (+2)	24931 356 (-7)
	12	27079 312 (+2)	25295 606 (-9)
	13	32974 974 (+2)	10197 777 (-11)
	14	40216 584 (+2)	11220 705 (-14)
15	49846 222 (+2)	13093 371 (-18)	
16	1	0, 21614 03052 39452 255	0, 63277 33287 95394 308 (-1)
	2	72638 82432 51803 954	23109 04615 20719 732
	3	15335 93160 37354 132 (+1)	31693 35421 63999 097
	4	26449 70998 61191 096 (+1)	23789 42178 75244 607
	5	40709 78160 88019 065 (+1)	11027 27433 59247 882
	6	58258 55515 10560 455 (+1)	33089 58835 63969 837 (-1)
	7	79285 04185 30666 709 (+1)	65257 16407 79246 630 (-2)
	8	10403 80828 99510 393 (+2)	84271 14367 92047 207 (-3)
	9	13284 66107 07070 382 (+2)	69961 90955 56818 742 (-4)
	10	16615 17321 68666 126 (+2)	36120 86042 13355 474 (-5)
	11	20456 00602 00272 169 (+2)	11015 41251 47424 469 (-6)
	12	24893 84702 53519 108 (+2)	18356 82512 73250 421 (-8)
	13	30059 86292 02025 761 (+2)	14814 88865 88507 814 (-10)
	14	36170 69454 36791 780 (+2)	47348 45359 03961 320 (-13)
	15	43640 36518 41768 370 (+2)	40841 46055 00225 599 (-16)
	16	53529 15116 02684 204 (+2)	36239 54962 47891 406 (-20)

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$
$s = 2$			
1	1	0,30000 000 (+1)	0,20000 000 (+1)
2	1	0,20000 000 (+1)	0,15000 000 (+1)
	2	60000 000 (+1)	50000 000
3	1	0,15173 871 (+1)	0,10374 950 (+1)
	2	43115 831 (+1)	90575 000
	3	91710 298 (+1)	56755 034 (-1)
4	1	0,12267 63263 50030 207 (+1)	0,72552 49976 98654 378
	2	34125 07358 69694 597 (+1)	19634 24291 97919 458 (+1)
	3	69026 92605 85161 340 (+1)	20669 61310 28353 551
	4	12458 03677 19511 386 (+2)	43545 79293 79748 887 (-2)
5	1	0,10311 091 (+1)	0,52091 740
	2	28372 128 (+1)	10667 059 (+1)
	3	56202 943 (+1)	38354 972
	4	96829 098 (+1)	28564 234 (-1)
	5	15828 474 (+2)	26271 281 (-3)
6	1	0,88994 101	0,38435 381
	2	24331 442 (+1)	99712 747
	3	47662 036 (+1)	53608 620
	4	80482 548 (+1)	79539 526 (-1)
	5	12600 414 (+2)	28795 492 (-2)
	6	19262 043 (+2)	13445 266 (-4)
7	1	0,78309 609	0,29073 679
	2	21322 372 (+1)	90054 794
	3	41483 646 (+1)	64597 358
	4	69277 904 (+1)	15094 427
	5	10640 516 (+2)	11563 774 (-1)
	6	15622 748 (+2)	23303 741 (-3)
	7	22745 247 (+2)	61001 655 (-6)
8	1	0,69933 03922 97772 446	0,22479 77519 04342 970
	2	18988 16495 33754 637 (+1)	79953 09589 02891 337
	3	36776 14768 34163 509 (+1)	71367 06091 57191 155
	4	60092 94548 16086 345 (+1)	23154 11459 90131 662
	5	92674 25813 28238 619 (+1)	29135 78673 05206 514 (-1)
	6	13360 73827 22601 106 (+2)	13077 00147 57761 649 (-2)
	7	18728 13866 88430 816 (+2)	16021 93395 06628 624 (-4)
	8	26268 64104 14766 043 (+2)	25233 39394 42792 311 (-7)
9	1	0,63185 377	0,17717 476
	2	17121 632 (+1)	70415 796
	3	33056 695 (+1)	74674 396
	4	54569 100 (+1)	31132 996

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$
$s = 2$			
9	5	82346 594 (+1)	56178 866 (-1)
	6	11748 347 (+2)	42910 855 (-2)
	7	16183 854 (+2)	12243 864 (-3)
	8	21901 207 (+2)	97067 806 (-6)
	9	29825 336 (+2)	96992 881 (-9)
10	1	0,57631 386	0,14199 694
	2	15593 435 (+1)	61827 938
	3	30037 104 (+1)	75400 180
	4	49420 191 (+1)	38360 984
	5	74227 071 (+1)	91310 422 (-1)
	6	10518 820 (+2)	10277 048 (-1)
	7	14344 515 (+2)	51462 655 (-3)
	8	19091 780 (+2)	98872 263 (-5)
	9	25130 648 (+2)	53139 920 (-7)
	10	33410 144 (+2)	35117 503 (-10)
11	1	0,52978 806	0,11548 618
	2	14318 342 (+1)	54277 598
	3	27533 242 (+1)	74320 516
	4	45189 499 (+1)	44484 550
	5	67643 255 (+1)	13207 462
	6	95411 625 (+1)	20045 157 (-1)
	7	12925 930 (+2)	15142 344 (-2)
	8	17036 750 (+2)	52467 333 (-4)
	9	22070 999 (+2)	70844 653 (-6)
	10	28407 887 (+2)	26767 360 (-8)
	11	37019 050 (+2)	12097 082 (-11)
12	1	0,49023 91091 77454 061	0,95148 22514 59639 793 (-1)
	2	13237 76455 78306 233 (+1)	47719 66532 62217 159
	3	25421 32235 23224 643 (+1)	72046 69025 76669 237
	4	41645 19353 24397 066 (+1)	49382 66097 35938 395
	5	62180 01630 77006 985 (+1)	17575 73347 69862 195
	6	87407 89524 92664 456 (+1)	33892 93005 94179 609 (-1)
	7	11787 21811 54281 359 (+2)	35188 24188 47753 131 (-2)
	8	15436 59486 00615 973 (+2)	18778 74748 19631 979 (-3)
	9	19810 48154 33429 476 (+2)	46866 80214 45018 989 (-5)
	10	25111 11947 68538 770 (+2)	45980 63600 65300 972 (-7)
	11	31726 24950 17079 404 (+2)	12574 35028 85190 380 (-9)
	12	40648 87819 34720 538 (+2)	39950 86633 46059 607 (-13)
13	1	0,45620 244	0,79296 491 (-1)
	2	12310 026 (+1)	42056 270
	3	23614 752 (+1)	69032 403
	4	38629 057 (+1)	53080 819
	5	57564 060 (+1)	21990 137
	6	80711 492 (+1)	51647 487 (-1)

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$
			$s = 2$
13	7	10847 434 (+2)	69227 891 (-2)
	8	14141 756 (+2)	51634 306 (-3)
	9	18035 855 (+2)	20220 898 (-4)
	10	22654 354 (+2)	37499 301 (-6)
	11	28203 961 (+2)	27454 580 (-8)
	12	35080 428 (+2)	55661 474 (-11)
	13	44297 071 (+2)	12724 684 (-14)
14	1	0, 42659 766	0, 66765 140 (-1)
	2	11504 636 (+1)	37175 234
	3	22050 990 (+1)	65602 004
	4	36028 926 (+1)	55684 941
	5	53606 691 (+1)	26254 493
	6	75012 854 (+1)	72778 717 (-1)
	7	10055 621 (+2)	12045 727 (-1)
	8	13065 691 (+2)	11763 752 (-2)
	9	16589 827 (+2)	65361 000 (-4)
	10	20711 907 (+2)	19344 638 (-5)
	11	25559 329 (+2)	27329 776 (-7)
	12	31342 958 (+2)	15262 780 (-9)
	13	38466 127 (+2)	23406 838 (-12)
	14	47961 533 (+2)	39273 777 (-16)
15	1	0, 40061 007	0, 56731 961 (-1)
	2	10798 754 (+1)	32967 586
	3	20683 655 (+1)	61980 942
	4	33762 816 (+1)	57336 923
	5	50172 724 (+1)	30227 499
	6	70096 268 (+1)	96541 832 (-1)
	7	93776 245 (+1)	19087 744 (-1)
	8	12153 548 (+2)	23298 443 (-2)
	9	15380 863 (+2)	17164 160 (-3)
	10	19119 500 (+2)	73061 935 (-5)
	11	23455 255 (+2)	16731 846 (-6)
	12	28518 084 (+2)	18380 736 (-8)
	13	34522 756 (+2)	79753 210 (-11)
	14	41879 813 (+2)	94118 940 (-14)
	15	51640 524 (+2)	11791 293 (-17)
16	1	0, 37761 35083 44740 734	0, 48606 40946 70787 025 (-1)
	2	10174 91957 60256 570 (+1)	29334 73901 90440 231
	3	19477 58020 42424 383 (+1)	58321 93633 83550 989
	4	31769 27244 88986 868 (+1)	58187 41485 96173 479
	5	47162 40069 79179 562 (+1)	33818 05374 73790 217
	6	65805 88265 77491 250 (+1)	12210 59639 44979 891
	7	87894 65270 64707 413 (+1)	28114 62580 06637 302 (-1)
	8	11368 22308 28333 189 (+2)	41431 49192 48225 670 (-2)
	9	14350 62672 74370 444 (+2)	38564 85337 67433 300 (-3)



Таблица 6 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$
$s = 2$			
16	10	17781 09572 48416 460 (+2)	22015 80056 31090 712 (-4)
	11	21721 08479 65713 089 (+2)	73423 62438 15651 751 (-6)
	12	26258 13867 51110 680 (+2)	13264 60442 04804 137 (-7)
	13	31524 59600 42758 187 (+2)	11526 66482 90842 947 (-9)
	14	37738 92100 25289 391 (+2)	39470 69151 24608 697 (-12)
	15	45318 54611 00898 426 (+2)	36379 78256 36053 360 (-15)
16	55332 58353 88358 122 (+2)	34545 76123 13612 400 (-19)	
$s = 3$			
1	1	0, 40000 000 (+1)	0, 60000 000 (+1)
2	1	0, 27639 320 (+1)	0, 43416 408 (+1)
	2	72360 680 (+1)	16583 592 (+1)
3	1	0, 21412 163 (+1)	0, 28363 282 (+1)
	2	53155 171 (+1)	29512 943 (+1)
	3	10543 267 (+2)	21237 748
4	1	0, 17555 21647 18549 145 (+1)	0, 18603 34074 14649 995 (+1)
	2	42656 05865 65682 345 (+1)	33568 91019 02892 032 (+1)
	3	80579 40683 13800 185 (+1)	76445 39728 43517 610
	4	13920 93180 40196 832 (+2)	18320 93398 10621 145 (-1)
5	1	0, 14905 549 (+1)	0, 12509 836 (+1)
	2	35813 338 (+1)	32385 572 (+1)
	3	66269 963 (+1)	13901 852 (+1)
	4	10944 418 (+2)	11904 117
	5	17356 697 (+2)	12327 808 (-2)
6	1	0, 12964 192 (+1)	0, 86531 349
	2	30939 984 (+1)	29012 751 (+1)
	3	56612 852 (+1)	18931 453 (+1)
	4	91670 973 (+1)	32680 188
	5	13941 345 (+2)	13394 415 (-1)
	6	20839 854 (+2)	69772 782 (-4)
7	1	0, 11477 001 (+1)	0, 61485 362
	2	27270 835 (+1)	25074 087 (+1)
	3	49554 687 (+1)	22145 624 (+1)
	4	79364 826 (+1)	60876 509
	5	11845 514 (+2)	53207 851 (-1)
	6	17025 619 (+2)	11989 285 (-2)
	7	24362 132 (+2)	34733 327 (-5)
8	1	0, 10299 61687 35087 822 (+1)	0, 44765 92686 88580 562
	2	24399 14234 01425 973 (+1)	21295 75153 66677 356 (+1)
	3	44131 86763 83851 689 (+1)	23700 81438 27449 573 (+1)

Таблица 6 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$
$s = 3$			
8	4	70192 10442 85466 378 (+1)	91372 80827 31325 425
	5	10365 35856 15970 610 (+2)	13219 73685 98833 373
	6	14634 32849 11153 273 (+2)	66681 00914 81878 879 (-2)
	7	20180 84727 40399 451 (+2)	90430 58937 87150 415 (-4)
	8	27917 19254 51893 479 (+2)	15653 57938 48369 390 (-6)
9	1	0, 93435 112	0, 33308 066
	2	22085 788 (+1)	17948 284 (+1)
	3	39817 515 (+1)	23994 986 (+1)
	4	63032 798 (+1)	11995 594 (+1)
	5	92448 378 (+1)	25070 097
	6	12918 546 (+2)	21640 268 (-1)
	7	17513 534 (+2)	68573 753 (-3)
	8	23394 992 (+2)	59677 366 (-5)
	9	31500 128 (+2)	65150 488 (-8)
10	1	0, 85511 942	0, 25264 792
	2	20179 914 (+1)	15092 475 (+1)
	3	36294 440 (+1)	23430 123 (+1)
	4	57262 382 (+1)	14410 510 (+1)
	5	83591 279 (+1)	39997 230
	6	11603 152 (+2)	51152 094 (-1)
	7	15574 610 (+2)	28561 968 (-2)
	8	20468 298 (+2)	60361 815 (-4)
	9	26658 947 (+2)	35365 794 (-6)
	10	35107 072 (+2)	25402 183 (-9)
11	1	0, 78836 278	0, 19494 453
	2	18581 184 (+1)	12701 192 (+1)
	3	33358 413 (+1)	22331 603 (+1)
	4	52498 367 (+1)	16277 814 (+1)
	5	76376 287 (+1)	56705 676
	6	10552 489 (+2)	98300 637 (-1)
	7	14072 440 (+2)	83147 128 (-2)
	8	18317 414 (+2)	31784 760 (-3)
	9	23487 296 (+2)	46839 940 (-5)
	10	29965 644 (+2)	19179 086 (-7)
	11	38734 929 (+2)	93779 296 (-11)
12	1	0, 73133 34535 24153 573	0, 15273 02393 91842 707
	2	17220 05877 71537 790 (+1)	10716 34632 96299 004 (+1)
	3	30871 18208 86747 629 (+1)	20936 95978 25120 887 (+1)
	4	48490 71836 43667 852 (+1)	17592 77194 87292 856 (+1)
	5	70365 41922 74923 744 (+1)	73887 60994 20103 765
	6	96890 04199 17576 858 (+1)	16353 84746 05744 857
	7	12861 99162 79440 914 (+2)	19033 78028 63997 279 (-1)
	8	16636 10298 42912 300 (+2)	11274 94877 61940 805 (-2)
	9	21134 48826 54905 403 (+2)	30776 97833 28946 458 (-4)

Таблица 6 (продолжение)

k	$\alpha_k$	$A_k$
$s = 3$		
10	26561 67649 73530 448 (+2)	32738 71468 53583 194 (-6)
11	33309 47935 53748 032 (+2)	96535 18197 52401 242 (-9)
12	42381 18577 10775 980 (+2)	33050 63601 43886 766 (-12)
1	0, 68203 930	0, 12129 962
2	16046 714 (+1)	90741 687
3	28735 434 (+1)	19408 984 (+1)
4	45067 883 (+1)	18406 308 (+1)
5	65269 016 (+1)	90454 658
6	89641 095 (+1)	24494 837
7	11859 672 (+2)	37056 112 (-1)
8	15271 068 (+2)	30688 917 (-2)
9	19281 154 (+2)	13177 579 (-3)
10	24015 979 (+2)	26536 990 (-5)
11	29684 374 (+2)	20948 276 (-7)
12	36685 931 (+2)	45592 332 (-10)
13	46043 770 (+2)	11191 290 (-13)
1	0, 63899 973	0, 97524 311 (-1)
2	15024 464 (+1)	77155 002
3	26880 488 (+1)	17853 905 (+1)
4	42107 649 (+1)	18794 027 (+1)
5	60886 240 (+1)	10562 158 (+1)
6	83453 762 (+1)	33900 683
7	11012 695 (+2)	63559 898 (-1)
8	14133 378 (+2)	69138 639 (-2)
9	17766 597 (+2)	42228 345 (-3)
10	21997 220 (+2)	13598 095 (-4)
11	26953 955 (+2)	20735 753 (-6)
12	32849 652 (+2)	12426 308 (-8)
13	40091 290 (+2)	20378 898 (-11)
14	49720 954 (+2)	36596 686 (-15)
1	0, 60109 077	0, 79280 420 (-1)
2	14125 666 (+1)	65892 304
3	25253 662 (+1)	16337 725 (+1)
4	39520 289 (+1)	18837 208 (+1)
5	57072 641 (+1)	11889 964 (+1)
6	78101 301 (+1)	44142 179
7	10285 576 (+2)	99206 214 (-1)
8	13166 527 (+2)	13528 241 (-1)
9	16497 110 (+2)	10983 945 (-2)
10	20337 996 (+2)	50975 374 (-4)
11	24775 878 (+2)	12619 132 (-5)
12	29941 926 (+2)	14885 806 (-7)
13	36052 783 (+2)	69020 021 (-10)
14	43522 476 (+2)	86806 725 (-13)
15	53411 282 (+2)	11605 991 (-16)

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$
$s = 3$			
16	1	0, 56744 34589 91574 145	0, 65098 11210 09449 315 (-1)
	2	13329 07732 75989 334 (+1)	56527 32242 36402 383
	3	23814 82480 07005 849 (+1)	14898 93138 57906 502 (+1)
	4	37238 26642 09342 697 (+1)	18612 47044 89653 486 (+1)
	5	53721 23952 16187 100 (+1)	13004 75548 48272 360 (+1)
	6	73419 36628 26135 234 (+1)	54781 96468 56915 096
	7	96533 32137 26122 905 (+1)	14384 30432 08105 701
	8	12332 30140 70182 379 (+2)	23749 84724 21622 760 (-1)
	9	15412 85006 54077 155 (+2)	24424 44693 50610 863 (-2)
	10	18940 27557 58602 723 (+2)	15234 05995 58850 768 (-3)
	11	22976 59571 56018 692 (+2)	55012 65305 01356 105 (-5)
	12	27610 18144 74260 749 (+2)	10684 26296 43597 444 (-6)
	13	32974 50920 32584 955 (+2)	99252 43358 97222 214 (-9)
	14	39289 82325 33641 479 (+2)	36186 33427 80076 823 (-11)
	15	46976 89627 67103 126 (+2)	35437 32780 73215 328 (-14)
	16	57113 51402 37534 688 (+2)	35818 03552 87779 219 (-18)
$s = 4$			
4	1	0, 23191 55248 35569 955 (+1)	0, 65722 20311 98722 368 (+1)
	2	51286 71993 60117 916 (+1)	13793 60318 44206 074 (+2)
	3	92008 91348 97243 093 (+1)	35402 84690 36795 246 (+1)
	4	15351 28140 90706 903 (+2)	93891 81322 42164 933 (-1)
8	1	0, 13944 58745 35841 327 (+1)	0, 12755 11045 34833 669 (+1)
	2	30041 22620 31589 098 (+1)	75597 13943 58976 204 (+1)
	3	51611 81272 38140 954 (+1)	99870 62816 98755 810 (+1)
	4	79417 56441 34279 969 (+1)	44201 86194 72331 421 (+1)
	5	11457 04963 32457 916 (+2)	71705 27005 63446 937
	6	15893 56767 14650 236 (+2)	39882 40216 35586 082 (-1)
	7	21611 60996 78724 373 (+2)	58978 85766 23485 837 (-3)
	8	29536 25364 80182 341 (+2)	11080 47399 94015 747 (-5)
12	1	0, 10015 71084 95383 152 (+1)	0, 35915 95481 08307 725
	2	21437 06135 11225 703 (+1)	32658 28206 87688 745 (+1)
	3	36493 33214 32680 176 (+1)	78239 61428 54537 168 (+1)
	4	55448 68139 74946 731 (+1)	77565 06883 73216 868 (+1)
	5	78607 62592 41096 344 (+1)	37373 09725 28196 261 (+1)
	6	10637 76546 49934 495 (+2)	92932 89333 22615 071
	7	13932 56839 51155 931 (+2)	11993 71716 58365 840
	8	17827 00631 00842 237 (+2)	77369 91877 01495 750 (-2)
	9	22445 75382 03894 399 (+2)	22849 09545 16935 571 (-3)
	10	27995 55135 60437 942 (+2)	26114 01805 98097 782 (-5)
	11	34872 17073 24949 280 (+2)	82374 65838 72488 555 (-8)
	12	44088 94275 43252 506 (+2)	30172 37392 43414 224 (-11)

Таблица 6 (продолжение)

$k$	$x_k$	$A_k$
$s = 4$		
1	0,78233 91640 85635 910	0,12973 97026 63052 232
2	16700 71836 71874 001 (+1)	14974 86658 08338 508 (+1)
3	28329 21719 47257 737 (+1)	49461 26142 81207 374 (+1)
4	42844 18368 19021 891 (+1)	74302 67050 86785 796 (+1)
5	60378 68710 96889 479 (+1)	60568 76662 31872 829 (+1)
6	81095 49334 13974 021 (+1)	29091 61313 57755 320 (+1)
7	10520 10170 48502 218 (+2)	85558 46518 19837 666
8	13296 03991 23563 184 (+2)	15600 95986 52813 629
9	16471 88870 86961 996 (+2)	17519 13596 50891 542 (-1)
10	20093 49997 30530 394 (+2)	11822 72573 00007 126 (-2)
11	24223 52994 28062 549 (+2)	45850 63116 59349 061 (-4)
12	28951 14958 06519 383 (+2)	95061 60798 27638 761 (-6)
13	34410 94304 08020 216 (+2)	93830 97595 03402 079 (-8)
14	40824 89527 13820 481 (+2)	36228 10007 70432 509 (-10)
15	48617 05497 34729 113 (+2)	37511 91906 28700 090 (-13)
16	58873 72775 83532 394 (+2)	40167 06753 92835 967 (-17)
$s = 5$		
1	0,29107 86369 36770 048 (+1)	0,29684 39231 55522 145 (+2)
2	60000 00000 00000 000 (+1)	70000 00000 00000 000 (+2)
3	10334 11034 67862 578 (+2)	19746 95048 02402 056 (+2)
4	16755 10328 38460 417 (+2)	56865 72042 07579 951
1	0,17878 60471 57082 745 (+1)	0,47828 65186 03309 507 (+1)
2	35882 38857 64338 781 (+1)	33761 32679 71511 042 (+2)
3	59200 90026 12269 490 (+1)	51231 37253 00345 871 (+2)
4	88668 46401 18214 593 (+1)	25408 12652 26598 562 (+2)
5	12543 58894 44281 568 (+2)	45375 88981 16486 575 (+1)
6	17140 52888 33306 908 (+2)	27433 83243 61631 772
7	23023 34262 97284 257 (+2)	43728 31000 34351 893 (-2)
8	31129 50378 59936 706 (+2)	88275 94516 33260 886 (-5)
1	0,12974 87840 00685 508 (+1)	0,11333 47268 05127 857 (+1)
2	25862 09436 34406 719 (+1)	12710 27529 75832 523 (+2)
3	42269 79953 86950 259 (+1)	35995 12482 34067 119 (+2)
4	62508 75470 37452 539 (+1)	40967 24586 60868 638 (+2)
5	86902 81255 95059 872 (+1)	22178 13207 82776 474 (+2)
6	11587 24378 94981 120 (+2)	60955 60142 77879 247 (+1)
7	14999 59225 75396 278 (+2)	85854 77698 06400 297
8	19010 35823 23823 253 (+2)	59848 19418 10913 418 (-1)
9	23745 69049 25278 601 (+2)	18953 82494 56284 785 (-2)
10	29414 47612 88863 084 (+2)	23099 86254 86114 025 (-4)
11	36416 34820 53466 644 (+2)	77440 68876 01347 796 (-7)
12	45774 45693 72735 530 (+2)	30161 61085 14055 821 (-10)
1	0,10197 56210 06729 237 (+1)	0,35165 19388 60095 021
2	20268 67338 91905 119 (+1)	51231 07127 50064 588 (+1)

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$
			$s = 5$
16	3	33004 79465 06096 635 (+1)	20400 84978 99245 158 (+2)
	4	48575 76457 13809 794 (+1)	35796 45019 07962 966 (+2)
	5	67127 55597 61595 590 (+1)	33289 05371 60876 807 (+2)
	6	88830 58776 14446 853 (+1)	17912 08683 08842 187 (+2)
	7	11389 71066 17410 895 (+2)	58175 11506 87781 879 (+1)
	8	14259 74092 58898 484 (+2)	11580 30314 42409 197 (+1)
	9	17528 17871 11426 743 (+2)	14064 13041 18632 739
	10	21241 41228 11650 920 (+2)	10186 55736 72515 247 (-1)
	11	25462 71627 26269 377 (+2)	42135 54821 24525 534 (-3)
	12	30282 03927 01258 409 (+2)	92705 59457 73008 095 (-5)
	13	35835 04653 81012 185 (+2)	96723 09286 38172 189 (-7)
	14	42345 42776 33176 611 (+2)	39364 78958 12592 163 (-9)
	15	50240 44766 74638 389 (+2)	42913 06834 19748 559 (-12)
	16	60614 78606 34799 663 (+2)	48478 98628 52962 661 (-16)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k
			$s = -\frac{3}{4}$		$s = -\frac{2}{3}$	
1	1	0, 25000000 ( 0 )	0, 36256099 (+1)	0, 33333333 ( 0 )	0, 26789385 (+1)	1
2	1	0, 13196601 ( 0 )	0, 34342270 (+1)	0, 17863279 ( 0 )	0, 24994837 (+1)	1
	2	23680340 (+1)	19138291 ( 0 )	24880339 (+1)	17945485 ( 0 )	2
3	1	0, 89682157 (-1)	0, 32439388 (+1)	0, 12209682 ( 0 )	0, 23214554 (+1)	1
	2	15274470 (+1)	37265789 ( 0 )	16133490 (+1)	34850200 ( 0 )	2
	3	51328708 (+1)	90132512 (-2)	52645542 (+1)	89811674 (-2)	3
4	1	0, 67925856 (-1)	0, 30896995 (+1)	0, 92758175 (-1)	0, 21783829 (+1)	1
	2	11371785 (+1)	50145733 ( 0 )	12043996 (+1)	46624946 ( 0 )	2
	3	36179271 (+1)	34094068 (-1)	37212964 (+1)	33935593 (-1)	3
	4	81769686 (+1)	35901303 (-3)	83148791 (+1)	37061456 (-3)	4
5	1	0, 54666241 (-1)	0, 29640634 (+1)	0, 74791343 (-1)	0, 20629568 (+1)	1
	2	90803851 ( 0 )	59092562 ( 0 )	96333706 ( 0 )	54578896 ( 0 )	2
	3	28293856 (+1)	68185624 (-1)	29150212 (+1)	67680334 (-1)	3
	4	60746894 (+1)	24225296 (-2)	61884022 (+1)	24988537 (-2)	4
	5	11383220 (+2)	12783787 (-4)	11525115 (+2)	13530718 (-4)	5
6	1	0, 45738469 (-1)	0, 28595004 (+1)	0, 62656686 (-1)	0, 19677807 (+1)	1
	2	75652099 ( 0 )	65387475 ( 0 )	80351978 ( 0 )	59986396 ( 0 )	2
	3	23327747 (+1)	10501506 ( 0 )	24060377 (+1)	10385486 ( 0 )	3
	4	49043829 (+1)	70754479 (-2)	50018261 (+1)	72865269 (-2)	4

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
		$s = -\frac{3}{4}$		$s = -\frac{2}{3}$			
6	5	87632812 (+1)	14377852 (-3)	88839504 (+1)	15206552 (-3)	5	6
	6	14697302 (+2)	42045604 (-6)	14842009 (+2)	45370066 (-6)	6	
7	1	0, 39317636 (-1)	0, 27706703 (+1)	0, 53910563 (-1)	0, 18876235 (+1)	1	7
	2	64865489 (0)	69892319 (0)	68953361 (0)	63699815 (0)	2	
	3	19881035 (+1)	14109251 (0)	20521857 (+1)	13896514 (0)	3	
	4	41335989 (+1)	14318943 (-1)	42190751 (+1)	14712447 (-1)	4	
	5	72374353 (+1)	59744603 (-3)	73431967 (+1)	63118707 (-3)	5	
	6	11613799 (+2)	74767629 (-5)	11739519 (+2)	80616495 (-5)	6	
	7	18089091 (+2)	13030908 (-7)	18235913 (+2)	14284314 (-7)	7	
8	1	0, 34477740 (-1)	0, 26938824 (+1)	0, 47307354 (-1)	0, 18188865 (+1)	1	8
	2	56786065 (0)	73163284 (0)	60403617 (0)	66264588 (0)	2	
	3	17338097 (+1)	17479228 (0)	17907883 (+1)	17142864 (0)	3	
	4	35808230 (+1)	23683092 (-1)	36570500 (+1)	24268438 (-1)	4	
	5	62002834 (+1)	15758639 (-2)	62946900 (+1)	16622740 (-2)	5	
	6	97580054 (+1)	43097718 (-4)	98699921 (+1)	46430249 (-4)	6	
	7	14584774 (+2)	35138424 (-6)	14714356 (+2)	38486494 (-6)	7	
	8	21539966 (+2)	38556561 (-9)	21688446 (+2)	42830294 (-9)	8	
9	1	0, 30698864 (-1)	0, 26265393 (+1)	0, 42145372 (-1)	0, 17590492 (+1)	1	9
	2	50504330 (0)	75563323 (0)	53748977 (0)	68033076 (0)	2	
	3	15380221 (+1)	20550499 (0)	15893321 (+1)	20069432 (0)	3	
	4	31625636 (+1)	34572914 (-1)	32313983 (+1)	35323750 (-1)	4	
	5	54384598 (+1)	32102912 (-2)	55238387 (+1)	33799044 (-2)	5	
	6	84663798 (-1)	14640578 (-3)	85676444 (+1)	15754740 (-3)	6	
	7	12421914 (+2)	27469968 (-5)	12538762 (+2)	30066352 (-5)	7	
	8	17649392 (+2)	15241494 (-7)	17782039 (+2)	16916180 (-7)	8	
	9	25037527 (+2)	10990411 (-10)	25187351 (+2)	12349658 (-10)	9	
10	1	0, 27666559 (-1)	0, 25667656 (+1)	0, 37999161 (-1)	0, 17063009 (+1)	1	10
	2	45478442 (0)	77334797 (0)	48420090 (0)	69237958 (0)	2	
	3	13824258 (+1)	23313283 (0)	14291031 (+1)	22672148 (0)	3	
	4	28339800 (+1)	46436747 (-1)	28967576 (+1)	47300605 (-1)	4	
	5	48509714 (+1)	55491235 (-2)	49289647 (+1)	58208751 (-2)	5	
	6	75000109 (+1)	36564666 (-3)	75925722 (+1)	39202010 (-3)	6	
	7	10888408 (-2)	11868798 (-4)	10995130 (-2)	12979143 (-4)	7	
	8	15199478 (-2)	15844109 (-6)	15320244 (+2)	17574046 (-6)	8	
	9	20789215 (-2)	61932667 (-9)	20924364 (+2)	69529013 (-9)	9	
	10	28573060 (+2)	30377599 (-12)	28723998 (+2)	34481660 (-12)	10	
11	1	0, 25179461 (-1)	0, 25131719 (+1)	0, 34595733 (-1)	0, 16593071 (+1)	1	11
	2	41365013 (0)	78643579 (0)	44055546 (0)	70036590 (0)	2	
	3	12556914 (+1)	25781873 (0)	12985093 (+1)	24970224 (0)	3	
	4	25689049 (+1)	58823923 (-1)	26262222 (+1)	59732536 (-1)	4	
	5	4382222 (+1)	85745364 (-2)	44540441 (+1)	89878277 (-2)	5	
	6	67435909 (+1)	74801957 (-3)	68289054 (+1)	80251978 (-3)	6	
	7	97240982 (+1)	36099778 (-4)	98224690 (+1)	39434095 (-4)	7	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
		$s = -\frac{3}{4}$		$s = -\frac{2}{3}$			
11	8	13436207 (+2)	86028637 (-6)	13547391 (+2)	95352839 (-6)	8	
	9	18069703 (+2)	84148625 (-8)	18193705 (+2)	94414850 (-8)	9	
	10	23990970 (+2)	23835160 (-10)	24128206 (+2)	27029892 (-10)	10	
	11	32140182 (+2)	81815156 (-14)	32292064 (+2)	93711739 (-14)	11	11
	1	0, 23102654 (-1)	0, 24647057 (+1)	0, 31751885 (-1)	0, 16170614 (+1)	1	
12	2	37935667 (0)	79605870 (0)	40414669 (0)	70537830 (0)	2	
	3	11504119 (+1)	27980632 (0)	11899639 (+1)	26992017 (0)	3	
	4	23492740 (+1)	71390736 (-1)	24026968 (+1)	72268470 (-1)	4	
	5	39985600 (+1)	12225767 (-1)	40651394 (+1)	12784661 (-1)	5	
	6	61325225 (+1)	13323273 (-2)	62116894 (+1)	14268845 (-2)	6	12
	7	88016659 (+1)	87141394 (-4)	88929871 (+1)	95070230 (-4)	7	
	8	12081232 (+2)	31636049 (-5)	12184413 (+2)	35034360 (-5)	8	
	9	16087916 (+2)	56781758 (-7)	16202826 (+2)	63669953 (-7)	9	
	10	21017140 (+2)	41694988 (-9)	21143867 (+2)	47257046 (-9)	10	
	11	27244753 (+2)	87605378 (-12)	27383762 (+2)	10024702 (-11)	11	
	12	35734066 (+2)	21551771 (-15)	35885758 (+2)	24888025 (-15)	12	
	13	1	0, 21342343 (-1)	0, 24205526 (+1)	0, 29340088 (-1)	0, 15787891 (+1)	1
2		35032523 (0)	80304820 (0)	37330886 (0)	70818553 (0)	2	
3		10615307 (+1)	29936958 (0)	10982821 (+1)	28768046 (0)	3	
4		21650156 (+1)	83886781 (-1)	22147458 (+1)	84656713 (-1)	4	
5		36782212 (+1)	16419265 (-1)	37402865 (+1)	17128272 (-1)	5	
6		56270886 (+1)	21454897 (-2)	57009641 (+1)	22934737 (-2)	6	
7		80488600 (+1)	17878817 (-3)	81341288 (+1)	19478345 (-3)	7	13
8		10996928 (+2)	89734808 (-5)	11093280 (+2)	99273303 (-5)	8	
9		14549580 (+2)	25062982 (-6)	14656820 (+2)	28083069 (-6)	9	
10		18827134 (+2)	34610092 (-8)	18945210 (+2)	39205637 (-8)	10	
11		24030058 (+2)	19470015 (-10)	24159116 (+2)	22267330 (-10)	11	
12		30542958 (+2)	30950213 (-13)	30683495 (+2)	35706134 (-13)	12	
13		39350958 (+2)	55690709 (-17)	39504356 (+2)	64792611 (-17)	13	
14	1	0, 19831300 (-1)	0, 23800715 (+1)	0, 27268829 (-1)	0, 15438829 (+1)	1	
	2	32542893 (0)	80801064 (0)	34685191 (0)	70934050 (0)	2	
	3	98547259 (0)	31677869 (0)	10197957 (+1)	30327712 (0)	3	
	4	20078857 (+1)	96136405 (-1)	20544055 (+1)	96724311 (-1)	4	
	5	34064182 (+1)	21063171 (-1)	34645533 (+1)	21919002 (-1)	5	
	6	52012402 (+1)	32020739 (-2)	52705070 (+1)	34163101 (-2)	6	
	7	74207282 (+1)	32543301 (-3)	75007319 (+1)	35401597 (-3)	7	14
	8	10104427 (+2)	21163299 (-4)	10194858 (+2)	23386338 (-4)	8	
	9	13308059 (+2)	83147377 (-6)	13408695 (+2)	93088689 (-6)	9	
	10	17112485 (+2)	18208329 (-7)	17223204 (+2)	20613324 (-7)	10	
	11	21641214 (+2)	19697335 (-9)	21762020 (+2)	22516102 (-9)	11	
	12	27099321 (+2)	86368195 (-12)	27230399 (+2)	99585491 (-12)	12	
	13	33879606 (+2)	10564405 (-14)	34021476 (+2)	12278710 (-14)	13	
	14	42987883 (+2)	14150187 (-18)	43141902 (+2)	16575953 (-18)	14	



Таблица 6 (продолжение)

$k$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
	$s = -\frac{3}{4}$		$s = -\frac{2}{3}$			
1	0,18520079 (-1)	0,23427496 (+1)	0,25470738 (-1)	0,15118594 (+1)	1	
2	30384169 (0)	81139572 (0)	32390276 (0)	70924741 (0)	2	
3	91963630 (0)	33228466 (0)	95183330 (0)	31697898 (0)	3	
4	18722452 (+1)	10802117 (0)	19159475 (+1)	10835793 (0)	4	
5	31727103 (+1)	26066573 (-1)	32273905 (+1)	27059366 (-1)	5	
6	48370543 (+1)	45056123 (-2)	49022673 (+1)	47975414 (-2)	6	
7	68874669 (+1)	54072485 (-3)	69628414 (+1)	58728918 (-3)	7	15
8	93542089 (+1)	43513397 (-4)	94394436 (+1)	48024950 (-4)	8	
9	12278679 (+2)	22477505 (-5)	12373542 (+2)	25141325 (-5)	9	
10	15718549 (+2)	70314317 (-7)	15822884 (+2)	79545368 (-7)	10	
11	19756920 (+2)	12269938 (-8)	19870658 (+2)	14018246 (-8)	11	
12	24520177 (+2)	10559523 (-10)	24643363 (+2)	12169838 (-10)	12	
13	30217659 (+2)	36629022 (-13)	30350509 (+2)	42549678 (-13)	13	
14	37249901 (+2)	34984591 (-16)	37392945 (+2)	40940479 (-16)	14	
15	46642432 (+2)	35421038 (-20)	46797002 (+2)	41756932 (-20)	15	
	$s = -\frac{2}{4}$		$s = -\frac{1}{3}$			
1	0,50000000 (0)	0,17724538 (+1)	0,66666667 (0)	0,13541179 (+1)	1	1
1	0,27525513 (0)	0,16098282 (+1)	0,37567222 (0)	0,12015066 (+1)	1	
2	27247449 (+1)	16262567 (0)	29576611 (+1)	15261135 (0)	2	2
1	0,19016351 (0)	0,14492592 (+1)	0,26208526 (0)	0,10515660 (+1)	1	
2	17844928 (+1)	31413464 (0)	19549325 (+1)	29323210 (0)	2	3
3	55253437 (+1)	90600198 (-2)	57829822 (+1)	93198233 (-2)	3	3
1	0,14530352 (0)	0,13222940 (+1)	0,20133920 (0)	0,93478729 (0)	1	
2	13390973 (+1)	41560465 (0)	14741979 (+1)	38384169 (0)	2	
3	39269635 (+1)	34155966 (-1)	41313252 (+1)	35053092 (-1)	3	4
4	85886357 (+1)	39920814 (-3)	88598043 (+1)	43585713 (-3)	4	4
1	0,11758132 (0)	0,12217253 (+1)	0,16348250 (0)	0,84387345 (0)	1	
2	10745620 (+1)	48027722 (0)	11866468 (+1)	43813921 (0)	2	
3	30859374 (+1)	67748789 (-1)	32564395 (+1)	69158745 (-1)	3	5
4	64147297 (+1)	26872915 (-2)	66396798 (+1)	29290962 (-2)	4	4
5	11807190 (+2)	15280866 (-4)	12087085 (+2)	17436267 (-4)	5	5
1	0,98747014 (-1)	0,11402705 (+1)	0,13761932 (0)	0,77148156 (0)	1	
2	89830283 (0)	52098462 (0)	99414015 (0)	46932180 (0)	2	
3	25525898 (+1)	10321597 (0)	26992064 (+1)	10463209 (0)	3	
4	51961525 (+1)	78107812 (-2)	53897807 (+1)	84865065 (-2)	4	6
5	91242480 (-1)	17147374 (-3)	93632211 (+1)	19535804 (-3)	5	5
6	15129960 (+2)	53171034 (-6)	15416032 (+2)	62834563 (-6)	6	6
1	0,85115443 (-1)	0,10728118 (+1)	0,11882624 (0)	0,71248547 (0)	1	7
2	77213792 (0)	54621122 (0)	85587183 (0)	48601383 (0)	2	2

Таблица 6 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
		$s = -\frac{2}{4}$		$s = -\frac{1}{3}$			
7	3	21805919 (+1)	13701107 (0)	23093354 (+1)	13781692 (0)	3	7
	4	43897929 (+1)	15700109 (-1)	45602261 (+1)	16983222 (-1)	4	
	5	75540913 (+1)	71018523 (-3)	77641875 (+1)	80733760 (-3)	5	
	6	11989993 (+2)	94329687 (-5)	12239226 (+2)	11129782 (-4)	6	
	7	18528278 (+2)	17257182 (-7)	18818994 (+2)	20994874 (-7)	7	
8	1	0,74791883 (-1)	0,10158590 (+1)	0,10455148 (0)	0,66341907 (0)	1	8
	2	67724909 (0)	56129492 (0)	75160892 (0)	49355022 (0)	2	
	3	19051136 (+1)	16762008 (0)	20199368 (+1)	16724863 (0)	3	
	4	38094764 (+1)	25760623 (-1)	39618827 (+1)	27721724 (-1)	4	
	5	64831454 (+1)	18645680 (-2)	66711486 (+1)	21132053 (-2)	5	
	6	10093324 (+2)	54237202 (-4)	10315831 (+2)	63886176 (-4)	6	
	7	14972627 (+2)	46419617 (-6)	15229743 (+2)	56380434 (-6)	7	
	8	21984273 (+2)	53096150 (-9)	22278631 (+2)	66219327 (-9)	8	
9	1	0,66702231 (-1)	0,96699139 (0)	0,93339840 (-1)	0,62190396 (0)	1	9
	2	60323636 (0)	56961457 (0)	67011787 (0)	49523904 (0)	2	
	3	16923951 (+1)	19460349 (0)	17960511 (+1)	19259741 (0)	3	
	4	33691763 (+1)	37280085 (-1)	35071090 (+1)	39892352 (-1)	4	
	5	56944233 (+1)	37770453 (-2)	58647931 (+1)	42649550 (-2)	5	
	6	87697567 (+1)	18362254 (-3)	89713350 (+1)	21880550 (-3)	6	
	7	12771825 (+2)	36213090 (-5)	13004073 (+2)	43922087 (-5)	7	
	8	18046506 (+2)	20934412 (-7)	18309898 (+2)	26063500 (-7)	8	
	9	25485979 (+2)	15656400 (-10)	25783283 (+2)	19953470 (-10)	9	
10	1	0,60192063 (-1)	0,92448734 (0)	0,84300612 (-1)	0,58626161 (0)	1	10
	2	54386750 (0)	57335101 (0)	60464222 (0)	49316561 (0)	2	
	3	15229441 (+1)	21803441 (0)	16174338 (+1)	21405464 (0)	3	
	4	30225134 (+1)	49621042 (-1)	31485418 (+1)	52786285 (-1)	4	
	5	50849078 (+1)	64875467 (-2)	52408034 (+1)	72953721 (-2)	5	
	6	77774392 (+1)	45667727 (-3)	79619807 (+1)	53524334 (-3)	6	
	7	11208130 (+2)	15605113 (-4)	11420559 (+2)	18894019 (-4)	7	
	8	15561163 (+2)	21721387 (-6)	15801289 (+2)	27009467 (-6)	8	
	9	21193892 (+2)	87986820 (-9)	21462420 (+2)	11193460 (-8)	9	
	10	29024950 (+2)	44587873 (-12)	29324696 (+2)	57927435 (-12)	10	
11	1	0,54839870 (-1)	0,88709045 (0)	0,76858005 (-1)	0,55528105 (0)	1	11
	2	49517412 (0)	57394287 (0)	55086690 (0)	48866975 (0)	2	
	3	13846557 (+1)	23820472 (0)	14714816 (+1)	23201770 (0)	3	
	4	27419199 (+1)	62280742 (-1)	28579710 (+1)	65857353 (-1)	4	
	5	45977377 (+1)	99567987 (-2)	47415044 (+1)	11147144 (-1)	5	
	6	69993975 (+1)	92977010 (-3)	71697177 (+1)	10883036 (-2)	6	
	7	10018908 (+2)	47310257 (-4)	10214958 (+2)	57158908 (-4)	7	
	8	13769306 (+2)	11768575 (-5)	13990636 (+2)	14612639 (-5)	8	
	9	18441120 (+2)	11933982 (-7)	18687769 (+2)	15164403 (-7)	9	
	10	24401961 (+2)	34886780 (-10)	24674781 (+2)	45240056 (-10)	10	
	11	32594980 (+2)	12334367 (-13)	32896790 (+2)	16303363 (-13)	11	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
		$s = -\frac{2}{4}$		$s = -\frac{1}{3}$			
12	1	0,50361889 (-1)	0,85386233 (0)	0,70623234 (-1)	0,52806581 (0)	1	12
	2	45450668 (0)	57235907 (0)	50590373 (0)	48262774 (0)	2	
	3	12695899 (+1)	25547924 (0)	13499103 (+1)	24693770 (0)	3	
	4	25098481 (+1)	74890941 (-1)	26174080 (+1)	78716616 (-1)	4	
	5	41984156 (+1)	14096712 (-1)	43318532 (+1)	15709374 (-1)	5	
	6	63699754 (+1)	16473850 (-2)	65282048 (+1)	19181325 (-2)	6	
	7	90754342 (+1)	11377383 (-3)	92576308 (+1)	13711894 (-3)	7	
	8	12390448 (-2)	43164914 (-5)	12596057 (-2)	53504120 (-5)	8	
	9	16432195 (-2)	80379423 (-7)	16660979 (-2)	10201193 (-6)	9	
	10	21396756 (-2)	60925085 (-9)	21648911 (-2)	78917193 (-9)	10	
	11	27661109 (-2)	13169240 (-11)	27937578 (-2)	17373801 (-11)	11	
	12	36191360 (-2)	33287370 (-15)	36494940 (-2)	44693109 (-15)	12	
13	1	0,46560083 (-1)	0,82408730 (0)	0,65324287 (-1)	0,50393843 (0)	1	13
	2	42002741 (0)	56926448 (0)	46774523 (0)	47562152 (0)	2	
	3	11723108 (+1)	27022666 (0)	12470380 (+1)	25925067 (0)	3	
	4	23145409 (+1)	87196454 (-1)	24147823 (+1)	91104339 (-1)	4	
	5	38645850 (+1)	18795802 (-1)	39891098 (+1)	20847488 (-1)	5	
	6	58487348 (+1)	26381294 (-2)	59965369 (+1)	30605414 (-2)	6	
	7	83045535 (+1)	23245940 (-3)	84748352 (-1)	27939179 (-3)	7	
	8	11285751 (+2)	12206583 (-4)	11477922 (+2)	15100217 (-4)	8	
	9	14870960 (+2)	35402127 (-6)	15084656 (+2)	44865547 (-6)	9	
	10	19180920 (+2)	50489881 (-8)	19416050 (+2)	65329078 (-8)	10	
	11	24416692 (+2)	29219999 (-10)	24673565 (+2)	38506836 (-10)	11	
	12	30963938 (+2)	47662973 (-13)	31243556 (+2)	63870329 (-13)	12	
	13	39810426 (+2)	87938322 (-17)	40115546 (+2)	11977457 (-16)	13	
14	1	0,43292036 (-1)	0,79720943 (0)	0,60765142 (-1)	0,48237727 (0)	1	14
	2	39042093 (0)	56512278 (0)	43495197 (0)	46804235 (0)	2	
	3	10889659 (+1)	28278922 (0)	11588322 (+1)	26934983 (0)	3	
	4	21477995 (+1)	99029778 (-1)	22416650 (+1)	10285891 (0)	4	
	5	35810282 (+1)	23936846 (-1)	36977777 (+1)	26423520 (-1)	5	
	6	54091123 (+1)	39146626 (-2)	55478167 (+1)	45243292 (-2)	6	
	7	76606911 (+1)	42123620 (-3)	78205917 (+1)	50479564 (-3)	7	
	8	10375563 (+2)	28691008 (-4)	10556066 (+2)	35413310 (-4)	8	
	9	13609711 (+2)	11715439 (-5)	13810395 (+2)	14822593 (-5)	9	
	10	17444294 (+2)	26513650 (-7)	17664932 (+2)	34264094 (-7)	10	
	11	22003197 (+2)	29517063 (-9)	22243808 (+2)	38859657 (-9)	11	
	12	27492042 (+2)	13278873 (-11)	27753010 (+2)	17774905 (-11)	12	
	13	34304620 (+2)	16631876 (-14)	34586987 (+2)	22608478 (-14)	13	
	14	43449262 (+2)	22802787 (-18)	43755735 (+2)	31471238 (-18)	14	
15	1	0,40452704 (-1)	0,77278978 (0)	0,56800958 (-1)	0,46297392 (0)	1	15
	2	36472064 (0)	56026186 (0)	40646453 (0)	46015562 (0)	2	
	3	10167461 (+1)	29347169 (0)	10823479 (+1)	27757758 (0)	3	
	4	20037190 (+1)	11028835 (0)	20919784 (+1)	11388979 (0)	4	
	5	33369832 (+1)	29407659 (-1)	34468863 (+1)	32308116 (-1)	5	
	6	50328053 (+1)	54758449 (-2)	51634947 (+1)	63041891 (-2)	6	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n		
		$s = -\frac{2}{4}$		$s = -\frac{1}{3}$					
15	7	71135938 (+1)	69662025 (-3)	72643542 (+1)	83223051 (-3)	7	15		
	8	96098173 (+1)	58774504 (-4)	97800687 (+1)	72370100 (-4)	8			
	9	12563082 (+2)	31581898 (-5)	12752381 (+2)	39884022 (-5)	9			
	10	16031284 (+2)	10217045 (-6)	16239332 (+2)	13185220 (-6)	10			
	11	20097785 (+2)	18357161 (-8)	20324458 (+2)	24141510 (-8)	11			
	12	24889312 (+2)	16212373 (-10)	25134710 (+2)	21681511 (-10)	12			
	13	30615717 (+2)	57572142 (-13)	30880280 (+2)	78175668 (-13)	13			
	14	37678472 (+2)	56206672 (-16)	37963262 (+2)	77418927 (-16)	14			
	15	47105509 (+2)	58165094 (-20)	47413182 (+2)	81266593 (-20)	15			
			$s = -\frac{1}{4}$		$s = \frac{1}{4}$				
	1	1	0,75000000 (0)	0,12254167 (+1)	0,12500000 (+1)	0,90640248 (0)		1	1
	2	1	0,42712434 (0)	0,10758723 (+1)	0,75000000 (0)	0,75533540 (0)		1	2
		2	30728757 (+1)	14954437 (0)	37500000 (+1)	15106708 (0)		2	
	3	1	0,29934698 (0)	0,92931050 (0)	0,53837429 (0)	0,60944789 (0)		1	3
		2	20399390 (+1)	28658934 (0)	25478249 (+1)	28521892 (0)		2	
3		59107140 (+1)	95168646 (-2)	66638008 (+1)	11735670 (-1)	3			
4	1	0,23055427 (0)	0,81598329 (0)	0,42042886 (0)	0,50095016 (0)	1	4		
	2	15419141 (+1)	37322424 (0)	19506756 (+1)	36103211 (0)	2			
	3	42330570 (+1)	35751549 (-1)	48379773 (+1)	43768337 (-1)	3			
	4	89944747 (+1)	45761692 (-3)	97909182 (+1)	65187433 (-3)	4			
5	1	0,18751152 (0)	0,72848465 (0)	0,34503920 (0)	0,42089395 (0)	1	5		
	2	12430140 (+1)	42348796 (0)	15856761 (+1)	39627553 (0)	2			
	3	33415541 (+1)	70352686 (-1)	38506938 (+1)	84848954 (-1)	3			
	4	67516678 (+1)	30727129 (-2)	74174151 (+1)	43542352 (-2)	4			
	5	12226253 (+2)	18694668 (-4)	13051176 (+2)	29808894 (-4)	5			
6	1	0,15802683 (0)	0,65938183 (0)	0,29263972 (0)	0,36048227 (0)	1	6		
	2	10424520 (+1)	45086007 (0)	13376599 (+1)	40763446 (0)	2			
	3	27725478 (+1)	10607626 (0)	32132113 (+1)	12547255 (0)	3			
	4	54863494 (+1)	88885649 (-2)	60626767 (+1)	12479862 (-1)	4			
	5	94822331 (+1)	20929373 (-3)	10190154 (+2)	33213959 (-3)	5			
	6	15558391 (+2)	68512888 (-6)	16403659 (+2)	11982822 (-5)	6			
7	1	0,13656131 (0)	0,60350363 (0)	0,25408636 (0)	0,31372015 (0)	1	7		
	2	89815860 (0)	46409823 (0)	11575664 (+1)	40558120 (0)	2			
	3	23738376 (+1)	13918949 (0)	27627227 (+1)	16110865 (0)	3			
	4	46453454 (+1)	17749203 (-1)	51548940 (+1)	24609048 (-1)	4			
	5	78689498 (+1)	86398610 (-3)	84938269 (+1)	13622743 (-2)	5			
	6	12363394 (+2)	12125975 (-4)	13102513 (+2)	21107555 (-4)	6			
	7	18963753 (+2)	23216173 (-7)	19824391 (+2)	43913703 (-7)	7			

Таблица 6 (продолжение)

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
$s = -\frac{1}{4}$		$s = \frac{1}{4}$			
0,12023320 (0)	0,55736928 (0)	0,22452356 (0)	0,27667312 (0)	1	8
78921467 (0)	46857430 (0)	10206218 (+1)	39622479 (0)	2	
20775362 (+1)	16824669 (0)	24257560 (+1)	19037319 (0)	3	
40380838 (+1)	28898183 (-1)	44953667 (+1)	39480543 (-1)	4	
67649893 (+1)	22580838 (-2)	73259718 (+1)	35291971 (-2)	5	
10426788 (+2)	69546106 (-4)	11088616 (+2)	12045349 (-3)	6	
15357881 (+2)	62294264 (-6)	16121149 (+2)	11725311 (-5)	7	
22425274 (+2)	74114081 (-9)	23297996 (+2)	15004291 (-8)	8	
0,10739445 (0)	0,51859926 (0)	0,20113116 (0)	0,24672401 (0)	1	9
70398000 (0)	46758475 (0)	91287290 (0)	38308225 (0)	2	
18481013 (+1)	19297408 (0)	21634764 (+1)	21339477 (0)	3	
35761365 (+1)	4146995 (-1)	39912081 (+1)	55753740 (-1)	4	
59499030 (+1)	45490650 (-2)	64596334 (+1)	70347786 (-2)	5	
90719316 (+1)	23466332 (-3)	96729896 (+1)	40377696 (-3)	6	
13119900 (+2)	48495083 (-5)	13810927 (+2)	90896518 (-5)	7	
18441202 (+2)	29145758 (-7)	19223798 (+2)	58704911 (-7)	8	
25931451 (+2)	22569509 (-10)	26813963 (+2)	48515338 (-10)	9	
0,97034092 (-1)	0,48552557 (0)	0,18215798 (0)	0,22208856 (0)	1	10
63544114 (0)	46318263 (0)	82583043 (0)	36817976 (0)	2	
16649210 (+1)	21362566 (0)	19531838 (+1)	23089966 (0)	3	
32116599 (+1)	54714982 (-1)	35918407 (+1)	72335980 (-1)	4	
53187370 (+1)	77654928 (-2)	57862150 (+1)	11866913 (-1)	5	
80541346 (+1)	58122229 (-3)	86055426 (+1)	99212670 (-3)	6	
11526566 (+2)	20843025 (-4)	12159855 (+2)	38865637 (-4)	7	
15921062 (+2)	30184690 (-6)	16635829 (+2)	60569750 (-6)	8	
21596317 (+2)	12649702 (-8)	22394787 (+2)	27048442 (-8)	9	
29474127 (+2)	66140610 (-12)	30364759 (+2)	15001289 (-11)	10	
0,88497425 (-1)	0,45694857 (0)	0,16645876 (0)	0,20151846 (0)	1	11
57911241 (0)	45666881 (0)	75402067 (0)	35268495 (0)	2	
15151480 (+1)	23065512 (0)	17806347 (+1)	24377085 (0)	3	
29161296 (+1)	68062206 (-1)	32669432 (+1)	88452166 (-1)	4	
48134175 (+1)	11839569 (-1)	52453558 (+1)	17863841 (-1)	5	
72548170 (+1)	11777854 (-2)	77646434 (+1)	19921982 (-2)	6	
10312842 (+2)	62988202 (-4)	10898281 (+2)	11671982 (-3)	7	
14101087 (+2)	16318805 (-5)	14760943 (+2)	32606565 (-5)	8	
18810814 (+2)	17127257 (-7)	19545318 (+2)	36494875 (-7)	9	
24810848 (+2)	51606798 (-10)	25622622 (+2)	11641327 (-9)	10	
33047287 (+2)	18773042 (-13)	33944780 (+2)	44697035 (-13)	11	
0,81341747 (-1)	0,43198479 (0)	0,15325280 (0)	0,18411885 (0)	1	12
53198782 (0)	44888080 (0)	69375065 (0)	33726572 (0)	2	
13903292 (+1)	24455979 (0)	16364036 (+1)	25285690 (0)	3	
26713411 (+1)	81110951 (-1)	29970709 (+1)	10360779 (0)	4	
43986337 (+1)	16647236 (-1)	48002063 (+1)	24786471 (-1)	5	
66073009 (+1)	20761343 (-2)	70816713 (+1)	34769762 (-2)	6	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
		$\varepsilon = -\frac{1}{4}$		$\varepsilon = \frac{1}{4}$			
12	7	93486388 (+1)	15091779 (-3)	98935020 (+1)	27764817 (-3)	7	12
	8	12698707 (+2)	59700047 (-5)	13312535 (+2)	11868250 (-4)	8	
	9	16775156 (+2)	11514550 (-6)	17457342 (+2)	24445549 (-6)	9	
	10	21774719 (+2)	89973001 (-9)	22525930 (+2)	20227993 (-8)	10	
	11	28075491 (+2)	19986738 (-11)	28898603 (+2)	47321905 (-11)	11	
	12	36646354 (+2)	51860695 (-15)	37549732 (+2)	12907164 (-14)	12	
13	1	0,75256950 (-1)	0,40996958 (0)	0,14198949 (0)	0,16923386 (0)	1	13
	2	49197586 (0)	44036475 (0)	64243596 (0)	32229574 (0)	2	
	3	12846620 (+1)	25581169 (0)	15139884 (+1)	25890158 (0)	3	
	4	24650700 (+1)	93598877 (-1)	27691113 (+1)	11752309 (0)	4	
	5	40514577 (+1)	22040685 (-1)	44267528 (+1)	32373627 (-1)	5	
	6	60704514 (+1)	33066847 (-2)	65141638 (+1)	54797313 (-2)	6	
	7	85599251 (+1)	30709142 (-3)	90698083 (+1)	56048163 (-3)	7	
	8	11573898 (+2)	16832163 (-4)	12148300 (+2)	33266637 (-4)	8	
	9	15191340 (+2)	50605643 (-6)	15829265 (+2)	10698173 (-5)	9	
	10	19533404 (+2)	74440741 (-8)	20234661 (+2)	16681596 (-7)	10	
	11	24801743 (+2)	44273822 (-10)	25567307 (+2)	10448308 (-9)	11	
	12	31383061 (+2)	74042020 (-13)	32215969 (+2)	18323081 (-12)	12	
	13	40267755 (+2)	13996670 (-16)	41176248 (+2)	36284664 (-16)	13	
14	1	0,70019328 (-1)	0,39039338 (0)	0,13226930 (0)	0,15637321 (0)	1	14
	2	45757553 (0)	43148011 (0)	59821265 (0)	30797378 (0)	2	
	3	11940247 (+1)	26483118 (0)	14087505 (+1)	26252808 (0)	3	
	4	22887740 (+1)	10536765 (0)	25738676 (+1)	13006996 (0)	4	
	5	37562557 (+1)	27870148 (-1)	41085687 (+1)	40376556 (-1)	5	
	6	56172071 (+1)	48790590 (-2)	60341084 (+1)	79972828 (-2)	6	
	7	79005218 (+1)	55403490 (-3)	83798632 (+1)	10025715 (-2)	7	
	8	10646245 (+2)	39431445 (-4)	11186351 (+2)	77424544 (-4)	8	
	9	13910616 (+2)	16705255 (-5)	14510309 (+2)	35143828 (-5)	9	
	10	17775084 (+2)	39019162 (-7)	18433754 (+2)	87121158 (-7)	10	
	11	22363905 (+2)	44657293 (-9)	23081668 (+2)	10507524 (-8)	11	
	12	27883246 (+2)	20594483 (-11)	28661294 (+2)	50800242 (-11)	12	
	13	34727883 (+2)	26394060 (-14)	35569353 (+2)	68028864 (-14)	13	
	14	43908643 (+2)	37016974 (-18)	44821630 (+2)	99653055 (-18)	14	
15	1	0,65463438 (-1)	0,37285889 (0)	0,12379530 (0)	0,14516379 (0)	1	15
	2	42768127 (0)	42246457 (0)	55970183 (0)	29439420 (0)	2	
	3	11154056 (+1)	27198064 (0)	13172880 (+1)	26424614 (0)	3	
	4	21362903 (+1)	11633342 (0)	24046825 (+1)	14122144 (0)	4	
	5	35019543 (+1)	33996584 (-1)	38339847 (+1)	48576862 (-1)	5	
	6	52288970 (+1)	67854504 (-2)	56221289 (+2)	10907797 (-1)	6	
	7	73397388 (+1)	91201094 (-3)	77921379 (+1)	16355758 (-2)	7	
	8	98651504 (+1)	80484862 (-4)	10375070 (+2)	15692060 (-3)	8	
	9	12846942 (+2)	44908439 (-5)	13413128 (+2)	93963622 (-5)	9	
	10	16343227 (+2)	15004570 (-6)	16964855 (+2)	33363608 (-6)	10	
	11	20437627 (+2)	27728406 (-8)	21114374 (+2)	65034349 (-8)	11	
	12	25257205 (+2)	25109136 (-10)	25989415 (+2)	61764847 (-10)	12	

