

**РАСЧЕТ
ФИЗИЧЕСКИХ
ПОЛЕЙ
МЕТОДАМИ МОДЕЛИРОВАНИЯ**

РАСЧЕТ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ МЕТОДАМИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Под редакцией
чл.-кор. АН СССР Л. А. Люстерника
и Лауреата Государственной премии Б. А. Волынского



ИЗДАТЕЛЬСТВО «МАШИНОСТРОЕНИЕ»
Москва 1968

Расчет физических полей методами моделирования. Под ред. д-ра физ.-мат. наук, чл.-корр. АН СССР Л. А. Люстерника и лауреата Государственной премии Б. А. Волынского, «Машиностроение».

Книга посвящена аналоговым методам и средствам решения уравнений математической физики, т. е. задачам по расчету физического поля. Главное внимание уделено применению разнообразных аналоговых устройств для решения практических задач теории упругости, фильтрации, теплопереноса, электроники и др. Наряду с этим в книге изложены новые устройства и отдельные элементы, расширяющие класс решаемых задач. К ним относятся цифро-аналоговые устройства, автоматизированный электроинтегратор, автоматические устройства для решения задач нестационарной теплопроводности и др.

Книга предназначена для научных и инженерных работников, работающих в области практического решения задач по расчету физического поля, а также может быть полезна для преподавателей и студентов, специализирующихся в области вычислительной техники.

Табл. 9. Илл. 198. Библ. 287 назв.

Редколлегия:

В. С. Лукьянов, И. М. Тетельбаум, А. И. Медовиков, В. Е. Бухман, Л. Г. Коган, М. Д. Головки, чл.-корр. АН УССР П. Ф. Фильчаков.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие аналоговых средств для решения задач по расчету физических полей привело к созданию разнообразных оригинальных устройств, основанных на новых принципах, новых идеях. Кроме ранее созданных и хорошо известных приборов типа ЭГДА, электрических сеток и гидравлических интеграторов, появились приборы наведенного тока, аналоговые интегровычислители, статические электроинтеграторы, электромагнитные устройства, приборы с использованием операционных усилителей, автоматизированные сетки для решения неоднородных бигармонических уравнений, аналого-цифровые устройства, комбинации аналоговых и цифровых машин и др.

Такое увеличение класса моделирующих устройств позволяет значительно расширить круг решаемых задач (задачи со сложными краевыми условиями, нелинейные задачи, задачи с многосвязными и неограниченными областями) и повысить точность их решения, а также позволяет применять в некоторых случаях более простые и дешевые устройства.

Многообразии моделей и новых методов моделирования создают возможность использования аналоговых средств для решения задач по расчету поля. Однако информация об этих возможностях крайне недостаточна. Настоящая книга, составленная по материалам 2-й Всесоюзной конференции по аналоговым методам и средствам решения краевых задач, в какой-то мере восполняет этот пробел.

В книге, в основном, рассматриваются вопросы практического применения различных моделирующих устройств для решения задач теплофизики, теории упругости, гидромеханики и др.

К задачам теплопереноса и фильтрации относятся: исследование процессов в теплообменных устройствах, определение температурного напряжения графита в ячейке реактора, расчет температурных полей в промерзающих и оттаивающих грунтах, расчет отопительных систем зданий, исследование теплофизических процессов обработки металлов резанием, исследование явлений теплопереноса при фильтрации воды в грунте, расчет дегазации угольных пластов скважинами и др.

В области теории упругости рассматриваются задачи: динамические расчеты сооружений, изгиб плит и пологих оболочек, расчет напряженного состояния массивно-контрфорсной плотины и др.

Некоторые решенные задачи относятся к области электроники и радиотехники.

Решение перечисленных задач по расчету физического поля связано с рациональной разработкой и выбором оптимальных вариантов проектов различных систем, технологических процессов, сооружений, машин и механизмов.

Сравнительно небольшая часть книги посвящена новым моделирующим устройствам и элементам. В этой части описаны: автоматизированный электроинтегратор МИСИ для решения неоднородных бигармонических уравнений, электрическая цифро-аналоговая модель для решения задач нестационарной теплопроводности, промышленный образец статического электроинтегратора, устройство для автоматизации итерационного процесса решения, приставка к прибору ЭГДА-9160 для съема результатов решения задач и др. Некоторые статьи относятся к общей теории моделирования решения краевых задач (применение АВМ с операционными усилителями для решения задач по расчету поля, моделирование конформных отображений, определение точности решения задач фильтрации на сеточных моделях и др.).

Разработка новых аналоговых средств и развитие теории моделирования расширяют возможности применения этой важной области вычислительной техники.

Настоящая книга будет содействовать дальнейшему развитию аналоговых методов и средств для решения практических задач по расчету поля. Кроме того, материалы книги могут быть использованы студентами соответствующих специальностей различных вузов.

Мы будем благодарны читателям за все пожелания и замечания, которые просим направлять в адрес издательства.

*Л. А. Люстерник,
Б. А. Волынский*

Б. А. Волынский

ОБ ОСНОВНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ И РАБОТАХ В ПЕРИОД 1962—1965 гг.

За период времени с 1962 по 1965 г. значительно выросло применение аналоговых методов и средств решений краевых задач. В эти годы были выполнены важные теоретические и конструкторские работы, совершенствовались средства и методы наиболее распространенных моделирующих устройств типа ЭГДА, электрические сетки и гидравлические интеграторы и развивались теория и практика метода наведенного тока, аналоговых интегровычислителей, статических электроинтеграторов, квазианалоговых сеток, конформных отображений, а также разрабатывались цифро-аналоговые методы и комбинированное применение аналоговых и цифровых машин.

За истекший период был опубликован ряд монографий и учебных пособий, опубликованы труды Всесоюзных конференций и многие статьи в различных периодических изданиях. Некоторые работы советских ученых были опубликованы за рубежом. Сотни статей по самым разнообразным вопросам аналоговых методов и средств их применения для решения многих инженерных задач по расчету поля опубликованы в различных периодических изданиях трудов Академий, учебных и научно-исследовательских институтов и в отраслевых журналах.

Большая работа проводилась по разработке и созданию как аналоговых устройств в целом, так и отдельных узлов этих устройств. Наиболее распространенными аналоговыми устройствами являются модели типа ЭГДА.

Эти модели непрерывно совершенствуются, и класс решаемых на них задач расширяется. Ведущей организацией по этим моделям является отдел прикладной математики Института математики АН УССР (руководитель П. Ф. Фильчаков). Этот отдел работает по двум темам. По одной из них разрабатываются и конструируются модели на сплошных средах для моделирования стационарных и нестационарных процессов и ведутся работы в

направлении поиска новых сред и улучшения существующих сред (электропроводной бумаги, пластмассы и др.). Вторая тема посвящена разработке методов моделирования и их применению для решения краевых задач в области фильтрации, тепловых полей, электронной оптики, обтекания профилей с циркуляцией и со срывом струй, а также методов конформных отображений.

Большое распространение получили гидравлические интеграторы системы В. С. Лукьянова. Эти модели являются пока единственными, которые позволяют учитывать скрытую теплоту при исследовании тепловых процессов.

Ведущей организацией по гидравлическим интеграторам является лаборатория гидравлических аналогий ЦНИИС, руководимая В. С. Лукьяновым, которая занимается не только разработкой методов решения, позволяющих расширить класс решаемых задач, но и вопросами модернизации конструкции интегратора. Намечается применение капиллярных и диафрагменных элементов, что также позволит расширить класс решаемых задач.

Интенсивно развивается моделирование методом наведенного тока, разработанным Саратовским университетом (руководитель Г. М. Герштейн). Созданы автоматизированные установки с вибрирующим и пролетными зондами МНТ-ВЗ и МНТ-ПЗ. На базе установок МНТ-ВЗ и МНТ-ПЗ были решены задачи по определению электромагнитного поля волноводов сложной формы сечения, проведен анализ спектра пространственных гармоник цилиндрических и линейных замедляющих систем при различных сдвигах фаз, осуществлено моделирование поля заземляющего устройства в полубесконечной проводящей среде и др.

Саратовским университетом разработана методика задания граничных условий I рода и намечены пути для задания граничных условий II рода; произведен теоретический анализ погрешности метода для случаев вибрирующего и пролетного зондов; обоснована возможность моделирования двумерных полей, описываемых уравнением Пуассона. Следует отметить простоту и надежность устройств приборов типа МНТ. Весьма целесообразно их применение для моделирования трехмерных полей и для решения некоторых внешних краевых задач.

Несомненный интерес представляет развитие метода решения краевых задач при помощи статического электроинтегратора, разработанного в проблемной лаборатории процессов горения и теплообмена Казахского университета группой Л. А. Вулиса и А. Т. Лукьянова. Удобство метода заключается в том, что подвижный счетный элемент может быть аналогом любого разностного оператора, что позволяет легко определять, например, значение искомой функции в трехмерной области для нелинейного уравнения параболического типа. Вместе с тем нужно отметить, что при этом методе требуется дополнительное цифровое устройство для использования итеративного метода решения.

На статическом электроинтеграторе Казахским университетом решен ряд сложных задач по расчету поля. К таким задачам относятся, например, расчеты переноса тепла и вещества в пограничном слое с учетом изменения физических констант, диффузии нейтронов в ядерных реакторах. Статический электроинтегратор применялся при строительстве Бухтарминской и Красноярской ГЭС для расчета температурных полей. В настоящее время разрабатывается методика решения гиперболических уравнений.

Образец статического электроинтегратора в 1964 г. экспонировался на ВДНХ СССР. В настоящее время создан промышленный образец статического электроинтегратора.

Очень интересные работы проведены Г. А. Рязановым в Ленинградском институте водного транспорта. Комбинированным применением электрических и электромагнитных полей удалось найти очень простой и изящный метод решения ряда сложнейших гидродинамических задач. Следует отметить, что впервые в практике моделирования решаются задачи с учетом циркуляции. Создан ряд моделирующих устройств, на которых решаются важные технические задачи. Эти устройства уже с успехом применяются в промышленности.

Отделом математического моделирования Института кибернетики АН УССР, руководимым Г. Е. Пуховым, на базе теории моделей пространственных полей с минимально искажающими границами построена модель для расчета полей блуждающих токов, которая использовалась для расчетов по электрозащите подземных сооружений от коррозии. Там же разработан метод построения электронно-сеточной модели с минимальным числом решающих усилителей.

Интересна работа Лихтциндера в Куйбышевском политехническом институте по созданию интегратора с экспотенциальным питанием, позволяющего на резисторах и конденсаторах получать положительные и отрицательные проводимости без использования решающих усилителей.

В Московском инженерно-строительном институте А. И. Медовиковым разработан автоматизированный электроинтегратор для решения задач теории упругости на двухэтажной сетке. Применение 100-канальной следящей системы позволило ликвидировать ручную подгонку граничных условий, на которую уходило несколько дней. Заслуживает внимания работа по автоматизации набора параметров сетки, выполняемая М. Д. Головки совместно с сотрудниками Рижского политехнического института.

Новая конструкция магазина сопротивлений на печатных схемах с использованием объема модели, предложенная Н. Н. Макаренко (Московский горный институт), позволяет сократить почти вдвое размер сетки.

Сеточные модели являются наиболее универсальными, так как приближенный метод решения дифференциальных уравнений

в частных производных при помощи конечных разностей по сравнению с другими методами наиболее универсален. К моделям этого типа относятся изготовлявшиеся промышленностью модели ЭИ-12, модели УСМ-1, а также все модели, разработанные и изготовленные собственными силами разных организаций. Несмотря на большое разнообразие сеточных моделей и их узлов, до сих пор не существует промышленной модели, отвечающей уровню современной техники. Промышленная модель УСМ-1 — громоздкая, дорогая и устаревшая конструкция, которая не может служить образцом. Такая модель содержит сотни тысяч штекеров для набора задач, имеет электронный стенд длиной 4,5 м на лампах и служит для задания переменных во времени граничных условий на 110 каналов; потребляемая мощность составляет 20 кВт; вместе с тем модель имеет очень малый диапазон изменения емкостей для решения задач нестационарного режима.

Никто не выпускает простые и дешевые сетки, простые и надежные итеративные устройства для решения нелинейных уравнений и уравнений со сложными граничными условиями, не занимается анализом работы различных организаций, эксплуатирующих сеточные модели, не проводит исследовательской работы по методам решения задач на таких моделях. Таким образом, следует признать, что положение с сеточными моделями является неблагоприятным и его следует исправить.

Помимо разработки конструкций аналоговых устройств во многих организациях расширялось применение этих устройств при решении практических задач и разрабатывалась методика решения этих задач.

На гидравлических интеграторах были рассчитаны температурные поля в условиях мерзлоты, неустановившейся фильтрации, температурные режимы в различных строительных и машиностроительных конструкциях и в металлургических процессах.

Более 100 организаций имеют установки гидравлических интеграторов разной мощности от односекционной до 24-секционной. Две установки переданы в Чехословакию и Польшу.

О возросшем применении гидравлических интеграторов свидетельствует число опубликованных работ: до 1961 г. были опубликованы 73 работы, а ко 2-й конференции — 221 работа. На международной ярмарке в Лейпциге в 1963 г. демонстрировался пятисекционный гидравлический интегратор.

Много интересных задач решается с помощью устройств типа ЭГДА. К таким задачам относятся: моделирование задач нестационарной теплопроводности в электролитической ванне (Ю. Д. Денискин, МЭИ), расчет температурного поля на модели типа ЭГДА с учетом нелинейности уравнения (В. Г. Петухов) и др.

С целью обмена опытом и обобщения его Институт математи-

ки АН УССР проводит ежегодный семинар по моделям этого типа. Труды этих семинаров систематически публикуются.

Предложенная Л. В. Ницецким методика решения ряда внешних краевых задач позволяет расширить класс решаемых на сетках задач.

В области использования сеточных моделей для решения нефтяных задач большая работа проводится во Всесоюзном научно-исследовательском нефтегазовом институте под руководством М. М. Максимова и Л. Г. Когана. Для обобщения опыта и выработки рекомендаций по методам решения этот институт провел Всесоюзный семинар, на котором был заслушан ряд докладов по применению сеточных моделей для решения задач по рациональной разработке и эксплуатации нефтяных месторождений.

Успешно работают лаборатории, оснащенные сеточными моделями, в Гидропроекте (руководитель А. К. Кузнецова), где решаются сложные задачи теории упругости, в Институте строительной физики (руководитель В. К. Ивашкова), где разрабатываются строительные конструкции и др.

При помощи оригинальных методов решения задач на сетках были выполнены следующие работы: «Решение нелинейных задач по расчету поля», «Моделирование стационарных полей в неоднородных и нелинейных средах», «Исследование теплофизики процессов обработки материалов резанием», «Решение некоторых задач диффузии», «Исследование турбинной лопатки с двухконтурным охлаждением», «Расчет электромагнитных статических и квазистационарных полей в однородных и нелинейных средах с любыми граничными условиями» и др.

Метод моделирования конформных отображений, разработанный в Горьковском университете (руководитель А. Г. Угодчиков) и в Горьковском инженерно-строительном институте, был использован для решения некоторых задач теории упругости и для создания электронной моделирующей установки. Однако по ряду причин этот метод пока еще находится на стадии лабораторных исследований.

Остроумный метод решения стационарных нелинейных задач предложен Ю. М. Мацевитым. С помощью несложного математического преобразования нелинейная задача приводится к линейной однородной, которая решается на сетке из постоянных сопротивлений.

Представляет интерес применение итеративного метода (метода Либмана) для решения некоторых нелинейных задач.

Большая трудоемкость решения этим методом, а также необходимость решения некоторых других задач привела к появлению цифро-аналоговых комплексов устройств.

Многолетний опыт работы по решению краевых задач показал, что для большинства задач практически недостаточно использовать только цифровую машину или только аналоговую.

К таким задачам относятся задачи с неограниченными или весьма большими неоднородными областями и задачи, в которых приходится многократно применять процесс итерации для граничных условий и для внутренней области.

Такая же сложность возникает при нахождении траекторий движения частиц, если траектория определяется уравнениями, в которые в качестве параметров входят напряженности поля. К подобным задачам относятся, например, задачи по оптимальной разработке нефтяного пласта, задачи обтекания тел потоком жидкости, контактная задача теории упругости, задача нестационарной теплопроводности с переменными во времени граничными условиями и переменной правой частью (с учетом нелинейности), задача по определению траектории движения зарядов в электрических и магнитных полях и др.

Для решения вышеперечисленных задач необходимы машины с цифро-аналоговыми или с аналого-цифровыми элементами. В. С. Лукошковым и И. М. Блейвасом были созданы и применяются траектографы для нахождения траекторий движения зарядов в электрических и магнитных полях. В этих устройствах датчиком является электролитическая ванна, снабженная тоководами. Для моделирования пространственного заряда и для вычисления траектории используются электромеханические счетные устройства и электрические аналоги. Для ускорения решения задач этой группой разработана система автоматизации итеративного процесса решения. Проводится работа по созданию более мощной машины на базе автоматизированной сетки и цифровой быстродействующей машины. Такая машина позволяет решать задачи о движении заряженных частиц не только в статических электрических и магнитных полях, но и в быстропеременном электромагнитном поле, описываемом полной системой уравнений Максвелла.

Примером создания аналоговой машины на базе цифро-аналоговых элементов является модель ЭМ-10, выполненная Б. А. Волинским, В. Е. Бухманом и Н. Н. Макаренко. Эта машина предназначена для решения задачи нестационарной теплопроводности с переменными во времени граничными условиями III рода и переменной правой частью. Используя принцип цифро-аналогового преобразователя, примененного в этой машине, можно создать итераторы для решения задач со сложными граничными условиями, а также для решения ряда нелинейных задач.

Известный интерес представляет работа Г. И. Васильева и Ю. А. Панкова по комбинированному использованию аналоговой машины УСМ-1 и цифровой управляющей машины ВНИИЭМ-3 для решения задач нестационарной теплопроводности.

А. Г. Угодчиков

**ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ
КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ
К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

Эффективными методами решения плоских краевых задач являются методы, основанные на использовании функции комплексного переменного с применением конформных отображений.

Построение конформного отображения идентично решению задачи Дирихле (или Неймана) и поэтому для решения этих задач во многих случаях нет необходимости в построении конформно отображающих функций, если искомые величины достаточно просто выражаются через градиент потенциала.

С другой стороны, при решении бигармонических задач непосредственное моделирование связано с весьма большими трудностями, а для решения этих задач аналитическими методами необходимо построить функцию, отображающую одну из канонических областей Σ (круг, круговое кольцо и т. п.) плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ на область S плоскости $z = x + iy$, для которой решается краевая задача.

Задачу приближенного построения конформно отображающих функций следует разделить на две части:

- а) определение соответствия точек границы γ области Σ и границы L области S ;
- б) построение приближенного выражения отображающей функции при известном соответствии граничных точек.

Определение соответствия точек отображаемых областей, в том числе и граничных, идентично решению гармонической задачи. На возможность моделирования регулярных функций комплексного переменного указывал еще Д. К. Максвелл [1], а в работах Фёрстера [17] были даны методы экспериментального решения гармонических задач.

Моделированию конформных отображений с помощью электролитической ванны была посвящена работа Брэдфильда и др. [16].

Дальнейшее развитие работ по моделированию конформных отображений идет параллельно с разработкой методов построения отображающих функций.

Первые результаты построения отображающих функций для наперед заданных односвязных (двухсвязных) областей были получены в работах [7, 8], где для установления соответствия граничных точек круга (кругового кольца) и заданной односвязной (двухсвязной) области рекомендовалось использование стандартных приборов ЭГДА и, исходя из экспериментально установленного соответствия точек, построение отображающей функции в виде полинома.

В последующих работах [9] этот метод был распространен на односвязные бесконечные и полубесконечные области и полубесконечные двухсвязные области, а также был использован для решения широкого круга инженерных задач методами теории упругости.

Необходимо отметить здесь работы Г. Н. Положего [2, 3], в которых был предложен новый метод установления соответствия граничных точек — метод сравнения сопротивлений и предлагалось строить приближенное выражение отображающей функции в виде ряда по натуральным логарифмам.

В этот же период были опубликованы результаты работ Малаварда [18], О. В. Тозони [6], В. Е. Шеманского [15], Г. Ю. Степанова [12], в которых разрабатывались методы и приемы моделирования конформных отображений.

За последнее время в связи с появлением электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ) расширились возможности применения приближенных методов, в том числе методов построения конформно отображающих функций и решения краевых задач.

Предложенный П. В. Мелентьевым метод вычисления коэффициентов полинома

$$z = \omega_n(\zeta) = \sum_{k=1}^m C_k \zeta^k, \quad (1)$$

осуществляющего приближенное отображение круга $|\zeta| \leq 1$ на область S , обладает недостатком: даже в узлах интерполяции значение полинома $\omega_n(\zeta)$ не совпадает с заданными значениями функции $\omega(\zeta)$, так как полином (1) строится не как интерполяционной полином функции $\omega(\zeta)$, а получается в результате тригонометрической интерполяции действительной или (мнимой) части функции $\zeta^{-1}\omega(\zeta)$.

Первая попытка построения интерполяционного полинома вида (1), совпадающего в узлах интерполяции $\zeta_j = e^{i\theta_j}$, где $\theta_j = \frac{2\pi}{m} j$ ($j = 1, \dots, m$), с заданными значениями отображающей

функции $\omega(\xi)$, была сделана в работе П. Ф. Фильчакова [13]. Автор строит систему линейных алгебраических уравнений и для решения ее использует специальный прием. Необходимые значения отображающей функции в узлах интерполяции определяются при помощи электромоделирования [7].

Для построения последовательных приближений интерполяционного полинома производится искусственное зануливание коэффициентов при больших степенях ξ или вычисление их по принципу пропорционального убывания. В результате этого точки

$$z_{ja}^{(\lambda)} = \omega_{na}^{(\lambda)}(e^{i\theta_j})$$

оказываются не на границе L . За исходные значения для построения следующего приближения принимаются те точки $z_j^{(\lambda+1)}$ границы L , которые получаются путем сноса точек $z_{ja}^{(\lambda)}$ на L по нормали к L .

В 1962 г. на Первой конференции по аналоговым средствам и методам решения краевых задач нами был изложен иной метод построения интерполяционного полинома (1), основанный на использовании интерполяционных полиномов Лагранжа. Основные положения этого метода изложены в работах [10, 11], а вывод формул для вычисления коэффициентов C_k интерполяционного полинома (1) дан в работе [12]:

$$C_{\bar{k}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m z_j e^{-ik\theta_j} \quad (k = 1, \dots, m), \quad (2)$$

где z_j — значения отображающей функции в основных узлах интерполяции $\xi_j = e^{i\theta_j}$, где $\theta_j = \frac{2\pi}{m} j$ ($j = 1, \dots, m$), определяемые

в нулевом приближении при помощи электромоделирования. Для нахождения последовательных приближений был построен цикл

с введением промежуточных узлов $\xi_j' = e^{i\theta_j'}$, где $\theta_j' = \frac{\pi}{m} (1 + 2j)$ ($s = 0, \dots, m - 1$), который давал возможность при

данном числе узлов m свести до минимума отклонения границы L' , имеющей уравнение $z = \omega_n(e^{i\theta})$, от заданной границы L .

С небольшими изменениями этот метод был распространен на конечные двухсвязные, бесконечные и полубесконечные односвязные, а также на полубесконечные двухсвязные области [10]. Дальнейшие исследования показали, что разработанный метод позволяет, используя ЭЦВМ, строить отображающие функции для наперед заданных областей с автоматическим выбором необходимого числа узлов интерполяции (членов полинома) по заданному допускаемому отклонению границы L' от границы L^* .

* См. доклад Е. В. Прока на IV Всесоюзной конференции по применению электронных математических машин в строительной механике, машиностроении и строительном производстве.

Применение этого метода построения отображающих функций для решения краевых задач теории упругости (кручение и изгиб стержней по Сен-Венану и плоская задача) показало лучшую сходимость результатов и меньшие погрешности в напряжениях на контуре, возникающих за счет отклонения границы L' от заданной границы L .

В последних работах, проводимых в том же направлении, была несколько изменена методика решения системы линейных уравнений: используя известные формулы для тригонометрических сумм, были получены формулы для коэффициентов C_n интерполяционного полинома (1), совпадающие с формулами (2), полученными ранее [14].

Развитие методов построения отображающих функций имеет определенную тенденцию перехода от электро моделирования конформного отображения в сочетании с элементарными приемами счета к проведению всех вычислений на ЭЦВМ без предварительного моделирования. Это позволяет объединить все вычисления по решению той или иной краевой задачи в единую программу, в которой имеется подпрограмма построения отображающей функции.

Необходимо остановиться также на новом направлении работ, развивавшихся в период между 1-й и 2-й конференциями и имеющих прямое отношение к моделированию конформных отображений. Речь идет о моделировании конформных отображений и решении краевых (гармонических и бигармонических) задач на электронных моделях* [5].

Принципиально новым в этих работах является создание специальных блоков типа гармонического фазовращателя, которые в совокупности со следящей системой функционального преобразователя (фотоформера) с круговой разверткой и стандартными электронными блоками позволяют:

а) представить краевые условия для комплексных потенциалов при произвольной звездной области как функцию одной переменной — центрального угла θ единичного круга $|\zeta| \leq 1$ или, что то же, натурального масштаба времени;

б) определить из этих условий действительную и мнимую части искомых аналитических функций;

в) получить на регистрирующем приборе (осциллографе или двухкоординатном столе) эпюры напряжений.

* Супрун А. Н. Прибор для конформного отображения единичного круга на односвязную область. Авторское свидетельство № 152123. «Бюллетень изобретений и товарных знаков», 1962.

Супрун А. Н. Устройство для расчета сплошного цилиндрического вала на кручение. Авторское свидетельство № 168521. «Бюллетень изобретений и товарных знаков», 1963.

В заключение отметим, что в статье освещены лишь основные направления работ в области моделирования конформных отображений, проведенных за период между 1962 и 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максвелл Д. К. Трактат об электричестве. Т. 2. М.—Л. Изд. АН СССР, 1950, стр. 381.
2. Положий Г. Н. Конформное отображение односвязных и двухсвязных областей и определение постоянных Кристофеля—Шварца при помощи математического прибора. «Доклады АН СССР», т. 104, Изд. АН СССР, № 1, 1955, стр. 15—18.
3. Положий Г. Н. Эффективное решение задачи о приближенном конформном отображении односвязных и двухсвязных областей и определение постоянных Кристофеля—Шварца при помощи электрогидродинамических аналогий. Украинский математический журнал. т. 7, № 4, 1955, стр. 423—432.
4. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомшины. М., Физматгиз, 1962, стр. 146.
5. Супрун А. Н., Ильин Н. А. Прибор для воспроизведения границ при конформном отображении круга (кругового кольца) на односвязную (двухсвязную) область, когда отображающая функция имеет вид полинома. Труды Горьковского инженерно-строительного института, Вып. 44, 1964, стр. 46—56.
6. Тозони О. В. Обоснование экспериментально-аналитического метода решения задачи Дирихле для односвязной и двухсвязной областей. Труды Новочеркасского политехнического института. т. 43, 1956, стр. 45—64.
7. Угодчиков А. Г. Электромоделирование задачи конформного преобразования круга наперед заданную односвязную область. Украинский математический журнал. т. 7, № 2, 1955, стр. 221—230.
8. Угодчиков А. Г. Электромоделирование конформного преобразования кругового кольца на заданную двухсвязную область. Украинский математический журнал. т. 7, № 3, 1955, стр. 305—312.
9. Угодчиков А. Г. Основные принципы решения задач теории упругости при помощи электромоделирования конформных отображений. Труды второй межвузовской научно-технической конференции по электрическому моделированию задач строительной механики, теории упругости и сопротивления материалов (Ростов-на-Дону, 1962), Новочеркасский политехнический институт, 1962, стр. 18—24.
10. Угодчиков А. Г. Применение электромоделирования и интерполяционных полиномов Лагранжа для построения конформно отображающих функций. Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. Киев, «Наукова думка», 1963, стр. 28—35.
11. Угодчиков А. Г. Построение конформно отображающих функций при помощи электромоделирования и интерполяционных полиномов Лагранжа. В сб. «Аналоговые средства и методы решения краевых задач». Киев, «Наукова думка», 1965, стр. 183—191.
12. Угодчиков А. Г. О построении конформно отображающих функций при помощи электромоделирования и интерполяционных полиномов Лагранжа. ДАН УССР, 1963, № 11, стр. 29—35.
13. Фильчаков П. Ф. О конформном отображении заданных односвязных однолистных областей при помощи электромоделирования. Доклады четвертой межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования в различных отраслях техники. Сб. 1. Изд. МЭИ, М., 1962, стр. 67—74.
14. Фильчаков П. Ф. Приближенные методы конформных отображений. Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 181.

15. Шеманский В. Е. О конформном отображении при помощи электро моделирования. Украинский математический журнал. Т. 8, 1956, № 1, стр. 125—129.

16. Brandfield K. N., Hooker S. G., Southwell R. W. Conformal Transformation With the aid of an Electrical Tank. Proceedings of the royal society Series A Mathematical and Physical No 898, т. 159, 1937, London, p. 315—346.

17. Forster R. Experimentelle Lösung von Bandwestaufgaben der Gleichung $\Delta^2 F=0$. Archiv für Electrotechnik, Bd. 2, H. 5, 1913, s. 175—181.

18. Malavard L. Sur une nouvelle technique dans le calcul experimental par andlogier rheo electricques. La Recherche Aeronautique, 1951, № 90, p. 61—69.

*И. М. Витенберг,
Р. Л. Танкелевич*

ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ АВМ С ОПЕРАЦИОННЫМИ УСИЛИТЕЛЯМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

До последнего времени аналоговые вычислительные машины (АВМ) с операционными усилителями чаще всего представлялись как устройства для исследования динамических систем. Обладая целым рядом достоинств, отличающих их от других, применяемых в настоящее время вычислительных средств (возможность параллельной обработки информации и вытекающее отсюда высокое информационное быстродействие, простота процедуры решения задачи, наглядность получаемого решения и возможность решения сложных многовариантных и обратных задач), АВМ с операционными усилителями имеют все основания найти широкое применение при решении целого ряда новых, отличных от систем обыкновенных дифференциальных уравнений, классов задач.

Внимание исследователей в области средств аналоговой вычислительной техники (АВТ) с операционными усилителями уже давно привлекают вопросы, связанные с решением на таких машинах уравнений в частных производных различных типов. Первые работы в этой области применительно к АВМ с операционными усилителями были сделаны Хоу и Ханеманом.

В дальнейшем работы в этом направлении проводились Фишером, Маккеем, Карплюсом, Амелингом, Томовичем, Миурой и Иватой и др. Исследования в основном касались применения АВМ с операционными усилителями для решения одномерных уравнений теплопроводности с использованием метода прямых и метода разделения переменных. Метод прямых

и некоторые особенности его применения для решения на АВМ эллиптических, гиперболических и некоторых других уравнений с быстрой периодизацией решения исследовали Фишер и Маккей. Особо следует отметить работу Миура и Ивата, в которой была сделана попытка использования новых аналоговых технических средств, имевшая своей целью существенно сократить требуемое количество аналогового оборудования при решении одномерного уравнения теплопроводности. Оценке точности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемой по методу прямых, посвящена работа Хенинга и Хаэвдала. В иностранной литературе большое внимание уделяется анализу конкретных задач, решение которых проводится на структурных АВМ.

Авторами в коллективе НИИсчетмаша была предпринята попытка рассмотреть общие вопросы, связанные с решением уравнений в частных производных на АВМ, оценить возможности средств АВТ при решении сложных функциональных задач, проанализировать известные методы решения таких задач с целью выделения из них наиболее эффективных для данного случая методов, разработать некоторые новые приемы и методы и предложить наиболее пригодную для решения краевых задач структуру машин, построенных на базе АВМ с операционными усилителями. Ниже приводятся некоторые предварительные результаты этой работы. Дальнейшее успешное развитие перечисленных выше направлений работы возможно лишь при широком участии большого круга организаций, в число которых должны входить как организации, занимающиеся разработкой средств АВТ, так и организации, использующие в настоящее время сеточные или цифровые вычислительные машины для решения уравнений с частными производными.

Вычислительной математике известно большое число методов решения дифференциальных уравнений в частных производных: конечно-разностные и вариационные методы, метод сведения задач к интегральным уравнениям, метод конформных преобразований и статистические методы.

Задачу оценки, отбора и развития методов, известных в вычислительной математике, для их реализации с помощью аналоговых вычислительных машин следует решать с позиций возможностей аналоговой вычислительной техники, т. е. следует иметь в виду, что аналоговые вычислительные машины с операционными усилителями наиболее успешно применялись и применяются для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и для выполнения ряда непрерывных операций над функциями.

С этой точки зрения ниже используется следующая классификация методов решения уравнений в частных производных на АВМ с операционными усилителями:

1) методы, в которых приближенное решение краевой задачи находится решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений, причем моделирование этой системы, как правило, производится с выполнением целого ряда специфических для АВМ операций;

2) методы, заключающиеся в построении специальных функций, из которых составляется решение данной краевой задачи (методы рядов); при этом назначение средств АВТ состоит в генерировании некоторых функций;

3) методы, в которых решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных при конечно-разностной аппроксимации заданного уравнения, производится «по частям» (итерационные методы);

4) методы, целесообразность и возможность применения которых обуславливается спецификой постановки конкретных краевых задач. К числу этих методов относятся статистические методы, методы приведения к интегральным уравнениям, вариационные методы, методы конформных преобразований и методы, использующие операционный анализ. Эти методы, будучи значительно менее универсальными, чем указанные выше, вместе с тем в ряде случаев могут оказаться весьма полезными. Применение АВМ при использовании любого из перечисленных выше методов приводит либо к необходимости усложнения алгоритма, либо к сужению задачи, подлежащей решению. Так, например, использование статистических методов обеспечивает отыскание значения искомой функции лишь в одной точке области при большом количестве проведенных решений. Операционные методы пригодны, по-видимому, лишь для решения задач, отображающих переходные процессы в одномерных линейных системах.

В дальнейшем изложении методы четвертого класса не рассматриваются, так как приемы и аппаратура, необходимые для реализации этих методов, аналогичны рассматриваемым ниже для реализации методов, принадлежащих к трем первым классам.

Подобная классификация в значительной степени условна и используется главным образом из методических соображений и для выявления специфики рассматриваемых вычислительных средств.

К первому классу методов можно отнести разнообразные конечно-разностные методы, получившие широкое распространение при решении уравнений в частных производных на различных вычислительных машинах. Среди этих методов наибольший интерес представляет метод прямых, применение которого приводит к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Суть этого метода состоит в том, что решение краевой задачи ищется вдоль некоторого семейства прямых, проведенных в заданной области. При этом образуется система обыкновенных дифференциальных уравнений, на которую накладывается крае-

вая задача. В случае области произвольного вида эта система на некоторых участках прямых оказывается недоопределенной.

Пусть требуется найти решение уравнения в частных производных

$$L(u) = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F(u) = H(x, y) \quad (1)$$

в некоторой области G . При использовании метода прямых в этой области строится некоторое семейство прямых $\{y_k\}$, где $y_k = y_0 + kh$, $k = 1, 2, \dots, n$, и для каждой точки, принадлежащей этому семейству, составляются дифференциально-разностные уравнения. При этом для образования разностных выражений, заменяющих производные в направлении y , используются значения неизвестной функции в точках, принадлежащих этому семейству. Применение разностных операторов, обозначенных ниже Δ и $\bar{\Delta}$, образующих при действии на непрерывную функцию приближенные выражения для производных по y и использующих значения в точках, принадлежащих $\{y_k\}$, приводит к следующей приближенной записи уравнения (1):

$$A \frac{d^2 u_k}{dx^2} + 2B\Delta \frac{du_k}{dx} + C\bar{\Delta} u_k + D \frac{du_k}{dx} + E\Delta u_k + Fu_k = H(x, y_k) \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Если учесть, что разностные операторы образуют функции от u_k , u_{k-1} , u_{k+1} , то, составляя уравнения, аналогичные уравнению (2), можно получить системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Схема моделирования для одного из уравнений системы показана на рис. 1.

Приведенное выше уравнение в частных производных может быть эллиптическим, параболическим или гиперболическим в зависимости от соотношения величин и знаков коэффициентов A , B и C . Таким образом, блок-схема моделирования, показанная на рис. 1, носит универсальный характер. В случае необходимости решения систем нелинейных уравнений изменения в схеме сводятся лишь к добавлению блоков, реализующих нелинейные зависимости.

Что касается самой процедуры моделирования, то здесь следует отметить, что характерной особенностью метода прямых является сведение краевой задачи для уравнения в частных производных к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Избежать необходимости решения краевой задачи для системы, получающейся по методу прямых, удастся в редких случаях, например при решении одномерного уравнения теплопроводности при дискретизации по координате, когда приходится решать задачу Коши.

Решение краевой задачи на АВМ состоит в отыскании недостающих начальных условий, при которых выполняются граничные условия на концах интервала интегрирования. Так, в случае задачи Дирихле заданы начальные значения напряжения лишь на интеграторе \int_2 (рис. 1). При решении краевой задачи необходимо подобрать такое начальное напряжение на выходе интегратора \int_1 , чтобы напряжение на выходе интегратора \int_2 в конце интервала интегрирования соответствовало заданному граничному условию в точке, для которой составлено данное уравнение. Подбор недостающих начальных условий может производиться различными методами и в том числе поисковыми, использование

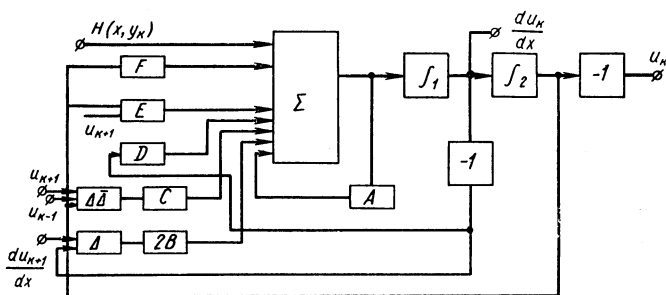


Рис. 1. Схема электрического моделирования одного из уравнений системы:

В схеме индексами $A, 2B, C, D, E$ и F обозначены устройства образования коэффициентов, индексами Δ и $\Delta\Delta$ — устройства образования разностных операторов первого и второго порядков соответственно

которых предполагает наличие некоторого функционала, минимум которого достигается при удовлетворении получаемого решения заданным граничным условиям.

Описанный выше метод прямых удается сравнительно легко реализовать с помощью АВМ с операционными усилителями лишь в случае прямоугольных ограниченных или неограниченных областей. Если же требуется найти решение задачи на области, ограниченной криволинейным контуром, то среди отрезков прямых y_n могут найтись такие, для которых проекции некоторых их участков на ось Ox имеют нулевые пересечения с соответствующими проекциями соседних отрезков. На таких участках моделируемая система оказывается недоопределенной. Значительные трудности возникают и при решении задач для многосвязных областей.

Расширение круга областей в рамках первого класса методов, предполагающих использование аналоговой машины для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, образуемых при замене частных производных конечными разностями, может быть достигнуто с помощью рассматриваемых ниже различных приемов и методов, касающихся самой процедуры моде-

лирования. К их числу относятся способ сопряжения прямоугольников, метод вписывания и метод конечно-разностных операторов с переменным шагом.

Способ сопряжения многоугольников предполагает возможность разбиения заданной области на прямоугольные подобласти. Для каждой из них по вышеизложенной методике может быть проведено моделирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью средств АВТ с операционными усилителями. Условия на границах этих подобластей задаются в соответствии с их взаимным расположением. Аналогичным образом определяются моменты включения и выключения интеграторов.

Метод вписывания предполагает возможность аналитического продолжения искомого решения через границу области. Метод удобен при решении краевых задач на односвязных областях, граничный контур которых пересекается не более чем в двух точках прямыми, параллельными одной из координатных осей. Решение ищется на прямоугольнике, в который «вписывается» заданная область, так чтобы значения искомого функции, полученной при моделировании, удовлетворяли заданным на границе области. При реализации метода с помощью средств АВТ производится мгновенная выработка и запоминание значений функции решения в моменты времени, соответствующие точкам пересечения прямых, проведенных в заданной области, с граничным контуром.

Интересные возможности среди методов первого класса открывает метод разностных операторов с переменным шагом, основная идея которого состоит в том, что решение уравнения в частных производных ищется в виде некоторого семейства функций, определенных на заданной в области системе кривых. Связь между функциями этого семейства осуществляется с помощью разностных операторов с переменным шагом, поскольку расстояние между кривыми в общем случае не остается постоянным. Использование этого метода приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Возможность отыскания решения вдоль произвольного семейства криволинейных направлений существенно расширяет класс областей, на которых методами моделирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений может быть получено решение уравнений в частных производных. Применение метода конечно-разностных операторов с переменным шагом обеспечивает общий подход и единообразие при создании схем моделирования.

Действительно, пусть решение ищется в форме функций $u(x, y)$. Если для некоторой кривой $y(x)$, заданной в области определения этой функции, построить разностный оператор «вперед» $\Delta_1(x)$ с переменным шагом [в качестве переменного шага

используется функция $h_1(x)$], то по аналогии с обычными разностными операторами оператор $\Delta_1(x)$ можно определить как

$$\Delta_1(x) u[y(x), x] = \frac{u[y(x) + h_1(x), x] - u[y(x), x]}{h_1(x)}.$$

Аналогично вводится разностный оператор «назад» $\bar{\Delta}_2(x)$ с переменным шагом $h_2(x)$:

$$\bar{\Delta}_2(x) u[y(x), x] = \frac{u[y(x), x] - u[y(x) - h_2(x), x]}{h_2(x)}.$$

Разности второго порядка $\Delta_{1,2}^2(x)$ с переменным шагом «вперед» $h_1(x)$ и переменным шагом «назад» $h_2(x)$ выразятся следующим образом:

$$\Delta_{1,2}^2(x) = 2 \left\{ \frac{u[y(x) - h_1(x), x]}{h_1(x)[h_1(x) + h_2(x)]} - \frac{u(x, y)}{h_1(x)h_2(x)} + \frac{u[y(x) - h_2(x), x]}{h_2(x)[h_1(x) + h_2(x)]} \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что при постоянстве и равенстве значений $h_1(x)$ и $h_2(x)$ выражения для конечно-разностных операторов сводятся к выражениям, используемым в методе прямых.

В качестве примера, показывающего особенности применения метода конечно-разностных операторов с переменным шагом, рассмотрим вырожденный случай этого метода, относящийся к отысканию решения методов прямых на произвольной области. Пусть требуется найти решение уравнения Лапласа на некоторой односвязной области, граница которой пересекается прямыми, параллельными оси OX , не более чем в двух точках. Для определенности положим, что краевая задача представлена в форме задачи Дирихле, так что на границе области задана функция решения $u_T(x, y)$. Проведем в области, на которой ищется решение, прямые через одинаковые промежутки δ и будем искать решение уравнения Лапласа на этих прямых. Разностные операторы с переменным шагом будут в этом случае использованы для устранения неопределенности, возникающей на участке прямых, пересечение проекций которых на ось OX с проекциями соседних прямых равно нулю.

Обозначим абсциссы точек пересечения прямой y_i с границей заданной области через x'_i и x''_i . Уравнения, входящие в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, составляются следующим образом:

1) Уравнения имеют вид

$$-\frac{d^2 u_i}{dx^2} = 2 \left\{ \frac{\tilde{u}_{i+1}}{h_1(h_1 + h_2)} - \frac{u_i}{h_1 h_2} + \frac{\tilde{u}_{i-1}}{h_2(h_1 + h_2)} \right\},$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad x \in \{x_i\} \quad (3)$$

где $\{x_i\}$ — множество всех точек отрезка (x'_i, x''_i) .

Для интегрирования системы (3) необходимо в правые части уравнений добавить члены, дополняющие подынтегральные выражения до полного дифференциала.

2) В правую часть уравнения (3) входят функции \tilde{u}_{i+1} и \tilde{u}_{i-1} . Эти функции на некотором подмножестве $\{\tilde{x}_i\}$, пересечения которого $\{\tilde{x}_i\} \cap \{x_{i-1}\} = 0$ и $\{\tilde{x}_i\} \cap \{x_{i+1}\} = 0$, определяются как $u_{\Gamma}(x)$, а в остальных точках множества $\{x_k\}$ — как $u(y_{i+1}, x)$ и $u(y_{i-1}, x)$. Коэффициенты $h_{1i}(x)$ и $h_{2i}(x)$ на подмножестве $\{\tilde{x}_i\}$ задаются как $|y_{\Gamma}(x) - y_i|$, а в остальных точках множества $\{x_i\}$ — как δ .

На такую систему накладываются краевые условия, заданные в точках пересечения прямых с границей области.

Порядок выполнения операций при решении эллиптических уравнений по методу разностных операторов с переменным шагом показан на рис. 2. Схема моделирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, дающей решение поставленной задачи, состоит из нескольких частей, каждая из которых предназначена для моделирования различных групп уравнений, определенных на отрезках различной длительности. Включение и выключение этих частей схемы моделирования производится в моменты времени, соответствующие абсциссам точек пересечения прямых с границей области (эти моменты времени указаны в кружках). Коммутация связей между этими частями производится в соответствии с описанным выше порядком блоками «Подпрограмма переключения». При этом в процессе интегрирования в зависимости от соотношения длительности соседних отрезков прямых в схемы моделирования тех или иных уравнений подаются либо выходы соседних схем, либо заданные граничные значения искомой функции. В связи с необходимостью решения краевой задачи процесс решения повторяется многократно при различных значениях недостающих начальных условий для выполнения заданных условий на «противоположной» границе области.

Ко второму классу методов, при использовании которых решение исходной задачи получается в результате некоторых операций, выполняемых над образуемыми в машине функциями, следует отнести методы представления решения в виде бесконечных функциональных рядов: метод разделения переменных, метод гармонических функций и метод Трефтца. Указанные методы позволяют решать разнообразные линейные уравнения в частных производных на областях произвольного вида. Будучи использованы при постановке задачи на АВМ с операционными усилителями, эти методы требуют выполнения следующих основных этапов:

1) образование членов ряда, который составляет искомое решение;

2) определение коэффициентов в разложении граничной (начальной) функции по значениям образованных в первом этапе членов ряда на граничном контуре (в начальный момент времени);

3) построение искомого решения на произвольных контурах внутри области (в произвольные моменты времени).

Главное различие между перечисленными выше методами состоит в способе образования членов ряда. Так, в случае метода разделения переменных в качестве частных решений (членов ряда) используются произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной и которые получаются в результате отыскания собственных чисел и собственных функций некоторых дифференциальных операторов. В методе гармонических функций членами ряда являются известные сферические функции. Метод Трефтца предполагает использование в виде членов ряда линейно-независимой системы частных решений заданного уравнения в частных производных. Получение такой системы производится с помощью метода прямых, причем для простоты реализации этого метода задача может быть поставлена для прямоугольника.

Сущность метода разделения переменных известна и описывается в многочисленных статьях и монографиях в качестве классического примера применения аналоговой техники для решения одномерных уравнений в частных производных.

Для иллюстрации метода гармонических функций рассмотрим последовательность решения однородного эллиптического уравнения для произвольной краевой задачи на области, ограниченной произвольным контуром. Пусть для определенности требуется решить двумерное уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

а краевое условие задано в форме задачи Дирихле:

$$u(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y).$$

Выберем в качестве бесконечной системы функций, удовлетворяющей уравнению Лапласа, систему сферических функций $\{\rho^i \sin(i\varphi + \psi_i)\}$, записанных в полярных координатах (ρ — радиус-вектор, φ — полярный угол). Если окажется возможным разложить $f(\varphi)$, записанную в функции полярного угла φ , в ряд по функциям системы $\{\rho^i \sin(i\varphi + \psi_i)\}$, а именно:

$$f(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \rho^{(i)} \sin(i\varphi + \psi_i)|_{\Gamma}, \quad (4)$$

то решение краевой задачи можно записать в виде

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \rho^i \sin(i\varphi + \psi_i). \quad (5)$$

Таким образом, как выше было указано для второго класса методов, получение решения по методу гармонических функций сводится к выполнению следующих операций:

1) образование членов ряда, в который раскладывается граничная функция $f(\varphi)$;

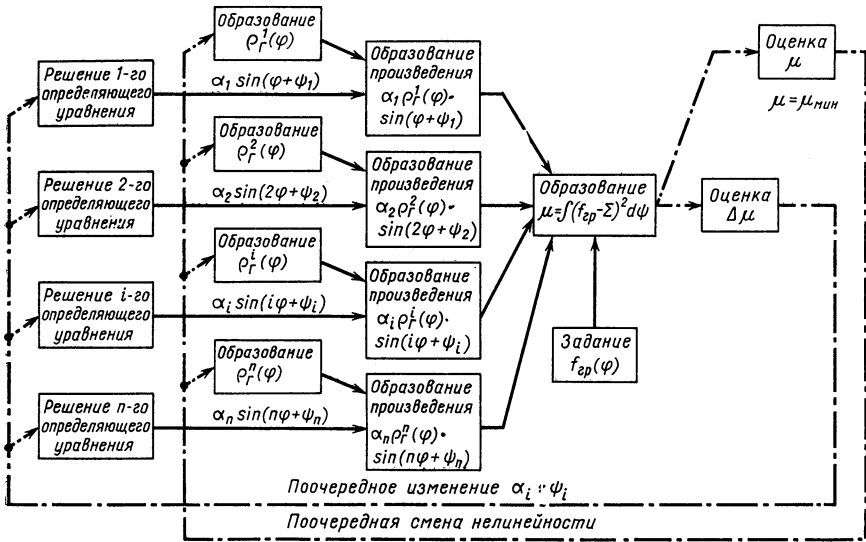


Рис. 3. Блок-схема выполнения операций по методу гармонических функций

2) определение коэффициентов α_i ряда (4);

3) выбор внутри области некоторого контура $\rho_k(\varphi)$, на котором требуется получить значение искомого решения $u_k(\rho, \varphi)$, и образование значений гармонических функций на этом контуре;

4) образование значений искомого решения на контуре $\rho_k(\varphi)$ путем суммирования ряда

$$u_k(\rho, \varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \rho_k^i \sin(i\varphi + \psi_i).$$

На рис. 3 показана структурная схема выполнения операций при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа по методу гармонических функций на АВМ с операционными усилителями общего назначения. Следует отметить, что решение рассматриваемого уравнения по методу гармонических функций может

производиться путем последовательного выполнения некоторых операций, состоящих из производимых параллельно подопераций. Так, образование членов ряда, в который раскладывается граничная функция f_{Γ} , производится путем одновременного образования различных степеней уравнений граничного контура, записанного в полярных координатах $\rho_{\Gamma}(\varphi)$ и произведений $\rho_{\Gamma}^i(\varphi) \sin(i\varphi + \psi_i)$. При этом уравнение граничного контура $\rho_{\Gamma}(\varphi)$ и его степени можно задавать с помощью блоков нелинейностей, функции $\sin(i\varphi + \psi_i)$ — как решения определяющего уравнения соответствующих блоков, а произведения $\rho_{\Gamma}^i(\varphi) \sin(i\varphi + \psi_i)$ — с помощью блоков перемножения.

Определение коэффициентов α_i ряда (4) можно осуществить различными способами. Так, например, в подобных случаях широко используется метод ортогонализации ряда по линейно-независимым функциям, после чего коэффициенты получаемого ряда отыскиваются с помощью известных формул для коэффициентов ряда Фурье. Связанная с этим методом процедура вычислений оказывается весьма громоздкой и поэтому ее применение нежелательно.

В качестве метода отыскания коэффициентов предложен поисковый метод, состоящий в поочередном изменении значений параметров, моделирующих коэффициенты ряда, до получения требуемого результата. Оценка близости ряда к заданной граничной функции осуществляется путем просчета значений некоторого функционала, который можно задавать, например, как

$$\mu = \int_0^{2\pi} \left[f_{\Gamma} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_{\Gamma}^i \sin(i\varphi + \psi_i) \right]^2 d\varphi. \quad (6)$$

После отыскания значений α_i , минимизирующих μ , для получения решения задачи на некоторой кривой $\rho_{\kappa}(\varphi)$ достаточно вместо образования $\rho_{\Gamma}(\varphi)$ и его степеней установить генераторы функций $\rho_{\kappa}(\varphi)$ и его степеней соответственно. Если коэффициенты α_i представляются в виде параметров схем моделирования определяющих уравнений, то после отыскания значений этих коэффициентов схемы моделирования остаются неизменными.

По методу Трефтца решение эллиптических уравнений ищется как результат суперпозиции одного из решений неоднородного уравнения $\bar{u}(x, y)$ и системы линейно-независимых решений соответствующего однородного уравнения $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y) \dots$:

$$u(x, y) = \bar{u}(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x, y). \quad (7)$$

Уравнение эллиптического типа может быть самого общего вида (1) с произвольным граничным условием

$$Pu(\Gamma) = f(s), \quad (8)$$

где P — граничный оператор.

Построение базисных решений в этом случае представляет собой сложную задачу, поскольку в отличие от метода гармонических функций система $u_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, n \dots$) заранее неизвестна. Если же эта система построена, то так же, как и в случае гармонических функций, определение коэффициентов производится из условия (6).

Образование членов ряда в случае метода Трефтца можно производить следующим образом. Область G , на которой ищется решение краевой задачи, помещается внутрь прямоугольника Ω . Базисные решения этого уравнения строятся по следующему правилу:

1. С помощью метода прямых отыскивается решение заданного уравнения при некотором произвольном граничном условии, например, в форме задачи Дирихле с граничной функцией $Q(s)$, заданной на сторонах прямоугольника Ω . Решение этой краевой задачи принимается за $u(x, y)$.

2. Для образования системы решений однородного уравнения $\{u_n(x, y)\}$ строится произвольная система линейно-независимых граничных функций $\{q_n(s)\}$ на сторонах прямоугольника Ω . Решение производится по методу прямых.

Составляется ряд из значений полученных таким образом функций $\bar{u}(x, y)$ и $\{u_n(x, y)\}$ на границе Γ области G :

$$\bar{\varphi}(s) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(s). \quad (9)$$

Если граничное условие для исходной краевой задачи дается с помощью линейного оператора P , то можно записать

$$f(s) = P\bar{\varphi}(s) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n P\varphi_n(s), \quad (10)$$

где s — параметр дуги граничного контура Γ области G , на котором требуется провести разложение функций $[f(s) - P\bar{\varphi}(s)]$ в ряд по функциям $\{P\varphi_n(s)\}$. Порядок выполнения операций при построении членов ряда по методу Трефтца показан на рис. 4. На каждом этапе производится решение однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по методу прямых. На первом этапе задаются начальные условия $Q(s)$ и функция неоднородности $H(x, y)$ и одновременно запоминаются значения функций $\bar{\varphi}(s)$. Затем производится образование $P\bar{\varphi}(s)$ и переход к заданию начальных условий $\{q_n(s)\}$. При этом поочередно уста-

навливаются $q_1(s), q_2(s), \dots, q_m(s)$ и одновременно запоминаются значения решения, образующие функции $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_m(s)$. После этого производится образование $\{P\varphi_n(s)\}$.

К числу методов, предполагающих решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений «по частям», относятся разнообразные итеративные методы и альтернирующий метод Шварца. Применение этих методов, во-первых, позволяет существенно уменьшить объем аналогового оборудования и, во-вторых, обеспечивает возможность решения краевых задач на областях сложной конфигурации.

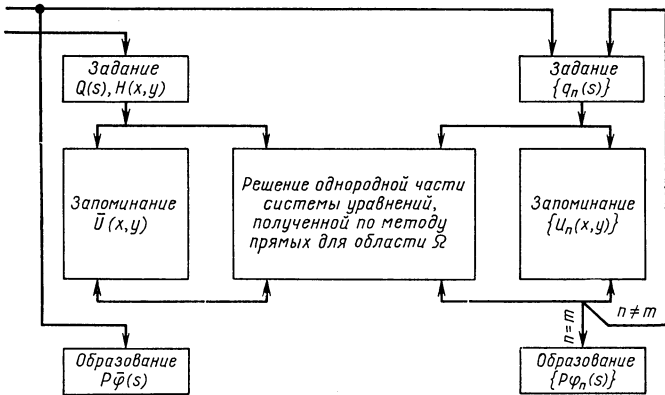


Рис. 4. Блок-схема выполнения операций при образовании членов ряда по методу Трефца

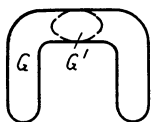
Применение итеративных методов предполагает возможность разбиения системы обыкновенных дифференциальных уравнений на несколько однотипных подсистем, содержащих одинаковое, но меньшее число уравнений. При решении задачи составляется схема моделирования одной подсистемы, в которую поочередно вводятся запомненные в предыдущей итерации значения функций решения предшествующей и последующей подсистем.

Суть альтернирующего метода Шварца состоит в следующем. Пусть некоторая область G ограничена контуром Γ , и $f(M)$ есть кусочно-непрерывная функция, заданная в точках M контура Γ . Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую данному эллиптическому уравнению и заданному краевому условию. Пусть теперь G представлена как сумма двух областей G_1 и G_2 , которые имеют некоторую общую часть (рис. 5). Граница области G_1 обозначается через Γ_1 , а области G_2 — через Γ_2 ; часть границы Γ_1 области G_1 , лежащая внутри G_2 , обозначается γ_1 , а ее оставшаяся часть — через γ_1 . Аналогично γ_2 — часть границы

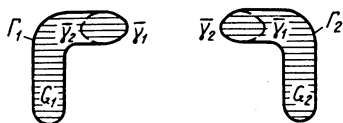
области G_2 , лежащая внутри G_1 , и γ_2 — оставшаяся часть границы Γ_2 .

Граничные значения для области G_1 заданы только на части γ_1 ее контура Γ_1 . На части $\bar{\gamma}_1$ можно задать произвольно функцию $\varphi(M)$, подчинив ее единственному условию, чтобы вместе со значениями $f(M)$ на γ_1 она давала бы кусочно-непрерывную функцию на всем контуре области G_1 .

Далее производится решение задачи Дирихле для заданного эллиптического уравнения в области G_1 с целью определения функций $u_1(x, y)$, удовлетворяющей граничному условию:



$$\begin{aligned} f(M) &\text{ на } \gamma_1; \\ \varphi(M) &\text{ на } \bar{\gamma}_1 \end{aligned} \quad (11)$$



и принимаемой за первое приближение к $u(x, y)$ в области G_1 .

Найденная функция $u_1(x, y)$ используется при определении $v_1(x, y)$, являющейся решением задачи Дирихле для заданного эллиптического уравнения в области G_2 при граничном условии

Рис. 5. К применению метода Шварца для решения задачи на области сложной формы

$$v_1(x, y) = \begin{cases} f(M) &\text{ на } \gamma_2; \\ u_1(x, y) &\text{ на } \bar{\gamma}_2. \end{cases} \quad (12)$$

Функция $v_1(x, y)$ есть первое приближение к $v(x, y)$ в области G_2 . С помощью функции $v_1(x, y)$ строится второе приближение $u_2(x, y)$ к функции $u(x, y)$ в области G_2 как решение задачи Дирихле для данного уравнения при граничном условии

$$v_1(x, y) = \begin{cases} f(M) &\text{ на } \gamma_2; \\ u_1(x, y) &\text{ на } \bar{\gamma}_2. \end{cases} \quad (13)$$

Функции $u_k(x, y)$ и $v_k(x, y)$, которые представляются k -ми приближениями к искомому решению $u(x, y)$ в областях G_1 и G_2 , определяются через предыдущие приближения как решения задачи Дирихле для заданного уравнения при граничных условиях

$$u_k(x, y) = \begin{cases} f(M) &\text{ на } \gamma_1; \\ v_{k-1}(x, y) &\text{ на } \bar{\gamma}_1; \end{cases} \quad (14)$$

$$v_k(x, y) = \begin{cases} f(M) &\text{ на } \gamma_2; \\ u_{k-1}(x, y) &\text{ на } \bar{\gamma}_2. \end{cases} \quad (15)$$

Таким образом, в каждой из областей G и G_2 построены последовательности приближений к искомому решению $u(x, y)$.

Отыскание решения в каждой из областей G_1 и G_2 может осуществляться по методу прямых с использованием различных

способов построения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и приемов их решения на АВМ с операционными усилителями. Метод Шварца применяется, например, в случае, когда прямые, проведенные в области, пересекают ее границу более чем в двух точках, а также в случае многосвязных областей. Этот метод целесообразно также применять, если области могут рассматриваться как комбинации фигур простого вида (например, прямоугольников).

Рассмотрим решение задачи Дирихле для некоторого эллиптического уравнения, если область G такая, что некоторые прямые, параллельные оси OX , пересекают ее более чем в двух точках. Разобьем эту область на две области G_1 и G_2 и впишем их в прямоугольные области. Для каждой из этих областей задача Дирихле может быть решена по методу вписывания.

Процедура решения задачи по методу Шварца на АВМ с операционными усилителями общего назначения состоит в следующем. Строится схема моделирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений по методу прямых. Если предполагать, что при решении задачи применяется метод вписывания и что области G_1 и G_2 вписаны в одинаковые прямоугольники с одинаковым числом прямых, проведенных в области, то одна и та же схема моделирования может быть использована для отыскания решения на каждом прямоугольнике.

Порядок выполнения операций при решении эллиптических уравнений по методу Шварца показан на рис. 6. Каждый этап решения задачи по этому методу связан с решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений одного и того же вида. На первом этапе отыскиваются недостающие начальные условия при решении краевой задачи для прямоугольника Ω_1 с произвольными граничными условиями на участке γ_1 (рис. 5) границы G . На втором этапе запоминаются полученные решения $u_1(x, y)$ в точках участка $\bar{\gamma}_2$. Эти значения используются на третьем этапе при решении краевой задачи для прямоугольника Ω_2 . На четвертом этапе запоминаются значения решений $u_2(x, y)$ в точках дуги $\bar{\gamma}_1$. Указанные этапы циклически повторяются до получения совпадения последующего решения с предыдущим на всех прямых, проведенных в областях Ω_1 и Ω_2 .

Внимательное изучение особенностей применения АВМ с операционными усилителями для решения уравнений в частных производных на основе сопоставления описанных выше методов приводит к выводу о том, что применение любого из методов связано с определенной последовательностью выполнения операций. В случае применения фундаментального метода прямых такими последовательно выполняемыми операциями являются операции электрического моделирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений при различных, специальным образом

изменяемых напряжениях, соответствующих начальным значениям некоторых переменных в системе дифференциальных уравнений. Эти операции на границе исследуемой области перемежаются с операциями запоминания мгновенных значений функций, полученных при моделировании. Применение итерационных методов приводит к последовательному поочередному выполнению операций моделирования системы дифференциальных уравнений

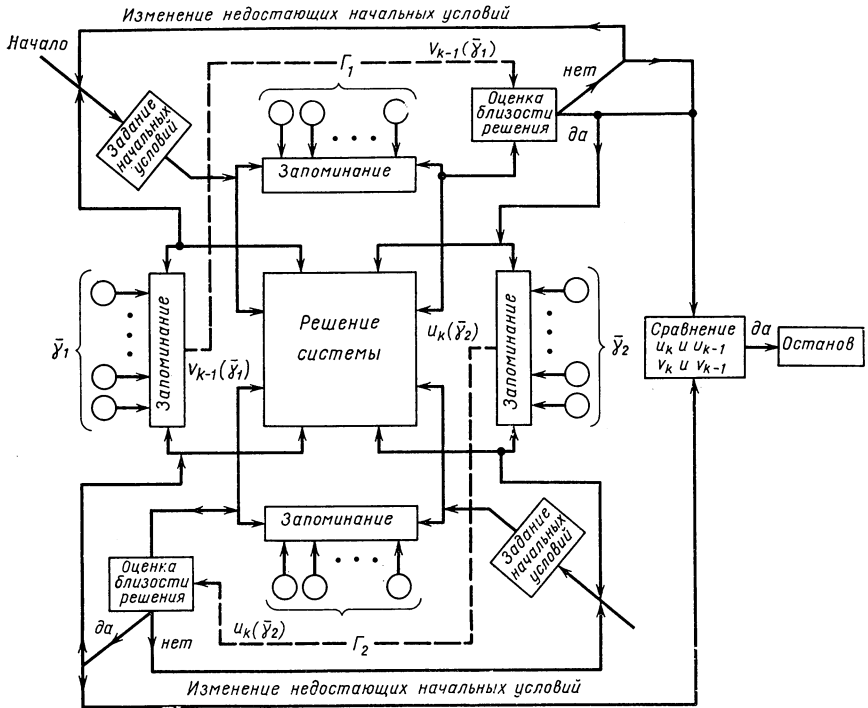


Рис. 6. Блок-схема порядка выполнения операций по методу Шварца. Сплошными линиями показаны логические связи, пунктирными — функциональные

и операций запоминания функций, полученных при моделировании. Использование модификаций метода прямых, а также использование более общего метода применения операторов с переменным шагом приводит к определенным усложнениям электрического моделирования и, особенно, схемы управления, которая дополняется устройствами программного управления, интегрирующими усилителями и устройствами переключения напряжений внутри одного цикла интегрирования. Наконец, реализация многих методов решения уравнений в частных производных предусматривает необходимость выполнения операций поиска ре-

шений, удовлетворяющих некоторым, наперед заданным критериям (решение краевой задачи при реализации методов первого класса или подбор коэффициентов ряда при использовании методов второго класса).

Известно, что наиболее «трудоемкой» операцией для вычислительных машин является реализация оператора решения дифференциальных уравнений для функций одной переменной. Эта операция, как было указано выше, является основной и в случае применения практически любого из описанных методов решения уравнений в частных производных. В то же время эта операция успешно выполняется с помощью различных АВМ общего назначения в силу параллельного характера выполнения всех вычислительных операций и сравнительно высокого быстродействия. Это означает, что для реализации рассматриваемых методов может быть использована практически любая, подходящая по объему вычислительного оборудования, аналоговая вычислительная машина. При этом обязанности запоминания функций или их мгновенных значений, управления работой усилителей и схем внутри одного цикла интегрирования, отыскания недостающих значений переменных или коэффициентов в системе уравнений, ввода значений переменных в машину и, наконец, управления последовательностью выполнения определенных групповых операций берет на себя оператор.

Необходимо дальнейшее совершенствование аналоговых машин с целью автоматизации перечисленных выше операций и соответствующего уменьшения времени, затрачиваемого на решение задач, сложных в своей общей постановке. Основными направлениями этого совершенствования является переход к режиму быстрой периодизации решения и ввод дополнительных устройств запоминания и автоматизации выполнения как операций управления, так и операций отыскания недостающих значений переменных. Дополнение аналоговой машины указанными средствами означает переход к аналоговой машине нового типа, наделенной возможностью последовательного выполнения непрерывных операций в классе функций одной переменной.

АВМ с последовательным выполнением операций можно определить как машину, содержащую группу аналоговых устройств, снабженную органом управления, связанным с запоминающим устройством, и способную автономно выполнять все операции, входящие в состав вычислительного процесса, соответствующего некоторому предварительно составленному плану. Выполнение вычислительных операций в такой машине производится с помощью операционного устройства, построенного с использованием операционных усилителей. Информация, перерабатываемая операционным устройством ОУ, подается в него из запоминающего устройства ЗУ, куда отсылаются и результаты выполнения операций. Подбор недостающих значений переменных произво-

дится с помощью устройства автоматической оптимизации УАО. Передача содержимого ЗУ в ОУ, управление работой ОУ и УАО, передача результата операций в ЗУ производится с помощью устройства управления групповыми операциями.

Структура такой машины, показанная на рис. 7, представляет собой структуру автоматизированной вычислительной машины, реализующей некоторый вычислительный процесс, отличие которой от ЦВМ заключается в том, что элементарной операцией является не арифметическая операция, а непрерывная, выполняемая в классе функций одной переменной. С помощью такого одного непрерывного оператора в АВМ с последовательным выполнением операций производится обработка значительно

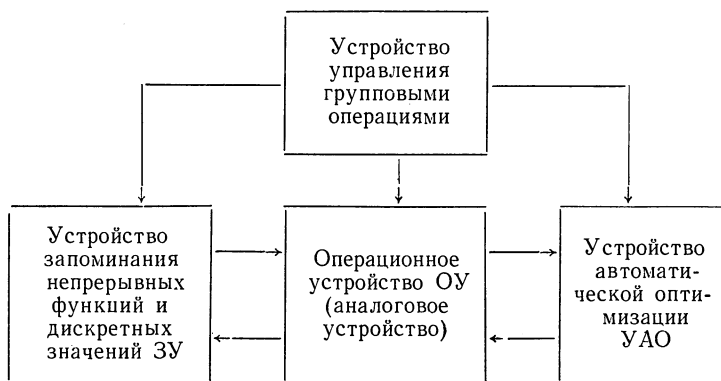


Рис. 7. Структурная схема АВМ с последовательным выполнением операций

большого объема информации, чем в ЦВМ с помощью арифметического оператора. Операционное устройство такой машины можно определить как некоторую совокупность технических средств для реализации некоторого заданного подмножества из множества непрерывных операторов, определенных в классе функций. К числу таких операторов относятся операторы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрирования функций, их суммирования и т. д.

Использование непрерывных операторов одного типа, связь между которыми задается с помощью логических выражений, позволяет построить программы решения большого числа разнообразных функциональных уравнений, и в том числе уравнений в частных производных, решение которых на АВМ с последовательным выполнением операций в ряде случаев может оказаться более эффективным, чем при решении таких задач на ЦВМ и сеточных АВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Витенберг И. М., Ламин Е. И., Танкелевич Р. Л. О применении новых технических средств для решения дифференциальных уравнений в частных производных на АВМ. IV Всесоюзная конференция — семинар по теории и методам математического моделирования. Киев «Наукова думка», 1964, стр. 151—172.

2. Танкелевич Р. Л. О применении разностных операторов с переменным шагом для решения уравнений в частных производных на АВМ с операционными усилителями. XXI Всесоюзная научная сессия, посвященная 70-летию изобретения радио А. С. Поповым. Секция аналоговой вычислительной техники. М., «Сов. радио», 1965, стр. 8—16.

Б. А. Волынский

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ АНАЛОГОВЫХ СРЕДСТВ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В настоящее время классификации методов и средств решения краевых задач нет, существующая классификация почти лишена логики и далеко не всегда отображает принцип и сущность работы той или иной модели.

В этом отношении дискретные машины в силу своей универсальности проще. На одной и той же машине можно использовать различные математические алгоритмы, например, решение уравнения методом сеток, или интегральным методом, или другим из существующих методов. Поэтому цифровые машины, не будучи «привязанными» к методам решения задач, отличаются между собой основными признаками: емкостью активной памяти, скоростью действия, разрядностью чисел, адресностью и т. д.

Такой подход к аналоговым машинам и к методам решения на них невозможен в силу их специфической особенности, связанной с процессом моделирования (например, на сетке нельзя применить интегральный метод). Единого подхода к пониманию аналогов нет, что не может способствовать созданию строгой классификации.

Несмотря на большое преимущество математического представления моделирования, многие специалисты придерживаются физического понимания моделирования. Такое представление вошло в практику и объяснить его можно лишь тем, что решаются в основном широко известные и сравнительно простые задачи, для которых эта теория дает тот же результат, что и математическое представление, но она нагляднее и проще. Именно такой подход к моделированию привел к путанице в наименовании различных моделей.

Например, первые сеточные модели назывались электроинтеграторами ЭИ-11 и ЭИ-12, хотя по принципу своей работы они не интегрируют, а используют метод сеток; электрическая модель для решения бигармонического уравнения ЭМБУ-6 не решает этого уравнения, а использует метод сеток для приближенного решения двух уравнений Пуассона; электрическая модель для анализа работы глубокого плунжерного насоса ЭМ-4 в своем наименовании не отображает ни уравнения, ни метода решения его; универсальная сеточная модель УСМ-1 ничего универсального собой не представляет.

Насколько внедрилось понятие физического моделирования, свидетельствуют интересные работы Г. С. Пухова по созданию теории квазианалоговых сеточных моделей. В таких сетках используется «уравновешивание» модели с образцом и поэтому такое представление также относится к физическому толкованию моделей. Вместе с тем с точки зрения физического понимания сама сетка без уравновешивающих элементов является квазианалогом по отношению к решению дифференциального уравнения, т. е. к реальному процессу, протекающему в реальном образце.

Если же понятие квазианалогии отнести к решению системы алгебраических уравнений, т. е. к приближенному решению дифференциального уравнения методом сеток, раньше следует уточнить понятие аналога.

Если и в дальнейшем продолжать строго придерживаться физического толкования, то такое представление будет суживать дальнейшее развитие аналоговых методов.

В самом деле, даже для несложных сеток (многолучевых, в полярной и в цилиндрической системах координат) методом замещения либо нельзя определить параметры сетки, либо они находятся с дополнительными погрешностями [1].

Физическое представление моделирования может быть сохранено лишь для аналогов типа ЭГДА и то лишь для решения задачи Дирихле. Любая другая задача будет связана с приближенными методами решения, т. е. не будет являться физическим аналогом.

С другой стороны, для математической интерпретации аналогов никаких ограничений нет, т. е. для любого математического алгоритма можно найти соответствующий схемный алгоритм, который представляет собой аналог, и в этом случае параметры схемы всегда определяются.

Под схемным алгоритмом следует понимать совокупность действий элементов, объединенных схемой для решения данной задачи.

При таком представлении классификация не встречает принципиальных трудностей, она может иметь стройную и простую систему.

Однако существующая классификация уравнений математической физики (уравнения эллиптического, параболического и гиперболического типов) не может служить основанием для классификации аналогов, решающих приближенно эти уравнения. Так, например, для решения уравнений эллиптического и параболического типов пригодна сетка из R и C . Однако практически в некоторых случаях, например, при решении задачи на обтекание тела жидкостью со свободной поверхностью, когда на этой поверхности задается граничное условие в виде $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, эта сетка не может быть использована для решения эллиптического уравнения. Совершенно разные по принципу действия сетка и интегровычислитель служат для приближенного решения одного и того же уравнения эллиптического типа $\Delta \Phi = 0$.

Поэтому наиболее логичной основой для классификации могут служить основные методы приближенных решений математической физики: интегральные и вариационные методы, методы конформных отображений и методы сеток и др.

Такая классификация возможна при одном допущении. Полная аналогия могла быть в случае, если при решении заданного дифференциального уравнения одним из приближенных математических методов путем применения соответствующих схем погрешность решения была бы равна погрешности метода. Однако погрешность решения включает в себя не только ошибку метода, но и собственно приборную ошибку, состоящую из схемных ошибок и ошибок изготовления. И поэтому, если подходить строго, любой прибор будет не прямым аналогом, а почти аналогом. Вместе с тем если по каждому допущению в аналоге делать оговорку, то таких оговорок может быть не одна. Например, граничное условие имеет ошибку, во-первых, от делителя и, во-вторых, от аппроксимации контура. Поэтому для упрощения понимания аналога надо считать его таким с точностью до собственно приборной ошибки. Отсюда следует, что электрическая сетка является аналогом приближенного решения дифференциального уравнения методом сеток; интегрирующие звезды являются аналогом приближенного решения дифференциального уравнения интегральным методом и т. д.

Если изложенные соображения положить в основу классификации, то аналоговые устройства следует именовать в соответствии с имеющимися приближенными методами, а именно:

1. Аналоговые интегровычислители (И).
2. Аналоговые сетки (или аналоговая среда) (С).
3. Аналоговые конформные отображатели (КО).
4. Аналоговые вариаторы (В).

Каждый из приведенных типов устройств характеризует только принцип математического метода, но не отражает типа решаемых уравнений.

Такой ряд может служить для дальнейшего развития теории и практики аналогов, хотя в настоящее время он не может быть заполнен, так как интегровычислителей имеется всего несколько, по конформным отображениям работы не выходят из рамок лабораторных исследований и практически распространены только сетки.

Такая классификация была бы исчерпывающей, если бы она отображала тип решаемого уравнения и особенности граничных и начальных условий. Однако это не так; например, аналоговая сетка, служащая для решения эллиптических уравнений, не пригодна даже для решения задачи по обтеканию тела несжимаемой жидкостью при свободной поверхности; аналоговый интегровычислитель не позволяет решить задачу, если функция источника неизвестна; поэтому приведенная классификация требует уточнения.

Для математики характерно введение новых элементов при решении новой задачи. Такой же особенностью, может быть в меньшей мере, обладает не только математика, но и всякая другая наука, в том числе и наука об аналогах.

Необходимость решения обыкновенных алгебраических уравнений первой степени привела к введению отрицательных чисел; необходимость решения квадратных уравнений и уравнений более высоких степеней — к введению иррациональных чисел, а затем комплексных; необходимость решения обыкновенных дифференциальных уравнений привела к введению специальных функций (экспонента, гиперболические функции, бесселевы функции и др.); необходимость решения дифференциальных уравнений с частными производными также привела к введению специальных функций: гармонических, Грина, Неймана и др.

В соответствии с набором математических элементов строится и математический алгоритм решения задачи. Когда под функцией понималось нечто, выраженное аналитической формулой, решение старались найти в аналитическом виде. Но в таком виде можно решить лишь сравнительно узкий круг задач.

Развитие приближенных методов вычислений привело к развитию итеративных методов (в том числе и метод сеток), суть которых состоит в том, что, задавшись каким-то образом значениями интересующей нас функции, по определенному закону находим новые, более точные значения и т. д. В ряде случаев итеративные методы позволяют значительно проще находить решение, чем по аналитическим формулам. Так, алгебраическое уравнение четвертой степени хотя и может быть выражено в квадратурах, однако на практике итеративный метод всегда быстрее приводит к цели. Даже извлечение квадратного корня значительно быстрее производится при помощи итерации, чем обычным «школьным» способом или разложением в ряд. Достоинством итеративных методов является не только быстрота ре-

шения, но и их малая чувствительность к отдельным ошибкам вычислений и простота. К недостаткам этих методов относится огромный объем вычислений. Кроме того, итерации при большом числе точек могут сходиться к функции, отличающейся от искомой на значительную величину.

Появление электрических сеток облегчило решение краевых задач. Электрическая сетка является итеративным устройством, каждый элемент которого служит своеобразным арифметическим устройством. За счет параллельной работы большого числа арифметических устройств достигается быстродействие, превышающее быстродействие любых цифровых машин. Применение сеток для решений уравнений Лапласа, Пуассона, Фурье для задач Дирихле, Неймана и третьей краевой задачи позволило обойтись при решении этих задач без итераций (точнее, итерации производятся в скрытой форме самой сеткой).

Однако ряд задач потребовал итераций даже при использовании сеток. К таким задачам относится, например, решение бигармонического уравнения, которое приходится разбивать на систему двух уравнений Пуассона. Одно из них решается с какими-то граничными условиями, результат решения подставляется во второе уравнение. Полученные результаты используются для нахождения новых граничных условий для первого уравнения и т. д.

Новым итеративным устройством, позволяющим значительно уменьшить число итераций, явилась «двухэтажная» сетка типа ЭМ-6.

Однако наука и техника выдвигают новые задачи, для решения которых на сетках приходится вновь прибегать к итерациям.

Эти итерации можно условно разбить на два класса: граничные итерации и внутренние итерации. Граничные условия на сетке могут быть заданы одним из трех родов. Если в поставленной задаче граничные условия отличны от этих трех родов, то решение приходится вести, задавшись какими-то граничными условиями. С этими условиями на сетке решается заданное уравнение, по решению исправляются граничные условия и т. д. до тех пор, пока решение не сойдется с заданной степенью точности. Такой итеративный процесс назовем граничной итерацией.

В ряде задач значения правой части или значения коэффициентов уравнения зависят от решения. В первом случае задаются какими-то значениями правой части, решают заданное уравнение, уточняют значения правой части, снова решают уравнение и т. д. Во втором случае необходимо задаться значениями коэффициентов, решить заданное уравнение, уточнить там, где это надо, значения коэффициентов и т. д. Такой итеративный процесс назовем внутренней итерацией.

Могут также встретиться задачи, где потребуется применение и внутренней и граничной итераций.

В соответствии с введенными понятиями можно предложить классификацию краевых задач по методу их решения и аналоговых средств для их решения. В основу классификации аналоговых средств положен следующий принцип: аналоговый элемент считается элементом класса M , если он в совокупности с элементами класса ниже M позволяет решать без итераций (точнее, без итераций, требующих вмешательства оператора) краевую задачу класса M . Если же в нашем распоряжении имеются лишь элементы класса ниже M , то для решения этой задачи требуются итерации.

1. Нулевой класс

К задачам нулевого класса относятся краевые задачи, допускающие представление в аналитическом виде с помощью функций источника (задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа для круга, полупространства и т. д.). Элементом нулевого класса является обычное арифметическое устройство (с той или иной степенью автоматизации).

2. Первый класс

К задачам первого класса относятся краевые задачи, не имеющие аналитического решения и требующие для своего решения итеративный процесс с помощью элемента нулевого класса. На границе заданы значения либо функции, либо нормальной производной, либо их линейная комбинация. Элементом первого класса является обычная электрическая сетка, ЭГДА, «двухэтажная сетка».

3. Второй класс

К задачам второго класса относятся краевые задачи, уравнения которых может быть решено на электрической сетке, но граничные условия не принадлежат к перечисленным выше типам и требуют при решении на сетке применения граничной итерации. Такова задача об обтекании тела при наличии свободной поверхности. Элементом второго класса является «граничный итератор», автоматически исправляющий граничные условия до выполнения заданного граничного условия.

4. Третий класс

К задачам третьего класса относятся краевые задачи, уравнения которых решаются на сетке, а граничные условия могут быть заданы на ней, но правая часть уравнения или его коэффициенты зависят от решения (таковы, например, нелинейные нефтяные задачи в газированном режиме). Элементом третьего класса является «внутренний итератор», автоматически изменяющий значения правой части или коэффициентов уравнения.

5. Четвертый класс

К этому классу относятся задачи, для решения которых потребуются элементы указанных трех классов.

Все сказанное выше относится не только к сеткам, но и к электrolитическим ваннам, интегровычислителям и др. Так, например, решение задачи электроразведки при наличии неоднородных вкраплений требует решения вспомогательного интегрального уравнения, поправки граничных условий и т. д.

В результате изложенных соображений в зависимости от метода решения заданного уравнения при заданных граничных и начальных условиях аналоговые машины могут относиться к одному из перечисленных классов.

Если, например, аналоговая сетка относится к 4-му классу, то это значит, что на такой сетке (без вмешательства оператора) может решаться заданное уравнение при граничных условиях I, II и III рода и при более сложных граничных условиях с учетом нелинейности заданного уравнения. На сетке I класса заданное уравнение решается только при граничных условиях I, II и III рода без учета нелинейности задачи.

Практически основное устройство машины относится к нулевому или 1-му классу, а если это устройство снабжено итерирующими устройствами, то оно будет относиться ко 2-му, 3-му или 4-му классу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волынский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960, стр. 446.
2. Волынский Б. А. О теории замещения в сеточных электромоделях для решения краевых задач. В сб. «Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники». М., Машгиз, 1963, стр. 251—258.

В. С. Лукьянов

ВОЗМОЖНЫЕ КЛАССЫ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ИНТЕГРАТОРОВ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НА НИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Задачей статьи является краткая характеристика метода расчетов на гидравлических интеграторах (метода гидравлических аналогов), его возможностей, особенностей, областей применения и перспектив его дальнейшего использования и развития.

Развитие метода гидравлических аналогий теснейшим образом связано с развитием аппаратуры и с практикой применения его для решения многих научно-технических задач.

Гидравлические интеграторы представляют собой системы соединенных между собой узлов или сосудов, потоки и уровни воды или напоры, в которых воспроизводят заданные и искомые величины.

Для выяснения класса решаемых на гидравлических интеграторах задач естественнее идти не от уравнений к методу гидравлических аналогий, а от метода и аппаратуры (интеграторов) — к уравнениям.

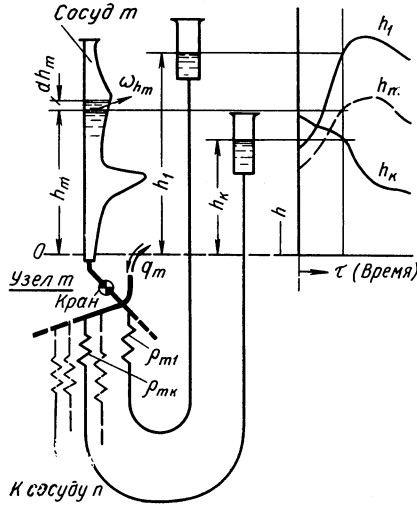


Рис. 1. Принципиальная схема гидравлического интегратора

Метод аналогий на гидравлических интеграторах удобно представлять как воспроизведение и измерение в гидравлической форме баланса тепла, энергии, вещества в элементарных объемах при их взаимодействии между собой и с окружающей средой. При таком представлении становятся более ясными его возможности и погрешности при решении различных задач, особенно в случае расчета процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Такое представление позволяет также успешнее рас-

пространять метод на решение новых задач и способствует развитию аппаратуры.

Принципиальные возможности, особенности метода и классы решаемых задач удобно выяснить при рассмотрении основного элемента гидравлического интегратора — одного узла или сосуда, обменивающегося водой с другими узлами или сосудами.

Составим баланс воды, поступающей в узел t за время dt .

На рис. 1 изображен узел t , через который идет обмен водой между сосудом t , имеющим переменную по высоте площадь сечения ω_{hm} , и сосудами $1, \dots, k, \dots, n$, уровни в которых $h_1, \dots, h_k, \dots, h_n$ изменяются во времени по заданным кривым, изображенным на рисунке справа. Сосуд t соединен с другими сосудами через конструктивные элементы с определенными гидравлическими сопротивлениями $\rho_{m1}, \dots, \rho_{mk}, \dots, \rho_{mn}$, представляющими собой разность напоров, которая нужна для пропуска единичного расхода. Помимо обмена водой с сосудами в узел t поступает

извне (или отбирается) вода. Расход воды q может быть постоянным или переменным.

Баланс воды в узле m за время $d\tau$ запишется следующим образом:

$$\frac{h_1 - h_m}{\rho_{m1}} d\tau + \dots + \frac{h_n - h_m}{\rho_{mn}} d\tau + \dots + q_m d\tau - \omega_{hm} dh_m = 0,$$

откуда

$$\omega_{hm} \frac{dh_m}{d\tau} = \sum_{k=1}^n \frac{h_k - h_m}{\rho_{mk}} + q_m. \quad (1)$$

Если дано значение h_m для начального момента времени h_{m0} , то аналитический расчет функции h_m в зависимости от времени сводится к интегрированию уравнения (1) с учетом этого начального условия.

Наблюдение и регистрация изменяющегося уровня воды в сосуде m заменяет интегрирование уравнения (1).

Если левая часть уравнения (1) равна нулю, т. е. если уровень воды в сосуде m не изменяется ($\frac{dh}{dt} = 0$), или если площадь сечений $\omega_{hm} = 0$, то напор h_m определяется из алгебраического уравнения

$$\sum_{k=1}^n \frac{h_k - h_m}{\rho_{mk}} + q_m = 0 \quad (2)$$

при соответствующих мгновенных значениях переменных $h_1, \dots, h_n, \dots, h_n$.

Если имеется не один, а ряд сосудов или узлов, соединенных между собой различным образом, то весь процесс изменения напоров в узлах будет описываться системой уравнений типа уравнения (1). Для N узлов с N неизвестными функциями h_m можно написать N уравнений типа (1) и, решив их с учетом начальных условий, найти функции h_m .

Или иначе, решение системы уравнений типа (1) — уравнений балансов тепла, вещества, энергии в узлах или элементарных объемах можно заменить наблюдением и регистрацией уровня воды в соответствующих системах сосудов. Возможность выбора любых масштабов высоты и времени позволяет достаточно удобно воспроизводить искомые величины. Воспроизведение искомых величин в гидравлической форме называется расчетом по методу гидравлических аналогий.

Методом гидравлических аналогий можно находить численные решения любых уравнений или систем уравнений, если они допускают аппроксимацию решением систем уравнений баланса типа (1). Последние могут состоять из дифференциальных уравнений, иногда из алгебраических, иногда — из тех и других.

В системах сосудов можно изменять множество параметров, поэтому методом гидравлических аналогий решаются очень разнообразные задачи.

Изменять параметры можно следующим образом:

1. Соединять между собой различное число узлов или соединять их в различных комбинациях.

2. Применять сосуды с различными постоянными или переменными сечениями по высоте.

3. Использовать различные гидравлические сопротивления, не зависящие от разности напоров (капилляры и щели) и зависящие от нее (диафрагмы и комбинации диафрагм с капиллярами и щелями).

4. Применять различные и переменные во времени расходы q , иногда автоматически зависящие от водообмена с соседними узлами (например, для учета скрытых теплот).

5. Использовать различное начальное наполнение сосудов.

6. Осуществлять в различных сосудах изменения уровней во времени по различным заданным кривым.

Кроме того, можно в любое время останавливать процесс, закрывая краны, регистрировать напоры, менять параметры и продолжать решение с новыми параметрами. Можно повторять процесс в любых интервалах времени.

При решении задач можно применять некоторые искусственные приемы, облегчающие практическое осуществление решения, например, использовать подвижное начало координат, заменять отливание приливанием, непрерывные во времени источники и стоки — дискретными и т. д.

К системам алгебраических уравнений приводят задачи расчета водопроводных и теплофикационных сетей в установившихся состояниях. При этом обычно сопротивления ρ между узлами находятся в довольно сложной зависимости от разностей напоров. Наличие баков со срабатывающим напором приводит к системе алгебраических и дифференциальных уравнений.

Расчеты процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных типа Лапласа, Пуассона, Фурье любой мерности в однородных и неоднородных средах, выполняются методом гидравлических аналогий путем замены дифференциальных уравнений в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которые получаются при делении пространства на элементарные объемы (блоки) и рассмотрении балансов этих блоков при их взаимодействии.

При этом принимаются следующие допущения:

1. Среднее значение температуры, напора, концентрации и других величин в блоке отождествляется со значением этой величины в центре тяжести блока.

2. Направления потоков тепла, вещества и т. п. считаются нормальными к поверхностям раздела блоков и параллельными

осям (иногда криволинейным), соединяющим центры тяжести блоков.

3. В каждый момент времени процесс обмена между блоками происходит по закону установившегося движения.

При таком рассмотрении процесса обмена между блоками с переходом к пределу превращение блоков в бесконечно малые объемы приводит уравнения балансов к дифференциальным уравнениям в частных производных и принятые допущения не нарушают строгости решения.

Однако при использовании блоков конечных размеров мы получаем некоторые погрешности. Вообще говоря, чем крупнее блоки, тем больше эти погрешности. Из опыта известно, что разбивка на довольно крупные блоки приводит к результатам, вполне удовлетворяющим запросы практики. Об этом говорит простейший расчет симметричного

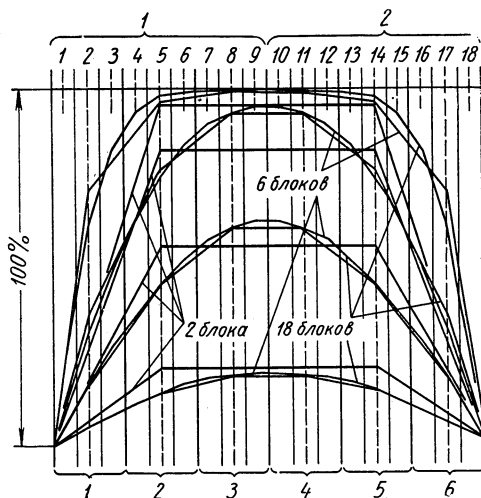


Рис. 2. Распределение температур при различной разбивке на элементарные объемы

остывания стенки из однородного материала при мгновенном понижении температуры ее поверхностей.

Сравнивались результаты разбивки на 2 блока, на 6 блоков и 18 блоков (или одной половины стены — на 1, 3 и 9 блоков). Были взяты очень неблагоприятные условия: понижение температуры поверхностей скачком, отсутствие тепловой изоляции.

Как видно на рис. 2, кривые распределения температур при разбивке на 6 и на 18 блоков почти совпадают, а при разбивке только на 2 блока имеется максимальное отклонение от точного значения всего лишь на 11% от начальной разности температур.

Итак, нет надобности прибегать к очень мелкой разбивке на элементарные объемы, т. е. иметь очень большое число уравнений типа (1).

Как видно из примера, изображенного на рис. 2, во многих случаях целесообразно изменять разбивку для разных стадий протекания процесса.

При решении задач по расчету таких же процессов методом конечных разностей принимаются те же допущения, но к ним еще прибавляется допущение о неизменности процесса обмена в

течение каждого элементарного интервала времени и о скачкообразных изменениях состояния системы в конце интервала. Это дополнительное допущение иногда сильно осложняет расчеты методом конечных разностей, приводя к противоречивым требованиям уменьшения интервалов времени для повышения точности и увеличения их для сокращения счетной работы.

Это противоречие является слабым местом метода Либмана, статических электроинтеграторов Л. А. Вулиса и А. Т. Лукьянова, гидравлических машин Будрина.

В отличие от этих способов решения процесс в гидравлических интеграторах идет непрерывно, что соответствует разбивке времени на бесконечно малые интервалы, т. е. выполнению бесконечно большой вычислительной работы.

Из сказанного следует, что в принципе аппроксимация решений дифференциальных уравнений в частных производных решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений лучше, чем аппроксимация последовательным решением множества алгебраических конечно-разностных уравнений.

Существует очень много процессов, которые могут быть описаны с той или иной степенью приближения системами уравнений типа (1).

Отсюда следует, что расчет всех таких процессов возможен на гидравлических интеграторах. При этом рассчитываемый процесс моделируется обменом между элементарными блоками или узлами по принятой расчетной схеме.

Составление такой гидравлической модели просто и обычно не требует выписывания уравнений. Оно сводится к соединению сосудов по той же схеме, по какой взаимодействуют элементарные объемы или узлы рассчитываемого объекта, к соблюдению пропорциональности параметров гидравлической и рассчитываемой схем и к выбору удобных масштабов высот и времени.

Таким образом, главным вопросом расширения использования методов гидравлических аналогий является вопрос создания аппаратуры, удобной для применения его на практике.

Рассмотрим, какое место занимает метод гидравлических аналогий у нас в СССР в настоящее время.

С момента возникновения метода (1934 г.) разрабатывалась и создавалась аппаратура, однако еще не все принципиальные возможности метода гидравлических аналогий реализованы возможностями аппаратуры. Существующая аппаратура позволяет успешно решать многие сложные задачи теории поля. Устойчивый выпуск гидравлических интеграторов с 1955 г. в виде блоков-секций и отдельных узлов конструкций, из которых можно собирать интеграторы различной мощности, привел к тому, что в настоящее время десятки организаций в Советском Союзе имеют довольно крупные установки гидравлических интеграторов.

На рис. 3 показан общий вид трехмерного гидравлического интегратора Всесоюзного научно-исследовательского института транспортного строительства (ЦНИИС), состоящего из 24 секций (240 узлов).

В различных организациях имеются интеграторы различной мощности (от 2 до 24 секционных). Чаще всего используются

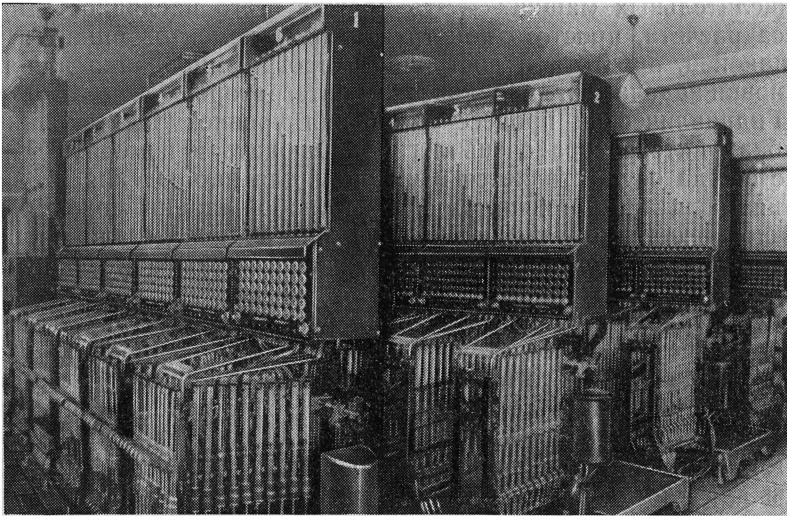


Рис. 3. Общий вид гидравлического интегратора

10—12-секционные. В среднем на организацию приходится около 9 секций.

Гидравлическими интеграторами пользуются научно-исследовательские, учебные и производственные организации.

Они применяются в строительстве, мерзлотоведении, горном деле, гидротехнике, мелиорации, машиностроении, металлургии, печном деле, химии, нефтегазовой промышленности и т. д.¹

Метод гидравлических аналогий является одной из ветвей машинной математики. Все методы машинной математики (методы гидравлических и электрических аналогий, методы применения электронных цифровых машин) должны развиваться, совершенствуясь друг друга. Эти методы следует применять с учетом их особенностей, задач, аппаратуры и других конкретных условий.

Вопрос предоставления возможности работникам различных специальностей и различных уровней подготовки творчески при-

¹ См. «Отечественная литература о теории и практике применения метода гидравлических аналогий В. С. Лукьянова» (Библиографическая справка). Изд. ЦНИИС, М., 1965 г.

менять методы машинной математики очень важен. Практика показала большую доступность расчетов разнообразных физических процессов на гидравлических интеграторах широкому кругу специалистов.

Какие же положительные особенности метода гидравлических аналогий следует отметить при сравнении его с методами электрических аналогий и применением электронных цифровых вычислительных машин? — Это прежде всего наглядность процесса расчета, простота конструктивных элементов аппаратуры и, наконец, простота и доступность программирования для постановки задачи на гидравлическом интеграторе.

Гидравлический процесс изменения уровней в стеклянных трубках интегратора очень легко наблюдать и измерять. Процесс всегда осуществляется в удобном для наблюдения и измерения масштабе времени. Процесс в любой стадии может быть остановлен, данные зафиксированы, интересные детали процесса замечены и повторены; если нужно, введены изменения параметров.

Если сравнивать существующие элементы электрического и гидравлического интеграторов, то видно, что в гидравлическом интеграторе они много проще и нагляднее. Количеству электричества соответствует количество воды, силам тока — расходы воды, электрическим емкостям — площади сечения сосудов (которые могут быть переменными по высоте) и специальные сосуды для учета скрытых теплот, электрическим постоянным и переменным сопротивлениям — гидравлические сопротивления капилляров, переменных щелей и диафрагм, а также их комбинаций.

Программирование для постановки задачи на гидравлическом интеграторе по сравнению с программированием расчета на цифровой вычислительной машине очень просто и сводится к установлению математической аналогии между балансами тепла, вещества, энергии в элементарных объемах и воды в узлах гидравлического интегратора.

Точность расчетов на гидравлических интеграторах достаточна, так как исходные параметры, например физические характеристики материалов, задаются обычно со значительно меньшей точностью.

Гидравлические интеграторы вследствие своей наглядности и простоты полезны для учебной работы. На них очень легко иллюстрируются сложные понятия ряда специальных дисциплин, например теплотехники, мерзловедения, динамики подземных вод и электротехники. Они удобны для уяснения принципов моделирования подобия и применения аналоговой вычислительной техники. Практика показывает, что метод гидравлических аналогий помогает прививать навыки к применению и других средств вычислительной техники.

Быстро растет количество опубликованных работ, выполненных с применением гидравлических интеграторов. Если к I Всесоюзному совещанию (к 1 января 1961 г.) в библиографии насчитывалось лишь 73 работы по методу гидравлических аналогий, то ко II Совещанию (к 1 января 1965 г.) насчитывается 221 работа. Рост числа опубликованных работ суммарным итогом по годам изображен на рис. 6.

Рассмотрим области наиболее широкого применения метода гидравлических аналогий.

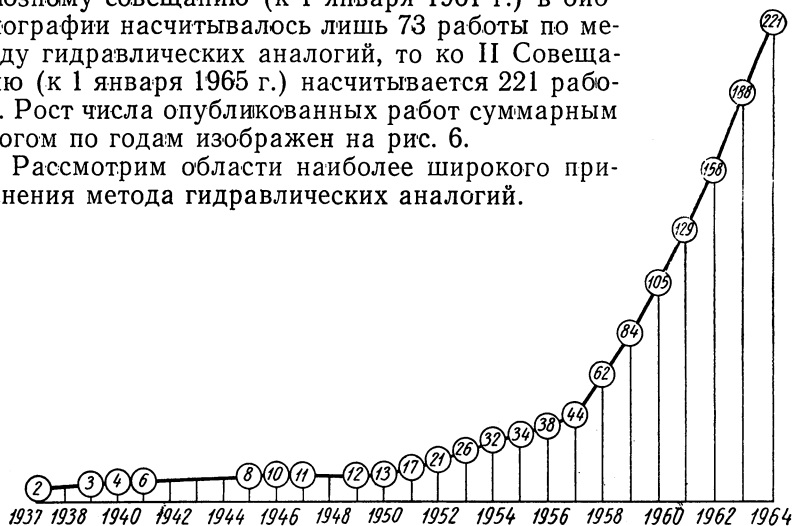


Рис. 6. Рост числа печатных работ о применении гидравлических интеграторов

1. Строительство, горное дело, мерзлотоведение

Метод гидравлических аналогий используется для расчетов температурного режима различных бетонных и железобетонных конструкций при разработке мероприятий по борьбе с образованием трещин при изготовлении конструкций и их последующей эксплуатации; для изыскания мер повышения долговечности сооружений, работающих в тяжелых температурных условиях; для теплотехнических расчетов зданий с учетом общего воздухообмена и фильтрации воздуха через ограждающие конструкции; для расчетов фильтрации газа в угольных пластах (борьба с внезапными выбросами); для расчетов температурного режима горных пород при их тепловом взаимодействии со зданиями, железнодорожными насыпями, водопроводами, шахтами и другими сооружениями; для совершенствования прогнозов промерзания и протаивания грунтов; для расчетов ледников различного назначения; для определения теплофизических характеристик горных пород в условиях естественного залегания; для тепловых расчетов при проходке шахт способом искусственного замораживания горных пород и т. д.

2. Гидротехника и мелиорация

В этой области метод гидравлических аналогий служит для расчетов фильтрации (особенно неустановившейся) в гидротехническом и гидромелиоративном строительстве, например для расчетов подпора грунтовых вод, расчетов плановой фильтрации, дренажей, потерь воды оросительными каналами, осушения карьеров и т. д.

3. Машиностроение и металлургия

Метод гидравлических аналогий находит применение при расчетах температурных полей в газовых турбинах, расчетах затвердевания стальных отливок, тепловых расчетах при электрошлаковом переплаве и т. д.

Имеется и ряд других областей применения.

Решаются задачи прямые и обратные, получаются обобщенные решения. Решение обратных задач позволяет лучше познавать действительные физические процессы и определять величины расчетных параметров по данным непосредственных измерений в натуре.

Примерами являются определение температур замерзания влаги в различных грунтах, выяснение допустимости упрощения расчетных схем и приближенных практических расчетов, уточнение различных расчетных параметров в гидрогеологических расчетах и т. п.

Применение метода гидравлических аналогий позволило решить важную для мерзлотоведения и других областей техники задачу практических расчетов переноса тепла в грунтах теплопроводностью и фильтрацией одновременно. Был распространен принцип Гутмана на решение задач нестационарного процесса промерзания — протаивания грунтов.

За время между I и II Всесоюзными совещаниями по аналоговым методам решения краевых задач состоялся ряд различных совещаний, на которых было представлено и обсуждено много различных работ, выполненных с применением метода гидравлических аналогий. Можно назвать совещание по тепло-массообмену в Минске, совещания по методам исследования неустановившейся фильтрации в Ленинграде. Многократно показана эффективность метода гидравлических аналогий и выявлен ряд перспектив дальнейшего усовершенствования аппаратуры, расширения ее возможностей.

Дальнейшая конструктивная разработка аппаратуры должна позволить более гибко приспособлять аппаратуру к требованиям отдельных эксплуатационных точек как в отношении ее конструктивных особенностей и перспектив дальнейшего применения метода гидравлических аналогий в данной области, так и в отно-

шении ее стоимости, причем вопрос стоимости особенно остро стоит перед учебными заведениями.

Для удешевления и улучшения аппаратуры нужно переходить к новым материалам. При конструктивных решениях следует дальше развивать возможности постепенного перевода тех же установок от более простых устройств к более сложным, с большей разрешающей способностью. В частности, следует развивать применение канальных, капиллярных, диафрагменных и щелевых сопротивлений и их комбинаций.

Рассмотрим, как обстоит дело с гидравлическими интеграторами за границей.

В библиографической справке 1965 г. имеется приложение — список зарубежных работ по применению устройств и интеграторов, основанных на принципе гидравлических аналогий. Из рассмотрения этих работ видно, что наука в этой области в СССР находится впереди как в части разработки аппаратуры и теории, так и в части широты областей применения. В частности, мы не видим там применения гидравлических интеграторов в расчетах неустановившейся фильтрации.

Следует отметить, что метод гидравлических аналогий из-за своей простоты, наглядности и гибкости является удобным средством исследований, особенно в начале исследований, когда ищется сама постановка задачи. В некоторых случаях бывает целесообразным после отработки постановки задачи переходить к решениям на электронных вычислительных машинах, особенно когда требуется составление каких-либо вспомогательных таблиц.

Метод полезен в учебной работе, так как прививает навыки к применению машинной математики и углубляет понимание задач своей специальности.

Ю. М. Мацевитый

К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЯ НА СЕТКАХ ОМИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Еще сравнительно недавно считалось, что на электрических моделях с сосредоточенными параметрами (R -сетка) можно решать лишь линейные задачи теории поля. Метод Г. Либмана [14], получивший дальнейшее развитие в работах Л. А. Коздобы [8], позволил решать нелинейные уравнения второго порядка в частных производных:

$$\gamma(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0. \quad (2)$$

Однако решение указанным методом является весьма трудоемким, так как включает в себя процесс последовательных приближений, причем при переходе к очередному приближению необходимы пересчет и перезадание всех сопротивлений R -сетки. В ряде случаев этот метод непригоден из-за того, что требует использования серийного электроинтегратора или большого числа дорогостоящих магазинов сопротивления для получения R -сетки.

В некоторых работах [2, 12, 6, 5, 10] для решения подобных задач успешно применяется интегральное преобразование следующего вида:

$$\theta = \int_0^{\infty} \lambda(\varphi) d\varphi. \quad (3)$$

Введение новой функции θ значительно упрощает решение задачи как аналитически, так и методами электрической аналогии [5, 6, 9, 10, 12]. В работе Карплюса «Моделирующие устройства для решения задач теории поля» для преобразования уравнения (2) в уравнение Лапласа вводится новая функция [13]

$$\theta = [\lambda(\varphi)]^2 \quad (4)$$

и задача решается методом конечных разностей, лежащим в основе электрического моделирования на R -сетках. Поэтому было естественно распространение методики, изложенной в работе [14], на решение задач на электрических аналогах.

Решение задач Дирихле и Неймана при $\lambda \neq \text{const}$ не отличается от решения этих же задач при $\lambda = \text{const}$. При этом если на границе области заданы значения искомой функции $\varphi = \varphi_*$ (задача Дирихле), то для функции θ получается граничное условие в виде ¹

$$\theta = (a + b\varphi_*)^2.$$

Граничное условие II рода

$$-\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} = q_*$$

для вспомогательной функции приводится к виду

$$-\frac{\partial \theta}{\partial n} = 2bq_*.$$

¹ Это граничное условие можно выразить линейной зависимостью $\lambda = a + b\varphi$, что соответствует большинству задач, встречающихся на практике.

На модели воспроизводится поле функции θ , а переход от значений θ к значениям функции φ осуществляется согласно зависимости

$$\varphi = \frac{1}{b} (\sqrt{\theta} - a), \quad (5)$$

следующей из формулы (4).

Наибольший интерес представляет решение третьей краевой задачи, когда после преобразования по формуле (4) граничное условие

$$\alpha (\varphi - \varphi_f) = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

становится нелинейным:

$$2\alpha (\sqrt{\theta} - \sqrt{\theta_f}) = -\frac{\partial \theta}{\partial n}, \quad (6)$$

где α — коэффициент теплоотдачи;

λ — коэффициент теплопроводности;

$$\theta_f = (a + b\varphi_f)^2; \quad (7)$$

где φ_f — функция, заданная на контуре.

В разностной форме уравнения (2) и (6) записываются следующим образом:

$$\theta_{s+1,t} + \theta_{s-1,t} + \theta_{s,t+1} + \theta_{s,t-1} - 4\theta_{s,t} = 0; \quad (8)$$

$$2\alpha [\sqrt{\theta_M} - \sqrt{\theta_f}] = -\frac{\theta_M - \theta_N}{h}, \quad (9)$$

где s и t — номера строк и столбцов;

θ_M и θ_N — значения функции θ соответственно в граничном (точка M) и в ближайшем к границе (точка N) узлах;

h — расстояние между точками M и N [11].

Так как левая часть граничного условия (9) нелинейна, то моделирование обычным способом, т. е. на R -сетках, невозможно. Необходимо либо провести линеаризацию граничных условий, либо применить для моделирования нелинейные сопротивления. В настоящей работе рассматривается лишь первый прием.

Для линеаризации граничных условий необходимо квадратичную зависимость $\theta = \theta(\varphi)$ заменить на границе линейной зависимостью, которой может быть уравнение касательной к кривой $\theta = \theta(\varphi)$ в граничной точке

$$\varphi = \frac{1}{2b \sqrt{\theta_M^{(k)}}} (\theta_M^{(k+1)} - \theta_M^{(k)}) + \varphi_M^{(k)},$$

где индексы k и $k + 1$ соответствуют (k) и $(k + 1)$ -му приближению.

Тогда граничное условие принимает вид

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\theta_M^{(k)}}} [\theta_M^{(k+1)} - \theta_f^{(k+1)}] = \frac{\theta_N^{(k)} - \theta_M^{(k)}}{h}, \quad (10)$$

где

$$\theta_f^{(k+1)} = \theta_M^{(k)} + (\varphi_f - \varphi_M^{(k)}) 2b \sqrt{\theta_M^{(k)}}.$$

При электрическом моделировании на R -сетке функция данного приближения известна во всех точках, кроме искомой, т. е. на модели задача решается не методом простой итерации, а частным случаем метода Зейделя. Докажем сходимость последовательных приближений к точному решению.

Для рассматриваемого случая уравнение Лапласа (в разностной форме), характеризующее поле точных значений функций θ , имеет вид

$$\theta_{s,t}^{(k+1)} = 0,25 (\theta_{s+1,t}^{(k+1)} + \theta_{s-1,t}^{(k+1)} + \theta_{s,t+1}^{(k+1)} + \theta_{s,t-1}^{(k+1)}). \quad (11)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \theta_{s,t} - \theta_{s,t}^{(k)} &= \rho_{s,t}^{(k)} \\ \theta_M - \theta_M^{(k)} &= \rho_M^{(k)} \end{aligned} \quad (12)$$

и вычтем из уравнений (9) и (8) соответственно уравнения (10) и (11).

После преобразований получим

$$2\alpha [\sqrt{\theta_M} - \sqrt{\theta_M^{(k+1)}}] = \frac{1}{h} [\rho_N^{(k)} - \rho_M^{(k+1)}] \quad (13)$$

и

$$\rho_{s,t}^{(k+1)} = 0,25 [\rho_{s+1,t}^{(k+1)} + \rho_{s-1,t}^{(k+1)} + \rho_{s,t+1}^{(k+1)} + \rho_{s,t-1}^{(k+1)}]. \quad (14)$$

Если ввести обозначения

$$\sigma = \frac{\alpha}{\sqrt{\theta}}; \quad \sigma^{(k)} = \frac{\alpha}{\sqrt{\theta^{(k)}}} \quad (15)$$

и в уравнение (13) вместо $\sqrt{\theta_M} = \frac{\alpha}{\sigma_M}$ подставить вытекающее из формулы (12) выражение

$$\frac{\alpha}{\sigma_M} = \left[\rho_M^{(k+1)} + \frac{\alpha^2}{\sigma_M^{(k+1)^2}} \right]^{0,5},$$

разложенное в биномиальный ряд, то уравнение (13) примет вид

$$\begin{aligned} \rho_M^{(k+1)} + h\sigma_M^{(k+1)}\rho_M^{(k+1)} - \frac{h}{4} \frac{[\sigma_M^{(k+1)}]^3}{\alpha^2} [\rho_M^{(k+1)}]^2 + \\ + \frac{h [\sigma_M^{(k+1)}]^5}{8\alpha^4} [\rho_M^{(k+1)}]^3 - \dots = \rho_N^{(k)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mu_k &= \max |\rho_M^{(k)}|; \\ \nu_k &= \max \sigma_M^{(k)} \end{aligned} \quad (17)$$

и примем, что

$$\frac{\mu_k}{\alpha^2} \nu_k^2 = q < 1. \quad (18)$$

При этом каждый последующий член левой части уравнения (16) будет меньше предыдущего и, отбрасывая в левой части все члены, начиная с четвертого, мы тем самым уменьшаем левую часть. Следовательно, после некоторых преобразований и перехода к абсолютным величинам можно записать следующее неравенство:

$$|\rho_M^{(k+1)}| \cdot \left| \left[1 + h\sigma_M^{(k+1)} - \frac{h}{4} \frac{[\sigma_M^{(k+1)}]^3}{\alpha^2} \rho_M^{(k+1)} \right] \right| < |\rho_N^{(k)}|. \quad (19)$$

Учитывая неравенство (18), заметим, что выражение в квадратных скобках больше единицы. Тогда

$$\delta = \frac{1}{1 + h\sigma_M^{(k+1)} - \frac{h}{4} \frac{[\sigma_M^{(k+1)}]^3}{\alpha^2} \rho_M^{(k+1)}} < 1.$$

Используя формулу (17) и принцип максимума $|\rho_N^{(k)}| \geq \mu_k$ [1], перепишем неравенство (19) следующим образом:

$$\mu_{k+1} < \delta \mu_k.$$

Аналогично можно записать неравенства:

$$\mu_k < \delta \mu_{k-1};$$

$$\mu_{k-1} < \delta \mu_{k-2};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mu_1 < \delta \mu_0.$$

Отсюда следует неравенство

$$\mu_k < \delta^k \mu_0.$$

Если $k \rightarrow \infty$, то $\mu_k \rightarrow 0$ и $\theta_M^{(k)} \rightarrow \theta_M$.

Таким образом, доказана сходимость последовательных приближений к точному решению для граничных узлов. Этого оказывается достаточно, так как для функции ρ , как уже было отмечено, справедлив принцип максимума ($|\rho_{s,t}^{(k)}| \leq \mu_k$), т. е. если показана сходимость для граничных узлов, то это тем более справедливо для внутренних узлов.

В процессе доказательства сходимости величина шага сетки не вошла в последние неравенства. Из этого можно сделать вывод, что доказательство в одинаковой степени справедливо для всех h , т. е. разностная схема корректна, а следовательно, нет необходимости проверять устойчивость по граничным условиям [1].

При электрическом моделировании для граничного узла электрической модели (рис. 1) можно записать закон Кирхгофа, если сделать допущение, что ток, поступающий в граничный узел, равен току, идущему из узла M в соседний граничный узел N :

$$\frac{1}{R_\alpha} (V_M - V_f) = \frac{1}{r} (V_N - V_M), \quad (20)$$

где R_α — внешнее сопротивление, моделирующее граничные условия; r — сопротивление сетки между узлами M и N ; V_M , V_N , V_f — потенциалы соответственно в граничном узле, в узле, ближайшем к граничному узлу, и потенциал, моделирующий функцию θ_f .

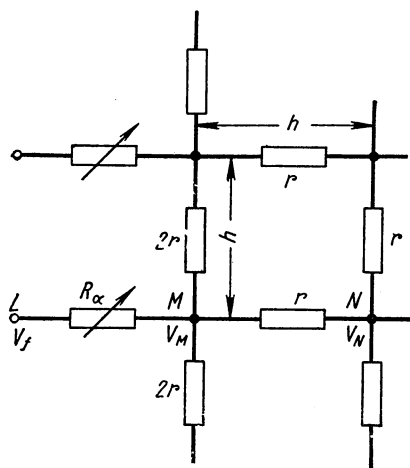


Рис. 1. Схема граничного узла электрической модели

Выведем критериальные зависимости, определяющие подобие граничных условий III

рода электрической модели и моделируемого явления.

Если ввести безразмерные величины

$$\bar{\theta} = \frac{\theta - \theta_{\min}}{\theta_{\max} - \theta_{\min}}; \quad \bar{V} = \frac{V - V_{\min}}{V_{\max} - V_{\min}}, \quad (21)$$

то уравнения (10) и (20) в безразмерной форме примут соответственно следующий вид:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\theta_M^{(k)}}} [\bar{\theta}_M^{(k+1)} - \bar{\theta}_f^{(k+1)}] = \frac{\bar{\theta}_N^{(k)} - \bar{\theta}_M^{(k+1)}}{h}; \quad (22)$$

$$\frac{1}{R_\alpha} [\bar{V}_M - \bar{V}_f] = \frac{1}{r} (\bar{V}_N - \bar{V}_M). \quad (23)$$

Примем

$$\bar{V}_M = m_\theta \bar{\theta}_M^{(k+1)}; \quad \frac{1}{R_\alpha} = m_\alpha \alpha;$$

$$\bar{V}_N = m_\theta \bar{\theta}_N^{(k)}; \quad \frac{1}{r} = m_h \frac{1}{h}; \quad (24)$$

$$\bar{V}_f = m_\theta \bar{\theta}_f^{k+1},$$

где m_θ , m_α и m_h — масштабные коэффициенты.

Используя зависимости (24), перепишем равенство (23):

$$m_\alpha \alpha [\bar{\theta}_M^{(k+1)} - \bar{\theta}_f^{(k+1)}] = m_h \frac{1}{h} [\bar{\theta}_N^{(k)} - \bar{\theta}_M^{(k+1)}]. \quad (25)$$

Сравнивая уравнения (25) и (22), находим, что они идентичны, если выполняется условие

$$\frac{m_\alpha}{m_h} \sqrt{\bar{\theta}_M^{(k)}} = 1. \quad (26)$$

Подставим значения m_α и m_h из формулы (24) в равенство (26):

$$\frac{r \sqrt{\bar{\theta}_M^{(k)}}}{\alpha R_\alpha h_\alpha} = 1.$$

Из этого выражения определяется величина сопротивления, моделирующего граничное условие:

$$R_\alpha^{(k+1)} = \frac{r}{\alpha h} \sqrt{\bar{\theta}_M^{(k)}}. \quad (27)$$

На практике при решении конкретной задачи необходимо задаться каким-либо значением $\theta_M^{(0)}$, например при $\lambda = \text{const}$. Далее, определив по формуле (27) величину граничного сопротивления, компонуем модель и снимаем поле функции $\bar{\theta}$ (первое приближение). Полученное значение функции $\bar{\theta}_M^{(1)}$ на границе дает возможность найти по формуле (21) абсолютное значение функции $\theta_M^{(1)}$ и, следовательно, новое значение граничного сопротивления R_α по формуле (27). Снимается новое поле функции $\bar{\theta}$, которое будет вторым приближением и т. д. При этом надо помнить, что с каждым приближением согласно формуле (10) несколько меняется значение θ_f , а следовательно, θ_{\max} и θ_{\min} в формуле (21), что сказывается на переводе относительных значений функции $\bar{\theta}$ в абсолютное θ , который необходим для определения величины граничного сопротивления.

Таким образом, очередное приближение заключается лишь в пересчете граничных сопротивлений и перезадании их на модели, что не вызывает больших трудностей, если использовать переменные сопротивления типа СПО или СП.

Вся остальная сетка может быть набрана из постоянных сопротивлений, что особенно необходимо при отсутствии электроинтегратора или сетки переменных сопротивлений.

В качестве примера была решена задача стационарной теплопроводности с учетом зависимости коэффициента теплопровод-

ности от температуры для полуграниченного тела из сложнoleгированного никелевого сплава (коэффициент теплопроводности $\lambda = 3,45 \cdot 10^{-2} T - 3,6$), охлаждаемого системой щелевых каналов с шагом $s = 36$ мм (рис. 2). На рисунке штриховой линией обведен моделирующий элемент. Температура греющей среды $T_2 = 1073^\circ \text{K}$; температура охлаждающей среды $T_0 = 373^\circ \text{K}$.

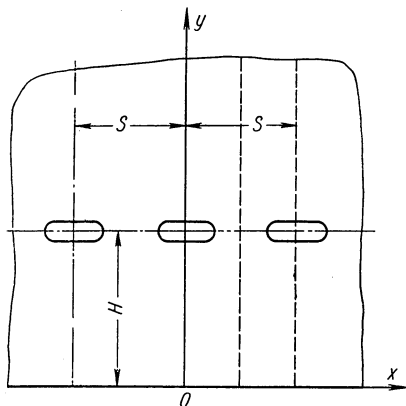


Рис. 2. Полуграниченное тело:
 s — шаг каналов; H — заглубление каналов

Модель набиралась из активных сопротивлений $r = 150$ ом. Контур согласно теории замещения [3] набирался из сопротивлений $r = 300$ ом. Схема модели показана на рис. 3*.

На рис. 4 показано распределение температуры в полуграниченном теле в сечении, расположенном на расстоянии $x = 0,5s$ от оси ординат для второго и третьего приближения, которые на графике сливаются в одну кривую. Такая близость значения 2-го и 3-го приближе-

второго и третьего приближения, которые на графике сливаются в одну кривую. Такая близость значения 2-го и 3-го приближе-

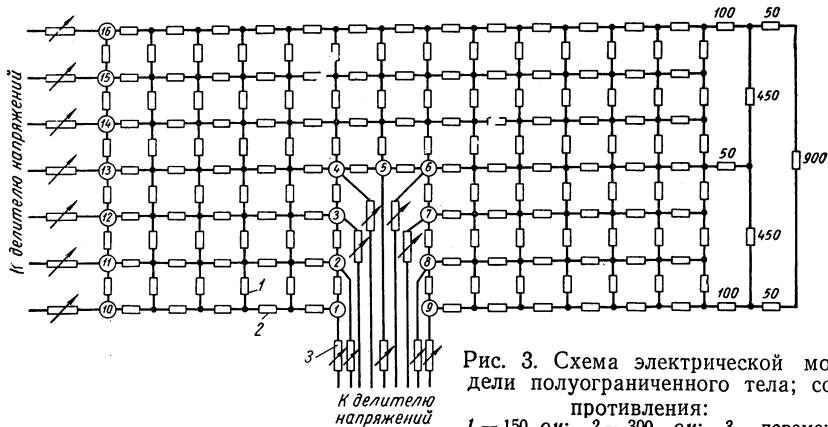


Рис. 3. Схема электрической модели полуграниченного тела; сопротивления: 1 — 150 ом; 2 — 300 ом; 3 — переменные (для моделирования граничных условий)

ний при условии, что первое приближение делалось для

$$\lambda = \text{const} = \frac{1}{T_2 - T_0} \int_{T_0}^{T_2} \lambda dT,$$

* Для моделирования неограниченной части при решении аналитической задачи был применен метод, изложенный в работе [7], когда неограниченная часть может моделироваться увеличением шага сетки.

показывает достаточную эффективность примененного метода, который практически позволяет при решении ограничиться двумя приближениями. Для сравнения на рисунке штриховой линией нанесены результаты решения той же задачи на электро-

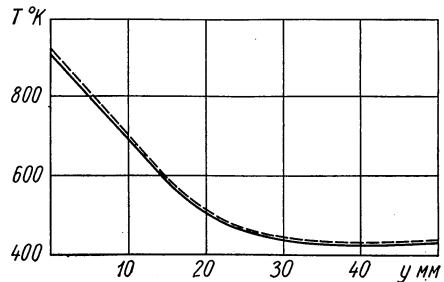


Рис. 4. Распределение температуры в полуограниченном теле в сечении, расположенном на расстоянии $x = 0,5 s$ от оси ординат

литической ванне [5], которые весьма мало отличаются от результатов, полученных предлагаемым методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1959, стр. 354—372.
2. Варшавский Г. А. Определение тепловых потоков в твердом теле при стационарном режиме для случая, когда коэффициент теплопроводности является функцией температуры. «Журнал экспериментальной и теоретической физики», 1936, № 3, стр. 3—23.
3. Волынский Б. А., Бухман В. Е. Методы для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960, стр. 446.
4. Капинос В. М., Мацевитый Ю. М. О решении задачи стационарной теплопроводности с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры методом сеток. «Известия вузов. Энергетика», 1965, № 5.
5. Капинос В. М. Решение задач стационарной теплопроводности с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры методом ЭТА. «Теплоэнергетика», 1960, № 11, стр. 74—79.
6. Капинос В. М., Мацевитый Ю. М. К определению стационарного температурного поля с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. «Известия вузов. Энергетика», 1959, № 11, стр. 123—126.
7. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 461.
8. Коздоба Л. А. О применении измерительных схем интеграторов ЭГДА-6/53 для исследования температурных полей на переходных режимах. «Известия вузов. Энергетика», 1960, № 1, стр. 103—110.
9. Кудряшев Л. И., Темников А. В. Об одном приеме решения нелинейных задач нестационарной теплопроводности на сеточных электронинтеграторах. Труды Куйбышевского авиационного ин-та, вып. 12, 1961, стр. 41—54.
10. Кудряшев Л. И., Темников А. В., Веселов В. П. Исследование нелинейных задач нестационарной теплопроводности с помощью электронных моделей. Труды КУАИ, вып. 12, 1961, стр. 13—34.
11. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. М., ГИТТЛ, 1950, стр. 183.

12. Страхович К. И. Некоторые задачи теплопроводности в твердых телах с переменными теплофизическими характеристиками. ИФЖ, 1958, № 3, стр. 3—23.

13. Шнейдер П. Дж. Инженерные проблемы теплопроводности, М., Изд-во иностр. лит., 1960, стр. 141—150.

14. Liebmann G. A. A new Electrical Analog Method for the Solution of Transient Heat—Conduction Problems «Transaction of the ASME», v. 78, 1956, № 3.

А. П. Спалвинь

АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Стационарные краевые задачи поля очень просто решаются моделированием на сетках омических сопротивлений. В начальный период развития цифровых вычислительных машин моделирующие устройства типа сеток имели неоспоримые преимущества перед другими моделирующими устройствами с точки зрения наглядности хода решения, стоимости оборудования, отсутствия необходимости в программировании. Однако в результате бурного развития цифровой вычислительной техники, методов вычисления и программирования решение краевой задачи выгоднее производить средствами дискретной вычислительной техники, так как существующие сетки не автоматизированы и подготовка задачи и съем решения на них занимают много времени.

Почти всегда основная область сетки состоит из регулируемых сопротивлений. Рассмотрим прямоугольную сетку размеров $\kappa \times l$, где κ — число узловых точек по горизонтали, а l — число узловых точек по вертикали. В такой сетке имеются $2\kappa l - (\kappa + l)$ — сопротивлений. Пусть сетка содержит κl тококорректирующих сопротивлений (под словом «тококоррекция» здесь понимается как ввод, так и вывод тока из узловых точек сетки). Тогда, если считать, что все вышеупомянутые сопротивления регулируемые, то необходимо иметь $3\kappa l - (\kappa + l)$ таких сопротивлений. Оказывается, что на сетке, основная область которой состоит из равных между собой и постоянных нерегулируемых сопротивлений, но с наличием κl регулируемых тококорректирующих элементов, возможно моделирование таких же полей, как на сетке, все сопротивления которой регулируемы. Применение такой упрощенной схемы сокращает число переменных сопротивлений.

Количество сопротивлений на одну узловую точку сетки

$$B = \frac{3\kappa l - \kappa - l}{\kappa l} = 3 - \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{l}.$$

Из формулы видно, что практически величина B лежит в пределах 2,5—3. Например, при $\kappa = l = 10$ $B = 2,8$. Кроме сокраще-

ния числа необходимых регулируемых сопротивлений, схема легче поддается автоматизации, так как техническая реализация тококоррекции значительно легче, чем реализация регулируемых сопротивлений основной области сетки.

Пусть требуется решить плоскую стационарную краевую задачу, решение которой удовлетворяет уравнению

$$\nabla(f\nabla\varphi) = 0, \quad (1)$$

где $f = f(x, y, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y})$ — функция, характеризующая проводимость среды;

$\varphi = \varphi(x, y)$ — потенциал поля.

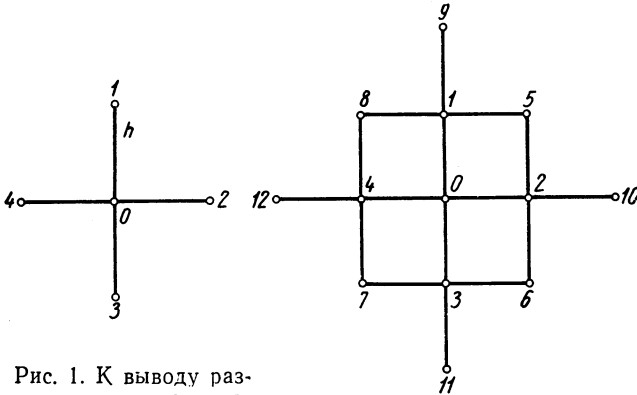


Рис. 1. К выводу разностного уравнения с погрешностью порядка h^2

Рис. 2. К выводу разностного уравнения с погрешностью порядка h^4

После несложных преобразований уравнения (1) получим

$$\nabla^2\varphi = - \frac{\nabla\varphi\nabla f}{f}. \quad (2)$$

Из выражения (2) видно, что решение стационарной краевой задачи всегда можно свести к решению уравнения Пуассона в однородной среде ($f = \text{const}$). На основе этого заключения была разработана и опробована схема, о которой говорилось выше.

Раскроем уравнение (2):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = - \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Уравнению (3) в узловой точке сетки с шагом h (рис. 1) соответствует разностное уравнение

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0}{h^2} = - \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{2h} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2h} \right), \quad (4)$$

откуда получаем

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} \left\{ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \frac{h}{2f} \left[(\varphi_2 - \varphi_4) \frac{\partial f}{\partial x} + (\varphi_1 - \varphi_3) \frac{\partial f}{\partial y} \right] \right\}. \quad (5)$$

Формула (5) имеет погрешность порядка h^2 . Порядок погрешности повышается до h^4 , если применить более сложную формулу для расчета потенциала φ_0 (рис. 2):

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & \frac{1}{5} \left\{ \left[1 + h \left(a_y - \frac{b_y}{4} \right) \right] \varphi_1 \left[1 + h \left(a_x - \frac{b_x}{4} \right) \right] \varphi_2 + \right. \\ & + \left[1 - h \left(a_y - \frac{b_y}{4} \right) \right] \varphi_3 + \left[1 - h \left(a_x - \frac{b_x}{4} \right) \right] \varphi_4 \left. \right\} + \frac{1}{20} \left\{ \left[1 + \right. \right. \\ & + \frac{h}{4} (b_x + b_y) \left. \right] \varphi_5 + \left[1 + \frac{h}{4} (b_x - b_y) \right] \varphi_6 + \left[1 - \frac{h}{4} (b_x + b_y) \right] \varphi_7 + \\ & + \left[1 - \frac{h}{4} (b_x - b_y) \right] \varphi_8 \left. \right\} + \frac{h}{80} \left[-(2a_y - b_y) \varphi_9 - (2a_x - b_x) \varphi_{10} + \right. \\ & \left. + (2a_y - b_y) \varphi_{11} + (2a_x - b_x) \varphi_{12} \right], \quad (6) \end{aligned}$$

где коэффициенты a_x , a_y и b_x , b_y можно найти из следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f} \operatorname{grad} f + \frac{h^2}{12} \left[\Delta \left(\frac{1}{f} \right) \operatorname{grad} f + \frac{1}{f} \operatorname{grad} (\Delta f) \right] &= ia_x + ja_y; \\ \frac{h^2}{12} \frac{1}{f} \operatorname{grad} f &= ib_x + jb_y. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В случае решения уравнения Лапласа ($f = \text{const}$) точность формулы (6) получается порядка h^6 .

Алгоритм решения любой стационарной краевой задачи на сетке с тококоррекцией следующий:

1. При заданных краевых условиях в качестве нулевого приближения к решению принимается распределение потенциалов, которое возникает в случае решения уравнения Лапласа (все тококорректирующие сопротивления отключены).

2. Поочередно в каждой узловой точке на основе измерений соответствующих потенциалов по формуле (5) вычисляется потенциал φ_0 . Тококоррекцией добиваются равенства фактического потенциала сетки φ_0 расчетному. Обход области продолжается до тех пор, пока расчетный потенциал в каждой узловой точке имеет отклонение от фактического измеряемого потенциала, не превышающее заранее заданную величину ε .

3. Если есть необходимость повысить точность решения до порядка h^4 , то расчет потенциала φ_0 следует ввести по формуле (6).

Вышеизложенный алгоритм опробован для многих важных видов функции f . Сходимость к решению всегда имела место.

Ниже приводятся выводы, сделанные из решений задач для некоторых видов функции f .

1. $f = \text{const}$.

Применением 2-го пункта алгоритма можно устранить те погрешности, которые возникают из-за неточности сопротивления основной области.

Применением 3-го пункта алгоритма точность решения уравнения Лапласа повышается до h^6 .

2. $f = f(x, y)$.

В качестве простого примера приведем случай $f = x$ (полярная сетка с аксиальной симметрией). Уравнение (5) принимает вид

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} \left[\varphi_1 + \left(1 + \frac{h}{2x}\right) \varphi_2 + \right. \\ \left. + \varphi_3 + \left(1 - \frac{h}{2x}\right) \varphi_4 \right],$$

а коэффициенты a_x, a_y, b_x, b_y в уравнении (6) соответственно принимают вид

$$a_x = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{h^2}{6x^2}\right); \quad a_y = 0; \\ b_x = \frac{h^2}{12x}; \quad b_y = 0.$$

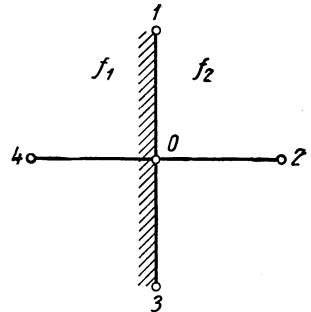


Рис. 3. К выводу разностных уравнений для границы двух сред

Формулы (5) и (6) непригодны в том случае, когда частные производные функции $f\left(\frac{\partial f}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ имеют разрыв. Пусть две среды обладают постоянными проводимостями f_1 и f_2 (рис. 3), тогда потенциал φ_0 следует рассчитывать по формуле

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} \left(\varphi_1 + \frac{2f_2}{f_1 + f_2} \varphi_2 + \varphi_3 + \frac{2f_1}{f_1 + f_2} \varphi_4 \right).$$

Из формулы ясно, что если нет необходимости устранить ошибки, возникшие из-за неточности сопротивлений основной области сетки, то корректирующие токи следует вводить только в те узловые точки, через которые проходит граница раздела сред (предполагается, что она проходит только через узловые точки). Автору удалось с помощью тококоррекции промоделировать даже вырожденные случаи неоднородности среды. Например, область имеет короткозамкнутые участки ($f_{кор} = \infty$) или вырезы ($f_{выр} = 0$).

3. $f = f(\varphi)$.

Уравнение (3) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right],$$

а уравнение (5) будет следующим:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} \left\{ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \frac{1}{4f} \frac{\partial f}{\partial \varphi} [(\varphi_2 - \varphi_4)^2 + (\varphi_1 - \varphi_3)^2] \right\}.$$

Интересно отметить, что в случае, когда $f = f(\varphi)$, систему разностных уравнений вообще невозможно точно решить на сетке, которая не имеет токоввода.

Если функция f одновременно зависит не только от координат x и y , но и от потенциала φ и частных производных $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, то уравнения (5) и (6) могут иметь весьма сложную структуру.

Кроме приведенного алгоритма решения, существует множество других, представляющих собой видоизменения описанного алгоритма, который обладает наибольшей устойчивостью. В этих случаях можно, например, рассчитывать величину тококорректирующих сопротивлений или применять групповую регулировку этих сопротивлений.

Если проводящая среда $f = f(x, y)$ неоднородна, то способ моделирования тококоррекцией по сравнению с обычным способом моделирования имеет большую трудоемкость, так как требует итеративного процесса установки тококорректирующих сопротивлений. Если не нужна высокая точность (число ε велико), или степень неоднородности невысока ($2 \geq \frac{f_1}{f_2} \geq 0,5$), или требуемая неоднородность уже приблизительно набрана на основной области сетки с помощью регулируемых сопротивлений, то, пока нет быстродействующих автоматизированных сеток, целесообразно применить описанный алгоритм на существующих сетках, так как в перечисленных выше случаях число шагов итеративного процесса невелико.

В случаях нелинейности проводящей среды моделирование на сетке с тококоррекцией выгоднее, чем моделирование краевой задачи на сетке с регулируемыми сопротивлениями основной области, так как уменьшается число переменных элементов и процесс итерации сходится к решению быстрее.

В заключение следует еще раз указать на важное обстоятельство, что сетка с тококоррекцией сравнительно легко поддается автоматизации и может стать основным счетно-решающим элементом специализированного быстродействующего вычислительного устройства, включающего в свой состав и цифровую вычислительную машину.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольтский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960, стр. 55—77.
2. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 211—250.

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИФФУЗИИ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

Для решения задач линейной, сферической и цилиндрической диффузии с равновесными начальными и краевыми условиями первого и второго рода предлагается использовать операционные усилители со специальными RC -двухполюсниками на входе или в цепи обратной связи усилителя. В табл. 1 приведены рассматриваемые уравнения, а также начальные и граничные условия, при которых они решаются.

Используя для решения указанных задач преобразование Лапласа [5], перейдем от уравнений в частных производных к уравнениям в полных производных. Решения вновь полученных уравнений могут быть записаны в следующем виде:

а) для граничных условий первого рода

$$C(\omega, p) - \frac{\bar{c}}{p} = \left[F(p) - \frac{c}{p} \right] K_g(\omega, p); \quad (1)$$

б) для граничных условий второго рода

$$C(\omega, p) - \frac{\bar{c}}{p} = Q(p) Z_g(\omega, p). \quad (2)$$

Кроме того, значение функции на поверхности связано с градиентом соотношением

$$C(\omega_1, p) - \frac{\bar{c}}{p} = Q(p) Z_g(p). \quad (3)$$

В приведенных решениях введены обозначения: p — независимая переменная в плоскости изображений; ω — пространственная координата; x, r, ω_1 — функции, преобразованные по Лапласу (x — для линейной диффузии, r — для сферической и цилиндрической $\omega_1 = 0$ для полуограниченного тела, $\omega_1 = R$ — для неограниченной пластины и $\omega_1 = r_0$ — для шара и цилиндра).

C — изображение искомой функции (концентрации) по Лапласу;
 c — начальные значения;

q — заданный поток;

Q — его изображение;

f — заданная функция;

F — ее изображение.

Функции $K_g(\omega, p)$, $Z_g(\omega, p)$ и $Z_g(p)$ при использовании общих решений [5] и граничных условий, заданных в табл. 1, могут быть приведены к виду, представленному в табл. 2.

Таблица 1

Вид диффузии	Уравнение	Область решения	Начальные условия	Первое граничное условие		Второе граничное условие
				Граничное условие I рода	Граничное условие II рода	
Линейная	$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2}$	Полуголгранныенное тело	$C(x, 0) = \bar{C}$	$C(0, t) = f(t)$	$\frac{dC(0, t)}{dx} = q(t)$	$C(\infty, t) = \bar{c}$
		Неограниченнаа плас- тина толщину R		$C(R, t) = f(t)$	$\frac{dC(Rt)}{dx} = q(t)$	$\frac{dC(0, t)}{dx} = 0$
Сфери- ческая	$\frac{\partial C(r, t)}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 C(r, t)}{\partial r^2} + \frac{2\partial}{r\partial r} C(r, t) \right]$	Шар радиуса r_0	$C(r, 0) = \bar{C}$			$\frac{dC(0, t)}{dr} = 0$
		Полый шар радиуса r_0 и толщину стеники \bar{r}_0		$C(r_0, t) = f(t)$	$\frac{dC(r_0, t)}{dr} = q(t)$	$\frac{dC(r_0 - \bar{r}_0, t)}{dr} = 0$
		Внешняя область ша- ра радиуса r_0				$C(\infty, t) = \bar{C}$
Цилин- дрическая	$\frac{\partial C(r, t)}{\partial t} = D \times \left[\frac{\partial^2 C(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial C(r, t)}{\partial r} \right]$	Цилиндр радиуса r_0				$\frac{dC(0, t)}{dr} = 0$
		Полый цилиндр ради- уса r_0 и толщину стеники \bar{r}_0		$C(r_0, t) = f(t)$	$\frac{dC(r_0, t)}{dr} = q(t)$	$\frac{dC(r_0 - \bar{r}_0, t)}{dr} = 0$
		Внешняя область ци- линдра радиуса r_0				$C(\infty, t) = \bar{C}$

Воспользовавшись теоремой о свертке

$$f_1(p) f_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau,$$

получим оригиналы выражений (1) — (3), т. е. искомые решения:

$$C(\omega, t) - \bar{c} = \int_0^t [f(\tau) - c] K_g(\omega, t - \tau) d\tau;$$

$$C(\omega, t) - \bar{c} = \int_0^t q(\tau) Z_g(\omega, t - \tau) d\tau;$$

$$C(\omega_1, t) - \bar{c} = \int_0^t q(\tau) Z_g(t - \tau) d\tau.$$

Поскольку решения в явной форме могут быть получены лишь для некоторых частных случаев, то естественным является использование электрической модели.

Выражения (1) — (3) аналогичны соотношению между входными и выходными напряжениями операционного усилителя

$$U_{\text{вых}}(p) = K(p) U_{\text{вх}}(p), \quad (4)$$

где $K(p) = Z_2(p)/Z_1(p)$; $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ — операционные сопротивления на входе и в цепи обратной связи усилителя соответственно.

Сравнивая выражения (1) — (3) с формулой (4), видим, что для решения формул (1) — (3) с помощью электрической модели надо иметь усилители с коэффициентами передачи $K_g(\omega, p)$, $Z_g(\omega, p)/R$ и $Z_g(p)/R$.

Таким образом, чтобы получить решения диффузионных уравнений на электрической модели, надо иметь операционные сопротивления вида $RK_g(\omega, p)$, $Z_g(\omega, p)$ и $Z_g(p)$, представляющие собой в общем случае RC -цепи с распределенными постоянными [3]. Приблизительно их можно представить RC -двухполюсниками с сосредоточенными параметрами.

В общем виде сопротивление такого двухполюсника выражается следующей дробно-рациональной функцией [3]

$$Z(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p}, \quad (5)$$

обладающей следующими свойствами:

- 1) она является положительной вещественной функцией;
- 2) мнимая часть ее отрицательна; вещественная часть является равномерно убывающей функцией.

Таблица 2

Область решения	$K_g(w, p)$	$Z_g(w, p)$	$Z_g(p)$
Полуграни- чное тело	$e^{-\sqrt{\frac{p}{D}}x}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{p}{D}}} e^{-\sqrt{\frac{p}{D}}x}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{p}{D}}}$
Неограни- чная пластина толщины R	$\frac{\text{ch} \sqrt{\frac{p}{D}}x}{\text{ch} \sqrt{\frac{p}{D}}R}$	$\frac{\text{ch} \sqrt{\frac{p}{D}}x}{\sqrt{\frac{p}{D}} \text{sh} \sqrt{\frac{p}{D}}R}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{p}{D}} \text{th} \sqrt{\frac{p}{D}}R}$
Шар радиуса r_0	$\frac{r_0 \text{sh} \sqrt{\frac{p}{D}}r}{r \text{sh} \sqrt{\frac{p}{D}}r_0}$	$\frac{r_0 \text{sh} Ar}{rA \text{cth} Ar_0 - \frac{1}{r_0} \text{sh} Ar_0}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{p}{D}} \text{cth} \sqrt{\frac{p}{D}}r_0 - \frac{1}{r_0}}$
Полый шар радиуса r_0 и толщиной стенки r_0	$\frac{r_0 \left(M \text{sh} \sqrt{\frac{p}{D}}r - N \text{ch} \sqrt{\frac{p}{D}}r \right)}{r \left(M \text{sh} \sqrt{\frac{p}{D}}r_0 - N \text{ch} \sqrt{\frac{p}{D}}r_0 \right)}$ *	$\frac{r_0^2 (M \text{sh} Ar - N \text{ch} Ar)}{r (MB - C - NrA \text{sh} Ar_0 - E)}$	$\frac{r_0 (M \text{sh} Ar_0 - N \text{ch} Ar_0)}{M (r_0 B - C - Nr_0 A \text{sh} Ar_0 - E)}$

Внешняя область шара радиуса r_0	$\frac{r_0}{r} e^{(r_0 - r) \sqrt{\frac{p}{D}}}$	$\frac{r_0 e^{(r_0 - r) \sqrt{\frac{p}{D}}}}{r \left(\sqrt{\frac{p}{D}} + \frac{1}{r_0} \right)}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{p}{D}} + \frac{1}{r_0}}$
Цилиндр радиуса r_0	$\frac{I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{D}} r \right)}{I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{D}} r_0 \right)}$	$\frac{I_0 \sqrt{\frac{p}{D}} r}{\sqrt{\frac{p}{D}} I_1 \left(\sqrt{\frac{p}{D}} r_0 \right)}$	$\frac{I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{D}} r_0 \right)}{\sqrt{\frac{p}{D}} I_1 \left(\sqrt{\frac{p}{D}} r_0 \right)}$
Полый цилиндр радиуса r_0 и толщиной стенки r_0	$\frac{K_1 A F I_0(Ar) + I_1(AF K_0) Ar}{K_1 A F I_0 A r_0 + I_1 A F K_0 A r_0}$	$\frac{K_1 A F I_0(Ar) + I_1(AF K_0) Ar}{A K_1 A F I_1(Ar_0) - I_1(AF K_1 A r_0)}$	$\frac{K_1 A F I_0(Ar_0) + I_1(AF K_0 A r_0)}{A K_1 A F I_1(Ar_0) - I_1(AF) K_1 A r_0}$
Внешняя область цилиндра радиуса r_0	$\frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{D}} r \right)}{K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{D}} r_0 \right)}$	$\frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{D}} r \right)}{\sqrt{\frac{p}{D}} K_1 \left(\sqrt{\frac{p}{D}} r_0 \right)}$	$\frac{K_0 \sqrt{\frac{p}{D}} r_0}{\sqrt{\frac{p}{D}} K_1 \left(\sqrt{\frac{p}{D}} r_0 \right)}$

В таблице приняты следующие обозначения:

$$A = \sqrt{\frac{p}{D}}; B = r_0 \operatorname{ch} A r_0; C = \operatorname{sh} A r_0; E = \operatorname{ch} A r_0; F = (r_0 - \bar{r}_0);$$

$$M = (r_0 - \bar{r}_0) \sqrt{\frac{p}{D}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{D}} (r_0 - \bar{r}_0) - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{D}} (r_0 - \bar{r}_0) \sqrt{\frac{p}{D}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{D}} (r_0 - \bar{r}_0) \sqrt{\frac{p}{D}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{D}} (r_0 - \bar{r}_0) - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{D}} (r_0 - \bar{r}_0)$$

Функция $Z(p)$ дает возможность синтезировать четыре типа RC -двухполюсников: по двум формам Фостера и двум формам Кауэра [2].

Предлагаемый метод использован для решения задач теории полярографии. Теория полярографии [4] изучает зависимость тока электрохимической ячейки с поляризованным микроэлектродом от прилагаемого к ней напряжения произвольной формы. Эта задача сводится к решению системы двух параболических уравнений для концентраций окисленной и восстановленной фазы, связанных нелинейными краевыми условиями Тафеля или Нернста. Граничные условия усложняются необходимостью учета нелинейной емкости двойного электрического слоя и объемного сопротивления раствора. Ток, протекающий через ячейку, линейно связан с потоком ионов через поверхность микроэлектрода.

В качестве примера можно рассмотреть задачу о нахождении тока $i(t)$, протекающего через ячейку, в зависимости от внешнего напряжения $\varepsilon(t)$ для случая твердого сферического электрода.

Сформулируем краевую задачу.

Система уравнений для концентраций окислителя $C_1(r, t)$ и восстановителя $C_2(r, t)$ в сферической системе координат запишется

$$\frac{\partial}{\partial t} C_v(r, t) = D_v \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} C_v(r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} C_v(r, t) \right] \quad (v = 1, 2). \quad (6)$$

Предполагая начальное распределение концентрации равномерным, получаем

$$C_v(r, 0) = \bar{C}_v = \text{const.}$$

На достаточно большом расстоянии от поверхности микроэлектрода концентрация за время электролиза остается неизменной:

$$C_v(\infty, t) = \bar{C}_v.$$

Уравнение Тафеля связывает концентрации $C_1(r_0, t)$ и $C_2(r_0, t)$ на поверхности микроэлектрода с диффузионным током $i_d(t)$ и потенциалом электрода $\varepsilon_d(t)$:

$$\frac{i_d(t)}{i_0} = \frac{C_1(r_0, t)}{\bar{C}_1} \exp \bar{\alpha} \varepsilon_d(t) - \frac{C_2(r_0, t)}{\bar{C}_2} \exp \bar{\beta} \varepsilon_d(t),$$

где

$$i_d(t) = i(t) - \frac{d}{dt} [\varepsilon_d \Psi_0(\varepsilon_d)];$$

$$\varepsilon_d(t) = \varepsilon(t) - R_0 i(t).$$

Известно также, что

$$\frac{d}{dr} C_1(r_0, t) = \frac{i_d(t)}{nFSD_1};$$

$$\frac{d}{dr} C_2(r_0, t) = - \frac{i_d(t)}{nFSD_2},$$

где D_1 и D_2 — коэффициенты диффузии окислителя и восстановителя;

r_0 — радиус микроэлектрода;

R_0 — объемное сопротивление раствора;

$\psi_0(\varepsilon_d)$ — нелинейная емкость двойного электрического слоя;

nF — количества протекшего электричества;

S — площадь электрода;

\bar{i}_0 , α , $\bar{\beta}$ — характеристические постоянные.

Применив преобразование Лапласа к уравнению (6), а также к начальным и граничным условиям, получим

$$C_v(r_0, p) - \frac{\bar{C}_v}{p} = \mp \frac{1}{nFS} \frac{I_d(p)}{\sqrt{pD_v + \frac{D_v}{r_0}}}, \quad (7)$$

где преобразованные по Лапласу функции обозначены прописными буквами. Найдя оригиналы выражения (7) и подставив их в уравнение Тафеля, получим

$$\begin{aligned} \frac{i_d(t)}{i_0} &= \frac{\exp \bar{\alpha} \varepsilon_d}{nFS \bar{C}_1} \left[nFS \bar{C}_1 - \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r_0}{D_1} \times \right. \\ &\times \left[1 - \exp \frac{(t-\tau) D_1}{r_0^2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{(t-\tau) D_1}{r_0^2}} \right] i_d(\tau) d\tau \left. - \right. \\ &- \frac{\exp \bar{\beta} \varepsilon_d}{nFS \bar{C}_2} \left[nFS \bar{C}_2 + \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r_0}{D_2} \left[1 - \exp \frac{(t-\tau) D_2}{r_0^2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{(t-\tau) D_2}{r_0^2}} \right] i_d(\tau) d\tau \right. \\ &\left. \left. \times \sqrt{\frac{(t-\tau) D_2}{r_0^2}} \right] i_d(\tau) d\tau \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

Построим электрическую модель, позволяющую найти зависимость $i(t)$ от $\varepsilon(t)$. Электрическим аналогом диффузионного сопротивления

$$\frac{1}{\sqrt{pD_v + \frac{D_v}{r_0}}}$$

является полубесконечный RC-кабель, зашунтированный активным сопротивлением [6]. Входное сопротивление такого двухполюсника

$$Z_v(p) = \frac{1}{\sqrt{\frac{C_v p}{R_v} + \frac{1}{R_{жv}}}}, \quad (9)$$

где C_v и R_v — распределенные емкость и сопротивление RC -кабеля;

R_{Mv} — шунтирующее активное сопротивление.

Если $Z_v(p)$ включить в цепь обратной связи операционного усилителя, на входе которого стоит активное сопротивление r_{Mv} , то входное и выходное напряжения будут связаны соотношением

$$U_{вых}(p) = \frac{1}{r_{Mv}} \frac{1}{\sqrt{\frac{C_v p}{R_v} + \frac{1}{R_{Mv}}}} U_{вх}(p). \quad (10)$$

Оригиналом уравнения (10) является

$$U_{вых}(t_M) = \frac{d}{dt_M} \int_0^{t_M} \frac{R_{Mv}}{r_{Mv}} \left[1 - \exp \frac{t_M - \tau_M}{C_v} \operatorname{erf} C \sqrt{\frac{t_M - \tau_M}{R_v R_{Mv}^2}} \right] \times \\ \times U_{вх}(\tau_M) d\tau_M.$$

Видим, что указанный операционный усилитель совершает интегродифференциальное преобразование, аналогичное содержащемуся в уравнении (8).

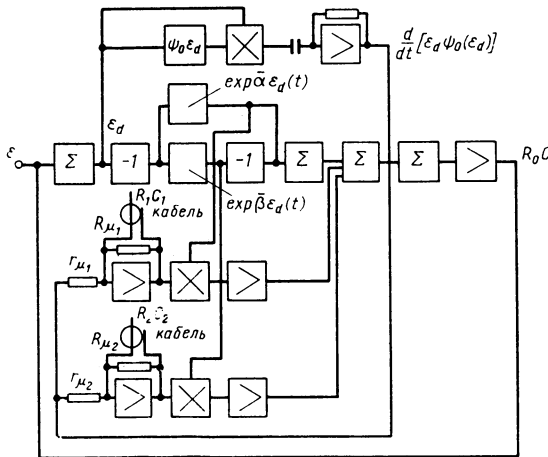


Рис. 1. Блок-схема вычислительной машины для решения уравнения диффузии

Таким образом, схема модели, предназначенная для решения поставленной задачи (рис. 1), кроме обычных элементов аналоговых машин (нелинейные функциональные преобразователи, множительные устройства и т. д.), содержит рассмотренные операционные усилители.

Поскольку физически трудно реализовать электрическую цепь, имеющую входное сопротивление, определяемое по формуле (9), использовалась равномерная цепная RC -линия, моделирующая RC -кабель в определенном диапазоне частот. Число элементов этой RC -линии определяет нижнюю граничную частоту, а постоянная времени $\tau = RC$ — верхнюю частоту [1].

На рис. 2 показана осциллограмма решения приведенной задачи. Погрешность, определяемая сравнением с теоретическими данными (для чего были решены контрольные задачи), не превышала 6 %.

Подобным же образом могут быть решены задачи для ртутного шарового, пленочного, сферического и цилиндрического электродов.

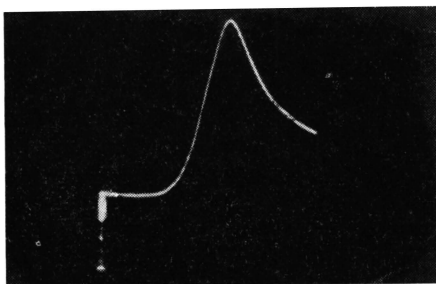


Рис. 2. Осциллограмма решения

ЛИТЕРАТУРА

1. Базлов О. Ф., Нигматуллин Р. Ш. «Решение краевых задач диффузии». Труды Казанского авиационного института. Вып. 73, 1963, стр. 65.
2. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. М., Госэнергоиздат, 1961, стр. 63.
3. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 394.
4. Крюков Т. А., Синякова С. И., Арефьева Т. В. Полярографический анализ. М., Госхимиздат, 1959, стр. 56—110.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., Гостехиздат, 1952, стр. 337—370.
6. Нигматуллин Р. Ш. Общее уравнение и электрический аналог электрометрической ячейки со сферическим стационарным электродом. ДАН, 151, № 6, 1963, стр. 1383—1386.

Л. В. Ницецкий

АЛГОРИТМЫ ПРИ ЦИФРО-АНАЛОГОВОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

1. Область применения алгоритмов

При решении широкого класса краевых задач для уравнений Лапласа, Пуассона и нестационарной теплопроводности целесообразно применять автоматизированный цифро-аналоговый ком-

плекс [5], который содержит замкнутую систему следующих блоков (рис. 1):

1) сетка постоянных сопротивлений средней точности или сетка, регулируемая грубыми скачками, порядка 1 : 10; сетка включает также набор сопротивлений R_t ;

2) измерительный коммутатор ИК с бесконтактными ключами и электромагнитными реле для выбора крупных групп:

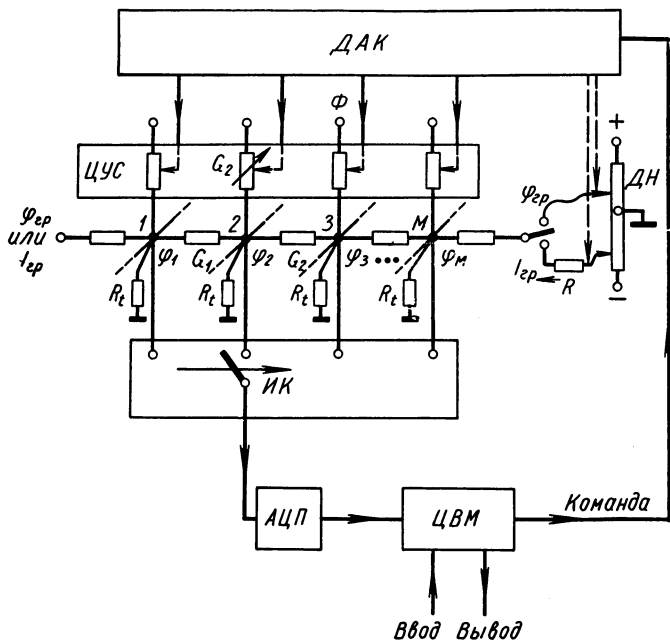


Рис. 1. Примерная блок-схема цифро-аналогового комплекса

3) аналого-цифровой преобразователь АЦП;

4) универсальная или специализированная цифровая вычислительная машина (возможны и аналоговые вычислительные устройства);

5) дешифратор адреса команды ДАК;

6) цифровые управляемые сопротивления, соединяющие узлы сетки с источниками напряжения, которые используются главным образом как управляемые источники тока;

7) управляемые делители напряжения (для автоматической установки граничных условий и для решения уравнения теплопроводности по методу Либмана).

Учитывая примеры успешного применения подобной системы при решении задач электронной оптики [1] и перспективы созда-

ния более универсальной системы в будущем, нами разрабатывались алгоритмы решения некоторых краевых задач, предусматривающие работу на таком цифро-аналоговом комплексе. Алгоритмы применимы и проверялись без устройств автоматизации, но при этом требуется большой объем однообразной работы.

2. Режим устранения погрешностей элементов

Чередую решение на сетке с вычислениями, можно с любой заданной точностью приблизиться к точному решению разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение Лапласа, даже при весьма значительных отклонениях сопротивлений сетки от расчетных значений.

Подобный метод применялся при решении систем линейных алгебраических уравнений, при решении задач теории упругости [3] и для решения уравнения Лапласа на сетках сопротивлений [6].

Последовательность решения уравнения Пуассона следующая:

1) Решая задачу на сетке, измеряют потенциалы φ_M , т. е. $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ во всех узлах сетки (рис. 1).

2) Вычисляются токи для всех узлов сетки

$$I_{j1} = \sum_k (\varphi_j - \varphi_k) g_k. \quad (1)$$

Здесь и далее φ_k — потенциалы соседних точек, соединенные с точкой j ветвью g_k (на рис. 1 показаны только $k = 1$ и $k = 2$);

g_k — расчетные значения проводимости соответствующей ветви сетки;

G_k — реальные значения проводимости.

3) Рассчитываются узловые токи поправок

$$I_1 = I_j = I_{j1}, \quad (2)$$

где I_j — ток, соответствующий правой части уравнения Пуассона.

4) К узлам сетки подводится система токов

$$I_1 = \Phi G_j. \quad (3)$$

Полагаем, что уровень потенциалов Φ намного выше уровней потенциалов в узлах сетки, при этом на сетке устанавливаются нулевые граничные условия.

5) Измеряются потенциалы узлов сетки ψ_{M1} (как правило, уже в увеличенном масштабе), являющиеся поправками.

6) Вычисляется первое приближение к решению

$$\varphi_{M1} = \varphi_M + \psi_{M1}. \quad (4)$$

Если полученная точность не удовлетворяет поставленным требованиям, процесс уточнений можно продолжать.

7) Вычисляются токи для всех узлов сетки

$$I_{12} = \sum_k (\psi_{M10} - \psi_{M1k}) g_k \quad (5)$$

аналогично вычислениям по формуле (1).

8) Вычисляются недостающие разности узловых токов

$$I_2 = I_1 - I_{12}. \quad (6)$$

9) В узлы сетки вводятся токи $I_2 = \Phi G_0$.

10) Измеряются потенциалы ψ_{M2} (они будут достаточно высокого уровня, если правильно выбран масштаб токов I_2).

11) Вычисляется уточненный результат

$$\varphi_{M2} = \varphi_M + \psi_{M1} + \psi_{M2}. \quad (7)$$

12) Вычисления и моделирование повторяются до достижения требуемой точности. Например, при сопротивлениях с допуском $\pm 5\%$ погрешность при решении контрольных одномерных задач уменьшалась примерно в 20 раз в каждом приближении. Шестое приближение дало погрешность $10^{-6}\%$.

Сходимость процесса зависит от погрешностей элементов и иногда прекращается при обрывах и замыканиях ветвей.

3. Режим использования более точных разностных операторов

Описанный выше алгоритм чередования решений на сетке и вычислений можно модифицировать следующим образом: экспериментальную часть производить на квадратной или кубической сетке с погрешностью конечно-разностной аппроксимации порядка h^2 , а расчет токов невязок — по разностным операторам с погрешностью порядка h^6 . Получаемое при этом решение разностных уравнений значительно ближе к точному решению уравнения Лапласа φ .

Аналогично использованию двухмерного разностного оператора [2] можно при решении трехмерных задач применять оператор, соответствующий сетке с сопротивлениями R обычного расположения, с сопротивлениями $R_\alpha = 4^2/3R$ в диагоналях квадратов (граней кубов) и с сопротивлениями $R_D = 14R$ в пространственных диагоналях кубов. Порядок погрешности такой сетки h^6 . При $R_\alpha = 2R$ и $R_D = \infty$, а также при $R_\alpha = \infty$ и $R_D = 8R$ погрешность получается порядка h^4 .

Указанная сетка позволяет при удвоении шага сэкономить число элементов и уменьшить погрешность вдали от особых точек поля (например, при удалении от источника тока на $\gamma > 4h$).

4. Моделирование неоднородной и нелинейной среды на сетке постоянных сопротивлений

Режим устранения погрешностей элементов можно использовать при наборе неоднородностей равными сопротивлениями. Погрешность при этом компенсируется настраиваемыми узловыми токами. Это позволяет переменные сопротивления заменить постоянными или ограничиться грубым изменением сопротивлений (порядка 1 : 10) для улучшения сходимости.

Потенциалы Φ принимаются равными 0 или 100%, а алгоритм процесса последовательных приближений (по опыту А. П. Спальвина) следующий:

1. Измеряются потенциалы φ_0 и φ_k .
2. Рассчитывается вспомогательная величина

$$\varphi'_0 = \sum_k \varphi_k g_k, \quad (8)$$

где g_k — расчетные проводимости.

3. Рассчитывается и затем устанавливается проводимость для следующего приближения:

$$G'_0 = G_0 + \sum_k G_k \frac{\varphi'_0 - \varphi_0}{\Phi - \varphi_0}. \quad (9)$$

Если $G_k = f_1(x, y, z)$, то токи вводятся во все узлы. При этом число переменных сопротивлений уменьшается в 2—3 раза.

При нелинейности среды необходимо учитывать, что величины g_k являются функциями φ .

При решении тринадцати различных задач с сильной неоднородностью при числе токовводов от 7 до 30 требовалось выполнить 3—20 итераций (в среднем 10—12).

5. Подбор граничных условий

Подбор нелинейных граничных условий путем ряда последовательных приближений был осуществлен в следующем примере.

При решении стационарной задачи теплопроводности для задания граничного условия

$$\frac{\partial T}{\partial n} = cT^4 \quad (10)$$

требовалось регулировать 11 переменных сопротивлений.

При решении вручную и при удачном нулевом приближении потребовалось три цикла по 30 мин каждый.

6. Контактные задачи теории упругости

Для расчета гибкой плиты на упругом основании известная модель неоднородного бигармонического уравнения Г. М. Максимовым была преобразована в трехмерную модель упругого осно-

вания [7] так, что токи, моделирующие внешние нагрузки, проходили через одни и те же сопротивления. Эти сопротивления поочередно настраивались по нуль-индикатору, контролирующему равенство прогиба плиты и осадки основания.

При автоматическом регулировании процесса решения необходима непрерывная и быстродействующая связь модели и ЦВМ. Может оказаться целесообразным также разделение отдельных частей модели, что облегчит подбор масштабов.

7. Решение задач нестационарной теплопроводности

При решении задач нестационарной теплопроводности методом Либмана [4] в каждом следующем приближении устанавливается

$$\Phi_{n+1} = \Phi_{0n}, \quad (11)$$

для чего в случае использования аппаратуры, представленной на рис. 1, требуется наличие автоматически управляемого делителя

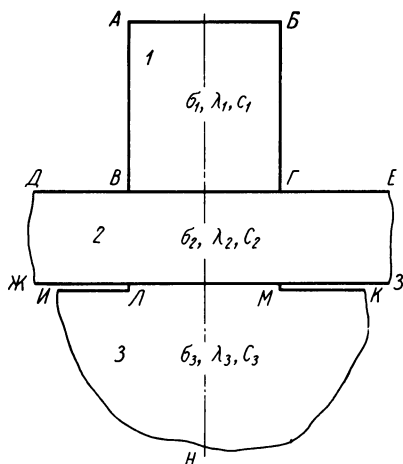


Рис. 2. К формулировке краевой задачи о контактной сварке

напряжения для внутренних узлов сетки. Учету нелинейных свойств параметров среды соответствуют изменения проводимостей G_0 .

Метод Либмана в обычной модификации применялся для расчета плоскопараллельного и осесимметричного электротеплового поля, возникающего при контактной сварке [8].

Краевая задача формулировалась следующим образом (рис. 2).

Потенциал электрического поля в средах 1, 2 и 3 удовлетворяет уравнению

$$\nabla(\sigma \nabla \Phi) = 0, \quad (12)$$

где $\sigma = \sigma(T)$ — электропроводность, зависящая от температуры.

На линии AB задано условие

$$\Phi_{AB} = \text{const},$$

но численное значение Φ_{AB} заранее не определено. Через поверхность AB вводится и через аналог бесконечно удаленной точки

в нижнем полупространстве (точки I, H, K) отводится заданное значение тока

$$I = \int_s \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \quad (13)$$

которое считается постоянным в заданный момент времени или в заданном небольшом интервале времени.

На поверхностях $ДВА$, $БГЕ$, $ЗМК$ и $ЖЛИ$ задано условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

На поверхностях $ВГ$ и $ЛМ$ заданы условия

$$\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_k (\varphi_1 - \varphi_2); \quad (14)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = \sigma_k (\varphi_2 - \varphi_3),$$

где $\sigma_k = \sigma_k(T_{\text{макс}})$ — удельная проводимость контакта двух сред, зависящая от максимальной температуры, которая была достигнута в данной точке в момент времени, предшествующий или соответствующий рассматриваемому.

Температура в средах 1, 2 и 3 удовлетворяет уравнению

$$\nabla(\lambda \nabla T) = \gamma c \frac{\partial T}{\partial t} - w, \quad (15)$$

где

$$w = \sigma (\text{grad } \varphi)^2; \quad (16)$$

$\lambda = \lambda(T)$ — удельная теплопроводность, зависящая от температуры;

$c = c(T)$ — удельная теплоемкость, зависящая от температуры;

γ — плотность.

На поверхностях $АБ$ и $ИНК$ задано условие $T = 0$, на поверхностях $ДВА$, $БГЕ$, $ЗМК$ и $ЖЛИ$ — условие $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$, или граничные условия третьего рода, а на поверхностях $ВГ$ и $ЛМ$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} + \sigma_k (\varphi_1 - \varphi_2)^2; \quad (17)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial n} + \sigma_k (\varphi_2 - \varphi_3)^2.$$

Решение задачи осуществлялось путем многократного повторения следующих циклов:

1. Измерение потенциалов электрического поля на сетке УСМ-1.

2. Численный расчет на ЦВМ плотности источников теплового поля по формулам (16) и (17).

3. Осуществление одного шага времени по методу Либмана на сетке активных сопротивлений.

4. Перебор сопротивлений на моделях электрического и температурного полей в соответствии с зависимостями $\sigma(T)$, $\sigma_h(T_{\max})$, $\lambda(T)$ и $c(T)$.

Задача нестационарной теплопроводности решались также на сетке постоянных сопротивлений, отличающейся следующими особенностями:

1) Ток, подаваемый в узел сетки,

$$I = \frac{\varphi_0(t - \Delta t) - \varphi_0(t)}{R_t} \quad (18)$$

представляется в виде суммы двух токов

$$I_1 = \frac{\varphi_0(t - \Delta t)}{R_t}$$

и

$$I_2 = \frac{\varphi_0(t)}{R_t}.$$

Ток I_1 вводится от источника тока, ток I_2 задается сопротивлениями R_t (рис. 1).

2) Изменение сопротивлений в зависимости от температуры компенсируется введением дополнительных узловых токов по принципу, изложенному в разделе 4. При этом возникает необходимость в дополнительных итерациях в пределах одного шага времени [9].

3) Все точки, учитывая также влияние скрытой теплоты плавления или затвердевания, вводятся одним объединенным источником. Следовательно, за счет увеличения времени решения можно решать задачи нестационарной теплопроводности на сетке, содержащей только постоянные сопротивления и один регулируемый источник тока на каждую узловую точку. Это целесообразно в случаях, когда необходимо разработать модель минимальной стоимости, не считаясь с трудоёмкостью решения, а также при высоком уровне автоматизации решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блейвас И. М., Зелинский Э. М., Майоров Ф. В., Мергиенко В. И. Применение цифрового дифференциального анализатора для автоматизации процесса решения самосогласованных задач о поле и траекториях в электронных приборах. В сб. «Аналоговые методы и средства решения краевых задач». Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 222—229 (Труды Всесоюзного совещания. М., октябрь, 1962 г.).

2. Волюнский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960.

3. Головкин М. Д. Решение двумерных задач теории упругости на электрических эквивалентных цепях. В сб. «Аналоговые методы и средства

решения краевых задач». Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 85—104. (Труды Всесоюзного совещания. М., октябрь, 1962 г.).

4. Коздоба Л. А. Электромоделирование температурных полей в деталях судовых энергетических установок. Л., «Судостроение», 1964.

5. Ницецкий Л. В. Блок-схема сеточной модели с самонастраивающимися элементами. Ученые записки. Изд. Рижского политехнического института. Т. 10, стр. 27—30.

6. Ницецкий Л. В. Оценка точности и уточнение результатов моделирования, полученных на сеточных электроинтеграторах. Ученые записки. Изд. Рижского политехнического института, Т. 5, стр. 71—80.

7. Ницецкий Л. В. Электромоделирование трехмерных контактных задач теории упругости. Труды межвузовской конференции по электрическому моделированию задач строительной механики, сопротивлению материалов и теории упругости. Изд. Новочеркасского политехнического института, 1960, стр. 43—51.

8. Рудзит Р. Б., Бумбиерис Э. В. Исследование влияния контактного сопротивления на процесс Т-образной контактной сварки. Ученые записки Изд. Рижского политехнического института. Т. 15, стр. 185—198.

9. Тетельбаум И. М., Эльмешад Я. А. Электрическое моделирование неустановившихся процессов теплопередачи и диффузии в электролитической ванне. Доклады 4-й межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования в различных отраслях техники. Сб. № 1. Математическое моделирование полей. М., Физматгиз, 1959, стр. 165—182.

М. А. Шенсвол

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЦЕССА РАСЧЕТА ТОКОВ, МОДЕЛИРУЮЩИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ЗАРЯД В ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ВАННЕ

В связи с широким распространением метода электролитической ванны для моделирования электронно-оптических систем и использованием автоматизированной аппаратуры для построения траекторий электронов большое значение приобретает автоматизация процесса расчета токов, моделирующих пространственный заряд, поскольку именно этот вопрос в основном ограничивает производительность труда при работе на ванне.

В настоящей статье мы кратко изложим некоторые соображения, которые возникли в связи с испытанием и эксплуатацией различных вариантов систем автоматизации указанных расчетов.

Все рассматриваемые варианты систем автоматизации расчетов токов, протекающих по токовводящим элементам (т. в. э.), относятся к случаю, когда построение траекторий производится автоматическим траектографом, воспроизводящим «динамическую модель» электрона, и когда процесс расчета токов т. в. э. так или иначе объединяется с процессом построения траекторий [1, 2].

Величина тока т. в. э., который нужно ввести в некоторый участок электролита для моделирования поля объемного заряда при решении плоской задачи, определяется выражением

$$I_{т.в.э.} = \frac{P\lambda h}{\varepsilon_0 k_v} \sum_{i=1}^{i=N} j_i t_i, \quad (1)$$

где N — число траекторий, проходящих через данный участок междуэлектродного пространства;

P — пространство между траекториями вблизи катода;

λ и h — электропроводность и глубина электролита;

k_v — отношение скорости электрона к скорости движения зондового устройства траектографа;

t_i — интервал времени, в течение которого зондовое устройство находилось в пределах данного участка при построении i -й траектории;

j_i — плотность тока с того участка катода, от которого начинается i -я траектория.

Эта величина определяется обычно по «закону 3/2». При решении осесимметричных задач величина тока т. в. э.

$$I_{т.в.э.} = \frac{P\lambda\Theta}{\varepsilon_0 k_v} \sum_{i=1}^{i=N} j_i R_i t_i, \quad (2)$$

где Θ — угол наклона ванны;

R_i — расстояние от линии берега до точки выхода i -й траектории из катода.

Основной функцией автоматизированных систем для расчета токов т. в. э. является подсчет сумм, входящих в выражение (1) или (2).

Наиболее простым способом частичной автоматизации указанных расчетов является «метод точек» [1, 2]. При использовании этого метода пишущее устройство траектографа питается импульсным напряжением, причем частота импульсов для каждой траектории задается пропорциональной произведению плотности тока с катода на глубину и электропроводность электролита.

Число точек, нанесенных пишущим устройством траектографа на некотором участке картины поля, пропорционально величине тока, который согласно выражению (1) нужно ввести в соответствующий участок электролита. Длительный опыт использования «метода точек» показывает, что этот метод значительно сокращает трудоемкость процессов моделирования, но обладает определенными недостатками. Основным недостатком является трудность подсчета числа точек в отдельных участках поля, в которых плотность заряда велика и где точки могут частично накладываться друг на друга (вблизи катода). Взаимное наложение

точек возможно также при моделировании систем с неламинарными потоками. Это заставляет оператора весьма внимательно наблюдать за ходом построения траекторий, а в некоторых участках вести счет точкам одновременно с их нанесением, что затрудняет процесс работы.

Более совершенными являются варианты вычислительных устройств, в которых для подсчета сумм в выражениях (1) и (2) применяются суммирующие ячейки. Эти ячейки могут работать на постоянном токе или в импульсном режиме, подсчитывая число импульсов в соответствии с «методом точек» (в этом случае в качестве таких ячеек могут, в частности, использоваться обычные счетчики импульсов). В последнем случае эти ячейки будут интегрирующими. Могут также применяться суммирующие ячейки, построенные на основе цифровой вычислительной техники.

Создание достаточных простых и точных суммирующих ячеек для указанной цели не представляет трудностей

Если число суммирующих ячеек меньше числа токовводящих элементов в ванне, то перед началом работы по моделированию оператор должен выполнить следующие предварительные операции:

1. Разбить междуэлектродное пространство на участки, которые будут обслуживаться отдельными суммирующими ячейками и токовводящими элементами. Эти участки выбираются в зависимости от особенностей исследуемой электродно-оптической системы.

2. Подсоединить токовводящие элементы к определенным регулирующим ячейкам (а также провести необходимую групповую коммутацию токовводящих элементов).

3. Провести предварительную коммутацию для адресации суммирующих ячеек к определенным участкам междуэлектродного пространства.

Если число суммирующих ячеек равно числу токовводящих элементов, то необходимость указанных предварительных операций отпадает, так как каждой суммирующей ячейке всегда соответствует определенный элемент площади ванны, а каждый токовводящий элемент постоянно связан с определенной регулирующей ячейкой.

После моделирования системы в каждом приближении производится регулировка величины токов т. в. э. в соответствии с результатами суммирования. Эта регулировка может быть ручной или автоматической.

При выборе степени автоматизации необходимо учитывать реальный выигрыш в производительности труда и соразмерить его со сложностью разработки и изготовления соответствующей аппаратуры и ее стоимостью. Если повышение уровня автоматизации приводит к резкому усложнению применяемой аппаратуры, но дает при этом сравнительно малый выигрыш в производитель-

ности труда и не представляет принципиально новых возможностей, то создание таких систем не может быть признано целесообразным.

Распределение затрат времени в минутах между всеми операциями процесса моделирования для задачи средней сложности (10 траекторий, 5 последовательных приближений) может быть грубо оценено следующим образом:

1. Предварительные операции по калибровке и проверке траектографа	15
2. Установка модели в ванне и перенесение контуров электродов на бумагу	30
3. Разделение междуэлектродного пространства на участки	20
4. Коммутация токовводящих элементов	20
5. Адресация суммирующих ячеек	20
6. Построение траекторий (во всех приближениях) . . .	100
7. Регулировка токов т. в. э. (во всех приближениях; при ручной регулировке с установкой токов по нуль-индикаторам при использовании 40 ячеек) . . .	15
Всего	220

Из приведенных данных следует, что исключение операций 3—5 (при создании систем с числом суммирующих ячеек, равным числу т. в. э.) приводит к сокращению затрат времени приблизительно на 30%, а переход от ручной регулировки токов т. в. э. к автоматической — еще всего на 7%. В то же время чрезвычайно сильно возрастает сложность системы, если учитывать, что для большинства задач при соответствующем разделении междуэлектродного пространства на участки достаточно 30—40 ячеек, в то время как число т. в. э. обычно составляет 1,5—2,0 тыс. Кроме того, если при малом числе ячеек вполне можно ограничиться ручной регулировкой токов т. в. э., то при большом их числе необходимо переходить на автоматизацию этой операции.

В результате испытаний в условиях практической эксплуатации различных вариантов устройств для автоматизации процесса расчета токов т. в. э. мы остановились на компромиссном варианте, который обеспечивает удовлетворительную производительность и одновременно является достаточно простым для осуществления в лабораторных условиях.

Это устройство (блок-схема его приведена на рисунке) включает в себя следующие основные элементы.

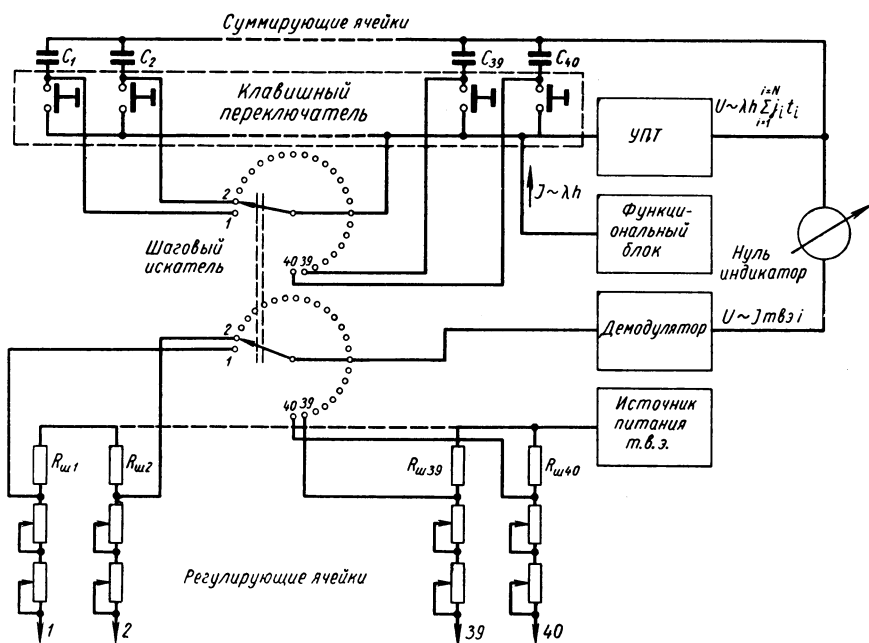
1. Функциональный блок, вырабатывающий постоянный ток, пропорциональный величине функции f_1 (для случая плоских задач) или функции f_2 (для случая осесимметричных задач):

$$f_1 = \frac{\lambda h \varphi_i^{3/2}}{a_i^2}; \quad f_2 = \frac{\lambda \varphi_i^{3/2} R_i}{a_i^2}, \quad (3)$$

где φ_i — потенциал на расстоянии a_i от катода.

Произведение λh задается с помощью измерительного зонда, помещенного в ванне, а величины Φ_i , a_i , R_i устанавливаются по лимбам функциональных потенциометров.

2. Суммирующие ячейки, представляющие собой математические конденсаторы, включаемые поочередно в цепь отрицательной обратной связи усилителя постоянного тока УПТ, на вход которого поступает ток от функционального блока. Число суммирующих ячеек от 30 до 40, усилитель постоянного тока один, общий для всех ячеек.



Блок-схема устройства автоматизации процесса расчета токов т. в. э.

3. Регулирующие ячейки для задания токов т. в. э., состоящие из потенциометров и измерительных шунтов (число регулирующих ячеек равно числу суммирующих).

4. Схема сравнения, состоящая из демодулятора и нуль-индикатора.

5. Система коммутации интегрирующих и регулирующих ячеек, включая в себя клавишный переключатель с самофиксирующимися клавишами и шаговый искатель.

6. Схема калибровки устройства (на блок-схеме не показана).

Одной из отличительных особенностей данного устройства является применение клавишного переключателя для адресации суммирующих ячеек. Участки, на которые разбивается междуэлектродное пространство, предварительно нумеруются. Опера-

тор, наблюдая за процессом построения траекторий, подключает в цепь усилителя постоянного тока конденсаторы суммирующих ячеек с номерами, соответствующими участкам, в пределах которых находится пишущее устройство траектографа. После построения всего семейства траекторий конденсаторы поочередно подключаются к усилителю постоянного тока шаговым искателем. Одновременно вход схемы сравнения подсоединяется к измерительным шунтам в цепях соответствующих т. в. э. Регулируя токи т. в. э., оператор с помощью нуль-индикатора устанавливает соответствие между величинами этих токов и зарядами на соответствующих конденсаторах. При этом отсутствует необходимость проведения количественных отсчетов по каким-либо приборам. Длительность процесса регулировки токов в 40 ячейках составляет 2—3 мин. После того, как все токи отрегулированы, заряды на всех конденсаторах сбрасываются, и оператор переходит к моделированию следующего приближения.

Введение ручной операции по переключению суммирующих ячеек в процессе построения траекторий может показаться не достаточно техничным решением. Однако сравнительные испытания различных способов адресации ячеек показали определенные преимущества этого варианта. Во-первых, отпадает необходимость какой-либо предварительной коммутации для адресации суммирующих ячеек, благодаря чему производительность труда несколько возрастает. Во-вторых, весьма упрощается схема всего устройства.

В настоящее время все траектографы, находящиеся у нас в эксплуатации, оснащаются подобными устройствами для расчета токов т. в. э.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шепсенол М. А. Журнал теоретической физики. Т. XXXI, вып. 3, 1961, стр. 286—296.

А. А. Кошелев, О. А. Балышев

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ АНАЛОГОВЫХ УСТРОЙСТВ И ЦИФРОВЫХ МАШИН

1. Характеристика исследуемых процессов и постановка задачи

Системы централизованного теплоснабжения работают в условиях непрерывного изменения параметров, определяющих их тепловой режим. При этом целый ряд параметров следует рас-

смаивать как независимые события (температура наружного воздуха, солнечная радиация, бытовые тепловыделения, нагрузка горячего водоснабжения, скорость ветра).

В общем случае рассматриваемые процессы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных с источниками переменной интенсивности и граничными условиями второго и третьего рода, причем изменение граничных условий имеет весьма сложный характер.

Аналитическое исследование таких процессов и их приближенный анализ с помощью различных методов ручного счета практически возможны лишь при целом ряде допущений. В частности, во всех аналитических формулах для расчета температуры в помещениях при изменении теплового режима процесс рассматривается как переходный.

Одной из задач проводившихся исследований являлась проверка возможности сведения непрерывного переменного процесса к совокупности последовательных процессов перехода от одного установившегося состояния в другое и установление влияния такого допущения на результаты.

Для решения некоторых задач использовались детерминированные математические модели, когда за начальные условия принимался статический режим (например, при оценке влияния на темп выстывания зданий внутренних факторов радиаторов отопления, внутренних ограждений, мебели) или когда процесс считался циклическим (например, при исследовании влияния на тепловой режим помещений внутрисуточных колебаний температуры наружного воздуха). В последнем случае использовался итерационный метод: принимались начальные условия, и расчет циклического процесса продолжался до тех пор, пока значения температуры в контрольной точке в конце и начале цикла не совпадали с заданной степенью точности.

В задаче по выбору расчетных условий для систем отопления анализируется с помощью ЭВМ влияние изменения температуры наружного воздуха и изменения ветра, отмечавшегося в течение отопительных сезонов ряда лет, на изменение температуры воздуха в помещениях. В модели, установленной для этой задачи вероятностей, за начальные условия принимается состояние температурного поля при установившемся среднем значении параметров и считается, что погрешность этого допущения к моменту наступления расчетного режима сглаживается.

Все математические модели, использованные в исследованиях, являются разрывными: пространство (а при расчетах на ЭЦВМ — и время) разбивается на элементарные области, изменение функций принимается скачкообразным. Такие разрывные, конечно-разностные модели для расчетов процессов в неоднородных многосвязных областях являются предпочтительными, так как позволяют учитывать свойства различных материалов, про-

изводить кусочно-линейную аппроксимацию сложных зависимостей.

Расчетные схемы, реализуемые в гидравлических моделях или используемые при составлении систем уравнений для ЭВМ, имеют в разных задачах различный вид. На рис. 1 представлена распределенная расчетная схема, использованная в математиче-

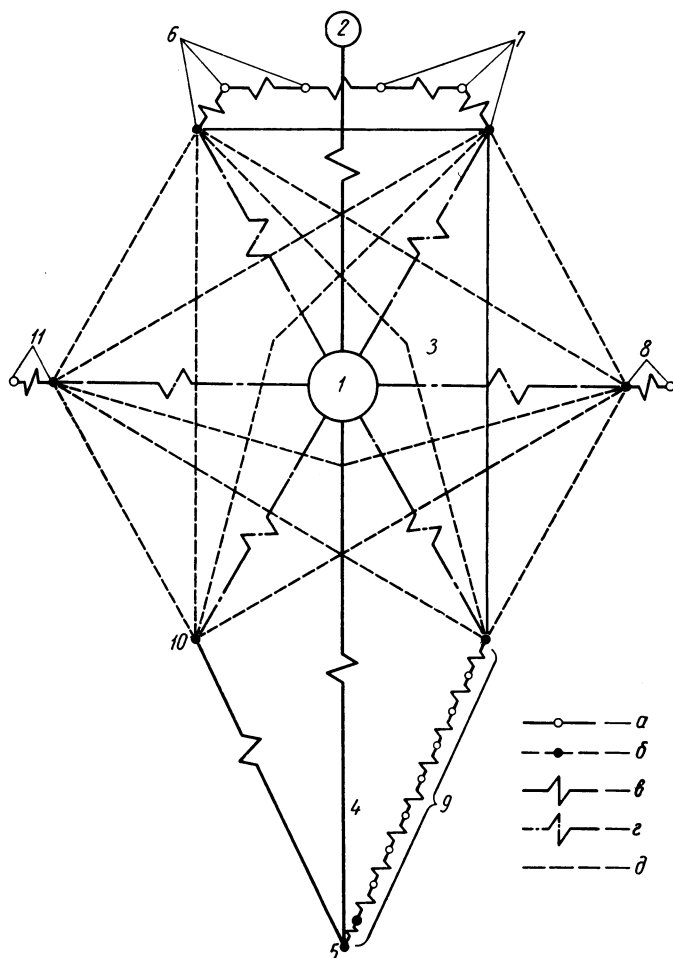


Рис. 1. Расчетная схема модели исследования теплового режима в помещении с учетом лучистого теплообмена между ограждениями:

a — блок сосредоточенной теплоемкости; *b* — блок нулевой теплоемкости (поверхность ограждений); *v* — постоянное термическое сопротивление; *z* — переменное термическое сопротивление конвекционного теплообмена; *d* — переменное термическое сопротивление лучистого теплообмена; 1 — внутренний воздух; 2 — инерционный отопительный прибор; 3 — приток тепла; 4 — инфильтрационная проводимость; 5 — наружный воздух; 6 — пол; 7 — потолок; 8 — внутренняя стена; 9 — наружная стена; 10 — окно; 11 — внутренняя перегородка

ской модели, для исследования температурного режима с учетом взаимного облучения ограждений. Если лучистый теплообмен не учитывается, схема процесса является плоской.

2. Особенности решения задачи на гидроинтеграторе

Методика применения гидравлического интегратора для анализа переменных тепловых режимов в зданиях разработана целым рядом авторов и описана в соответствующей литературе.

Решение на гидроинтеграторе вышеупомянутых задач характеризуется следующими особенностями:

1. Гидравлическая модель получается обычно довольно громоздкой и занимает от 6 до 12 секций прибора.

2. Суточный режим воспроизводится за 15—30 мин.

3. Для уменьшения количества соединений в узлах гидравлической модели внутренний воздух имитируется группами блоков, связанных между собой через нулевые сопротивления.

4. Для повышения точности расчетов при больших диапазонах изменения температур в блоках некоторые сосуды поднимаются на высоту до 30 см, а соответствующие пьезометры наращиваются.

5. При решении задач с коэффициентом теплоотдачи, изменяющимся в зависимости от температуры, приходится периодически останавливать процесс расчета и вносить коррективы в значения соответствующих сопротивлений. Следует сказать, что делались попытки изменять значения сопротивлений на ходу. Однако было отмечено, что движение плунжера при открытых каналах вызывает заметное изменение уровней воды в контрольных пьезометрах.

3. Решение задачи на ЭЦВМ

При составлении математических моделей, реализуемых на БЭСМ-2м, дифференциальные уравнения заменялись системами алгебраических уравнений, составляемых по неявной конечно-разностной схеме на непрерывной сетке.

Системы алгебраических уравнений имели квадратную симметричную матрицу с малым коэффициентом заполнения.

На рис. 2 показан характер заполнения матрицы коэффициентов системы уравнений при расчете статического поля температур для схемы, представленной на рис. 1. В задачах, где не учитывается лучистый теплообмен, в строке содержится не больше семи нулевых коэффициентов. Для всех задач, связанных с расчетом теплообмена, характерна квадратная симметричная матрица.

Для получения уравнений составлялись тепловые балансы блоков сосредоточенных теплоемкостей.

Системы уравнений имели вид

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i = b_j; \quad j = 1, \bar{n},$$

где i — номера расчетных блоков;

j — номер блока, для которого составлено данное уравнение.

В состав коэффициентов a входят различные функции теплофизических характеристик материалов. Свободные члены b име-

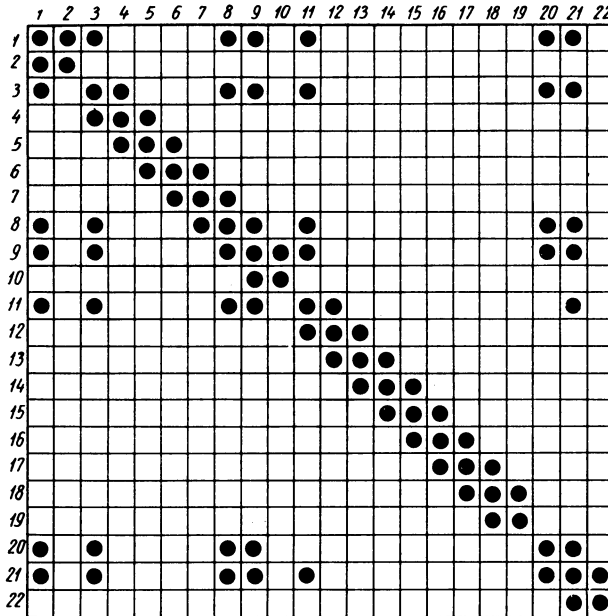


Рис. 2. Заполнение матрицы в модели для исследования теплового режима в помещении с учетом лучистого теплообмена между ограждениями

ются только в уравнениях блоков, непосредственно связанных с источниками или средой, температура которой известна, большинство же уравнений правой части не имеет.

Если теплофизические характеристики материалов принимаются независимыми от температуры, то уравнения являются линейными. При учете зависимости коэффициентов теплообмена от разности температур в уравнениях появляются нелинейности.

Системы уравнений во всех случаях обычно решались как линейные, а поправки на нелинейность при необходимости вносились путем определения коэффициентов теплообмена для нового шага времени по результатам расчета на предыдущем шаге. Однако было отмечено, что в некоторых случаях, когда в системе

много нелинейных уравнений, такой метод приводит к расхождению процесса расчета.

Для получения сходимости решения был предложен итерационный метод, суть которого заключается в следующем.

Нелинейные алгебраические уравнения записываются в линеаризованном виде

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) x_i = b.$$

Принимается некоторое начальное приближение для неизвестных, на основании которого определяется значение f_i . Вычисля-

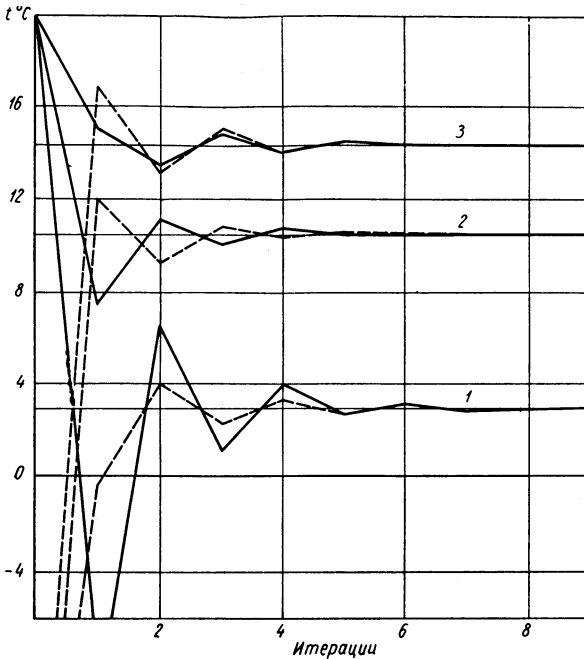


Рис. 3. Сходимость итерационного процесса при расчете стационарного режима при начальных приближениях при $t_{нар}^p = -35^\circ \text{C}$:

1 — окно; 2 — наружная стена; 3 — пол; сплошные линии соответствуют начальному приближению $+20^\circ \text{C}$, штриховые линии — начальному приближению -20°C

ются новые значения x_i , которые вновь используются для подсчета f_i и т. д. до тех пор, пока значения x_i для предыдущей и последующей итераций не будут отличаться на заданную величину невязки.

Как показали экспериментальные исследования, такой итерационный метод для решения уравнений теплообмена является весьма результативным. На рис. 3 представлена сходимость про-

песса расчета по принятой схеме. Число итераций резко сокращается, если для последующего расчета принимать за начальное приближение средние арифметические значения x_i , полученные на двух предыдущих шагах.

Для решения системы уравнений использовались стандартные программы метода Гаусса, составленные вычислительным центром АН СССР и Гипротисом.

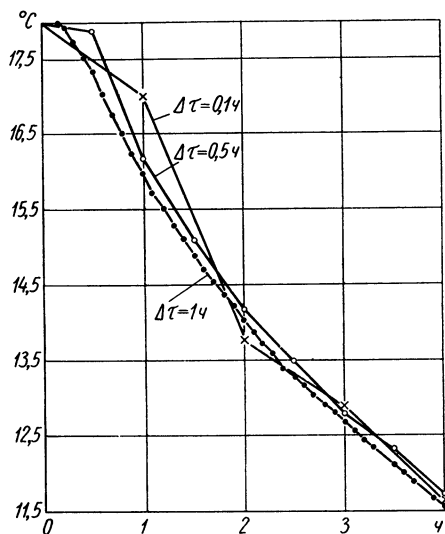


Рис. 4. Влияние величины шага времени $\Delta\tau$ на погрешность вычислений при расчете остывания помещений.

Общие теплотери помещения
1870 ккал/ч. Бытовые выделения тепла
135 ккал/ч.

Экспериментальные исследования показали, что величина расчетного промежутка времени $\Delta\tau$, как и пространственного шага, должна выбираться в подобных расчетах с учетом конкретных условий и поставленной цели. Из рис. 4 видно, что погрешность, связанная с увеличением $\Delta\tau$, в значительной мере зависит от крутизны функции. Поэтому для экономии времени счета зачастую целесообразно вести расчет с переменным шагом $\Delta\tau$, для чего в программу вводится блок анализа производной температуры по времени.

В различных задачах величина шага времени принималась в пределах 0,5—4,0 ч.

На основании изложенного можно сделать следующие выводы:

1. Гидравлический интегратор и БЭСМ-2м является достаточно удобным средством для решения задач данного класса без нелинейных зависимостей. При необходимости учета нелинейностей предпочтительным следует считать использование ЭВМ.

2. Общее время расчета (с учетом подготовки исходной информации) в детерминированных моделях при использовании разных видов вычислительной техники является сопоставимым.

3. Цифровые вычислительные машины в силу своей универсальности позволяют обрабатывать исходные данные и производить анализ полученных результатов, механизировав трудоемкие арифметические и логические операции, выполняемые при использовании аналоговых устройств вручную. Это преимущество ЭВМ особенно ощутимо в вероятностных моделях, где при помо-

щи анализа больших массивов информации рассчитывается математическое ожидание параметра, исследуется надежность режима и т. п.

4. Гидравлический интегратор является весьма удобным инструментом для оценки влияния отдельных факторов и их сочетаний и для проведения различных исследований при создании универсальных математических моделей. Реализация этих моделей для проведения серийных расчетов должна осуществляться на соответствующих электронных вычислительных машинах, но использование ЭВМ для отработки моделей зачастую нецелесообразно. Поэтому вместе с развитием цифровых машин будут существовать и совершенствоваться и аналоговые устройства, облегчающие отработку математических моделей.

В. И. Панчишин

О ЗАРУБЕЖНОЙ ПРАКТИКЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ БУМАГЕ

С 1845 г., когда Г. Кирхгоф впервые применил метод аналогий для исследования поля плоского конденсатора на электрической модели из медной фольги, электро моделирование прошло длительный путь развития.

Процесс решения задачи, основанный на принципах математической аналогии распространения электрического тока с явлениями в механике, сводился к построению эквипотенциальных линий поля модели. При этом использовались различные принципы измерения потенциалов в точках на модели и различные электропроводные материалы, из которых изготовлялась модель. Первым материалом, применявшимся для электро моделирования, были тонкие листы меди, потом листы константана и оловянной фольги. В этих случаях постоянный электрический ток соответствовал очень низким напряжениям.

В дальнейшем в нашей стране и за рубежом отказались от твердых электронных проводников и стали применять для моделирования жидкий ионный проводник — электролит.

Промышленное производство электропроводной бумаги, налаженное для других технических целей (например, для самописцев), позволило применить этот очень дешевый и удобный в работе материал для электро моделирования.

Впервые реальное применение электропроводной бумаги для решения технических задач методом электро моделирования предложил в 1949 г. П. Ф. Фильчаков [9]. Им был создан интегратор

ЭГДА-5, специально разработанный для моделирования на электропроводной бумаге.

Началом практического применения электропроводной бумаги за рубежом, насколько нам известно, можно считать работу, опубликованную в 1951 г. Л. Малаваром [16]. После этого в иностранной литературе появилась серия статей различных авторов о результатах моделирования на электропроводной бумаге.

Даже беглый обзор всех работ по электромоделированию на электропроводной бумаге представлял бы собой интересную и объемистую монографию. К сожалению, в этой короткой статье нет возможности сделать полный обзор работ по моделированию различных задач на электропроводной бумаге. Здесь будет кратко изложена суть только некоторых известных нам работ из практики электромоделирования за рубежом, а также описание средств его реализации.

Весьма интересные работы из зарубежной практики электро-моделирования изложены в докладах 1-й Международной аналого-вычислительной конференции, проходившей в Брюсселе с 26 сентября по 2 октября 1955 г. [10]. В трудах этой конференции, опубликованных в 1956 г., помещено 96 докладов, из них только два были непосредственно посвящены моделированию на электропроводной бумаге: доклад Л. Малавара «Метод реоэлектрической аналогии, его возможности и особенности» и доклад П. Жермена (Брюссель) «Некоторые физические характеристики графитовой бумаги, используемой для реоэлектрической аналогии» [14]. В работе приводится описание некоторых физических свойств электропроводной бумаги «теледелтос» («Teledeltos Recording Paper»), которую изготавливает американская фирма «Western Union Telegraph».

Электропроводная бумага «теледелтос» была изобретена в 1948 г. как светочувствительная бумага для записи текстов и изображений, передаваемых по телеграфу, а также для различных видов самописцев. При изготовлении ее в бумажную массу вводится проводящий компонент — сажа или графит. Сформированная готовая бумага (черного или серого цвета) с одной стороны припудривается очень тонким слоем алюминиевого порошка так, что просвечивается основа, с другой стороны бумагу покрывают сплошной изоляционной лаковой пленкой, которая придает бумаге светло-серый, почти белый оттенок.

Бумага «теледелтос» выпускалась двух типов, отличающихся друг от друга только своим сопротивлением: тип *L* — сопротивление порядка 1500—4000 *ом* и тип *H* — сопротивление порядка 17 000—20 000 *ом*. Такой большой разброс величин сопротивлений для основного назначения бумаги «теледелтос» не играет существенной роли.

Различные специалисты, работающие в области аналого-вычислительной техники, предложили использовать бумагу «теле-

делтос» в качестве электропроводной среды для изготовления моделей. Однако применение ее в том виде, в каком она выпускалась за рубежом, было сопряжено с весьма существенными трудностями из-за наличия на бумаге изоляционной пленки. Первоначально бумагу «теледелтос» расщепляли с торца лезвием безопасной бритвы и образовавшийся разрез промазывали электропроводной краской из коллоидного серебра. Затем клеивали медную полоску при помощи той же серебряной краски или графитового лака «акводага». Была разработана техника смывания металлизированного слоя с бумаги «теледелтос» при помощи амилацетата, что позволило устанавливать передвижные латунные шины-зажимы (рис. 1) и облегчило получение контакта между измерительным зондом и бумагой.

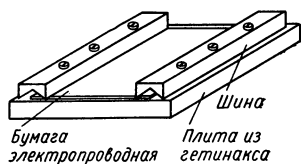


Рис. 1. Передвижные прижимные шины для электропроводной бумаги

Отметим, что бумага со значительной примесью сажи изготовлялась задолго до изобретения «теледелтос» для обертки светочувствительных фотоматериалов. Проводимость такой бумаги колеблется в пределах от 50 000 ом на квадрат до нескольких мегом и более. Однородность ее не хуже других электропроводных бумаг. Странно только, что никто не попытался использовать эту бумагу для целей электро моделирования.

П. Жермен приводит результаты исследования бумаги «теледелтос» на однородность, анизотропию и приводит зависимость проводимости от влажности и температуры [14]. Все эти данные сходятся с теми характеристиками бумаги «теледелтос», которые указываются У. Карплюсом [4].

В то время как за рубежом появились первые попытки применения для электро моделирования бумаги «теледелтос», мало пригодной для этих целей, у нас в 1949 г., как уже сообщалось выше, было положено начало интенсивному использованию электропроводной бумаги отечественного производства без всяких изоляционных покрытий [9]. Эта бумага была разработана Б. Б. Гутманом для различных технических целей [3].

В 1951 г., когда Л. Малавар опубликовал свою первую работу по электро моделированию на электропроводной бумаге «теледелтос», в нашей стране уже была выпущена партия электропроводной бумаги 4 сортов с различной проводимостью специально для электро моделирования.

Параметры электропроводной бумаги приведены в таблице. Бумага «теледелтос» марки Н-39 по данным, указанным П. Жерменом [14], имела большой разброс в значениях сопротивлений в продольном и поперечном измерении листа. Электропроводная

Таблица

Бумага	Сопротивления по длине листа в ом			Разброс сопротивлений от средней величины в %	Сопротивления по ширине листа в ом			Разброс сопротивлений от средней величины в %
	минимальное	максимальное	среднее		минимальное	максимальное	среднее	
«Теледелтос»	11 150	13 100	12 498	-11 + +5	13 400	15 210	14 111	-5 + +8
Н-39 (США)	10 420	11 760	11 225	-7 + +5	11 400	13 180	12 064	-5 + +9
Отечественная	15 100	16 100	15 600	+3	16 000	16 500	16 250	+2
электропроводная бумага	8 500	9 000	8 750	+3	9 300	9 350	9 325	+3
(1951 г.)	1 886	1 915	1 900	0	1 887	1 923	1 902	+1
	1 530	1 650	1 590	+4	1 600	1 820	1 710	+6

бумага советского производства, в отличие от «теледелтос», обладает лучшей однородностью электрического сопротивления.

В последние годы во многих странах производится электропроводная бумага с лаковым покрытием для регистрации и без всякого покрытия — для различных технических потребителей, которую применяют для электро моделирования. В Чехословакии, Польше, ГДР выпускается электропроводная бумага «функнрегистрир папир», в США и Англии — «теледелтос», в СССР — «электропроводная бумага».

Кроме электропроводной бумаги, некоторые авторы предлагают и другие виды электропроводных материалов для электро моделирования. По нашему мнению, наиболее однородным и приемлемым для моделирования материалом, предложенным в зарубежной литературе, следует считать электропроводную пленку лака, наращенную на стеклянную пластинку при неоднократном погружении в лак. Ввиду мелкозернистой и высокооднородной структуры лака, состоящего из растворителя и проводящего компонента (графитовой пыли), можно изготовить пленку с весьма высокой однородностью электрического сопротивления [4]. Приведенный рецепт проводящей краски можно значительно упростить, заменив многокомпонентное «смоляное связующее вещество» раствором клея БФ-2 в спирте, а суспензию графита — высококачественной ацетиленовой сажой. У. Карплус приводит и другие виды электропроводных материалов, которые едва ли могут быть применены для электро моделирования. Например, проводящая резина и, в особенности, электропроводные ткани и сетки не могут быть использованы потому, что при малейшем механическом воздействии нарушается постоянство электрического контакта из-за механического смещения и деформации отдельных частиц материала. Эквипотенциальные точки на такой модели будут «плавать» в довольно широких пределах, и фиксация их окажется невозможной.

Рекомендуемые приемы пропитки бумаги чертежей слабыми электролитами с высокими удельными сопротивлениями и применение графитного карандаша вместо шин для нанесения на бумагу штриховых линий — все эти способы кажутся нам несостоятельными главным образом потому, что для такой высокоомной модели, как описывает автор, потребуется очень сложное измерительное устройство с высокоомным входом. Такое устройство будет работать неточно и неустойчиво и, кроме того, оно будет сильно подвержено влиянию внешних электрических полей. Графитная штриховая линия при набухании в электролите потеряет неразрывную проводимость по всей длине, так как частицы бумаги увеличатся в объеме и нарушатся связи между отдельными частичками графита. Электропроводная бумага при намокании также теряет свою электрическую проводимость. Все это может привести к неоправданным затратам времени и средств, а результат измерений будет неудовлетворительным.

Возможность замены электрической ванны электропроводной бумагой не привела к полному отказу от применения электролитов, однако большинство исследователей отдают предпочтение электропроводной бумаге.

В последнее время как у нас, так и за рубежом наблюдается тенденция объединения модели из электропроводной бумаги с сопротивлениями [6, 15], которые используются чаще всего как удлинители для создания особых граничных условий, а также для моделирования тепловых полей методом Либмана [5].

Как уже упоминалось, первой работой по электро моделированию на электропроводной бумаге, опубликованной за рубежом, считается статья Л. Малавара [16]. В этой работе излагается преимущество электропроводной бумаги «теледелтос» перед электролитом, приводятся описание и схема измерительной аппаратуры, которая представляет собой измерительный мост постоянного тока с микроамперметром в диагонали. Автор приводит примеры применения модели из электропроводной бумаги для решения задачи Дирихле при определении суммы главных напряжений в случае эластичной пластины.

Граничные условия II или III рода также легко реализуются на электропроводной бумаге. Реализация граничного условия III рода сводится к задаче Дирихле продолжением (удлинением) поля распределения потенциалов с помощью линейных шин, сопротивление которых подобрано соответствующим образом. Это удлинение можно осуществить с помощью электропроводной бумаги, если разрезать ее на узкие полосы так, чтобы они примыкали к границе поля (рис. 2). Электрическая модель из проводящей бумаги очень удобна для определения погрешностей аэродинамических труб с помощью реоэлектрической аналогии.

Автор приводит примеры моделирования для определения стационарных распределений температуры и моделирования за-

дач конформного отображения сегмента эллипса на прямоугольник. На рис. 3 изображены две модели из бумаги «теледелтос», необходимые для представления сопряженных функций φ и ψ комплексного потенциала, выбранного для определения соответствия сегмента эллипса и прямоугольника. Обе модели соединены между собой последовательно. Измерение суммарного потенциала U двух соединенных электродов непосредственно дает отношение a/b сторон прямоугольника. На моделях линии были вычерчены таким образом, чтобы определить квадратичную сеть, для чего на нижнюю модель была наложена калька верхнего поля.

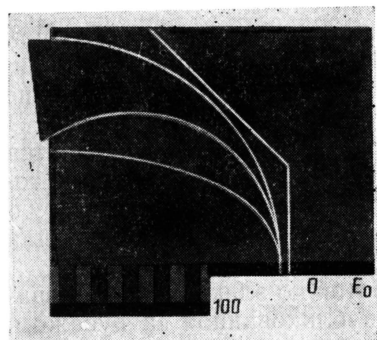


Рис. 2. Участок модели из электропроводной бумаги, перфорированный на границе для увеличения сопротивления

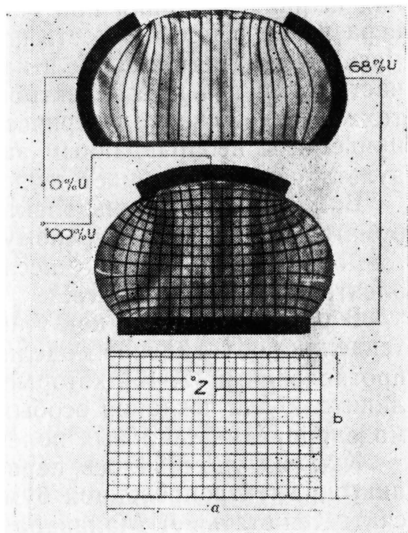


Рис. 3. Модель конформного отображения эллипса на прямоугольник

Автор делает вывод, что из-за технических сложностей установки шин на бумаге «теледелтос» получение сетки линий тока в ванне гораздо проще, чем на бумаге.

В сборнике трудов 2-й Международной конференции по аналого-вычислительной технике, состоявшейся в 1958 г. в г. Страсбурге [11], из 84 опубликованных докладов только в трех упоминается о применении электропроводной бумаги для электро моделирования в сочетании с сетками сопротивлений и одна работа, написанная Ж. Видаль из Льежского университета в Бельгии [18], посвящена описанию автоматического прибора для электро моделирования на электропроводной бумаге.

В статье рассмотрен прибор, позволяющий моделировать на электропроводной бумаге или с помощью электролитов краевые задачи математической физики, описываемые уравнением Лапла-

са. Приводится очень краткий обзор работ по электро моделированию, которые ведутся в лаборатории термодинамики в Льежском университете. Далее рассматриваются вопросы возможной однородности сред, наиболее часто применяемых для электро моделирования. Так, электролит можно приготовить с неоднородностью, не превышающей 0,1—1%, электропроводную бумагу типа «теледелтос» — с неоднородностью 2—5%, сетку из прецизионных сопротивлений — с неоднородностью 0,5% и менее.

В статье довольно подробно описывается разработанное автором устройство, принципиальная схема которого представлена на

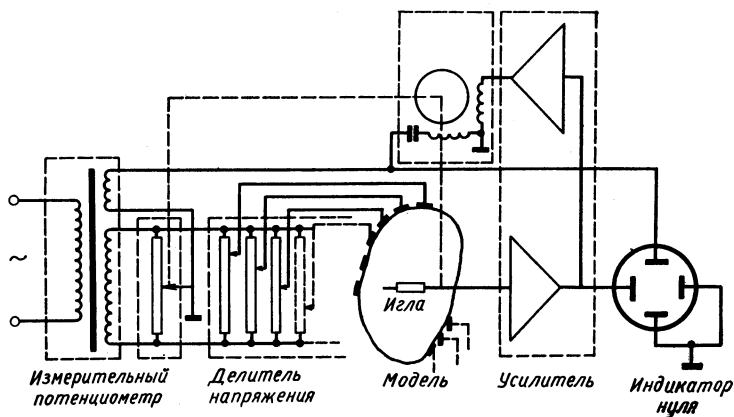


Рис. 4. Принципиальная схема полуавтоматического устройства для моделирования на электропроводной бумаге

рис. 4. В качестве источника питания используется переменный ток промышленной частоты напряжением 10 в. Делитель напряжения состоит из 14 потенциометров с двухступенчатой регулировкой. Измерительным устройством служит точный реохорд с моторным приводом. Установка работает следующим образом. Вручную при помощи измерительной иглы с модели снимается измеряемый потенциал и поступает на вход усилителя. Выход усилителя подключен к осциллографическому индикатору и параллельно к усилителю мощности для управления сервоприводом реохорда. После автоматической компенсации измеряемого потенциала его величина отсчитывается оператором по специальной шкале в виде трехзначного числа.

При помощи этого устройства на электропроводной бумаге моделируются задачи теплопередачи, причем сопротивление граничного слоя моделируется искусственно увеличенным (с помощью перфорации) сопротивлением электропроводной бумаги (рис. 5).

Остановимся на статье А. В. Кларка «Упрощенный метод изучения поведения двухмерного теплового потока на модели из электропроводной бумаги» [13]. В работе рассматривается применение RC -сеток для моделирования нестационарных теплофизических задач. Вместо используемых обычно омических сеток сопротивления автор применил электропроводную бумагу сопротив-

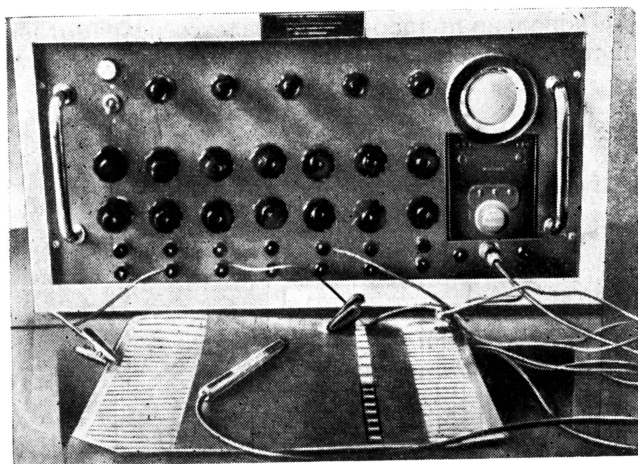


Рис. 5. Общий вид полуавтоматического устройства и модели задачи

лением от 2500 ом до 40 000 ом, что значительно упростило и удешевило модель.

Для случая изготовления модели из электропроводной бумаги между тепловым и электрическим полями соблюдается следующая аналогия:

1) электрическая величина $R_s \rightarrow$ тепловая величина $\frac{1}{K}$;

2) $\frac{\text{сопротивление}}{\text{площадь}} C_A \rightarrow \frac{1}{\text{коэффициент теплопроводности}} C_{p\rho}$;

3) $\frac{\text{емкость}}{\text{площадь}} R_s C_A \rightarrow \text{теплоемкость природы } \frac{C_p \rho}{K}$.

В качестве примера использования электропроводной бумаги автор рассматривает тепловой поток в бесконечном цилиндре радиусом 4,51 дюйма с граничным условием 1-го рода на поверхности. Моделируется процесс нагрева алюминиевого цилиндра. В качестве расчетной области рассматривается поперечное сечение цилиндра.

Электрическая схема моделируемой области представлена на рис. 6. Цепочка из омических сопротивлений заменяется сплошной средой из электропроводной бумаги сопротивлением $R_0 = 40\,000\text{ ом}$. Модель примет вид, представленный на рис. 7. Расчетная область делится на 8 равных площадей, к которым присоединяются конденсаторы с одинаковой емкостью. Конденсаторы подключаются к модели вдоль эквипотенциалей, представляющих собой узкие полости из серебряного лака. Граничные условия реализуются при помощи шин из такого же покрытия. В качестве измерительной аппаратуры применялся шлейфовый

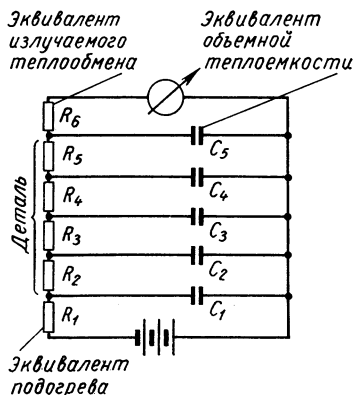


Рис. 6. Электрическая схема RC-модели

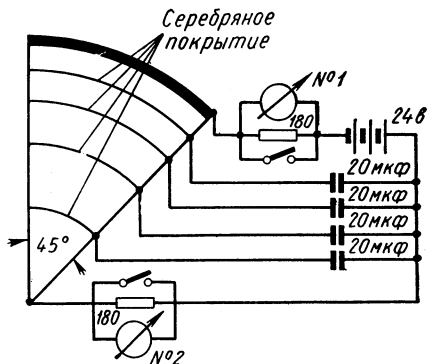


Рис. 7. RC-модель, где сопротивления замещены электропроводной бумагой

осциллограф. Масштаб времени для моделирования теплового процесса в соответствии с имеющимися емкостями и сопротивлением бумаги был выбран таким, что 1 сек работы электро модели соответствует $1.884 \cdot 10^3$ сек теплового прибора. Результаты моделирования автор сравнивал с аналитическим решением этой задачи и получил хорошее совпадение. Значительное расхождение наблюдалось только в зоне температуры плавления алюминия, причиной чего является утечка электролитических конденсаторов при возрастании напряжения.

Теперь перейдем к краткому обзору работ по электро моделированию на электропроводной бумаге, сделанным в Чехословакии и опубликованными в различных номерах журнала «Технические новости». Эти номера журналов нам любезно прислали чехословацкие друзья.

В статье «Тепловой удар в свечах зажигания» Йозефа Ковачика и Йозефа Кунеша [15] описывается методика и техника моделирования теплового удара в свечах зажигания бензиновых двигателей внутреннего сгорания.

Температурное поле свечи и части головки блока цилиндров показано на рис. 8. Модель изготовлялась из электропроводной бумаги разной проводимости. Для реализации граничных условий применялись удлинители из полосок электропроводной бумаги. В качестве питающего устройства использовался генератор звуковых частот, индикатором служил электронный вольтметр для визуального наблюдения и наушники для слухового контроля компенсации измерительного потенциометра.

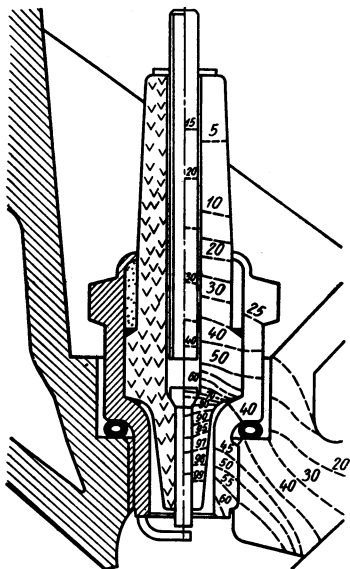


Рис. 8. Температурное поле в теле свечи зажигания и части головки блока цилиндра

В другой очень интересной работе Йозефа Кунеша и Богуша Ульриха «Новые электрические аналоговые методы для изучения нестационарных температурных полей» [16] изложены два новых простых метода, хорошо подходящих для изучения одно- и двухмерных температурных полей. Эти методы отличаются дешевой в применении к расчетам температурных полей в лопатках турбин, находящихся в жестких температурных условиях. В первом методе используется электролитическая ванна, и мы его здесь рассматривать не будем, во втором применяется электропроводная бумага. В качестве примера авторы приводят исследование нестационарного теплового потока в бесконечном цилиндре во время

его быстрого нагревания от 0° до 100°C . В задаче реализуются граничные условия 1-го рода (рис. 9). Модель строилась по принципу «постоянных конфигураций». Электрические эквипотенциали, полученные на модели из электропроводной бумаги, соответствовали температурам цилиндра только на их пересечении с продольной кромкой модели. Поэтому температурное распределение вдоль радиусов цилиндра может быть определено измерением электрических потенциалов на этой кромке. На моделях, представленных на рис. 9, показаны температурные условия после 1-й, 2-й и 3-й мин нагревания. Значение основания трапециоида соответствует временному интервалу $\Delta t = 1 \text{ мин}$. Электрод основания представляет собой слой серебряного лака, нанесенного на электропроводную бумагу модели; к нему подключено напряжение, соответствующее 100°C . На обратимые электроды справа на моделях задаются потенциалы, соответствующие величинам, полученным в предыдущий временной интервал.

Такая же задача представлена на моделях рис. 10, где тепловая передача через цилиндр исследована методом переменной конфигурации. В этом эксперименте используется одна модель, сделанная из электропроводной бумаги. Модель после-

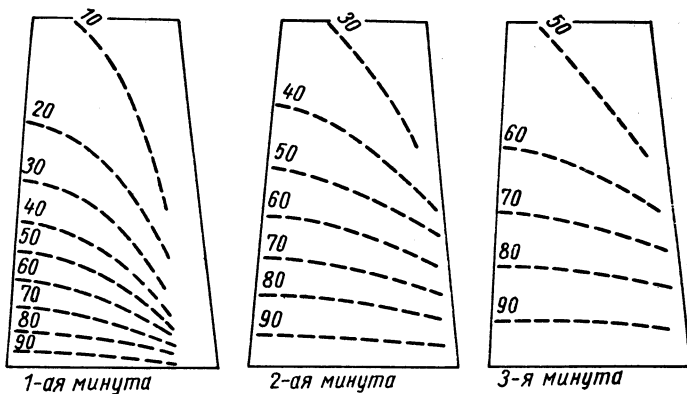


Рис. 9. Нестационарное тепловое поле

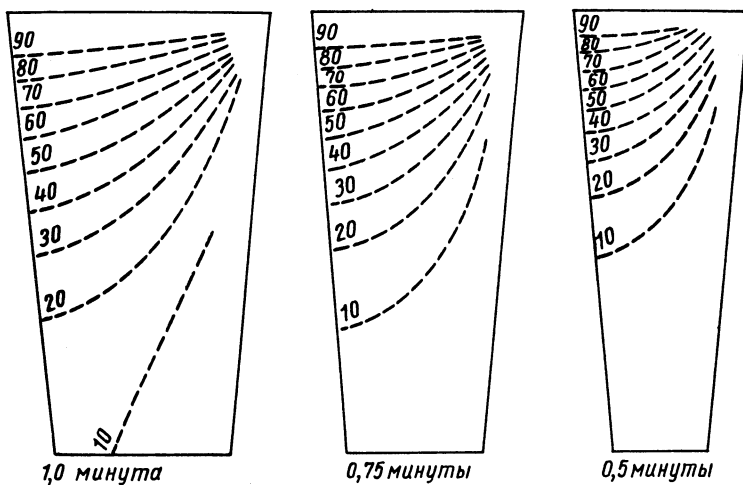


Рис. 10. Нестационарное тепловое поле

довательно обрезается для каждого интервала времени. Для такой модели требуется только два электрода: один для граничных, другой для переходных условий, причем последний поддерживается под нулевым потенциалом во время всего эксперимента. Правильная техника моделирования ограничивается максимальной ошибкой 1—2%, на электролитах с неоднородностью 0,5—1,5%.

Методы, изложенные в работе, просты и дают достаточно точные для практического применения решения, если строго соблюдаются все соответствующие условия моделирования.

В работе В. Берана, В. Швиглера и О. Вовроха, напечатанной в том же журнале «Технические новости», приводится подробное описание прибора «GP-04», предназначенного для определения эквипотенциальных и эквиградиентных линий потенциальных функций на моделях из электропроводной бумаги. Разработанный авторами и описываемый в статье новый прибор называется «Gradipot». Прибор состоит из двух блоков.

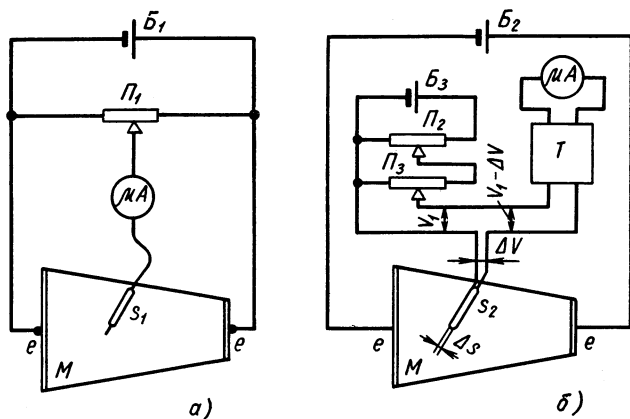


Рис. 11. Принципиальная схема прибора «Gradipot» «GP-04»:

а — устройство для измерения потенциалов; б — устройство для измерения градиентов потенциалов

В одном блоке смонтировано устройство для измерения потенциалов (рис. 11) и их градиентов (рис. 11, б) на моделях из электропроводной бумаги. В другом блоке смонтировано питающее устройство и делитель напряжения из 25 потенциометров, необходимый для реализации задания граничных условий.

Схемы, представленные на рис. 11, описаны в литературе по электромоделированию, и мы здесь не будем приводить их подробное содержание. Отметим только, что блок, обозначенный буквой Т, представляет собой транзисторный усилитель для гальванометра, а измерительное устройство работает с точностью до 0,1% включительно. Отыскание эквиградиентных линий сводится к отысканию точек на модели, в которых напряжение зонда ΔV равно напряжению V_1 , установленному на потенциометре P_4 . Разница между напряжением V_1 и ΔV , полученная в момент, когда щуп отходит от эквиградиентной линии, усиливается транзисторным усилителем Т.

В схему прибора введены различные вспомогательные элементы, которые оказываются очень полезными в работе. Например, две кнопки в цепи питания позволяют в любой момент проверить наличие питания модели. Миллиамперметр-гальванометр защищен от перегрузок двумя специальными диодами, шкала измерительного потенциометра безразрывна (замкнута), и переходы с минимума на максимум не требуют возвратного вращения, что значительно ускоряет измерения и предохраняет потенциометр от порчи. Питание всей установки осуществляется от сухих батарей, помещенных в блоке прибора. Для температурной стабилизации транзисторов усилителя их помеща-

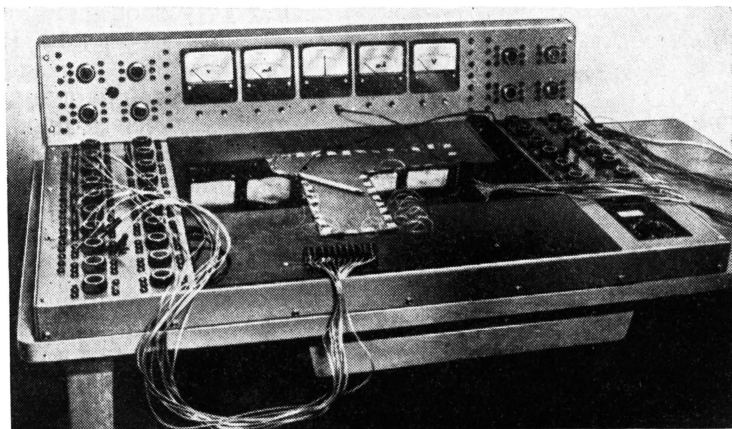


Рис. 12. Прибор, изготовленный в Чехословакии и предназначенный для построения сеток тепловых полей на электропроводной бумаге

ют в алюминиевый радиатор. Для прибора «GP-04» разработаны специальные щупы: один — для отыскания эквипотенциальных точек на модели, другой — для измерения градиентов. Последний имеет регулировочное приспособление для изменения расстояния Δs между иглами.

Прибор «GP-04» хорошо зарекомендовал себя при решении многих задач из области теплопередачи, течения жидкости, анализа напряжений и электромеханики. Он полностью удовлетворяет предъявленным к нему требованиям: прост, обладает большой чувствительностью и точностью отсчета, широким диапазоном применения при различных граничных условиях, позволяет непосредственно на модели измерять градиент, имеет малые размеры и вес.

В одной из лабораторий известной фирмы «Škoda» изготовили прибор для решения методом электро моделирования за-

дач стационарной теплопроводности на электропроводной бумаге. После соответствующих преобразований на приборе можно определять поля, описываемые уравнением Пуассона, при условии постоянства правой части уравнения. На модели из электропроводной бумаги вне контура моделируемой области оставляется узкая полоса, к которой присоединяются электроды для реализации граничных условий. Электроды могут представлять собой слой электропроводного лака, пластинку фольги или медную проволоку, которая вклеена по контуру модели в расслоенную электропроводную бумагу.

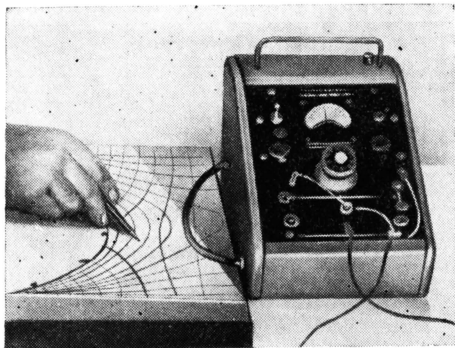


Рис. 13. Английский прибор для построения линий силовых полей, выпускаемых фирмой «Servomes Controls Limited»

Общий вид моделирующего устройства представлен на рис. 12. В металлическом каркасе вокруг рабочей площади, где производится моделирование на модели из электропроводной бумаги, расположены узлы и блоки установки. Краевые условия 1-го и 2-го рода обеспечиваются с помощью делителя напряжения, состоящего из ряда потенциометров. В устройстве установлены два вольтметра, два миллиамперметра

и нулевой микроамперметр. В качестве зонда используется цанговый карандаш, грифель которого, соединенный через нулевой микроамперметр с измерительным потенциометром, используется как электроконтакт.

В лабораториях электромоделирования Машиностроительно-электротехнического института в г. Пльзень широко используют электролитическую ванну, сетку сопротивлений и электропроводную бумагу. Так, на приборе «GP-04» решаются задачи двумерных полей, описываемых уравнениями Лапласа и Пуассона, одномерных полей, диффузионных процессов. Моделирующее устройство «R-C», соединенное с координатным регистратором «ВАК», применяется для решения нестационарных температурных полей. Для решения различных технических задач применяются методы электромоделирования нестационарных температурных полей с помощью метода конфигураций, а также методы прямого электромоделирования градиентов гармонических функций. Дальше в работе [12] рассматривается решение случая нагрузки профилем кручением — этот метод основан на том, что составная нагрузки кручением пропорциональна соответ-

ствующей производной функции, удовлетворяющей уравнению Пуассона.

По имеющимся у нас сведениям электро моделирование на электропроводной бумаге широко применяется в Польше, где производится электропроводная бумага, Румынии и Болгарии.

Серийный выпуск установок для моделирования на электропроводной бумаге производится в СССР, в Чехословакии изготовлено несколько приборов «Gradipot» и «GP-04», описание которого изложено выше.

В 1963 г. Британская выставка научных и промышленных приборов в Москве экспонировала «Прибор для построения изображений силовых полей», выпускаемый серийно фирмой «Servotex Controls Limited» [17]. На фотографии (рис. 13) изображен прибор и исследуемая модель. Рекламная характеристика сообщает, что этот прибор предназначен для исследований, расчетов и обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аналоговые методы и средства решения краевых задач. Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 46—56, 128—137, 191—199, 230—247 (Труды Всесоюзного совещания, М., окт. 1962).
2. Вопросы теории и применения математического моделирования. Под ред. И. М. Витенберга, Г. М. Петрова, Г. Е. Пухова. М., «Советское радио», 1965, стр. 71—85, 268—308, 388—399, 592—610.
3. Гутман Б. Б. Электропроводная бумага. Сборник статей по отдельным вопросам целлюлозной и бумажной промышленности. М., Госбумиздат. 1944.
4. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., изд-во иностр. лит., 1962, стр. 164—173.
5. Коздоба Л. А. Электро моделирование температурных полей в деталях судовых энергетических установок. Л., «Судоостроение», 1964, стр. 65—66.
6. Ницецкий Л. В. Аналоговые и разностные методы решения внешних краевых задач. Ученые записки, т. XII, факультет автоматики и вычислительной техники, вып. 2. Рига, изд-во «Звайгзне», 1965, стр. 326—327.
7. Пелегрэн М. Электронные вычислительные машины. Аналоговые и цифровые. Пер. с франц. Под ред. проф. В. В. Солодовникова. М., Изд-во «Машиностроение», 1964, стр. 97—103.
8. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., «Физматгиз». 1959, стр. 248—285.
9. Фильчаков П. Ф. Электро моделирование задач фильтрации в разнородном грунте. Доклады АН СССР, т. 66, Киев, «Наукова думка», 1949, № 4, стр. 593—596.
10. Actes Proceedings Journees Internationales du Calcul Analogique. Bruxelles. Sept. 1955. Bruxelles—Belgique, 1956, p. 288—313, 327—332.
11. Actes Proceedings. Deuxiemes Journees Internationales de Calcul Analogique. Strasbourg 1—6 sept., 1958, Paris, 1959, p. 276—282.
12. Beran V., Svirgler V., Vavroch O., Gradipot — an Instrument for Measurement on Conductive Paper Models. Journ. «Technical Digest», March — 1956, Prague, Czechoslovakia.
13. Clark A. V. A simplified method for the study of two — dimensional transient heat flow using resistance paper. The American Society of Mechanical Engineers. April 8—10, 1957, p. 11.

14. Germain P., Quelques caractéristiques physiques du paper Graphit Utilisé dans L'Analogie Rhéoelectrique. P. 327—332. Journées Internationales du Calcul Analogique, sept. 1955. Bruxelles — Belgique, 1956.

15. Kovarik I., Kineš I. Thermal Stresses in Sparking Plugs, I. «Technical Digest», № 2, February — 1964, Prague, Czechoslovakia, p. 21—27.

16. Malavard L. Sur une nouvelle technique dans le calcul expérimental par analogies rhéoelectriques. Rech. Aeron. Bull. Fr. (1951), № 20, p. 61—68.

17. Malavard L. La méthode d'Analogie Rhéoelectrique. Ses Possibilités ses Tendances. Journées Internationales du Calcul Analogique, Sept. 1955. Bruxelles — Belgique, 1956, p. 288—313.

18. Vidal I. Description d'un équipement automatique simple et complet pour la mise en oeuvre des méthodes rhéoelectriques, Actes Proceedings, 2es journées internationales de Calcul Analogique. Paris, 1959, p. 263—266.

В. М. Шестаков

О РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА, ГЕЛЬМГОЛЬЦА И ФУРЬЕ НА СПЛОШНЫХ МОДЕЛЯХ ЭГДА

При моделировании на сплошной плоской модели ЭГДА процессов, описываемых уравнением Пуассона вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\omega, \quad (1)$$

где $\rho(x, y)$ — удельное сопротивление модели, при дискретном задании свободного члена $\omega(x, y)$ на модель через электроды, расположенные по сетке с шагом l , подается ток $I_\omega = \omega l^2$ (задаваемый обычно через сопротивление R_ω) при среднем значении ω в пределах элемента площади размером $l \times l$ [1].