Таблица 6 (продолжение)

k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
	$s = -\frac{1}{4}$		$s = \frac{1}{4}$			
3	31012323 (+2)	91216128 (-13)	31801345 (+2)	23434657 (-12)	13	15
4	38105384 (+2)	90971180 (-16)	38954412 (+2)	24347324 (-15)	14	
5	47566710 (+2)	96166583 (-20)	48483681 (+2)	26814621 (-19)	15	
	$s = \frac{1}{3}$		$s = \frac{2}{4}$			
1	0,13333333 (+1)	0,89297951 (0)	0,15000000 (+1)	0,88622692 (0)	1	1
1	0,80580810 (0)	0,73878591 (0)	0,91886117 (0)	0,72336302 (0)	1	2
2	38608586 (+1)	15419360 (0)	40811388 (+1)	16286390 (0)	2	
1	0,58046512 (0)	0,59023261 (0)	0,66632591 (0)	0,56718628 (0)	1	3
2	26321998 (+1)	29043933 (0)	28007750 (+1)	30537177 (0)	2	
3	67873351 (+1)	12307563 (-1)	70328990 (+1)	13668879 (-1)	3	
1	0,45424410 (0)	0,48039818 (0)	0,52352608 (0)	0,45300875 (0)	1	4
2	20192169 (+1)	36603741 (0)	21566488 (+1)	38161696 (0)	2	
3	49379857 (+1)	45845840 (-1)	51373876 (+1)	50794628 (-1)	3	
4	99218866 (+1)	69807919 (-3)	10182438 (+2)	80659115 (-3)	4	
1	0,37330743 (0)	0,39991389 (0)	0,43139881 (0)	0,37045057 (0)	1	5
2	16435057 (+1)	39970905 (0)	17597537 (+1)	41258437 (0)	2	
3	39353350 (+1)	88665364 (-1)	41044654 (+1)	97779820 (-1)	3	
4	75274254 (+1)	46587488 (-2)	77467038 (+1)	53734153 (-2)	4	
5	13187093 (+2)	32465483 (-4)	13457678 (+2)	38746281 (-4)	5	
1	0,31692793 (0)	0,33960439 (0)	0,36694988 (0)	0,30942410 (0)	1	6
2	13877181 (+1)	40896598 (0)	14885343 (+1)	41775215 (0)	2	
3	32867732 (+1)	13071371 (0)	34340080 (+1)	14328587 (0)	3	
4	61582620 (+1)	13332655 (-1)	63490679 (+1)	15332491 (-1)	4	
5	10307181 (+2)	36145182 (-3)	10540470 (+2)	43069120 (-3)	5	
6	16543138 (+2)	13236573 (-5)	16820970 (+2)	16234698 (-5)	6	
1	0,27537861 (0)	0,29323821 (0)	0,31930363 (0)	0,26312451 (0)	1	7
2	12017146 (+1)	40473746 (0)	12907586 (+1)	40914187 (0)	2	
3	28278507 (+1)	16726197 (0)	29583745 (+1)	18211773 (0)	3	
4	52396486 (+1)	26237602 (-1)	54090316 (+1)	30053324 (-1)	4	
5	85973973 (+1)	14809257 (-2)	88040796 (+1)	17608941 (-2)	5	
6	13224770 (+2)	23297577 (-4)	13468536 (+2)	28529471 (-4)	6	
7	19966573 (+2)	49101132 (-7)	20249916 (+2)	61660015 (-7)	7	
1	0,24347866 (0)	0,25674224 (0)	0,28263365 (0)	0,22713936 (0)	1	8
2	10601184 (+1)	39334643 (0)	11398738 (+1)	39359454 (0)	2	
3	24842246 (+1)	19693179 (0)	26015248 (+1)	21290897 (0)	3	
4	45716056 (+1)	41993787 (-1)	47241145 (+1)	47877483 (-1)	4	
5	74191504 (+1)	38311042 (-2)	76052563 (+1)	45425175 (-2)	5	
6	11198304 (+2)	13284105 (-3)	11417182 (+2)	16240460 (-3)	6	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
		$s = \frac{1}{3}$		$s = \frac{2}{4}$			
8	7	16247476 (+2)	13099754 (-5)	16499411 (+2)	16423774 (-5)	7	8
	8	23442309 (+2)	16956168 (-8)	23750004 (+2)	21739431 (-8)	8	
	1	0, 21821191 (0)	0, 22741892 (0)	0, 25353255 (0)	0, 19857125 (0)	1	2
	2	94861053 (0)	37839356 (0)	10208443 (+1)	37492078 (0)	2	
	3	22165425 (+1)	21993833 (0)	23230961 (+1)	23607482 (0)	3	
	4	40605431 (+1)	59150182 (-1)	41993506 (+1)	67096105 (-1)	4	
9	5	65444491 (+1)	76234728 (-2)	67139743 (+1)	90085089 (-2)	5	9
	6	97727692 (+1)	44482370 (-3)	99720092 (+1)	54266074 (-3)	6	
	7	13925472 (+2)	10148052 (-4)	14154054 (+2)	12705367 (-4)	7	
	8	19353395 (+2)	66285993 (-7)	19611903 (+2)	84843092 (-7)	8	
	9	26960006 (+2)	55347858 (-10)	27251236 (+2)	72286472 (-10)	9	
	1	0, 19770198 (0)	0, 20343734 (0)	0, 22987298 (0)	0, 17547081 (0)	1	
	2	85846575 (0)	36192438 (0)	92448155 (0)	35522339 (0)	2	
	3	20017738 (+1)	23711132 (0)	20994105 (+1)	25268356 (0)	3	
	4	36554505 (+1)	76535577 (-1)	37828809 (+1)	86356103 (-1)	4	
10	5	58641167 (+1)	12835292 (-1)	60199180 (+1)	15109778 (-1)	5	10
	6	85972072 (+1)	10915610 (-2)	88803476 (+1)	13282156 (-2)	6	
	7	12264966 (+2)	43354256 (-4)	12474832 (+2)	54187800 (-4)	7	
	8	16754338 (+2)	68349000 (-6)	16990847 (+2)	87374759 (-6)	8	
	9	22527075 (+2)	30830950 (-8)	22791003 (+2)	40196999 (-8)	9	
	10	30512238 (+2)	17260351 (-11)	30806406 (+2)	22922215 (-11)	10	
	1	0, 18071989 (0)	0, 18352221 (0)	0, 21025742 (0)	0, 15649200 (0)	1	
	2	78405140 (0)	34509627 (0)	84483942 (0)	33564608 (0)	2	
	3	18254528 (+1)	24942763 (0)	19155656 (+1)	26392773 (0)	3	
	4	33257207 (+1)	93329180 (-1)	34435373 (+1)	10473232 (0)	4	
	5	53174274 (+1)	19281822 (-1)	54616448 (+1)	22606489 (-1)	5	
11	6	78494970 (+1)	21886166 (-2)	80191127 (+1)	26553158 (-2)	6	11
	7	10995559 (+2)	13006642 (-3)	11189876 (+2)	16223744 (-3)	7	
	8	14870463 (+2)	36768448 (-5)	15089128 (+2)	46937429 (-5)	8	
	9	19667130 (+2)	41574238 (-7)	19910258 (+2)	54141153 (-7)	9	
	10	25757172 (+2)	13382443 (-9)	26025655 (+2)	17740722 (-9)	10	
	11	34093474 (+2)	51827792 (-13)	34390126 (+2)	69883381 (-13)	11	
	1	0, 16642678 (0)	0, 16676328 (0)	0, 19372964 (0)	0, 14068220 (0)	1	
	2	72156317 (0)	32855480 (0)	77789358 (0)	31679115 (0)	2	
	3	16779982 (+1)	25781218 (0)	17616741 (+1)	27090670 (0)	3	
	4	30517109 (+1)	10901648 (0)	31612880 (+1)	12166596 (0)	4	
	5	48572857 (+1)	26696479 (-1)	50015750 (+1)	31166902 (-1)	5	
12	6	71607058 (+1)	38136124 (-2)	73187576 (+1)	4620415 (-2)	6	12
	7	99841262 (+1)	30903234 (-3)	10165224 (+2)	38457022 (-3)	7	
	8	13414510 (+2)	13371940 (-4)	13618188 (+2)	17041889 (-4)	8	
	9	17570577 (+2)	27830982 (-6)	17966656 (+2)	36199779 (-6)	9	



Таблица 6 (продолжение)

n	k	$r_k$	$A_k$	$r_k$	$A_k$	k	n
		$s = \frac{1}{3}$		$s = \frac{2}{4}$			
12	10	22650545 (+2)	23240429 (-8)	22899291 (+2)	30774991 (-8)	10	
	11	29035083 (+2)	54821211 (-11)	29307459 (+2)	73785336 (-11)	11	12
	12	37699469 (+2)	15072911 (-14)	37998255 (+2)	20609672 (-14)	12	
	1	0, 15423040 (0)	0, 15249621 (0)	0, 17961314 (0)	0, 12735193 (0)	1	
	2	66833637 (0)	31264776 (0)	72082026 (0)	29895369 (0)	2	
	3	15527954 (+1)	26306724 (0)	16308997 (+1)	27455570 (0)	3	
	4	28201663 (+1)	12331514 (0)	29225979 (+1)	13687072 (0)	4	
	5	44895038 (+1)	34791488 (-1)	46151785 (+1)	40440777 (-1)	5	
	6	65881580 (+1)	59999737 (-2)	67361860 (+1)	72315599 (-2)	6	
13	7	91546874 (+1)	62302534 (-3)	93243656 (+1)	77331775 (-3)	7	13
	8	12243802 (+2)	37445502 (-4)	12434618 (+2)	47631572 (-4)	8	
	9	15935234 (+2)	12171231 (-5)	16146885 (+2)	15809093 (-5)	9	
	10	20351075 (+2)	19155538 (-7)	20583522 (+2)	25338446 (-7)	10	
	11	25694334 (+2)	12097529 (-9)	25947919 (+2)	16264766 (-9)	11	
	12	32354119 (+2)	21377618 (-12)	32629864 (+2)	29176139 (-12)	12	
	13	41326891 (+2)	42651477 (-16)	41627532 (+2)	59075955 (-16)	13	
	1	0, 14370063 (0)	0, 14022638 (0)	0, 16741570 (0)	0, 11599194 (0)	1	
	2	62244759 (0)	29754856 (0)	67157809 (0)	28225446 (0)	2	
	3	14451225 (+1)	26585920 (0)	15183557 (+1)	27563877 (0)	3	
	4	26217848 (+1)	13610507 (0)	27179575 (+1)	15024682 (0)	4	
	5	41675276 (+1)	43295305 (-1)	42856497 (+1)	50103561 (-1)	5	
	6	61036878 (+1)	87409376 (-2)	62429305 (+1)	10498018 (-1)	6	
14	7	84597190 (+1)	11128930 (-2)	86194001 (+1)	13775398 (-2)	7	14
	8	11276216 (+2)	87057375 (-4)	11455823 (+2)	11050455 (-3)	8	
	9	14609997 (+2)	39950861 (-5)	14809157 (+2)	51809219 (-5)	9	
	10	18543171 (+2)	99981332 (-7)	18761704 (+2)	13209412 (-6)	10	
	11	23200839 (+2)	12160086 (-8)	23438802 (+2)	16332767 (-8)	11	
	12	28790422 (+2)	59237099 (-11)	29048225 (+2)	80760297 (-11)	12	
	13	35708964 (+2)	79889966 (-14)	35987656 (+2)	11044615 (-13)	13	
	14	44973068 (+2)	11785348 (-17)	45275339 (+2)	16520617 (-17)	14	
	1	0, 13451753 (0)	0, 12957889 (0)	0, 15677065 (0)	0, 10621922 (0)	1	
	2	58247302 (0)	28332838 (0)	62865390 (0)	26671621 (0)	2	
	3	13515141 (+1)	26672885 (0)	14204516 (+1)	27476633 (0)	3	
	4	24498292 (+1)	14737305 (0)	25404721 (+1)	16181400 (0)	4	
	5	38895919 (+1)	51971665 (-1)	40010343 (+1)	59877878 (-1)	5	
	6	56878053 (+1)	11998495 (-1)	58102767 (+1)	14358289 (-1)	6	
	7	78675568 (+1)	18128884 (-2)	80184142 (+1)	22374728 (-2)	7	
15	8	10459968 (+2)	17624000 (-3)	10629691 (+2)	22319381 (-3)	8	15
	9	13507304 (+2)	10672070 (-4)	13695502 (+2)	13815235 (-4)	9	
	10	17068179 (+2)	38262394 (-6)	17274595 (+2)	50483236 (-6)	10	
	11	21226799 (+2)	75222679 (-8)	21451344 (+2)	10092823 (-7)	11	
	12	26111002 (+2)	71989495 (-10)	26353804 (+2)	98055836 (-10)	12	
	13	31932322 (+2)	27505900 (-12)	32193838 (+2)	37985874 (-12)	13	
	14	33095314 (+2)	28766424 (-15)	39376613 (+2)	40247694 (-15)	14	
	15	48635825 (+2)	31892424 (-19)	48939540 (+2)	45210038 (-19)	15	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
		$s = \frac{2}{3}$		$s = \frac{3}{4}$			
1	1	0,16666667(+1)	0,90274529(0)	0,17500000(+1)	0,91906253(0)	1	1
2	1	0,10336735(+1)	0,72778081(0)	0,10916876(+1)	0,73663904(0)	1	2
	2	42996598(+1)	17496448(0)	44083124(+1)	18242348(0)	2	
3	1	0,75427532(0)	0,56075875(0)	0,79898261(0)	0,56288181(0)	1	3
	2	29691487(+1)	32661771(0)	30532697(+1)	33981262(0)	2	
	3	72765760(+1)	15368829(-1)	73977477(+1)	16368100(-1)	3	
4	1	0,59488312(0)	0,43995122(0)	0,63129651(0)	0,43784806(0)	1	4
	2	22945374(+1)	40487699(0)	23636492(+1)	41958543(0)	2	
	3	53360190(+1)	56976096(-1)	54350628(+1)	60609148(-1)	3	
	4	10441227(+2)	94098207(-3)	10569991(+2)	10198833(-2)	4	
5	1	0,49145764(0)	0,35370456(0)	0,52218851(0)	0,34913209(0)	1	5
	2	18767642(+1)	43355312(0)	19355471(+1)	44721488(0)	2	
	3	42734423(+1)	10918335(0)	43578234(+1)	11588791(0)	3	
	4	79650375(+1)	62576509(-2)	80738660(+1)	67763809(-2)	4	
	5	13726662(+2)	46608208(-4)	13860575(+2)	51265013(-4)	5	
6	1	0,41881027(0)	0,29078035(0)	0,44539919(0)	0,28481615(0)	1	6
	2	15902573(+1)	43457822(0)	16414491(+1)	44607500(0)	2	
	3	35813953(+1)	15906376(0)	36551475(+1)	16834877(0)	3	
	4	65394118(+1)	17803698(-1)	66344188(+1)	19251880(-1)	4	
	5	10772777(+2)	51725735(-3)	10888575(+2)	56848652(-3)	5	
	6	17097349(+2)	20045210(-5)	17235010(+2)	22328043(-5)	6	
7	1	0,36494021(0)	0,24364788(0)	0,38837410(0)	0,23694055(0)	1	7
	2	13807727(+1)	42134049(0)	14261337(+1)	43035690(0)	2	
	3	30892521(+1)	20084979(0)	31548222(+1)	21189181(0)	3	
	4	55782588(+1)	34761466(-1)	56628182(+1)	37517006(-1)	4	
	5	90101737(+1)	21104133(-2)	91130084(+1)	23170286(-2)	5	
	6	13711333(+2)	35170381(-4)	13832380(+2)	39145045(-4)	6	
	7	20531936(+2)	77879999(-7)	20672463(+2)	87711398(-7)	7	
8	1	0,32338289(0)	0,20746193(0)	0,34433265(0)	0,20040363(0)	1	8
	2	12206197(+1)	40133450(0)	12613547(+1)	40793985(0)	2	
	3	27193024(+1)	23319177(0)	27783675(+1)	24517942(0)	3	
	4	48766702(+1)	55126112(-1)	49529674(+1)	59362650(-1)	4	
	5	77910412(+1)	54290281(-2)	78838182(+1)	59523504(-2)	5	
	6	11635418(+2)	19987984(-3)	11744302(+2)	22228701(-3)	6	
	7	16750412(+2)	20710818(-5)	16875573(+2)	23306662(-5)	7	
	8	24016486(+2)	28014437(-8)	24159284(+2)	31861141(-8)	8	
9	1	0,29034150(0)	0,17906745(0)	0,30928421(0)	0,17189698(0)	1	9
	2	10940655(+1)	37864219(0)	11310376(+1)	38306681(0)	2	
	3	24302030(+1)	25675117(0)	24839606(+1)	26901807(0)	3	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n	
		$s = \frac{2}{3}$		$s = \frac{3}{4}$				
9	4	43383425 (+1)	76871145 (-1)	44079080 (+1)	82576358 (-1)	4	9	
	5	68833662 (+1)	10730755 (-1)	69680152 (+1)	11745774 (-1)	5		
	6	10170837 (+2)	66647463 (-3)	10270102 (+2)	74041434 (-3)	6		
	7	14381974 (+2)	15999578 (-4)	14495693 (+2)	17992472 (-4)	7		
	8	19869520 (+2)	10915157 (-6)	19998002 (+2)	12403706 (-6)	8		
	9	27541350 (+2)	94840070 (-10)	27685997 (+2)	10881464 (-9)	9		
	1	0, 26343737 (0)	0, 15635979 (0)	0, 28072450 (0)	0, 14922289 (0)	1		10
	2	99146878 (0)	35544820 (0)	10253185 (+1)	35797260 (0)	2		
	3	21976464 (+1)	27288739 (0)	22469856 (+1)	28493714 (0)	3		
4	39105908 (+1)	98422092 (-1)	39745500 (+1)	10545525 (0)	4			
5	61757213 (+1)	17931450 (-1)	62536252 (+1)	19591467 (-1)	5			
6	90632455 (+1)	16271162 (-2)	91546068 (+1)	18053550 (-2)	6			
7	12684238 (+2)	68123012 (-4)	12788772 (+2)	76544474 (-4)	7			
8	17226697 (+2)	11226909 (-5)	17344380 (+2)	12750073 (-5)	8			
9	23054083 (+2)	52648420 (-8)	23185312 (+2)	60354780 (-8)	9			
10	31099539 (+2)	30566955 (-11)	31245726 (+2)	35351620 (-11)	10			
11	1	0, 24110348 (0)	0, 13789800 (0)	0, 25700149 (0)	0, 13088299 (0)	1	11	
	2	90657581 (0)	33288965 (0)	93779206 (0)	33379292 (0)	2		
	3	20063043 (+1)	28305432 (0)	20519046 (+1)	29454206 (0)	3		
	4	35616999 (+1)	11872924 (0)	36209098 (+1)	12687850 (0)	4		
	5	56059631 (+1)	26720973 (-1)	56781609 (+1)	29137038 (-1)	5		
	6	81886126 (+1)	32434692 (-2)	82733214 (+1)	35936202 (-2)	6		
	7	11383882 (+2)	20354884 (-3)	11480772 (+2)	22848341 (-3)	7		
	8	15307307 (+2)	60226428 (-5)	15416219 (+2)	68349874 (-5)	8		
	9	20152735 (+2)	70829979 (-7)	20273735 (+2)	81150834 (-7)	9		
	10	26293334 (+2)	23615800 (-9)	26426877 (+2)	27288540 (-9)	10		
	11	34685816 (+2)	94583805 (-13)	34833306 (+2)	11018960 (-12)	11		
12	1	0, 22226506 (0)	0, 12267080 (0)	0, 23698082 (0)	0, 11583002 (0)	1	12	
	2	83514568 (0)	31152477 (0)	86411037 (0)	31106265 (0)	2		
	3	18459895 (+1)	28856109 (0)	18883834 (+1)	29926293 (0)	3		
	4	32712575 (+1)	13718338 (0)	33263879 (+1)	14620928 (0)	4		
	5	51360389 (+1)	36685694 (-1)	52033364 (+1)	39920195 (-1)	5		
	6	74767901 (+1)	56158615 (-2)	75558005 (+1)	62124189 (-2)	6		
	7	10346130 (+2)	48138289 (-3)	10436512 (+2)	53973394 (-3)	7		
	8	13821514 (+2)	21830850 (-4)	13923049 (+2)	24755176 (-4)	8		
	9	18022257 (+2)	47301171 (-6)	18194870 (+2)	54161017 (-6)	9		
	10	23147403 (+2)	40921234 (-8)	23271226 (+2)	47259231 (-8)	10		
	11	29579069 (+2)	99685123 (-11)	29714592 (+2)	11602874 (-10)	11		
	12	38296141 (+2)	28277753 (-14)	38444752 (+2)	33165476 (-14)	12		
13	1	0, 20616020 (0)	0, 10995216 (0)	0, 21985752 (0)	0, 10331512 (0)	1	13	
	2	77419757 (0)	29159205 (0)	80121480 (0)	28998944 (0)	2		
	3	17096484 (+1)	29050165 (0)	17492610 (+1)	30028463 (0)	3		

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n		
		$s = \frac{2}{3}$		$s = \frac{3}{4}$					
13	4	30254542 (+1)	15349699 (0)	30770399 (+1)	16316097 (0)	4	13		
	5	47410828 (+1)	47397824 (-1)	48041207 (+1)	51467478 (-1)	5			
	6	68842692 (+1)	87760975 (-2)	69583323 (+1)	96922902 (-2)	6			
	7	94939417 (+1)	96553233 (-3)	95786932 (+1)	10812043 (-2)	7			
	8	12625188 (+2)	60901448 (-4)	12720383 (+2)	68994712 (-4)	8			
	9	16358159 (+2)	20628698 (-5)	16463657 (+2)	23604111 (-5)	9			
	10	20815470 (+2)	33656122 (-7)	20931260 (+2)	38848053 (-7)	10			
	11	26200889 (+2)	60950250 (-9)	26327147 (+2)	25353303 (-9)	11			
	12	32904880 (+2)	39957978 (-12)	33042119 (+2)	46821844 (-12)	12			
	13	41927328 (+2)	82087128 (-16)	42076914 (+2)	96877008 (-16)	13			
	14	1	0, 19223364 (0)	0, 99210054 (-1)	0, 20504447 (0)	0, 92791677 (-1)		1	14
		2	72157337 (0)	27315481 (0)	74688932 (0)	27060520 (0)		2	
		3	15922324 (+1)	28975556 (0)	16294086 (+1)	29855249 (0)		3	
4		28145769 (+1)	16759796 (0)	28630523 (+1)	17767892 (0)	4			
5		44040428 (+1)	58467829 (-1)	44633404 (+1)	63351447 (-1)	5			
6		63822863 (+1)	12695916 (-1)	64520070 (+1)	13997169 (-1)	6			
7		87790634 (+1)	17152435 (-2)	88588820 (+1)	19181318 (-2)	7			
8		11635269 (+2)	14099429 (-3)	11724934 (+2)	15956496 (-3)	8			
9		15008038 (+2)	67497195 (-5)	15107375 (+2)	77172127 (-5)	9			
10		18979846 (+2)	17524640 (-6)	19088774 (+2)	20216038 (-6)	10			
11		23676270 (+2)	22020365 (-8)	23794820 (+2)	25604309 (-8)	11			
12		29305432 (+2)	11048696 (-10)	29433816 (+2)	12939737 (-10)	12			
13		36265656 (+2)	15318065 (-13)	36404400 (+2)	18061208 (-13)	13			
14		45576814 (+2)	23227423 (-17)	45727257 (+2)	27571893 (-17)	14			
15	1	0, 18007106 (0)	0, 90047394 (-1)	0, 19210324 (0)	0, 83853239 (-1)	1	15		
	2	67567127 (0)	25618269 (0)	69948809 (0)	25285044 (0)	2			
	3	14900276 (+1)	28701489 (0)	15250517 (+1)	29480471 (0)	3			
	4	26315763 (+1)	17954845 (0)	26772996 (+1)	18985095 (0)	4			
	5	41127789 (+1)	69568696 (-1)	41687637 (+1)	75216474 (-1)	5			
	6	59509068 (+1)	17302406 (-1)	60167813 (+1)	19042054 (-1)	6			
	7	81692997 (+1)	27779878 (-2)	82447537 (+1)	31021586 (-2)	7			
	8	10799324 (+2)	28412992 (-3)	10884107 (+2)	32119112 (-3)	8			
	9	13883498 (+2)	17966865 (-4)	13977423 (+2)	20524246 (-4)	9			
	10	17480708 (+2)	66884745 (-6)	17583653 (+2)	77105005 (-6)	10			
	11	21675490 (+2)	13593144 (-7)	21787416 (+2)	15797212 (-7)	11			
	12	26596116 (+2)	13402558 (-9)	26717092 (+2)	15689283 (-9)	12			
	13	32454779 (+2)	52627819 (-12)	32858036 (+2)	62019587 (-12)	13			
	14	39657250 (+2)	56479957 (-15)	39797324 (+2)	66981042 (-15)	14			
	15	49242504 (+2)	64267136 (-19)	49393707 (+2)	76703170 (-19)	15			
		$s = \frac{5}{4}$		$s = \frac{4}{3}$					
1	1	0, 22500000 (+1)	0, 11330031 (+1)	0, 23333333 (+1)	0, 11305393 (+1)	1	1		
2	1	0, 14472244 (+1)	0, 88074007 (0)	0, 15075915 (+1)	0, 92138969 (0)	1	2		
	2	50527756 (+1)	25226303 (0)	51590752 (+1)	26924966 (0)	2			

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$\Delta_k$	$x_k$	$\Delta_k$	k	n
		$s = \frac{5}{4}$		$s = \frac{4}{3}$			
3	1	0, 10764151 (◊)	0, 64346366 (0)	0, 11240498 (+1)	0, 66863659 (0)	1	3
	2	35572597 (+1)	46427021 (0)	36411569 (+1)	49459881 (0)	2	
	3	81163251 (+1)	25269221 (-1)	82347934 (+1)	27403946 (-1)	3	
4	1	0, 85913577 (0)	0, 47750944 (0)	0, 89854878 (0)	0, 49262916 (0)	1	4
	2	27805600 (+1)	56083798 (0)	28504023 (+1)	59544403 (0)	2	
	3	60258828 (+1)	92925650 (-1)	61238260 (+1)	10066334 (0)	3	
	4	11334421 (+2)	17300195 (-2)	11460556 (+2)	19028163 (-2)	4	
5	1	0, 71560439 (0)	0, 36372855 (0)	0, 74924236 (0)	0, 37259540 (0)	1	5
	2	22919227 (+1)	58230912 (0)	23519021 (+1)	61571170 (0)	2	
	3	48635467 (+1)	17543643 (0)	49477262 (+1)	18966127 (0)	3	
	4	87224513 (+1)	11434703 (-1)	88298649 (+1)	12565994 (-1)	4	
	5	14656475 (+2)	94279371 (-4)	14787931 (+2)	10498501 (-3)	5	
6	1	0, 61348293 (0)	0, 28413433 (0)	0, 64283223 (0)	0, 28909438 (0)	1	6
	2	19529861 (+1)	56489038 (0)	20056063 (+1)	59468427 (0)	2	
	3	40984951 (+1)	25071737 (0)	41725264 (+1)	27034231 (0)	3	
	4	72023368 (+1)	32216063 (-1)	72966602 (+1)	33355626 (-1)	4	
	5	11578703 (+2)	10405460 (-2)	11692989 (+2)	11577987 (-2)	5	
	6	18053997 (+2)	44055002 (-5)	18189386 (+2)	49595415 (-5)	6	
7	1	0, 53701736 (0)	0, 22694023 (0)	0, 56305474 (0)	0, 22942544 (0)	1	7
	2	17030151 (+1)	52987838 (0)	17499139 (+1)	55534923 (0)	2	
	3	35500403 (+1)	30980416 (0)	36162025 (+1)	33307519 (0)	3	
	4	61695053 (+1)	62087970 (-1)	62538533 (+1)	68017183 (-1)	4	
	5	97272297 (+1)	42152898 (-2)	98291607 (+1)	46856236 (-2)	5	
	6	14554000 (+2)	76877672 (-4)	14673528 (+2)	86479590 (-4)	6	
	7	21509193 (+2)	18415223 (-6)	21647620 (+2)	20933777 (-6)	7	
8	1	0, 47758047 (0)	0, 18475631 (0)	0, 50097992 (0)	0, 18565341 (0)	1	8
	2	15106026 (+1)	48853542 (0)	15529176 (+1)	50976538 (0)	2	
	3	31351547 (+1)	35155565 (0)	31950077 (+1)	37678793 (0)	3	
	4	54110550 (+1)	96974155 (-1)	54874577 (+1)	10601348 (0)	4	
	5	84389771 (+1)	10742239 (-1)	85312681 (+1)	11925284 (-1)	5	
	6	12394512 (+2)	43444693 (-3)	12502388 (+2)	48832034 (-3)	6	
	7	17621991 (+2)	48701641 (-5)	17745667 (+2)	55319207 (-5)	7	
	8	25010127 (+2)	70713475 (-8)	25150980 (+2)	81092137 (-8)	8	
9	1	0, 43003422 (0)	0, 15290211 (0)	0, 45128275 (0)	0, 15277146 (0)	1	9
	2	13577146 (+1)	44651210 (0)	13962709 (+1)	46390938 (0)	2	
	3	28092784 (+1)	37812206 (0)	28639471 (+1)	40396838 (0)	3	
	4	48262736 (+1)	13299566 (0)	48961627 (+1)	14506110 (0)	4	
	5	74753149 (+1)	20995220 (-1)	75597745 (+1)	23271246 (-1)	5	
	6	10863713 (+2)	14382285 (-2)	10962334 (+2)	16149534 (-2)	6	
	7	15174784 (+2)	37442696 (-4)	15287450 (+2)	42501527 (-4)	7	
	8	20764521 (+2)	27395243 (-6)	20891571 (+2)	31390924 (-6)	8	
	9	28548367 (+2)	25393459 (-9)	28691207 (+2)	29353365 (-9)	9	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
		$s = \frac{5}{4}$		$s = \frac{4}{3}$			
10	1	0,39112482 (0)	0,12834287 (0)	0,41058558 (0)	0,12754575 (0)	1	10
	2	12332016 (+1)	40648296 (0)	12686177 (+1)	42055393 (0)	2	
	3	25460238 (+1)	39256101 (0)	25963503 (+1)	41804788 (0)	3	
	4	43597445 (+1)	16732859 (0)	44241800 (+1)	18207027 (0)	4	
	5	67211149 (+1)	34645308 (-1)	67990451 (+1)	38334427 (-1)	5	
	6	97016231 (+1)	34810312 (-2)	97926109 (+1)	39040711 (-2)	6	
	7	13413733 (+2)	15850691 (-3)	13517534 (+2)	17977696 (-3)	7	
	8	18047229 (+2)	28056522 (-5)	18163849 (+2)	32129045 (-5)	8	
	9	23968496 (+2)	14014098 (-7)	24098351 (+2)	16186142 (-7)	9	
	10	32117709 (+2)	86359645 (-11)	32262210 (+2)	10055778 (-10)	10	
11	1	0,35868924 (0)	0,10905898 (0)	0,37664036 (0)	0,10783254 (0)	1	11
	2	11297771 (+1)	36957793 (0)	11625294 (+1)	38082392 (0)	2	
	3	23286472 (+1)	39781510 (0)	23752804 (+1)	42229053 (0)	3	
	4	39779363 (+1)	19825922 (0)	40377301 (+1)	21519261 (0)	4	
	5	61119004 (+1)	50935073 (-1)	61842838 (+1)	50253619 (-1)	5	
	6	87810446 (+1)	68712651 (-2)	88655834 (+1)	76358083 (-2)	6	
	7	12060611 (+2)	47036263 (-3)	12157011 (+2)	53296722 (-3)	7	
	8	16067296 (+2)	14978472 (-4)	16175424 (+2)	17141008 (-4)	8	
	9	20996520 (+2)	18778178 (-6)	21116466 (+2)	21676273 (-6)	9	
	10	27224133 (+2)	65319406 (-9)	27356361 (+2)	77157452 (-9)	10	
	11	35713446 (+2)	28073046 (-12)	35859358 (+2)	32909124 (-12)	11	
12	1	0,33123254 (0)	0,93672078 (-1)	0,34789181 (0)	0,92174362 (-1)	1	12
	2	10424681 (+1)	33614205 (0)	10723214 (+1)	34501535 (0)	2	
	3	21459604 (+1)	39636329 (0)	21894118 (+1)	41942360 (0)	3	
	4	36591688 (+1)	22494947 (0)	37149592 (+1)	24355078 (0)	4	
	5	56080377 (+1)	68948815 (-1)	56756400 (+1)	75999547 (-1)	5	
	6	80298100 (+1)	11770491 (-1)	81088066 (+1)	13163343 (-1)	6	
	7	10977878 (+2)	11036608 (-2)	11067958 (+2)	12491829 (-2)	7	
	8	14530530 (+2)	53987774 (-4)	14631500 (+2)	61733286 (-4)	8	
	9	18808085 (+2)	12488048 (-5)	18919891 (+2)	14406856 (-5)	9	
	10	24011010 (+2)	11447700 (-7)	24133796 (+2)	13311257 (-7)	10	
	11	30523910 (+2)	29404914 (-10)	30658176 (+2)	34440573 (-10)	11	
	12	39331910 (+2)	87842204 (-14)	39479037 (+2)	10361914 (-13)	12	
13	1	0,30768799 (0)	0,81219271 (-1)	0,32322915 (0)	0,79556858 (-1)	1	13
	2	96775963 (0)	30612398 (0)	99623461 (0)	31302297 (0)	2	
	3	19901796 (+1)	39016520 (0)	20308599 (+1)	41158730 (0)	3	
	4	33887148 (+1)	24716102 (0)	34410138 (+1)	26692648 (0)	4	
	5	51835381 (+1)	87797576 (-1)	52469706 (+1)	96581197 (-1)	5	
	6	74030269 (+1)	18186363 (-1)	74771973 (+1)	20306337 (-1)	6	
	7	10286726 (+2)	21945344 (-2)	10171324 (+2)	24808869 (-2)	7	
	8	13290358 (+2)	14963829 (-3)	13385162 (+2)	17095154 (-3)	8	
	9	17094784 (+2)	54202786 (-5)	17199671 (+2)	62489087 (-5)	9	
	10	21623514 (+2)	93802332 (-7)	21738488 (+2)	10901466 (-6)	10	
	11	27081621 (+2)	64506431 (-9)	27206868 (+2)	75513246 (-9)	11	
	12	33861906 (+2)	12334600 (-11)	33997944 (+2)	14537105 (-11)	12	
	13	42970183 (+2)	26602208 (-15)	43118370 (+2)	31563171 (-15)	13	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
		$s = \frac{5}{4}$		$s = \frac{4}{3}$			
14	1	0, 28727376 ( 0)	0, 71013430 ( - 1)	0, 30183765 ( 0)	0, 69258824 ( - 1)	1	14
	2	90309450 ( 0)	27930508 ( 0)	92982582 ( 0)	28456237 ( 0)	2	
	3	18557098 ( +1)	38071603 ( 0)	18939545 ( +1)	40040282 ( 0)	3	
	4	31561774 ( +1)	26502642 ( 0)	32054032 ( +1)	28550403 ( 0)	4	
	5	48205227 ( +1)	10671784 ( 0)	48802829 ( +1)	11715430 ( 0)	5	
	6	68709359 ( +1)	25999814 ( - 1)	69408578 ( +1)	28982856 ( - 1)	6	
	7	93376784 ( +1)	38623897 ( - 2)	94174619 ( +1)	43607015 ( - 2)	7	
	8	12262149 ( +2)	34395299 ( - 3)	12351561 ( +2)	39254820 ( - 3)	8	
	9	15702019 ( +2)	17639098 ( - 4)	15800903 ( +2)	20320169 ( - 4)	9	
	10	19740390 ( +2)	48641314 ( - 6)	19848677 ( +2)	56496713 ( - 6)	10	
	11	24503647 ( +2)	64491759 ( - 8)	24621383 ( +2)	75459483 ( - 8)	11	
	12	30201130 ( +2)	33980415 ( - 10)	30328530 ( +2)	40027130 ( - 10)	12	
	13	37233371 ( +2)	49324741 ( - 13)	37370965 ( +2)	58470583 ( - 13)	13	
	14	46625902 ( +2)	78308685 ( - 17)	46775023 ( +2)	93419639 ( - 17)	14	
15	1	0, 26940361 ( 0)	0, 62554709 ( - 1)	0, 28310602 ( 0)	0, 60757489 ( - 1)	1	15
	2	84656647 ( 0)	25538826 ( 0)	87175613 ( 0)	25928419 ( 0)	2	
	3	17384201 ( +1)	36913176 ( 0)	17745064 ( +1)	38707094 ( 0)	3	
	4	29539864 ( +1)	27888406 ( 0)	30004849 ( +1)	29968695 ( 0)	4	
	5	45062257 ( +1)	12510826 ( 0)	45627248 ( +1)	13706016 ( 0)	5	
	6	64128601 ( +1)	35005262 ( - 1)	64790114 ( +1)	38955537 ( - 1)	6	
	7	86976512 ( +1)	61944561 ( - 2)	87731650 ( +1)	60840823 ( - 2)	7	
	8	11392378 ( +2)	68776716 ( - 3)	11477022 ( +2)	78408545 ( - 3)	8	
	9	14539982 ( +2)	46670078 ( - 4)	14633583 ( +2)	53718151 ( - 4)	9	
	10	18199818 ( +2)	18478356 ( - 5)	18302268 ( +2)	21448479 ( - 5)	10	
	11	22456982 ( +2)	39665566 ( - 7)	22568253 ( +2)	46387258 ( - 7)	11	
	12	27440493 ( +2)	41088294 ( - 9)	27560660 ( +2)	48377890 ( - 9)	12	
	13	33363683 ( +2)	16884248 ( - 11)	33492986 ( +2)	20004544 ( - 11)	13	
	14	40634428 ( +2)	18918405 ( - 14)	40773402 ( +2)	22548471 ( - 14)	14	
	15	50297124 ( +2)	22485158 ( - 18)	50447072 ( +2)	26961723 ( - 18)	15	
		$s = \frac{6}{4}$		$s = \frac{5}{3}$			
1	1	0, 25000000 ( +1)	0, 13293404 ( +1)	0, 26666667 ( +1)	0, 15045755 ( +1)	1	1
	2	0, 16291713 ( +1)	0, 10199514 ( +1)	0, 17518124 ( +1)	0, 11451572 ( +1)	1	
3	2	53708287 ( +1)	30938903 ( 0)	55815209 ( +1)	35941828 ( 0)	2	3
	1	0, 12204023 ( +1)	0, 73063789 ( 0)	0, 13181274 ( +1)	0, 81031496 ( 0)	1	
	2	38088807 ( +1)	56624910 ( 0)	39765201 ( +1)	65548521 ( 0)	2	
4	3	84707170 ( +1)	32453393 ( - 1)	87053524 ( +1)	38775315 ( - 1)	3	4
	1	0, 97850727 ( 0)	0, 53086990 ( 0)	0, 10599100 ( +1)	0, 58097893 ( 0)	1	
	2	29903773 ( +1)	67720655 ( 0)	31307286 ( +1)	77894545 ( 0)	2	
	3	63193005 ( +1)	11894878 ( 0)	65142514 ( +1)	14181232 ( 0)	3	
4	11711815 ( +2)	23151576 ( - 2)	11961777 ( +2)	28377842 ( - 2)	4		

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$\varepsilon_k$	$A_k$	$\varepsilon_k$	$A_k$	k	n
		$\varepsilon = \frac{6}{4}$		$\varepsilon = \frac{5}{3}$			
5	1	0, 81763176 (0)	0, 39603109 (0)	0, 88744808 (0)	0, 42771268 (0)	1	5
	2	24723339 (+1)	69468795 (0)	25933774 (+1)	79291155 (0)	2	
	3	51160061 (+1)	22322760 (0)	52841885 (+1)	26511044 (0)	3	
	4	90441465 (+1)	15262934 (-1)	92577280 (+1)	18676767 (-1)	4	
	5	15049882 (+2)	13081939 (-3)	15310591 (+2)	16404792 (-3)	5	
6	1	0, 70260181 (0)	0, 30324550 (0)	0, 76374668 (0)	0, 32334936 (0)	1	6
	2	21114136 (+1)	66524899 (0)	22179553 (+1)	75303914 (0)	2	
	3	43207088 (+1)	31656955 (0)	44690501 (+1)	37410299 (0)	3	
	4	74850457 (+1)	42829562 (-1)	76730964 (+1)	52272349 (-1)	4	
	5	11920967 (+2)	14404691 (-2)	12148179 (+2)	18035738 (-2)	5	
	6	18459263 (+2)	63122181 (-5)	18727973 (+2)	80784428 (-5)	6	
7	1	0, 61614619 (0)	0, 23765784 (0)	0, 67054927 (0)	0, 25035042 (0)	1	7
	2	18443251 (+1)	61585848 (0)	19395325 (+1)	69125106 (0)	2	
	3	37487706 (+1)	38778931 (0)	38816580 (+1)	45569848 (0)	3	
	4	64224733 (+1)	82106463 (-1)	65909984 (+1)	99864183 (-1)	4	
	5	10032669 (+2)	58181184 (-2)	10235719 (+2)	72705524 (-2)	5	
	6	14911982 (+2)	10989857 (-3)	15149653 (+2)	14043679 (-3)	6	
	7	21923634 (+2)	27153335 (-6)	22198556 (+2)	35394200 (-6)	7	
8	1	0, 54874202 (0)	0, 19005056 (0)	0, 59774971 (0)	0, 19790642 (0)	1	8
	2	16381811 (+1)	56043805 (0)	17242680 (+1)	62376359 (0)	2	
	3	33150360 (+1)	43600698 (0)	34354862 (+1)	50930630 (0)	3	
	4	56403131 (+1)	12744857 (0)	57932367 (+1)	15438958 (0)	4	
	5	87156616 (+1)	14769469 (-1)	88998125 (+1)	18409751 (-1)	5	
	6	12717739 (+2)	61957941 (-3)	12932570 (+2)	79050669 (-3)	6	
	7	17992425 (+2)	71643889 (-5)	18238408 (+2)	93244104 (-5)	7	
	8	25431902 (+2)	10700307 (-7)	25711802 (+2)	14181741 (-7)	8	
9	1	0, 49469153 (0)	0, 15465064 (0)	0, 53928170 (0)	0, 15929617 (0)	1	9
	2	14740211 (+1)	50571774 (0)	15526017 (+1)	55821827 (0)	2	
	3	29736569 (+1)	46453023 (0)	30838544 (+1)	53929729 (0)	3	
	4	50360784 (+1)	17360829 (0)	51761759 (+1)	20938067 (0)	4	
	5	77286235 (+1)	28733120 (-1)	78973838 (+1)	35707081 (-1)	5	
	6	11159322 (+2)	20449746 (-2)	11355980 (+2)	26040087 (-2)	6	
	7	15512360 (+2)	54969353 (-4)	15736721 (+2)	71446267 (-4)	7	
	8	21145093 (+2)	41355276 (-6)	21397860 (+2)	54724234 (-6)	8	
	9	28976153 (+2)	39341958 (-9)	29260142 (+2)	52940984 (-9)	9	
10	1	0, 45037061 (0)	0, 12775771 (0)	0, 49127638 (0)	0, 13024354 (0)	1	10
	2	13400827 (+1)	45468988 (0)	14123728 (+1)	49785956 (0)	2	
	3	26974075 (+1)	47768566 (0)	27989941 (+1)	55113904 (0)	3	
	4	45332499 (+1)	21686940 (0)	46825822 (+1)	26034056 (0)	4	
	5	69549221 (+1)	47169491 (-1)	71108232 (+1)	58420576 (-1)	5	
	6	99744400 (+1)	49318666 (-2)	10156800 (+2)	62653467 (-2)	6	
	7	13724842 (+2)	23214091 (-3)	13931768 (+2)	30124404 (-3)	7	
	8	18396659 (+2)	42276274 (-5)	18628908 (+2)	55875360 (-5)	8	



Таблица 6 (продолжение)

k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
	$s = \frac{6}{4}$		$s = \frac{5}{3}$			
9	24357503 (+2)	21658611 (-7)	24615925 (+2)	29097946 (-7)	9	10
0	32550523 (+2)	13672143 (-10)	32837937 (+2)	18657245 (-10)	10	10
1	0, 41336148 (0)	0, 10693742 (0)	0, 45114693 (0)	0, 10795641 (0)	1	
2	12286564 (+1)	40845964 (0)	12955961 (+1)	44375332 (0)	2	
3	24689702 (+1)	47950107 (0)	25632150 (+1)	54982203 (0)	3	
4	41575604 (+1)	25507333 (0)	42777104 (+1)	30473615 (0)	4	
5	63291315 (+1)	68963600 (-1)	64740876 (+1)	85103412 (-1)	5	
6	90345969 (+1)	96956166 (-2)	92035284 (+1)	12284365 (-1)	6	11
7	12349615 (+2)	68689212 (-3)	12541964 (+2)	88968155 (-3)	7	
8	16391365 (+2)	22524129 (-4)	16606892 (+2)	29729563 (-4)	8	
9	21355927 (+2)	28972068 (-6)	21594828 (+2)	38879545 (-6)	9	
10	27620282 (+2)	10472942 (-8)	27883500 (+2)	14267774 (-8)	10	
11	36150534 (+2)	45340312 (-12)	36440864 (+2)	62678362 (-12)	11	
1	0, 38198815 (0)	0, 90547214 (-1)	0, 41709667 (0)	0, 90564729 (-1)	1	
2	11344672 (+1)	36720767 (0)	11967989 (+1)	39592727 (0)	2	
3	22767488 (+1)	47328924 (0)	23646552 (+1)	53938962 (0)	3	
4	38268138 (+1)	28726032 (0)	39390291 (+1)	34152186 (0)	4	
5	58109741 (+1)	92811386 (-1)	59464799 (+1)	11409709 (0)	5	
6	82667988 (+1)	16535172 (-1)	84247919 (+1)	20889334 (-1)	6	12
7	11248000 (+2)	16064519 (-2)	11427887 (+2)	20762433 (-2)	7	
8	14833212 (+2)	80926284 (-4)	15034627 (+2)	10673503 (-3)	8	
9	19143173 (+2)	1933273 (-5)	19366026 (+2)	25780230 (-5)	9	
10	24378947 (+2)	18048397 (-7)	24623544 (+2)	24561623 (-7)	10	
11	30926194 (+2)	47368658 (-10)	31193537 (+2)	65370767 (-10)	11	
12	39772683 (+2)	14452589 (-13)	40065528 (+2)	20221311 (-13)	12	
1	0, 35505156 (0)	0, 77452344 (-1)	0, 38783813 (0)	0, 76785942 (-1)	1	
2	10537784 (+1)	33068519 (0)	11120992 (+1)	35394888 (0)	2	
3	21126599 (+1)	46161279 (0)	21950363 (+1)	52292604 (0)	3	
4	35459081 (+1)	31326944 (0)	36511922 (+1)	37062528 (0)	4	
5	53740020 (+1)	11747727 (0)	55012531 (+1)	14385446 (0)	5	
6	76255864 (+1)	25428228 (-1)	77740408 (+1)	32025211 (-1)	6	
7	10340462 (+2)	31827772 (-2)	10509523 (+2)	41038030 (-2)	7	13
8	13574613 (+2)	22388124 (-3)	13763858 (+2)	29451316 (-3)	8	
9	17409197 (+2)	83311895 (-5)	17618398 (+2)	11152278 (-4)	9	
10	21968101 (+2)	14765457 (-6)	22197277 (+2)	20072885 (-6)	10	
11	27456946 (+2)	10374919 (-8)	27706481 (+2)	14302773 (-8)	11	
12	34269526 (+2)	20240489 (-11)	34540460 (+2)	28270203 (-11)	12	
13	43414169 (+2)	44531506 (-15)	43709209 (+2)	63011464 (-15)	13	
1	0, 33167094 (0)	0, 66851814 (-1)	0, 36242417 (0)	0, 65721138 (-1)	1	
2	98386638 (0)	29846628 (0)	10386636 (+1)	31721381 (0)	2	
3	19708840 (+1)	44638499 (0)	20483915 (+1)	50270100 (0)	3	14
4	33041664 (+1)	33341569 (0)	34033398 (+1)	39253884 (0)	4	
5	49999976 (+1)	14192557 (0)	51199687 (+1)	17309953 (0)	5	
6	70807913 (+1)	36175123 (-1)	72208401 (+1)	45413873 (-1)	6	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
		$s = \frac{6}{4}$		$s = \frac{5}{3}$			
14	7	95770181 (+1)	55800350 (-2)	97365620 (+1)	71764808 (-2)	7	14
	8	12530285 (+2)	51306402 (-3)	12708879 (+2)	67359864 (-3)	8	
	9	15998489 (+2)	27050227 (-4)	16195834 (+2)	36155437 (-4)	9	
	10	20064991 (+2)	76432936 (-6)	20280962 (+2)	10378671 (-5)	10	
	11	24856519 (+2)	10357515 (-7)	25091217 (+2)	14265035 (-7)	11	
	12	30582925 (+2)	55073033 (-10)	30836788 (+2)	77678754 (-10)	12	
	13	37645680 (+2)	82357179 (-13)	37919771 (+2)	11631408 (-12)	13	
14	47072717 (+2)	13322737 (-16)	47369692 (+2)	19051682 (-16)	14		
15	1	0, 31118456 (0)	0, 58169081 (-1)	0, 34014231 (0)	0, 56727742 (-1)	1	15
	2	92269710 (0)	27007417 (0)	97437398 (0)	28508623 (0)	2	
	3	18471174 (+1)	42900134 (0)	19203042 (+1)	48034424 (0)	3	
	4	30938040 (+1)	34826272 (0)	31875473 (+1)	40803681 (0)	4	
	5	46759382 (+1)	16536356 (0)	47894362 (+1)	20087462 (0)	5	
	6	66114316 (+1)	48459823 (-1)	67440082 (+1)	60634859 (-1)	6	
	7	89242208 (+1)	89127556 (-2)	90753153 (+1)	11432000 (-1)	7	
	8	11646255 (+2)	10225990 (-2)	11815419 (+2)	13397013 (-2)	8	
	9	14820654 (+2)	71389226 (-4)	15007555 (+2)	95259821 (-4)	9	
	10	18506967 (+2)	28979264 (-5)	18711402 (+2)	39299402 (-5)	10	
	11	22790526 (+2)	6365243 (-7)	23012446 (+2)	87511436 (-7)	11	
	12	27800664 (+2)	67227109 (-9)	28040230 (+2)	93715260 (-9)	12	
	13	33751196 (+2)	28144284 (-11)	34008890 (+2)	39712407 (-11)	13	
	14	41050893 (+2)	32098605 (-14)	41327786 (+2)	45819103 (-14)	14	
	15	50746451 (+2)	38841428 (-18)	51045145 (+2)	56099130 (-18)	15	
		$s = \frac{7}{4}$		$s = \frac{9}{4}$			
1	1	0, 27500000 (+1)	0, 16083594 (+1)	0, 32500000 (+1)	0, 25492570 (+1)	1	1
	2	0, 18135083 (+1)	0, 12194563 (+1)	0, 21884472 (+1)	0, 18929141 (+1)	1	
3	2	56864917 (+1)	38890309 (0)	63115528 (+1)	65634285 (0)	2	3
	1	0, 13674797 (+1)	0, 85780568 (0)	0, 16698992 (+1)	0, 12888496 (+1)	1	
	2	40603112 (+1)	70803399 (0)	45627214 (+1)	11833185 (+1)	2	
4	3	88222090 (+1)	42519750 (-1)	95173794 (+1)	77088799 (-1)	3	4
	1	0, 11011300 (+1)	0, 61108115 (0)	0, 13551959 (+1)	0, 88573340 (0)	1	
	2	32010411 (+1)	83878735 (0)	36247346 (+1)	13775212 (+1)	2	
	3	66115393 (+1)	15534067 (0)	71928417 (+1)	27989267 (0)	3	
5	4	12086290 (+2)	31502588 (-2)	12827228 (+2)	61096847 (-2)	4	5
	1	0, 92287102 (0)	0, 44698851 (0)	0, 11421571 (+1)	0, 62482676 (0)	1	
	2	26541216 (+1)	85061864 (0)	30215401 (+1)	13674556 (+1)	2	
	3	53682458 (+1)	28985223 (0)	58721751 (+1)	51661573 (0)	3	
	4	93642657 (+1)	20715909 (-1)	10000169 (+2)	39979112 (-1)	4	
5	15440496 (+2)	18413015 (-3)	16213958 (+2)	37972783 (-3)	5		

Таблица 6 (продолжение)

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
$s = \frac{7}{4}$		$s = \frac{9}{4}$			
0,79481707 (0)	0,33582431 (0)	0,98780662 (0)	0,45314016 (0)	1	6
22714937 (+1)	80457667 (0)	25962885 (+1)	12638951 (+1)	2	
45432799 (+1)	40802170 (0)	49894735 (+1)	71713458 (0)	3	
77670012 (+1)	57904766 (-1)	83288522 (+1)	11091435 (0)	4	
12261506 (+2)	20228137 (-2)	12937776 (+2)	41528093 (-2)	5	
18861902 (+2)	91575924 (-5)	19659803 (+2)	19968218 (-4)	6	
0,69822710 (0)	0,25846760 (0)	0,87060563 (0)	0,33712440 (0)	1	7
19874270 (+1)	73550253 (0)	22786781 (+1)	11282660 (+1)	2	
39482195 (+1)	49564616 (0)	43491838 (+1)	85742243 (0)	3	
66752275 (+1)	11043715 (0)	71801815 (+1)	20946759 (0)	4	
10337079 (+2)	81464950 (-2)	10943034 (+2)	16630341 (-1)	5	
15268204 (+2)	15907730 (-3)	15975693 (+2)	34533289 (-3)	6	
22335617 (+2)	40482750 (-6)	23152624 (+2)	92869662 (-6)	7	
0,62270691 (0)	0,20317254 (0)	0,77848162 (0)	0,25655891 (0)	1	8
17676127 (+1)	66095441 (0)	20317170 (+1)	99007775 (0)	2	
34958666 (+1)	55232829 (0)	38602500 (+1)	93941599 (0)	3	
58697246 (+1)	17039690 (0)	63290265 (+1)	31949655 (0)	4	
89918002 (+1)	20601874 (-1)	95425686 (+1)	41749961 (-1)	5	
13039796 (+2)	89473615 (-3)	13680617 (+2)	19334386 (-2)	6	
18361116 (+2)	10656832 (-4)	19093561 (+2)	24337489 (-4)	7	
25851377 (+2)	16353146 (-7)	26683778 (+2)	39299412 (-7)	8	
0,56200759 (0)	0,16266164 (0)	0,70411341 (0)	0,19916981 (0)	1	9
15921962 (+1)	58909907 (0)	18338504 (+1)	86197273 (0)	2	
31391326 (+1)	58308531 (0)	34732328 (+1)	97451697 (0)	3	
52462924 (+1)	23058739 (0)	56679248 (+1)	42692810 (0)	4	
79817324 (+1)	39899308 (-1)	84874202 (+1)	80155823 (-1)	5	
11454188 (+2)	29444801 (-2)	12041833 (+2)	63264067 (-2)	6	
15848700 (+2)	81601113 (-4)	16517871 (+2)	18561980 (-3)	7	
21523966 (+2)	63053832 (-6)	22276874 (+2)	15083040 (-5)	8	
29401784 (+2)	61503642 (-9)	30246880 (+2)	15426336 (-8)	9	
0,51213864 (0)	0,13232179 (0)	0,64279159 (0)	0,15733998 (0)	1	10
14488206 (+1)	52331967 (0)	16715837 (+1)	74834144 (0)	2	
28499823 (+1)	59406984 (0)	31585551 (+1)	97543362 (0)	3	
47473455 (+1)	28605089 (0)	51372579 (+1)	52259145 (0)	4	
71887836 (+1)	65170674 (-1)	76566987 (+1)	12965618 (0)	5	
10246831 (+2)	70762959 (-2)	10790428 (+2)	15100500 (-1)	6	
14035091 (+2)	34378848 (-3)	14653148 (+2)	77837842 (-3)	7	
18744827 (+2)	64341422 (-5)	19437563 (+2)	15336113 (-4)	8	
24744868 (+2)	33777026 (-7)	25514896 (+2)	84317693 (-7)	9	
32981313 (+2)	21824286 (-10)	33837078 (+2)	56950118 (-10)	10	
0,47042896 (0)	0,10915194 (0)	0,59134435 (0)	0,12621884 (0)	1	11
13293645 (+1)	46465178 (0)	15360025 (+1)	64975893 (0)	2	
26105420 (+1)	59084569 (0)	28972801 (+1)	95310201 (0)	3	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$\Delta_k$	$x_k$	$\Delta_k$	k	n		
		$s = \frac{7}{4}$		$s = \frac{9}{4}$					
11	4	43379037 (+1)	33403858 (0)	47006826 (+1)	60189978 (0)	4	11		
	5	65466064 (+1)	94766272 (-1)	69822885 (+1)	18657021 (0)	5			
	6	92879648 (+1)	13856106 (-1)	97942028 (+1)	29340808 (-1)	6			
	7	12638046 (+2)	10143793 (-2)	13213290 (+2)	22840362 (-2)	7			
	8	16714504 (+2)	34211242 (-4)	17358134 (+2)	81222387 (-4)	8			
	9	21714073 (+2)	45106190 (-6)	22426748 (-2)	11222309 (-5)	9			
	10	28014850 (+2)	16675912 (-8)	28799441 (+2)	43303565 (-8)	10			
	11	36585717 (+2)	73786313 (-12)	37450587 (+2)	19976527 (-11)	11			
	12	1	0, 43502162 (0)	0, 91149427 (-1)	0, 54755488 (0)	0, 10263742 (0)		1	12
		2	12282575 (+1)	41302843 (0)	14209651 (+1)	56517365 (0)		2	
		3	24088186 (+1)	57788808 (0)	26766534 (+1)	91596524 (0)		3	
4		39952703 (+1)	37346179 (0)	43345424 (+1)	66355819 (0)	4			
5		60142968 (+1)	12681303 (0)	64220839 (+1)	24692992 (0)	5			
6		85037895 (+1)	23528204 (-1)	89778057 (+1)	49403811 (-1)	6			
7		11517774 (+2)	23647230 (-2)	12056347 (+2)	52912140 (-2)	7			
8		15135225 (+2)	12272976 (-3)	15737346 (+2)	29004357 (-3)	8			
9		19477294 (+2)	29891576 (-5)	20142766 (+2)	74112732 (-5)	9			
10		24745638 (+2)	28691728 (-7)	25475430 (+2)	74267833 (-7)	10			
11		31326959 (+2)	76890729 (-10)	32124107 (+2)	20713170 (-9)	11			
12		40211656 (+2)	23946592 (-13)	41084398 (+2)	67100385 (-13)	12			
13	1	0, 40458488 (0)	0, 76945656 (-1)	0, 50982601 (0)	0, 84474839 (-1)	1	13		
	2	11415455 (+1)	36790606 (0)	13220946 (+1)	49295656 (0)	2			
	3	22364373 (+1)	55858712 (0)	24877383 (+1)	87016501 (0)	3			
	4	37039785 (+1)	40430789 (0)	40226698 (+1)	70828798 (0)	4			
	5	55649604 (+1)	15957690 (0)	59483311 (+1)	30721997 (0)	5			
	6	78482928 (+1)	36015781 (-1)	82941578 (+1)	74950531 (-1)	6			
	7	10594027 (+2)	46685060 (-2)	11100692 (+2)	10374110 (-1)	7			
	8	13858406 (+2)	33834777 (-3)	14424682 (+2)	79544420 (-3)	8			
	9	17722879 (+2)	12922265 (-4)	18348149 (+2)	31914098 (-4)	9			
	10	22311704 (+2)	23435946 (-6)	22996080 (+2)	60475079 (-6)	10			
	11	27831048 (+2)	16814461 (-8)	28575718 (+2)	45154516 (-8)	11			
	12	34675687 (+2)	33449376 (-11)	35483788 (+2)	93250815 (-11)	12			
	13	43856450 (+2)	75035093 (-15)	44736074 (+2)	21714800 (-14)	13			
14	1	0, 37813835 (0)	0, 65584778 (-1)	0, 47697716 (0)	0, 70279796 (-1)	1	14		
	2	10663408 (+1)	32857380 (0)	12361831 (+1)	43138541 (0)	2			
	3	20873588 (+1)	53541972 (0)	23240704 (+1)	81999640 (0)	3			
	4	34530784 (+1)	42718051 (0)	37535884 (+1)	73786722 (0)	4			
	5	51800496 (+1)	19163927 (0)	55418462 (+1)	36470198 (0)	5			
	6	72909080 (+1)	50991458 (-1)	77119226 (+1)	10512821 (0)	6			
	7	98163300 (+1)	81537037 (-2)	10294898 (+2)	17984797 (-1)	7			
	8	12798128 (+2)	77309768 (-3)	13332986 (+2)	18070605 (-2)	8			
	9	16294419 (+2)	41862362 (-4)	16884733 (+2)	10293092 (-3)	9			
	10	20388822 (+2)	12110573 (-5)	21034268 (+2)	31144105 (-5)	10			
	11	25208401 (+2)	16762047 (-7)	25909321 (+2)	44885250 (-7)	11			
	12	30963524 (+2)	91862227 (-10)	31721260 (+2)	25530931 (-9)	12			