В поисках уточнения получаемого таким образом решения рассмотрим распределение тока вблизи электрода, выделив относящийся к нему квадратный элемент модели размером $l \times l$. Для упрощения задачи заменим квадрат равновеликим кругом радиусом $r_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} l$ и рассмотрим его изолированно, пренебрегая воз-

действием с соседними элементами, так что распределение тока в выделенном элементе будет носить радиальный характер. При постоянных величинах ρ и ω в пределах элемента и при постоянном радиусе электрода $r_0 \ll l$ выражение для величины U на расстоянии r от электрода в этом случае будет

$$U = 0,5\rho\omega r_k^2 \ln \frac{r}{r_k} - 0,25\rho\omega r^2, \quad (2)$$

среднее значение этой функции

$$U^0 = 0,5\omega r_k^2 \left(\ln \frac{r_k}{r_0} - 0,75 \right) \quad (3)$$

и разница между ними

$$\Delta U = U - U^0 = \rho I_w f(\bar{r}), \quad (4)$$

где

$$f(\bar{r}) = \frac{1}{2\pi} \left(0,75 - 0,5\bar{r}^2 - \ln \frac{1}{\bar{r}} \right); \quad \bar{r} = \frac{r}{r_k}. \quad (4a)$$

Если ток I_w пропускается через известное сопротивление R_w , то, пользуясь законом Ома, выражение (4) можно представить в виде

$$\Delta U = \frac{\rho}{R_w} \Delta U_w f(\bar{r}), \quad (4б)$$

где ΔU_w — разность потенциалов на концах сопротивления R_w .

Величина ΔU может рассматриваться как поправка, учитывающая дискретность задания питания на модели. Таким образом, найдя значения относительного потенциала на модели U_M , следует далее определить его расчетное значение U по формуле

$$U = U_M - \Delta U \quad (5)$$

при ΔU , выраженном по формуле (4).

При определении \bar{r} в качестве r_k рекомендуется принимать расстояние от центра до границы элемента, относящегося к данному электроду, по линии, проходящей через расчетную точку.

При аналогичном моделировании процессов, описываемых уравнением Гельмгольца вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \theta (U - U_0), \quad (6)$$

правая часть уравнения моделируется дискретным заданием тока через сопротивления R_θ , на концах которых задаются потенциалы, соответствующие значениям $U_0(x, y)$, а величина R_θ определяется по формуле

$$R_\theta = \theta l^2 \quad (7)$$

при среднем значении $\theta(x, y)$ в пределах элемента [2].

В полученные таким образом значения потенциалов U_M в соответствии с выражением (5) вводится поправка ΔU , определяемая по формуле (4). Вместо значения I_w подставляется измеренная величина тока I_θ , проходящего через сопротивление R_θ .

Моделирование процессов, описываемых уравнением Фурье вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = C \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (8)$$

можно осуществлять на сплошной модели по схеме Либманна [2, 3, 4], реализуя временную производную в конечно-разностной

форме дискретным путем, с подключением «временных» сопротивлений R_t с помощью электродов радиуса r_s , установленных по сетке шагом l .

Величина «временного» сопротивления определяется с учетом искажений поля вблизи электродов [2] по формуле

$$R_t = \frac{l^2}{C} \Delta t - \rho (f_c + \Delta f_k), \quad (9)$$

где $f_c = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_k}{r_s} - 0,12$ — приведенное сопротивление приэлектродной зоны;

Δf_k — приведенное сопротивление контакта электродов, которое для электродов прижимного типа может определяться в зависимости от их диаметра d_s по следующим данным: $\Delta f_k = 0,03$ при $d_s = 10$ мм, $\Delta f_k = 0,05$ при $d_s = 5$ мм и $\Delta f_k = 0,08$ при $d_s = 3$ мм.

$$U = U_s + (U_s - U^0) \frac{C\rho}{\Delta t l^2} f_c, \quad (10)$$

где U — потенциал на электроде;

U^0 — потенциал, задаваемый на конце «временного» сопротивления; значения потенциала U^0 устанавливаются равными среднему значению потенциала U , подсчитанному согласно выражению (10) на конец предшествующего шага по времени.

Для проверки точности расчетов по изложенной методике была проведена значительная серия типовых расчетов на полоскообразных и прямоугольных в плане моделях (линейные и плоские задачи), результаты которых сопоставлялись с результатами расчетов на сеточных электроинтеграторах и с точными решениями.

Анализ сопоставительных расчетов показал, что точность расчетов на сплошных моделях, как правило, оказывается вполне удовлетворительной и, во всяком случае, не уступает точности расчетов на сеточных интеграторах. Наилучшие данные получились применительно к решениям уравнений Пуассона и Гельмгольца, где обеспечивается точность порядка 1—3% при наличии даже двух-трех электродов между границами с условиями 1-го и 2-го рода и трех-четыре электродов между границами 1-го рода. При решении уравнения Фурье по схеме Либманна максимальная погрешность оказывается порядка 5—7%, если между границами 1-го и 2-го рода задается три-четыре электрода или пять-шесть электродов — между границами 1-го рода, а в пределах монотонного изменения потенциала на границах устанавливается не менее двух интервалов по времени Δt .

ЛИТЕРАТУРА

1. Аравин В. И. Расчеты и моделирование плановой фильтрации. М., Госэнергоиздат, 1962, стр. 242.
2. Кирилличев А. М. О моделях из сплошных сред для задач неустановившейся фильтрации нефти и газа. «Известия вузов. Нефть и газ», № 6, 1963, стр. 36—41.
3. Коздоба Л. А., Князев Л. В. Комбинированные электрические модели для решения двух- и трехмерных задач нестационарной теплопроводности. «Труды 2-го Всесоюзного совещания по тепломассообмену», вып. 8—9, Минск, Издательство Минского политехнического института, 1964, стр. 48.
4. Шестаков В. М. Теоретические основы оценки подпора водонапряжения и дренажа. Изд-во МГУ, 1965, стр. 36.

М. М. Литвинов

МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ БУМАГЕ

Наибольшее распространение при решении задач с источниками поля получил метод электролитической ванны [4], но наряду с этим могут использоваться модели из электропроводной бумаги, применение которых приводит к более простым аппаратурным решениям и к простым способам изготовления моделей. Один путь их развития связан с созданием конденсаторного слоя (R — C -модели [6]). Однако более эффективным является второй путь — создание R -модели в виде комбинации из электропроводной бумаги и сосредоточенных сопротивлений [1].

В работе рассматривается решение задач стационарной теплопроводности с внутренними источниками тепла на электропроводной бумаге, описываемых уравнением Пуассона:

$$\frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda x^k \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) = -q_v.$$

Плоской задаче соответствует $k = 0$ и объемной в цилиндрической системе координат $k = 1$ (в этом случае $x = \rho$ -радиусу). К электрической модели из электропроводной бумаги дискретно отводятся токи, моделирующие тепловыделение (в общем случае правую часть уравнения Пуассона), через высокоомные сопротивления — тоководящие элементы — т. в. э. Электрическое поле в модели описывается уравнением Пуассона:

$$\frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma x^k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{I}{\Delta F_s},$$

где $\sigma = 1/r$ — удельная поверхностная проводимость бумаги;

I — ток в т. в. э.;

ΔF_s — площадь элементарного участка модели.

Параметры модели следующие:

а) сопротивление, моделирующее правую часть:

$$R_{m.в.э} = k_R \frac{k_t \Delta u}{\rho^k q_v \Delta F_s}; \quad (1)$$

б) сопротивление, моделирующее краевые условия II рода:

$$R_q = k_R \frac{k_t \Delta u}{\rho^k q \Delta s}; \quad (2)$$

в) удельное поверхностное сопротивление каждой зоны плоской или осесимметричной задачи

$$r_i = \frac{k_R}{\lambda_i 0^k},$$

где $k_t = t/u$ и k_R — коэффициенты моделирования;

Δs — ширина участка теплообмена;

Δu — падение напряжения на сопротивлении.

В случае моделирования краевых условий III рода формула (2) переходит в выражение

$$R_\alpha = \frac{k_R}{\alpha \Delta s}.$$

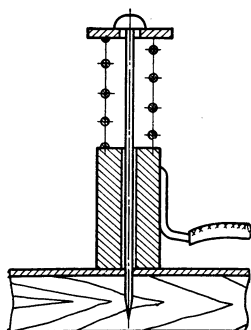


Рис. 1. Тоководящая игла

Из формулы (1) следует, что ток в т. в. э.

$$I = \frac{\Delta u}{R_{m.в.э}} = \frac{\rho^k q_v \Delta F}{k_R k_t}. \quad (3)$$

Каждый из двухсот т. в. э. состоит из двух сопротивлений: R' — постоянное прецизионное сопротивление типа УЛИ класса 0,5 или 1 и R'' — переменное сопротивление типа СНВК-500/22. Сопротивления R' — сменные, монтируются в специальных гнездах, обеспечивающих надежность контакта и легкость замены сопротивлений [2].

Подвод тока через т. в. э. к модели осуществляется с помощью специальных подпружиненных игл, швейных игл или булавок, снабженных латунной втулкой диаметром 2 мм, закрепляемых в деревянной панели (рис. 1). Конструкция игл обеспечивает постоянный и надежный контакт с поверхностью электропроводной бумаги.

Решение задач осуществлялось на специализированном моделирующем устройстве (рис. 2), являющемся модернизированным вариантом интегратора ЭТА-2 [3].

В качестве измерительного устройства используется интегратор типа ЭТНА, построенный на базе автоматического самопишущего прибора ЭПП-09 или ЭМП-209 [2]. Измерительное устройство используется для следующих операций:

- а) набора граничных условий;
- б) измерения сопротивления электропроводной бумаги;
- в) задания токов в т. в. э.;
- г) съема электрического поля.

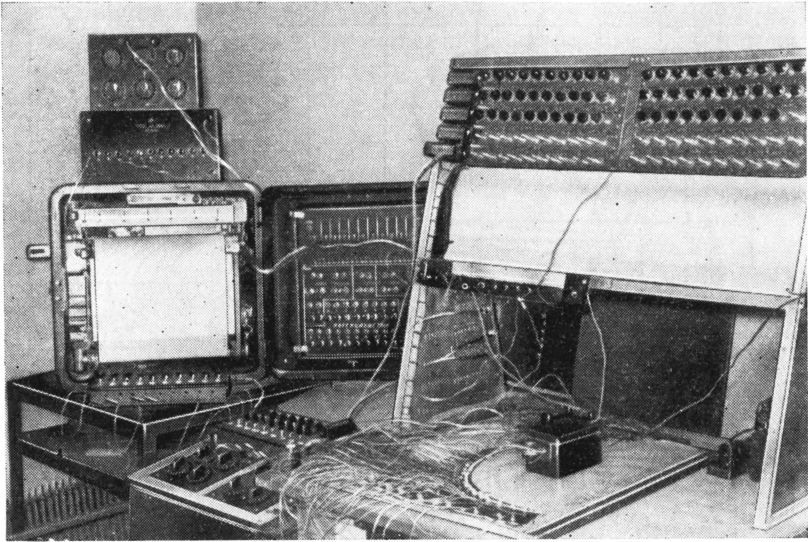


Рис. 2. Общий вид моделирующего устройства

Питание модели (рис. 3) производится от сети через понижающий трансформатор. От вторичных обмоток трансформатора питаются низкоомные потенциометрические делители P и $R_{т.в.э.}$, напряжение на которых регулируется с помощью реостата R . С остальной обмотки подается питание на реохорд ЭПП-09 (u_{px} равно $u_{мод}$ или $2u_{мод}$).

Настройка т. в. э. производится путем поочередного подключения гнезд т. в. э. на вход усилителя ЭПП-09. При этом для того, чтобы можно было измерить падение напряжения на сопротивлении R' с помощью измерительной схемы ЭТНА, напряжение u_0 выбирается больше, чем u_{px} .

Из формулы (3) следует, что падение напряжения на постоянном сопротивлении т. в. э. равно

$$u' = \frac{\rho^k q_0 \Delta F}{k_R k_t} R'.$$

Этому значению соответствует в безразмерных единицах шкалы ЭПП-09 величина

$$\Delta\theta\% = \frac{u'}{\Delta u_{px}} 100.$$

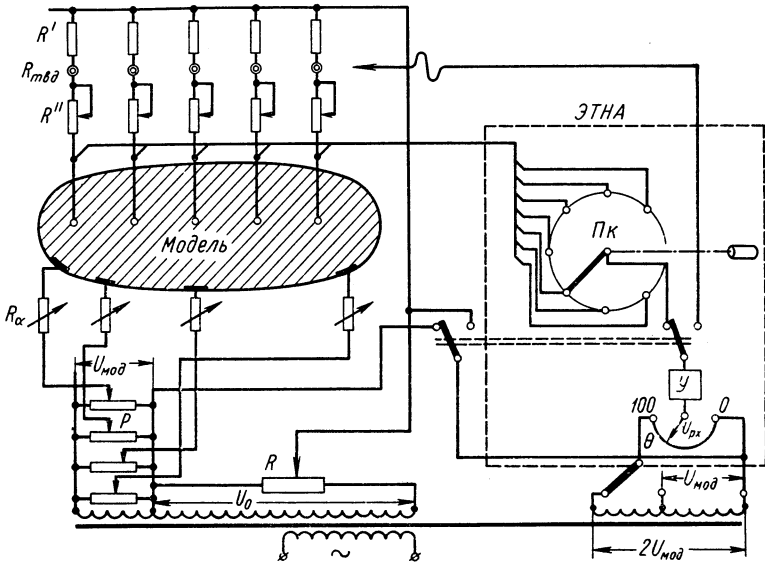


Рис 3. Принципиальная схема измерений

Моделирование поля осуществляется путем поочередного автоматического подключения к иглам с помощью переключателя ЭПП-09 модели измерительного устройства ЭТНА, осуществляющего регистрацию безразмерных потенциалов θ , на диаграммной ленте ЭПП-09

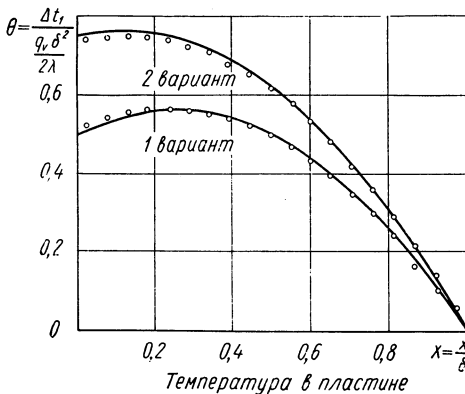


Рис. 4. График распределения температур в пластине

$$\theta = \frac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} = \frac{\Delta u}{\Delta u_{px}},$$

где $T > T_{\max}$.

С помощью интегратора был решен ряд задач, описываемых уравнением Пуассона. В качестве примера приведем решение задачи по определению температуры в пластине.

Безразмерная температура задается в виде

$$\theta = \frac{t - t_1}{\frac{q_0 \delta^2}{2\lambda}}$$

Запишем условия на границе. 1-й вариант: $\theta_{11} = 0,5$; $\theta_{12} = 0$. Теоретическое решение описывается уравнением $\theta = -X^2 + 0,5X + 0,5$ [5]; 2-й вариант: $\theta_{12} = 0,75$, $\theta_{22} = 0$; $B_{i1} = 1$. Теоретическое решение: $\theta = -X^2 + 0,25X + 0,75$. Задача решалась в двумерной модели с тремя рядами т. в. э. (всего 30 т. в. э.), $\Delta F_0 = 5 \times 5$ см. Результаты решения контрольных задач показывают, что средняя погрешность решения не превышает 2—3% (рис. 4).

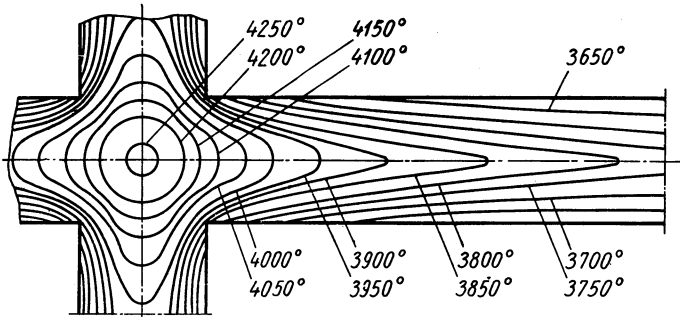


Рис. 5. Температурное поле в элементе теплообменника

На рис. 5 приведены результаты определения температурного поля в элементе теплообменника. По всему объему задана постоянная мощность внутренних источников тепла. Отвод тепла происходит с поверхности. Поле снималось в 100 точках. Невязка по тепловому балансу не превышает 6%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 1—461.
2. Кириллов В. И., Литвинов М. М., Олешкевич Б. Б. Электроинтегратор для решения задач нестационарной теплопроводности. В настоящем сборнике.
3. Литвинов М. М. Электроинтегратор ЭТА-2. Межвузовская конференция по физическому и математическому моделированию. М., изд. МЭИ, 1959, стр. 21—32.
4. Лукошков В. С. Моделирование источников поля в электролитической ванне при решении задач математической физики. В сб. «Электроника», 1958, № 7, № 8, стр. 34—37.
5. Новиков И. И. и Воскресенский К. Д. Прикладная термодинамика и теплопередача. М., Госатомиздат, 1961, стр. 548.
6. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., Физматгиз, 1959, стр. 319.

О ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТКАХ

Вопросам погрешности решения задач с помощью методов электро моделирования уделяется внимание во всех монографиях по электрическому моделированию [4, 5, 6] и в ряде специальных работ [1, 2, 3].

Однако каждый автор рассматривает этот вопрос в определенном аспекте, акцентируя внимание либо на погрешности, вносимой переходом от дифференциальных уравнений к конечно-разностным, либо на погрешности, вызываемой неточностью элементов модели.

Изучение вопроса о погрешности решения при моделировании привело к выводу о невозможности установления пределов погрешности решения любых задач, поэтому и в каталогах и проспектах на выпускаемые модели теперь не приводятся данные о погрешности решения, а даются лишь сведения о погрешностях набора коэффициентов (параметров) уравнения, задания граничных и начальных условий и изменения искомых величин.

Для выяснения вопроса о связи между этими величинами рассмотрим сначала существующие в математике понятия погрешности.

Под относительной погрешностью решения математической задачи обычно понимают отношение разности точного и приближенного решения к точному решению

$$\delta = \frac{P_{\text{точн}} - P_{\text{прибл}}}{P_{\text{точн}}}$$

или в процентах

$$\delta \% = \frac{P_{\text{точн}} - P_{\text{прибл}}}{P_{\text{точн}}} 100. \quad (1)$$

Однако такое определение не дает правильного представления о точности решения, так как в случае, когда точное решение равно нулю (или весьма мало),

$$\delta \% = \frac{0 - P_{\text{прибл}}}{0} 100 = \infty$$

и создается впечатление о неправильности решения, в то время как $P_{\text{прибл}}$ может быть сколь угодно близко к точному.

Поэтому в некоторых руководствах по интеграторам [6, 9] погрешность относится не к точному значению решения в данной точке, а к 100% шкалы измерительного устройства:

$$\delta \% = \frac{U_{\text{точн}} - U_{\text{прибл}}}{100} 100 = U_{\text{точн}} - U_{\text{прибл}}. \quad (2)$$

Такое определение, с одной стороны, часто не устраивает инженера-постановщика задачи, так как при значениях функций, отличающихся на один или более порядков от 100%, не гарантирует приемлемой степени точности, а с другой — все-таки не является достаточным, чтобы по нему можно было судить о точности решения задач с помощью средств электро моделирования. Покажем это на двух примерах.

1. Пусть искомый процесс представляет собой гармонические колебания с периодом $T = 100 \text{ сек}$ и амплитудой $100\% U$ (рис. 1) и пусть на интеграторе ответ получается с погрешностью в величине периода на -1% , т. е. $T = 99 \text{ сек}$. Тогда через 25 периодов в заданный момент t_1 вместо амплитудного значения $100\% U$ интегратор покажет $0\% U$ и наоборот.

Таким образом, в этой точке замеренная величина будет отличаться от истинной (отнесенной к 100% шкалы) на 100% .

2. Дано уравнение $U'' - U = 0$ при начальных условиях

$$U|_{t=0} = A, \quad U'|_{t=0} = -A.$$

Точным решением этого уравнения будет $U = Ae^{-t}$, что при $t = 1, 2, 5, 10 \text{ сек}$ даст значения искомой функции $U_1 = 0,368A$; $U_2 = 0,135A$; $U_5 = 0,0067A$; $U_{10} = 0,000045A$.

Пусть заданные на модели начальные условия отличаются от точного на $\pm 1\%$, т. е. $U|_{t=0} = 0,99A$; а $U'|_{t=0} = -1,01A$. Тогда полученные на интеграторе решения при $t = 1, 2, 5$ и 10 сек соответственно составят $U_1^* = 0,3407A$; $U_2^* = 0,0614A$; $U_5^* = 2,4402A$; $U_{10}^* = -220,26A$. В таблице и на рис. 2 показано сравнение точного и приближенного решения.

Как видно, уже через 5 сек приближенное решение отличается от точного на 244% .

Из-за такой значительной разницы между приближенным решением и точным возникает проблема различия между неточным решением и неправильным решением. При постановке задачи на электроинтеграторе возможны случайные ошибки экспериментатора в расчетах или при наборе модели, а также возможен выход из строя каких-либо элементов модели (обрыв сопротивлений, пробой конденсаторов, выход из строя ламп и т. п.). В этом случае полученное решение будет вообще неправильным, т. е. не имеющем отношения к поставленной задаче.

При аналитическом решении задачи принято считать решение

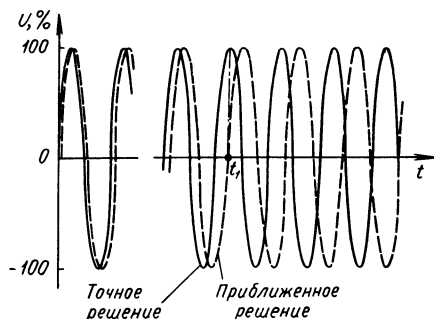


Рис. 1. Влияние погрешности на точность решения

правильным, но приближенным, если оно отличается от точного на единицы (иногда десятки) процентов. Если же отличие более значительное (сотни процентов), то такое решение считается неправильным.

Таким образом, по величине порядка разницы между полученным ответом и точным определяют два качественно различных результата: правильное приближенное решение и неправильное.

Как видно из приведенных выше примеров, сделать такое разделение (по величине порядка погрешности) для решения, полученного на модели, не представляет

возможным, так как даже правильное решение может сколь угодно отличаться от точного за счет допустимой по паспорту неточности в задании параметров модели. Если исходить из величины погрешности, то иногда может создаться ложное впечатление о неправильности работы модели. Поэтому необходимо

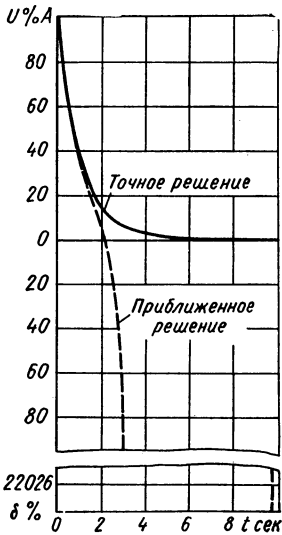


Рис. 2. Сравнение точного и приближенного методов

t в сек	Решение		δ, %
	точное U	приближенное U*	
1	0,368A	0,341A	2,7
2	0,135A	0,0614A	7,4
5	0,0067A	-2,4402A	-244
10	0,000045A	-220,26A	-22026

Примечание. Начальное значение $U = A$ принято за 100%.

дать определение правильного приближенного решения, полученного при правильном расчете, наборе и работе модели для отличия его от неправильного решения.

Правильным решением, полученным на модели, следует считать такое решение, которое находится внутри огибающих семейства решений, получаемых при вариации всех параметров модели, начальных и граничных условий в пределах, оговариваемых в паспорте модели.

На рис. 3 показаны различные решения одной и той же задачи, полученные при вариации сопротивлений, емкостей и задаваемых потенциалов на $\pm 1\%$ от максимального значения.

Огибающие (штриховые линии) охватывают всю область, внутри которой может находиться правильное решение.

Если полученное решение хотя бы в одной точке выходит за пределы этой области, оно является неправильным.

Чем уже ширина области между огибающими, тем меньше величина допустимой относительной погрешности решения.

Такое определение может служить основанием для определения на модели порядка погрешности получаемого решения. Для этого следует варьировать все возможные параметры задачи на величину минимального дискретного шага, допускаемого на модели, и наблюдать за решением на экране осциллографа. Практически надо менять не все параметры, а лишь те, которые оказывают заметное визуальное влияние на форму решения. В частности, в задаче, приведенной в примере 1, изменение напряжений (начальных условий) на 1% не оказывает заметного влияния на решение (амплитуда колебания изменяется на 1%), а изменение сопротивления на 1% меняет частоту колебаний, так, что уже через 10—15 периодов значения функции будут резко отличаться друг от друга. Для сравнения следует задать каким-либо временем и поставить метку времени, а затем после изменения сопротивления на кривой четко видно изменение величины функции против заданной ранее метки времени.

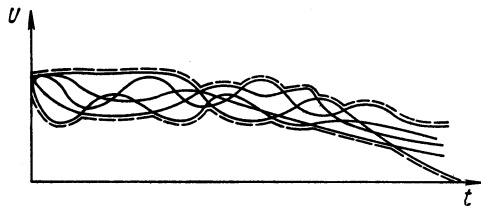


Рис. 3. Схема решения одной и той же задачи при вариации сопротивлений и емкостей

Наоборот, во втором примере изменение сопротивлений на 1% почти не скажется на решении, а изменение начальных напряжений на 1% резко изменит не только величину решения, но и его характер. На рис. 4, а, б и в показаны фотографии неустойчивых процессов, полученных на электроинтеграторе при периодическом повторении процессов.

То обстоятельство, что малая вариация параметров задачи сильно меняет решение, принято называть неустойчивостью задачи, и, по терминологии акад. Андропова, все динамические системы делятся на два больших класса: «грубые» (нечувствительные к малым вариациям коэффициентов и начальных или граничных условий) и «тонкие» (неустойчивые). Обычно в инженерной практике «тонкие» системы неприемлемы, так как малейшее колебание какого-либо инженерного параметра (например, массы тела за счет осевшей пылинки) может привести к значительному искажению спроектированного процесса.

Из этих соображений большим преимуществом электрических моделей является возможность экспериментального выяснения «грубости» или «точности» системы.

Следует обратить внимание на то, что, кроме неустойчивости физического процесса, свойственного самой задаче, может воз-

никнуть и неустойчивость решения, вызванная не самой задачей, а принятым алгоритмом или шагом решения. Эта неустойчивость не свойственна физической системе, а искусственно внесена в нее.

Однако неустойчивость решения весьма редко встречается при моделировании, чаще она встречается при приближенных методах математического решения (даже с помощью ЭЦВМ). Возможно, это объясняется произвольностью навязанной ЭЦВМ программы решения, в то время как на модели процесс протекает по наиболее экономным путям, выбираемым самой природой.

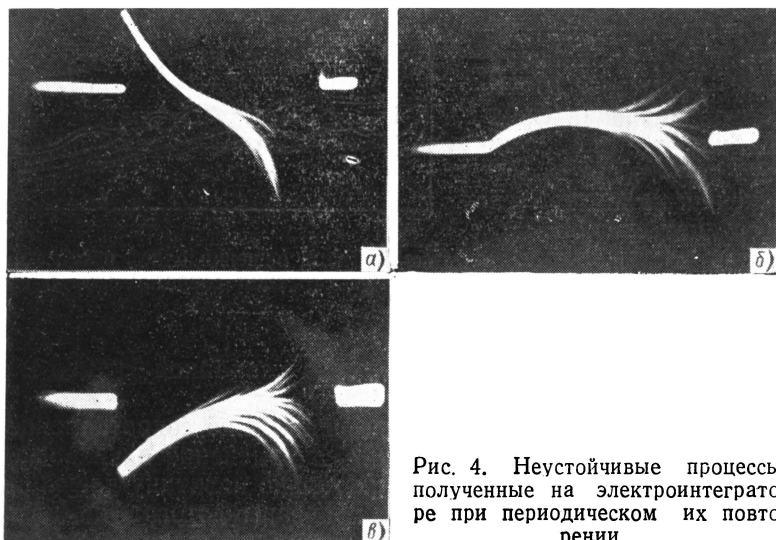


Рис. 4. Неустойчивые процессы, полученные на электронинтеграторе при периодическом их повторении

Для оценки порядка погрешности решения, полученного на электромодели, следует выяснить вариацией сопротивлений, емкостей и напряжений, принадлежит ли система к «грубому» или «тонкому» классу и если окажется, что система «грубая», то ее погрешность будет практически того же порядка, что и паспортная погрешность.

Если система окажется «тонкой», то от дальнейшего исследования можно отказаться, так как «тонкость» системы, вызывающая большие погрешности на модели (пример 2), и в натуре не будет давать определенного решения, а в зависимости от случайных флуктуаций (температуры, потенциала, веса, длины и т. п.) решение будет получаться сколь угодно отличающимся от требуемого.

Если все же требуется исследование линейной «тонкой» системы, то следует моделировать задачу не для заданной искомой

функции U , а для функции $U_1 = Ue^{-kt}$, причем коэффициент k надо принимать таким, чтобы функция U_1 сходилась в заданном интервале времени.

Таким образом, вместо интегрирования уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial U}{\partial t}$$

следует решить уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{k}{a^2} U,$$

а затем полученное решение умножить на e^{ht} .

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений для оценки полученной погрешности решения можно пустить процесс в обратном направлении, т. е. принять полученное решение в конце процесса за начальное условие, и, изменив знаки у нечетных производных, проследить за величинами искомых функций в момент, соответствующий начальным условиям предыдущей задачи.

В случае дифференциальных уравнений теории поля такое же преобразование можно использовать в случае моделирования на сетках RLC или при наличии отрицательных сопротивлений.

Приведем пример неустойчивой задачи фильтрации.

Пусть в квадрате $ABCD$ (рис. 5) имеются запасы нефти, которые разрабатываются закачкой воды или жидкого пропана в нагнетательную скважину, расположенную в точке A , с последующим отбором нефти через три эксплуатационные скважины в точках B , C и D . Заштрихованные области соответствуют остаточным нефтяным целикам. Штриховые линии — линии прорыва нагнетательной жидкости в эксплуатационные скважины; сплошные линии — границы вытекания нефти на различных этапах разработки.

Если вязкости нагнетаемой жидкости и пластовой нефти равны или незначительно отличаются друг от друга, процесс вытеснения нефти идет так, как это показано на рис. 5, *а*, т. е. наибольшая скорость вытеснения находится на сплошных прямых, соединяющих нагнетательную скважину с эксплуатационными.

В момент, когда нагнетаемая жидкость достигает скважин B и D , они перестают работать и дальнейший отбор производится через оставшуюся эксплуатационную скважину C .

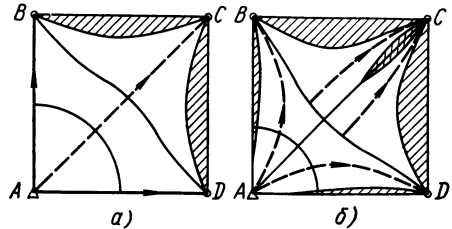


Рис. 5. Неустойчивая задача фильтрации

На рис. 5, б показан случай, когда вязкость нагнетаемой жидкости (пропана) значительно ниже вязкости пластовой нефти. В этом случае из-за микронеоднородности пласта в натуре или за счет дискретности сетки, которая моделирует данную задачу, может образоваться небольшой язык прорыва по случайному направлению. При равной вязкости жидкостей этот случайный прорыв в дальнейшем не будет развиваться, и граница выровняется. Если вязкость нагнетаемой жидкости значительно ниже вязкости нефти, то возникший язык прорыва будет лавинообразно развиваться, так как сопротивление фильтрации вдоль языка станет меньше, чем по соседним направлениям. Такое случайное появление языка приводит к тому, что нагнетаемая жидкость прорывается в эксплуатационные скважины не по прямым, соединяющим их с нагнетательной скважиной, а по случайным линиям, показанным на рис. 5, б штриховыми линиями со стрелкой.

Из-за лавинообразного развития прорыва по кривым линиям время прорыва сокращается и коэффициент охвата области разработкой уменьшается. Это видно из того, что остаточные целики нефти увеличились и, кроме того, появились дополнительные целики нефти в виде языков вдоль прямых линий тока, соединяющих нагнетательную скважину с эксплуатационными.

В этом практическом примере неустойчивость процесса и неустойчивость решения оказались идентичными, так как и в натуре и при моделировании на дискретной сетке могут возникнуть одни и те же причины искажения решения, а именно микронеоднородность пласта или неточность аппроксимации водонефтяного контакта.

Повторное решение той же задачи другим оператором может дать еще одно решение, отличающееся от предыдущего, так как другой оператор может аппроксимировать криволинейный водонефтяной контакт (ВНК) другой ступенчатой линией, что вызовет лавинообразный прорыв нагнетаемой жидкости в эксплуатационную скважину по иной линии.

Если вязкость нагнетаемой жидкости равна или больше вязкости пластовой нефти, все повторные решения различными операторами дадут один и тот же результат.

Приведенный выше пример интересен в том отношении, что он показывает неустойчивость задачи лишь в отношении скоростей фильтрации, а не потенциалов, а эта неустойчивость может стать заметной лишь после нескольких переборов ВНК, когда лавинообразный процесс достаточно разовьется.

Согласно вышеизложенному для «тонких» систем невозможно по величине погрешности, определенной по формуле (2), судить о том, получено неточное или неправильное решение.

Для «грубых» систем обычно принята практика оценки приближенного решения, как решения, отличающегося на единицы

(иногда десятки) процентов от точного, сохраняет свою силу и при моделировании.

Рассмотрим величину погрешности, причины ее появления и меры по ее уменьшению при моделировании «грубых» систем.

Метод электрического моделирования является экспериментальным методом решения и, как всякий экспериментальный метод, дает приближенное решение заданного уравнения, так как обеспечить в эксперименте абсолютно точное значение всех параметров (коэффициентов), входящих в уравнение, и всех потенциалов, соответствующих граничным и начальным условиям, а также абсолютно точное измерение искомым функций невозможно.

Все сопротивления, емкости и индуктивности изготавливаются с определенной степенью точности и могут быть набраны с определенным дискретным шагом (через 10%, 1,0%, 0,1% и т. д. от максимальной величины).

Выводы от делителей напряжения для задания граничных или начальных условий также делаются через определенный шаг (1%, 0,5% и т. д.).

Повышение точности изготовления элементов или дробление шага дискретности усложняет и удорожает оборудование и затягивает процесс решения.

С другой стороны, в инженерных задачах точность исходных условий невелика и добиваться задания коэффициентов с большой точностью нецелесообразно.

Не следует, например, добиваться, чтобы погрешность сопротивлений или других элементов модели была значительно меньше шага дискретности, так как необходимость округления коэффициента до значения, соответствующего имеющемуся в модели, внесет в решение погрешность значительно большую, чем погрешность от неточности изготовления сопротивлений.

Практически установлено, что дискретность в задании параметров задачи и в потенциалах находится в пределах 0,5—1,0%.

Все вспомогательные устройства (по выработке граничных и начальных условий, измерению и т. п.) имеют погрешность того же порядка и это не вызывает трудностей в их разработке и изготовлении.

Погрешность решения задач на электроинтеграторах зависит не только от погрешности в изготовлении элементов модели, но и от других причин.

Все причины, вызывающие погрешности, можно классифицировать следующим образом:

1. Упрощение первоначального уравнения с целью доведения его до типа, решаемого на интеграторе.

2. Замена дифференциального уравнения конечно-разностным.

3. Дискретность задания параметров модели и потенциалов, соответствующих коэффициентам уравнения и начальным и гра-

ничным условиям, погрешность в изготовлении сопротивлений и емкостей и ограниченная мощность источников питания.

4. Неточность вырабатываемых на модели функций времени.

5. Погрешность измерительных устройств.

6. Несоответствие методики постановки данной задачи на модели с требуемой точностью искомым величин (при моделировании бесконечных областей на ограниченных моделях, при моделировании в декартовой системе координат криволинейных областей, при моделировании сплошной среды дискретной сеткой вблизи от особых точек, неправильный выбор масштабов независимых и искомым переменных и т. п.).

7. Погрешность обработки полученных результатов.

При этом та или иная причина может доминировать в зависимости от типа поставленной задачи и от того, что является искомой функцией.

Обычно погрешность различных функций, получаемых на модели, бывает не одинаковой.

Так, иногда потенциал определяется с большей точностью, чем градиент потенциала, особенно если учесть, что абсолютная величина потенциала почти всегда больше, чем градиент, и, следовательно, ближе к 100% шкалы масштабов.

Не следует также забывать, что погрешность решения в различные моменты процесса может меняться и поэтому следует изучать погрешность в границах изменения координат и времени, требуемых по постановке задачи.

Правомерность упрощения начальных дифференциальных уравнений и замены их конечно-разностными, а также оценка вызываемой этими причинами погрешности является чисто математическими задачами, решение которых нашло отражение в работах Панова [10], Коллатца [8], Шура-Бура [11].

В общем виде определение этой погрешности связано с большими трудностями, так как она оценивается с помощью линейной комбинации максимальных значений модулей старших производных.

В задачах фильтрации, описываемых уравнением типа Лапласа в многосвязной области, амплитудные значения производных находятся вблизи от границ (скважин) в однородной среде, а в неоднородной среде амплитудные значения могут возникать и в тех районах, где резко меняется параметр, соответствующий сопротивлению фильтрации. Однако в большинстве случаев эти амплитудные значения меньше, чем у контура скважин, и поэтому оценка погрешности у контура скважин помогает оценить погрешности решения со значительным превышением (в 5—10 раз) относительно средней погрешности решения по всей моделируемой области.

Оценка этой экспериментальной погрешности может быть произведена путем замера градиентов потенциала и потенциала

в клетках, граничащих со «скважиной», и сравнением полученных результатов с расчетными потенциалами и градиентами потенциала на продолжении осесимметричного течения у стенок скважин (расчет по формуле Дюпюи).

Повторным набором сопротивлений, многократными замерами, использованием различных измерительных устройств и заданием граничных условий делителями можно найти средневзвешенное значение потенциалов и градиентов потенциала по модели вблизи скважин и тем самым исключить погрешность, связанную с дискретностью узлов интеграторов и измерительных устройств, и выделить погрешность, связанную заменой дифференциальных уравнений конечно-разностными.

В ряде задач фильтрации нефти в подземном резервуаре нами были получены следующие значения этой погрешности.

По давлениям

В ближайшей к скважине клетке погрешность приблизительно равна 2,5%, причем по диагонали метод конечных разностей дает завышенное значение, а по стороне — заниженное. Во второй клетке погрешность получается приблизительно 0,8%, в более удаленных 0,3—0,1%.

По градиентам

В двух ближайших к узлу клетках погрешность равна приблизительно 2,5—4,0%, в более удаленных клетках 0,4—1,8%.

Повышенное значение погрешности по градиентам объясняется тем, что разница решений (теоретического и модельного) относилась к максимальному значению давления или градиента, полученного на модели, а максимум градиентов значительно ниже, чем для давлений.

Особенно большие погрешности следует ожидать при малом количестве шагов модели между двумя особыми точками (скважинами). В этом случае логарифмический закон изменения потенциалов между скважинами будет нарушен и если граничные условия в скважинах будут одинаковы, а расстояние между ними будет составлять лишь одну сторону клетки, то вместо седлообразного изменения потенциала будем иметь горизонтальную прямую.

Для оценки погрешности, вызванной заменой дифференциальных уравнений конечно-разностными, можно воспользоваться известными в математике методами [11], принимая за максимальные значения модули старших производных, полученные на модели вблизи особых точек, границ области или на границах неоднородностей.

Для определения этих старших производных на модели можно воспользоваться формулами Панова [10] или других авто-

ров [8] для вычисления производных по известным конечным разностям.

Влияние дискретности и неточности задания параметров модели и потенциалов, а также неточности вырабатываемых функций времени может быть оценено с помощью вариации этих параметров и потенциалов на минимальную величину шага дискретности, допускаемую моделью.

Погрешность измерительных устройств может быть оценена и повышена предварительной градуировкой шкалы и составлением поверочной таблицы.

Следует обращать внимание на подбор сопротивлений, обеспечивающих масштабные коэффициенты измерителя, и проведение замеров на масштабах, дающих, по крайней мере, два точных знака.

Наиболее значительными и трудно поддающимися учету являются погрешности, вызванные недостаточно квалифицированной постановкой задачи, т. е. несоответствием методики моделирования существу задачи. Почти каждая задача требует самостоятельного продумывания методов ее моделирования с учетом погрешности исходных данных, требуемой точности решения и необходимых замеров.

Можно дать некоторые практические рекомендации, безусловное выполнение которых будет содействовать повышению точности решения задач фильтрации:

1. Необходимо использовать весь диапазон набора сопротивлений и максимально допустимое значение потенциалов 100%.

2. При моделировании скважин включаются дополнительные сопротивления, отражающие призабойное сопротивление и несовершенство скважин.

На модели целесообразно принимать за 100% разность потенциалов не между «забоями» скважин, а между узлами модели, в которые включены эти сопротивления. При значительном несовершенстве скважин это помогает снизить погрешность решения в 2—3 раза. Полный перепад давления при этом измеряется по частям, а затем суммируется.

3. При наличии криволинейных или неортогональных границ следует размещать модель так, чтобы наклонные или ступенчатые границы попадали в те области модели, где ожидаются наименьшие градиенты потенциалов или где не требуется производить замеров.

4. В тех случаях, когда это возможно, следует моделировать симметричные области или создавать искусственно симметрию, отражая зеркально задачу, относительно одной из прямолинейных границ, что позволит выявить случайные неполадки или ошибки в наборе сетки.

5. При замерах всего поля градиентов следует иметь в виду, что в случае однородной среды значения градиентов изменяются

плавно и амплитудные значения чаще всего наблюдаются вблизи скважин и границ области, а также в районах сниженных поперечных сечений трубок тока.

Для контроля отсутствия случайных обрывов сопротивлений сетки можно строить зависимости $\Delta U = f(x)$, где ΔU — составляющая градиента потенциала в направлении x ; соединяя концы векторов ΔU , получаем плавную линию. Резкие скачки значений ΔU в соседних точках, выпадающие из плавной линии, показывают места обрывов или неправильных наборов сопротивлений.

Этот метод, названный нами «Методом спрямления касательных», позволяет обнаруживать неисправности модели без перебора сетки или граничных условий.

6. В местах, где градиенты потенциала принимают большие значения или где направление векторов градиента резко меняется, следует поставить электrolупу или произвести раздельное моделирование в более крупном масштабе, используя данные основной модели для задания граничных условий.

7. Для повышения точности результата в случае, когда моделируемые расстояния между скважинами имеют одновременно малые и большие значения, целесообразно применить метод суперпозиции и производить моделирование в разных масштабах.

8. Для оценки точности моделирования бесконечных или очень больших полей на ограниченных интеграторах (когда вне области, уместающейся на интеграторе, не имеется источников или стоков) следует произвести моделирование дважды: при удвоенных граничных сопротивлениях и при граничных сопротивлениях, замкнутых накоротко. Разница в решениях, полученных по этому методу, в любой точке модели, в любой момент времени будет больше погрешности решения за счет ограниченности сетки.

9. Для повышения точности определения градиентов потенциала в неоднородных средах целесообразно пользоваться методом расчета сопротивлений, описанным в работе [7]. Там же описана специальная линейка, облегчающая и ускоряющая процессы построения векторов скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быховский М. Л. Точность электрических сеток, предназначенных для решения уравнения Лапласа. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1950, № 4, стр. 489—526.

2. Быховский М. Л. Точность электрических сеток, предназначенных для решения уравнения Пуассона. В сб. «Точность механизмов и машин». Труды семинара по точности механизмов и машин, вып. 4, 1952, стр. 3—55.

3. Быховский М. Л. Основы динамической точности электрических и механических цепей, М., Изд. АН СССР, 1958, стр. 360.

4. Волынский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960, стр. 181—184, 391.

5. Гутенмахер Л. И. Электрические модели. М., Изд-во АН СССР, 1949, стр. 388.

6. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 1—461.

7. Коган Л. Г. Определение фильтрационных потоков в неоднородных средах на электроинтеграторах и расчет сопротивления сеток. В сб. «Вопросы теории и применения математического моделирования». М., «Сов. радио», 1965, стр. 415—432.

8. Коллатц Л. Н. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М., Изд. иностр. лит., 1953, стр. 278, 298.

9. Николаев Н. С., Козлов Э. С., Полгородник Н. П. Аналоговая машина УСМ-1 для решения задач уравнений математической физики. М., Машгиз, 1962, стр. 158, 161, 164.

10. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. М., Гостехиздат, 1951, стр. 73.

11. Шур-Бура М. Р. Вероятностная оценка погрешности в решении системы конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих задачу Дирихле для уравнения Лапласа на электрических сетках. Известия АН СССР, т. XXVIII, № 1, 1951, стр. 21—24.

Λ Λ Λ

*А. Н. Резников, А. В. Темников,
В. В. Басов, Б. М. Гаврилов*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНАЛОГОВЫХ И КВАЗИАНАЛОГОВЫХ СЧЕТНО-РЕШАЮЩИХ УСТРОЙСТВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕПЛОФИЗИКИ ПРОЦЕССА ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ РЕЗАНИЕМ

По современным представлениям, тепло, которое образуется в зоне резания, оказывает первостепенное влияние на стойкость и износ инструмента. С температурой резания связаны термические деформации инструмента, влияющие на точность обработки изделий.

В связи с этим задача определения температурных полей в зоне резания, выявление направления и интенсивности тепловых потоков приобретает большое значение при проектировании прогрессивных конструкций инструмента и при разработке режимов резания.

В настоящее время для изучения тепловых явлений, возникающих при резании металлов, применяются теоретические и экспериментальные методы исследования. Однако в ряде случаев применение чисто аналитических или экспериментальных методов не позволяет решать задачи с необходимой полнотой (например, задачи по алмазным режущим инструментам трудно решать чисто аналитически, что связано с концентрацией тепла в очень малой области кристалла и со специфическими свойствами алмаза).

Большую пользу для анализа тепловых явлений при резании металлов могут оказать счетно-решающие устройства, основанные на электро моделировании температурных полей. Применительно к резанию металлов метод электро моделирования обладает следующими преимуществами:

1. Имеется возможность сравнительно быстро получить наглядную картину температурных полей с точностью, вполне достаточной для инженерной практики.

2. Сложные тепловые процессы, происходящие в зоне резания, удается расчленить на отдельные составляющие и исследовать влияние отдельных факторов на процесс теплообмена.

3. Применение при моделировании теории подобия и безразмерных величин облегчает обобщение данных эксперимента на различные случаи резания.

В процессе резания различают стационарный и нестационарный периоды теплообмена и в соответствии с этим стационарный и нестационарный методы электромоделирования.

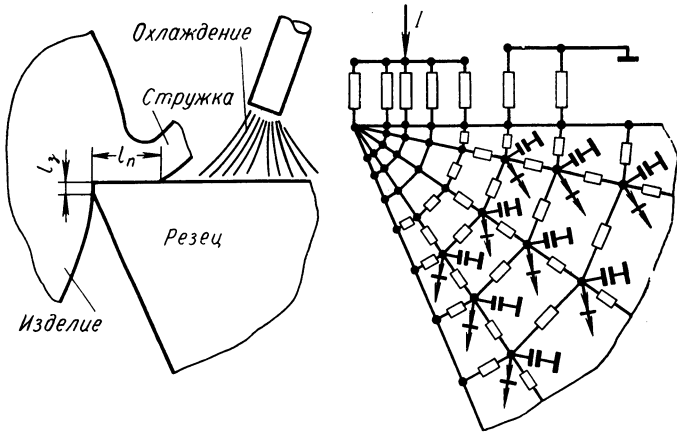


Рис. 1. Схема процесса резания и модель режущего инструмента для моделирования нестационарных процессов теплопроводности

Эти методы рассмотрим на примере работ, выполненных в научно-производственной инструментальной лаборатории (НПИЛ) Куйбышевского политехнического института.

Моделирование стационарных температурных полей в НПИЛ осуществлялось на модели из электропроводной бумаги на интеграторе ЭГДА-9/60 и на машине МСМ-1, а моделирование нестационарных полей — на RC-сетках.

Наибольший интерес представляет изучение закономерностей распространения тепла в зоне, непосредственно примыкающей к режущей кромке инструмента. Поэтому при разбивке инструмента на участки шаг сетки у режущей кромки выбирался значительно меньшим, чем на удалении от нее, что позволяло получать подробную картину температурного поля в интересующей нас области. Пример построения модели охлаждаемого плоского резца для изучения нестационарных процессов теплопроводности показан на рис. 1.

В процессе резания на контакте стружки, изделия и резца выделяется тепловая энергия, а на охлаждаемом участке тепло

отводится охлаждающей средой. На электрической модели нагрев резца имитируется заданием электрических токов I , а отвод тепла по закону Ньютона — подключением сопротивлений к нулевой шине модели. Решение задачи о температурном поле в резце производится при граничных условиях II и III рода. При этом решение задачи с охлаждением резца получается более удобным, если задавать граничные условия только на одном участке (рис. 2)

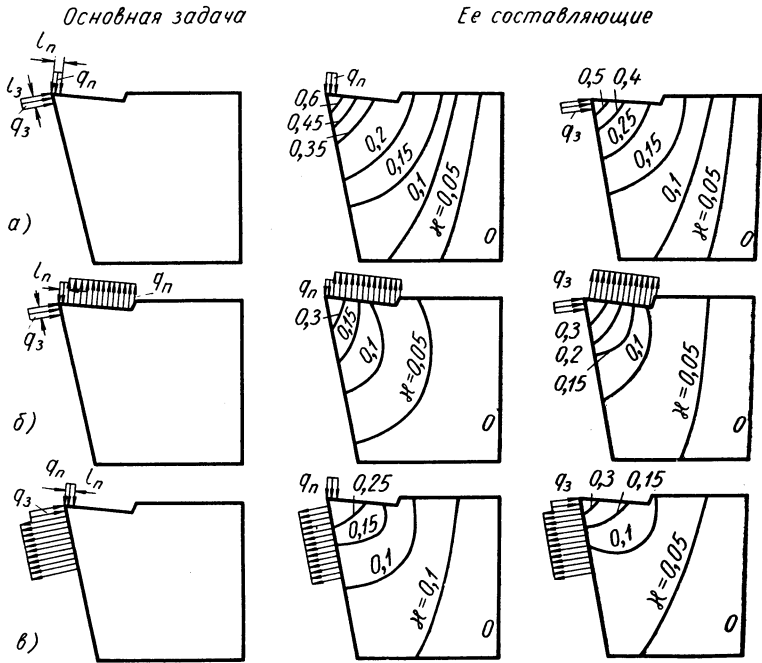


Рис. 2. Применение принципа суперпозиции при моделировании тепловых процессов в резцах:

a — резец не охлаждается; *б* — резец охлаждается по передней поверхности; *в* — резец охлаждается по задней поверхности

и моделировать их отдельно, а затем применять метод суперпозиции. В этом случае решение можно использовать для нахождения температурных полей при любых соотношениях q_n/q_3 .

На рис. 2 приведены температурные поля в виде безразмерных изотермических линий χ , которые соответствуют равным относительным температурам. Решение задачи при действии нескольких источников q_n и q_3 получается наложением полей.

Методом электромоделирования могут быть изучены условия распространения тепла в составных инструментах, изготовленных из различных материалов. Особенность электромоделирования

температурных полей в этих инструментах состоит в том, что модели пластины и державки изготавливаются из сопротивлений разной электропроводности.

Некоторые результаты моделирования температурных полей в составных резцах приведены на рис. 3. Поля построены при

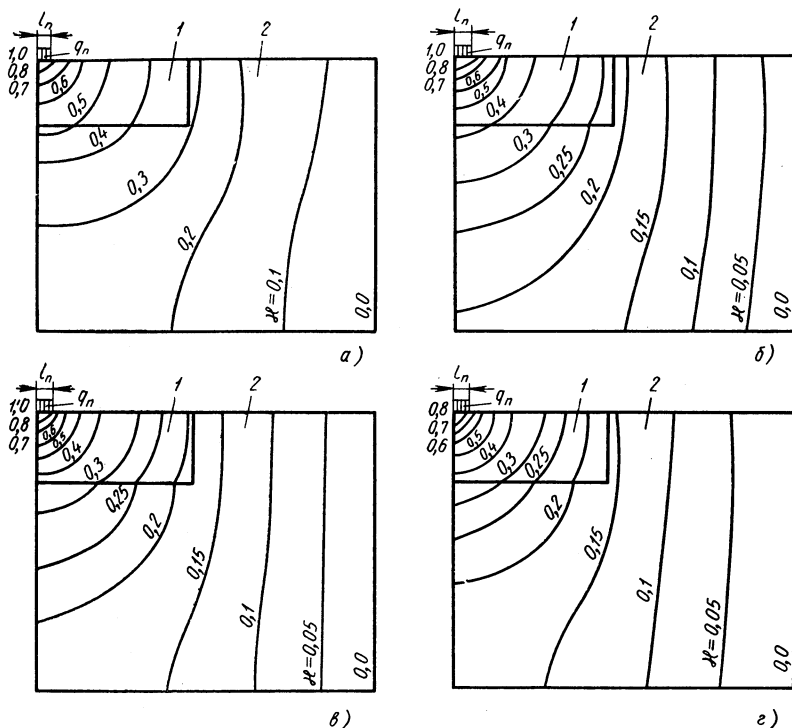


Рис. 3. Результаты моделирования температурных полей в составных резцах:

1 — пластина; 2 — державка; а — $\frac{\lambda_n}{\lambda_d} = 1,41$; б — $\frac{\lambda_n}{\lambda_d} = 0,82$; в — $\frac{\lambda_n}{\lambda_d} = 0,65$;
 г — $\frac{\lambda_n}{\lambda_d} = 0,57$

различных соотношениях коэффициентов теплопроводности пластины и державки $\frac{\lambda_n}{\lambda_d}$

Особый интерес представляет изучение распределения температуры в объемных инструментах. Для этой цели в лаборатории была построена специализированная объемная модель резца. В каждую узловую точку модели подключалась емкость. Безразмерное температурное поле в объемном инструменте при нестационарном теплообмене приведено на рис. 4, а.

При электро моделировании необходимо быстро и надежно измерить электрические потенциалы, меняющиеся во времени.

По предложению инж. М. Я. Лихциндера, была изготовлена приставка для периодизации процесса задания граничных условий II рода и измерения нестационарных напряжений в узловых точках модели. Схема приставки показана на рис. 5. Приставка состоит из следующих основных блоков: синхронизатора-периодизатора (а), измерительного устройства (б), стабилизированного источника питания (в).

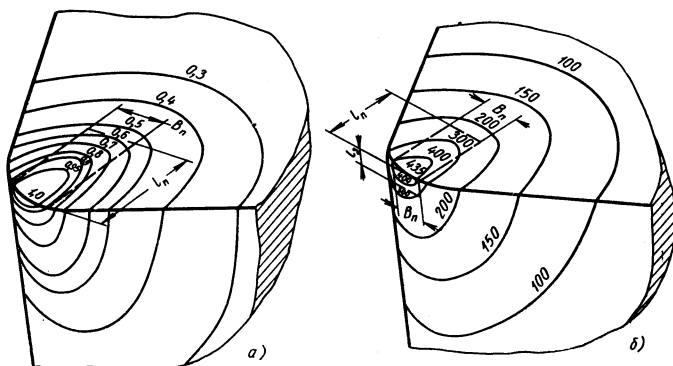


Рис. 4. Температурные поля в алмазных резцах:
 а — безразмерное температурное поле, источник нагрева расположен по передней поверхности; б — температурное поле в резце (скорость резания $v = 160$ м/мин, подача $s = 0,028$ мм/об, глубина $t = 0,04$ мм)

Цикл решения состоит из рабочего времени и паузы. Во время рабочего цикла происходит решение задачи. За время паузы к конденсаторам модели подключаются диодные разрядники, которые, разряжая конденсаторы, возвращают модель в исходное состояние.

Измерительное устройство служит для измерения мгновенных значений экспоненциальных напряжений в узлах модели. Устройство работает на принципе сравнения двух встречно включенных источников напряжения, одним из которых является измеряемое напряжение U_x , а другим — опорное напряжение U , снимаемое с делителя.

Используя описанную приставку, можно получить картину потенциалов на модели в течение времени от 0,01 до 1,0 сек.

Рассмотрим вопрос о переходе от безразмерных величин к размерным для конкретных условий резания. При этом необходимо учитывать не только поле в резце, но и тепловые процессы в стружке и изделии. Это можно сделать двумя способами: а) сочетанием аналитических расчетов по определению температурных полей в стружке и изделии с методом электро моделирования;

б) комплексным электро моделированием тепловых процессов во вращающемся изделии, сходящей стружке и неподвижном резце.

Остановимся на первом из упомянутых методов. Суть этого метода исследований состоит в том, что температурные поля в стружке и изделии рассчитываются аналитически, а температурные поля в резцах определяются по результатам электро моделирования. Затем предполагается, что на контактных поверх-

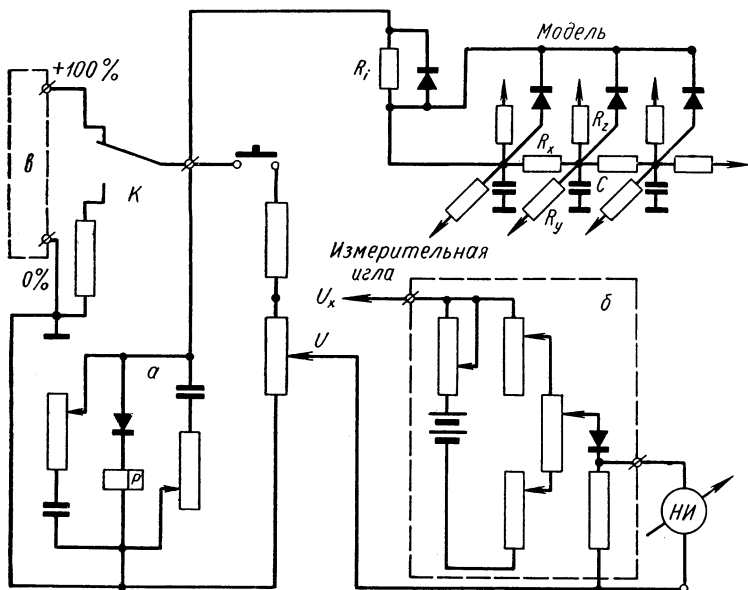


Рис. 5. Схема приставки к RC -сетке для периодизации процесса задания граничных условий и измерения нестационарных напряжений в узловых точках модели

ностях резца, стружки и изделия отсутствует температурный скачок. На рис. 4, б показано температурное поле в алмазном резце, полученное методом сочетания аналитических расчетов с результатами электро моделирования. Этот метод является пока наиболее эффективным при изучении тепловых явлений, возникающих при алмазном точении.

Метод изучения тепловых явлений, происходящих в зоне резания с помощью комплексного моделирования температур в стружке, резце и изделии производится в подвижной системе координат, связанной с движущимися теплоисточниками. Аналоговые методы моделирования температур в подвижной системе координат при очень больших скоростях движения теплоисточников практически непригодны. Поэтому А. В. Темниковым был предложен и использован метод моделирования.

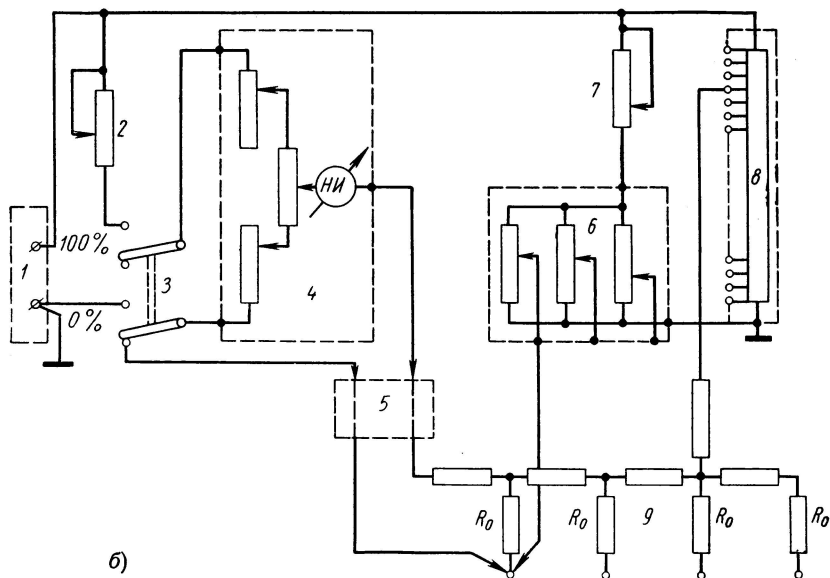
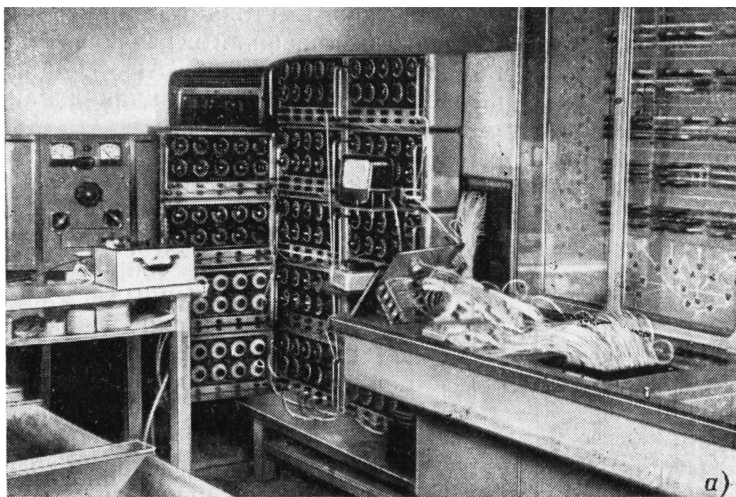


Рис. 6. Квазианалоговый интегратор СКАИ с ручным уравновешиванием:

a — общий вид интегратора; *b* — принципиальная схема; 1 — источник питания; 2 — сопротивление установки базы; 3 — переключатель рода работ; 4 — измерительное устройство; 5 — коммутатор опроса точек; 6 — блок потенциометров; 7 — реостат установки электрического уровня потенциометров; 8 — делитель истоков; 9 — модель

Для реализации квазианалогового метода в лаборатории разработана конструкция специализированного квазианалогового интегратора с ручным уравниванием СКАИ. Общий вид электроинтегратора приведен на рис. 6, а, принципиальная схема — на рис. 6, б.

Модель набирается на сетке МСМ-1. Теплопроводность, как и при решении уравнения Пуассона, имитируется электропроводностью сетки. Движение среды имитируется специальными сопротивлениями R_0 , включенными в каждый узел модели движущейся среды.

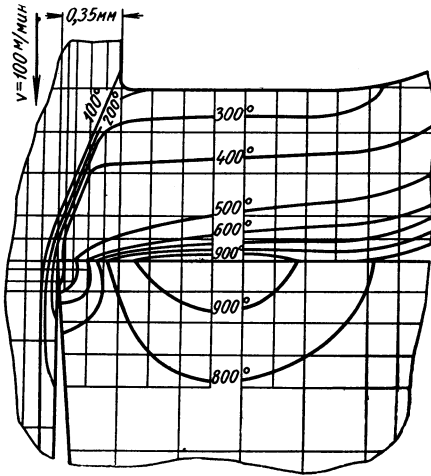


Рис. 7. Температурное поле в зоне резания при точении (материал изделия ШХ-15, материал резца Т14К8)

На свободные концы сопротивлений от группы потенциометров подаются потенциалы, которые согласно методу равны потенциалам в соседних узлах по ходу движения теплоисточника. Граничные условия II рода (мощность теплоисточников) задаются через большие сопротивления истоков. Уравнивание потенциалов производится последовательно от узла к узлу методом итерации. Для измерения потенциалов применяется измерительное устройство ИУ компенсационного типа. Гальванометр измерительного устройства используется также в качестве нуль-индикатора при выполнении уравнивания.

Для измерения потенциалов применяется измерительное устройство ИУ компенсационного типа. Гальванометр измерительного устройства используется также в качестве нуль-индикатора при выполнении уравнивания.

На рис. 7 показано температурное поле, полученное квазианалоговым методом, в зоне резания при точении.

С помощью квазианалогового метода был также исследован тепловой баланс в зоне резания и получена картина распределения тепловых потоков на гранях раздела резец — стружка, резец — изделие, изделие — стружка.

Полученные при моделировании картина температурного поля и тепловой баланс хорошо согласуются как качественно, так и количественно с данными других исследователей [1, 2].

Разработанные в лаборатории устройства и методы аналогового и квазианалогового моделирования могут быть использованы не только для исследования теплофизики процесса резания, но и для решения ряда задач теплофизики других технологических процессов, таких, как штамповка, прессование, сварка и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Резников А. Н. Теплообмен при резании и охлаждении инструментов. М., Машгиз, 1963, стр. 67—118.
2. Цлаф М. Я. Количество теплоты, отводимой через резец при резании металлов. «Сборник научных трудов Куйбышевского индустриального института». Вып. V. Изд. Куйбышевского индустриального института, 1955, стр. 118—132.

*А. В. Темников, Б. М. Гаврилов,
Н. В. Дилигенский*

КВАЗИАНАЛОГОВЫЕ МЕТОДЫ ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ В ТЕПЛОМ КОНТАКТЕ

Исследования краевых задач контактного теплообмена при относительном перемещении тел имеют большое теоретическое и практическое значение, особенно в области теплофизики механической обработки деталей, теплофизики сварки, наплавки и ряда других технологических процессов. С изучением таких задач тесно связаны также вопросы расчета износа деталей машин. Аналитическое решение указанных задач связано с большими математическими трудностями и проводится лишь приближенно с использованием метода Иегера, в основе которого лежит положение о равенстве температур на площадке контакта двух тел.

Задачи контактного теплообмена в телах, находящихся в относительном движении, можно исследовать и методами электрического моделирования. При этом удается обеспечить равенство температур в соответствующих точках на поверхности контакта, а также моделировать теплообмен с учетом контактного сопротивления.

При использовании этих методов моделирование одного из двух контактирующих тел необходимо производить в подвижной системе координат.

Предложенные В. Пашкисом [8], Л. А. Коздобой и В. И. Махненко [1] аналоговые методы электро моделирования температурных полей в подвижной системе координат имеют следующие существенные ограничения:

1. При больших скоростях движения теплоисточника (больших числах Пекле $Pe = \frac{vR}{a}$) эти методы практически неприемлемы либо из-за необходимости иметь слишком мелкую сетку, либо из-за больших относительных погрешностей измерения потенциа-

лов на моделях, что связано с резким убыванием по координате вспомогательной функции, применяемой в этих методах.

2. Методы применимы лишь в случае постоянства коэффициента температуропроводности.

3. Вектор скорости принимается постоянным, не зависящим как от координат, так и от времени. В связи с этим указанные аналоговые методы не могут быть использованы для моделирования температур во вращающихся деталях или при течении жидкости в каналах переменного сечения.

Значительные трудности при больших числах Pe возникают также при использовании аналогового метода «согласования» сопротивлений, предложенного Джонсоном и Сорокой [6], [9].

Большие перспективы для моделирования краевых задач контактного теплообмена при относительном перемещении тел имеют квазианалоговые методы, общая теория которых разработана чл.-кор. АН УССР Г. Е. Пуховым [5].

Авторами разработаны и внедрены квазианалоговые методы моделирования явлений контактного теплообмена с учетом зависимости теплофизических параметров от температуры. Предложенные квазианалоговые методы свободны от перечисленных выше ограничений аналоговых методов.

Математически краевая задача о контактном теплообмене при относительном перемещении двух тел и в случае зависимости теплопроводности от температуры формулируется в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

1. Дифференциальное уравнение теплопроводности для тела, связанного с подвижной системой координат (движущегося с теплоисточником), можно записать в виде

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial F_{01}} = A_1(\theta_1) [\nabla^2 \theta_1 + p_0^*] \quad (1)$$

при соответствующих начальных и граничных условиях (исключая условия на площадке контакта) [5].

2. Дифференциальное уравнение теплообмена Фурье-Кирхгофа для тела, перемещающегося относительно подвижной системы координат, имеет вид

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial F_{02}} + Pe^{(1)} \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi_1} + Pe^{(2)} \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi_2} + Pe^{(3)} \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi_3} = A_2(\theta_2) [\nabla^2 \theta_2 + p_0^*] \quad (2)$$

при соответствующих начальных и граничных условиях (исключая условия на площадке контакта).

3. Граничные условия на площадке контакта двух тел записываются в следующем виде:

$$v_1(\theta_1) = v_2(\theta_2); \quad (3)$$

$$-\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right)_w = -\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\right)_w + K_i^* \quad (4)$$

В этих уравнениях:

$$\theta = \frac{\Phi_1 - \Phi_{10}}{\Phi_{1M} - \Phi_{10}} \text{ — безразмерный тепловой потенциал } \Phi;$$

$$\Phi = \int_{t_0}^t \lambda(t) dt + \Phi_0 \text{ — аналог Г. А. Варшавского;}$$

$$t \text{ — температура;}$$

$$\Phi_{1M} - \Phi_{10} \text{ — масштабная разность потенциалов } \Phi;$$

$$F_{01} = \frac{a_{01}\tau}{R^2} \text{ — число Фурье;}$$

$$P_0^* = \frac{q_v R^2}{\Phi_{1M} - \Phi_{10}} \text{ — аналог критерия Померанцева;}$$

$$A_1 = \frac{a_1}{a_{01}} \text{ — безразмерная теплопроводность;}$$

$$\theta_2 = \frac{\Phi_2 - \Phi_{10}}{\Phi_{1M} - \Phi_{10}}; \quad F_{0,2} = \frac{a_{0,2}\tau}{R^2}; \quad v = \frac{t - t_0}{t_M - t_0} \text{ —}$$

$$\text{безразмерная температура;}$$

$$t_M - t_0 \text{ — масштабная разность температур;}$$

$$K_i^* = \frac{qR}{\Phi_{1M} - \Phi_{10}} \text{ — аналог критерия Кирпичева;}$$

$$\kappa = \frac{n}{R} \text{ — безразмерная нормаль;}$$

$$R \text{ — характерный размер.}$$

Если q_i — криволинейная ортогональная координата ($i = 1, 2, 3$) имеет размерность длины, то $\psi_i = \frac{q_i}{R}$ — число Пекле $Pe^{(i)} = \frac{v_i R}{a_{02}}$; $v_i = H_i$ (где H_i — коэффициент Ламе); если q_i безразмерно, то

$$\psi_i = q_i; \quad Pe^{(i)} = \frac{v_i R^2}{a_{02}};$$

$$v_i = \frac{H_i}{R}; \quad v_i = \frac{dq_i}{d\tau};$$

$$A_2 = \frac{a_2}{a_{02}}; \quad \nabla^2 \theta = \frac{1}{v_1 v_2 v_3} \left[\frac{\partial}{\partial \psi_1} \left(\frac{v_2 v_3}{v_1} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \psi_2} \left(\frac{v_3 v_1}{v_2} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi_3} \left(\frac{v_1 v_2}{v_3} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_3} \right) \right]$$

— лапласиан в криволинейной ортогональной системе координат.

Уравнение (1) моделируется обычными аналоговыми методами. В уравнении (2) аналоговыми методами может быть смоделирован лишь первый член в левой части и правая часть. В целом для моделирования уравнения (2) нельзя построить анало-

говую модель на сетках из омических сопротивлений, поэтому используем приемы квазианалогового моделирования.

Представим уравнение (2) в дискретной форме для узла сетки (i, j, k) , изображенного на рис. 1, а.

$$\begin{aligned}
 & \frac{v_1(i, j, k) v_2(i, j, k) v_3(i, j, k) (\Delta\psi_{11} + \Delta\psi_{12}) (\Delta\psi_{21} + \Delta\psi_{22}) (\Delta\psi_{31} + \Delta\psi_{32})}{2A \left(\frac{\theta_{i, i, k, n} + \theta_{i, j, k, n-1}}{2} \right)} \times \\
 & \times \left(\frac{\theta_{i, j, k, n} - \theta_{i, j, k, n-1}}{P} + \frac{\theta_{i+1, j, k, n} - \theta_{i, j, k, n}}{\frac{\Delta\psi_{12}}{Pe^{(1)}}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\theta_{i, j+1, k, n} - \theta_{i, j, k, n}}{\frac{\Delta\psi_{22}}{Pe^{(2)}}} + \frac{\theta_{i, j, k+1, n} - \theta_{i, j, k, n}}{\frac{\Delta\psi_{32}}{Pe^{(3)}}} \right) = \\
 & = \frac{\theta_{i+1, j, k, n} - \theta_{i, j, k, n}}{v_1\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) \frac{\Delta\psi_{12}}{v_2\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) v_3\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) (\Delta\psi_{21} + \Delta\psi_{22}) (\Delta\psi_{31} + \Delta\psi_{32})}} + \\
 & + \frac{\theta_{i-1, j, k, n} - \theta_{i, j, k, n}}{v_1\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right) \frac{\Delta\psi_{11}}{v_2\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right) v_3\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right) (\Delta\psi_{21} + \Delta\psi_{22}) (\Delta\psi_{31} + \Delta\psi_{32})}} + \\
 & + \frac{\theta_{i, j+1, k, n} - \theta_{i, j, k, n}}{v_2\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) \frac{\Delta\psi_{22}}{v_3\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) v_1\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) (\Delta\psi_{11} + \Delta\psi_{12}) (\Delta\psi_{31} + \Delta\psi_{32})}} + \\
 & + \frac{\theta_{i, j-1, k, n} - \theta_{i, j, k, n}}{v_3\left(i, j - \frac{1}{2}, k\right) \frac{\Delta\psi_{21}}{v_1\left(i, j - \frac{1}{2}, k\right) v_2\left(i, j - \frac{1}{2}, k\right) (\Delta\psi_{11} + \Delta\psi_{12}) (\Delta\psi_{31} + \Delta\psi_{32})}} + \\
 & + \frac{\theta_{i, j, k+1, n} - \theta_{i, j, k, n}}{v_3\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta\psi_{32}}{v_1\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) v_2\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) (\Delta\psi_{11} + \Delta\psi_{12}) (\Delta\psi_{21} + \Delta\psi_{22})}} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\theta_{i,j,k-1,n} - \theta_{i,j,k,n}}{\sqrt[3]{\left(i,j,k-\frac{1}{2}\right)}} + \\
 & \frac{\Delta\psi_{31}}{\sqrt[3]{\left(i,j,k-\frac{1}{2}\right)} \sqrt[2]{\left(i,j,k-\frac{1}{2}\right)}} \cdot \frac{\Delta\psi_{11} + \Delta\psi_{12} (\Delta\psi_{21} + \Delta\psi_{22})}{\Delta\psi_{11} + \Delta\psi_{12} (\Delta\psi_{21} + \Delta\psi_{22})} \\
 & + \sqrt[3]{i,j,k} \sqrt[2]{i,j,k} \sqrt[3]{i,j,k} (\Delta\psi_{11} + \Delta\psi_{12}) (\Delta\psi_{21} + \Delta\psi_{22}) (\Delta\psi_{31} + \Delta\psi_{32}) P_{0(i,j,k,n)}^*
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $P = \Delta F_0$ — шаг безразмерного времени.

Обозначим через $\bar{U} = \frac{U - U_0}{U_M - U_0}$ безразмерный электрический потенциал, $U_M - U_0$ — масштабную разность потенциалов и составим сетку из омических сопротивлений, типовой узел которой изображен на рис. 1, б.

Записывая первый закон Кирхгофа для узла (i, j, k) в безразмерной форме при условии равенства потенциалов

$\bar{U}_1 = \bar{U}_{i+1,j,k,n}$; $\bar{U}_2 = \bar{U}_{i,j+1,k,n}$; $\bar{U}_3 = \bar{U}_{i,j,k+1,n}$ и сопоставляя полученное при этом выражение с уравнением (5), получим формулы для расчета сопротивлений сетки в ортогональной криволинейной системе координат.

Для декартовой системы координат (x, y, z) , полагая

$$\begin{aligned}
 v_1 = v_2 = v_3 = 1; \quad \psi_1 = \\
 = \frac{x}{R} = \xi;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_2 = \frac{y}{R} = \eta; \quad \psi_3 = \frac{z}{R} = \zeta; \\
 \Delta\psi_1 = h_\xi; \quad \Delta\psi_2 = h_\eta; \quad \Delta\psi_3 = h_\zeta; \\
 2A(\theta) \\
 N_1 = \frac{1}{(h_{1\xi} + h_{2\xi})(h_{1\eta} + h_{2\eta})(h_{1\zeta} + h_{2\zeta})},
 \end{aligned}$$

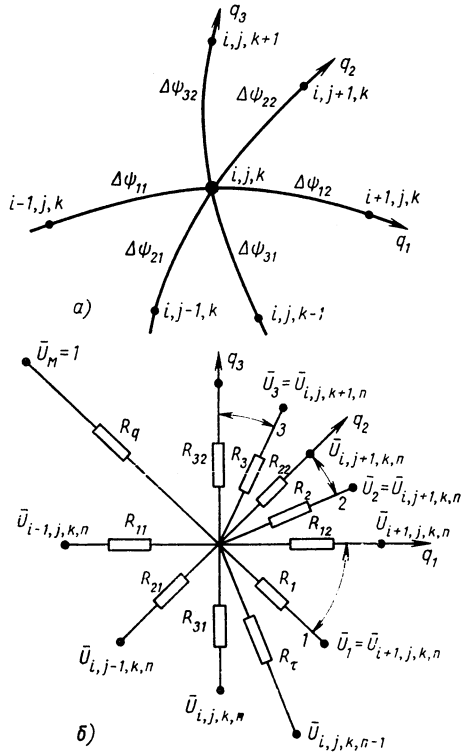


Рис. 1. Принцип моделирования уравнения Фурье — Кирхгофа:

а — схема узла сетки; б — элемент электрической сетки для узла i, j, k

получим следующие формулы для сопротивлений:

$$\left. \begin{aligned}
 R_\tau &= PN_1 R_M; \\
 R_1 &= -\frac{h_{2\xi}}{Pe^{(1)}} N_1 R_M; \\
 R_2 &= -\frac{h_{2\eta}}{Pe^{(2)}} N_1 R_M R_3 = \frac{h_{2\xi}}{Pe^{(3)}} N_1 R_M; \\
 R_{12} &= -\frac{h_{2\xi}}{(h_{1\eta} + h_{2\eta})(h_{1\xi} + h_{2\xi})} R_M; \\
 R_{11} &= \frac{h_{1\xi}}{(h_{1\eta} + h_{2\eta})(h_{1\xi} + h_{2\xi})} R_M; \\
 R_{22} &= \frac{h_{2\eta}}{(h_{1\xi} + h_{2\xi})(h_{1\xi} + h_{2\xi})} R_M; \\
 R_{21} &= \frac{h_{1\eta}}{(h_{1\xi} + h_{2\xi})(h_{1\xi} + h_{2\xi})} R_M; \\
 R_{32} &= \frac{h_{2\xi}}{(h_{1\xi} + h_{2\xi})(h_{1\eta} + h_{2\eta})} R_M; \\
 R_{31} &= \frac{h_{1\xi}}{(h_{1\xi} + h_{2\xi})(h_{1\eta} + h_{2\eta})} R_M; \\
 R_q &= \frac{2}{(h_{1\xi} + h_{2\xi})(h_{1\eta} + h_{2\eta})(h_{1\xi} + h_{2\xi}) P_{0(i, j, k, n)}^*} R_M,
 \end{aligned} \right\} (7)$$

где R_M — масштабное сопротивление.

Для цилиндрической системы координат (r, φ, z) , полагая

$$\begin{aligned}
 v_1 = v_3 &= 1; \quad v_2 = \frac{r}{R} = \rho; \quad \psi_1 = \rho; \\
 \psi_2 &= \varphi; \quad \psi_3 = \frac{z}{R} = \zeta; \quad \Delta\psi_1 = h_\rho; \\
 \Delta\psi_2 &= h_\varphi; \quad \Delta\psi_3 = h_\zeta; \\
 N_2 &= \frac{2A(\theta)}{\rho_i(h_{1\rho} + d_{2\rho})(h_{1\varphi} + h_{2\varphi})(h_{1\xi} + h_{2\xi})},
 \end{aligned}$$

получим формулы

$$\left. \begin{aligned}
 R_\tau &= PN_2 R_M; \\
 R_1 &= -\frac{h_{2\rho}}{Pe^{(1)}} N_2 R_M; \\
 R_2 &= -\frac{h_{2\varphi}}{Pe^{(2)}} N_2 R_M;
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 R_3 &= -\frac{h_{2\xi}}{\text{Pe}^{(3)}} N_2 R_M; \\
 R_{12} &= \frac{h_{2\rho}}{\left(\rho_i + \frac{h_{2\rho}}{2}\right)(h_{1\varphi} + h_{2\varphi})(h_{1\xi} + h_{2\xi})} R_M; \\
 R_{11} &= \frac{h_{1\rho}}{\left(\rho_i - \frac{h_{1\rho}}{2}\right)(h_{1\varphi} + h_{2\varphi})(h_{1\xi} + h_{2\xi})} R_M; \\
 R_{22} &= \frac{\rho_i h_{2\varphi}}{(h_{1\rho} + h_{2\rho})(h_{1\xi} + h_{2\xi})} R_M; \\
 R_{21} &= \frac{\rho_i h_{1\varphi}}{(h_{1\rho} + h_{2\rho})(h_{1\xi} + h_{2\xi})} R_M; \\
 R_{32} &= \frac{h_{2\xi}}{\rho_i (h_{1\rho} + h_{2\rho})(h_{1\varphi} + h_{2\varphi})} R_M; \\
 R_{31} &= \frac{h_{1\xi}}{\rho_i (h_{1\rho} + h_{2\rho})(h_{1\varphi} + h_{2\varphi})} R_M; \\
 R_q &= \frac{2}{\rho_i (h_{1\rho} + h_{2\rho})(h_{1\varphi} + h_{2\varphi})(h_{1\xi} + h_{2\xi}) P_{0(i,j,k,n)}^*} R_M.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Так как скорости v_i в выражении для $\text{Pe}^{(i)}$ отрицательны, то сопротивления R_1, R_2, R_3 в формулах (7) и (8) получаются положительными.

При соблюдении условий (6), для выполнения которых необходимо проводить процесс уравнивания квазианалога методом итерации, обеспечивается эквивалентность уравнений для объекта и модели.

В случае зависимости теплофизических коэффициентов от температуры полученные на модели значения функции Θ должны быть пересчитаны в безразмерные температуры v по соотношению $v = f(\Theta)$, которое можно легко получить из зависимости $\lambda = \lambda(t)$, разрешив функцию Г. А. Варшавского относительно t [6].

В случае постоянства температуропроводности

$$\Theta = \frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_M - \Phi_0} = \frac{t - t_0}{t_M - t_0} v,$$

$A(\Theta) = 1$ и моделирование значительно упрощается.

При моделировании теплопроводности в телах, теплофизические коэффициенты которых зависят от температуры, тепловым потенциалам двух различных тел Φ_1 и Φ_2 соответствуют электри-

ческие потенциалы U_1 и U_2 . В месте контакта двух тел температуры этих тел равны, но интегральные переменные Φ_1 и Φ_2 не равны, поэтому

$$U_1 \neq U_2.$$

Если $U_1 > U_2$, а ток течет от модели первого тела к модели второго, то для воспроизведения скачка $U_1 - U_2$ могут быть использованы регулируемые омические сопротивления.

Если $U_1 < U_2$, а ток течет также от модели первого тела к модели второго, то для реализации скачка $U_2 - U_1$ могут быть использованы квазитрицательные сопротивления.

Необходимая величина скачка потенциалов может быть вычислена в процессе моделирования и установлена в различных точках контакта двух моделей методом итераций.

В данном методе предлагается использовать аппроксимацию первых производных по координатам в уравнении (2) «вперед», что особенно целесообразно при больших скоростях движения теплоисточника — больших числах Pe . При взятии производных «вперед» получается наиболее простая схема уравнивания (рис. 1, б) с положительными омическими сопротивлениями.

Электромоделирование теплообмена в теле, связанном с подвижной системой координат, можно было бы производить по схеме α -квазианалоговой модели [5], что позволило бы легко автоматизировать процесс уравнивания. Однако при решении задач контактного теплообмена такая схема по сравнению с предлагаемой обладает рядом недостатков: увеличивается число сопротивлений на узел (три вместо двух); потенциалы в соседних узлах имеют разные знаки, поэтому в n точках контакта моделей необходимо устанавливать около $\frac{n}{2}$ инверторов; при переменной скорости движения тела нужно изменять два сопротивления (вместо одного); в известной мере теряется наглядность при моделировании (аналоговая с теплопроводностью).

При больших числах Pe (быстродвижущиеся тепловые источники) конвективный член типа $Pe \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$ в уравнении (2), записанном в декартовой системе координат, значительно превышает соответствующую вторую производную $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}$, выражающую количество тепла, передаваемого теплопроводностью в направлении оси ξ . Поэтому последней производной можно пренебречь [4]. Тогда уравнение (2), например, при движении теплоисточника вдоль оси ξ принимает вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} + Pe \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = A \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + P_0^* \right). \quad (9)$$

В этом случае в соотношениях (7)

$$R_{12} = R_{11} = \infty,$$

что физически означает отсутствие электропроводности, являющейся аналогом теплопроводности, в направлении оси ξ .

Такой случай моделирования при $Re \rightarrow \infty$ назовем предельным квазианалоговым методом.

Для квазистационарного теплового режима (при постоянной теплопроводности) и при $Re \rightarrow \infty$ из уравнения (9) получим

$$|Re| \frac{\partial v}{\partial \xi^*} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + P_0, \quad (10)$$

где $\xi^* = -\xi$.

Уравнение (10) является дифференциальным уравнением типа Фурье и может быть решено либо с помощью RC -сетки, либо на сетках из омических сопротивлений методом Либманна [7].

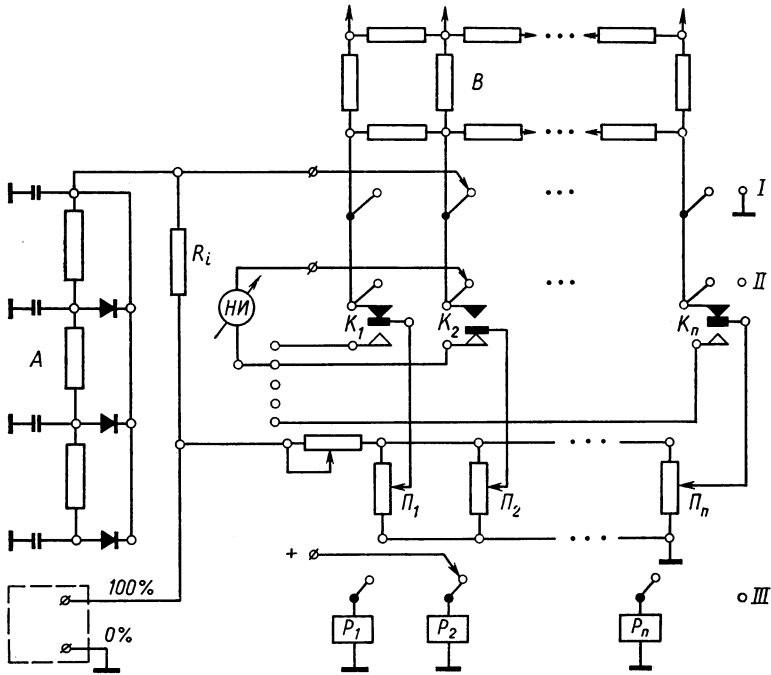


Рис. 2. Принципиальная схема электроаналогового моделирования квазианалоговым методом с применением RC -сетки

Был предложен и разработан следующий предельный квазианалоговый метод моделирования задачи контактного теплообмена в квазистационарном режиме. Электроаналоговое моделирование в теле, связанном с подвижной системой координат, производится на обычной сетке, предназначенной для решения уравнения Лапласа.

Для тела, перемещающегося относительно подвижной системы координат, электро моделирование сводится к аналоговому моделированию на RC -сетке (или на RR -сетках методом Либманна). Координатой, направленной по вектору скорости, для этого тела служит время τ .

Принципиальная схема электро моделирования по этому методу изображена на рис. 2, где введены обозначения: B — модель первого из указанных тел; A — модель второго тела; I, II, III — платы шагового искателя, работающего в режиме периодизации.

Равенство электрических потенциалов, соответствующее равенству температур в точках контакта тел, достигается путем последовательных итераций.

При прохождении контакта модели A по плате I шагового искателя, соединенной, например, с точкой 2, соответствующий контакт K_2 реле P_2 отключает потенциометр Π_2 от модели B . После этого с помощью нуль-индикатора $НИ$ производится установка потенциометра Π_2 на потенциал, равный среднему значению потенциала в точке 2 на заданном отрезке времени $\Delta\xi^* = \Delta\tau$. Все остальные потенциалы Π_n в это время соединены контактами с моделью B .

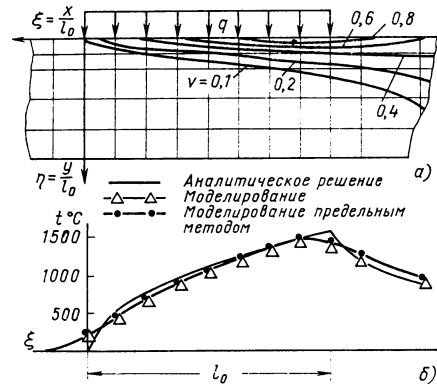


Рис. 3. Температурное поле в пластине от перемещающегося теплоисточника постоянной интенсивности: a — распределение температуры в пластине; b — распределение температуры вдоль верхней поверхности

После установки потенциометра Π_2 таким же образом устанавливаются потенциалы на потенциометрах Π_3, Π_4 и т. д. Процесс установки потенциалов продолжается до их полной стабилизации.

Мощность теплоисточника трения q имитируется электрическим током, протекающим через сопротивление R_i .

В этом методе, в противоположность первому, итерации производятся не во всей области модели второго тела, а лишь на поверхности контакта моделей. Двухмерная задача для этого тела сводится к одномерной, а трехмерная — к двухмерной.

С целью экспериментальной проверки предложенных квазианалоговых методов был решен ряд методических задач. На квазианалоговом интеграторе с ручным управлением была решена задача по определению температурного поля в пластине при движении по ней теплоисточника. Задача была решена для числа $Re = 133$.

На участке l_0 пластины, обе поверхности которой принимались адиабатическими, задавался движущийся, равномерно распределенный тепловой источник интенсивностью q .

На рис. 3 приведены результаты электро моделирования. На графике приведена зависимость температуры на верхней поверхности пластины в функции от расстояния ξ . Сравнение данных, полученных обычным и предельным методом, с аналитическим решением [3] при выбранной сетке показывает, что максимальная погрешность моделирования составляет 7,3%. Измельчением сетки эта погрешность может быть снижена.

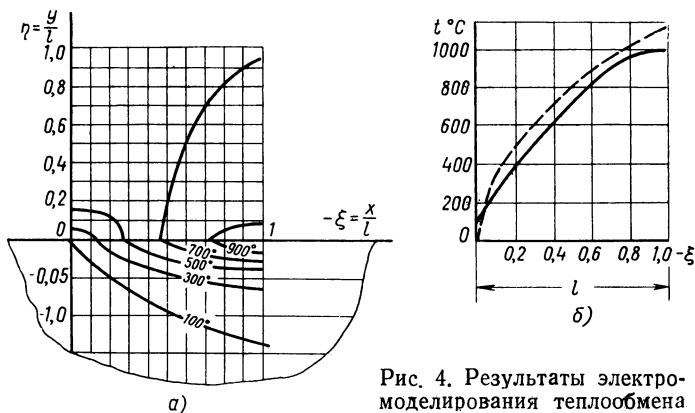


Рис. 4. Результаты электро моделирования теплообмена при трении двух тел:

а — распределение температур в пластинах; б — распределенные температуры вдоль поверхности контакта

На рис. 4 показаны результаты определения температур в двух перемещающихся относительно друг друга телах (двухмерная задача). В задаче принято, что в месте контакта за счет трения образуется тепловой источник равномерной интенсивности. Моделирование производилось двумя описанными квазианалоговыми методами; на сетках из омических сопротивлений (сплошные линии на рис. 4, б) и с использованием RC -сетки (штриховые линии на рис. 4, б). Результаты решения различными методами отличаются друг от друга максимально на 11,1%.

Квазианалоговым методом решалась также практически важная задача о нахождении температурного поля в зоне резания.

Предложенные квазианалоговые методы могут быть широко использованы для исследований в области теплофизики технологических процессов изготовления деталей машин и при расчете теплообмена в теплоиспользующих установках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коздоба Л. А., Махненко В. И. Электро моделирование на сетках омических сопротивлений подвижных температурных полей. Инж. физ. журн., т. 4, № 11, 1961, стр. 94—98.

2. Кудряшев Л. И., Веселов В. П., Темников А. В. Электрическое моделирование процессов теплообмена в теплообменниках с учетом переменности теплофизических свойств теплоносителей. «Аналоговые методы и средства решения краевых задач», Киев, «Наукова думка», 1962, стр. 248—258.

3. Резников А. Н. Теплообмен при резании и охлаждении инструментов. М., Машгиз, 1958, стр. 242.

4. Рыкалин Н. Н. Тепловые основы сварки. М., Изд-во АН СССР, 1947, стр. 182—194.

5. Пухов Г. Е. Метод решения многоточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на математических машинах. Сборник научных трудов, Электрическое моделирование, вып. 1, Киев, Изд-во Киевского института гражданского воздушного флота, 1962, стр. 99—103.

6. Johnson W. C. Alley R. E. Jr. An Electrical Method for the Solution of Differential Equations, Rept. 3. ONR Contract № 6 ori—105, Task Order VI, Princeton, № 7, 1948, p. 161—180.

7. Liebmann G. «A new electrical analog method for the solution of transient heat conducting problems». Trans. of ASME, vol. 78, N 3, 1956, pp. 655—666.

8. Paschkis V. Temperature distribution in the workpiece study by means electric analogy, Research report, November, 1954.

9. Soroka W. W. Analog Methods in Computation and Simulation, p. 289—293, Mc Craw—Lili Book company, Inc. № 7, 1954.

Ю. А. Короленко, Э. Ф. Черняев

ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОБМЕННЫХ УСТРОЙСТВ СЕТКОЙ АКТИВНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Метод электротепловой аналогии (ЭТА) широко распространен для расчетов температурных полей в телах сложной формы.

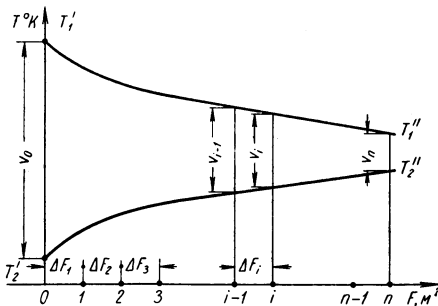


Рис. 1. Схема работы параллельноточного теплообменника

В последнее время появились работы по приложению метода ЭТА к расчету параллельноточных теплообменников с помощью преобразования дифференциальных уравнений, записанных в частных производных, к обычным дифференциальным уравнениям. Для решения обычных дифференциальных уравнений предлагается использовать моделирующие машины типа МН-7.

В настоящей работе рассматривается способ, позволяющий моделировать широкий круг теплообменных устройств с помощью сетки активных электрических сопротивлений.

Рассмотрим этот метод на примере параллельноточного теплообменника (рис. 1).

Примем следующие обозначения:

T_1 — температура горячего теплоносителя в °К;

T_2 — температура холодного теплоносителя в °К;

$V = T_1 - T_2$ — температурный напор в теплообменном устройстве в °К;

F — поверхность теплообмена в m^2 ;

$W = c_p G$ — водный эквивалент теплоносителя в $дж/сек \cdot град$;

G — массовый расход воды в $кг/сек$;

c_p — теплоемкость теплоносителя в $дж/град \cdot кг$;

k — коэффициент теплопередачи в $вт/м^2 \cdot град$.

Известно, что для параллельноточного рекуперативного теплообменника справедливы равенства [1]:

$$dt_1 = - \frac{kVdF}{W_1}; dt_2 = \frac{kVdF}{W_2};$$

$$dV = - mkVdF, \quad (1)$$

где $m = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}$ — для прямоточного теплообменника;

$m = \frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}$ — для противоточного теплообменника.

Заменяя малые приращения dv и dF на конечные величины ΔV и ΔF , получим

$$\Delta t_1 = - \frac{kV\Delta F}{W_1} = - \frac{\Delta Q}{W_1};$$

$$\Delta t_2 = \frac{kV\Delta F}{W_2} = \frac{\Delta Q}{W_2}; \quad (2)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = - mk\Delta F.$$

Система формул (2) позволяет создать электрическую модель теплообменника.

Порядок моделирования следующий.

Вся поверхность исследуемого теплообменника разбивается на n малых участков с поверхностью ΔF_i . Для i -го элементарного участка теплообменника (рис. 2) можно записать

$$\frac{\Delta V_i}{V_{i\text{cp}}} = - m_i k_i \Delta F_i, \quad (3)$$

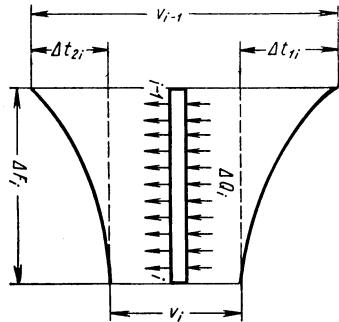


Рис. 2. Схема элементарного участка теплообменника

где

$$\Delta V_i = V_i - V_{i-1};$$

$$V_{i \text{ ср}} = \frac{V_i + V_{i+1}}{2}.$$

Эти соотношения позволяют получить следующее равенство:

$$V_i = V_{i-1} \frac{2 - m_i k_i \Delta F_i}{2 + m_i k_i \Delta F_i} =$$

$$= V_{i-1} M_i = V_0 M_1 M_2 M_3 \dots M_i. \quad (4)$$

Теперь количество тепла, переданное на ΔF_i ,

$$\Delta Q_i = k_i V_i \Delta F_i = \frac{V_i}{R_{\kappa i}} = \frac{V_0}{R_{\kappa i}} M_1 M_2 M_3 \dots M_i, \quad (5)$$

где

$$R_{\kappa i} = \frac{1}{k_i \Delta F_i}.$$

Все количество тепла, переданное на теплообменнике,

$$Q = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i = \left(\frac{M_1}{R_{\kappa 1}} + \frac{M_1 M_2}{R_{\kappa 2}} + \dots + \frac{M_1 M_2 M_3 \dots M_n}{R_{\kappa n}} \right) V_0. \quad (6)$$

Количество тепла, переданное вдоль элемента,

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \Delta Q_j = \frac{\Delta t_{1i}}{R_{1ci}} = \frac{\Delta t_{2i}}{R_{2ci}}, \quad (7)$$

где

$$R_{1ci} = \frac{\Delta t_{1i}}{Q_i}; \quad R_{2ci} = \frac{\Delta t_{2i}}{Q_i} \quad (8)$$

или

$$Q_i = \sum_{j=i}^n \Delta Q_j = V_0 \left(\frac{M_1 M_2 \dots M_i}{R_{\kappa i}} + \right.$$

$$\left. + \frac{M_1 M_2 \dots M_{i+1}}{R_{\kappa i+1}} + \dots + \frac{M_1 M_2 \dots M_n}{R_{\kappa n}} \right). \quad (9)$$

Величины Δt_{1i} и Δt_{2i} по абсолютной величине определяются следующим образом:

$$\Delta t_{1i} = \frac{\Delta V_i}{1 + \frac{W_1}{W_2}}; \quad \Delta t_{2i} = \frac{\Delta V_i}{1 + \frac{W_2}{W_1}}. \quad (10)$$

Подставляя в уравнение (8) величины из формулы (4), (9) и (10), окончательно получаем

$$R_{1ci} = \frac{1 - M_i}{\left(1 + \frac{W_1}{W_2}\right) \left(\frac{M_1 M_2 M_3 \dots M_i}{R_{ki}} + \dots + \frac{M_1 M_2 M_3 \dots M_n}{R_{kn}}\right)}; \quad (11)$$

$$R_{2ci} = \frac{\Delta V_i}{\left(1 + \frac{W_1}{W_2}\right) Q_i}. \quad (12)$$

Отсюда

$$R_{2ci} = R_{1ci} \frac{W_{1i}}{W_{2i}}. \quad (13)$$

Электрическая схема, моделирующая теплообменник, представлена на рис. 3.

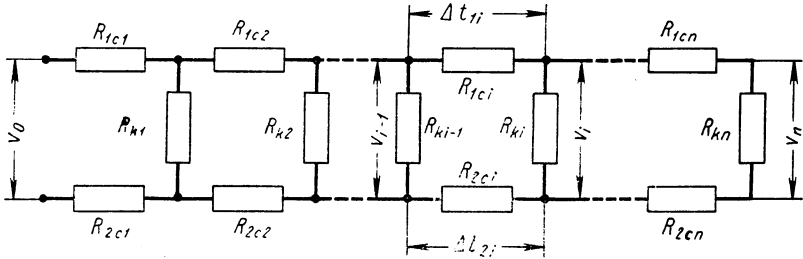


Рис. 3 Принципиальная электрическая схема теплообменника

С помощью обычных приемов ЭТА тепловые сопротивления R_k и R_c можно заменить на электрические:

$$R_{kэ} = m_R R_k;$$

$$R_{cэ} = m_R R_c.$$

Кроме того,

$$\Delta U = m_U \Delta t; \quad \Delta i = m_i \Delta Q,$$

где

$$m_R = \frac{R_s}{R_T} [\text{ом/град/вт}]; \quad m_U = \frac{\Delta U}{\Delta t} [\text{в/град}];$$

$$m_i = \frac{\Delta i}{\Delta Q} [\text{а/вт}].$$

Применение изложенного метода рассмотрим на примере теплообменника, работающего по схеме прямотока. Общая поверх-

ность теплообменника $F = 2 \text{ м}^2$, водяной эквивалент горячего теплоносителя $W_1 = 200 \frac{\text{дж}}{\text{сек} \cdot \text{град}}$ и его начальная температура $T_1 = 120^\circ \text{С}$; водяной эквивалент холодного теплоносителя $W_2 = 400 \frac{\text{дж}}{\text{сек} \cdot \text{град}}$ и его начальная температура $T_2 = 0^\circ \text{С}$. Коэффициент теплоотдачи $k = 50 \frac{\text{вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$. Величины k , W_1 и W_2 постоянны, что дает возможность провести аналитический расчет теплообменника. Требуется определить:

- а) температурные напоры в конце каждого участка V_i ;
- б) температуры теплоносителей T_{1i} и T_{2i} в конце каждого участка;
- в) количество тепла, переданного на теплообменнике.

Разбивая всю поверхность теплообменника на $n = 10$ одинаковых участков, получаем одинаковые

$$R_{ki} = \frac{1}{k_i \Delta F_i} = \frac{n}{kF};$$

$$R_{ki} = \frac{10}{50 \cdot 2} = 0,1 \left[\frac{\text{град}}{\text{вт}} \right];$$

$$m_i = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} = \frac{1}{200} + \frac{1}{400} = 0,75 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\text{сек} \cdot \text{град}}{\text{дж}} \right];$$

$$m_i k_i \Delta F_i = 0,75 \cdot 10^{-2} \cdot 50 \cdot 0,2 = 0,075;$$

$$M_i = \frac{2 - m_i k_i \Delta F_i}{2 + m_i k_i \Delta F_i} = M = 0,928.$$

При постоянных значениях R_k и M выражение (11) для определения R_{1ci} значительно упрощается:

$$R_{1ci} = \frac{R_k}{1 + \frac{W_1}{W_2}} \cdot \frac{1 - M_{i-1}}{M + M^2 + M^3 + \dots + M^{n(i-1)}}.$$

Моделирование производилось на расчетном столе Рижского завода (типа РС-62). Исходя из возможностей стола, были выбраны следующие масштабы:

$$m_R = \frac{R_9}{R_T} = 1 \cdot 10^5 \left[\frac{\text{ом}}{\text{град/вт}} \right];$$

$$m_U = \frac{\Delta U}{\Delta t} = 0,1 \left[\frac{\text{в}}{\text{град}} \right].$$

Соответственно масштаб токов

$$m_i = \frac{\Delta i}{\Delta Q} = \frac{m_U}{m_R} = 1 \cdot 10^{-6} \left[\frac{a}{вт} \right].$$

Данные схемы и результаты опытов приведены в таблице.

Расчетный суммарный тепловой поток, передаваемый на теплообменнике, $Q = 8464$ вт, опытный — $Q = 8440$ вт.

№ участка	$R_{\delta i}$ в ом	R_{1ci} в ом	R_{2ci} в ом	Температурный напор V_i , °К		Температура теплоносителей			
				расчетный	опытный	T_{1i} , °К		T_{2i} , °К	
						расчетная	опытная	расчетная	опытная
0	—	—	—	120	120	120	120	0	0
1	10 000	72	36	111	111	114	114	3	3
2	10 000	76	38	103	103,3	108,7	108,8	5,7	5,5
3	10 000	82	41	96	95,9	104	103,9	8,0	8,0
4	10 000	92	46	89	88,9	99,2	99	10,2	10,1
5	10 000	104	62	82,5	82,6	94,8	94,8	12,3	12,2
6	10 000	120	60	76,5	76,5	90,8	90,7	14,3	14,1
7	10 000	144	72	71,0	70,9	87,1	87	16,1	16,1
8	10 000	184	92	66,0	65,9	83,8	83,6	17,8	17,7
9	10 000	268	134	61,0	60,9	80,4	80,1	19,4	19,2
10	10 000	518	259	56,5	56,3	77,4	77,1	20,9	20,8

Предлагаемый метод позволяет полностью моделировать теплообменник, если известны начальные температуры теплоносителей, их расходы, коэффициенты теплоотдачи и конструкция теплообменника. Крайне простым является учет переменности всех факторов, влияющих на работу теплообменника.

Полученные соотношения с незначительной корректировкой могут быть применены и для перекрестных теплообменников любой схемы.

Используя способ, предложенный Либманном [2,] данный метод может быть применен для рассмотрения нестационарных условий работы рекуперативных теплообменников и моделирования регенеративных теплообменников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михеев М. А. Основы теплопередачи. М., Госэнергоиздат, 1952, стр. 219.
2. Liebmann G. «A new electrical analog method for the solution of transient heat conducting problems». Trans. of ASME, 78, N 3, 1956, p. 655.

**О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ
ПОДОБНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ РАСЧЕТАХ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ
В ПРОМЕРЗАЮЩИХ И ОТТАИВАЮЩИХ ГРУНТАХ**

Предложенный С. Г. Гутманом [2] метод приведения составной среды из мерзлого и талого грунтов к однородному виду относительно коэффициентов теплопроводности широко применяется в инженерных расчетах при исследовании стационарных температурных полей в мерзлом грунте вблизи различных тепловыделяющих сооружений [3, 1, 4]. Как было показано проф. В. С. Лукьяновым в 1957 г., аналогичные преобразования возможны также и при исследовании нестационарных тепловых процессов.

При расчетах промерзания — оттаивания грунтов на гидравлическом интеграторе применение метода приведения исследуемой области к однородному виду относительно одного из теплофизических параметров грунта позволяет существенно упростить процесс проведения расчетов и повысить их точность.

В статье дается теоретическое обоснование применения методов приведения составных сред из мерзлых и талых грунтов к однородному виду в отношении теплофизических параметров этих сред, т. е. коэффициентов теплопроводности или объемных теплоемкостей при расчетах процессов промерзания — оттаивания грунтов. Рассматриваются также некоторые практические вопросы применения полученных зависимостей при расчетах на гидравлических интеграторах.

Для простоты вывод основных условий приведения к однородному виду производится для случая одномерного процесса промерзания грунта. Однако полученные при этом результаты целиком справедливы и для более сложных случаев теплообмена при промерзании и оттаивании грунтов.

Итак, рассмотрим промерзание с поверхности влажного грунта при отрицательной температуре воздуха t_a и известной величине коэффициента теплообмена на поверхности α . Примем, что коэффициент теплопроводности λ и объемная теплоемкость C грунта скачкообразно изменяются при переходе температуры через 0°C от значений при положительных температурах λ_T и $C_{0,T}$ до величин, соответствующих отрицательным температурам, λ_M и $C_{0,M}$.

Замерзание всей термоактивной грунтовой влаги, сопровождающееся выделением скрытых теплот, происходит при 0°C .

Процесс изменения температурного поля в грунте при этих

условиях будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений:

на поверхности грунта

$$\lambda_M \frac{\partial t_M}{\partial x} = \alpha (t_s + t_n);$$

в слое замерзшего грунта

$$C_{M,0} \frac{\partial t_M}{\partial \tau} = \lambda_M \frac{\partial^2 t_M}{\partial x^2};$$

в подстилающем талом грунте

$$C_{0,T} \frac{\partial t_T}{\partial \tau} = \lambda_T \frac{\partial^2 t_T}{\partial x^2};$$

на границе раздела талого и мерзлого грунта

$$t_M = t_T = 0^\circ \text{C}.$$

Перемещение этой границы во времени определяется условием

$$\lambda_M \frac{\partial t_M}{\partial x} - \lambda_T \frac{\partial t_T}{\partial x} = Q_0 \frac{\partial x_0}{\partial \tau},$$

где λ_T и λ_M — коэффициенты теплопроводности талого и мерзлого грунта;

t — температура;

τ — время;

x — глубина (от поверхности грунта);

x_0 — расстояние фронта промерзания от поверхности грунта;

Q_0 — содержание скрытых теплот замерзания воды в единице объема грунта.

Условием теплового подобия рассматриваемой двухслойной неоднородной системы и любой другой, отличной от нее, является соблюдение для сходственных точек обеих систем условия равенства следующих критериев подобия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha x}{\lambda_M} &= \text{idem}; & \frac{\lambda_M \tau}{C_{0M} x^2} &= \text{idem}; \\ \frac{\nu_T \tau}{C_{0,T} x^2} &= \text{idem}; & \frac{\lambda_M t_M}{\lambda_T t_T} &= \text{idem}; \\ \frac{\lambda_M t_M \tau}{x^2 Q_0} &= \text{idem}; & \frac{\lambda_T t_T \tau}{x^2 Q_0} &= \text{idem}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Используя условия (1), можно установить, какие преобразования должны быть выполнены с параметрами исходной системы, чтобы при приведении ее к однородному виду было сохранено тепловое подобие исходной и приведенной систем.

Если при этом придерживаться еще дополнительного условия, что при любых подобных преобразованиях исходной системы ее

геометрические и временные масштабы должны оставаться неизменными, то возможны два различных случая приведения исходной системы к однородному виду: относительно коэффициентов теплопроводности и относительно объемной теплоемкости грунта.

а) Приведение к однородному виду в отношении коэффициентов теплопроводности составной среды из мерзлого и талого грунта

Будем производить приведение относительно коэффициента теплопроводности талого грунта, т. е. считать $\lambda_{np} = \lambda_T$. Тогда из рассмотрения системы критериев подобия (1) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha x}{\lambda_M} &= \frac{\lambda_{np} \alpha x}{\lambda_M \lambda_{np}} = \frac{\lambda_{np} x}{\lambda_{np}}; \\ \frac{\lambda_M \tau}{C_{0, M} x^2} &= \frac{\lambda_{np} \tau}{\lambda_M C_{0, M} x^2} = \frac{\lambda_{np} \tau}{C_{0, M, np} x^2}; \\ \frac{\lambda_M t_M}{\lambda_T t_T} &= \frac{\lambda_{np} \frac{\lambda_M}{\lambda_{np}} t_M}{\lambda_T t_T} = \frac{\lambda_{np} t_{M, np}}{\lambda_T t_T}; \\ \frac{\lambda_M t_M \tau}{x^2 Q_0} &= \frac{\lambda_{np} \frac{\lambda_M}{\lambda_{np}} t_M \tau}{x^2 Q_0} = \frac{\lambda_{np} t_{M, np} \tau}{x^2 Q_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Параметры, входящие в два остальные критерия подобия $\frac{\lambda_T \tau}{C_{0, T} x^2} = \text{idem}$ и $\frac{\lambda_T t_T \tau}{x^2 Q_0} = \text{idem}$, остаются без изменений, так как $\lambda_T = \lambda_{np}$.

Из условий (2) следует, что для приведения к однородному виду в отношении коэффициентов теплопроводности талого грунта параметры мерзлого слоя в исходной системе должны быть преобразованы следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{M, np} &= \lambda_M k_\lambda; \quad \lambda_{np} = \alpha k_\lambda; \\ C_{0, M, np} &= C_{0, M} k_\lambda; \\ t_{M, np} &= t_M / k_\lambda; \quad k_\lambda = \frac{\lambda_{np}}{\lambda_i}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где λ_i — коэффициент теплопроводности рассматриваемого слоя грунта.

В соответствии с условиями (3) все параметры талого слоя грунта остаются без изменения.

Таким образом, в результате приведения коэффициент теплопроводности во всей исследуемой области будет иметь постоянную величину. Значения коэффициента теплообмена в период, когда на поверхности грунта сохраняются отрицательные температуры, а также величины объемной теплоемкости мерзлого грунта должны быть исправлены умножением на коэффициент приведения k_λ . Отрицательные температуры на границах исследуемой области приводятся делением их истинных значений на коэффициент приведения k_λ . Вследствие проведенных преобразований температуры в слое мерзлого грунта искажаются относительно их истинных значений. При обработке результатов расчетов приведенные величины отрицательных температур переводятся в истинные умножением на коэффициент k_λ .

Если на поверхности грунта имеется слой термоизоляции, то ее термическое сопротивление также подлежит приведению способом, описанным в работе [2].

Приведение составной области из талого и мерзлого грунта к однородному виду относительно коэффициентов теплопроводности позволяет производить расчеты на гидравлическом интеграторе при постоянных значениях термических сопротивлений, не меняющих своей величины при переходе температур через 0°C . Это вносит значительные упрощения в расчеты и позволяет повысить их точность. Преимущества метода приведения особенно наглядно проявляются при решении сложных двух- и трехмерных задач с большим количеством блоков, когда слежение за своевременной перестановкой гидравлических сопротивлений между центрами тяжести блоков, находящихся по обе стороны от непрерывно перемещающегося фронта промерзания или оттаивания, отвлекает внимание расчетчика от наблюдения за ходом процесса.

б) Приведение составной среды из мерзлого и талого грунта к однородному виду в отношении объемной теплоемкости

Как и в предыдущем случае, рассмотрим приведение относительно объемной теплоемкости талого грунта, т. е. когда $C_{0, np} = C_{0, T}$. Анализ критериев подобия (2) приводит к следующим условиям приведения параметров мерзлого грунта:

$$\left. \begin{aligned} C_{0, np} &= C_{0, M} k_c; \quad \lambda_{M, np} = \lambda_M k_c; \\ \alpha_{np} &= \alpha k_c; \quad t_{M, np} = \frac{t_M}{k_c}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $k_c = \frac{C_{0, np}}{C_{0, i}}$;

$C_{0, i}$ — истинная, т. е. не приведенная объемная теплоемкость рассматриваемого слоя.

Все соответствующие параметры талого грунта остаются без изменения, так как в этом слое $k_c = C_{0, np}/C_{0, T} = 1$.

Процесс решения в этом случае сводится к предварительному пересчету величин $C_0, m, \lambda_m, \alpha$, а также граничных и начальных отрицательных температур t_M в соответствии с условиями (4) и решению после этого задачи на гидравлическом интеграторе при неизменной объемной теплоемкости во всей исследуемой области грунта.

При обработке результатов расчета истинные значения температур в мерзлом грунте получаются умножением их приведенных значений на коэффициент приведения k_c .

Приведение к однородному виду относительно объемных теплоемкостей позволяет проводить расчеты на гидравлическом интеграторе при неизменных по высоте площадях поперечного сечения емкостей интегратора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головкин М. Д. Метод расчета чаши протаивания в основаниях зданий, возводимых на многолетнемерзлых грунтах. Изд. ВНИИ транспортного строительства, М., 1958, стр. 15—16.

2. Гутман С. Г. К исследованию установившегося теплового потока в составной среде из мерзлого и талого грунтов (Приведение исследуемой области к однородной среде). «Известия ЛНИИГ», т. 47, 1952, стр. 248—250.

3. Порхаев Г. В. Установившееся температурное поле в основании отапливаемого сооружения. Материалы к основам учения о мерзлых зонах земной коры, вып. V. М., Изд. АН СССР, 1960, стр. 121—136.

4. Томирдиаро С. В. Тепловые расчеты оснований в районах вечной мерзлоты. Магадан, Изд. АН СССР, 1963, стр. 65—71.

Н. А. Цуканов

РАСЧЕТЫ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ В ГРУНТЕ МЕТОДОМ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ

Распространение тепла в грунте при фильтрации воды по порам происходит не только за счет теплопроводности, но и путем конвективного теплообмена. Оба эти процесса протекают в тесной взаимосвязи и взаимообусловленности. Тепловое состояние скелета грунта и воды в фильтрующем потоке зависит от характера процессов теплообмена как внутри каждой из этих сред, так и между ними. Кроме того, оно в существенной мере определяется закономерностями процессов фильтрации и конвекции воды в грунте.

Каждый из этих процессов в отдельности может быть описан дифференциальными уравнениями с соответствующими граничными и начальными условиями.

Совместное аналитическое решение системы дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемый процесс, сопряжено с большими трудностями математического порядка, которые пока еще не удалось преодолеть. Вследствие этого решение задачи ищется с введением в расчетную схему упрощающих предположений.