Таблица 6 (продолжен)

$k$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
	$s = \frac{7}{4}$		$s = \frac{9}{4}$	
13	38056586 (+2)	13838703 (-12)	38874335 (+2)	39841086 (-12)
14	47517914 (+2)	22805649 (-16)	48403610 (+2)	68033381 (-16)
1	0, 35494407 (0)	0, 56385844 (-1)	0, 44811649 (0)	0, 59038771 (-1)
2	10004836 (+1)	29430157 (0)	11608242 (+1)	37885287 (0)
3	19571105 (+1)	51015024 (0)	21808497 (+1)	76836922 (0)
4	32345760 (+1)	44298313 (0)	35188998 (+1)	75450040 (0)
5	48462908 (+1)	22194606 (0)	51888717 (+1)	41746740 (0)
6	68103548 (+1)	67970269 (-1)	72092441 (+1)	13879016 (0)
7	91508773 (+1)	12971447 (-1)	96044656 (+1)	28388609 (-1)
8	11899976 (+2)	15359646 (-2)	12406982 (+2)	35678666 (-2)
9	15100943 (+2)	11020453 (-3)	15660427 (+2)	26964468 (-3)
10	18813522 (+2)	45827801 (-5)	19424920 (+2)	11740359 (-4)
11	23123276 (+2)	10277729 (-6)	23786485 (+2)	27438107 (-6)
12	28159852 (+2)	11077704 (-8)	28875384 (+2)	30705470 (-8)
13	34137545 (+2)	47224389 (-11)	34906860 (+2)	13554269 (-10)
14	41466011 (+2)	54798475 (-14)	42292332 (+2)	16261455 (-13)
15	51194239 (+2)	67483817 (-18)	52085339 (+2)	20717360 (-17)
	$s = \frac{7}{3}$		$s = \frac{10}{4}$	
1	0, 33333333 (+1)	0, 27781585 (+1)	0, 35000000 (+1)	0, 33233510 (+1)
1	0, 22516673 (+1)	0, 20563713 (+1)	0, 23786797 (+1)	0, 24449968 (+1)
2	64149993 (+1)	72178716 (0)	66213203 (+1)	87835415 (0)
1	0, 17212808 (+1)	0, 13931583 (+1)	0, 18248198 (+1)	0, 16404917 (+1)
2	46464081 (+1)	12993115 (+1)	48137462 (+1)	15764206 (+1)
3	96323111 (+1)	85688706 (-1)	98614340 (+1)	10643867 (0)
1	0, 13985960 (+1)	0, 95208845 (0)	0, 14862411 (+1)	0, 11090226 (+1)
2	36956394 (+1)	15084022 (+1)	38376840 (+1)	18203241 (+1)
3	72893476 (+1)	31080628 (0)	74820584 (+1)	38530992 (0)
4	12949750 (+2)	68615767 (-2)	13194016 (+2)	86943465 (-2)
1	0, 11797678 (+1)	0, 66783282 (0)	0, 12558461 (+1)	0, 76934619 (0)
2	30832462 (+1)	14923499 (+1)	32070406 (+1)	17891437 (+1)
3	59561017 (+1)	57268222 (0)	61239082 (+1)	70754974 (0)
4	10105629 (+2)	44863038 (-1)	10316126 (+2)	56755672 (-1)
5	16341922 (+2)	43053833 (-3)	16597079 (+2)	55571480 (-3)
1	0, 10210113 (+1)	0, 48163735 (0)	0, 10882635 (+1)	0, 54883423 (0)
2	26509895 (+1)	13742894 (+1)	27608556 (+1)	16358289 (+1)
3	50639726 (+1)	79319056 (0)	52130825 (+1)	97570189 (0)
4	84222461 (+1)	12431329 (0)	86088345 (+1)	15689197 (0)
5	13049901 (+2)	47050045 (-2)	13273672 (+2)	60640457 (-2)
6	19791879 (+2)	22838598 (-4)	20055292 (+2)	29984654 (-4)
1	0, 90033881 (0)	0, 35640187 (0)	0, 96062213 (0)	0, 40186447 (0)
2	23278414 (+2)	12221841 (+1)	24266771 (+1)	14440236 (+1)

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
		$s = \frac{7}{3}$		$s = \frac{10}{4}$			
7	3	44162694 (+1)	94595188 (0)	45506550 (+1)	11578194 (+1)	3	7
	4	72642767 (+1)	23440053 (0)	74324178 (+1)	29490712 (0)	4	
	5	11043676 (+2)	18824314 (-1)	11244678 (+2)	24217501 (-1)	5	
	6	16092998 (+2)	39468610 (-3)	16327110 (+2)	51743223 (-3)	6	
	7	23287932 (+2)	10707359 (-5)	23557841 (+2)	14279507 (-5)	7	
8	1	0,80540622 (0)	0,26983350 (0)	0,86004162 (0)	0,30118673 (0)	1	8
	2	20763819 (+1)	10684252 (+1)	21662435 (+1)	12529638 (+1)	2	
	3	39213204 (+1)	10335978 (+1)	40437427 (+1)	12583458 (+1)	3	
	4	64056402 (+1)	35686404 (0)	65589225 (+1)	44734424 (0)	4	
	5	96341802 (+1)	47201734 (-1)	98172555 (+1)	60582550 (-1)	5	
	6	13787015 (+2)	22080934 (-2)	13999480 (+2)	28904818 (-2)	6	
	7	19215024 (+2)	28039061 (-4)	19457447 (+2)	37338529 (-4)	7	
	8	26821698 (+2)	45645486 (-7)	27096867 (+2)	61759956 (-7)	8	
9	1	0,72871761 (0)	0,20844489 (0)	0,77868002 (0)	0,23042067 (0)	1	9
	2	18747832 (+1)	92669024 (0)	19571902 (+1)	10787334 (+1)	2	
	3	35293094 (+1)	10692047 (+1)	36417888 (+1)	12944884 (+1)	3	
	4	57383501 (+1)	47588989 (0)	58793297 (+1)	59415508 (0)	4	
	5	85716394 (+1)	90494947 (-1)	87400289 (+1)	11582518 (0)	5	
	6	12139517 (+2)	72183562 (-2)	12334676 (+2)	94316287 (-2)	6	
	7	16628966 (+2)	21371211 (-3)	16850796 (+2)	28422379 (-3)	7	
	8	22401757 (+2)	17505380 (-5)	22651026 (+2)	23649776 (-5)	8	
	9	30386961 (+2)	18040042 (-8)	30666485 (+2)	24738037 (-8)	9	
10	1	0,66544573 (0)	0,16389427 (0)	0,71147607 (0)	0,17950294 (0)	1	10
	2	17093677 (+1)	80156346 (0)	17854778 (+1)	92631700 (0)	2	
	3	32104120 (+1)	10671589 (+1)	33144812 (+1)	12847675 (+1)	3	
	4	52024609 (+1)	58126875 (0)	53330492 (+1)	72263747 (0)	4	
	5	77347119 (+1)	14614935 (0)	78907634 (+1)	18647485 (0)	5	
	6	10880882 (+2)	17210357 (-1)	11061674 (+2)	22437906 (-1)	6	
	7	14755856 (+2)	89549484 (-3)	14961022 (+2)	11891427 (-2)	7	
	8	19552572 (+2)	17788607 (-4)	19782218 (+2)	24004238 (-4)	8	
	9	25642648 (+2)	98526929 (-7)	25897664 (+2)	13489950 (-6)	9	
	10	33978978 (+2)	67022768 (-10)	34262173 (+2)	93060390 (-10)	10	
11	1	0,61233619 (0)	0,13088783 (0)	0,65501117 (0)	0,14209031 (0)	1	11
	2	15710923 (+1)	69346750 (0)	16418097 (+1)	79572531 (0)	2	
	3	29455200 (+1)	10397490 (+1)	30423741 (+1)	12447221 (+1)	3	
	4	47614098 (+1)	66798916 (0)	48830853 (+1)	82679526 (0)	4	
	5	70549970 (+1)	20994588 (0)	72004946 (+1)	26697474 (0)	5	
	6	98785166 (+1)	33398312 (-1)	10047097 (+2)	43434575 (-1)	6	
	7	13308964 (+2)	26253262 (-2)	13500148 (+2)	34799782 (-2)	7	
	8	17465076 (+2)	94149899 (-4)	17678687 (+2)	12688316 (-3)	8	
	9	22545075 (+2)	13106264 (-5)	22781356 (+2)	17924923 (-5)	9	
	10	28929637 (+2)	50921791 (-8)	29189557 (+2)	70592014 (-8)	10	
	11	37594042 (+2)	23649203 (-11)	37880380 (+2)	33221434 (-11)	11	

Таблица 6 (продолжение)

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	$k$	$n$
$s = \frac{7}{3}$		$s = \frac{10}{4}$			
56711263 ( 0)	0, 10597884 ( 0)	0, 60689017 ( 0)	0, 11408054 ( 0)	1	
14537226 (+1)	60108272 ( 0)	15197676 (+1)	68496485 ( 0)	2	
27217561 (+1)	99640080 ( 0)	28123471 (+1)	11861531 (+ 1)	3	
43913855 (+1)	73474502 ( 0)	45053208 (+1)	90534325 ( 0)	4	
64901943 (+1)	27737208 ( 0)	66265384 (+1)	35147171 ( 0)	5	
90568156 (+1)	56158706 (-1)	92148436 (+1)	72836357 (- 1)	6	12
12145990 (+2)	60756118 (-2)	12325177 (-2)	80371040 (- 2)	7	
15837462 (+2)	33595433 (-3)	16037500 (-2)	45207921 (- 3)	8	
20253332 (+2)	86505123 (-5)	20474177 (-2)	11817542 (- 4)	9	
25596613 (+2)	87287328 (-7)	25838605 (-2)	12087760 (- 6)	10	
32256415 (+2)	24501176 (-9)	32520573 (-2)	34362227 (- 9)	11	
41229201 (+2)	79878148 (-13)	41518260 (-2)	11344226 (-12)	12	
52813371 ( 0)	0, 86868320 (-1)	0, 56538363 ( 0)	0, 92755630 (- 1)	1	
13528128 (+1)	52249712 ( 0)	14147692 (+1)	59142597 ( 0)	2	
25300923 (+1)	94392545 ( 0)	26151924 (+1)	11174685 (+ 1)	3	
40761070 (+1)	78247774 ( 0)	41823510 (+1)	95979811 ( 0)	4	
60124112 (+1)	34445857 ( 0)	61407275 (+1)	43488903 ( 0)	5	
83685281 (+1)	85074167 (-1)	85173201 (+1)	11002052 ( 0)	6	13
11185081 (+2)	11898582 (-1)	11353812 (+2)	15704804 (- 1)	7	
14518899 (+2)	92056658 (-3)	14707199 (+2)	12366648 (- 2)	8	
18452099 (+2)	37226471 (-4)	18659783 (+2)	50790313 (- 4)	9	
23109788 (+2)	71040152 (-6)	23336908 (+2)	98277534 (- 6)	10	
28699386 (+2)	53384828 (-8)	28946353 (+2)	74793967 (- 8)	11	
35617940 (+2)	11091542 (-10)	35885802 (+2)	15725928 (-10)	12	
44882056 (+2)	25984917 (-14)	45173499 (+2)	37284972 (-14)	13	
49418546 ( 0)	0, 71988257 (- 1)	0, 52921077 ( 0)	0, 76273832 (- 1)	1	
12651026 (+1)	45573073 ( 0)	13234506 (+1)	51249964 ( 0)	2	
23639955 (+1)	88705089 ( 0)	24442403 (+1)	10444174 (+ 1)	3	
38040127 (+1)	81328783 ( 0)	39051455 (+1)	99307331 ( 0)	4	14
56023608 (+1)	40813880 ( 0)	57235711 (+1)	51336967 ( 0)	5	
77821925 (+1)	11914627 ( 0)	79228181 (+1)	15361910 ( 0)	6	
10374655 (+2)	20602673 (- 1)	10534166 (+2)	27127964 (- 1)	7	
13422027 (+2)	20893323 (- 2)	13600025 (+2)	28014893 (- 2)	8	
16982926 (+2)	11997740 (- 3)	17179153 (+2)	16345603 (- 3)	9	
21141565 (+2)	36564428 (- 5)	21355927 (+2)	50526876 (- 5)	10	
26025783 (+2)	53041396 (- 7)	26258407 (+2)	74242806 (- 7)	11	
31847114 (+2)	30351869 (- 9)	32098458 (+2)	42990302 (- 9)	12	
39010115 (+2)	47635032 (-12)	39281245 (+2)	68234396 (-12)	13	
48550634 (+2)	81812904 (-16)	48844184 (+2)	11853602 (-15)	14	
46435029 ( 0)	0, 60247182 (- 1)	0, 49740243 ( 0)	0, 63361305 (- 1)	1	
11881452 (+1)	39895609 ( 0)	12432843 (+1)	44582506 ( 0)	2	
22186121 (+1)	82895202 ( 0)	22945314 (+1)	97079110 ( 0)	3	15
35666385 (+1)	82972506 ( 0)	36624103 (+1)	10085764 (+ 1)	4	
52462067 (+1)	46629974 ( 0)	53610776 (+1)	58431786 ( 0)	5	
72759593 (+1)	15704991 ( 0)	74092031 (+1)	20186009 ( 0)	6	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
		$s = \frac{7}{3}$		$s = \frac{10}{4}$			
	7	96801006 (+1)	32479359 (-1)	98314032 (+1)	42658043 (-1)	7	
	8	12491431 (+2)	41209713 (-2)	12660285 (+2)	55144227 (-2)	8	
	9	15753538 (+2)	31404791 (-3)	15939648 (+2)	42717211 (-3)	9	
	10	19526606 (+2)	13774988 (-4)	19729799 (+2)	19011291 (-4)	10	
15	11	23896732 (+2)	32407646 (-6)	24116985 (+2)	45316120 (-6)	11	15
	12	28994280 (+2)	36487317 (-8)	29231775 (+2)	51634857 (-8)	12	
	13	35034653 (+2)	16197664 (-10)	35289882 (+2)	23178907 (-10)	13	
	14	42429558 (+2)	19538147 (-13)	42703597 (+2)	28259540 (-13)	14	
	15	52233289 (+2)	25029575 (-17)	52528716 (+2)	36599404 (-17)	15	
		$s = \frac{8}{3}$		$s = \frac{11}{4}$			
1	1	0,36666667 (+1)	0,40122013 (+1)	0,37500000 (+1)	0,44229884 (+1)	1	1
	1	0,25064198 (+1)	0,29347448 (+1)	0,25705505 (+1)	0,32261973 (+1)	1	
	2	68269136 (+1)	10774565 (+1)	69294495 (+1)	11967911 (+1)	2	2
	1	0,19293522 (+1)	0,19509242 (+1)	0,19819764 (+1)	0,21350633 (+1)	1	
	2	49810412 (+1)	19281519 (+1)	50646737 (+1)	21386712 (+1)	2	3
	3	10089607 (+2)	13312520 (0)	10203350 (+2)	14925391 (0)	3	
	1	0,15749732 (+1)	0,13051782 (+1)	0,16197327 (+1)	0,14211288 (+1)	1	
	2	39800333 (+1)	22149546 (+1)	40513190 (+1)	24505731 (+1)	2	4
	3	76743830 (+1)	48098573 (0)	77704059 (+1)	53874637 (0)	3	
	4	13437277 (+2)	11082781 (-1)	13558542 (+2)	12540173 (-1)	4	
	1	0,13330305 (+1)	0,89577483 (0)	0,13720244 (+1)	0,97026938 (0)	1	
	2	33313307 (+1)	21631592 (+1)	33936565 (+1)	23858063 (+1)	2	
	3	62916567 (+1)	88031284 (0)	63755105 (+1)	98442134 (0)	3	5
	4	10526076 (+2)	72233339 (-1)	10630853 (+2)	81668433 (-1)	4	
	5	16851239 (+2)	72108378 (-3)	16977956 (+2)	82298694 (-3)	5	
	1	0,11566067 (+1)	0,63230010 (0)	0,11911757 (+1)	0,68134779 (0)	1	
	2	28713245 (+1)	19640398 (+1)	29267793 (+1)	21587974 (+1)	2	
	3	53623395 (+1)	12087552 (+1)	54370225 (+1)	13488672 (+1)	3	6
	4	87951659 (+1)	19920949 (0)	88882384 (+1)	22496955 (0)	4	
	5	13496824 (+2)	78571530 (-2)	13608173 (+2)	89610615 (-2)	5	
	6	20317740 (+2)	39552857 (-4)	20448611 (+2)	45506147 (-4)	6	
	1	0,10219654 (+1)	0,45824861 (0)	0,10530240 (+1)	0,49131512 (0)	1	
	2	25261751 (+1)	17212522 (+1)	25761666 (+1)	18852280 (+1)	2	
	3	46853208 (+1)	14273902 (+1)	47527569 (+1)	15890276 (+1)	3	
	4	76004966 (+1)	37330481 (0)	76845138 (+1)	42094092 (0)	4	7
	5	11445310 (+2)	31322052 (-1)	11545491 (+2)	35690890 (-1)	5	
	6	16560571 (+2)	68156994 (-3)	16677065 (+2)	78359922 (-3)	6	
	7	23826828 (+2)	19124680 (-5)	23960983 (+2)	22167451 (-5)	7	
	1	0,91569907 (0)	0,34006635 (0)	0,94390161 (0)	0,36283916 (0)	1	
	2	22567984 (+1)	14826532 (+1)	23023299 (+1)	16180848 (-1)	2	
	3	41665332 (+1)	15432181 (+1)	42280641 (+1)	17135492 (+1)	3	8
	4	67122783 (+1)	56423765 (0)	67889838 (+1)	63511349 (0)	4	



Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
		$s = \frac{8}{3}$		$s = \frac{11}{4}$			
8	5	10000139 (-2)	78174148 (-1)	10091511 (+2)	88976096 (-1)	5	8
	6	14211512 (-2)	38017607 (-2)	14317370 (+2)	43676673 (-2)	6	
	7	19699215 (-2)	49935236 (-4)	19819858 (+2)	57838288 (-4)	7	
	8	27371158 (-2)	83888303 (-7)	27507982 (+2)	97908436 (-7)	8	
9	1	0,82962419 (0)	0,25771087 (0)	0,85545593 (0)	0,27368993 (0)	1	9
	2	20403036 (+1)	12672679 (+1)	20821195 (+1)	13781025 (+1)	2	
	3	37546950 (+1)	15789508 (+1)	38113053 (+1)	17485380 (+1)	3	
	4	60204794 (+1)	74645833 (0)	60911173 (+1)	83858880 (0)	4	
	5	89083563 (+1)	14904808 (0)	89924977 (+1)	16941324 (0)	5	
	6	12529561 (-2)	12382446 (-1)	12626905 (+2)	14212726 (-1)	6	
	7	17072160 (+2)	37962281 (-3)	17182671 (+2)	43942350 (-3)	7	
	8	22899644 (+2)	32075541 (-5)	23023715 (+2)	37408582 (-5)	8	
	9	30945176 (+2)	34043931 (-8)	31084214 (+2)	39989703 (-8)	9	
10	1	0,75844788 (0)	0,19894956 (0)	0,78227916 (0)	0,21034350 (0)	1	10
	2	18622963 (+1)	10804841 (+1)	19009658 (+1)	11708639 (+1)	2	
	3	34190160 (+1)	15584461 (+1)	34714550 (+1)	17211350 (+1)	3	
	4	54638774 (+1)	90408247 (0)	55293803 (+1)	10135707 (+1)	4	
	5	80468492 (+1)	23922641 (0)	81249054 (+1)	27150038 (0)	5	
	6	11242313 (+2)	29393984 (-1)	11332577 (+2)	33702501 (-1)	6	
	7	15165865 (+2)	15858854 (-2)	15268167 (+2)	18343327 (-2)	7	
	8	20011381 (+2)	32513865 (-4)	20125784 (+2)	37903050 (-4)	8	
	9	26152044 (+2)	18536119 (-6)	26279000 (+2)	21756880 (-6)	9	
	10	34544577 (+2)	12963919 (-9)	34685487 (+2)	15319703 (-9)	10	
11	1	0,69858854 (0)	0,15612287 (0)	0,72070865 (0)	0,16435948 (0)	1	11
	2	17132303 (+1)	92170976 (0)	17491994 (+1)	99538047 (0)	2	
	3	31397188 (+1)	15015194 (+1)	31885721 (+1)	16537330 (+1)	3	
	4	50050514 (+1)	10299161 (+1)	50661420 (+1)	11521723 (+1)	4	
	5	73460995 (+1)	34136595 (0)	74189420 (+1)	38678542 (0)	5	
	6	10215618 (+2)	56760270 (-1)	10299856 (+2)	65000956 (-1)	6	
	7	13691118 (+2)	46328155 (-2)	13786525 (+2)	53538936 (-2)	7	
	8	17891942 (+2)	17166718 (-3)	17998438 (+2)	19996575 (-3)	8	
	9	23017146 (+2)	24603197 (-5)	23134861 (+2)	28862458 (-5)	9	
	10	29448856 (+2)	98184462 (-8)	29578278 (+2)	11593567 (-7)	10	
	11	38165964 (+2)	46810977 (-11)	38308479 (+2)	55629314 (-11)	11	
12	1	0,64753283 (0)	0,12431010 (0)	0,66817221 (0)	0,13033317 (0)	1	12
	2	15865064 (+1)	78804014 (0)	16201312 (+1)	84817764 (0)	2	
	3	29034442 (+1)	14229916 (+1)	29491795 (+1)	15629786 (+1)	3	
	4	46195839 (+1)	11227821 (+1)	46768366 (+1)	12533183 (+1)	4	
	5	67630455 (+1)	44784455 (0)	68313596 (+1)	50655751 (0)	5	
	6	93728835 (+1)	94927600 (-1)	94519084 (+1)	10856533 (0)	6	
	7	12504237 (+2)	10678108 (-1)	12593721 (+2)	12327807 (-1)	7	
	8	16237282 (+2)	61073636 (-3)	16337079 (+2)	71088975 (-3)	8	
	9	20694646 (+2)	16202108 (-4)	20804743 (+2)	18996322 (-4)	9	
	10	26080106 (+2)	16794933 (-6)	26200676 (+2)	19821028 (-6)	10	

Таблица 6 (продолжение)

n	k	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$	k	n
12	11	32784129 (+2)	48340323 (-9)	32915684 (+2)	57400728 (-9)	11	12
	12	41806603 (+2)	16157010 (-12)	41950509 (+2)	19302482 (-12)	12	
13	1	0,60346342 (0)	0,10027218 (0)	0,62280869 (0)	0,10471844 (0)	1	13
	2	14774071 (+1)	67594373 (0)	15089772 (+1)	72515614 (0)	2	
	3	27008072 (+1)	13332923 (+1)	27438046 (+1)	14605087 (+1)	3	
	4	42907496 (+1)	11850114 (+1)	43446301 (+1)	13198644 (+1)	4	
	5	62692496 (+1)	55214247 (0)	63335871 (+1)	62341691 (0)	5	
	6	86661809 (+1)	14298116 (0)	87406371 (+1)	16329157 (0)	6	
	7	11522487 (+2)	20819296 (-1)	11606803 (+2)	24009385 (-1)	7	
	8	14895324 (+2)	16678644 (-2)	14989323 (+2)	19397539 (-2)	8	
	9	18867182 (+2)	69546147 (-4)	18970778 (+2)	81488543 (-4)	9	
	10	23563642 (+2)	13640956 (-5)	23676867 (+2)	16090616 (-5)	10	
	11	29192834 (+2)	10511182 (-7)	29315895 (+2)	12474945 (-7)	11	
	12	36153081 (+2)	22360747 (-10)	36286505 (+2)	26692103 (-10)	12	
	13	45464258 (+2)	53642402 (-14)	45609385 (+2)	64405980 (-14)	13	
14	1	0,56503283 (0)	0,81828372 (-1)	0,58323728 (0)	0,85135401 (-1)	1	14
	2	13824660 (+1)	58199091 (0)	14122198 (+1)	62238550 (0)	2	
	3	25250034 (+1)	12394453 (+1)	25655766 (+1)	13540997 (+1)	3	
	4	40066523 (+1)	12206212 (+1)	40575441 (+1)	13565206 (+1)	4	
	5	58450204 (+1)	64938957 (0)	59058337 (+1)	73188335 (0)	5	
	6	80635577 (+1)	19904686 (0)	81339700 (+1)	22698583 (0)	6	
	7	10693676 (+2)	35877218 (-1)	10773430 (+2)	41325883 (-1)	7	
	8	13777914 (+2)	37712953 (-2)	13866819 (+2)	43820348 (-2)	8	
	9	17375170 (+2)	22349654 (-3)	17473102 (+2)	26168875 (-3)	9	
	10	21569986 (+2)	70053422 (-5)	21676904 (+2)	82587921 (-5)	10	
	11	26490639 (+2)	10423942 (-6)	26606610 (+2)	12365626 (-6)	11	
	12	32349323 (+2)	61066570 (-9)	32474579 (+2)	72858865 (-9)	12	
	13	39551812 (+2)	98005058 (-12)	39686886 (+2)	11757208 (-11)	13	
	14	49137080 (+2)	17217592 (-15)	49283287 (+2)	20770127 (-15)	14	
15	1	0,53122029 (0)	0,67479852 (-1)	0,54841140 (0)	0,69953411 (-1)	1	15
	2	12990758 (+1)	50313145 (0)	13272122 (+1)	53639740 (0)	2	
	3	23709694 (+1)	11459951 (+1)	24093801 (+1)	12487342 (+1)	3	
	4	37585698 (+1)	12341628 (+1)	38067932 (+1)	13685470 (+1)	4	
	5	54762130 (+1)	73638829 (0)	55338788 (+1)	82840451 (0)	5	
	6	75426970 (+1)	26075028 (0)	76094998 (+1)	29689734 (0)	6	
	7	99827496 (+1)	56274878 (-1)	10058440 (+2)	64740862 (-1)	7	
	8	12829084 (+2)	74084859 (-2)	12913464 (+2)	85996727 (-2)	8	
	9	16125612 (+2)	58315533 (-3)	16218539 (+2)	68227032 (-3)	9	
	10	19932759 (+2)	26325649 (-4)	20034152 (+2)	31016872 (-4)	10	
	11	24336924 (+2)	63562127 (-6)	24446777 (+2)	75364616 (-6)	11	
	12	29468877 (+2)	33281377 (-8)	29587282 (+2)	87394060 (-8)	12	
	13	35544642 (+2)	73258606 (-10)	35671248 (+2)	39878939 (-10)	13	
	14	42977090 (+2)	40977608 (-13)	43113636 (+2)	49390725 (-13)	14	
	15	52823518 (+2)	53044746 (-17)	52970687 (+2)	65003561 (-17)	15	

Таблица 7. Вычисление интеграла  $\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx$  в случае функции  $f(x)$ , ограниченной на полуоси  $0 \leq x < \infty$ :

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad s=0, -\frac{1}{2}.$$

Формула точна при  $f(x) = (1+x)^{-i}$  ( $i=0, 1, \dots, 2n-1$ ).  
 Функция  $f(x)$  ограничена на полуоси  $0 \leq x < \infty$ . Глава 3, § 2.  
 Литература: Крылов В. И., Королев Н. И., Скобля Н. С. [1].

$s=0$

$s=-\frac{1}{2}$

$n$	$x_k$	$A_k$	$n$	$x_k$	$A_k$
1	0,67687503	1	1	0,3194837571	1,772453851
2	1,6379871 0,22343083	0,50428446 0,49571554	2	1,219879310 0,09917599457	0,5861913351 1,1862625158
3	2,5271443 0,71141760 0,10978200	0,23877370 0,49649389 0,26473241	3	2,082646281 0,5187666022 0,04808387791	0,2290090437 0,6886571084 0,8547876988
4	3,3586719 1,2479336 0,39522859 0,065386107	0,11444580 0,37003046 0,35332949 0,16219425	4	2,896936652 1,015325168 0,2878330481 0,02846830651	0,09702718271 0,4026735162 0,6073570851 0,6653960669
5	4,1458248 1,7956088 0,74174267 0,25243825 0,043490249	0,056017062 0,25128504 0,33423967 0,24920149 0,10925674	5	3,671329328 1,533982454 0,6037391572 0,1840644320 0,01886637871	0,04337685229 0,2353421364 0,4296863871 0,5195195522 0,5445289230

Таблица 8. Вычисление интеграла по оси  $(-\infty, +\infty)$  с весом Чебышева — Эрмита:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Степень точности  $2n - 1$ . Глава 3, § 2. (3.2.8).

Литература: Salzer H., Zuckerg R., Саридано R. [1].

Числа в таблице напечатаны в нормализованном виде. Справа в скобках указан показатель степени десяти, на которую нужно умножить это число:

$$0,45300\ 09905\ 509(-2) = 0,00453\ 00099\ 05509.$$

Показатель, равный нулю, опущен.

n	k	$x_k$	$A_k$
1	1	0,00000 00000 00000	1,7724 53850 906
2	1	0,70710 67811 86548	0,88622 69254 528
3	1	0,00000 00000 00000	1,1816 35900 604
	2	1,22474 48713 91589	0,29540 89751 509
4	1	0,52464 76232 75290	0,80491 40900 055
	2	1,65068 01238 85785	0,81312 83544 725(-1)
5	1	0,00000 00000 00000	0,94530 87204 829
	2	0,95857 24646 13819	0,39361 93231 522
	3	2,02018 28704 56086	0,19953 24205 905(-1)
6	1	0,43607 74119 27617	0,72462 95952 244
	2	1,33584 90740 13697	0,15706 73203 229
	3	2,35060 49736 74492	0,45300 09905 509(-2)
7	1	0,00000 00000 00000	0,81026 46175 568
	2	0,81628 78828 58965	0,42560 72526 101
	3	1,67355 16287 67471	0,54515 58281 913(-1)
	4	2,65196 13568 35233	0,97178 12450 995(-3)
8	1	0,38118 69902 07322	0,66114 70125 582
	2	1,15719 37124 46780	0,20780 33258 149
	3	1,98165 67566 95843	0,17077 98300 741(-1)
	4	2,93063 74202 57244	0,19960 40722 114(-3)
9	1	0,00000 00000 00000	0,72023 52156 061
	2	0,72355 10187 52838	0,43265 15590 026
	3	1,46855 32892 16668	0,88474 52739 438(-1)
	4	2,26658 05845 31843	0,49436 24275 537(-2)
	5	3,19099 32017 81528	0,39606 97726 326(-4)
10	1	0,34290 13272 23705	0,61086 26337 353
	2	1,03661 08297 89514	0,24013 86110 823

Таблица 8 (продолжение)

$x_k$	$A_k$
1, 75668 36492 99882	0, 33874 39445 548 (—1)
2, 53273 16742 32790	0, 13436 45746 781 (—2)
3, 43615 91188 37738	0, 76404 32855 233 (—5)
0, 00000 00000 00000	0, 65475 92869 146
0, 65680 95668 82100	0, 42935 97523 561
1, 32655 70844 94933	0, 11722 78751 677
2, 02594 80158 25755	0, 11911 39544 491 (—1)
2, 78329 00997 81652	0, 34681 94663 233 (—3)
3, 66847 08465 59583	0, 14395 60393 714 (—5)
0, 31424 03762 54359	0, 57013 52362 625
0, 94778 83912 40164	0, 26049 23102 642
1, 59768 26351 52605	0, 51607 98561 588 (—1)
2, 27950 70805 01060	0, 39053 90584 629 (—2)
3, 02063 70251 20890	0, 85736 87043 588 (—4)
3, 88972 48978 69782	0, 26585 51684 356 (—6)
0, 00000 00000 00000	0, 60439 31879 211
0, 60576 38791 71060	0, 42161 62968 985
1, 22005 50365 90748	0, 14032 33206 870
1, 85310 76516 01512	0, 20862 77529 617 (—1)
2, 51973 56856 78238	0, 12074 59932 719 (—2)
3, 24660 89783 72410	0, 20430 36040 271 (—4)
4, 10133 75961 78640	0, 48257 31850 073 (—7)
0, 29174 55106 7256	0, 53640 59097 121
0, 87871 37873 2940	0, 27310 56090 642
1, 47668 27311 4114	0, 68505 53422 347 (—1)
2, 09518 32585 0772	0, 78500 54726 458 (—2)
2, 74847 07249 8540	0, 35509 26135 519 (—3)
3, 46265 69336 0227	0, 47164 84355 019 (—5)
4, 30444 85704 7363	0, 86285 91168 125 (—8)
0, 00000 00000 0000	0, 56410 03087 264
0, 56506 95832 5558	0, 41202 86874 989
1, 13611 55852 1092	0, 15848 89157 959
1, 71999 25751 8649	0, 30780 03387 255 (—1)
2, 32573 24861 7386	0, 27780 68842 913 (—2)
2, 96716 69279 0560	0, 10000 44412 325 (—3)
3, 66995 03734 0445	0, 10591 15547 711 (—5)
4, 49999 07073 0939	0, 15224 75804 254 (—8)
0, 27348 10461 3815	0, 50792 94790 166
0, 82295 14491 4466	0, 28064 74585 285
1, 38025 85391 9888	0, 83810 04139 899 (—1)
1, 95178 79909 1625	0, 12880 31153 551 (—1)
2, 54620 21578 4748	0, 93228 40086 242 (—3)

Таблица 8 (продолжение)

n	k	x <sub>k</sub>	A <sub>k</sub>
16	6	3, 17699 91619 7996	
	7	3, 86944 79048 6012	0, 27118 60092 538 (-4)
	8	4, 68873 89393 0582	0, 23209 80844 865 (-6) 0, 26548 07474 011 (-9)
17	1	0, 00000 00000 000	
	2	0, 53163 30013 427	0, 53091 79376 249
	3	1, 06764 87257 435	0, 40182 64694 704
	4	1, 61292 43142 212	0, 17264 82976 701
	5	2, 17350 28266 666	0, 40920 03414 976 (-1)
	6	2, 75776 29157 039	0, 50673 49957 628 (-2)
	7	3, 37893 20911 415	0, 29864 32866 978 (-3)
	8	4, 06194 66758 755	0, 71122 89140 021 (-5)
	9	4, 87134 51936 744	0, 49770 78981 631 (-7) 0, 45805 78930 799 (-10)
18	1	0, 25826 77505 191	
	2	0, 77668 29192 674	0, 48349 56947 255
	3	1, 30092 08583 896	0, 28480 72856 700
	4	1, 83553 16042 616	0, 97301 74764 132 (-1)
	5	2, 38629 90891 667	0, 18640 04238 754 (-1)
	6	2, 96137 75055 316	0, 18885 22630 268 (-2)
	7	3, 57376 90684 863	0, 91811 26867 929 (-4)
	8	4, 24811 78735 681	0, 18106 54481 093 (-5)
	9	5, 04836 40088 745	0, 10467 20579 579 (-7) 0, 78281 99772 116 (-11)
19	1	0, 00000 00000 000	
	2	0, 50352 01634 239	0, 50297 48882 762
	3	1, 01036 83871 343	0, 39160 89886 130
	4	1, 52417 06193 935	0, 18363 27013 070
	5	2, 04923 17098 506	0, 50810 38690 905 (-1)
	6	2, 59113 37897 945	0, 79888 66777 723 (-2)
	7	3, 15784 88183 476	0, 67087 75214 072 (-3)
	8	3, 76218 73519 640	0, 27209 19776 316 (-4)
	9	4, 42853 28066 038	0, 44882 43147 223 (-6)
	10	5, 22027 16905 375	0, 21630 51009 864 (-8) 0, 13262 97094 499 (-11)
20	1	0, 24534 07083 009	
	2	0, 73747 37285 454	0, 46224 36696 006
	3	1, 23407 62153 953	0, 28667 55053 628
	4	1, 73853 77121 166	0, 10901 72060 200
	5	2, 25497 40020 893	0, 24810 52088 746 (-1)
	6	2, 78880 60584 281	0, 32437 73342 238 (-2)
	7	3, 34785 45673 832	0, 22833 86360 163 (-3)
	8	3, 94476 40401 156	0, 78025 56478 532 (-5)
	9	4, 60368 24495 507	0, 10860 69370 769 (-6)
	10	5, 38748 08900 112	0, 43993 40992 273 (-9) 0, 22293 93645 534 (-12)

ГЛАВА 18

ТАБЛИЦЫ АБСЦИСС И КОЭФФИЦИЕНТОВ  
 ДЛЯ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ, СОДЕРЖАЩИХ ЗАДАННЫЕ  
 УЗЛЫ И ИМЕЮЩИХ НАИВЫСШУЮ СТЕПЕНЬ ТОЧНОСТИ

Таблица 9. Абсциссы и коэффициенты для правила интегрирования:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0 f(0) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Степень точности 2n. Глава 4, § 2, (4.2.2).  
 Литература: Аккерман Р. Б. [1].

n	k	$x_k$	$A_k$	n	k	$x_k$	$A_k$	
1	0	0	0,25	6	0	0	0,0204081633	
	1	0,66666667	75		1	0,0730543287	119613745	
2	0	0	0,11111111		2	230766138	190474937	
	1	0,355051026	512485826		3	441328481	223554915	
2	2	844948974	376403063		4	663015310	212351890	
					5	851921400	159102116	
3	0	0	0,0625	6	970683573	0744942356		
	1	0,212340538	328844320	7	0	0,015625		
	2	590533136	388193469		1	0,0562625605	0926790774	
3	911412040	220462211	2		180240692	152065310		
3	0	0	0,04		3	352624717	188258773	
	1	0,139759864	223103901		4	547153626	195786084	
	2	416409568	311826523		5	734210177	173507398	
	3	723156986	281356015		6	885320947	124823951	
3	4	942895804	143713561	7	977520614	0572544074		
	3	0	0,02777778	8	0	0	0,0123456790	
		1	0,0985350860		159820377	1	0,0446339553	0738270095
		2	304535727		242693594	2	144366257	123594689
		3	562025190		260463392	3	286824757	158421888
4		801986582	208450667		4	454813315	174136501	
3	5	960190143	100794193		5	628067835	168846983	
					6	785691521	143193348	
3					7	908676392	100276649	
				8	982220085	0453572525		

Таблица 10. Абсциссы и коэффициенты для правила интегрирования:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx A_0 f(0) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Степень точности 2л. Глава 3, § 2, (4.2.3).

Литература: Крылов В. И., Феденко Н. П. [1].

Числа в таблице напечатаны в нормализованном виде. Справа в скобках указан показатель степени десяти, на которую нужно умножить это число:

$$0,25909337(-2) = 0,0025909337.$$

Показатель, равный нулю, опущен.

n	k	$x_k$	$A_k$	n	k	$x_k$	$A_k$
1	0	0	0,5	6	2	1,7962998	0,27495999
	1	2	0,5		3	3,8766415	0,52366022 (-1)
2	0	0	0,33333333		4	6,9188166	0,35654682 (-2)
	1	1,2679492	0,62200847		5	11,234610	0,67918934 (-4)
	2	4,7320508	0,44658198 (-1)		6	17,645964	0,17652985 (-6)
	0	0	0,25000000		7	0	0
1	0,93582223	0,62905268	1	0,46102422		0,49066966	
2	3,3054073	0,11835639	2	1,5635862		0,30040474	
3	7,7587705	0,25909337 (-2)	3	3,3520505		0,75512739 (-1)	
0	0	0,20000000	4	5,9162973		0,80799032 (-2)	
1	0,74329193	0,60120469	5	9,4206994		0,32911142 (-3)	
2	2,5716350	0,18573233	6	14,194166		0,38385257 (-5)	
3	1	0,61703085	0,16666667	7	21,092177	0,59896135 (-8)	
	2	2,1129660	0,56401481	0	0	0,11111111	
	3	4,6108332	0,23771357	1	0,40938357	0,45832943	
	4	10,953894	0,12942850 (-1)	2	1,3849632	0,31696537	
4	0	0	0,12012620 (-3)	3	2,9562546	0,98095771 (-1)	
	1	0,61703085	0,16666667	4	5,1819431	0,14500619 (-1)	
	2	2,1129660	0,56401481	5	8,1617097	0,97193443 (-3)	
	3	4,6108332	0,23771357	6	12,070055	0,25570897 (-4)	
	4	8,3990670	0,10381978 (-2)	7	17,249736	0,19414548 (-6)	
5	5	14,260103	0,48368040 (-5)	8	24,585955	0,19203618 (-9)	
	0	0	0,16666667	8	0	0	0,10000000
	1	0,61703085	0,56401481		1	0,36817845	0,42922372
	2	2,1129660	0,23771357		2	1,2433580	0,32700364
	6	3	4,6108332	0,30561921 (-1)	3	2,6460338	0,11903948
4		8,3990670	0,10381978 (-2)	9	0	0	0,10000000
5		14,260103	0,48368040 (-5)		1	0,36817845	0,42922372
0	0	0,14285714	2		1,2433580	0,32700364	
6	1	0,52766812	0,52618328	3	2,6460338	0,11903948	



Таблица 10 (продолжение)

$n$	$k$	$x_k$	$A_k$	$n$	$k$	$x_k$	$A_k$
9	4	4, 6168825	0, 22477401 (-1)	13	2	0, 88355031	0, 33126122
	5	7, 2217865	0, 21570338 (-2)		3	1, 8690338	0, 18076214
	6	10, 567321	0, 96985034 (-4)		4	3, 2324187	0, 61495403 (-1)
	7	14, 835915	0, 17390375 (-5)		5	4, 9935756	0, 13349837 (-1)
	8	20, 382182	0, 80958943 (-8)		6	7, 1806105	0, 18359717 (-2)
	9	28, 118343	0, 58834528 (-11)		7	9, 8328083	0, 15570327 (-3)
	0	0	0, 09090909		8	13, 005622	0, 77706542 (-5)
	1	0, 33452868	0, 40312405		9	16, 779614	0, 21214031 (-6)
	2	1, 1282534	0, 33230510		10	21, 277912	0, 28245945 (-8)
	3	2, 3958699	0, 13784018		11	26, 705034	0, 15136713 (-10)
0	4	4, 1668410	0, 31565612 (-1)	12	33, 452785	0, 22633024 (-13)	
	5	6, 4873530	0, 39834527 (-2)	13	42, 524448	0, 37621928 (-17)	
	6	9, 4283548	0, 26405941 (-3)	0	0	0, 06666667	
	7	13, 101724	0, 83567994 (-5)	1	0, 24503301	0, 32254036	
	8	17, 696488	0, 10630784 (-6)	2	0, 82408222	0, 32766907	
	9	23, 577787	0, 38819101 (-9)	3	1, 7418724	0, 19101972	
	10	31, 682801	0, 17363690 (-12)	4	3, 0091325	0, 71376351 (-1)	
	0	0	0, 083333333	5	4, 6416341	0, 17566132 (-1)	
	1	0, 30652670	0, 37971461	6	6, 6613415	0, 28435634 (-2)	
	2	1, 0327974	0, 33418502	7	9, 0983027	0, 29733203 (-3)	
1	3	2, 1896119	0, 15434562	8	11, 993703	0, 19427382 (-4)	
	4	3, 7990476	0, 41332600 (-1)	9	15, 404988	0, 75370522 (-5)	
	5	5, 8949112	0, 64817900 (-2)	10	19, 414993	0, 16080664 (-7)	
	6	8, 5272920	0, 57870429 (-3)	11	24, 149758	0, 16758956 (-9)	
	7	11, 771007	0, 27682630 (-4)	12	29, 818105	0, 90062052 (-12)	
	8	15, 742260	0, 63930828 (-6)	13	36, 819624	0, 80784678 (-15)	
	9	20, 635806	0, 59533265 (-8)	14	46, 177430	0, 10030403 (-18)	
	10	26, 826350	0, 15788712 (-10)	0	0	0, 06250000	
	11	35, 274391	0, 49661325 (-14)	1	0, 22968050	0, 30695870	
	0	0	0, 07692308	2	0, 77214491	0, 32320217	
1	0, 28285835	0, 35867340	3	1, 6310531	0, 19958462		
2	0, 95232604	0, 33360369	4	2, 8151446	0, 80893567 (-1)		
3	2, 0164921	0, 16859291	5	4, 3371641	0, 22177639 (-1)		
4	3, 4923541	0, 51407330 (-1)	6	6, 2146428	0, 41248203 (-2)		
5	5, 4054910	0, 96257563 (-2)	7	8, 4711640	0, 51429145 (-3)		
6	7, 7928139	0, 10896728 (-2)	8	11, 138332	0, 41968202 (-4)		
7	10, 707389	0, 71645461 (-4)	9	14, 258910	0, 21599995 (-5)		
8	14, 227152	0, 25558236 (-5)	10	17, 892053	0, 66420015 (-7)		
9	18, 471997	0, 44307972 (-7)	11	22, 122620	0, 11269622 (-8)		
10	23, 641784	0, 30975472 (-9)	12	27, 079312	0, 93413034 (-11)		
11	30, 120059	0, 61078979 (-12)	13	32, 974974	0, 30925807 (-13)		
12	38, 889284	0, 13828047 (-15)	14	40, 216584	0, 27900692 (-16)		
0	0	0, 071428571	15	49, 846222	0, 26267530 (-20)		
1	0, 26258840	0, 33970318					

Таблица 11. Абсциссы и коэффициенты для правила интегрирования:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 [f(-1) + f(1)] + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Степень точности  $2n + 1$ . Узлы  $x_k$  и коэффициенты  $A_k$  обладают следующим свойством симметрии относительно  $x = 0$ :  $x_k = -x_{n+1-k}$ ,  $A_k = A_{n+1-k}$ .

Глава 4, § 2, (4.2.5).

$n$	$k$	$x_k = -x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$	$n$	$k$	$x_k = -x_{n+1-k}$	$A_k = A_{n+1-k}$
1	1	1	0,33333333	11	1	1	0,012820513
	1	0,00000000	1,33333333		2	0,95330985	0,077801687
2	1	1	0,16666667	3	0,84634757	0,13498193	
	1	0,44721360	0,83333333	4	0,68618847	0,18364686	
3	1	1	0,10000000	5	0,48290982	0,22076779	
	2	0,65465367	0,54444444	6	0,24928693	0,24401579	
4	1	1	0,06666667	12	1	1	0,010989011
	2	0,76505532	0,37847496		2	0,95993505	0,066837283
5	1	1	0,047619048	3	0,86780105	0,11658065	
	2	0,83022390	0,27682605	4	0,72886860	0,16002185	
6	1	1	0,035714286	5	0,55063940	0,19482615	
	2	0,87174015	0,21070423	6	0,34272401	0,21912625	
7	1	1	0,027777778	13	1	1	0,0095238095
	2	0,6884879	0,43174538		2	0,96524592	0,058029922
8	1	1	0,02222222	3	0,88508205	0,10166004	
	2	0,89975800	0,16549536	4	0,76351967	0,14051171	
9	1	1	0,018181818	5	0,60625322	0,17278965	
	2	0,67718628	0,27453872	6	0,42063805	0,19638723	
10	1	1	0,015151515	7	0,21535396	0,21197360	
	2	0,89975800	0,16549536	8	0,00000000	0,21704810	
11	1	1	0,012820513	14	1	1	0,0083333333
	2	0,87174015	0,21070423		2	0,96956804	0,050850369
12	1	1	0,010989011	3	0,89920054	0,089393689	
	2	0,76505532	0,37847496	4	0,79200828	0,12425539	
13	1	1	0,0095238095	5	0,65238872	0,15402699	
	2	0,89975800	0,16549536	6	0,48605941	0,17749190	
14	1	1	0,0083333333	7	0,29983047	0,19369005	
	2	0,87174015	0,21070423	8	0,10132627	0,20195830	
15	1	1	0,0073529412	15	1	1	0,0073529412
	2	0,87174015	0,21070423		2	0,97313217	0,044921950
16	1	1	0,0063287615	3	0,91088001	0,079198263	
	2	0,81927932	0,15797471	4	0,81569624	0,11059290	
17	1	1	0,0055293	5	0,69102849	0,13798776	
	2	0,63287615	0,21250842	6	0,54138540	0,16039465	
18	1	1	0,00489927	7	0,37217443	0,17700426	
	2	0,81927932	0,15797471	8	0,18951198	0,18721635	
19	1	1	0,004489927	19	1	1	0,004489927
	2	0,81927932	0,15797471		2	0,995510073	0,005510073
20	1	1	0,0041245881	3	0,93333333	0,03333333	
	2	0,81927932	0,15797471	4	0,86666667	0,06666667	

ГЛАВА 19

ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Таблица 12. Синус-преобразование Фурье. Абсциссы и коэффициенты для правила интегрирования:

$$\int_0^{\infty} (1 + \sin x) \frac{\Phi(x)}{(1+x)^s} dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\Phi(x_k)}{(1+x_k)^s}, s = 1 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)_4, s = 1 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)_3 \frac{2}{3}.$$

Правило точное при  $\Phi(x) = (1+x)^{-l}$  ( $l = 0, 1, \dots, 2n-1$ ). Функция  $\Phi(x)$  — ограниченная на полуоси  $0 < x < \infty$ . Глава 7, § 3, (7.3.2).

$$s = 1 \frac{1}{4}$$

$$s = 1 \frac{1}{3}$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	3, 144115316740	26, 83438353	2, 408153709463	18, 01634687
2	0, 4725678300 13, 703828977	2, 0878069833 93, 61602	0, 4488634781 10, 047251339	1, 948482520 57, 18503
3	0, 179445263 1, 357556779 34, 59629986	0, 5922723306 4, 223520887 226, 999	0, 173678792 1, 305158970 25, 62871003	0, 5692081006 4, 029034302 137, 552
4	0, 098093259 0, 659491724 2, 532811105 57, 6412411	0, 2918396626 1, 572491589 5, 4057384 377, 74	0, 095505770 0, 637587236 2, 393480357 42, 85338587	0, 2830620516 1, 493180500 5, 1157011 229, 69
5	0, 061517017 0, 38076940 1, 27009691 4, 79702777 88, 438494	0, 173726543 0, 712812564 2, 74398643 7, 35712350 577, 12	0, 060430109 0, 37306725 1, 23907912 4, 45791162 64, 778458	0, 170384503 0, 692874048 2, 65358336 6, 66450454 345, 64
6	0, 04155753 0, 24430417 0, 7382963 1, 8620412 7, 931236 134, 69027	0, 11387011 0, 3914214 1, 2143072 3, 2113806 11, 93545 874, 5	0, 04098632 0, 24062485 0, 7254881 1, 8264848 7, 484567 98, 40811	0, 11220975 0, 3838565 1, 1833238 3, 1662216 10, 76891 521, 3
7	0, 03027599 0, 172950 0, 494937 1, 15856 2, 52620 10, 4975 181, 3907	0, 0815384 0, 253164 0, 668565 1, 786424 3, 024088 16, 57934 1177	0, 0298613 0, 170380 0, 486435 1, 134276 2, 45740 10, 0042 133, 6476	0, 0803682 0, 248520 0, 651563 1, 729612 3, 002399 15, 2049 707, 3
8	0, 023260 0, 13055 0, 36130 0, 80542 1, 6711 3, 7449 13, 037 227, 05	0, 061970 0, 18054 0, 42742 1, 0407 2, 4027 2, 8297 20, 775 1474	0, 022987 0, 12892 0, 35623 0, 79208 1, 6367 3, 5633 12, 332 166, 75	0, 061216 0, 17786 0, 41898 1, 0136 2, 3390 2, 7141 19, 039 882, 9

Т а б л и ц а 12 (продолжение)

$s = 1\frac{1}{2}$

$s = 1\frac{2}{3}$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	1, 676853433723	10, 79314159	1, 313463633765	7, 770413553
2	0, 4062304297 6, 4369370547	1, 704017306 29, 25635	0, 3689394771 4, 6787064380	1, 497376243 18, 67102
3	0, 163482491 1, 215391024 16, 63028837	0, 5291848943 3, 695830689 68, 2462	0, 154662047 1, 139822159 12, 09827183	0, 4953057396 3, 413617335 41, 4660
4	0, 090725525 0, 598002117 2, 170342608 28, 19681489	0, 2670124716 1, 354686576 4, 6710168 115, 47	0, 086465480 0, 563790514 2, 001370132 20, 94398952	0, 2528986738 1, 240440476 4, 3456644 71, 429
5	0, 058305966 0, 358054371 1, 178111832 3, 885196205 41, 5389416	0, 1638770138 0, 6544987850 2, 47134767 5, 62047699 169, 52	0, 056245760 0, 343551295 1, 118786324 3, 431224359 30, 2782402	0, 1575959692 0, 6180682057 2, 29008511 4, 91249218 103, 20
6	0, 039904480 0, 2336920 0, 7015561 1, 7604198 6, 6837046 62, 34835	0, 10907336 0, 3697611 1, 1263224 3, 0754687 8, 831722 251, 6	0, 038883608 0, 2271837 0, 6792528 1, 6987161 5, 9785059 44, 55454	0, 10612290 0, 3567003 1, 0740799 2, 9810944 7, 304373 149, 8
7	0, 0290864 0, 165605 0, 470833 1, 09074 2, 34265 9, 15808 86, 1691	0, 0781869 0, 239989 0, 62106 1, 63064 2, 96863 12, 9337 346, 7	0, 0283806 0, 161289 0, 456943 1, 05306 2, 25030 8, 4444 62, 5559	0, 0762059 0, 232384 0, 59466 1, 54798 2, 94045 11, 1101 208, 9
8	0, 022446 0, 12568 0, 34621 0, 76574 1, 5685 3, 2563 11, 187 107, 34	0, 059722 0, 17258 0, 40246 0, 96053 2, 20769 2, 5737 16, 274 432, 31	0, 021918 0, 12254 0, 33651 0, 74041 1, 5034 3, 0174 10, 300 78, 30	0, 058269 0, 16749 0, 38671 0, 91043 2, 0774 2, 5164 14, 168 261, 8

Таблица 12 (продолжение)

$$s = 1\frac{3}{4}$$

$$s = 2$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	1, 192438563992	6, 845290366	0, 948971884051	5, 102809640
2	0, 3520479984 4, 1078512584	1, 406264256 15, 67743	0, 3076288134 3, 0079615794	1, 175122054 10, 539898
3	0, 150649096 1, 105837033 10, 57826506	0, 4801078 3, 285747 33, 7748	0, 139796739 1, 014451462 7, 523055519	0, 4396413550 2, 93802802 20, 40972
4	0, 084520651 0, 548521742 1, 931664756 18, 53664050	0, 24651617 1, 1911607 4, 212579 58, 732	0, 079345250 0, 508944223 1, 763666954 13, 71302322	0, 2297188899 1, 06838055 3, 8884892 36, 337
5	0, 055241789 0, 3365107 1, 0899573 3, 241807 26, 623969	0, 15454643 0, 6006275 2, 201410 4, 650286 84, 473	0, 05235742 0, 31642299 1, 00829485 2, 79473795 19, 543130	0, 14582939 0, 5518485 1, 951891 4, 111897 52, 229
6	0, 03838983 0, 2240445 0, 6685275 1, 6688229 5, 655551 38, 71230	0, 10469875 0, 3504545 1, 0492088 2, 931590 6, 665902 121, 077	0, 03695304 0, 2149323 0, 6374326 1, 5807793 4, 792545 27, 33339	0, 10056466 0, 33250386 0, 9778729 2, 7703542 5, 1681992 72, 17
7	0, 0280511 0, 159284 0, 450557 1, 03605 2, 21018 8, 1224 54, 695	0, 075283 0, 22888 0, 58276 1, 51152 2, 92683 10, 3181 169, 5	0, 0271395 0, 153769 0, 433183 0, 990587 2, 10612 7, 24796 38, 9521	0, 072736 0, 21937 0, 55108 1, 4163 2, 8836 8, 2816 101, 1
8	0, 021663 0, 12102 0, 33185 0, 72831 1, 4728 2, 9197 9, 928 68, 78	0, 05757 0, 1651 0, 3793 0, 8870 2, 017 2, 507 13, 29 213, 5	0, 02094 0, 1167 0, 3188 0, 6949 1, 3904 2, 6929 9, 004 49, 98	0, 05558 0, 15821 0, 3587 0, 8239 1, 856 2, 513 11, 13 129, 7

Таблица 12 (продолжение)

$$s = 2\frac{1}{4}$$

$$s = 2\frac{1}{3}$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0,799524516346	4,107475469	0,761226617152	3,860920781
2	0,2715493245 2,3907694201	0,9975992933 8,0208247	0,2611536452 2,2436767861	0,9483353222 7,4572800
3	0,130254273 0,934026061 5,694339354	0,4047782264 2,62729249 13,85585	0,127293894 0,908982531 5,242778198	0,3940931226 2,52987038 12,42025
4	0,074987998 0,476718519 1,636705528 10,77035473	0,2157845661 0,97352782 3,6328514 24,817	0,073679813 0,467212628 1,600353899 10,01964582	0,2116366453 0,946371379 3,5565639 22,163
5	0,04971065 0,29824368 0,93618710 2,48522430 15,4799024	0,137893335 0,50912126 1,7385453 3,8028073 36,247	0,04888949 0,29266634 0,91457778 2,40425651 14,4866925	0,135444488 0,496312608 1,6766472 3,7289704 32,636
6	0,035559080 0,206113096 0,60731966 1,4931152 4,0830695 20,896589	0,09656700 0,31536649 0,9097902 2,5873389 4,191072 48,69	0,035101424 0,20322159 0,59744074 1,4638585 3,8804532 19,366290	0,095257268 0,30979739 0,88768338 2,521856 3,959184 43,55
7	0,0263149 0,148813 0,417758 0,950916 2,01707 6,45864 29,489	0,070439 0,210931 0,52371 1,33516 2,83186 6,6194 67,0	0,0260536 0,147247 0,412908 0,938519 1,98921 6,20746 27,134	0,069712 0,208286 0,51522 1,31004 2,81182 6,1332 59,4
8	0,02029 0,11292 0,3073 0,6663 1,323 2,535 8,271 38,81	0,05380 0,15220 0,3412 0,7722 1,7298 2,5358 9,444 87,8	0,02009 0,11175 0,3038 0,6577 1,303 2,493 8,053 36,01	0,05326 0,15037 0,3359 0,7571 1,6942 2,5428 8,949 78,3

Таблица 12 (продолжение)

$$s = 2\frac{1}{2}$$

$$s = 2\frac{2}{3}$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0, 695996523057	3, 448647346	0, 642058746373	3, 114919557
2	0, 2425161935 2, 0062146711	0, 862259339 6, 5745421	0, 226425522 1, 823715696	0, 79033926 5, 9159563
3	0, 121648598 0, 861094155 4, 502173890	0, 3738856588 2, 3432780 10, 2341	0, 11633384 0, 81590916 3, 9273402	0, 355063931 2, 1676497 8, 68880
4	0, 071236890 0, 449637827 1, 533950227 8, 74627223	0, 2039326658 0, 897080102 3, 4123554 17, 948	0, 06898523 0, 43361136 1, 4738892 7, 7016593	0, 196877965 0, 85310035 3, 2754929 14, 780
5	0, 047343641 0, 282258624 0, 87501136 2, 26714358 12, 8461784	0, 1308525084 0, 472811210 1, 56625642 3, 607979 26, 94	0, 045925039 0, 27281921 0, 84002292 2, 1558330 11, 53869	0, 126659862 0, 451960122 1, 47204634 3, 51071343 22, 66
6	0, 03419721 0, 1975159 0, 5779550 1, 405623 3, 524580 16, 90989	0, 09267369 0, 2988830 0, 8444717 2, 386373 3, 607668 35, 65	0, 03331161 0, 1919402 0, 5589569 1, 348518 3, 230516 15, 04216	0, 0901489 0, 288320 0, 802943 2, 24886 3, 37477 29, 93
7	0, 0255449 0, 144203 0, 403510 0, 914525 1, 93487 5, 71978 23, 250	0, 068299 0, 20317 0, 49893 1, 26161 2, 76637 5, 2578 47, 7	0, 025049 0, 14124 0, 39439 0, 89122 1, 8812 5, 2526 20, 218	0, 06692 0, 19823 0, 48328 1, 2147 2, 7124 4, 5135 39, 3
8	0, 01972 0, 1096 0, 2973 0, 6419 1, 267 2, 419 7, 643 31, 31	0, 05223 0, 14696 0, 3263 0, 7298 1, 631 2, 554 8, 031 63, 3	0, 01937 0, 1075 0, 2913 0, 6275 1, 236 2, 355 7, 254 27, 49	0, 0513 0, 1438 0, 318 0, 706 1, 575 2, 561 7, 184 52, 2

Таблица 12 (продолжение)

$$s = 2\frac{3}{4}$$

$$s = 3$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0, 618306670549	2, 970015407	0, 556732974223	2, 600369234
2	0, 219216919 1, 74759694	0, 75885452 5, 6453865	0, 2004144315 1, 5625611175	0, 67889601 4, 9944767
3	0, 11379167 0, 79429701 3, 688075	0, 34613148 2, 0841141 8, 08636	0, 106606236 0, 733425953 3, 116054790	0, 32113795 1, 8519191 6, 746078
4	0, 06791834 0, 4260651 1, 4456441 7, 245647	0, 19354996 0, 83268998 3, 2087288 13, 485	0, 064905106 0, 404879673 1, 36604220 6, 08349834	0, 18419876 0, 77633393 3, 0115129 10, 44984
5	0, 045261314 0, 26844030 0, 82408222 2, 1076392 10, 97608	0, 12470536 0, 44243897 1, 43021625 3, 467876 20, 89	0, 043434896 0, 25651159 0, 78153948 1, 9849940 9, 54791	0, 11935037 0, 41698481 1, 32186943 3, 353217 16, 630
6	0, 0328779 0, 1892155 0, 549703 1, 320736 3, 10453 14, 2705	0, 088914 0, 283198 0, 782972 2, 18108 3, 29193 27, 63	0, 0316247 0, 1813742 0, 523261 1, 242135 2, 79806 12, 4167	0, 085357 0, 268620 0, 727021 1, 98936 3, 13401 22, 26
7	0, 024805 0, 13978 0, 38989 0, 87971 1, 8544 5, 0281 18, 954	0, 06625 0, 19580 0, 47562 1, 1915 2, 6817 4, 1918 35, 9	0, 024080 0, 13546 0, 37656 0, 84547 1, 7726 4, 4028 15, 940	0, 06424 0, 18864 0, 45310 1, 1226 2, 5733 3, 4294 28, 3
8	0, 01920 0, 1065 0, 2885 0, 6206 1, 221 2, 325 7, 064 25, 83	0, 0508 0, 1423 0, 313 0, 694 1, 550 2, 563 6, 78 47, 6	0, 01873 0, 1038 0, 2805 0, 6018 1, 180 2, 245 6, 497 21, 64	0, 0495 0, 138 0, 302 0, 663 1, 48 2, 56 5, 64 37, 0



Таблица 12 (продолжение)

$$\varepsilon = 3\frac{1}{4}$$

$$\varepsilon = 3\frac{1}{3}$$

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
0, 506056748053	2, 303013991	0, 491022421505	2, 216089712
0, 1850491293 1, 4230076338	0, 6158719074 4, 505967	0, 1805393358 1, 3836020056	0, 5977642675 4, 367690
0, 100071388 0, 678718145 2, 705207168	0, 2987483656 1, 64925841 5, 86993	0, 098036891 0, 661890025 2, 594548183	0, 2918475267 1, 58846300 5, 64552
0, 062110606 0, 385356078 1, 29180080 5, 16443233	0, 175586276 0, 725545382 2, 8151101 8, 346197	0, 061217527 0, 379135207 1, 26790211 4, 90193141	0, 172845451 0, 709582338 2, 7494040 7, 798447
0, 04181838 0, 24609142 0, 7453046 1, 8853892 8, 392163	0, 11463873 0, 39530656 1, 2331160 3, 2492410 13, 445	0, 04131776 0, 24288756 0, 7343064 1, 8556964 8, 049944	0, 11318466 0, 38873964 1, 2067540 3, 2154331 12, 554
0, 03046208 0, 1741538 0, 4992628 1, 172669 2, 575775 11, 03968	0, 0820686 0, 255432 0, 677936 1, 82382 3, 05572 18, 43	0, 03009763 0, 1719032 0, 4918695 1, 151745 2, 515706 10, 65324	0, 0810406 0, 251371 0, 663180 1, 77521 3, 03867 17, 38
0, 023362 0, 13118 0, 36338 0, 81141 1, 6887 3, 8688 13, 796	0, 062254 0, 18161 0, 43111 1, 0540 2, 4397 2, 9488 23, 1	0, 023125 0, 12976 0, 35903 0, 80014 1, 6604 3, 7143 13, 224	0, 061599 0, 17930 0, 42391 1, 0314 2, 3904 2, 8419 21, 8
0, 01828 0, 1012 0, 2730 0, 5841 1, 141 2, 170 5, 924 18, 35	0, 04832 0, 1343 0, 2916 0, 6352 1, 414 2, 545 4, 60 30	0, 018136 0, 10041 0, 27063 0, 57846 1, 1292 2, 1459 5, 7313 17, 42	0, 04793 0, 1330 0, 2882 0, 6262 1, 393 2, 537 4, 289 27, 6

Таблица 12 (продолжение)

$$s = 3\frac{1}{2}$$

$$s = 3\frac{2}{3}$$

$n$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0,463242903602	2,057164057	0,438105645019	1,915378190
2	0,1722783386 1,3128833866	0,5650452737 4,118524	0,1648835616 1,2509035088	0,5362418144 3,898590
3	0,094181744 0,630346817 2,403749981	0,278865834 1,4768292 5,26861	0,090606690 0,601560214 2,246073656	0,266941401 1,3778724 4,96487
4	0,059480381 0,367056740 1,221140425 4,433434615	0,1675299205 0,67888785 2,6176621 6,8842	0,057802630 0,355418210 1,175656742 4,032006237	0,1624156991 0,64968922 2,4860223 6,1692
5	0,04036383 0,23680887 0,71358727 1,8001148 7,415814	0,1104202 0,3763996 1,1577413 3,1477547 10,98	0,03946324 0,23109754 0,69426081 1,7484070 6,838366	0,1078176 0,3649400 1,1127129 3,0788633 9,625
6	0,0294047 0,167643 0,477999 1,113163 2,41161 9,9603	0,0790899 0,243754 0,635989 1,687421 3,011537 15,5	0,0287590 0,163696 0,465300 1,078614 2,32448 9,3508	0,0772765 0,236778 0,611671 1,610960 2,98933 13,9
7	0,022654 0,12696 0,35041 0,77780 1,6040 3,4408 12,240	0,060301 0,17473 0,40977 0,9869 2,2870 2,6917 19,4	0,022192 0,12422 0,34198 0,75598 1,5487 3,2129 11,430	0,059027 0,17028 0,39608 0,9439 2,1812 2,6072 17,5
8	0,01785 0,09877 0,2659 0,5673 1,105 2,097 5,344 15,79	0,04716 0,1305 0,2816 0,6086 1,351 2,514 3,71 24	0,01757 0,09714 0,2612 0,5562 1,081 2,047 4,963 14,41	0,04639 0,1281 0,2751 0,5912 1,309 2,483 3,220 21,6

Таблица 12 (продолжение)

$s = 3\frac{3}{4}$

$s = 4$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0, 426402564242	1, 850071560	0, 394287002827	1, 673351729
2	0, 1614643970 1, 2225836745	0, 52307528253 3, 79747474	0, 1521389830 1, 1461526512	0, 48763917226 3, 52223196
3	0, 088921257 0, 588161161 2, 177324670	0, 2613587940 1, 33283761 4, 83394	0, 084252646 0, 551666723 2, 002798931	0, 2460289146 1, 21368118 4, 50287
4	0, 05698465 0, 34975423 1, 15339260 3, 8536918	0, 15992927 0, 63561708 2, 420569 5, 8730	0, 05461206 0, 33337227 1, 08868695 3, 3966421	0, 15274374 0, 59544850 2, 227844 5, 1770
5	0, 03902972 0, 2283564 0, 6850217 1, 723646 6, 56811	0, 10656715 0, 3594836 1, 091398 3, 043609 9, 03	0, 03778359 0, 2205009 0, 6586314 1, 652448 5, 82293	0, 102980942 0, 34399317 1, 0311770 2, 9332762 7, 49
6	0, 0284530 0, 161834 0, 459359 1, 06270 2, 28593 9, 0704	0, 076419 0, 23351 0, 60048 1, 57642 2, 97898 13, 2	0, 0275964 0, 156646 0, 442972 1, 01954 2, 18522 8, 3026	0, 074023 0, 22451 0, 57024 1, 48484 2, 94796 11, 3
7	0, 021965 0, 12287 0, 33787 0, 74536 1, 5220 3, 1145 11, 076	0, 05840 0, 1681 0, 3895 0, 9232 2, 129 2, 583 16, 7	0, 021308 0, 11898 0, 32600 0, 71501 1, 4463 2, 8725 10, 170	0, 05660 0, 1619 0, 3707 0, 8650 1, 981 2, 555 14, 5
8	0, 01743 0, 09632 0, 2589 0, 5506 1, 069 2, 023 4, 777 13, 83	0, 0460 0, 1269 0, 272 0, 583 1, 288 2, 464 3, 01 20	0, 01701 0, 09390 0, 2518 0, 5341 1, 032 1, 944 4, 254 12, 33	0, 0449 0, 1232 0, 262 0, 557 1, 223 2, 389 2, 53 18

Таблица 13. Косинус-преобразование Фурье. Абсциссы и коэффициенты для правила интегрирования:

$$\int_0^{\infty} (1 + \cos x) \frac{\Phi(x)}{(1+x)^s} dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\Phi(x_k)}{(1+x_k)^s}, \quad s = 1 \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} \right) 4,$$

$$s = 1 \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} \right) 2 \frac{2}{3}.$$

Правило точное при  $\Phi(x) = (1+x)^{-l}$  ( $l = 0, 1, \dots, 2n-1$ ).  
 Функция  $\Phi(x)$  — ограниченная на полуоси  $0 \leq x < \infty$ . Глава 7, § 3, (7.3.3).

$$s = 1 \frac{1}{4}$$

$$s = 1 \frac{1}{3}$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	2, 736399185695	22, 69558010	2, 024932114051	14, 76146265
2	0, 324065926 15, 989884179	1, 8603517245 105, 519833	0, 3113879818 11, 813342869	1, 7869246503 63, 845299
3	0, 146324742 1, 103411833 33, 74702815	0, 8074441626 2, 661657205 222, 5005	0, 141115895 1, 043280383 25, 34979375	0, 7766094975 2, 535055094 136, 8434
4	0, 084900724 0, 562561701 2, 920612634 56, 04195474	0, 4571438544 1, 528526383 4, 0592701 367, 6597	0, 083104742 0, 548258267 2, 690363833 41, 16886079	0, 4470898693 1, 48938209 3, 61007247 221, 2978
5	0, 053082371 0, 321515872 1, 030561072 5, 77665103 96, 9250540	0, 2809118798 0, 835675511 1, 65003704 8, 656443 629, 45	0, 052292845 0, 316221759 1, 01152778 5, 47874375 70, 825663	0, 276636217 0, 821273353 1, 63552683 7, 7921827 375, 341
6	0, 037316639 0, 21726589 0, 64611877 1, 6180247 7, 6820915 135, 46270	0, 19584221 0, 54824680 1, 12246637 1, 39180385 12, 617478 879, 88	0, 03669526 0, 21322507 0, 63131074 1, 5625802 7, 3684503 100, 3038	0, 19250186 0, 53703129 1, 0949689 1, 3817864 11, 66003 531, 38
7	0, 02801294 0, 1593919 0, 4536749 1, 064656 3, 05449 9, 79158 174, 1474	0, 146286 0, 393949 0, 785085 1, 29870 1, 64749 16, 0648 1131, 5	0, 0276686 0, 157284 0, 446835 1, 045372 2, 86708 9, 23523 127, 827	0, 144458 0, 388375 0, 772396 1, 28359 1, 47357 14, 7667 677, 74
8	0, 021252 0, 118620 0, 32483 0, 71209 1, 44224 4, 9707 14, 285 240, 00	0, 11052 0, 2874 0, 54444 0, 91408 1, 1255 4, 1616 21, 419 1556	0, 021060 0, 117500 0, 32150 0, 70407 1, 42509 4, 8285 13, 322 174, 35	* 0, 109508 0, 284565 0, 538567 0, 905135 1, 12949 3, 81583 19, 360 921, 8

Таблица 13 (продолжение)

$s = 1\frac{1}{2}$

$s = 1\frac{2}{3}$

$n$	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	1, 325749360250	8, 444899097	0, 986848574943	5, 913814103
2	0, 2892032467 7, 6036386152	1, 6581488319 31, 49926	0, 2700176233 5, 4760230602	1, 5461423617 19, 01791
3	0, 131999890 0, 948148426 16, 98514960	0, 7232042428 2, 34238182 70, 0980	0, 124400953 0, 876893223 12, 80406764	0, 6792609966 2, 20265842 43, 9561
4	0, 079560006 0, 519919948 2, 302815920 26, 61928368	0, 4272465192 1, 40948186 2, 94615628 109, 8836	0, 076092658 0, 492171658 1, 999110590 19, 61497383	0, 4078460147 1, 32876948 2, 51108969 67, 86379
5	0, 050818523 0, 30640983 0, 97662160 4, 9314098 44, 791385	0, 268664851 0, 79467960 1, 60703263 6, 3145005 180, 942	0, 049443414 0, 29731759 0, 94441713 4, 4302752 31, 881176	0, 261240804 0, 77006995 1, 57784696 5, 0990182 107, 462
6	0, 03555103 0, 2058617 0, 6050163 1, 4737086 6, 838212 65, 3123	0, 1863637 0, 5167921 1, 0470335 1, 3721262 10, 07507 263, 04	0, 03453643 0, 1994224 0, 5827721 1, 406177 6, 397903 47, 8633	0, 1809362 0, 4993253 1, 007545 1, 369178 8, 793870 159, 93
7	0, 0269710 0, 153009 0, 432914 1, 00545 2, 53531 8, 35875 82, 363	0, 140755 0, 377050 0, 746198 1, 24753 1, 23497 12, 7220 332, 39	0, 0262688 0, 148707 0, 418872 0, 964588 2, 26737 7, 71158 60, 273	0, 137027 0, 365636 0, 719381 1, 2049 1, 1072 11, 1855 202, 08
8	0, 020689 0, 11533 0, 31510 0, 68864 1, 3921 4, 5246 11, 654 109, 57	0, 10756 0, 27909 0, 52725 0, 88772 1, 1356 3, 1286 16, 137 440, 8	0, 020325 0, 11321 0, 30883 0, 67353 1, 3595 4, 1898 10, 290 78, 03	0, 10565 0, 27371 0, 51615 0, 87030 1, 1392 2, 4705 13, 815 261, 0

Т а б л и ц а 13 (продолжение)

$$s = 1\frac{3}{4}$$

$$s = 2$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0, 876909169488	5, 166227308	0, 664290760081	3, 818396691
2	0, 2612389351 4, 7630079321	1, 4946102269 15, 450938	0, 2372691066 3, 3385548692	1, 3528462955 9, 3140129
3	0, 121080192 0, 847620986 11, 40237382	0, 6602230699 2, 14586170 36, 3194	0, 112619361 0, 777072259 8, 552623168	0, 6121475272 2, 00853866 22, 63387
4	0, 074400200 0, 478673936 1, 874027888 17, 35289276	0, 398385112 1, 288884905 2, 3549654 55, 964	0, 069569683 0, 440613928 1, 584714031 12, 98926491	0, 3714438459 1, 175524842 2, 0485472 35, 3832
5	0, 048780741 0, 292947502 0, 928896921 4, 1931278 27, 6327481	0, 257665477 0, 758226393 1, 56254915 4, 574166 86, 772	0, 046848502 0, 280215537 0, 883208242 3, 5309147 19, 369610	0, 247244090 0, 723568439 1, 51198766 3, 297112 51, 664
6	0, 034073871 0, 19651507 0, 57295106 1, 37811624 6, 2007114 42, 032199	0, 17846664 0, 49151265 0, 99043129 1, 36870029 8, 231942 130, 30	0, 032835772 0, 18881520 0, 54753503 1, 30921417 5, 6655282 30, 257204	0, 17187117 0, 47103055 0, 94693464 1, 36791314 6, 753464 78, 369
7	0, 0259203 0, 146574 0, 411916 0, 944299 2, 15691 7, 44958 53, 063	0, 135178 0, 359977 0, 706014 1, 18213 1, 07225 10, 5510 165, 2	0, 0249094 0, 140407 0, 391938 0, 886688 1, 90550 6, 83071 38, 936	0, 129816 0, 34366 0, 66762 1, 1141 1, 0354 9, 0129 101, 3
8	0, 020143 0, 11215 0, 30570 0, 6660 1, 3430 4, 012 9, 714 67, 79	0, 10469 0, 27104 0, 51062 0, 8614 1, 1399 2, 1677 12, 905 210, 7	0, 01960 0, 1090 0, 2963 0, 6430 1, 292 3, 459 8, 368 48, 13	0, 10182 0, 26295 0, 49372 0, 8334 1, 1361 1, 4351 10, 857 125, 5

Таблица 13 (продолжение)

$$\varepsilon = 2\frac{1}{4}$$

$$\varepsilon = 2\frac{1}{3}$$

n	$r_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0, 543176000684	3, 103531941	0, 513835002205	2, 935234806
2	0, 2159904814 2, 5005176169	1, 2257428019 6, 3669816	0, 2093927335 2, 2967057743	1, 1861451438 5, 7310258
3	0, 105808781 0, 723384263 6, 766912417	0, 5738402974 1, 901208199 15, 40541	0, 103798952 0, 707890286 6, 302459617	0, 5625887866 1, 869322575 13, 71159
4	0, 065244254 0, 407528735 1, 391338665 10, 49558258	0, 3474439677 1, 077674501 1, 8877752 25, 0688	0, 063934916 0, 397762201 1, 342014772 9, 88619305	0, 3402106189 1, 049193210 1, 8522382 22, 715335
5	0, 044949461 0, 267681662 0, 83719998 2, 9523055 14, 750346	0, 237001198 0, 689124757 1, 45180503 2, 427307 34, 999	0, 044317480 0, 263502453 0, 82160381 2, 7815437 13, 668590	0, 233591734 0, 677559837 1, 42924092 2, 216938 31, 385
6	0, 031766956 0, 18224963 0, 5264060 1, 2546424 5, 172086 23, 02668	0, 1661923 0, 4537660 0, 9113448 1, 3655346 5, 472096 52, 132	0, 031437099 0, 18023497 0, 5199920 1, 2383275 5, 009990 21, 19065	0, 1644419 0, 4484949 0, 9005701 1, 364077 5, 074091 46, 217
7	0, 0239870 0, 134825 0, 374158 0, 837258 1, 74289 6, 37313 30, 625	0, 124933 0, 329012 0, 633872 1, 05491 1, 04664 7, 83616 69, 42	0, 0237044 0, 133126 0, 368826 0, 822897 1, 70213 6, 24296 28, 552	0, 123438 0, 324583 0, 623894 1, 03802 1, 05393 7, 49563 62, 19
8	0, 019036 0, 10569 0, 28655 0, 61917 1, 2359 2, 9413 7, 4776 37, 13	0, 0989 0, 2547 0, 4762 0, 8027 1, 1209 1, 0103 9, 428 84, 64	0, 018849 0, 10460 0, 28329 0, 61108 1, 2165 2, 7901 7, 2552 34, 51	0, 0979 0, 252 0, 470 0, 792 1, 113 0, 927 9, 04 75, 7

Таблица 13 (продолжение)

$s = 2\frac{1}{2}$

$s = 2\frac{2}{3}$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0,465799292657	2,6630140566	0,428093256913	2,451578479
2	0,1968873615 1,9660641851	1,1109534718 4,7707144	0,1852857583 1,7129958463	1,0411633760 4,0976954
3	0,100069174 0,679401629 5,504310988	0,5417573865 1,80918602 10,99604	0,096642640 0,653405707 4,838964735	0,5226617085 1,75223447 8,934535
4	0,061521580 0,380101835 1,259947097 8,878144073	0,326923482 0,998349361 1,79738622 18,9739	0,059371658 0,364753243 1,194855119 8,071415093	0,315139588 0,954936272 1,75683689 16,1236
5	0,043053927 0,25513700 0,79004668 2,4767212 11,954986	0,22677420 0,65430119 1,3804373 1,8957562 25,858	0,041796353 0,24680722 0,75830887 2,2216743 10,677426	0,21998912 0,63103035 1,3276100 1,6824048 21,876
6	0,03080502 0,1763853 0,5077923 1,207389 4,683656 18,1144	0,1610898 0,4384444 0,8800253 1,3598777 4,31570 37,028	0,03019906 0,1727037 0,4961613 1,177803 4,351301 15,6650	0,1578779 0,4288461 0,8602913 1,353621 3,61189 30,374
7	0,0231771 0,129973 0,359040 0,797145 1,63459 6,00440 25,073	0,120654 0,316409 0,605796 1,00830 1,06965 6,8666 50,8	0,0226987 0,127131 0,350340 0,774888 1,58085 5,78550 22,242	0,118131 0,309090 0,589950 0,983266 1,08485 6,28637 42,2
8	0,018467 0,10236 0,27665 0,59460 1,1763 2,5253 6,8871 32,24	0,09588 0,2462 0,4581 0,7694 1,092 0,824 6,346 61,8	0,018093 0,10018 0,27014 0,57838 1,1365 2,3154 6,5988 26,96	0,09392 0,2407 0,4462 0,7470 1,0673 0,7799 7,757 51,6



Таблица 13 (продолжение)

$$s = 2\frac{3}{4}$$

$$s = 3$$

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
0, 412095031243	2, 362274435	0, 372341639677	2, 140820041
0, 1798231926 1, 6086510123	1, 0083405686 3, 8363412	0, 1647905702 1, 3615201575	0, 91833519735 3, 2555680
0, 095018254 0, 641103241 4, 545446653	0, 5136188809 1, 724479337 8, 08792	0, 090413517 0, 606178808 3, 789498630	0, 488003466 1, 64251705 6, 09945
0, 058387989 0, 357850471 1, 167146094 7, 72257217	0, 3097652282 0, 9356579286 1, 7400454 14, 9337	0, 055753521 0, 339712471 1, 098032170 6, 82874981	0, 2954240796 0, 8857007632 1, 6981205 12, 0148
0, 041173475 0, 242684901 0, 74255520 2, 1121671 10, 1576774	0, 216629242 0, 619490179 1, 30024825 1, 6070315 20, 283	0, 039353096 0, 230679115 0, 69688507 1, 8478212 8, 9324744	0, 206817209 0, 585891408 1, 21805112 1, 4681324 16, 581
0, 02990246 0, 1709033 0, 4904758 1, 163241 4, 182702 14, 63138	0, 1563062 0, 4241531 0, 8505648 1, 349573 3, 28465 27, 7	0, 02902542 0, 1655811 0, 4736358 1, 119471 3, 673587 12, 14913	0, 1516590 0, 4102648 0, 8213401 1, 332892 2, 42980 21, 81
0, 022476 0, 12581 0, 34635 0, 76487 1, 5577 5, 6805 21, 005	0, 116958 0, 30572 0, 58276 0, 97217 1, 09190 6, 0081 38, 6	0, 021863 0, 12220 0, 33552 0, 73818 1, 4987 5, 3712 17, 817	0, 113729 0, 296515 0, 56345 0, 94303 1, 11042 5, 1965 30, 2
0, 01791 0, 09908 0, 2669 0, 5703 1, 117 2, 229 6, 475 25, 58	0, 0930 0, 238 0, 440 0, 736 1, 05 0, 772 7, 49 47, 5	0, 01737 0, 09597 0, 2577 0, 5476 1, 062 2, 027 6, 167 22, 16	0, 0901 0, 2300 0, 423 0, 703 1, 013 0, 781 6, 78 37, 9

Таблица 13 (продолжение)

$$s = 3\frac{1}{4}$$

$$s = 3\frac{1}{3}$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0,341364840259	1,968037899	0,332440141201	1,918109514
2	0,1517595935 1,1857532877	0,84095210075 2,8747254	0,1478432782 1,1385756155	0,81785492464 2,7767788
3	0,08610633 0,573312480 3,185026601	0,464051393 1,56075874 4,72598	0,084720670 0,562682736 3,011635980	0,456345235 1,53332970 4,37054
4	0,053503719 0,324578453 1,043443255 6,09059557	0,283232986 0,844685611 1,6631974 9,766	0,052820515 0,320036553 1,027435815 5,86807955	0,279539797 0,832466378 1,6523012 9,122
5	0,037650700 0,21955666 0,65545562 1,6615526 8,0468193	0,19765853 0,55494681 1,1419370 1,409582 13,944	0,037118030 0,21610674 0,64287956 1,6127056 7,8023819	0,19479780 0,54541635 1,1189169 1,399851 13,222
6	0,02815198 0,1602758 0,4567541 1,074316 3,182842 10,39836	0,1470305 0,3963801 0,7912981 1,307705 1,802958 17,860	0,02785952 0,1584975 0,4510687 1,058784 3,029715 9,93976	0,1454803 0,3917147 0,7810006 1,297065 1,646723 16,837
7	0,021312 0,118988 0,32598 0,71516 1,44973 5,0534 15,211	0,110838 0,288369 0,54666 0,91808 1,12498 4,3916 24,1	0,021139 0,117975 0,32300 0,70802 1,4347 4,9420 14,444	0,109926 0,285812 0,54143 0,91031 1,1290 4,1211 22,4
8	0,01688 0,09309 0,2493 0,5271 1,014 1,891 5,916 19,50	0,0875 0,2228 0,408 0,675 0,977 0,811 6,17 31	0,01672 0,09218 0,2466 0,5207 0,9991 1,854 5,837 18,71	0,0867 0,220 0,403 0,667 0,966 0,823 5,97 29

Таблица 13 (продолжение)

$s = 3\frac{1}{2}$

$s = 3\frac{2}{3}$

$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
0, 316219628090	1, 827098461	0, 301793582658	1, 745793392
0, 1406136696 1, 0572966164	0, 7754469080 2, 6118036	0, 1341339587 0, 9901026879	0, 7377154160 2, 4784821
0, 082012271 0, 541825162 2, 701722081	0, 4412812325 1, 47814145 3, 780735	0, 079380890 0, 521472529 2, 436028001	0, 4266443988 1, 42264038 3, 323685
0, 051533550 0, 311536268 0, 99778459 5, 4493167	0, 272592407 0, 80967344 1, 6309620 7, 957	0, 050333460 0, 303662735 0, 970542128 5, 0590442	0, 266123447 0, 78861388 1, 6096950 6, 933
0, 03611156 0, 2096358 0, 6197161 1, 5302231 7, 368641	0, 18940039 0, 5276560 1, 0769181 1, 3885715 11, 95	0, 03518584 0, 2037444 0, 5991453 1, 4638025 6, 991706	0, 18444623 0, 51163705 1, 0402269 1, 3837713 10, 85
0, 0272721 0, 1549229 0, 439601 1, 026975 2, 74660 9, 1688	0, 142366 0, 382320 0, 759965 1, 272157 1, 40586 15, 11	0, 0266826 0, 1513335 0, 428045 0, 994364 2, 49952 8, 55418	0, 139241 0, 372869 0, 738443 1, 24255 1, 24592 13, 70
0, 020804 0, 11603 0, 31727 0, 69435 1, 4060 4, 7086 13, 05	0, 10817 0, 28090 0, 53139 0, 8953 1, 1358 3, 580 19, 7	0, 020479 0, 11413 0, 31172 0, 68114 1, 3782 4, 4575 11, 831	0, 10646 0, 27613 0, 52168 0, 88060 1, 1409 3, 045 17, 4
0, 01643 0, 09054 0, 2418 0, 5095 0, 9738 1, 796 5, 694 17, 32	0, 0852 0, 2163 0, 3950 0, 6513 0, 9479 0, 8437 5, 596 26	0, 01615 0, 08890 0, 2371 0, 4985 0, 9500 1, 744 5, 551 16, 02	0, 0837 0, 212 0, 387 0, 637 0, 931 0, 865 5, 22 23

Таблица 13 (продолжение)

$$s = 3\frac{3}{4}$$

$$s = 4$$

n	$x_k$	$A_k$	$x_k$	$A_k$
1	0,295141364582	1,708165850	0,277026873832	1,605208108
2	0,1311528639 0,9607715432	0,7004504414 2,4209541	0,1231308380 0,8861391811	0,6742966604 2,2756108
3	0,078093059 0,511489213 2,318066526	0,4194812491 1,39487185 3,13580	0,074344105 0,482405509 2,016253771	0,3986356439 1,31224413 2,69921
4	0,049759889 0,299913636 0,957602909 4,87288533	0,263034285 0,778592016 1,59892556 6,4686	0,048121641 0,289239536 0,920723382 4,34577391	0,254217800 0,750034021 1,56544739 5,2422
5	0,034752827 0,201009523 0,589767905 1,435301698 6,8195863	0,182132399 0,50425382 1,0237232 1,382689 10,35	0,033564670 0,193574401 0,564809853 1,363838332 6,3508838	0,175795523 0,48435695 0,98049993 1,381690 9,019
6	0,0263882 0,149541 0,422265 0,977900 2,39040 8,29318	0,137681 0,368144 0,727578 1,22621 1,19031 13,1	0,0255151 0,144229 0,405143 0,928909 2,11897 7,64958	0,133053 0,354142 0,695134 1,17317 1,09387 11,5
7	0,020319 0,11320 0,30899 0,67468 1,3645 4,3254 11,284	0,10562 0,27379 0,51692 0,87328 1,1427 2,7860 16,5	0,019845 0,11046 0,30094 0,65542 1,3231 3,9055 9,891	0,10314 0,26687 0,50274 0,85095 1,1451 2,0753 14,2
8	0,0160 0,0882 0,235 0,494 0,940 1,72 5,48 15,4	0,0831 0,210 0,383 0,630 0,924 0,874 5,03 21	0,0157 0,0862 0,229 0,480 0,912 1,67 5,27 13,8	0,0812 0,205 0,373 0,613 0,904 0,900 4,47 18

Г Л А В А 20  
ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Таблица 14. Узлы и коэффициенты для правила вычисления:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} p^{-s} e^{p} \Phi(p) dp \approx \sum_{k=1}^n A_k \Phi(p_k) \quad (\epsilon > 0), \quad \arg p = 0 \text{ при } p > 0,$$

$$s = 0,1 (0,1) 3, \quad s = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} \right) \frac{8}{3}, \quad s = 0,25 (0,5) 2,75.$$

Функция  $\Phi(p)$  считается аналитической, регулярной в полуплоскости  $\text{Re}(p) > 0$  и ограниченной при  $p \rightarrow \infty$  в секторе  $|\arg p| < (\pi/2) - \delta$  ( $\delta > 0$ ).

Правило интегрирования является точным, если  $\Phi(p) = p^{-l}$  ( $l = 0,1, \dots, 2n-1$ ).  
Глава 8, § 1 и 2, (8.1.4).

$$s = 0,1$$

$n$	$k$	$p_k$	$A_k$	
1	1	0,1000000 + 0,0000000i	0,1051137 +	0,0000000i
2	1,2	1,1000000 ± 1,0488089i	0,05255685 ±	1,102442i
3	1,2	1,7862722 ± 2,5681268i	-2,782016 ∓	0,02246881i
	3	2,7274556 + 0,0000000i	5,669145 +	0,0000000i
4	1,2	2,3199603 ± 4,2257278i	0,8073119 ∓	5,343290i
	3,4	3,8800397 ± 1,4000530i	-0,7547551 ±	19,30748i
5	1,2	2,7636582 ± 5,9533395i	8,672230 ±	3,083259i
	3,4	4,7972134 ± 2,9405162i	-51,35325 ∓	6,688904i
	5	5,3782569 + 0,0000000i	85,46715 +	0,0000000i
6	1,2	3,1471288 ± 7,7240216i	-7,744213 ±	12,19036i
	3,4	5,5694068 ± 4,5593991i	30,22731 ∓	114,9875i
	5,6	6,5834644 ± 1,5119808i	-22,43054 ±	290,5836i
7	1,2	3,4870564 ± 9,5241962i	-14,70344 ∓	15,55974i
	3,4	6,2418978 ± 6,2293836i	224,3731 ±	98,30425i
	5,6	7,6064439 ± 3,0923073i	-821,6593 ∓	151,4323i
	7	8,0292040 + 0,0000000i	1224,084 +	0,00000i
8	1,2	3,7938184 ± 11,345996i	26,81807 ∓	14,36353i
	3,4	6,8409793 ± 7,9357966i	-259,6597 ±	386,7253i
	5,6	8,5027097 ± 4,7197159i	645,0837 ∓	2012,331i
	7,8	9,2624928 ± 1,5676998i	-412,1894 ±	4214,677i
9	1,2	4,0743505 ± 13,184427i	8,821340 ±	40,90097i
	3,4	7,3834202 ± 9,6697513i	-587,1396 ∓	590,1787i
	5,6	9,3047524 ± 6,3820379i	4360,604 ±	2145,187i
	7,8	10,347392 ± 3,1759376i	-12442,49 ∓	2686,323i
	9	10,680171 + 0,0000000i	17320,40 +	0,0000i
10	1,2	4,3335386 ± 15,036102i	-55,88649 ∓	4,375706i
	3,4	7,8806374 ± 11,425410i	1191,405 ∓	765,0891i
	5,6	10,033485 ± 8,0715648i	-6027,284 ±	8436,417i
	7,8	11,321426 ± 4,8153969i	11564,50 ∓	32354,37i
	9,10	11,930914 ± 1,6011328i	-6672,678 ±	60291,86i

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 0,2$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	0,2000000+ 0,0000000i	0,2178249+ 0,000000i
2	1,2	1,2000000 ± 1,0954451i	0,1089124 ± 1,193076i
3	1,2 3	1,8855166 ± 2,6261568i 2,8289669+ 0,0000000i	-2,767235 ± 0,1078295i 5,752295 + 0,0000000i
4	1,2 3,4 •	2,4189953 ± 4,2900515i 3,9810047 ± 1,4196462i	0,5174385 ± 5,103115i -0,4085260 ± 18,70583i
5	1,2 3,4 5	2,8626288 ± 6,0218443i 4,8976984 ± 2,9717164i 5,4793455+ 0,0000000i	8,097633 ± 2,429620i -48,21122 ± 4,990196i 80,44500 + 0,000000i
6	1,2 3,4 5,6	3,2460872 ± 7,7955719i 5,6695485 ± 4,5985230i 6,6843643 ± 1,5245439i	-6,372506 ± 11,25972i 24,18062 ± 105,6395i -17,69920 ± 267,1270i
7	1,2 3,4 5,6 7	3,5860242 ± 9,5980941i 6,3417963 ± 6,2743621i 7,7071082 ± 3,1138473i 8,1301426+ 0,0000000i	-13,59538 ± 12,97660i 203,1799 ± 80,46159i -741,6134 ± 122,6928i 1104,276 + 0,0000i
8	1,2 3,4 5,6 7,8	3,8928053 ± 11,421776i 6,9407028 ± 7,9853274i 8,6031554 ± 4,7480947i 9,3633366 ± 1,5769664i	22,47197 ± 13,58593i -214,2328 ± 347,3566i 527,8632 ± 1791,435i -335,9934 ± 3742,898i
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	4,1733604 ± 13,261758i 7,4830156 ± 9,7229508i 9,4050097 ± 6,4158539i 10,448098 ± 3,1924248i 10,781033 + 0,0000000i	9,318050 ± 34,35219i -526,7886 ± 488,0377i 3844,495 ± 1760,670i -10910,80 ± 2196,163i 15167,76 + 0,000i
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	4,4325731 ± 15,114742i 7,9801375 ± 11,481646i 10,133584 ± 8,1098381i 11,421987 ± 4,8377242i 12,031719 ± 1,6084782i	-47,06578 ± 1,193658i 985,3015 ± 693,4173i -4946,586 ± 7396,298i 9452,197 ± 28095,04i -5443,738 ± 52182,95i

Таблица 14 (продолжение)

$s = 0,3$

$n$	$k$	$p_k$	$A_k$
1	1	$0,3000000 + 0,0000000i$	$0,3342728 + 0,000000i$
2	1,2	$1,3000000 \pm 1,1401754i$	$0,1671364 \pm 1,270432i$
3	1,2	$1,9848175 \pm 2,6829126i$	$-2,728367 \pm 0,2293172i$
	3	$2,9303650 + 0,0000000i$	$5,791008 + 0,0000000i$
4	1,2	$2,5180807 \pm 4,3534086i$	$0,2599271 \mp 4,840641i$
	3,4	$4,0819193 \pm 1,4389680i$	$-0,09279069 \pm 18,02536i$
5	1,2	$2,9616407 \pm 6,0895657i$	$7,514642 \pm 1,859297i$
	3,4	$4,9981636 \pm 3,0025871i$	$-45,06015 \mp 3,494286i$
	5	$5,5803915 + 0,0000000i$	$75,42530 + 0,0000000i$
6	1,2	$3,3450795 \pm 7,8664609i$	$-5,184752 \pm 10,33418i$
	3,4	$5,7696850 \pm 4,6373115i$	$18,95046 \mp 96,65608i$
	5,6	$6,7852355 \pm 1,5370029i$	$-13,59857 \pm 244,7799i$
7	1,2	$3,6850203 \pm 9,6714188i$	$-12,47326 \mp 10,75028i$
	3,4	$6,4416969 \pm 6,3190155i$	$183,2471 \pm 65,18642i$
	5,6	$7,8077547 \pm 3,1352372i$	$-667,4248 \mp 98,11275i$
	7	$8,2310562 + 0,0000000i$	$993,6362 + 0,000000i$
8	1,2	$3,9918161 \pm 11,497049i$	$18,73741 \mp 12,68585i$
	3,4	$7,0404322 \pm 8,0345482i$	$-175,6171 \pm 310,6469i$
	5,6	$8,7035905 \pm 4,7763025i$	$428,5403 \mp 1590,298i$
	7,8	$9,4641613 \pm 1,5861780i$	$-271,4934 \pm 3316,411i$
9	1,2	$4,2723909 \pm 13,338635i$	$9,416549 \pm 28,73018i$
	3,4	$7,5826189 + 9,7758564i$	$-470,1896 \mp 401,6778i$
	5,6	$9,5052615 \pm 6,4494901i$	$3379,613 \pm 1437,216i$
	7,8	$10,548790 \pm 3,2088261i$	$-9547,247 \mp 1784,678i$
	9	$10,881878 + 0,0000000i$	$13257,15 + 0,0000i$
10	1,2	$4,5316255 \pm 15,192968i$	$-39,47620 \pm 1,061444i$
	3,4	$8,0796464 \pm 11,537604i$	$811,7484 \mp 623,7580i$
	5,6	$10,233680 \pm 8,1479292i$	$-4042,882 \pm 6463,772i$
	7,8	$11,522538 \pm 4,8599476i$	$7691,277 \pm 24344,63i$
	9,10	$12,132511 \pm 1,6157899i$	$-4420,499 \pm 45085,64i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 0,4$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$0,4000000 + 0,0000000i$	$0,4508242 + 0,000000i$
2	1,2	$1,4000000 \pm 1,1832169i$	$0,2254121 \pm 1,333556i$
3	1,2 3	$2,0841689 \pm 2,7384755i$ $3,0316623 + 0,0000000i$	$-2,668040 \pm 0,3401313i$ $5,786904 + 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$2,6172126 \pm 4,4158421i$ $4,1827874 \pm 1,4580297i$	$0,03494402 \mp 4,562205i$ $0,1904681 \pm 17,27988i$
5	1,2 3,4 5	$3,0606914 \pm 6,1565301i$ $5,0986101 \pm 3,0331386i$ $5,6813972 + 0,0000000i$	$6,933116 \pm 1,367364i$ $-41,93432 \mp 2,193312i$ $70,45324 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$3,4441040 \pm 7,9367069i$ $5,8698165 \pm 4,6757733i$ $6,8860795 \pm 1,5493602i$	$-4,164587 \pm 9,428502i$ $14,46803 \mp 88,08875i$ $-10,07803 \pm 223,6034i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$3,7840435 \pm 9,7441834i$ $6,5415996 \pm 6,3633507i$ $7,9083840 \pm 3,1564801i$ $8,3319460 + 0,0000000i$	$-11,36297 \mp 8,843390i$ $164,6293 \pm 52,19887i$ $-598,9564 \mp 77,24081i$ $891,8310 + 0,00000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$4,0908499 \pm 11,571825i$ $7,1401673 \pm 8,0834647i$ $8,8040156 \pm 4,8043424i$ $9,5649673 \pm 1,5953358i$	$15,54519 \mp 11,71584i$ $-142,9672 \pm 276,6735i$ $344,8507 \mp 1407,869i$ $-217,2033 \pm 2931,988i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$4,3714413 \pm 13,415065i$ $7,6822296 \pm 9,8284730i$ $9,6055079 \pm 6,4829494i$ $10,649468 \pm 3,2251429i$ $10,982706 + 0,0000000i$	$9,224900 \pm 23,92742i$ $-417,6396 \mp 328,9845i$ $2962,593 \pm 1166,344i$ $-8336,583 \mp 1440,807i$ $11565,26 + 0,000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$4,6306952 \pm 15,270789i$ $8,1791637 \pm 11,593288i$ $10,333775 \pm 8,1858405i$ $11,623079 \pm 4,8820685i$ $12,233288 \pm 1,6230682i$	$-32,97914 \pm 2,597048i$ $666,1721 \mp 557,3262i$ $-3290,016 \pm 5631,509i$ $6228,776 \mp 21050,90i$ $-3571,728 \pm 38886,40i$



Таблица 14 (продолжение)

$s = 0,5$

$k$	$p_k$	$A_k$
1	$0,5900000 + 0,000000i$	$0,5641896 + 0,000000i$
1,2	$1,5000000 \pm 1,2247449i$	$0,2820948 \pm 1,381977i$
1,2 3	$2,1835653 \pm 2,7929183i$ $3,1328694 + 0,000000i$	$-2,589075 \pm 5,742340 + 0,4389226i$ $0,000000i$
1,2 3,4	$2,7163875 \pm 4,4773916i$ $4,2836125 \pm 1,4768417i$	$-0,1581054 \mp 0,4402002 \pm 4,273630i$ $16,48298i$
1,2 3,4 5	$3,1597785 \pm 6,2227628i$ $5,1990390 \pm 3,0633810i$ $5,7823650 + 0,000000i$	$6,361338 \pm -38,86357 \mp 65,56866 + 0,9481800i$ $1,077047i$ $0,000000i$
1,2 3,4 5,6	$3,5431591 \pm 8,0063273i$ $5,9699433 \pm 4,7139166i$ $6,9868976 \pm 1,5616183i$	$-3,295627 \pm 10,66395 \mp -7,086225 \pm 8,554271i$ $79,97558i$ $203,6376i$
1,2 3,4 5,6 7	$3,8830926 \pm 9,8164008i$ $6,6415042 \pm 6,4073746i$ $8,0089968 \pm 3,1775791i$ $8,4328129 + 0,000000i$	$-10,28444 \mp 147,3509 \pm -536,0239 \mp 798,4790 + 7,220274i$ $41,23529i$ $59,65250i$ $0,000000i$
1,2 3,4 5,6 7,8	$4,1899060 \pm 11,646114i$ $7,2399080 \pm 8,1320827i$ $8,9044308 \pm 4,8322173i$ $9,6657553 \pm 1,6044406i$	$12,83067 \mp -115,5129 \pm 274,7443 \mp -171,7799 \pm 10,71704i$ $245,4469i$ $1243,027i$ $2586,461i$
1,2 3,4 5,6 7,8 9	$4,4705111 \pm 13,491056i$ $7,7818478 \pm 9,8808053i$ $9,7057491 \pm 6,5162345i$ $10,750133 \pm 3,2413766i$ $11,083518 + 0,000000i$	$8,829543 \pm -369,2771 \mp 2589,930 \pm -7264,429 \mp 10070,46 + 19,84403i$ $268,0686i$ $940,5531i$ $1154,800i$ $0,000i$
1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$4,7297819 \pm 15,348210i$ $8,2786894 \pm 11,648702i$ $10,433868 \pm 8,2235746i$ $11,723610 \pm 4,9040883i$ $12,334051 \pm 1,6303136i$	$-27,44431 \pm 544,5355 \mp -2665,204 \mp 5018,810 \pm 3,581469i$ $494,9337i$ $4891,908i$ $18165,56i$ $33482,42i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 0,6$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$	
1	1	$0,6000000+ 0,0000000i$	$0,6715050+$	$0,000000i$
2	1,2	$1,6000000 \pm 1,2649111i$	$0,3357525 \pm$	$1,415657i$
3	1,2 3	$2,2830022 \pm 2,8463069i$ $3,2339956+ 0,0000000i$	$-2,494384 \pm$ $5,660273 +$	$0,5248249i$ $0,000000i$
4	1,2 3,4	$2,8156023 \pm 4,5380940i$ $4,3843977 \pm 1,4954138i$	$-0,3204369 \mp$ $0,6561894 \pm$	$3,980149i$ $15,64768i$
5	1,2 3,4 5	$3,2589001 \pm 6,2882873i$ $5,2994513 \pm 3,0933234i$ $5,8832971+ 0,0000000i$	$5,806092 \pm$ $-35,87333 \mp$ $60,80597 +$	$0,5956609i$ $0,1334900i$ $0,0000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$3,6422435 \pm 8,0753386i$ $6,0700657 \pm 4,7517493i$ $7,0876908 \pm 1,5737797i$	$-2,561841 \pm$ $7,469672 \mp$ $-4,572078 \pm$	$7,720273i$ $72,34244i$ $184,9034i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$3,9821667 \pm 9,8880832i$ $6,7414107 \pm 6,4510938i$ $8,1095937 \pm 3,1985370i$ $8,5336578+ 0,0000000i$	$-9,252507 \mp$ $131,4106 \pm$ $-478,4050 \mp$ $713,1652 +$	$5,847394i$ $32,05002i$ $44,95262i$ $0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$4,2889836 \pm 11,719926i$ $7,3396539 \pm 8,1804075i$ $9,0048366 \pm 4,8599302i$ $9,7665260 \pm 1,6134934i$	$10,53421 \mp$ $-92,55825 \pm$ $216,3769 \mp$ $-134,0171 \pm$	$9,721007i$ $216,9250i$ $1094,612i$ $2276,750i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$4,5695995 \pm 13,566616i$ $7,8814732 \pm 9,9328579i$ $9,8059854 \pm 6,5493481i$ $10,850785 \pm 3,2575283i$ $11,184314 + 0,0000000i$	$8,298743 \pm$ $-325,1158 \mp$ $2258,120 \pm$ $-6317,326 \mp$ $8752,718 +$	$16,38835i$ $217,2536i$ $753,2421i$ $918,1016i$ $0,00000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$4,8288851 \pm 15,425237i$ $8,3782231 \pm 11,703849i$ $10,533959 \pm 8,2611340i$ $11,824132 \pm 4,9260085i$ $12,434802 \pm 1,6375266i$	$-22,75108 \pm$ $443,2956 \mp$ $-2148,690 \pm$ $4021,774 \mp$ $-2293,293 \pm$	$4,150142i$ $437,0736i$ $4237,307i$ $15644,21i$ $28780,96i$

Таблица 14 (продолжение)

$s = 0,7$

$n$	$k$	$p_k$	$A_k$
1	1	$0,7000000 + 0,0000000i$	$0,7703832 + 0,000000i$
2	1,2	$1,7009000 \pm 1,3038405i$	$0,3851916 \pm 1,434938i$
3	1,2 3	$2,3824757 \pm 2,8987006i$ $3,3350486 + 0,0000000i$	$-2,386874 \pm 0,5974120i$ $5,544130 + 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$2,9148541 \pm 4,5979837i$ $4,4851459 \pm 1,5137550i$	$-0,4537529 \mp 3,686375i$ $0,8389445 \pm 14,78632i$
5	1,2 3,4 5	$3,3580543 \pm 6,3531262i$ $5,3998481 \pm 3,1229748i$ $5,9841953 + 0,0000000i$	$5,272758 \pm 0,3034981i$ $-32,98469 \pm 0,6505945i$ $56,19425 + 0,0000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$3,7413558 \pm 8,1437567i$ $6,1701838 \pm 4,7892790i$ $7,1884604 \pm 1,5858467i$	$-1,947829 \pm 6,932831i$ $4,818725 \mp 65,20449i$ $-2,485704 \pm 167,4052i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$4,0812648 \pm 9,9592424i$ $6,8413192 \pm 6,4945145i$ $8,2101754 \pm 3,2193567i$ $8,6344814 + 0,0000000i$	$-8,277688 \mp 4,693619i$ $116,7865 \pm 24,41650i$ $-425,8489 \mp 32,77658i$ $635,4505 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$4,3880820 \pm 11,793270i$ $7,4394051 \pm 8,2284445i$ $9,1052332 \pm 4,8874840i$ $9,8672799 \pm 1,6224950i$	$8,601366 \mp 8,751231i$ $-73,47863 \pm 191,0245i$ $168,1004 \pm 961,4507i$ $-102,8379 \pm 1999,888i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$4,6687061 \pm 13,641752i$ $7,9811054 \pm 9,9846354i$ $9,9062168 \pm 6,5822930i$ $10,951424 \pm 3,2735994i$ $11,285095 + 0,0000000i$	$7,685622 \pm 13,47715i$ $-285,0744 \mp 175,0607i$ $1963,715 \pm 598,6287i$ $-5482,741 \mp 723,2378i$ $7593,599 + 0,0000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$4,9280042 \pm 15,501877i$ $8,4777647 \pm 11,758735i$ $10,634047 \pm 8,2985213i$ $11,924645 \pm 4,9478303i$ $12,535539 \pm 1,6447075i$	$-18,78927 \pm 4,411082i$ $359,3604 \mp 383,9913i$ $-1723,416 \pm 3660,158i$ $3203,619 \mp 13446,21i$ $-1820,389 \pm 24698,61i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 0,8$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$0,8000000 + 0,0000000i$	$0,8589370 + 0,000000i$
2	1,2	$1,8000000 \pm 1,3416408i$	$0,4294685 \pm 1,440481i$
3	1,2 3	$2,4819823 \pm 2,9501535i$ $3,4360354 + 0,0000000i$	$-2,269367 \pm 0,6566463i$ $5,397671 + 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$3,0141403 \pm 4,6570928i$ $4,5858597 \pm 1,5318739i$	$-0,5601167 \mp 3,396280i$ $0,9895852 \pm 13,91033i$
5	1,2 3,4 5	$3,4572391 \pm 6,4173008i$ $5,5002301 \pm 3,1523437i$ $6,0850616 + 0,0000000i$	$4,765440 \pm 0,06534888i$ $-30,21466 \pm 1,289198i$ $51,75738 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$3,8404946 \pm 8,2115967i$ $6,2702979 \pm 4,8265129i$ $7,2892074 \pm 1,5978214i$	$-1,439033 \pm 6,196149i$ $2,647591 \mp 58,56753i$ $-0,7790896 \pm 151,1325i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$4,1803858 \pm 10,029890i$ $6,9412294 \pm 6,5376428i$ $8,3107425 \pm 3,2400409i$ $8,7352846 + 0,0000000i$	$-7,366888 \mp 3,730374i$ $103,4398 \pm 18,12777i$ $-378,0838 \mp 22,79087i$ $564,8808 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$4,4872004 \pm 11,866154i$ $7,5391613 \pm 8,2761988i$ $9,2056210 \pm 4,9148813i$ $9,9680175 \pm 1,6314464i$	$6,982895 \mp 7,824604i$ $-57,71775 \pm 167,6315i$ $128,4509 \mp 842,3751i$ $-77,28654 \pm 1753,041i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$4,7678302 \pm 13,716471i$ $8,0807445 \pm 10,036142i$ $10,006444 \pm 6,6150718i$ $11,052051 \pm 3,2895910i$ $11,385861 + 0,0000000i$	$7,030814 \pm 11,03559i$ $-249,0006 \mp 140,1932i$ $1703,376 \pm 471,6751i$ $-4749,071 \mp 563,7120i$ $6576,188 + 0,000000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$5,0271389 \pm 15,578136i$ $8,5773139 \pm 11,813361i$ $10,734135 \pm 8,3357386i$ $12,025149 \pm 4,9695552i$ $12,636264 \pm 1,6518569i$	$-15,45932 \pm 4,449609i$ $290,0455 \mp 335,7439i$ $-1374,715 \pm 3153,152i$ $2535,179 \mp 11534,60i$ $-1434,620 \pm 21160,58i$

Таблица 14 (продолжение)

$$s = 0,9$$

$k$	$p_k$	$A_k$
1	$0,9000000 + 0,0000000i$	$0,9357787 + 0,000000i$
1,2	$1,9000000 \pm 1,3784049i$	$0,4678894 \pm 1,433202i$
1,2 3	$2,5815190 \pm 3,0007150i$ $3,5369622 + 0,0000000i$	$-2,144543 \pm 0,7028220i$ $5,224866 + 0,0000000i$
1,2 3,4	$3,1134586 \pm 4,7154513i$ $4,6865414 \pm 1,5497785i$	$-0,6418389 \mp 3,113200i$ $1,109728 \pm 13,03013i$
1,2 3,4 5	$3,5564530 \pm 6,4808313i$ $5,6005983 \pm 3,1814381i$ $6,1858975 + 0,0000000i$	$4,287092 \mp 0,1250115i$ $-27,57639 \pm 1,796648i$ $47,51436 + 0,000000i$
1,2 3,4 5,6	$3,9396589 \pm 8,2788734i$ $6,3704082 \pm 4,8634581i$ $7,3899328 \pm 1,6097059i$	$-1,021879 \pm 5,512640i$ $0,8964106 \mp 52,42943i$ $0,5933576 \pm 136,0628i$
1,2 3,4 5,6 7	$4,2795290 \pm 10,100037i$ $7,0411415 \pm 6,5804847i$ $8,4112955 \pm 3,2605924i$ $8,8360682 + 0,0000000i$	$-6,524063 \mp 2,931697i$ $91,31870 \pm 12,99637i$ $-334,8243 \mp 14,69293i$ $500,9952 + 0,000000i$
1,2 3,4 5,6 7,8	$4,5863381 \pm 11,938587i$ $7,6389224 \pm 8,3236755i$ $9,3060002 \pm 4,9421249i$ $10,068739 \pm 1,6403484i$	$5,634668 \mp 6,952625i$ $-44,78335 \pm 146,6098i$ $96,13573 \mp 736,2394i$ $-56,51915 \pm 1533,519i$
1,2 3,4 5,6 7,8 9	$4,8669715 \pm 13,790780i$ $8,1803902 \pm 10,087382i$ $10,106666 \pm 6,6476868i$ $11,152666 \pm 3,3055043i$ $11,486613 + 0,0000000i$	$6,364753 \pm 8,996948i$ $-216,6918 \mp 111,5202i$ $1473,905 \pm 368,0125i$ $-4105,629 \mp 433,9007i$ $5685,037 + 0,000000i$
1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$5,1262887 \pm 15,654018i$ $8,6768707 \pm 11,867733i$ $10,834220 \pm 8,3727885i$ $12,125645 \pm 4,9911845i$ $12,736976 \pm 1,6589751i$	$-12,67222 \pm 4,332400i$ $233,0321 \mp 292,2487i$ $-1090,030 \pm 2709,313i$ $1991,569 \mp 9875,888i$ $-1121,431 \pm 18100,04i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 1$ 

$n$	$k$	$p_k$	$A_k$
1	1	$1,0000000 \pm 0,0000000i$	$1,0000000 \pm 0,0000000i$
2	1,2	$2,0000000 \pm 1,4142136i$	$0,5000000 \pm 1,414214i$
3	1,2 3	$2,6810829 \pm 3,0504302i$ $3,6378343 \pm 0,0000000i$	$-2,014889 \pm 0,7365076i$ $5,029778 \pm 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$3,2128069 \pm 4,7730874i$ $4,7871931 \pm 1,5674764i$	$-0,7013771 \mp 2,839866i$ $1,201377 \pm 12,15506i$
5	1,2 3,4 5	$3,6556943 \pm 6,5437369i$ $5,7009533 \pm 3,2102656i$ $6,2867048 \pm 0,0000000i$	$3,839662 \mp 0,2735704i$ $-25,07945 \pm 2,187252i$ $43,47958 \pm 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$4,0388475 \pm 8,3456005i$ $6,4705149 \pm 4,9001211i$ $7,4906375 \pm 1,6215024i$	$-0,6838709 \pm 4,883230i$ $-0,4905398 \mp 46,78139i$ $1,674411 \pm 122,1628i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$4,3786936 \pm 10,169693i$ $7,1410552 \pm 6,6230459i$ $8,5118349 \pm 3,2810136i$ $8,9368328 \pm 0,0000000i$	$-5,750792 \mp 2,274225i$ $80,36204 \pm 8,853950i$ $-295,7773 \mp 8,210356i$ $443,3321 \pm 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$4,6854946 \pm 12,010579i$ $7,7386881 \pm 8,3708794i$ $9,4063713 \pm 4,9692173i$ $10,169446 \pm 1,6492018i$	$4,517451 \mp 6,142475i$ $-34,24264 \pm 127,8087i$ $70,02048 \mp 641,9332i$ $-39,79529 \pm 1338,784i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$4,9661293 \pm 13,864686i$ $8,2800422 \pm 10,138360i$ $10,206883 \pm 6,6801407i$ $11,253270 \pm 3,3213405i$ $11,587351 \pm 0,0000000i$	$5,709631 \pm 7,302187i$ $-187,9118 \mp 88,06122i$ $1272,273 \pm 283,8708i$ $-3542,613 \mp 328,9586i$ $4906,084 \pm 0,00000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$5,2254534 \pm 15,729529i$ $8,7764347 \pm 11,921854i$ $10,934304 \pm 8,4096730i$ $12,226132 \pm 5,0127193i$ $12,837677 \pm 1,6660626i$	$-10,34902 \pm 4,110936i$ $186,3272 \mp 253,3224i$ $-858,6520 \pm 2322,065i$ $1551,634 \mp 8439,833i$ $-868,4606 \pm 15457,42i$

Таблица 14 (продолжение)