Обычно принимают следующие допущения:

термическое сопротивление частиц скелета грунта равно нулю (т. е. в любой точке фильтрационного потока температуры частиц грунта и воды совпадают по величине);

поры грунта полностью заполнены водой;

вода совершает только вынужденное движение, т. е. свободная конвекция в потоке отсутствует;

процесс фильтрации воды — стационарный и поле скоростей фильтрации известно.

В этом случае процесс теплообмена в грунте при наличии фильтрационного потока может быть описан одним дифференциальным уравнением [1]

$$C_e \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) - C_g \times \\ \times \left(V_x \frac{\partial t}{\partial x} + V_y \frac{\partial t}{\partial y} + V_z \frac{\partial t}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где C_g и C_e — объемные теплоемкости воды и грунта при полном заполнении его пор водой;

V_x, V_y, V_z — составляющие вектора скорости фильтрации воды по направлению координатных осей;

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ — коэффициенты теплопроводности грунта вдоль осей x, y, z ;

τ — время;

t — температура.

Но даже в таком виде аналитическое решение этого уравнения связано с большими трудностями.

Новые возможности в решении поставленной задачи открывают использование метода гидравлических аналогий. Способ практического решения уравнения (1) на гидравлическом интеграторе был предложен проф. В. С. Лукьяновым [1]. При этом задача сводится к нахождению температурного поля, описываемого дифференциальным уравнением теплопроводности Фурье с дополнительными переменными источниками (стоками) тепла внутри исследуемой области. Интенсивность этих источников

$$C_g \left(V_x \frac{\partial t}{\partial x} + V_y \frac{\partial t}{\partial y} + V_z \frac{\partial t}{\partial z} \right).$$

При расчетах на гидравлическом интеграторе действие источников (или стоков) может быть воспроизведено приливанием воды в каждый элементарный блок зоны фильтрации. Приливание

можно осуществлять непрерывно или конечными порциями через определенные интервалы времени.

Методика осуществления непрерывного вливания разработана достаточно полно и описана в литературе [2, 3]. Были разработаны специальные устройства для обеспечения удобства воспроизведения рассматриваемых процессов на гидравлическом интеграторе [1, 4].

При решении задач с большим количеством блоков в зоне фильтрации этот способ оказывается громоздким, так как он требует непрерывного индивидуального управления приливанием в каждый из этих блоков в процессе расчета.

В способе вливания конечными порциями источник, воспроизводящий конвективную составляющую теплового потока, действует отдельными импульсами, следующими друг за другом с интервалом по времени. Осуществление этого метода не требует какого-либо дополнительного оборудования.

Расчет количеств приливаемой воды осуществляется по несложным аналитическим формулам [3, 5]. Однако из-за того, что эти вычисления приходится выполнять в большом количестве для всех блоков области фильтрации в каждый интервал времени, необходимо искать дальнейшие пути упрощения формул и ускорения по ним. Такие возможности открывает, например, использование разработанного нами графо-аналитического метода расчета изменения температур в зоне фильтрации за счет конвективного теплопереноса. Метод основан на графическом решении аналитических выражений, полученных для случаев равномерной и непрерывной разбивки области фильтрации на блоки [5].

В окончательном виде эти расчетные уравнения имеют следующий вид:

а) при равномерной разбивке области фильтрации на блоки

$$\tau \Delta t_{n,k} = \frac{C_g V}{2C_2 \Delta x} (t_{n-1, k-1} - t_{n+1, k-1}) \Delta \tau_k; \quad (2)$$

б) при неравномерной разбивке области фильтрации на блоки

$$\tau \Delta t_{n,k} = \frac{C_g V}{C_2} \left(\frac{t_{n-1, k-1} - t_{n, k-1}}{\Delta x_n + \Delta x_{n-1}} + \frac{t_{n, k-1} - t_{n+1, k-1}}{\Delta x_n + \Delta x_{n+1}} \right) \Delta \tau_k, \quad (3)$$

где $\tau \Delta t_{n, k}$ — изменение температуры в центре тяжести блока под влиянием теплопереноса фильтрующейся водой за период k -го интервала времени $\Delta \tau_k$.

Индексы n относятся к порядковым номерам блоков по ходу фильтрации, а индексы k — к порядковым номерам временных интервалов $\Delta \tau$ (рис. 1). При вычислении уравнений (2) и (3) величину расчетного интервала времени $\Delta \tau$ следует брать из условия

$$\Delta \tau = \frac{C_2 \Delta x}{2C_g V} \quad (4)$$

в случае неравномерной разбивки области фильтрации на блоки или из условия

$$\Delta\tau = \frac{C_2 \Delta x_p}{2C_0 V} \quad (5)$$

при равномерной разбивке на блоки;

здесь $\Delta x_p = \frac{L}{N}$ — размер элементарных блоков вдоль оси x при равномерной разбивке области фильтрации на N блоков;

L — габаритный размер области фильтрации вдоль оси x ;

N — число элементарных блоков, на которые разбита область фильтрации при данной равномерной разбивке.

С учетом условий (4) и (5) уравнения (2) и (3) упрощаются и их можно решать графически. Графо-аналитические методы расчета изменения температур за счет конвективного теплопереноса при фильтрации рассматриваются ниже отдельно для случаев равномерной и неравномерной разбивки области фильтрации на блоки.

а) Равномерная разбивка на блоки

Рассматривается одномерный нестационарный тепловой поток в грунте, обусловленный теплопереносом водой, фильтрующейся в направлении координатной оси x (рис. 1). Скорость фильтрации V принимаем неизменной. Температура фильтрующейся воды на входе в область грунта, в которой надлежит определить изменение температур, задана в виде линейной зависимости от времени.

Начальное распределение температур в грунте изображено на рис. 2 штриховой линией.

Основное расчетное уравнение (2) при подстановке в него $\Delta\tau$ из условия (4) принимает вид

$$\tau \Delta t_{n,k} = \frac{t_{n-1,k-1} - t_{n+1,k-1}}{4} \quad (6)$$

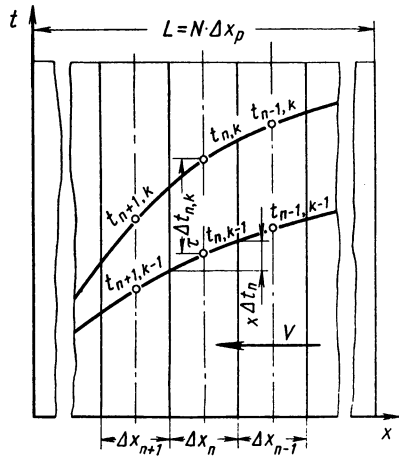


Рис. 1. Изменение температур при равномерной разбивке области фильтрации на блоки для временных интервалов $(k-1)$ и k

Это уравнение положено в основу графо-аналитического метода расчета (рис. 2).

Вначале определяется величина расчетного интервала времени $\Delta\tau$ по условию (4) для принятых в задаче физических параметров грунта и фильтрационного потока и геометрических размеров элементарных блоков. Исходя из полученной величины $\Delta\tau$, заданный график изменения температуры воды t_w на входе в рассматриваемый слой грунта (прямая линия) заменяется ступенчатым графиком с постоянной температурой воды в пределах каждого интервала $\Delta\tau$.

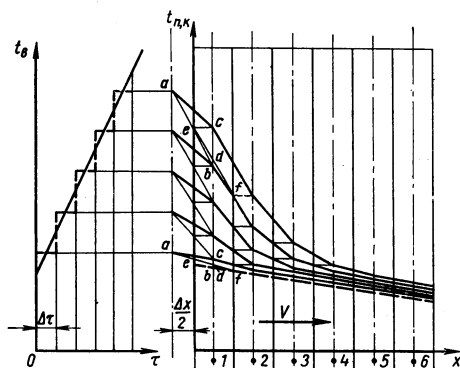


Рис. 2. График начального распределения температур в грунте

Графически уравнение (6) удобно решать на планшете миллиметровой бумаги с нанесенными на нем в принятом масштабе границами блоков (по горизонтали) и их центрами (вертикальных линий). По вертикальной оси планшета откладывается температура и ее приращение за рассматриваемые интервалы времени $\Delta\tau_k$. Исходными величинами для расчета в пределах каждого рассматриваемого временного интервала $\Delta\tau_k$ являются распределение температур в

области фильтрации в конце предыдущего интервала времени $\Delta\tau_{k-1}$ и средняя температура воды на входе в первый блок по ходу фильтрации в рассматриваемый интервал времени $\Delta\tau_k$. Последняя откладывается на графике по вертикальной линии, расположенной на расстоянии $\Delta x/2$ от входной грани крайнего блока со стороны входа фильтрационного потока.

Согласно предположкам, принятым при выводе расчетных формул (2) и (3), температура грунта в центрах тяжести элементарных блоков и температура воды на входе в рассматриваемую область грунта считаются неизменными в течение всего расчетного интервала времени $\Delta\tau_k$, а распределение температур между центрами блоков соответствует установившемуся состоянию, т. е. оно линейно. Построение кривой распределения температур в области фильтрации на конец рассматриваемого интервала времени $\Delta\tau_k$ следует начинать со стороны входа воды в рассматриваемую область.

Для этого соединим между собой прямой линией точки, соответствующие температуре входного блока в центре тяжести в интервале времени $\Delta\tau_{k-1}$ (точка a) и температуре воды на входе в рассматриваемую область грунта в интервале $\Delta\tau_k$ (точка b).

При этом приращение температуры во входном блоке за период $\Delta\tau_k$ графически будет выражаться вертикальным отрезком cd , заключенным между прямыми, соединяющими температуры на входной и выходной гранях блока (линия ef), и горизонтальной прямой ec , проведенной из точки, соответствующей температуре на входной грани этого блока, до пересечения с вертикальной осью блока. Это следует из того, что уравнение (6) можно представить в следующем виде:

$$\tau\Delta t_{n,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{t_{n-1, k-1} - t_{n+1, k-1}}{2} \right).$$

Выражение, заключенное в скобках, представляет собой разность температур на гранях рассматриваемого блока, а половина этой разности равна длине отрезка cd .

Искомая температура центра блока в конце расчетного интервала времени $\Delta\tau_k$ графически выражается отрезком, отсекаемым на вертикальной оси этого блока горизонтальной прямой, проведенной из точки, соответствующей температуре входной грани блока в течение интервала времени $\Delta\tau_k$.

Практически при графическом решении уравнения (6) нет необходимости в отдельном определении $\tau\Delta t_{n,k}$ и $t_{n,k}$, так как целью расчета является последняя из названных величин, т. е. температура в конце рассматриваемого интервала времени $\Delta\tau_k$. Аналогично и для остальных блоков, располагая данными о распределении температур в зоне фильтрации в предыдущий интервал времени, можно графически получить распределение температур на последующем интервале. Для этого достаточно в каждом элементарном блоке провести горизонтальные прямые из точек, соответствующих температурам на их входных гранях в предыдущий интервал $\Delta\tau_{k-1}$ до пересечения с ординатами, проведенными через центры тяжести этих блоков. Отрезки, отсекаемые этими прямыми на вертикальных осях блоков, будут численно равны искомым температурам $t_{n,k}$.

Определение температур в центрах блоков на конце следующего интервала времени, т. е. в конце интервала $\Delta\tau_{k+1}$, производится таким же путем, только за исходное распределение температур в этом случае принимаются результаты расчета по предыдущему интервалу $\Delta\tau_k$.

Изложенный выше метод применим и в тех случаях, когда переменными во времени являются не только температуры фильтрующейся воды, но и скорость фильтрации ее. Порядок расчета при этом принципиально ничем не отличается от рассмотренного за исключением того, что в этом случае интервал времени $\Delta\tau$ уже не является постоянным, а должен определяться по уравнению (4) или (5) для каждой ступени расчета в соответствии с изменением скорости фильтрации V .

б) Графо-аналитический метод расчета температур в зоне фильтрации при неравномерной разбивке области фильтрации на блоки

Исходное расчетное уравнение (3) после подстановки в него величины $\Delta\tau$ из уравнения (5) можно представить в следующем виде:

$$\tau \Delta t_{n,k} = \left[\frac{t_{n-1,k-1} - t_{n,k-1}}{\left(\frac{\Delta x_{n-1} + \Delta x_n}{2}\right)} \frac{\Delta x_p}{4} + \frac{t_{n,k-1} - t_{n+1,k-1}}{\left(\frac{\Delta x_n + \Delta x_{n+1}}{2}\right)} \frac{\Delta x_p}{4} \right]. \quad (7)$$

Нетрудно установить, что при этом уравнение (7) будет совершенно аналогично уравнению (6) для случая равномерной разбивки на блоки. Для графического решения этого уравнения на планшете должны быть нанесены обе системы разбивки области фильтрации на блоки: фактическая с неравномерным шагом вдоль оси x и фиктивная в виде блоков одинакового размера Δx_p вдоль оси x , центры тяжести которых совпадают с центрами тяжести блоков фактической разбивки (рис. 3).

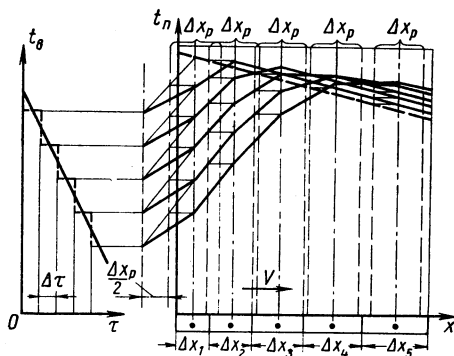


Рис. 3. Схема к расчету изменения температур в грунте при неравномерной разбивке области фильтрации на блоки

Рис. 3. Схема к расчету изменения температур в грунте при неравномерной разбивке области фильтрации на блоки

Рис. 3. Схема к расчету изменения температур в грунте при неравномерной разбивке области фильтрации на блоки

шага Δx_p . Далее определяется расчетный интервал времени $\Delta\tau$ по уравнению (5).

На планшете со схемой разбивки области, в которой подлежит исследовать изменение температур под влиянием конвективного теплопереноса с водой, следует провести вертикальные линии через центры тяжести выделенных элементарных блоков. Кроме того, проводятся вертикальные линии по обе стороны от центра тяжести каждого элементарного блока на расстоянии от него, равном $\Delta x_p/2$. На рис. 3 эти линии нанесены штрихом.

Далее, в соответствии с полученной величиной расчетного интервала времени $\Delta\tau$ следует преобразовать график изменения температур воды на входе в крайний блок, заменив его ступенчатым графиком с постоянными температурами в пределах каждого интервала $\Delta\tau$. Построение кривой распределения температур в центрах блоков области фильтрации для заданного интервала времени производится в таком же порядке, как и в рассмотренном ранее случае с равномерной разбивкой на блоки. Это

следует из того, что благодаря переходу к блокам, имеющим одинаковый размер вдоль оси x — Δx_p , фактическая схема разбивки области фильтрации на блоки различных размеров приводится к системе одинаковых элементарных блоков, но расположенных на неравных расстояниях друг от друга вдоль пути фильтрации. Принимая распределение температур между центрами смежных блоков в предыдущий интервал Δt_{k-1} линейным, температуру в рассматриваемом блоке в конце последующего интервала Δt_k можно определить путем сноса на вертикаль, проходящую через центр тяжести этого блока, температуры на входной грани блока равномерной разбивки с шагом Δx_p , центр тяжести которого совпадает с центром тяжести рассматриваемого блока.

При расчетах на гидравлическом интеграторе следует преимущественно пользоваться графическими методами расчета температур в зоне фильтрации, так как это позволяет существенно сократить трудоемкость и общее время проведения расчета.

Рассмотрим порядок применения разработанных методов к расчетам на гидравлическом интеграторе температурных полей в грунте при фильтрации воды по его порам.

Как и ранее, ограничимся здесь случаем одномерного потока при совпадении векторов удельных тепловых потоков за счет конвективного теплопереноса и теплопроводности.

Исходными данными являются начальное распределение температур в зоне фильтрации и закон изменения температуры воды во времени на входе в эту зону.

Расчет начинается с определения интервала времени между корректировками температур в блоках зоны фильтрации по уравнениям (4) или (5) в зависимости от принятого типа разбивки на блоки. Далее описанным выше графическим путем определяется распределение температур в области фильтрации на момент времени $\tau + \Delta t_k$, образующееся за счет конвективного теплопереноса.

Входящие в расчетные уравнения (6) и (7) величины температур $t_{n-1, k-1}$, $t_{n, k-1}$ и $t_{n+1, k-1}$ представляют собой средние за интервал времени Δt_k температуры в $n - 1$, n и $n + 1$ блоках. При расчетах на гидравлическом интеграторе их можно приближенно принимать равными температурам в центрах соответствующих блоков в середине или начале каждого рассматриваемого интервала Δt_k .

После исправления уровней в пьезометрах гидравлического интегратора, соответствующих центрам блоков области фильтрации, прибор включается вновь согласно новому распределению температур, полученному графическим путем, и расчет ведется до середины или начала следующего интервала времени Δt_k .

Затем указанные выше операции повторяются вновь, т. е. снимается распределение температур в блоках области фильтрации в начале или середине интервала Δt_{k+1} , полученное по рас-

чету на гидравлическом интеграторе, и по нему графическим путем определяются изменения температур за счет теплопереноса с водой. Полученное откорректированное распределение температур в области фильтрации выставляется на гидравлическом интеграторе, и расчет на приборе продолжается до начала или середины следующего временного интервала Δt_{k+2} .

Таким образом, весь расчет на гидравлическом интеграторе с учетом теплопереноса фильтрующейся водой сводится к обычному расчету нестационарных температурных полей, но с остановками и поправками уровней в пьезометрах по ходу расчета соответственно тепловому действию фильтрационного потока за определенные промежутки времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгов О. А. Методика исследования температурного режима россыли в длинной замораживающей скважине. В сб. «Научные исследования по разработке угольных и рудных месторождений». М., Госгортехиздат, 1959, стр. 5—18.
2. Ершов Н. Н. Способ ускорения процесса замораживания на больших глубинах. В сб. «Научные исследования по разработке угольных и рудных месторождений». М., Госгортехиздат, 1959, стр. 18—30.
3. Лукьянов В. С. Применение метода гидравлических аналогий к расчетам температурного режима грунтов с учетом переноса тепла фильтрационным потоком и к выводу некоторых критериев подобия. Инженерно-физический журнал, 1962, т. V, № 22, стр. 52—57.
4. Маньковский Г. И. О некоторых работах лаборатории специальных способов проходки горных выработок и водопонижения. М., Изд. Института горного дела, АН СССР, 1962, стр. 9—23.
5. Цуканов Н. А. Роль фильтрации поверхностных и надмерзлых вод и сезона строительства в формировании температурного режима насыпей, возводимых на многолетнемерзлых грунтах. В сб. «Научных сообщений Всесоюзного НИИ транспортного строительства», вып. 8, М., Изд НИИ транспортного строительства, 1963, стр. 103—109.

Е. И. Молчанов

РЕШЕНИЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ ГИДРОАНАЛОГИИ

При исследовании распределения температуры в элементах энергетического оборудования встречаются сложные задачи теплопроводности с многообразными и часто неизвестными граничными условиями. Помимо сложной геометрической формы исследуемого элемента, переменных граничных условий как по времени, так и по его границам решение задач осложняется отсутствием надежных критериальных зависимостей для оценки коэф-

эффициентов теплоотдачи особенно при нестационарных тепловых процессах.

Ограниченное количество экспериментальных данных, которое может быть получено на действующем энергетическом оборудовании, приводит к тому, что для анализа температурных полей необходимо изыскивать такие методы обработки экспериментальных данных, которые позволили бы полностью восстановить температурное поле.

Для решения сложных задач теплопроводности, а также для оценки граничных условий и построения температурного поля по ограниченному количеству экспериментальных данных нами использован гидравлический интегратор конструкции В. С. Лукьянова. Ниже на ряде примеров будет показана методика применения этого интегратора для указанных целей.

Решение задач теплопроводности. В настоящее время начато освоение в эксплуатации крупных газотурбинных установок типа

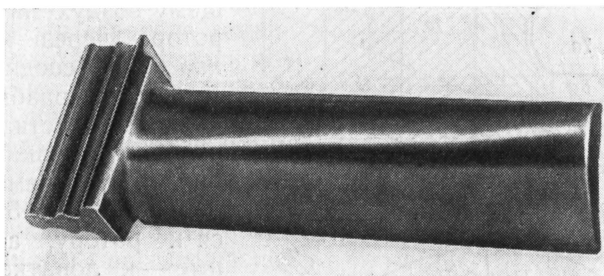


Рис. 1. Лопатка газовой турбины

ГТ-25-700 Ленинградского металлического завода и ГТ-50-800 Харьковского турбогенераторного завода. В этих и ряде других, более мелких, установках применено воздушное охлаждение роторов турбин, при котором охлаждающий воздух пропускается через монтажные зазоры хвостовых соединений лопаток.

В работе [4] показано, что принятая система охлаждения обеспечивает надежное и достаточно глубокое охлаждение ротора, позволяющее изготовлять его из стали перлитного класса. При этом в рабочих лопатках газовой турбины в установившемся тепловом режиме возникают большие радиальные перепады температуры, которые могут вызывать появление термических напряжений, суммирующихся с напряжениями, вызванными силами механического характера. Для анализа напряженного состояния лопатки, выбора оптимальной схемы подвода и температуры охлаждающего воздуха, а также для рационального конструктивного оформления хвостового соединения лопатки необходимо

провести исследования распределения температуры в ней или переходных и стационарном тепловом режимах.

Фотография лопатки показана на рис. 1. Период лопатки первой ступени при работе газотурбинной установки омывается горячим газом с температурой 674°C , а через зазоры хвостового соединения лопатки с ротором пропускается охлаждающий воздух, начальная температура которого может быть 170 или 290°C . Для детального исследования температурного поля в лопатке необходимо решить объемную задачу с учетом всех потоков тепла: от газа к лопатке, от лопатки к охлаждающему воздуху и к гребню ротора через контакт в хвостовом соединении.

Схемы разбивки лопатки и участка ротора на блоки показаны на рис. 2. На схеме номера блоков с 1 по 5 относятся к ротору, а остальные — к лопатке. Общее число блоков равно 106. Из них 18 блоков ($1a-6a, 16-66, 1v-6v$) приходится на гребень диска и прилегающую часть ротора, 30 блоков ($7a-16a, 7b-16b, 7v-16v$) — на хвостовик лопатки, 15 — на полку ($17a-21a, 17b-21b, 17v-21v$) и 43 блока ($22-64$) — на перо лопатки. При этом наиболее мелко перо лопатки разбито в корневом сечении, так как на этом участке наблюдаются наибольшие градиенты температуры.

Как уже отмечалось выше, перо лопатки омывается горячим газом. При этом распределение скоростей газа в межлопаточном канале имеет весьма неравномерный характер. Есть участки, на которых обтекание профиля ламинарное, которое затем переходит в турбулентное течение. Из-за этого по профилю пера лопатки

168

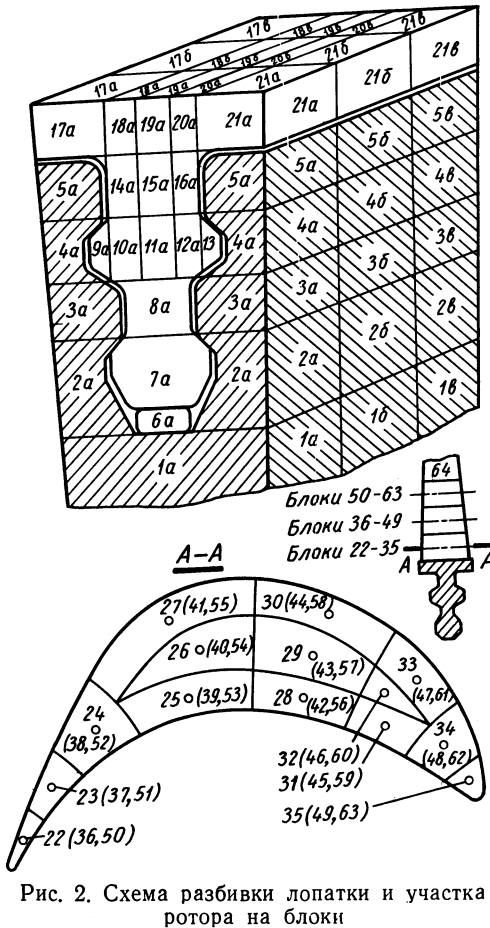


Рис. 2. Схема разбивки лопатки и участка ротора на блоки

ки сильно изменяется значение локального коэффициента теплоотдачи. В ряде работ приведены методы расчета как локальных значений коэффициентов теплоотдачи, так и среднего значения по всему профилю [1, 2, 3]. На рис. 3 показаны значения коэффициентов теплоотдачи, рассчитанные для исследуемой лопатки. При решении задачи учитывалось изменение значений коэффициентов теплоотдачи по профилю лопатки и производилась оценка влияния их величины на распределение температуры как при стационарном, так и при переходных тепловых режимах.

Температура охлаждающего воздуха существенно повышается при прохождении через монтажные зазоры, причем величина нагрева различна по длине щелевого канала и на отдельных участках хвостовика (под полкой, в средней части и под хвостовиком) из-за различия в температуре металла. Поэтому при решении задачи на гидравлическом интеграторе температура воздуха задавалась индивидуально для различных участков поверхности хвостовика и гребня ротора с помощью 11 независимых граничных условий. Нагрев воздуха при прохождении его через щелевые каналы рассчитывался методом последовательных приближений. Для этого сначала проводилось решение на гидравлическом интеграторе, причем температура воздуха во всех каналах была принята одинаковой и равной температуре на входе. На основании полученного температурного поля металла хвостовика лопатки и гребня диска оценивался нагрев воздуха при движении его по каналам и задавались новые значения температуры воздуха на различных участках хвостовика. Затем вновь проводилось решение на гидравлическом интеграторе и снова уточнялся нагрев охлаждающего воздуха. Решение проводилось до тех пор, пока уточнение становилось равным пренебрежимо малой величине. Как правило, для получения окончательного решения достаточно было двух-трех приближений. Нагрев воздуха рассчитывался следующим образом. Поток тепла от i -го блока к воздуху, омывающему его поверхность,

$$Q_i = \frac{t_i - t_e}{R_i},$$

где t_i — температура i -го блока;
 t_e — температура воздуха;

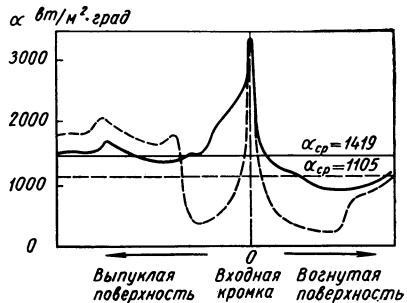


Рис. 3. Распределение коэффициентов теплоотдачи по профилю лопатки газовой турбины:
 — метод ЦКТИ; - - - - полностью турбулизированный пограничный слой

R_i — термическое сопротивление.

Нагрев воздуха при протекании его на рассматриваемом участке щелевого канала определялся из выражения

$$\Delta t = \frac{\Sigma Q_i}{C_o G},$$

где ΣQ_i — сумма потоков тепла от всех блоков, соприкасающихся с охлаждающимся воздухом на данном участке щелевого канала;

C_o — теплоемкость воздуха;

G — расход воздуха, протекающего через данную щель.

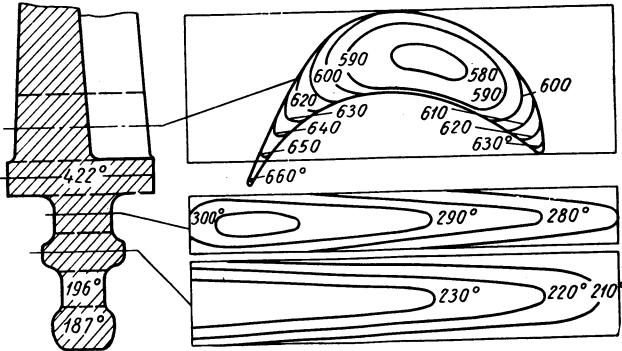


Рис. 4. Распределение температуры в лопатке газовой турбины при установившемся тепловом режиме:

$$t_0 = 177^\circ \text{C}; G_{\text{охл.в}} = 14 \text{ т/ч}; \alpha_{\text{ср}} = 1105 \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град}$$

При проведении расчетов на гидравлическом интеграторе учитывались также изменения теплоемкости и коэффициента теплопроводности материала лопатки с изменением температуры.

Ниже приведены некоторые результаты расчетов по исследованию температурных полей в лопатке газовой турбины типа ГТ-25-700. На рис. 4 показано распределение температуры в различных сечениях лопатки для полного расхода охлаждающего воздуха $G_{\text{охл.в}}$ и среднего значения коэффициента теплоотдачи в межлопаточном канале. На рис. 5 показано изменение максимального перепада температуры между выходной кромкой и центром наиболее толстой части корневого сечения лопатки при нестационарном тепловом режиме для различных значений коэффициентов теплоотдачи в межлопаточном канале (см. рис. 3). Более подробные данные по этой работе можно найти в работе [5].

Оценка коэффициентов теплоотдачи с помощью решения обратных задач. Выше отмечалось, что при решении задач теплопроводности, особенно при неустановившихся тепловых процессах, очень часто отсутствуют надежные данные по значениям

коэффициентов теплоотдачи. Для восполнения этих данных разработана методика, которая позволяет с помощью гидравлического интегратора обрабатывать экспериментальные данные для

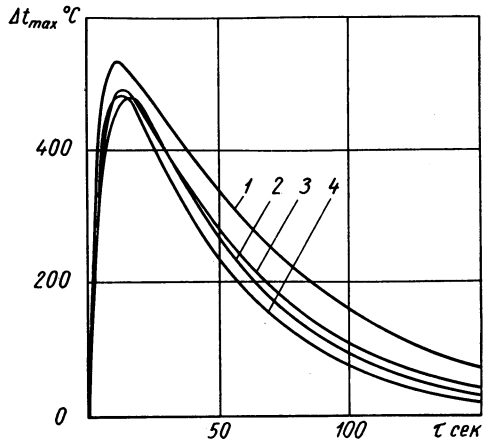


Рис. 5. Изменение максимального перепада температуры в корневом сечении лопатки: 1 — $\alpha_{доп}$ по методу Зысиной — Моложен [1]; 2 — α для полностью турбулизированного пограничного слоя; 3 — $\alpha_{ср} = 1105 \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град}$; 4 — $\alpha_{ср} = 1419 \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град}$

получения значений коэффициентов теплоотдачи при неустановившихся и стационарных тепловых процессах. Эта методика сводится к следующему. Представим, что имеется исследуемый объ-

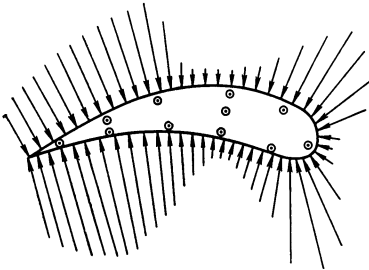


Рис. 6. Схема исследуемого объекта и мест установки термомпар

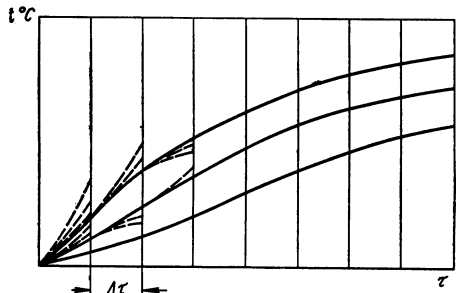


Рис. 7. Схема изменения температур во времени

ект (рис. 6), на котором в некоторых точках изменяется температура (стрелками показаны потоки тепла). Кроме того, предусмотрено измерение температуры среды, омывающей объект. Опытным путем получают график изменения во времени температуры объекта в некоторых точках (сплошные кривые на рис. 7) и температуры среды. На интеграторе собирается гидравлическая модель исследуемого объекта и производится решение для начального, наперед выбранного отрезка времени (штриховые линии). При этом температура среды на интеграторе изменяется по

закону, полученному из эксперимента, а физические свойства материала объекта изменяются в соответствии с температурой. Полученное решение сравнивается с экспериментальными данными для выбранного отрезка времени. В зависимости от того, какая получилась разность между этими величинами, — положительная или отрицательная — соответственно изменяют граничные гидравлические сопротивления, и решение на интеграторе повторяется вновь с начального момента. Затем снова производится сравнение полученных результатов с экспериментальными данными (рис. 7). Такие операции повторяются до тех пор, пока расчетные результаты, получаемые на интеграторе, не совпадут с экспериментальными данными. После этого переходят к обработке

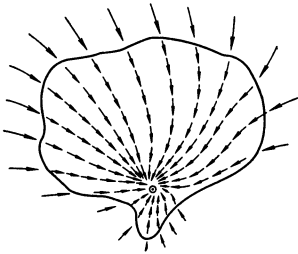


Рис. 8. Схема тепловых потоков

экспериментальных данных для следующего участка кривой. Технология решения в этом случае такая же, как и в предыдущем. Таким образом, последовательно решая указанные задачи для всей кривой, получают изменение во времени значения коэффициентов теплоотдачи на различных участках исследуемого объекта. Следует отметить, что для одномерных задач этот метод доказывается математически строго [7, 8].

Когда решаются задачи, в которых тепло распространяется в двух- или трехмерном пространстве, такая методика является более грубой, так как тепло, аккумулирующееся в рассматриваемой точке, может подходить к ней как от поверхности, так и от других частей объекта. При этом влияние изменения значения коэффициента теплоотдачи на изменение температуры в рассматриваемой точке будет тем меньше, чем больший тепловой поток подходит к точке из внутренних слоев объекта (рис. 8). Практическое значение абсолютной величины коэффициента теплоотдачи будет играть все меньшую роль в формировании температурного поля в этом районе исследуемого объекта. Для оценки коэффициента теплоотдачи в рассматриваемом случае потребуется большее количество экспериментальных точек.

Таким образом, изложенная методика позволяет, с одной стороны, оценить величины коэффициента теплоотдачи, а с другой стороны — выявить влияние этой величины на формирование температурного поля в исследуемом объекте. По этой методике были оценены значения коэффициентов теплоотдачи цилиндрической поверхности барабанного цельнокованого ротора газовой турбины к поверхности направляющей лопатки газовой турбины [6] при разных скоростях вращения ротора (рис. 9) и выполнены другие работы.

Использование экспериментальных данных для решения задач теплопроводности. Часто при проведении экспериментальных работ на действующем оборудовании не представляется возможным поставить достаточное количество датчиков, чтобы получить ясную картину распределения температуры в исследуемом объекте. В большинстве случаев этими датчиками являются термомпары, которые устанавливаются на поверхности исследуемого объекта. Когда объект омывается средой, имеющей переменную температуру на различных участках, применение метода по оценке коэффициента теплоотдачи, описанного в предыдущем разделе, не представляется возможным, так как задание граничных условий (температуры газа) весьма затруднительно. Для того чтобы получить более полную картину изменения температуры в различных точках исследуемого объекта, нами был применен гидравлический интегратор. При этом по имеющимся экспериментальным данным была восстановлена температура поверхности объекта и закон изменения ее по времени.

Таким образом, на гидравлическом интеграторе обычно решаются задачи теплопроводности, но при этом используются граничные условия первого рода, т. е. закон изменения во времени температуры поверхности исследуемого объекта должен быть задан. В результате этих решений получают распределение температуры в исследуемом объекте за весь период нестационарного процесса, а также при установившемся тепловом режиме.

Примером решения такого рода задач может служить исследование распределения температуры в роторе газовой турбины типа ГТ-700-4. В этой турбине применена струйная система охлаждения ротора. На периферийную часть диска через несколько сопел подается охлаждающий воздух, а к торцовым поверхностям диска между соплами прорываются горячие газы. Поэтому на торцовых поверхностях у участков диска наблюдается значительная разница в температуре среды. Кроме измерения температуры среды, проводились измерения температуры поверхности диска. На рис. 10 показан график изменения температуры в раз-

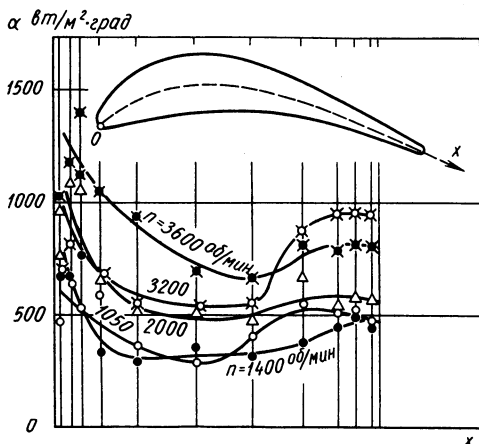


Рис. 9. Изменения коэффициента теплоотдачи ротора турбины к поверхности лопатки

личных точках поверхности диска. По этим данным были воспроизведены изменения температуры по всем поверхностям диска, которые затем были использованы как граничные условия при решении на гидравлическом интеграторе. На рис. 11 показаны не-

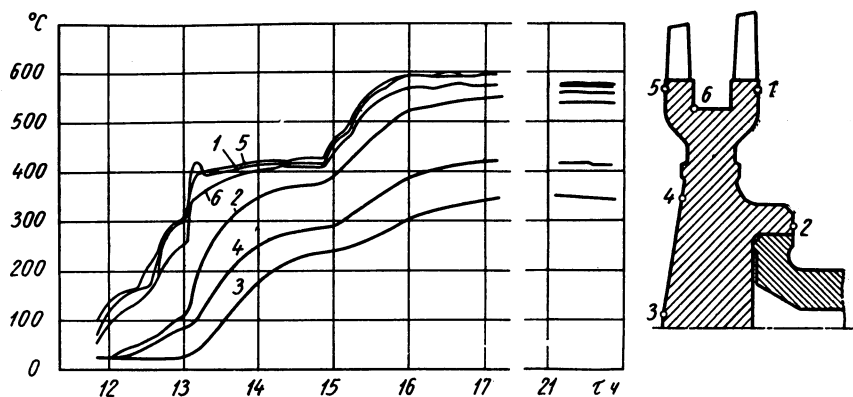


Рис. 10. Изменение температур на поверхности диска турбины во времени

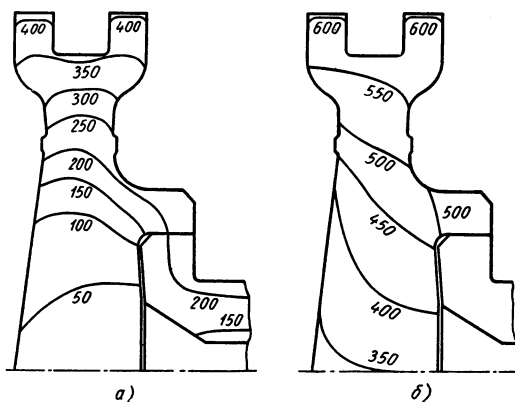


Рис. 11. Распределение изотерм в диске:
а — нестационарный режим; б — стационарный режим

которые результаты этих решений. Приведено распределение изотерм в момент возникновения максимального радиального перепада температуры, а также распределение при установившемся тепловом режиме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баммерт К. Теплоотдача при обтекании реактивных лопаток, охлаждаемых изнутри. «Вопросы реактивной техники», № 6, 1953, стр. 96—124.
2. Гребер Г., Эрк С., Гринулль У. Основы учения о теплообмене. М., Изд-во иностр. лит., 1958, стр. 301—303

3. Зысина-Моложен Л. М. Приближенный метод расчета теплового пограничного слоя. ЖТФ, т. 29, № 5, 1959.
4. Молчанов Е. И., Плоткин К. Р. Температурное и напряженное состояние ротора ГТ-25-700 при пуске и установившихся режимах. «Энергомашиностроение», № 1, 1963, стр. 19—23.
5. Молчанов Е. И., Плоткин Е. Р., Гончаренко З. Ф. Исследование температурных полей в рабочей лопатке газовой турбины типа ГТ-25-700. «Энергомашиностроение», № 1, 1965, стр. 4—7.
6. Плоткин Е. Р., Молчанов Е. И. Теплоотдача к поверхности лопаток газовых турбин. «Теплоэнергетика», № 11, 1964, стр. 72—75.
7. Sperry E. M. Haji—Sheikh A, Lundgren T. S. «The Invers Problem in Transient Heat Conduction». Trans. of the ASME, v. 31, Series E, N 3, 1964.
8. Stolz G. Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes. Trans. of the ASME, v. 82, Series C, 1960.

Л. В. Князев

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА НА КОМБИНИРОВАННЫХ МОДЕЛЯХ

Достоинства и недостатки сеточных моделей и моделей «сплошная среда» рассмотрены в работах [2, 3]. Комбинированные модели позволяют при определенных условиях сочетать достоинства моделей обоих типов, расширять их возможности и избежать ряда недостатков, присущих каждой в отдельности. В лаборатории электро моделирования Одесского института инженеров морского флота для решения задач тепло- и массопереноса используются комбинированные модели, состоящие из элементов сетки и электропроводной бумаги.

Комбинированная модель позволяет резко сократить потребное количество дискретных сопротивлений по сравнению с сеточными моделями, что весьма существенно при решении трехмерных задач, особенно нестационарных. Во многих случаях удается точнее отразить геометрию конструкции, а также переменные во времени и пространстве граничные условия.

Комбинированная модель позволяет резко сократить объем вычислений при расчете модели и обработке результатов экспериментов (определение изотерм и других характеристик теплового поля). Сравнительно низкая стоимость оборудования и простота в эксплуатации позволяют применять такие модели в производственных условиях.

Как будет показано ниже, комбинированные модели позволяют так же, как и «чисто» сеточные модели, совместно решать не-

которые задачи о тепловом состоянии твердого тела и омывающей его среды — теплоносителя.

Методика составления комбинированной модели сводится к следующему.

Исходя из задач исследования, выбираются плоскости сечения конструкции, в которых картины тепловых полей являются наиболее характерными.

На рис. 1 показаны элементы двух типов комбинированных моделей. Тип А (рис. 1, а) соответствует случаю, когда плоско-

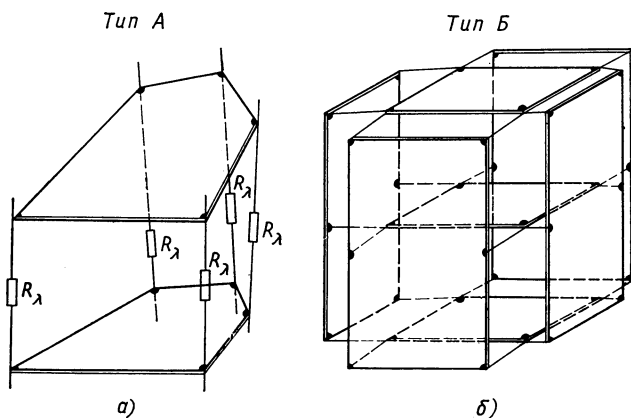


Рис. 1. Элементы двух типов комбинированных моделей:
а — с проволочными сопротивлениями и сечениями из электропроводной бумаги; б — с сечениями из электропроводной бумаги, отражающими теплопроводность тела во всех трех направлениях

сти, выполненные из электропроводной бумаги, соединены между собой дискретными сопротивлениями R_λ . В модели типа Б (рис. 1, б) дискретные сопротивления, моделирующие термическое сопротивление тела, заменены электропроводной бумагой. Таким образом, термическое сопротивление тела во всех плоскостях моделируется сопротивлением бумаги. В узлах плоскостей размещаются винтовые контакты несложной конструкции, связанные проводниками, имеющими малые сопротивления.

Пример использования модели типа А для исследования теплового состояния сплошной лопатки газовой турбины и части диска дан в работе [4]. В работе Л. А. Коздобы и Л. В. Князева приведен случай, когда с помощью комбинированной модели типа Б была решена задача о поле температур в лопатке газовой турбины, охлаждаемой с помощью движения теплоносителя во внутренних каналах. Требовалось выявить влияние многих факторов, в том числе переменных условий охлаждения в различных внутренних каналах. Модель-сетка для решения подобной задачи потребовала бы тысяч сопротивлений. В описываемой же модели

бумажные сопротивления полностью отразили «тело» модели, а дискретными сопротивлениями задавались лишь граничные условия на части участков.

Способ согласования элементов сеточной и бумажной частей комбинированной модели кратко изложен в работе [4]. Следует обратить внимание на некоторые особенности выбора бумаги. В случае, когда электропроводная бумага выбрана с малым удельным сопротивлением, в некоторых частях модели окажется затруднительной регулировка граничных потенциалов, а при слишком большом удельном сопротивлении значения сопротивлений на сеточной части модели оказываются весьма высокими, что затрудняет набор сетки и ее перенастройку при переходе с одного варианта решения на другой.

Для отработки методики моделирования на комбинированных моделях были поставлены многочисленные контрольные опыты с целью выявления происхождения ошибок и способов их снижения. Было установлено, что

ошибки связаны со свойствами бумаги и с условиями дискретного подвода граничных условий и внутренних сопротивлений, моделирующих источники (стоки) элементарного объема и тепло, затраченное на его нагрев (охлаждение).

На рис. 2 показана зависимость ошибки замера δ в точках комбинированной модели с дискретным подводом граничных условий. Здесь U — потенциал, замеренный в точках комбинированной модели с дискретным подводом, $U_{греб}$ — потенциал, замеренный в тех же точках на модели при подведении граничных условий способом «гребенка», h — шаг узлов подвода граничных условий, L — характерный размер тела. Видно, что с увеличением числа контактов на единицу длины границы тела (снижением h/L) ошибка падает. Интересно отметить, что, несмотря на то, что среди точек, по которым строилась кривая, были точки как на границах, так и внутри тела и значение потенциала U для них было разным, погрешность хорошо описывается линейной зависимостью.

Проведенные опыты показали, что при $h/L < \frac{1}{8}$ решения, полученные на комбинированных и на сеточных моделях, практически совпадают. Этот вывод был сделан при решении стационарных и нестационарных задач. В последнем случае дискретно подводились не только R_a на границах, но и R_t , подключавшиеся

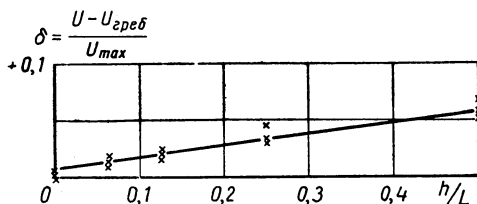


Рис. 2. Зависимость ошибки измерения потенциала в узловых точках комбинированной модели от шага дискретного задания граничных условий

в узловые точки внутри тела. Шаг был одинаковым как для R_a , так и для R_t . При грубой разбивке точность заметно снижается. При увеличении h/L в 8 раз ($1/16$ до $1/2$) ошибка возрастала в 8—12 раз.

На рис. 3 показано влияние степени дискретности подвода на характер поля для случая плоской контрольной задачи (для поперечного сечения пластины с граничными условиями III рода). Даны замеры на границе тела (участок приложения R_a) и замеры на небольшом удалении от нее ($1/8 L$ от наружной поверхно-

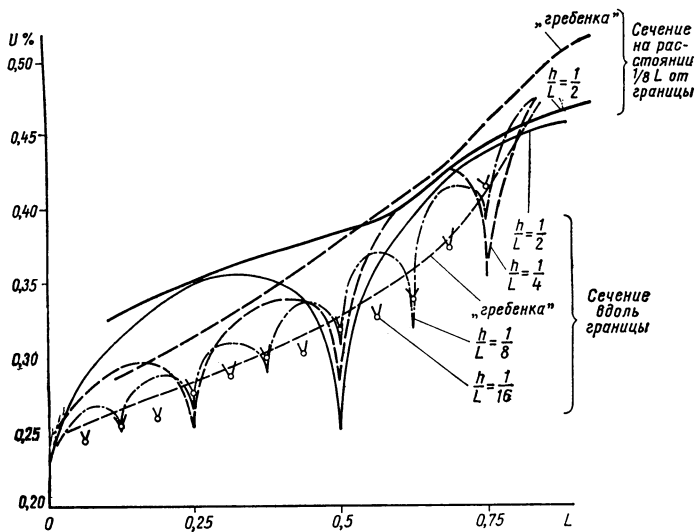


Рис. 3. Влияние относительного шага h/L на решения модели в двух сечениях пластины

сти). Здесь L — размер стороны поперечного сечения. Предельное состояние на границе показано тонкой штриховой линией. Видно, что по мере уменьшения шага подвода R_a потенциал приближается к истинному значению и дугообразный характер кривых устраняется. Однако эти типичные искажения поля носят местный характер и не распространяются в глубь сечения, что видно из плавного характера кривой потенциала даже при крайне грубой разбивке ($h/L = \frac{1}{2}$). Для сравнения дана кривая в том же сечении при хорошем исполнении модели («гребенка»).

Опыты показали, что искажения поля температур распространяются на область, граница которой отстоит от кромки контакта на диаметр контакта. Степень искажения поля зависит от перепада напряжений в окрестности контакта и от абсолютного значения напряжения в окрестности точки. Наиболее вероятно появление искажения температурного поля при малых потенциалах.

Это обстоятельство следует учитывать при планировании опытов с построением изотерм при малых потенциалах, особенно на начальных шагах нестационарных задач с прогревом. Отсутствие искажений изотерм в окрестности точек с дискретным подводом служит косвенным свидетельством хорошего выбора шага точечных подводов.

Помимо снижения точности замера в точках и искажения характера поля в окрестностях узловых точек повышение дискретности (увеличение шага узлов) снижает также и достоверность каждого отдельного измерения. Стабильность результатов в узловых точках от отношения h/L практически не зависит, однако на поверхности бумаги между узлами разброс замеров возрастает, достигая максимума между узлами.

Таким образом, при проектировании модели выбору относительного шага h/L следует уделять достаточное внимание.

Точность решения на комбинированных моделях зависит также от неоднородности бумаги, от стабильности ее свойств во времени и от идентичности частей модели, теоретически имеющих одинаковую форму и размеры.

Электропроводная бумага, поставляемая с серийными интеграторами, может обладать значительной неоднородностью. Для устранения этого недостатка часто прибегают к увеличению числа слоев бумаги. С целью выявления эффективности такого способа устранения неоднородностей были решены контрольные опыты на модели, составленной из 1, 2, 3 и 4 слоев бумаги, хотя обычно в связи с большой затратой времени на изготовление сечений ограничиваются 2 слоями бумаги. Попутно отметим, что проводимость многослойной модели нелинейно зависит от числа слоев, но погрешность, связанная с этим обстоятельством, невелика и ею пренебрегают (кроме случаев, когда число слоев более 3). В результате опытов было выяснено, что разброс замеров на однослойных моделях значительно выше, чем на многослойных.

Стабильность свойств электропроводной бумаги характеризуется рис. 4, где даны кривые изменения удельного сопротивления бумаги (ком на квадрат) в зависимости от времени года и от относительной влажности в помещении. Наблюдения за образцами бумаги велись более полутора лет. Видно, что резкое изменение влажности оказывает определенное влияние на свойства бумаги, но в пределах относительной влажности от 40 до 70% электрические свойства бумаги меняются незначительно и не приводят к значительным ошибкам.

Комбинированные модели позволяют совместно решать некоторые задачи о тепловом состоянии твердого тела и омывающей его среды — теплоносителя.

Обычно определение температуры охлаждающей среды проводят путем балансовых расчетов на основе знаний расхода теп-

лоносителя, конструктивных элементов узла, начальных параметров и температур поверхностей. При этом температуры поверхностей не всегда поддаются точной оценке до проведения подробных расчетов и пробного опыта на электромоделях. Соответственно ориентировочными могут быть и расходы среды. Таким образом, тепловое состояние среды, когда оно сильно зависит от теплового состояния тела, требует решения по нескольким приближениям.

Такой метод во многих случаях оправдывает себя, но часто оказывается неудобным. В связи с этим был использован метод электромоделирования на комбинированной модели, при кото-

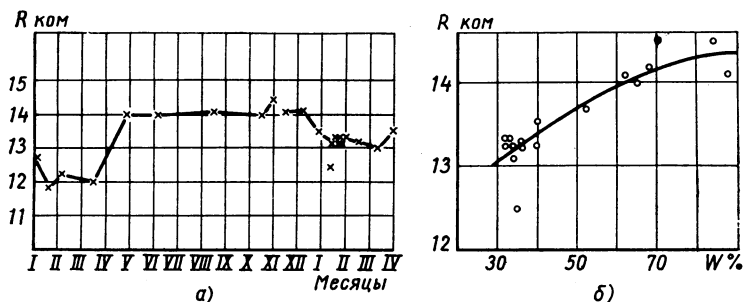


Рис. 4. Зависимость удельного сопротивления электропроводной бумаги:

а — от времени года; *б* — от относительной влажности в помещении

ром совместно работали две, связанные друг с другом, модели. Одна решала задачу о тепловом состоянии тела (лопатка с внутренними каналами), а вторая давала значения средней температуры среды, протекающей в охлаждающих каналах. При этом каждая из моделей имела часть граничных условий, независимых от второй модели (например, температура газа для лопатки, температура воздуха на входе в канал для охлаждающей среды). Другая часть граничных условий получалась автоматически и была результатом совместной работы обеих моделей (температура на внутренней поверхности каналов и средняя температура охлаждающей среды вдоль канала).

Способ построения модели, решающей задачу теплопереноса для охлаждающей среды, основан на подборе такого мнимого твердого тела, которое, будучи помещенным в объем охлаждающего канала, давало бы тепловой эффект, эквивалентный движущегося теплоносителя. При этом температуры как на поверхностях контакта этого твердого тела, так и на свободных его концах совпадают с температурами при реальном теплоносителе. В дальнейшем задача определения температуры среды решается путем нахождения температурного поля такого твердого

тела обычным методом решения задачи теплопроводности на основе ЭТА.

На рис. 5 показаны схемы решения описываемой задачи для глухого и сквозного каналов. Предполагается, что теплоноситель в первом случае — жидкость, во втором случае — воздух. В первой схеме (рис. 5, а) внутренняя сетка не содержит сопротивлений R_α . Это объясняется тем, что значения α велики и термическим сопротивлением теплообмена на внутренней поверхности можно пренебречь. Вторая схема требует расчета как R_α , так и $R_{\lambda_{экв}}$. Способ нахождения $R_{\lambda_{экв}}$ основан на сравнении количества тепла, переданного конвекционным теплопереносом с теплопередачей чистой теплопроводностью в той же среде, но неподвижной. Такие приемы известны для некоторых случаев теплообмена (воздушная прослойка, движение в канале) [1, 5, 6]. Для случая, представленного на рис. 5, б, целесообразно пользоваться простой зависимостью, получаемой из условия равенства тепла, поступившего через поверхность канала и переданного вдоль него:

$$\lambda_{экв} = \alpha \frac{Pl^2}{f} \frac{\Delta t}{\delta t},$$

где α — средний коэффициент теплоотдачи;

P — периметр канала;

l — длина канала;

Δt — средний температурный напор;

f — площадь поперечного сечения канала;

δt — разность температур на входе и выходе из канала.

Признаком правильности оценки $\lambda_{экв}$ для конкретной задачи является совпадение значений Δt и δt , принятых при предварительном расчете $\lambda_{экв}$ и полученных моделированием.

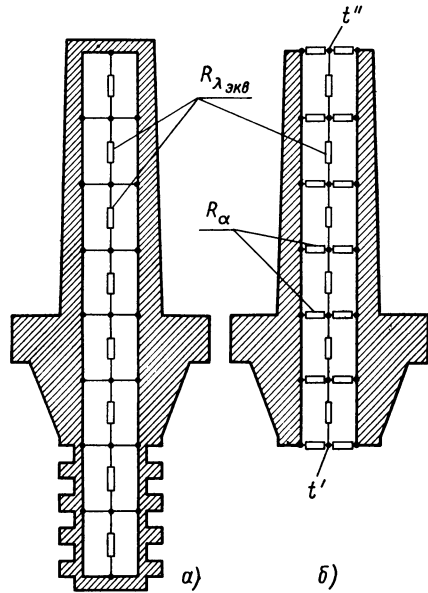


Рис. 5. Модели, совместно решающие задачу по определению температуры лопатки газовой турбины и средней температуры теплоносителя во внутреннем канале:

а — глухой канал при двухконтурной системе охлаждения; б — сквозной канал при одноконтурной системе охлаждения с нагревом теплоносителя от t' до t''

Сравнение результатов, определенных по обычному методу моделирования и по описанному методу присоединенной сетки, показало хорошее совпадение результатов по температурам лопатки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баум В. А. Исследование распределения температуры воды, протекающей в кассете водоводяного реактора. Тепло- и массоперенос. Т. III. Общие вопросы теплообмена, М.—Л., Госэнергоиздат, 1963, стр. 589—596.
2. Карплюс В. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. Пер. с англ. Под ред. Л. И. Гутенмахера. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 157—183.
3. Коздоба Л. А. Электромоделирование температурных полей в деталях судовых энергетических установок. Л., «Судостроение», 1964, стр. 6—15.
4. Коздоба Л. А. и Князев Л. В. Применение объемных комбинированных электромоделей для исследования температурных полей ротора газовой турбины. «Теплоэнергетика», № 5, 1965, стр. 36—39.
5. Михеев М. А. Основы теплопередачи. М.—Л., Госэнергоиздат, 1956, 200 стр.
6. Freser I. R., Oakley D. I. Turbulent Free-Convection, Heat-Transfer Rates in a Horizontal Pipe. Transactions of the ASME, 1957, 79, № 5, pp. 1185—1191.

В. Е. Константинова

РАСЧЕТ ВОЗДУХООБМЕНА И ОТОПИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ЗДАНИЙ АНАЛОГОВЫМ МЕТОДОМ

Гидравлический расчет систем с применением аналоговых методов необходим при разработке следующих основных вопросов отопительно-вентиляционной техники:

1. При расчете воздухообмена во всем здании, как в единой аэродинамической системе. Такой расчет дает возможность избежать при проектировании зданий серьезных погрешностей, связанных с выбором схем вентиляции, планировок, определением надбавок к теплопотерям на инфильтрацию наружного воздуха и пр. Эти вопросы особенно важны при проектировании зданий повышенной этажности, школ, больниц, лабораторий.

2. При переходе к изготовлению систем из унифицированных, стандартных элементов систем вентиляции и различных систем отопления.

3. Для выявления устойчивости работы систем отопления и вентиляции при изменении параметров среды (температуры, общего расхода, расхода в отдельных участках и пр.). Переменный режим создается при регулировании систем отопления в зависи-

мости от погоды, при работе различных потребителей тепла, объединенных в общую систему (например, отопления, горячего водоснабжения и вентиляции), при отключении части участков от системы и пр.

Рассматриваемые задачи расчета воздухообмена и отопительных систем здания имеют специфические особенности и сложности, не присущие обычным расчетам гидравлических систем (водопровода, теплофикации и пр.), выполняемым аналоговыми методами.

При расчете воздухообмена зданий одной из особенностей является то, что в расчетные уравнения входят не только квадратичная зависимость перепада давлений от расхода

$$\Delta P = sG^2, \quad (1)$$

характерная для большинства гидравлических систем, но и смешанная, линейная и квадратичная

$$\Delta P = AG + BG^2, \quad (2)$$

где ΔP — перепад давлений;
 s, A, B — удельное сопротивление;
 G — расход среды.

Вторая особенность — большое количество граничных давлений (до 30 значений). Задание таких граничных давлений сложно, поскольку они должны учитывать самые разнообразные факторы, влияющие на воздухообмен: работу вентиляционного оборудования (вентиляторов, дефлекторов) с учетом их аэродинамических характеристик, действие ветра, гравитационное давление, возникающее за счет разности температур воздуха снаружи здания и в различных помещениях и вентиляционных системах внутри здания.

Третья особенность — большой диапазон изменения величин удельных сопротивлений в одной задаче (порядка 1 : 10 000).

Четвертая особенность — резко выраженная непланарность схемы, т. е. множество пересечений участков. Это обстоятельство ограничивает выбор аналоговых устройств и затрудняет расчет такой схемы на электронных вычислительных машинах.

Для расчета воздухообмена зданий в НИИ санитарной техники создан специальный стенд гидравлической аналогии. Стенд сочетает два типа установок гидравлической аналогии: секции гидравлического интегратора В. С. Лукьянова, предназначенные для аналогии линейных зависимостей, и элементы для аналогии квадратичной зависимости (1) по типу, разработанному И. Д. Шулеповой.

Стенд состоит из большого количества переливных бачков, представляющих собой аналоги граничных давлений. Расход воды в системе гидроанalogии является аналогом расхода воздуха в рассчитываемой системе. В качестве аналогов сопротивлений

участков с квадратичной зависимостью используются диафрагмы из латуни толщиной 0,5 мм с диапазоном удельных сопротивлений 1 : 10 000. Диафрагмы заключены в патрон, изготовленный из органического стекла. На стенде размещается до 130 таких патронов.

Для аналогии двучленной зависимости (2) используется последовательное соединение трубок сопротивлений гидравлического интегратора и патронов с заключенными в них диафрагмами. Граничные и искомые давления определяются по пьезометрическим трубкам, присоединенным к схеме и размещенным на специальных экранах.

Создана специальная методика определения граничных давлений. При этом в отдельных случаях приходится вводить помимо внешних «внутренние» граничные условия, требующие специальной настройки схемы в процессе работы. Преимуществами метода гидравлической аналогии в данном случае являются простота и наглядность расчета и установки, относительная небольшая ее стоимость, а также гибкость в работе, возможность решения задачи в самой различной постановке. Однако первоначальная сборка и отладка схемы трудоемки.

Стенд гидроанalogии НИИ санитарной техники непрерывно эксплуатируется свыше 5 лет. На стенде решены следующие основные серии задач, связанных с исследованием воздухообмена зданий:

1. Расчет воздухообмена в жилых зданиях высотой в 2—5 этажей с различными планировками секций и схемами вентиляции.
 2. Исследования воздухообмена в школах разных типов при различных вентиляционных устройствах.
 3. Расчет воздухообмена и определение надбавок на инфильтрацию наружного воздуха для зданий высотой в 12—16 этажей.
- Эта работа применительно к различным типам зданий и различным схемам вентиляции продолжается и в настоящее время.

Отдельные серии задач включают в себя до 300 вариантов. На основании проделанных расчетов дан ряд рекомендаций, используемых в практике проектирования и при составлении нормативных документов.

Методика расчета систем водяного отопления с применением аналоговых устройств разработана в НИИ санитарной техники в 1964—1965 гг. Основную сложность при ее создании представило математическое описание процесса в виде, удобном для применения аналоговых методов. В данном случае гидравлический расчет осложнялся взаимосвязью распределения температур в системе и скорости движения воды по отдельным ее участкам, что обуславливается гравитационным давлением в системе и вызывает необходимость совместного выполнения теплового и гидравлического расчетов системы.

Кроме того, представляет сложность включение в расчет данных по местным сопротивлениям тройников и крестовин. Имеющиеся данные были переработаны в аналитические зависимости по типу уравнения (2).

Наконец, расчет осложнен большим числом расчетных участков, достигающим 500—1000 для 5-этажного здания. Непосредственное включение всех этих участков в схему аналогии сделало бы ее слишком громоздкой. В связи с этим предложено расчленение расчета на два этапа. Первый этап — определение характеристик стояков, входящих в систему. Второй этап — расчет всей системы в целом с включением обобщенных характеристик стояков. Число расчетных участков при такой методике значительно сокращается (до 100—120 на здание).

В качестве аналоговых устройств для расчета систем отопления вполне пригоден и использовался имеющийся в НИИ санитарной техники стенд гидроанalogии, о котором говорилось выше.

Для расчетов применялась также электро моделирующая установка, предназначенная только для расчета вентиляционных сетей в шахтах и в связи с этим не вполне отвечающая указанным задачам.

Для широкого внедрения аналоговых методов гидравлических расчетов в практику проектирования и научно-исследовательской работы необходимо организовать заводской выпуск аналоговых устройств, предназначенных для гидравлического расчета различных систем, включая системы воздухообмена и отопления зданий.

Ю. Д. Денискин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ВАННЕ

В различных областях техники значительное количество задач описывается уравнением нестационарной теплопроводности

$$\nabla^2 T(x, y, t) = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} - \frac{1}{\lambda} Q, \quad (1)$$

где $T(x, y, t)$ — функция распределения температурного поля;
 a — температуропроводность;
 λ — коэффициент теплопроводности;
 Q — плотность внутренних источников тепла.

В общем случае аналитическое решение уравнения (1) отсутствует. Поэтому для определения поля $T(x, y, t)$ используют приближенные методы, вычислительные или аналоговые [1, 2, 7], причем из аналоговых методов наиболее часто употребляются методы сеток сопротивлений [1, 7, 3, 4]. Как вычислительные методы, так и методы сеток сопротивления имеют недостатки, одним из которых является получение решения в виде дискретно задаваемых полей $T(x, y, t)$ и $\text{grad } T(x, y, t)$.

Электролитическая ванна позволяет получать решение в виде непрерывного распределения потенциалов $\varphi(x, y)$ и $\text{grad } \varphi(x, y)$. В соответствии с этим представляет интерес использование электролитической ванны при решении уравнения (1). Если не требуется высокая точность решения (менее 1—3%), что на практике часто имеет место, то применение электролитической ванны имеет некоторые преимущества и в смысле простоты воспроизведения областей сложных конфигураций, и меньшего количества регулировочных элементов, погрешности решения из-за конечноразностной аппроксимации временной производной и т. п.

Моделирование задач нестационарной теплопроводности в трехмерной электролитической ванне

Трехмерной электролитической ванной назовем электролитическую ванну, в которой решение уравнения (1) производится по методу, описанному И. М. Тетельбаумом и Я. А. Эльмеша-дом [5].

Идея метода состоит в следующем: в тонком слое электролита в ванне распределение потенциалов описывается уравнением, подобным уравнению (1), в котором производная по времени представлена отношением конечных приращений, при этом уровень электролита определяет величину временного интервала

$$\Delta t = \frac{k^2}{2a} \Delta z,$$

где Δz — уровень электролита;

k_l — коэффициент подобия природы и модели.

Если на дне модели воспроизвести распределение потенциалов в некоторый момент времени t_n , то на поверхности электролита установится распределение потенциалов в момент времени $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Таким образом, процесс решения уравнения (1) в трехмерной электролитической ванне аналогичен процессу Либмана [6, 7], причем все три пространственные координаты в электролитической ванне соответствуют трем координатам уравнения (1): двум пространственным и одной временной. Распределение внутренних источников тепла учитывается соот-

ветствующей регулировкой распределения потенциалов по дну модели [5].

Дискретное представление времени позволяет легко вмешаться в процесс решения, например, с целью учета различного рода временных зависимостей и нелинейностей.

При учете изменяющихся во времени граничных условий требуется располагать по высоте электролита ряд электродов, на которые задаются различные потенциалы (рис. 1). Это вызвано тем, что высота расположения граничного электрода по отношению к дну ванны может рассматриваться как соответствующая определенному моменту времени в пределах временного интервала:

$$t = \Delta t \left(\frac{z}{\Delta z} \right)^2.$$

Непосредственные измерения в электролитической ванне подтверждают справедливость этого выражения, если Δt вычислено с учетом дискретного распределения потенциалов по дну ванны [5]:

$$\Delta t = \frac{k_l^2}{2a} \left(\Delta z + \frac{h}{\pi} \ln 2 \right)^2,$$

где h — расстояние между центрами придонных квадратных электродов.

При выборе числа граничных электродов в пределах слоя электролита необходимо руководствоваться правилом, выведенным из эксперимента; каждый граничный электрод должен обслуживать слой электролита, в пределах которого граничная функция меняется не более чем на 10%.

Вследствие дискретизации временной координаты погрешность решения данного метода получается порядка Δt^2 , что является достоинством метода по сравнению с методом сетки сопротивлений, при котором указанная погрешность имеет порядок Δt . Кроме того, данный метод решения позволяет осуществлять регулировку временного интервала простым изменением уровня электролита. Основной недостаток метода заключается в ограниченности изменения уровня электролита и, следовательно, в невозможности регулировки величины временного интервала в широких пределах.

Моделирование задач нестационарной теплопроводности в двухмерной электролитической ванне

Расширить пределы регулировки величины временного интервала можно, если использовать электролитическую ванну с

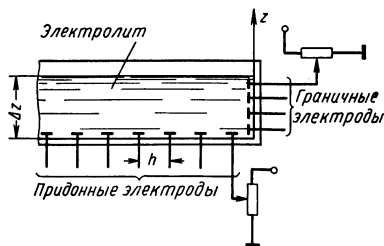


Рис. 1. Трехмерная электролитическая ванна

короткими придонными токовводами, предложенную для моделирования внутренних источников поля В. С. Лукошковым.

Рассмотрим распределение потенциалов на поверхности электролита в горизонтальной электролитической ванне, которое описывается уравнением

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = - \frac{j(x, y)}{\sigma \Delta z}, \quad (2)$$

где σ — проводимость электролита;

$j(x, y) \cong \frac{1}{h^2} \left(I - \frac{\varphi_{\partial}(x, y)}{R'_{yT}} \right)$ — поверхностная плотность источников (рис. 2, а);

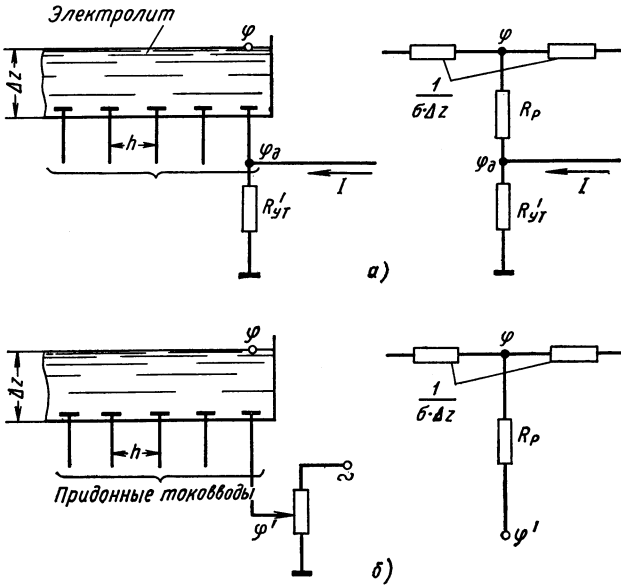


Рис. 2. Варианты воспроизведения начальных условий и внутренних источников тепла в двухмерной электролитической ванне и эквивалентные схемы двухмерной электролитической ванны:

а — путем введения тока; б — путем подачи потенциала

- h — расстояние между придонными токовводами;
 - I — вводимый ток;
 - R'_{yT} — сопротивление утечки с придонного токоввода на землю;
 - φ_{∂} — потенциал придонного токоввода;
- Учитывая, что

$$\varphi_{\partial} = \varphi + j(x, y) h^2 R_p,$$

где φ — потенциал точки поверхности электролита над придонным токовводом;

R_p — сопротивление растекания придонного токоввода, получаем

$$j(x, y) \cong \frac{IR'_{yT} - \varphi}{h^2(R_p + R'_{yT})}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (2), получим

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\sigma \Delta z h^2} \left[\varphi \frac{1}{R_p + R'_{yT}} - I \frac{R'_{yT}}{R_p + R'_{yT}} \right]. \quad (3)$$

Выражение (1) представим в виде

$$\nabla^2 T_n \cong \frac{1}{a} \left[\frac{T_n}{\Delta t} - \frac{T_{n-1}}{\Delta t} \right] - \frac{Q}{\lambda}. \quad (4)$$

Из сравнения формул (3) и (4) следует, что при

$$\Delta t = \frac{1}{a} \sigma \Delta z h^2 k_l^2 (R_p + R'_{yT}) \quad (5)$$

справедливо равенство

$$I = \left(\frac{T_{n-1}}{a \Delta t} + \frac{Q}{\lambda} \right) \frac{a \Delta t}{k_T (R_p + R'_{yT})}, \quad (6)$$

где k_l — коэффициент подобия природы и модели;

$k_T = \frac{T}{\varphi}$ — масштабный коэффициент.

Отсюда следует, что при выполнении условий (5) и (6) на поверхности электролита воспроизводится поле в момент времени t_n .

Для получения поля в момент времени $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ достаточно увеличить вводимый ток на величину $\frac{T_n - T_{n-1}}{k_T (R_p + R'_{yT})}$,

в момент времени $t_{n+2} = t_{n+1} + \Delta t$ — на величину $\frac{T_{n+1} - T_n}{k_T (R_p + R'_{yT})}$

и т. д. Тот факт, что $\Delta t \cong \Delta z h^2$, позволяет говорить о возможности регулировки величины временного интервала не только уровнем электролита, но и соответствующим переключением придонных токовводов.

Сопротивление R'_{yT} влияет на диапазон регулировки величины временного интервала и на погрешность решения, определяемую неточностью установки уровня электролита. Последняя уменьшается с ростом R'_{yT} . С другой стороны, наличие R'_{yT} означает появление погрешности решения, определяемой разли-

чем температурных коэффициентов R'_{yT} и $\frac{1}{\sigma}$, которое не играет роли, если на придонные токовводы задавать потенциалы (рис. 2, б). Расчеты показывают, что

$$R_p = \frac{1}{4\pi\sigma} \left[\frac{1}{r_s} - 2 \frac{\ln 2}{\Delta z} \right],$$

где r_s — есть радиус сферического (или с достаточно хорошим приближением окороткого цилиндрического) токоввода;

r_s — много меньше h и Δz .

Учитывая это, из выражения (5) и (6) получаем

$$\Delta t = \frac{\Delta z h^2 k_l^2}{4\pi a} \left[\frac{1}{r_s} - 2 \frac{\ln 2}{\Delta z} \right];$$

$$\varphi' = \frac{1}{k_T} \left(T_{n-1} + \frac{Qa\Delta t}{\lambda} \right),$$

откуда можно заключить, что проводимость электролита не влияет на величину временного интервала.

Из рассмотренного следует, что высота электролита не соответствует временной координате уравнения (1). Поэтому описанный метод решения назван методом двухмерной ванны в отличие от метода трехмерной ванны.

Метод двухмерной электролитической ванны позволяет в широких пределах регулировать величину временного интервала, не требует ряда электродов по высоте электролита на границе модели, допускает большие рабочие напряжения без опасения разогрева электролита из-за больших токов, поскольку величина сопротивления растекания придонного токоввода обычно значительна. Недостатком метода являются заметные фазовые сдвиги в электролитической ванне, определяемые емкостной составляющей переходного слоя металл — электролит. Как показали исследования, при малой площади придонных токовводов фазовые сдвиги могут достигать иногда десятков градусов в случае $R'_{yT} = 0$ (при $R'_{yT} > 50$ ком фазовые сдвиги

Таблица 1

№ кривой	ρ	R'_{yT} в ком	hk_l	Δz в мм	$\sigma \cdot 10^4$ в ом · см ⁻¹
1	2090	0	0,025	5	2,59
2	94,5	10	0,05	10	3,05
3	31	10	0,05	30	3,05
4	9,24	50	0,05	25	3,22
5	5,77	50	0,1	10	3,19

пренебрежимо малы), что затрудняет проведение измерений. При больших фазовых сдвигах появляется погрешность решения определяемая комплексным значением R_p в формуле (3). Расчеты и непосредственные измерения показали, что эта погрешность невелика, если производить измерение модуля напряжения в электролитической ванне.

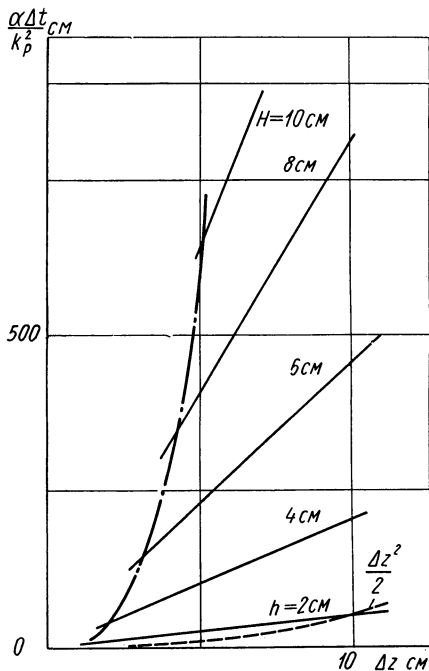


Рис. 3. Зависимость величины временного интервала в двухмерной и трехмерной электролитических ваннах от уровня электролита

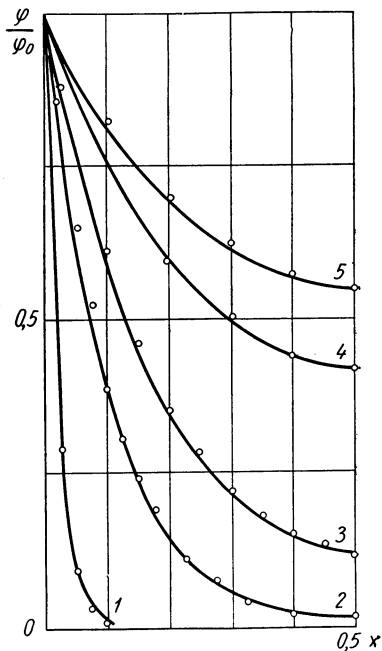


Рис. 4. Решение уравнения (6), проведенное в двухмерной электролитической ванне при частоте питающего ванну тока 300 гц

Результаты измерения приведены на рис. 3. Придонные электроды в трехмерной электролитической ванне имели размер 15×15 мм, придонные токовводы в двухмерной электролитической ванне имели $r_0 = 0,061$ см. Сплошной линией показаны результаты измерения в двухмерной ванне, штриховой линией — в трехмерной. Штрих-пунктирной линией очерчена область $\Delta z < 0,5h$, где ошибка решения, определяемая зарифленностью поля, превышает 1%.

Судить о точности работы двухмерной ванны можно по рис. 4, на котором показано решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = p\varphi, \quad \varphi = \varphi_0 \text{ при } x = 0, x = 1, \quad (7)$$

Таблица 2

Сравнимые характеристики	Электролитическая ванна		Примечание
	Трехмерная	Двухмерная	
<p>Задание координат пространства</p> <p>Задание времени</p> <p>Погрешность решения от дискретизации</p> <p>Регулировка временного интервала</p> <p>Диапазон изменения величины временного интервала</p> <p>Учет начальных, условий и внутренних источников тепла</p> <p>Учет изменяющихся во времени граничных условий</p> <p>Погрешность задания величины временного интервала из-за неточной установки уровня электролита</p>	<p>Непрерывное</p> <p>Дискретное Порядка Δt^2</p> <p>Уровнем электролита</p> <p>Малый</p> <p>Заданием потенциалов на придонные электроды дели</p> <p>С помощью ряда граничных электродов по высоте электролита</p> <p>$2\delta_z$</p>	<p>Непрерывное</p> <p>Дискретное Порядка Δt</p> <p>Уровнем электролита; переключением токововодов; величиной сопротивления утечки с токоввода</p> <p>Большой</p> <p>Введением тока в модель через придонный токововод; заданием потенциалов на придонных токововодах</p> <p>С помощью граничного электрода (одного по высоте электролита)</p> <p>δ_z</p>	<p>Дискретное</p> <p>Дискретное Порядка Δt</p> <p>Соотношением между сопротивлением сетки и временным сопротивлением в каждом узле</p> <p>Большой</p> <p>Введением тока в узел сетки;</p> <p>Заданием потенциалов на концах временных сопротивлений</p> <p>—</p> <p>—</p> <p>δ_z — относительная погрешность в установке уровня электролита</p>

Продолжение табл. 2

Сравняемые характеристики	Электролитическая ванна		Сетка сопротивлений	Примечание
	Трехмерная	Двухмерная		
Рабочие напряжения	Порядка нескольких вольт при придонных электродах размером 15×15 мм	Десятки вольт при тоководах длиной 2 мм и диаметром 1 мм	Определяются сопротивлениями сеточной модели	Ограничиваются при частоте 300 гц нагревом электролита из-за протекающего через электродлит тока
Фазовые сдвиги	Малые	До 20° при $R'_{yr} = 0$, до 3° при $R'_{yr} = 10$ ком	—	При частоте питающего ванну тока 300 гц
Метод измерений	Относительный	Абсолютный при $R'_{yr} = 0$ (измеряется модуль напряжения), относительный при $R'_{yr} > 50$ ком	Относительный	
Минимальное число регулировочных элементов для настройки электрического режима модели и установли величины временного интервала	Один элемент на каждый придонный электрод	Один элемент на каждый придонный токовод	Два элемента на каждый узел сетки	
Точность решения (без учета погрешности от дискретизации)	1—3%	1—3%	Ограничивается точностью элементов сеточной модели и составляет доли процента	При стабилизации питающего ванну напряжения и при использовании измерительного прибора класса точности 1,0

полученное из выражения (4) для одномерного случая при $Q = 0$ и $T_{n-1} = 0$. Кривые, показанные на рис. 1, имеют параметры, сведенные в табл. 1. Таким образом, приведенные зависимости характеризуют работу двухмерной ванны без учета погрешности из-за дискретизации временной координаты.

В заключение приводится табл. 2, в которой сравниваются характеристики электротеплотехнических ванн и сетки сопротивлений, используемых для решения задач нестационарной теплопроводности по методу Либманна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волинский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960, стр. 446.
2. Канторович Л. В., Крылов В. Н. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Гостехиздат, 1952, стр. 696.
3. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., Изд. иностр. лит., 1962, стр. 461.
4. Коздоба Л. А., Махненко В. И. Решение задач нестационарной теплопроводности с переменными источниками (стоками) тепла при заданных граничных условиях 1—4 рода на электроаналогах-сетках омических сопротивлений. Доклады 4-й межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования в различных отраслях техники. Сб. 1, изд. МЭИ, 1962, стр. 251—265.
5. Тетельбаум И. М., Эльмешад Я. А. Электрическое моделирование неустановившихся процессов теплопередачи и диффузии в электрической ванне. Доклады 4-й межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования в различных отраслях техники. Сб. 1, изд. МЭИ, 1962, стр. 165—182.
6. Liebm ann G. A new electrical analog method for the solution of transient heat — conduction problems. Trans. of ASME, vol. 78, N 3, 1956, pp. 655—665.
7. Liebm ann G. Solution of transient heat — transfer problems by the resistance network analog — method Trans. of ASME, vol. 78, N 6, 1956, pp. 1267—1272.

В. Г. Петухов

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НА ЭЛЕКТРОИНТЕГРАТОРЕ ТИПА ЭГДА С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Электромоделирование температурных полей на электропроводной бумаге с помощью электроинтегратора типа ЭГДА 9/60 позволяет просто и наглядно определить распределение температур в плоском сечении любой конфигурации, а в некоторых случаях и пространственные температурные поля в теле.

Существенным недостатком метода является трудность моделирования температурных полей с учетом зависимости теплопроводности материала тела от температуры. Между тем для многих материалов эта зависимость является весьма значительной.

Существующий метод изготовления модели сечения путем наклеивания электропроводной бумаги в несколько слоев значительно усложняет изготовление модели, при этом не всегда удается подобрать нужные соотношения электропроводностей слоев и из-за ступенчатого изменения электропроводности модели возникают искажения в температурном поле. При таком методе изготовления модели снижается основное преимущество метода электро моделирования на бумаге — его простота.

Ниже дается более простой и практически более удобный метод определения температурного поля в сечении на простой однослойной электро модели при линейной зависимости коэффициента теплопроводности материала от температуры при граничных условиях I и III рода по контуру.

Поскольку для металлов зависимость коэффициента теплопроводности λ от температуры имеет, как правило, линейный характер или может быть достаточно точно аппроксимирована прямой

$$\lambda = \lambda_0 + bt, \quad (1)$$

где λ_0 — теплопроводность материала при 0°C , расчет температурных полей с такой зависимостью представляет интерес.

По предложению Г. А. Варшавского, нелинейное дифференциальное уравнение стационарного температурного поля с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры

$$\lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} t + \operatorname{grad} t \operatorname{grad} \lambda = 0 \quad (2)$$

может быть сведено к уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3)$$

для функции

$$\Phi(t) = \int_0^t \lambda(t) dt. \quad (4)$$

Уравнение (3) не может быть решено линейно с помощью электроинтегратора обычными методами.

При задании граничных условий I рода достаточно на электро модели задать по контуру потенциалы, пропорциональные не температурам, заданным на контуре сечения, а значениям функции $\Phi(t)$, соответствующим этим заданным температурам. Так как моделируемое уравнение (3) линейно, то значения

функции Φ в любых точках сечения могут быть получены на электромодели из условия пропорциональности разностей потенциалов на модели разностям функции Φ в сходственных точках сечения, т. е. обычным путем.

Расчет температурного поля при этом может быть существенно упрощен, если зависимость (1) представить в виде

$$\lambda = b \left(\frac{\lambda_0}{b} + t \right). \quad (5)$$

Поскольку первый член в скобках представляет собой температуру θ_0 , отсчитываемую от точки пересечения линии $\lambda = \lambda_0 + bt$ с осью абсцисс, а все выражение в скобках — температуру θ , отсчитываемую от этой точки, то

$$\lambda = b\theta. \quad (6)$$

Тогда

$$\Phi(t) = \int_0^t \lambda(t) dt = \int_{\theta_0}^{\theta} b\theta d\theta = \frac{b}{2} (\theta^2 - \theta_0^2) \quad (7)$$

и относительное избыточное значение функции $\Phi(t)$ в любой точке на модели

$$\bar{\Phi} = \frac{\Phi - \Phi_{\min}}{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}} = \frac{\theta^2 - \theta_{\min}^2}{\theta_{\max}^2 - \theta_{\min}^2}, \quad (8)$$

где θ_{\max} и θ_{\min} — максимальное и минимальное значения температур на контуре сечения, отсчитываемые от точки пересечения прямой $\lambda = \lambda_0 + bt$ с осью абсцисс.

Значение температуры в любой точке сечения может быть получено в этом случае из относительно простого выражения

$$\theta = \sqrt{\bar{\Phi}(\theta_{\max}^2 - \theta_{\min}^2) + \theta_{\min}^2}. \quad (9)$$

Разности температур $\Delta\theta$ в сечении равны $\Delta t^\circ \text{C}$, а значение температуры

$$t = \theta - \frac{\lambda_0}{b}. \quad (10)$$

При задании граничных условий III рода по контуру тела задача может быть сведена к граничным условиям I рода при соединении по контуру сечения на модели дополнительной стенки в виде отдельных полосок длиной δ из бумаги того же сорта, что и сама модель (рис. 1, а). На концы полосок при этом должен быть задан потенциал, пропорциональный значениям функции $\Phi(t)$, соответствующим заданным температурам газа по контуру сечения. Длина этих полосок δ может быть определена из следующих соображений.

На контуре сечения условия теплообмена описываются уравнением

$$\alpha(t_{\Gamma} - t_{cr}) = -\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial n}$$

или, учитывая формулы (4) и принимая во внимание, что вектор теплового потока на контуре сечения направлен перпендикулярно к поверхности

$$\alpha(t_{\Gamma} - t_{cr}) = -\lambda(t) \frac{dt}{dn} = -\frac{d\Phi}{dn}. \quad (11)$$

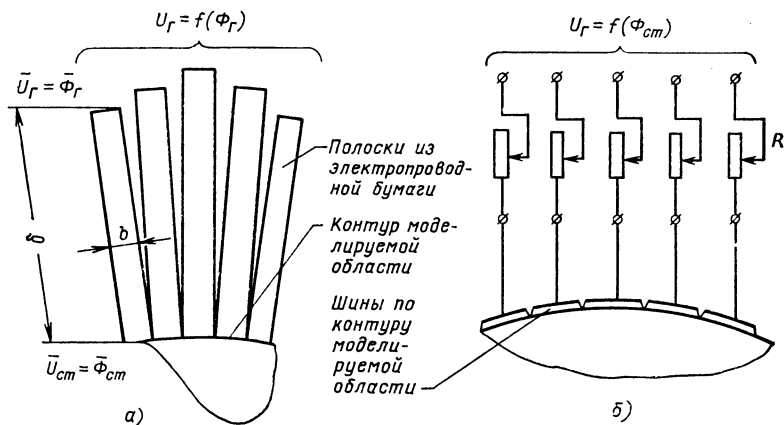


Рис. 1. Схема задания граничных условий по контуру модели:
 а — дискретными полосками электропроводной бумаги; б — дискретными переменными сопротивлениями

При постоянной ширине полоски b градиент функции на контуре сечения может быть получен как разность значений функции Φ на концах полоски, деленная на длину полоски:

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\Phi_{\Gamma} - \Phi_{cr}}{\delta}.$$

Так как коэффициент теплопроводности λ линейно зависит от температуры, то разность значений функций Φ может быть выражена формулой

$$\Phi_{\Gamma} - \Phi_{cr} = \int_{t_{cr}}^{t_{\Gamma}} \lambda(t) dt = \lambda_{cp}(t_{\Gamma} - t_{cr}), \quad (12)$$

где t_{Γ} и t_{cr} — температуры газа и стенки в данной точке по контуру сечения;

Φ_{Γ} и Φ_{cr} — соответствующие этим температурам значения функции;

$\lambda_{ср}$ — среднее значение коэффициента теплопроводности в интервале температуры от $t_{г}$ и $t_{ст}$ (или от $\theta_{г}$ до $\theta_{ст}$).

Из условия равенства критериев Био для модели и натуре длина полоски δ на модели может быть подсчитана по формуле

$$\delta = \frac{\lambda_{ср}}{\alpha} M = \frac{b(\theta_{г} + \theta_{ст})}{2\alpha} M, \quad (13)$$

где M — масштабный коэффициент.

При расчете в первом приближении за температуру стенки $\theta_{ст}$ может быть взята температура, заведомо большая, чем тем-

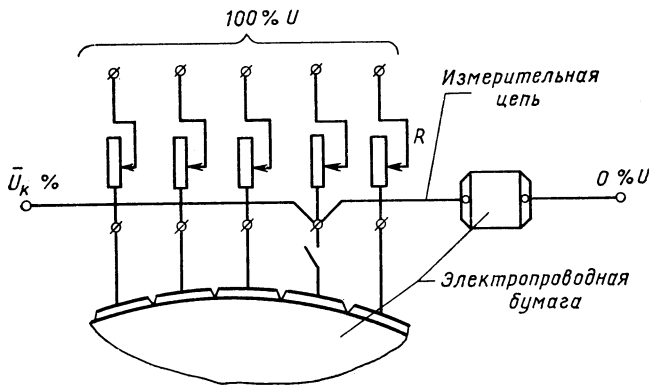


Рис. 2. Схема замера величины сопротивления R при помощи измерительного устройства интегратора

пература стенки. Тогда во втором приближении величина δ уменьшится в отношении

$$\delta_1 = \delta_0 \frac{\theta_{г} + \theta_{1ст}}{\theta_{г} + \theta_{0ст}}, \quad (14)$$

где $\theta_{0ст}$ и $\theta_{1ст}$ — температура стенки, принятая в первом приближении и полученная после расчета в первом приближении.

Путем последовательного уменьшения длин полосок, имитирующих внешнее сопротивление переходу тепла, может быть получена точная картина температурного поля в сечении на простой однослойной электромодели.

Корректировка граничных сопротивлений по контуру модели может быть упрощена, если вместо полосок электропроводной бумаги применять переменное сопротивление, как это показано на рис. 1, б. В этом случае электромодель приобретает свойства универсальности, так как для этой модели могут быть

легко заданы любые граничные условия по контуру без переделки модели.

При использовании дискретных переменных сопротивлений по контуру модели приклеиваются электропроводные шины, соединяемые гибкими проводниками с гнездами на доске сопротивлений. Требуемые величины переменных сопротивлений R по контуру модели легко выбираются подключением специальной измерительной цепи последовательно к гнездам всех сопротивлений вместо гибкого проводника, идущего от модели (рис. 2). Эта измерительная цепь включает в себя два зажима

с зажатым между ними квадратным участком электропроводной бумаги того же сорта, из которого сделана сама модель сечения. При установлении требуемой величины сопротивления R на внешний зажим этого сопротивления подается 100% U , а на свободный конец измерительной цепи подается 0% U от питающего устройства интегратора. Потенциал \bar{U}_* на гнезде сопротивления может быть достаточно точно замерен измерительным устройством интегратора (с точностью до 0,1%). Требуемая величина этого потенциала получается из следующих соотношений.

Поскольку сопротивление полоски

$$R = \rho \frac{\delta}{b},$$

где ρ — сопротивление электропроводной бумаги «на квадрат»;
 b — ширина полоски;

δ — длина полоски,

а сопротивление R_1 должно быть в $\frac{\delta}{b}$ раз больше, чем сопротивление квадрата электропроводной бумаги:

$$\frac{R_1}{\rho} = \frac{\delta}{b},$$

то на клемме сопротивления должен быть получен относительный потенциал

$$\bar{U} = \frac{\rho}{R_1 + \rho} = \frac{b}{b + \delta}. \quad (15)$$

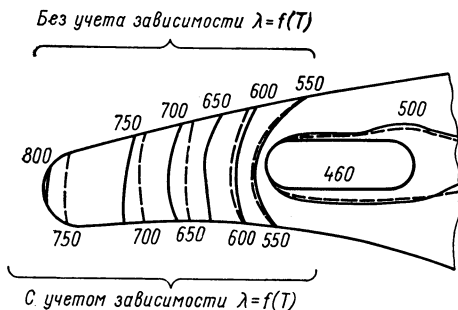


Рис. 3. Температурное поле в сечении по кромке интенсивно охлаждаемой лопатки газовой турбины

Изменение таким образом граничных условий по контуру модели при расчете методом последовательных приближений не составляет труда, а, кроме того, на модели при расчете могут быть внесены в граничные условия любые изменения, что позволяет по заданному температурному полю определить граничные условия на контуре, соответствующие заданному температурному полю.

В качестве примера на рис. 3 приведено температурное поле в сечении по кромке интенсивно охлаждаемой лопатки газовой турбины, полученное без учета зависимости коэффициента теплопроводности материала от температуры (при среднем значении коэффициента теплопроводности, полученном по средней для всего сечения температуре). Штриховыми линиями показано положение изотерм, рассчитанное с учетом этой зависимости.

Расчеты на электроинтеграторе ЭГДА 9/60 показали целесообразность применения предлагаемого метода при значительных градиентах температуры в сечении и значительной зависимости коэффициента теплопроводности материала от температуры.

*О. В. Комиссаров, И. И. Сидорова,
Н. В. Филиппова*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ БУМАГИ
УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА
С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР ГРАФИТА
В ЯЧЕЙКЕ РЕАКТОРА**

При проектировании гетерогенных реакторов с твердым замедлителем рассматриваются различные сложные геометрии каналов. Для выбора приемлемой конструкции канала, а также допустимой единичной мощности канала необходим расчет температурных полей в ячейке реактора, представленного на рис. 1. Такие расчеты зачастую невозможно проводить на цифровых вычислительных машинах, так как не всегда имеются готовые программы, а составление программы является трудоемким и длительным процессом, препятствующим скорому получению результатов. Часто при расчетах, касающихся сложных геометрий, в силу необходимости делают упрощающие предпо-

ложения. Это приводит к дополнительным погрешностям в результатах расчетов. Моделирование на электропроводной бумаге является наиболее простым методом определения температур в ячейке и, как показал опыт, дает приемлемую точность результатов.

В работе рассматривается одна из типовых задач, возникающих при проектировании реактора.

Распределение температур в блоке при наличии равномерно расположенных источников тепла описывается дифференциальным уравнением Пуассона:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = - \frac{q_v}{\lambda_{гр}}, \quad (1)$$

где x, y — координаты в м;
 T — температура в °К;
 q_v — плотность источников тепловыделения в $\frac{\text{ккал}}{\text{м}^3 \cdot \text{ч}}$;

$\lambda_{гр}$ — коэффициент теплопроводности графита, принятый равным $40 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{°К}}$.

Считаем, что на внешней границе графитового блока ($x_{гран} = \pm a; y_{гран} = \pm a$) отсутствуют перетечки тепла. Этому соответствуют граничные условия

$$\frac{\partial T(x = \pm a, y)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T(y = \pm a, x)}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

a — координата границ графитового блока.

Тепло, генерируемое в графите, передается теплоносителю. На внутренних границах (на границах отверстий) тепло передается через зазор лучеиспусканием и теплопроводностью:

$$\lambda_{гр} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{гран} = C_0 \varepsilon_n \left[\left(\frac{T}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_0}{100} \right)^4 \right] + \frac{\lambda_{заза}}{\delta} (T - T_0), \quad (3)$$

где C_0 — коэффициент лучеиспускания абсолютно черного тела, равный $4,9 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot (\text{°К})^4}$;

ε_n — приведенная степень черноты системы; ε_n взято 0,612 для зазоров δ_1, δ_2 и 0,71 — для зазора δ_3 ;

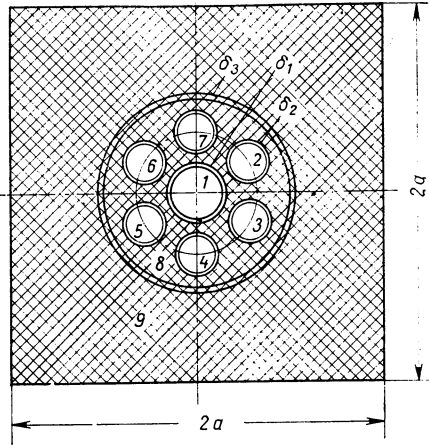


Рис. 1. Схема ячейки гетерогенного реактора:

1 — центральная трубка; 2-7 — тепловыделяющие элементы; 8 — графитовая втулка; 9 — графитовый блок; $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — зазоры

$\lambda_{газа}$ — коэффициент теплопроводности газа, принятый равным 0,06 $\frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{°К}}$.

Соотношение между количеством тепла, передаваемым теплоносителем за счет теплопроводности, и количеством тепла, передаваемым лучеиспусканием, зависит от величины зазора и начальной температуры тепловыделяющего элемента (ТВЭЛа).

Двумерную модель графитового блока можно построить из электропроводной бумаги [1, 3]. Геометрические размеры модели в 5 раз больше размеров ячейки гетерогенного реактора. Схема установки приведена на рис. 2.

Для моделирования распределенного внутреннего источника использован конденсатор связи (электропроводная бумага и медная фольга, разделенные слоем диэлектрика с $\epsilon = 8$).

Электрод (медная фольга) присоединен к источнику переменного напряжения — генератору ГЗ-33, работающему на частоте $f \approx 330$ гц. На конденсаторе связи падает 90—95% подаваемого напряжения.

Граничные условия (2) на внешних границах реализуются наиболее просто, так как внешние границы модели из электропроводной бумаги ни с чем не соединены. На внутренних

границах необходимо реализовать условие (3). Представим условие (3) в следующем виде:

$$\lambda_{зр} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{\text{гран}} = \alpha (T - T_0) \text{ при } r = \text{const}, \quad (4)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\delta} \left(\frac{T^4 - T_0^4}{T - T_0} 3 \cdot 10^{-8} \delta + \lambda_{газа} \right). \quad (5)$$

Обозначим

$$\lambda_{экс} = \frac{T^4 - T_0^4}{T - T_0} 3 \cdot 10^{-8} \delta. \quad (6)$$

$\lambda_{экс}$ имеет размерность теплопроводности. Для зазора будем иметь приведенный коэффициент теплопроводности

$$\lambda_{заяз} = \lambda_{экс} + \lambda_{газа}. \quad (7)$$

Поскольку $\lambda_{заяз}$ является функцией неизвестной температуры T на границе, то реализация граничных условий и решение задачи в целом производилось путем итераций. Для первой итерации T выбиралась исходя из физических соображений. Решение проводилось до тех пор, пока полученное значение

$\lambda_{заз} = f(T - T_0)$ в данной точке не будет совпадать с установленным $\lambda_{заз}$.

При решении задачи приходилось для каждого варианта делать 2—4 итерации в зависимости от того, насколько близко к истинной была задана температура для первой итерации.

В данном случае задача усложняется еще и тем, что начальная температура T_0 не одинакова для всех теплоснимающих поверхностей. Для центральной трубки было задано $T_{01} = 500^\circ \text{K}$; для ТВЭлов $T_{02} = 600^\circ \text{K}$. Для зазора δ_3 теплоснимающей поверхностью является поверхность края втулки с температурой T_{03} , которая в начале решения неизвестна и может быть определена, когда определены температуры по всей втулке (в том числе и на краю). Известно, что в стационарном состоянии все тепло, генерируемое в графитовом блоке, передается через зазор δ_3 графитовой втулке и затем теплоносителю, поэтому вначале тепловым сопротивлением зазора δ_3 пренебрегали и определяли температуру T_{03} . Учет теплового сопротивления зазора δ_3 позволяет найти распределение температур в графитовом блоке (также путем итераций). На величину и распределение температур графита втулки учет теплового сопротивления зазора δ_3 не сказывается.

Для нахождения необходимой проводимости бумаги для зазоров пользовались соотношением

$$\frac{\lambda_{гp}}{\lambda_{заз}} = \frac{\rho_{заз}}{\rho_{гp}}. \quad (8)$$

Предварительная оценка $\frac{\rho_{заз}}{\rho_{гp}}$ показала, что это отношение должно быть приблизительно равно 500. Из-за необходимости проведения итерации в процессе решения целесообразно использовать переменные сопротивления вместо бумаги для задания граничных условий по уравнению (4). При этом имеется возможность моделирования зазора с переменным тепловым сопротивлением по периметру. Количество участков, на которые необходимо разбивать графит вдоль зазора, зависит от ожидаемого изменения (перепада) температур вдоль зазора. В данном случае периметр отверстий разбивался на 6 частей. Величина переменного сопротивления

$$r_{заз} = \rho_{заз} \frac{\delta}{l}, \quad (9)$$

где l — длина дуги отверстия, по которой температура принята постоянной.

Из выражений (8) и (9) получим

$$r_{заз} = \frac{\lambda_{гp}}{\lambda_{заз}} \rho_{гp} \frac{\delta}{l}. \quad (10)$$

Для удобства зависимости $\lambda_{заз} = f(T - T_0)$ для предполагаемого диапазона изменения температуры T и различных значе-

ний T_{0i} были нанесены на графики и использовались при итерациях для определения $\lambda_{эаэ}$.

Для получения масштабного соотношения воспользуемся математическим описанием модели и из условий подобия определим масштабный коэффициент для пересчета напряжений модели в температуры.

Стационарное электрическое поле в проводящей среде из электропроводной бумаги описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_m^2} = -\rho_{зр} i, \quad (11)$$

где U — напряжение в в;

x_m, y_m — координаты модели в m ;

$\rho_{зр}$ — удельное сопротивление электропроводной бумаги;

i — ток, проходящий через единицу поверхности электропроводной бумаги, в $\frac{a}{m^2}$.

Сравнивая уравнения (I) и (II) и учитывая, что

$$i = \frac{I_{общ}}{S_m}; \quad S_m = \frac{S_{нат}}{n^2}, \quad (12)$$

где S_m — площадь модели в m^2 ;

$S_{нат}$ — площадь графита в m^2 ;

n — геометрический масштаб,

получим масштабный множитель m для пересчета напряжений b температуры

$$m = \frac{qvS_{нат}}{\lambda_{зр}\rho_{зр}I_{общ}}. \quad (13)$$

Для повышения точности решение проводилось для превышения искомой температуры над 500°K центральной трубки, которой соответствовало напряжение $U_0 = 0$. Начальное значение температур ТВЭЛов $T_{02} = 600^\circ \text{K}$ задавалось падением напряжения на дополнительном сопротивлении. Величина напряжения выделяется из соотношения

$$U_{нач} = \frac{T_{02} - T_{01}}{m}. \quad (14)$$

В данном случае $U_{нач} = \frac{100}{m}$.

Непосредственного измерения тока для вычисления масштабного коэффициента не требуется, достаточно знать падение напряжения на сопротивлениях, подсоединенных к нулевой шине, и величину этих сопротивлений

$$I_{общ} = \sum \frac{U_j}{r_j}, \quad (15)$$

где j — количество присоединенных к нулевой шине сопротивлений.

Для ячейки, представленной на рис. 1, было испробовано 25 вариантов. Варианты различались плотностью источников тепловыделения и величинами зазоров δ_1 и δ_3 . Некоторые из результатов расчета представлены на рис. 3 и рис. 4. На рис. 3 приведены зависимости температуры графита втулки вблизи центральной трубки канала от величины зазора δ_1 между центральной трубкой и втулкой и от плотности источников тепловыделения q_v . На рис. 4 показаны зависимости максимальной температуры в графите, свойственной углу блока от величины зазора δ_1 и плотности источников тепловыделения q_v .

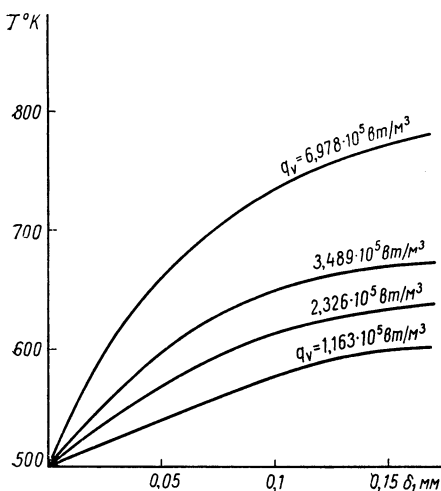


Рис. 3. Зависимость температуры графита втулки вблизи центральной трубки канала от величины зазора δ_1 и плотности источников тепловыделения q_v

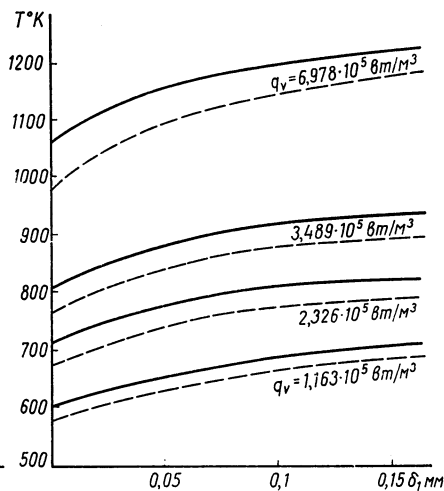


Рис. 4. Зависимости максимальной температуры в графите от величины зазоров δ_1 и плотности источников тепловыделения q_v

Сплошные линии на рисунке соответствуют $\delta_3 = 0,5$ мм, а штриховые — $\delta_3 = 0,35$ мм. Для проверки точности решения было выполнено моделирование простого случая, поддающегося аналитическому расчету (коаксиальная геометрия). Результаты, полученные при моделировании, имели отклонения от расчетных значений 2—2,5% (по отношению к перепаду на зазоре). Основные погрешности — погрешность измерения напряжения, неоднородность электропроводной бумаги.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 461.
2. Михеев М. А. Основы теплопередачи. М., Госэнергоиздат, 1956, стр. 102.
3. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., Физматгиз, 1959, стр. 319.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Процесс превращения энергии электрического поля в тепловую встречаются во всех электротехнических и электротермических установках современной техники. В некоторых случаях полученная тепловая энергия используется в технологических целях, как, например, при высокочастотном нагреве материалов. Нагрев же электрических машин и аппаратов является результатом потерь при превращении электрической энергии в механическую или другие ее виды.

Возможности аналитического расчета таких температурных полей при решении практических инженерных задач весьма ограничены. Поэтому наибольшее практическое значение приобретают методы моделирования исследуемых процессов нагрева.

1. Метод электромоделирования частных решений уравнения электронагрева

При стационарном электронагреве материала с постоянными электропроводностью γ и коэффициентом теплопроводности λ в потенциальном электрическом поле превышение температуры нагрева t над температурой окружающей среды и потенциал электрического поля ϕ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\nabla^2 t = -\frac{\gamma}{\lambda} (\nabla \phi)^2; \quad (1a)$$

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (1b)$$

При нагреве электрических машин и аппаратов источники нагрева обычно можно считать распределенными равномерно, тогда правая часть уравнения (1a) является постоянной величиной

$$\gamma (\nabla \phi)^2 = W = \text{const}.$$

Своеобразный вид правой части решаемого уравнения (1a) вызывает значительные трудности при решении задачи на моделях, если используются существующие методы моделирования. Обычный путь решения уравнения (1a) на сеточных моделях или в сплошных средах следующий:

а) решением уравнения Лапласа определяется поле электрического потенциала;

б) по распределению электрического потенциала рассчитываются величины $\nabla \phi$, $(\nabla \phi)^2$ и значения правой части решаемого уравнения;

в) решением уравнения Пуассона с переменной правой частью определяется температурное поле.

При электро моделировании в сплошных средах необходимость ввода токов в модель при решении уравнения Пуассона значительно снижает точность результата и увеличивает трудоемкость его получения.

Все это сильно усложняет решение задачи и заставляет искать новые пути моделирования уравнения стационарного электронагрева.

Решение уравнения Пуассона может быть сведено к решению уравнения Лапласа, если известно одно частное решение исходного уравнения. Решение уравнения Пуассона, правая часть которого зависит от гармонической функции,

$$\nabla^2 t = f(\varphi)$$

может быть представлено как

$$t = \eta(\varphi) + \theta,$$

где $\eta(\varphi)$ — является частным решением исходного уравнения и представляет собой гармоническую функцию;

θ — решение уравнения Лапласа.

Легко убедиться, что решением уравнения

$$\nabla^2 t = a\varphi^b (\nabla\varphi)^2,$$

где φ — гармоническая функция, будет выражение

$$t = \frac{a}{(b+1)(b+2)} \varphi^{b+2} + \theta.$$

Уравнение (1а) является частным случаем рассмотренного примера (при $b = 0$) и его решение имеет вид

$$t = -\frac{\gamma}{2\lambda} \varphi^2 + \theta. \quad (2)$$

Последнее выражение позволило А. В. Нетушилу и автору аналитически решить отдельные частные задачи электронагрева [2, 4] и высказать предположение о возможности его использования для электро моделирования теплового поля при электронагреве [5, 1].

Действительно, если выражение (2) является решением уравнения (1а) стационарного электронагрева, то может быть предложен следующий порядок электро моделирования уравнения (1а):

а) путем решения уравнения Лапласа определяется поле электрического потенциала;

б) вычисляются граничные условия для функции θ ;

в) путем решения уравнения Лапласа определяется поле функции θ ;

г) температурное поле вычисляется согласно выражению (2).

По предложенному методу моделирования решения уравнения Пуассона в этом случае не требуется.

При нагреве электрических машин и аппаратов имеем уравнение

$$\nabla^2 t = -\frac{w}{\lambda}, \quad (3)$$

решением которого является

$$t = -\frac{w}{2\lambda} x^2 + \theta. \quad (4)$$

Уравнение (3) отличается от уравнения (1а) тем, что поле источников является однородным. Поэтому в выражении (4) направление и начало отсчета координаты x могут быть выбраны произвольно. В этом случае, а также в случае, когда потенциал ϕ может быть вычислен аналитически, путем моделирования определяется только гармоническая функция θ , что еще более упрощает решение задачи.

При электромоделировании потенциала электрического поля ему соответствует электрический потенциал на модели. При моделировании гармонической функции температуры θ на модели ей соответствует в принятом масштабе электрический потенциал ψ .

2. Определение граничных условий

Для решения уравнения электронагрева должны быть заданы граничные условия для потенциала ϕ и температуры t .

Потенциал электрического поля рассматриваемой задачи моделируется электрическим потенциалом на модели, и граничные условия при этом в натуре и на модели однородны, так что их создание на модели трудностей не вызывает.

Граничные условия для гармонической функции температуры зависят от условий для ϕ и t , которые определяются выражением (2).

Граничные условия I рода. Если температура на границе области удовлетворяет граничным условиям I рода, т. е. температура на границе принимает заданные значения, то граничные условия для моделируемой функции θ на основе выражения (2) имеют вид

$$\theta|_{\partial p} = t|_{\partial p} + \frac{\gamma}{2\lambda} \phi^2|_{\partial p}. \quad (5)$$

Если по условиям задачи значения электрического потенциала заданы не на всей границе, то они должны быть определены путем аналитического расчета или моделирования.

При электромоделировании θ граничные условия реализуются созданием электрических потенциалов соответствующей величины на границах модели.

Граничные условия II рода. При граничных условиях II рода заданы значения теплового потока на границах области. В этом случае из выражения (2) можно определить

$$\left. \frac{d\theta}{dn} \right|_{\varepsilon p} = \left. \frac{dt}{dn} \right|_{\varepsilon p} + \frac{\gamma}{\lambda} \varphi \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{\varepsilon p}. \quad (6)$$

Как видно из выражения (6), кроме нормальной производной температуры, должны быть известны значения потенциала φ и его нормальной производной по всей границе области.

При моделировании функции θ ее поток на границе модели создается при помощи электрического тока.

Граничные условия III рода. При этих граничных условиях на границах области имеем

$$\alpha (t_{\varepsilon p} - t_{cp}) = -\lambda \left. \frac{dt}{dn} \right|_{\varepsilon p}, \quad (7)$$

где α — является коэффициентом теплоотдачи; $t_{\varepsilon p}$ и t_{cp} — соответственно температура границы и окружающей среды.

Подставляя решение (2) в выражение (7), получим

$$-\alpha \frac{\gamma}{2\lambda} \varphi^2 \left. \right|_{\varepsilon p} + \alpha \theta \left. \right|_{\varepsilon p} - \alpha t_{cp} \left. \right|_{\varepsilon p} = \gamma \varphi \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{\varepsilon p}. \quad (8a)$$

После некоторого преобразования можно записать

$$\alpha \left[\theta \left. \right|_{\varepsilon p} - \left(t_{cp} + \frac{\gamma}{2\lambda} \varphi^2 \right) \left. \right|_{\varepsilon p} + \frac{\gamma}{\alpha} \varphi \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{\varepsilon p} \right] = -\lambda \left. \frac{d\theta}{dn} \right|_{\varepsilon p}. \quad (8б)$$

На модели коэффициент теплоотдачи α учитывается включением на участках границы электрических сопротивлений R_α и тогда электрический потенциал модели ψ (соответствующий θ в исследуемой области) удовлетворяет условию

$$R_\alpha (\psi_{\varepsilon p} - \psi_{cp}) = -\gamma \text{mod} \left. \frac{d\psi}{dn} \right|_{\varepsilon p}. \quad (9)$$

Сопоставление условий (8б) и (9) показывает, что для обеспечения требуемых граничных условий температура окружающей среды при моделировании должна быть принята выше действительной на величину

$$\frac{\gamma}{2\lambda} \varphi^2 \left. \right|_{\varepsilon p} + \frac{\gamma}{\alpha} \varphi \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{\varepsilon p}.$$

Граничные условия IV рода. Если рассматриваемая область содержит участки 1 и 2 с различными электрическими и тепловыми свойствами, то на границах этих участков имеем

$$t_1 \left. \right|_{\varepsilon p} = t_2 \left. \right|_{\varepsilon p}, \quad (10)$$

$$\lambda_1 \left. \frac{dt_1}{dn} \right|_{\varepsilon p} = \lambda_2 \left. \frac{dt_2}{dn} \right|_{\varepsilon p}. \quad (11)$$

С учетом выражения (2) эти формулы можно записать следующим образом:

$$-\frac{\gamma_1}{2\lambda_1} \varphi_1^2 \Big|_{ep} + \theta_1 \Big|_{ep} = -\frac{\gamma_2}{2\lambda_2} \varphi_2^2 \Big|_{ep} + \theta_2 \Big|_{ep}; \quad (12)$$

$$-\gamma_1 \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dn} \Big|_{ep} + \lambda_1 \frac{d\theta_1}{dn} \Big|_{ep} = -\gamma_2 \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dn} \Big|_{ep} + \lambda_2 \frac{d\theta}{dn} \Big|_{ep}. \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) показывают, что моделируемая функция и ее нормальная производная имеют конечные разрывы на границе двух участков с различными свойствами. Так как функция электрического потенциала φ , при помощи которой моделируется функция θ , и ее нормальная производная скачков на той же границе не имеют, то для выполнения условий (12) и (13) на указанных границах модели должны быть введены дополнительные токи и обеспечена требуемая разность потенциалов [6].

В большинстве практических задач электронагрева задается напряжение между электродами, а место нулевого потенциала может быть выбрано произвольно. Так как на эквипотенциальной поверхности со значением потенциала $\varphi = 0$ согласно выражению (2) имеем $\theta = t$, то удачный выбор нулевой эквипотенциальной поверхности может значительно облегчить решение задачи. Для той же цели может быть использована симметрия исследуемого поля.

3. Примеры моделирования.

Рассмотрим примеры моделирования полей при электронагреве [7].

Допустим, что призма из однородного материала нагревается в электрическом поле, создаваемом двумя электродами с потенциалами φ_1 и φ_2 . Поле электрического потенциала в призме является однородным и может быть определено аналитически. Если для температурного поля принять нулевые граничные условия I рода, то согласно выражению (5) можно определить граничные условия для гармонической функции температуры θ и провести ее моделирование. Моделирование можно производить в двухмерной электролитической ванне, так как поля в призме являются плоскопараллельными (рис. 1). Значение температуры в центре призмы, полученное путем моделирования, отличалось от результата аналитического расчета на 1%.

Если в центре призмы расположен металлический стержень, то порядок моделирования несколько меняется. В первую очередь проводится моделирование электрического поля, так как оно в данной задаче не является однородным и не может быть определено путем аналитического расчета. Схема моделирования функции θ остается прежней, только металлический стержень на

модели заменяется проводником. Значения θ на границах определяются на основе условия (5).

Вследствие симметрии электрического и теплового полей моделирование можно проводить в области 1—2—3—4 (рис. 1) сечения призмы, что уменьшает его трудоемкость.

В случае граничных условий III рода схема моделирования значительно изменяется. Допустим, что однородная призма нагревается в однородном электрическом поле. Температура окружающей среды пусть равна нулю. На границах призмы заданы значения коэффициента теплоотдачи α .

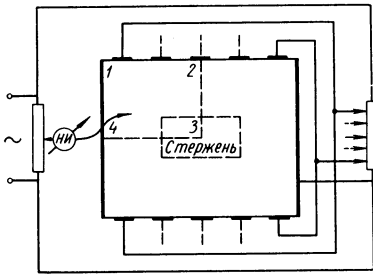


Рис. 1. Схема моделирования температурного поля при электронном нагреве в случае граничных условий I рода

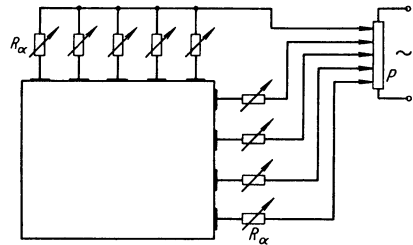


Рис. 2. Схема моделирования температурного поля при электронном нагреве в случае граничных условий III рода

В этом случае моделированию подлежит только функция θ . Схема моделирования показана на рис. 2. Сопротивления R_α на модели в принятом масштабе соответствуют тепловым сопротивлениям соответствующих участков границы призмы. При помощи потенциометра P создаются потенциалы, соответствующие температуре окружающей среды, вычисленной согласно условию (8б). Температура нагрева вычисляется на основе выражения (2) или (4). Результаты моделирования конкретной задачи отклонились от результатов расчета более чем на 3%.