$s = 1, 1$

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$1,1000000 + 0,0000000i$	$1,051137 + 0,000000i$
2	1,2	$2,1000000 \pm 1,4491377i$	$0,5255685 \pm 1,384766i$
3	1,2	$2,7806719 \pm 3,0993405i$	$-1,882664 \pm 0,7584880i$
	3	$3,7386563 + 0,0000000i$	$4,816464 + 0,0000000i$
4	1,2	$3,3121832 \pm 4,8300276i$	$-0,7412490 \mp 2,578432i$
	3,4	$4,8878168 \pm 1,5849746i$	$1,266817 \pm 11,29330i$
5	1,2	$3,7549618 \pm 6,6060358i$	$3,424221 \mp 0,3859872i$
	3,4	$5,8012959 \pm 3,2388336i$	$-22,73025 \pm 2,475006i$
	5	$6,3874847 + 0,0000000i$	$39,66319 + 0,000000i$
6	1,2	$4,1380594 \pm 8,4117914i$	$-0,4136324 \pm 4,307635i$
	3,4	$6,5706182 \pm 4,9365086i$	$-1,564551 \mp 41,60921i$
	5,6	$7,5913224 \pm 1,6332127i$	$2,503752 \pm 109,3911i$
7	1,2	$4,4778786 \pm 10,238870i$	$-5,046782 \mp 1,737110i$
	3,4	$7,2409707 \pm 6,6653319i$	$70,50178 \pm 5,550553i$
	5,6	$8,6123612 \pm 3,3013071i$	$-260,6474 \mp 3,099752i$
	7	$9,0375792 + 0,0000000i$	$391,4360 + 0,000000i$
8	1,2	$4,7846693 \pm 12,082136i$	$3,596618 \mp 5,397931i$
	3,4	$7,8384585 \pm 8,4178151i$	$-25,71750 \pm 111,0693i$
	5,6	$9,5067343 \pm 4,9961611i$	$49,11505 \mp 558,3922i$
	7,8	$10,270138 \pm 1,6580074i$	$-26,46860 \pm 1166,461i$
9	1,2	$5,0653032 \pm 13,938195i$	$5,081054 \pm 5,899460i$
	3,4	$8,3797005 \pm 10,189079i$	$-162,4044 \mp 68,97000i$
	5,6	$10,307097 \pm 6,7124358i$	$1095,636 \pm 216,0116i$
	7,8	$11,353862 \pm 3,3371008i$	$-3051,080 \mp 244,7295i$
	9	$11,688075 + 0,0000000i$	$4226,585 + 0,000000i$
10	1,2	$5,3246324 \pm 15,804676i$	$-8,420261 \pm 3,824416i$
	3,4	$8,8760058 \pm 11,975727i$	$148,2254 \mp 218,7131i$
	5,6	$11,034386 \pm 8,4463946i$	$-671,4871 \pm 1985,273i$
	7,8	$12,326610 \pm 5,0341609i$	$1197,461 \mp 7199,279i$
	9,10	$12,938366 \pm 1,6731197i$	$-665,2539 \pm 13179,80i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 1, 2$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$1,2000000 \pm 0,000000i$	$1,089124 \pm 0,000000i$
2	1,2	$2,2000000 \pm 1,4832397i$	$0,5445622 \pm 1,346194i$
3	1,2 3	$2,8802837 \pm 3,1474840i$ $3,8394326 \pm 0,000000i$	$-1,749880 \pm 0,7697104i$ $4,588884 \pm 0,000000i$
4	1,2 3,4	$3,4115857 \pm 4,8862965i$ $4,9884143 \pm 1,6022799i$	$-0,7639602 \mp 2,330523i$ $1,308522 \pm 10,45192i$
5	1,2 3,4 5	$3,8542540 \pm 6,6677454i$ $5,9016266 \pm 3,2671490i$ $6,4882388 \pm 0,000000i$	$3,041108 \mp 0,4675303i$ $-20,53230 \pm 2,673355i$ $36,07151 \pm 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$4,2372935 \pm 8,4774591i$ $6,6707182 \pm 4,9726267i$ $7,6919884 \pm 1,6448388i$	$-0,2009158 \pm 3,784618i$ $-2,372334 \mp 36,89442i$ $3,117812 \pm 97,69958i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$4,5770834 \pm 10,307577i$ $7,3408877 \pm 6,7073480i$ $8,7128749 \pm 3,3214752i$ $9,1383080 \pm 0,000000i$	$-4,410307 \mp 1,301908i$ $61,66563 \pm 2,953536i$ $-229,1415 \pm 0,8547536i$ $344,8615 \pm 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$4,8838615 \pm 12,153266i$ $7,9382334 \pm 8,4644873i$ $9,6070896 \pm 5,0229587i$ $10,370816 \pm 1,6667660i$	$2,841833 \mp 4,720140i$ $-18,87957 \pm 96,22878i$ $32,56037 \mp 484,6049i$ $-15,97807 \pm 1014,335i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$5,1644927 \pm 14,011314i$ $8,4793649 \pm 10,239544i$ $10,407306 \pm 6,7445745i$ $11,454444 \pm 3,3527862i$ $11,788786 \pm 0,000000i$	$4,489438 \pm 4,743531i$ $-139,9039 \mp 53,52044i$ $941,3475 \pm 161,6666i$ $-2622,898 \mp 177,6644i$ $3635,019 \pm 0,0000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$5,4238253 \pm 15,879462i$ $8,9755839 \pm 12,029355i$ $11,134466 \pm 8,4829552i$ $12,427081 \pm 5,0555106i$ $13,039044 \pm 1,6801469i$	$-6,825291 \pm 3,502194i$ $117,2744 \mp 188,1252i$ $-520,8433 \pm 1693,262i$ $913,9372 \mp 6129,914i$ $-502,9985 \pm 11220,27i$



Таблица 14 (продолжение)

$s = 1,3$

$n$	$k$	$p_k$	$A_k$
1	1	$1,3000000 + 0,0000000i$	$1,114243 + 0,000000i$
2	1,2	$2,3000000 \pm 1,5165751i$	$0,5571212 \pm 1,299871i$
3	1,2 3	$2,9799166 \pm 3,1948960i$ $3,9401668 + 0,0000000i$	$-1,618291 \pm 0,7712330i$ $4,350824 + 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$3,5110127 \pm 4,9419177i$ $5,0889873 \pm 1,6193985i$	$-0,7719456 \mp 2,097289i$ $1,329067 \pm 9,636850i$
5	1,2 3,4 5	$3,9535697 \pm 6,7288823i$ $6,0019462 \pm 3,2952186i$ $6,5889683 + 0,0000000i$	$2,690047 \mp 0,5230357i$ $-18,48665 \pm 2,795012i$ $32,70745 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$4,3365489 \pm 8,5426157i$ $6,7708150 \pm 5,0084812i$ $7,7926361 \pm 1,6563824i$	$-0,03658166 \pm 3,312204i$ $-2,956004 \mp 32,61529i$ $3,549707 \pm 87,03501i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$4,6763072 \pm 10,375823i$ $7,4408064 \pm 6,7490994i$ $8,8133765 \pm 3,3415203i$ $9,2390199 + 0,0000000i$	$-3,838578 \mp 0,9524226i$ $53,77918 \pm 0,9465385i$ $-200,9721 \pm 3,843253i$ $303,1773 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$4,9830706 \pm 12,223977i$ $8,0380126 \pm 8,5109004i$ $9,7074375 \pm 5,0496125i$ $10,471480 \pm 1,6754784i$	$2,226688 \mp 4,108269i$ $-13,44543 \pm 83,12504i$ $19,61529 \mp 419,6188i$ $-7,839424 \pm 880,3532i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$5,2636974 \pm 14,084049i$ $8,5790351 \pm 10,289758i$ $10,507511 \pm 6,7765589i$ $11,555014 \pm 3,3683977i$ $11,889484 + 0,0000000i$	$3,941166 \pm 3,795184i$ $-120,1437 \mp 41,09240i$ $806,9605 \pm 118,4805i$ $-2250,709 \mp 124,7466i$ $3121,017 + 0,00000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$5,5230320 \pm 15,953895i$ $9,0751687 \pm 12,082743i$ $11,234545 \pm 8,5193572i$ $12,527544 \pm 5,0767696i$ $13,139711 \pm 1,6871445i$	$-5,511481 \pm 3,165808i$ $92,24299 \mp 161,2392i$ $-400,2405 \pm 1440,826i$ $688,3612 \mp 5210,055i$ $-374,2952 \pm 9537,364i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 1,4$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	1,4000000 + 0,0000000 <i>i</i>	1,127060 + 0,000000 <i>i</i>
2	1,2	2,4000000 ± 1,5491934 <i>i</i>	0,5635302 ± 1,247168 <i>i</i>
3	1,2	3,0795689 ± 3,2416089 <i>i</i>	-1,489391 ± 0,7641804 <i>i</i>
	3	4,0408623 + 0,0000000 <i>i</i>	4,105843 + 0,0000000 <i>i</i>
4	1,2	3,6104629 ± 4,9969131 <i>i</i>	-0,7675239 ∓ 1,879453 <i>i</i>
	3,4	5,1895371 ± 1,6363365 <i>i</i>	1,331054 ± 8,852934 <i>i</i>
5	1,2	4,0529077 ± 6,7894623 <i>i</i>	2,370269 ∓ 0,5568854 <i>i</i>
	3,4	6,1022551 ± 3,3230486 <i>i</i>	-16,59219 ± 2,851830 <i>i</i>
	5	6,6896744 + 0,0000000 <i>i</i>	29,57090 + 0,0000000 <i>i</i>
6	1,2	4,4358247 ± 8,6072733 <i>i</i>	0,08744461 ± 2,887876 <i>i</i>
	3,4	6,8709089 ± 5,0440781 <i>i</i>	-3,353163 ∓ 28,74774 <i>i</i>
	5,6	7,8932664 ± 1,6678454 <i>i</i>	3,829249 ± 77,34072 <i>i</i>
7	1,2	4,7755494 ± 10,443618 <i>i</i>	-3,328052 ∓ 0,6745385 <i>i</i>
	3,4	7,5407266 ± 6,7905911 <i>i</i>	46,76758 ∓ 0,5718089 <i>i</i>
	5,6	8,9138664 ± 3,3614446 <i>i</i>	-175,8609 ± 6,031932 <i>i</i>
	7	9,3397153 + 0,0000000 <i>i</i>	265,9697 + 0,0000000 <i>i</i>
8	1,2	5,0822962 ± 12,294277 <i>i</i>	1,728346 ∓ 3,560032 <i>i</i>
	3,4	8,1377960 ± 8,5570587 <i>i</i>	-9,171895 ± 71,59955 <i>i</i>
	5,6	9,8077781 ± 5,0761249 <i>i</i>	9,644080 ∓ 362,5429 <i>i</i>
	7,8	10,572130 ± 1,6841452 <i>i</i>	-1,637000 ± 762,6224 <i>i</i>
9	1,2	5,3629169 ± 14,156406 <i>i</i>	3,439541 ± 3,020621 <i>i</i>
	3,4	8,6787111 ± 10,339726 <i>i</i>	-102,8628 ∓ 31,15898 <i>i</i>
	5,6	10,607712 ± 6,8083915 <i>i</i>	690,2292 ± 84,45871 <i>i</i>
	7,8	11,655575 ± 3,3839365 <i>i</i>	-1927,876 ∓ 83,42350 <i>i</i>
	9	11,990170 + 0,0000000 <i>i</i>	2675,267 + 0,0000000 <i>i</i>
10	1,2	5,6222519 ± 16,027977 <i>i</i>	-4,433445 ± 2,830652 <i>i</i>
	3,4	9,1747602 ± 12,135893 <i>i</i>	72,09166 ∓ 137,7262 <i>i</i>
	5,6	11,334622 ± 8,5556024 <i>i</i>	-304,2419 ± 1223,227 <i>i</i>
	7,8	12,628000 ± 5,0979390 <i>i</i>	510,1022 ∓ 4420,431 <i>i</i>
	9,10	13,240367 ± 1,6941129 <i>i</i>	-272,9550 ± 8094,543 <i>i</i>

Таблица 14 (продолжение)

$s = 1,5$

$k$	$p_k$	$A_k$
1	$1,5000000 \pm 0,0000000i$	$1,128379 \pm 0,000000i$
1,2	$2,5000000 \pm 1,5811388i$	$0,5641896 \pm 1,189416i$
1,2 3	$3,1792390 \pm 3,2876531i$ $4,1415220 \pm 0,0000000i$	$-1,364421 \pm 0,7497034i$ $3,857221 \pm 0,0000000i$
1,2 3,4	$3,7099348 \pm 5,0513036i$ $5,2900652 \pm 1,6530995i$	$-0,7528628 \mp 1,677374i$ $1,317052 \pm 8,103998i$
1,2 3,4 5	$4,1522669 \pm 6,8495004i$ $6,2025540 \pm 3,3506451i$ $6,7903582 \pm 0,0000000i$	$2,080620 \mp 0,5730018i$ $-14,84601 \pm 2,854710i$ $26,65915 \pm 0,000000i$
1,2 3,4 5,6	$4,5351200 \pm 8,6714431i$ $6,9710000 \pm 5,0794229i$ $7,9938800 \pm 1,6792293i$	$0,1782317 \pm 2,508743i$ $-3,597070 \mp 25,26613i$ $3,983028 \pm 68,55783i$
1,2 3,4 5,6 7	$4,8748094 \pm 10,510970i$ $7,6406484 \pm 6,8318279i$ $9,0143449 \pm 3,3812504i$ $9,4403949 \pm 0,0000000i$	$-2,874694 \mp 0,4560445i$ $40,55693 \mp 1,689160i$ $-153,5404 \pm 7,565032i$ $232,8447 \mp 0,000000i$
1,2 3,4 5,6 7,8	$5,1815378 \pm 12,364173i$ $8,2375835 \pm 8,6029664i$ $9,9081116 \pm 5,1024980i$ $10,672767 \pm 1,6927672i$	$1,327175 \mp 3,072136i$ $-5,851505 \pm 61,49975i$ $2,104566 \mp 312,5498i$ $2,983953 \pm 659,4037i$
1,2 3,4 5,6 7,8 9	$5,4621507 \pm 14,228391i$ $8,7783927 \pm 10,389450i$ $10,707910 \pm 6,8400742i$ $11,756125 \pm 3,3994036i$ $12,090843 \pm 0,0000000i$	$2,985560 \pm 2,390877i$ $-87,81004 \mp 23,27463i$ $589,1043 \pm 57,92043i$ $-1648,434 \mp 51,54575i$ $2289,437 \pm 0,000000i$
1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$5,7214848 \pm 16,101715i$ $9,2743581 \pm 12,188808i$ $11,434698 \pm 8,5916930i$ $12,728447 \pm 5,1190199i$ $13,341012 \pm 1,7010525i$	$-3,552270 \pm 2,507343i$ $55,94681 \mp 117,2596i$ $-228,3045 \pm 1036,174i$ $370,2956 \mp 3743,974i$ $-193,8215 \pm 6859,666i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 1,6$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$1,6000000 + 0,0000000i$	$1,119175 + 0,000000i$
2	1,2	$2,6000000 \pm 1,6124516i$	$0,5595875 \pm 1,127885i$
3	1,2 3	$3,2789256 \pm 3,3330566i$ $4,2421488 + 0,0000000i$	$-1,244378 \pm 0,7289457i$ $3,607931 + 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$3,8094272 \pm 5,1051089i$ $5,3905729 \pm 1,6696928i$	$-0,7299564 \mp 1,491096i$ $1,289544 \pm 7,392914i$
5	1,2 3,4 5	$4,2516464 \pm 6,9090111i$ $6,3028432 \pm 3,3780141i$ $6,8910207 + 0,0000000i$	$1,819652 \mp 0,5748539i$ $-13,24373 \pm 2,813551i$ $23,96733 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$4,6344342 \pm 8,7351361i$ $7,0710883 \pm 5,1145207i$ $8,0944775 \pm 1,6905359i$	$0,2419124 \pm 2,171676i$ $-3,716862 \mp 22,14399i$ $4,034538 \pm 60,62631i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$4,9740863 \pm 10,577889i$ $7,7405716 \pm 6,8728145i$ $9,1148125 \pm 3,4009396i$ $9,5410593 + 0,0000000i$	$-2,474185 \mp 0,2864494i$ $35,07540 \mp 2,480753i$ $-133,7562 \pm 8,566833i$ $203,4292 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$5,2807947 \pm 12,433671i$ $8,3373750 \pm 8,6486276i$ $10,008439 \pm 5,1287341i$ $10,773392 \pm 1,7013451i$	$1,006402 \mp 2,640623i$ $-3,308352 \pm 52,68072i$ $-3,462880 \mp 268,8758i$ $6,324418 \pm 569,1076i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$5,5613985 \pm 14,300009i$ $8,8780798 \pm 10,438934i$ $10,808104 \pm 6,8716093i$ $11,856666 \pm 3,4147999i$ $12,191505 + 0,0000000i$	$2,578547 \pm 1,881264i$ $-74,74752 \mp 17,06449i$ $501,7266 \pm 37,45599i$ $-1407,046 \mp 27,31196i$ $1956,096 + 0,000000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$5,8207303 \pm 16,175113i$ $9,3739623 \pm 12,241492i$ $11,534772 \pm 8,6276310i$ $12,828888 \pm 5,1400135i$ $13,441647 \pm 1,7079636i$	$-2,834776 \pm 2,202833i$ $43,07729 \mp 99,52297i$ $-168,6475 \pm 875,8113i$ $261,5804 \mp 3165,615i$ $-132,6158 \pm 5804,542i$

Таблица 14 (продолжение)

$s = 1,7$

$n$	$k$	$p_k$	$A_k$
1	1	$1,7000000 + 0,0000000i$	$1,100547 + 0,000000i$
2	1,2	$2,7000000 \pm 1,6431677i$	$0,5502737 \pm 1,063755i$
3	1,2	$3,3786276 \pm 3,3778456i$	$-1,130035 \pm 0,7030165i$
	3	$4,3427449 + 0,0000000i$	$3,360618 + 0,0000000i$
4	1,2	$3,9089388 \pm 5,1583476i$	$-0,7006101 \mp 1,320404i$
	3,4	$5,4910612 \pm 1,6861216i$	$1,250884 \pm 6,721688i$
5	1,2	$4,3510452 \pm 6,9680080i$	$1,585712 \mp 0,5654745i$
	3,4	$6,4031233 \pm 3,4051611i$	$-11,77981 \pm 2,737234i$
	5	$6,9916630 + 0,0000000i$	$21,48874 + 0,0000000i$
6	1,2	$4,7337665 \pm 8,7983629i$	$0,2837605 \pm 1,873424i$
	3,4	$7,1711740 \pm 5,1493770i$	$-3,737830 \mp 19,35453i$
	5,6	$8,1950596 \pm 1,7017667i$	$4,004343 \pm 53,48606i$
7	1,2	$5,0733798 \pm 10,644382i$	$-2,122085 \mp 0,1568032i$
	3,4	$7,8404962 \pm 6,9135555i$	$30,25410 \mp 3,010686i$
	5,6	$9,2152696 \pm 3,4205145i$	$-116,2682 \pm 9,143612i$
	7	$9,6417089 + 0,0000000i$	$177,3730 + 0,0000000i$
8	1,2	$5,3800667 \pm 12,502779i$	$0,7517756 \mp 2,261151i$
	3,4	$8,4371703 \pm 8,6940462i$	$-1,394161 \pm 45,00635i$
	5,6	$10,108759 \pm 5,1548353i$	$-7,445554 \mp 230,8200i$
	7,8	$10,874005 \pm 1,7098796i$	$8,638214 \pm 490,2866i$
9	1,2	$5,6606598 \pm 14,371267i$	$2,216645 \pm 1,470852i$
	3,4	$8,9777721 \pm 10,488182i$	$-63,45296 \mp 12,21473i$
	5,6	$10,908294 \pm 6,9029988i$	$426,4178 \pm 21,88907i$
	7,8	$11,957197 \pm 3,4301264i$	$-1198,946 \mp 9,220047i$
	9	$12,292155 + 0,0000000i$	$1668,630 + 0,0000000i$
10	1,2	$5,9199881 \pm 16,248176i$	$-2,252811 \pm 1,921307i$
	3,4	$9,4735726 \pm 12,293947i$	$32,87377 \mp 84,21556i$
	5,6	$11,634846 \pm 8,6634182i$	$-122,1378 \pm 738,6863i$
	7,8	$12,929322 \pm 5,1609208i$	$177,8692 \mp 2672,092i$
	9,10	$13,542272 \pm 1,7148467i$	$-85,80215 \pm 4904,501i$

Таблица 14 (продолжение)

$s = 1,8$

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	1,8000000 + 0,000000i	1,073671 + 0,000000i
2	1,2	2,8000000 ± 1,673320i	0,5368356 ± 0,9981087i
3	1,2	3,4783437 ± 3,4220445i	-1,021958 ± 0,6729684i
	3	4,4433127 + 0,000000i	3,117587 + 0,000000i
4	1,2	4,0084686 ± 5,2110373i	-0,6664343 ∓ 1,164871i
	3,4	5,5915314 ± 1,7023908i	1,203270 ± 6,091541i
5	1,2	4,4504624 ± 7,0265045i	1,377008 ∓ 0,5474838i
	3,4	6,5033946 ± 3,4320915i	-10,44779 ± 2,633631i
	5	7,0922859 + 0,000000i	19,21523 + 0,000000i
6	1,2	4,8331160 ± 8,8611337i	0,3082702 ± 1,610705i
	3,4	7,2712572 ± 5,1839965i	-3,681708 ∓ 16,87119i
	5,6	8,2956268 ± 1,7129232i	3,910274 ± 47,07764i
7	1,2	5,1726892 ± 10,710458i	-1,813969 ∓ 0,05952322i
	3,4	7,9404222 ± 6,9540553i	26,02762 ∓ 3,333151i
	5,6	9,3157165 ± 3,4399769i	-100,8510 ± 9,385550i
	7	9,7423441 + 0,000000i	154,3485 + 0,000000i
8	1,2	5,4793532 ± 12,571502i	0,5512604 ∓ 1,929206i
	3,4	8,5369694 ± 8,7392262i	0,01528819 ± 38,35008i
	5,6	10,209072 ± 5,1808038i	-10,16775 ∓ 197,7427i
	7,8	10,974605 ± 1,7183712i	10,13803 ± 421,6282i
9	1,2	5,7599344 ± 14,442169i	1,897214 ± 1,141980i
	3,4	9,0774697 ± 10,537198i	-53,72078 ∓ 8,463895i
	5,6	11,008481 ± 6,9342448i	361,6707 ± 10,24313i
	7,8	12,057719 ± 3,4453841i	-1019,896 ± 3,976034i
	9	12,392794 + 0,000000i	1421,172 + 0,000000i
10	1,2	6,0192579 ± 16,320908i	-1,782611 ± 1,664890i
	3,4	9,5731890 ± 12,346176i	24,83063 ∓ 71,05619i
	5,6	11,734917 ± 8,6990566i	-86,18996 ± 621,7277i
	7,8	13,029749 ± 5,1817429i	114,1499 ∓ 2251,764i
	9,10	13,642888 ± 1,7217019i	-50,47114 ± 4138,003i

Таблица 14 (продолжение)

$s = 1,9$

$n$	$k$	$p_k$	$A_k$
1	1	$1,9000000 + 0,000000i$	$1,039754 + 0,000000i$
2	1,2	$2,9000000 \pm 1,7029386i$	$0,5198771 \pm 0,9319145i$
3	1,2 3	$3,5780730 \pm 3,4656761i$ $4,5438540 + 0,000000i$	$-0,9205281 \pm 0,6397815i$ $2,880810 + 0,000000i$
4	1,2 3,4	$4,1080156 \pm 5,2631948i$ $5,6919844 \pm 1,7185049i$	$-0,6288440 \mp 1,023904i$ $1,148721 \pm 5,503008i$
5	1,2 3,4 5	$4,5498971 \pm 7,0845131i$ $6,6036577 \pm 3,4588104i$ $7,1928904 + 0,000000i$	$1,191676 \mp 0,5231181i$ $-9,240552 \pm 2,509630i$ $17,13751 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$4,9324823 \pm 8,9234582i$ $7,3713381 \pm 5,2183842i$ $8,3961797 \pm 1,7240070i$	$0,3192368 \pm 1,380286i$ $-3,566994 \mp 14,66797i$ $3,767635 \pm 41,34301i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$5,2720141 \pm 10,776124i$ $8,0403497 \pm 6,9943181i$ $9,4161536 \pm 3,4593288i$ $9,8429656 + 0,000000i$	$-1,545522 \pm 0,01176992i$ $22,33454 \mp 3,493597i$ $-87,29482 \pm 9,368544i$ $134,0514 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$5,5786537 \pm 12,639848i$ $8,6367722 \pm 8,7841712i$ $10,309380 \pm 5,2066414i$ $11,075194 \pm 1,7268208i$	$0,3947457 \mp 1,640269i$ $1,023414 \pm 32,59523i$ $-11,89920 \mp 169,0629i$ $11,00092 \pm 361,9464i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$5,8592217 \pm 14,512721i$ $9,1771723 \pm 10,585984i$ $11,108664 \pm 6,9653491i$ $12,158232 \pm 3,4605739i$ $12,493421 + 0,000000i$	$1,617132 \pm 0,8798274i$ $-45,36261 \mp 5,595277i$ $306,1379 \pm 1,711737i$ $-866,1393 \pm 13,30430i$ $1208,533 + 0,00000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$6,1185395 \pm 16,393315i$ $9,6728112 \pm 12,398184i$ $11,834988 \pm 8,7345481i$ $13,130169 \pm 5,2024810i$ $13,743494 \pm 1,7285297i$	$-1,404210 \pm 1,434214i$ $18,53004 \mp 59,78524i$ $-58,67977 \pm 522,2146i$ $66,31362 \mp 1894,450i$ $-24,23980 \pm 3486,288i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 2$ 

$n$	$k$	$p_k$	$A_k$
1	1	$2,0000000 + 0,0000000i$	$1,000000 + 0,000000i$
2	1,2	$3,0000000 \pm 1,7320508i$	$0,5000000 \pm 0,8660254i$
3	1,2 3	$3,6778146 \pm 3,5087619i$ $4,6443707 + 0,0000000i$	$-0,8259635 \pm 0,6043514i$ $2,651927 + 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$4,2075788 \pm 5,3148361i$ $5,7924212 \pm 1,7344683i$	$-0,5890635 \mp 0,8967878i$ $1,089064 \pm 4,956023i$
5	1,2 3,4 5	$4,6493486 \pm 7,1420458i$ $6,7039128 \pm 3,4853228i$ $7,2934772 + 0,0000000i$	$1,027825 \mp 0,4942626i$ $-8,150559 \pm 2,371190i$ $15,24547 + 0,0000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$5,0318645 \pm 8,9853460i$ $7,4714167 \pm 5,2525446i$ $8,4967188 \pm 1,7350194i$	$0,3198347 \pm 1,179031i$ $-3,409262 \mp 12,71978i$ $3,589427 \pm 36,22605i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$5,3713538 \pm 10,841388i$ $8,1402784 \pm 7,0343481i$ $9,5165811 \pm 3,4785721i$ $9,9435738 + 0,0000000i$	$-1,312613 \pm 0,06240530i$ $19,11763 \mp 3,529827i$ $-75,40515 \pm 9,155919i$ $116,2003 + 0,0000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$5,6779679 \pm 12,707823i$ $8,7365785 \pm 8,8288851i$ $10,409682 \pm 5,2323503i$ $11,175772 \pm 1,7352289i$	$0,2737877 \mp 1,389932i$ $1,715756 \pm 27,63505i$ $-12,86275 \mp 144,2552i$ $11,37320 \pm 310,1734i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$5,9585216 \pm 14,582927i$ $9,2768798 \pm 10,634544i$ $11,208844 \pm 6,9963138i$ $12,258736 \pm 3,4756968i$ $12,594039 + 0,0000000i$	$1,373028 \pm 0,6720096i$ $-38,20735 \mp 3,430188i$ $258,6197 \mp 4,367337i$ $-734,3525 \pm 19,60804i$ $1026,134 + 0,000000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$6,2178325 \pm 16,465399i$ $9,7724392 \pm 12,449971i$ $11,935057 \pm 8,7698944i$ $13,230582 \pm 5,2231358i$ $13,844090 \pm 1,7353304i$	$-1,100907 \pm 1,228860i$ $13,62825 \mp 50,16569i$ $-37,86980 \pm 437,7472i$ $31,00800 \mp 1591,262i$ $-5,165540 \pm 2933,048i$



Таблица 14 (продолжение)

$s = 2, 1$

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$2,1000000 + 0,0000000i$	$0,9555791 + 0,000000i$
2	1,2	$3,1000000 \pm 1,7606817i$	$0,4777895 \pm 0,8011765i$
3	1,2 3	$3,7775678 \pm 3,5513220i$ $4,7448645 + 0,0000000i$	$-0,7383421 \pm 0,5674830i$ $2,432263 + 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$4,3071574 \pm 5,3659762i$ $5,8928426 \pm 1,7502852i$	$-0,5481351 \mp 0,7827145i$ $1,025925 \pm 4,450009i$
5	1,2 3,4 5	$4,7488161 \pm 7,1991145i$ $6,8041603 \pm 3,5116335i$ $7,3940471 + 0,0000000i$	$0,8835823 \mp 0,4624844i$ $-7,170008 \pm 2,223389i$ $13,52843 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$5,1312622 \pm 9,0468060i$ $7,5714931 \pm 5,2864823i$ $8,5972447 \pm 1,7459617i$	$0,3126929 \pm 1,003952i$ $-3,221474 \mp 11,00264i$ $3,386571 \pm 31,67296i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$5,4707078 \pm 10,906258i$ $8,2402084 \pm 7,0741494i$ $9,6169994 \pm 3,4977087i$ $10,044169 + 0,0000000i$	$-1,111343 \pm 0,09680230i$ $16,32399 \mp 3,473001i$ $-65,00297 \pm 8,800014i$ $100,5362 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$5,7772954 \pm 12,775432i$ $8,8363882 \pm 8,8733712i$ $10,509977 \pm 5,2579323i$ $11,276339 \pm 1,7435961i$	$0,1813736 \mp 1,173987i$ $2,162585 \pm 23,37257i$ $-13,24106 \mp 122,8470i$ $11,37489 \pm 265,3511i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$6,0578336 \pm 14,652795i$ $9,3765921 \pm 10,682880i$ $11,309021 \pm 7,0271407i$ $12,359231 \pm 3,4907535i$ $12,694645 + 0,0000000i$	$1,161453 \pm 0,5082320i$ $-32,10071 \mp 1,822064i$ $218,0526 \mp 8,534751i$ $-621,6074 \pm 23,57477i$ $869,9436 + 0,000000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$6,3171366 \pm 16,537166i$ $9,8720728 \pm 12,501542i$ $12,035125 \pm 8,8050974i$ $13,330989 \pm 5,2437086i$ $13,944677 \pm 1,7421043i$	$-0,8587979 \pm 1,047696i$ $9,843641 \mp 41,98317i$ $-22,34564 \pm 366,2176i$ $5,511263 \mp 1334,468i$ $8,327325 \pm 2464,141i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 2,2$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$2,2000000 \pm 0,0000000i$	$0,9076037 \pm 0,000000i$
2	1,2	$3,2000000 \pm 1,7888544i$	$0,4538018 \pm 0,7379867i$
3	1,2 3	$3,8773316 \pm 3,5933751i$ $4,8453368 \pm 0,0000000i$	$-0,6576231 \pm 0,5298863i$ $2,222850 \pm 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$4,4067506 \pm 5,4166296i$ $5,9932494 \pm 1,7659596i$	$-0,5069306 \mp 0,6808203i$ $0,9607325 \pm 3,983968i$
5	1,2 3,4 5	$4,8482990 \pm 7,2557300i$ $6,9044006 \pm 3,5377470i$ $7,4946008 \pm 0,0000000i$	$0,7571222 \mp 0,4290673i$ $-6,291011 \pm 2,070499i$ $11,97538 \pm 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$5,2306747 \pm 9,1078473i$ $7,6715675 \pm 5,3202016i$ $8,6977579 \pm 1,7568354i$	$0,2999652 \pm 0,8522288i$ $-3,014289 \mp 9,493899i$ $3,168126 \pm 27,63262i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$5,5700759 \pm 10,970740i$ $8,3401396 \pm 7,1137257i$ $9,7174088 \pm 3,5167402i$ $10,144752 \pm 0,0000000i$	$-0,9380814 \pm 0,1185983i$ $13,90510 \mp 3,348556i$ $-55,92421 \pm 8,343645i$ $86,82200 \pm 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$5,8766357 \pm 12,842681i$ $8,9362014 \pm 8,9176331i$ $10,610268 \pm 5,2833894i$ $11,376896 \pm 1,7519230i$	$0,1117125 \mp 0,9884812i$ $2,421212 \pm 19,72028i$ $-13,18270 \mp 104,4147i$ $11,10358 \pm 226,6228i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$6,1571576 \pm 14,722327i$ $9,4763092 \pm 10,730996i$ $11,409194 \pm 7,0578317i$ $12,459719 \pm 3,5057450i$ $12,795242 \pm 0,0000000i$	$0,9790092 \pm 0,3799759i$ $-26,90451 \mp 0,6513503i$ $183,4975 \mp 11,22916i$ $-525,3297 \pm 25,76129i$ $736,4230 \pm 0,000000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$6,4164517 \pm 16,608620i$ $9,9717118 \pm 12,552898i$ $12,135191 \pm 8,8401588i$ $13,431390 \pm 5,2642003i$ $14,045256 \pm 1,7488518i$	$-0,6663530 \pm 0,8891368i$ $6,946530 \mp 35,04541i$ $-10,96140 \pm 305,7818i$ $-12,37496 \mp 1117,357i$ $17,50998 \pm 2067,326i$

Таблица 14 (продолжение)

$s = 2,3$

$n$	$k$	$P_k$	$A_n$
1	1	$2,3000000 + 0,0000000i$	$0,8571096 + 0,000000i$
2	1,2	$3,3000000 \pm 1,8165902i$	$0,4285548 \pm 0,6769639i$
3	1,2 3	$3,9771055 \pm 3,6349391i$ $4,9457890 + 0,0000000i$	$-0,5836675 \pm 0,4921763i$ $2,024445 + 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$4,5063577 \pm 5,4668099i$ $6,0936423 \pm 1,7814953i$	$-0,4661653 \mp 0,5902099i$ $0,8947202 \pm 3,556554i$
5	1,2 3,4 5	$4,9477965 \pm 7,3119032i$ $7,0046340 \pm 3,5636677i$ $7,5951391 + 0,0000000i$	$0,6466932 \mp 0,3950449i$ $-5,505726 \pm 1,916054i$ $10,57517 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$5,3301015 \pm 9,1684782i$ $7,7716398 \pm 5,3537066i$ $8,7982588 \pm 1,7676417i$	$0,2833955 \pm 0,7212367i$ $-2,796344 \mp 8,172270i$ $2,941504 \pm 24,05678i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$5,6694573 \pm 11,034842i$ $8,4400721 \pm 7,1530811i$ $9,8178096 \pm 3,5356685i$ $10,245322 + 0,0000000i$	$-0,7894811 \pm 0,1307634i$ $11,81668 \mp 3,177035i$ $-48,01924 \pm 7,821437i$ $74,84118 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$5,9759886 \pm 12,909577i$ $9,0360178 \pm 8,9616742i$ $10,710552 \pm 5,3087232i$ $11,477442 \pm 1,7602102i$	$0,06005024 \mp 0,8297526i$ $2,538020 \pm 16,59966i$ $-12,80746 \mp 88,57995i$ $10,63794 \pm 193,2246i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$6,2564930 \pm 14,791529i$ $9,5760308 \pm 10,778896i$ $11,509365 \pm 7,0883886i$ $12,560198 \pm 3,5206722i$ $12,895829 + 0,0000000i$	$0,8224313 \pm 0,2802256i$ $-22,49574 \pm 0,1789112i$ $154,1279 \mp 12,80409i$ $-443,2625 \pm 26,61535i$ $622,4730 + 0,000000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$6,5157774 \pm 16,679765i$ $10,071356 \pm 12,604043i$ $12,235257 \pm 8,8750804i$ $13,531785 \pm 5,2846118i$ $14,145825 \pm 1,7555731i$	$-0,5140550 \pm 0,7513377i$ $4,750439 \mp 29,18123i$ $-2,793518 \pm 254,8328i$ $-24,41637 \mp 934,1187i$ $23,40206 \pm 1732,033i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 2,4$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$2,4000000 + 0,0000000i$	$0,8050432 + 0,000000i$
2	1,2	$3,4000000 \pm 1,8439089i$	$0,4025216 \pm 0,6185110i$
3	1,2 3	$4,0768888 \pm 3,6760308i$ $5,0462224 + 0,0000000i$	$-0,5162578 \pm 0,4548758i$ $1,837559 + 0,000000i$
4	1,2 3,4	$4,6059779 \pm 5,5165304i$ $6,1940221 \pm 1,7968959i$	$-0,4264122 \mp 0,5099792i$ $0,8289338 \pm 3,166149i$
5	1,2 3,4 5	$5,0473080 \pm 7,3676444i$ $7,1048607 \pm 3,5893999i$ $7,6956625 + 0,0000000i$	$0,5506346 \mp 0,3612330i$ $-4,806464 \pm 1,762922i$ $9,316701 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$5,4295421 \pm 9,2287070i$ $7,8717102 \pm 5,3870016i$ $8,8987478 \pm 1,7783820i$	$0,2643772 \pm 0,6085517i$ $-2,574528 \mp 7,017967i$ $2,712673 \pm 20,90022i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$5,7688518 \pm 11,093570i$ $8,5400058 \pm 7,1922191i$ $9,9182020 \pm 3,5544952i$ $10,345881 + 0,0000000i$	$-0,6624860 \pm 0,1357023i$ $10,01864 \mp 2,974832i$ $-41,15222 \pm 7,261019i$ $64,39717 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$6,0753536 \pm 12,976124i$ $9,1358375 \pm 9,0054977i$ $10,810831 \pm 5,3339357i$ $11,577978 \pm 1,7684582i$	$0,02250718 \mp 0,6944478i$ $2,550230 \pm 13,94063i$ $-12,21090 \mp 75,00656i$ $10,04068 \pm 164,4778i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$6,3558397 \pm 14,860405i$ $9,6757568 \pm 10,826581i$ $11,609532 \pm 7,1188131i$ $12,660669 \pm 3,5355358i$ $12,996406 + 0,0000000i$	$0,6886500 \pm 0,2032310i$ $-18,76552 \pm 0,7468797i$ $129,2193 \mp 13,54240i$ $-373,4326 \pm 26,49412i$ $525,3854 + 0,000000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$6,6151135 \pm 16,750604i$ $10,171006 \pm 12,654979i$ $12,335321 \pm 8,9098637i$ $13,632173 \pm 5,3049440i$ $14,246387 \pm 1,7622686i$	$-0,3940787 \pm 0,6323386i$ $3,104672 \mp 24,23927i$ $2,898332 \pm 211,9745i$ $-32,02266 \mp 779,7355i$ $26,81626 \pm 1449,151i$

Таблица 14 (продолжение)

$s = 2,5$

$k$	$p_k$	$A_k$
1	$2,5000000 + 0,0000000i$	$0,7522528 + 0,000000i$
1,2	$3,5000000 \pm 1,8708287i$	$0,3761264 \pm 0,5629344i$
1,2 3	$4,1766810 \pm 3,7166659i$ $5,1466381 + 0,0000000i$	$-0,4551149 \pm 0,4184190i$ $1,662482 + 0,0000000i$
1,2 3,4	$4,7056106 \pm 5,5658034i$ $6,2943895 \pm 1,8121651i$	$-0,3881173 \mp 0,4392329i$ $0,7642437 \pm 2,810931i$
1,2 3,4 5	$5,1468330 \pm 7,4229633i$ $7,2050811 \pm 3,6149477i$ $7,7961717 + 0,0000000i$	$0,4673894 \mp 0,3282598i$ $-4,185780 \pm 1,613385i$ $8,185034 + 0,000000i$
1,2 3,4 5,6	$5,5289959 \pm 9,2885416i$ $7,9717788 \pm 5,4200903i$ $8,9992254 \pm 1,7890572i$	$0,2440072 \pm 0,5119560i$ $-2,354227 \mp 6,012698i$ $2,486346 \pm 18,12081i$
1,2 3,4 5,6 7	$5,8682590 \pm 11,161931i$ $8,6399406 \pm 7,2311433i$ $10,018586 \pm 3,5732219i$ $10,446429 + 0,0000000i$	$-0,5543294 \pm 0,1353441i$ $8,474820 \mp 2,754847i$ $-35,20037 \pm 6,684101i$ $55,31201 + 0,000000i$
1,2 3,4 5,6 7,8	$6,1747304 \pm 13,042328i$ $9,2356602 \pm 9,0491070i$ $10,911105 \pm 5,3590286i$ $11,678504 \pm 1,7766677i$	$-0,004063087 \mp 0,5795269i$ $2,487436 \pm 11,68098i$ $-11,46845 \mp 63,39652i$ $9,361207 \pm 139,7807i$
1,2 3,4 5,6 7,8 9	$6,4551974 \pm 14,928961i$ $9,7754872 \pm 10,874055i$ $11,709697 \pm 7,1491069i$ $12,761132 \pm 3,5503367i$ $13,096973 + 0,0000000i$	$0,5748245 \pm 0,1443013i$ $-15,61799 \pm 1,115153i$ $108,1386 \mp 13,66860i$ $-314,1192 \pm 25,68000i$ $442,7997 + 0,00000i$
1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$6,7144598 \pm 16,821142i$ $10,270661 \pm 12,705708i$ $12,435385 \pm 8,9445104i$ $13,732556 \pm 5,3251980i$ $14,346940 \pm 1,7689385i$	$-0,3000176 \pm 0,5301654i$ $1,888036 \mp 20,08646i$ $6,704160 \pm 175,9988i$ $-36,31191 \mp 649,8844i$ $28,39586 \pm 1210,843i$

Таблица 14 (продолжение)

$s = 2,6$

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$2,6000000 + 0,0000000i$	$0,6994843 + 0,000000i$
2	1,2	$3,6000000 \pm 1,8973666i$	$0,3497422 \pm 0,5104532i$
3	1,2	$4,2764814 \pm 3,7568594i$	$-0,3999145 \pm 0,3831574i$
	3	$5,2470372 + 0,0000000i$	$1,499313 + 0,0000000i$
4	1,2	$4,8052551 \pm 5,6146409i$	$-0,3516153 \mp 0,3770997i$
	3,4	$6,3947449 \pm 1,8273059i$	$0,7013574 \pm 2,488934i$
5	1,2	$5,2463710 \pm 7,4778696i$	$0,3955116 \mp 0,2965938i$
	3,4	$7,3052955 \pm 3,6403149i$	$-3,636543 \pm 1,469203i$
	5	$7,8966672 + 0,0000000i$	$7,181546 + 0,000000i$
6	1,2	$5,6284626 \pm 9,3479898i$	$0,2231335 \pm 0,4294360i$
	3,4	$8,0718456 \pm 5,4529766i$	$-2,139552 \mp 5,139669i$
	5,6	$9,0996919 \pm 1,7996688i$	$2,266160 \pm 15,67950i$
7	1,2	$5,9676783 \pm 11,224930i$	$-0,4625249 \pm 0,1312209i$
	3,4	$8,7398766 \pm 7,2698573i$	$7,152808 \mp 2,527067i$
	5,6	$10,118963 \pm 3,5918503i$	$-30,05316 \pm 6,107423i$
	7	$10,546965 + 0,0000000i$	$47,42524 + 0,000000i$
8	1,2	$6,2741187 \pm 13,108195i$	$-0,02219572 \mp 0,4822581i$
	3,4	$9,3354860 \pm 9,0925052i$	$2,372922 \pm 9,765753i$
	5,6	$11,011374 \pm 5,3840036i$	$-10,63888 \mp 53,48672i$
	7,8	$11,779021 \pm 1,7848391i$	$8,637892 \pm 118,6020i$
9	1,2	$6,5545657 \pm 14,997200i$	$0,4783615 \pm 0,09962878i$
	3,4	$9,8752219 \pm 10,921321i$	$-12,96914 \pm 1,333516i$
	5,6	$11,8009859 \pm 7,1792717i$	$90,33445 \mp 13,35928i$
	7,8	$12,861588 \pm 3,5650756i$	$-263,8251 \pm 24,39404i$
	9	$13,197532 + 0,0000000i$	$372,6624 + 0,000000i$
10	1,2	$6,8138159 \pm 16,891383i$	$-0,2266477 \pm 0,4429013i$
	3,4	$10,370320 \pm 12,756234i$	$1,003560 \mp 16,60650i$
	5,6	$12,535447 \pm 8,9790223i$	$9,0912151 \pm 145,8634i$
	7,8	$13,832933 \pm 5,3453746i$	$-38,16452 \mp 540,8501i$
	9,10	$14,447484 \pm 1,7755832i$	$28,64614 \pm 1010,380i$

Таблица 14 (продолжение)

$s = 2,7$

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$2,7000000 + 0,0000000i$	$0,6473808 + 0,000000i$
2	1,2	$3,7006000 \pm 1,9235384i$	$0,3236904 \pm 0,4612081i$
3	1,2 3	$4,3762897 \pm 3,7966255i$ $5,3474207 + 0,0000000i$	$-0,3503007 \pm 0,3493667i$ $1,347982 + 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$4,9049110 \pm 5,6630543i$ $6,4950890 \pm 1,8423218i$	$-0,3171438 \mp 0,3227429i$ $0,6408342 \pm 2,198098i$
5	1,2 3,4 5	$5,3459213 \pm 7,5323723i$ $7,4055039 \pm 3,6655055i$ $7,9971496 + 0,0000000i$	$0,3336701 \mp 0,2665698i$ $-3,151979 \pm 1,331689i$ $6,284000 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$5,7279416 \pm 9,4070589i$ $8,1719107 \pm 5,4856643i$ $9,2001478 \pm 1,8102177i$	$0,2023972 \pm 0,3591765i$ $-1,933540 \mp 4,383550i$ $2,054834 \pm 13,54034i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$6,0671096 \pm 11,287575i$ $8,8398136 \pm 7,3083645i$ $10,219332 \pm 3,6103819i$ $10,647491 + 0,0000000i$	$-0,3848541 \pm 0,1245359i$ $6,023684 \mp 2,299067i$ $-25,61149 \pm 5,543587i$ $40,59270 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$6,3735181 \pm 13,173729i$ $9,4353147 \pm 9,1356952i$ $11,111638 \pm 5,4088624i$ $11,879529 \pm 1,7929731i$	$-0,03391933 \mp 0,4002059i$ $2,224790 \pm 8,146594i$ $-9,767208 \mp 45,04562i$ $7,900027 \pm 100,4732i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$6,6539445 \pm 15,065128i$ $9,9749607 \pm 10,968381i$ $11,910018 \pm 7,2093093i$ $12,962036 \pm 3,5797534i$ $13,298081 + 0,0000000i$	$0,3969198 \pm 0,06613774i$ $-10,74572 \pm 1,441266i$ $75,32796 \mp 12,75199i$ $-221,2511 \pm 22,80719i$ $313,1913 + 0,00000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$6,9131818 \pm 16,961330i$ $10,469985 \pm 12,806558i$ $12,635508 \pm 9,0134007i$ $13,933305 \pm 5,3654747i$ $14,548021 \pm 1,7822029i$	$-0,1697270 \pm 0,3687333i$ $0,3740663 \mp 13,69822i$ $10,42699 \pm 120,6714i$ $-38,26812 \mp 449,4463i$ $27,96048 \pm 841,9979i$

Таблица 14 (продолжение)

$s = 2,8$

$n$	$k$	$p_k$	$A_k$
1	1	$2,8000000 \pm 0,000000i$	$0,5964840 \pm 0,000000i$
2	1,2	$3,8009000 \pm 1,9493589i$	$0,2982420 \pm 0,4152719i$
3	1,2	$4,4761053 \pm 3,8359775i$	$-0,3058979 \pm 0,3172538i$
	3	$5,4477894 \pm 0,000000i$	$1,208280 \pm 0,000000i$
4	1,2	$5,0045776 \pm 5,7110545i$	$-0,2848580 \mp 0,2753684i$
	3,4	$6,5954224 \pm 1,8572157i$	$0,5831001 \pm 1,936316i$
5	1,2	$5,4454835 \pm 7,5864804i$	$0,2806487 \mp 0,2384112i$
	3,4	$7,5057068 \pm 3,6905230i$	$-2,725716 \pm 1,201771i$
	5	$8,0976194 \pm 0,000000i$	$5,486619 \pm 0,000000i$
6	1,2	$5,8274326 \pm 9,4657562i$	$0,1822697 \pm 0,2995516i$
	3,4	$8,2719741 \pm 5,5181568i$	$-1,738341 \mp 3,730426i$
	5,6	$9,3005934 \pm 1,8207051i$	$1,854314 \pm 11,67033i$
7	1,2	$6,1665523 \pm 11,349870i$	$-0,3193495 \pm 0,1162217i$
	3,4	$8,9397518 \pm 7,3466680i$	$5,061760 \mp 2,076448i$
	5,6	$10,319693 \pm 3,6288181i$	$-21,78680 \pm 5,001786i$
	7	$10,748006 \pm 0,000000i$	$34,68526 \pm 0,000000i$
8	1,2	$6,4729285 \pm 13,238936i$	$-0,04084519 \mp 0,3312141i$
	3,4	$9,5351463 \pm 9,1786801i$	$2,056917 \pm 6,781159i$
	5,6	$11,211898 \pm 5,4336065i$	$-8,887318 \mp 37,87011i$
	7,8	$11,980028 \pm 1,8010700i$	$7,169488 \pm 84,98272i$
9	1,2	$6,7533334 \pm 15,132747i$	$0,3284069 \pm 0,04135655i$
	3,4	$10,074704 \pm 11,015238i$	$-8,884081 \pm 1,469161i$
	5,6	$12,010174 \pm 7,2392211i$	$62,70471 \mp 11,95253i$
	7,8	$13,062478 \pm 3,5943708i$	$-185,2724 \pm 21,04987i$
	9	$13,398622 \pm 0,000000i$	$262,8431 \pm 0,00000i$
10	1,2	$7,0125571 \pm 17,030988i$	$-0,1258248 \pm 0,3059811i$
	3,4	$10,569655 \pm 12,856684i$	$-0,06152405 \mp 11,27407i$
	5,6	$12,735568 \pm 9,0476473i$	$10,99833 \pm 99,65428i$
	7,8	$14,033071 \pm 5,3854991i$	$-37,15486 \mp 372,9465i$
	9,10	$14,648550 \pm 1,78879,9i$	$26,64212 \pm 700,7646i$



Таблица 14 (продолжение)

$s = 2,9$

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$2,9000000 + 0,0000000i$	$0,5472390 + 0,000000i$
2	1,2	$3,9000000 \pm 1,9748418i$	$0,2736195 \pm 0,3726588i$
3	1,2 3	$4,5759279 \pm 3,8749282i$ $5,5481442 + 0,0000000i$	$-0,2663212 \pm 0,2869651i$ $1,079881 + 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$5,1042545 \pm 5,7586520i$ $6,6957455 \pm 1,8719906i$	$-0,2548438 \mp 0,2342312i$ $0,5284633 \pm 1,701473i$
5	1,2 3,4 5	$5,5450571 \pm 7,6402023i$ $7,6059043 \pm 3,7153711i$ $8,1980771 + 0,0000000i$	$0,2353449 \mp 0,2122510i$ $-2,351797 \pm 1,080052i$ $4,780144 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$5,9269351 \pm 9,5240887i$ $8,3720360 \pm 5,5504577i$ $9,4010291 \pm 1,8311321i$	$0,1630843 \pm 0,2491140i$ $-1,555372 \mp 3,167732i$ $1,665907 \pm 10,03938i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$6,2660061 \pm 11,411823i$ $9,0396910 \pm 7,3847713i$ $10,420048 \pm 3,0471605i$ $10,848511 + 0,0000000i$	$-0,2642766 \pm 0,1069903i$ $4,244319 \mp 1,863209i$ $-18,50026 \pm 4,488438i$ $29,58767 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$6,5723493 \pm 13,303821i$ $9,6349808 \pm 9,2214629i$ $11,312152 \pm 5,4582375i$ $12,080518 \pm 1,8091304i$	$-0,04424291 \mp 0,2733860i$ $1,879761 \pm 5,632511i$ $-8,024050 \mp 31,78255i$ $6,462152 \pm 71,76985i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$6,8527323 \pm 15,200063i$ $10,174450 \pm 11,061894i$ $12,110328 \pm 7,2690088i$ $13,162912 \pm 3,6089285i$ $13,499155 + 0,0000000i$	$0,2709682 \pm 0,02330953i$ $-7,329202 \pm 1,441047i$ $52,10696 \mp 11,04124i$ $-154,9172 \pm 19,21986i$ $220,2841 + 0,000000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$7,1119417 \pm 17,100359i$ $10,669329 \pm 12,906612i$ $13,835627 \pm 9,0817637i$ $14,134032 \pm 5,4054488i$ $14,749072 \pm 1,7953685i$	$-0,09217806 \pm 0,2531122i$ $-0,3512552 \mp 9,258602i$ $11,02720 \pm 82,15448i$ $-35,23219 \mp 309,0231i$ $24,92204 \pm 582,4710i$

Таблица 14 (продолжение)

s = 3

n	k	$P_k$	$A_k$
1	1	3,0000000 + 0,0000000i	0,5000000 + 0,0000000i
2	1,2	4,0000000 ± 2,0000000i	0,2500000 ± 0,3333333i
3	1,2 3	4,6757570 ± 3,9134896i 5,6484860 + 0,0000000i	-0,2311844 ± 0,2585931i 0,9623689 + 0,0000000i
4	1,2 3,4	5,2039412 ± 5,8058568i 6,7960588 ± 1,8866493i	-0,2271294 ∓ 0,1986380i 0,4771294 ± 1,491478i
5	1,2 3,4 5	5,6446417 ± 7,6935462i 7,7060967 ± 3,7400531i 8,2985232 + 0,0000000i	0,1967649 ∓ 0,1881490i -2,924695 ± 0,9668640i 4,155861 + 0,0000000i
6	1,2 3,4 5,6	6,0264487 ± 9,5820631i 8,4720963 ± 5,5825704i 9,5014551 ± 1,8414998i	0,1450636 ± 0,2065825i -1,385457 ∓ 2,684179i 1,490393 ± 8,620126i
7	1,2 3,4 5,6 7	6,3654708 ± 11,473438i 9,1396312 ± 7,4226773i 10,520395 ± 3,6654105i 10,949007 + 0,0000000i	-0,2181146 ± 0,09737518i 3,551358 ∓ 1,662063i -15,68193 ± 4,007719i 25,19737 + 0,0000000i
8	1,2 3,4 5,6 7,8	6,6717805 ± 13,368387i 9,7348179 ± 9,2640463i 11,412402 ± 5,4827571i 12,180999 ± 1,8171549i	-0,04510400 ∓ 0,2250632i 1,701039 ± 4,668552i -7,195027 ∓ 26,62808i 5,789092 ± 60,51915i
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	6,9521408 ± 15,267079i 10,274201 ± 11,108353i 12,210480 ± 7,2986740i 13,263340 ± 3,6234273i 13,599679 + 0,0000000i	0,2229722 ± 0,01042616i -6,033658 ± 1,375216i 43,22678 ∓ 10,07803i -129,3480 ± 17,38889i 184,3639 + 0,000000i
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	7,2113354 ± 17,169447i 10,769007 ± 12,956347i 12,935685 ± 9,1157512i 14,234387 ± 5,4253245i 14,849586 ± 1,8019150i	-0,06657101 ± 0,2087472i -0,5326705 ∓ 7,587079i 10,68373 ± 67,61150i -32,80819 ∓ 255,6928i 22,97369 ± 483,5296i

Таблица 14 (продолжение)

$$s = 1/3$$

$k$	$P_k$	$A_k$
1	$0,33333333 + 0,0000000i$	$0,3732822 + 0,000000i$
1,2	$1,3333333 \pm 1,1547005i$	$0,1866411 \pm 1,293087i$
1,2 3	$2,0179293 \pm 2,7015624i$ $2,9641414 + 0,0000000i$	$-2,710506 \pm 0,2675182i$ $5,794295 + 0,0000000i$
1,2 3,4	$2,5511197 \pm 4,3743204i$ $4,1155470 \pm 1,4453502i$	$0,1813335 \mp 4,749303i$ $0,005307564 \pm 17,78341i$
1,2 3,4 5	$2,9946534 \pm 6,1119700i$ $5,0316478 \pm 3,0128059i$ $5,6140644 + 0,0000000i$	$7,320196 \pm 1,686876i$ $-44,01384 \mp 3,039431i$ $73,76057 + 0,000000i$
1,2 3,4 5,6	$3,3780841 \pm 7,8899468i$ $5,8030627 \pm 4,6501680i$ $6,8188532 \pm 1,5411331i$	$-4,826889 \pm 10,02945i$ $17,37667 \mp 93,75193i$ $-12,36314 \pm 237,5886i$
1,2 3,4 5,6 7	$3,7180251 \pm 9,6957352i$ $6,4749976 \pm 6,3338289i$ $7,8412996 \pm 3,1423344i$ $8,2646888 + 0,0000000i$	$-12,10075 \mp 10,08096i$ $176,8933 \pm 60,61643i$ $-643,9746 \mp 90,76497i$ $958,7375 + 0,00000i$
1,2 3,4 5,6 7,8	$4,0248248 \pm 11,522029i$ $7,0736766 \pm 8,0508873i$ $8,7370667 \pm 4,7856676i$ $9,4977653 \pm 1,5892365i$	$17,61637 \mp 12,36804i$ $-164,1105 \pm 299,0167i$ $399,0123 \mp 1527,464i$ $-252,3315 \pm 3183,754i$
1,2 3,4 5,6 7,8 9	$4,3054055 \pm 13,364161i$ $7,6158216 \pm 9,7934272i$ $9,5386775 \pm 6,4606627i$ $10,582351 \pm 3,2142744i$ $10,915489 + 0,0000000i$	$9,380226 \pm 27,04333i$ $-452,2133 \mp 376,0260i$ $3235,461 \pm 1341,472i$ $-9127,433 \mp 1663,049i$ $12669,98 + 0,000i$
1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$4,5646468 \pm 15,218953i$ $8,1128179 \pm 11,556196i$ $10,267046 \pm 8,1605861i$ $11,556052 \pm 4,8673326i$ $12,166104 \pm 1,6182197i$	$-37,19574 \pm 1,644202i$ $760,3244 \mp 601,2080i$ $-3776,358 \pm 6175,583i$ $7173,022 \mp 23198,44i$ $-4119,606 \pm 42924,73i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 2/3$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	0,66666667+ 0,0000000i	0,7384881+ 0,000000i
2	1,2	1,6666667 ± 1,2909945i	0,3692440± 1,430076i
3	1,2 3	2,3493141 ± 2,8813431i 3,3013719 + 0,0000000i	-2,423958 ± 0,5747055i 5,586404 + 0,0000000i
4	1,2 3,4	2,8817662 ± 4,5781087i 4,4515671 ± 1,5076664i	-0,4124169∓ 3,784074i 0,7816610± 15,07561i
5	1,2 3,4 5	3,3249994 ± 6,3315881i 5,3663842 ± 3,1131228i 5,9505662 + 0,0000000i	5,447823 ± 0,3945721i -33,93515 ± 0,4060992i 57,71314 + 0,0000000i
6	1,2 3,4 5,6	3,7083153 ± 8,1210156i 6,1368116 ± 4,7768023i 7,1548731 ± 1,5818347i	-2,140109 ± 7,189839i 5,645994 ∓ 67,52825i -3,136641 ± 173,1009i
7	1,2 3,4 5,6 7	4,0482295 ± 9,9355801i 6,8080161 ± 6,4800737i 8,1766499 ± 3,2124319i 8,6008758 + 0,0000000i	-8,595789 ∓ 5,055683i 121,5171 ± 26,80177i -442,8215 ∓ 36,57606i 660,5388 + 0,00000i
8	1,2 3,4 5,6 7,8	4,3550469 ± 11,768873i 7,4061541 ± 8,2124638i 9,0717686 ± 4,8783169i 9,8336971 ± 1,6195001i	9,208392 ∓ 9,070407i -79,44364 ± 199,3732i 183,1654 ∓ 1004,215i -112,5609 ± 2088,703i
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	4,6356686 ± 13,616753i 7,9478939 ± 9,9674065i 9,8728068 ± 6,5713300i 10,917879 ± 3,2682512i 11,251503 + 0,0000000i	7,896404 ± 14,39184i -297,9720 ∓ 188,2506i 2057,903 ± 646,8589i -5749,169 ∓ 783,9641i 7963,422 + 0,00000i
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	4,8949627 ± 15,476373i 8,4445833 ± 11,740468i 10,600684 ± 8,2860779i 11,891142 ± 4,9405672i 12,501961 ± 1,6423174i	-20,03497 ± 4,352608i 385,5897 ∓ 401,1477i -1855,987 ± 3844,393i 3458,356 ∓ 14145,30i -1967,554 ± 25995,39i