Предлагаемый метод может быть успешно использован при моделировании тепловых полей в неоднородных средах сложной конфигурации. В качестве примера рассмотрим схему для моделирования теплового поля в поперечном сечении статора электрической машины. Вследствие симметрии достаточно изучить поле в области, состоящей из половины паза и зубца. На рис. 3 показана исследуемая область несколько упрощенной формы, состоящая из магнитопровода a , обмотки b , пазовой изоляции v и клина z . Источником тепла в области является обмотка, которая нагревается за счет равномерно распределенных потерь. На внешних границах магнитопровода и клина заданы граничные

условия I рода. На рис. 3 показано начало и направление отсчета координаты x в области с однородным полем источника.

Схема моделирования показана на рис. 4. Сопротивления R_u в масштабе сопротивлений соответствуют тепловым сопротивлениям пазовой изоляции на участке границы. Граничные условия на внутренних границах определяются согласно выражениям (12) и (13). Сопротивления R_1 служат для установки необходимого дополнительного тока, а источники э. д. с. E — для созда-

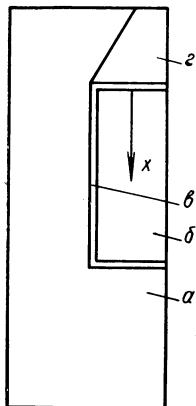


Рис. 3. Исследуемый участок поперечного сечения статора электрической машины

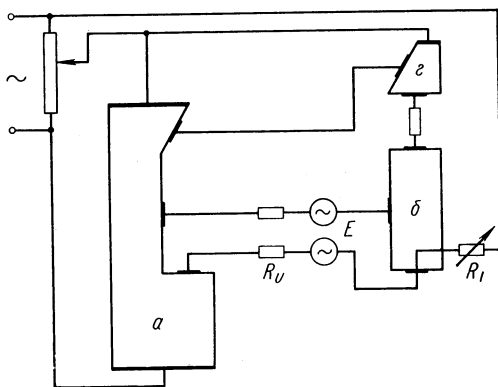


Рис. 4. Схема моделирования температурного поля в поперечном сечении статора электрической машины

ния дополнительной разности потенциалов согласно условию (12). На рис. 4 показан только один электрод из решетки электродов, расположенной на каждой граничной поверхности.

В случае необходимости при моделировании можно учесть тепловыделение в магнитопроводе, но в нашем случае оно не влияло на температуру нагрева.

Результаты моделирования конкретного примера были проверены на модели УСМ-1. Совпадение результатов было вполне удовлетворительным. Моделирование данной задачи на модели УСМ-1 оказалось более трудоемким и дорогим, чем решение при помощи электролитической ванны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурдак Н. М., Нетушил А. В., Сорокин П. П. Электролитическая ванна для моделирования плоскопараллельных потенциальных полей с произвольными граничными условиями. Труды МЭИ. Вып. XVIII, 1956, стр. 229—240.

2. Нетушил А. В. Условия сосуществования тепловых и электрических полей при электронагреве бетона. ЖТФ, т. XXI, вып. 4, 1951, стр. 405—409.

3. Негушил А. В., Жуховицкий В. Я., Кудин В. Н., Парини Е. П. Высокочастотный нагрев диэлектриков и полупроводников. М., Госэнергоиздат, 1959.

4. Табакс К. К. Конформное отображение некоторых потенциальных полей с распределенными источниками. Изв. АН Латв. ССР, Серия физ. и техн. наук, № 6, 1964, стр. 31—36.

5. Табакс К. К. Моделирование в электролитической ванне некоторых частных случаев уравнения Пуассона. Изв. АН Латв. ССР, № 4, 1956, стр. 145—148.

6. Табакс К. К. Решение уравнения Пуассона при помощи интеграторов для уравнения Лапласа. Рижский политехнич. институт. Ученые записки. т. IX, вып. 4, 1963, стр. 169—172.

7. Табакс К. К. Моделирование электротепловых полей, Ученые записки Латв. гос. университета, т. X, 1957, стр. 7—13.

Ю. А. Липаев, Г. Г. Степченкова,
В. В. Ходот

РАСЧЕТ НА ГИДРОИНТЕГРАТОРЕ ДЕГАЗАЦИИ УГОЛЬНЫХ ПЛАСТОВ СКВАЖИНАМИ

1. Постановка задачи

При современном уровне развития угольной промышленности в связи с увеличением глубины горных работ и скорости продвижения забоев одним из наиболее эффективных методов борьбы с внезапными выбросами и обычными газовыделениями на одиночных угольных пластах является предварительная дегазация их скважинами. Пласты Донбасса имеют мощности от 0,5 до 2 м. Диаметр скважин, применяющихся для дегазации выбросоопасных угольных пластов, обычно не превышает 0,3 м. Отсюда возникает задача расчета дегазации угольного пласта скважинами диаметром d , значительно меньшим мощности m пласта ($\frac{m}{d} > 1,5$) т. е. двухмерная задача.

Течение газа в угольном пласте в данном случае описывается уравнением

$$\omega_{yn}(P) \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{R_{y\phi}(x)} \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{R_{y\phi}(y)} \frac{\partial P}{\partial y} \right], \quad (1)$$

где

$$\omega_{yn}(P) = \frac{1}{2\sqrt{P}} \left[\frac{\delta}{R_e T} + \frac{a_0 b}{(1 + b\sqrt{P})^2} \right] \quad (2)$$

ω — удельное изменение газоносности единицы объема угля в $\frac{\text{мкг}}{\text{н}^2}$;

T — температура пласта в $^{\circ}\text{C}$;

P — квадрат давления газа $\frac{\text{н}^2}{\text{м}^4}$;

δ — пористость угля;

R_2 — удельная газовая постоянная в $\frac{\text{н.м}}{\text{кг}\cdot\text{град}}$;

a_0, b — константы в уравнении сорбции Лэнгмюра в $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и $\frac{\text{м}^2}{\text{н}}$ соответственно;

t — время в *сек*;

$$R_{y\phi}(x) = \frac{2\mu R_2 T}{k(x)}; \quad R_{y\phi}(y) = \frac{2\mu R_2 T}{k(y)} \quad (3)$$

— приведенные удельные фильтрационные сопротивления в направлениях простирания (x) и мощности (y) $\left(\frac{\text{н}^2 \cdot \text{сек}}{\text{м}^3 \cdot \text{кг}}\right)$;

μ — вязкость газа в $\text{н} \cdot \text{сек}/\text{м}^2$;

$k(x), k(y)$ — проницаемость угля в направлениях простирания и мощности пласта в м^2 .

Уравнение (1) необходимо решать при следующих начальных и граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y, 0) = P_1; \quad P(0, 0, t) = P_2; \\ P(l, 0, t) = P_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В общем виде уравнение (1) аналитическими методами не решается. Попытки решить аналитически частные случаи данного уравнения приводят к упрощениям его, которые или сильно сужают или совсем исключают возможности практического использования результатов полученных решений.

Целью настоящей работы является решение с помощью гидроинтегратора двухмерной задачи дегазации пласта скважинами, описываемой уравнением (1).

При больших расстояниях l между скважинами $\left(\frac{l}{m} > 4\right)$ решались одномерные задачи с учетом неоднородности потока вблизи скважины.

2. Решение двухмерной задачи дегазации пласта вблизи скважины

На гидроинтеграторе рассчитывалась дегазация пласта скважинами, расположенными перпендикулярно стенке штрека на

одинаковых расстояниях от почвы и кровли и друг от друга. Поэтому достаточно было рассчитать дегазацию пласта в области, ограниченной размерами по простиранию $\frac{l}{2}$, по мощности $\frac{m}{2}$ и по восстанию 1 м (рис. 1).

Распределения давления газа в различные моменты времени в других частях пласта можно получить, исходя из условия симметрии.

Моделируемая область угольного пласта разбивалась на 5 слоев, расположенных по мощности пласта (по оси y), причем

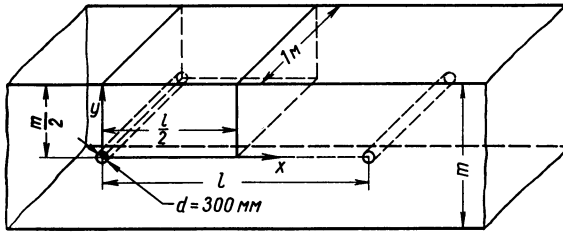


Рис. 1. Моделируемая область пласта:
 m — мощность пласта; l — расстояние между скважинами

каждый слой состоял из 10 блоков, расположенных в направлении простирания пласта (по оси x) (рис. 2).

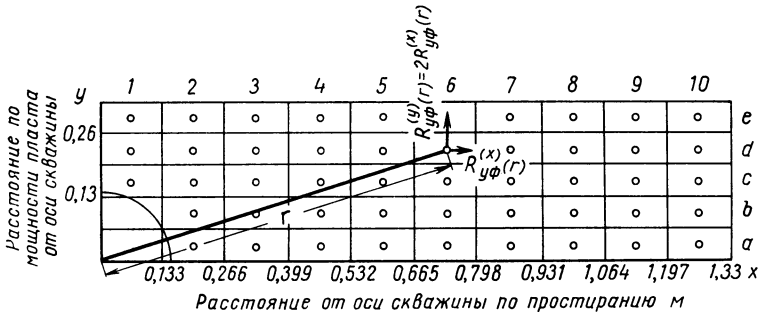


Рис. 2. Разбивка области пласта вблизи скважины на блоки:

1—10 — номера блоков по простиранию; a, b, c, d, e — индексы блоков по мощности; r — расстояние от контура скважины до центра блоков; $R_{уф}^x(r)$ — компонента приведенного удельного фильтрационного сопротивления в направлении простирания в центре блока; $R_{уф}^y(r)$ — компонента приведенного удельного фильтрационного сопротивления в направлении мощности пласта в центре блока

Компонента по простиранию приведенного удельного фильтрационного сопротивления в зависимости от расстояния до контура скважины $R_{уф}^x(r)$ (рис. 3) строилась по зависимости прони-

цаемости от горного давления на пласт $k = k[\sigma(x)]$ [2, 3]. По работе [1] определялась компонента приведенного удельного фильтрационного сопротивления в направлении простириания $R_{y\phi}^x(r)$.

Компонента $R_{y\phi}^y(r)$ по мощности определялась из соотношения [4]

$$R_{y\phi}^y(r) = 2R_{y\phi}^x(r). \quad (5)$$

Далее рассчитывались фильтрационные сопротивления между центрами блоков по следующим формулам:

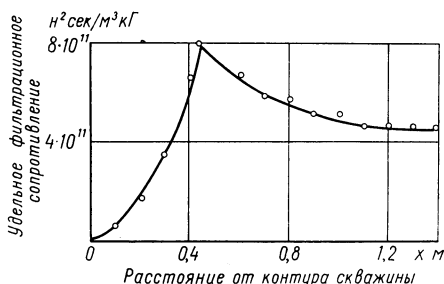


Рис. 3. Зависимость удельного фильтрационного сопротивления вдоль напластования от расстояния до контура скважины по радиусу

а) в направлении простириания (по оси x)

$$R_{\nu i, \nu(i+1)} = \int_{x_{\nu i}}^{x_{\nu(i+1)}} \frac{R_{y\phi}(r)}{F_{\nu i, \nu(i+1)}} dx = \\ = \frac{R_{y\phi}^x(r_{\nu i}) + R_{y\phi}^x[r_{\nu(i+1)}]}{\Delta y_{\nu i} l \text{ м} \cdot 2} \frac{\Delta x_{\nu i} + \Delta x_{\nu(i+1)}}{2}, \quad (6)$$

где $\nu = a, b, l$ — индексы блоков в направлении мощности пласта;

$i = 1, 2, \dots, 10$ — индексы блоков в направлении простириания пласта;

б) в направлении мощности (по оси y)

$$R_{\nu i, (\nu+1)i} = \int_{y_{\nu i}}^{y_{(\nu+1)i}} \frac{R_{y\phi}^y(r)}{F_{\nu i, (\nu+1)i}} dy = \\ = \frac{R_{y\phi}^y(r_{\nu i}) + R_{y\phi}^y[r_{(\nu+1)i}]}{2\Delta x_{\nu i} l \text{ м}} \frac{\Delta y_{\nu i} + \Delta y_{(\nu+1)i}}{2}. \quad (7)$$

В соответствии с разбивкой моделируемой области на блоки можно определить удельные изменения газоносности блоков

$$\omega_{нvi} = \omega_{нн}(P_{vi}) \Delta x_{vi} \Delta y_{vi} \text{ л м,} \quad (8)$$

где $\omega_{нн}(P_{vi})$ — удельное изменение газоносности единицы объема угля в центре v_i -го блока при квадрате давления газа $P_{(vi)}$;

Δx_{vi} — размер блока в направлении простирания пласта;

Δy_{vi} — размер v_i блока в направлении мощности пласта;

л м — величина блока в направлении восстания.

Аналогом удельного изменения газоносности блоков является площадь сечения сосудов гидроинтегратора. Так как для каждого блока пласта удельное изменение газоносности зависит от квадрата давления газа, то согласно аналогии уравнений [1] площадь сечения сосудов должна зависеть от высоты уровней жидкости в них.

График зависимости площади сечения ω_r сосуда от высоты уровня жидкости h (рис. 4) аппроксимировался ступенчатой ломаной.

После расчета натуральных параметров с помощью масштабных соотношений рассчитывались площади сечения сосудов при различных высотах уровней жидкости и гидравлические сопротивления, соединяющие их.

Схема двухмерной гидромодели № 1 для расчета дегазации угольного пласта скважинами представлена на рис. 5. Каждому v -му слою пласта соответствует секция гидроинтегратора, состоящая из 10 узлов. Штриховыми линиями обозначено подсоединение к сосудам граничных условий при определении входных сопротивлений для одномерных задач.

При замерах на гидроинтеграторе были получены распределения давления газа в слоях, расположенных по простиранию, в различные моменты времени. Слои характеризуются координатами y_j центров блоков.

Для определения координат x_i изобар кривые распределения давления газа в слоях $p = p_j(x, y_j, t_0)$ были нанесены на график,

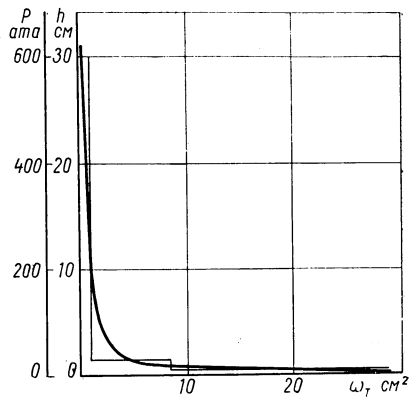


Рис. 4. График зависимости площади сечения сосуда от высоты уровня жидкости в нем и аппроксимация его ломаной

где были изображены прямые $p_i = \text{const}$. Точки пересечения кривых $p_j = p(x, y, t_0)$ и прямых $p_i = \text{const}$ дают координаты x_i изобар. По полученным координатам (x_i, y_i) строились изобары. Изобары в моменты времени $t = 1$ ч представлены на рис. 6, из

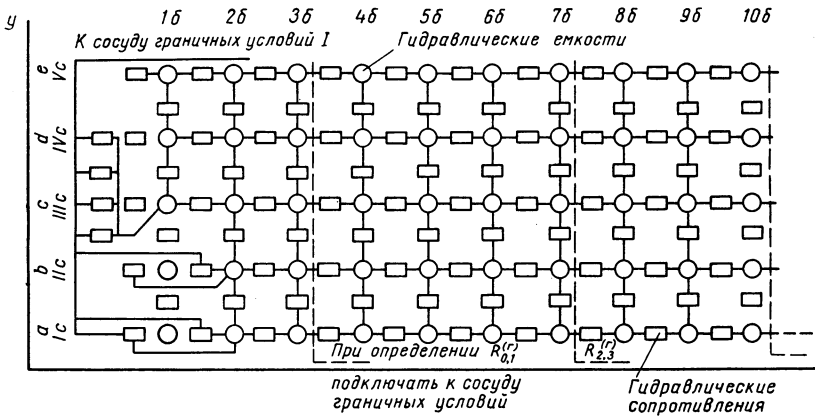


Рис. 5. Схема двумерной гидромодели для расчета дегазации угольного пласта скважинами

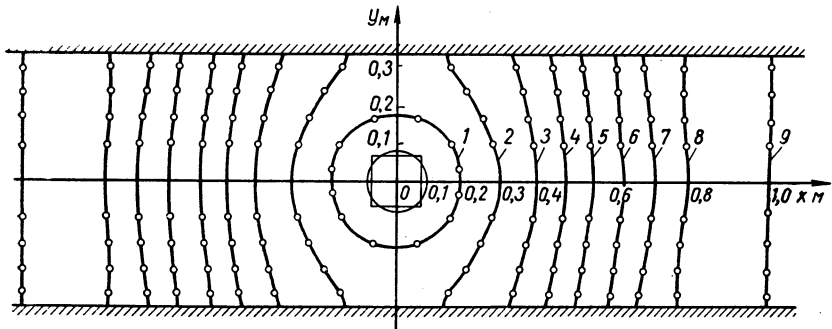


Рис. 6. Изобары в момент времени $t = 1$ ч:

$$\begin{aligned}
 1 - 1,96 \times 10^5 \frac{H}{\text{м}^2}; & \quad 2 - 3,93 \times 10^5 \frac{H}{\text{м}^2}; & \quad 3 - 5,88 \times 10^5 \frac{H}{\text{м}^2}; & \quad 4 - 7,87 \times 10^5 \frac{H}{\text{м}^2}; \\
 5 - 9,81 \times 10^5 \frac{H}{\text{м}^2}; & \quad 6 - 12,8 \times 10^5 \frac{H}{\text{м}^2}; & \quad 7 - 13,7 \times 10^5 \frac{H}{\text{м}^2}; & \quad 8 - 15,7 \times 10^5 \frac{H}{\text{м}^2}; \\
 & & \quad 9 - 17,7 \times 10^5 \frac{H}{\text{м}^2}
 \end{aligned}$$

рассмотрения которого видно, что изобара $P = 17,7 \times 10^5 \frac{H}{\text{м}^2}$ становится перпендикулярной оси x (линии простирания) на расстоянии 1 м от оси скважины. Таким образом, на расстоянии 1 м от 218

оси скважины через 1 ч после начала дегазации при данных диаметре скважины, мощности и физико-механических характеристиках пласта можно переходить к решению одномерной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Липаев Ю. А. Решение задач предварительной дегазации угольных пластов методом гидромоделирования. В сб. «Борьба с внезапными выбросами в угольных шахтах». М., Госгортехиздат, 1962, стр. 88—98.
2. Фейт Г. Н. Прочностные свойства угольных пластов как показатель выбросоопасности. Научные сообщения Института горного дела им. А. А. Скочинского. Вып. XIV, М., Госгортехиздат, 1962, стр. 88—98.
3. Ходот В. В. Внезапные выбросы угля и газа. М., Госгортехиздат, 1961, стр. 363.

Λ Λ Λ

*А. И. Медовиков, В. Н. Ломбардо,
Г. Э. Шаблинский*

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ СООРУЖЕНИЙ

Метод электро моделирования может быть весьма эффективно использован для определения частот и форм колебаний балок и плит сложной формы при любых граничных условиях. Плиты и балки рассматриваются как системы с конечным числом степеней свободы, равным числу незакрепленных узлов конечно-разностной аппроксимации. При помощи электро моделирования легко может быть построена матрица A жесткостей, т. е. в статической постановке могут быть определены прогибы упругой системы от действия единичных сил. Далее значения собственных частот колебаний могут быть вычислены из условия

$$\left| A - E \frac{1}{\omega^2} \right| = 0, \quad (1)$$

где E — единичная матрица.

Для иллюстрации рассмотрим задачу об определении частот колебаний схематизированной секции массивно-контрфорсной плотины со сдвоенными оголовками, представленной на рис. 1.

Предварительно были проведены экспериментальные исследования колебаний такой секции на гипсовой модели, изготовленной в масштабе 1:200. Изучались поперечные колебания контрфорса. Модель устанавливалась в специальном стенде, обеспечивающем жесткую заделку ее по основанию. Определение частот собственных колебаний и пересчет их в натуральный масштаб производился по методике, изложенной в работе [1].

Опыты показали, что при поперечных колебаниях таких плотин напряжения в нижней части стенок контрфорса во многом определяются прогибом стенок, которые в данном случае работают как плиты, защемленные в головках. В нижней части секции плотины напряжения в каждой стенке имеют знакоперемен-

ный характер и поэтому для всего сечения секции плотины гипотеза плоских сечений оказывается неприемлемой. Здесь необходимо рассматривать совместную работу оголовков, представля-

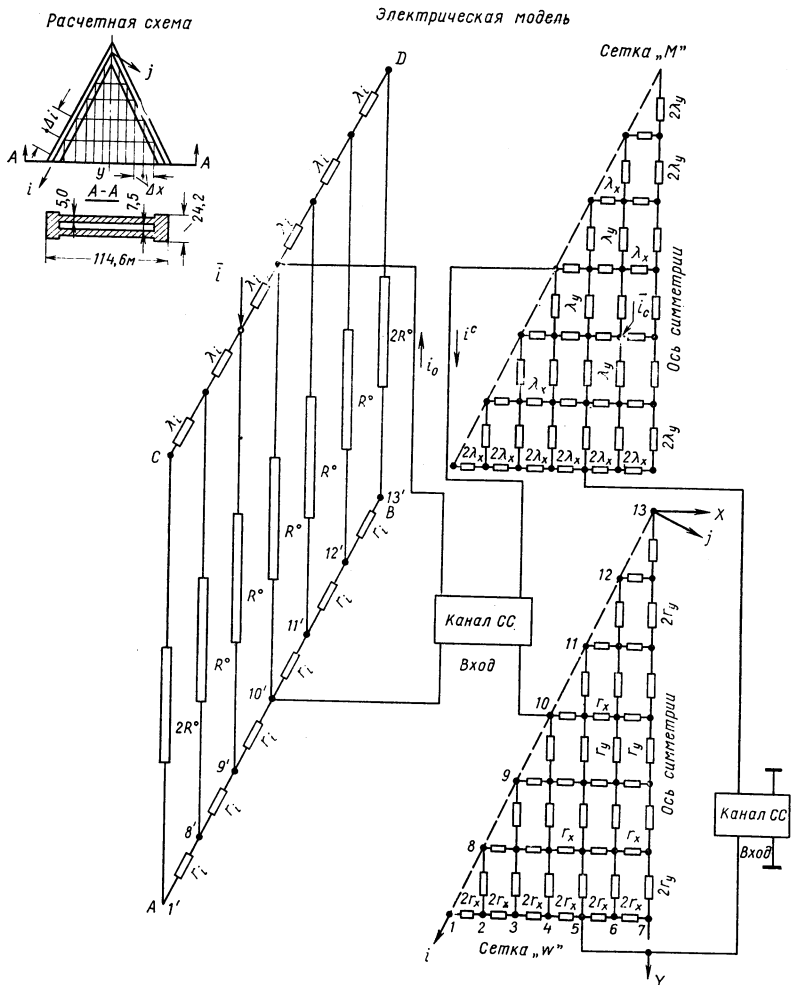


Рис. 1. Расчетная схема отдельной секции массивно-контрфорсной плотины со сдвоенными контрфорсами и соответствующая ей электрическая модель

ющих собой балки, защемленные в основании, и стенок контрфорсов как плит, защемленных в оголовках и основании. В статической постановке для построения матрицы жесткостей необходимо решать совместно системы уравнений:

а) для стенок

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 W &= \frac{1}{D} \left(q_z^c + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right); \\ \nabla^4 \Phi &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= N_y; & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= N_x; \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= -N_{xy}; \end{aligned}$$

W — прогибы стенок контрфорса;

q_z — поперечная нагрузка;

N_x, N_y, N_{xy} — усилия, действующие в срединной плоскости стенок;

б) для оголовков

$$\frac{\partial^4 W}{\partial i^4} = \frac{q_z^o}{EI_o}; \quad \frac{\partial^4 U_j}{\partial i^4} = \frac{q_j^o}{EI_z}; \quad \theta = \frac{M_o^o}{GI_p};$$

где U_j — перемещение оголовка по направлению оси j ;

I_p — полярный момент инерции оголовка;

θ — угол закручивания на единицу длины оголовка;

G — модуль упругости при сдвиге.

Здесь и далее индекс o обозначает, что функция относится к оголовку, а c — к стенке контрфорса.

Распределение воспринимаемых плотной нагрузок между стенками и оголовками (усилия на контакте) могут быть получены из условия совместности деформаций.

Анализ экспериментальных данных показывает, что в первом приближении допустимо пренебречь кручением оголовков и влиянием перемещений U_j на прогибы стенок и оголовков в направлении оси z (рис. 1).

При этом задача существенно упрощается и сводится к совместному решению двух уравнений:

а) для стенки

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 W &= \frac{q_z^c}{D}; \\ \frac{\partial^4 W}{\partial i^4} &= \frac{q_z^o}{EI_o}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где q_z^c — нагрузка на стенку контрфорса (плиту);

q_z^o — нагрузка на оголовок.

Так как при принятых допущениях стенки контрфорса работают в одинаковых условиях, то можно ограничиться рассмотрением работы одной из стенок с оголовками половинной жесткости. Электрическая схема для моделирования этой системы представлена на рис. 1 (сопротивления R_0 , связывающие соответствующие узлы сеток W и M на рисунке не показаны).

В соответствии с правилами замещения сеточные сопротивления приняты следующими:

$$\left. \begin{aligned} r_x &= \rho_1 \frac{\Delta x}{\Delta y}; \\ r_y &= \rho_1 \frac{\Delta y}{\Delta x}; \\ \lambda_x &= \rho_2 \frac{\Delta x}{\Delta y}; \\ \lambda_y &= \rho_2 \frac{\Delta y}{\Delta x}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где ρ_1, ρ_2 — сопротивления квадрата замещаемой проводящей среды.

На сетках « W » и « M » моделируется первое уравнение системы (2), а в цепях AB и CD — второе уравнение этой системы.

Уравнения (2) представим в виде системы

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \bar{M} &= \frac{q_z^c}{D}; \\ \nabla^2 W &= \bar{M}; \\ \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial i^2} &= \frac{q_z^o}{EI}; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial i^2} &= M. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Записывая эти уравнения в конечных разностях и сравнивая их с уравнениями первого закона Кирхгофа для соответствующих узлов электрической схемы, можно убедиться, что если потенциалы цепи AB и сетки « W » в масштабе n моделируют прогибы, т. е. если $n\omega_\kappa = V_\kappa$, где V_κ — потенциал узла « K » цепи AB или сетки « W », то потенциалы узлов сетки « M » в масштабе $n \frac{R_0}{\rho_1} \Delta x \Delta y$ моделируют функцию « M », а потенциалы цепи CD в масштабе $n \Delta i^2 \frac{R}{r_i}$ моделируют функцию « M ».

При этом токи, притекающие к сетке « M » и узлам цепи CD будут соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_c &= n \frac{R_o^c}{\rho_1 \rho_2} \Delta x \Delta y \frac{P^c}{D}; \\ \bar{i}_o &= n \frac{R^o}{r_i \lambda_i} \Delta i^3 \frac{P^o}{EI^o}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} P^c &= q_z^c \Delta x \Delta y; \\ P^o &= q_z^o \Delta i. \end{aligned}$$

Поэтому для того чтобы масштабы узловых усилий были одинаковы, необходимо выполнение равенства

$$r_i \lambda_i = \rho_1 \rho_2 \frac{\Delta i^2}{\Delta j^2} \frac{R^o}{R_o^c} \Delta j \frac{D}{EI^o}. \quad (6)$$

Условия на контакте оголовка и стенки имеют вид

$$\left. \begin{aligned} W_o &= W_c; \quad \frac{\partial W_c}{\partial j} = 0; \\ q^o &= Q_j = - \frac{\partial}{\partial j} \nabla^2 W = - D \frac{\partial \bar{M}}{\partial j}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где Q_j — поперечное усилие в стенке.

Выполнение этих условий обеспечивается при помощи следующей системы.

Схема включения одного канала следящей системы CC для реализации условий (7) показана на рис. 1. Аналогично отрабатываются условия в каждой контактной точке. На контакте плотины с основанием выполняются условия

$$W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0.$$

Включение канала следящей системы для выполнения этих условий в узле 5 показана на рис. 1.

При набранной электрической схеме время решения одной статической задачи определяется только временем замеров и записи результатов решения.

Значения частот и формы колебаний легко могут быть получены на ЭЦВМ из решения частотного уравнения (1).

Ниже приведены частоты собственных колебаний для вышеуказанной секции плотины, полученные по этой методике и по экспериментам на гипсовой модели.

Частота, определенная методом электроанalogии, в гц	Частота, полученная экспериментально, в гц
1,34	1,19
3,34	3,80
7,06	7,4

Во многих случаях для оценки динамической жесткости сооружений достаточно ограничиться получением одной основной частоты и формы собственных колебаний. Решение таких задач может быть получено на сеточном электроинтеграторе и без использования ЭЦВМ. Методику электро моделирования рассмотрим на примере расчета гипсовой модели ($E = 40\,000 \text{ кг/см}^2$, $\gamma = 1,1 \text{ г/см}^3$) отдельной секции массивно-контрфорсной плиты с одиночными контрфорсами при поперечных колебаниях (рис. 2).

Для простоты изложения будем рассматривать отдельно стоящую секцию массивно-контрфорской плиты как консольную

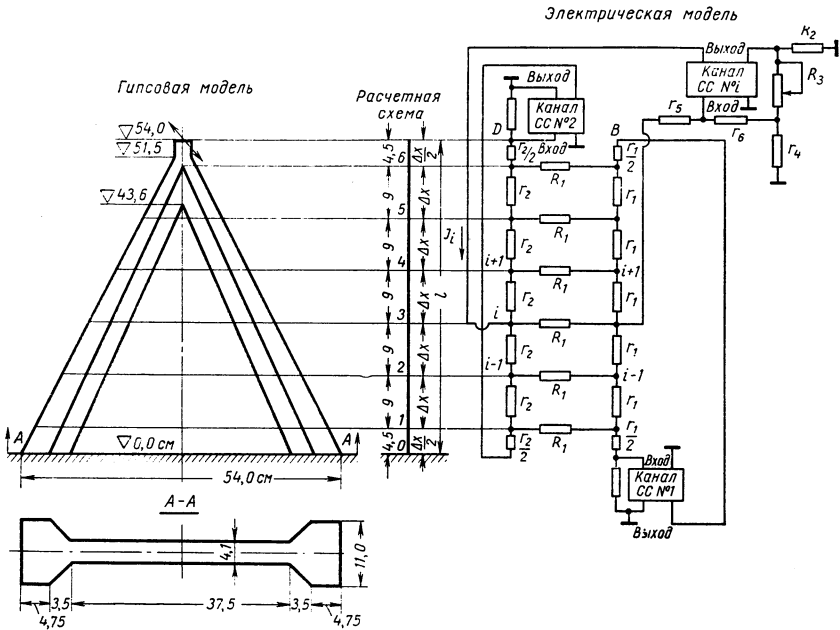


Рис. 2. Гипсовая модель отдельной секции массивно-контрфорсной плиты с одиночными контрфорсами и соответствующая ей расчетная схема и электрическая модель

балку переменной жесткости и переменной массы, защемленную в основании.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний такой балки имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial t^2} = 0,$$

где \bar{W} — прогиб балки;
 $I(x)$ — момент инерции;
 $m(x)$ — погонная масса.

Полагая, что

$$\bar{W}_n = W_n(x) \sin(\omega t + \varphi),$$

для n -й формы колебаний получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] = m(x) \omega^2 W. \quad (8)$$

Обозначим

$$EI(x) = EI_0 f_1(x);$$

$$m(x) = m_0 f_2(x),$$

где E , I_0 , m_0 — характеристики некоторого сечения балки;
 $f_1(x)$, $f_2(x)$ — безразмерные функции от координаты.

В этом случае уравнение (8) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= \frac{m_0}{EI_0} \omega^2 f_2 W; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{M}{f_1}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для моделирования этой системы составим электрическую схему, приведенную на рис. 2.

Если принять, что $R_1 \gg r_1$; $R_1 \gg r_2$; $r_5 + r_6 \gg r_1$; $r_5 + r_6 \gg r_4$; $R_1 = R_0 f_1$; $r_6 = r_5 f_2$, то уравнения первого закона Кирхгофа, записанные для i -х узлов цепей AB и CD , эквивалентны конечно-разностной записи системы (9).

При этом потенциалы узлов цепи AB в масштабе n моделируют значения функции « W », а потенциалы узлов цепи CD в масштабе $\frac{nR_0}{r_1} \Delta x^2$ моделируют функцию « M ».

Если включить каналы следящей системы так, как показано на рис. 2 (каналы следящей системы подбирают на выходе такую э. д. с., чтобы разность потенциалов на входе стремилась бы к приборному нулю), то токи

$$I_i = n \frac{r_6}{r_5} \frac{(R_2 + R_3 + r_4)}{r_2 r_4} W_i.$$

Следовательно, если принять

$$\omega = \frac{1}{\Delta x^2} \sqrt{\frac{EI_0}{m_0}} \sqrt{\frac{(R_2 + R_3 + r_4) r_1 r_2}{R_2 r_4 R_0}}, \quad (10)$$

то токи I_i будут моделировать правую часть первого уравнения системы (9) в конечно-разностной форме.

Таким образом, задача сводится к подбору таких значений R_3 [или других сопротивлений, входящих в выражение (10)], при которых имеет место не тривиальное решение уравнения (8) и система находится в положении безразличного равновесия.

Каналы № 1 и № 2 следящей системы, показанные на рис. 2, отработывают граничные условия на заземленном и свободном концах балки.

При $x = 0$, выполняются условия $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$; $W = 0$.

При $x = l$ — условия $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$; $M = 0$.

При электро моделировании по схеме, приведенной на рис. 2, было принято

$$F_0 = 194 \text{ см}^2, \quad r_1 = 20 \text{ ом}, \quad r_2 = 20 \text{ ом}.$$

$$I_0 = 1105 \text{ см}^3, \quad R_2 = 40 \text{ ом},$$

$$R_0 = 10\,000 \text{ ом}, \quad r_4 = 40 \text{ ом},$$

Остальные параметры приведены в таблице.

% сечения	F в см^2	I в см^3	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$R_1=R_0 f_1$ в ом	r_6 в ом	r_8 в ом
1	284	1453	1,46	1,385	13 850	900	620
2	239	1278	1,23	1,22	12 200	970	800
3	194	1105	1,0	1,0	10 000	1000	1000
4	151	930	0,775	0,885	8 850	770	1000
5	105	739	0,541	0,705	7 050	540	1000
6	515	490	0,266	0,466	4 660	260	980

В процессе решения подбирались сопротивления R_3 .

Положение безразличного равновесия системы имело место при $R_3 = 900 \text{ ом}$. (При $R_3 < 900$ потенциалы цепи AB стремились к нулю, при $R_3 > 900$ потенциалы неограниченно возрастали).

При $E = 40\,000 \text{ кг/см}^2$ и $\gamma = \frac{1,1}{1000} \text{ кг/см}^3$ частота основного тона колебаний по формуле (13) равна

$$\lambda = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1 \cdot 36}{628 \cdot 54^2} \sqrt{\frac{40000 \cdot 1105 \cdot 981}{194 \cdot 1,1}} \sqrt{\frac{(900 + 40 + 40) 20 \cdot 20}{10000 \cdot 40 \cdot 40}} = 128,5 \text{ гц}.$$

Для оценки точности полученного решения была изготовлена из гипса модель контрфорса с теми же расчетными характеристиками (геометрическая форма и размеры, модуль упругости, объемный вес) и жесткой заделкой по основанию.

Непосредственно замеренная на гипсовой модели частота основного тона поперечных колебаний оказалась равной 120 гц.

Расхождение частот, определенных методом электроанalogии и экспериментально на хрупкой модели, составляет 7%.

Аналогичная методика может быть использована и при определении частот и форм изгибных колебаний плит произвольной формы при произвольных условиях опирания. В этом случае вместо одномерных цепей AB и CD следует использовать двумерные сетки из омических сопротивлений.

На одной из них будет моделироваться уравнение $\nabla^2 W = \bar{M}$, а на другой $\nabla^2 \bar{M} = \frac{m\omega^2}{D}$.

Токи I_i , моделирующие правую часть последнего уравнения, подаются так же, как показано на рис. 2.

На рис. 3 дано сравнение основных частот собственных колебаний треугольных плит, полученных методом электро моделирования, с результатами аналитического расчета методом коллокаций [3] и энергетическим методом [4].

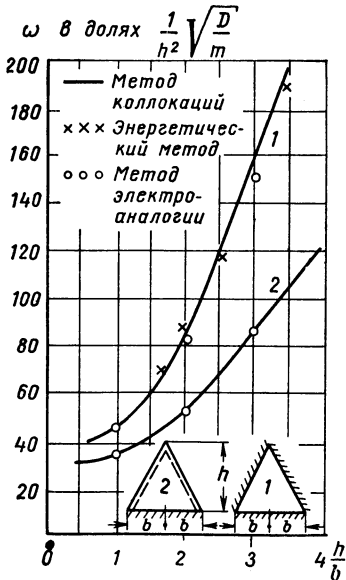


Рис. 3. Частоты основного тона изгибных колебаний треугольной плиты

ЛИТЕРАТУРА

1. Волынский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960, стр. 451.
2. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 287.
3. Гутидзе П. А. К исследованию сейсмостойкости бетонной контрфорсной плотины на модели. Известия ТНЕСГЭИ, т. 15, М.—Л., «Энергия», 1964, стр. 142—153.
4. Гутидзе П. А. О расчете инерционных сейсмических сил, действующих на бетонные контрфорсные плотины с массивными оголовками. Известия ТНЕСГЭИ, т. 14, М.—Л., Госэнергоиздат, 1962, стр. 138—147.

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ И ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА СЕТОЧНЫХ ЭЛЕКТРОИНТЕГРАТОРАХ

Для промышленного и гидротехнического строительства, для газотурбостроения, двигателестроения, реакторостроения и т. п. все большее значение приобретает разработка инженерных методов расчета напряжений и деформаций, особенно от температурных воздействий.

Задача снижения веса машин и сооружений также требует детального изучения напряженного состояния конструкций. Такое исследование напряженного и деформированного состояния часто может быть сведено к решению плоской или осесимметричной задач теории упругости. Однако для областей со сложной конфигурацией эффективных аналитических решений этих задач в настоящее время не существует. Поэтому разработка инженерных методов расчета должна базироваться на применении современных цифровых и аналоговых вычислительных машин.

В настоящей статье дается обзор основных работ, проведенных по решению на сеточных электроинтеграторах плоской и осесимметричной задач прикладной теории упругости, а также ряда работ по расчету пластинок, так как уравнения для прогибов пластинки подобны бигармоническому уравнению плоской задачи.

При решении любой задачи теории упругости должны быть удовлетворены три следующие группы уравнений:

В плоской задаче¹. В осесимметричной задаче²

а) Статические уравнения

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \left| \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \quad (1) \right.$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad \left| \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (2) \right.$$

б) Геометрические уравнения

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x}; & \epsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y}; & \left| \quad \epsilon_r &= \frac{\partial U}{\partial r}; & \epsilon_\theta &= \frac{U}{r}; & \epsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z}; \right. \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}; & & & \left| \quad \gamma_{rz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r}. \right. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

¹ Здесь мы ограничимся рассмотрением формул для плоского напряженного состояния.

² В дальнейшем при ссылке на приводимые здесь формулы мы будем добавлять индексы: *n* — для плоской задачи, *o* — для осесимметричной.

в) Физические уравнения

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \alpha T; & \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu (\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \alpha T; & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu (\sigma_z + \sigma_r)] + \alpha T; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; & \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_z + \sigma_\theta)] + \alpha T. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Кроме того, должны быть выполнены условия на контуре рассматриваемой области

$$X_n = \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos(ny); \quad R_n = \sigma_r \cos(nr) + \tau_{rz} \cos(nz); \quad (5)$$

$$Y_n = \tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny); \quad Z_n = \tau_{rz} \cos(nr) + \sigma_z \cos(nz). \quad (6)$$

Если при решении задач интерес представляют только напряжения и деформации, то геометрические уравнения (2) следует заменить уравнениями неразрывности деформаций [1, 2]:

$$\left. \begin{array}{l} \text{в плоской задаче} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{в осесимметричной задаче} \\ \varepsilon_r - \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_\theta) = 0; \\ \frac{\partial^2 (r \varepsilon_\theta)}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} = \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial z}. \end{array} \quad (7)$$

При аналитическом решении задач теории упругости прямое решение всех трех групп уравнений для отыскания всех неизвестных (напряжений, деформаций и перемещений) обычно не предпринимается. Задачи решают либо методом сил, либо методом перемещений.

Однако существует принципиальная возможность создания электромоделей, обеспечивающей непосредственное интегрирование всех трех групп уравнений теории упругости. В 1944 г. Г. Крон описал электромодель упругого тела, в которой каждой группе уравнений теории упругости соответствует определенный закон электрической цепи:

- а) уравнениям равновесия — первый закон Кирхгофа;
- б) физическим уравнениям — закон Ома;
- в) уравнениям неразрывности — второй закон Кирхгофа.

При этом напряжения в упругом теле соответствуют токи, а перемещения — напряжения в узлах электромоделей, состоящей из двух взаимосвязанных сеток, узлы которых сдвинуты на полшага.

Однако электромодель Крона на реактивных LC-сетках не получила широкого распространения из-за больших технических трудностей создания моделей удовлетворительной точности [4]. Поэтому продолжались исследования возможностей построения

электроаналогий, использующих преобразованные уравнения теории упругости, по методам сил и перемещений, где сначала отыскивается лишь одна группа неизвестных.

В уравнениях метода сил искомыми неизвестными являются напряжения:

$$\begin{array}{c|c} \text{в плоской задаче} & \text{в осесимметричной задаче} \\ \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}; & \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z \text{ и } \tau_{rz}, \end{array}$$

для определения которых необходимо решить уравнения равновесия (1) — (2) и уравнения совместности (7), выраженные через напряжения:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) + \\ + E\alpha\nabla^2 T = 0; \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} (1 + \nu)(\sigma_r - \sigma_z) + rk \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r + \sigma_z) - r \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} = 0; \\ r \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} - \nu \left[\frac{\partial(\sigma_r + \sigma_\theta)}{\partial r} + \right. \\ \left. + r \frac{\partial^2(\sigma_r + \sigma_z)}{\partial z^2} \right] - 2(1 + \nu) \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0. \end{array} \right\} (7a)$$

При этом должны удовлетворяться условия (5), (6) на контуре рассматриваемой области.

В уравнениях метода перемещений искомыми неизвестными являются перемещения:

$$\begin{array}{c|c} \text{в плоской задаче} & \text{в осесимметричной задаче} \\ U, V; & U, W, \end{array}$$

для определения которых необходимо решить два синтезирующих¹ уравнения Дюгамеля — Неймана, которые при удовлетворении условиям на контуре (5) — (6), выраженным через перемещения, и при отсутствии температурных членов превращаются в уравнения Ляме:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 U + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0; \\ \nabla^2 V + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0; \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial W}{\partial r} + \\ + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) U = 0; \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \\ + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} = 0. \end{array} \right\} (8)$$

Упрощение аналитического решения задач теории упругости достигается введением функций напряжений (функций переме-

¹ Т. е. полученных в результате совместного рассмотрения статических уравнений (1) — (2), геометрических уравнений и физических уравнений.

шений), которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям четвертого порядка:

$$\begin{array}{l|l} \text{в плоской задаче} & \text{в осесимметричной задаче} \\ \nabla^2(\nabla^2 F) = 0^*; & \Delta(\Delta\varphi) = 0, \end{array} \quad (9)$$

где ∇^2 и Δ — операторы Лапласа в декартовой и цилиндрической системах координат;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (10)$$

Напряжения связаны с этими функциями следующими выражениями¹.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + qx; \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right); \\ \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right); \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \Delta\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]; \\ \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \Delta\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]. \end{array} \quad (11)$$

Граничные условия в осесимметричной задаче сложны: они выражаются сложной комбинацией производных искомой функции φ . Эти условия получим подстановкой выражения (11) в условия на контуре (5) — (6). Граничные условия в плоской задаче для односвязной области просты, на контуре области известна функция φ и ее нормальная производная

$$F|_{ep} = f_1(S); \quad (12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} \Big|_{ep} = f_2(S). \quad (13)$$

Эти значения функции и нормальной производной наиболее просто вычисляются по методу рамной аналогии.

В математической физике известно, что уравнение в частных производных четвертого порядка может быть представлено в виде системы двух уравнений в частных производных второго порядка. Таким образом мы можем записать:

для плоской задачи
вместо уравнения
 $\nabla^2(\nabla^2 F) = 0$ систему

$$\begin{cases} \nabla^2 F = P, \\ \nabla^2 P = 0; \end{cases}$$

для осесимметричной задачи
вместо уравнения
 $\Delta(\Delta\varphi) = 0$
систему

$$\begin{cases} \Delta\varphi = P; \\ \Delta P = 0. \end{cases} \quad (14)$$

* E — функция Эри (при отсутствии центральных сил и температурных полей).

¹ Решение Лява для осесимметричной задачи.

Так как принципиальная возможность решения уравнений Лапласа и Пуассона на электрических сетках была показана С. А. Гершгориним еще в 1926 г., то естественно, что разработка методик решения плоской и осесимметричной задач теории упругости в первую очередь была направлена на моделирование систем уравнений (14) — (15). Реализация этих методик стала возможной после разработки Л. И. Гутенмахером сеточного электроинтегратора. Применению методов электрического моделирования при решении задач теории упругости содействовала широкая популяризация Л. И. Гутенмахером идей электрического моделирования. В связи с недостатками серийно выпускаемых сеточных интеграторов ЭИ-11, ЭИ-12 (низкая точность сетки и делителя напряжений) для решения задач теории упругости были созданы специализированные интеграторы типа ЭМ-6БУ (рис. 1), изготовленные в 1952 г. Институтом автоматики по заказу Гидропроекта [7], и интегратор КГУ (рис. 2), создан-

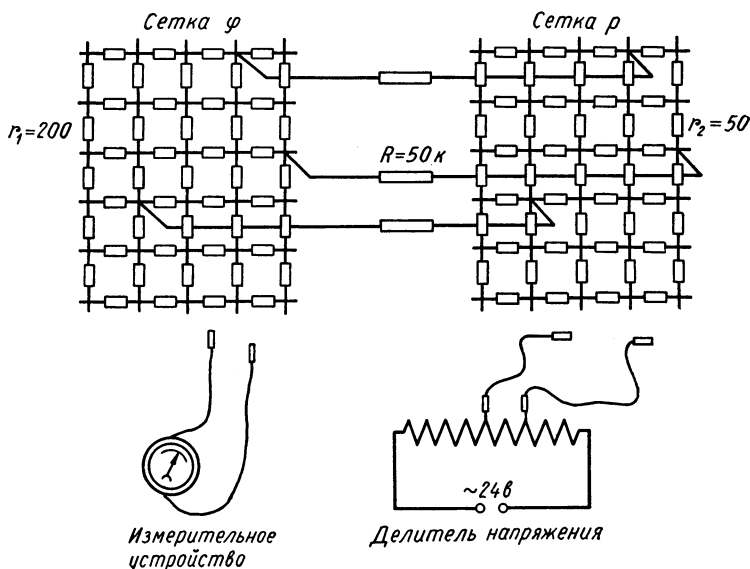


Рис. 1. Принципиальная схема интегратора ЭМ-6БУ

ный в 1949 г. коллективом Лаборатории электрического моделирования Киевского государственного университета им. Т. Г. Шевченко под руководством Дьяченко В. Е. и Танцюры Н. А. Электроинтегратор КГУ работает на постоянном токе. Сетка имеет прямоугольную форму, на ней размещено $30 \times 40 = 1200$ узлов и 2400 магазинов сопротивлений. Магазины сетки изолированы от узлов и включаются в схему с помощью ножевых контактов и специальных узловых шнуров, которыми производится

набор величины сопротивления магазина сетки. Это позволяет одновременно набирать несколько задач, а также создавать многоэтажные сетки.

Переменные сопротивления сетки выполнены в виде магазинов сопротивления, состоящих из трех групп последовательно соединенных сопротивлений:

- 1000, 2000, 3000 и 4000 *ом* — в первой группе;
- 100, 200, 300 и 400 *ом* — во второй группе;
- 10, 20, 30 и 40 — в третьей группе.



Рис. 2. Общий вид интегратора КГУ

Подготовка всех сопротивлений произведена с высокой точностью ($\pm 0,05\%$).

Набор величины сопротивления производится путем закорачивания катушек специальным ножевым контактом. Следовательно, сопротивления сетки могут быть набраны в диапазоне от 10 *ом* до 11 100 *ом* через 10 *ом*. Для расширения пределов набора величин сопротивлений имеются дополнительные переменные сопротивления — приставки (величиной порядка 10 *ом*), которые включаются

параллельно высокоомным сопротивлениям. Таким образом, обеспечивается возможность набора величин сопротивления от 0,1 *ома* до 11100 *ом* через 0,1 *ома*. Сопротивления истоков размещаются на специальных приставках.

Измерительное устройство выполнено по потенциометрической схеме последовательных декад. Для компенсации измеряемого напряжения с точностью до единицы пятого знака имеются пять декадных переключателей. В связи с несовершенством делителей напряжения обычного типа в электроинтеграторе КГУ для задания граничных условий или токов истоков применяются индивидуальные потенциометры. Всего установлено 100 потенциометров (каждый из них имеет две ступени регулирования), обеспечивающих задание граничных условий с точностью до единицы пятого знака.

Аналогичную конструкцию имеет упрощенный интегратор

КГУ, выполненный по заказу Института гидрологии и гидротехники АН УССР, где в 1949 г. Л. И. Дятловицким была предложена методика итерационного решения краевой бигармонической задачи на односеточном ЭИ с использованием клавишных вычислительных машин [28]. Суть метода заключается в следующем. Численное решение бигармонического уравнения

$$\nabla^2 (\nabla^2 F) = 0$$

при заданных φ_{zp} и $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{zp}$ осуществляется чередующимися численными решениями уравнения Пуассона (14) и уравнения Лапласа (15).

При численном решении уравнения (14) и (15) заменяются разностными уравнениями. Для повышения точности решения задач с областями, очерченными ломаным контуром, применялись прямоугольные, нерегулярные сетки, выбранные так, чтобы все прямолинейные отрезки контура координировались выбранными шагами сетки (т. е. чтобы углы сетки попадали на контур области).

Если контур области имеет входящие углы, то рекомендуется применять местное сгущение сетки для того, чтобы разностные уравнения лучше улавливали концентрацию напряжений в окрестностях входящих углов. На рис. 3 приведен пример разбивки сетки при расчете плотины [14].

Дифференциальным уравнениям (14) и (15) соответствуют разностные выражения при прямоугольной нерегулярной сетке:

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(n+1)} &= \\ &= \frac{2}{\Delta x_{j-1} + \Delta x_{j+1}} \left(\frac{\Phi_{j-1}^{(n)}}{\Delta x_{j-1}} + \frac{\Phi_{j+1}^{(n)}}{\Delta x_{j+1}} \right) + \frac{2}{\Delta y_{i-1} + \Delta y_{i+1}} \left(\frac{\Phi_{i-1}^{(n)}}{\Delta y_{i-1}} + \frac{\Phi_{i+1}^{(n)}}{\Delta y_{i+1}} \right) - P_i^{(n)}; \\ &= \frac{2 \left(\frac{1}{\Delta x_{j-1} \Delta x_{j+1}} + \frac{1}{\Delta y_{i-1} \Delta y_{i+1}} \right)}{2 \left(\frac{1}{\Delta x_{j-1} \Delta x_{j+1}} + \frac{1}{\Delta y_{i-1} \Delta y_{i+1}} \right)} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} P_i^{(n+1)} &= \\ &= \frac{\frac{1}{\Delta x_{j-1} + \Delta x_{j+1}} \left(\frac{P_{j-1}^{(n)}}{\Delta x_{j-1}} + \frac{P_{j+1}^{(n)}}{\Delta x_{j+1}} \right) + \frac{1}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_{j+1}} \left(\frac{P_{i-1}}{\Delta y_{i-1}} + \frac{P_{i+1}}{\Delta y_{i+1}} \right)}{\frac{1}{\Delta x_{j-1} \Delta x_{j+1}} + \frac{1}{\Delta y_{i-1} \Delta y_{i+1}}} \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь верхний индекс обозначает номер приближения.

Краевые условия вычисляются широко распространенным методом рамной аналогии.

Уравнение (17) решается на односеточном ЭИ. Найденные значения P_i используются для нахождения новых значений φ_i по

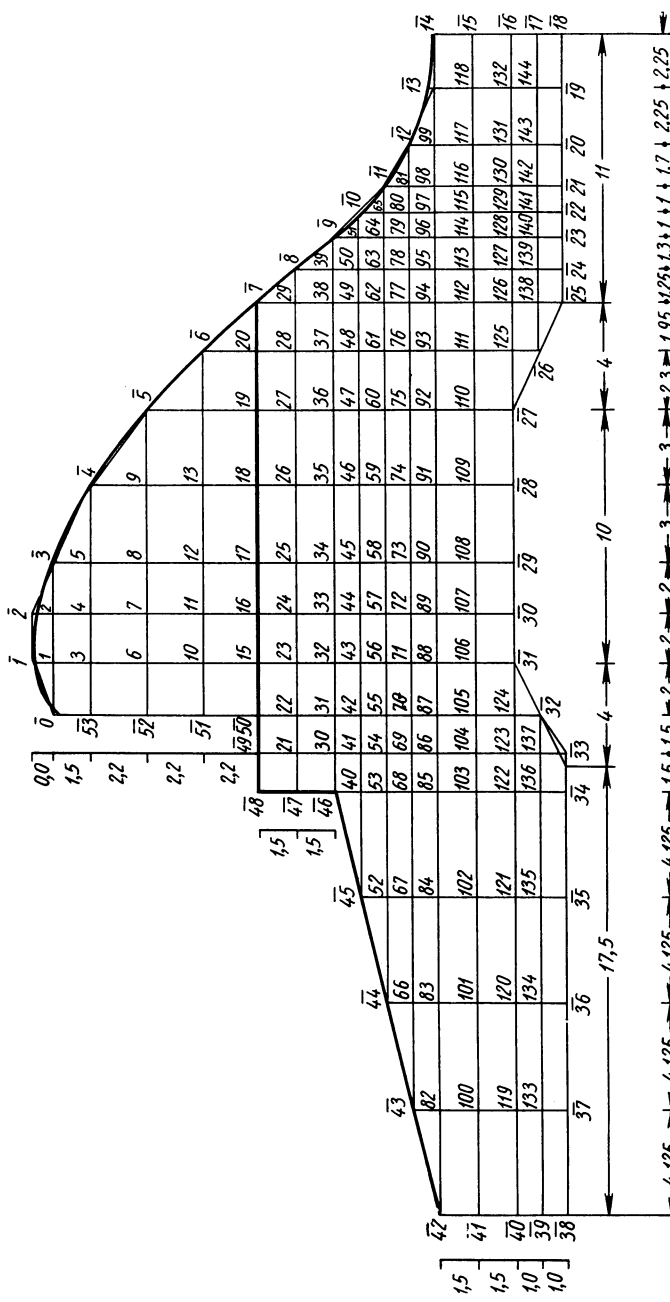


Рис. 3. Пример разбивки сетки при расчете плотины.

Числа с чертой — номера граничных точек; числа без черты — номера внутренних точек сетки; размеры шагов указаны в м

формуле (16). Эта операция может осуществляться на клавишных вычислительных машинах.

Для облегчения работы заранее изготовлялось достаточное число бланков, соответствующих сетке задачи.

Вычисления для n -го приближения по формуле (16) производятся с двумя бланками. Бланк $(n - 1)$ -го приближения содержит замеренные на ЭИ значения $P_i^{(n-1)}$ и вычисленные по формуле (16) значения $\varphi_i^{(n-1)}$ в узлах сетки. В бланк n -го приближения вписываются вновь вычисленные $\varphi_i^{(n)}$ и $P_{\text{конт}}^{(n)}$. По бланку n -го приближения производится на ЭИ следующее решение уравнения (17) и т. д. Этот нестационарный процесс продолжается до получения необходимой стабилизации φ_i , что требует около 25 чередований решений (16) и (17) при числе узлов сетки от 100 до 200.

Этим методом было решено значительное количество задач из области гидротехнического строительства [13, 14].

Следует указать на следующее важное обстоятельство, возникающее при местном сгущении сетки. Если в сетке получаются участки, в которых отношение шагов Δx_1 и Δx_2 велико, то итерационный процесс нахождения φ_i может получиться расходящимся. Эта расходимость практически может быть преодолена некоторым «притормаживанием» итерационного процесса по формуле

$$\varphi_{\text{расч}}^{(n+1)} = \alpha \varphi_{\text{расч}}^{(n)} + \lambda \varphi^{(n+1)}, \quad (18)$$

где α и λ — весовые коэффициенты, причем $\alpha + \lambda = 1$ [14].

Наибольший опыт решения задач теории упругости методом моделирования бигармонического уравнения накоплен в Гидропроекте, где А. К. Кузнецовой на ЭМ-6-БУ решено около четырехсот задач.

Теоретически наиболее простая методика решения бигармонического уравнения на двухсеточной модели была предложена Б. А. Волынским [7]. Она состояла в представлении F в виде суммы двух функций:

$$F = \omega + \varphi,$$

где φ удовлетворяет уравнению Лапласа;

$$\nabla^2 \varphi = 0 \text{ при } \varphi|_r = f_1(x, y)$$

и решается на одной сетке.

Тогда функция ω должна удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \omega = 0$$

при граничных условиях

$$\omega|_r = F_r - \varphi_r = 0; \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial n}\right)_r = \left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_r - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_r = f_2(x, y) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_r. \quad (20)$$

и решаться на двухсеточной модели.

Процесс последовательных приближений состоял в том, что, измеряя на границе $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ и меняя потенциалы на верхней сетке (P), добивались удовлетворения условия (20).

Метод оказался неудобным на практике вследствие медленной сходимости и скачкообразности итерационного процесса.

Во время эксплуатации модели и по мере накопления опыта в научно-исследовательском секторе Гидропроекта методика решения на ЭМ-6-БУ постоянно совершенствовалась.

Н. Д. Предтеченский [27] предложил новую методику, по которой функция F разбивалась на две бигармонические функции:

$$F = U + V.$$

Граничные условия для функции U :

$$P_n = \text{const} \text{ и } \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial n} = f_2(S).$$

В результате решения уравнения $\nabla^2 U = P_u = \text{const}$ на модели находят граничное значение

$$U_{\partial P} = f_3(S).$$

Тогда для V имеем граничные условия

$$V|_r = E|_r - U_r = f_1(S) - f_3(S); \quad (21)$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad (22)$$

причем на модели сразу выполняется условие $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, а значения $(P_{x,y} - P_u)$ постепенно подбираются так, чтобы удовлетворилось условие (21).

Совершенствование методики решения бигармонического уравнения на ЭМ-6-БУ произведено А. К. Кузнецовой [17, 18, 19, 20].

Решение уравнения $\nabla^2 \nabla^2 F = 0$ для односвязных областей теперь производится в один прием: задав на сетку F условие (22), подбирают граничные значения P на сетке P так, чтобы на сетке φ выполнялось и второе граничное условие (21).

Аналогично решаются задачи об изгибе тонких плит поперечной нагрузкой, так как уравнение Софи Жермен $\nabla^2 \nabla^2 \omega = \frac{q}{D}$

также может быть представлено в виде системы двух уравнений Пуассона:

$$\nabla^2 \omega = -\frac{M}{D}; \quad \nabla^2 M = -q.$$

Что касается граничных условий, то, например, при жесткой заделке равны нулю прогибы и углы поворота:

$$\omega|_r = 0; \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial n} \right|_r = 0.$$

Н. Д. Предтеченским [26, 27] разработана методика электрического моделирования плоской задачи для двухсвязных областей, основанная на принципе суперпозиции. Функцию F представляют в виде суммы четырех бигармонических функций:

$$F = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4.$$

Граничные условия для функции φ_1 зависят только от внешней нагрузки, для φ_2 — только от постоянной F_0 , для φ_3 — от K , для φ_4 — от L . Таким образом, методика является машинно-аналитической: в четыре приема (для функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и φ_4) производится решение на электроинтеграторе, а затем аналитически из условия минимума потенциальной энергии вычисляются значения постоянных F_0, K и L . Для определения постоянных может быть использовано условие однозначности перемещений [26].

А. К. Кузнецовой детально разработана методика решения плоской термоупругой задачи как для односвязных, так и для двухсвязных областей [18]. Решение уравнения (9) в общем случае сводится к представлению функции F в виде суммы двух функций:

$$F = \omega + P$$

и последовательному решению уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \omega = -\frac{\alpha E T}{1 - \nu}$$

с граничными условиями $\left. \frac{\partial \omega}{\partial n} \right|_r = 0$

и однородного бигармонического уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0$$

с граничными условиями на внешнем контуре

$$\begin{cases} \Phi|_{r_p} = -\omega|_{r_p} \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{r_p} = 0; \end{cases}$$

на внутреннем контуре

$$\Phi_{\varepsilon p} = -\omega_{\varepsilon p} + A + Bx + Cy;$$
$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\varepsilon p} = \left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_{\varepsilon p}.$$

Детальному рассмотрению методики электрического моделирования термоупругой задачи был посвящен доклад А. К. Кузнецовой на I Всесоюзной конференции по аналоговым методам и средствам решения краевых задач.

Рассмотренная выше методика моделирования плоских задач теории упругости, разработанная в НИСе Гидропроекта, не может быть непосредственно применена к решению смешанной задачи, так как на части контура, где заданы перемещения, не известны значения функции F и ее производной $\frac{\partial F}{\partial n}$.

А. И. Медовиковым разработана методика, которая позволяет решать такие задачи на сеточном электроинтеграторе, моделирующем бигармоническое уравнение. Она основывается на электрическом построении гармонической функции ψ , которая определяет перемещения совместно с бигармонической функцией по формулам Лява:

$$2\nu U = -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x};$$
$$2\nu V = -\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Функция ψ связана с суммой нормальных напряжений P равенством $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = P$. Подбор граничных условий при решении смешанных задач осуществляется по дополнительным функциям, которые автоматически строятся в дополнительных цепях. Схема соединения сеток электро модели, предложенная А. И. Медовиковым для решения смешанной плоской задачи, представлена на рис. 4. В МИСИ им. В. В. Куйбышева под руководством А. И. Медовикова по этой схеме был разработан и изготовлен специализированный интегратор, основной отличительной особенностью которого является замена сетки функции высокого потенциала (P) несколькими листами электропроводной бумаги, поджимаемой к контактам пневматической подушкой [22]. На электропроводную бумагу накладывался лист кальки, имеющий вырез по форме моделируемой области. Тем самым набор области осуществлялся весьма быстро.

При решении бигармонического уравнения на этом ЭИ не используются производные функции высокого потенциала, точность решения определяется качеством сопротивления сетки низкого потенциала и влияние неоднородности электропроводной бумаги

невелико. Собранный электроинтегратор несколько лет находился в эксплуатации. В настоящее время он заменен электроинтегратором усовершенствованной конструкции.

В работе [23] изложен расчет по этой методике гравитационной плотины, расположенной на жестком основании. Анализ результатов позволил сделать вывод о целесообразности размещения вблизи основания напорной грани шва-надреза. Экспериментальные исследования такой конструкции, проведенные во Всесоюзном научно - исследовательском институте гидротехники, полностью подтвердили эти выводы.

В работе [22] изложена методика электрического моделирования напряженного состояния конструкций, расчетная схема которых может быть сведена к балке, соединенной с пластинкой произвольной формы. Значения функции напряжений и ее нормальной производной по линии контакта выражаются через смещения соответствующих контактных точек пластинки, изгибающий момент и продольную силу балки.

Методика электрического моделирования смешанных задач теории упругости внедрена в практику работы НИСа Гидропроекта. По этой методике рассчитаны элементы конструкций Киевской, Мамаканской и других электростанций.

При решении многих задач теории упругости на двухсеточной модели не требуется производить уравнивание во внутренних узлах исследуемой области. Подбор краевых условий необходимо осуществлять при решении некоторых задач на контуре области или на отдельных участках контура. Однако проведение подбора вручную и в этом случае является весьма трудоемкой операцией. Для автоматизации этого процесса в МИСИ им. В. В. Куйбышева под руководством А. И. Медовикова разработан многоканальная следящая система.

Экспериментальные исследования условий работы такой системы показали, что при питании сеток электроинтегратора пере-

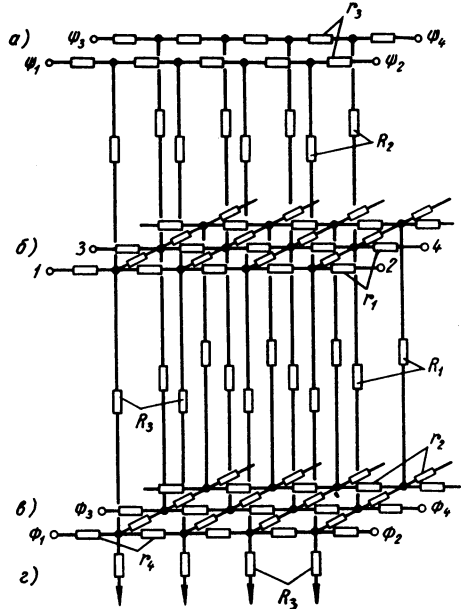


Рис. 4. Схема соединения сеток электроинтегратора для решения смешанной плоской задачи:

a — граничные цепочки; *б* — сетка « ψ »; *в* — сетка « ρ »; *г* — сопротивления для задания правой части бигармонического уравнения

менным током квадратурная составляющая наводки в сигналах рассогласования делает работу системы неустойчивой. Избавиться от этого недостатка не удалось, хотя была проведена большая работа по экранировке всех узлов и устранению сдвига фаз.

Осуществление автоматизации процесса подбора стало возможным после перевода питания сеток электроинтегратора на постоянный ток. В этом случае фиксированная фаза питающего напряжения не вызывает появления квадратурной составляющей, а вибраторы, стоящие на входах усилителей, являются надежными фильтрами наводок промышленной частоты [24, 25].

В отличие от рассмотренных работ, где на электроинтеграторах осуществлялось моделирование гармонических и бигармони-

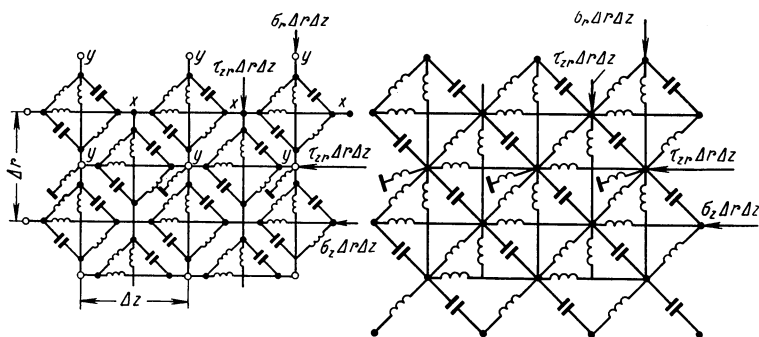


Рис. 5. Схема моделирования уравнения теории упругости в перемещениях

ческих функций напряжений, во ВНИИ транспортного строительства ЦНИИС М. Д. Головки и др. довели до практического применения метод решения двумерных задач теории упругости на электрических цепях, предложенный Г. Кроном.

В результате настойчивых поисков М. Д. Головки удалось реализовать упрощенную модель Г. Крона (рис. 5), которая по существу моделирует уравнение теории упругости в перемещениях.

С этой целью в ЦНИИС и в НИИ строительной физики была создана специальная аппаратура, включающая в себя настраиваемые вручную схемы, имитирующие поведение отрицательных сопротивлений, необходимых в применяемых эквивалентных цепях. На этой аппаратуре решаются задачи из практики строительства, преимущественно о термонапряженном состоянии бетонных элементов конструкций [5, 6]. В НИИ строительной физики А. А. Гагарина рассчитывала напряженные состояния крупноразмерных стеновых панелей [8, 9, 10].

Получить достаточно точные решения на этих устройствах оказалось возможным лишь при использовании метода последо-

вательных приближений, вычисляя на клавишных сеточных машинах небалансные токи (соответствующие в решаемой задаче теории упругости невязкам уравнений равновесия в избранных точках исследуемой области) и повторно загружая эквивалентную цепь для определения поправок, уточняющих первое, недостаточно точное решение. В настоящее время проводят 2—3 таких уточнения.

Во ВНИИ транспортного строительства рассматривалась не только плоская задача. Здесь А. В. Амелянчик реализовал модель Г. Крона для осесимметричной задачи. Им исследовались тепловые напряжения в поршне тепловозного двигателя [3].

Значительная трудоемкость решения задач на моделях Г. Крона, выражающаяся в необходимости приведения уточнения решений, получаемых на моделирующем устройстве, наряду с большим объемом вспомогательных вычислений по решению задач в целом содействовала постепенному превращению развиваемого в ЦНИИС аналогового метода в аналого-цифровой. Так, А. В. Амелянчик предложил использовать электроанalogию для простого составления уравнений, которые затем решаются на ЭЦВМ.

В статье данного сборника М. Д. Головки и Ю. А. Матросов сообщают о решении двух температурных задач теории упругости методом электрических аналогий, но уже без применения электрической установки. Искомые значения потенциалов (составляющих перемещений) получаются в результате решений на ЭЦВМ системы линейных алгебраических уравнений, определяющей поведение электрической цепи, эквивалентной упругому полю.

Схема эквивалентной цепи в этом случае используется как топологическая модель решаемой системы уравнений. Удобство нового подхода состоит в единообразии учета разнообразных граничных условий (по сравнению, например, с методом конечных разностей) и в простоте автоматизации трудоемких вспомогательных вычислений.

Перейдем к рассмотрению способов электрического моделирования осесимметричной задачи. Теоретически для электрического моделирования может быть использовано решение Лява (9)—(11), так как сеточные электроинтеграторы (ЭИ-12, КГУ и др.) обеспечивают моделирование уравнений Лапласа (15) и Пуассона (14) в цилиндрической системе координат. Однако граничные условия для функции настолько сложны, что практически применить решение Лява для решения задач методом моделирования не представляется возможным.

В обширной литературе по теории упругости известны и другие решения осесимметричной задачи: решения К. Вебера, Б. Г. Галеркина, Г. Д. Гродского, К. Маргера, Мичела, П. Ф. Папковича, Г. Нейбера, Р. Саусвелла, А. Тимпе.

Однако исследование этих решений показало, что их использование для электрического моделирования практически невозможно из-за сложности реализации граничных условий. Поэтому автором настоящей статьи была предпринята попытка отыскания новых решений, более удобных для моделирования. В результате поисков в 1949 г. было получено новое общее решение осесимметричной задачи, выраженное через две функции напряжений Ω и Φ , удовлетворяющих системе двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Omega = D\Omega = 0; \quad (23)$$

$$D\Phi = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2},$$

где оператор

$$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]. \quad (24)$$

В этом решении напряжения связаны с Φ и Ω следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Phi + \Omega) - \frac{1}{r^2} [(1 - \nu) \Omega + \Phi] \\ \sigma_\theta &= \frac{\nu}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} [(1 - \nu) \Omega + \Phi]; \\ \sigma_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Из выражений (25), (5) и (6) получаем следующие граничные условия на контуре:

$$Z_n = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial s}; \quad (26)$$

$$R_n = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Phi + \Omega) - \frac{1}{r^2} [(1 - \nu) \Omega + \Phi] \right\} \cos(n, r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos(n, z). \quad (27)$$

Из первого граничного условия путем контурного интегрирования можно определить значения функции Φ на границе исследуемой области

$$\Phi(s) = \int r Z_n ds.$$

Таким образом, методика решения осесимметричной задачи на ЭИ может быть аналогична методике плоской задачи: граничные значения одной функции (Φ) известны, а граничные значения другой функции (Ω) должны быть найдены в результате ряда последовательных приближений, производимых до удовлетворения граничному условию (27).

На электроинтеграторе КГУ нами была создана трехсеточная модель (рис. 6). На сетке I решалось уравнение $D\Omega = 0$, на сетке II — уравнение $D\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}\right) = 0$. Все узлы сетки II связыва-

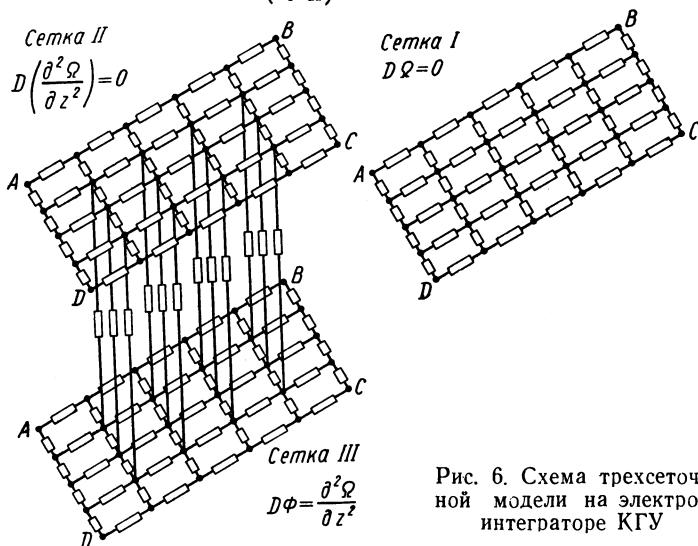


Рис. 6. Схема трехсеточной модели на электроинтеграторе КГУ

лись с соответствующими узлами сетки III. Эта «двухэтажная» модель и позволила получить на сетке III решение уравнения

$$D\Phi = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}.$$

На этой модели было исследовано напряженное состояние ряда толстостенных цилиндров и дисков турбомашин.

На рис. 7 представлены результаты исследования напряженного состояния цельнокованого турбинного ротора.

В методе последовательных приближений для выполнения второго граничного условия (27) использовался метод верхней релаксации, позволивший резко увеличить скорость сходимости процесса подбора граничных значений функции Ω [1]. Новые значения функции Ω вычислялись по релаксационной формуле

$$\Omega_i^{(n+1)} = \Omega_i^{(n)} + \alpha_n \varepsilon_i,$$

где ε_i — «невязка» в граничном условии (27) для i -го узла; α_n — релаксационный коэффициент, подбиравшийся экспериментально в процессе решения на ЭИ.

Опыт эксплуатации этой модели показал, что на ЭИ могут решаться сложные осесимметричные задачи. Была разработана методика решения на ЭИ задач с учетом центростремительных сил и температурных полей. Вместе с тем необходимо отметить, что в ряде случаев сетка низкого потенциала (Φ) не обеспечивала необходимой точности решения. Поэтому в вычислительном центре КГУ им. Т. Г. Шевченко были продолжены поиски новых решений осесимметричной задачи, в которых функции напряжений

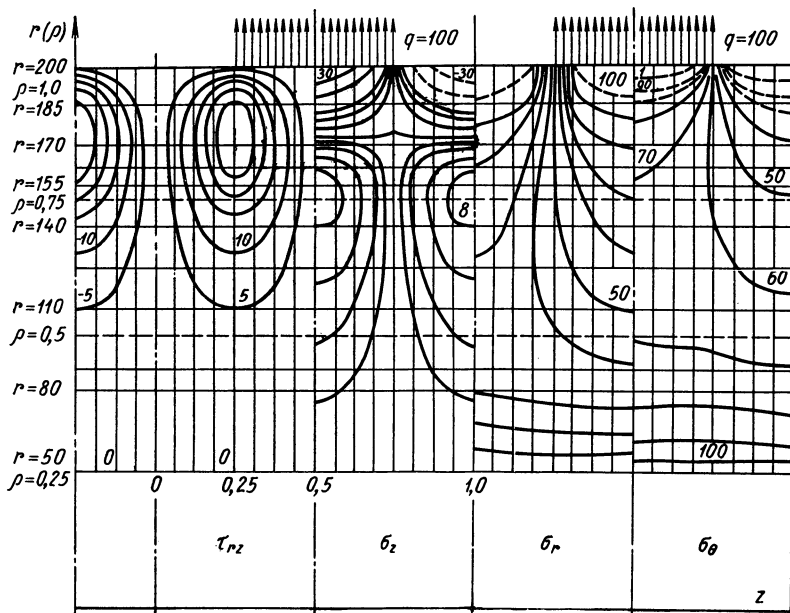


Рис. 7. Распределение напряжений на цельнокованом роторе

удовлетворяли бы однородным дифференциальным уравнениям, что позволило бы отойти от создания «двухэтажных» моделей. Исходя из общего решения П. Ф. Папковича — Г. Нейбера, И. С. Бобырь, Н. И. Синявский и Ю. Н. Шевченко получили такое решение в 1960 г.

$$DF = 0; \quad (28)$$

$$Df = 0. \quad (29)$$

Это новое решение может быть получено непосредственно из формул (26), (27), если положить

$$\Omega = \frac{G}{1-\nu} F; \quad (30)$$

$$\Phi = \frac{G}{2(1-\nu)} \left[2(1-\nu)F - r \frac{\partial F}{\partial r} - f \right]. \quad (31)$$

Напряжения σ_r , σ_θ , σ_z , τ_{rz} связаны с функциями F и f следующими зависимостями:

$$\sigma_r = G \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{2F}{r^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{r} \right) \right] \right\}; \quad (32)$$

$$\sigma_\theta = G \left\{ \frac{2F}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{f}{r^2} \right] \right\}; \quad (33)$$

$$\sigma_z = - \frac{G}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[2(1-\nu) F - r \frac{\partial F}{\partial r} - f \right]; \quad (34)$$

$$\tau_{rz} = \frac{G}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[2(1-\nu) F - r \frac{\partial F}{\partial r} - f \right]. \quad (35)$$

Преимущество нового решения по сравнению с решением (23) — (26) заключается в возможности моделирования функции F и f с одинаково высокой точностью, недостаток его — в некоторой сложности граничных условий.

Однако этот недостаток был успешно преодолен И. С. Бобырем и В. Т. Корниенко, которые разработали способ вычисления граничных условий и задания их на ЭМ, в результате чего была создана новая эффективная методика моделирования осесимметричной задачи.

Решение осесимметричной задачи с учетом действия центробежных сил и температурных полей можно получить как сумму общего решения однородной и частных решений неоднородной системы уравнений (1), (2), (7а):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r + \sigma_r^{(\omega)} + \sigma_r^T; \\ \sigma_\theta &= \sigma_\theta + \sigma_\theta^{(\omega)} + \sigma_\theta^T; \\ \sigma_z &= \sigma_z + \sigma_z^{(\omega)} + \sigma_z^T; \\ \tau_{rz} &= \tau_{rz} + \sigma_{rz}^{(\omega)} + \tau_{rz}^T, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где

σ_r , σ_θ , σ_z , τ_{rz} — компоненты напряжений, отвечающие общему решению однородной системы;

$\sigma_r^{(\omega)}$, $\sigma_\theta^{(\omega)}$, $\sigma_z^{(\omega)}$, $\tau_{rz}^{(\omega)}$ и

σ_r^T , σ_θ^T , σ_z^T , τ_{rz}^T — компоненты напряжений, отвечающие частным решениям неоднородной системы уравнений, и воздействия неравномерного нагрева соответственно.

Для частных решений $\sigma_r^{(\omega)}$, $\sigma_\theta^{(\omega)}$, $\sigma_z^{(\omega)}$, $\tau_{rz}^{(\omega)}$ известны аналитические выражения [12]. Частные решения $\sigma_r^{(\tau)}$, $\sigma_\theta^{(\tau)}$, $\sigma_z^{(\tau)}$, $\tau_{rz}^{(\tau)}$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(\tau)} &= -\frac{E}{1-\nu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right); \\ \sigma_\theta^{(\tau)} &= -\frac{E}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right); \\ \sigma_z^{(\tau)} &= -\frac{E}{1-\nu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right); \\ \tau_{rz}^{(\tau)} &= \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial z},\end{aligned}\tag{37}$$

где θ — любое частное решение для температурного потенциала $\nabla^2 \theta = \alpha T$,

легко реализуемое на ЭИ.

Таким образом, основная трудоемкость решения задачи заключается в нахождении компонентов напряжений по формулам (32) — (35) и, следовательно, в задании граничных условий при моделировании уравнений $DF = 0$, $Df = 0$. Решение этих уравнений не представит особых затруднений, если известны краевые условия I, II или III рода относительно функций напряжений.

И. С. Бобырь и В. Т. Корниенко показали, что, используя выражения (32) — (35), посредством контурного интегрирования можно построить зависимости, связывающие на границе области функции напряжений F и f через заданные на контуре нагрузки. Согласно этим зависимостям для функций напряжений F и f на горизонтальных участках контура определяются граничные условия соответственно III и I рода:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1-\nu}{r^2} F &= \frac{1-\nu}{G} \left[\sigma_r - \frac{1}{r} \int \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) dz + \frac{1}{r^2} \int r\tau_{rz} dz \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2r} \frac{d\alpha_i(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \alpha_i(r);\end{aligned}\tag{39}$$

$$f = -\frac{2(1-\nu)}{G} \int r\tau_{rz} dr + 2(1-\nu)F - r \frac{\partial F}{\partial r} - \alpha_i(r).\tag{40}$$

На вертикальных участках контура имеет место краевое условие I рода:

$$F = \frac{1-\nu}{G} \left[\int r\sigma_z dr - \int r \left(\int \frac{\partial \tau}{\partial z} dr \right) dr + \frac{r^2}{2} \delta_i(z) + \kappa_i(z) \right];\tag{41}$$

$$f = \frac{2(1-\nu)}{G} \int r\sigma_z dr + 2(1-\nu)F - r \frac{\partial F}{\partial r} - \beta_i(z);\tag{42}$$

здесь σ_r , σ_z , σ_{rz} — значения напряжений на границе области согласно условию (1);

$\alpha_i(r)$, $\beta_i(z)$, $\delta_i(z)$, $\kappa_i(z)$ — функции интегрирования, определяемые из некоторых условий непрерывности на стыках горизонтальных и вертикальных участков.

На закруглении по дуге окружности (рис. 8) в любой точке s имеем краевое условие

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1-\nu}{r^2} F = & -\frac{1-\nu}{G \sin \alpha} R_n - \frac{1-\nu}{G} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int r Z_n ds - \\ & - \frac{1}{2r} \varepsilon_i(r) + \frac{1-\nu}{G} \frac{1}{r^2} \int r Z_n ds + \frac{1}{2r^2} \varepsilon_i - \\ & - \frac{1-\nu}{G} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int r Z_n ds - \frac{1}{r} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sum_i (Z_n), \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$R_n = -\sigma_r \sin \alpha - \tau_{rz} \cos \alpha, \quad Z_n = -\tau_{rz} \sin \alpha - \sigma_z \cos \alpha,$$

$\varepsilon_i^{(r)}$, $\varepsilon_i^{(z)}$, ε_i — постоянные.

В приведенных граничных условиях III рода для функции F в уравнениях (6), (8) и (9) коэффициенты при функции и ее производной имеют разные знаки. Для задания этих условий на сеточном электроинтеграторе используется схема аналога отрицательного сопротивления.

По этой методике был решен ряд задач по определению напряженного состояния тел вращения (цилиндров постоянного и переменного сечения), находящихся под действием центробежных сил, поверхностной нагрузки и неравномерного нагрева.

Так как краевые условия для функций напряжений определяются приближенно, то для подбора напряжений, заданных на границе области, применяется метод последовательных приближений. Для цилиндров постоянного сечения (без внутренних угловых точек) для удовлетворения граничных условий относительно компонент напряжений с точностью до 2—5% необходимо одно-два приближения, при этом граничные условия по σ_z и τ_{rz} на торцовых поверхностях обычно удовлетворяются в результате первого приближения, т. е. в этом случае функции напряжений F и f после первого приближения не подправляются.

Для цилиндров переменного сечения с внутренней угловой точкой на составляющем вертикальном участке процесс последовательных приближений следует вести так, чтобы не возникало разрыва между распределением функции F на границе и внутри области. При этом следует начинать уточнение значений функций на вертикальном участке с внутренней угловой точки.

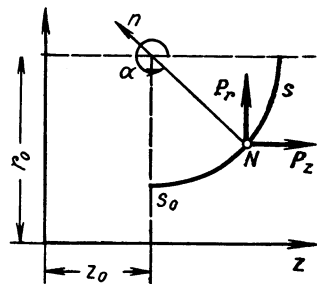


Рис. 8. Схема к составлению краевых условий

Граничные условия относительно компонент напряжений σ_z , σ_{rz} на торцах и σ_r и τ_{zr} на цилиндрических поверхностях в результате первого приближения удовлетворяются с точностью до 10—15%, а для удовлетворения граничных условий с большей точностью требуется еще несколько приближений.

Трудоемкие вычисления, связанные с определением напряжений внутри тела вращения, выполнялись на ЭЦВМ «Раздан-2». При расчете функции напряжений с электроинтегратора непосредственно наносились на перфоленту, которая затем обрабатывалась по определенной программе.

Как в плоской, так и в осесимметричной задаче, несмотря на наличие прямой аналогии между уравнениями теории упругости и уравнениями для сеточных моделей, не удается при заданных граничных условиях получить решение задачи в один прием, необходим ряд последовательных приближений. С этой точки зрения рассмотренные модели согласно терминологии, предложенной Б. А. Волинским, следует отнести ко 2-му и 3-му классам: при решении задач в функциях напряжений создаются модели 2-го класса, требующие внешней (контурной) итерации; при решении задач в перемещениях — модели 3-го класса, где требуется внутренняя итерация.

Необходимо также отметить, что при разработке рассмотренных моделей возникла необходимость в создании аналогов отрицательных сопротивлений, что по существу означало создание квазианалоговых моделей.

Общие принципы построения квазианалоговых сеточных электроинтеграторов разработаны Г. Е. Пуховым [28].

В основу теории квазианалоговых систем вместо обычного для электро моделирования принципа подобия положен более общий принцип эквивалентности уравнений в отношении получаемых результатов. Квазианалоговой электрической моделью некоторой системы уравнений называют такую электрическую цепь, в которой при помощи дополнительных устройств можно произвести изменение потенциалов и токов таким образом, что уравнения этой электрической цепи будут эквивалентны моделируемой системе уравнений.

Главным достоинством метода квазианалоговых моделей является возможность существенно расширить круг задач, решаемых средствами математического моделирования. Так, принципиально становится возможной реализация идеи Г. Крона о прямом моделировании всех трех групп уравнений теории упругости. А. Е. Степанов рассмотрел способ построения такой модели для решения плоской задачи теории упругости.

На основе общих принципов квазианалогового моделирования Г. Е. Пуховым, А. Е. Степановым и В. М. Самусем разработаны квазианалоговые модели для решения двухмерных задач теории упругости [29, 30].

А. Е. Степановым [30] разработан также принцип построения квазианалоговой сетки для моделирования бигармонического уравнения в конечных разностях, построенной по способу уравнивания неизвестных.

А. Е. Степанов представил бигармоническое уравнение в конечных разностях (9) в виде двух уравнений:

$$12\varphi_0 - 2(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8) - (\varphi_9 + \varphi_{10} + \varphi_{11} + \varphi_{12}) = \Phi_0; \quad (44)$$

$$32\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \Phi_0, \quad (45)$$

где Φ_0 — некоторая функция.

Эти уравнения моделируются двумя соединенными между собой в каждом узле сетками из положительных омических сопротивлений (рис. 9). На верхней сетке решается уравнение (44), на нижней — уравнение (45). Процесс «уравнивания» сетки состоит в последовательном регулировании величины U_i для уравнения потенциалов в соответствующих узлах первой и второй сеток. На основании этого принципа была создана модель. Преимущества этой модели по сравнению с методикой решения на ЭМБУ-6 заключаются в определенности граничных условий, удобств их задания и простоте алгоритма уравнивания.

Аналогичная модель предложена А. Е. Степановым и для решения плоской задачи в перемещениях. Эксперимент показал, что этому случаю свойственна более медленная сходимость процесса последовательных приближений.

В. М. Самусем разработан квазианалоговый сеточный электроинтегратор, позволяющий решать довольно широкий класс задач теории упругости. Модель состоит из сетки со свободной коммутацией, позволяющей в случае необходимости создавать двух- и трехэтажные модели, задавать стоки и истоки, и специального арифметического устройства.

На этой модели осуществлено моделирование прямоугольной пластинки, жестко закрепленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (225 узловых точек) [29]. Кроме того, на этой модели можно решать плоскую задачу теории упругости в перемещениях.

На IV Всесоюзной конференции по применению электронных математических машин в строительной механике, машиностроении и строительном производстве Л. А. Гагарина и В. М. Самусь

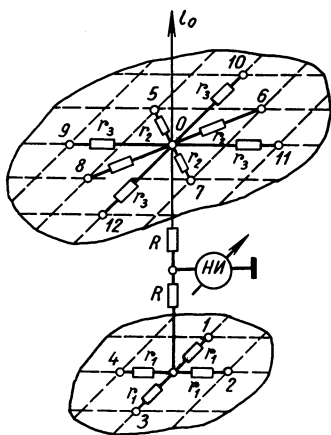


Рис. 9. Схема моделирования уравнений А. Е. Степанова

доложили о результатах расчета элементов крупнопанельных зданий. На той же конференции Самуэль В. М. изложил методику решения на квазианалоговой модели осесимметричной задачи в перемещениях, т. е. на модели, обеспечивающей решение системы уравнений (8). На квазианалоговом интеграторе была набрана модель из двух электрических, не связанных между собой, сеток (рис. 10).

Потенциалы одной сетки (а) моделируют осевое перемещение W , потенциалы другой (б) — радиальное перемещение U . Связь между сетками реализуется с помощью специального арифметического устройства АУ (рис. 10, в), которое посредством вводимого дополнительного тока компенсирует разность между исход-

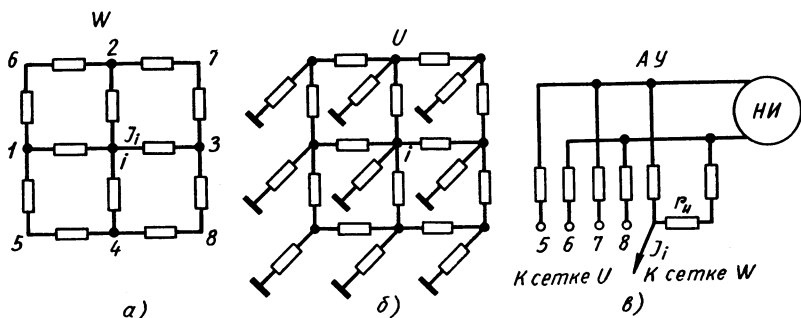


Рис. 10. Схема модели из двух электрических, не связанных между собой, сеток:

а — моделирование осевого перемещения; б — моделирование радиального перемещения; в — арифметическое устройство для связи сеток U и W

ными уравнениями и уравнениями электрической цепи без дополнительных токов.

Недостатком квазианалоговых моделей рассмотренного типа является использование итерационных методов, сходимость которых для каждого класса уравнений должна быть доказана не только теоретически, но и экспериментально. Дальнейшее развитие квазианалогового моделирования возможно на пути применения неалгоритмического варианта квазианалоговых моделей, которые имеют достаточное количество усилителей (Г. Е. Пухов показал, что количество усилителей может быть уменьшено до 1—2 за счет применения динамического метода моделирования).

Успешное решение ряда практических задач по исследованию напряженного и деформированного состояния плоских и осесимметричных конструкций в турбомашиностроении, гидротехническом, промышленном и гражданском строительстве показывают, что электрическое моделирование является весьма эффективным в конструкторской практике и заслуживает всемерного распространения. Однако необходим серийный выпуск качественных

ЭИ и дальнейшее совершенствование методов моделирования плоской и осесимметричной задач теории упругости.

Это совершенствование возможно по трем направлениям:

- а) по пути создания комбинированных установок, использующих электрические сетки и цифровые вычислительные машины;
- б) по пути построения новых общих решений (особенно в осесимметричной задаче), которые допускают создание наиболее эффективных сеточных моделей;
- в) по пути развития методов квазианалогового моделирования, обеспечивающих быстрое и точное решение задач теории упругости при значительном количестве узловых точек, необходимых для аппроксимации областей со сложной конфигурацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агарев В. А., Уманский Э. С., Квитка А. Л. Некоторые вопросы решения температурной осесимметричной задачи теории упругости. В сб. «Вопросы порошковой металлургии и прочности материалов». Изд. АН УССР, Киев, 1958, вып. 5, стр. 134—159.
2. Амеляничик А. В. Исследование температурных напряжений и деформаций в поршне тепловозного дизеля посредством электрических эквивалентных цепей упругого поля. Труды Всесоюзного научно-исследовательского института железнодорожного транспорта, вып. 49, Трансжелдориздат, 1958, стр. 30—59.
3. Амеляничик А. В. Расчет на прочность дисков турбомашин на математической машине, «Известия АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение», 1959, № 1, стр. 138—143.
4. Амеляничик А. В. Решение температурных задач теории упругости посредством электрических эквивалентных цепей упругого поля. «Известия АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение», 1959, №14, стр. 196—200.
5. Головки М. Д. Электрические цепи для решения двумерных задач теории упругости. В сб. «Исследования напряженного состояния крупноразмерных стеновых панелей методом электрических аналогий». НИИ строительной физики, научные сообщения, вып. 3. М., Госстройиздат, 1961, стр. 5—45.
6. Головки М. Д. Решение задач теории упругости на электрических эквивалентных цепях. В сб. «Аналоговые методы и средства решения краевых задач». Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 85—104.
7. Волюнский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960, стр. 446.
8. Гагарина Л. А. Температурные напряжения в стеновых панелях «Строительная механика и расчет сооружений», № 1, 1961, стр. 39—40.
9. Гагарина Л. А. Исследование прочности продольных стеновых панелей объемного элемента методом электроанalogий. В сб. «Испытание и расчет объемных элементов жилых зданий». М., Госстройиздат, 1962, стр. 46—77.
10. Гагарина Л. А. Исследование прочности многоэтажных стеновых панелей методом электроанalogий. «Строительная механика и расчет сооружений», 1962, № 4, стр. 6—9.
11. Дятловицкий Л. И. Решение плоской задачи теории упругости на сеточном электродетонаторе. Известия Института гидрологии и гидротехники УССР, т. 8, 1951, стр. 15.
12. Дятловицкий Л. И., Гаркави О. Я. Исследование напряжений в гравитационных плотинах на скользящем основании. Известия Института гидрологии и гидротехники АН УССР, т. 9, 1952, стр. 16.
13. Дятловицкий Л. И. О влиянии блоков на распределение напряжений в гравитационных плотинах. «Гидротехническое строительство», 1954, № 6.

14. Дятловицкий Л. И. Напряжения в гравитационных плотинах на нескальных основаниях. Изд. АН УССР, Киев, 1959, стр. 35—124.

15. Истомин С. А. О взаимодействии плиты и колонны в безбалочном перекрытии. «Строительная техника и расчет сооружений», 1959, № 6, стр. 33—38.

16. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 469.

17. Кузнецова А. К. Сборные плотины средней высоты с применением напряженного железобетона. Исследования напряженного состояния сплошного контрфорса методом электро моделирования. Всесоюзный научно-исследовательский институт гидротехники им. Б. Е. Веденеева. Аннотации законченных в 1959 г. научно-исследовательских работ по гидротехнике. Госэнергоиздат, М.—Л., 1960, стр. 32.

18. Кузнецова А. К. «Электро моделирование» в связи с исследованиями методами теории упругости конструкций гидротехнических сооружений. В сб. «Научно-исследовательские работы Гидропроекта». М.—Л., Госэнергоиздат, 1961, стр. 119—126.

19. Кузнецова А. К. Решение задач плоского напряженного состояния и изгиба плит. «Напряжения и деформации в деталях и узлах машин». М., Машгиз, 1961, стр. 361—368.

20. Кузнецова А. К. Исследование напряженного состояния элементов на специализированном электроинтеграторе ЭМБУ-6. Всесоюзный научно-исследовательский институт гидротехники им. Б. Е. Веденеева. Труды координационных совещаний по гидротехнике, вып. 4, М.—Л., Госэнергоиздат, 1962, стр. 39.

21. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.

22. Медовиков А. И. Исследование термонапряженного состояния бетонных блоков, расположенных на жестком основании и фундаментной плите, методом электроанalogии. Изд. Новочеркасского политехнического института, 1962, стр. 49—56. Труды второй межвузовской научно-технической конференции по электрическому моделированию задач строительной механики, теории упругости и сопротивления материалов, Ростов, февраль, 1962.

23. Медовиков А. И. Исследования методом электроанalogий напряженного состояния гравитационной плиты, расположенной на жестком основании. Всесоюзный научно-исследовательский институт гидротехники им. В. Е. Веденеева. Труды координационных совещаний по гидротехнике, вып. 4, М.—Л., Госэнергоиздат, 1962, стр. 3.

24. Медовиков А. И. Отчет по научно-исследовательской работе «Разработка методов автоматизации подбора граничных условий при исследовании напряженного состояния толстых арок на электрических моделях». МИСИ, 1963, стр. 84.

25. Медовиков А. И. Отчет о научно-исследовательской работе: «Усовершенствование конструкции следящих систем применительно к статическому расчету плотин с расширенными швами». МИСИ, 1964, стр. 65.

26. Предтеченский Н. Д. Основные зависимости для определения напряжений при решении плоской задачи теории упругости на электроинтеграторе ЭМБУ-6. В сб. «Напряжения и деформации в деталях и узлах машин». М., Машгиз, 1961, стр. 320—361.

27. Предтеченский Н. Д. Решение плоской задачи теории упругости на электрических моделях. Институт машиноведения АН СССР. «Поляризационно-оптический метод исследования напряжений». Под редакцией Пригоровского, М.—Л., Изд. АН СССР, 1956, стр. 59—83.

28. Пухов Г. Е. Принципы построения квазианалоговых сеточных электроинтеграторов. «Аналоговые методы и средства решения краевых задач». «Наукова Думка», 1964, Труды Всесоюзного совещания, М., 1962, стр. 13—26.

29. Самусь В. М. Электрическое моделирование элемента авиаконструкции типа упругой пластинки. Киевский институт воздушного гражданского флота. Электрическое моделирование, вып. 1, Киев, 1962, стр. 56—60.

30. Степанов А. Е. Электромоделирование бигармонического уравнения. Известия высших учебных заведений. Электромеханика, 1962, № 3, стр. 262—268.

31. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., Физматгиз, 1959, стр. 319.

*А. И. Медовиков, Э. Ш. Бобров,
М. Г. Ванюшенков, Г. Э. Шаблинский, С. П. Клюев*

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛИТ И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОАНАЛОГИИ

Электрические интеграторы для моделирования бигармонического уравнения теории упругости являются специализированными вычислительными машинами, предназначенными для расчета плит. До последнего времени в СССР имелся один такой электроинтегратор марки ЭМБУ-6, установленный в Научно-исследовательском секторе института Гидропроект [3]. На этом интеграторе на протяжении около десяти лет решено более трехсот задач. Результаты решения многих задач использованы в практике гидротехнического строительства. Указанный интегратор плодотворно используется и в настоящее время.

Решение задач на ЭМБУ-6 производится путем подбора, т. е. неизвестные значения функций высокого потенциала на контуре области подбираются из условий совпадения замеренных и заданных величин функций низкого потенциала. Подбор требует высокой квалификации оператора и длительного времени для своего осуществления.

В данной работе изложена методика расчета плит, балок и пологих оболочек на автоматизированном электроинтеграторе МИСИ.

Расчет плит методом электроанalogии сводится к моделированию уравнения

$$D\nabla^4 w = q \quad (1)$$

потенциалами двух связанных сеток омических сопротивлений, на одной из которых решается уравнение

$$\nabla^2 M = -\frac{q}{D}, \quad (2)$$

на другой уравнение

$$\nabla^2 w = -M. \quad (3)$$

Система уравнений (2) и (3) эквивалентна уравнению (1).

В случае прямолинейного свободного края (свободный край параллелен оси y) условия Кирхгофа [8] имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Учитывая, что

$$\nabla^2 \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2},$$

условия (4) представим в виде

$$\frac{\partial \nabla^2 \omega}{\partial x} = (1 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^2}; \quad (5)$$

$$\nabla^2 \omega = (1 - \nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \quad (6)$$

Уравнение (6) реализуется в дополнительной цепи, совпадающей со свободным краем плиты (рис. 1). Эта цепь представляет собой последовательно соединенные омические сопротивления r_2 , номинальная величина которых на два порядка меньше величины сопротивлений r_1 , составляющих сетку « w ». В этом случае токи в сопротивлениях r_1 незначительно влияют на распределение потенциалов в цепи AB , и контурные значения функции w задаются на участке свободного края по уравнению (6). Сопротивления R_2 выбираются из условия соответствия

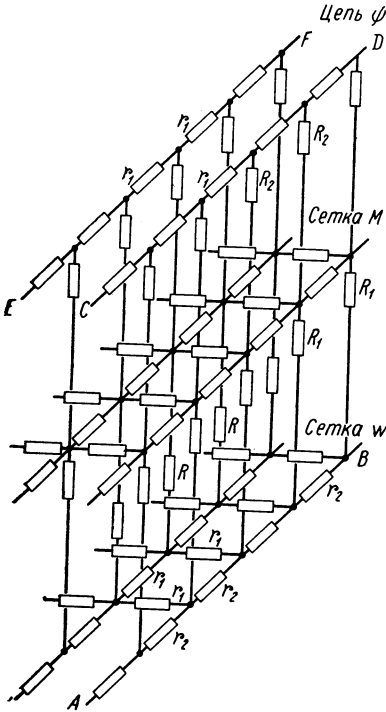


Рис. 1. Схема электрической сетки

масштабов потенциалов сеток и с учетом постоянного множителя $(1 - \nu)$, что аналогично выбору сопротивлений в дополнительных цепях при решении плоских смешанных задач теории упругости [6].

Условие (5) преобразуем введением функции Ψ , связанной с $\nabla^2 \omega$ соотношением

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{1 - \nu} \nabla^2 \omega; \quad (7)$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} = - \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2}. \quad (8)$$

Соотношение (8) в отличие от соотношения (7) справедливо

только на свободном крае плиты. Интегрируя выражение (8) по длине свободного края, получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} + C_1 y + C_2. \quad (9)$$

Функция Ψ автоматически строится в процессе решения задачи в двух дополнительных цепях, одна из которых (CD) совпадает со свободным краем, а другая (EF) отстоит от него на один шаг сетки (рис. 1). Токи, текущие в узлы цепи Ψ через сопротивления R_2 , пропорциональны значению функции $\nabla^2 \omega = -M$. Уравнение первого закона Кирхгофа, записанное для узлов цепи Ψ при соответствующем выборе масштабов потенциалов [6], аналогично уравнению (7).

Производная $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ непосредственно замеряется в цепи Ψ . Произвольные постоянные C_1 и C_2 целесообразно выбирать из условия равенства производных $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ и $-\frac{\partial \omega}{\partial x}$ по концам свободного края, что практически осуществляется заданием потенциала в конечных точках C, D, E, F цепи Ψ . В этом случае подбор значений функции M по длине свободного края осуществляется по равенству $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$, обе части которого замеряются непосредственно. Контурные значения функции ω , как было указано выше, автоматически получаются в процессе подбора в цепи AB .

Результаты расчета квадратной плиты, шарнирно опирающейся по трем сторонам и имеющей один свободный край, представлены на рис. 2.

На рис. 3 показана трапециевидная пластинка, рассчитанная на автоматизированном электроинтеграторе, выполненном в МИСИ.

Функция прогибов ω должна удовлетворять следующим граничным условиям:

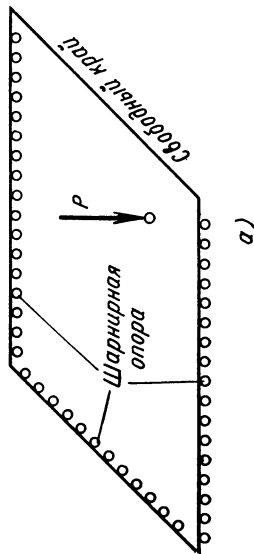
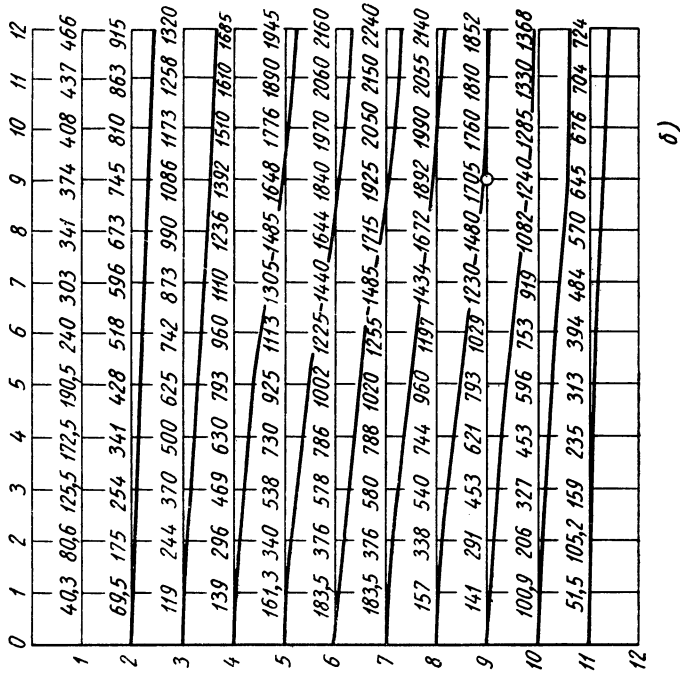
$$\text{при } y = 0 \text{ и } y = h; \quad \omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$\text{при } x = \pm (l - y \operatorname{tg} 30^\circ); \quad \omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0, \quad (11)$$

где n — нормаль к скошенному краю пластинки.

Геометрические граничные условия (11) на скошенных краях пластинки означают, что в любой точке контура линейный элемент нормали dn так же, как линейный элемент самого контура ds , после деформации остается в плоскости Oxy (рис. 3). Иначе говоря, плоскость Oxy касательна к поверхности прогибов. Но тогда элементы dx и dy после деформации также остаются

Рис. 2. Расчет прогиба квадратной плиты:
 а — расчетная схема; б — таблица и график прогибов в долях $10^{-5} \frac{ba^2}{d}$ (сила приложена к точке 9—9)



в плоскости Oxy и граничные условия (5) эквивалентны следующим условиям на скошенных краях: при

$$x = (l - y \operatorname{tg} 30^\circ);$$

$$\omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

или

$$\omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

Поскольку пластинка симметрична относительно оси Oy , в дальнейшем рассматривалась только одна ее половина. Вся область, занимаемая пластинкой, была разбита на прямоугольную сетку с шагом

$$\Delta x = \frac{1}{14} l;$$

$$\Delta y = \frac{1}{14} h;$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{l}{h} = 1,155.$$

Различные шаги по горизонтали и вертикали были выбраны для того, чтобы больше узлов сетки попало на линию контура,

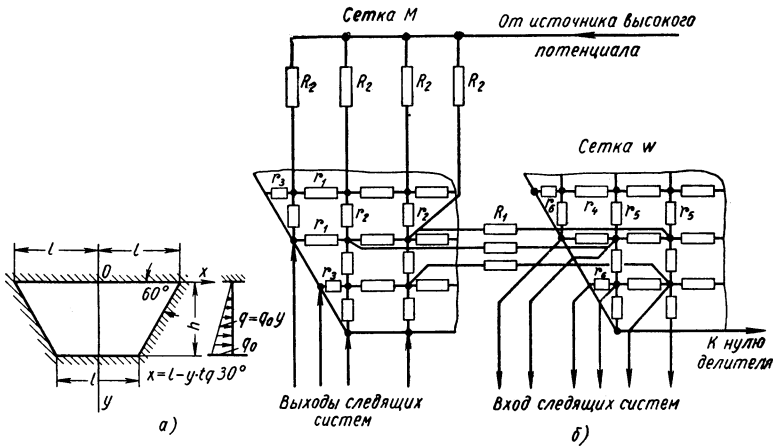


Рис. 3. Расчет трапециевидной пластинки: а — расчетная схема; б — электрическая схема

совпадающую со скошенным краем пластинки. Электрическая схема моделирования напряженного состояния трапециевидной пластинки приведена на рис. 3.

Граничные условия на контуре пластинки подбирали многоканальной следящей системой. На вход каналов системы подавались напряжения, пропорциональные разности потенциалов

между контурными и внутриконтурными точками сетки прогибов. Потенциалы с реохордов следящих систем подавались в соответствующие контурные точки сетки моментов. Следящая система автоматически уравнивала модель, подбирая такие значения моментов, при которых равны нулю углы поворота на контуре пластинки. Время установления не превышало 1 мин. Точность обработки граничных условий соответствовала приборному нулю усилителей следящей системы. Величины прогибов, замеренных на сетке электроинтегратора, для половины пластины приведены на рис. 4. По этим значениям были вычислены изгибающие и крутящие моменты, величины которых близко совпали с соответствующими величинами, полученными аналитическим расчетом этой пластинки по методу начальных функций [1].

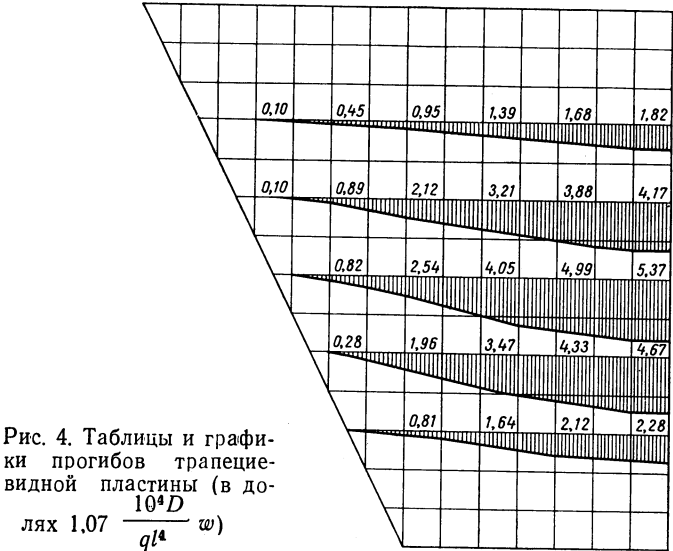


Рис. 4. Таблицы и графики прогибов трапециевидной пластины (в долях $1,07 \frac{10^4 D}{q l^4} \omega$)

Изгиб нейтральной линии балки описывается системой двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q; \tag{12}$$

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\chi, \tag{13}$$

- где ω — прогиб балки;
- χ — кривизна нейтральной линии;
- M — изгибающий момент;
- q — интенсивность распределенной нагрузки.

Известны электрические модели для расчета балок, состоящие из двух интегрирующих цепей омических сопротивлений [4].

Эти модели позволяют непосредственно моделировать изгиб балок из линейно упругого материала. В этом случае зависимость между внутренним моментом сечения и кривизной линейна. Если материал балки нелинейно упругий, то эта зависимость является нелинейной. Типичная зависимость между моментом M и кривизной χ для балки из стали с учетом упрочнения показана на рис. 5, а. Электрическая модель балки из нелинейно упругого материала (рис. 5, б) состоит из двух цепей омических сопротивлений: цепь M моделирует уравнение (12). Цепь ω моделирует уравнение (13). Правая часть уравнений моделируется токами I , подаваемыми в узлы цепей; длины — сопротивлениями. Напря-

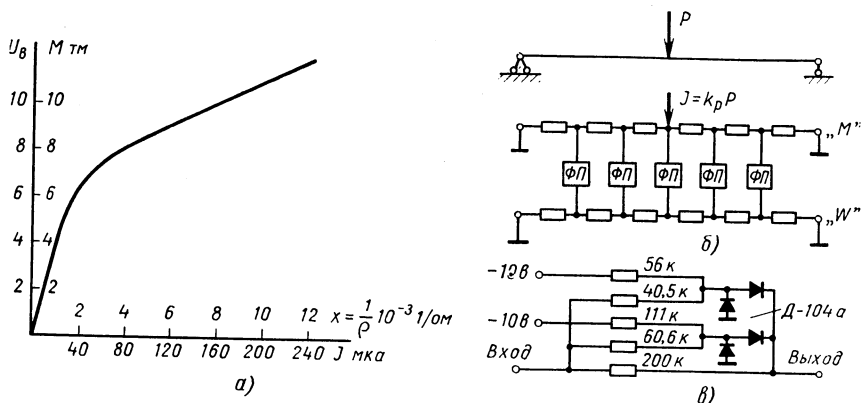


Рис. 5. Расчет балок из нелинейно упругого материала:

а — зависимость момента от кривизны и соответствующая ей вольт-амперная характеристика преобразователя; б — электрическая схема расчета; в — схема функционального преобразователя

жения в узлах цепей с учетом переходных масштабов представляют изгибающие моменты и прогибы.

Так как решение уравнения (12) является правой частью уравнения (13), то необходимо в узлы цепи « ω » подать ток, пропорциональный напряжению в узлах цепи « M ». Зависимость между напряжением в узлах цепи « M » и током, подаваемым в узлы цепи « ω », для балки из нелинейно упругого материала должна быть нелинейной. С целью создания нелинейности в модели используются функциональные преобразователи Φ_n . Вольт-амперная характеристика функционального преобразователя (рис. 5, а) должна аппроксимировать кривую $M — \chi$ с учетом переходных масштабов.

Функциональные преобразователи включаются между одноименными узлами верхней и нижней цепей. Схема функционального преобразователя (рис. 5, в) для моделирования изгиба балки из стали выполнена на полупроводниковых диодах Д-104 [7].

Рассмотренная модель позволяет осуществить моделирование системы перекрестных взаимно перпендикулярных балок из нелинейно упругого материала без учета кручения.

Электрическая модель системы перекрестных балок состоит из цепей, моделирующих продольные и поперечные балки. Нагрузка, воспринимаемая перекрестными балками, передается на продольные и поперечные балки таким образом, чтобы прогибы балок в местах их пересечения были равны. Это достигается регулирование независимых источников тока в цепи стоков. Уравновешивание модели по прогибам может осуществляться автоматически или вручную.

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности ортотропной плиты

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -q$$

может быть представлено в виде системы пяти уравнений, которые более удобны при решении задачи методом электромоделирования:

$$q_x + q_y = q; \quad (14)$$

$$\left(\frac{1}{2G} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{E_1} \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{2G} q_x; \quad (15)$$

$$\frac{1}{E_2} \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2G} - \frac{\nu_1}{E_1} \right) \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -\frac{1}{2G} q_y; \quad (16)$$

$$D_1 \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + D_1 \nu_2 \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = -M_x; \quad (17)$$

$$D_2 \nu_1 \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} = -M_y, \quad (18)$$

где E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 — модули упругости и коэффициенты Пуассона вдоль главных направлений упругости x и y ;

G — модуль сдвига;

M_x и M_y — изгибающие моменты;

D_1 , D_2 — жесткости изгиба;

q_x , q_y , q — интенсивность распределенной нагрузки.

Электрическая модель системы уравнений изгиба ортотропной плиты может быть представлена в виде четырех взаимосвязанных сеток омических сопротивлений: двух сеток высокого потенциала M_x и M_y и двух низкого потенциала « w_x » и « w_y » (рис. 6), моделирующих уравнения (15), (16), (17) и (18) соответственно.

Узлы сеток « M_x », « w_x », « M_y » и « w_y » соединены между собой через сопротивления R . Величина сопротивлений должна быть достаточно высокой для уменьшения взаимного влияния сеток. Переходные масштабы нагрузок, моментов, прогибов и длин для сеток одинаковы. Величины внутрисеточных сопротивлений опре-

деляются по известным формулам [6]. Так как правые части уравнений (16) и (15) неизвестны, а известна лишь их сумма, то решение задачи на модели требует ее предварительного уравновешивания по прогибам. Регулируя величину источника тока в цепи стоков, добиваются равенства прогибов в одноименных узлах сеток « w_x » и « w_y ». Наличие двух сеток моментов позволяет сразу

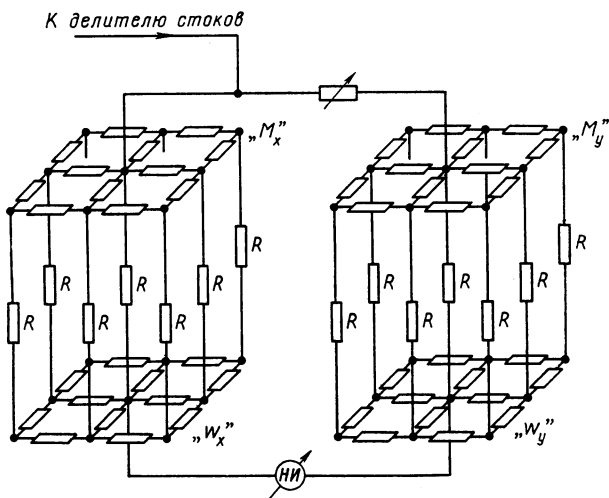


Рис. 6. Электрическая схема расчета изгиба ортотропной плиты

получить значение моментов M_x и M_y . Граничные условия на контуре выполняются для всех сеток аналогично изотропным плитам.

Система уравнений общей моментной теории пологих оболочек, представленных в форме смешанного метода, имеет следующий вид [2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi - \nabla_k^2 \omega &= 0; \\ \nabla_k^2 \varphi + D \nabla^2 \nabla^2 \omega - Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где E — модуль упругости материала оболочки;

h — толщина оболочки;

ν — коэффициент Пуассона;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость;

φ — функция напряжений;

ω — функция перемещений;

Z — функция внешней нагрузки.

Символами ∇^2 и ∇_k^2 в системе (19) обозначены дифференциальные операторы второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]; \\ \nabla_k^2 &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} k_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} k_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

здесь α и β — криволинейные ортогональные координаты средней поверхности оболочки;

$k_1 = k_1(\alpha, \beta)$ и $k_2 = k_2(\alpha, \beta)$ — главные кривизны оболочки;

$A = A(\alpha, \beta)$, $B = B(\alpha, \beta)$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, отнесенной к линиям кривизны α и β ;

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2. \quad (21)$$

Функция напряжений $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$ определяет все внутренние тангенциальные силы N_1 , N_2 и S , а функция перемещений $\omega = \omega(\alpha, \beta)$ — все моменты и поперечные силы оболочки.

По своему физическому смыслу первое уравнение системы (19) выражает условие неразрывности деформации, а второе — условие равновесия в направлении нормали к поверхности.

Решение системы уравнений (19) аналитическими методами весьма затруднительно, особенно в случае не прямоугольного, а произвольного плана оболочки. Поставленная задача может быть успешно решена методом электроанalogии. Электрическая модель основной системы уравнений (19) общей моментной теории пологих оболочек, собранная в МИСИ им. В. В. Куйбышева и оборудованная многоканальной следящей системой, позволяет получить решение этой весьма трудоемкой задачи достаточно быстро, без каких-либо промежуточных операций и ручного подбора.

Заменим каждое из уравнений системы исходных дифференциальных уравнений (19) в частных производных четвертого порядка системой двух дифференциальных уравнений второго порядка.

Первое уравнение системы (19) представим в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= Eh\theta; \\ \nabla^2 \theta &= \nabla_k^2 \omega; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

здесь $\theta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1 - \nu}$, где ε_1 и ε_2 — линейные деформации средней поверхности оболочки в направлении координатных линий.

Второе уравнение системы (19) заменим эквивалентной ему системой двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \omega &= \frac{M}{D}; \\ \nabla^2 M &= Z - \nabla_k^2 \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где $M = \frac{M_1 + M_2}{1 + \nu}$, а M_1 и M_2 — изгибающие моменты.

Решение системы уравнений (19), каждое из которых расчлениено на два совместных дифференциальных уравнения второго

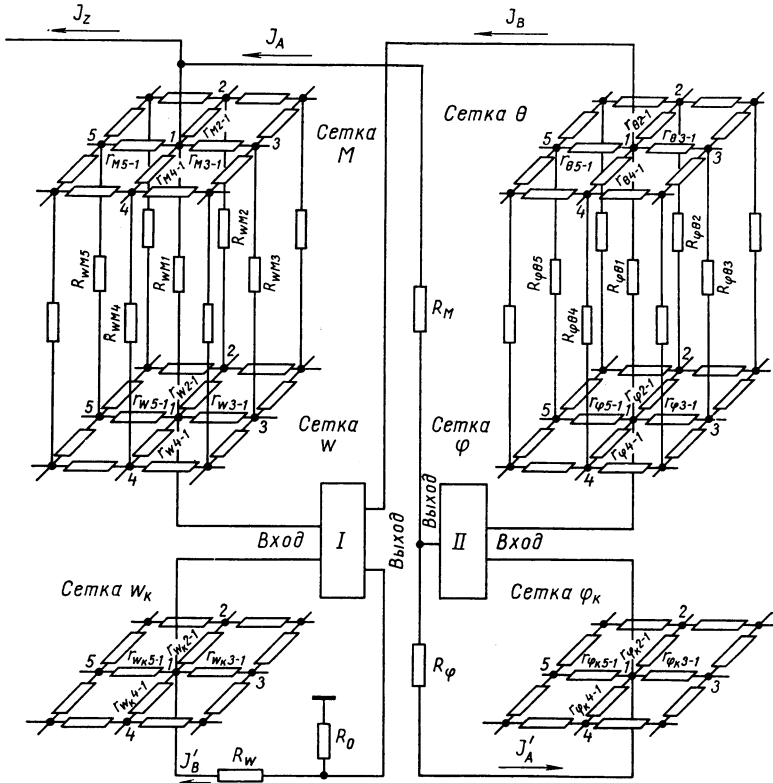


Рис. 7. Электрическая схема для расчета пологих оболочек:

I — канал следящей системы низкого потенциала; *II* — канал следящей системы высокого потенциала

порядка (22) и (23), реализуется на электрической модели, состоящей из шести сеток переменных омических сопротивлений (рис. 7).

На сетке «*w*», которая набирается из переменных низкоомных сопротивлений r_{wij} , решается первое уравнение систе-

мы (23), представляющее собой уравнение Пуассона. На сетке, каждый узел которой соединен с соответствующими узлами сетки « ω » переменными высокоомными сопротивлениями $R_{\omega M_i}$, реализуется второе уравнение Пуассона системы (23). Сетка « M » так же, как и сетка « ω », состоит из переменных низкоомных сопротивлений r_{Mij} .

На сетках « ϕ » и « θ » аналогичным образом реализуются уравнения Пуассона системы (22). Сетка « ϕ », состоящая из переменных низкоомных сопротивлений $r_{\phi ij}$, и сетка « θ », набираемая из переменных низкоомных сопротивлений $r_{\theta ij}$, соединяются между собой в сходственных узлах переменными высокоомными сопротивлениями $R_{\phi \theta i}$.

Для реализации правой части второго уравнения системы (22) в каждый узел сетки « θ » вводится внешний ток I_B , который воспроизводит в некотором масштабе g оператор $\nabla_k^2 \omega$, реализуемый на сетке « ω_k ». В каждый узел сетки « M » вводятся два внешних тока. Один из них I_Z , подаваемый с делителя панели истоков, соответствует в некотором масштабе p функции внешней нагрузки $Z(\alpha, \beta)$, а другой I_A в том же масштабе — оператору $\nabla_k^2 \phi$, который реализуется на сетке ϕ_k .

Сетки « ϕ_k » и « ω_k », предназначенные для реализации обобщенных гармонических операторов ∇_k^2 над функциями ϕ и ω , состоят из переменных низкоомных сопротивлений, которые набираются таким образом, что система уравнений закона Кирхгофа для узлов каждой из сеток формально совпадает с конечно-разностной аппроксимацией каждого из рассматриваемых обобщенных гармонических операторов.

Ток I_A и пропорциональный ему ток I'_A , вводимый в каждый узел сетки « ϕ_k », воспроизводит в разных масштабах p и p' один и тот же оператор $\nabla_k^2 \phi$. Эти токи должны быть подобраны так, чтобы значения потенциалов в сходственных точках сеток « ϕ » и « ϕ_k » точно совпадали. Аналогичным образом токи I_B и I'_B , которые вводятся в каждый узел сетки « ω_k », должны быть подобраны из условия равенства потенциалов в соответствующих точках сеток « ω » и « ω_k ». Проведение одновременного подбора значений операторов $\nabla_k^2 \phi$ и $\nabla_k^2 \omega$ в каждой внутренней узловой точке моделируемой области затруднительно, если операцию подбора производить вручную. Это объясняется тем, что изменение одной величины в одной внутренней точке области влечет за собой изменение всех четырех величин во всех без исключения точках области как внутренних, так и контурных.

В рассматриваемой модели автоматизация процесса подбора осуществляется в каждой внутренней узловой точке двумя следящими системами, одна из которых подбирает ток $I_A (I'_A)$, а другая — ток $I_B (I'_B)$. Сигналы рассогласования, возникающие вслед-

ствие неравенства потенциалов, замеряемых в сходственных точках сеток « ω » и « ω_k », поступают на входы усилителей следящих систем. На выходе усилителя каждой следящей системы включается реверсивный двигатель, перемещающий через редуктор движок реохорда, питаемого от независимого источника. При соответствующей полярности включения усилителя разность потенциалов, замеряемых в узлах сеток « ω » и « ω_k », вызывает смещение движка реохорда, потенциал с которого подается в сходственные узлы сеток « θ » и « ω_k ». При этом величины токов I_B и I'_B , вводимых в узлы сеток « θ » и « ω_k », будут изменяться до тех пор, пока не совпадут значения потенциалов в сходственных узлах сеток « ω » и « ω_k ».

Процесс подбора токов I_A и I'_A из условия совпадения потенциалов в сходственных узлах сеток « ϕ » и « ϕ_k » производится другой группой следящих систем, принцип действия которой аналогичен предыдущему.

Составим конечно-разностное выражение для моделируемых уравнений и систему уравнений Кирхгофа для узлов сеток, что позволит установить зависимости между параметрами механической и электрической систем.

Записывая для точки I систему уравнения (23) в конечных разностях (шаг сетки — переменный в обоих направлениях), получим

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{B \left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1 \right)}{A \left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1 \right)} \frac{l_2 + l_4}{2l_3} (\omega_3 - \omega_1) + \\
 & + \frac{B \left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1 \right)}{A \left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1 \right)} \frac{l_2 + l_4}{2l_5} (\omega_5 - \omega_1) + \\
 & + \frac{A \left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2} \right)}{B \left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2} \right)} \frac{l_3 + l_5}{2l_2} (\omega_2 - \omega_1) + \\
 & + \frac{A \left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2} \right)}{B \left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2} \right)} \frac{l_3 + l_5}{2l_4} (\omega_4 - \omega_1) = \\
 & = \frac{1}{4} (l_3 + l_5) (l_2 + l_4) A(\alpha_1, \beta_1) B(\alpha_1, \beta_1) \frac{M_1}{D};
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{B\left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1\right)}{A\left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1\right)} \frac{l_2 + l_4}{2l_3} (M_3 - M_1) + \frac{B\left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1\right)}{A\left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1\right)} \times \\
 & \times \frac{l_2 + l_4}{2l_5} (M_5 - M_1) + \frac{A\left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2}\right)}{B\left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2}\right)} \frac{l_3 + l_5}{2l_2} (M_2 - M_1) + \\
 & + \frac{A\left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2}\right)}{B\left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2}\right)} \frac{l_3 + l_5}{2l_4} (M_4 - M_1) = \frac{1}{4} (l_3 + l_5) \times \\
 & \times (l_2 + l_4) A(\alpha_1, \beta_1) B(\alpha_1, \beta_1) [Z(\alpha_1, \beta_1) - \nabla_k^2 \varphi(\alpha_1, \beta_1)],
 \end{aligned} \right\} (24)$$

здесь l_2, l_3, l_4, l_5 — размеры шагов конечно-разностной сетки.

Обозначим потенциалы сеток « w » и « M » через v и V соответственно и запишем уравнения закона Кирхгофа для 1-го узла каждой из сеток:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{v_3 - v_1}{r_{w3-1}} + \frac{v_5 - v_1}{r_{w5-1}} + \frac{v_4 - v_1}{r_{w4-1}} + \frac{v_2 - v_1}{r_{w2-1}} = - \frac{V_1 - v_1}{R_{wM_1}}; \\
 & \frac{V_3 - V_1}{r_{M3-1}} + \frac{V_5 - V_1}{r_{M5-1}} + \frac{V_4 - V_1}{r_{M4-1}} + \frac{V_2 - V_1}{r_{M2-1}} = \frac{V_1 - v_1}{R_{wM_1}} + I_{Z_1} - I_{A_1}.
 \end{aligned} \right\} (25)$$

В соответствии с правилами замещения положим

$$\left. \begin{aligned}
 r_{w3-1} &= \rho_w \frac{A\left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1\right)}{B\left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1\right)} \frac{2l_3}{l_2 + l_4}; \\
 r_{w5-1} &= \rho_w \frac{A\left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1\right)}{B\left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1\right)} \frac{2l_5}{l_2 + l_4}; \\
 r_{w2-1} &= \rho_w \frac{B\left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2}\right)}{A\left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2}\right)} \frac{2l_2}{l_3 + l_5}; \\
 r_{w4-1} &= \rho_w \frac{B\left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2}\right)}{A\left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2}\right)} \frac{2l_4}{l_3 + l_5};
 \end{aligned} \right\} (26)$$

$$\left. \begin{aligned}
 r_{M3-1} &= \rho_M \frac{A\left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1\right)}{B\left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1\right)} \frac{2l_3}{l_2 + l_4}; \\
 r_{M5-1} &= \rho_M \frac{A\left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1\right)}{B\left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1\right)} \frac{2l_5}{l_2 + l_4}; \\
 r_{M2-1} &= \rho_M \frac{B\left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2}\right)}{A\left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2}\right)} \frac{2l_2}{l_3 + l_5}; \\
 r_{M4-1} &= \rho_M \frac{B\left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2}\right)}{A\left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2}\right)} \frac{2l_4}{l_3 + l_5}; \\
 R_{\omega M_1} &= \rho_{\omega M} \frac{1}{A(\alpha_1, \beta_1) B(\alpha_1, \beta_1)};
 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

здесь ρ_w и ρ_M — базисные сопротивления сеток;

$\rho_{\omega M}$ — базисные межсеточные сопротивления.

Систему уравнений (25) закона Кирхгофа можно записать теперь в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{B\left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1\right)}{A\left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1\right)} \frac{l_2 + l_4}{2l_3} (v_3 - v_1) + \\
 & + \frac{B\left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1\right)}{A\left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1\right)} \frac{l_2 + l_4}{2l_5} (v_5 - v_1) + \\
 & + \frac{A\left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2}\right)}{B\left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2}\right)} \frac{l_3 + l_5}{2l_2} (v_2 - v_1) + \\
 & + \frac{A\left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2}\right)}{B\left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2}\right)} \frac{l_3 + l_5}{2l_4} (v_4 - v_1) = \\
 & = -A(\alpha_1, \beta_1) B(\alpha_1, \beta_1) \frac{V_1 - v_1}{\rho_{\omega M}} \rho_w;
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{B\left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1\right)}{A\left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1\right)} \frac{l_2 + l_4}{2l_3} (V_3 - V_1) + \frac{B\left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1\right)}{A\left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1\right)} \frac{l_2 + l_4}{2l_5} \times \\ & \times (V_5 - V_1) + \frac{A\left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2}\right)}{B\left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2}\right)} \frac{l_3 + l_5}{2l_2} (V_2 - V_1) + \frac{A\left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2}\right)}{B\left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2}\right)} \times \\ & \times \frac{l_3 + l_5}{2l_4} (V_4 - V_1) = A(\alpha_1, \beta_1) B(\alpha_1, \beta_1) \left[\frac{V_1 - v_1}{\rho_{\omega M}} + \frac{I_{Z_1} - I_{A_1}}{A(\alpha_1, \beta_1) B(\alpha_1, \beta_1)} \right]. \end{aligned} \right\}$$

Легко видеть, что левые части соответствующих уравнений системы (24) и (29) формально совпадают. Поэтому если принять, что

$$\left. \begin{aligned} \omega &= mv; \quad Z = \frac{\rho I_Z}{A(\alpha, \beta) B(\alpha, \beta)}; \\ M &= nV; \quad \nabla_k^2 \varphi = \frac{\rho I_A}{A(\alpha, \beta) B(\alpha, \beta)}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где m, n, ρ — масштабные коэффициенты, то, подставив выражения (30) в систему (24), можно приравнять правые части полученных уравнений и соответствующих уравнений системы (29):

$$\begin{aligned} \frac{(l_3 + l_5)(l_2 + l_4)nV_1}{4mD} &= - \frac{V_1 - v_1}{\rho_{\omega M}} \rho_{\omega}; \\ \frac{(l_3 + l_5)(l_2 + l_4)\rho(I_{Z_1} - I_{A_1})}{4nA(\alpha_1, \beta_1)B(\alpha_1, \beta_1)} &= \left[\frac{V_1 - v_1}{\rho_{\omega M}} + \frac{I_{Z_1} - I_{A_1}}{A(\alpha_1, \beta_1)B(\alpha_1, \beta_1)} \right] \rho_M. \end{aligned} \quad (31)$$

Так как сопротивления ρ_{ω}, ρ_M и $\rho_{\omega M}$ и потенциалы v и V выбираются из условий $\rho_{\omega M} \gg \rho_{\omega}, \rho_{\omega M} \gg \rho_M, V \gg v$, то членами $\frac{\rho_{\omega} v_1}{\rho_{\omega M}}$ в правой части первого равенства (31) и $\frac{\rho_M (V_1 - v_1)}{\rho_{\omega M}}$ в правой части второго равенства (31) можно пренебречь без существенной погрешности. При этом предположении система (24) будет эквивалентна системе (25), если

$$n = - \frac{4m\rho_{\omega} D}{(l_3 + l_5)(l_2 + l_4)\rho_{\omega M}}; \quad (32)$$

$$\rho = \frac{4n\rho_M}{(l_3 + l_5)(l_2 + l_4)} = - \frac{16m\rho_{\omega}\rho_M D}{(l_3 + l_5)^2(l_2 + l_4)^2\rho_{\omega M}}. \quad (33)$$

Положим далее, что

$$\varphi = su; \quad \theta = tU;$$

$$\bar{\nabla}_k^2 \omega = A(\alpha, \beta) B(\alpha, \beta) \nabla_k^2 \omega = gI_B, \quad (34)$$

где u и U — потенциалы на сетках « φ » и « θ »;

s, t и g — масштабные коэффициенты.

Тогда, принимая во внимание, что $\rho_{\varphi\theta} \gg \rho_{\varphi}$; $\rho_{\varphi\theta} \gg \rho_{\theta}$, (где ρ_{φ} и ρ_{θ} — базисные сопротивления сеток « φ » и « θ », а $\rho_{\varphi\theta}$ — базисное сопротивление между этими сетками), а $U \gg u$, аналогичным путем получим следующие соотношения:

$$t = \frac{4s\rho_{\varphi} \frac{1}{Eh}}{(l_2 + l_4)(l_3 + l_5)\rho_{\varphi\theta}}; \quad (35)$$

$$g = \frac{4t\rho_{\theta}}{(l_2 + l_4)(l_3 + l_5)} = - \frac{16s\rho_{\varphi}\rho_{\theta} \frac{1}{Eh}}{(l_2 + l_4)^2(l_3 + l_5)^2\rho_{\varphi\theta}}. \quad (36)$$

Покажем теперь, каким образом выполняется эквивалентность конечно-разностного представления оператора $\overline{\nabla_k^2}\varphi$ и системы уравнений Кирхгофа для узлов электрической сетки « φ_k », что поможет выявить соотношение между токами I_A и I'_A , воспроизводящими в различных масштабах p и p' одну и ту же функцию $\overline{\nabla_k^2}\varphi = AB \nabla_k^2\varphi$.

Конечно-разностное выражение этого оператора, записанное для точки 1 с учетом того, что $\varphi = su$, а $\overline{\nabla_k^2}\varphi = p'I'_A$, имеет вид

$$F\left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1\right) \frac{l_2 + l_4}{2l_3} (v_3 - v_1) + F\left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1\right) \frac{l_2 + l_4}{2l_5} (u_5 - u_1) +$$

$$+ G\left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2}\right) \frac{l_3 + l_5}{2l_2} (v_2 - v_1) + G\left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2}\right) \frac{l_3 + l_5}{2l_4} \times$$

$$\times (u_4 - u_1) = \frac{1}{4} \frac{p'}{s} (l_2 + l_4)(l_3 + l_5) I'_{A1}; \quad (37)$$

здесь

$$F = \frac{B}{A} k_2; \quad G = \frac{A}{B} k_1.$$

Сопротивления $(r_{\varphi_k})_{ij}$ сетки « φ_k » набираются, исходя из следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} (r_{\varphi_k})_{3-1} &= \rho_{\varphi_k} \frac{1}{F\left(\alpha_1 + \frac{l_3}{2}, \beta_1\right)} \frac{2l_3}{l_2 + l_4}; \\ (r_{\varphi_k})_{5-1} &= \rho_{\varphi_k} \frac{1}{F\left(\alpha_1 - \frac{l_5}{2}, \beta_1\right)} \frac{2l_5}{l_2 + l_4}; \\ (r_{\varphi_k})_{2-1} &= \rho_{\varphi_k} \frac{1}{G\left(\alpha_1, \beta_1 + \frac{l_2}{2}\right)} \frac{2l_2}{l_3 + l_5}; \\ (r_{\varphi_k})_{4-1} &= \rho_{\varphi_k} \frac{1}{G\left(\alpha_1, \beta_1 - \frac{l_4}{2}\right)} \frac{2l_4}{l_3 + l_5}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где $\rho_{\varphi k}$ — базисное сопротивление сетки.

Подставим выражения (38) в уравнение закона Кирхгофа для узла I сетки

$$\frac{u_3 - u_1}{(r_{\varphi k})_{3-1}} + \frac{u_5 - u_1}{(r_{\varphi k})_{5-1}} + \frac{u_2 - u_1}{(r_{\varphi k})_{2-1}} + \frac{u_4 - u_1}{(r_{\varphi k})_{4-1}} = -I'_{A_1}, \quad (39)$$

получим уравнение, левая часть которого полностью совпадает с левой частью уравнения (37). Это позволяет приравнять и правые части этих уравнений:

$$\frac{1}{4} \frac{p'_1}{s} (l_2 + l_4) (l_3 + l_5) = -\rho_{\varphi k}. \quad (40)$$

Отсюда следует, что

$$p'_1 = -\frac{4s\rho_{\varphi k}}{(l_2 + l_4) (l_3 + l_5)}. \quad (41)$$

Так как $\overline{\nabla_k^2 \varphi} = pI'_A$, то, учитывая соотношения (33) и (41), можно заключить, что отношение между токами I_A и I'_A есть величина

$$c = \frac{p'}{p} = \frac{s\rho_{\varphi k}\rho_{\omega M} (l_3 + l_5) (l_2 + l_4)}{4m\rho_{\omega}\rho_M D}. \quad (42)$$

Точно так же токи I_B и I'_B , воспроизводящие в масштабах g и g' соответственно функцию $\nabla_k^2 \omega$ в узлах сеток « θ » и « ω_k », находятся в отношении

$$c_1 = \frac{g'}{g} = \frac{m\rho_{\omega_k}\rho_{\varphi\theta} (l_3 + l_5) (l_2 + l_4)}{4m\rho_{\omega}\rho_M D}, \quad (43)$$

где $\rho_{\omega k}$ — базисное сопротивление сетки « ω_k ».

Чтобы исключить влияние потенциалов в узлах сетки « M » на величину токов I'_A , в каждом канале следящей системы высокого потенциала используется реохорд с источником питания, электродвижущая сила которого примерно на два порядка выше потенциалов в узлах сетки « M ». Требуемое соотношение между токами I_A и I'_A обеспечивается нагрузочными сопротивлениями R_M и $R\varphi = cR_M$.

В отличие от токов I_A и I'_A направление токов I_B и I'_B , моделирующих функцию $\nabla_k^2 \omega$, всегда совпадает, чем объясняется несколько иная схема соединения реохордов следящих систем этой группы с соответствующими узлами сеток « θ » и « ω_k ». Каждый внутренний узел сетки « θ » непосредственно соединяется с реохордом соответствующей следящей системы. Для выполнения постоянного соотношения c_1 между токами I_B и I'_B движки реохордов

следящих систем через сопротивления R_w соединены с узлами сетки « w_k » и через сопротивления R_0 ($R_0 = \frac{R_w}{c_1}$) — с землей.

Для получения однозначного решения системы уравнений общей моментной теории пологих оболочек на электрической модели необходимо удовлетворить граничным условиям на контуре оболочки, которые определяются известными усилиями и условиями закрепления.

Ниже рассматриваются некоторые варианты граничных условий для оболочек, у которых максимальный подъем представляет собой малую величину по сравнению с размерами перекрываемого оболочкой плана. При этом вводится допущение [2], что внутренняя геометрия средней поверхности оболочки ничем не отличается от обычной, евклидовой, геометрии плоскости, т. е. $A = B = 1$.

В случае заданных на контуре оболочки нормальных и касательных усилий можно, используя представления рамной аналогии, определить граничные значения функции напряжений φ и ее нормальной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (здесь n — направление нормали к контуру оболочки). Значения $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, подсчитанные для контурных точек области из условий задачи, задаются в соответствующие контурные узловы точки сетки « φ » в виде токов непосредственно с делителя граничных условий. Подбор контурных значений функции θ из условия совпадения значений функции φ в контурных точках сетки « φ » с заданными производится автоматически граничными следящими системами. На входы усилителей граничных следящих систем подаются сигналы рассогласования между потенциалами, снимаемыми с делителя граничных условий, и потенциалами соответствующих контурных точек сетки « φ », а выходы следящих систем соединяются с соответствующими контурными точками сетки « θ ».

При нулевых значениях функции φ и ее нормальной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ соответствующие участки контура сетки « φ » закорачиваются и соединяются с нулем делителя, а следящие системы подбирают контурные значения функции θ из условия равенства нулю нормальной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ в соответствующих контурных точках сетки « φ ».

Точно так же на сетках « w » и « M » реализуются заданные на контуре значения функции прогиба w и ее нормальной производной $\frac{\partial w}{\partial n}$ (в случае жестко защемленного края они равны нулю).

Если на контуре или на части контура оболочки задано перемещение, то ни функция напряжений, ни ее нормальная производ-

водная не известны. Для реализации граничных условий такого типа используется методика, основанная на электрическом построении функции, определяющей перемещения совместно с функцией напряжений.

В случае пологой оболочки перемещения u и v срединной поверхности можно выразить через функцию напряжений φ и некоторую функцию Ψ по формулам

$$\left. \begin{aligned} 2\mu u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}; \\ 2\mu v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial\Psi}{\partial\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

где $\mu = \frac{Eh}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига.

Функция Ψ связана с функцией $\theta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1-\nu}$ и функцией прогибов w следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2} &= Eh(\theta - k_1 w); \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta^2} &= -Eh(\theta - k_2 w). \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Эти зависимости получаются посредством исключения функции φ из выражений (44) с учетом уравнений равновесия и зависимостей, выражающих связь между деформациями и перемещениями.

Если положить в формуле (45) главные кривизны оболочки k_1, k_2 равными нулю, т. е. если перейти от пологой оболочки к плоскому напряженному состоянию пластинки, то Ψ станет гармонической функцией, а выражение (44) даст решение Лява [5] плоской задачи теории упругости.

В случае жестко защемленного края (считаем, что защемленный край параллелен оси α) $u = v = w = \frac{\partial w}{\partial\beta} = 0$ и выражение (45) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2} &= Eh\theta; \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta^2} &= -Eh\theta. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Тогда граничные условия для перемещений u и v можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} &= \frac{Fh}{1+\nu} \theta; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial\Psi}{\partial\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Первое из условий (47) аналогично тому, как это сделано в работе [6], реализуется в дополнительной цепи из последовательно соединенных омических сопротивлений, устанавливаемых между рассматриваемыми контурными точками сетки «ф». Номинальная величина этих сопротивлений на два порядка ниже величины сопротивлений ρ_ϕ , из-за чего токи, идущие через ρ_ϕ , незначительно влияют на распределение потенциалов в дополнительной цепи.

Второе условие системы (47) выполняется (также аналогично работе [6]) посредством построения функции Ψ в двух дополнительных цепях, одна из которых совпадает с рассматриваемым краем, а другая — отстоит от него на один шаг сетки. Подбор значений функции θ из условия выполнения второго условия системы (47) производится автоматически граничными следящими системами.

Если учесть, что при $A = B = 1$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2},$$

то граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} &= 0; \\ \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^2 \partial \beta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

соответствующие свободному краю изгибаемой плиты, можно преобразовать к виду

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 w &= (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}; \\ \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial \beta} &= - (1 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Условия (49) по форме записи ничем не отличаются от условий (47), а их реализация производится также с использованием дополнительных цепей и следящих систем, которые автоматизируют подбор контурных значений функции M из условия выполнения второго условия системы (49).

Рассматриваемые случаи граничных условий и их комбинации описывают наиболее распространенные типы граничных условий: шарнирно-подвижное закрепление, шарнирно-неподвижное закрепление, свободный край, жесткое или упругое защемление.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ванюшенков М. Г. Расчет тонких упругих пластинок методом начальных функций. Изд. МИСИ им. Куйбышева, М., 1965, стр. 46.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение к технике. М.—Л., Гостехиздат, 1949, стр. 783.

3. Кузнецова А. К. Исследование напряженного состояния элементов сооружений на электроинтеграторе ЭМБУ-6. Труды первой Межвузовской конференции по электрическому моделированию. Изд-во Новочеркасского политехнического института, 1960, стр. 70—80.

4. Керопян К. К., Чеголин П. М. Электрическое моделирование в строительной механике. Госиздат литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1963, стр. 390.

5. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1947, стр. 464.

6. Медовиков А. И. Решение плоской смешанной задачи теории упругости методом электромоделирования функции напряжений. Труды первой межвузовской конференции по электрическому моделированию. Изд-во Новочеркасского политехнического института, 1960, стр. 63—70.

7. Петров Г. М. Применение полупроводниковых диодов в схемах нелинейных блоков электромоделирующих установок. Автоматика и телемеханика. М., Изд. АН СССР, т. XVII, 1956, № 8, стр. 707—717.

8. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Перевод с английского В. И. Контова под редакцией Г. С. Шапиро. Физматгиз, М., 1963, стр. 631.

В. Н. Ломбардо

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВНО-КОНТРФОРСНОЙ ПЛОТИНЫ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОАНАЛОГИИ

Секция контрфорсной плотины с массивными оголовками представляет собой треугольную пластинку переменной толщины с утолщениями у верховой и низовой грани, упруго защемленную в основе.

Если толщина контрфорса h мала по сравнению с его размерами в плоскости xOy (рис. 1), то задача приближенно сводится к двумерной введением интеграла напряжений по толщине

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{h}{2} \\ & \int \sigma_x dz = N_x = \sigma_x^{cp} h; \\ & - \frac{h}{2} \\ & + \frac{h}{2} \\ & \int \sigma_y dz = N_y = \sigma_y^{cp} h; \\ & - \frac{h}{2} \\ & + \frac{h}{2} \\ & \int \tau_{xy} dz = T_{xy} = \tau_{xy}^{cp} h, \\ & - \frac{h}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где σ_y^{cp} , σ_x^{cp} и τ_{xy}^{cp} — средние по толщине напряжения.

Рассматривая равновесия элементарного параллелепипеда с размерами dx, dy, h , получим уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + q_x &= 0; \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + q_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где q_x, q_y — проекции объемных сил на координатной оси.

Деформации срединной плоскости должны удовлетворять уравнению неразрывности

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3)$$

Деформации связаны с напряжениями законом Гука:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x^{cp} - \nu \sigma_y^{cp}) = \\ &= \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y); \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y^{cp} - \nu \sigma_x^{cp}) = \\ &= \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}^{cp} = \\ &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} T_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Обозначим величину $\frac{1}{Eh}$,

характеризующую податливость пластинки, через S и будем считать, что она изменяется по области по произвольному закону

$$S = S_0 f(x, y), \quad (5)$$

где S_0 — податливость, принята за базисную; f — безразмерная функция.

В этом случае закон Гука может быть записан в виде

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= S_0 f (N_x - \nu N_y); \\ \epsilon_y &= S_0 f (N_y - \nu N_x); \\ \gamma_{xy} &= S_0 f 2(1+\nu) T_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

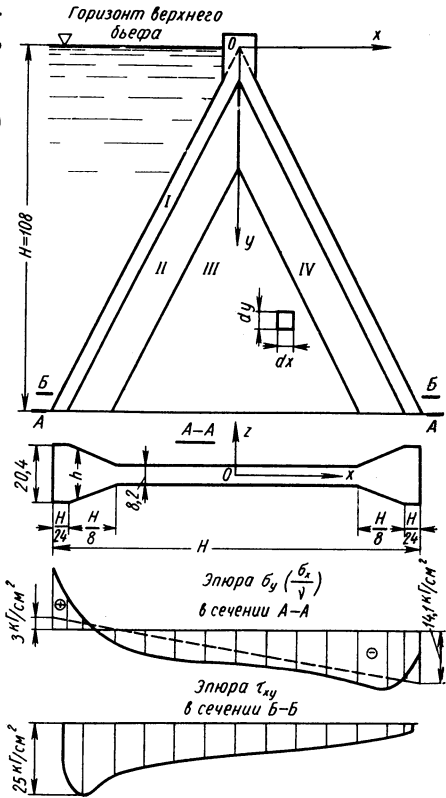


Рис. 1. Секция контрфорсной плиты и распределение напряжений в ней

Внося выражения (6) в уравнение (3) и имея в виду соотношения (2), получим

$$\nabla^2 f (N_x + N_y) = (1 + \nu) \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} N_x + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} T_{xy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} N_y - f \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial f}{\partial x} q_x - 2 \frac{\partial f}{\partial y} q_y \right]. \quad (7)$$

Уравнения равновесия (2) тождественно удовлетворяются введением функции Φ , связанной с усилиями следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= N_x + \bar{N}_x; & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= N_y + \bar{N}_y; \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= T_{xy} + \bar{T}_{xy}; \end{aligned} \quad (8)$$

здесь $\bar{N}_x, N_y, \bar{T}_{xy} = 0$ — частные решения уравнений (2). Из соотношений (8) вытекает, что

$$\nabla^2 \Phi = \theta + \bar{N}_x + \bar{N}_y,$$

где

$$\theta = N_x + N_y.$$

Введя новую функцию

$$G = f\theta + N_x + N_y \quad (9)$$

и подставляя ее в уравнение (7), получим разрешающую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 G - \nabla^2 f (N_x + N_y) &= (1 + \nu) \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - N_x \right) + \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - N_y \right) - f \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial f}{\partial x} q_x - 2 \frac{\partial f}{\partial y} q_y; \right. \\ \nabla^2 \Phi &= \frac{G}{f}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Область с произвольным законом изменения S всегда может быть разбита на несколько участков так, чтобы в пределах каждого из них f приближенно можно было бы принять линейной функцией.

Тогда для каждого такого участка система (10) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 G &= \nabla^2 f (\bar{N}_x + \bar{N}_y) - (1 + \nu) \left[f \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) + \right. \\ &\left. + 2 \frac{\partial f}{\partial x} q_x + 2 \frac{\partial f}{\partial y} q_y \right] = F; \\ \nabla^2 \Phi &= \frac{G}{f}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В случае действия нагрузок только на гранях контрфорса (при отсутствии объемных сил) система (11) упрощается:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 G &= 0; \\ \nabla^2 \Phi &= \frac{G}{f}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Таким образом, задача о распределении напряжений в теле массивно-контрфорсной плотины может быть решена по следующей схеме. Плотина вместе с частью основания разбивается на ряд участков, в пределах каждого из которых допустимо принять $\frac{1}{Eh}$ линейной функцией. Тогда в пределах каждого участ-

ка функция Φ должна удовлетворять уравнениям (11), а по линиям контактов отдельных участков должны выполняться условия равновесия и неразрывности. Для однозначного решения задачи на внешнем контуре области должны быть определены значения функции Φ и ее нормальной производной.

При заданной на внешнем контуре нагрузке (рис. 2)

$$\left. \begin{aligned} X_t &= N_x l + T_{xy} k; \\ Y_t &= T_{xy} l + N_y k; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

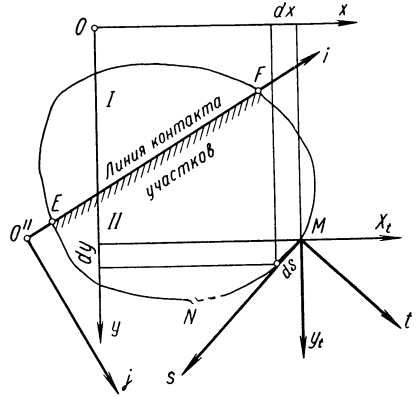


Рис. 2. К выводу условий равновесия и неразрывности на границе участков

где

$$l = \cos(tx) = \cos(sy) = \frac{\partial y}{\partial s};$$

$$k = \cos(ty) = -\cos(sx) = -\frac{\partial x}{\partial s},$$

и при действии объемных сил для контурных значений функции и ее нормальной производной, следуя теореме Мориса Леви [1], можно получить выражения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= C + Ax + By + \int_N^M [k \int_N^{M_1} (Y_t + k\bar{N}_y) ds_1 + \\ &+ l \int_N^{M_1} (X_t - l\bar{N}_x) ds_1] ds; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[A - \int_N^M (Y_t + k\bar{N}_y) ds \right] \frac{dx}{dt} + \left[B + \int_N^M (X_t - l\bar{N}_x) ds \right] \frac{dy}{dt}, \quad \left. \vphantom{\frac{\partial \Phi}{\partial t}} \right\}$$

где N — произвольная фиксированная точка на контуре, в которой принято

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad B = \frac{\partial \Phi}{\partial y};$$

$$C = \frac{\partial \Phi}{\partial s}; \quad \bar{N}_x = \bar{N}_y = 0;$$

M и M_1 — произвольные точки на контуре области.

Контурные значения Φ и $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ могут быть также вычислены с использованием представления рамной аналогии [3]. При этом изгибающие моменты и продольные усилия в стержнях рамы должны вычисляться от фиктивных нагрузок

$$X_t^\Phi = X_t - l\bar{N}_x;$$

$$Y_t^\Phi = Y_t + k\bar{N}_y. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь условия на контакте двух участков I и II с различными (но линейными) законами изменения податливости.

Выберем ортогональную систему координат ij так, чтобы направление i совпадало с линией контакта участков.

По условиям равновесия на линии контакта должны удовлетворяться равенства:

$$\left. \begin{aligned} N_j^I &= N_j^{II} = N_j; \\ T_{ij}^I &= T_{ij}^{II} = T_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

При анализе напряженного состояния участка I усилия N_j^{II} и T_{ij}^{II} являются внешней нагрузкой и значения Φ^I и $\frac{\partial \Phi^I}{\partial j}$ на линии контакта EF будут определяться соотношениями (14). Значения Φ^{II} и $\frac{\partial \Phi^{II}}{\partial j}$ на этой же линии для участка II от нагрузки N_j^I и T_{ij}^I будут определяться этими же соотношениями.

Поэтому если AB и C задать равными для двух участков, а частные решения приняты таким образом, что на линии EF

$$\bar{N}_x^I = \bar{N}_x^{II} \quad \text{и} \quad \bar{N}_y^I = \bar{N}_y^{II},$$

то на контакте будут выполняться равенства:

$$\left. \begin{aligned} \Phi^I &= \Phi^{II}; \\ \frac{\partial \Phi^I}{\partial j} &= \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial j}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Условия неразрывности удовлетворяются, если по линии EF

$$\left. \begin{aligned} u^I &= u^{II}; \\ v^I &= v^{II}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где u — перемещение вдоль оси x ;
 v — перемещение вдоль оси y .

Если нас не интересует смещение и поворот I и II участков в целом (такое смещение не влияет на напряженное состояние участков), то условия (18) можно заменить условиями наложимости линий контакта двух участков после деформации, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_i^I}{\partial i} &= \frac{\partial u_i^{II}}{\partial i} = \varepsilon_i; \\ \frac{\partial^2 u_j^I}{\partial i^2} &= \frac{\partial^2 u_j^{II}}{\partial i^2} = K, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где u_i и u_j — перемещения по направлениям i и j ;
 ε_i — относительная деформация линии контакта;
 K — кривизна линии контакта после деформации.

По закону Гука

$$\varepsilon_i = S_0 f (N_i - \nu N_j) = S_0 f [\theta - (1 + \nu) N_j], \quad (20)$$

где

$$\theta = N_x + N_y = N_i + N_j = \frac{G}{f} - (\bar{N}_x + \bar{N}_y).$$

Учитывая геометрические соотношения, закон Гука и уравнения равновесия, функцию K можно выразить через функцию G и непрерывные по линии контакта компоненты напряжений:

$$\begin{aligned} K = S_0 \left[2(1 + \nu) \frac{\partial f}{\partial i} T_{ij} + (1 + \nu) f \frac{\partial T_{ij}}{\partial i} - \frac{\partial G}{\partial j} + \frac{\partial}{\partial j} f (\bar{N}_x + \bar{N}_y) + \right. \\ \left. + (1 + \nu) \frac{\partial f}{\partial j} N_j - (1 + \nu) f g_j. \right] \quad (21) \end{aligned}$$

Подставляя выражения (20) и (21) в соотношения (19), получаем

$$G^I - G^{II} = (f^I - f^{II}) [\bar{N}_x + \bar{N}_y + (1 + \nu) N_j]; \quad (22)$$

$$\frac{\partial G^I}{\partial j} - \frac{\partial G^{II}}{\partial j} = (1 + \nu) \left[\left(\frac{\partial f^I}{\partial i} - \frac{\partial f^{II}}{\partial i} \right) 2T_{ij} + \left(\frac{\partial f^I}{\partial j} - \frac{\partial f^{II}}{\partial j} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(N_j + \frac{\bar{N}_x + \bar{N}_y}{1 + \nu} \right) + (f^I - f^{II}) \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial i} + \frac{\partial}{\partial j} \frac{\bar{N}_x + \bar{N}_y}{1 + \nu} - g_i \right) \right].$$

В частном случае, когда $f^I = A = \text{const}$, $f^{II} = B = \text{const}$ (при отсутствии объемных сил), условия на контакте для функции G примут вид

$$G^I - G^{II} = (A - B)(1 + \nu)N_j; \quad (23)$$

$$\frac{\partial G^I}{\partial j} - \frac{\partial G^{II}}{\partial j} = (A - B)(1 + \nu) \frac{\partial T_{ij}}{\partial i}. \quad (24)$$

Если на линии контакта $f^I = f^{II}$, но $\frac{\partial f^I}{\partial j} = B$, $\frac{\partial f^{II}}{\partial j} = C$ (в случае отсутствия объемных сил), то справедливы равенства

$$G^I - G^{II} = 0; \quad (25)$$

$$\frac{\partial G^I}{\partial j} - \frac{\partial G^{II}}{\partial j} = (1 + \nu)(B - C)N_j. \quad (26)$$

Систему (11) запишем в конечных разностях для точки xy .

$$\left. \begin{aligned} (G_{x+1,y} + G_{x-1,y} - 2G_{xy}) + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} (G_{x,y+1} + \\ + G_{x,y-1} - 2G_{xy}) &= F\Delta x^2; \\ (\Phi_{x+1,y} + \Phi_{x-1,y} - 2\Phi_{xy}) + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} (\Phi_{x,y+1} + \\ + \Phi_{x,y-1} - 2\Phi_{xy}) &= \frac{G_{xy}\Delta x^2}{f}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Составим электрическую цепь (рис. 3). Сопротивление верхней и нижней сеток примем в соответствии с правилами замещения.

Пусть сопротивление R , связывающее верхнюю и нижнюю сетки, переменное по области:

$$R = R_0 f, \quad (28)$$

где R_0 — сопротивление, принятое за базисное.

Обозначим потенциалы верхней и нижней сеток соответственно W и V . Тогда уравнения закона Кирхгофа для узлов xy можно записать:

$$W_{x+1,y} + W_{x-1,y} - 2W_{xy} + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} (W_{x,y+1} + W_{x,y-1} - 2W_{xy}) = \\ = -J_{xy}\lambda_x - \frac{V_{xy} - W_{xy}}{R} \lambda_x; \quad (29)$$

$$V_{x+1, y} + V_{x-1, y} - 2V_{xy} + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} (V_{x, y+1} + V_{x, y-1} - 2V_{xy}) =$$

$$= - \frac{W_{xy} - V_{xy}}{R_0 f} r_x.$$

Примем $R_0 \gg \lambda_x$; $R_0 \gg r_x$; $W \gg V$. Тогда, если принять $n\Phi = V$, то вторые уравнения систем (17) и (19) эквивалентны при условии

$$mG = -n\Delta x \Delta y \frac{R_0}{\rho_1} G = W. \quad (30)$$

Сравнивая первые уравнения систем (27) и (29), заключаем, что они аналогичны при

$$J_{xy} = -m\Delta x \Delta y \frac{1}{\rho_2} F = n\Delta x^2 \Delta y^2 \frac{R_0}{\rho_1 \rho_2} F = kF. \quad (31)$$

Таким образом, при электро моделировании упругой области с линейно изменяющейся податливостью по закону $S = S_0 f$ со-

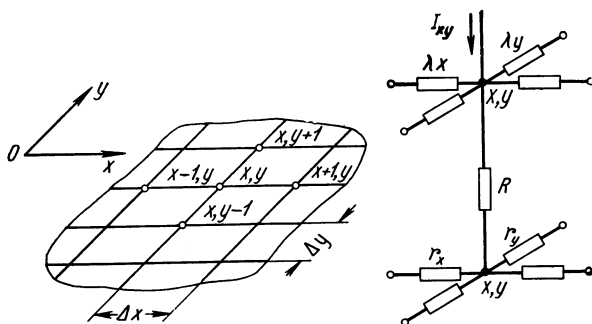


Рис. 3. Схема узла электрической сетки:

$$r_x = \rho_1 \frac{\Delta x}{\Delta y}; \quad r_y = \rho_1 \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \lambda_x = \rho_2 \frac{\Delta x}{\Delta y}; \quad \lambda_y = \rho_2 \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

$$R = R_0 f$$

противления, связывающие верхнюю и нижнюю сетки, должны меняться по линейному закону $R = R_0 f$.

По линиям контактов участков с различными законами изменения f условия (17) выполняются при непосредственном соединении соответствующих узлов сетки « V ».

Условия неразрывности (22) можно выполнить, обеспечив между соответствующими контактными узлами сетки « W » перепад потенциалов

$$\Delta W = (G^I - G^{II}) m$$

и подвода к ним дополнительный ток, пропорциональный величине

$$\left(\frac{\partial G^I}{\partial j} - \frac{\partial G^{II}}{\partial j} \right) m.$$

По изложенной выше методике на интеграторе, выполненном в МИСИ, моделировалось напряженное состояние Кампыр-Раватской плотины. Секция плотины (рис. 1) была разбита на 4 участка, причем в пределах каждого функция f принималась постоянной или линейно изменяющейся. Значения функции Φ на контуре строились в дополнительных цепях по методике, изложенной в работе [2].

Значения функции G на напорной и низовой грани подбирались следящей системой из условия равенства нулю внутренней нормальной производной функции Φ .

Дополнительные токи к линиям контактов подводились с делителя истоков методом последовательных приближений. После 4—5 приближений процесс сходиллся.

На рис. 1 приведены эпюры напряжений на подошве плотины от действия гидростатического давления для плотины на абсолютно жестком основании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1947, стр. 464.
2. Медовиков А. И. Решение плоской смешанной задачи теории упругости методом электроанalogии. Труды 1-й Межвузовской конференции по электрическому моделированию задач строительной механики. Изд-во Новочеркасского политехнического института, 1960, стр. 63—70.
3. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1947, стр. 299.

М. Д. Головки, Ю. А. Матросов

РЕШЕНИЕ ДВУХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ВОЗНИКШИХ В ТРАНСПОРТНОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ

В статье сообщается о результатах развития во Всесоюзном научно-исследовательском институте транспортного строительства метода электрических аналогий в теории упругости, впервые предложенного в 1944 г. в США [6]. Соображения о выборе аппаратуры и результаты решения первых задач приведены в работах [2, 3]. Настоящая статья имеет целью показать эффективность развиваемого метода на примерах решения практических задач и ознакомить с принятым в последнее время видоизменением метода — совместным применением метода электрических аналогий и цифровой техники. Рассматриваемые задачи были

решены в связи с исследованиями проблем повышения прочности и долговечности транспортных сооружений, особенно в условиях сурового климата.

Рассмотрим задачу о термонапряженном состоянии железобетонной сваи квадратного поперечного сечения, подверженной в зимнее время приливным колебаниям уровня моря. Расчету подвергалось сечение монолитной сваи размером 45×45 см, изготовленной из бетона марки 400. Задача ставилась с целью выяснения целесообразности дальнейшего применения призматических железобетонных свай при строительстве портов, так как имеются данные о малой долговечности их в портах с регулярными колебаниями уровня воды.

Расчету температурных напряжений предшествовал анализ температурных полей в свае¹ на гидравлическом интеграторе В. С. Лукьянова. В результате предыдущих исследований двумерных температурных полей в сваях круглого поперечного сечения диаметром 0,6 м, расположенных в зоне переменного уровня, выяснилось, что тепловые потоки в вертикальном направлении незначительны, особенно на расстоянии более 20—40 см от уреза воды. Поэтому рассматриваемую задачу сочли возможным поставить как двумерную в плоскости, перпендикулярной длинной оси сваи. Так как внешние воздействия на сваю одинаковы со всех сторон, то имеются четыре оси симметрии и для исследования достаточно выделить $1/8$ поперечного сечения. Далее задача формулируется так.

Искомая функция распределения температуры $t(x, y, \tau)$ удовлетворяет уравнению Фурье в однородной области OAB (рис. 1):

$$c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

где $c = 2311$ кдж/м³·град — объемная теплоемкость;

$\lambda_1 = 1,977$ вт/см·град — коэффициент теплопроводности материала сваи.
Начальное условие

$$t(x, y, k\tau_0 + \tau) = t[x, y(k+1)\tau_0 + \tau];$$

$$0 < \tau < \tau_1, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

является условием установившегося периодического режима. Распределение температуры в любой момент времени τ k -го периода колебания уровня воды равно распределению температуры в соответствующий момент времени сле-

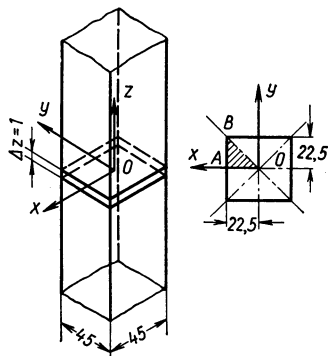


Рис. 1. Схема исследуемой области

¹ Методику решения на гидравлических интеграторах задач теплопроводности см., например, в книге [5].

дующего $(k + 1)$ -го периода. Продолжительность периода колебания уровня $\tau_0 = 12,4$ ч.

Граничные условия:

На осях симметрии OA и OB соответственно $\frac{\partial t}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial t}{\partial n} = 0$, где n — нормаль к OB .

На грани AB :

а) во время пребывания рассматриваемого сечения под водой (т. е. при $0 < \tau < \tau_1$, $\tau_1 = 11,4$ ч) $t = t_{\text{св}} = 0^\circ \text{C}$;

б) во время пребывания рассматриваемого сечения над водой (при $\tau_1 < \tau < \tau_0$)

$$\lambda_1 \frac{\partial t}{\partial x} + \alpha_1 (t - t_{\text{св}}) = 0, \quad (2)$$

где $\alpha_1 = 23,3 \text{ вт/см}^2 \cdot \text{град}$ — коэффициент теплоотдачи с поверхности.

Для решения задачи методом гидравлических аналогий исследуемую область расчленили на блоки (рис. 2, а), искомые значения температуры были определены в центрах этих блоков.

При расчете температурного поля в рассматриваемом поперечном сечении сваи принимали, что свая подвергается воздействию приливно-отливных колебаний уровня моря с частотой один раз в 12,4 ч (применительно к условиям Мурманского порта) и что разность температур и воздуха $\Delta t_0 = (t_{\text{св}} - t_{\text{св}}) = 20^\circ \text{C}$.

Правильное назначение климатических условий при расчетах конструкций, связанных с оценкой их долговечности,

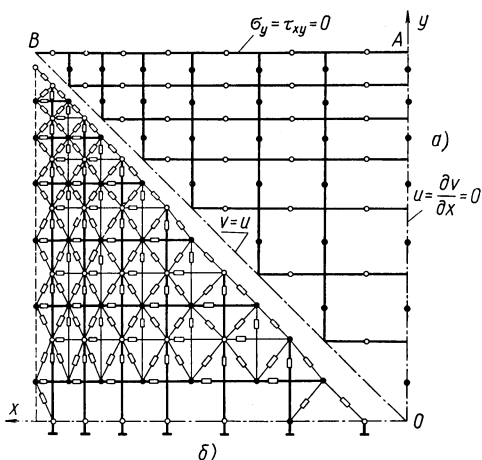


Рис. 2. Схема решения задачи методом гидравлических аналогий:

а — разбивка исследуемой области на блоки; б — схема электрической эквивалентной цепи

является трудным, так как в нормах отсутствуют соответствующие данные. При назначении упомянутой разности температур имелось в виду, что решается линейная задача термоупругости, т. е. в принятой постановке теплофизические и упругие параметры в пределах исследуемой области постоянны во времени и не зависят от искомых величин (температуры, перемещений). Это обстоятельство позволяет производить простой пересчет полученных окончательных результатов (например, напряжения) для других значений Δt_0 . Далее путем пробных расчетов опреде-

лялось наиболее невыгодное (в отношении неравномерности температур) соотношение времени пребывания рассматриваемого сечения сваи под водой к времени пребывания его над водой. Для неизолированной сваи это соотношение оказалось равным 11,4 : 1. Затем на гидравлическом интеграторе был проведен окончательный расчет искомого температурного режима рассматриваемого поперечного сечения сваи и построено температурное поле в свае к концу периода пребывания расчетного сечения над водой. К этому моменту имеет место наибольшая неравномерность в распределении температуры по сечению сваи.

Полученное температурное поле $t = t(x, y)$ явилось основой для решения температурной задачи теории упругости. Предварительно предстояло решить вопрос о начальном распределении температуры, при котором в свае нет температурных напряжений. Температурные напряжения возникают в конструкциях от изменения температуры и, следовательно, для расчета нужно знать два тепловых состояния рассматриваемой конструкции. Учитывая многообразие условий изготовления железобетонных свай, было решено на этом этапе исследований не принимать в расчет возможные вредные (или полезные) предварительные напряжения сваи, вызванные различными возможными режимами термообработок, и считать, что искомым начальным распределением температуры в свае, при котором в ней нет температурных напряжений, является распределение вида $t_1 = \text{const}$. Так как свая не закреплена в торцах и поперечные сечения ее могут свободно перемещаться вдоль длинной оси (z), то целесообразно принять величину t_1 равной средней температуре сечения сваи t_0 .

Температурные напряжения были рассчитаны с помощью известного приема перехода от поля разности температур $t' = t - t_0$ (рис. 3), принятого при расчете, к системе условных объемных и поверхностных сил. Задача теории упругости ставилась как разновидность задачи о плоской деформации, т. е. предполагалось, что рассматриваемые поперечные сечения сваи после деформации остаются плоскими, хотя и могут смещаться в направлении длинной оси сваи. В остальном задача формулировалась следующим образом.

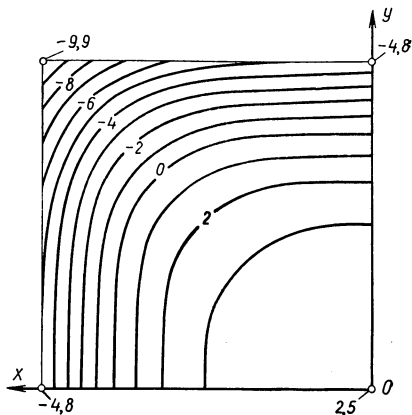


Рис. 3. Поле разности температур $t' = t - t_0$ (поле термоупругих составляющих деформаций ε'_z в 10^{-5} ед.).

Определяющими неизвестными являются составляющие перемещений u и v по осям координат x и y . Эти искомые функции удовлетворяют уравнениям Ляме в однородной области OAB (рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \rho_x &= 0; \\ \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \rho_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}; \quad \nu = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

— постоянные Ляме;

$$\rho_x = -\frac{\alpha E}{1 - 2\mu} \frac{\partial t'}{\partial x}; \quad \rho_y = -\frac{\alpha E}{1 - 2\mu} \frac{\partial t'}{\partial y}$$

— составляющие условных объемных сил, эквивалентных воздействию принятой в расчет разности температур t' (x, y);

$E = 2,36 \cdot 10^{10}$ н/м² — модуль продольной упругости;

μ — коэффициент Пуассона;

$\alpha = 10^{-4}$ град⁻¹ — коэффициент линейного расширения.

Составляющая перемещения w в направлении продольной оси свай z не изменяется, т. е. $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$.

Граничные и особые условия следующие.

На оси симметрии OA $\frac{\partial u}{\partial y} = v = 0$, на оси OB $u = v$, на грани AB $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$. Кроме того, напряжения σ_z удовлетворяют условиям $\int_F \sigma_z dF = 0$ (F — площадь исследуемой области OAB).

Искомые напряжения (нормальные $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и касательные $\tau_{xy} = \tau_{yx}$) связаны с составляющими перемещений:

$$\sigma_x = (\lambda + 2\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\alpha E t'}{1 - 2\mu};$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2\nu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\alpha E t'}{1 - 2\mu};$$

$$\sigma_z = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\alpha E t'}{1 - 2\mu};$$

$$\tau_{xy} = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Решение поставленной задачи было получено при использовании метода электрических аналогий. Этот метод близок методу

конечных разностей: исследуемую область расчленяют на блоки конечных размеров (рис. 2, а) и искомые величины (составляющие перемещений) определяют для избранных точек области (середин граней блоков). По правилам, изложенным в работе [2], с учетом принятых граничных условий была составлена схема электрической эквивалентной цепи (рис. 2, б), воспроизводящей исследуемое упругое поле. Эквивалентная цепь вблизи оси симметрии OB получена на основании условия $u(a, b) = v(b, a)$ для симметричных пар точек с координатами (a, b) и (b, a) .

Ранее для получения решения задачи — распределения составляющих перемещений — использовали имеющуюся электрическую установку.

Подав в узлы эквивалентной цепи токи, воспроизводящие составляющие условных поверхностных и объемных сил, измеряли искомые величины потенциалов, установившиеся в узлах этой установки.

При решении данной задачи распределение потенциалов не определялось на электрической модели, а получалось на цифровой вычислительной машине БЭСМ-2м путем решения системы 48-линейных алгебраических уравнений с 48 неизвестными. Коэффициенты системы определялись значениями проводимостей эквивалентной цепи, а свободные члены — величинами токов, подводимых к узлам. Программа для решения системы уравнений была составлена в Гипротисе [1]. В ней использованы такие упрощающие обстоятельства, как ленточная структура и симметрия матрицы коэффициентов (схему матрицы задачи см. на рис. 4).

В машину для решения вводятся данные о всех коэффициентах симметричной половины ленты (включая главную диагональ). Это неудобно, так как число нулевых мест здесь в два раза превышает число значащих коэффициентов. Поэтому предполагается несколько изменить используемую программу для того, чтобы не вводить равные нулю элементы.

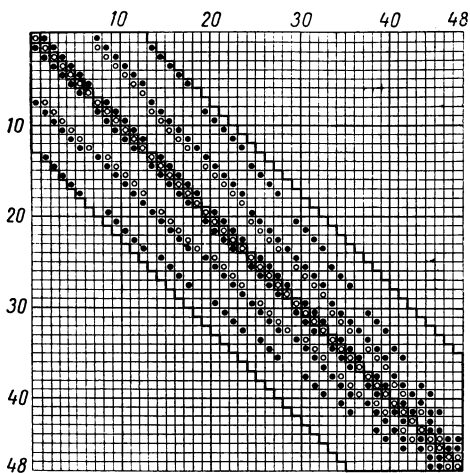


Рис. 4. Схема матрицы системы линейных уравнений, представляющих конечно-разностную аппроксимацию уравнений Ляме задачи о свае. Затемненные кружки представляют собой отрицательные коэффициенты, а незатемненные — положительные

Удобство введенной модификации метода электрических аналогий состоит в том, что наряду с автоматизацией на БЭСМ-2м очень трудоемкой части задачи — решения основной системы линейных уравнений — сохраняется единообразие и простота учета принятых граничных условий и нагрузок. Схема электрической эквивалентной цепи в этом случае используется как топологическая модель решаемой системы уравнений.

Полученные на БЭСМ-2м величины потенциалов были проверены на клавишных счетных машинах подстановкой в исходные уравнения.

Последовательность вычислений была следующей. Вначале по известным значениям потенциалов U , V и по величинам проводимостей цепи a , b , c , d , e , f были вычислены токи в неупрощенной цепи:

$$i_x = a(U_n - U_{n+1}) + c(V_m - V_{m+1});$$

$$i_y = b(V_m - V_{m+1}) + c(U_n - U_{n+1});$$

$$i_z = g(U_n - U_{n+1}) + h(V_m - V_{m+1});$$

$$i_{xy} = e(U_k - U_{k+1}) + f(V_e - V_{l+1});$$

$$i_{yx} = d(V_l - V_{l+1}) + f(U_k - U_{k+1}).$$

Для контроля полученные значения токов проверяли на равновесие в узлах цепи. После проверки эти величины токов i_k пересчитывали в усилия F'_k , умножая их на масштабный коэффициент $1/m_i$ н/ма:

$$F'_k = i_k \cdot 1/m_i.$$

По полученным значениям усилий позже осуществили контроль равновесия участков исследуемой области. Умножая вычисленные значения усилий на величины, обратные размерам соответствующих площадок ($1/S_k$), получали напряжения. Значения касательных напряжений, полученные для площадок, сходящихся под прямым углом, проверялись на парность. Вычисленные значения нормальных напряжений $\sigma'_k = F'_k/S_k$ еще не являлись окончательными. Надлежало учесть возможность свободного расширения, т. е. вычесть члены $\alpha Et'/(1-2\mu)$. Так вычисляли значения нормальных напряжений по всем трем осям координат. Для контроля этих вычислений была использована известная зависимость между нормальными напряжениями температурной задачи о плоской деформации:

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) - \alpha Et'.$$

Поэтому величины σ_z вычислялись дважды: по току i_z и по приведенной формуле. Получаемые расхождения позволяли обнаружить допущенные ошибки.

Выверенные таким образом величины σ_z проверяли на равновесие их в сечении сваи, т. е. на удовлетворение условию $\int_F \sigma_z \cdot dF = 0$, которое выполняется, если вначале была определена без ошибки средняя температура сечения сваи t_0 . Обнаруженная ошибка в значении величины ϵt_0 может быть исправлена вычислением напряжения $\sigma_{z0} = -\alpha E(\epsilon t_0)$, равномерно распределенного по сечению сваи, и вычитанием его из значений σ_z , полученных ранее. Величины остальных напряжений (σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$) оставляют при этом без изменений.

В некоторых случаях желательно характеризовать опасность разрушения железобетонных элементов не по напряжениям, а по величинам деформаций. При решении этой задачи в дополнение к изложенной типовой процедуре обработки результатов для пробы вычислили термоупругие составляющие деформаций:

$$\epsilon'_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha t';$$

$$\epsilon'_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \alpha t';$$

$$\epsilon'_z = -\alpha t'$$

и построили чертежи изолиний этих величин.

Полученные результаты решения задачи представлены в виде чертежей изолиний: деформаций ϵ'_z (рис. 3), ϵ'_x [ϵ'_y] (рис. 5), напряжений σ_z (рис. 6), σ_x [σ_y] (рис. 7), $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (рис. 8) и схемы деформированного состояния (рис. 9).

В верхнем среднем углу исследуемой области (след пересечения плоскости OXY ребром сваи) величина напряжения σ_z пропорциональна разности температур $t' = t - t_0$. Здесь $\sigma_z = -\alpha E t'$, так как на ребре сваи $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Эта простая связь была использована для графического контроля результатов. Чертежи изолиний деформаций оказались, как видим, сходными по начертанию с чертежами изолиний напряжений. Вычисление деформации несколько проще вычисления напряжений. Это следует иметь в виду при приближенных оценках опасности разрушения в подобных случаях.

На рис. 10 в качестве примера приведены изолинии величин «фиктивных» (промежуточных) нормальных напряжений σ'_x [σ'_y]. Сравнивая рис. 10 с рис. 7, видим, что промежуточные и окончательные напряжения отличаются не только по величине, но и по характеру распределения. Это обстоятельство уменьшает эффективность использования электрической эквивалентной цепи как реальной модели исследуемого процесса, так как распределение токов, протекающих в этой модели, еще не отражает искомого конечного результата — распределения окончательных нормальных напряжений.

Полученные на ребрах сваи наибольшие растягивающие напряжения $\sigma_z^{\max} = 23,1 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$ приводят к трещинам, перпенди-

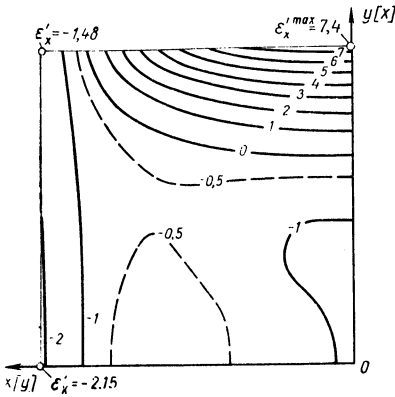


Рис. 5. Изолинии термоупругих составляющих деформаций $\epsilon'_x [\epsilon_y]$ (в 10^{-5} ед.)

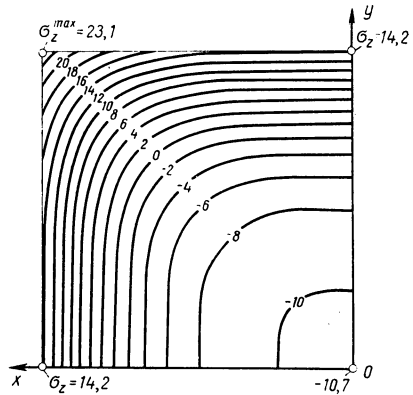


Рис. 6. Изолинии нормальных напряжений σ_z (в 10^5 н/м^2)

кулярным длинной оси сваи. В серединах боковых граней $\sigma_x^{\max} = 19,5 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$. Эти напряжения могут вызвать разрушения в сваях, установленных во многих отечественных портах, так как для данной марки бетона (400) в элементах конструкций, нахо-

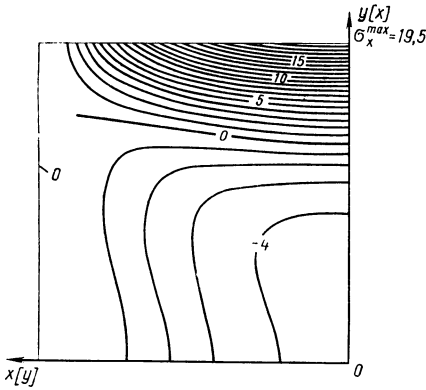


Рис. 7. Изолинии нормальных напряжений $\sigma_x[\sigma_y]$ (в 10^5 н/м^2)

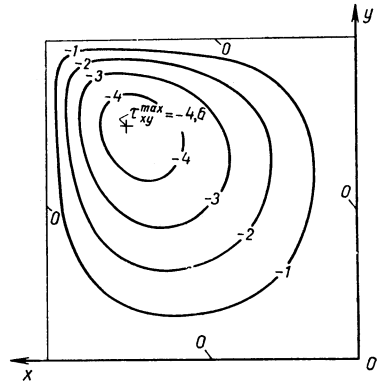


Рис. 8. Изолинии касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (в 10^5 н/м^2)

дящихся в зоне переменного уровня воды, на растяжение допускается лишь $\sigma_y = 13,25 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$ (половина от нормативного предела прочности бетона на растяжение [4]). Напомним, что 292

такие напряжения можно ожидать в свае, установленной в каком-либо незамерзающем порту, где имеются приливно-отливные (т. е. регулярные) колебания уровня воды и где в зимнее время разность между температурой воды и воздуха $\Delta t_0 = 20^\circ \text{C}$.

Пользуясь отмеченным выше свойством линейной связи между этой разностью и искомыми напряжениями, можно определить наименьшую допустимую величину Δt_0^{\min} , при которой наибольшие растягивающие напряжения на ребре не превысили бы допустимой величины $13,25 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$.

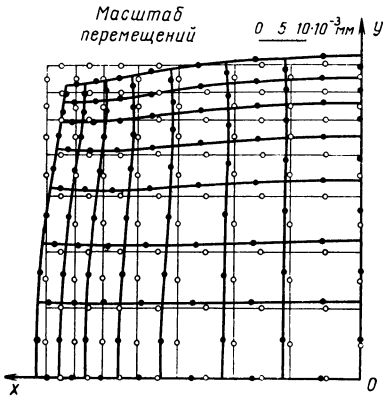


Рис. 9. Схема деформированного состояния поперечного сечения сваи

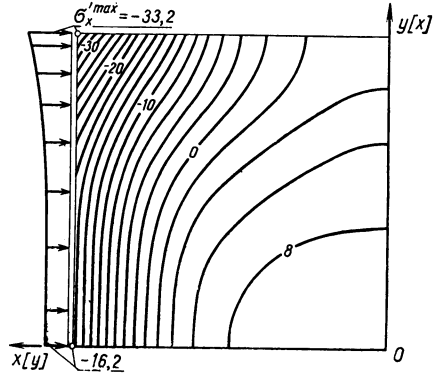


Рис. 10. Изолинии промежуточных нормальных напряжений $\sigma_x [\sigma_y]$ (в 10^5 н/м^2)

Эта искомая величина невелика: $\Delta t_0^{\min} = \Delta t_0 \sigma_0 / \sigma_2^{\max} = 20,0 \cdot 13,25 / 23,10 = 11,5^\circ \text{C}$.

В НИИ транспортного строительства было предложено защищать железобетонные сваи круглого сечения от чрезмерных температурных напряжений тепловой изоляцией, например, досками. Для призматических свай такая изоляция сложно осуществима и она менее эффективна, чем для круглоцилиндрических свай. В дополнение к проделанным расчетам определяли температурные напряжения в свае квадратного поперечного сечения, покрытой тепловой изоляцией из досок толщиной 5 см. Наибольшие растягивающие напряжения оказались меньше, чем в неизолированной свае, но все же превышали допустимые величины. Круглоцилиндрическую сваю такая изоляция с запасом защищает от чрезмерных температурных напряжений.

Рассмотрим теперь задачу о термонапряженном состоянии бетонной мостовой опоры, частично погруженной в воду. Исследовался случай, когда опора имеет форму прямоугольного параллелепипеда, выполненного из бетона марки 200 с модулем

продольной упругости $E = 1,96 \cdot 10^{10}$ н/м². Коэффициенты Пуассона μ и линейного расширения α принимались такими же, как и в предыдущей задаче. Температурное поле, а затем и напряжения рассчитывались в изображенной на рис. 11, *a* симметричной половине поперечного сечения опоры. Так как в направлении, перпендикулярном чертежу (ось z), опора простирается на расстояние, превышающее в 3—4 раза ее высоту, то в средней части опоры температурное поле и напряженное состояние практически двумерны, т. е. зависят лишь от двух координат x и y . В результате решения задачи следовало получить полную картину напряженного состояния и оценить погрешность применения в настоящее время приближенного способа расчета.

Как и в предыдущем случае, решение термоупругой задачи начиналось с подготовки к анализу на гидравлическом интеграторе температурного поля в поперечном сечении мостовой опоры. Температурная задача была поставлена следующим образом.

Искомая функция распределения температуры должна удовлетворять уравнению Фурье (1) в исследуемой области $OABCD$ (рис. 11, *a*). Значения теплофизических характеристик бетона c , λ_1 и величину коэффициента теплоотдачи с поверхности α_1 назначили такими же, как и в задаче о свае. Начальное распределение температуры должно быть определено из условия установившегося периодического теплового режима мостовой опоры. В этом режиме надводная часть опоры (внешняя поверхность CD) омывается воздухом, температура которого t_1 изменяется по графику годового хода среднемесячных величин с амплитудой $14,4^\circ\text{C}$ при среднегодовой температуре 0°C . Теплоотдача от опоры к воздуху происходит по условию (2). Находящаяся под водой поверхность опоры BC (рис. 11, *a*) в летнее время испытывает изменения температуры t_2 по трапециевидальному графику, изображенному в левой нижней части рисунка ($t_2 = 15^\circ\text{C}$). В зимнее время эта температура неизменна и равна 0°C . Остальные границы исследуемой области (OA , AB и OD) предполагались непроницаемыми для потоков тепла в направлениях, нормальных к этим границам.

Для расчета напряженного состояния мостовой опоры следовало получить распределение температуры к моменту τ_1 , соответствующему концу периода резкого похолодания. При этом принималось, что температура воздуха понижается по линейному закону в течение 2 суток до величины $-29,4^\circ\text{C}$, а затем остается неизменной 2 суток.

Для решения задачи методом гидравлических аналогий исследуемую область расчленили на 120 блоков различного размера (от $0,15 \times 0,15$ до $0,20 \times 0,50$ м) и рассчитали схему гидро-модели,

После проведенной подготовки можно было приступить к расчету искомого температурного поля $t(x, y, \tau_1)$. Но, еще не приступая к нему, уяснили, что это искомое поле будет иметь вблизи уреза воды значительную концентрацию изотерм. В этом случае расчет напряженного состояния методом электрических аналогий очень нежелателен, так как решение окажется неточ-

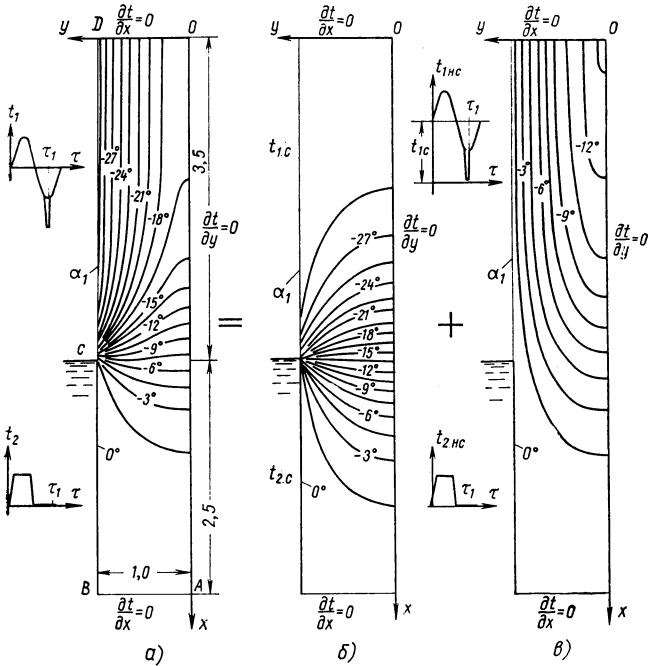


Рис. 11. Температурные поля:
 а — нестационарное $t(x, y, \tau_1)$; б — стационарное $t_c(x, y)$;
 в — нестационарное $t(x, y, \tau_1)$

ным вблизи места концентрации изотерм даже при довольно дробной разбивке исследуемой области на блоки.

Начальное распределение температуры, при котором в опоре нет температурных напряжений, приняли линейным ($t_n = t_0 + \Delta t \cdot y$) по тем же соображениям, что и в случае со свай, хотя было ясно, что учет принятой функции t_n не снимает концентрации изотерм вблизи уреза воды. Поэтому для решения поставленной задачи прибегли к следующему приему. Заданное распределение температуры $t(x, y, \tau_1)$ разложили на два: одно — с концентрацией изотерм вблизи уреза воды (рис. 11, б) и другое — без концентрации (рис. 11, в). В качестве второго приняли нестационарное распределение температуры $t_{nc} =$

$= (x, y, \tau_1)$, возникающее в исследуемой области при начальном и граничных условиях, не отличающихся от заданных, за исключением участка границы CD , на котором взамен заданного графика изменения температуры воздуха $t_1(\tau)$ приняты $t_{1,nc} = t_1(\tau) - t_{1,c}$ (см. схему в левой верхней части рис. 11, θ). Величину $t_{1,c} = -29,8^\circ$ нашли подбором из условия, чтобы к моменту τ_1 распределение температуры в исследуемой области не содержало бы концентрации изотерм (рис. 11, θ). Для нахождения величины $t_{1,c}$ потребовалось провести на гидравлическом интеграторе три дополнительных расчета.

Распределение температуры, изображенное на рис. 11, θ , получено в результате расчета на электроинтеграторе ЭГДА стационарного температурного поля $t_c(x, y)$ при следующих условиях: на участке BC (граничные условия I рода) $t_{2,c} = 0,^\circ\text{C}$, на участке CD (граничные условия III рода) $t_{1,c} = -29,8^\circ\text{C}$ с прежним значением коэффициента теплоотдачи α_1 .

Очевидно, что, суммируя граничные условия, принятые в расчетах составляющих искомого температурного поля, получим заданные функции. Начертание этого температурного поля (рис. 11, a) произведено суммированием ранее рассчитанных его составляющих, изображенных на рис. 11, θ и ν .

После разложения температурного поля $t(x, y, \tau_1)$ на составляющие $t_c(x, y)$ и $t_{nc}(x, y, \tau_1)$ перешли к раздельному определению напряжений, возникающих от действия этих полей. Напряженное состояние мостовой опоры от стационарного температурного поля в нашем случае определяется сравнительно просто, путем цифровой переработки величин температур $t_c(x, y)$. Поэтому и было проведено изложенное разделение. Для определения же напряженного состояния в опоре, возникающего от действия температурного поля $t_{nc}(x, y, \tau_1)$, нужно решить двумерную задачу теории упругости. Но так как после проведенного разделения в этом поле нет концентрации изотерм, то для решения можно было бы без опасения применить освоенный метод электрических аналогий.

На рис. 12 изображены граничные условия, принятые в расчете обоих напряженных состояний. Грани AB , BD и OD исследуемой области свободны от напряжений $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ на гранях AB и OD ; $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ на грани BD , а на оси симметрии следовало принять $\nu = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Так как рассматриваемое поперечное сечение мостовой опоры имеет лишь одну ось симметрии (а не более, как поперечное сечение сваи), то к условию равновесия в сечении напряжений σ_z

$$\int_F \sigma_z dF = 0$$

следовало добавить условия равновесия моментов этих напряжений относительно оси y :

$$\int_F \sigma_z x dF = 0.$$

Напомним, что принятие этих условий равносильно допущению о свободе перемещения рассматриваемого сечения опоры в направлении оси z и поворота его относительно оси y . Само сече-

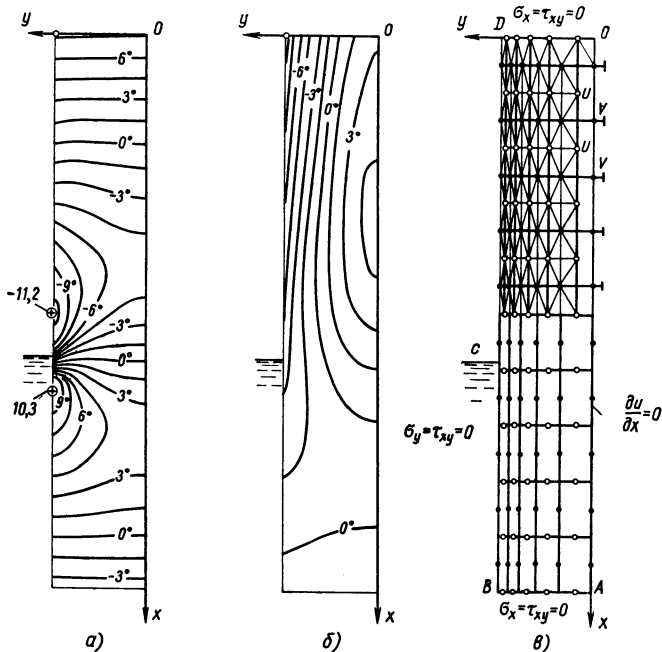


Рис. 12. Уравновешенные температурные поля:

- a — стационарное $t'_c(x, y)$;
- b — нестационарное $t'_{нс}(x, y, \tau)$;
- v — разбивка исследуемой области на блоки и схема электрической эквивалентной цепи

ние при этом остается плоским. Возможность таких перемещений обусловлена конечной длиной сооружения в направлении оси z .

Принятая линейная форма распределения температуры $t_{нс}$ позволила путем надлежащего подбора параметров t_0 и Δt еще до начала расчетов обеспечить удовлетворение написанным выше условиям равновесия. Для упрощения начало координат переносили в центр тяжести сечения и искомые параметры вычисляли по формулам

$$t_0 = \frac{1}{F} \int_F t dF;$$

$$\Delta t = \frac{1}{J_y} \int t x dF,$$

где J_y — момент инерции сечения относительно оси y .

Величина t_0 представляет собой среднюю температуру сечения, а Δt — градиент (*град/м*) уравновешивающей плоскости в направлении оси x .

После вычитания из температурных полей t_c и t_{nc} соответствующих линейных функций t_n получили «уравновешенные» температурные поля t'_c и t'_{nc} (рис. 12, *а* и *б*), по которым определять напряжения удобнее, чем по полям, не прошедшим такой обработки. Для случая стационарного температурного поля расчет на этом закончили, так как полученное температурное поле t'_c представляет собой в некотором масштабе искомое поле напряжений $\sigma_z = -\alpha E \cdot t'_c = -1,96 \cdot t' \cdot 10^5$ н/м². Остальные напряжения в этом случае, как известно, равны нулю [3].

Для расчета напряженного состояния, вызванного полем t'_{nc} , повторили процедуру, проделанную для задачи о свае: расчленили исследуемую область на 50 блоков, составили схему электрической эквивалентной цепи (рис. 12, *в*), по которой записали и затем на машине БЭСМ-2м решили 105 линейных уравнений, предоставляющих для этого случая конечно-разностную аппроксимацию уравнений Ляме. Полученные значения перемещений пересчитали на клавишных счетных машинах в напряжения.

На рис. 13, *а* показано распределение напряжений σ_x в поперечном сечении опоры от воздействия температурного поля t'_{nc} . Так как от воздействия поля t'_c напряжения $\sigma_x = 0$, то изображенное на рис. 13, *а* распределение σ_x одновременно является и суммарным. На рис. 13, *б* показано суммарное распределение напряжений σ_z . Несколько выше уреза воды виден участок поверхности опоры с недопустимо большими растягивающими напряжениями. Напряжения σ_y и τ_{xy} оказались небольшими. На рис. 13, *в* показано распределение величин $\mu(\sigma_x + \sigma_y)$. Если температурное поле, изображенное на рис. 11, *а*, подвергнуть описанному выше уравновешиванию, а затем полученные ординаты умножить на $-\alpha E$, то получим приближенное распределение напряжений σ_z^n , отличающееся от точного на величину $\Delta\sigma_z = \sigma_z - \sigma_z^n = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$. В нашем случае в исходном температурном поле имеется значительная доля стационарной составляющей, поэтому погрешности приближенного расчета невелики.

В заключение следует отметить, что для успешного решения задач, подобных описанным, необходимы:

1. Тщательный анализ тепловых режимов, формирующих изучаемые напряженные состояния. Возможно более обстоятельное

понимание причин, вызывающих в температурных полях особенности, существенные для расчета напряжений.

2. Комбинация различных методов расчета и применение разнообразной вычислительной техники, особенно техники, автоматизирующей множество вспомогательных вычислений.

Первое требование удовлетворяется при использовании гидравлических интеграторов В. С. Лукьянова для расчетов теп-

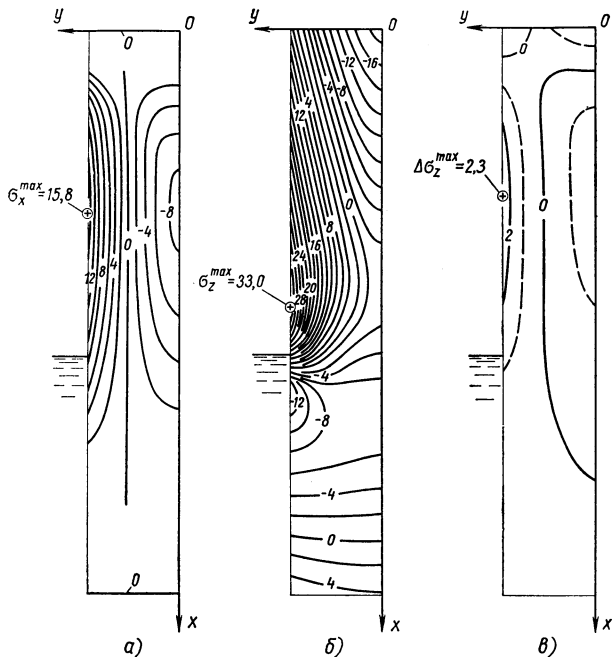


Рис. 13. Изолинии нормальных напряжений (в 10^5 н/м^2):
 а — σ_x ; б — σ_z ; в — $\Delta\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$

ловых режимов, на которых можно разобраться в деталях изучаемых тепловых процессов. Что касается второго, то подбор подходящего оборудования для эффективной автоматизации вспомогательных расчетов является первоочередной дальнейшей задачей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобкова В. Е. Решение систем линейных алгебраических уравнений с симметричной кодиагональной матрицей коэффициентов и несколькими столбцами свободных членов. Вып. IV-29, М., Изд. Гипротис, 1965, 15 стр. Библиотека программ для ЭВМ БЭСМ-2м.

2. Головки М. Д. Электрические цепи для решения двумерных задач теории упругости. В сборнике — Исследования напряженного состояния

крупноразмерных стеновых панелей методом электрических аналогий. Вып. 3, М., Изд. НИИ строительной физики, 1961, стр. 5—45.

3. Головкин М. Д. Решение задач теории упругости на электрических эквивалентных цепях. Доклад на I Всесоюзном совещании по аналоговым средствам и методам решения краевых задач. В сб. «Аналоговые методы и средства решения краевых задач». Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 85—104.

4. Инструкция по повышению долговечности бетона в конструкциях морских гидротехнических сооружений. М., Госстройиздат, 1962, стр. 9.

5. Лукьянов В. С., Головкин М. Д. Расчет глубины промерзания грунтов. Труды ВНИИ транспортного строительства, вып. 23, М., Трансжелдориздат, 1957, стр. 110—160.

6. Крон Г. Equivalent circuits of the elastic field. Journal of Applied Mechanics, vol. 11, № 3, 1944, p. 149—161.

V V V

В. С. Лукошков

О СОВРЕМЕННОМ СОСТОЯНИИ АНАЛОГОВЫХ СРЕДСТВ И МЕТОДОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОНИКИ

Комплекс задач, рассматриваемых в этой обзорной статье, определяется большим разнообразием изучаемых и конструируемых современных вакуумных электронных приборов. Сюда относятся не только хорошо известные электронные лампы с сетками (радиолампы) и телевизионные трубки, но и разнообразные сверхвысокочастотные приборы, приборы для обработки материалов электронным лучом, электронные микроскопы, масспектрографы, электронные преобразователи света, квантовые генераторы с атомными и молекулярными пучками (мазеры), ускорители заряженных частиц и многие другие приборы, для которых характерно движение в вакууме заряженных частиц, направляемых электрическими или магнитными полями, сформированными соответствующим образом.

В статье основное внимание обращается на новое в применении аналоговых средств и методов, не отраженное в материалах сборника [1].

Задачи о поле

Наиболее типичными являются краевые задачи об определении двухмерного¹ электрического поля в межэлектродном пространстве электронных приборов, когда заданы геометрия и потенциалы U электродов и распределенные в пространстве заряды ρ . При этом решаются уравнения Лапласа $\nabla^2 U = 0$ или Пуассона $\nabla^2 U = \frac{\rho(x, y)}{\epsilon_0}$; $U = U(x, y)$. В настоящее время эти

¹ Имеется в виду независимость поля или от координаты z декартовой системы координат (плоское поле) или от координаты θ цилиндрической системы координат (осесимметричное поле).

задачи решаются, как правило, на электролитических ваннах; однако появляется тенденция решать эти задачи на сетках из омических сопротивлений (R -сетках) с хорошо автоматизированным съемом информации с них.

Типичны также задачи об определении электромагнитного поля в волноводах и резонаторах, не редко сводимые к решению двумерного уравнения типа $\nabla^2 U + k^2 U = 0$. Эти задачи решаются на сетках, составленных из индуктивностей и емкостей (LC -сетка [4]), а также на трехмерных электролитических ваннах [8].

Баллистические задачи

Таковыми задачами являются задачи о движении заряженных или нейтральных (но имеющих дипольный момент) частиц в заданных электрическом и магнитном полях. При этом для каждой движущейся частицы решается отдельно уравнение Лоренца:

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = q\vec{E} + q \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{B} \right] \quad (1)$$

в случае заряженных частиц или уравнение

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a \text{ grad } [E^2] \quad (2)$$

в случае нейтральных частиц с дипольным моментом, где m и q — масса и заряд частицы;

\vec{r} — вектор, определяющий положение частицы;

\vec{E} — напряженность электрического поля;

\vec{B} — индукция магнитного поля.

Уравнение (1) решается в настоящее время и в случае релятивистских скоростей заряженных частиц (электронов), при этом учитывается зависимость массы m частиц от их скорости $d\vec{r}/dt$ и изменение магнитной индукции \vec{B} под влиянием собственного магнитного поля движущихся частиц [2] (в частном случае равномерного распределения плотности тока по сечению пучка, близкого к прямолинейному и ламинарному).

Баллистическая задача считается решенной, если построено (т. е. вычерчено на бумаге) некоторое число траекторий (обычно порядка десятка), дающее достаточное представление о всем пучке траекторий в приборе.

Хорошо разработанные разнообразные графо-аналитические методы «ручного» построения траекторий по вычерченным на бумаге эквипотенциалам поля в большинстве практически важных случаев очень трудоемки. Поэтому сейчас развиваются и внедряются в практику автоматизированные устройства — тра-

ектографы, которые решают уравнения движения (1) и (2) с помощью специальных вычислительных (аналоговых или цифровых) устройств и одновременно вычерчивают траектории. В СССР оправдали себя следующие два типа траектографов: первый тип — решающий уравнение в естественной системе координат (вычерчивающий плоские траектории по их радиусам кривизны) [2, 8, 7]; второй тип — решающий уравнения движения в декартовой или цилиндрической системах координат [2].

Для обоих типов траектографов характерно движение по поверхности электролита ванны многоштырькового зонда, т. е. системы близко расположенных зондов (штырьков), «снимающих» различные составляющие напряженности поля, а также потенциал напряженности. Обычно применяются 2-, 3-, 4- и 5-штырьковые зонды. Данные о поле поступают в счетно-решающие устройства траектографов, которые вырабатывают либо радиус кривизны траектории (траектографы первого типа), либо смещения движущейся частицы в проекциях на оси координат (траектографы второго типа). В обоих случаях многоштырьковый зонд и механически связанное с ним пишущее устройство являются моделью движущейся частицы.

Для траектографов первого типа характерна относительная простота электромеханического счетно-решающего устройства при решении простейших задач о плоских траекториях в электростатическом поле \vec{E} , а также при наличии магнитного поля, перпендикулярного к плоскости траекторий. При этом в случае нерелятивистских скоростей из уравнения движения (1) может быть выведено следующее выражение для радиуса кривизны траектории R :

$$R = \frac{2U}{E_n - B \sqrt{\frac{2q}{m_0} U}}, \quad (3)$$

где U — потенциал электростатического поля;

B — индукция магнитного поля;

\vec{n} — вектор нормали к траектории;

m_0 — масса покоя заряженной частицы.

Согласно формуле (3), для вычисления R по снимаемым в ванне E_n и U достаточно выполнить несколько алгебраических действий. Кроме того, значение радиуса кривизны R надо связать с поворотом рулевого колеса трехколесной катящейся по бумаге тележки, на которой укреплено устройство, вычерчивающее траекторию. Для выполнения всех этих операций используются специальные потенциометры и вращающиеся трансформаторы, управляемые следящими системами [8].

Однако счетно-решающее устройство траектографов первого типа значительно усложняется при переходе к изменяющимся

по времени электрическим полям (задачи сверхвысокочастотной электроники). Это происходит, в частности, потому, что величину E_n приходится заменить интегралом от тангенциальной составляющей электрического поля. В траектографе ИФП АН СССР-8 для этой цели используется механический фрикционный интегратор.

В траектографах второго типа счетно-решающая часть непосредственно интегрирует систему уравнений для составляющих движения. Эта система уравнений непосредственно выводится из соотношения (1). При этом используются хорошо освоенные промышленностью электромоделели постоянного тока, выполняющие как интегрирование, так и обработку различных функций, входящих в систему уравнений движения. Специальные следящие системы переводят результат интегрирования в смещение 4-штырькового зонда по координатным слоям.

В траектографах второго типа зонд и пишущее устройство являются «истинной динамической моделью» заряженной частицы, т. е. в своих масштабах моделируют не только траекторию, но и скорость и ускорение частицы (в траектографах первого типа скорость движения тележки никак не связана со скоростью моделируемой частицы и обычно выбирается постоянной по величине). Указанная особенность траектографов второго типа позволяет относительно легко перейти к решению задач СВЧ электроники.

На электромоделелях постоянного тока с помощью траектографов второго типа решаются задачи о движении заряженных частиц в продольном магнитном поле [2], когда в двумерных электрическом и магнитном полях (одновременно плоских или одновременно осесимметричных) траектории оказываются трехмерными¹.

К этому же типу задач относится и учет собственного магнитного поля заряженных частиц при релятивистских скоростях [2], о чем говорилось выше. Довольно полное сопоставление достоинств и недостатков траектографов 1-го и 2-го типов проведено в работах [2, 8].

Отметим попутно, что оба типа траектографов позволяют также автоматизировать нанесение на чертеж эквипотенциальных и силовых линий поля.

Задачи о самосогласованном поле

Эти задачи приобретают с каждым годом все большее значение вследствие роста многообразия электронных приборов, у которых электронные пучки обладают большой плотностью.

¹ При этом третья координата траектории частицы вычисляется и записывается специальным аналоговым устройством.

При решении таких задач необходимо учитывать влияние собственного заряда движущихся частиц на поле, в котором они движутся. Изменение поля приводит к изменению траекторий частиц. Поэтому подобные задачи можно решать только методом последовательных приближений [5], так как без решения баллистической задачи в предыдущем приближении невозможно определить плотность пространственного заряда ρ , входящую в правую часть уравнения Пуассона, используемого при решении задачи о поле в последующем приближении.

Необходимо подчеркнуть, что классическая задача электронных приборов — вычисление тока, ограниченного пространственным зарядом в прикатодной области, — это задача о самосогласованном поле.

Трудоемкость последовательных приближений (обычно необходимо до десятка приближений) привела к тому, что многочисленные задачи о самосогласованном поле в настоящее время решаются почти всегда на траектографах второго типа; принципиальная возможность решения задач о самосогласованном поле на траектографах первого типа на сегодняшний день не реализована.

Опубликованные ранее работы [3, 9] используют указанное выше свойство зонда и пишущего устройства, характерное для траектографов второго типа, их скорость пропорциональна скорости моделирующего электрона. Это свойство в случае решения плоской задачи приводит к следующему выражению для суммарного тока $I_{т.э.э}$ всех т. в. э., обслуживающих рассматриваемый участок поверхности электролита (обычно дно ванны и соответствующая поверхность электролита и чертежа, на котором вычерчиваются траектории, разбивается на несколько сотен таких небольших прямоугольных участков):

$$I_{т.э.э} = C \sum_{i=1}^N j_i t_i, \quad (4)$$

где N — число вычерченных траекторий, проходящих через рассматриваемый участок;

t_i — время прохождения зонда (пишущего устройства) через этот участок;

j_i — плотность электронного потока в натуре у того участка катода электронного прибора, где начинается траектория с индексом i .

Для определения в каждом цикле приближения j_i , ограниченного, как правило, пространственным зарядом, существуют специальные методы. Коэффициент C зависит от выбранного на поверхности катода расстояния между началами вычерчиваемых траекторий и от различных масштабных коэффициентов модели-

рования. При решении осесимметричной задачи соотношение (4) несколько усложняется.

Развитие электронных приборов и изучение происходящих в них явлений требуют дальнейшего значительного ускорения процесса решения двумерных задач о самосогласованном поле.

Если учесть возможности полной автоматизации операций вычисления пространственного заряда пучка и моделирующих его токов, и введения этих токов в электролит, то окажется, что необходимо ускорение процесса вычисления траекторий в каждом цикле последовательных приближений (на вычисление и вычерчивание траектографом того и другого типа одной траектории требуется от одной до нескольких минут). Для этого, по-видимому, надо отказываться от электролитической ванны и от связанного с нею инерционного механического устройства, передвигающего одновременно зонд и пишущее устройство. Перспективным является замена электролитической ванны R -сеткой, оборудованной автоматизированным устройством быстрого съема информации о поле, и работающей в сочетании со счетно-решающим и запоминающим устройством цифрового или моделирующего типа. При этом отпадает необходимость использования зонда, роль которого играет система коммутации — опроса соответствующих ячеек; информация, эквивалентная вычерченному семейству траектории, может храниться в запоминающем устройстве.

В настоящее время актуальной представляется задача о расчете статического магнитного поля, создаваемого катушками с током при частичном заполнении окружающей среды ферромагнитными материалами с нелинейными и гистерезисными свойствами, и задача о расчете поля, создаваемого постоянными магнитами. Весьма актуальна также и обратная задача — подбор геометрической формы различных устройств, создающих магнитное поле, по заданной форме этого поля. Современные аналоговые средства и методы позволяют создать соответствующие вычислительные устройства для оперативного решения указанных задач о статическом магнитном поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блейвас И. М. Автоматические устройства для вычисления и построения траекторий заряженных частиц в электрических магнитных полях. Аналоговые методы и средства решения краевых задач. Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 200—222.

2. Блейвас И. М., Зелинский Э. М., Майоров В., Сергиенко В. И. Применение цифрового дифференциального анализатора для автоматизации процесса решения самосогласованных задач о поле в траекториях в электронных приборах. «Аналоговые методы и средства решения краевых задач. Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 222—230.

3. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 442.

4. Лукошков В. С., Шерель Л. А., Шубин Л. В. Задачи о самоогласованном электрическом поле в электронных приборах и практика их решения с помощью электролитической ванны с тоководящими элементами. «Аналоговые методы и средства решения краевых задач», Киев, «Наукова Думка», 1964, стр. 191—200.

5. Лукошков В. С. Моделирование источников поля в электролитической ванне при решении задач математической физики. «Электроника», вып. 7 и 8, 1958, стр. 67—71.

6. Прудковский Г. П., Левин Г. Э. Траектографы-автоматы, производящие расчет и построение траекторий заряженных частиц. «Приборы и техника эксперимента», № 1, 1962, стр. 7.

7. Прудковский Г. П. «Траектограф», В сб. «Электроника больших мощностей», вып. 3. М., «Наука», 1964, стр. 70.

8. Шелсенвол М. А. Методы моделирования на электролитической ванне с автоматизацией процесса расчета распределения объемного заряда. ЖТФ, т. 31, вып. 3, 1961 г., стр. 226.

9. P. A. Lindsay, «Application of the Relaxation Method to the Solution of Space Charge Problems». Journal of Electronics and Control, First Series, vol. 11, N° 5, May 1959, p. 415.

*И. М. Блейвас, С. А. Дубровина,
Э. М. Зелинский, В. М. Красноперкин*

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОНИКИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ СЕТКУ В СОЧЕТАНИИ С ЭЦВМ ИЛИ С ЭЛЕКТРОМОДЕЛЮ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1. Введение

Для исследования траекторий заряженных частиц в электрических и магнитных полях методом математического моделирования широко используются специализированные устройства — траектографы, представляющие собой комбинацию электролитической ванны со структурной электромоделью [1].

Важнейшими практическими проблемами являются резкое увеличение (в десятки раз) быстродействия этих устройств с целью оперативного решения задач, возникающих в процессе конструирования современных приборов СВЧ, а также повышение точности их работы.

Решение задач электроники непосредственно на электронных цифровых вычислительных машинах ЭЦВМ хотя и является перспективным, но в настоящее время ограничено требованием большой оперативной памяти машины и высокой скорости ее работы [2].

Ниже рассматриваются результаты работы по созданию комбинированных высокопроизводительных машин для решения задач электроники. В зависимости от технических характеристик ЭЦВМ и сетки возможны две основные структуры машины, существенно отличающиеся по аппаратурному выполнению, но имеющие приблизительно одинаковые возможности по скорости решения задач в целом.

Особенностью первой структуры (рис. 1) является то, что ЭЦВМ выполняет вычислительные операции, связанные непо-

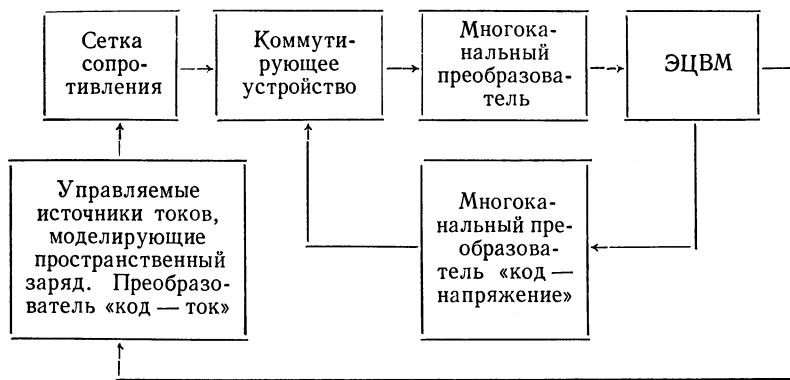


Рис. 1. Блок-схема аналого-цифровой вычислительной машины (первая структура)

средственно с расчетом траектории заряженных частиц и расчетом пространственного заряда, и хранит в своем оперативном запоминающем устройстве ОЗУ только информацию, необходимую для этого расчета. Данные об электрическом и магнитном полях (потенциалы и градиенты потенциалов), необходимые при решении уравнения движения, поступают в ЭЦВМ через преобразователи «напряжение — код» по сигналам с ЭЦВМ, воздействующим на коммутирующее устройство через преобразователь «код — напряжение». При использовании первой структуры машины информация о поле не занимает места в ОЗУ ЭЦВМ, это дает возможность применять ЭЦВМ с небольшим объемом ОЗУ (порядка 1024 слов). Однако в рассматриваемой структуре в силу необходимости интерполяции решения уравнения поля коммутирующее устройство значительно усложняется. Кроме того, необходимы прямые и обратные многоканальные (до 20 каналов) преобразователи.

Вторая структура комбинированной машины (рис. 2) выгодно отличается от первой режим упрощением устройств связи сетки сопротивлений с ЭЦВМ. В этом случае для связи ЭЦВМ с сеткой необходимо сравнительно простое коммутирующее устройство построочного опроса и одноканальный преобразователь.

«напряжение — код». Перед началом решения вся необходимая для вычисления информация о поле вводится в ЭЦВМ и запоминается в ОЗУ на все время решения задачи. Однако значительное аппаратное упрощение в рассматриваемой структуре достигается за счет того, что значительный объем ОЗУ занят информацией о поле.

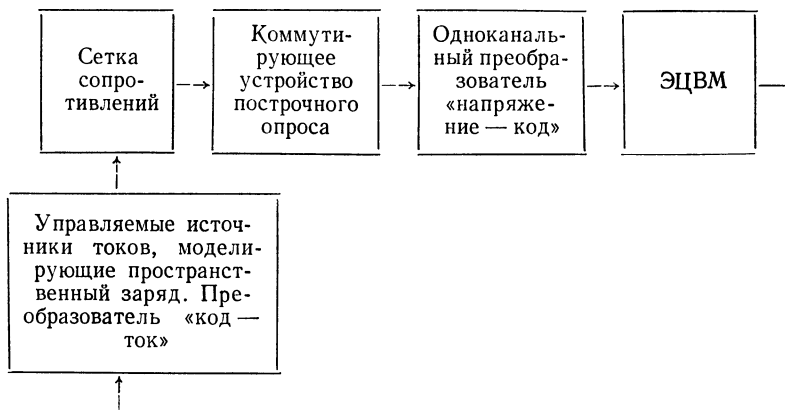


Рис. 2. Блок-схема аналого-цифровой вычислительной машины (вторая структура)

При сравнении рассмотренных структур вторая кажется предпочтительнее как более экономичная и содержащая меньшее количество «неуниверсальных» элементов. Кроме того, в этом случае почти весь вычислительный процесс протекает внутри ЭЦВМ, что облегчает его подготовку и контроль. Однако применение первой структуры машины более эффективно, если для решения уравнения движения используется ЭЦВМ с малым объемом памяти или структурная электро модель постоянного тока.

2. Аналого-цифровая вычислительная машина

Разработана блок-схема аналого-цифровой вычислительной машины, решающей следующую систему уравнений:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon_0}; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = e\vec{E} + \frac{e}{c} \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \vec{B} \right], \quad (4)$$

где \vec{B} — индукция магнитного поля;

\vec{E} — напряженность пространственного поля;

- ρ — плотность пространственного заряда;
- m, e — масса и заряд электрона;
- \vec{r} — радиус-вектор;
- c — скорость света;
- ϵ_0 — диэлектрическая постоянная вакуума.

Аналого-цифровая вычислительная машина позволяет:

1) рассчитывать траектории заряженных частиц в двумерных статических электрическом и магнитном полях с учетом пространственного заряда;

2) рассчитывать траектории релятивистских электронов с учетом собственного магнитного поля ($\vec{B}_c \neq 0$);

3) рассчитывать траектории заряженных частиц в квазистационарном электрическом поле, зависящем от времени;

4) вычислять и записывать скорость и ускорение частицы вдоль траектории;

5) вычерчивать силовые и эквипотенциальные линии моделируемого поля.

От всех известных ранее вычислительных устройств подобного типа разрабатываемая аналого-цифровая вычислительная машина отличается тем, что она:

1) обладает высокой производительностью вычислительного процесса, обусловленной полной его автоматизацией;

2) позволяет провести оптимизацию вычислительного процесса для нахождения решения, удовлетворяющего заданным критериям;

3) позволяет вследствие высокого быстродействия периодизировать решение для вывода его на экран осциллографа с целью оперативного выяснения зависимости решения от исходных параметров.

Обратимся к блок-схеме аналого-цифровой вычислительной машины, изображенной на рис. 3. Заметим, что для упрощения блок-схемы и изложения алгоритма решения элементы арифметического устройства АУ опускаются. Однако надо помнить, что реализация каких-либо вычислений или логических операций предполагает совместную работу АУ и ОЗУ.

Мысленно весь массив ОЗУ разбивается на части, в которых запоминается информация, необходимая для отдельных этапов вычислительного процесса. Соединение различных частей в процессе решения обозначается с помощью вентилях, управляемых соответствующими командами программного устройства. Уравнения (1) — (3), описывающие электрическое и магнитное поля исследуемого прибора, решаются соответственно на сетках сопротивлений № 1 и № 2. Решение на сетках получается практически мгновенно после включения граничных условий. Таким образом, время решения задачи на аналого-цифровой вычислительной машине полностью определяется характеристиками ЭЦВМ и

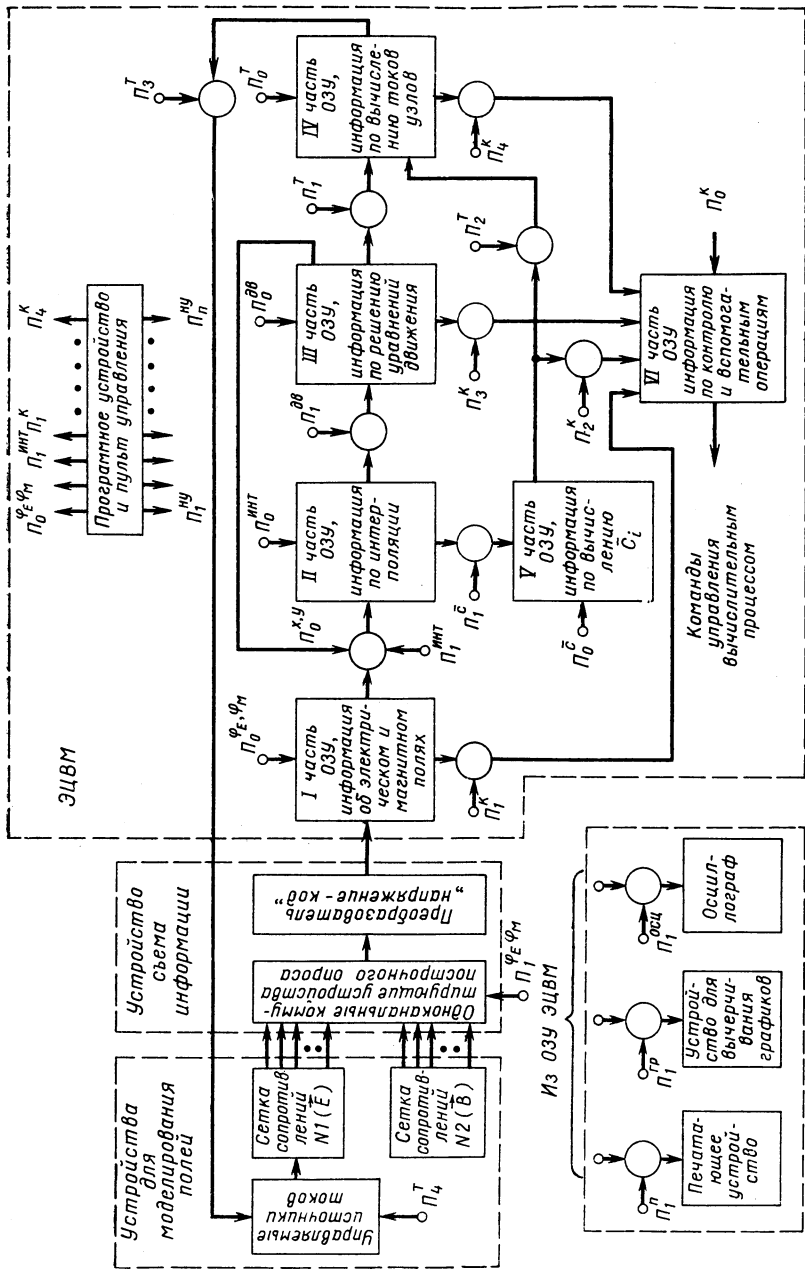


Рис. 3. Развернутая блок-схема аналого-цифровой вычислительной машины (вторая структура)

системы связи. Решение задачи начинается с операции введения в (1 часть) ОЗУ ЭЦВМ информации об электрическом и магнитном полях. Эта операция заключается в построчном опросе узловых точек сеток № 1 и № 2 с помощью одноканального коммутирующего устройства в соответствии с программой $P_1^{\varphi E, \varphi M}$ с последующим преобразованием напряжения узловых точек в двоичный код и записью его в ОЗУ. Поскольку для решения уравнения (4) движения заряженной частицы требуются только та часть информации о полях, которая соответствует области расположения электронного потока в междуэлектродном пространстве, то при построчном опросе необходим съем информации из тех узловых точек сетки, которые лежат внутри указанной области. Это реализуется программой $P_0^{\varphi E, \varphi M}$. Далее следует расчет 5—10 траекторий, входящих в электронный пучок, что осуществляется программами $P_0^{\theta \alpha}$, $P_1^{\theta \alpha}$, причем величины

\vec{E} и \vec{B} правой части уравнения рассчитываются по формулам интерполяции (10) по программам P_0^{unt} , P_1^{unt} , P_0^{xy} .

Уравнение (1) решается методом последовательных приближений. Пространственный заряд ρ при этом моделируется токами, вводимыми в узлы сетки с помощью управляемых источников тока (преобразователь «код — ток»).

В случае пересекающихся трубок тока значение тока для n -го узла сетки находится по формуле

$$J_n = \sum_i \bar{C}_i \Delta \tau_{ni}, \quad (5)$$

где \bar{C}_i — коэффициент, пропорциональный плотности тока на катоде в пределах i -го трубки тока (зависящий в каждом приближении от потенциала фиксированной узловой точки, расположенной вблизи катода);

$\Delta \tau_{ni}$ — время движения заряженной частицы вдоль i -й токовой трубки в пределах области, обслуживаемой n -м управляемым источником тока.

Процесс последовательных приближений полностью автоматизирован. В каждом приближении вычисление токов узлов сетки производится в процессе расчета траекторий и состоит из двух операций:

- 1) расчета величины \bar{C}_i по программам $P_0^{\bar{C}}$, $P_1^{\bar{C}}$;
- 2) расчета величин токов узлов по формуле (5) (программы P_0^T , P_1^T , P_2^T).

В процессе вычислений выполняются необходимые логические операции и операции контроля P_0^k , P_1^k , ..., P_n^k , с помощью которых анализируется информация отдельных этапов вычислений и вырабатываются команды, воздействующие на дальнейший ход

вычислительного процесса. В процессе вычисления траекторий вырабатывается команда «конец траектории», которая останавливает вычислительный процесс и включает программы P_1^{ny} , P_2^{ny} , ..., P_n^{ny} для введения в ОЗУ начальных условий очередной траектории. После определения всех траекторий данного приближения вырабатывается команда «конец приближения». Вслед за этим по программам P_3^T и P_4^T производится соответственно выключение ранее установленных токов и задание новых значений токов в узлы сетки с помощью управляемых источников тока. Поле, полученное при введении в узлы сетки новых значений токов, является исходным для вычислений в следующем приближении.

Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока расхождение между значениями потенциалов в сетке для $(m-1)$ -го и m -го приближений не окажется меньше заданного значения. Информация m -го приближения, накопленная в ОЗУ, является окончательным решением задачи и выводится на печать (P_1^n), на экран осциллографа (P_1^{osc}) или передается в устройство для вычерчивания графиков (P_1^{ep}).

Одним из важнейших звеньев комбинированной машины является устройство съема информации с сетки сопротивлений, от характеристик которого зависит оперативность получения информации о поле, а следовательно, и время решения задачи.

В разрабатываемой машине предполагается использовать электронное устройство съема информации с сетки сопротивлений, блок-схема которого показана на рис. 4.

Дешифраторы выработки и съема информации совместно со счетчиками позволяют осуществить построчный опрос ячеек матрицы в заданной области. Выбор области производится предварительной настройкой счетчиков X и Y . После окончания считывания информации со всех точек заданной области счетчик Y формирует команду, включающую программу вычислений на ЭЦВМ. Блок буферных усилителей применен для согласования высокого выходного сопротивления диодной матрицы выборки и съема информации со сравнительно низким входным сопротивлением преобразователя.

Принцип действия диодной матрицы выборки и съема информации (рис. 5, б) становится ясным, если рассмотреть принцип действия и характеристики элементарной диодной ячейки матрицы (рис. 5, а). Ячейка состоит из двух координатных диодов D_1 и D_2 , двух диодов связи D_3 и D_4 и сопротивлений R_1 и R_2 . В исходном состоянии на координатные шины X и Y подаются напряжения U , запирающие диод D_3 , анод которого связан с узловой точкой сетки. Диод D_3 открывается, если напряжения с обеих координатных шин снимаются одновременно. Ток, текущий из узла сетки, создает на сопротивлении R_1 падение напряжения,

равное узловому потенциалу. Передача этого потенциала на шину съема Y осуществляется в момент подачи опорного напряжения $U_{оп}$ с диодного дешифратора съема Y на сопротивление R_2 .

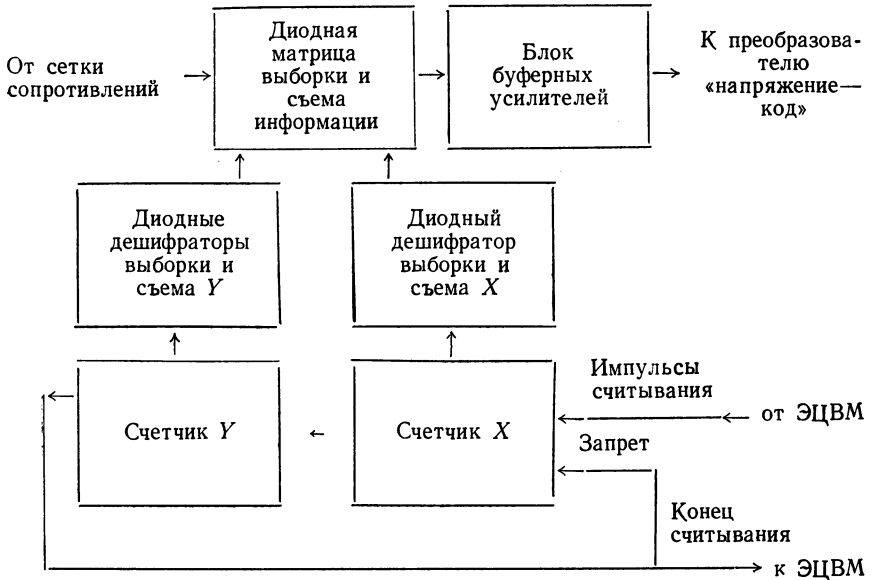


Рис. 4. Блок-схема одноканального электронного устройства построчного опроса узлов сетки

При этом диод связи D_4 начинает проводить ток, и напряжение на шине съема становится равным напряжению в точке 1.

Для правильной работы ячейки необходимо выполнить следующие условия:

$$U > U_{вх. \max}; \quad (6)$$

$$U_{оп} \frac{R_1}{R_1 + R_2} < U_{вх. \min}; \quad (7)$$

$$R_{обр} \gg R_2; \quad (8)$$

$$R_1 \gg R_{сетки}. \quad (9)$$

Выполнение условия (6) позволяет отключить узловую точку сетки от сопротивления R_1 . Условие (7) определяет зону нечувствительности ячейки ко входному напряжению. Условие (8) выдвигает требование к обратному сопротивлению диодов $R_{обр}$, обратные токи диодов при напряжении U порядка 100 в не должны превышать 0,1 мка. Указанным требованиям удовлетворяет диодная ячейка (рис. 5, а), характеризующаяся следующими параметрами: $D_1 - D_4$ — диоды типа Д 101, $R_1 = 5,1 \text{ мом}$, $R_2 = 20 \text{ мом}$.