Таблица 14 (продолжение)

$$s = 4/3$$

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$1,3333333 + 0,000000i$	$1,119846 + 0,000000i$
2	1,2	$2,3333333 \pm 1,5275252i$	$0,5599233 \pm 1,282945i$
3	1,2 3	$3,0131320 \pm 3,2105431i$ $3,9737361 + 0,000000i$	$-1,574959 \pm 0,7697783i$ $4,269765 + 0,000000i$
4	1,2 3,4	$3,5441603 \pm 4,9503180i$ $5,1225064 \pm 1,6250643i$	$-0,7717399 \mp 2,022941i$ $1,331663 \pm 9,371874i$
5	1,2 3,4 5	$3,9866799 \pm 6,7491368i$ $6,0353837 \pm 3,3045215i$ $6,6225396 + 0,000000i$	$2,580029 \mp 0,5365220i$ $-17,83847 \pm 2,820598i$ $31,63674 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$4,3696386 \pm 8,5642231i$ $6,8041800 \pm 5,0203752i$ $7,8261815 \pm 1,6602123i$	$0,008869949 \pm 3,165555i$ $-3,107384 \mp 31,28162i$ $3,658437 \pm 83,69864i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$4,7093860 \pm 10,398471i$ $7,4741130 \pm 6,7629586i$ $8,8468744 \pm 3,3481751i$ $9,2725868 + 0,000000i$	$-3,661793 \mp 0,8524793i$ $51,34846 \pm 0,3907265i$ $-192,2754 \pm 4,654126i$ $290,2973 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$5,0161440 \pm 12,247456i$ $8,0712733 \pm 8,5263146i$ $9,7408851 \pm 5,0584656i$ $10,505031 \pm 1,6783723i$	$2,048628 \mp 3,918598i$ $-11,90290 \pm 79,11552i$ $15,98971 \mp 399,7567i$ $-5,575515 \pm 839,3930i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$5,2957690 \pm 14,108210i$ $8,6122598 \pm 10,306441i$ $10,540912 \pm 6,7871866i$ $11,588536 \pm 3,3735854i$ $11,923048 + 0,000000i$	$3,768685 \pm 3,519212i$ $-114,1206 \mp 37,52765i$ $766,1935 \pm 106,2106i$ $-2137,922 \mp 109,7978i$ $2965,281 + 0,0000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$5,5561038 \pm 15,978627i$ $9,1083652 \pm 12,100486i$ $11,267904 \pm 8,5314562i$ $12,561030 \pm 5,0838360i$ $13,173264 \pm 1,6894705i$	$-5,127986 \pm 3,053342i$ $85,02996 \mp 153,0430i$ $-365,7485 \pm 1364,643i$ $624,1555 \mp 4933,262i$ $-337,7490 \pm 9031,421i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 5/3$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	1,6666667 + 0,0000000i	1,107732 + 0,000000i
2	1,2	2,6666667 ± 1,6329932i	0,5538661 ± 1,085351i
3	1,2 3	3,3453919 ± 3,3629827i 4,3092161 + 0,0000000i	-1,167477 ± 0,7121679i 3,442687 + 0,0000000i
4	1,2 3,4	3,8757662 ± 5,1406632i 5,4575672 ± 1,6806633i	-0,7110043 ± 1,375592i 1,264870 ± 6,940911i
5	1,2 3,4 5	4,3179102 ± 6,9483986i 6,3696976 ± 3,3961364i 6,9581178 + 0,0000000i	1,660798 ± 0,5696790i -12,25279 ± 2,766073i 22,29173 + 0,0000000i
6	1,2 3,4 5,6	4,7006538 ± 8,7773385i 7,1378124 ± 5,1377848i 8,1615339 ± 1,6980314i	0,2719444 ± 1,968731i -3,740410 ± 20,24903i 4,022332 ± 55,78191i
7	1,2 3,4 5,6 7	5,0402802 ± 10,622264i 7,8071878 ± 6,9000022i 9,1817851 ± 3,414021i 9,6081606 + 0,0000000i	-2,234347 ± 0,1960742i 31,79196 ± 2,859579i -121,8567 ± 8,992699i 185,7058 + 0,0000000i
8	1,2 3,4 5,6 7,8	5,3469744 ± 12,479786i 8,4039048 ± 8,6789334i 10,075319 ± 5,1461498i 10,840468 ± 1,7070395i	0,8300866 ± 2,382137i -1,970466 ± 47,44530i -6,272864 ± 242,9217i 7,967110 ± 515,3689i
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	5,6275712 ± 14,347554i 8,9445408 ± 10,471792i 10,874898 ± 6,8925517i 11,923688 ± 3,4250252i 12,258606 + 0,0000000i	2,332417 ± 1,597786i -67,03442 ± 13,69730i 450,2762 ± 26,59792i -1264,886 ± 14,65000i 1759,731 + 0,000000i
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	5,8869008 ± 16,223859i 9,4403685 ± 12,276487i 11,601488 ± 8,6515057i 12,895845 ± 5,1539612i 13,508732 ± 1,7125554i	-2,433291 ± 2,012429i 36,01188 ± 89,06591i -136,3501 ± 782,0097i 203,3243 ± 2827,923i -99,99891 ± 5188,673i

Таблица 14 (продолжение)

$s = 7/3$

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$2,3333333 + 0,000000i$	$0,8398849 + 0,000000i$
2	1,2	$3,3333333 \pm 1,8257419i$	$0,4199424 \pm 0,6571770i$
3	1,2 3	$4,0103656 \pm 3,6486881i$ $4,9792688 + 0,000000i$	$-0,5604830 \pm 0,4796741i$ $1,960851 + 0,000000i$
4	1,2 3,4	$4,5395630 \pm 5,4834339i$ $6,1271037 \pm 1,7866437i$	$-0,4527773 \mp 0,5623576i$ $0,8727198 \pm 3,422393i$
5	1,2 3,4 5	$4,9809654 \pm 7,3305311i$ $7,0380436 \pm 3,5722659i$ $7,6286485 + 0,000000i$	$0,6131561 \mp 0,3837163i$ $-5,263454 \pm 1,864740i$ $10,14048 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$5,3632468 \pm 9,1885987i$ $7,0049980 \pm 5,5048201i$ $8,8317564 \pm 1,7712291i$	$0,2772683 \pm 0,6817546i$ $-2,722541 + 7,769845i$ $2,865215 \pm 22,96016i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$5,7025874 \pm 11,056126i$ $8,4733832 \pm 7,1661511i$ $9,8512747 \pm 3,5419553i$ $10,278843 + 0,000000i$	$-0,7448913 \pm 0,1331084i$ $11,18694 \mp 3,112340i$ $-45,62123 \pm 7,637692i$ $71,19825 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$6,0091089 \pm 12,931797i$ $9,0692907 \pm 8,9763060i$ $10,743979 \pm 5,3171408i$ $11,510955 \pm 1,7629639i$	$0,04613630 \mp 0,7822049i$ $2,552108 \pm 15,66525i$ $-12,62909 \mp 83,81970i$ $10,45079 \pm 183,1567i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$6,2896073 \pm 14,814524i$ $9,6092723 \pm 10,794815i$ $11,542754 \pm 7,0985447i$ $12,593689 \pm 3,5256337i$ $12,929355 + 0,000000i$	$0,7754498 \pm 0,2522840i$ $-21,18193 \pm 0,3939946i$ $145,3624 \mp 13,13098i$ $-418,7161 \pm 26,66796i$ $588,3602 + 0,000000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$6,5488883 \pm 16,703411i$ $10,104572 \pm 12,621044i$ $12,268612 \pm 8,8866901i$ $13,565248 \pm 5,2913979i$ $14,179347 \pm 1,7578078i$	$-0,4708147 \pm 0,7096804i$ $4,147240 \mp 27,43838i$ $-0,6530634 \pm 239,7110i$ $-27,38394 \mp 879,6784i$ $24,78052 \pm 1632,327i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 8/3$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	2,6666667 + 0,0000000i	0,6646393 + 0,000000i
2	1,2	3,6666667 ± 1,9148542i	0,3323196 ± 0,4772578i
3	1,2 3	4,3430194 ± 3,7834168i 5,3139612 + 0,0000000i	-0,3662408 ± 0,3604527i 1,397121 + 0,0000000i
4	1,2 3,4	4,8716911 ± 5,6469629i 6,4616422 ± 1,8373302i	-0,3283975 ∓ 0,3400477i 0,6607172 ± 2,291711i
5	1,2 3,4 5	5,3127365 ± 7,5142490i 7,3721017 ± 3,6571280i 7,9636569 + 0,0000000i	0,3532462 ∓ 0,2763795i -3,306716 ± 1,376722i 6,571580 + 0,000000i
6	1,2 3,4 5,6	5,6947806 ± 9,3874109i 8,1385558 ± 5,4747902i 9,1666637 ± 1,8067083i	0,2092618 ± 0,3813382i -2,001099 ∓ 4,623487i 2,124157 ± 14,22192i
7	1,2 3,4 5,6 7	6,0339645 ± 11,266732i 8,8065012 ± 7,2955515i 10,185876 ± 3,6042153i 10,613983 + 0,0000000i	-0,4093004 ± 0,1269863i 6,380276 ∓ 2,374710i -27,01933 ± 5,729475i 42,76134 + 0,000000i
8	1,2 3,4 5,6 7,8	6,3403838 ± 13,151921i 9,4020381 ± 9,1213214i 11,078218 ± 5,4005889i 11,846027 ± 1,7902659i	-0,03061641 ∓ 0,4260046i 2,276969 ± 8,656148i -10,06014 ∓ 47,70922i 8,146113 ± 106,2037i
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	6,6208171 ± 15,042520i 9,9417140 ± 10,952717i 11,876632 ± 7,1993108i 12,928554 ± 3,5748675i 13,264566 + 0,0000000i	0,4225322 ± 0,07622276i -11,44370 ± 1,415585i 80,04609 ∓ 12,98042i -234,6574 ± 23,36078i 331,9297 + 0,00000i
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	6,8800588 ± 16,938047i 10,436763 ± 12,789806i 12,602154 ± 9,0019559i 13,899848 ± 5,3587831i 14,514510 ± 1,7799990i	-0,1870996 ± 0,3921075i 0,5596317 ∓ 14,60979i 10,07936 ± 128,5694i -38,39224 ∓ 478,1323i 28,27266 ± 894,8812i



Таблица 14 (продолжение)

$s = 0,25$

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$0,2500000 + 0,0000000i$	$0,2758157 + 0,000000i$
2	1,2	$1,2500000 \pm 1,1180340i$	$0,1379078 \pm 1,233485i$
3	1,2 3	$1,9351604 \pm 2,6546887i$ $2,8796792 + 0,0000000i$	$-2,750654 \pm 0,1698034i$ $5,777123 + 0,000000i$
4	1,2 3,4	$2,4685320 \pm 4,3218481i$ $4,0314680 \pm 1,4293403i$	$0,3846076 \mp 4,974258i$ $-0,2466998 \pm 18,37458i$
5	1,2 3,4 5	$2,9121298 \pm 6,0558012i$ $4,9479334 \pm 2,9871922i$ $5,5298737 + 0,0000000i$	$7,806533 \pm 2,134332i$ $-46,63457 \mp 4,217320i$ $77,93190 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$3,2955792 \pm 7,8310979i$ $5,7196174 \pm 4,6179586i$ $6,7348034 \pm 1,5307863i$	$-5,756652 \pm 10,79531i$ $21,46774 \mp 101,0987i$ $-15,57318 \pm 255,8105i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$3,6355188 \pm 9,6348273i$ $6,3917463 \pm 6,2967290i$ $7,7574336 \pm 3,1245609i$ $8,1806024 + 0,0000000i$	$-13,03431 \mp 11,82121i$ $193,0518 \pm 72,52091i$ $-703,7943 \mp 109,9116i$ $1047,829 + 0,0000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$3,9423077 \pm 11,459475i$ $6,9905668 \pm 8,0099762i$ $8,6533742 \pm 4,7622193i$ $9,4137513 \pm 1,5815790i$	$20,53268 \mp 13,14763i$ $-194,1281 \pm 328,6628i$ $476,1111 \mp 1688,460i$ $-302,3778 \pm 3524,196i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$4,2228731 \pm 13,300253i$ $7,5328163 \pm 9,7494400i$ $9,4551362 \pm 6,4326943i$ $10,498446 \pm 3,2006361i$ $10,831457 + 0,0000000i$	$9,409772 \pm 31,43223i$ $-497,9974 \mp 443,0227i$ $3605,855 \pm 1591,864i$ $-10208,98 \mp 1981,309i$ $14183,70 + 0,000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$4,4820971 \pm 15,153906i$ $8,0298909 \pm 11,509660i$ $10,183632 \pm 8,1289063i$ $11,472263 \pm 4,8488488i$ $12,082117 \pm 1,6121383i$	$-43,12593 \pm 0,03579918i$ $894,7550 \mp 658,2496i$ $-4474,328 \pm 6917,035i$ $8531,300 \mp 26159,57i$ $-4908,463 \pm 48515,20i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 0,75$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$0,7500000 + 0,0000000i$	$0,8160489 + 0,000000i$
2	1,2	$1,7500000 \pm 1,3228757i$	$0,4080245 \pm 1,439375i$
3	1,2 3	$2,4322251 \pm 2,9245415i$ $3,3855499 + 0,0000000i$	$-2,329198 \pm 0,6286870i$ $5,474446 + 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$2,9644931 \pm 4,6276339i$ $4,5355069 \pm 1,5228417i$	$-0,5101639 \mp 3,540644i$ $0,9181884 \pm 14,34948i$
5	1,2 3,4 5	$3,4076429 \pm 6,3852953i$ $5,4500409 \pm 3,1376941i$ $6,0346323 + 0,0000000i$	$5,015637 \pm 0,1780652i$ $-31,58394 \pm 0,9871893i$ $53,95266 + 0,0000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$3,7909220 \pm 8,1777480i$ $6,2202414 \pm 4,8079325i$ $7,2388367 \pm 1,5918454i$	$-1,681152 \pm 6,557956i$ $3,677014 \mp 61,82335i$ $-1,587838 \pm 159,1168i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$4,1308225 \pm 9,9946295i$ $6,8912741 \pm 6,5161148i$ $8,2604608 \pm 3,2297156i$ $8,6848855 + 0,0000000i$	$-7,813976 \mp 4,189864i$ $109,9564 \pm 21,11621i$ $-401,3850 \mp 27,52956i$ $599,3013 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$4,4376387 \pm 11,829769i$ $7,4892826 \pm 8,2523567i$ $9,1554282 \pm 4,9012020i$ $9,9176507 \pm 1,6269769i$	$7,755709 \mp 8,281692i$ $-65,21556 \pm 179,0226i$ $147,2819 \mp 900,2245i$ $-89,41403 \pm 1872,884i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$4,7182660 \pm 13,679163i$ $8,0309242 \pm 10,010422i$ $9,9563307 \pm 6,5987030i$ $11,001739 \pm 3,2816050i$ $11,335480 + 0,0000000i$	$7,361312 \pm 12,20202i$ $-266,5533 \mp 156,7856i$ $1829,491 \pm 531,9823i$ $-5103,981 \mp 639,4284i$ $7068,179 + 0,00000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$4,9775696 \pm 15,540054i$ $8,5275384 \pm 11,786080i$ $10,684091 \pm 8,3171510i$ $11,974898 \pm 4,9587048i$ $12,585903 \pm 1,6482861i$	$-17,05112 \pm 4,453586i$ $323,0284 \mp 359,2656i$ $-1540,325 \pm 3398,332i$ $2852,333 \mp 12456,78i$ $-1617,578 \pm 22865,91i$

Таблица 14 (продолжение)

$s = 1,25$

$k$	$p_k$	$A_k$	
1	$1,2500000 + 0,0000000i$	$1,103263 +$	$0,000000i$
1,2	$2,2500000 \pm 1,5000000i$	$0,5516313 \pm$	$1,323915i$
1,2	$2,9300977 \pm 3,1712793i$	$-1,683836 \pm$	$0,7716149i$
3	$3,8898047 + 0,0000000i$	$4,470935 +$	$0,0000000i$
1,2	$3,4612962 \pm 4,9141866i$	$-0,7696455 \mp$	$2,212017i$
3,4	$5,0387038 \pm 1,6108622i$	$1,321277 \pm$	$10,04077i$
1,2	$3,9039090 \pm 6,6983845i$	$2,861609 \mp$	$0,4982530i$
3,4	$5,9517878 \pm 3,2812141i$	$-19,49046 \pm$	$2,743008i$
5	$6,5386066 + 0,0000000i$	$34,36097 +$	$0,0000000i$
1,2	$4,2869185 \pm 8,5101005i$	$-0,1132299 \pm$	$3,542232i$
3,4	$6,7207670 \pm 4,9905865i$	$-2,689729 \mp$	$34,70186i$
5,6	$7,7423145 \pm 1,6506208i$	$3,354590 \pm$	$92,24240i$
1,2	$4,6266930 \pm 10,341757i$	$-4,116556 \mp$	$1,117380i$
3,4	$7,3908469 \pm 6,7282565i$	$57,60838 \pm$	$1,882957i$
5,6	$8,7631272 \pm 3,3315130i$	$-214,6574 \pm$	$2,458830i$
7	$9,188666 + 0,0000000i$	$323,4344 +$	$0,0000000i$
1,2	$4,9334639 \pm 12,188674i$	$2,518312 \mp$	$4,406079i$
3,4	$7,9881225 \pm 8,4877259i$	$-16,00312 \pm$	$89,46983i$
5,6	$9,6572645 \pm 5,0363034i$	$25,67869 \mp$	$451,0689i$
7,8	$10,421149 \pm 1,6711279i$	$-11,64226 \pm$	$945,1980i$
1,2	$5,2140932 \pm 14,047730i$	$4,209616 \pm$	$4,245643i$
3,4	$8,5291993 \pm 10,264682i$	$-129,6978 \mp$	$46,96370i$
5,6	$10,457409 \pm 6,7605858i$	$871,8114 \pm$	$138,8112i$
7,8	$11,504730 \pm 3,3606011i$	$-2430,236 \mp$	$149,6067i$
9	$11,839137 + 0,0000000i$	$3368,929 +$	$0,0000000i$
1,2	$5,4734270 \pm 15,916723i$	$-6,136239 \pm$	$3,334683i$
3,4	$9,0253755 \pm 12,056079i$	$104,0879 \mp$	$174,2400i$
5,6	$11,184596 \pm 8,5011759i$	$-457,1491 \pm$	$1562,404i$
7,8	$12,477314 \pm 5,0661514i$	$794,6149 \mp$	$5652,555i$
9,10	$13,089379 \pm 1,6836494i$	$-434,8658 \pm$	$10346,63i$

Таблица 14 (продолжение)

$s = 1,75$

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$1,7500000 + 0,0000000i$	$1,088065 + 0,000000i$
2	1,2	$2,7500000 \pm 1,6583124i$	$0,5440326 \pm 1,031058i$
3	1,2 3	$3,4284839 \pm 3,4000173i$ $4,3930322 + 0,0000000i$	$-1,075185 \pm 0,6884442i$ $3,238436 + 0,0000000i$
4	1,2 3,4	$3,9587015 \pm 5,1847600i$ $5,5412985 \pm 1,6942759i$	$-0,6840329 \mp 1,240776i$ $1,228066 \pm 6,401431i$
5	1,2 3,4 5	$4,4007516 \pm 6,9973180i$ $6,4532600 \pm 3,4186531i$ $7,0419768 + 0,0000000i$	$1,478321 \mp 0,5574072i$ $-11,09774 \pm 2,688390i$ $20,32691 + 0,000000i$
6	1,2 3,4 5,6	$4,7834391 \pm 8,8298047i$ $7,2212159 \pm 5,1667160i$ $8,2453450 \pm 1,7073542i$	$0,2979300 \pm 1,737826i$ $-3,718177 \mp 18,07624i$ $3,964279 \pm 50,19404i$
7	1,2 3,4 5,6 7	$5,1230326 \pm 10,677471i$ $7,8904591 \pm 6,9338353i$ $9,2654943 \pm 3,4302596i$ $9,6920282 + 0,0000000i$	$-1,962802 \mp 0,1045425i$ $28,07044 \mp 3,194820i$ $-108,3143 \pm 9,301378i$ $165,5013 + 0,000000i$
8	1,2 3,4 5,6 7,8	$5,4297081 \pm 12,537188i$ $8,4870694 \pm 8,7166658i$ $10,158916 \pm 5,1678360i$ $10,924306 \pm 1,7141307i$	$0,6454280 \mp 2,089521i$ $-0,6332593 \pm 41,55848i$ $-8,946166 \mp 213,6967i$ $9,478030 \pm 454,7640i$
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	$5,7102955 \pm 14,406762i$ $9,0276203 \pm 10,512719i$ $10,958388 \pm 6,9186396i$ $12,007459 \pm 3,4377638i$ $12,342476 + 0,0000000i$	$2,051807 \pm 1,297212i$ $-58,40375 \mp 10,21646i$ $392,8119 \pm 15,63004i$ $-1106,035 \mp 2,078977i$ $1540,239 + 0,000000i$
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$5,9696215 \pm 16,284583i$ $9,5233801 \pm 12,320090i$ $11,684882 \pm 8,6812559i$ $12,979536 \pm 5,1713425i$ $13,592581 \pm 1,7182777i$	$-2,005071 \pm 1,789891i$ $28,61015 \mp 77,38412i$ $-102,9863 \pm 677,8641i$ $143,7867 \mp 2453,447i$ $-66,86151 \pm 4505,793i$

Таблица 14 (продолжение)

$s = 2,25$

$k$	$p_k$	$A_k$
1	$2,2500000 + 0,0000000i$	$0,8826101 + 0,000000i$
1,2	$3,2500000 \pm 1,8027756i$	$0,4413051 \pm 0,7071769i$
1,2 3	$3,9272174 \pm 3,6142172i$ $4,8955653 + 0,0000000i$	$-0,6198119 \pm 0,5110106i$ $2,122234 + 0,0000000i$
1,2 3,4	$4,4565525 \pm 5,4417780i$ $6,0434475 \pm 1,7737445i$	$-0,4864541 \mp 0,6341612i$ $0,9277592 \pm 3,765528i$
1,2 3,4 5	$4,8980459 \pm 7,2838713i$ $6,9545182 \pm 3,5507312i$ $7,5448719 + 0,0000000i$	$0,7000099 \mp 0,4120760i$ $-5,887140 \pm 1,993277i$ $11,25687 + 0,000000i$
1,2 3,4 5,6	$5,2803863 \pm 9,1382135i$ $7,7216039 \pm 5,3369806i$ $8,7480099 \pm 1,7622469i$	$0,2920660 \pm 0,7842977i$ $-2,906193 \mp 8,810967i$ $3,055432 \pm 25,78954i$
1,2 3,4 5,6 7	$5,6197649 \pm 11,002838i$ $8,3901057 \pm 7,1334308i$ $9,7676103 \pm 3,5262172i$ $10,195039 + 0,0000000i$	$-0,8608964 \pm 0,1257223i$ $12,82218 \mp 3,267566i$ $-51,83381 \pm 8,088893i$ $80,62765 + 0,000000i$
1,2 3,4 5,6 7,8	$5,9263106 \pm 12,876173i$ $8,9861092 \pm 8,9396810i$ $10,660411 \pm 5,2960716i$ $11,427170 \pm 1,7560715i$	$0,08389273 \mp 0,9059867i$ $2,494822 \pm 18,09808i$ $-13,02820 \mp 96,19457i$ $10,89079 \pm 209,3018i$
1,2 3,4 5,6 7,8 9	$6,2068239 \pm 14,756968i$ $9,5261694 \pm 10,754973i$ $11,459280 \pm 7,0731268i$ $12,509959 \pm 3,5132166i$ $12,845536 + 0,0000000i$	$0,8976839 \pm 0,3269240i$ $-24,60882 \mp 0,1989481i$ $168,2120 \mp 12,13738i$ $-482,6494 \pm 26,33063i$ $677,1795 + 0,00000i$
1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	$6,4661132 \pm 16,644231i$ $10,021533 \pm 12,578497i$ $12,185224 \pm 8,8576370i$ $13,481588 \pm 5,2744160i$ $14,095542 \pm 1,7522157i$	$-0,5857110 \pm 0,8177634i$ $5,771036 \mp 31,98903i$ $-6,525565 \pm 279,2134i$ $-19,03063 \mp 1021,835i$ $20,81217 \pm 1892,590i$

Таблица 14 (продолжение)

 $s = 2,75$ 

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
1	1	$2,7500000 \pm 0,0000000i$	$0,6217516 \pm 0,000000i$
2	1,2	$3,7500000 \pm 1,9364917i$	$0,3108758 \pm 0,4378243i$
3	1,2	$4,4261966 \pm 3,8163524i$	$-0,3274719 \pm 0,3330900i$
	3	$5,3976068 \pm 0,0000000i$	$1,276695 \pm 0,0000000i$
4	1,2	$4,9547430 \pm 5,6871054i$	$-0,3007209 \mp 0,2982306i$
	3,4	$6,5452570 \pm 1,8497838i$	$0,6115966 \pm 2,063708i$
5	1,2	$5,3957009 \pm 7,5594752i$	$0,3061284 \mp 0,2522471i$
	3,4	$7,4556061 \pm 3,6780357i$	$-2,931943 \pm 1,265736i$
	5	$8,0473861 \pm 0,0000000i$	$5,873380 \pm 0,000000i$
6	1,2	$5,7776856 \pm 9,4364536i$	$0,1922336 \pm 0,3281292i$
	3,4	$8,2219426 \pm 5,5019347i$	$-1,834485 \mp 4,044929i$
	5,6	$9,2503719 \pm 1,8154690i$	$1,953128 \pm 12,57364i$
7	1,2	$6,1168295 \pm 11,318766i$	$-0,3506947 \pm 0,1205333i$
	3,4	$8,8897826 \pm 7,3275415i$	$5,523308 \mp 2,186802i$
	5,6	$10,269513 \pm 3,6196118i$	$-23,62716 \pm 5,269473i$
	7	$10,697750 \pm 0,0000000i$	$37,53085 \pm 0,000000i$
8	1,2	$6,4232220 \pm 13,206373i$	$-0,03789542 \mp 0,3642019i$
	3,4	$9,4852302 \pm 9,1572131i$	$2,142596 \pm 7,434589i$
	5,6	$11,161769 \pm 5,4212486i$	$-9,326549 \mp 41,31134i$
	7,8	$11,929780 \pm 1,7970261i$	$7,532724 \pm 92,42183i$
9	1,2	$6,7036377 \pm 15,098976i$	$0,3611686 \pm 0,05279237i$
	3,4	$10,024832 \pm 10,991834i$	$-9,773303 \pm 1,463560i$
	5,6	$11,960097 \pm 7,2242808i$	$68,74204 \mp 12,37073i$
	7,8	$13,012258 \pm 3,5870696i$	$-202,5014 \pm 21,94304i$
	9	$13,348353 \pm 0,0000000i$	$286,9648 \pm 0,000000i$
10	1,2	$6,9628683 \pm 16,996195i$	$-0,1463354 \pm 0,3360296i$
	3,4	$10,519819 \pm 12,831646i$	$0,1353094 \mp 12,43061i$
	5,6	$12,685538 \pm 9,0305404i$	$10,79298 \pm 109,6845i$
	7,8	$13,983489 \pm 5,3754963i$	$-37,83553 \mp 409,4876i$
	9,10	$14,598287 \pm 1,7855034i$	$27,36445 \pm 768,2664i$

**Таблица 15. ТАБЛИЦА ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ УЗЛОВ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА В СЛУЧАЕ  $s = 1$**

В таблице приведены узлы и коэффициенты квадратурной формулы для обращения преобразования Лапласа:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{pF(p)} dp \approx \sum_{k=1}^n A_k F(p_k)$$

где  $F(p)$  имеет при удалении  $p$  на бесконечность в секторе  $|\arg p| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$  асимптотическое представление вида

$$F(p) \sim \frac{1}{p} \left( a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \dots \right).$$

Эта формула соответствует формуле (8.1.4) для  $s = 1$  с той лишь разницей, что коэффициенты  $A_k$  отличаются от коэффициентов  $A_k$  формулы (8.1.4) множителем  $1/p_k$ .

Число, стоящее в таблице в скобках, означает порядок действительной и мнимой части следующего за ним комплексного числа, причем действительная и мнимая части этого числа стоят в двух рядом стоящих строках таблицы. Глава 8, § 1 и 2, (8.1.4)\*.

Литература: Salzer H. E. [21].

$n$	$k$	$p_k$	$A_k$
1	1	1,0000 0000 0000 +,0000 0000 0000 <i>i</i>	1,0000 0000 0000 +,0000 0000 0000 <i>i</i>
2	1,2	(1),2000 0000 0000 ±,14142 13562 37310 <i>i</i>	(1)−,10000 00000 00000 ±,35355 33905 93274 <i>i</i>
3	1,2 3	(1),26810 82873 62775 ±,30504 30199 24741 <i>i</i> (1),36378 34252 74450 +,00000 00000 00000 <i>i</i>	(1)−,76487 49087 42292 ∓,41716 40244 74744 <i>i</i> (2)−,18297 49817 48458 +,00000 00000 00000 <i>i</i>
4	1,2 3,4	(1),32128 06896 87153 ±,47730 87433 27664 <i>i</i> (1),47871 93103 12847 ±,15674 76416 89521 <i>i</i>	(2)−,11301 53999 59715 ∓,12471 67585 02502 <i>i</i> (2)−,13301 53999 59715 ±,60071 73273 70474 <i>i</i>
5	1,2 3,4 5	(1),36556 94325 46357 ±,65437 36899 36008 <i>i</i> (1),57009 53298 67179 ±,32102 65600 30855 <i>i</i> (1),62867 04751 72928 +,00000 00000 00000 <i>i</i>	(2)−,15826 80186 45860 ±,24125 64578 22444 <i>i</i> (3)−,14999 84465 97547 ∓,06804 22795 22023 <i>i</i> (3)−,27334 32894 65922 +,00000 00000 00000 <i>i</i>
6	1,2 3,4	(1),40388 47534 48880 ±,83456 00414 87222 <i>i</i> (1),64705 14936 70157 ±,49001 21147 42139 <i>i</i>	(2)−,43515 53303 60738 ±,14015 30621 56406 <i>i</i> (3)−,22606 04118 93629 ∓,30510 33590 45053 <i>i</i>

\*) H. E. Salzer [21].

Таблица 15 (продолжение)

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
6	5,6	(1), 74906 37528 80963 ±, 16215 02388 77839i	(3) —, 18554 48788 57555 ±, 91779 23648 63809i
7	1,2	(2), 04378 69356 15068 ±, 10169 69328 37950i	(2) —, 02052 78557 17089 ±, 68441 92002 36232i
	3,4	(1), 71410 55219 18764 ±, 66230 45922 63928i	(3) —, 51522 96237 31723 ±, 59546 81369 90574i
	5,6	(1), 85118 34825 10295 ±, 32810 13624 32506i	(4) —, 24906 69424 45402 ±, 10403 34617 47917i
	7	(1), 89368 32788 40522 ±, 00000 00000 00000i	(4) —, 39619 85172 58801 ±, 00000 00000 00000i
8	1,2	(2), 04685 49463 28212 ±, 12010 57859 98138i	(2) —, 94941 16889 07913 ±, 25476 66248 17678i
	3,4	(1), 77386 88146 83055 ±, 83708 79306 23798i	(4) —, 13348 64737 46002 ±, 07024 31010 49801i
	5,6	(1), 94063 71213 69074 ±, 49692 17287 62329i	(4) —, 38485 44415 43744 ±, 56903 15433 80431i
	7,8	(2), 10169 44600 66575 ±, 01649 20179 68222i	(5) —, 02612 62084 68682 ±, 13549 06014 74389i
9	1,2	(2), 04966 12926 06868 ±, 13864 68597 89140i	(3) —, 07288 77701 73724 ±, 11542 58460 85664i
	3,4	(2), 08280 04220 05509 ±, 10138 35966 11088i	(4) —, 06631 21443 75880 ±, 26342 68181 33772i
	5,6	(2), 10206 88322 08485 ±, 06680 14072 37904i	(5) —, 11089 64544 38357 ±, 11396 39863 06724i
	7,8	(2), 11253 26985 72707 ±, 03321 34053 15218i	(5) —, 38773 39741 51362 ±, 15468 08402 75919i
	9	(2), 11587 35092 12863 ±, 00000 00000 00000i	(5) —, 56848 52237 04662 ±, 00000 00000 00000i
10	1,2	(2), 05225 45336 73444 ±, 15729 52904 56393i	(3) —, 11874 14018 99897 ±, 14130 36923 21723i
	3,4	(2), 08776 43464 00826 ±, 11921 85389 83012i	(4) —, 46553 60846 39817 ±, 00019 01773 03058i
	5,6	(2), 10934 30343 06000 ±, 08409 67299 60031i	(5) —, 28916 57227 03242 ±, 18169 18510 00964i
	7,8	(2), 12226 13148 41622 ±, 05012 71926 36769i	(5) —, 61276 99970 58515 ±, 95408 59890 73240i
	9,10	(2), 12837 67707 78109 ±, 01666 06258 41623i	(6) —, 03690 20468 80026 ±, 19699 04635 29004i
11	1,2	(2), 05467 03443 80661 ±, 17603 29803 18069i	(3) —, 22635 37193 78214 ±, 09133 78244 89705i
	3,4	(2), 09235 95404 40419 ±, 13718 72571 41666i	(4) —, 19213 53608 30204 ±, 74145 80622 87689i
	5,6	(2), 11602 97826 74372	(5) —, 23244 78758 40433



Таблица 15 (продолжение)

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
11	7,8	$\pm, 10154\ 83279\ 84373i$ (2), 13112 36972 48751	$\mp, 64978\ 46125\ 24991i$ (6), 20370 89323 99208
	9,10	$\pm, 06720\ 50582\ 21876i$ (2), 13962 64354 83486	$\pm, 19605\ 51709\ 10873i$ (6) —, 58473 33517 93539
	11	$\pm, 03347\ 47641\ 81901i$ (2), 14238 03995 44621 +, 00000 00000 00000i	$\mp, 22658\ 89574\ 09109i$ (6), 81193 94137 34596 $\pm, 00000\ 00000\ 00000i$
12	1,2	(2), 09664 60291 60388	(5) —, 10601 19866 54066
		$\pm, 15526\ 98872\ 59769i$	$\mp, 05994\ 71349\ 01648i$
	3,4	(2), 12223 22798 01269	(6) —, 13163 02157 40167
		$\pm, 11913\ 37085\ 37902i$	$\mp, 01580\ 24463\ 59522i$
	5,6	(2), 14989 47208 49361	(7) —, 09417 33184 62161
		$\pm, 05042\ 67301\ 31942i$	$\mp, 15155\ 50733\ 73935i$
	7,8	(2), 15500 39910 84164	(7) —, 05219 12056 52078
		$\pm, 01677\ 40907\ 54267i$	$\pm, 28409\ 47573\ 69523i$
	9,10	(2), 05693 57760 58305	(3) —, 01977 04170 84491
		$\pm, 19484\ 62936\ 82977i$	$\pm, 31622\ 61755\ 36523i$
	11,12	(2), 13928 72030 46514	(6) —, 54087 59155 92675
		$\pm, 08442\ 49696\ 60733i$	$\pm, 37347\ 09460\ 51152i$
13	1,2	(2), 65907 18754 54784	(3) —, 39079 71690 2556
		$\pm, 21372\ 46679\ 07769i$	$\mp, 10553\ 60431\ 0534i$
	3,4	(2), 10066 97077 38162	(5) —, 13258 28503 9431
		$\pm, 17345\ 10138\ 95605i$	$\mp, 13341\ 53228\ 1686i$
	5,6	(2), 12802 75656 56813	(6) —, 02702 49823 0006
		$\pm, 13683\ 53712\ 52579i$	$\pm, 24252\ 15512\ 8905i$
	7,8	(2), 14687 26198 20812	(7) —, 05597 13873 1143
		$\pm, 10176\ 94433\ 69505i$	$\mp, 13281\ 71176\ 8448i$
	9,10	(2), 16654 49617 71492	(7) —, 86609 64335 3174
		$\pm, 03365\ 81446\ 67106i$	$\mp, 32898\ 46732\ 6691i$
	11,12	(2), 15936 91748 38046	(7) —, 34509 53472 2402
		$\pm, 06750\ 23849\ 00982i$	$\pm, 31856\ 32197\ 6495i$
	13	(2), 16888 81894 39782 +, 00000 00000 00000i	(8) —, 11567 77745 9242 +, 00000 00000 00000i
14	1,2	(2), 06109 53706 59108	(3) —, 28570 14470 4751
		$\pm, 23265\ 97325\ 06469i$	$\mp, 42257\ 37703\ 1972i$
	3,4	(2), 10446 65324 69181	(5) —, 13950 67955 3728
		$\pm, 19171\ 83856\ 58014i$	$\pm, 24654\ 94725\ 4365i$
	5,6	(2), 13347 48601 89496	(6) —, 40708 88893 5434
		$\pm, 15463\ 93613\ 28642i$	$\mp, 14745\ 48622\ 0113i$
	7,8	(2), 15397 04064 75505	(7) —, 29542 84861 5168
		$\pm, 11922\ 43399\ 83808i$	$\mp, 05619\ 88920\ 8362i$
	9,10	(2), 16818 54191 75291	(7) —, 93440 59273 3119
		$\pm, 08468\ 94658\ 26821i$	$\pm, 68417\ 86273\ 9122i$
	11,12	(2), 17720 85352 97203	(8) —, 14168 95546 0489
		$\pm, 05064\ 57474\ 84236i$	$\mp, 23329\ 17388\ 1153i$

Таблица 15 (продолжение)

$n$	$k$	$P_k$	$A_k$
14	13,14	(2), 18159 88757 34216 ±, 01685 56744 73441i	(8) —, 07386 33554 0440 ±, 40774 78000 1204i
	1,2	(2), 06301 97985 47933 ±, 25164 47268 56788i	(3) , 38001 67535 1110 ±, 50883 13306 1431i
	3,4	(2), 13862 07821 90320 ±, 17253 43258 70271i	(6) , 41388 83037 6509 ±, 61840 04287 2333i
15	5,6	(2), 16065 03146 08034 ±, 13677 80304 39440i	(7) —, 01694 09759 5195 ±, 60093 06335 4820i
	7,8	(2), 17644 52176 56664 ±, 10197 74390 29861i	(8) —, 11368 93311 5576 ±, 24504 28923 4219i
	9,10	(2), 18714 33207 96241 ±, 06772 98165 93316i	(8) , 55740 98444 2647 ±, 49998 12480 3205i
	11,12	(2), 19335 70616 72769 ±, 03379 39988 19329i	(9) —, 12685 72981 7048 ±, 04749 12174 4949i
	13,14	(2), 10806 52491 38980 ±, 21006 20730 41128i	(5) —, 40584 57857 8724 ±, 09752 02912 2456i
	15	(2), 19539 65107 78120 ±, 00000 00000 00000i	(9) , 16456 19607 2199 ±, 00000 00000 0000i
16	1,2	(2), 14350 27629 38985 ±, 19051 08735 89180i	(6) , 83234 33120 837 ±, 92399 95259 706i
	3,4	(2), 11148 92355 51544 ±, 22847 38950 39124i	(5) , 02915 07593 847 ±, 60253 31421 497i
	5,6	(2), 16696 74163 72794 ±, 15442 08089 26595i	(8) —, 11218 72558 046 ±, 02859 04207 613i
	7,8	(2), 18422 71884 49675 ±, 11935 72497 77675i	(8) , 58439 63892 001 ±, 13827 16922 874i
	9,10	(2), 19646 09742 94033 ±, 08490 34449 41219i	(9) —, 15373 99707 302 ±, 11715 01818 490i
	11,12	(2), 20432 29769 83798 ±, 05081 29533 98998i	(9) , 21025 72434 385 ±, 35200 92325 588i
	13,14	(2), 20817 31621 64224 ±, 01691 71634 28816i	(9) —, 10457 27057 607 ±, 58341 54653 451i
15,16	(2), 06485 62832 44948 ±, 27067 41018 02452i	(3) —, 74667 51219 346 ±, 23341 87148 757i	

Таблица 16. ЗНАЧЕНИЯ КООРДИНАТ УЗЛОВ ДЛЯ ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ С РАВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{e^{p'} }{p} \Phi(p) dp \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi(p_k).$$

Правило точное при  $\Phi(p) = p^{-j}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Функция  $\Phi(p)$  считается аналитической, регулярной в полуплоскости  $\text{Re}(p) > 0$  и ограниченной в секторе  $|\arg p| < (\pi/2) - \delta$  ( $\delta > 0$ ). Глава 8, § 3, (8.3.1) ( $\delta = 1$ ).

Литература: Salzer H. [14].

<i>n</i>	<i>j</i>	<i>p<sub>j</sub></i>	1/ <i>p<sub>j</sub></i>
1	1	1,00000000 + 0,00000000 <i>i</i>	1,00000000 + 0,00000000 <i>i</i>
2	1,2	0,66666667 ± 0,47140452 <i>i</i>	1,00000000 ∓ 0,70710678 <i>i</i>
3	1,2 3	0,46343318 ± 0,66891655 <i>i</i> 0,62485778 + 0,00000000 <i>i</i>	0,69981792 ∓ 1,01011279 <i>i</i> 1,60036417 + 0,00000000 <i>i</i>
4	1,2 3,4	0,31209699 ± 0,78442870 <i>i</i> 0,54603449 ± 0,22670497 <i>i</i>	0,43788772 ∓ 1,10059277 <i>i</i> 1,56211228 ∓ 0,64856456 <i>i</i>
5	1,2 3,4 5	0,19029304 ± 0,86260499 <i>i</i> 0,46724697 ± 0,36843448 <i>i</i> 0,53392634 + 0,00000000 <i>i</i>	0,24387201 ∓ 1,10548034 <i>i</i> 1,31966923 ∓ 1,04058814 <i>i</i> 1,87291752 + 0,00000000 <i>i</i>
6	1,2 3,4 5,6	0,08786626 ± 0,92009404 <i>i</i> 0,39416727 ± 0,46819799 <i>i</i> 0,49826825 ± 0,14769920 <i>i</i>	0,10285254 ∓ 1,07702331 <i>i</i> 1,05229916 ∓ 1,24993725 <i>i</i> 1,84484830 ∓ 0,54685928 <i>i</i>
7	1,2 3,4 5,6 7	-0,00076496 ± 0,96470825 <i>i</i> 0,32727973 ± 0,54346944 <i>i</i> 0,45588935 ± 0,25464118 <i>i</i> 0,49224949 + 0,00000000 <i>i</i>	-0,00082196 ∓ 1,03658217 <i>i</i> 0,81317581 ∓ 1,35033175 <i>i</i> 1,67190107 ± 0,93385569 <i>i</i> 2,03149016 + 0,00000000 <i>i</i>
8	1,2 3,4 5,6 7,8	-0,07902919 ± 1,00066480 <i>i</i> 0,26601917 ± 0,60293762 <i>i</i> 0,41223251 ± 0,33698985 <i>i</i> 0,47182912 ± 0,10911533 <i>i</i>	-0,07843500 ∓ 0,99314110 <i>i</i> 0,61252402 ∓ 1,38829762 <i>i</i> 1,45409421 ∓ 1,18868595 <i>i</i> 2,01181677 ± 0,46525329 <i>i</i>
9	1,2 3,4 5,6 7,8 9	-0,14919526 ± 1,03046752 <i>i</i> 0,20966304 ± 0,65149353 <i>i</i> 0,36931455 ± 0,40305392 <i>i</i> 0,44525659 ± 0,19444915 <i>i</i> 0,46815071 + 0,00000000 <i>i</i>	-0,13761844 ∓ 0,95050835 <i>i</i> 0,44761307 ∓ 1,39088424 <i>i</i> 1,23580348 ∓ 1,34870244 <i>i</i> 1,88616975 ± 0,82371403 <i>i</i> 2,13606428 + 0,00000000 <i>i</i>
10	1,2 3,4 5,6 7,8 9,10	-0,21284773 ± 1,05570953 <i>i</i> 0,15754418 ± 0,69213469 <i>i</i> 0,32790360 ± 0,45764025 <i>i</i> 0,41610417 ± 0,26374950 <i>i</i> 0,45488509 ± 0,08636297 <i>i</i>	-0,18351682 ∓ 0,91023036 <i>i</i> 0,31266794 ∓ 1,37363580 <i>i</i> 1,03454187 ∓ 1,44386337 <i>i</i> 1,71443371 ∓ 1,08670151 <i>i</i> 2,12187330 ∓ 0,40285183 <i>i</i>

**БИБЛИОГРАФИЯ ПО ЧИСЛЕННОМУ  
ИНТЕГРИРОВАНИЮ**

**Айзенштат В. С., Крылов В. И., Метельский А. С.**

1. Таблицы для численного преобразования Лапласа и вычисления интегралов вида  $\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx$ . Изд-во АН БССР, Минск, 1962.

**Айзенштат В. С., Метельский А. С.**

1. Вычисление интегралов вида  $\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx$ . Известия АН БССР, сер. физ.-техн. наук, 1961, № 1, 29—36.
2. Численное преобразование Лапласа. Инж.-физ. ж., 1961, т. 4, № 2, 82—91.

**Аккерман Р. Б.**

1. Квадратурные формулы типа формул Маркова. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1959, т. 53, 5—15.

**Александров С. И.**

1. Об одном приближенном методе кратного интегрирования. Уч. записки Глазовск. гос. пед. ин-та, 1959, вып. 6, 3—11.

**Алимов А.**

1. Построение формул приближенного вычисления двойных интегралов в области  $(D)$ , представляющей гиперболу  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  и прямую  $x = c$ . Сб. научно-исслед. работ. Ташкентский текстильн. ин-т, 1960, вып. 9, 25—29.

**Амербаев В. М.**

1. К вопросу о вычислении интерполяционного многочлена Чебышева. Вести. АН Казах. ССР, 1960, № 11, 56—59.

**Андрейков П. Б.**

1. Новый метод приближенного вычисления определенного интеграла. Сб. студ. научно-исслед. работ Белорусской с.-х. акад., 1953, № 1, 114—122.

**Артмеладзе Н. К.**

1. О формулах механических кубатур. Тр. Тбилисского Матем. ин-та, 1939, т. 7, 147—160.

**Ахизер Н. И.**

1. О теореме акад. С. Н. Бернштейна относительно квадратурной формулы П. Чебышева. Ж. Ин-та матем. АН УССР, т. 3, 1937, 76—82.

**Ахизер Н. И., Крейн М. Г.**

1. О некоторых формулах квадратур П. Чебышева и А. Маркова. Сб. памяти Граве, 15—28, 1940.

**Ахмедов Т. Д.**

1. Построение формул приближенного вычисления двойных интегралов по области, представляющей эллипс. Сб. научно-исслед. работ. Ташкентский текстильн. ин-т, 1960, вып. 9, 17—23.

Бахвалов Н. С.

1. О приближенном вычислении кратных интегралов. Вестн. МГУ, сер. матем., механ., астроном., физ., химии, 1959, № 4, 3—18.
2. Оценка в среднем остаточного члена квадратурных формул. Журнал вычислит. матем. и матем. физики, т. I, № 1, 1961, 64—77.

Безикович Я. С.

1. О формулах механических квадратур с  $n$  ординатами, верных для многочленов степени не выше  $2n - 2$ ,  $2n - 3$ . Тр. Индустр. ин-та. Л., раздел физ.-матем., 4: 2, 9—18, 1937.
2. Процесс механических квадратур для несобственных интегралов. Ученые записки ун-та, сер. матем., Л., т. 6, 1939, 36—42.

Березин И. С., Жидков Н. П.

1. Методы вычислений, т. I, Физматгиз, 1959.

Бернштейн С. Н.

1. О формуле квадратур Чебышева. Собр. соч., т. II, стр. 198—200, изд. АН СССР, 1954.
2. О формулах квадратур Котеса и Чебышева. Собр. соч., т. II, стр. 200—205, изд. АН СССР, 1954.
3. О формулах квадратур с положительными коэффициентами. Собр. соч., т. II, стр. 205—228, изд. АН СССР, 1954.
4. Примеры формул квадратур с положительными коэффициентами и рациональными абсциссами. Собр. соч., т. II, стр. 228—231, изд. АН СССР, 1954.
5. Примеры формул квадратур, аналогичных формуле Чебышева. Собр. соч., т. II, стр. 231—236, изд. АН СССР, 1954.
6. Об одной системе неопределенных уравнений. Собр. соч., т. II, стр. 236—242, изд. АН СССР, 1954.
7. Некоторые приложения параметрического метода к изучению квадратурных формул. Собр. соч., т. II, стр. 243—261, изд. АН СССР, 1954.

Вертова Е. И., Кузнецов Я. Т., Натансон И. П., Цареградский Х. А.

1. О приближенном вычислении определенных интегралов при помощи мультипликативного метода выделения особенностей. Прикл. матем. и механика, 1953, т. 17, № 5, 639—644.

Горовский П. В.

1. О точности формул механических квадратур в задачах по определению перемещения. Труды Киевск. автодор. ин-та, 1956, № 2, 170—175.

Гуткевич А. В.

1. О вычислении многозначных логарифмов. (Новые формулы для интерполирования, численного интегрирования и суммирования аналитических функций.) Изв. высш. учебн. заведений. Геод. и аэрофотосъемка, 1958, № 5, 39—41.

Ялкова А. И.

1. Вычисление коэффициентов Фурье — Чебышева. Сб. «Методы вычислений», вып. I, изд. ЛГУ, 1963, 27—29.

Яльмин В. П.

1. Остаточные члены механических квадратур. Изв. Сев.-Кав. индустр. ин-та, Новочеркасск, 1935, 1(15), 19—37.

Ятчинкин В. П., Коган Ф. М.

1. Новые формулы численных квадратур, Гостехиздат, М.—Л., 1949.

Яценкин Н. Я.

1. Кубатурные формулы для вычисления моментов функций двух переменных. Изв. высш. уч. заведений. Матем., 1960, № 4, 49—54.
2. О приближенном вычислении кратных интегралов. Вычисл. матем., сб. 5, 1959, 58—71.

В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина

В л а д и н е ц И. И.

1. Применение дополнительных ординат при приближенном вычислении определенных интегралов по правилу трапеций. Тр. Николаевского кораблестроит. ин-та, 1954, № 7, 53—56.

Г е о р г и е в Г. И.

1. Формулы механических квадратур в классе  $S_2$  для двойных интегралов. Доклады Болгарской Акад. наук, 1952, т. 5, № 1, 1—4 (русск.).
2. Формулы механических квадратур для кратных интегралов с минимальным числом членов. ДАН СССР, 1952, т. 83, № 4, 521—524.
3. Формулы механических квадратур с равными коэффициентами для кратных интегралов. ДАН СССР, 1953, т. 89, № 3, 389—392.

Г е р о н и м у с Я. Л.

1. О формулах квадратур Гаусса и Чебышева. ДАН СССР, 1946, т. 51, 655—658.
2. О некоторых квадратурных формулах. ДАН СССР, 1949, т. 65, 437—440.
3. Степень точности квадратурных формул. ДАН СССР, 1949, т. 68, 437—440.
4. Теория ортогональных многочленов. Гостехиздат, 1950.

Г и н з б у р г Б. Л.

1. Обобщение различных интерполяционных формул в случае неравных интервалов. Инж. сборник, 1952, т. 12, 201—220.
2. Применение обобщенных формул механических квадратур к расчету гидродинамической решетки. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1953, т. 2.
3. Формулы численных квадратур, наиболее выгодные для применения. УМН, 1954, т. 9, № 2, 137—142.

Г р е б е н ю к Д. Г.

1. О приближенном вычислении интегралов различной кратности при помощи теории полиномов, наименее уклоняющихся от нуля. Тр. Ин-та матем. и механ. АН Уз. ССР, вып. 6, 1950, 3—66.
2. К приближенному вычислению интегралов различной кратности при помощи теории полиномов, наименее уклоняющихся от нуля. Тр. Ин-та матем. и механ. АН Уз. ССР, 1951, т. 8, 72—98.
3. Построение формул для приближенного вычисления двойных интегралов в области  $D$ , представляющей круг  $x^2 + y^2 = R^2$ . Тр. Ин-та матем. и механ. АН Уз. ССР, 1952, т. 9, 29—59.
4. Построение формул приближенного вычисления тройных интегралов по области  $D$ , представляющей сферу. Тр. ин-та матем. и механ. АН Уз. ССР, 1954, т. 13, 43—55.
5. Построение формул приближенного вычисления тройных интегралов по области  $D$ , представляющей эллипсоид. Тр. Ин-та матем. и механ. АН Уз. ССР, 1954, вып. 13, 57—69.
6. Построение формул приближенного вычисления тройных интегралов по области, представляющей эллиптический конус. Тр. Ин-та матем. и механ. АН Уз. ССР, 1955, т. 16, 66—75.
7. Формулы приближенного представления одного интеграла. Тр. Ин-та матем. и механ. АН Уз. ССР, 1955, т. 16, 76—78.
8. Формулы приближенного вычисления интеграла с двумя бесконечными пределами. ДАН Уз. ССР, 1957, № 9, 5—11.
9. О погрешности формул некоторых квадратур с двумя бесконечными пределами. ДАН Уз. ССР, 1957, № 12, 5—7.
10. Обобщение квадратурной формулы Гаусса на случай  $m$  переменных. Изв. АН Уз. ССР. Сер. физ.-матем. наук, 1958, № 2, 69—76.
11. Построение формул типа Гаусса приближенного вычисления определенных интегралов. Тр. Ин-та математики АН Уз. ССР, 1962, вып. 24, 93—113.

Д е м и д о в и ч Б. П. и М а р о н И. А.

1. Основы вычислительной математики. Физматгиз, 1960.

- Дзюбенко С. Т.**  
 1. Асимптотические квадратуры со специальным разложением разности между верхним и нижним пределами интеграла в геометрическую прогрессию. Научные тр. Укр. с.-х. академии, 1957, т. 9, 407—420.
- Дорони Г. Я.**  
 1. К вопросу о формулах механических квадратур. Сб. научных тр. Днепропетр. инж.-строит. ин-та, 1955, № 1—2, 210—217.
- Диткин В. А.**  
 1. О некоторых приближенных формулах для вычисления трехкратных интегралов. ДАН СССР, 1948, т. 62, 445—447.  
 2. См. Люстерник Л. А. и Диткин В. А.
- Диткин В. А. и Люстерник Л. А.**  
 1. Об одном приеме практического гармонического анализа на сфере. Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1953, № 1, 3—13.
- Ермаков С. М.**  
 1. Об одном способе построения кубатурных формул. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1959, т. 53, 37—42.  
 2. О точной оценке остатков формул механических кубатур и многомерного интерполирования. ДАН БССР, 1962, т. 6, 73—77.
- Еругин Н. П. и Соболев С. Л.**  
 1. Приближенное интегрирование некоторых осциллирующих функций. Прикл. матем. и механ., 1950, т. 14, 193—196.
- Жидков Н. П.**  
 1. См. Березин И. С. и Жидков Н. П.
- Журавский А. М.**  
 1. О сходимости формул механических квадратур между бесконечными пределами. Тр. Всерос. матем. съезда, М., 1927, 220—222. См. также Л., Ж. физ.-матем. общества, 2 : 1, 1928, 31—52.  
 2. О приближенных кратных квадратурах. Изв. АН СССР, сер. матем., 1937, т. 1.  
 3. Об одном приеме приближенного интегрирования дифференциальных уравнений и вычисления квадратур. Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, т. 4.
- Занден Г.**  
 1. Элементы прикладного анализа. М.—Л., 1939.
- Зияев К. Г.**  
 1. Построение формул приближенного вычисления двойных интегралов в области, представляющей фигуру, ограниченную параболой  $y^2 = 2px$  и прямой  $x = c$ . Сб. научно-исслед. работ. Ташкентский текстильн. ин-т, 1960, вып. 9, 31—37.
- Иванова А. Н.**  
 1. Некоторые случаи кубатурной формулы Л. А. Люстерника для правильных многоугольников. Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1953, сб. 1, 27—36.  
 2. О сходимости последовательности квадратурных формул гауссовского типа на бесконечных интервалах. ДАН СССР, 1955, т. 104, 169—172.
- Канторович Л. В.**  
 1. О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей. Математический сб., 1934, т. 41, 235—245.  
 2. Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1949, т. 28, 3—25.
- Караниколов Х.**  
 1. Об одной формуле механической квадратуры. УМН, 1954, т. 9, № 2, 157—161.
- Кардашевский К. М.**  
 1. Асимптотическая оценка погрешности в квадратурных формулах для функций с интегрируемой производной. Тр. Днепропетр. хим.-технол. ин-та, 1956, т. 5, 245—248.

Карпов А. Б.

1. Квадратурные формулы для кораблестроительных расчетов. Тр. Горьковск. политехн. ин-та, 1958, т. 14, 23—33.

Кеда Н. П.

1. Об одном аналоге эйлера метода увеличения точности механических квадратур. ДАН БССР, 1960, т. 4, 43—46.
2. К теории квадратур для периодических функций. ДАН БССР, 1961, т. 5, № 9.
3. Квадратурные формулы с производными для периодических функций. Изв. АН БССР, сер. физ.-техн., 1961, № 4.
4. Квадратуры типа Чебышева для периодических функций. Изв. АН БССР, сер. физ.-техн., 1962, № 1.

Кенжегулов Х. К.

1. О некоторых оценках приближенного интегрирования. Тр. 1-й Научной конференции матем. кафедр пед. ин-тов Поволжья, 1960, Куйбышев, 1961, 80—86.

Коган Ф. М.

1. См. Ветчинкин В. П. и Коган Ф. М.

Козулин Ю. Н.

1. Расчет электромагнитного поля осциллятора над двухслойной средой. Уч. записки Кишиневск. ун-та, 1957, т. 29, 175—181.

Колмогорова П. П.

1. Численное решение несобственных интегралов, встречающихся при интерпретации магнитных и гравитационных аномалий, на электронных цифровых машинах. Геология и геофизика, 1962, № 4, 115—118.

Коробов Н. М.

1. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел. ДАН СССР, 1957, т. 115, № 6, 1062—1065.
2. О приближенном вычислении кратных интегралов. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 6, 1207—1210.
3. О некоторых теоретико-числовых методах приближенного вычисления кратных интегралов. УМН, 1959, т. 14, № 2, 227—230.
4. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов. Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1959, № 4, 19—25.
5. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов. ДАН СССР, 1960, т. 132, № 5, 1009—1012.

Кошляков Н. С.

1. О вычислении по формулам механических квадратур определенных интегралов с бесконечными пределами. Изв. АН СССР, сер. физ.-матем., 1933, 801—808.
2. О вычислении определенных интегралов по формуле механических квадратур типа Эрмита. Инж.-физ. ж., 1958, т. 1, 89—93.

Крейн М. Г.

1. См. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.

Кругликова Л. Г., Крылов В. И.

1. Численное преобразование Фурье. ДАН БССР, 1961, т. 5, 279—283.

Крылов А. Н.

1. Лекции о приближенных вычислениях. М.—Л., 1950.

Крылов В. И.

1. О вычислении неопределенного интеграла с малым числом значений интегрируемой функции. ДАН СССР, 1954, т. 94, № 4, 613—615.
2. Увеличение точности механических квадратур. Формулы эйлера вида. ДАН СССР, 1954, т. 96, № 3, 429—432.
3. Сходимость механических квадратур в классах функций различного порядка дифференцируемости. ДАН СССР, 1955, т. 101, № 5, 801—802.