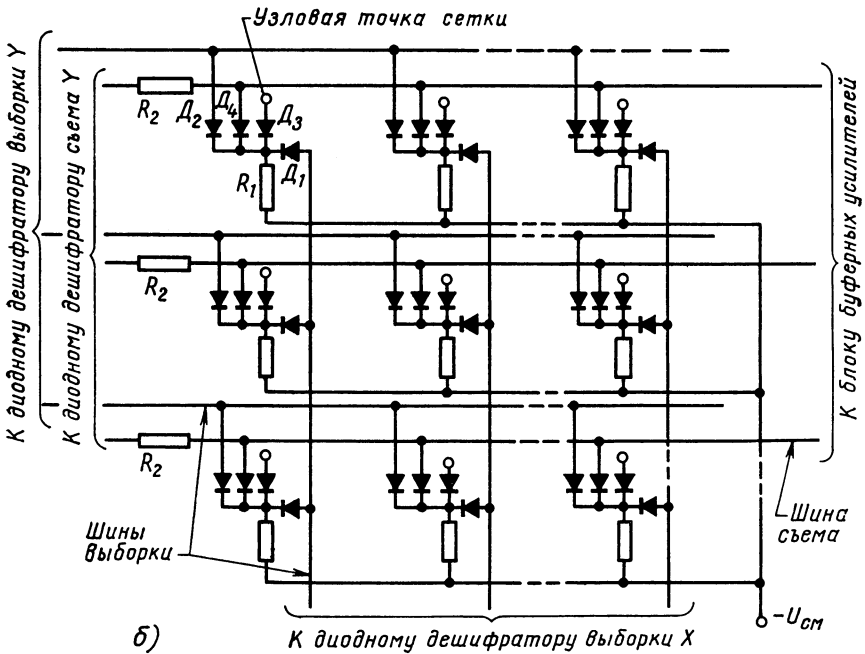
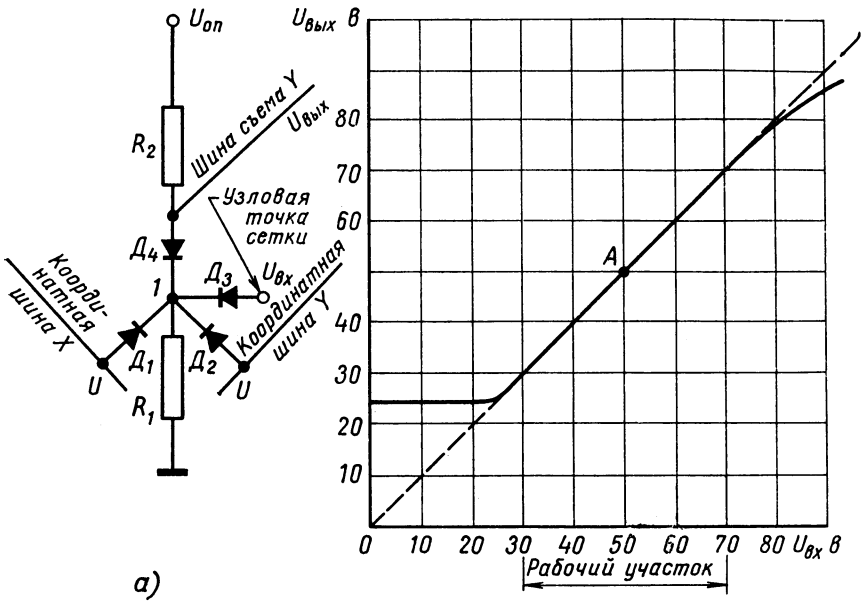


Рис. 5. Принциальные схемы:
 а — диодной ячейки; б — диодной матрицы выборки и съема информации

Зависимость выходного напряжения такой ячейки от напряжения на ее входе при $U_{он} = 120$ в приведена на рис. 5, а. Для принятой схемы питания необходимо приведение потенциала, соответствующего середине линейного участка зависимости $U_{вых} = f(U_{вх})$ (точка А на рис. 5, а), к нулевому, для чего сопротивление R_1 подключается к источнику напряжения смещения $U_{см} = -50$ в.

Исследования показывают, что максимальная величина погрешности в распределении потенциала моделируемого поля, вызываемая подключением диодной ячейки с указанными выше параметрами к узлам цепочки из 80 сопротивлений (каждое сопротивление R -сетки равно $1 \text{ ком} \pm 0,1\%$), при напряжении питания цепочки 40 в не превышает 0,65%.

3. Аналоговые комбинированные вычислительные машины

А. Аналоговая вычислительная машина с электромеханическим устройством съема информации с сетки

В случае использования в качестве счетно-решающей части структурной электро модели постоянного тока необходимо осуществить автоматический съем и интерполирование потенциала

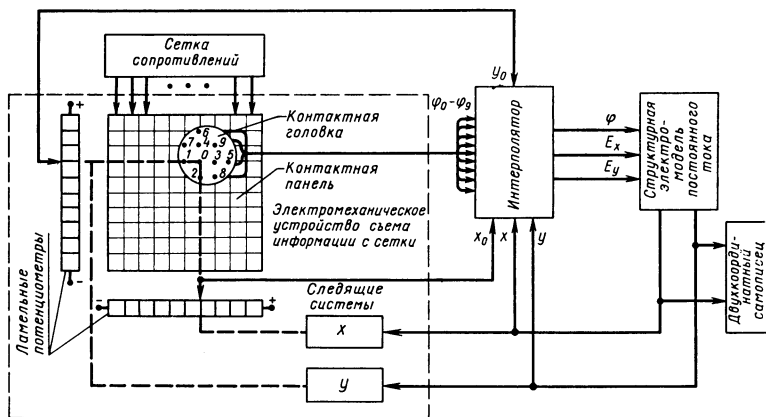


Рис. 6. Блок-схема аналоговой вычислительной машины с электромеханическим устройством съема информации с сетки

и составляющих градиента потенциала поля, моделируемого на электрической сетке.

На рис. 6 приведена блок-схема вычислительной машины указанного типа. В составе схемы входят сетка сопротивлений для моделирования электрического поля; структурная электро модель

постоянного тока для решения уравнений движения заряженной частицы; электромеханическое устройство съема информации с сетки; интерполятор; двухкоординатный самописец для вычерчивания траекторий заряженных частиц.

Можно показать, что для определения значений потенциала $\varphi(x, y)$ и составляющих градиента потенциала $E_x(x, y)$ и $E_y(x, y)$ в произвольных точках моделируемой области на основе линейного интерполирования функции двух независимых переменных справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \varphi_0 + \frac{x-x_0}{h}(\varphi_3 - \varphi_0) + \frac{y-y_0}{h}(\varphi_4 - \varphi_0); \\ E_x(x, y) &= \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2h} + \frac{x-x_0}{2h^2}(\varphi_5 - \varphi_0 - \varphi_3 + \varphi_1) + \\ &\quad + \frac{y-y_0}{2h^2}(\varphi_9 - \varphi_7 - \varphi_3 + \varphi_1); \\ E_y(x, y) &= \frac{\varphi_4 - \varphi_2}{2h} + \frac{x-x_0}{2h^2}(\varphi_9 - \varphi_8 - \varphi_4 + \varphi_2) + \\ &\quad + \frac{y-y_0}{2h^2}(\varphi_6 - \varphi_0 - \varphi_4 + \varphi_2),\end{aligned}\tag{10}$$

где x, y — текущие значения координат точки, в которой определяются значения φ, E_x и E_y ;
 $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_9$ — значения потенциалов узловых точек сетки;
 x_0, y_0 — значения координат, неизменные в пределах шага сетки;
 h — шаг сетки.

Для вычисления значений φ, E_x и E_y по формулам (10) используется интерполятор, на вход которого подаются напряжения, пропорциональные $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_9; x, y$ и x_0, y_0 .

Потенциалы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_9$ снимаются контактной головкой с 10 пружинящими контактами, скользящими по поверхности контактной панели. Последняя состоит из изолированных друг от друга металлических квадратных пластин, соединенных с узлами сетки. Напряжения, пропорциональные координатам x_0, y_0 , поступают в интерполятор с движков ламельных потенциометров.

Непрерывные значения потенциала φ и составляющих градиента потенциала E_x, E_y с выхода интерполятора подаются на входы структурной электро модели для решения уравнения движения. Результатом решения являются напряжения, пропорциональные текущим координатам x и y движущейся частицы. Следящие системы перемещают контактную головку и механически связанные с ней движки ламельных потенциометров в положе-

¹ Блейвас И. М., «Устройство для построения траекторий заряженных частиц». Авторское свидетельство № 141519.

ние, соответствующее вычисленным координатам x и y . Одновременно происходит вычерчивание траектории на диаграмме двухкоординатного самописца.

Результаты, полученные при решении контрольной задачи, показали, что относительная погрешность вычислительного устройства не превышает 2%.

Б. Аналоговая вычислительная машина с электронным устройством съема информации с сетки

Блок-схема вычислительной машины приведена на рис. 7. Электронное устройство съема информации рассчитано на обслуживание 2048 узловых точек и позволяет работать с интерполятором, осуществляющим линейную интерпретацию в соответствии с формулами (10). Применение электронного устройства съема информации обеспечивает высокое быстродействие машины и возможность одновременного наблюдения на экране осциллографа траекторий нескольких частиц. Для обеспечения съема потенциалов одновременно в 10 узловых точках сетки используется диодная матрица выборки и съема, состоящая из диодных ячеек, описанных в п. 1.

Можно показать, что необходимое число диодных ячеек в матрице значительно сокращается, если перейти к новой системе координат a, b , повернутой относительно исходной x, y на угол 45° . Пользуясь рис. 8, нетрудно установить формулы перехода от системы координат x, y к системе координат a, b :

$$\begin{aligned} a &= y + x - 1; \\ b &= y - x + A, \end{aligned} \tag{11}$$

где x, y — безразмерные координаты узловых точек в системе x, y ;

A — максимальное число узлов сетки вдоль оси x ;

a, b — координаты узловых точек в системе a, b или номера соответствующих шин выборки и съема.

Поскольку число выбираемых шин (девять) меньше числа выбираемых узловых точек (десять), то для снятия потенциалов требуется введение в матрицу выборки и съема дополнительной системы шин съема a' .

В соответствии с координатой опорной точки x_0, y_0 на диодной матрице выбираются 10 точек (0—9), образующих «электронный зонд» (рис. 8). Электронные ключевые схемы a, a' и b (рис. 7), управляемые дешифраторами съема a, b и дешифратором Y_0 , коммутируют независимо от положения «электронного зонда» на входы интерполятора потенциалы, снимаемые системами шин a, a', b в неизменном порядке $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_9$. Напряжения с выхода интерполятора, пропорциональные E_x и E_y , поступают

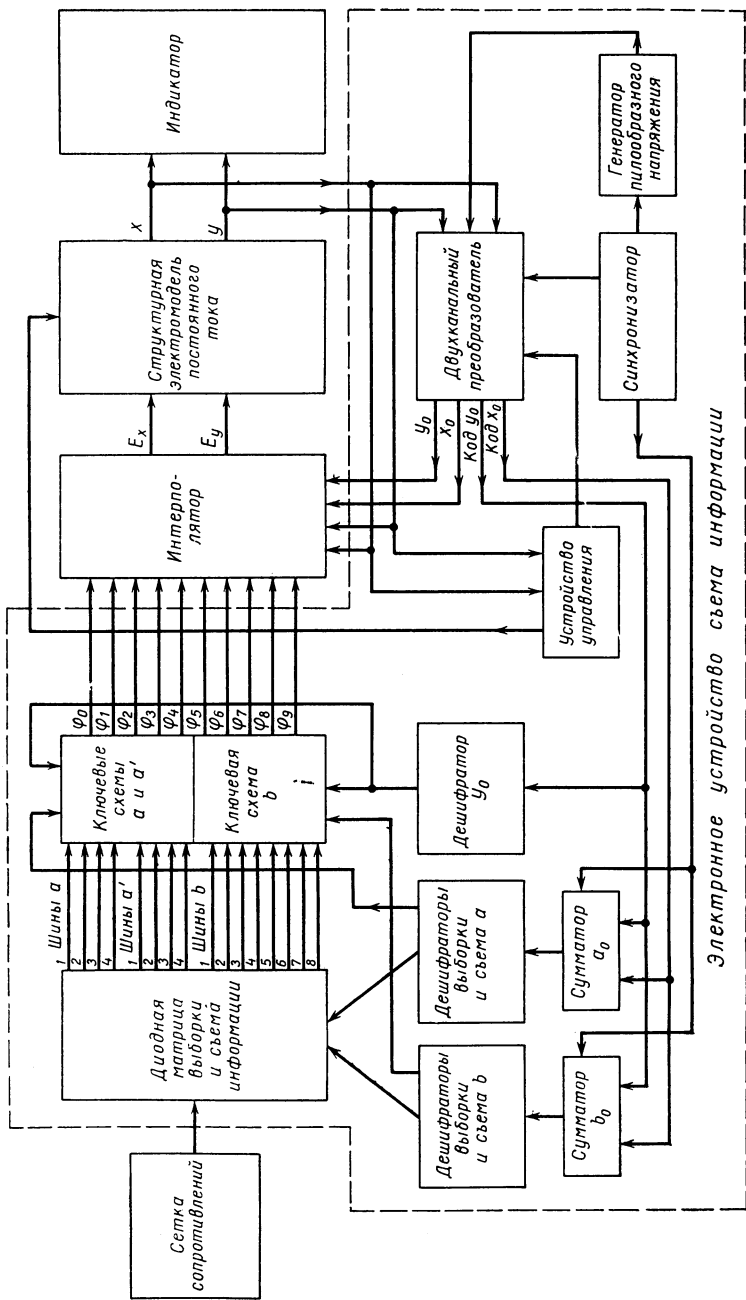


Рис. 7. Блок-схема комбинированной машины для случая применения электронной системы съема информации

в структурную электромодель. В результате решения уравнений движения на электромоделли напряжения, пропорциональные текущим координатам x и y движущейся частицы, поступают на индикатор (осциллограф или двухкоординатный самописец) устройство управления (блок «конец траектории») и через двухканальный преобразователь на интерполятор. Каждый канал преобразователя состоит из 2 преобразователей:

- 1) «напряжение — код» (образует двоичные коды координат опорной точки x_0, y_0);
- 2) «временной интервал — напряжение» (выдает в интерполятор напряжение, изменяющееся дискретно в соответствии с

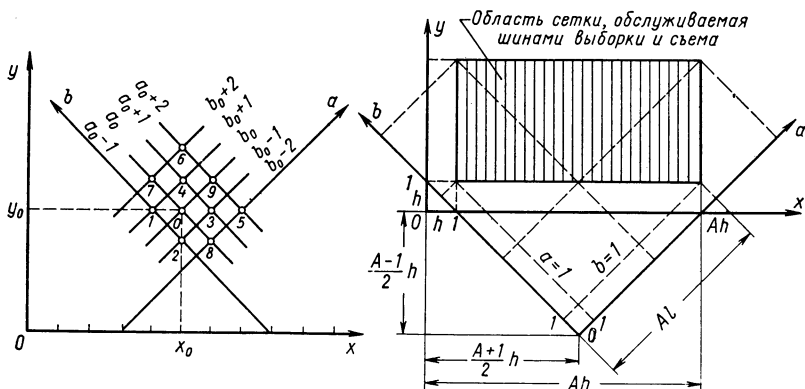


Рис. 8. К выводу соотношений (11):

h, e — шаги в системах координат x, y и a, b соответственно; A — максимальное число узлов сетки вдоль оси x

дискретно меняющимися значениями координат опорной точки x_0, y_0).

Код координаты y_0 поступает в регистр дешифратора Y_0 , управляющего ключевыми схемами a, a' и b . Кроме того, код y_0 совместно с кодом x_0 подается в сумматоры a_0 и b_0 . Координаты a_0 и b_0 , полученные в сумматорах, поступают в регистры управления дешифраторами выборки и съема, которые обеспечивают в дешифраторах возбуждение шин $a_{0-1}, a_0, a_{0+1}, a_{0+2}$ и $b_{0-2}, b_{0-1}, b_0, b_{0+1}, b_{0+2}$. Так как последние связаны с координатными шинами диодной матрицы выборки и съема, то происходит выбор узловых точек сетки согласно рис. 8.

Команда окончания вычерчивания траектории, автоматическая установка новых начальных условий и периодизация решения обеспечиваются устройством управления. Синхронизация всех блоков устройства съема производится импульсами, формируемыми блоком синхронизации. Ориентировочное время вычерчивания одной траектории меньше 1 сек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блейвас И. М. Автоматические устройства для вычисления и построения траекторий заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Аналоговые методы и средства решения краевых задач. Труды Всесоюзного совещания (М., 1962 г.), Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 200.

2. Вазов В., Дж. Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

*Г. М. Герштейн, В. А. Павлючук, В. П. Пронин,
И. Н. Салий, В. А. Седин*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАВЕДЕННОГО ТОКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

В радиоэлектронике часто возникает необходимость аналогового моделирования статических и квазистатических полей, описываемых уравнением Лапласа, полей передающих линий, неоднородностей в волноводах, электронно-оптических систем, замедляющих структур и т. д. Интересные возможности в этом отношении открывает метод наведенного тока [2, 3, 4, 5]. Он основан на теореме Шокли-Рамо о наведенных токах [15, 16] и использует пропорциональность между величиной наведенного тока, возникающего при движении заряженного зонда относительно системы электродов, и распределением фиктивного поля электродов вдоль линии движения зонда. При постоянстве заряда и скорости зонда наведенный во внешней цепи ток i_n является функцией времени, пропорциональной функции распределения соответствующей компоненты градиента поля вдоль линии движения зонда. При помещении в точку $P(x, y, z)$ точечного заряда q на электродах наводится заряд q_n , пропорциональный потенциалу фиктивного поля электродов в точке P .

Используя пролетный зонд, быстро «пролетающий» по заданной траектории через исследуемую область, можно легко получить и записать распределение потенциала и градиента потенциала вдоль этой траектории. Применение вибрирующего зонда позволяет определять различные компоненты градиента потенциала.

В работах [6, 7] описаны специализированные экспериментальные установки с пролетным и вибрирующим зондами МНТ-ПЗ и МНТ-ВЗ. На рис. 1 приведены скелетные схемы этих установок. Аналоговое устройство МНТ-ПЗ позволяет в течение нескольких секунд получать и фотографировать распределение

продольной компоненты поля периодических электродных систем с погрешностью порядка 2—3%, допуская плавное изменение расстояния зонда от поверхности системы. С помощью установки с вибрирующим зондом МНТ-ВЗ можно на простых моделях определять потенциал и три компоненты градиента потенциала

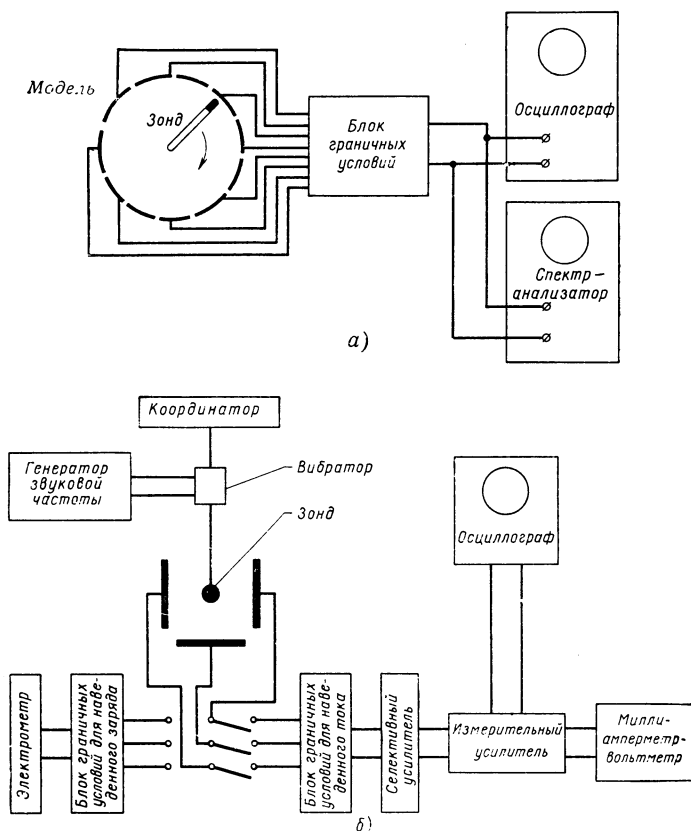


Рис. 1. Скелетные схемы установок МНТ:

а — установка с пролетным зондом МНТ-МЗ; б — установка с вибрирующим зондом МНТ-ВЗ

трехмерных полей. Погрешность определения компонент градиента потенциала 1—2%.

Приборы типа МНТ позволили реализовать такие ценные свойства метода наведенного тока, как отсутствие выводных проводов зонда и внешних источников питания, легкость моделирования объемных полей и решения внешних краевых задач. Электроды модели могут изготавливаться из любых проводящих материалов и на их поверхности отсутствуют нежелательные яв-

ления. Эти свойства метода в значительной степени компенсируют его недостатки, связанные главным образом с недостаточной универсальностью заданных граничных условий и техническими трудностями моделирования полей в неоднородных средах.

Установки МНТ оказались удобными для моделирования объемных полей в однородной среде при большой скорости движения зонда, допускающего автоматизацию процесса измерений. Такого рода задачи при граничных условиях 1-го рода часто встречаются в радиоэлектронике (поля электронных приборов, замедляющих систем, передающих линий, волноводов и т. д.). Так, например, установка МНТ-ВЗ применялась для моделирования ВЧ электромагнитного поля однородных волноводов сложной формы поперечного сечения [12, 13, 14]. В. А. Сединым были получены распределения поля и значения критической длины волны для П и Н-образных, крестообразных, параллелограммных, эллиптических и других волноводов.

В работах [8, 9, 10] описаны интересные результаты применения установок МНТ-ПЗ для моделирования поля периодических замедляющих систем при различных значениях фазового сдвига ВЧ поля на период системы. Удалось также использовать быстрое движение пролетного зонда относительно моделей периодических систем для преобразования пространственных гармоник поля во временные гармоники наведенного тока с последующим анализом последних обычными НЧ спектроанализаторами (метод гармоник наведенного тока). В последнем случае в течение 20—30 сек можно получать, визуально наблюдать и фотографировать полный амплитудный спектр пространственных гармоник поля моделей периодических замедляющих систем.

Поскольку указанные выше работы подтвердили перспективность использования метода наведенного тока для решения крайних задач радиоэлектроники, в последнее время разрабатывались специализированные установки и расширялся класс решаемых задач. Ниже кратко излагаются полученные при этом результаты.

1. Разработка специализированной установки для моделирования полей волновода

При использовании метода наведенного тока определение двумерного электромагнитного поля в регулярном волноводе заменяется моделированием соответствующего трехмерного электростатического поля [12, 13, 14]. В качестве модели используется небольшой отрезок металлической трубы с поперечным сечением, геометрически подобным поперечному сечению исследуемого волновода. У основания трубы расположены потенциальные электроды, служащие для задания поля нужного вида. Ранее различные компоненты поля такой модели определялись на обычной установке с вибрирующим зондом МНТ-ВЗ. В настоящее

время для моделирования электромагнитного поля в волноводах разработана специализированная установка МНТ-ВЗ-В, позволяющая сравнительно просто и с достаточной для инженерной практики точностью определять практическую длину волны, компоненты электрического и магнитного полей и силовые линии высокочастотного электромагнитного поля в волноводах любой формы поперечного сечения.

На рис. 2 представлена фотография, а на рис. 3 — блок-схема этой установки. Она оформлена в виде компактного и удобного в работе прибора и состоит из двух блоков. Верхний блок

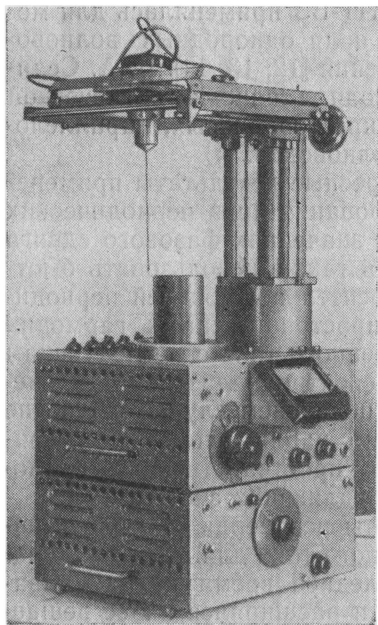


Рис. 2. Фотография установки МНТ-ВЗ-В

включает в себя основные узлы установки: зонд, вибратор, координатор-пантограф, блок граничных условий 1-го рода с калибрующей цепью и систему усиления и индикации наведенного тока, состоящую из предварительного усилителя (осуществляющего также перемену знака фиктивных потенциалов), аттенюатора, перестраиваемого селективного усилителя и оконечного усилителя с диодным вольтметром. Исследуемая модель закрепляется на столике координатора-пантографа. Нижний блок содержит блок питания и генератор звуковой частоты, питающий вибратор.

Зонды и вибраторы, применяемые в установке, аналогичны описанным в работе [6]. Координатор-пантограф сделан более удобным и компактным, чем в установках МНТ-ВЗ. Он позволяет перемещать зонд по силовым линиям

или по эквипотенциалам, а также вычерчивать их на бумаге с достаточной для практики точностью. Применение автономной системы усиления и индикации наведенного тока делает установку более практичной по сравнению с ранее осуществленной.

Задание граничных условий 1-го рода на электродах модели производится с помощью цепочек сопротивлений без специального решающего усилителя в отличие от установок МНТ-ВЗ [4]. В этом случае блок граничных условий получается более простым и надежным. Просуммированные токи создают на входном сопротивлении усилителя напряжения, которые усиливаются предварительным усилителем с коэффициентом усиления поряд-

ка 40 дБ, выполняющем также функцию блока выбора знака. На выходе усилителя сигнал может ослабляться по напряжению на 60 дБ. Применение селективного RC-усилителя, перестраиваемого в диапазоне 250—1700 гц, с коэффициентом усиления порядка 120 дБ позволяет улучшить отношение сигнал-шум примерно в 3 раза по сравнению с обычным широкополосным усилителем. Сигнал с оконечного усилителя, обеспечивающего усиление около 50—60 дБ, поступает на диодный вольтметр. Усилители охвачены отрицательной обратной связью для обеспечения устойчивости и создания свойств селекции. Общий максималь-

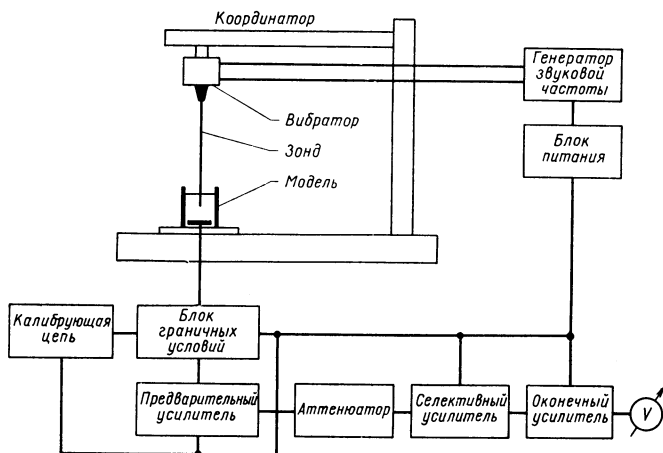


Рис. 3. Скелетная схема установки МНТ-ВЗ-В

ный коэффициент усиления системы индикации составляет около 120 дБ.

Питание вибратора производится от звукового генератора, перестраиваемого в диапазоне 200—2000 гц. Выходная мощность генератора (3 вт на нагрузке 1 ком) обеспечивает амплитуду колебаний зонда 0,1—0,5 мм.

При моделировании поля в волноводе требуемый вид колебаний устанавливается с помощью одного или нескольких электродов, на которые задается необходимое распределение фиктивных потенциалов. Амплитуда наведенного тока пропорциональна соответствующей компоненте моделируемого поля, в направлении которой колеблется зонд. Критическая длина волны определяется по кривой распределения поля вдоль оси модели волновода. Эквипотенциальные линии, снятые в поперечной плоскости модели, соответствуют силовым линиям высокочастотного магнитного поля (при моделировании E -волн) или электрического поля (для H -волн).

Измерения, проведенные на контрольных моделях прямоугольного и круглого волноводов, показали, что общая погрешность определения составляющих напряженности поля и критической длины волны на установке МНТ-ВЗ-В не превышает 2%. Благодаря применению удобного координатора-пантографа установка позволяет легко определять критическую длину волны, составляющие напряженности, а также силовые линии высокочастотного поля в волноводе. Использование сравнительно простых моделей с подвижными стенками дает возможность быстро оценивать влияние формы поперечного сечения на критическую длину волны и структуру поля в волноводе. Данная установка может также применяться для решения других внутренних краевых задач.

2. Анализ спектра пространственных гармоник поля периодических электромагнитных замедляющих систем

Ранее был предложен и обоснован метод гармоник наведенного тока [8, 9]. Он применялся для анализа спектра пространственных гармоник ряда периодических систем. Были выведены соотношения между амплитудами прямых и обратных пространственных гармоник квазистатического ВЧ-поля замедляющих систем для сдвигов фаз на период $\psi = \pi/s$, где $s = 1, 2, 3, \dots$, и гармоник статического поля, получаемых экспериментально на установках наведенного тока [9]:

$$A_{\pm n}^{вч} = A_{2ns \pm 1}^{ст}, \quad (1)$$

где $A_{\pm n}^{вч}$ — амплитуда $\pm n$ -й гармоники ВЧ-поля;

$A_{2ns \pm 1}^{ст}$ — амплитуда соответствующей $(2ns \pm 1)$ -й гармоники статического поля модели.

Эти соотношения позволяли моделировать виды колебаний исследуемой системы при целочисленных s : π — вид ($s = 1$), $\pi/2$ — вид ($s = 2$) и т. д. Поскольку иногда представляют интерес промежуточные значения, то было получено более общее соотношение. Решая для произвольной замедляющей системы уравнение Лапласа

$$\Delta U = 0 \quad (2)$$

сначала для данных граничных условий и условия периодичности в виде

$$U(y, z + L) = U(y, z) l^{i\psi} \quad (3)$$

(теорема Флоке), что соответствует случаю ВЧ-поля, а затем для тех же граничных условий и условия периодичности

$$U_{i+1} = U_i \cos l\psi, \quad (4)$$

где l — номер штыря, что соответствует случаю статического поля модели, можно вывести для любых $\psi = \frac{k\pi}{s}$ соотношение

$$A_{\pm n}^{sc} = A_{(2ns \pm k)}^{cm};$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, s; n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

При $k = 1$, т. е. для $\psi = \frac{\pi}{s}$, уравнение (5) переходит в уравнение (1). Соотношение (5) значительно расширяет возможности установок МНТ-ПЗ, так как позволяет моделировать большее число колебаний исследуемых замедляющих систем, охватывающих практически любые значения ψ .

3. Определение основных параметров периодических многопроводных линий

Для определения дисперсии, сопротивления связи и затухания штыревых замедляющих систем и некоторых систем спирального типа методом многопроводных линий необходимо помимо пространственных гармоник поля знать волновую проводимость и потери в проводниках многопроводной линии, соответствующей исследуемой замедляющей системе. В связи с тем, что аналитический расчет этих параметров в большинстве случаев затруднителен, представлялось интересным исследовать возможность использования для указанных целей метода наведенного тока. Поясним кратко идею и методику измерений.

Пусть проводники, образующие многопроводную линию, находятся в бесконечно протяженной однородной воздушной среде и поперечные размеры малы по сравнению с длиной волны, распространяющейся вдоль системы. При этих условиях возможно распространение волн типа ТЕМ, так что поле в любой точке поперечного сечения линии будет удовлетворять двумерному уравнению Лапласа. Поэтому для определения параметров многопроводных линий можно применять метод наведенного тока.

Действительно, волновую проводимость линии, поле которой удовлетворяет теореме Флоке, можно записать в виде

$$Y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\oint_L E_n dl}{\int_S E_s ds}, \quad (6)$$

где E_n — компонента напряженности электрического поля, нормальная к контуру L поперечного сечения проводника; E_s — компонента напряженности электрического поля, касательная к некоторой линии S , соединяющей данный проводник с другим, потенциал которого равен нулю.

Поскольку при моделировании полей методом наведенного то-

ка индуцируемый наведенный ток i_n пропорционален компоненте напряженности поля вдоль линии движения зонда, можно записать

$$Y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\oint_L i_H^n dl}{\int_s i_H^s ds}. \quad (7)$$

Таким образом, измеряя наведенные токи i_H^n и i_H^s , пропорциональные соответственно компонентам E_n и E_s , можно найти волновую проводимость многопроводной линии.

Параметром Δ , характеризующим потери в проводниках, может служить величина, определяемая отношением среднего значения квадрата плотности тока, протекающего по поверхности проводника, к квадрату средней величины ее, т. е.

$$\Delta = \frac{l \oint_L E_n^2 dl}{\left(\oint_L E_n dl \right)^2}, \quad (8)$$

где l — длина контура L .

Как и выше, выражение (8) удобно представить в виде

$$\Delta = \frac{l \oint_L (i_H^n)^2 dl}{\left(\oint_L i_H^n dl \right)^2}. \quad (9)$$

Итак, для нахождения волновой проводимости Y и параметра потерь Δ достаточно снять зависимости $i_H^n = f(l)$ и $i_H^s = f(s)$, что легко осуществляется на установках с вибрирующим зондом типа МНТ-ВЗ.

Для проверки соображений, изложенных выше, были проведены предварительные эксперименты по нахождению Y и Δ . На установке с вибрирующим зондом типа МНТ-ВЗ исследовались линии с прямоугольными проводниками. Модели набирались из отрезков металлических труб соответствующей формы поперечного сечения.

Процесс измерений заключается в следующем. Электродам модели с помощью блока граничных условий установки МНТ-ВЗ сообщаются фиктивные потенциалы, соответствующие определенному распределению электрического поля природы. Заряженный вибрирующий зонд подводится к какому-либо из электродов модели и устанавливается так, чтобы плоскость колебаний его совпадала с нормалью к контуру проводника в данной точке. Для улучшения отношения $\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}}$ измерения целесообразно произво-

дить около электрода с фиктивным потенциалом, равным единице. Значение наведенного тока фиксируется по индикаторному устройству. Затем зонд с помощью координатора перемещается вдоль контура проводника и через одинаковые интервалы отмечаются значения наведенного тока. Сумма последних представляет собой аналог полного тока, протекающего по проводнику. Таким же образом определяется и аналог потенциала проводника, только в этом случае зонд перемещается вдоль пути, соединяющего данный проводник с заземленным, а колебания зонда происходят в направлении его перемещения.

На рис. 4 представлены результаты измерений. Точками нанесены значения безразмерной волновой проводимости $Y' = Y \cdot Z_0$, где Z_0 — волновое сопротивление свободного пространства. Сплошные кривые соответствуют теоретическому расчету, выполненному И. Ш. Белугой [1]. Сравнение показывает, что погрешность в определении волновой проводимости не превышает 10%.

Так как при подобных измерениях определяются параметры поля бегущей ТЕМ-волны, то предлагаемая методика применима и к изучению других типов передающих линий, в которых возможно распространение волн типа ТЕМ, например, коаксиальных волноводов, полосковых систем и др. В этом направлении также проводились эксперименты, причем погрешность в определении волнового сопротивления сопротивления была 2—3%, а затухания 6—8% [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Белуга И. Ш. К расчету полей поперечных электромагнитных волн в штыревых заземляющих системах. «Известия вузов. Радиофизика», т. 2, № 1, 1959, стр. 84.
2. Герштейн Г. М. Моделирование электрического поля с помощью измерения наведенного тока. «Изв. вузов. Радиофизика», т. 2, № 4, 1959, стр. 602.
3. Герштейн Г. М. Некоторые вопросы взаимодействия заряженных частиц с электрическим полем. Изд. Саратовского Государственного университета, 1960, стр. 64—69.
4. Герштейн Г. М. Моделирование статических полей методом наведенного тока. В книге Доклады 4-й Межвузовской конференции по применению физич. и матем. моделирования. Сборник 1. Изд. МЭИ, 1962, стр. 213.

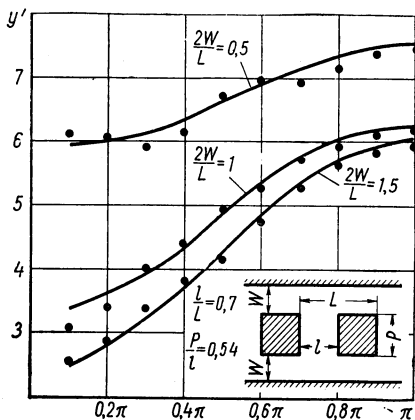


Рис. 4. Зависимость безразмерной волновой проводимости Y' от сдвига фаз на период 2ψ многопроводной линии

5. Герштейн Г. М. Метод наведенного тока. В сб. «Вопросы электрического моделирования полей», вып. 1, Изд. Саратовского Государственного университета, 1964, стр. 7—14.
6. Герштейн Г. М., Седин В. А., Пронин В. П., Федонин Г. К., Хохлов А. В. Установка МНТ-ВЗ для моделирования трехмерных полей методом наведенного тока. В сб. «Вопросы электрического моделирования полей», вып. 1, Изд. Саратовского Государственного университета, 1964, стр. 56—71.
7. Герштейн Г. М., Павлючук В. А., Пронин В. П. Аналоговая установка для автоматического получения спектра пространственных гармоник и распределений поля периодических систем. Доклад на 1-й Всесоюзной конференции по аналоговой технике. Апрель. Изд. МЭИ, 1963, стр. 86—94.
8. Герштейн Г. М., Хохлов А. В. К вопросу об анализе спектра пространственных гармоник квазистатического электрического поля. «Радиотехника и электроника», т. 4, № 12, 1959, стр. 2040.
9. Герштейн Г. М., Лалов В. П., Павлючук В. А. Моделирование спектра пространственных гармоник высокочастотного поля периодических структур. «Радиотехника и электроника», т. 7, № 5, 1962, стр. 816.
10. Герштейн Г. М., Павлючук В. А. Анализ спектра пространственных гармоник поля периодических систем на моделях наведенного тока. Доклады 4-й Межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования. Сб. 1. Изд. МЭИ, 1952, стр. 91—97.
11. Салий И. Н. Применение метода наведенного тока для исследования полосковых линий. Доклад на XXI Всесоюзной научной сессии НТОРиЭ им. А. С. Попова. Секция волноводных устройств. М., «Радио», 1965, стр. 24—31.
12. Седин В. А. Моделирование полей Е-типа в волноводах произвольного поперечного сечения методом наведенного тока. В кн. «Доклады 4-й Межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования». Сб. 1, Изд-во МЭИ, Москва, 1962, стр. 237.
13. Седин В. А., Васильев В. Т. О моделировании полей Е-типа и волноводах методом наведенного тока. «Радиотехника и электроника», т. 8, № 10, 1963, стр. 17—43.
14. Седин В. А. Моделирование электромагнитного поля в волноводах сложной формы методом наведенного тока. В сб. «Вопросы электрического моделирования полей», вып. 1, Изд. Саратовского Государственного университета, 1964, стр. 18—24.
15. S. Ramo. On currents induced by electron motion. Proc. IRE, 27, 1939, p. 584.
16. W. Shockley. Currents to conductors induced by a moving point charge Journ. appl. Phys., 9, 1938, p. 635.

Л. З. Пивень

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ В МАГНИТОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При решении технических задач часто требуется получить суммарные характеристики поля, такие, как величина расходуемой энергии, направление и величина пондеромоторной силы или момента и т. д., определение которых возможно после решения

краевой задачи. В работе рассматривается способ определения пондеромоторных сил, действующих на ферромагнитное тело в осесимметричном поле, образуемом постоянным электромагнитом.

Распределение потенциала магнитного поля подчиняется уравнению Лапласа. Для осесимметричной задачи уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Для упрощения задачи сделаем допущения, обычно применяемые в электромеханике при решении плоских задач:

1) магнитная проницаемость материала сердечника и ферромагнитного тела равна бесконечности;

2) распределение потенциала в окне электромагнита принимается линейным;

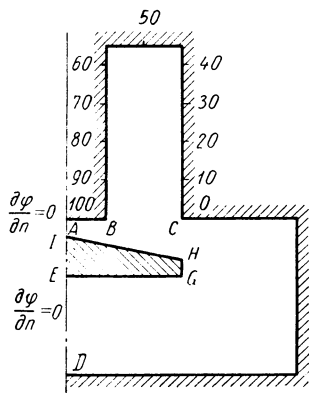


Рис. 1. Схема краевых условий осесимметричной задачи

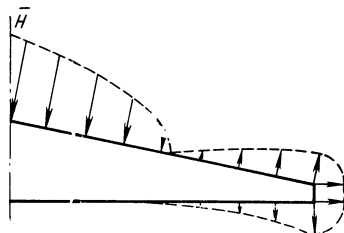


Рис. 2. Магнитный подвес (половина меридианного сечения)

3) окружающее пространство ограничено двумя наружными радиусами электромагнита.

Краевые условия осесимметричной задачи принимают следующий вид (рис. 1).

ABC — контур электромагнита. Обмотка, расположенная в окне, заменяется потенциалом, распределенным на BC по линейному закону (от 100% до 0%). $EGHI$ — граница ферромагнитного тела. На рис. 2 изображена одна половина меридианного сечения магнитного подвеса. Очевидно, что пондеромоторная сила, действующая на ферромагнитное тело, направлена по оси подвеса к электромагниту.

Если рассмотреть всю плоскость меридианного сечения, то задача решается с условием Дирихле. Поскольку картина поля симметрична относительно оси подвеса, достаточно рассмотреть полуплоскость, при этом необходимо ввести граничные условия по оси подвеса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Имеем смешанную краевую задачу.

Поскольку при принятых допущениях силовые линии будут входить и выходить перпендикулярно к границам области, то

$$\bar{H}_n = H = \text{grad } \varphi.$$

Пондеромоторная сила, действующая на элемент поверхности ферромагнитного тела, выражается следующим образом [2]:

$$F = \frac{\mu_0}{8\pi} H^2,$$

где μ_0 — магнитная проницаемость воздуха.

Направление силы совпадает с нормалью к поверхности тела.

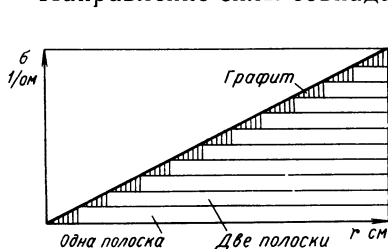


Рис. 3. Получение электропроводного σ материала с проводимостью, меняющейся по линейному закону в зависимости от радиуса r

Моделирование краевой задачи на сеточном интеграторе дает возможность получить градиент потенциала лишь в том случае, когда ферромагнитное тело имеет поверхность, параллельные линиям сетки. Так как в большинстве случаев ферромагнитные тела не имеют такой формы, то приходится либо изменять шаг сетки на границе, либо проделывать большее число дополнительных расчетов по определению $\text{grad } \varphi$.

В случае ферромагнитного тела произвольной формы наиболее рациональным является использование интегратора ЭГДА. Направление измерения $\text{grad } \varphi$ в этом случае ничем не ограничивается (рис. 3).

Уравнение (1) можно представить в следующем виде [1]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0.$$

Очевидно, что для моделирования осесимметричного поля необходимо использовать электропроводный материал с проводимостью, нарастающей по линейному закону в сторону увеличения радиуса. Такой материал можно изготовить склеиванием электропроводной бумаги в виде «клина» [1].

Дискретность изменения проводимости можно устранить сажей или карандашом.

Моделирование магнитного подвеса имеет большие преимущества перед другими способами интегрирования. В подвесе имеется поверхность ферромагнитного тела, не связанная с краевыми условиями и приобретающая определенный потенциал, зависящий от положения ферромагнитного тела относительно электромагнита. Это значительно усложняет решение задачи на

ЭЦВМ. При моделировании поля подвеса никаких особых трудностей не возникает, достаточно лишь на замкнутую границу, представляющую ферромагнитное тело, не подавать никакого потенциала. Граница сама приобретает необходимый потенциал в зависимости от положения ферромагнитного тела относительно электромагнита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И. Интеграторы ЭГДА. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге. Киев, Изд. АН УССР, 1961, стр. 84.

22. Smith William R. Static and Dynamic Electricity, New York, 1939, p. 183.

И. Л. Григоришин

О МОДЕЛИРОВАНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАРЯДОМ НА СЕТКЕ ОМИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Расчет электрических полей сводится к решению уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

при наличии в межэлектродном пространстве свободных зарядов, распределенных с плотностью ρ . Уравнение справедливо также для электровакуумных приборов с накалимым катодом.

Для потенциалов узлов сетки, составленной из омических сопротивлений (рис. 1), справедливо конечно-разностное уравнение [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{h_2 + h_4}{2h_1} (\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_3} (\varphi_3 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_2} (\varphi_2 - \varphi_0) + \\ + \frac{h_1 + h_3}{2h_4} (\varphi_4 - \varphi_0) = - (h_1 - h_3) (h_2 + h_4) \rho + \epsilon, \end{aligned} \quad (2)$$

где $h_{1,2,3,4}$ — «шаги» сетки (рис. 1, а);

ϵ — погрешность от замены дифференциального уравнения конечно-разностным; можно считать ее пренебрежимо малой.

Обычно при решении уравнения (2) на сетке омических сопротивлений во все узловые точки, находящиеся в области элек-

тронного потока, задают токи, пропорциональные правой части уравнения Пуассона:

$$i(x, y) = - \frac{(h_1 + h_3)(h_2 + h_4)}{4K_0 \epsilon_0} \rho, \quad (3)$$

где K_0 — удельное сопротивление сетки.

Выражая плотность пространственного заряда ρ через плотность электронного тока j в данной точке межэлектродного пространства и скорость движения электронов, получим выражение для токов, моделирующих пространственный заряд на сетке со-

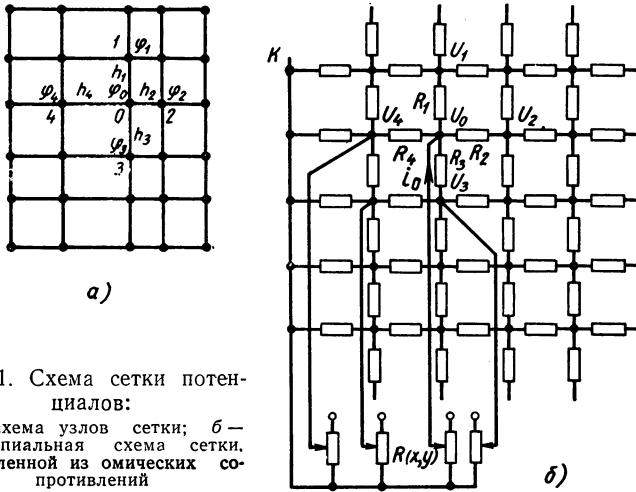


Рис. 1. Схема сетки потенциалов:

a — схема узлов сетки; *б* — принципиальная схема сетки, составленной из омических сопротивлений

противлений, справедливое в случае нулевых начальных скоростей электронов:

$$i(x, y) = - \frac{4,75 \cdot 10^4 (h_1 + h_3)(h_2 + h_4) j}{K_0 \sqrt{\varphi}}. \quad (4)$$

В общем случае величина плотности тока j и распределение потенциала φ неизвестны. Поэтому моделирование пространственного заряда осуществляется методом последовательных приближений [3]. В качестве нулевого приближения может быть использовано распределение потенциала на сетке сопротивлений при отсутствии пространственного заряда. Так как обычно электронные лампы работают в режиме ограничения тока пространственным зарядом, то величина плотности тока, отбираемого с катода, в этом случае может быть выражена по известному закону «степени трех вторых»:

$$j_k = \frac{2,33 \cdot 10^{-6} \varphi_a^{3/2}}{d^2}, \quad (5)$$

где в качестве анода эквивалентного диода выбирается ближайшая к катоду вычисляемая эквипотенциаль.

Если плотность тока с поверхности катода отбирается неравномерно, то всю активную поверхность катода разбивают на трубки тока, ограниченные электронными траекториями, так чтобы в каждой из них плотность тока с катода можно было принять постоянной. Выражения (4) и (5) справедливы для каждой отдельной трубки тока. В междуэлектродном пространстве трубки тока могут изменять свою ширину вследствие фокусирующего или дефокусирующего действия электрического поля. Поэтому плотность тока в трубке в любой точке междуэлектродного пространства может быть выражена через плотность тока у катода

$$j = j_k \frac{l_k}{l}, \quad (6)$$

где l_k, l — ширина токовой трубки соответственно у катода и в некоторой точке x, y .

Так как при моделировании электронного пространственного заряда ток, моделирующий плотность заряда, должен вытекать из данного узла сетки, то в качестве источника для задания тока в данную точку может быть использована разность потенциалов между данной узловой точкой и катодом K , а необходимая величина тока — с помощью подбираемого сопротивления стока $R(x, y)$ (рис. 1, б). При этом для задания тока $i(x, y)$ в данную узловую точку с потенциалом ϕ необходимо установить величину сопротивления стока в соответствии с выражением

$$R(x, y) = \frac{K_0 \phi^{3/2} l}{4,75 \cdot 10^4 (h_1 + h_3) (h_2 + h_4) j_k l_k}. \quad (7)$$

Применение сопротивлений стоков для задания пространственного заряда значительно упрощает модель, повышает точность получаемых решений и сокращает количество необходимых последовательных приближений.

Поясним последнее замечание. При определении величины плотности тока с катода в первом приближении по формуле (5) получается завышенный результат. После задания токов в соответствии с выражением (4) получается заниженное значение потенциала в узловых точках по сравнению с его истинным значением, причем зачастую после задания пространственного заряда в первом приближении оказывается отрицательный потенциал вблизи катода, что при наших предположениях нулевой начальной скорости электронов лишено смысла. При задании тока через сопротивления стоков уменьшение потенциала в узлах сетки вызывает уменьшение тока, моделирующего пространственный заряд, что сужает область скачков потенциала в процессе последовательных приближений и, следовательно, ускоряет процесс

сходимости. Отрицательный потенциал перед катодом в этом случае вообще не возникает.

Процесс сходимости приближений при задании пространственного заряда через сопротивления стоков с использованием формулы (7) показан на рис. 2, где приведены результаты моделирования плоскопараллельного диода.

Четвертое приближение дает удовлетворительное совпадение с теоретическим значением потенциала.

Отметим, что для плоского диода сопротивления стоков не зависят от потенциала анода и могут быть точно определены. Выражение для плотности тока диода можно записать в виде

$$j = j_k = \frac{2,33 \cdot 10^6 \Phi_x^{3/2}}{x^2} \quad (8)$$

Подставляя выражение (8) в формулу (7), получаем искомое выражение

$$R(x) = \frac{k_0 x^2}{44,27 \cdot 10^{-2} h^2} \quad (9)$$

Функциональное устройство для расчета пространственного заряда.

Точность решений на сетке тем выше, чем большее количество узловых точек содержит модель.

Однако при решении уравнения поля с пространственным зарядом на слишком «густой» сетке трудоемкость может быть слишком велика вследствие большого количества операций по вычислению и заданию токов, моделирующих пространственный заряд.

Для уменьшения трудоемкости вычисления и задания сопротивлений стоков разработано специальное вычислительное устройство, представляющее собой мост постоянного тока (рис. 3), одно из плеч которого является нелинейным сопротивлением, изменяющимся в зависимости от входного напряжения по закону

$$R_n = BU_{6x}^{3/2}, \quad B = \text{const.} \quad (10)$$

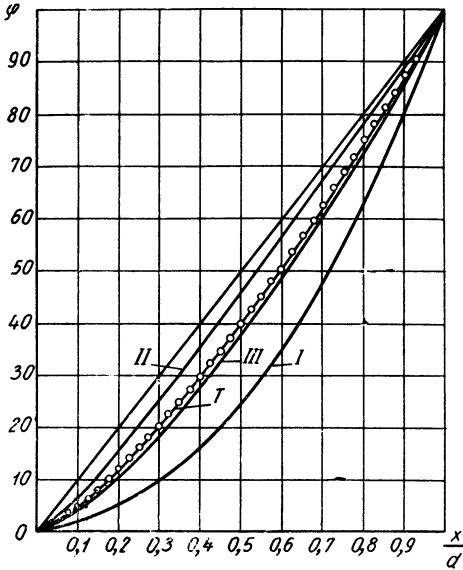


Рис. 2. Распределение потенциала в плоскопараллельном диоде:

кривые I, II, III относятся соответственно к I, II, III приближениям на модели; кривая T рассчитана аналитически, точки на кривой соответствуют данным, полученным на модели в IV приближении

В качестве нелинейного сопротивления использован диодный функциональный преобразователь [4], составленный из диодов с индивидуальными делителями напряжений (рис. 4, а). Параллельно включенные диоды с различными крутизнами токовых характеристик и потенциалами отсечки позволяют воспроизвести ломаной линией токовую характеристику диодного преобразователя с необходимой функциональной зависимостью (рис. 4, б).

Для изменения внутреннего сопротивления диодного преобразователя в соответствии с формулами (10) необходимо, чтобы

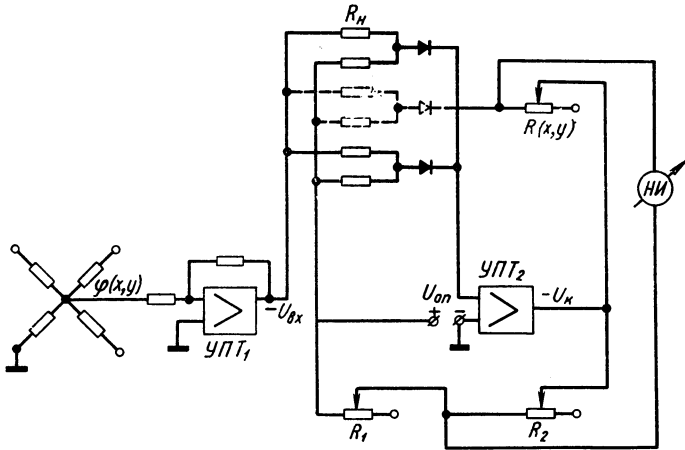


Рис. 3. Функциональное устройство для вычисления сопротивлений стоков

ток через преобразователь изменялся в зависимости от входного напряжения по закону

$$i_n = \frac{U_{on}}{BU_{ox}^{3/2}}, \quad (11)$$

где U_{on} — постоянное опорное напряжение.

При равновесии моста (рис. 3) можно записать

$$R(x, y) = \frac{BU_{ox}^{3/2} R_2}{R_1}. \quad (12)$$

Из сравнения формул (12) и (7) следует, что если

$$\begin{aligned} R_2 &= l; \\ R_1 &= \frac{i_K l_K (h_1 + h_3) (h_2 + h_4)}{9,32 \cdot 10^{-6}}; \\ B &= \frac{K_0}{44,27 \cdot 10^{-2}}, \end{aligned} \quad (13)$$

то на плече $R(x, y)$ моста устанавливается искомое сопротивление, необходимое для задания тока в данный узел сетки с потенциалом $\varphi = (U_{ex})$. Для реализации выходной токовой характеристики диодного функционального преобразователя в соответствии с формулой (11) необходимо подавать на его вход отрицательный потенциал. Это достигается с помощью усилителя $УПТ_1$, стоящего на входе устройства (рис. 3). Очевидно, что ток через диодный преобразователь и, следовательно, его внутреннее сопротивление соответствует рассчитанному лишь при условии, что на нем падает напряжение, равное опорному U_{on} . Однако при наличии в устройстве сопротивления $R(x, y)$, включенного последовательно с диодным преобразователем, падение напряжения на последнем меньше опорного, так как U_{on} одновременно является источником питания моста. Чтобы под-

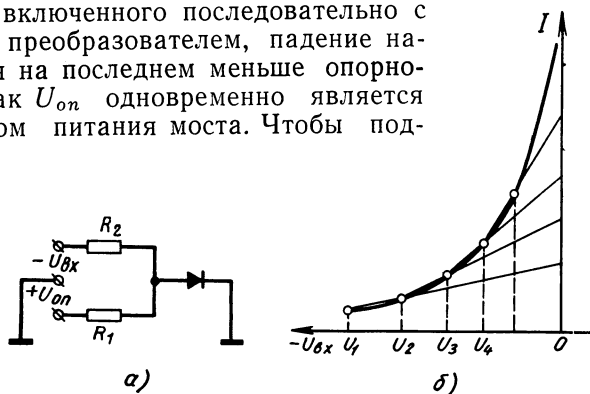


Рис. 4. Индивидуальный делитель напряжений:
 а — принципиальная схема; б — аппроксимация заданной кривой с помощью параллельно включенных диодных элементов

держивать постоянным падение напряжения на диодном преобразователе, последовательно с источником опорного напряжения включен усилитель постоянного тока $УПТ_2$ (рис. 3). Если между нулем источника опорного напряжения и выходом диодного преобразователя (т. е. на входе усилителя $УПТ_2$) существует разность потенциалов, то на его выходе появляется напряжение U_n , компенсирующее падение части опорного напряжения на сопротивлении $R(x, y)$.

Таким образом, подавая на вход усилителя $УПТ_1$ потенциал, равный потенциалу данной узловой точки, и устанавливая R_1, R_2 в соответствии с равенствами (13), получаем при равновесии моста искомую величину сопротивления $R(x, y)$, необходимую для задания пространственного заряда, которое затем подключается в данную узловую точку сетки, как показано на рис. 1, б.

Применение устройства для определения $R(x, y)$ исключает большое количество вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волынский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960, стр. 215—251.
2. Гутенмахер Л. И. Электрические модели. М.—Л., Изд. АН СССР, 1949, стр. 258.
3. Лукошков В. С., Шерель Л. А., Шубин Л. В. Задачи о самосогласованном электрическом поле в электронных приборах и практика их решения с помощью электролитической ванны с токовводящими элементами. В сб. «Аналоговые методы и средства решения краевых задач», Труды Всесоюзного совещания, октябрь, 1962 г. Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 191.
4. Таланцев А. А. Автоматика и телемеханика. 1956, № 2, стр. 129—139.

V V V

А. И. Медовиков

**АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ЭЛЕКТРОИНТЕГРАТОР
ДЛЯ РЕШЕНИЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
И ОПЫТ ЕГО ЭКСПЛУАТАЦИИ**

Бигармоническое уравнение можно аппроксимировать различными конечно-разностными операторами. Одни из этих операторов приводят к необходимости проведения уравновешивания модели по внутренним узлам области [9], другие — к необходимости проведения процесса подбора граничных условий на контуре [7].

При увеличении числа шагов сетки растет количество точек, в которых необходимо производить уравновешивание или подбор: при первом методе пропорционально числу внутренних узловых точек; при втором пропорционально числу контурных точек. Поэтому увеличение числа шагов сетки приводит к значительному увеличению трудоемкости решения при проведении уравновешивания во внутренних узловых точках.

Конечно-разностный оператор, требующий проведения процесса уравновешивания на контуре области, используется в электроинтеграторе ЭМБУ-6, установленном в научно-исследовательском секторе Гидропроекта [7]. Процесс уравновешивания производится на этом электроинтеграторе вручную, и одна задача решается высококвалифицированным оператором несколько дней.

Аналогичными возможностями при решении бигармонического уравнения обладает выпускаемая серийно универсальная сеточная модель УСМ-1 [6].

Методика определения значений бигармонической функции внутри области по известным на контуре значениям функций и ее нормальной производной изложена в работе [7]. На контуре одной из сеток, замещающих данную область, задаются значения бигармонической функции в виде напряжений или значения ее нормальной производной в виде разности потенциалов. В первом

случае контурные значения суммы нормальных напряжений подбираются в процессе решения задачи из условия совпадения замеренных значений нормальных производных с заданными. Во втором случае подбор производится из условия совпадения замеренных и заданных контурных значений бигармонической функции.

При моделировании напряженного состояния изгибаемых плит также необходимо производить операции подбора. В случае жесткой заделки края прогиб контурных точек плиты равен нулю, что соответствует заданию нулевых значений потенциала на контуре одной из сеток, моделирующей неоднородное бигармоническое уравнение изгиба плиты. Потенциалы в контурных точках другой сетки, пропорциональные значением изгибающего момента на контуре, не известны по условию задачи. Эти потенциалы могут быть подобраны в процессе решения из условия равенства нулю углов поворота на контуре.

Аналогичные операции подбора проводятся и при решении других задач теории упругости. Например, если плита опирается в какой-либо точке на колонну, то величина реакции колонны подбирается из условия равенства нулю прогиба в этой точке. Необходимость в проведении подбора возникает и при решении плоских смешанных задач теории упругости [3].

В МИСИ им. В. В. Куйбышева в 1963 г. изготовлен и успешно эксплуатируется электроинтегратор для моделирования бигармонического уравнения, процесс уравнивания на котором производится многоканальной следящей системой автоматически. Принцип действия схемы изложим применительно к подбору граничных значений бигармонической функции. Нормальная производная, замеренная на сетке, сравнивается со значением, известным из условия задачи. В случае неравенства этих значений появляется сигнал рассогласования, который поступает на вход усилителя. На выходе включается реверсивный двигатель, который через редуктор перемещает движок реохорда. Потенциал с движка реохорда подается на соответствующую контурную точку сетки высокого потенциала. Таким образом, при соответствующей полярности включения усилителя отклонение измеренных значений нормальной производной от заданных вызывает смещение движка реохорда. Потенциал в контурной точке сетки будет изменяться до совпадения замеренных значений нормальной производной бигармонической функции с заданными. Аналогичным образом работает следящая система при подборе значений изгибающего момента на контуре защемленной по краям плиты, подборе величины реакции опорной колонны и т. п.

В 1960 г. в МИСИ проведены исследования условий работы двухканальной следящей системы, подбирающей значения изгибающего момента и прогиба в электрической цепи, моделирующей напряженное состояние консольной балки, лежащей на уп-

ругом основании. Однако попытка применения многоканальной следящей системы для одновременного подбора граничных условий во многих контурных точках не имела успеха. Аналогичные результаты были получены в результате исследований, изложенных в работе [1], авторы которой вынуждены были отказаться от использования многоканальной системы и перейти на последовательный подбор потенциала в контурных точках, что значительно увеличивает время решения.

Проведенные в МИСИ детальные исследования работы многоканальной следящей системы показали, что питание сеток электроинтегратора и измерительных цепей следящих систем переменным током приводит к появлению квадратурного напряжения и большим составляющим наводки в сигналах рассогласования следящей системы.

Практический подбор граничных условий многоканальной следящей системой стал возможным после перевода питания на постоянный ток. В этом случае фиксированная фаза питающего напряжения не вызывает появления квадратурной составляющей в выходном напряжении усилителей следящей системы, а вибраторы, стоящие на входах усилителей, являются надежными фильтрами наводок промышленной частоты.

Существующие модели электроинтеграторов, на которых можно решать бигармоническое уравнение, не позволяют применить многоканальную следящую систему вследствие отсутствия соответствующих источников питания и необходимых узлов.

Блок-схема изготовленного в МИСИ интегратора представлена на рис. 1. Две сетки переменных сопротивлений 1 и 2 через кабельные сборки 3 и 5 связаны между собой переменными сопротивлениями 4. На сетке 1 моделируется функция высокого потенциала, на сетке 2 — функция низкого потенциала. Если бигармоническое уравнение неоднородно, то его правая часть задается током от высоковольтного источника питания 15 через панель сопротивлений истоков 6 на панель задания истоков 7. Граничные условия на сетке 1 задаются с реохордов многоканальной следящей системы 21 через панель выходов следящих систем 10 и панель граничных условий 9. Реохорды следящих систем питаются постоянным током от источника 20. На входы усилителей системы 21 подаются сигналы рассогласования между регулируемыми величинами сетки 2 и заданными по условию задачи величинами, которые поступают от источника независимых напряжений 19. Выявление сигнала рассогласования осуществляется на панели 14.

Граничные условия сетки 2 задаются по методике, изложенной в работе [3]. По этой методике в случае плоской задачи теории упругости на участках контура, где заданы напряжения, собираются дополнительные линейные цепи. В узловые точки этой цепи поступают токи, пропорциональные заданным значениям

нормальных напряжений. Распределение потенциалов дополнительной цепи соответствует контурным значениям бигармонической функции на этом участке. Для получения упомянутых токов служит делитель 17, панель 11 и панель 12. Делитель 17 и панель 11 могут быть использованы также при задании известных по условию задачи контурных значений функции на сетке 1. Однако при малом значении сопротивлений сетки 1 возможна перегрузка и изменение распределения потенциалов делителя 11. В этом случае целесообразно снимать известные контурные значения потенциалов сетки 1 с реохордов следящих систем, подавая на входы усилителей сигналы рассогласования между заданными значениями, снимаемыми с делителя 17, и фактическими значениями, получаемыми на сетке 1. При таком методе задания контурных значений делитель 17 не будет нагружен. Потенциалы и частные производные потенциалов сеток 1 и 2 могут быть измерены на измерительных панелях 8 и 13 при помощи компенсационных измерительных устройств 16 и 18.

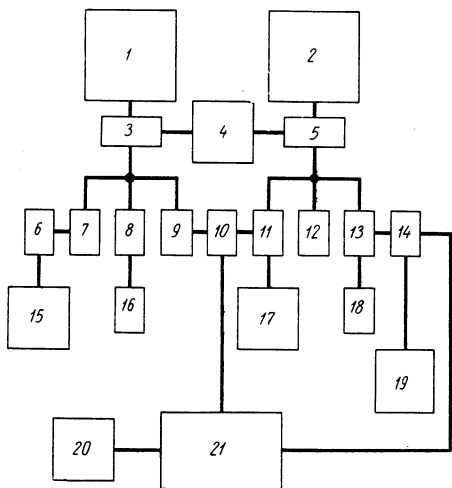


Рис. 1. Блок-схема автоматизированного электроинтегратора МИСИ

Под руководством автора в 1967 г. закончена модернизация электроинтегратора ЭМБУ-6, установленного в НИСе Гидропроекта. Блок-схема модернизированного электроинтегратора аналогична блок-схеме, приведенной на рис. 1.

Испытания показали высокую эффективность автоматизации процесса уравнивания. Следящая система устойчиво обрабатывает решение задачи. Время установления не превышает одной минуты. Точность подбора потенциалов соответствует приборному нулю усилителей.

На автоматизированных электроинтеграторах решены многие задачи по прочности. При решении этих задач использованы известные соотношения теории упругости. Методика и результаты решений некоторых задач приведены в настоящей книге. Однако математическое описание многих объектов не позволяет разработать удобную для практического применения методику электрического моделирования. В качестве примера можно привести тол-

стые плиты, расчет которых по методам Лява, Рейсснера [2, 10] и др. математически труден.

В результате развития теории Рейсснера нами получена система уравнений толстой плиты в виде [5]

$$\begin{aligned}\nabla^2 \omega_{u_{3z}} &= -\frac{M_x + M_y}{D(1 + \nu)}; \\ \nabla^2 (M_x + M_y) &= -q(1 + \nu); \\ \omega_{c\partial e} &= -\frac{h^2}{5(1 - \nu)} \nabla^2 \omega_{u_{3z}}; \\ \omega_{c\partial e} + \omega_{u_{3z}} &= \omega,\end{aligned}\tag{1}$$

где h — толщина плиты.

Полный прогиб пластинки ω представлен в виде суммы прогибов, вызываемых изгибом и сдвигом.

Первые два уравнения этой системы совпадают с обычными уравнениями изгиба тонкой плиты. Два последних уравнения позволяют найти прогиб сдвига и полный прогиб по известному прогибу изгиба. Эти два уравнения могут быть решены после решения двух первых уравнений системы. Силовые факторы, возникающие в толстой плите, выражаются через прогиб изгиба по обычным соотношениям теории тонких плит (за исключением узкой зоны вблизи краев плиты).

Граничные условия на контуре плиты при решении системы (1) отличаются от граничных условий теории тонких плит.

В случае свободного края эти условия могут быть представлены через силовые факторы:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0; \\ M_x - \frac{\sqrt{10}}{5} h \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

или через прогиб изгиба:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \omega_{u_{3z}}}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega_{u_{3z}}}{\partial x \partial y^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \omega_{u_{3z}}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_{u_{3z}}}{\partial y^2} + \frac{\sqrt{10}}{5} h (1 - \nu) \frac{\partial^3 \omega_{u_{3z}}}{\partial x \partial y^2} &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Шарнирная опора может быть осуществлена различными способами. Если плита опирается таким образом, что поворот элемента боковой поверхности относительно осей, лежащих в плоскости плиты, не ограничен, то граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}M_x - \frac{\sqrt{10}}{5} h \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \omega_{u_{3z}} + \omega_{c\partial e} &= 0\end{aligned}\tag{4}$$

или, выражая силовые факторы и прогиб сдвига через прогиб изгиба:

$$\omega_{изг} = \frac{h^2}{5(1-\nu)} \nabla^2 \omega_{изг}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_{изг}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_{изг}}{\partial y^2} + \frac{\sqrt{10}}{5} h(1-\nu) \frac{\partial^3 \omega_{изг}}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

Так как $\nabla^2 \omega_{изг}$ на шарнирном крае при уменьшении толщины плиты стремится к нулю, то правой частью первого равенства с достаточной степенью точности можно пренебречь и принять граничные условия в виде

$$\omega_{изг} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_{изг}}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{10}}{5} \times \\ \times h(1-\nu) \frac{\partial^3 \omega_{изг}}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

Если повороты элемента поверхности в направлении линии шарнира ограничены, то контурные условия имеют вид

$$\nabla^2 \omega_{изг} = 0; \quad (7) \\ \omega_{изг} = 0.$$

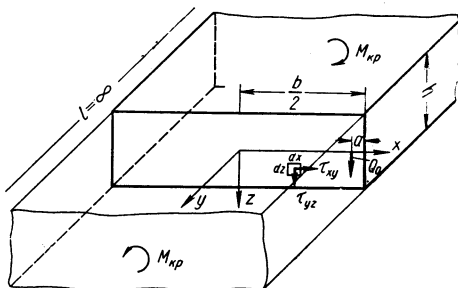


Рис. 2. Расчетная схема бесконечно длинной плиты, нагруженной крутящими моментами

Для пояснения физического смысла условий (2) рассмотрим кручение бесконечно длинной плиты (рис. 2). Напряжения, возникающие в средней части, можно определить по формулам [8]:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = 0; \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}; \quad (8) \\ \tau_{zy} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x},$$

где функция кручения

$$\varphi_0 = G\tau \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right] - \\ - 8 \frac{G\tau h^3}{\pi^3} \sum \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{h}}{k^3} \frac{\cos \frac{k\pi z}{h}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2h}} \quad (9)$$

(суммирование по нечетным k).

Крутящий момент M'_{yx} выразим через касательные напряжения

$$M'_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} z dz = \left[-\varphi_0 z + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \varphi_0 dz \right]. \quad (10)$$

Значения φ_0 на контуре поперечного сечения плиты равны нулю, следовательно,

$$M'_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \varphi_0 dz. \quad (11)$$

Подставим в уравнение (11) значение функции φ_0 и проинтегрируем:

$$M'_{yx} = G\tau \left(\frac{h^3}{6} - \frac{16h^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{k^4} \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{h}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2h}} \right). \quad (12)$$

Касательные напряжения τ_{zy} сведем к поперечной силе

$$Q'_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{zy} dz. \quad (13)$$

Выражая напряжения через функцию φ_0 и интегрируя, получим

$$Q'_y = - \frac{16G\tau h^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{k^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{h}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2h}}. \quad (14)$$

Равнодействующая поперечной силы

$$Q_0 = \int_0^{\frac{b}{2}} Q'_y dx = - G\tau \left[\frac{h^3}{6} - \frac{16h^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{k^4} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2h}} \right]. \quad (15)$$

Сравнивая выражения (15) и (12), получаем, что величина равнодействующей равна значению крутящего момента в центре плиты

$$Q_0 = - M'_{yx} \text{ (при } x = 0 \text{)}. \quad (16)$$

Расстояния точки приложения силы Q_0 от края плиты найдем из условия (рис. 2)

$$Q_0 \left(\frac{b}{2} - a \right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dz \int_0^{\frac{b}{2}} \tau_{zy} x dx.$$

Подставляя значение касательных напряжений (8), функции кручения (9) и поперечной силы (15), найдем a :

$$a = \frac{\frac{96}{\pi^5} h \sum \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2h} - \frac{48b}{\pi^4} \sum \frac{1}{k^4} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2h}}}{1 - \frac{96}{\pi^4} \sum \frac{1}{k^4} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2h}}}. \quad (17)$$

График изменения величины a в зависимости от отношения $\frac{b}{h}$ к шагу приведен на рис. 3. При увеличении ширины плиты величина a стремится к пределу

$$a = \frac{96h}{\pi^5} \sum \frac{1}{k^5} \approx 0,314h. \quad (18)$$

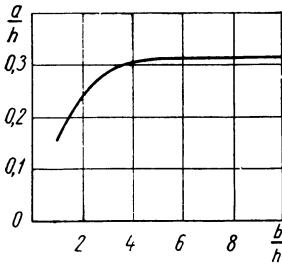


Рис. 3. График изменения величины a в зависимости от относительной толщины плиты b/h

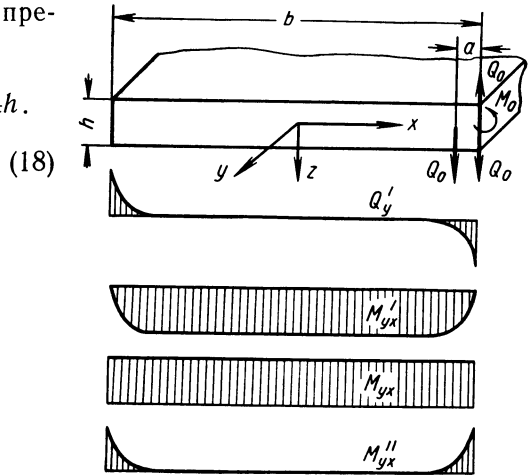


Рис. 4. Сопоставление поперечных сил и крутящих моментов, определенных по теории кручения и теории изгиба тонких плит

Сопоставим решение, полученное для кручения бесконечно длинной плиты с основными формулами теории тонких плит.

Изгибающие моменты и поперечная сила Q_x на основании условия (8) равны нулю:

$$Q_x = M_x = M_y = 0. \quad (19)$$

Подставляя выражения (12), (14) и (19) в уравнения равновесия элемента плиты, получаем тождества. Следовательно, напряженное состояние, возникающее при кручении плиты, совместимо со статическими условиями изгиба.

Рассмотрим соответствие геометрических условий. По теории кручения прогиб плиты определяется равенством [8]

$$\omega = -\tau xy.$$

Этот прогиб соответствует появлению в плите крутящего момента

$$M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \frac{G\tau h^3}{6}. \quad (20)$$

Поперечная сила $Q_y = 0$, следовательно, теория тонких плит не дает точных значений крутящего момента и поперечной силы, определяемых формулами (12) и (14), причем расхождение наблюдается только вблизи края плиты.

На рис. 4 приведены эпюры поперечных сил и крутящих моментов, определенных по теории кручения и теории изгиба тонких плит.

Эпюру крутящих моментов можно представить в виде суммы двух эпюр, одна из которых постоянна по ширине плиты и соответствует постоянному крутящему моменту, другая отображает влияние на крутящий момент свободного края плиты:

$$M'_{yx} = M_{yx} + M''_{yx}.$$

Равнодействующая момента M''_{yx} , приложенная вблизи края плиты,

$$M_0 = -G\tau \frac{16h^4}{\pi^5} \sum \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2h}. \quad (21)$$

При увеличении отношения $\frac{b}{h}$ момент M_0 стремится к пределу

$$M_0 = -\frac{G\tau h^3}{6} a = -M_{yx} a. \quad (22)$$

Сведем поперечную силу Q_0 и момент M_0 к краю плиты. Напряженное состояние представим в виде суммы равномерно распределенного крутящего момента M_{yx} и приложенных на краю сосредоточенной силы и момента (рис. 4). Приложенный на краю момент M_1 складывается из момента M_0 и момента, возникающего вследствие переноса силы Q_0 :

$$M_1 = M_0 + Q_0 a. \quad (23)$$

При возрастании отношения $\frac{b}{h}$ момент M_0 и сила Q_0 стремятся к пределам:

$$\begin{aligned} M_0 &= -M_{yx} a; \\ Q_0 &= -M_{yx}. \end{aligned} \quad (24)$$

Предельное значение момента

$$M_1 = -M_{yx} 2a = 2aM_{xy}. \quad (25)$$

С увеличением отношения $\frac{b}{h}$ значения Q_0 и M_0 быстро приближаются к предельным. При отношении $\frac{b}{h} > 3$ значение момента M_1 незначительно отличается от предельного.

Введем теорему, согласно которой влияние свободного края на напряженное состояние плиты при изменяющемся по длине свободного края крутящем моменте аналогично влиянию свободного края при чистом кручении, т. е. предположим, что в случае изменяющегося крутящего момента значения Q_0 и M_1 определяются формулами (24) и (25) (эта теорема может быть доказана на основании теории изгиба плит Рейсснера [5]). В соответствии с изменением крутящего момента M_{yx} по длине свободного края величины Q_0 и M_1 получают приращения. В статическом отношении эти приращения эквивалентны приложению по длине свободного края поперечной силы и момента

$$Q_x = \frac{\partial Q_0}{\partial y}; \quad (26)$$

$$M_x = \frac{\partial M_1}{\partial y} 2a.$$

Подставляя в эти уравнения значения силы, момента и параметра a по формулам (24), (25) и (18), получим

$$Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$M_x - 0,628h \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (27)$$

что соответствует равенствам (2).

Первое равенство (27) соответствует условию Кирхгофа, физический смысл которого был разъяснен Томсоном и Тэтом [10]. Приложим по свободному краю самоуравновешенную систему сил, представленную на рис. 5. Силы, приложенные на заштрихованных участках, создают крутящие моменты. Суммируя силы по левой грани выделенного элемента, получим поперечную силу

$$Q_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y},$$

что соответствует первому из равенств (27).

На том же рисунке представлено аналогичное преобразование для изгибающих моментов. Прикладывая по длине свободного края самоуравновешенную бимоментную группу и преобразо-

вывая силы, приложенные к левому краю выделенного элемента, получим изгибающий момент

$$M_x = - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} 2a.$$

Заменяя M_{yx} на $-M_{xy}$, получим второе из равенств (27).

Изгибающий момент $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} 2a$ складывается из двух равных частей, одна из которых уравнивает момент касательных напряжений τ_{zy} , вызывающих большие деформации сдвига вблизи края (и по этой причине не полностью учитываемых элементарной теорией изгиба), а другая составляющая компенсирует кру-

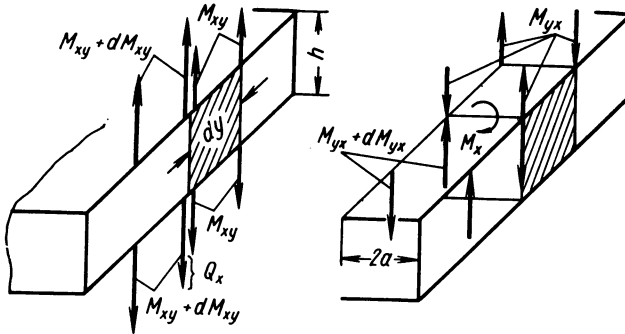


Рис. 5. Схема преобразования сил вблизи края, обосновывающая физический смысл уточненных граничных условий

тящий момент M_{yx} . Этот момент при уменьшении касательных напряжений τ_{xy} стремится к нулю по мере приближения к свободному краю, в то время как момент M_{xy} по условиям Кирхгофа на свободном крае отличен от нуля. Таким образом, при условиях (27) интегрально (в смысле принципа Сен-Венана) выполняется условие взаимности крутящих моментов.

Как известно, условия Кирхгофа приводят к появлению сосредоточенных сил в углах плиты [10]. На основании аналогичных соображений можно показать, что условия (27) помимо сосредоточенных сил приводят к появлению в углах плиты сосредоточенных моментов. В зависимости от вида сопряженного края эти моменты следует опустить или ввести в расчет (аналогично сосредоточенным силам Кирхгофа) [5].

Использование системы уравнений (1) при граничных условиях (6) покажем на примере расчета квадратной шарнирно-опертой толстой плиты, загруженной силой в центре. Первое граничное условие (6) выполняется соединением с нулем делителя контурных точек сетки прогибов.

Учитывая, что вторая производная от прогиба по длине свободного края равна нулю, представим второе условие (6) в виде

$$\nabla^2 \omega_{изг} = - \frac{\sqrt{10}}{5} h (1 - \nu) \frac{\partial^3 \omega_{изг}}{\partial x \partial y^2}.$$

Интегрируя это выражение по y , получим

$$\frac{\partial \omega_{изг}}{\partial x} = - \frac{5}{\sqrt{10} h (1 - \nu)} \times \int dy \int \nabla^2 \omega_{изг} dy + C_1 y + C_2. \quad (28)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 равны нулю вследствие равенства нулю производных прогиба изгиба в углах плиты.

Интеграл, стоящий в правой части равенства (28), обозначим через Ψ . Функция Ψ может быть получена в дополнительной цепи, представленной на рис. 6. Записывая уравнения первого закона Кирхгофа для цепи AB , получим равенство [3]

$$\frac{1}{r_3} \frac{\partial^2 p \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{R_2} \times \times (-\nabla^2 m \omega_{изг} + p \Psi), \quad (29)$$

где p — масштаб потенциала функции Ψ ;
 m — масштаб потенциала функции $\nabla^2 \omega_{изг}$.

Если

$$|m| \gg |p|; \quad - \frac{r_3}{R_2} \frac{m}{p} = \frac{5}{(1 - \nu) \sqrt{10}}, \quad (30)$$

то равенства (28) и (29) эквивалентны равенству

$$\frac{\partial \omega_{изг}}{\partial x} = - \frac{\Psi}{h}. \quad (31)$$

Значение функции прогиба изгиба во внутренних узлах об-

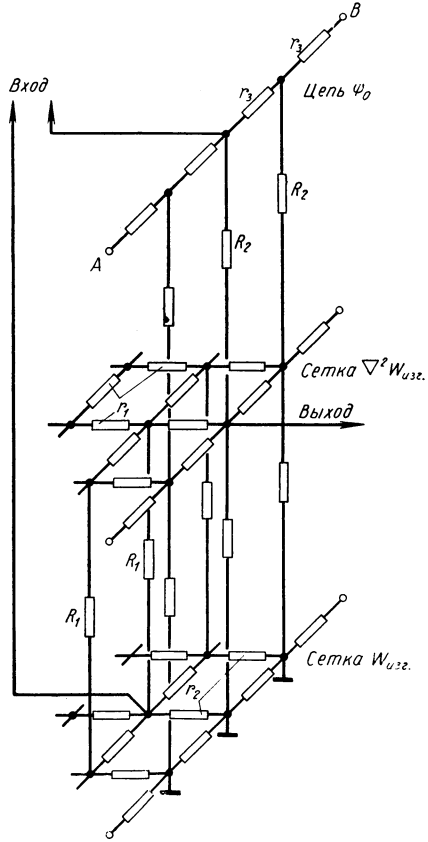


Рис. 6. Электрическая цепь, моделирующая напряженное состояние толстой плиты

ласти, отстоящих на шаг сетки от контура, можно найти по формуле

$$(\omega_{usz})_{предконт} = (\omega_{usz})_{конт} - \frac{\partial \omega_{usz}}{\partial x} \Delta x,$$

где Δx — шаг сетки.

Заменяя значение производной по формуле (31) и учитывая, что $(\omega_{usz})_{конт} = 0$, получим

$$(\omega_{usz})_{предконт} = \Psi \frac{\Delta x}{h}. \quad (32)$$

Вводя функцию $\Psi_0 = \Psi \frac{\Delta x}{h}$, получим

$$(\omega_{usz})_{предконт} = \Psi_0. \quad (33)$$

Функция Ψ_0 строится в цепи, приведенной на рис. 6, при соответствующем выборе величины сопротивлений r_3 . Принимая

$$\rho = \frac{\Delta x}{h} n,$$

где n — масштаб потенциалов функции ω_{usz} , и учитывая соотношение

$$-\frac{n}{m} = \frac{r_2}{R_1},$$

где r_2 — сопротивления сетки ω_{usz} ;

R_1 — сопротивления, соединяющие сетки $\nabla^2 \omega_{usz}$ и ω_{usz} , из формулы (30) получим

$$\frac{r_3}{R_2} = \frac{r_2}{R_1} \frac{5}{\sqrt{10}(1-\nu)} \frac{\Delta x}{h}. \quad (34)$$

Выражая Δx через отношение ширины плиты к числу шагов сетки и принимая $r_2 = 100 \text{ ом}$; $R_1 = R_2 = 100\,000 \text{ ом}$, получим зависимости сопротивлений r_3 от коэффициента Пуассона и величины отношения ширины плиты к ее высоте:

$$r_3 = \frac{500}{\sqrt{10}(1-\nu)} \frac{b}{hK} \text{ ом},$$

где K — число шагов сетки.

Контурные значения на сетке моментов подбираются следящей системой на основании условия (33). Сигнал рассогласования равен разности потенциалов между предконтурными точками сетки прогибов и соответствующими точками цепи Ψ_0 . Выходы реохордов соединяются с контурными точками сетки моментов. После задания токов нагрузки следящая система автоматически уравнивает модель.

Прогибы сдвига находим по прогибам изгиба на основании третьего уравнения системы (1).

Непосредственная реализация более точных условий (5) возможна при использовании двух каналов автоматического управления на каждый контурный узел, причем один из каналов используется для обработки отрицательного сопротивления в дополнительной граничной цепи при реализации условия

$$\omega_{изг} = - \frac{h^2}{5D(1-\nu^2)} \times (M_x + M_y).$$

На рис. 7 приведены кривые, показывающие влияние краевых условий и деформаций сдвига на прогибы центра шарнирно опертой плиты. При решении задачи методом электроанalogии ток, пропорциональный нагрузке, задавался в центральный узел сетки моментов. Каждая сетка имела размеры 14×14 шагов. Прогиб центра плиты при задании контурных условий по обычной теории изгиба оказался равным $0,0119 \frac{pb^2}{D}$, что незначительно отличается от теоретического значения $\omega_{теор} = 0,0116 \frac{pb^2}{D}$.

Полный прогиб толстой плиты выражается формулой

$$\omega = (1 + K_1 + K_2) \omega_{теор},$$

где коэффициент K_1 характеризует влияние краевых условий и K_2 — влияние деформации сдвига. С увеличением толщины плиты дополнительный прогиб, вызываемый краевыми условиями, возрастает почти линейно, в то время как закон возрастания прогиба сдвига близок к параболическому. При отношении $\frac{b}{h} > \frac{1}{8}$ коэффициент K_1 превышает K_2 . Суммарный дополнительный прогиб при $\frac{b}{h} < 4$ вдвое превышает прогиб, полученный по обычной теории изгиба. Расчетные изгибающие моменты за счет влияния краевых условий при этом увеличиваются на 30%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глинка Е., Ландау Н., Пашкис В. Автоматическое сеточное моделирующее устройство для решения бигармонического уравнения (русский перевод). М., Изд. иностр. лит. Труды американского общества инженеров-механиков «Прикладная механика», т. 30, серия Е, № 1, март 1963, стр. 130—138.

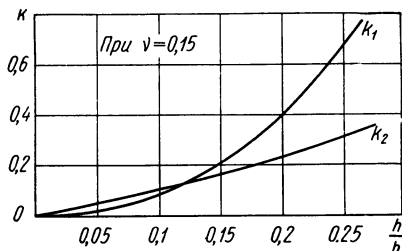


Рис. 7. Кривые, показывающие влияние краевых условий и деформаций сдвига на прогибы центра шарнирно опертой плиты

2. Л я в А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935, стр. 674
3. М е д о в и к о в А. И. Решение плоской смешанной задачи теории упругости методом электро моделирования функции напряжений. Труды первой межвузовской научно-технической конференции по электрическому моделированию, изд-во Новочеркасского политехнического института, 1960, стр. 63—70.
4. М е д о в и к о в А. И. К вопросу об учете деформаций сдвига при изгибе плит. Труды VI Всесоюзной конференции по пластинам и оболочкам. М., «Наука», 1966, стр. 627.
5. М е д о в и к о в А. И. Некоторые вопросы уточненной теории изгиба плит. Прикладная механика, т. 3; вып. 5, Киев, 1967, стр. 82—86.
6. Н и к о л а е в Н. С. Сеточные электро модели типа ЭИС-1 и УСМ-1. Труды Всесоюзного совещания «Аналоговые методы и средства решения крайевых задач. Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 27—45.
7. П р е д т е ч е н с к и й Н. Д. Решение плоской задачи теории упругости на электрических моделях. В сб. «Поляризационно-оптический метод исследования напряжений» Институт машиноведения АН СССР. М., изд. АН СССР, 1956, стр. 59—84.
8. П а п к о в и ч П. Ф. Теория упругости. М.—Л., Оборонгиз, 1939, стр. 639.
9. С т е п а н о в А. Е. Моделирование плоской задачи теории упругости на квазианалоговой сетке. Труды Всесоюзного совещания «Аналоговые методы и средства решения крайевых задач». Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 122—127.
10. Т и м о ш е н к о С. П., В о й н о в с к и й - К р и г е р С. Пластины и оболочки. М., Физматгиз, 1963, стр. 635.

А. Н. Сурприн

АНАЛОГОВОЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЕДИНИЧНОГО КРУГА НА ОДНОСВЯЗНУЮ ОБЛАСТЬ

Большой круг задач математической физики (например, гармоническая и бигармоническая проблемы) может быть с успехом решен, если известна функция, осуществляющая конформное преобразование внутренности или внешности единичного круга на заданную односвязную конечную или бесконечную область.

Если исследуемая область ограничена простым замкнутым контуром L , то указанное конформное преобразование можно построить с помощью прибора, позволяющего получать граничные значения отображающей функции в виде двух электрических сигналов, моделирующих контурные значения ее действительной и коэффициента при мнимой части.

Устройство (рис. 1) состоит из электронно-лучевой трубки 1, фотоэлемента 3, суммирующих усилителей 4, 6, 7, блоков переключения 5, 8, 9, 10, генератора 11, дающего два сдвинутых на

$\frac{\pi}{2}$ колебания $\sin \omega_k t$ (выход *a*) и $\cos \omega_k t$ (выход *b*), и гармонического фазовращателя 12, имеющего комплексный коэффициент передачи для частот гармонического спектра $n\omega_k$ ($n = 1, 2, \dots, m$):

$$K_n = -i = e^{-i \frac{\pi}{2}}, \quad (1)$$

причем коэффициент усиления при нулевой частоте K_0 — некоторое конечное действительное число.

Задание контура L исследуемой области осуществляется наложением на экран трубки 1 непрозрачной маски 2, край

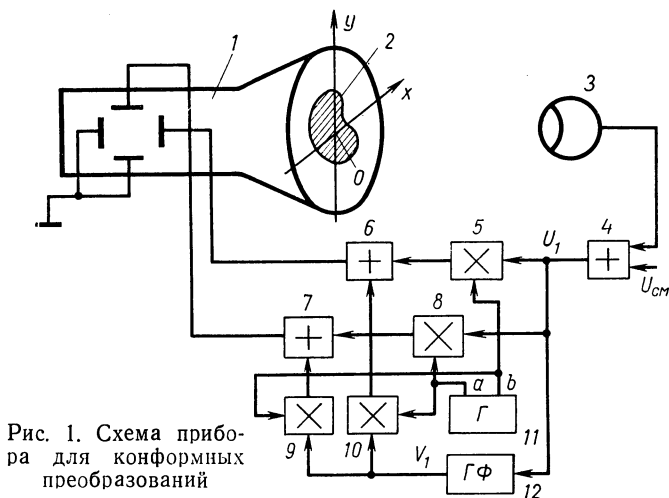


Рис. 1. Схема прибора для конформных преобразований

которой геометрически подобен контуру L . Маска может затемнять внутренность (как показано на рис. 1) или внешность L , что принципиально несущественно.

Предположим, что контур L является звездным относительно некоторой внутренней точки O , т. е. кривая L в системе полярных координат с полюсом в точке O может быть представлена уравнением $r = r(\varphi)$ с помощью однозначной функции r . Поместим начало координат комплексной плоскости $z = x + iy$, на которой расположена исследуемая область, в точке O , т. е. совместим образ O на непрозрачной маске с нулевым положением флуоресцирующего пятна на экране. При этом ориентируем маску так, чтобы образ оси Ox совпадал с направлением отклонения пятна горизонтально отклоняющими пластинами трубки.

Информация о заданном контуре будет восприниматься прибором с помощью фотоэлектронного функционального преобра-

зователя замкнутого типа (фотоформера), имеющего не линейную, а круговую развертку в отличие от получивших распространение устройств этого типа.

Предположим, что в процессе работы функционального преобразователя электронный луч (флуоресцирующее пятно), находясь одновременно под воздействием напряжений круговой развертки и фотоэлектронной следящей системы, будет непрерывно обходить край маски все время в одном направлении в соответствии с некоторым периодическим законом. При этом возможны построения нескольких вариантов соответствия между областями, границами которых являются единичная окружность и замкнутая кривая L .

Построим отображения единичного круга на конечную область. Для этого нормируем конформное преобразование круга $|\zeta| \leq 1$ плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2) на область S с помощью функции

$$z = \omega \zeta \quad (2)$$

следующим образом:

$$\omega(0) = 0; \quad (3)$$

$$\arg \omega'(0) = a_0, \quad (4)$$

где a_0 — действительное число.

Тогда в соответствии с теоремой Римана (1) отображение, осуществляемое функцией (2), будет единственным.

Обозначим через U_1 напряжение, снимаемое с выхода усилителя 4 (рис. 1), и через V_1 — напряжение, снимаемое с гармонического фазовращателя 12. Распорядимся законами произведенный таким образом, чтобы напряжения, подаваемые на горизонтально и вертикально отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки 1 с блоков суммирования 6, 7, были пропорциональны следующим равенствам:

$$\left. \begin{aligned} x &= U_1 \cos \omega_1 t - V_1 \sin \omega_1 t; \\ y &= V_1 \cos \omega_1 t + U_1 \sin \omega_1 t. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Равенства (5) устанавливают соотношения между неподвижными декартовыми координатами точки $M_1(x, y)$ и координатами той же точки $(U_1 V_1)$, вращающимися с угловой скоростью ω_1 (рис. 2).

Периодическое напряжение U_1 можно представить в виде тригонометрического ряда, который запишем в следующем виде:

$$U_1 = c'_1 + \sum_{\kappa=2}^{\infty} c_{\kappa} \cos[(\kappa - 1)\omega_1 t + \gamma_{\kappa}], \quad (6)$$

где γ_{κ} — начальная фаза гармоники.

В соответствии с выражением (1) на выходе гармонического фазовращателя 12 получим напряжение (при допущении, что $m \rightarrow \infty$)

$$V_1 = \kappa_0 c'_1 + \sum_{\kappa=2}^{\infty} c_{\kappa} \sin [(\kappa - 1) \omega_1 t + \gamma_{\kappa}]. \quad (7)$$

Напряжения на пластинах x и y можно определить, подста-

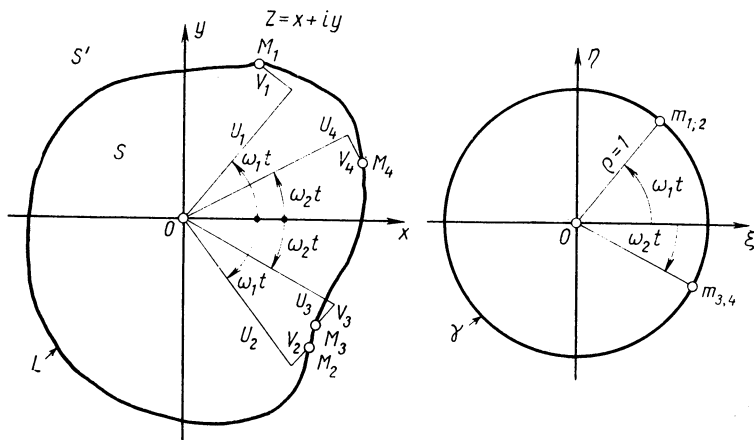


Рис. 2. Соотношения между неподвижными декартовыми координатами точки $M_1(x, y)$ и координатами U_1V_1 той же точки, вращающимися со скоростью ω_1

вив выражения (6) и (7) в равенства (5). После преобразований получим

$$x = \sum_{\kappa=1}^{\infty} c_{\kappa} \cos (\kappa \omega_1 t + \gamma_{\kappa}); \quad (8)$$

$$y = \sum_{\kappa=1}^{\infty} c_{\kappa} \sin (\kappa \omega_1 t + \gamma_{\kappa}), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \arctg \kappa_0; \\ c_1 &= c'_1 \sqrt{1 + \kappa_0^2}. \end{aligned}$$

Докажем, что напряжения x и y моделируют граничные значения искомой конформно отображающей функции.

Для этого представим равенства (8) как действительную

часть (x) и коэффициент при мнимой части (y) некоторой комплексной функции z действительного аргумента $\omega_1 t$:

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} c_{\kappa} [\cos(\kappa\omega_1 t + \gamma_{\kappa}) + i \sin(\kappa\omega_1 t + \gamma_{\kappa})] = \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} c_{\kappa} e^{i(\kappa\omega_1 t + \gamma_{\kappa})} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} D_{\kappa} \sigma^{\kappa}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma &= e^{i\omega_1 t}; \quad D_{\kappa} = \alpha_{\kappa} + i\beta_{\kappa}; \\ \alpha_{\kappa} &= c_{\kappa} \cos \gamma_{\kappa}; \quad \beta_{\kappa} = c_{\kappa} \sin \gamma_{\kappa}. \end{aligned} \quad (11)$$

Примем, что $\omega_1 t$ — полярный угол точки m окружности $|\zeta| = 1$. Так как ряд (10) сходится для всех точек окружности $|\zeta| = 1$, то его можно представить как граничное значение ряда Тейлора:

$$z = \sum_{\kappa=1}^{\infty} D_{\kappa} \zeta^{\kappa}, \quad (12)$$

где

$$\zeta = \rho e^{i\omega_1 t},$$

сходящегося согласно теоремы Абеля в любой точке круга $|\zeta| < 1$. Отсюда следует аналитичность функции (12) в круге $|\zeta| < 1$, так как она представима суммой степенного ряда в круге его сходимости [1].

Из принятого допущения о непрерывности движения флуоресцирующего пятна вдоль края маски (точки M по контуру L) следует, что функцией (12) установлено взаимно однозначное соответствие между окружностью $|\zeta| = 1$ и контуром L . Следовательно, в соответствии с принципом соответствия границ [1] функция (12) осуществляет конформное отображение круга $|\zeta| < 1$ на заданную конечную односвязную область S , а выражения (8) представляют собой граничные значения действительной и коэффициента при мнимой части конформно отображающей функции (12), что и требовалось доказать.

При этом выполняются условия (3) и (4) нормирования конформного отображения, причем

$$a_0 = \arctg \kappa_0. \quad (13)$$

В частности, при $\kappa_0 = 0$ направление вещественной оси $O\xi$ плоскости ζ перейдет в начале координат O плоскости z в направление оси Ox .

Аналогично можно построить отображение единичного круга на внешнюю область, ограниченную кривой. Для этого с помощью функции (2) нормируем конформное преобразование

круга $|\xi| < 1$ (рис. 2) на область S' , содержащую бесконечно удаленную точку, следующим образом:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \omega(\xi) = \infty; \quad (14)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \operatorname{arc} \omega'(\xi) \xi^2 = a_0, \quad (15)$$

где a_0 — действительное число.

Распорядимся знаками произведений в блоках перемножения 5, 8, 9, 10 (рис. 1) таким образом, чтобы напряжения на горизонтально и вертикально отклоняющихся пластинах удовлетворяли равенствам;

$$\left. \begin{aligned} x &= U_2 \cos \omega_1 t + V_2 \sin \omega_1 t; \\ y &= V_2 \cos \omega_1 t - U_2 \sin \omega_1 t. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Периодическое напряжение U_2 представим в виде тригонометрического ряда, который для удобства запишем в следующем виде:

$$U_2 = c'_{-1} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} c_{\kappa} \cos [(\kappa + 1) \omega_1 t + \gamma_{\kappa}]. \quad (17)$$

Тогда

$$V_2 = \kappa_0 c'_{-1} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} c_{\kappa} \sin [(\kappa + 1) \omega_1 t + \gamma_{\kappa}]. \quad (18)$$

Подставляя (17) и (18) в равенства (16), получим

$$\left. \begin{aligned} x &= c_{-1} \cos (\omega_1 t - \gamma_{-1}) + \sum_{\kappa=0}^{\infty} c_{\kappa} \cos (\kappa \omega_1 t + \gamma_{\kappa}); \\ y &= -c_{-1} \sin (\omega_1 t - \gamma_{-1}) + \sum_{\kappa=0}^{\infty} c_{\kappa} \sin (\kappa \omega_1 t + \gamma_{\kappa}), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_{-1} &= c'_{-1} \sqrt{1 + \kappa_0^2}; \\ \gamma_{-1} &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \kappa_0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Представим равенства (19) как действительную часть (x) и коэффициент при мнимой части (y) комплексной функции действительного аргумента $\omega_1(t)$:

$$\begin{aligned} z &= x + iy = c_{-1} [\cos (\omega_1 t - \gamma_{-1}) - i \sin (\omega_1 t - \gamma_{-1})] + \\ &+ \sum_{\kappa=0}^{\infty} c_{\kappa} [\cos (\kappa \omega_1 t + \gamma_{\kappa}) + i \sin (\kappa \omega_1 t + \gamma_{\kappa})] = \\ &= D_{-1} \sigma^{-1} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} D_{\kappa} \sigma^{\kappa}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma &= e^{i\omega_1 t}; \quad \alpha_\kappa = c_\kappa \cos \gamma_\kappa; \\ D_\kappa &= \alpha_\kappa + i\beta_\kappa; \quad \beta_\kappa = c_\kappa \sin \gamma_\kappa.\end{aligned}$$

Как и в случае конечной области, примем, что $\omega_1 t$ — полярный угол точки m окружности $|\zeta| = 1$.

Тогда выражение (21) можно представить как граничное значение некоторой функции, представимой рядом Лорана:

$$z = D_{-1}\zeta^{-1} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} D_\kappa \zeta^\kappa, \quad (22)$$

определенной и однозначной для всех $|\zeta| < 1$, кроме $\zeta = 0$, где она имеет простой полюс, и, очевидно, аналитический для тех же ζ .

В рассматриваемом случае справедлив принцип соответствия границ [1], следовательно, функция (22) осуществляет конформное отображение круга $|\zeta| = 1$ на заданную бесконечную область S' с отверстием, а напряжения (19) на горизонтально и вертикально отклоняющихся пластинах моделируют соответствующие граничные значения отображающей функции (22). При этом выполняются условия (14), (15) нормирования конформного преобразования, причем для a_0 остается справедливым выражение (13).

Заметим, что при обходе точки m по окружности $|\zeta| = 1$ против часовой стрелки аффикс соответствующего значения z (точка M_1) будет перемещаться по L в обратном направлении (рис. 2).

Если нам удалось отобразить единичный круг $|\zeta| < 1$ на односвязную область S , то мы всегда сможем отобразить на эту же область и бесконечную плоскость с круговым отверстием $|\zeta| > 1$. Для этого необходимо произвести подстановку

$$\zeta = \frac{1}{\zeta_1}, \quad (23)$$

т. е. когда ζ описывает круг $|\zeta| < 1$, то ζ_1 — круг $|\zeta| > 1$. Следовательно, функция $z = \omega \left(\frac{1}{\zeta_1} \right)$ будет осуществлять требуемое отображение.

Можно показать, что для моделирования с помощью описываемого прибора граничных значений функции, конформно отображающей бесконечную плоскость с круговым отверстием единичного радиуса на конечную область S , необходимо, чтобы на отклоняющихся пластинах формировались напряжения, удовлетворяющие

$$\left. \begin{aligned}x &= U_3 \cos \omega_2 t - V_3 \sin \omega_2 t; \\ y &= -V_3 \cos \omega_2 t - U_3 \sin \omega_2 t,\end{aligned} \right\} \quad (24)$$

а при отображении на область S' , содержащую бесконечно удаленную точку, — равенствам

$$\left. \begin{aligned} x &= U_4 \cos \omega_2 t + V_4 \sin \omega_2 t; \\ y &= -V_4 \cos \omega_2 t + U_4 \sin \omega_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Следует отметить, что с помощью прибора возможно построение для всех рассмотренных случаев конформного отображения второго рода. Для этого необходимо осуществить преобразование $w = \bar{z}$, производящееся инвертированием напряжения y .

Произведенные эксперименты на аналоговых вычислительных машинах МН-7 и ЭМУ-10 показали, что точность конформного преобразования, осуществляемого описываемым устройством, лежит в пределах точности используемых устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958, стр. 678.

*Г. И. Васильев, В. В. Ильин, И. Б. Новиков,
Е. Г. Сно, Р. П. Тевелева*

АВТОМАТИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ УСТРОЙСТВА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОМИЧЕСКИХ СЕТКАХ

За последние годы в отечественной и зарубежной практике решения нестационарных тепловых задач широкое распространение получил метод, основанный на электрическом моделировании неявной конечно-разностной формы уравнения теплопроводности на R -сетках.

Описанные в литературе моделирующие устройства, реализующие этот метод [2, 3], требуют для своего функционирования большого количества ручных манипуляций и поэтому в ряде случаев применение метода становится неэффективным.

Авторами предлагается два типа электронных устройств, позволяющих решить проблему автоматизации процесса моделирования на R -сетках.

Суть автоматизации процесса моделирования внутренней задачи нестационарной теплопроводности в устройстве первого

типа заключается в том, что для каждой узловой точки R -сетки используется система, состоящая из одного решающего усилителя постоянного тока УПТ и двух элементов памяти на конденсаторах. На рис. 1 показана упрощенная принципиальная схема такого устройства для решения одномерной задачи

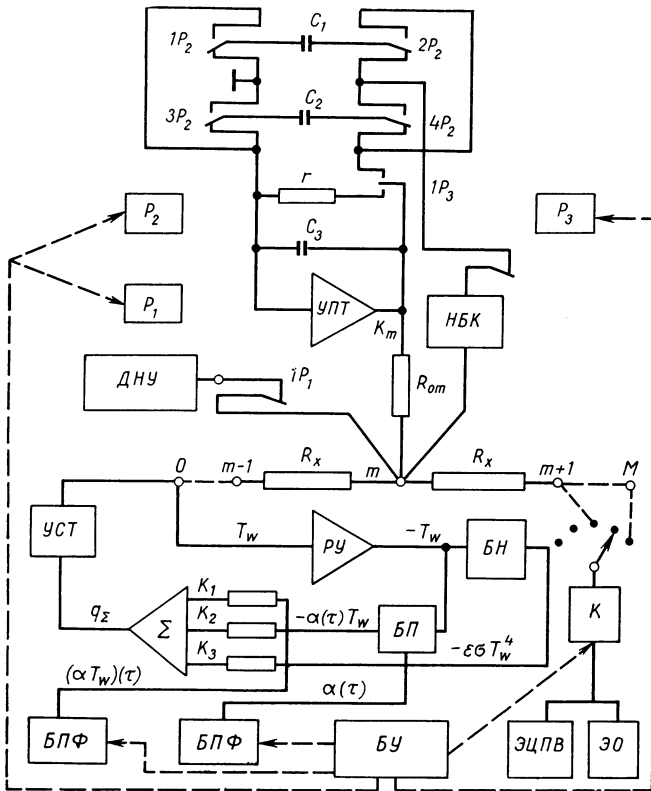


Рис. 1. Принципиальная схема автоматического моделирующего устройства на базе УПТ и запоминающих конденсаторов

нестационарной теплопроводности с граничным условием III рода и с учетом излучения на внешней поверхности.

Рассмотрим автоматический процесс моделирования теплопроводности в узловой точке m с координатой $x = m \cdot \Delta x$. Напряжение постоянного тока $U_{m,0}$, соответствующее начальной температуре, подается от делителя напряжения начального условия ДНУ через контакты реле P_1 в узловую точку и запоминается на конденсаторе C_1 (в начальный момент конденсатор C_2 разряжен). Затем конденсатор C_1 с помощью электроме-

нического или электронного реле P_2 (на рис. 1 для простоты всюду изображены контакты электромеханических реле) отключается от узловой точки и подключается в обратную связь УПТ, обуславливая на его выходе напряжение $U_{m,0}$. Одновременно конденсатор C_2 переключается из цепи обратной связи УПТ к узловой точке и запоминает возникшее на ней напряжение $U_{m,1}$, соответствующее температуре в конце первого интервала времени Δt . Далее процесс переключения конденсаторов C_1, C_2 повторяется необходимое число раз, причем каждый из них поочередно запоминает напряжение в узловой точке $U_{m,n}$ и переносит его при переключении в УПТ.

Переключение реле P_2 осуществляется от источника импульсов, находящегося в блоке управления БУ моделирующего устройства. Конденсатор, включенный в обратную связь УПТ и предотвращающий ее разрыв в момент переключения конденсаторов C_1, C_2 , имеет пренебрежимо малую емкость по сравнению с емкостями C_1, C_2 и практически не влияет на точность решения. Коммутация переключающей схемы осуществлена так, что напряжение на выходе усилителя имеет всегда один и тот же знак. Из-за этого отпадает необходимость в дополнительном инвертирующем усилителе, что делает решающую схему исключительно простой¹.

В такт с переключением конденсаторов C_1, C_2 , но с некоторой задержкой автоматически подводятся граничные условия, соответствующие текущему моменту времени $n\Delta t$. Ступенчатая выдача граничных условий управляется импульсами от БУ. Временная диаграмма поступления управляющих импульсов БУ представлена на рис. 2.

Задание граничных условий III рода с учетом излучения на внешней поверхности производится в соответствии с уравнением

$$q_{\Sigma} = \alpha(\tau) [T_e(\tau) - T_w] - \varepsilon \sigma T_w^4, \quad (1)$$

где q_{Σ} — удельный тепловой поток, проходящий через поверхность;

T_e — температура внешней среды;

T_w — температура поверхности;

ε — степень черноты поверхности;

σ — постоянная Стефана-Больцмана.

При использовании R -сеток температура моделируется напряжением, а удельный тепловой поток — силой тока. Максимальной температуре стенки соответствует напряжение $+100$ в., т. е. верхний предел диапазона линейности УПТ, входящего в состав решающего элемента R -сетки. Поскольку максимум

¹ Устройство зарегистрировано в качестве изобретения в Государственном комитете по делам изобретений и открытий СССР. Заявка № 857174/26--24 от 17/IX 1963 г.

температуры T_e обычно во много раз превышает максимум температуры в стенке, то ее моделирование в этом же масштабе становится технически неприемлемым. Поэтому в вычислительном устройстве граничное условие (1) задается аналоговой структурной схемой, элементы которой обрабатывают все математические операции в напряжениях, а результат q_2 через управляемый стабилизатор тока УСТ, выполняющий преобразование «напряжение — ток», подается в граничную узловую точку R -сетки. Практически выгоднее моделировать видоизмененную форму уравнения (1):

$$q_2 = (\alpha T_e)(\tau) - \alpha(\tau) T_W - \varepsilon \sigma T_W^4, \quad (2)$$

так как при этом устраняются большие погрешности в блоке перемножения, когда перемножаемые функции $\alpha(\tau)$ и $T_e(\tau) - T_W$ значительно отличаются по абсолютным величинам.

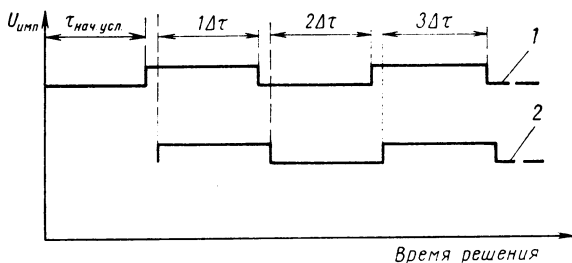


Рис. 2. Временная диаграмма выдачи управляющих импульсов БУ:

1 — переключение запоминающих и задающих конденсаторов; 2 — подача граничных условий

Блок-схема задания граничного условия в форме уравнения (2) представлена на рис. 1.

Зависимости $(\alpha T_e)(\tau)$ и $\alpha(\tau)$ являются известными функциями времени и задаются с помощью блоков переменных функций БПФ. Поскольку в граничном условии содержится величина, получающаяся в процессе самого решения задачи, то в блок-схеме предусмотрена обратная связь между граничной узловой точкой R -сетки и элементами структурной схемы, моделирующей уравнение (2), через развязывающий усилитель РУ.

Правильное соотношение величин $(\alpha T_e)(\tau)$, $-\alpha(\tau) T_W$, $-\varepsilon \sigma T_W^4$, максимумы которых моделируются напряжениями, равными $+100$ в, устанавливается перед входом на сумматор введением масштабных коэффициентов K_1 , K_2 , K_3 .

В случае граничных условий II рода блок-схема упрощается: известный по времени тепловой поток задается посредством

одного БПФ в виде напряжения и через УСТ подается в граничную узловую точку R -сетки.

В случае граничных условий I рода потребность в УСТ пропадает, известная по времени температура поверхности задается БПФ и подается в виде напряжения непосредственно в граничную узловую точку.

Малая инерционность элементов моделирующего устройства позволяет резко увеличить быстродействие решения задач нестационарной теплопроводности на R -сетках.

В экспериментальном устройстве описанного типа в качестве элементов памяти C_1 , C_2 были применены металлопленочные конденсаторы МПГТ емкостью 1 мкф, обладающие высоким сопротивлением утечки. В обратной связи УПТ использован конденсатор типа КСО емкостью 510 нф. Переключение конденсаторов C_1 , C_2 осуществлялось посредством электромеханических реле типа РС-13. Такая система позволила получить частоту переключений 20 гц. Следовательно, продолжительность решения задачи с числом временных интервалов Δt , равным 50, составляет 2,5 сек. Применение бесконтактных электронных переключающих схем при соответствующем выборе величин емкостей C_1 , C_2 и C_3 позволит еще в большей степени увеличить быстродействие описываемого моделирующего устройства.

При замедленном цикле моделирования результаты решения в фиксированных точках пространственной координаты при изменении временной координаты регистрируются на ленте электронного цифрового печатающего вольтметра ЭЦПВ.

Для опроса узловых точек по пространственной координате автоматический процесс моделирования может быть остановлен по запрограммированному импульсу от БУ на любом шаге решения.

Число интервалов Δt регистрируется счетчиком электрических импульсов. Опрос точек производится коммутатором K . При остановке возможна любая коррекция R -сетки с сохранением полученного на данном шаге результата решения. В этом случае по команде с КУ срабатывает реле P_3 . Контакты $1P_3$ отключают из обратной связи УПТ задающий конденсатор, который переходит в режим запоминания, и подключают сопротивление $r = 100$ ком, предотвращающее интегрирование дрейфа нуля. Контакты $2P_3$ отключают запоминающий конденсатор от узловой точки.

После коррекции решение может быть продолжено после возврата системы в прежнее состояние.

В тех случаях, когда изменение теплофизических свойств материала при изменении температуры обуславливается в основном зависимостью удельной теплоемкости от температуры или когда изменение коэффициента теплопроводности λ от тем-

пературы относительно мало в течение интервала времени $\Delta\tau$ [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right) \ll 1,$$

а также когда при расчетах приходится пользоваться эквивалентной температуропроводностью $a_{\text{экс}} = f(T)$, например, в случае экзотермических и эндотермических превращений внутри материала сложного химического состава учет указанных явлений при моделировании на R -сетках производят обычно перерегулировкой одних лишь сопротивлений R_{om} [1]. В описываемом моделирующем устройстве эти явления могут быть учтены в процессе автоматического цикла решения без коррекции R -сетки. Для этого в цепь между узловыми точками и запоминающими конденсаторами вводятся электронные нелинейные блоки $НБК$, которые учитывают изменения теплофизических свойств соответствующей коррекцией напряжения в точках K_m сопротивлений R_{om} на следующем интервале времени $\Delta\tau$.

Приборная погрешность устройства без схемы задания граничных условий III рода составляет около 1%. Погрешность моделирования контрольных задач по сравнению с решениями на цифровой машине М-20 (относительно максимальной температуры стенки) соответственно равна: при решении задач с граничными условиями I и II родов 2—3%, при решении с граничными условиями III рода 3—5%. Основными источниками погрешности являются дрейф нуля усилителей и качество настройки элементов схемы задания граничных условий.

Малая продолжительность цикла решения позволила впервые в практике моделирования на R -сетках получить решения с периодизацией, что дает возможность наблюдать на экране электронного осциллографа вариации решения задачи.

На примере устройства первого типа видно, что использование типичных аналоговых средств ($УПТ$, $БН$, $БП$ и т. п.) для целей автоматизации метода хотя и дает возможность во много раз увеличить скорость решения на R -сетках, однако не позволяет практически преодолеть барьер «инженерной» точности расчетов методами моделирования и получить погрешности решения менее 2%.

В тепловых задачах с большим диапазоном максимальных температур, с которыми в настоящее время приходится сталкиваться инженерам, указанная погрешность составляет десятки и сотни градусов. Этот класс задач можно решать с достаточной степенью точности на цифровых быстродействующих машинах, однако по сравнению с моделируемыми устройствами последние обладают существенным недостатком — большой трудоемкостью программирования.

Предлагаемое ниже автоматическое быстродействующее аналого-цифровое устройство¹ позволяет получать точность моделирования, приближающуюся к точности решений тепловых задач на цифровых быстродействующих машинах дискретного типа.

На рис. 3 представлена блок-схема такого устройства. В качестве задающих и запоминающих элементов для каждой узловой точки R -сетки применены два преобразователя «код — аналог» ($K—A$), поочередно работающие в режиме запоминания и задания напряжений. Остальные блоки являются общими для всех узловых точек. Принцип действия устройства заключается в следующем. Преобразователь «аналог — код» ($A—K$) с помощью коммутатора узловых точек K_1 , управляемого генератором Γ , опрашивает последовательно все узловые точки и выдает через ключ $K_{л1}$ на коммутатор K_2 коды, пропорциональные напряжениям $U_{m,n}$. Эти коды с выхода коммутатора синхронно подаются на преобразователи $K—A_1$ соответствующих узловых точек. После прихода кода на выходах преобразователей $K—A_1$ устанавливаются напряжения $U_{m,n}$. Как только все узловые точки будут опрошены, с делителя частоты $DЧ$ поступает импульс, перебрасывающий триггер управления $TУ$ в другое состояние. В свою очередь, этот триггер через двухпозиционные ключи $K_{л3}$ подключает преобразователи $K—A_1$ с напряжениями $U_{m,n}$ на выходах к точкам K_m сопротивлений R_{om} . К выходу преобразователя $A—K$ через ключ $K_{л2}$ и коммутатор K_3 подключаются преобразователи $K—A_2$ для запоминания напряжений $U_{m,n+1}$ в узловых точках R -сетки. В такт с работой триггера $TзУ$ с блока граничных условий $BГУ$, управляемого делителем частоты $DЧ$, к граничной узловой точке подается соответствующее значение граничной функции.

Ключевые элементы в преобразователях $K—A_1$ и $K—A_2$ должны иметь блокировку, необходимую для того, чтобы преобразователи могли работать как элементы памяти, т. е. могли запоминать и поддерживать напряжение в точках K_m на время опроса всех узловых точек коммутатором K_1 .