4. Увеличение точности механических квадратур при наличии главного участка интегрирования малой длины в интегральном представлении остатка квадратуры. ДАН СССР, 1955, т. 101, № 6, 989—991.
  5. Приближенное вычисление интегралов от функций, содержащих быстро колеблющиеся множители. ДАН СССР, 1956, т. 108, № 6, 1014—1017.
  6. По поводу доказательства невозможности построения квадратурной формулы с равными коэффициентами и числом узлов, большим девяти. Тр. Ин-та физ. и матем. АН БССР, 1957, вып. 2, 249—254.
  7. О механических квадратурах с равными коэффициентами для интегралов. ДАН БССР, 1958, т. 2, № 5, 187—192.
  8. Итоги и перспективы исследований некоторых вопросов теории механических квадратур. Тр. Ин-та физ. и матем. АН БССР, 1959, вып. 3.
  9. О знаках коэффициентов квадратурной формулы Котеса. ДАН БССР, 1959, т. 3, № 11, 435—439.
  10. Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз, 1959.
  11. См. Кругликова Л. Г., Крылов В. И.
  12. См. Айзенштат В. С., Крылов В. И., Метельский А. С.
  13. Интерполирование наивысшей степени точности в задаче неопределенного интегрирования. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1951, т. 38, 97—145.
- Крылов В. И., Королев Н. И., Скобля Н. С.
1. Замечание о вычислении интеграла  $\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx$ . ДАН БССР, 1959, т. 3, № 1, 3—7.
- Крылов В. И., Лугин В. В., Янович Л. А.
1. Таблицы для численного интегрирования функций со степенными особенностями  $\int_0^1 x^\beta (1-x)^\alpha f(x) dx$ . Изд. АН БССР, 1963.
- Крылов В. И., Пальцев А. А.
1. О приближенном интегрировании функций, имеющих логарифмические особенности. Изв. АН БССР, сер. физ.-техн. наук, 1962, № 1, 13—18.
  2. О численном интегрировании функций, имеющих логарифмические особенности. Изв. АН БССР, сер. физ.-техн. наук, 1963, № 1, 14—23.
- Крылов В. И., Скобля Н. С.
1. О численном обращении преобразования Лапласа. Инж.-физ. ж., т. 4, № 4, 85—101.
- Крылов В. И., Феденко Н. П.
1. О приближенном представлении интеграла  $\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx$  механической квадратурой, содержащей значение  $f(0)$ . Изв. АН БССР, сер. физ.-техн. наук, 1962, № 2, 5—9.
- Крылов В. И., Филиппова М. А., Фролова М. Ф.
1. Вычисление неопределенного интеграла с малым числом значений интегрируемой функции. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1959, т. 53, 283—301.
- Крылов В. И., Шульгина Л. Т.
1. О сходимости одного квадратурного процесса. ДАН БССР, 1962, т. 6, 139—141, № 3.
- Крылов В. И., Янович Л. А.
1. Об условиях сходимости кубатурного процесса для непрерывно дифференцируемых функций. ДАН БССР, 1961, т. 5, 486—488.

Кузьмин Р. О.

1. О работах Стеклова по теории механических квадратур. Л., 1928, 1—8.
2. К теории механических квадратур. Изв. Ленингр. политехн. ин-та, отд. техн., естеств. и матем., 1931, т. 33, 5—14.
3. Sur la méthode de Tchebycheff pour l'évaluation approchée des intégrales. С. г. Acad. Sci., 1935, v. 201, 1094—1095.
4. Sur la méthode de quadrature de Tchebycheff. С. г. Acad. Sci., 1936, v. 202, 272—273.
5. О способе Чебышева для приближенного вычисления интегралов. Л., Сб. Ин-та инж. ж.-д. трансп. 1938, т. 132, 3—22.
6. О распределении корней полиномов, связанных с квадратурами Чебышева. Изв. АН СССР, сер. матем., 1938, № 4, 427—444.
7. О формулах механических квадратур. Тр. Ленингр. индустр. ин-та, 1939, т. 3, 16—31.
8. О формуле Чебышева для кратных интегралов. ДАН СССР, 1948, т. 61, № 3.

Кузнецов Я. Т.

1. См. Бертова Е. И., Кузнецов Я. Т., Натансон И. П., Царградский Х. А.

Ландош К.

1. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1961.

Лашенов К. В.

1. О мультипликативном методе выделения особенностей в численном интегрировании. Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, т. 183, 151—177.

Левин М.

1. Об одном способе вычисления двойных интегралов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, вып. 102, 338—341.

Ливенцов

1. О приближенных квадратурах. Матем. сб., 1878, т. 9, 569—573.

Лившиц И. М., Юркштович П. А.

1. Рационализация техники приближенного вычисления определенных интегралов по формулам численных квадратур. Сб. научн. тр. Белорусск. политехн. ин-та, 1957 (1958), т. 60, 56—68.

Лозинский С. М.

1. О формулах механических квадратур. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 4, 1940, 113—126.

Люстерник Л. А.

1. Некоторые кубатурные формулы для двойных интегралов. ДАН СССР, 1948, т. 62, № 4, 449—452.
2. Применение кубатурных формул к численному решению задачи Коши для некоторых уравнений математической физики. Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1953, № 1, 14—26.

Люстерник Л. А. и Диткин В. А.

1. Построение приближенных формул для вычисления кратных интегралов. ДАН СССР, 1948, т. 61, 441—444; см. также Изв. АН СССР, отд. техн., 1948, 1163—1168.

Мансуров Х.

1. Аналог формулы Эйлера — Маклорена для функций двух переменных. Изв. АН Уз. ССР, сер. физ.-матем. наук, 1961, № 6, 15—22.

Марон И. А.

1. См. Демидович Б. П., Марон И. А.

Медведев Г. А.

1. О вычислении сложных интегралов и некоторых трансцендентных выражений на электронной модели. Тр. Сибирск. физ.-техн. ин-та при Томском ун-те, 1961, вып. 40, 58—63.

**Метельский А. С.**

1. См. Айзенштат В. С., Крылов В. И., Метельский А. С.
2. См. Айзенштат В. С., Метельский А. С. [1].
3. См. Айзенштат В. С., Метельский А. С. [2].

**Микеладзе Ш. Е.**

1. Исследование формул механических квадратур. Тр. Тбилисского матем. ин-та, 1937, т. 2, 43—107.
2. Формулы квадратур с разностями. Сообщ. АН Груз. ССР, 1942, т. 3, 1001—1003.
3. О формулах механических кубатур, содержащих частные производные интегрируемой функции. Сообщ. АН Груз. ССР, 1943, т. 4, 297—300.
4. О вычислении интеграла функции, зависящей от параметра. Сообщ. АН Груз. ССР, 1944, т. 5, 575—583.
5. О численном интегрировании. ДАН СССР, 1945, т. 49, 166—167.
6. Новые квадратурные формулы и их приложения к интегрированию дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1948, т. 61, 789—790.
7. Численное интегрирование. УМН, 1948, т. 3, вып. 6, 3—88.
8. Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений, изд. АН СССР, М., 1951.
9. Приближенные формулы для кратных интегралов. Сообщ. АН Груз. ССР, 1952, т. 13, 193—200.
10. Численные методы математического анализа. М., Физматгиз, 1953.
11. Формулы численного дифференцирования и интегрирования для регулярной функции. Тр. 3-го Всесоюз. матем. съезда, 1956, М., АН СССР, т. 2, 151—152.
12. Квадратурные формулы для регулярной функции. Сообщ. АН Груз. ССР, 1956, т. 17, 289—296.
13. Приближенные формулы для кратного интеграла от регулярной функции. Сообщ. АН Груз. ССР, 1956, т. 17, 577—584.
14. Формулы механических квадратур для кратных интегралов. Тр. Тбилисского матем. ин-та АН Груз. ССР, 1956, т. 22, 277—299.
15. Квадратурные формулы для кратных интегралов, имеющие по возможности высшую степень точности. Сообщ. АН Груз. ССР, 1957, т. 18, 3—10.

**Милн В. Е.**

1. Численный анализ. ИЛ, М., 1951.

**Мысовских И. П.**

1. Кубатурные формулы для вычисления интегралов по гипершару. ДАН СССР, 1962, т. 147, № 3, 552—555.
2. О кубатурных формулах для круга и шара. Сб. «Методы вычислений», вып. 1, изд. Ленинградского ун-та, 1963, 3—11.
3. О построении кубатурных формул для простейших областей. Ж. вычисл. матем. и матем. физика, 1964, т. 4, № 1, 3—14.
4. О кубатурных формулах для вычисления интегралов по поверхности сферы. Сибирский матем. ж., 1964, т. 5, № 3, 721—723.
5. О методе механических квадратур для решения интегральных уравнений. Вестн. Ленинградского ун-та, 1962, № 7, 78—88.

**Назаров Н. Н.**

1. Приближенное вычисление двойных определенных интегралов. Бюлл. Ср. Азиатск. ун-та, 1925, т. 10, 91—119.

**Натансон И. П.**

1. Конструктивная теория функций. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
2. См. Бертова Е. И., Кузнецов Я. Т., Натансон И. П., Цареградский Х. А. [1].

Николаева М. В.

1. О приближенном вычислении осциллирующих интегралов. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, т. 28, 26—32.

Нужный В. В.

1. Обобщенная формула численных квадратур. Сб. научн. тр. Уманского с.-х. ин-та, 1960, вып. 12, 453—465.

Никольский С. М.

1. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами. УМН, 1950, т. 5, вып. 2, 165—177.
2. Квадратурные формулы. Физматгиз, 1958.

Пальцев А. А.

1. См. Крылов В. И., Пальцев А. А.

Панов Д. Ю.

1. О коэффициентах формулы Грегори для приближенного вычисления определенных интегралов. Уч. зап. Московского гос. ун-та, 1934, вып. 2, 67—71.

Пахарева Н. А.

1. См. Положий Г. Н., Пахарева Н. А., Степаненко И. З. и др. [1].

Пересада В. П.

1. К вопросу о вычислении интегралов в конечных пределах от функций с быстропеременной фазой. Радиотехника, 1957, т. 12, № 9, 12—19.

Погребысский И. Б.

1. О вычислении интегралов от быстроколеблющихся функций и об экспоненциальной интерполяции. Укр. матем. ж., 1955, т. 7, 291—294.

Положий Г. Н., Пахарева Н. А., Степаненко И. З. и др.

1. Математический практикум (для вузов). М., Физматгиз, 1960.

Ремез Е. Я.

1. О некоторых классах линейных функционалов в пространствах  $C_p$  и об остаточных членах формул приближенного анализа. I. Тр. Ин-та матем. АН УССР, 1939, т. 3, 21—62.
2. О некоторых классах линейных функционалов в пространствах  $C_p$  и об остаточных членах в формулах приближенного анализа. Тр. Ин-та матем. АН УССР, 1940, т. 4, 47—82.
3. Об остаточных членах некоторых формул приближенного анализа. ДАН СССР, 1940, т. 26, 130—134.
4. Некоторые вопросы структуры формул механических квадратур, могущих служить для двухсторонней численной оценки решений дифференциальных уравнений. Укр. матем. ж., 1958, т. 10, № 4, 413—418.

Робинсон Г.

1. См. Уиттекер Э., Робинсон Г.

Саникидзе Д.

1. О некоторых квадратурных формулах, содержащих производные интегрируемой функции. Сб. научн. тр. студ. Тбилисского ун-та, 1958, № 8, 7—14.

Севастьянов Н. Б.

1. Об одной формуле приближенного интегрирования. Тр. Калининградского техн. ин-та рыбн. пром. и хоз., 1960, вып. 11, 97—102.

Сенютович В. А.

1. О приближенном вычислении двойных интегралов. Тр. Ленинградского техн. ин-та холодильн. пром., 1956, т. 14, 324—330. \*

Скарборо Д.

1. Численные методы математического анализа. М.—Л., 1934.

Скобля Н. С.

1. См. Крылов В. И., Королев Н. И., Скобля Н. С.
2. См. Крылов В. И., Скобля Н. С.
3. О вычислении интеграла Меллина. ДАН БССР, 1961, т. 5, 142—145.

Смирнов В. Н.

1. Увеличение точности механических квадратур для интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} f(x) dx, \quad \int_0^{\infty} x^S e^{-x} f(x) dx.$$

Автореф. дисс. канд. физ.-матем. наук, ЛГУ, 1953.

2. Увеличение точности механических квадратур типа Чебышева — Эрмита, Чебышева — Лягерра. Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1955, вып. 5, 32—61.
3. О квадратурных формулах Гаусса. Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1956, вып. 6, кн. 2, 235—245.
4. Новая формула механических квадратур. Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1957, вып. 7(а), 77—85.

Смоляк С. А.

1. Интерполяционные и квадратурные формулы на классах  $W_s^\alpha$  и  $E_s^\alpha$ . ДАН СССР, 1960, т. 131, № 5, 1028—1031.
2. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций. ДАН СССР, 1963, т. 148, № 5, 1042—1045.

Соболев С. Л.

1. См. Еругин Н. П., Соболев С. Л.
2. О формулах механических кубатур в  $n$ -мерном пространстве. ДАН СССР, 1961, т. 137, № 3, 527—530.
3. Различные типы сходимости кубатурных и квадратурных формул. ДАН СССР, 1962, т. 146, № 1, 41—43.
4. О кубатурных формулах на сфере, инвариантных при преобразованиях конечных групп вращений. ДАН СССР, 1962, т. 146, № 2, 310—313.
5. О числе узлов кубатурных формул на сфере. ДАН СССР, 1962, т. 146, № 4, 770—773.
6. О формулах механических квадратур на поверхности сферы. Сибирский матем. ж., 1962, т. 3, № 5, 769—796.

Соболь И. М.

1. Многомерные интегралы и метод Монте-Карло. ДАН СССР, 1957, т. 114, № 4, 706—709.
2. Точная оценка погрешности многомерных квадратурных формул для функций класса  $S_p$ . ДАН СССР, 1960, т. 132, № 5, 1041—1044.
3. Точная оценка погрешности многомерных квадратурных формул для функций классов  $\tilde{W}_1$  и  $\tilde{H}_1$ . Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 2, 208—216.
4. О вычислении бесконечномерных интегралов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 5, 917—922.

Солодов В. М.

1. О вычислении кратных интегралов. ДАН СССР, 1959, т. 127, № 4, 753—756.

Сонин Н. Я.

1. О приближенном вычислении определенных интегралов и входящих при этом вычислениях целых функций. Варшавские универ. известия, 1887, т. 1, 1—76.

Стеклов В. А.

1. О приближенном вычислении определенных интегралов при помощи формул механических квадратур. Сходимость формул механических квадратур. Изв. Росс. А. Н., 1916, № 3, 169—186.
2. Sur l'approximation des fonctions a l'aide des polynômes de Tchébyscheff et sur les quadratures, I, II, III. Изв. Росс. А. Н., 1917, т. II, 187—218, 535—566, 687—718.
3. Quelques remarques complémentaires sur les quadratures. Изв. Росс. А. Н. (6), 1918, т. 12, 587—614.

4. Remarques sur les quadratures. Изв. Росс. А. Н. (6), 1918, т. 12, 99—118.
  5. Sur les quadratures. Note I. Изв. Росс. А. Н. (6), 1918, т. 12, 1859—1900.
  6. Sur les quadratures. Note II. Изв. Росс. А. Н. (6), 1919, т. 13, 65—96.
  7. Sopra la teoria della quadrature dette meccaniche. Atti Accad. Lincei, 1923, 32: 1, 320—326.
- Степаненко И. З.**
1. См. Положий Г. Н., Пахарева Н. А., Степаненко И. З. и др. [1].
- Турецкий А. Х.**
1. Об оценках приближений квадратурными формулами для функций, удовлетворяющих условию Липшица. УМН, т. 6, вып. 5, 1951, 166—171.
  2. Об оценке приближений формулами квадратур для аналитических функций. Уч. зап. Белорусского ун-та, 1954, № 16, 32—40.
  3. О формулах квадратур, точных для тригонометрических полиномов. Уч. зап. Белорусского ун-та, сер. матем., 1959, вып. 1(49), 31—54.
  4. Замечания к работе Л. А. Чаналова «Общие квадратурные формулы типа Гаусса». Уч. зап. Белорусского ун-та, сер. матем., 1959, 1(49), 19—26.
  5. О квадратурных формулах с четным числом узлов, точных для тригонометрических полиномов. ДАН БССР, 1960, т. 6, № 9.
  6. О существовании квадратурных формул Чебышева для бесконечного интервала. Вестн АН БССР, № 2, 1962, сер. физ.-техн. наук.
- Уиттекер Э., Робинсон Г.**
1. Математическая обработка результатов наблюдений. М.—Л., 1935.
- Феденко Н. П.**
1. Об асимптотических значениях коэффициентов квадратурной формулы Котеса. ДАН БССР, 1962, т. 6, № 1, 7—8.
  2. См. Крылов В. И., Феденко Н. П.
- Филиппова М. А.**
1. См. Крылов В. И., Филиппова М. А., Фролова М. Ф.
- Фок В. А.**
1. Об остаточном члене некоторых формул квадратур. Изв. АН СССР, сер. физ.-матем., 1932, 419—448.
- Франк М. Л.**
1. Метод приближенного вычисления двукратных интегралов, распространенных по площади прямоугольника. Тр. Ленингр. индустр. ин-та, разд. физ.-матем. наук, 1938, вып. 1, № 5.
- Фролова М. Ф.**
1. См. Крылов В. И., Филиппова М. А., Фролова М. Ф. [1].
- Фрумкин П. Б.**
1. Приближенное вычисление сумм отрезков ряда Фурье. Тр. Ленингр. ин-та авиац. приборостр., 1956, вып. 14, 71—78.
- Харадзе А. К.**
1. Об одном обобщении формулы Симпсона. Тр. Тбилисского ун-та, 1955, т. 56, 23—28.
- Хейфец Б. С.**
1. Применение приближенных формул для вычисления кратных интегралов в инженерной практике. Изв. АН СССР, отд. техн. н., 1954, № 3, 39—48.
- Чаналов Л.**
1. Об обобщенной квадратурной формуле. ДАН СССР, 1949, т. 68, 233—236.
- Чебышев П. Л.**
1. О квадратурах. Полн. собр. соч., т. 3, Изд. АН СССР, 1948, 49—62; см. также J. Math. Pures Appl. (2), 1874, v. 19, 19—34.
- Ченцов Н. Н.**
1. О квадратурных формулах для функций бесконечно большого числа переменных. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, 418—424.

- Четаев Н. Г.  
1. К вопросу об оценках приближенных интегрирований. Прикл. матем. и механ., 1957, т. 21, № 3, 419—423.
- Цареградский Х. А.  
1. См. Бертова Е. И., Кузнецов Я. Т., Натансон И. П., Цареградский Х. А.
- Шайдаева Т. А.  
1. Квадратурные формулы с наименьшей оценкой остатка для некоторых классов функций. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1959, т. 53, 313—341.
- Шарыгин И. Ф.  
1. О применении теоретико-числовых методов интегрирования в случае непериодических функций. ДАН СССР, 1960, т. 132, № 1, 71—74.  
2. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 2, 370—376.
- Шульгина Л. Т.  
1. См. Крылов В. И., Шульгина Л. Т.
- Эзрохи И. А.  
1. Функционально-аналитическая разработка общего метода построения остаточных членов для различных линейных формул многомерного приближенного анализа. Уч. записки Киевск. пед. ин-та, физ.-матем. сер., 1954, т. 16, № 5, 41—87.  
2. Общие формы остаточных членов линейных формул многомерного приближенного анализа. I. Матем. сб., 1956, т. 38 (80), 389—416.  
3. Общие формы остаточных членов линейных формул многомерного приближенного анализа. II. Матем. сб., 1957, т. 43 (85), 9—28.  
4. См. Эзрохи Т. Г., Эзрохи И. А.
- Эзрохи Т. Г., Эзрохи И. А.  
1. О представлении остаточных членов некоторых  $n$ -мерных формул приближения. Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, т. 19, 178—204.
- Эзрохи Т. Г.  
1. Общая форма остаточных членов некоторых приближенных формул в  $n$ -мерном пространстве. Докл. АН УССР, 1955, т. 3, 174—179.
- Юркштович П. А.  
1. См. Лившиц И. М., Юркштович П. А.
- Янович Л. А.  
1. Сходимость кубатурного процесса для абсолютно непрерывных функций. ДАН БССР, 1962, т. 6, № 2, 77—79.  
2. См. Крылов В. И., Янович Л. А.
- Abrahamowitz M.  
1. On the practical evaluation of integrals. J. Soc. Indust. Appl. Math., 1954, v. 2, 20—35.
- Achueser N. I. and Krein M. G.  
1. Sur une formule de quadrature de Tchebicheff. C. R. Acad. Sci., Paris, 1935, v. 200, 890—892.
- Adachi, Ryuzo  
1. Approximate formulas for definite integrals and differential coefficients. Kumatamoto J. Sci., A, v. 2, 1955, 196—209.
- Ahlin A. C.  
1. On error bounds for Gaussian cubature. SIAM Rev., 1962, v. 4, № 1, 25—39.
- Aitken A. C. and Frewin G. L.  
1. The numerical evaluation of double integrals. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1923, v. 42, 2—13.
- Ajne Björn, Dalenius Tore.  
1. Några tillämpningar av statistiska idéer på numerisk integration. Nord. Mat. Tidskr., 1960, v. 8, № 4, 145—152, 198.

- Albrecht J.**  
1. Formeln zur numerischen Integration über Kreisbereiche. Z. Angew. Math. Mech., 1960, v. 40, № 10—11, 514—517.
- Albrecht J. and Collatz L.**  
1. Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale. Z. Angew. Math. Mech., 1958, v. 38, 1—15.
- Ambler, Ole**  
1. A set of formulas for numerical integration. Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, 1952, v. 25, 38—41.
- Angelescu A.**  
1. Sur des polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approché des intégrales multiples. Thesis, Univ. of Paris, 1916.
- Angervo J. M.**  
1. Einige Vereinfachungen bei numerischer Quadratur und Differentiation. Jber. Deutsch. Math. Verein., 1932, v. 42, 144—159.
- Appel P.**  
1. Sur une classe de polynomes à deux variables et le calcul approché des intégrales doubles. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, v. 4, 1890, p. H. 1 — H. 20.
- Ascodi G.**  
1. Un'osservazione sulle formule di quadratura. Boll. Un. Mat. Ital. (3), 2, 212—216, 1947.
- Barrett W.**  
1. On the remainders of numerical formulae, with special reference to differentiation formulae. J. London. Math. Soc., v. 27, 1952, 456—464.  
2. On the remainder term in numerical integration formulae. J. London. Math. Soc., v. 27, 1952, 465—470.  
3. Convergence properties of Gaussian quadrature formulae. Comput. J., 1961, 3, № 4, 272—277.
- Bartholomew G. E.**  
1. Numerical integration over the triangle. Math. Tables Aids Comput., v. 13, 1959, 295—298.
- Bass J. and Guilloud J.**  
1. Méthode de Monte-Carlo et suites uniformément denses. Chiffres, v. 1, 1958, 149—155.
- Beard R. E.**  
1. Some notes on approximate product integration. J. Inst. Actuar., v. 73, 1947, 356—403.
- Belgrano Bremard J. C.**  
1. Acootaciones de los restos en las formulas de Euler — Maclaurin. Rev. Mat. Hisp.- Amer., 1953, 13, № 5—6, pp. 320—327.
- Bergeon R., Ceschino F., Hennebutte L.**  
1. Calcul d'une intégrale triple sur machine automatique numérique. Mém. artill. franc., 1956, 30, № 3, 695—717.
- Bertiau F.**  
1. New Numerical Integration Methods. Simon Stevin, 1951, v. 29, № 4, 196—202.
- Bickley W. G.**  
1. Formulae for numerical integration. Math. Gaz., v. 23, 1939, 352—359.  
2. Finite difference formulae for the square lattice. Quart. J. Mech. and Appl. Math., v. 1, 1948, 35—42.
- Biermann, Otto.**  
Vorlesungen über Mathematische Näherungsmethoden. Vieweg, Braunschweig, 1905.
- Bilharz H.**  
1. Über die Gaussche Methode zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale. Math. Nachr., v. 6, 1951, 171—192.  
2. Bemerkung zur genäherten Quadratur. Arch. Math., v. 3, 1952, 251—256.



**Billings C.**

1. См. Riley J. A. and Billings C.

**Birindelli C.**

1. Sul calcolo numerico degli integrali multipli. *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8), v. 11, 1951, 40—44.
2. Su nuove formule interpolatorie del Picone per funzioni in piu variabili e loro contributo al calcolo numerico degli integrali multipli. *Compositio Math.*, v. 10, 1952, 117—167.

**Birkhoff G. and Young D.**

1. Numerical quadrature of analytic and harmonic functions. *J. Math. Physics*, 1950, v. 29, 217—221.

**Blanc Ch.**

1. Evaluation stochastique de l'erreur dans les formules d'intégration numérique. *C. R. Acad. Sci., Paris*, v. 233, 1951, 726—727.

**Blanc Ch. and Liniger W.**

1. Stochastische Fehlerauswertung bei numerischen Methoden. *Z. Angew. Math., Mech.*, v. 35, 1955, 121—130.

**Blanch G. and Rhodes I.**

1. Seven point Lagrangian integration formulas. *J. Math. Phys.*, v. 22, 1943, 204—207.

**Blatter Ch.**

1. Eine Modifizierung der Simpsonschen Regel. *Elem. Math.*, v. 11, 1956, 56—59.

**Boivin G.**

1. См. Lansraux G., Boivin G.

**Boley B. A.**

1. A method for the numerical evaluation of certain infinite integrals. *Math. Tables Aids Comput.*, v. 11, 1957, 261—264.

**Bomhard Badovinac Marijan.**

1. Nuevas fórmulas para el cálculo de áreas. «Ingeniería y archit», 1961, v. 14, № 160, 22, 24—31.

**Bonfigli C.**

1. Formula di integrazione approssimata adatta per la parabola. *Riv. Catasto e serv. Tecn. erariali*, 1954, 9, № 2, 114—116.

**Bottema O.**

1. Simpson's method of approximation. *Nieuw Arch. Wisk.* (2), v. 21, 1941, 111—118.

**Bourget H.**

1. Sur une extension de la méthode de quadrature de Gauss. *C. R. Acad. Sci., Paris*, v. 126, 1898, 634—636.

**Bouziat J.**

1. Sur l'intégration numérique approchée par la méthode de Gauss généralisée et sur une extension de cette méthode. *C. R. Acad. Sci., Paris*, v. 229, 1949, 1201—1203.

**Boxer R.**

1. См. Thaler S., Boxer R.

**Bridgland T. E.**

1. A note on numerical integrating operators. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, v. 6, 1958, 240—256.
2. A note on numerical integrating operators. II. *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, 1960, 8, № 3, 531—536.

**Brock P. and Murray F. J.**

1. The use of exponential sums in step by step integration. *Math. Tables Aids Comput.*, v. 6, 1952, 63—78, 138—150.

**Brouwer D.**

1. On the accumulation of errors in numerical integration. *Astr. J.*, v. 46, 1937, 149—153.

## Brun V.

1. A generalization of the formula of Simpson for non-equidistant ordinates. Nord. mat. tidskr., 1953, v. 1, 10—15.
2. An application of a «Carpenter's curve» to Simpson formulas. Abstr. Short commun. Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 157.

## Buckingham R. A.

1. Numerical methods. Pitman, London, 1957.

## Bückner H.

1. Bemerkungen zur numerischen Quadratur I. Math. Nachr., v. 3, 1950, 142—145.
2. Bemerkungen zur numerischen Quadratur II. Math. Nachr., v. 3, 1950, 146—151.

## Bukovics E.

1. Beiträge zur numerischen Integration, I. Monatsh. Math., 1953, v. 57, № 3, 217—245.
2. Beiträge zur numerischen Integration, II. Monatsh. Math., 1954, v. 57, № 4, 333—350.
3. Beiträge zur numerischen Integration, III. Monatsh. Math., 1954, v. 58, № 4, 258—265.

## Burnett D.

1. The numerical calculation of  $\int_0^{\infty} x^m e^{-x} f(x) dx$ . Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 33, 1937, 359—362.

## Burnside W.

1. An approximate quadrature formula. Messenger of Math., 1908, v. 37, 166—167.

## Bushkowitz A. V.

1. См. Shohat J. A., Bushkowitz A. V.

## Butler R.

1. On the evaluation of  $\int_0^{\infty} (\sin^m t)/t^m dt$  by the trapezoidal rule. Amer. Math. Monthly, 1960, v. 67, № 6, 566—569.

## Butzer P. L.

1. Fourier-transform methods in the theory of approximation. Arch. Rational Mech. and Analysis, 1960, v. 5, № 5, 390—415.

## Cameron R. H.

1. A Simpson's rule' for the numerical evaluation of Wiener's integrals in function space. Duke Math. J., v. 18, 1951, 111—130.

## Cameron R. H. and Graves R. E.

1. Additive functionals on a space of continuous functions. I. Trans. Amer. Math. Soc., 1951, v. 70, 160—176.

## Capuano R.

1. См. Salzer H. E., Zucker R. and Capuano R.

## Carnahan P. D. M.

1. См. Greenwood R. E., Carnahan P. D. M. and Nolley N.

## Carrus P.

1. См. Kopal Z., Carrus P. and Kavanagh K. E.

## Cassina U.

1. Sulla formula sommatória di Euler col resto di Malmsten. Scritti mat. onore Filippo Sibirani, Bologna, 1957, 49—61.

## Cerrillo M.

1. On the evaluation of integrals of the type  $f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \frac{1}{2\pi i} \int f(s) e^{w(s, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)} ds$  and the mechanism of formation of

- transient phenomena. 2a. Elementary introduction to the theory of the saddlepoint method of integration. Res. Lab. Electronics, Massachusetts Inst. Technology, Cambridge, Mass., Techn. Rept., 1950 (1954), № 55: 2a. v. 4.
- Cerulus F. and Hagedorn R.**  
1. A Monte-Carlo method to calculate multiple phase space integrals, I, II. Nuovo Cimento (10), v. 9, 1958, Supplemento, 646—677.
- Chako N.**  
1. Calcul d'intégrales doubles pour de grandes valeurs d'un paramètre. C. R. Acad. Sci., 1958, v. 247, № 6, 637—639.
- Chakrabarti M. C.**  
1. Remainders in quadrature formulae. Bull. Calcutta Math. Soc., 1947, v. 39, 119—126.
- Christoffel E. B.**  
1. Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben. J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal), v. 55, 1858, 61—82.
- Ciorănescu N.**  
1. O nouă formulă de medie și aplicațiile, ei la cuadraturile mecanice. Gaz. mat. și fiz., 1953, v. 5, № 9, 410—414.
- Clausen T.**  
1. Über mechanische Quadraturen. J. Reine Angew. Math., 1830, v. 6, 287—289.
- Clenshaw C. W., Curtis A. R.**  
1. A method for numerical integration on an automate computer. Numerische Math., 1960, v. 2, № 4, 197—205.
- Clerk — Maxwell J.**  
1. On approximate multiple integration between limits of summation. Cambridge Phil. Soc. Proc., 1877, v. 3, 39—47.
- Collatz L.**  
1. Numerische und graphische Methoden. Handbuch der Physik. Bd. 2. Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer, 1955, 349—470.  
2. См. Albrecht J. and Collatz L.
- Cooke J. C.**  
1. Osculatory interpolation and integration. J. Math. and Phys., 1957, v. 35, № 4, 394—400.
- Cotes R.**  
1. Über die Newtonsche Differential — methode. 1722.
- Coțiu A.**  
1. Asupra formulei de cuadratură a lui Hardy. Gáz. mat. și fiz., 1958, v. A10, № 7, 404—412.  
2. O observare asupra unei formule de cuadratură cu 4 noduri. Gáz. mat. și fiz., 1959, v. A11, № 5, 281—285.  
3. Asupra unei formule de cuadratură cu două noduri duble. Lucrări științ. Inst. politehn. Cluj, 1959, 41—48.
- Creely J.**  
1. Some applications of finite differences. Math. Mag., 1953, v. 26, № 4, 189—197.
- Csoma Z.**  
1. Angenäherte Quadratur im Falle ungleicher Teilintervalle. Period. polytechn. Electr. Engng., 1960, v. 4, № 1, 31—36.
- Curtis A. R.**  
1. См. Clenshaw C. W., Curtis A. R.
- Dahlquist G.**  
1. The Monte-Carlo method. Nordisk. Mat. Tidskr., 1954, v. 2, 27—43.
- Dalenius T.**  
1. См. Ajne Björn; Dalenius T.

Danford M. B.

1. См. Greenwood R. E., Danford M. B.

Daniell P. J.

1. Remainders in interpolation and quadrature formulae. *Math. Gaz.*, 1940, v. 24, 238—244.

Das S. C.

1. The numerical evaluation of a class of integrals. II. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1956, v. 52, 442—448.

Davis P. J.

1. Errors of numerical approximation for analytic functions. *J. Rational Mech. and Analysis*, 1953, v. 2, № 2, 303—313.
2. On simple quadratures. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 4, 1953, 127—136.
3. On a problem in the theory of mechanical quadratures. *Pacif. J. Math.*, 1955, v. 5, Suppl. № 1, 669—674.
4. On the numerical integration of periodic analytic functions. В сб. «On numerical approximation». (Sympos., Wisconsin, 1958), 1959, 45—59.

Davis P. J., Rabinowitz P.

1. On the estimation of quadrature errors for analytic functions. *Math. Tables Aids Comput.*, 1954, v. 8, № 48, 193—203.
2. Abscissas and weights for Gaussian quadratures of high order. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, v. 56, 1956, 35—37.
3. Some Monte Carlo experiments in computing multiple integrals. *Math. Tables Aids Comput.*, v. 10, 1956, 1—8.
4. Additional abscissas and weights for Gaussian quadratures of high order: values for  $n = 64, 80$  and  $96$ . *J. Res. Nat. Bur. Standards*, 1958, v. 60, № 6, 613—614.
5. Some geometrical theorems for abscissas and weights of Gauss type. *J. Math. Anal. Appl.*, 1961, v. 2, 428—437.

Dengler M.

1. Numerische Lösung des Integrals  $\int_C f(u) \{w(u) - w(q)\}^2 du$ . *Z. Angew. Math. Mech.*, 1954, v. 34, № 12, 471—474.

Deruyts J.

1. Sur le calcul approché de certaines integrales definies. *Bull. de l'Acad. de Belgique*, 1886, t. 2, 301—311.

Didonato A. R.; Jarnagin M. P.

1. Integration of the general bivariate Gaussian distribution over an offset circle. *Math. Comput.*, 1961, v. 15, 375—382.

Dieulefait C. E.

1. Nuevos principios en el problema de la cuadratura mecanica. *An. Soc. cient. argent.*, 1958, v. 166, № 1—2, 23—25.
2. Sobre la convergencia de la cuadratura mecanica. *Math. notae.*, 1959, v. 17, № 1—2, 37—42.

Dijksterhuis E. J.

1. Die Integrationsmethoden von Archimedes. *Nordisk Mat. Tidskr.*, v. 2, 1954, 5—23.

Dingle R. B.

1. The evaluation of integrals containing a parameter. *Appl. Sci. Res.*, 1955, v. B4, № 6, 401—410.

Duijvestijn A. J. W. and Berghuis J.

1. The computation and the expansion of some triple integrals originating from the theory of cosmic rays. *Math. Centrum, Amsterdam, Rekenafdeling, rep. v. R261*, 1955.

- D w i g h t H. B.  
 1. Tables of integrals and other mathematical data. The MacMillan Company, New York, 1961.
- E l t e r m a n n H.  
 1. Ein Beitrag zur numerischen Integration bei nicht gleichabständigen Abszissen und Berechnung von Kurvenintegralen. Z. Angew. Math. Mech., 1953, v. 33, № 8/9, 254—255.
- E n g v a l l A.  
 1. En formel för beräkning av Gauss'felintegral. 12-te Skand. matematiker kongr. Lund, 1953, Lund, 1954, 40—41.
- E n l o w E. R.  
 1. Quadrature of the normal curve. Ann. Math. Statist., v. 5, 1934, 136—145.
- E w i n g G. M.  
 1. On approximate cubature. Amer. Math. Monthly, v. 48, 1941, 134—136.
- E x n e r G.  
 1. См. Hirschleber A., Exner G.
- F a v a r d J.  
 1. Sur les quadratures mécaniques. Enseign. math., 1957, v. 3, № 4, 263—275.
- F e t t i s H. E.  
 1. Numerical calculation of certain definite integrals by Poisson's Summation formula. Math. Tables Aids Comput., 1955, v. 9, № 51, 85—92.  
 2. Lommel-type integrals involving three Bessel functions. J. Math. Phys., 1957, v. 36, 88—95.  
 3. On the calculation of the function  $j_0(z, \theta)$  for large values of  $z$ . J. Math. Phys., 1957, v. 36, № 3, 279—283.  
 4. Further remarks concerning the relative accuracy of Simpson's and the trapezoidal rule for a certain class of functions. Z. Angew. Math. Mech., 1958, v. 38, № 3—4, 159—160.
- F i l o n L. N. G.  
 1. On a quadrature formula for trigonometric integrals. Proc. Roy. Soc. Edin., 1928, 49, 38—47.
- F i s h m a n H.  
 1. Numerical integration constants. Math. Tables Aids Comput., 1957, v. II, 1—9.
- F l i n n E. A.  
 1. A modification of Filon's method of numerical integration. J. Assoc. Comput. Machinery, 1960, v. 7, № 2, 181—184.
- F o r s y t h e G. E.  
 1. Round — off errors in numerical integration on automatic machinery. Bull. Amer. Math. Soc., 1950, v. 56, 61—62.
- F r a m e J. S.  
 1. Numerical integration. Amer. Math. Monthly, 1943, v. 50, 244—250.
- F r e w i n G. L.  
 1. См. Aitken A. G. and Frewin G. L.
- G a r f a t h H. L.  
 1. Tchebycheff's mean value theorem and some results derivable therefrom. J. Inst. Actuaries Students' Soc., 1947, v. 7, 70—80.
- G a r n e a E. G.  
 1. On a new application of Jacobi polynomials in connection with the mean value theorem. Bull. Amer. Math. Soc., 1943, v. 49, 541—548.
- G a u s s C. F.  
 1. Methodus nova integralium valores per approximationen inveniendi. Werke, 1866, v. 3, 163—196.

## Gautschi W.

1. Exponential integral  $\int_1^{\infty} e^{-xt} t^{-n} dt$  for large values of  $n$ . J. Res. Nat. Bur. Stand., 1959, v. 62, № 3, 123—125.
2. Recursive computation of the repeated integrals of the error function. Math. Comput., 1961, v. 15, 227—232.

## Gawlik H. J.

1. Zeros of Legendre polynomials of orders 2—64, and weight coefficients of Gauss quadrature formulae. Armament Research and Development Establishment, Memorandum (B) 77/58, Fort Halstead, Kent, 1958.

## Gebauer J.

1. Sur les séries applicables dans l'intégration approximative. Casopis Pěst. Mat. Fys., 1934, v. 63, 152—166.

## Georgiev G. I.

1. Formulas of mechanical quadrature for polynomials of two real variables. Univ. d'Etat Varna «Kiril Slavianobalgarski», Fac. Tech. Constructions, Annuaire 3, 1947—48, 1—46 (болгарск.).
2. Formulas of mechanical quadrature with a minimal number of terms for triple integrals. Univ. d'Etat Varna «Kiril Slavianobalgarski», Fac. Tech. Constructions, Annuaire 3, 1947—48, 97—123 (болгарск.).

## Ghizzetti A.

1. Une méthode générale pour obtenir des formules de quadrature. Proc. Internat. Congr. Math., 1954, Amsterdam. v. I, Groningen — Amsterdam, 1957 (454).
2. Sulla convergenza dei procedimenti di calcolo, degli integrali definiti forniti dalle formule di quadratura. Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, v. 26, 201—222.
3. Sulle formule di quadratura. Rend. Sem. Mat. Fis., Milano, 1954—1955, v. 26, 1—16, 45—60.
4. Sulle formule di cubatura relative ad intervalli piani. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), 14, 1960, 237—268.

## Gidley J. L., Rase H. F.

1. Numerical integration: a tool for chemical engineers. J. Chem. Educ., 1955, v. 32, № 10, 535—538.

## Giraud G.

1. Sur deux formules applicables au calcul numérique des intégrales. C. R. Acad. Sci. Paris, 1924, v. 178, 2227—2229.

## Glover J. W.

1. Quadrature formulae when ordinates are not equidistant. Proc. Internat. Math. Congress, Toronto, 1924, v. 2, 831—835.

## Godwin H. J.

1. A method for the evaluation of  $\int_0^{\infty} x^m \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2/2) dt \right]^n dx$ . Quart. J. Mech. Appl. Math., 1952, v. 5, 109—115.

## Golab S.

1. Contribution à la formule Simpsonienne de quadrature approchée. Ann. Polon. Math., 1954, v. I, № 1, 166—175.

## Golab S., Olech C.

1. Contribution à la théorie de la formule Simpsonienne des quadratures approchées. Ann. Polon. Math., 1954, v. I, № 1, 176—183.

## Goldstine H. H.

1. On the relation between machine developments and numerical analysis. Bonn. Math. Schr., 1957, № 2, 1—7.

Golomb M. and Weinberger H. F.

1. Optimal approximation and error bounds. On Numerical Approximation, R. E. Langer, ed., Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1959, 117—190.

Goodwin E. T.

1. The evaluation of integrals of the form  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx$ . Proc. Cambridge Philos. Soc., 1949, v. 45, 241—245.

2. Note on the computation of certain highly oscillatory integrals. Math. Tables Aids Comput., 1956, v. 10, 96—97.

Greenwood R. E.

1. Numerical integration for linear sums of exponential functions. Ann. Math. Stat., 1949, v. 20, 608—611.

Greenwood R. E., Carnahan P. D. and Nolley Y. W.

1. Numerical integration formulas for use with weight functions  $x^2$  and  $x/\sqrt{1-x^2}$ . Math. Tables Aids Comput., 1959, v. 13, 37—40.

Greenwood R. E., Danford M. B.

1. Numerical integration with a weight function  $x$ . J. Math. Phys., 1949, v. 28, 99—106.

Greenwood R. E. and Miller J. J.

1. Zeros of the Hermite polynomials and weights for Gauss' mechanical quadrature formula. Bull. Amer. Math. Soc., 1948, v. 54, 765—769.

Greppi H.

1. An example of numerical integration. Math. Notae, 1954, v. 14, 64—72.

Grosswald E.

1. Transformations useful in numerical integration methods. J. Soc. Indust. Appl. Math., 1959, v. 7, 76—84.

Gurk H. M.

1. The use of stability charts in the synthesis of numerical quadrature formulae. Quart. Appl. Math., 1955, v. 13, 73—78.

Hagedorn R.

1. Cm. Cerulus F. and Hagedorn R.

Halton J. H.

1. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. Numer. Math., 1960, v. 2, 84—90.

Halton J. H. and Handscomb D. C.

1. A method for increasing the efficiency of Monte Carlo integration. J. Assoc. Comput. Mach., 1957, v. 4, 329—340.

Hammer P. C.

1. The midpoint method of numerical integration. Math. Mag., 1957—58, v. 31, 193—195.

2. Numerical evaluation of multiple integrals. В сб. «On Numerical Approximation», R. E. Langer, ed., Univ. of Wisconsin press, Madison, 1959, 99—115.

Hammer P. C., Marlowe O. J., Stroud A. H.

1. Numerical integration over simplexes and cones. Math. Tables Aids Comput., 1956, v. 10, 130—137.

Hammer P. C., Stroud A. H.

1. Numerical integration over simplexes. Math. Tables Aids Comput., 1956, v. 10, 137—139.

2. Numerical evaluation of multiple integrals II. Math. Tables Aids Comput., 1958, v. 12, 272—280.

Hammer P. C. and Wicke H. H.

1. Quadrature formulas involving derivatives of the integrand. Math. Comput., 1960, v. 14, 3—7.

- Hammer P. C. and Wymore A. W.  
1. Numerical evaluation of multiple integrals I. Math. Tables Aids Comput., 1957, v. 11, 59—67.
- Hämmerlin G.  
1. Zur numerischen Integration periodischer Funktionen. Z. Angew. Math. Mech., v. 39, 1959, 80—82.
- Hammersley J. M.  
1. Lagrangian integration coefficients for distance functions taken over right circular cylinders. J. Math. Physics, 1952, v. 31, 139—150.
- Hammersley J. M. and Morton K. W.  
1. A new Monte Carlo technique: antithetic variates. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, v. 52, 449—475.
- Handscomb D. C.  
1. См. Halton J. H. and Handscomb D. C.
- Hardy G. F.  
1. On some formulas of approximate summation. J. Inst. Actuar., 1883, v. 24, 95—110.
- Harper W. M.  
1. Quadrature formulas for infinite integrals. Math. Comput., 1962, v. 16, № 78, 170—175.
- Hartley H. O.  
1. Table for numerical integration at non-equidistant argument steps. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, v. 48, 435—442.
- Hartley H. O. and Khamsi S. H.  
1. A numerical solution of the problem of moments. Biometrika, 1947, v. 34, 340—351.
- Hartree D. K.  
1. См. Huskey H. D., Hartree D. K.
- Haselgrove C. B.  
1. Numerical integration and Diophantine approximation. Abstr. Short commun. Internat. Congress Math. in Edinburgh., Univ. Edinburgh, 1958, 30.  
2. A method for numerical integration. Math. of Comput., 1961, v. 15, 323—337.
- Heemert A.  
1. On the numerical evaluation of certain types of integrales. Nat. Luchtvaartlab. Amsterdam, Rep. F. 55, 1949, 1—21.
- Hennequin A.  
1. Sur le calcul approché des intégrales doubles. Rev. math. spéc., 1962, v. 72, № 12, 289—290.
- Heidam K. Z.  
1. An approximation formula for the determination of areas. Nordisk Mat. Tidskr., 1955, v. 3, 107—110.
- Hildebrand F. B.  
1. Introduction to Numerical Analysis. McGraw-Hill, New York, 1956.
- Hirschleber A., Exner G.  
1. Genäherte Berechnung Stieltjesscher Integrale mit Auswahlordinatenverfahren. MT — Mitt., 1957, v. 4, 77—88.
- Holladay J. C.  
1. A smoothest curve approximation. Math. Tables Aids Comput., 1957, v. 11, 233—243.
- Hsu L. C.  
1. Note on Maréchal's integral approximation. Acta Math. Sinica, 1953, v. 3, 148—153.  
2. A new method of approximate evaluation of multiple integrals. Acta. Sci. Natur., 1956, № 1, 51—65.  
3. A new method of approximate evaluation of multiple integrals. II. Acta Sci. Natur., 1956, № 2, 91—109.



4. A general approximation method of evaluating multiple integrals. *Tohoku Math. J.*, 1957, v. 9, № 1, 45—55.
  5. A refinement of the line integral approximation method and its application. *Sci. Record (N. S.)*, v. 2, 1958, 193—196.
  6. Some approximation formulas for the integration of violently oscillating functions and of periodic functions. *Sci. Record*, 1959, v. 3, № 11, 544—549.
  7. Concerning the numerical integration of periodic functions of several variables. *Acta Sci. Math. Szeged*, v. 20, 1959, 230—233.
  8. A method for finding precise error bounds of numerical integration formulas in higher dimensions. *Acta Math. Acad. Scient. Hung.*, 1960, v. 11, 163—171.
  9. Note on the numerical integration of periodic functions and of partially periodic functions. *Numer. Math.*, 1961, v. 3, 169—173.
- H s u L. C. and L i n L. W.
1. Two new methods for the approximate calculation of multiple integrals. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 1958, v. 9, 279—290.
  2. Two new methods concerning the approximate calculation of multiple integrals. *Sci. Rec.*, 1958, v. 2, № 7, 215—219.
- H u a L., W a n g J.
1. Remarks concerning numerical integration. *Sci. Record*, 1960, v. 4, № 1, 8—11.
- H u r w i t z H., P f e i f f e r R. A. and Z w e i f e l P. F.
1. Numerical quadrature of Fourier transform integrals. II. *Math. Tables Aids Comput.*, v. 13, 1959, 87—90.
- H u r w i t z H. and Z w e i f e l P. F.
1. Numerical quadrature of Fourier transform integrals. *Math. Tables Aids Comput.*, 1956, v. 10, 140—149.
- H u s k e y H. D.
1. On the precision of a certain procedure of numerical integration. With an appendix by Douglas R. Hartree. *J. Research Nat. Bur. Stand.*, 1949, v. 42, 57—62.
- I h m P.
1. Numerical evaluation of certain multivariate normal integrals. *Sankhya, Indian J. Statist.*, 1959, v. 21, 363—366.
- I o n e s c u D. V.
1. Formule de cubatură în care domeniul de integrare este un triunghi oarecare. *Bull. științ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. si fiz.*, 1953, v. 5, № 3, 423—430.
  2. Răstul în formula de cuadratură «preferată» a lui Newton. *Gaz. mat. si fiz.*, 1955, v. A7, № 7, 298—302.
  3. De la formula lui Arhimede la o formulă de cubatură. *Gaz. mat. si fiz.* 1956, v. A7, № 1, 3—10.
  4. Cuadraturi numerice. Bucuresti, Ed. tehn., 1957, 6, № 17, 598.
  5. Formula lui Boole. *Studia Univ. Babes — Bolyai. Math.* 1958, v. 3, № 3, 39—47.
  6. Formules de cubature. Application á l'intégration numerique des équations aux dérivées partielles du second ordre de type hyperbolique. *Mathematica (RPR)*, 1959, v. 1, № 2, 239—280.
  7. Formules de quadrature á noeuds extérieurs. *Mathematica (RPR)*, 1960, v. 2, № 1, 55—142.
- I r w i n J. O.
1. On quadrature and cubature or on methods of determining approximately single and double integrals. *Tracts for Computers*, № 10, Cambridge University Press, 1923.
- J a c c h i a L.
1. On the numerical integration of functions tabulated in logarithmic form. *Math. Tables Aids Comput.*, 1955, v. 9, № 55, 63—65.

Jackson D.

1. The theory of approximation. Amer. Math. Soc. Colloquium Publication. II, New York, 1930.

Jacobi C. G. J.

1. Über Gauss neue Methode, die Werte der Integrale näherungsweise zu finden. J. Reine Angew. Math., 1826, v. 1, 301—308.

Johansen P.

1. Note on the preceding paper. Skand. Aktuarietidskr., 1935, v. 18, 122—125.

Johnson W. W.

1. On Cotesian numbers: their history, computation and values to  $n = 20$ . Quart. J. Pure Appl. Math., 1915, v. 46, 52—65.

Jones J. G.

1. On the numerical solution of convolution integral equations and systems of such equations. Math. Comput., 1961, v. 15, № 74.

Joung D.

1. An error bound for the numerical quadrature of analytic functions. J. Math. Phys., 1952, v. 31, 42—44.

Kahn H.

1. Multiple quadrature by Monte Carlo methods. В сб. «Math. Methods for Digital Computers», 1960, 249—257.

Kanter L. H.

1. The zeros of the Jacobi polynomials and the corresponding Christoffel numbers. Duke Math. J., 1949, v. 16, 125—130.

Kaplan E. L.

1. Numerical integration near a singularity. J. Math. Phys., 1952, v. 31, 1—28.

Kavanagh K. E.

1. См. Kopal Z., Carrus P. and Kavanagh K. E.

Kegel W. H.

1. Zur numerischen Berechnung der Integrale  $\int_0^{\tau} f(x) K_n(x) dx$ . Z. Astrophys., 1962, № 1, 54, 34—40.

Kelso J. M.

1. A note on the numerical evaluation of certain probability integrals. J. Operations Res. Soc. Amer., 1955, v. 3, 343—344.

Kendall M. G.

1. См. David F. N. & Kendall M. G.

Khamis S. H.

1. См. Hartley H. O. and Khamis S. H.

King G.

1. On the numerical calculation of the values of complex benefits by means of formulas of approximate summation. J. Inst. Actuar., 1887, v. 26, 276—301.

Kirkby S.

1. The relative accuracy of quadrature formulae for the Cotes' closed type. Coll. Aero. Cranfield. Rep., 1948, № 17, 1—6.

Kirsch M.

1. Über die Anwendbarkeit der Tschebyscheffkoeffizienten in der Praxis. Schiffbautechnik, 1953, v. 3, № 9, 273—277; № 10, 311—315.

Kish O.

1. Remark on mechanical quadrature. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1957, v. 8, 473—476.

Kneschke A.

1. Über die genäherte Quadratur. Monatsh. Math. Phys., 1943, v. 51, 15—23.
2. Theorie der genäherten Quadratur. J. Reine Angew. Math., 1949, v. 187, 115—128.

- Kneser H.**  
 1. Das Restglied der Cotesschen Formel zur numerischen Integration. Jber. Deutsch. Math. Verein., 1932, v. 42, 27—32.
- Kök F.**  
 1. Numerical integration. Euclides, Groningen, 1950, v. 25, 271—273.
- Kolscher M.**  
 1. Die Berechnung vollständiger elliptischer Integrale dritter Gattung durch Reihen. Z. Angew. Math. Mech., 1951, v. 31, 114—120.
- König**  
 1. См. Runge C. und König.
- Kopal Z.**  
 1. A table of the coefficients of the Hermite quadrature formula. J. Math. Phys., 1949, v. 27, 259—261.  
 2. Numerical analysis. Wiley, London and New York, 1955.
- Kopal Z., Carrus P. and Kavanagh K. E.**  
 1. A new formula for repeated mechanical quadratures. J. Math. Phys., 1951, v. 30, 44—48.
- Kowalewski G.**  
 1. Über die Newtonschen Quadraturformeln. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. Phys. Kl., 1931, v. 83, 143—164.  
 2. Interpolation und genäherte Quadratur. Leipzig und Berlin, 1932.  
 3. Über die Gaussche Integralapproximation. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. Phys. Kl., 1934, v. 86, 189—198.
- Krein M. G.**  
 1. См. Achyzer N. I., Krein M. G.
- Krivoshchin N.**  
 1. Practical formulas for numerical integration. Univ. Nac. Eva Peron. Publ. Fac. Ci Fisicomat. № 206, serie Tercera. Publ. Esp. 1953, v. 43, 68—116.
- Kuntzmann J.**  
 1. Meilleure formule de quadrature approchée à deux valeurs pour les fonctions ayant une dérivée seconde bornée. C. R. Acad. Sci. Paris, 1948, v. 227, 584—586.  
 2. Formules de quadrature approchée pour les fonctions continues à dérivée première continue et à dérivée seconde bornée. C. R. Acad. Sci. Paris, 1949, v. 228, 38—40.
- Kunz K. S.**  
 1. High accuracy quadrature formulas from divided differences with repeated arguments. Math. Tables Aids Comput., 1956, v. 10, № 54, 87—90.
- Laden H. N.**  
 1. Fundamental polynomials of Lagrange interpolation and coefficients of mechanical quadrature. Duke Math. J., 1943, v. 10, 145—151.
- Lagrange R.**  
 1. Sur le calcul approché des intégrales définies. Acta Math., 1932, v. 59, 373—422.
- Lambert R. J.**  
 1. Error terms of numerical integration formulas. Proc. Iowa Acad. Sci., 1960, v. 67, 369—381.
- Lanczos K.**  
 1. Applied analysis. Prentice — Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1956.
- Lander G.**  
 1. См. Schäfer, O. und Lander G.
- Lang H. A., Stevens D. F.**  
 1. On the evaluation of certain complex elliptic integrals. Math. Comput., 1960, v. 14, 195—199.

- Lansraux G., Boivin G.  
1. Numerical determination of the factor of encircled energy relative to a diffraction pattern of revolution. *Canad. J. Phys.*, 1958, v. 36, № 12, 1696—1709.
- Laufer R.  
1. Interpolation mehrfacher Integrale. *Arch. Math.*, 1955, v. 6, 159—164.
- Laurent, Pierre—Jean.  
1. Remarque sur l'évaluation d'intégrales par la méthode de Monte Carlo, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1961, v. 253, 610—612.
- Leach E. B.  
1. The remainder term in numerical integration formulas. *Amer. Math. Monthly*, 1961, v. 68, № 3, 273—275.
- Ledsham F. C.  
1. Numerical integration using sums of exponential functions. *Math. Comput.*, 1961, v. 15, 48—51.
- Lemaitre G.  
1. Calcul des integrales elliptiques. *Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci.* 1947, v. 33, 200—211 (5).
- Levenson A.  
1. См. Lowan A. N., Davis N. and Levenson A.
- Levi B.  
1. On the approximate calculation of integrals. Concerning the note of Mr. Roberto Frucht. *Math. Notae*, 1947, v. 7, 218—229.
- Lieblein V.  
1. Über einen vierfachen Integrator. *Monatsh. Math. Phys.*, 1941, v. 50, 128—141.
- Liniger W.  
1. См. Blanc C. and Liniger W.
- Lobatto R.  
1. *Lessen over de Integral — Rekening*. The Hague, 1852.
- Lohmann W.  
1. Numerische Auswertung von Integralen über eine volle Periode von periodischen Integrandenfunktionen mit der «Rechteckregel». *Z. angew. Math. und Mech.*, 1956, v. 36, № 11—12, 464—465.
- Longman I. M.  
1. Note on a method for computing infinite integrals of oscillatory functions. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1956, v. 52, 764—768.  
2. On the numerical evaluation of Cauchy principal values of integrals. *Math. Tables Aids Comput.*, 1958, v. 12, 205—207.  
3. A method for the numerical evaluation of finite integrals of oscillatory functions. *Math. Comput.*, 1960, v. 14, № 69, 53—59.
- Lotkin M.  
1. A new integrating procedure of high accuracy. *J. Math. Phys.*, 1952, v. 31, 29—34.  
2. A new integration procedure. *J. Math. Phys.*, 1953, v. 32, 171—179.  
3. A note on the midpoint method of integration. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 1956, v. 3, 208—211.
- Lowan A. N., Davis N. and Levenson A.  
1. Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1—16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1942, v. 48, 739—743.
- Lowan A. N. and Salzer H. E.  
1. Table of coefficients in numerical integration formulae. *J. Math. Phys.*, 1943, v. 22, 49—50.  
2. Table of coefficients for numerical integration without differences. *J. Math. Phys.*, 1945, v. 24, 1—21.

**L u k e Y. L.**

1. Mechanical quadrature near a singularity. *Math. Tables Aids Comput.*, 1952, v. 6, 215—219.
2. Coefficients to facilitate interpolation and integration of linear sums of exponential functions. *J. Math. Phys.*, 1953, v. 31, 267—275.
3. On the computation of oscillatory integrals. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1954, v. 50, part 2, 269—277.
3. Numerical analysis. *Appl. Mech. Revs.*, 1955, v. 8, № 8, 309—311.
4. Evaluation of an integral arising in numerical integration near a logarithmic singularity. *Math. Tables Aids Comput.*, 1956, v. 10, 14—21.
5. Simple formulas for the evaluation of some higher transcendental functions. *J. Math. Phys.*, 1956, v. 34, 298—307.

**M a n s i o n P.**

1. Théorème général de Peano sur le reste dans les formules de quadrature. *Mathesis*, 1914, v. 34, 169—174.

**M a r k o f f A.**

1. Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales. *Math. Ann.*, 1885, 427—432, v. 25.

**M a r l o w e O. J.**

1. См. Hammer P. C., Marlowe O. J., Stroud A. H.

**M a x w e l l J. C.**

1. On approximate multiple integration between limits of summation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1877, v. 3, 39—47.

**M a y o t M.**

1. Sur la méthode d'intégration approchée de Tchebycheff. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1950, v. 230, 429—430.

**M a y o t M. and M i n e u r H.**

1. Extension de la méthode d'intégration de Gauss aux fonctions présentant des singularités. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1949, v. 229, 741—742.

**M e h l e r F. G.**

1. Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen. *J. Reine Angew. Math.*, 1864, v. 63, 152—157.

**M e r l i L.**

1. Su una formula di quadratura. *Boll. Un. Mat. Ital.* (3), v. 2, 1947, 132—134.

**M e y e r s L. F.**

1. См. Sard A. and Meyers L. F.

**M i l l e r G. F.**

1. On certain integrals occurring in a hydrodynamical problem. *Proc. Roy. Soc.*, 1957, v. A243, № 1232, 65—77.

**M i l l e r J. C. P.**

1. Numerical quadrature over a rectangular domain in two or more dimensions. Part I. *Math. Comput.*, 1960, v. 14, 13—20.
2. Numerical quadrature over a rectangular domain in two or more dimensions. Part 2. Quadrature in several dimensions, using special points. *Math. Comput.*, 1960, v. 14, № 70, 130—138.
3. Numerical quadrature over a rectangular domain in two or more dimensions. Part 3. Quadrature of a harmonic integrand. *Math. Comput.*, 1960, v. 14, № 71, 240—248.

**M i l l e r J. J.**

1. См. Greenwood R. E. and Miller J. J.

**M i l l e r R. R.**

1. См. Struble R. A., Miller R. R.

**M i l n e W. E.**

1. The remainder in linear methods of approximation. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 1949, v. 43, 501—511.

2. The error of the trapezoidal formula. Proc. Internat. Congr. Math., 1954, v. 2, Amsterdam, 1954, 362—363.
- Min S. H.**  
1. On the numerical integration of a kind of multiple integrals. Acta Sci. Nat. Univ. Pekinensis, 1959, v. 5, 127—130.
- Minding F.**  
1. Über die Berechnung des Näherungswerthes doppelter Integrale. J. Reine Angew. Math., 1830, v. 6, 91—95.
- Mineur H.**  
1. Tentatives de calcul numérique des intégrales doubles. C. R. Acad. Sci. Paris, 1951, v. 233, 1166—1168.  
2. См. Mayot M. and Mineur H.
- Mises R.**  
1. Zur mechanische Quadratur. Z. Angew. Math. Mech., 1933, v. 13, 53—56.  
2. Formules de cubature. Revue Math. de l'Union Interbalkanique, 1936, v. 1, 17—31.  
3. Über allgemeine Quadraturformeln. J. Reine Angew. Math., 1936, v. 174, 56—67.  
4. Numerische Berechnung mehrdimensionaler Integrale. Z. Angew. Math. Mech., 1954, v. 34, 201—210.
- Moors B. P.**  
1. Valeurs Approximative d'une Intégrale Définie. Gauthier—Villars, Paris, 1905.  
2. Étude sur les formules (specialement de Gauss) servant à calculer des valeurs approximative d'une intégrale définie. Verhandelingen Koninklijke Akad. Wetenschappen. Amsterdam, I Sec., Deel II, № 6, 1913.
- Moran P. A. P.**  
1. Numerical integration by systematic sampling. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1950, v. 46, 111—115.  
2. The numerical evaluation of a class of integrals. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, v. 52, 230—233.  
3. Addendum to the paper «Numerical evaluation of a class of integrals». Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, v. 53, 928.  
4. Approximate relations between series and integrals. Math. Tables Aids Comput., 1958, v. 12, 34—37.
- Morgenstern D.**  
1. Statistische Begründung numerischer Quadratur. Math. Nachr., 1955, v. 13, 161—164.
- Morrison D.**  
1. Numerical quadrature in many dimensions. J. Assoc. Comput. Mach., 1959, v. 6, 219—222.
- Morton K. W.**  
1. A generalization of the antithetic variate technique for evaluating integrals. J. Math. Phys., 1957, v. 36, 289—293.  
2. См. Hammersley J. M. and Morton K. W.
- Mosingiewicz K.**  
1. Badania matematyków radzieckich nad dokładnością przybliżonych metod całkowania. Techn. i gospod. morska, 1953, 3, № 11, 374—376.
- Muggia A.**  
1. Sul calcolo dell' integrale di Poisson. Atti: Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur., 1952—53, v. 87, 116—126.
- Munro W. D.**  
1. Note on the Euler — Maclaurin formula. Amer. Math. Monthly, 1958, v. 65, № 3, 201—203.
- Munteanu Florica**  
1. Le reste dans les formules de quadrature de Weddle et Hardy. «Mathematica» (RPR), 1961, 3, № 1, 135—158.

Murray F. I.

1. См. Brock P. and Murray F. J.

Nelson C. W.

1. New tables of Howland's and related integrals. Math. Comput., 1961, v. 15, № 73, 12—18.

Netzorg D. L.

1. On mechanical quadrature formulas and roots of orthogonal polynomials. Thesis, Univ. of Illinois, 1937.

Nolley J. W.

1. См. Greenwood R. E., Carnahan P. D. M. and Nolley J. W.

Nonweiler T.

1. A method for numerical evaluation of the integral.

$$\int_0^1 \int_0^1 F(x, y) \lg \left| \frac{1}{x-y} \right| dx dy.$$

Rept. Coll. Aeronaut. Cranfield, 1956, № 100.

Novák M.

1. O některých metodách výpočtu číselné hodnoty úplného eliptického integrálu prvního druhu. Slaboproudý obzor, 1958, 19, № 8, 25—28.

O'beirne T. H.

1. Can numerical integration be exact? Math. Gaz., 1957, v. 41, № 335, 59—60.

Obrechhoff N.

1. Neue quadraturformeln. Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math.—Nat. Kl., 1940, № 4, 1—20.

2. On mechanical quadratures. Spisanie Bulgar. Akad. Nauk, 1942, 65, 191—289.

Odg aard H.

1. The Remainder Term in Some Quadrature Formulas. Copenhagen, 1943.

Okaya T.

1. Numerical integration by Tchebychef's q-functions. Proc. Phys.—Math. Soc. Japan (3), v. 23, 1941, 273—282.

Olech C.

1. См. Golab S., Olech C.

Opitz G.

1. Genäherte Integration in der Nähe eines einfachen Pols. Z. Angew. Math. Mech., 1961, № 6, 41, 263—264.

Oppolzer T.

1. Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. Vol. 11, Engelmann, Leipzig, 1880.

O'toole A. L.

1. On the degree of approximation of certain quadrature formulas. Ann. Math. Statist., 1933, v. 4, 143—153.

Pan Cheng — tung.

1. On the numerical integration of a kind of multiple integrals. Sci. Rec., 1959, 3, № 11, 534—537.

Peano G.

1. Resto nelle formule di quadratura espresso con un integrale definito. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend., 1913, v. 22, 562—569.

2. Residuo in formulas de quadratura. Mathesis, 1914, v. 34, 5—10.

Peirce W. H.

1. Numerical integration over planar regions. Thesis, Univ. of Wisconsin, 1956.

2. Numerical integration over the planar annulus. J. Soc. Indust. Appl. Math., 1957, v. 5, 66—73.

3. Numerical integration over the spherical shell. Math. Tables Aids Comput., 1957, v. 11, 244—249.

Perks W.

1. Two — variable developments of the  $n$ -ages method. J. Inst. Actuar., 1945, v. 72, 377—414.

Petrželka J., Slavíček O.

1. Příklad výpočtu soustavy dvojných integrálu s křivou mezi na strojích na děrné štítky. Stroje zpracov. inform., 1958, № 6, 285—288.

Phillips W.

1. Approximate integration. J. Inst. Actuar., 1951, v. 77, 159—179.

Polya G.

1. Über die Konvergenz von Quadraturverfahren. Math. Ztschr., 1933, v. 37, 264—286.

Popoviciu T.

1. Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss. Studii si cercetări științ. Acad. RPR, Fil. Iași, 1955, Ser. 1, v. 6, 29—57.
2. Sur la délimitation du reste dans les formules d'approximation linéaires de l'analyse. Simpos. Numerical Treatm. Ordinary Differential Equations, Integral and Integro-differential equations. Berlin — Stuttgart, Birkhäuser, 1960, 441—446.
3. Asupra delimitării restului in unele formule de aproximare liniară ale analizei. Studii si cercetări mat. Acad. RPR, Fil. Cluj, 1960, 11, № 2, 357—362.

Posse K. A.

1. Sur les quadratures. Nouv. Ann. de Math. (2), v. 14, 1875, 49—62.

Price P. C.

1. Gauss' formula of numerical integration and the design of experiments. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, v. 50, 491—494.

Puwein Max Georg.

1. Eine Quadraturformel. Anz. Akad. Wiss. Wien. Math.-Nat. Kl., 1946, v. 83, 25—26.
2. Eine Rektifikationsformel. Anz. Oster. Akad. Wiss. Wien. Math.-Nat. Kl., 1947, v. 84, 77—79.

Quade W.

1. Zur Interpolationstheorie der reellen Funktionen. Z. Angew. Math. Mech., 1955, v. 35, № 4, 144—156.
2. Zur Interpolationstheorie der reellen Funktionen. Z. Angew. Math. Mech., 1954, v. 34, № 8/9, 301.

Querry J. W.

1. On mechanical quadratur. Skand. Aktuarietidskr., 1933, v. 16, 222—228.
2. Osculatory mechanical quadrature. Skand. Aktuarietidskr., 1935, v. 18, 108—121.

Rabinowitz P.

1. Abscissas and weights for Lobatto quadrature of high order. Math. Comput., 1960, v. 14, 47—52.
2. Cm. Davis P., Rabinowitz P.

Rabinowitz P. and Weiss G.

1. Tables of abscissas and weights for numerical evaluation of integrals of the form  $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n f(x) dx$ . Math. Tables Aids Comput., 1959, v. 13, 285—294.

Radau R.

1. Sur les formules de quadrature á coefficients égaux. C. R. Acad. Sci. Paris, 1880, v. 90, 520—529.
2. Étude sur les formules d'approximation qui servent á calculer la valeur numérique d'une intégrale définie. J. Math. Pures Appl. (3), v. 6, 1880, 283—336.
3. Remarque sur le calcul d'une intégrale définie. C. R. Acad. Sci. Paris, v. 97, 1883, 157—158.



- R a d o n J.**  
 1. Restausrücke bei Interpolations und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale. *Monatsh. Math. Phys.*, 1935, v. 42, 389—396.  
 2. Zur mechanischen Kubatur. *Monatsh. Math. Phys.*, 1948, v. 52, 286—300.
- R a l s t o n A.**  
 1. A family of quadrature formulas which achieve high accuracy in composite rules. *J. Assoc. Comput. Mach.*, v. 6, 1959, № 3, 384—394.  
 2. Methods for numerical quadrature. «Math. methods digital computers». New York — London, John Wiley Sons, Inc., 1960, 242—248.
- R a s e H. F.**  
 1. См. Gidley J. L., Rase H. F.
- R e i z A.**  
 1. Quadrature formulae for the numerical calculation of mean intensities and fluxes in a stellar atmosphere. *Ark. Astr.*, 1950, v. 1, 147—153.  
 2. On a special case of a quadrature formula of Christoffel. *Math. Tables Aids Comput.*, 1950, v. 4, 181—185.  
 3. On quadrature formulae. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1950, v. 46, 119—126.  
 4. On the numerical solution of certain types of integral equations. *Arkiv för Matematik, Astronomi, och Fysik*, v. 29A, № 29.
- R h o d e s I.**  
 1. См. Blanch G. and Rhodes I.
- R i c c i G.**  
 1. Su una formula di K. Petr per il calcolo numerico degli integrali definiti. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), v. 15, 1936, 187—196.
- R i c h a r d s o n J. W.**  
 1. On the computation of certain multicentered molecular integrals. *J. Chem. Phys.*, 1958, v. 28, № 2, 362—363.
- R i l e y J. A. and B i l l i n g s C.**  
 1. Gaussian quadrature of some integrals involving Airy functions. *Math. Tables Aids Comput.*, 1959, v. 13, № 66, 97—101.
- R i p i a n u A.**  
 1. Die angenäherte Berechnung der Fourier — Koeffizienten einer periodischen Funktion. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1961, 41, № 12, 477—484.
- R o m b e r g W.**  
 1. Vereinfachte numerische Integration. *Kgl. norske videnskab. forhandl.*, 1955, v. 28, № 7, 30—36.
- R o o i j e n J. P.**  
 1. On numerical integration. *Verzekerings — Arch. Actuarieel Bijvoegsel*, 1953, v. 30, 41—53.
- R o s s e r J. B.**  
 1. Note on zeros of the Hermite polynomials and weights for Gauss' mechanical quadrature formula. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, v. 1, 388—389.
- R o t h m a n n H. A.**  
 1. Numerical integration over the interval  $(-1,1)$  with the weight function  $x^n$ . Unpublished M. S. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1960.  
 2. Gaussian quadrature with weight function  $x^n$  on the interval  $(-1,1)$ . *Math. Comput.*, 1961, v. 15, № 74, 163—168.
- R u b b e r t F. K.**  
 1. Zur Praxis der numerischen Quadratur. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1949, v. 29, 186—188; или см. *Astron. Nachr.*, 1949, v. 277, 161—166.
- R u b e n H.**  
 1. On the numerical evaluation of a class of multivariate normal integrals. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1959—1960, v. A65, 272—281.
- R u n g e C., K ö n i g H.**  
 1. Vorlesungen über numerisches Rechnen. Springer — Verlag, Berlin, 1924.

- Runge C., Willers F. A.  
1. Numerische und graphische Integration. Enc. Math. Wiss., Leipzig, v. 2, sec. 3, 1909—21, 47—176.
- Rutishauser H.  
1. См. Stiefel E., Rutishauser H.
- Sadowsky M.  
1. A formula for approximate computation of a triple integral. Amer. Math. Monthly, 1940, v. 47, 539—543.
- Salzer H. E.  
1. Coefficients for numerical integration with central differences. Phil. Mag. (7), 1944, v. 35, 262—264.  
2. Note on interpolation for a function of several variables. Bull. Amer. Math. Soc., 1945, v. 51, 279—280.  
3. Tables of coefficients for double quadrature without differences, for integrating second order differential equations. J. Math. Phys., 1945, v. 24, 135—140.  
4. Note on coefficients for numerical integration with differences. J. Math. Phys., 1946, v. 25, 86—88.  
5. Coefficients for facilitating the use of the Gaussian quadrature formula. J. Math. Phys., 1946, 244—246, v. 25.  
6. Tables for facilitating the use of Chebyshev's quadrature formula. J. Math. Phys., 1947, v. 26, 191—194.  
7. Table of coefficients for repeated integration with differences. Phil. Mag. (7), 1947, v. 38, 331—338.  
8. Coefficients for repeated integration with central differences. J. Math. Phys., 1949, v. 28, 54—61.  
9. Formulas for numerical integration of first and second order differential equations in the complex plane. J. Math. Phys., 1950, v. 29, № 3.  
10. Tables of coefficients for the numerical calculation of Laplace transforms. Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser., v. 30, U. S. Gov't. Printing Office, Washington, D. C., 1953.  
11. New formulas for facilitating osculatory interpolation. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1954, v. 52, 211—216.  
12. Equally weighted quadrature formulas over semi — infinite and infinite intervals. J. Math. Phys. 1955, v. 34, № 1, 54—63.  
13. Osculatory quadrature formulas. J. Math. Phys., 1955, v. 34, № 2, 103—112.  
14. Equally weighted quadrature formulas for inversion integrals. Math. Tables Aids Comput., 1957, v. 11, № 59, 197—200.  
15. Formulas for the calculating Fourier coefficients. J. Math. Phys., 1957, v. 36, № 1, 96—98.  
16. Tables for the numerical calculation of inverse Laplace transforms. J. Math. Phys., 1958, v. 37, 89—109.  
17. См. Lowan A. N. and Salzer H. E.  
18. См. Lowan A. N. and Salzer H. E.  
19. Coefficients for mid — interval numerical integration with central differences. Phil. Mag., ser. 7, v. 36, 1945, 216—218.  
20. Orthogonal polynomials arising in the numerical evaluation of inverse Laplace transforms. Math. Tables Aids Comput., 1955, v. 9, 164—177.  
21. Additional formulas and tables for orthogonal polynomials originating from inversion integrals. J. Math. Phys., 1961, v. 40, 72—86.  
22. Multiple quadrature with central differences on one line. Math. Comput., 1962, v. 16, № 78, 244—248.
- Salzer H. E., Shoultz D. C., Thompson E. P.  
1. Tables of osculatory integration coefficients. Convair (astronautics) Division of General Dynamics Corporation, San Diego, Calif., 1960.

- Salzer H. E. and Zucker R.  
 1. Table of the zeros and weight factors of the first fifteen Laguerre polynomials. Bull. Amer. Math. Soc., 1949, v. 55, 1004—1012.
- Salzer H. E., Zucker R. and Capuano R.  
 1. Tables of the zeros and weight factors of the first twenty Hermite polynomials. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1952, v. 48, 111—116.
- Sanden H.  
 1. Praktische Mathematik. Eine Einführung mit besonderer Berücksichtigung von Statistik und Ausgleichrechnung. 3. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig, 1953.
- Sandor Ferenc.  
 1. Altalános algoritmus numerikus kvadratura elvégzésére. Magyar tud. akad. Közp. fiz. Kutató int. Közl., 1962, 10, № 1, 65—68.
- Sankaran M.  
 1. Note on some quadrature formulae. Math. Gaz., 1957, v. 41, № 336, 130—136.
- Sard A.  
 1. Integral representations of remainders. Duke Math. J., v. 15, 333—345, 1948.  
 2. The remainder in approximations by moving averages. Bull. Amer. Math. Soc., v. 54, 1948, 788—789.  
 3. Best approximate integration formulas; best approximation formulas. Amer. J. Math., 1949, v. 71, 80—91.  
 4. Smoothest approximation formulas. Ann. Math. Statist., 1949, v. 20, 612—615.  
 5. Remainders: functions of several variables. Acta Math., 1951, v. 84, 319—346.  
 6. Remainders as integrals of partial derivatives. Proc. Amer. Math. Soc., 1952, v. 3, 732—741.  
 7. Approximation and projection. J. Math. Phys., 1956, v. 35, 127—144.  
 8. The rationale of approximation; On numerical approximation, R. E. Langer, ed., Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1959, 191—207.
- Sard A. and Meyers L. F.  
 1. Best approximate integration formulas. J. Math. Phys., 1950, v. 29, 118—123.
- Saxena R. B.  
 1. On Simpson's formula of cubature. Ann. polon. math., 1959, v. 6, № 3, 289—293.  
 2. On a generalization of Simpson's formula. Ann. polon. math., 1962, 12, № 1, 71—81.
- Scarborough J. B.  
 1. Numerical mathematical analysis. Johns Hopkins Press, Baltimore, 1950.
- Schäfer O. and Lander G.  
 1. Ein elektrisches Gerät zur Berechnung von Produkt-Integralen. Arch. Elektr. Übertragung, 1950, v. 4, 59—64.
- Schlechtweg H.  
 1. Zur Abschätzung des Restgliedes der Mittelwertformeln zur genäherten Quadratur. Z. Angew. Math. Mech., 1957, v. 37, № 9—10, 353—361.
- Schmidt R. J.  
 1. Die allgemeine Newtonsche Quadraturformel und Quadraturformeln für Stieltjesintegrale. J. Reine Angew. Math., 1935, v. 173, 52—59.  
 2. Mechanische Quadratur nach Gauss für periodische Funktionen. S.—B. Math.—Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 19, 1947, 155—173.
- Scorer R. S.

1. Numerical evaluation of integrals of the form  $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) e^{i\varphi(x)} dx$  and the

tabulation of the function  $G_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin\left(uz + \frac{1}{3}u^3\right) du$ . Quart. J.

Mech. Appl. Math., 1950, v. 3, 107—112.

Selmer E. S.

1. Numerical integration by non-equidistant ordinates. Nord. Mat. Tidskr., 1958, v. 6, 97—108.
2. A note on the preceding paper by V. Brun. Nordisk. Mat. Tidskr., 1959, v. 7, 25—26.

Serbin H.

1. Numerical quadrature of some improper integrals. Quart. Appl. Math., 1954, v. 12, 188—194.

Sharma A.

1. On Golab's contribution to Simpson's formula. Ann. polon. math., 1957, v. 3, № 2, 240—246.

Sheldon J. W.

1. Numerical evaluation of integrals of the form  $\int_a^b f(x)g(x)dx$ . Proc. Indust. Comput. Seminar, IBM Corp., 1950, 74—77.

Sheppard W. F.

1. Some quadrature formulae. Proc. London Math. Soc., 1900, v. 32, 258—277.

Shklov N.

1. Simpson's rule for unequally spaced ordinates. Amer. Math. Monthly, 1960, v. 67, 1022—1023.

Shohat J. A.

1. Sur les quadratures mécanique et sur les zeros des polynomes de Tchebycheff dans un intervalle infini. C. R. Acad. Sci., Paris, 1927, v. 185, 597—598.
2. On a certain formula of mechanical quadratures with nonequidistant ordinates. Trans. Amer. Math. Soc., 1929, v. 31, 448—463.
3. On mechanical quadrature in particular with positive coefficients. Trans. Amer. Math. Soc., 1937, v. 42, 461—496.

Shohat J. A., Bushkovich A. V.

1. On some applications of the Tchebycheff inequality for definite integrals. J. Math. Phys., 1942, v. 21, 211—217.

Shohat J. A. & Tamarin J. D.

1. The Problem of Moments. Amer. Math. Soc., Math. Surveys 1, New York, 1943.

Shohat J. A., Winston C.

1. On mechanical quadratures. Rend. Circ. Math. Palermo, 1934, v. 58, 153—165.

Smith E. R.

1. The Hermitian polynomials. Amer. Math. Monthly, 1936, v. 43, 354—358.

Sonin N.

1. On the approximate evaluation of definite integrals and on the related integral functions. Warszawskia Univ. Izvestia, 1887, v. 1, 1—76.

Squire W.

1. Some applications of quadrature by differentiation. J. Soc. Indust. Appl. Math., 1961, v. 9, 94—108.

Stancu D. D.

1. Sur une classe de polynomes orthogonaux et sur des formules générales de quadrature a nombre minimum de termes. Bull. Math. Soc. Sci., Math. et Phys. RPR, 1957, v. 1, № 4, 479—498.
2. Generalizarea unor formule de interpolare pentru funcțiile de mai multe variabile și unele consideratii asupra formulei de integrare numerică a lui Gauss. Bul. Științ. Acad. RPR. Sec. Mat. și Fiz., 1957, v. 9, № 2, 287—313.
3. Generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss — Christoffel. Studii si certări științ. Acad. RPR, Fil. Iasi. Mat., 1957, v. 8, № 1, 1—18.

4. Contribuții la integrarea numerică a funcțiilor de mai multe variabile. Studii și cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1957, v. 8, № 1—2, 75—101.
  5. O metodă pentru construirea de formule de cubatură pentru funcțiile de două variabile. Studii și cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1958, v. 9, № 1—4, 351—369.
  6. O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înal de exactitate. Comun. Acad. RPR, 1958, v. 8, № 4, 349—358.
  7. Asupra integrării numerice a funcțiilor de două variabile. Studii și cercetări știint. Acad. RPR. Fil. Iasi Mat., 1958, v. 9, № 1, 5—21.
  8. Asupra formulelor de cuadratură de tip Gauss. Studia Univ. Babes — Bolyai. Math., 1958, v. 3, № 3, 71—84.
  9. *Mathematica*, v. I (24), fasc. I, 1959.
  10. Asupra calcului coeficienților unei formule generale de cuadratură. Studia Univ. Babes — Bolyai. Math.— Phys., 1960, № 1, 187—192.
- Steffensen J. F.**
1. On the remainder form of certain formulas of mechanical quadrature. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1921, 201—209.
  2. On the degree of rigour required in numerical integrations. *Skandinavisk Matematikerkongressen*, № 5, 1922, 125—130.
  3. On a class of quadrature formulas. *Proc. Internat. Math. Congress, Toronto, 1924*, v. 2, 837—844.
  4. Das Restglied der Cotesschen Formel zur numerischen Integration. *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, 1932, v. 42, 141—143.
  5. On certain formulas of mechanical quadrature. *Skandinavisk Aktuarietidskr.*, 1945, v. 28, 1—19.
- Stein P.**
6. *Interpolation*, Baltimore, 1927.
  1. A note on numerical integration. *Math. Gaz.*, 1956, v. 40, 268—270.
  2. On the error in numerical integration. *Math. Gaz.*, 1960, v. 44, № 350, 280—283.
- Steinhaus H.**
1. Sur la cubature des troncs de bois. *Colloquium Math.*, 1947, v. 1, 23—28.
- Stevens D. F.**
1. См. Lang H. A., Stevens D. F.
- Stewart C. E.**
1. On the numerical evaluation of singular integrals of Cauchy type. *J. Soc. Industr. and Appl. Math.*, 1960, v. 8, № 2, 342—353.
- Stiefel E.**
1. Altes und Neues über numerische Quadratur. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1961, v. 41, 408—413.
- Stiefel E., Rutishauser H.**
1. Remarques concernant l'intégration numérique. *C. R. Acad. Sci.*, 1961, v. 252, № 13, 1899—1900.
- Stieltjes T. J.**
1. Quelques recherches sur la theorie des quadratures dites mécaniques. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3)*, 1884, v. 1, 409—426.
- Stoyanoff A.**
1. Sur le calcul approché des intégrales définies. *Ann. (Godišnik) Univ. Sofia, Fac. Thys.— Math. Livre I*, 1941, v. 37, 499—521.
- Stroud A. H.**
1. Remarks on the disposition of points in numerical integration formulas. *Math. Tables Aids Comput.*, 1957, v. 11, 257—261.
  2. Numerical integration formulas of degree two. *Math. Comput.*, 1960, v. 14, 21—26.
  3. Quadrature methods for functions of more than one variable. *Ann. New York Acad. Sci.*, 1960, v. 86, 776—791.

4. Numerical integration formulas of degree 3 for product regions and cones. *Math. Comput.*, 1961, v. 15, 143—150.
  5. См. Hammer P. C., Marlowe O. J., Stroud A. H.
  6. См. Hammer P. C., Stroud A. H.
  7. A bibliography on approximate integration. *Math., Comput.*, 1961, v. 15, 52—80.
- Struble G.**
1. Tables for use in quadrature formulas involving derivatives of the integrand. *Math. Comput.*, 1960, v. 14, 8—12.
- Struble R. A., Miller R. R.**
1. Successive approximation applied to quadrature formulas. *Amer. Math. Month.*, 1960, v. 67, № 7, part 1, 661—664.
- Syngé J. L.**
1. A simple bounding formula for integrals. *Canad. J. Math.*, 1953, v. 5, 46—52.
- Tamarkin J. D.**
1. См. Shohat J. A. and Tamarkin J. D.
- Tanimoto B.**
1. On the mechanical cubature. *J. Shinsku Univ.*, 1954, № 4, 73—95.
  2. An efficient modification of Euler — Maclaurin's formula. *Trans. Japan Soc. Civil Engrs*, 1955, № 24, 1—5.
- Tauber G. E.**
1. Evaluation of two — center exchange integrals. *J. Chem. Phys.*, 1958, v. 29, 300—310.
- Tchakaloff L.**
1. Über eine allgemeine Quadratur formel. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 1948, v. 1, 9—12 (болгарск.).
  2. General quadrature formulas of Gaussian type. *Bulgar. Akad. Nauk. Izv. Mat. Inst.*, v. 1, № 2, 1954, 67—84.
  3. Formules générales de quadrature mécanique du type de Gauss. *Colloq. Math.*, 1957, v. 5, 69—73.
- Tchakaloff V.**
1. Formules de cubature mécaniques a coefficients non négatifs. *Bull. Sci. Math.* (2), v. 81, 1957, 123—134.
- Thacher H. C.**
1. Optimum quadrature formulas in  $s$  dimensions. *Math. Tables Aids Comput.*, 1957, v. 11, 189—194.
- Thaler S., Boxer R.**
1. An operational calculus for numerical analysis. *IRE Conventional Record.*, 1956, Part 2, v. 4, 100—105.
- Thomas M.**
1. Sur la quadrature approximative d'une courbe. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1942, v. 214, 654—656.
- Timman R.**
1. The numerical evaluation of the Poisson integral. *National Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam. Report. v. F. 32*, 1948.
- Todd J.**
1. Special polynomials in numerical analysis. *On Numerical Approximation* R. E. Langer, ed., Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1959, 423—446.
- Tollmien W.**
1. Über das Restglied der Mittelwertformeln für angenäherte Quadratur. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1949, v. 29, 193—198.
- Tortorici P.**
1. Resti nelle formule de cubatura. *Consiglio Naz. Ricerche. Pubbl. Ist. Appl. Calcolo*, 1950, № 287, 1—8.
  2. Su un metodo numerico di calcolo approssimato per gli integrali doppi. *Consiglio Naz. Ricerche, Pubbl. Ist. Appl. Calcolo*, 1951, № 303, 1—7.

Tricomi F. G.

1. Sul resto delle formule di quadratura numerica migliorate col metodo di «estrapolazione». Boll. Unione Mat. Ital., 1959, v. 14, № 1, 102—104.

Tsujiuchi J.

1. См. Ukita Y., Tsujiuchi J.

Tupper S. J.

1. Some new results in numerical analysis. J. Proc. Internat. Congr. Math., 1954, v. 2, Amsterdam, 1954, 387—388.

Turan P.

1. On the theory of the mechanical quadrature. Acta Sci. Math. Szeged., 1950, v. 12, 30—37.

Tyler G. W.

1. Numerical integration of functions of several variables. Canadian J. Math., 1953, v. 5, 393—412.

Uhlmann W.

1. Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der Integrationsformeln von Newton — Cotes. Z. Angew. Math. und Phys., 1959, v. 10, № 2, 189—207.

Ukita Y., Tsujiuchi J.

1. On the numerical calculation of the response function. J. Mech. Lab. Japan., 1956, v. 2, № 2, 1—6.

Uspensky J. V.

1. Sur les valeurs asymptotiques des coefficients de Cotes. Bull. Amer. Math. Soc., 1925, v. 31, 145—156.
2. On the convergence of quadrature formulas related to an infinite interval. Trans. Amer. Math. Soc., 1928, v. 30, 542—559.
3. On an expansion of the remainder in the Gaussian quadrature formula. Bull. Amer. Math. Soc., 1934, v. 40, 871—876.
4. On the expansion of the remainder in the Newton — Cotes formula. Trans. Amer. Math. Soc., 1935, v. 37, 381—396.

Vernotte P.

1. Formule pour la quadrature empirique d'une fonction expérimentale. C. R. Acad. Sci., Paris, 1942, v. 214, 107—110.
2. Sur la définition d'une intégrale définie quand l'intervalle d'intégration contient un point singulier. Application à la sommation des séries divergentes à termes positifs. C. R. Acad. Sci., 1958, v. 247, 1822—1824.

Walsh J. L.

1. Interpolation and approximation. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 1935, v. 20.

Walther A.

1. Zur numerischen Integration. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1925, 148.

Wang J.

1. См. Hua L., Wang J.

Waisson G. N.

1. Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale. Ca-sopis Pěst. Mat. Fys., 1935, v. 65, 1—7.

Weeg G. P.

1. Numerical integration of  $\int_0^{\infty} e^{-x} J_0\left(\frac{\eta x}{\xi}\right) J_1\left(\frac{x}{\xi}\right) x^{-n} dx$ . Math. Tables Aids Comput., 1959, v. 13, 312—313.

Weinberger

1. См. Golomb M. and Weinberger.

Weiss G.

1. См. Rabinovitz P. and Weiss G.

- Wicke H. H.  
1. См. Hammer P. C. and Wicke H. H.
- Wickens C. H.  
1. Approximate integration. J. Inst. Actuar., 1923, v. 54, 209—213.
- Wilf H. S.  
1. Maximally stable numerical integration. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1960, v. 8, 537—540.  
2. The possibility of Tshebycheff quadrature on infinite intervals. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1961, v. 47, 209—213.
- Wilkins J. E.  
1. An integration scheme of Maréchal. Bull. Amer. Math. Soc., 1949, v. 55, 191—192.
- Willers F. A.  
1. См. Runge C., Willers F. A.  
2. Practical Analysis. Dover Publ., New York, 1948.
- Wimp J.  
1. Polynomial approximations to integral transforms. Math. Comput., 1961, v. 15, 174—178.
- Winston C.  
1. On mechanical quadratures formulae involving the classical orthogonal polynomials. Ann. Math., 1934, v. 35, 658—677.  
2. См. Shohat J. A., Winston C.
- Wirtinger W.  
1. Über das Fehlerglied bei numerischer Integration. Z. Angew. Math. Mech., 1933, v. 13, 166—168.
- Wolfe C. E.  
1. Note on numerical integration. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1928 (2), 1, 139—148.
- Wolfe J. M.  
1. An adjusted trapezoidal rule using function values within the range of integration. Amer. Math. Monthly, 1959, v. 66, 125—127.
- Woolhouse W. S. B.  
1. On integration by means of selected values of the function. J. Inst. Actuar., 1888, v. 27, 122—155.
- Woolsey W.  
1. См. Johnson W., Woolsey W.
- Wymore A. W.  
1. См. Hammer P. C. and Wymore A. W.
- Young A.  
1. Approximate product — integration. Proc. Roy. Soc., London, 1954, v. A224, № 1159, 552—561.
- Zemanian A.  
1. An approximate method of evaluating integral transforms. J. Appl. Phys., 1954, v. 25, 262—266.
- Ziller A.  
1. Méthodes de Différentiation et d'Intégration Numériques (Applications). Publ. Sci. Tech. Ministère de l'Air, Paris, Notes Tech., 1955, № 50.
- Zucker R.  
1. См. Salzer H. E. and Zucker R.  
2. См. Salzer H. E., Zucker R. and Capuano R.
- Zweifel P. F.  
1. См. Hurwitz H. J. and Zweifel P. F.



**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК ПО ТАБЛИЦАМ  
УЗЛОВ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ПРАВИЛ  
ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ \*)**

Айзенштат В. С., Крылов В. И., Метельский А. С.

(1) Таблицы абсцисс и коэффициентов квадратурной формулы

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \text{ и произведений } A_k e^{x_k}, \text{ удобных для вычисле-}$$

ния интегралов вида  $\int_0^{\infty} f(x) dx$ , для  $n = 1(1) 15$ ,  $s = -0,90(0,02)0$ ,

$0,05(0,05)3,00$  и  $s = -\frac{3}{4}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}$   
с 8-ю значащими цифрами.

Айзенштат В. С., Метельский А. С.

(1) Таблица корней полиномов Лягерра и квадратурных коэффициентов

для вычисления  $\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx$  для  $s = 1, 2, 3$ ,  $n = 1(1) 15$  с 8-ю значащими цифрами.

(2) Таблица корней полиномов Лягерра и квадратурных коэффициентов для

вычисления  $\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx$  для  $s = \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ ,  
 $n = 4(1) 10$  с 5-ю значащими цифрами.

Аккерман Р. Б.

(1) Таблица абсцисс и коэффициентов квадратурной формулы вида

$$\int_a^b p(x) dx \approx A_0 f(a) + A_{n+1} f(b) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \text{ алгебраической степени}$$

точности  $2n \nrightarrow 2$  для  $[a, b] = [-1, 1]$ ,  $p(x) = 1$ ,  $n = 1(1) 8$ ; для

\*) Пример чтения библиографического справочника: указание «Айзенштат В. С., Метельский А. С. (2), Таблица корней полиномов Лягерра и квадратурных

коэффициентов для вычисления  $\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx$  для  $s = \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{3}, \frac{4}{3},$

$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ ,  $n = 4(1) 10$  означает, что в библиографии по численному интегрированию в перечне совместных работ В. С. Айзенштата и А. С. Метельского в работе под номером 2 находятся таблицы, содержание которых объясняется в дальнейших словах указания.

$[a, b] = [0, 1]$ ,  $p(x) = x$  и  $p(x) = x^2$ ,  $n = 1(1) 4$ . Таблица абсцисс и весов квадратурной формулы Маркова для четных функций  $\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n+1} f(\bar{x}_i) \bar{A}_i$ ,

где  $\bar{x}_i$  — абсциссы для промежутка  $[-1, 1]$ , лежащие в пределах  $[0, 1]$ ,  $\bar{A}_i$  — соответствующие коэффициенты, для  $n = 0(1) 8$ .

Аналогичная таблица абсцисс и весов формулы Маркова для нечетных функций.

Для формулы Маркова алгебраической степени точности  $2n \nleftrightarrow 1$

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + A_{n+1} f(1):$$

- а) таблица абсцисс и весов для  $(a, b) = (-1, 1]$ ,  $p(x) = 1$ ,  $n = 1(1) 5$  и для  $[a, b) = [0, 1)$ ,  $p(x) = \sqrt{x}$ ,  $n = 1(1) 5$ ;  
 б) таблица абсцисс и весов для  $[a, b) = [0, 1)$ ,  $p(x) = x^2$ ,  $f(x)$  — четная функция,  $n = 1(1) 5$  и для  $[a, b) = [0, 1)$ ,  $p(x) \equiv 1$ ,  $f(x)$  — нечетная функция,  $n = 1(1) 5$ .

Таблица абсцисс и коэффициентов квадратурной формулы для вычисления

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) d\varphi \text{ для } n = 1, 2, 8 \text{ значащих цифр.}$$

Бертова Е. И., Кузнецов Я. Т., Натансон И. П., Цареградский Х. А.

(1) Таблица узлов и коэффициентов квадратурной формулы

$$\int_{-1}^1 |x|^\alpha f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

для  $\alpha = -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ ,  $n = 1(1) 8$  с 8-ю значащими цифрами.

Ермаков С. М.

(1) Таблица узлов и коэффициентов квадратурной формулы вида

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^N A_i f(x_i, y_i) + \sum_{\mu=1}^m B_\mu f(x_\mu, 0) - \sum_{i=1}^N A_i f(x_i, 0) + \sum_{v=1}^n c_v f(0, y_v) - \sum_{i=1}^N A_i f(0, y_i) + A_0 f(0, 0).$$

7 значащих цифр.

Канторович Л. В.

(2) Таблица абсцисс и весов квадратурной формулы типа Гаусса наивысшей

алгебраической степени точности для четных функций  $\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \bar{A}_i f(\bar{x}_i)$ ,

где  $\bar{x}_i$  — абсциссы точек Гаусса для  $(-1, 1)$ , соответствующие делению на  $2n$  частей, расположенные на  $(0, 1)$ , а  $\bar{A}_i$  — соответствующие им коэффициенты, и для нечетных функций  $\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\sqrt{z_i}} f(\sqrt{z_i})$ , где

$A_i$  и  $z_i$  — коэффициенты и абсциссы Гаусса для  $(0, 1)$ .  $n = 1(1) 8$ , 8 значащих цифр. Таблица абсцисс и коэффициентов формулы типа Гаусса наивысшей

алгебраической степени точности для периодических функций.  $n = 1(1)8$ .  
8 значащих цифр. Значения коэффициентов формулы типа Котеса наивысшей алгебраической степени точности для четных и нечетных функций,  $n = 1(1)5$ .

Королев Н. И.

см. В. И. Крылов, Н. И. Королев, Н. С. Скобля.

Кругликова Л. Г., Крылов В. И.

(1) Таблица узлов и коэффициентов квадратурных формул

$$\int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad \text{для } n = 1(1)5 \text{ с } 3\text{--}12\text{-ю значащими цифрами.}$$

Крылов В. И.

см. В. С. Айзенштат, В. И. Крылов, А. С. Метельский; см. Л. Г. Кругликова, В. И. Крылов.

Крылов В. И., Королев Н. И., Скобля Н. С.

(1) Значения абсцисс и коэффициентов квадратурной формулы

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad \text{для } n = 1(1)5, s = 0, -\frac{1}{2} \text{ с } 8\text{--}10\text{-ю значащими цифрами.}$$

Крылов В. И., Лугин В. В., Янович Л. А.

(1) Таблицы абсцисс и весов квадратурной формулы

$$\int_0^1 x^{\beta} (1-x)^{\alpha} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad \text{для } \alpha, \beta = -0,9(0,1)3,0; \beta \leq \alpha \leq 3,0, n = 1(1)8 \text{ с } 8\text{-ю значащими цифрами.}$$

Крылов В. И., Пальцев А. А.

(1) Таблица абсцисс и коэффициентов квадратурной формулы

$$\int_0^1 x^{\alpha} \lg\left(\frac{e}{x}\right) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad \text{при } \alpha = 0(1)3, \pm \frac{1}{2}, n = 1(1)5 \text{ с } 7\text{--}11\text{-ю значащими цифрами и квадратурной формулы}$$

$$\int_0^1 \lg\left(\frac{e}{1-x}\right) \lg\left(\frac{e}{x}\right) x^{\alpha} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad \text{при } \alpha = 0, n = 1(1)5 \text{ с } 11\text{--}15\text{-ю значащими цифрами.}$$

(2) Таблица абсцисс  $x_k$  и коэффициентов  $A_k$  квадратурной формулы

$$\int_0^1 x^{\alpha} \lg\left(\frac{e}{x}\right) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad \text{для } n = 1(1)8, \alpha = \pm \frac{4}{5}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{5}, 0(1)5. 5\text{--}14 \text{ значащих цифр.}$$

Крылов В. И., Скобля Н. С.

(1) Таблица узлов  $p_k$  и весов  $A_k$  для выполнения обратного преобразова-

ния Лапласа  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} p^{-s} e^{p} \Phi(p) dp \approx \sum_{k=1}^n A_k \Phi(p_k) \quad \text{для } s = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right) 3,$

$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right) 3 \text{ с } 5\text{--}7\text{-ю значащими цифрами.}$

Кузнецов Я. Т.

см. Е. И. Бертова, Я. Т. Кузнецов, И. П. Натансон, Х. А. Цареградский.

Лашенов К. В.

(1) Таблица абсцисс и коэффициентов квадратурной формулы с логарифмической особенностью в середине отрезка

$$\int_{-1}^1 -\ln|x|f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

для  $n = 1(1)6$  с 5—8-ю значащими цифрами.

Лугин В. В.

см. В. И. Крылов, В. В. Лугин, Л. А. Янович.

Метельский А. С.

см. В. С. Айзенштат, В. И. Крылов, А. С. Метельский; см. В. С. Айзенштат, А. С. Метельский.

Натансон И. П.

см. Е. И. Бертова, Я. Т. Кузнецов, И. П. Натансон, Х. А. Цареградский.

Пальцев А. А.

см. В. И. Крылов, А. А. Пальцев.

Скобля Н. С.

см. В. И. Крылов, Н. И. Королев, Н. С. Скобля; см. В. И. Крылов, Н. С. Скобля.

Цареградский Х. А.

см. Е. И. Бертова, Я. Т. Кузнецов, И. П. Натансон, Х. А. Цареградский.

Янович Л. А.

см. В. И. Крылов, В. В. Лугин, Л. А. Янович.

Billings C.

см. Riley J. A., Billings C.

Burnett D.

(1) Таблица корней полиномов Лягерра и весов квадратурной формулы

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad \text{при } m = 2, 3, 4, n = 2, 3, 4 \text{ значащие}$$

цифры.

Caruano R.

см. Salzer H. E., Zucker R. and Caruano R.

Carnahan P. D.

см. Greenwood R. E., Carnahan P. D., Nolley J. W.

Danford M. B.

см. Greenwood R. E., Danford M. B.

Davis P. J., Rabinowitz P.

(2) Таблица абсцисс и весов квадратурной формулы Гаусса высокого порядка:  $n = 2, 4, 8, 16, 20, 24, 32, 40, 48$ .  
19—20 значащих цифр.

(4) Таблица абсцисс и весов квадратурной формулы Гаусса высокого порядка:  $n = 64, 80, 96$ . 19—20 значащих цифр.

Fishman H.

(1) Таблица узлов и весов для формул гауссова вида  $\int_0^1 x^n g(x) dx \approx \sum_{i=1}^m b_i g(x_i)$ ,  
 $n = 1(1)5, m = 1(1)8$ . 12 значащих цифр.

Gawlik H. J.

(1) Нули полиномов Лежандра порядков 2—64 и весовые коэффициенты квадратурных формул Гаусса.

Greenwood R. E., Carnahan P. D. M., Nolley J. W.

(1) Таблица весов и абсцисс для квадратурной формулы

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx K_m \sum_{i=1}^m [f(x_{i,m}) - f(-x_{i,m})] \text{ для } m = 1(1)4.$$

8 значащих цифр. Значения абсцисс и коэффициентов квадратурной формулы  $\int_{-1}^1 x^{2f} f(x) dx \approx c_n \sum_{i=1}^n f(x_{i,n})$  для  $n = 1(1)4, 6, 10$  значащих цифр.

Greenwood R. E., Danford M. B.

(1) Таблица узлов квадратурной формулы типа Чебышева

$$\int_0^1 x f(x) dx \approx \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n f(x_{i,n}) \text{ для } n = 1, 2, 3, 8 \text{ значащих цифр. Значения}$$

узлов и весов квадратурной формулы чебышевского типа

$$\int_{-1}^1 x f(x) dx \approx K_m \sum_{i=1}^m [f(x_{i,m}) - f(x_{i+m,m})] \text{ для } m = 1(1)4, 7-8 \text{ значащих цифр.}$$

Greenwood R. E., Miller J. J.

(1) Таблица корней полиномов Эрмита и коэффициентов квадратурной формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \lambda_{i,n} f(x_{i,n}) \text{ для } n=1(1)5 \text{ с 12-ю десятичными}$$

знаками и для  $n = 6(1)10$  с 9-ю десятичными знаками.

Hammeter P. C., Marlowe O. J., Stroud A. H.

(1) Значения абсцисс и коэффициентов квадратурной формулы

$$\int_0^1 x^n g(x) dx \approx \sum_{j=1}^m b_{jg}(x_j) \text{ для } n = 1, 2, m = 1(1)5; n=3, m=1(1)4$$

с 18—19-ю значащими цифрами.

Harper W. M.

(1) Таблица абсцисс и весов для квадратурной формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n K_i f(a_i), \text{ где } K_i = H_i (1 + a_i^2)^{k+1}$$

для  $n = 4, k = 3(1)10; n = 6, k = 5(1)10$  с 10-ю значащими цифрами.

Hartley H. O.

(1) Таблицы для преобразования квадратурных формул с неравноотстоящими узлами в формулы Котеса при помощи замены переменной  $x = \varphi(t)$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^n f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

с последующим вычислением интеграла при помощи формул Котеса. Число узлов равно  $n + 1, n = 3(1)10$ .

Johnson W. W.

(1) Таблица коэффициентов Котеса для  $n = 1(1)20$  в виде

$$A_k = \frac{N_k}{D}$$

Kegel W. H.

(1) Таблица абсцисс и весов для квадратурной формулы

$$\int_0^r f(x) K_n(x) dx \approx \sum_{i=1}^m a_i f(t_i), \text{ где } K_n(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xw}}{w^n} dw \text{ для } n = 1, 2, m = 3, 4; r = 0, 1(0,1) 1, 0(0,2) 4, 0(0,5) 8, 0(1) 15 \text{ с 4—6-ю значащими цифрами.}$$

Koral Z.

(1) Таблица корней полиномов Эрмита и соответствующих коэффициентов  $p_i = 2^{n+1} n! / \{H'_n(x_i)\}^2$ , где  $H_n(x)$  — полином Эрмита  $n$ -го порядка,

$$\text{квадратурной формулы } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx 2^{n+1} n! \sqrt{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{\{H'_n(x_i)\}^2} \text{ для } n = 10(1)20 \text{ с 6-ю значащими цифрами.}$$

Levenson A.

см. Lowan A., Davids N., Levenson A.

Lowan A., Davids N., Levenson A.

(1) Таблицы нулей полиномов Лежандра порядка 1—16 и весовые коэффициенты для механических квадратур Гаусса. 18—20 десятичных знаков

Luke Y. L.

(3) Коэффициенты для вычисления  $C_n = \int_{-nrh}^{nrh} f(x) \sin \lambda x dx$ , выраженные в виде центральных разностей  $f(x)$ , и коэффициенты для вычисления  $B_n = \int_{-nrh}^{nrh} f(x) \cos \lambda x dx$ , выраженные в виде табличных значений  $f(x)$ .  
 $n = 1(1)5$ .

(4). Значения коэффициентов  $\gamma_{jr}^{(n)}$  и  $D_n$  квадратурной формулы

$$\int_0^{rh} x^{-1} dx \int_0^1 f(u) du \approx \frac{rh}{D_n} \sum_{j=0}^n \gamma_{jr}^{(n)} f(jh)$$

для  $n = 1(1)10$ ,  $r = 1(1)(n+1)$ .

Marlowe O. J.

см. Hammer P. C., Marlowe O. J., Stroud A. H.

Miller J. J.

см. Greenwood R. E., Miller J. J.

Nolley J. W.

см. Greenwood R. E., Carnahan P. D., Nolley J. W.

Peirce W. H.

(3) Таблица узлов и весов квадратурной формулы гауссова вида

$$\int_R^1 r^2 \mathfrak{G}(r) dr \approx \sum_{k=1}^v C_k \mathfrak{G}(r_k) \text{ для } R = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, k = 1, 2 \text{ с 7—10 значащими цифрами.}$$

Rabinowitz P.

(1) Таблица абсцисс и коэффициентов квадратурной формулы Лобатто

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=-m}^m a_{kn} f(x_{kn})$$

наивысшей алгебраической степени точности для  $n = 5(4) 25(8) 49(16) 97$  с 19-ю значащими цифрами.  $x_{\pm mn} = \pm 1 - 2$  узла фиксированных;  $x_{-kn} = -x_{kn}$ ;  $a_{-kn} = a_{kn}$ ;  $n = 2m \nmid 1$ ;

см. Davis P. J., Rabinowitz P.

Rabinowitz P., Weiss G.

(1) Таблица абсцисс и весов для формулы гауссова типа

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^N a_{kN}^n f(x_{kN}^n)$$

для  $n = 0$ ,  $N = 4(4)32$ ;  $n = 1(1)5$ ,  $N = 4(4)16$  с 18-ю значащими цифрами.

Reiz A.

(4) Значения узлов и коэффициентов для вычисления  $\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx$  для  $s = 0$ ,  $n = 1(1)5$  с 7-ю значащими цифрами.

Riley J. A., Billings C.

(1) Таблица узлов и коэффициентов для квадратурной формулы Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

для  $n = 27$  с 9-ю значащими цифрами.

Rothmann H. A.

(2) Абсциссы и веса формулы Гаусса  $\int_{-1}^1 x^p f(x) dx \approx \sum_{k=1}^m W_k f(x_k)$  для  $x^p = x^{2n}$ ,  $n = 0(1)5$ ,  $m = 2, 3, 4$ ;  $x^p = x^{2n+1}$ ,  $n = 0(1)5$ ,  $m = 2, 4$ . 7 значащих цифр.

Salzer H. E.

(1) Таблица коэффициентов  $M_{2s}$  квадратурной формулы с центральными разностями

$$\frac{1}{n} \int_a^{a+nh} f(x) dx = \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \dots + f[a+(n-1)h] + \frac{1}{2} f(a+nh) \right] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m-1} M_{2s} [\mu \delta^{2s-1} f(a+nh) - \mu \delta^{2s-1} f(a)] + nh^{2m} M_{2m} f^{(2m)}(\xi).$$

$m = 1(1)29$ . Точные значения до  $M_{20}$  и 18 десятичных знаков до  $M_{56}$ .

(6) Приведено 12 первых полиномов для нахождения узлов  $z_i^{(n)}$  квадратурной

формулы Чебышева  $\int_{-1}^1 f(z) dz \approx \frac{2}{n} \sum_{l=1}^n f(z_l)$ . Таблица коэффициентов  $D_l^{(n)}$

для нахождения  $(n-1)$ -х разделенных разностей в виде  $\sum_{l=1}^n D_l^{(n)} f(z_l^{(n)})$

и абсцисс квадратурной формулы Чебышева  $z_i^{(n)}$  для  $n = 3(1)7, 9$  с 8—10-ю значащими цифрами.

(7) Рассматриваются квадратурные формулы с разностями с шагом вперед

$$\int_{x_0}^{x_1} \dots \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) (dx)^k = h^k \int_0^1 \dots \int_0^p \int_0^p f(x_0 + ph) (dp)^k \approx h^k \left\{ \frac{f(x_0)}{k!} + \sum_{n=1}^m G_n^{(k)} \Delta^n f(x_0) \right\}$$

и с разностями с шагом назад

$$\int_{x_0}^{x_1} \dots \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) (dx)^k = h^k \int_0^1 \dots \int_0^p \int_0^p f(x_0 + ph) (dp)^k \approx h^k \left\{ \frac{f(x_0)}{k!} + \sum_{n=1}^m H_n^k \nabla^n f(x_0) \right\}.$$

Приводятся таблицы коэффициентов  $G_n^{(k)}$  и  $H_n^{(k)}$  для  $k=2(1)6$ ,  $m=1(1)20$ , 7—12 значащих цифр.

(8) Таблица коэффициентов при  $\delta_0^{3s}$  и  $\delta_1^{2s}$  в  $k$ -кратной квадратурной формуле

$$\int_{x_0}^{x_1} \dots \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) (dx)^k = h^k \left[ A_0^{(k)} f_0 + B_0^{(k)} f_1 + \sum_{s=1}^m (A_{2s}^{(k)} \delta_0^{2s} + B_{2s}^{(k)} \delta_1^{2s}) \right] + R_{2m};$$

$k=2$ ,  $s=0(1)24$ ;  $k=3(1)6$ ,  $s=0(1)10$ . 10—16 десятичных знаков.

(10) Таблица коэффициентов  $A_i$  квадратурной формулы вида

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i f(i) \text{ алгебраической степени точности } n-1 \text{ для}$$

$n=2(1)7$ ,  $p=0,1(0,1)(n-1)$ ;  $n=8, 9$ ,  $p=0,2(0,2)(n-1)$ ;  $n=10, 11$ ,  $p=1(1)(n-1)$  и некоторых вспомогательных величин для нахождения  $A_i$ . 8 значащих цифр.

(12) Таблица узлов квадратурных формул типа Чебышева

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \text{ для } n=3(1)10 \text{ и } \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x) dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

для  $n=4(1)10$  с 7-ю значащими цифрами

(14) Таблица узлов  $p_i$  и  $\frac{1}{p_i}$  квадратурной формулы чебышевского типа

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^p}{p} F(p) dp \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(p_i) \text{ для обращения преобразования Лапласа, } n=1(1)10 \text{ с 8-ю значащими цифрами.}$$



(16) Таблица коэффициентов квадратурной формулы для выполнения обратного преобразования Лапласа

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp \approx \sum_{k=1}^m A_k^{(m)}(t) F(k)$$

для  $m = 1(1)6$ ,  $t = 0(0,1)6$ ,  $m = 7$ ,  $t = 0(0,2)7$ ,  $m = 8$ ,  $t = 0(0,2)8$ ,  $m = 9$ ,  $t = 0(1)9$ ,  $m = 10$ ,  $t = 0(1)10$ . 2—8 значащих цифр.

(19) Таблица коэффициентов  $K_{2s}$  квадратурной формулы с центральными разностями

$$\frac{1}{n} \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+(\frac{n-1}{2})h} f(x) dx = [f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+\overline{n-2}h) + f(a+\overline{1}h)] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m-1} K_{2s} \left[ \delta^{2s-1} f\left(a + n - \frac{1}{2}h\right) - \delta^{2s-1} f\left(a - \frac{1}{2}h\right) \right] + nh^{2m} K_{2m} f^{(2m)}(\xi) \text{ для } m = 1(1)25. \text{ Точные значения до } K_{20} \text{ и } 18 \text{ десятичных знаков до } K_{50}.$$

(20) Таблица узлов  $p_i$  и  $\frac{1}{p_i}$  и весов квадратурной формулы гауссова типа

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp \approx \sum_{i=1}^n A_i^{(n)} F(p_i) \text{ для } i = 1(1)n, n = 1(1)8 \text{ для вы-}$$

полнения обратного преобразования Лапласа  $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp$ .

4—8 значащих цифры.

(21) Дополнительная к предыдущей таблица узлов  $p_i$  и  $\frac{1}{p_i}$  и весов для  $i = 1(1)n$ ,  $n = 1(1)16$  с 15-ю значащими цифрами.

Salzer H. E., Shultz D. C., Thompson E. P.

(1) Таблица коэффициентов  $C_i$  и  $D_i$  квадратурной формулы

$$\int_{x_0+gh}^{x_0+ph} f(x) dx \approx h \sum_{i=-(n-1)/2}^{n/2} (C_i^{(n)}(p) f_i + D_i^{(n)}(p) h f'_i)$$

для  $n = 2(1)5$ ,  $p = -\frac{1}{2}(n-1)(0,01)\frac{1}{2}n$ . 10 десятичных знаков.

Salzer H. E., Zucker R.

(1) Таблица узлов и весов квадратурной формулы

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

для  $s = 0$ ,  $n = 2(1)15$  с 12—14-ю значащими цифрами.

Salzer H. E., Zucker R., Capuano R.

- (1) Таблица абсцисс и коэффициентов  $\alpha_i^{(n)}$  и  $\beta_i^{(n)} = \alpha_i^{(n)} \exp[(x_i^{(n)})^2]$  квадратурной формулы  $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(n)} e^{x_i^{(n)2}} F(x_i^{(n)})$  для  $n = 1(1)20$  с 13-ю значащими цифрами.

Smith E. R.

- (1) Нули полиномов Эрмита  $(-1)^n e^{x^2/2} d^n (e^{-x^2/2}) dx^n = \sqrt{2} x_i^{(n)}$  при  $n = 1(1)27$  с 6-ю значащими цифрами.

Stroud A. H.

см. Hammer P. C., Marlowe O. J., Stroud A. H.

Struble G.

- (1). Формула наивысшей алгебраической степени точности вида

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2 \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{f^{(2i)}(0)}{(2i+1)!} + \sum_{j=1}^m a_j [f^{(k)}(x_j) - f^{(k)}(-x_j)],$$

$$R_{km} = \frac{f^{(4m+k+1)}(\eta)}{(4m+1)!} C_{km}, \quad k - \text{нечетное},$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2 \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{f^{(2i)}(0)}{(2i+1)!} + \sum_{j=1}^m a_j [f^{(k)}(x_j) + f^{(k)}(-x_j)],$$

$$R_{km} = \frac{f^{(4m+k)}(\eta)}{(4m)!} C_{km}, \quad k - \text{четное}.$$

Таблица  $x_j$  и  $a_j$  для  $k = 1, 2, m = 1(1)10, 8-15$  значащих цифр.

Weiss G.

см. Rabinowitz P., Weiss G.

Zucker R.

1. См. Salzer H. E. and Zucker R.
2. См. Salzer H. E., Zucker R. and Capuano R.

*Владимир Иванович Крылов,  
Любовь Тарасовна Шульгина*

СПРАВОЧНАЯ КНИГА  
ПО ЧИСЛЕННОМУ  
ИНТЕГРИРОВАНИЮ

М., 1966 г., 372 стр. с илл.

Редактор *И. П. Мысовских*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректоры: *И. Я. Кришталь* и *А. Ф. Серкина*

Сдано в набор 15/IV 1965 г. Подписано к печати  
14/III 1966 г. Бумага 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Физ. печ. л. 23,25.  
Условн. печ. л. 23,25. Уч.-изд. л. 27,79. Тираж  
21 000 экз. Т-01478.

Цена книги 1 р. 67 к. Заказ № 345.

Издательство «Наука».

Главная редакция

физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Отпечатано в Ленинградской типографии № 1  
«Печатный Двор» им. А. М. Горького Главполи-  
графпрома Комитета по печати при Совете Ми-  
нистров СССР, Гатчинская, 26 с матриц 2-ой  
типографии издательства «Наука» Москва,  
Шубинский пер., 10.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

Бейтмен Г. и Эрдей А., Высшие трансцендентные функции (функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены). 20 л., 1 р. 24 к. (Серия «Справочная математическая библиотека».)

Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, 30 л., 1 р. 70 к.

Воеводин В. В., Численные методы алгебры (теория и алгоритмы), 14 л., 98 коп. (Серия «Библиотека прикладного анализа и вычислительной математики».)

Климов Г. П., Стохастические системы обслуживания, 12 л., 86 коп. (Серия «Библиотека прикладного анализа и вычислительной математики».)

Самарский А. Н., Разностные методы решения многомерных уравнений, 15 л., 1 р. 05 к. (Серия «Библиотека прикладного анализа и вычислительной математики».)

Соболев С. Л., Приближенное интегрирование функций многих переменных, 22 л., 1 р. 57 к. (Серия «Библиотека прикладного анализа и вычислительной математики».)

Хренов Л. С., Восьмизначные таблицы тригонометрических функций, 70 л., 3 р. 91 к.

*Предварительные заказы на печатающуюся литературу принимаются всеми магазинами Книготорга. При отказе в приеме заявки обращайтесь по адресу: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Союзкнига».*

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ:

Бейтмен Г. и Эрдей А., Высшие трансцендентные функции. (Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.) Перевод с английского Н. Я. Виленкина. «Наука», 1965, 296 стр., 1 р. 14 к. (Серия «Справочная математическая библиотека».)

Бремикер К., Логарифмно-тригонометрические таблицы с шестью десятичными знаками. Физматгиз, 1962, 664 стр., 3 р. 34 к.

Кампеде Ферье Ж. и др., Функции математической физики (Справочное руководство.) Перевод с французского, 1963, 102 стр., 28 коп.

Люстерник Л. А. и др., Математический анализ (вычисление элементарных функций). Физматгиз, 1963, 248 стр., 71 коп.

Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы. Изд. 3-е, Физматгиз, 1962, 464 стр., 2 р. 53 к.

*Книги продаются в книжных магазинах, а также высылаются почтой наложенным платежом без задатка всеми республиканскими, краевыми и областными отделениями «Книга — почтой». В случае отсутствия книги в местных магазинах заказы следует направлять по адресу: Москва, К-31, Петровка, 15, магазин № 8 «Москниги».*