Использование преобразователей $K—A$ позволяет получить высокую точность запоминания и поддержания напряжения (порядка 0,03%) [6].

Изменения теплофизических свойств материала стенки при изменении температуры могут учитываться в процессе автоматического цикла решения, как и в моделирующем устройстве первого типа, с помощью нелинейного блока коррекции $НБК$. Если стенка однослойная, то в отличие от устройства первого типа потребуется лишь один блок $НБК$, стоящий между комму-

¹ Зарегистрировано в качестве изобретения в Государственном комитете по делам изобретений и открытий СССР. Заявка № 912393/26—24 от 18/VII 1964 г.

татором K_1 и преобразователем $A - K$, как показано на рис. 3. В случае многослойной стенки необходимое количество блоков $НБК$ может быть поставлено на соответствующих входах коммутатора K_1 .

Описанный принцип автоматизации был экспериментально проверен, причем в качестве аналого-кодового преобразователя

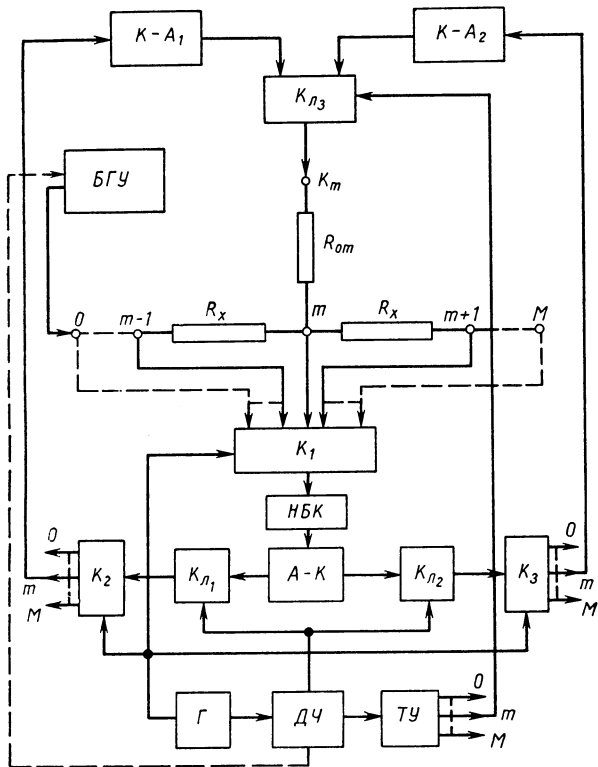


Рис. 3. Принципиальная схема автоматического аналого-цифрового устройства

использовался электронный цифровой регистратор ЭЦР-1. Погрешность регистратора составляет $0,1\%$. В приборе имеется встроенный релейный коммутатор на 20 точек, позволяющий осуществлять до 20 переключений в секунду. Запись результатов осуществлялась на цифropечатающей машинке ЦПМ-2. Преобразователи $K-4$ были изготовлены с точностью $0,1\%$. При соответствующей точности подачи граничных условий I рода погрешность моделирования составила менее $0,5\%$ по сравнению с аналитическим решением.

Значительное увеличение быстродействия моделирующего устройства данного типа можно получить, применяя бесконтактные переключающие элементы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дроздов Е. А., Пятибратов А. П. Автоматическое преобразование и кодирование информации. М., «Сов. радио», 1964.
2. Коздоба Л. А. Применение сеток сопротивлений для решения задач нестационарной теплопроводности. ИФЖ, № 7, 1960.
3. Liebmann G. Solution of transient heat-transfer problems by the resistance — network analog method. Trans. ASME, 78, № 6, 1956.

В. Е. Бухман

О НЕКОТОРЫХ ПРИНЦИПАХ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРО-АНАЛОГОВЫХ УСТРОЙСТВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Есть ряд краевых задач, решение которых на обычных аналоговых устройствах затруднительно. Для таких задач целесообразно применение цифро-аналоговых методов.

Одной из таких задач является задача нестационарной теплопроводности с граничными условиями III рода. Граничное условие имеет вид

$$U_{gp} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi_{gp}}{\partial n} = \theta. \quad (1)$$

Если функция λ не зависит от времени, то это граничное условие может быть задано с помощью очень простой схемы (рис. 1, а).

При этом должны соблюдаться условия:

$$U_{gp} \sim \theta; \quad r_{gp} \sim \frac{1}{\lambda}.$$

Функция θ может и зависеть от времени. В этом случае она задается с управляемого делителя.

Если от времени зависит и функция λ , то по заданному закону нужно изменять величину r_{gp} .

Применение электромеханических устройств для управления сопротивлением не позволяет добиться нужной скорости решения. Использование электронных устройств затрудняется присущей им полярностью, а величина сопротивления не должна зависеть от направления тока, протекающего через него. Кроме того,

при небольших перепадах напряжения начинает сказываться нелинейность этих приборов, увеличивающая погрешность решения.

Соберем схему (рис. 1, б) и выясним, какие условия надо наложить на величины R и I , чтобы эта схема была эквивалентна предыдущей. В первой схеме ток, поступающий в сетку,

$$j_1 = \frac{U_{\text{зп}} - U'_0}{r_{\text{зп}}}.$$

Во второй схеме

$$j_2 = -I - \frac{U''_0}{R}.$$

Из условия эквивалентности схем получим

$$\left. \begin{aligned} j_1 = j_2; U'_0 = U''_0 = U_0; \\ \frac{U_{\text{зп}}}{r_{\text{зп}}} = -I - \frac{U_0}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Условие (2) будет тождественно выполняться при $R = r_{\text{зп}}$ и $I = \frac{U_{\text{зп}}}{r_{\text{зп}}}$

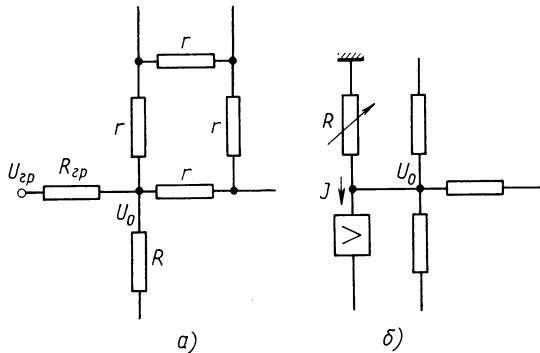


Рис. 1. Схема задания III краевого условия:
а — обычная схема; б — эквивалентная схема

Следовательно, $R \sim \frac{1}{\lambda}$ и $I \sim \lambda\theta$.

В этой схеме управляемые сопротивления привязаны к постоянному потенциалу и направление тока в них постоянно. Поэтому оказалось возможным применение электронных цифроаналоговых преобразователей, которые используются и для управления сопротивлением и для задания нужного тока. Необходимая цифровая информация вводится с запоминающего устройства магнитного барабана, позволяющего периодизировать процесс решения.

Другим классом краевых задач, для решения которых целесообразно применять цифро-аналоговые преобразователи, являются стационарные краевые задачи, требующие итераций на границе. К таким задачам относится, например, решение бигармонического уравнения $\Delta\Delta\omega = 0$ с заданными граничными условиями $\omega_{ep} = \varphi(s)$ и $\frac{\partial\omega_{ep}}{\partial n}$. Решение осуществляется на двухэтажной сетке по схеме, показанной на рис. 2.

Потенциал с верхней сетки « ω » и потенциал с делителя D , пропорциональный заданному значению граничной функции, поступают на вход усилителя. В зависимости от разности этих потенциалов на выходе усилителя возникает импульс той или иной полярности, который действует на реверсивный счетчик C , увеличивая или уменьшая показание его в зависимости от полярности импульса. Сигнал со счетчика превращается цифро-аналоговым преобразователем Π в аналоговую величину — ток, который поступает в граничную точку нижней сетки « $\Delta\omega$ ». Преобразователь дает ток лишь одной полярности, в то время как в различные точки сетки приходится задавать токи разной полярности. Поэтому через большое сопротивление R в каждую точку сетки задается ток полярности, противоположной полярности тока преобразователя, и по амплитуде, вдвое меньшей этого тока.

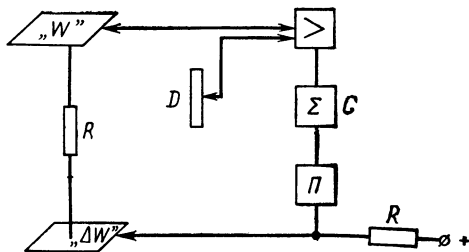


Рис. 2. Блок-схема применения цифро-аналогового преобразователя для решения бигармонического уравнения

Преобразователь дает ток лишь одной полярности, в то время как в различные точки сетки приходится задавать токи разной полярности. Поэтому через большое сопротивление R в каждую точку сетки задается ток полярности, противоположной полярности тока преобразователя, и по амплитуде, вдвое меньшей этого тока.

Аналогичные схемы могут быть составлены и для решения других задач, требующих итераций.

*В. Е. Бухман, Б. А. Волынский,
Н. Н. Макаренко*

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦИФРО-АНАЛОГОВАЯ МОДЕЛЬ ЭМ-10 ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

На существующих электрических моделях для решения нестационарных краевых задач можно задавать переменные во времени граничные условия лишь I и II рода. Между тем для боль-

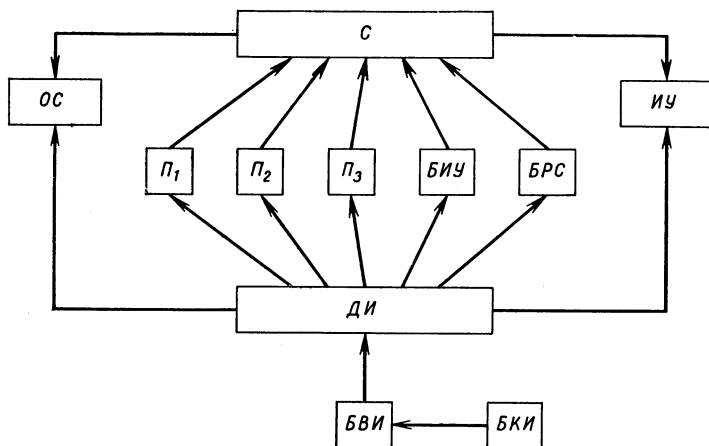
шинства тепловых задач характерно граничное условие III рода — условие теплообмена со средой. При больших значениях температур коэффициент теплообмена существенно зависит от температуры, меняющейся во времени.

Поэтому в граничном условии

$$T_{ср} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial T_{ср}}{\partial n} = \theta$$

функции λ и θ являются функциями времени.

Необходимость решения нестационарных задач с граничным условием привела к созданию цифро-аналоговой модели ЭМ-10.



Блок-схема цифро-аналоговой модели ЭМ-10

Характерной ее особенностью является то, что все переменные во времени функции задаются в цифровой форме в запоминающем устройстве (магнитном барабане), откуда через цифро-аналоговые преобразователи поступают в модель. Блок-схема модели показана на рисунке.

Заданные функции кодируются в блоке кодирования информации *БКИ* и записываются на перфоленту ленточным перфоратором ПЛ 8/80. Перфолента подается на фотодиодное считывающее устройство ФСУ-1 блока ввода информации *БВИ*, а записанный код вводится в долговременное запоминающее устройство — датчик информации *ДИ*. В качестве запоминающего устройства использован магнитный барабан от машины БЭСМ-2.

Цифровой код с магнитного барабана поступает на цифро-аналоговые преобразователи граничных условий I рода (P_1), II рода (P_2) или III рода (P_3). Цифро-аналоговые преобразователи преобразуют числовой код в аналоговые величины (напряжение, ток или их комбинацию), поступающие на сетку *С*.

Магнитный барабан используется не только для периодизации процесса решения, но и для управления работой всей машины в целом. Для этого на специальной дорожке записано 1024 импульса. С помощью устройства масштаба времени код записывается или через 1, или через 2, или через 4, или через 8, или через 16 импульсов. Таким образом, при неизменной скорости барабана машинное время решения может быть изменено в 16 раз. Первый маркерный импульс включает блок начальных условий *БНУ*, последний импульс командует разрядом сетки с помощью блока разрядки сетки *БРС*.

Работа осциллографа *ОС* и измерительного устройства *ИУ* также управляется сигналом, поступающим с магнитного барабана, что обеспечивает надежную синхронизацию их работы.

Вся электронная часть собрана в основном из четырех типов блоков, выполненных печатным монтажом: импульсных усилителей чтения, триггеров, ключей преобразователя и стабилизаторов. За исключением стабилизаторов, все остальные блоки состоят из устройства на четыре разряда. Помимо преобразователей, эти блоки, применены также и в осциллографе и в измерительном устройстве, в основу управления которыми также положен цифровой принцип.

Принцип действия преобразователей, а также принцип кодирования информации описан в работе [1].

Конструктивно модель ЭМ-10 состоит из стенда сетки, электронного стенда, магнитного барабана и столика входного устройства, в которое входят *БКИ* и *БВИ*.

Сетка имеет 20×25 узловых точек. Каждая узловая точка конструктивно выполнена в виде съемной кассеты. Эта кассета содержит 2 трехдекадных магазина проводимостей с максимальной проводимостью $0,3 \cdot 10^{-2}$ *1/ом*, один трехдекадный магазин проводимостей с максимальной проводимостью $0,3 \cdot 10^{-4}$ *1/ом* для задания истоков и один трехдекадный магазин емкостей с максимальной емкостью 1 *мкф*.

В магазинах проводимостей применены сопротивления МЛТ-0,5, подобранные попарно и включенные параллельно. В магазинах емкостей конденсаторы подбираются попарно и включаются параллельно. Погрешность подобранной пары элементов — 0,5—1,0%. Все элементы кассеты размещены на двух печатных платах.

Внутри каждой декады величины конденсаторов и проводимостей меняются в отношении 1 : 2 : 2 : 5. Из них с помощью специальных штеккеров набирается любая величина от 1 до 9. Один и тот же штеккер может быть использован при наборе как проводимостей, так и емкостей, как единиц, так и десятков или сотен. Это позволило сократить число штеккеров, необходимое для набора сетки. Габаритные размеры кассеты $110 \times 40 \times 400$ *мм*.

Широкое использование полупроводниковых приборов в модели ЭМ-10 позволило сократить потребляемую мощность до 2,5—3 *кв*а и повысить надежность работы.

Применение цифровых элементов позволяет использовать модель для сочетания с цифровой машиной при решении сложных краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухман В. Е. Методика задания переменных граничных условий при решении нестационарных краевых задач. В сб. «Аналоговые методы и средства решения краевых задач». Киев, «Наукова Думка», 1964, стр. 287—293.

2. Волынский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960, стр. 446.

*И. М. Блейвас, С. А. Дубровина,
Э. М. Зелинский, Н. А. Белинский*

УСТРОЙСТВО ДЛЯ ПОЛНОЙ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Созданное устройство работает совместно с траектографом, представляющим собой сочетание электролитической ванны с электромоделью постоянного тока (см. рисунок) [1].

Отличительной особенностью устройства является то, что оно позволяет полностью автоматизировать как процесс расчета токов токовводящих элементов т. в. э., моделирующих пространственный заряд, так и всю процедуру ввода этих токов в т. в. э. электролитической ванны.

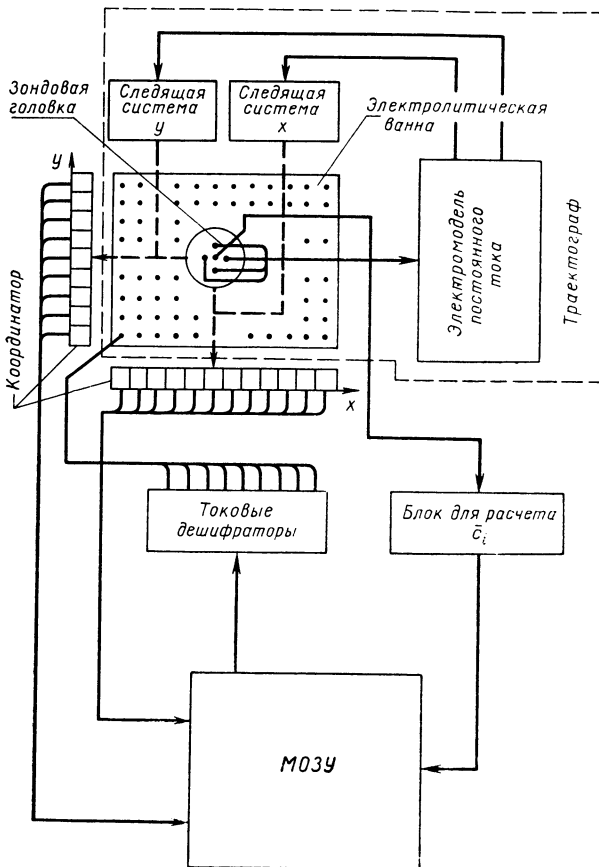
Расчет значения тока для n т. в. э. в случае пересекающихся трубок тока проводится по формуле [2]

$$I_n = \sum_i \bar{c}_i \Delta\tau_{ni},$$

где \bar{c}_i — коэффициент, пропорциональный плотности тока на катоде в пределах i -й трубки тока, зависящий в каждом приближении от потенциала фиксированной точки, взятой вблизи катода;

$\Delta\tau_{ni}$ — время прохождения зондовой головкой траектографа области, обслуживаемой n -м т. в. э., вдоль i -й токовой трубки.

- Разработанное устройство включает в себя следующие узлы:
1. Блок для расчета коэффициента c_i и преобразования его значения в двоичный код.
 2. Магнитное оперативное запоминающее устройство МОЗУ с сумматором и системой управления, позволяющее рассчитать и



Блок-схема устройства для полной автоматизации процесса последовательных приближений при решении уравнения Пуассона

запомнить коды токов т. в. э. Количество ячеек МОЗУ (128) соответствует числу используемых т. в. э.

3. Координатор, включающий в себя две контактные дорожки, ориентированные вдоль осей x и y , и адресованные реле. При движении зондовой головки над т. в. э. координатор обеспечивает запись рассчитываемых значений токов в соответствующие ячейки МОЗУ.

4. Токовые дешифраторы, позволяющие преобразовывать рассчитанные значения токов т. в. э., хранящихся в МОЗУ в двоичном коде, в токи и автоматически вводить их в т. в. э.

Экспериментальная проверка работы устройства показала его высокую эффективность: время, необходимое для выполнения одного приближения, в котором вычерчивается 5—7 траекторий, а также рассчитываются и вводятся токи в 48 т. в. э., составляет 10—12 мин, а погрешность вычислений не превышает 3%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блейвас И. М. Установка для автоматического вычисления и вычерчивания траекторий заряженных частиц в электрических и магнитных полях при наличии пространственного заряда. Труды конференции по электронике с.в.ч. М.—Л., Госэнергиздат, 1959, стр. 139.

2. Блейвас И. М., Зелинский Э. М., Майоров Ф. В., Сергиенко В. И. Применение цифрового дифференциального анализатора для автоматизации процесса решения самосогласованных задач о поле и траекториях в электронных приборах. «Аналоговые методы и средства решения краевых задач». Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 222. Труды Всесоюзного совещания, М., октябрь 1962 г.

*В. И. Кириллов,
М. М. Литвинов, Б. Б. Олешкевич*

ЭЛЕКТРОИНТЕГРАТОР ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЭТНА-4

В последнее время сильно повысился интерес к проблемам нестационарной теплопроводности. В связи с большим разнообразием задач в этой области и трудностями при решении их чисто математическими методами возникает потребность в простом и надежном специализированном устройстве, позволяющем решать практически любую задачу, описываемую уравнением теплопроводности.

Электроинтегратор ЭТНА (электротепловая нестационарная аналогия) представляет собой полуавтоматическое моделирующее устройство для решения задач нестационарной теплопроводности, выполненное в виде малогабаритного прибора из стандартных деталей на базе многоточечного самопишущего прибора типа ЭПП-09 или ЭМП-209 (рис. 1). Интегратор работает по схеме Либмана (метод последовательных интервалов времени), в которой на моделях, обладающих активной проводимостью, воспроизводится неявная разностная аппроксимация уравнения

теплопроводности. Существенным достоинством выбранного метода является абсолютная устойчивость расчетной схемы, позволяющая увеличивать шаги по времени и возможность решения задач с переменными и нелинейными условиями.

На интеграторе могут быть решены задачи, описываемые уравнением теплопроводности

$$c\gamma \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda x^k \frac{\partial t}{\partial x} \right) + q_v$$

(одномерная задача, $k = 0; 1; 2$)

и

$$c\gamma \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda x^k \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + q_v$$

(двумерная и осесимметричная задача, $k = 0, 1$), где $k = 0; 1; 2$ соответствует плоской, цилиндрической и сферической задачам.

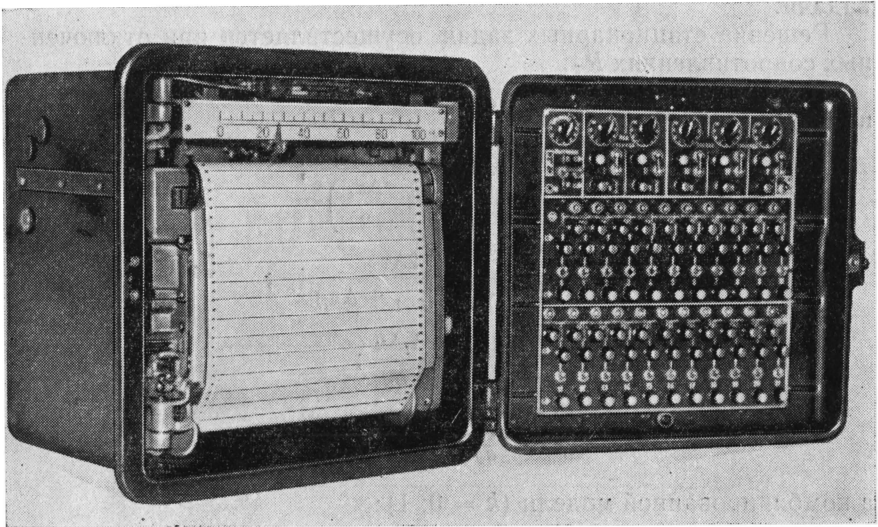


Рис. 1. Общий вид электроинтегратора ЭТНА-4

Решаются задачи при самых общих предположениях: произвольные граничные условия и их комбинации, переменные теплофизические параметры материала, многослойные стенки, наличие внутренних источников тепла, а также задачи с фазовыми превращениями, с подвижными источниками тепла и т. д. Кроме того, возможно применение интегратора для решения ряда задач из области диффузии, фильтрации, гидродинамики и т. д.

Электрическая модель интегратора для решения одномерных задач выполнена в виде линейной цепочки сопротивлений R_x (тер-

мическое сопротивление), к узлам которой присоединены сопротивления R_τ (временное сопротивление) и R_v (сопротивление источников поля). К концам цепочки подключены сопротивления R_a , R_q , воспроизводящие граничные условия.

Для решения двумерных задач используется комбинированная модель (электропроводная бумага и дискретные сопротивления) [1]. В случае осесимметричных задач используется многослойная модель в виде ступенчатого клина из электропроводной бумаги [2].

В процессе решения, осуществляемого переходом от значений температуры в момент времени τ и $\tau + \Delta\tau$, $T(\tau)$ задается в виде напряжений на свободных концах сопротивлений R_τ , а значения $T(\tau + \Delta\tau)$ при реализации граничных условий могут быть определены на других концах сопротивлений R_τ .

При переходе к следующему шагу параметры модели могут быть изменены с учетом переменности или нелинейности условий задачи.

Решение стационарных задач осуществляется при отключенных сопротивлениях R_τ .

Параметры одномерной модели ($k = 0; 1; 2$) определяются по формулам:

$$R_x = k_R \frac{\Delta x_i}{\lambda \left(x_i \pm \frac{\Delta x_i}{2} \right)^k};$$

$$R_\tau = k_R \frac{2\Delta\tau}{(c\gamma)_i (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) x^k};$$

$$R_q = k_R \frac{k_t \Delta u}{q};$$

$$R_v = k_R \frac{2k_t \Delta u}{q_v (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)},$$

а комбинированной модели ($k = 0; 1$):

$$R_\tau = k_R \frac{\Delta\tau}{c\gamma\Delta F};$$

$$R_q = k_R \frac{k_t \Delta u}{\rho^k q \Delta s};$$

$$R_v = k_R \frac{k_t \Delta u}{\rho^k q_v \Delta F},$$

причем удельное поверхностное сопротивление каждой зоны модели должно удовлетворять условию

$$r_i = \frac{k_R}{\lambda_i \rho^k},$$

где $k_t = t/u$ и k_R — коэффициенты моделирования;
 ΔF — площадь элементарного участка;
 Δs — ширина участка теплообмена;
 ρ — расстояние до оси симметрии.

Интегратор состоит из измерительного устройства, представляющего собой автоматический мост переменного тока с регистрирующим устройством (многоточечный самопишущий прибор ЭПП-09 с незначительными переделками), и блока моделирования, смонтированного на панели, укрепленной в передней крышке прибора ЭПП-09 (вместо стекла). Сетка модели на 22 точки составлена из переменных и постоянных радиосопротивлений R_x , R_τ и R_{qv} . На этой же панели смонтированы потенциметрические делители напряжения (низкоомные радиосопротивления R_D), тумблеры для настройки элементов модели T и блок граничных условий, (делители R и резисторы R_α), обеспечивающий одновременное задание до пяти различных граничных условий.

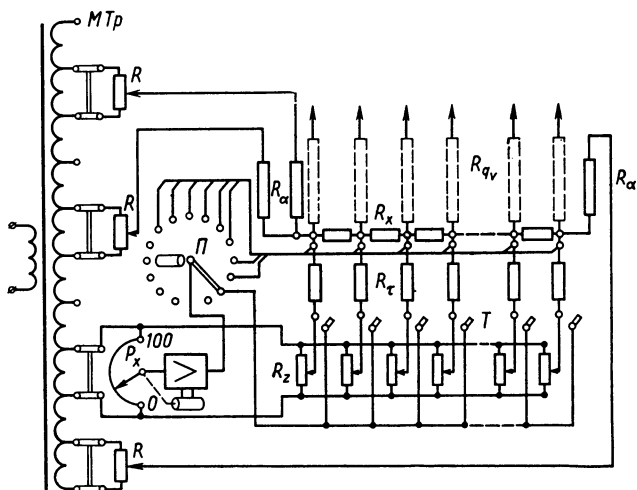


Рис. 2. Измерительная мостовая схема интегратора

Измерительная мостовая схема интегратора (рис. 2) используется для производства следующих операций на интеграторе:

- настройки сопротивлений модели;
- задания напряжений на модели;
- измерения напряжений в узлах модели.

Операции а) и б) выполняются подключением соответствующих сопротивлений модели или потенциметров к мостовой схеме самописца, причем задание напряжений на делителях при переходе к следующему шагу не требует считывания результатов предыдущего шага и осуществляется путем совмещения стрелки,

связанной с реохордом самописца с соответствующей точкой отбитой на диаграммной ленте (аналог пассивной памяти). При включении самописца на автоматическую работу напряжение с узлов модели через переключатель Π поочередно подается на вход усилителя, отрабатывающего измерение с последующей регистрацией напряжения на диаграммной бумаге. При окончании одного цикла (опрос всех узлов сетки) происходит автоматическая остановка прибора, используемая для ввода новых данных.

Изменение масштаба моделирования, задание граничных условий II рода (через R_a) и внутренних источников поля (через $R_{qл}$) обеспечивается применением 10-секционного масштабного трансформатора $МТр$, к любой секции которого могут независимо подключаться реохорд самописца P_x с делителями напряжения модели и пять делителей блока граничных условий R .

Постоянные сопротивления в модели используются для варьирования параметров модели, а также для коммутации путем включения и отключения этих сопротивлений от цепи модели. Для этой цели служат специальные пластинчатые гнезда, утопленные в резиновую основу (рис. 3), обеспечивающие надежный

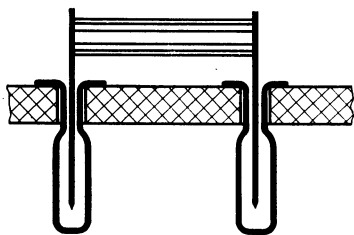


Рис. 3. Контактные гнезда

контакт и легкость смены сопротивлений. На интеграторе могут решаться одновременно несколько не связанных между собой задач. К интегратору может быть подключен блок с дополнительными элементами, позволяющий увеличить число узлов моделирующей сетки, а также использовать двумерную модель из электропроводной бумаги.

Приборная погрешность интегратора не превышает 1%. При соответствующем выборе шагов аппроксимации точность решения на интеграторе удовлетворяет требованиям практики.

Опыт эксплуатации интегратора ЭТНА-4 в ряде организаций в течение нескольких лет подтверждает их высокую эффективность при решении разнообразных научных и инженерных задач теплопроводности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коздоба Л. А. и Князев Л. В. Комбинированная модель для решения задач нестационарной теплопроводности. В сб. «Вопросы теории и применения математического моделирования. М., «Советское радио», 1965, стр. 388—399.
2. Костюк А. Г. и Соколов В. С. Об электро моделировании температурных полей в роторах турбин. «Теплоэнергетика», № 10, 1959, стр. 22.
3. Фильчаков П. Ф. и Панчишин В. И. Интеграторы ЭГДА. Киев, Изд. АН УССР, 1961, стр. 85.

МОДЕРНИЗАЦИЯ ПРИБОРОВ ЭГДА И ДАЛЬНЕЙШИЕ ПЕРСПЕКТИВЫ ИХ РАЗВИТИЯ

Наряду с бурным развитием цифровой вычислительной техники всех направлений активно развивается и аналого-вычислительная техника.

Особенно широкое применение нашли интеграторы ЭГДА-9/60, предназначенные в основном для решения методом электромоделирования на электропроводной бумаге различных технических задач, описываемых уравнением эллиптического типа, в частности уравнением Лапласа.

Как показала многолетняя практика, электропроводная бумага является средой, наиболее пригодной для широкого применения. Она свободна от весьма существенных недостатков, свойственных станиолю и электролитам, применявшимся ранее для электромоделирования [2, 4, 5].

Применение электропроводной бумаги для моделирования задач позволило разработать в Институте математики АН УССР 11 моделей интеграторов ЭГДА, из них 9-я модель выпускается серийно с конца 1960 г. В настоящее время свыше 600 интеграторов применяется в 368 организациях 101 города всего Советского Союза.

Интеграторы ЭГДА-9/60 в отличие от других аналого-вычислительных приборов и машин получили такое широкое распространение благодаря простоте в обслуживании и производственной технологичности своей конструкции, благодаря использованию электропроводной бумаги, на которой наиболее просто реализуются граничные условия.

Массовому признанию этих интеграторов способствовала также четко сформулированная и опубликованная [2, 3, 5] методика моделирования многих типичных задач из различных областей науки и техники.

В результате четырехлетней эксплуатации интеграторов наша страна получила экономический эффект, исчисляемый десятками миллионов рублей в год.

Однако, несмотря на все положительные качества, интегратор ЭГДА-9/60 конструктивно устарел.

Для выяснения конкретных требований, предъявляемых к аналоговому моделирующим приборам, были изучены предложения различных организаций, использующих в своей работе интеграторы ЭГДА-9/60.

В процессе исследований выяснилось, что по областям применения интеграторы распределились в следующих соотноше-

ниях к общему числу используемых интеграторов в процентах:

	1963 г.	1965 г.
Гидротехника и гидрогеология	41,0	38,5
Аэромеханика и кораблестроение	11,0	11,8
Теплотехника и турбореакторостроение	11,5	10,4
Электротехника и электроника	7,0	8,3
Строительная механика	9,0	8,0
Общетехнический профиль	20,5	23,0

В каждой из этих областей решаются новые виды задач, например, такие, как приведенные в таблице.

Области применения интеграторов ЭГДА	Новые задачи	Отношение к общему числу решаемых задач в %
Фильтрация воды	Осушительное действие каналов, подъем уровня грунтовых вод, неустановившаяся фильтрация, задачи плановой фильтрации, фильтрация в неоднородной среде, фильтрация вод при двумерном движении в плане	11
Фильтрация нефти	Моделирование процессов разработки нефтяных пластов, задачи фильтрации плоскопараллельного и плоскорадиального движения жидкости в пластах, уточнение контуров нефтеносности и их перемещения	9
Геология полезных ископаемых	Анализ атмосферных условий в горных выработках	5
Аэродинамика и гидродинамика	Обтекание профилей проточной части отсадочных машин колеблющимся потоком, движение газозвоздушных смесей в сыпучих телах, исследование утечек воздуха через выработанные пространства в шахтах	21
Гидродинамика	Гидродинамика подводного крыла, задачи углеобогащения, рациональная форма литвевых фильер	6
Теплопроводность	Температурные поля в грунте вокруг изотермических хранилищ сжиженных газов, тепловые поля переходов в полупроводниковых приборах, расход тепла при индукционной и дуговой сварке, тепловые поля строительной теплофизики и ледотермии, температурные поля грунтовых вод на больших глубинах	25
Поля магнитные, статические и электрические	Рассеяние поля мощного трансформатора, электрические и тепловые поля в электропечах, задачи блуждающих токов и электрозащиты от коррозии, электромагнитные поля в устройствах для транспортировки металлов	18
Теория упругости	Плоские задачи теории упругости с однородным и двухслойным основанием	3
Конформные отображения	Получение функций, дающих конформное отображение сложных двухсвязных областей	2

В приведенной таблице не упоминаются традиционные задачи, решаемые методом электро моделирования на сплошных средах: фильтрация воды под гидросооружениями, расчет стационарных тепловых полей и обтекания профилей лопаток турбин и т. д.

Кроме того, в последнее время около половины всех организаций, использующих электро моделирование, заинтересованы в приобретении технических средств для моделирования осесимметричных задач, которые практически не могут быть решены на электропроводной бумаге либо решаются с большими трудностями, связанными со склеиванием бумаги [5].

В Институте математики АН УССР разрабатываются модели интеграторов, предназначенные для серийного производства, которые по своим показателям и техническим возможностям превосходят интеграторы ЭГДА-9/60.

Так, например, интегратор ЭГДА-10/62 предназначен в основном для расчетов, связанных с водопонижением и осушением карьеров полезных ископаемых, а также для решения плановых задач фильтрации на больших территориях и задач мелиорации. Кроме того, на интеграторе ЭГДА-10/62 можно моделировать все те же задачи, что и на интеграторе ЭГДА-9/60.

Интегратор ЭГДА-10/62 имеет 19 потенциометрических делителей напряжения типа ПДН-10 (190 потенциометров), 150 реостатов — «масштаб модели скважины», автоматическое устройство опроса величины потенциала с цифровым указателем порядкового номера потенциометра, настраиваемого в данный момент. В комплект интегратора ЭГДА-10/62 входит специальный стенд для размещения модели из электропроводной бумаги с рабочей площадью 8 м².

Стенд сконструирован так, что все подключения к модели производятся с задней стороны, поэтому на лицевой стороне, свободной от соединительных проводов, легко строится сетка моделируемого поля.

На интеграторе ЭДГА-10/62 можно моделировать область водопонижения и осушения с моделями скважин более 1000 шт. Для малогабаритных моделей с простыми граничными условиями использование этого интегратора нерационально.

Для серийного производства взамен выпускаемого интегратора ЭГДА-9/60 авторами разработан интегратор ЭГДА-11/63. Этот интегратор будет выпускаться в трех модификациях: с двумя, с пятью и восемью блоками делителей напряжения ПДН-25. В интеграторе будет применено автоматическое устройство опроса, позволяющее быстро подключать измерительное устройство к любому из 50 потенциометров для точного определения величины заданного потенциала.

В интеграторе ЭГДА-11/63 изменена схема питания модели, в результате чего расстояние между шинами с максимальной раз-

ностью потенциалов уменьшается до 1 мм. Установлено полуавтоматическое измерительное устройство с цифровым отсчетом, которое устраняет фактор субъективности при определении потенциала и упрощает процесс измерения при моделировании задач.

К интегратору ЭГДА-11/63 по желанию заказчика будет даваться специальный стенд для моделей, на котором, как и в интеграторе ЭГДА-10/62, все подключения к электропроводной бумаге производятся с задней стороны стенда. Рабочая площадь стенда 1000 × 1800 мм.

Подготавливается к серийному выпуску интегратор ЭИНП, разработанный в Институте математики АН УССР А. Г. Тарапоном и предназначенный для моделирования задач математической физики, описываемых уравнениями параболического типа, в частности уравнением Фурье. В этом интеграторе в качестве электропроводной среды используется электропроводная бумага с распределенной емкостью.

Интегратор фиксирует быстрое изменение потенциала на модели с помощью светящейся точки на электронно-лучевой трубке. На прозрачной шкале измерителя времени определяется время от начала процесса до момента совпадения напряжений.

Одновременно с разработкой новых моделей интеграторов успешно разрабатывается методика, позволяющая расширять области применения интеграторов ЭГДА для моделирования новых задач на электропроводной бумаге. Разрабатываются также всевозможные приставки к имеющимся интеграторам, позволяющие ускорить процесс моделирования и повысить точность получаемых результатов. К таким приборам относятся различные визуализаторы поля, прибор для прямого определения фильтрационного расхода непосредственно на электрической модели и многие другие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман Б. Б. Электропроводный папір для електромодельовання. В зб. «Застосування методу ЕГДА для розв'язання деяких технічних задач», Изд-во АН УССР, 1959, стр. 89—101.

2. Дружинин Н. И. Метод электродинамических аналогий и его применение при исследовании фильтрации. М.—Л., Госэнергоиздат, 1956, стр. 64—83; 183—296.

3. Рижский политехнический институт. Ученые записки, т. XII, фак. автоматики и вычислительной техники, вып. 2. Аналоговые и разностные методы решения внешних краевых задач, Рига, «Звайгзне» 1965, стр. 308—327.

4. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., Физматгиз, 1959, стр. 319.

5. Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И. Интеграторы ЭГДА. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге. Киев, Изд-во АН УССР, 1961, стр. 11—110; 146—151.

*В. И. Дзибалова, Ю. И. Дзибалов,
В. А. Дмитриев, Б. П. Кравченко,
А. Т. Лукьянов, В. Л. Романовский*

СТАТИЧЕСКИЙ ЭЛЕКТРОИНТЕГРАТОР (ПРОМЫШЛЕННЫЙ ОБРАЗЕЦ) И ОПЫТ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Статический электроинтегратор СЭИ предназначен для решения нелинейных задач физики и техники, сводящихся к уравнениям теплопроводности [10]. Прибор может применяться при определении температурных полей в блоках массовых бетонных сооружений типа плотин [2], выборе оптимальной толщины теплозащитных покрытий [3, 4], нахождении теплофизических характеристик вещества по известному температурному полю («обратная задача»), решении следующих задач: теории пограничного слоя [6, 8, 9], переноса нейтронов в ядерных реакторах [7], фильтрации жидкости [5], промерзания грунтов и др., а также может быть полезным для различных учебных и методических целей.

Принцип действия интегратора основан на воспроизведении исходных дифференциальных уравнений с помощью электрической схемы конечно-разностной аппроксимации (пространственной и временной). Квантование времени позволяет сравнительно легко решать уравнения с коэффициентами, зависящими от функции или координат, учитывать переменные стоки или истоки, осуществлять различные граничные условия, активно контролировать ход вычислений и т. п.

Существенным отличием статического интегратора от других устройств подобного типа является:

1. Применение предварительного преобразования области всех возможных значений функции U в другую область L^* с учетом изменения коэффициентов. Переход $L^* \rightarrow L$ осуществляется без участия оператора.

2. Использование одного решающего элемента, составленного из ограниченного числа омических сопротивлений в соответствии с выбранным разностным оператором.

Решение ведется путем последовательного обхода счетным элементом всех узловых точек пространственной области заданной функции, представленной в интеграторе потенциалами. Блок-схема статического электроинтегратора приведена на рис. 1. Питание интегратора осуществляется от трех гальванически не связанных регулируемых источников. Напряжения источников питания снимаются с отдельных обмоток силового трансформатора, выпрямители собраны по мостовым схемам на полупроводниковых диодах.

В блок дискретных потенциометров входят два функциональных и один линейный дискретные делители высокой разрешаю-

шей способности с отводами на общее коммутационное поле. Коммутационное поле собрано из 50 рамок типа РКГ, содержащих 1000 трехконтактных гнезд, посредством которых на лицевую панель выводятся все потенциалы делителей. Решающий элемент состоит из набора декадных сопротивлений, включаемых определенным образом в зависимости от используемой конечно-разностной схемы.

На свободные концы решающего элемента с помощью штекеров с гибкими шнурами задаются с коммутационной панели

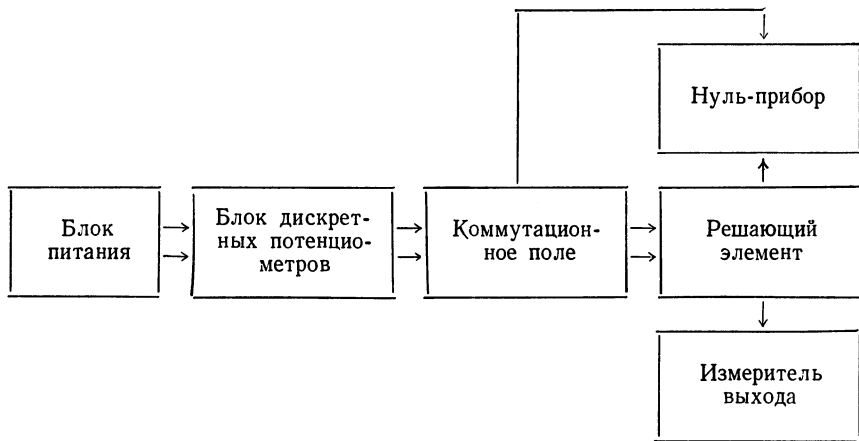


Рис. 1. Блок-схема статического электроинтегратора

потенциалы, представляющие собой значения функции в соответствующих узловых точках области. Потенциал в узле решающего элемента, пропорциональный (или равный) искомой величине, отыскивается с помощью нуль-прибора, расположенного на коммутационной панели. Результат решения можно получить также с помощью цифрового вольтметра, подключаемого отдельно, или блока автоматического поиска, встроенного в интегратор.

Блок автоматического поиска (рис. 2) состоит из реохорда с плавно перемещающимся движком, кинематически связанного с ним реверсивного электродвигателя, счетчика числа оборотов и электронного усилителя. Напряжения, снимаемые с подвижного контакта реохорда и узла решающего элемента, подаются на вход усилителя, куда включено поляризованное реле РП-4, питаемое от сети. С выхода реле снимаются прямоугольные импульсы и подаются на сетку первой лампы усилителя. После усиления и преобразования в синусоидальную форму сигнал поступает на вход электродвигателя. Изменение полярности напряжения разбалансирует переключатель фазы усиливаемого сигнала. На вторую обмотку электродвигателя подается

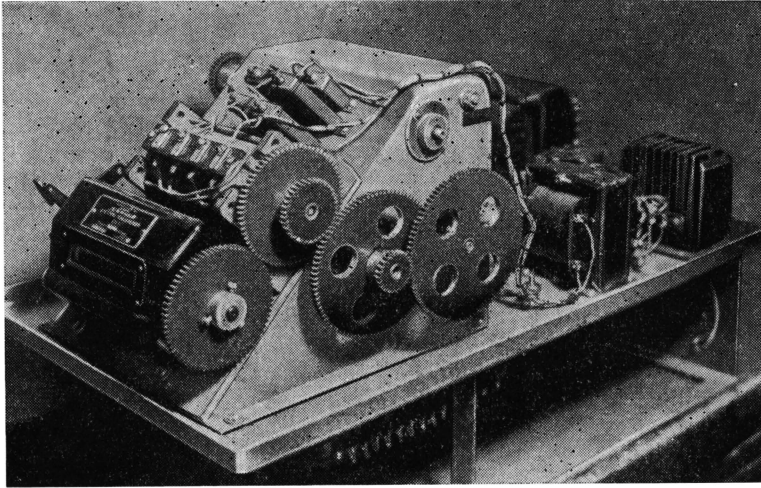


Рис. 2. Блок питания и автоматического поиска:
 Слева направо расположены: счетчик числа оборотов реохорда,
 реверсивный двигатель, реохорд, трансформатор питания

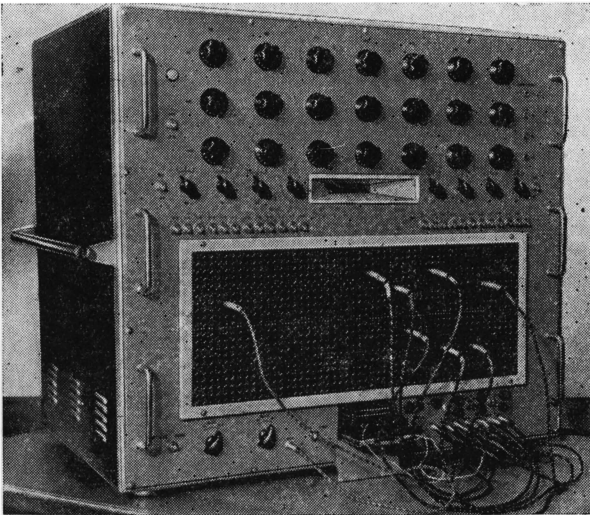


Рис. 3 Статический электроинтегратор (вид спереди).
 Вверху — рукоятки сопротивлений решающего элемента,
 в средней части панели — шкала автоматического поиска и
 тумблера, в нижней части — коммутационное поле, выдвижной
 нуль-гальванометр, штекеры с гибкими шнурами, пере-
 ключатели рода работы и схем решающего элемента

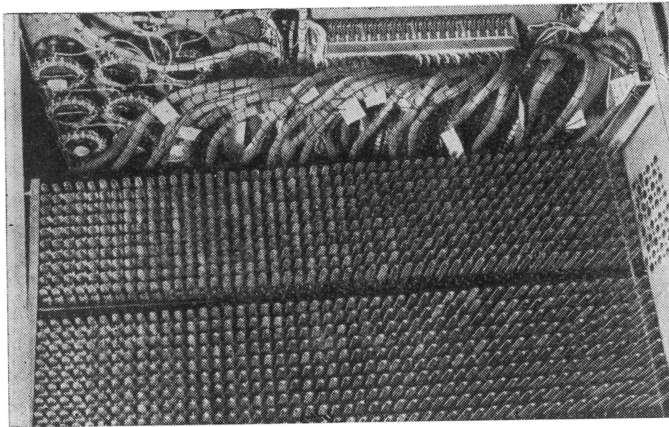


Рис. 5. Функциональный потенциометр с лицевой стороны

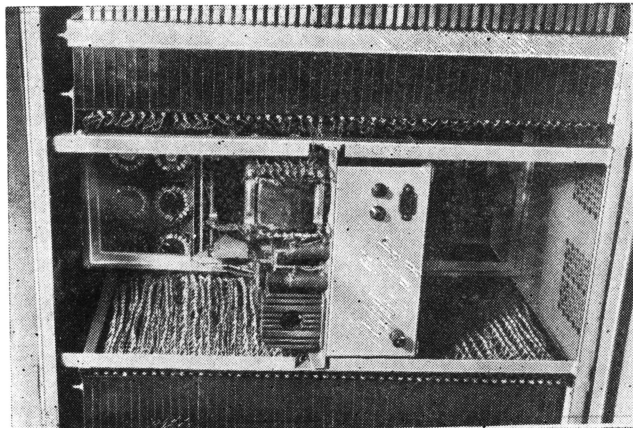


Рис. 4. Статический электроинтегратор (вид сзади), крышка снята. В центральной части расположены блок питания и автоматического поиска, слева и справа — функциональные потенциометры

напряжение от сети. В зависимости от фазы сигнала двигатель вращает вал реохорда так, чтобы подвижный контакт передвигался в сторону уменьшения напряжения разбалансировки. Вследствие линейности реохорда снимаемое с его движка напряжение будет пропорционально показаниям шкалы счетчика.

Фотография статического электроинтегратора приведена на рис. 3 и 4. На лицевой панели размещено коммутационное поле, магазины сопротивлений решающего элемента, шкала автоматического поиска, гибкие шнуры со штеккерами, переключатели схем и рода работы. После съема боковых крышек открывается доступ к функциональным потенциометрам (рис. 5), которые собраны из последовательно соединенных переменных сопротивлений, выполненных на специальных гребенчатых каркасах с пазами, куда укладывается константановая проволока. При перемещении движков с пружинной перемычкой меняется рабочая длина константанового провода в пазах каркаса и таким образом плавно регулируются сопротивления каждой ячейки. На лицевой стороне функциональных блоков имеется гравировка, указывающая номер сопротивления, соответствующий нумерации на коммутационной панели. Требуемая функциональная зависимость устанавливается изменением сопротивлений отдельных секций потенциометров и регулировкой питающего тока. Рассмотрим решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a(U) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1)$$

при начальных и граничных условиях:

$$U(0, t) = 0; U(l, t) = 1; U(x, 0) = U(x); a = a(U).$$

Запишем уравнение (1) в явном конечно-разностном виде

$$\frac{U_{n,k+1} - U_{n,k}}{\Delta t} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} a_i(U) \left[\frac{U_{n-1,k} - 2U_{n,k} + U_{n+1,k}}{\Delta x^2} \right], \quad (2)$$

где $m = \frac{U_{n,k+1} - U_{n,k}}{N}$;

$N = 0,001$ — наименьшее изменение функции, при котором учитывается изменение коэффициентов.

Если на функциональном потенциометре Π_2 (рис. 6, а) заранее задана зависимость $a = a(U)$, то в момент отсутствия тока через нуль-гальванометр при одинаковых сопротивлениях решающего элемента $R_{n-1,k} = R_{n,k} = R_{n+1,k}$ получим

$$\frac{V_{n,k+1} - V_{n,k}}{\Delta t} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m d_i(V) \left[\frac{V_{n-1,k} - 2V_{n,k} + V_{n+1,k}}{3} \right], \quad (3)$$

где
$$m = \frac{V_{n,k+1} - V_{n,k}}{N};$$

$N = 0,001$ — шаг деления напряжения, приложенного к концам дискретного потенциометра.

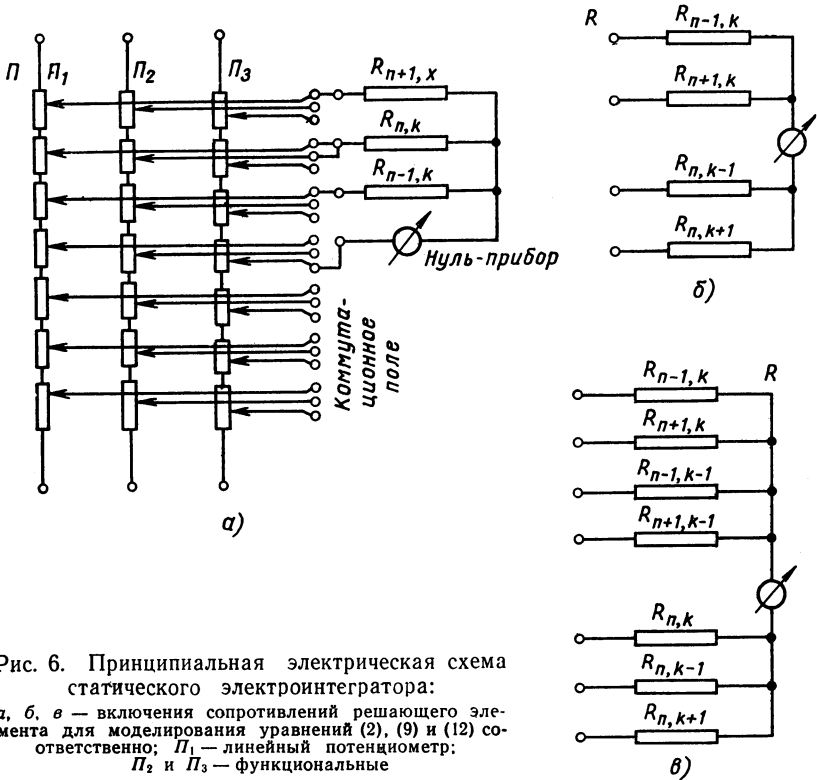


Рис. 6. Принципиальная электрическая схема статического электроинтегратора:
 а, б, в — включения сопротивлений решающего элемента для моделирования уравнений (2), (9) и (12) соответственно; Π_1 — линейный потенциометр; Π_2 и Π_3 — функциональные

Сравнивая уравнения (2) и (3), найдем

$$\frac{\sum_{i=1}^m a_i(U) \Delta t}{\Delta x^2 \sum_{i=1}^m d_i(V)} = \frac{1}{3}. \quad (4)$$

Так как условие $a_i(U) \sim d_i(U)$ выполняется для любого значения функции, то уравнение (3) является аналогом уравнения (2).

При переходе к двумерным задачам

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a(U) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right] \quad (5)$$

число сопротивлений решающего элемента увеличивается до пяти. Если вид зависимости коэффициента $a = a(U)$ не изменился, то производить новую регулировку функционального потенциометра нет необходимости.

Одним из недостатков классической явной схемы (2) является ограничение

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (6)$$

налагаемое условием устойчивости, что значительно затрудняет исследование участков поля, где функция меняется медленно. Применив неявную конечно-разностную схему

$$\frac{U_{n,k} - U_{n,k-1}}{\Delta t} = a \left[\frac{U_{n-1,k} - 2U_{n,k} + U_{n+1,k}}{\Delta x^2} \right], \quad (7)$$

устойчивую при любых значениях

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{M}, \quad (8)$$

можно добиться существенного ускорения процесса вычислений.

Однако реализация схемы (7) на аналоговых вычислительных устройствах связана с рядом серьезных трудностей [11]. Для каждой конкретной задачи требуется создание новой сетки из многих десятков (и даже сотен) сопротивлений. Это относится прежде всего к многомерным задачам с переменными коэффициентами (особенно с зависящими от функции) при наличии источников и стоков, сложных контуров области и т. д.

Если в уравнении (2) член $U_{n,k}$ заменить полусуммой [1]

$$\frac{U_{n,k+1} + U_{n,k-1}}{2},$$

то получим

$$U_{n,k+1} = \frac{U_{n-1,k} - (M-1)U_{n,k} + U_{n+1,k}}{M+1}. \quad (9)$$

Разностное уравнение (9), явное по структуре, обладает свойством неявной схемы и устойчиво для всех $M > 0$. Это обстоятельство позволяет варьировать временным интервалом в широких пределах при фиксированном шаге по координате. Для моделирования разностного уравнения (9) в схеме решающего элемента делаются переключения согласно рис. 6, б. В этом случае справедливо равенство

$$V_{n,k+1} = \frac{R_{n+1}(R_{k-1} + R_{k+1})V_{n-1,k} + R_{n-1}(R_{k-1} + R_{k+1})V_{n,k} - R_{k+1}(R_{n-1} + R_{n+1})V_{n,k-1}}{R_{n-1}(R_{n+1} + R_{n-1})}. \quad (10)$$

Условия моделирования получаются из сравнения уравнений (9) и (10):

$$R_{n+1}(R_{k-1} + R_{k+1}) = 1; R_{k+1} = 1; \quad (11)$$

$$R_{n-1}(R_{k-1} + R_{k+1}) = 1; R_{k-1}(R_{n-1} + R_{n+1}) = (1 + M).$$

Для вычислений по схеме (9) необходимо иметь распределение функции по координате для нескольких интервалов времени Δt , полученные каким-либо другим способом (например, по классической явной схеме). Переход к цилиндрической и сферической симметрии связан только с изменением отношения сопротивлений решающего элемента при перемещении по области.

Для уменьшения погрешности аппроксимации можно воспользоваться, например, двухслойной разностной схемой [12]

$$U_{n,k+1} - U_{n,k} = \left(\frac{3}{2M} - \frac{1}{12}\right)(U_{n-1,k} - 2U_{n,k} + U_{n+1,k}) - \left(\frac{1}{2M} - \frac{1}{12}\right)(U_{n-1,k-1} - 2U_{n,k-1} + U_{n,k+1}) \quad (12)$$

с ошибкой аппроксимации $O(\Delta t^2, \Delta x^4)$ и устойчивой при

$$M = \frac{\Delta x^2}{a\Delta t} = 1/3.$$

Если соединить решающий элемент по схеме рис. 6, в, то получим

$$V_{n,k+1} = \frac{(V_{n-1,k} + V_{n+1,k})R_1R_3(2R_{k+1} + R_n) + V_{n,k-1}(2R_{k+1} + R_n)R_1R_2}{R_n(2R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3)} - \frac{(V_{n-1,k-1} + V_{n+1,k+1})R_{k-1}(2R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3)}{R_n(2R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3)}. \quad (13)$$

Сравнивая уравнения (12) и (13), получим:

$$R_2R_3(2R_{k+1} + R_n) = 18 - M;$$

$$R_1R_2(2R_{k+1} + R_n) = 12M - 2(18 - M);$$

$$R_1R_2(2R_{k+1} + R_n) = 2(6 - M);$$

$$R_{k+1}(2R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3) = (6 - M).$$

Переход к другим конечно-разностным уравнениям связан только с переключениями в схеме решающего элемента. Выбор разностного оператора в каждом случае определяется требованиями, предъявляемыми условиями задачи.

Статический электроинтегратор в выполненном варианте позволяет находить решения с достаточной для многих практических случаев точностью (0,5—1,0%). Точность решения можно увеличить рациональным выбором конечно-разностной аппроксимации, переходом к более мелкому шагу сетки или применением (в случае линейных задач) различных приемов дробления разностного оператора.

К числу достоинств статических электроинтеграторов следует отнести возможность контролирования хода вычислений и возникающей ошибки аппроксимации (по величине четвертой производной), легкого перехода к решениям в пространство нескольких измерений, использования различных разбиений области на сетки (в общем случае неравномерные), объединения нескольких интеграторов, когда исследуемая область содержит большое число узлов. Что касается полной автоматизации процесса решения, то она не связана с принципиальными трудностями. Однако следует заметить, что в этом случае прибор может потерять основное свое преимущество — большую универсальность.

Как показал опыт, работа на интеграторе даже без применения автоматического поиска дает выигрыш в скорости счета (по сравнению со счетом на клавишных машинах) в десятки раз, особенно при решении нелинейных двухмерных и трехмерных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1963, стр. 487.
2. Вулис Л. А., Ерахтин Б. М., Инюшин М. В., Лукьянов А. Т. Расчет теплового состояния бетонной плотины в связи с выбором рациональных методов производства работ. т. VI, № 10, 1963.
3. Жеребятьев И. Ф., Лукьянов А. Т. Применение статических моделей к решению задач теории теплопроводности. В сб. «Вопросы теории и применения математического моделирования», М., «Сов. Радио», 1965.
4. Жеребятьев И. Ф., Лукьянов А. Т. Решение нестационарных задач теплопроводности с фазовыми переходами при температурной зависимости коэффициентов. ИФЖ, № 6, 1964.
5. Жеребятьев И. Ф., Рыкова Н. П., Лукьянов А. Т. Математическое моделирование нелинейных уравнений параболического типа. Труды II Всесоюзного совещания по тепло- и массопереносу. Минск, 1963.
6. Ибрагимов И. И., Кашкаров В. П., Лукьянов А. Т. О пограничном слое на движущейся непрерывной плоской поверхности. «Известия вузов. Авиационная техника», № 2, 1965.
7. Исаев Н. У., Лукьянов А. Т. Опыт моделирования критического состояния ядерных реакторов на статических электроинтеграторах. «Изв. АН Каз.ССР. серия энергетическая», вып. 2, 16, 1959.
8. Кашкаров В. П., Лукьянов А. Т. К расчету обтекания пластины капельной жидкостью с переменной вязкостью. «Журнал прикладной механики и технической физики», Новосибирск, № 5, 1964.
9. Лукьянов А. Т., Шарая С. Н. Решение задач теории пограничного слоя на статических моделях. «Вестник АН Каз.ССР», № 2, 239, 1965.
10. Лукьянов А. Т. Специализированная статическая модель для решения нелинейных уравнений математической физики. В сб. «Вопросы теории и применения математического моделирования», М., «Сов. Радио», 1965.
11. Liebman G. A new electrical analog method for the solution of transient heat conduction problems. Transactions of the ASME, 78, N 3, 655—665, 1956.
12. Mann W. R., Timlake W. P. An optimum explicit recurrence formula for the diffusion equation Journal Elisha Mitchell Scient. Soc. 1957, N 2, pp. 254—257.

И. Г. Винтизенко

**ПОСТРОЕНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ
НА БАЗЕ ОПЕРАЦИОННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УСИЛИТЕЛЯ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ ПОЛЯ**

Развитие методов решения задач теории поля на сетках сопротивлений, усложнение решаемых задач, учет «тонких» эффектов и т. п. приводят к необходимости дополнения электрических сеток элементами и блоками аналоговых вычислительных машин.

Активные аналоговые элементы помещаются либо в каждый узел сетки и тогда могут решаться нестационарные уравнения поля в реальном масштабе времени, либо используется один решающий блок с запоминающими устройствами в каждой узловой точке.

Развитием последних, «итеративных» методов являются статические интеграторы [1]. Оба типа устройства имеют свои преимущества и недостатки.

В настоящей работе рассматриваются линейные активные аналоговые элементы, помещаемые в каждый узел сетки и предназначенные для образования источников или стоков, произвольно зависящих от времени. Известно 4 вида подобных схем: 1) измерители потенциалов с бесконечно большим (практически до 0,5 гом) входным сопротивлением; 2) отрицательные сопротивления и емкости (а также комплексные отрицательные сопротивления со сдвигом фазы от 0 до 2π); 3) управляемые генераторы тока, в которых ток не зависит от нагрузки; 4) нелинейные комплексные сопротивления (в том числе отрицательные), управляемые напряжением.

До сих пор, к сожалению, отсутствует классификация и единый подход к построению и применению всех вышеуказанных типов схем.

Рассмотрим активный двухполюсник (рис. 1). Эта схема при соответствующем подборе сопротивлений $R_0, R_{10}, R_{12}, R_{20}, R_{21}$ может выполнять функции устройств первых трех типов и частично функции устройств четвертого типа. Анализ проводим обобщенным методом узловых напряжений. Наличие в схеме операционных усилителей с бесконечно большим коэффициентом усиления учитывается вычеркиванием из матрицы проводимостей схемы строки с номером, соответствующим номеру выходного узла усилителя, и столбца с номером входного узла усилителя [8].

Схема, представленная на рис. 1, при использовании в качестве измерителя напряжения, не нагружающего источник сигнала,

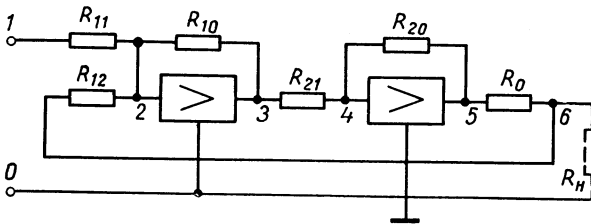


Рис. 1. Принципиальная схема измерителя напряжений

ла, должна иметь со стороны зажимов $0-6$ бесконечно большое выходное сопротивление.

При $Z_u = R_{11}$, $a = 1$, $b = 6$ выходное сопротивление

$$Z_{вых} = \frac{Z_u \Delta_{bb} + \Delta_{aa,bb}}{Z_u \Delta + \Delta_{aa}} = \frac{R_{11} \Delta_{66} + \Delta_{11,66}}{R_{11} \Delta + \Delta_{11}}$$

Находим соответствующие алгебраические дополнения и вычисляем

$$Z_{вых} = \frac{R_0 R_{12}}{R_0 + R_{12} - \frac{R_{10} R_{20}}{R_{21}}}, \quad (1)$$

откуда следует, что бесконечное сопротивление со стороны зажимов $0-6$ реализуется при

$$R_0 + R_{12} = \frac{R_{10} R_{20}}{R_{21}}. \quad (2)$$

Рассмотрим подобную схему с дополнительными входами $R_{11}, R_{13}, R_{14}, \dots$ и R_{22}, R_{23}, R_{24} , на которые подаются управляющие напряжения (рис. 2). Схема при выполнении условия (2) превра-

щается в управляемый генератор тока с бесконечно большим выходным сопротивлением и ток в нагрузке

$$I = U_1 \frac{R_{10}R_{20}}{R_0R_{11}R_{21}} + U_3 \frac{R_{10}R_{20}}{R_0R_{13}R_{21}} + \dots - U_2 \frac{R_{20}}{R_0R_{22}} - U_4 \frac{R_{20}}{R_0R_{23}} - \dots$$

Если знаменатель выражения (1):

$$R_0 + R_{12} - \frac{R_{10}R_{20}}{R_{21}} < 0, \quad (3)$$

то выходное сопротивление схемы становится отрицательным и схема при нулевых управляющих напряжениях представляет собой отрицательное сопротивление, величина которого

$$Z_{\text{вых}} = - \frac{R_0R_{12}}{\frac{R_{10}R_{20}}{R_{21}} - (R_0 + R_{12})}.$$

Выполним схему несколько иначе (рис. 3). Она представит собой обратимый счетно-решающий элемент более сложной структуры с дополнительными необратимыми управляющими входами

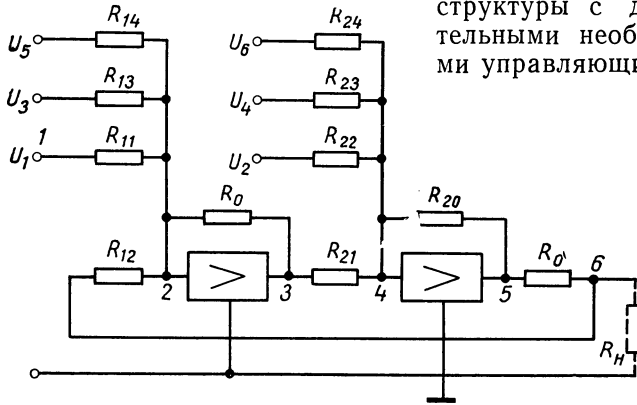


Рис. 2. Принципиальная схема измерителя напряжений с дополнительными входами

дами. Область применения различных видов вышеуказанных схем не ограничивается использованием их в сеточных моделях. Они позволяют построить систему «токовой аналогии», что в некоторых случаях может оказаться более удобным.

Устойчивость схем определяется обобщенными методами узловых напряжений. Исследуем определитель $\Delta_{aa}(p) = 0$, учитывая нагрузки на клеммах 0—6 (рис. 1). Воспользуемся теоремой Гурвица. Определитель

$$\Delta_{aa} = \Delta_{11} = G_{10}G_{20}(G_0 + G_{12} + G_n) - G_0G_{12}G_{21},$$

где G_{ij} — проводимости схемы;
 G_n — проводимость нагрузки.

Необходимые и достаточные условия устойчивой работы схемы выражаются условием $\Delta_{11} > 0$, т. е. условием

$$R_n < \frac{R_0 R_{12} R_{21}}{R_{10} R_{20} - R_{12} R_{21} - R_0 R_{21}}.$$

Для схемы с бесконечно большим выходным сопротивлением справедливо равенство (2), тогда для устойчивой работы необходимо выполнение условия $R_n < \infty$, т. е. нагруженная схема будет устойчива («устойчива при коротком замыкании»).

Для схемы с отрицательным сопротивлением условия устойчивости становятся более жесткими. Так как для этих схем спра-

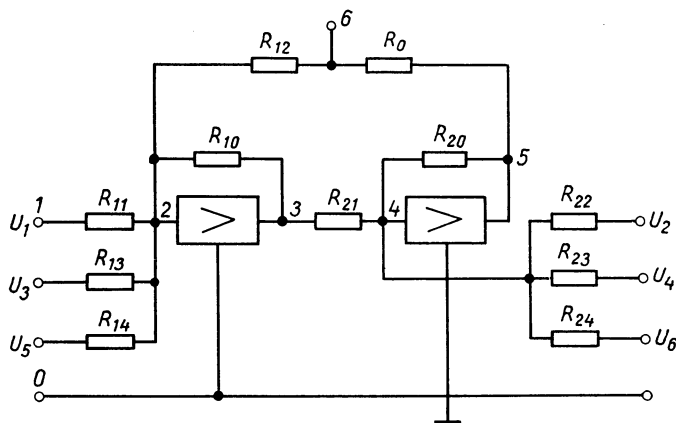


Рис. 3. Схема измерителя напряжений с дополнительными необратимыми входами

ведливо соотношение (3), которое можно записать в виде равенства

$$\frac{R_{10} R_{20}}{R_{12} R_{21}} = \xi \left(1 + \frac{R_0}{R_{12}} \right),$$

где $\xi > 1$,

то для устойчивой работы необходимо, чтобы

$$R_n < \frac{R_0}{(\xi - 1) \left(1 + \frac{R_0}{R_{12}} \right)}.$$

Такое отрицательное сопротивление также будет устойчиво при коротком замыкании.

Строятся схемы, устойчивые при холостом ходе [4]. Недостатком таких схем является отсутствие общей точки источника питания аналоговой аппаратуры и сетки сопротивлений.

Аналогично выполняются схемы отрицательных емкостей, однако значение отрицательной емкости реализуется приближенно. Так, например, для схемы, представленной на рис. 4,

$$Z_{вых} = \frac{-1}{\rho C_0 \left(\frac{R_{10}R_{20}}{R_{12}R_{21}} - 1 \right) + \frac{1}{R_{12}}}$$

Для получения

$$Z_{вых} = \frac{-1}{\rho C_0 \alpha}, \quad \alpha = \frac{R_{10}R_{20}}{R_{12}R_{21}} - 1$$

нельзя беспредельно увеличивать R_{12} , так как оно входит и в выражение α , которое всегда должно быть больше 0.

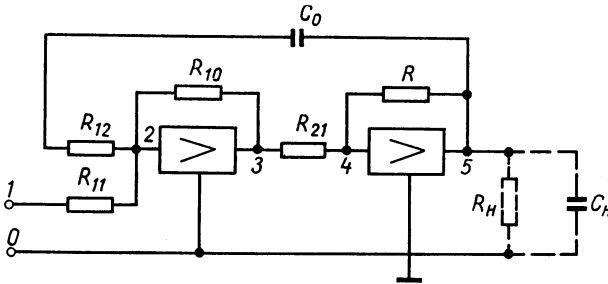


Рис. 4. Схема отрицательных емкостей

Условиями устойчивости схемы являются равенства

$$\Delta_{11}(\rho) = G_{10}G_{20} \left[\rho C_0 \left(1 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{10}G_{20}} \right) + G_{12} \right] = k [\rho a_1 + a_0];$$

$$a_0 > 0; \quad R_{12} < \infty; \quad a_1 > 0; \quad \frac{R_{10}R_{20}}{R_{12}R_{21}} < 1.$$

Когда схема нагружена сопротивлением $R_n/G_n > 0,1$, условие устойчивости следующее:

$$G_n + G_{12} > 0; \quad \frac{R_{10}R_{20}}{R_{12}R_{21}} < 1.$$

Когда схема нагружена емкостью C_n , условия устойчивой работы

$$G_{12} > 0; \quad \frac{R_{10}R_{20}}{R_{12}R_{21}} < 1 + \frac{C_n}{C_0}.$$

Казалось бы, что идеальную отрицательную емкость $\frac{-1}{\rho C_0 \beta}$, где β — некоторый постоянный коэффициент, можно получить при $G_{12} = \rho C_{12}$; $G_{10} = \rho C_{10}$. В этом случае

$$Z = \frac{-1}{pC_0 \left(\frac{C_{12}}{C_{10}} \cdot \frac{G_{21}}{G_{20}} - 1 - \frac{C_{12}}{C_0} \right)},$$

где $\frac{C_{12}}{C_{10}} \cdot \frac{G_{21}}{G_{20}} - 1 - \frac{C_{12}}{C_0} = \beta$. Для «отрицательности» емкости необходимо, чтобы $\beta > 0$, т. е.

$$\frac{R_{20}}{R_{21}} > \frac{C_{10}}{C_{12}} + \frac{C_{10}}{C_0}, \quad (4)$$

в то время как устойчивость схемы достигается при

$$\frac{R_{20}}{R_{21}} < \frac{C_{10}}{C_{12}} + \frac{C_{10}}{C_0}. \quad (5)$$

Условия (4) и (5) несовместны, и схема оказывается неработоспособной.

Схемы рассматриваемой структуры могут применяться для создания нелинейных емкостей [7]. Если в схеме (рис. 4) сопротивления R_{20} и R_{21} нелинейно зависят от напряжений U_5 и U_3 , то

$$Z_{ex} = \frac{R_{12}}{1 - pC_0 R_{12} \left[\frac{R_{10}}{R_{12}} \cdot \frac{R_{20}(v)}{R_{21}(v)} - 1 \right]},$$

откуда, обозначая

$$C_0 \left[1 - \frac{R_{10}}{R_{12}} \cdot \frac{R_{20}(v)}{R_{21}(v)} \right] = C_v,$$

получим

$$Z_{ex} = \frac{1}{pC_v + G_{12}} \approx \frac{1}{pC_v}.$$

Были описаны более общие схемы нелинейных сопротивлений и емкостей, управляемых внешним напряжением, при этом в состав решающей схемы входит блок перемножения [2].

Основным недостатком схемы со счетно-решающим блоком в каждом узле сетки является громоздкость аналогового оборудования. Требовалось сконструировать операционный усилитель, обладающий всеми достоинствами обычного операционного усилителя (большой коэффициент усиления, малый дрейф, малое выходное сопротивление и пр.), но который заменил бы два усилителя стандартной схемы отрицательного сопротивления и позволил бы получить существенную экономию оборудования.

Исследования показали, что наилучшими операционными возможностями обладает усилитель с дифференциальными входами [6] (будем кратко называть его операционным дифференциальным усилителем ОДУ), представленный на рис. 5. Однако

проектирование ОДУ с малым дрейфом затруднительно из-за высоких уровней напряжений на входах, необходимости одновременного устранения дрейфа, несимметрии и присущей дифференциальным каскадам «ошибки по уровню» [5]. В лабораториях Томского политехнического института был построен ОДУ по схеме «плавающего входа» с прямым преобразованием сигнала симметричным транзисторным преобразователем. Методы расчета такого преобразователя, методика подбора транзисторов в пары для плеч модулятора и т. п. приведены в работе [3].

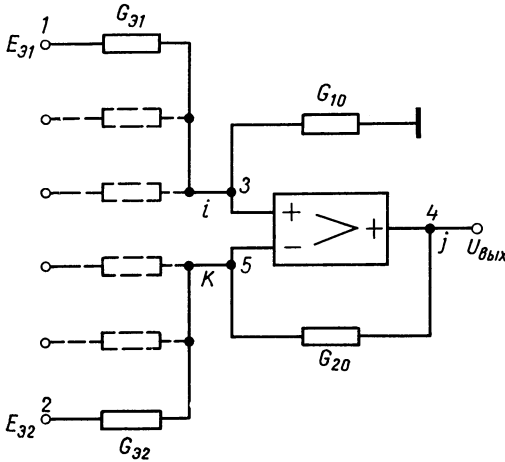


Рис. 5. Схема операционного дифференциального возбуждения

По аналогии с правилом расчета схем, содержащих операционные усилители с бесконечно большими коэффициентами усиления, обобщенными методами можно найти правило для расчета схем с ОДУ. По этому правилу для учета имеющегося в электрической схеме ОДУ необходимо в исходной матрице проводимостей схемы сложить проводимости столбцов, номера которых соответствуют номерам входных узлов ОДУ, и вычеркнуть

строку, имеющую номер выходного узла усилителя. При этом необходимо, чтобы номер k «минусового входа» был больше номера j выхода усилителя.

Пользуясь этим правилом, найдем основные соотношения для ОДУ. Объединяем r входов, идущих к «плюсовому входу» ОДУ (узел i), в один вход с эквивалентным входным сигналом и эквивалентной проводимостью G_{31} [5]. Аналогично можно записать входной сигнал E_{32} и проводимость G_{32} для входа k . Записываем матрицу проводимостей для схемы, представленной на рис. 5, складываем элементы столбцов i и k (3 и 5), вычеркиваем j -ю строку (4-ю). Выходное напряжение для схемы с двумя входами

$$U_{\text{вых}} = \frac{\Delta_{aj.bb}}{\Delta_{aa.bb}} E_{31} + \frac{\Delta_{bj.aa}}{\Delta_{aa.bb}} E_{32},$$

где a — номер узла первого входа схемы (№ 1);

b — номер второго входа (№ 2);

j — номер выходного узла ОДУ (№ 4).

Вычисляем соответствующие алгебраические дополнения и заменяем $E_{\partial 1}$, $G_{\partial 1}$, $E_{\partial 2}$ и $G_{\partial 2}$ их развернутыми выражениями. Выходное напряжение

$$U_{вых} \equiv \frac{\sum_{m=0}^r G_{m2}}{G_{20} \sum_{m=0}^r G_{m1}} \sum_{m=1}^r E_{m1} G_{m1} - \frac{1}{G_{20}} \sum_{m=1}^s E_{m2} G_{m2},$$

что совпадает с выражением для ОДУ, полученным в работе [4].

Первые исследования операционных возможностей ОДУ проводились на его модели (определялись основные количественные

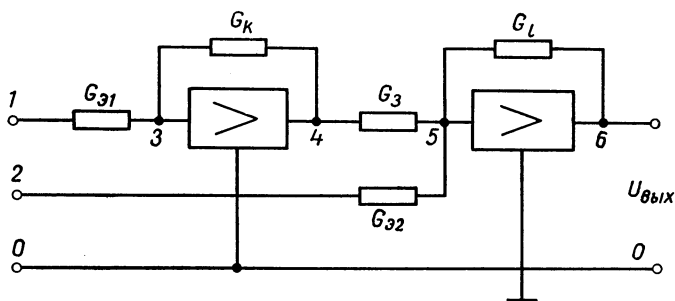


Рис. 6. Схема моделирования ОДУ

соотношения в схемах с ОДУ, проверялась устойчивость схем, построенных на базе ОДУ и пр.). Моделирование ОДУ выполнялось при помощи схемы с двумя операционными усилителями (рис. 6). Для этой схемы

$$U_{вых} = \frac{G_{\partial 1} G_3}{G_k G_l} E_{\partial 1} - \frac{G_{\partial 2}}{G_l} E_{\partial 2}.$$

Для полного соответствия модели и ОДУ необходимо, чтобы выполнялись условия

$$G_l = G_{20}; \quad G_3 = G_{\partial 2} + G_{20}; \quad G_k = G_{\partial 1} + G_{10}.$$

Очень удобно применять операционные дифференциальные усилители в схемах генераторов тока, отрицательных сопротивлений и пр. При этом упрощается расчет, сокращается число узлов схемы, экономится оборудование, схема становится универсальной.

Схема высокоомного измерителя напряжения [9] показана на рис. 7. Входное сопротивление схемы со стороны узлов 0—4 (счи-

таем точку 1 выходом с $Z_{\kappa} = 0$) $Z_{ex} = \infty$ или в более общем случае при произвольных значениях сопротивлений $R, R_1,$

$$Z_{ex} = \frac{1}{G + G_1 - \frac{G_1}{G_3} (G_2 + G_3)}.$$

Схема генератора тока получается добавлением к этой схеме цепи управляющего напряжения $U_{ex} \rightarrow kR(R_2) \rightarrow \kappa$ узлу.

При построении схем отрицательных сопротивлений на базе ОДУ удастся получить как отрицательные сопротивления, устойчивые при холостом ходе, так и отрицательные сопротивления, устойчивые при коротком замыкании, причем в обоих случаях

внешняя цепь (например, сетка сопротивлений) может иметь общую точку с источником питания ОДУ.

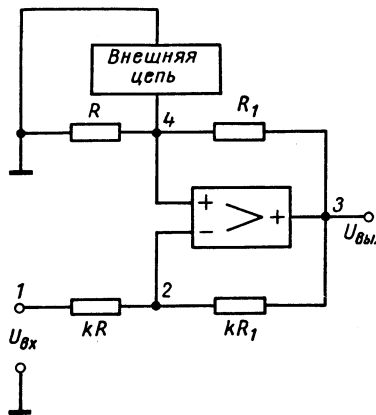


Рис. 7. Схема высокоомного измерителя напряжений

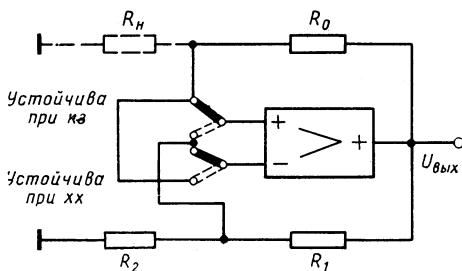


Рис. 8. Схема отрицательного сопротивления

Рассмотрим схему отрицательного сопротивления (рис. 8). Сопротивление ее со стороны узлов 0—1 ($a = 1, b = 2$)

$$Z_{ex} = -\frac{R_0 R_2}{R_1}.$$

Условия устойчивости работы схемы

$$Z_{ex} < \frac{R_2}{R_1} R_0,$$

где Z_{ex} — сопротивления нагрузки.

Эта схема будет устойчива при коротком замыкании.

Простое переключение входов ОДУ, показанное на рис. 8, приводит к условию устойчивости схемы при холостом ходе

$$Z_{ex} > \frac{R_2}{R_1} R_0.$$

Таким образом, применение операционных дифференциальных усилителей в качестве основного элемента комплекса «аналоговые схемы — сетки сопротивлений» для решения задач поля и других задач позволяет строить схемы, обладающие универсальностью, удобные при расчете и использовании и простые по структуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулис Л. А., Лукьянов А. Т. Электростатический интегратор. В сб. «Исследование процессов переноса. Вопросы теории относительности». Алма-Ата, Изд. Казахского Государственного университета, 1959.
2. Груздев И. А. и др. Применение аналоговых вычислительных машин в энергетических системах. М., «Энергия», 1964, стр. 44—49.
3. Кармадонов А. Н., Винтизенко И. Г. и др. О применении транзисторных преобразователей в решающих усилителях. 5-я Всесоюзная конференция по автоматическому контролю и методам электрических измерений, Новосибирск, 1963.
4. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 310—313.
5. Сигорский В. П. Анализ электронных схем. Киев, Гостехиздат УССР, 1960, стр. 176.
6. С м о л о в В. Б. Вычислительные преобразователи с цифровыми управляемыми сопротивлениями. ГЭИ, 1961, стр. 28.
7. F r i e d m a n n N. E. Analog Methods for Study of Transient Heat Flow in Solids coith Temperature — Dependent Thermal. Properties Journal of Applied Physics, 1955, v. 26, N 1, January, p. 129—130.
8. A. N a t h a n. Matrix analysis of networks Having infinity — Gain Operational Amplifiers. Proceedingr of IRE, 1961, v. 49, N 10, October, p. 1577—1578.
9. D. H. S h e i n g o l d. Constant Current Source for Analog Computer Use. IRE Transactions on Electronic Computers, 1963, v. e. c.—12, N 3, June, p. 324.
10. R. W. T h o r p e. Constant Current Source for Analog Computer Use. IRE. Transactions on Electronic Computers, 1962, v. e. c.—11, N 6, December, p. 792.

В. А. Плеханов, Р. М. Коган

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО

Метод электрического моделирования широко применяется для решения многих технических задач. За последние два десятилетия создан ряд типов сеточных аналоговых математических машин АЭММ как общего применения (ЭИ-12, УСМ-1), так и специализированных (ЭМ-5 и др., в том числе изготовляемые силами заинтересованных организаций). Измерение исходных функций на АЭММ производится, как правило, измерительным устройством ручного обслуживания и требует большого количества времени (около 4 ч) для замера результатов в 400—500 точках сетки, тогда как процесс решения происходит практически мгновенно.

Автоматизация измерений и регистрации результатов решений позволяет не только значительно сократить общее время решения задач, но и повысить точность измерений за счет устранения субъективных ошибок оператора. Сложные, с большим количеством узловых точек, сеточные модели типа УСМ-1 снабжены автоматическим измерительным и опрашивающим устройством АИУ, которое является составной частью АЭММ. В настоящее время промышленностью не выпускаются автономные приборы и блоки, годные для использования в качестве АИУ для сеточных моделей, имеющих 400—800 узловых точек.

В Центральном котлотурбинном институте им. И. И. Ползунова разработано и изготовлено АИУ, в котором применяются выпускающиеся отечественной промышленностью электронный цифровой вольтметр ЭВЦ-2 и цифropечатающая машина ЦПМ-1. Конструктивно АИУ выполнено в виде двух блоков: блока опрашивающего устройства, размещенного в прямоугольном корпусе и имеющего штепсельные разъемы для соединения с сеткой аналоговой модели, и блока измерительного устройства. Оба блока связаны между собой соединительными кабелями.

На рис. 1 представлена блок-схема АИУ, состоящая из опрашивающего устройства *ОУ*, запоминающего устройства *ЗУ*, вольтметра *ЭЦВ*, цифropечатающей машины *ЦПМ*, блока разрешения измерений *БРИ*, блока управления измерениями *БУИ*, шифраторов координат и момента времени измерения *ШК* и *ШВ* и блока питания *БП*.

Опрашивающее устройство выполнено на шаговых искателях с палладированными контактами и электромагнитных реле и осуществляет последовательный опрос узловых точек, а также служит для выдачи координат опрашиваемой точки и остановки измерений в конце опроса.

Запоминающее устройство служит для запоминания модуля мгновенного значения напряжения при измерениях мгновенных значений импульсных напряжений на *РС*-сетке, а также при измерениях амплитудных значений напряжения на *R*-сетке, работающей на переменном токе. В данном устройстве применена широко используемая в вычислительных машинах схема запоминания на емкостях [3, 4].

Для использования всего диапазона ЭЦВ-2 измеряемое напряжение усиливается усилителем постоянного тока с коэффициентом усиления 4—6, имеющим ступенчатую и плавную регулировку усиления. Изменяя коэффициент усиления, можно получить отсчет напряжений, численно соответствующий значениям искомых физических величин.

Для обеспечения работы вольтметра ЭЦВ-2 совместно с опрашивающим устройством в его схему добавлен ключ, исключающий срабатывание ЭЦВ-2 при переключении с одной точки на другую. Это вызвано тем, что вольтметр ЭЦВ-2 предназначен

для измерения медленно меняющихся (с частотой не выше 0,1 гц) напряжений, а напряжение, снимаемое с шаговых искателей опрашивающего устройства, имеет форму П-импульса и при переключении дает отрицательный всплеск, вызывающий срабатывание измерительного фантастрона ЭЦВ-2, что дает ложный отсчет. На рис. 2 приведена схема блока БРИ, который управляет электронным ключом измерительного фантастрона, не изменяя основной схемы вольтметра, и исключает появление ложного отсчета.

Схема состоит из триггера, собранного на лампе L_2 (6Н1П), и ждущего мультивибратора на лампе L_1 (6Н1П). Триггер уп-

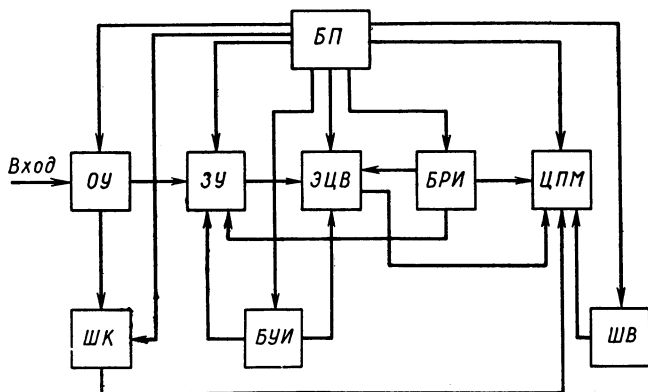


Рис. 1. Блок-схема автоматического измерительного устройства

равляется импульсом запуска, идущим непосредственно от ЭЦВ-2, и импульсом конца измерения измерительного фантастрона вольтметра, формируемым ждущим мультивибратором (L_1).

Управление работой схемы запоминания и согласование момента времени измерения с измеряемыми импульсами осуществляется схемой управления измерениями БУИ, использующей распространенные в электронной технике усилители постоянного тока и релаксационные реле [1, 2].

Для получения отпечатанных на ленте координат точек измерения используется схема диодного шифратора. Каждой точке РС-сетки соответствуют две координаты: номер ряда и номер точки. Шаговые искатели опрашивающего устройства, переключая вход схемы измерения, одновременно подают сигнал на шифратор, с выхода которого двоичный код (1; 2; 4; 8), соответствующий координатам точки, подается на печатающую машину и на световое табло. Аналогично кодируется и регистрируется на ленте момент времени измерения.

Блок питания измерительного и опрашивающего устройства состоит из нескольких стабилизированных выпрямителей, питающих анодные и экранные цепи ламп электронных блоков, и нестабилизированного источника питания электромагнитных реле и шаговых искателей.

Описанное измерительное и опрашивающее устройство позволяет производить измерения результатов решения на RC -сетках

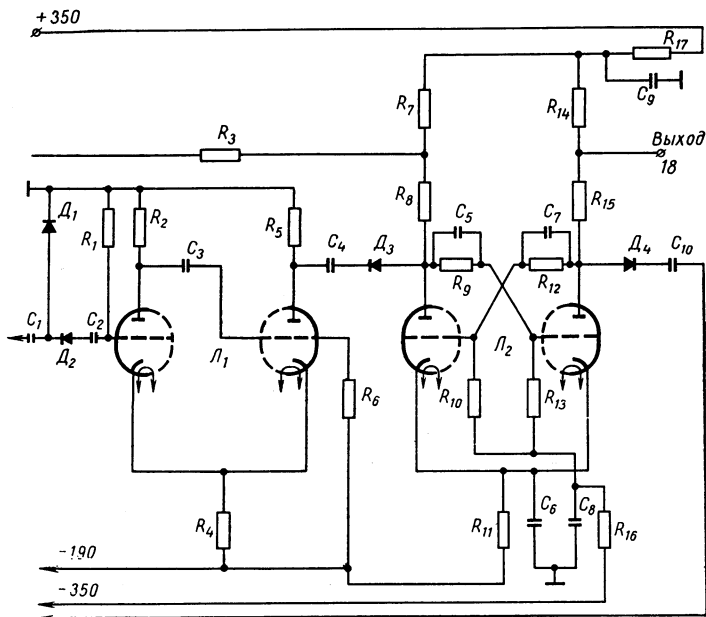


Рис. 2. Схема блока разрешения измерений

и R -сетках, питающихся переменным током, только в режиме автоматического замера, а на R -сетках, питающихся постоянным током, как в автоматическом режиме, так и в режиме одиночного замера. В режиме автоматического замера производится измерение во всех узловых точках со скоростью одно измерение в секунду или одно измерение в 2 сек. В режиме одиночного замера производится измерение в одной точке сетки. После измерения опрашивающее устройство переключается на следующую точку. Результаты измерения регистрируются на бумажной ленте шириной 60 мм в виде колонки цифр. Одновременно рядом с результатом измерения печатаются координаты узловой точки, знак напряжения и момент времени замера. Напечатанные значения напряжений, координат и момента времени измеряемой величины дублируются на световых табло, что позволяет считывать

результаты при выключенном механизме печати и облегчает настройку измерительного устройства.

Погрешность АИУ практически не превышает погрешности электронного цифрового вольтметра ЭЦВ-2 ($\pm 0,5\%$ от шкалы). Дискретность измеряемой величины в диапазоне от 0 до ± 100 составляет 0,1. Входное сопротивление АИУ равно 600 ком.

Данное устройство используется для автоматизации измерений на электроинтеграторе СЭИ-02 ЦКТИ, имеющем 552 узловых точки и может быть применено для автоматизации измерений на других сеточных моделях, например на ЭИ-12.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байда Л. И., Семенович А. А. Электронные усилители постоянного тока. М.—Л., Госэнергоиздат, 1953, стр. 192.
2. Бонч-Бруевич А. М. Применение электронных ламп в экспериментальной физике. ГИТТЛ, 1955, стр. 440—470.
3. Жовинский В. Н. Схемы запоминания напряжений и блоки запаздывания. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961, стр. 8—21.
4. Николаев Н. С., Козлов Э. С., Полгородник Н. П. Аналоговая математическая машина УСМ-1. М., Машгиз, 1962, стр. 171—195.

Н. Е. Саламатин

ПРИСТАВКА К ЭЛЕКТРОИНТЕГРАТОРУ ЭГДА-9/60 ДЛЯ СЪЕМА РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Решение задачи теории потенциала при помощи электроинтеграторов получается мгновенно после задания граничных условий, однако результат отыскивается на основании многочисленных измерений в различных точках поля.

При нахождении оптимального решения из нескольких вариантов необходимо быстро получить информацию о реакции модели на вводимые изменения.

Таким образом, возникает необходимость в автоматизации процесса съема результатов решения в виде непрерывной функции координат точек модели.

Для электроинтеграторов, в которых в качестве проводящей среды используется электролит, создан целый ряд установок, позволяющий построить линии равного потенциала и траектории заряженных частиц (траектографы). Такие установки достаточно полно освещены в литературе [1, 2, 7].

На интеграторах с электропроводной бумагой, к которым относится ЭГДА-9/60 [3], непрерывный съем решения затрудняется

тем, что нельзя применять подвижный зонд из-за значительного изменения контактного сопротивления между зондом и моделью.

Для съема результатов решения с таких моделей используются специальные неподвижные электроды, устанавливаемые в заданных точках.

В Институте математики АН УССР разработан прибор для визуального наблюдения эквипотенциальных линий на экране осциллографа [4].

Специальная установка для электро моделирования [3], разработанная в Рижском политехническом институте, содержит коммутирующую систему, которая позволяет подавать на регистрирующее устройство потенциал или разность потенциалов с различных точек поля по изучаемому направлению.

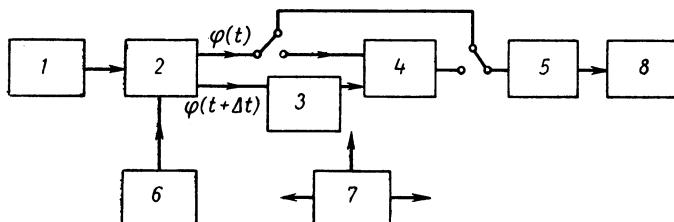


Рис. 1. Блок-схема установки

Однако с помощью этих установок не удается снять с модели распределение градиента потенциала.

Установка, разработанная в Казанском авиационном институте, в отличие от описанных выше позволяет наблюдать на экране осциллографа не только распределение потенциала, но и распределение градиента его вдоль заданной линии тока, что используется при решении задач гидродинамики.

Блок-схема установки (рис. 1) состоит из следующих узлов: 1 — электрическая модель; 2 — коммутатор; 3, 4, 5 — операционные усилители; 6 — генератор пилообразного напряжения; 7 — блок питания; 8 — регистрирующее устройство (осциллограф).

Электрическая модель 1 изготовлена из электропроводящей бумаги на электроинтеграторе ЭГДА-9/60.

Коммутатор 2 служит для съема потенциала $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, 24$) последовательно с 24 токоснимающих электродов модели.

Электроды расположены на равных расстояниях ΔS вдоль заданной линии тока. Последовательность потенциалов φ_i образует ступенчатую функцию $\varphi(S)$. Одновременно коммутатор воспроизводит функцию с запаздыванием по времени Δt . Таким образом, с коммутатора снимаются две функции $\varphi(t)$ и

$\varphi(t + \Delta t)$. Запаздывание по времени на Δt эквивалентно приращению ΔS . Разность между функциями $\Delta\varphi_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(t + \Delta t)$ при $\Delta t \propto \Delta S = \text{const}$ является аналогом $\text{grad}\varphi$ с определенной степенью приближения.

Формирование последовательности разностей потенциалов $\Delta\varphi_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(t + \Delta t)$ выполнено на суммирующем усилителе

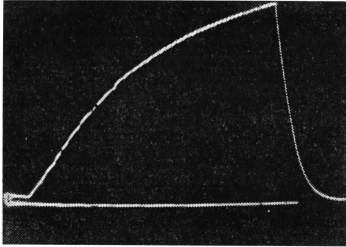


Рис. 2. Осциллограмма распределения потенциала по радиусу сечения коаксиального кабеля

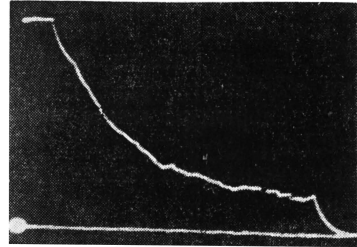


Рис. 3. Осциллограмма распределения градиента потенциала по радиусу сечения коаксиального кабеля

ле 4. Предварительно знак одной из функций $\varphi(t)$ меняется на обратный с помощью инвертирующего усилителя 3.

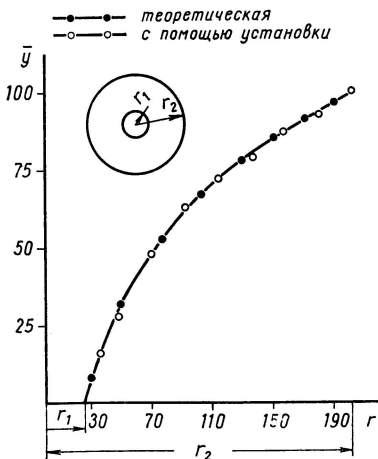


Рис. 4. Распределение потенциала по радиусу

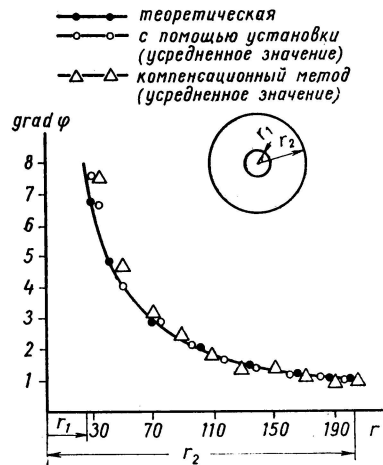


Рис. 5. Распределение градиента потенциала по радиусу

Усилитель 5 сглаживает ступенчатые функции $\varphi(t)$, $\text{grad}\varphi$ и устраняет пульсации питающего тока модели.

Выбор постоянной времени сглаживающего усилителя подробно описан в литературе [6].

Генератор пилообразного напряжения b через дополнительное пусковое реле управляет исполнительным механизмом шагового искателя. Изменение скорости вращения щеток искателя (в пределах $0,2—1,0$ рад/сек) осуществляется изменением частоты напряжения, вырабатываемого генератором.

В основном, установка может быть собрана из типовых блоков: коммутатор — на шаговом искателе типа ШИ25/8; усилители 3, 4, 5 — на блоках операционных усилителей БОУ-2; блок питания — ЭСВ-3; регистрирующее устройство — осциллограф С1-4; генератор пилообразного напряжения — на тиратроне ТГ2-0,1/0,1.

Получены следующие результаты экспериментальной проверки.

Точность воспроизведения потенциала и его градиента оценивалась путем сравнения с точным аналитическим решением. Для этого была построена модель электростатического поля в сечении коаксиального кабеля, аналитическое решение которого известно, и снималось распределение $\varphi(S)$ и $\text{grad } \varphi$ по радиусу сечения.

На рис. 2 и 3 приведены осциллограммы распределения потенциала и его градиента, подсчитанные аналитически, снятые двойной иглой компенсационным методом [5] и пересчитанные с осциллограмм.

Из рис. 4 и 5 видно, что точность воспроизведения потенциала на экране осциллографа достаточно высокая, а воспроизведение градиента потенциала имеет такой же порядок, как при снятии компенсационным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дружинин Н. И. Портативные приборы ЭГДА. Л., Изд-во ВНИИГ, 1953.
2. Левин Г. З., Прудниковский Г. П. Траектографы-автоматы, производящие расчет и построение траекторий заряженных частиц. ЖНТЭ, № 1, 1962.
3. Нищецкий Л. В., Фокин А. Ф. Портативные установки для моделирования двумерных задач геофизики. Ученые записки. Изд. Рижского политехнического института. Т. V, вып. 2, 1961, стр. 15—24.
4. Тарапон А. Г. Приборы ВЭЛ-2/61 для визуального наблюдения эквипотенциальных линий. Доклады четвертой межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования. Сб. № 1, изд. МЭИ, 1962, стр. 351—355.
5. Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И. Интеграторы ЭГДА. Киев, «Наукова думка», 1961, стр. 115.
6. Чесноков А. А. Решающие усилители. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963, стр. 63.
7. Van Duzer F. Buckey C. R. and Brewer G. K., Trajectory Tracer for charged Partcles Which Includes Megnetie Feilds and Space charge. R. S. I., N 5, 1963.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ КОРРЕКЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЗОНДОВОЙ СИСТЕМЫ В МОДЕЛИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВАХ С ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ВАННОЙ

В моделирующей аппаратуре, основанной на использовании электролитической ванны, напряженность поля на поверхности электролита измеряется системой из четырех зондов. Точность результатов моделирования при этом в значительной степени определяется точностью взаимной ориентации зондов и ориентации всей зондовой системы в целом относительно осей координат ванны.

Практика работы на электролитических ваннах показывает, что юстировка зондов и корректировка их поворота занимает значительное время, причем трудно добиться удовлетворительной точности. Представляется целесообразным введение такой «электрической коррекции» зондов, при использовании которой отпала бы необходимость в этих операциях.

Нетрудно показать, что путем линейной комбинации сигналов, поступающих с двух пар произвольно ориентированных зондов, можно сформировать напряжения, пропорциональные проекциям вектора напряженности на оси координат ванны.

Рассмотрим систему из четырех зондов, произвольно ориентированных друг относительно друга и относительно осей координат. Пусть эта зондовая система находится в поле, в котором вектор напряженности E направлен под углом γ по отношению к оси x . Обозначим через U_{AA_1} и U_{BB_1} напряжения, снимаемые с пары зондов AA_1 и BB_1 . Тогда

$$\begin{aligned} U_{AA_1} &= aE \cos(\gamma + \alpha); \\ U_{BB_1} &= bE \cos(\beta + \gamma), \end{aligned} \quad (1)$$

где a и b — расстояния между зондами AA_1 и BB_1 ;

α и β — углы между осями зондов и осью x .

Составим следующие линейные комбинации из этих напряжений:

$$\begin{aligned} U_1 &= (b \sin \beta) U_{AA_1} + (a \sin \alpha) U_{BB_1}; \\ U_2 &= (a \cos \alpha) U_{BB_1} - (b \sin \beta) U_{AA_1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Произведя соответствующие преобразования, получим

$$\begin{aligned} U_1 &= [ab \sin(\alpha + \beta)] E \cos \gamma = CE_x; \\ U_2 &= [ab \sin(\alpha + \beta)] E \sin \gamma = CE_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда получаются соотношения:

$$\begin{aligned}CE_x &= C_1 U_{AA_1} + C_2 U_{BB_1}; \\ CE_y &= C_3 U_{BB_1} + C_4 U_{AA_1},\end{aligned}\tag{4}$$

где коэффициенты C , C_1 , C_2 , C_3 и C_4 не зависят от величины и направления вектора напряженности поля, а определяются только геометрическими параметрами зондовой системы. Следовательно, комбинации напряжений, определяемые соотношением (4), вполне эквивалентны тем напряжениям, которые снимались бы с двух пар зондов, идеально ориентированных по осям координат.

Необходимое соотношение между коэффициентами C_1 , C_2 и C_3 , C_4 практически может быть просто получено на траектографе со схемой коррекции в режиме калибровки, который обычно предусматривается в моделирующих устройствах данного типа. Для этого достаточно поместить зонды в однородное поле, совпадающее по направлению поочередно с осями x и y , и добиться последовательно отсутствия сигнала на выходах, $E_{y\text{ вых}}$ и $E_{x\text{ вых}}$ путем регулировки потенциометров.

Применение коррекции исключает необходимость изготовления зондовой системы с высокой точностью и проведения тщательной юстировки. При деформации зондов, что практически случается весьма часто, достаточно лишь примерно («на глаз») выправить и ориентировать зонды, затем произвести необходимую электрическую корректировку. В итоге применение электрической коррекции увеличивает производительность и точность моделирующей аппаратуры.

V V V

Оглавление

Предисловие	3
<i>Б. А. Волюнский.</i> Об основных направлениях и работах в период 1962—1965 гг.	5

Глава I

Алгоритмы и методы решения некоторых задач теории поля

<i>А. Г. Угодчиков.</i> Применение моделирования конформных отображений к решению краевых задач	11
<i>И. М. Витенберг, Р. Л. Танкелевич.</i> Вопросы применения АВМ с операционными усилителями для решения дифференциальных уравнений в частных производных	16
<i>Б. А. Волюнский.</i> Некоторые соображения о математической классификации аналоговых средств решения краевых задач	35
<i>В. С. Лукьянов.</i> Возможные классы и области применения гидравлических интеграторов и методы решения на них краевых задач	41
<i>Ю. М. Мацевитый.</i> К решению нелинейных задач теории поля на сетках омических сопротивлений	51
<i>А. П. Спалвинь.</i> Алгоритмы моделирования стационарных полей в неоднородных и нелинейных средах	60
<i>Р. Ш. Нигматуллин, Е. Ф. Базлов.</i> Решение некоторых краевых задач диффузии на вычислительной машине непрерывного действия	65
<i>Л. В. Ницецкий.</i> Алгоритмы при цифро-аналоговом решении некоторых краевых задач	73
<i>М. А. Шепсенвол.</i> Некоторые вопросы автоматизации процесса расчета токов, моделирующих пространственный заряд в электролитической ванне	81
<i>А. А. Кошелев, О. А. Балышев.</i> Моделирование нестационарных процессов в системах теплоснабжения с применением аналоговых устройств и цифровых машин	86
<i>В. И. Панчишин.</i> О зарубежной практике моделирования краевых задач на электропроводной бумаге	93
<i>В. М. Шестаков.</i> О решении плоских задач уравнений Пуассона, Гельмгольца и Фурье на сплошных моделях ЭГДА	108
<i>М. М. Литвинов.</i> Моделирование уравнения Пуассона на электропроводной бумаге	111
<i>Л. Г. Коган.</i> О точности решения задач фильтрации на электрических сетках	116

Глава II

Задачи теплопереноса и фильтрации

<i>А. Н. Резников, А. В. Темников, В. В. Басов, Б. М. Гаврилов.</i> Использование аналоговых и квазианалоговых счетно-решающих устройств для исследования теплофизики процессов обработки металлов резанием	129
---	-----

<i>А. В. Темников, Б. М. Гаврилов, Н. В. Дилигенский.</i> Квазианалоговые методы электро моделирования краевых задач теплообмена при относительном перемещении тел, находящихся в тепловом контакте	137
<i>Ю. А. Короленко, Э. Ф. Черняев.</i> Электро моделирование теплообменных устройств сеткой активных сопротивлений	148
<i>В. С. Лукьянов, Н. А. Цуканов.</i> О некоторых возможностях подобных преобразований при расчетах нестационарных температурных полей в промерзающих и оттаивающих грунтах	154
<i>Н. А. Цуканов.</i> Расчеты процессов теплопереноса при фильтрации воды в грунте методом гидравлических аналогий	158
<i>Е. И. Молчанов.</i> Решение сложных задач теплопроводности методом гидроаналогии	166
<i>Л. В. Князев.</i> Особенности решения задач нестационарного тепло- и массопереноса на комбинированных моделях	175
<i>В. Е. Константинова.</i> Расчет воздухообмена и отопительных систем зданий аналоговым методом	182
<i>Ю. Д. Денискин.</i> Моделирование задач нестационарной теплопроводности в электролитической ванне	185
<i>В. Г. Петухов.</i> Расчет температурного поля на электроинтеграторе типа ЭГДА с учетом зависимости коэффициента теплопроводности материала от температуры	194
<i>О. В. Комиссаров, И. И. Сидорова, Н. В. Филиппова.</i> Моделирование с помощью электропроводной бумаги уравнения Пуассона с нелинейными граничными условиями для определения температур графита в ячейке реактора	200
<i>К. К. Табакс.</i> Моделирование стационарных электротепловых полей.	206
<i>Ю. А. Липаев, Г. Г. Степченкова, В. В. Ходот.</i> Расчет на гидроинтеграторе дегазации угольных пластов скважинами	213

Глава III

Задачи теории упругости

<i>А. И. Медовиков, В. Н. Ломбардо, Г. Э. Шаблинский.</i> Применение электро моделирования в динамических расчетах сооружений	220
<i>А. Л. Квитка.</i> Решение плоской и осесимметричной задачи теории упругости на сеточных электроинтеграторах	229
<i>А. И. Медовиков, Э. Ш. Бобров, М. Г. Ванюшенков, Г. Э. Шаблинский, С. П. Клюев.</i> Решение задач изгиба плит и пологих оболочек методом электроаналогии	255
<i>В. Н. Ломбардо.</i> Расчет напряженного состояния массивно-контрфорсной плиты методом электроаналогии	276
<i>М. Д. Головки, Ю. А. Матросов.</i> Решение двух температурных задач теории упругости, возникающих в транспортном строительстве.	284

Глава IV

Электрические и электромагнитные поля

<i>В. С. Лукошков.</i> О современном состоянии аналоговых средств и методов, используемых при решении задач электроники	301
<i>И. М. Блейвас, С. А. Дубровина, Э. М. Зелинский, В. М. Красноперкин.</i> Вычислительные машины для решения задач электроники, использующие электрическую сетку в сочетании с ЭЦВМ или с электро моделью постоянного тока	307
<i>Г. М. Герштейн, В. А. Павлючук, В. П. Пронин, И. Н. Салий, В. А. Седин.</i> Применение метода наведенного тока для решения краевых задач радиоэлектроники	321

- Л. З. Пивень.* Определение пондеромоторных сил в магнитостатическом поле методом математического моделирования 330
- И. Л. Григорошин.* О моделировании электрических полей с пространственным зарядом на сетке омических сопротивлений 333

Глава V

Разработка новых устройств для решения краевых задач

- А. И. Медовиков.* Автоматизированный электроинтегратор для решения бигармонических уравнений и опыт его эксплуатации. . . 340
- А. Н. Супрун.* Аналоговое вычислительное устройство для конформного отображения единичного круга на односвязную область 354
- Г. И. Васильев, В. В. Ильин, И. Б. Новиков, Е. Г. Сно, Р. П. Тевелева.* Автоматические электронные устройства для моделирования задач нестационарной теплопроводности на омических сетках . . . 361
- В. Е. Бухман.* О некоторых принципах построения цифро-аналоговых устройств для решения краевых задач 369
- В. Е. Бухман, Б. А. Волюнский, Н. Н. Макаренко.* Электрическая цифро-аналоговая модель ЭМ-10 для решения задач нестационарной теплопроводности 371
- И. М. Блейвас, С. А. Дубровина, Э. М. Зелинский, Н. А. Белинский.* Устройство для полной автоматизации процесса последовательных приближений при решении уравнения Пуассона 374
- В. И. Кириллов, М. М. Литвинов, Б. Б. Олешкевич.* Электроинтегратор для решения задач нестационарной теплопроводности ЭТНА-4 . . . 376
- П. Ф. Фильчаков, В. И. Панчишин.* Модернизация приборов ЭГДА и дальнейшие перспективы их развития 381
- В. И. Дзибалова, Ю. И. Дзибалов, В. А. Дмитриев, Б. П. Кравченко, А. Т. Лукьянов, В. Л. Романовский.* Статический электроинтегратор (промышленный образец) и опыт его применения 385

Глава VI

Разработка элементов моделирующих устройств

- И. Г. Винтизенко.* Построение отрицательных сопротивлений на базе операционного дифференциального усилителя и их применение для решения задач теории поля 394
- В. А. Плеханов, Р. М. Коган.* Автоматическое измерительное устройство 403
- Н. Е. Саламатин.* Приставка к электроинтегратору ЭГДА-9/60 для съема результатов моделирования 407
- Э. С. Кухтин, М. А. Шепсенвол.* Электрическая коррекция погрешностей зондовой системы в моделирующих устройствах с электролитической ванной 411

РАСЧЕТ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ
МЕТОДАМИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Редактор издательства

Е. В. Григорин-Рябова

Технический редактор *Н. В. Тимофеева*

Корректор *П. А. Пирязев*

Переплет художника *Е. В. Бекетова*

Сдано в производство 15/VIII 1967 г.

Подписано к печати 24/IV 1968 г.

Т-06921 Тираж 4500 экз.

Печ. л. 26,75. Бум. л. 13,38

Уч.-изд. л. 27,5 Формат 60 × 90¹/₁₆

Цена 1 р. 93 к. Зак. № 1148

Издательство «МАШИНОСТРОЕНИЕ»,
Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3.

Экспериментальная типография ВНИИПП
Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва К-51, Цветной бульвар, 30

УДК 681.14.001.57

Об основных направлениях и работах в период 1962—1965 гг. Волюнский Б. А. «Расчеты физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматривается развитие моделирующих устройств и методов решения краевых задач. Дается краткий анализ основных работ ведущих специалистов в этой области и целесообразности внедрения в промышленность результатов этих работ.

Приводятся рекомендации о дальнейшем направлении научной и технической деятельности в этой области.

УДК 621.72 : 517—54

Применение моделирования конформных отображений к решению краевых задач. Угодчиков А. Г. «Расчеты физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье дается обзор основных работ по применению метода конформных отображений для решения краевых задач. Рассмотрены работы как теоретического характера, так и моделирование конформных отображений для решения краевых гармонических и бигармонических задач аналоговыми средствами.

УДК 681.142.333 : 517.9

Вопросы применения АВМ с операционными усилителями для решения уравнений в частных производных. Витенберг И. М., Танкелевич Р. Л. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматриваются возможности средств аналоговой вычислительной техники с операционными усилителями при решении сложных функциональных задач, проанализированы известные методы решения таких задач с целью выявления наиболее эффективных методов и описаны вновь разработанные. Предлагается наиболее пригодная для решения краевых задач структура аналоговой машины, построенная на базе аналоговой вычислительной машины с операционными усилителями.

УДК 681.142.33(012)

Некоторые соображения о математической классификации аналоговых средств решения краевых задач. Волюнский Б. А. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматривается возможность классификации аналоговых средств для решения краевых задач, опирающихся на математический алгоритм, аппроксимирующий решение той или иной краевой задачи.

УДК 681.142.334.004

Возможные классы и области применения гидравлических интеграторов и методы решения на них краевых задач. Лукьянов В. С. «Расчеты физических полей методами моделирования», 1968 г.

Рассматривается применение гидравлических интеграторов для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Указываются примеры применения гидроинтеграторов для решения различных инженерных задач (как прямых, так и обратных). Приводятся данные о развитии метода гидравлических аналогий в СССР. Рассматриваются вопросы дальнейшей модернизации конструкции гидроинтеграторов.

УДК 621.72

К решению нелинейных задач теории поля на сетках омических сопротивлений. Мацевитый Ю. М. «Расчеты физических полей методами моделирования», 1968 г.

В работе предлагается метод решения нелинейных краевых задач, который позволяет использовать сетку, набранную из постоянных омических сопротивлений. При этом учет нелинейности при граничных условиях III рода осуществляется изменением лишь небольшого числа сопротивлений, моделирующих граничные условия.

Метод основан на сведении заданного уравнения к уравнению Лапласа при помощи интегрального преобразования или при помощи специальной подстановки.

УДК 621.72

Алгоритмы моделирования стационарных полей в неоднородных и нелинейных средах. Спалвинь А. П. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

Рассматривается метод решения стационарных краевых задач в неоднородных и нелинейных средах на омических сетках из постоянных сопротивлений. Метод основан на сведении заданного уравнения к уравнению Пуассона, правая часть которого учитывает неоднородность и нелинейность среды. Решение ведется с помощью итераций до достижения заданной точности.

УДК 681.142.33 : 532.72 (049.1)

Решение некоторых краевых задач диффузии на вычислительной машине непрерывного действия. Нигматуллин Р. Ш., Базлов К. Ф., Ницецкий Л. В. «Расчеты физических полей методами моделирования», 1968 г.

Рассматривается решение некоторых краевых задач диффузии, встречающихся в полярографии, на аналоговой вычислительной машине. Получены выражения диффузионных сопротивлений и найдены их электрические аналоги при решении задачи для внутренней части сферы (ртутный электрод) и полый части сферы (твердый электрод, покрытый пленкой ртути), а также для цилиндра, полуограниченного тела и неограниченной пластины. Полученные результаты могут быть использованы при полярографировании.

УДК 681.14.001.57

Алгоритмы при цифро-аналоговом решении некоторых краевых задач. Ницецкий Л. В. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

Предлагается метод, позволяющий решать широкий класс краевых задач для уравнений Лапласа, Пуассона и Фурье. Метод основывается на сочетании аналоговой машины (сетки из постоянных омических сопротивлений) и специализированной цифровой машины. Нестационарные задачи решаются методом Либмана, нелинейные задачи и задачи с неоднородными средами — методом итераций при помощи регулируемых сопротивлений, моделирующих правую часть уравнения Пуассона.

УДК 621.72 : 537.24 : 621.317.729(001.24).002.5

Некоторые вопросы автоматизации процесса расчета токов, моделирующего пространственный заряд в электролитической ванне. Шепсенов М. А. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

Рассматриваются варианты систем автоматизации расчета величины тока, который необходимо ввести в некоторый участок электролита для моделирования поля объемного заряда. Предлагается использовать для этой цели суммирующие ячейки, построенные на основе цифровой вычислительной техники. Анализируется блок-схема устройства для автоматизации процесса расчета вводимых токов.

УДК 681.142.32/33

Моделирование нестационарных процессов в системах теплоснабжения с применением аналоговых устройств и цифровых машин. Балышев О. А., Кошелев А. А. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

Рассматривается решение задачи исследования переменных режимов работы систем централизованного теплоснабжения. Эта задача описывается нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных с источниками переменной интенсивности и граничными условиями II и III рода. Задача решалась на ЭЦВМ типа БЭСМ-2М и на гидравлическом интеграторе.

УДК 621.72

О зарубежной практике моделирования краевых задач на электропроводной бумаге. Панчишин В. И. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье приводятся некоторые данные о применении электропроводной бумаги для моделирования решения некоторых краевых задач за рубежом и одновременно делается сравнение с развитием приборов ЭГДА в СССР.

УДК 621.72.517.9

О решении уравнений Пуассона, Гельмгольца и Фурье на сплошных моделях ЭГДА. Шестаков В. М. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье ставится задача по оценке погрешности решения уравнений Пуассона, Гельмгольца и Фурье при дискретном задании их правой части на моделях из электропроводной бумаги. Решение составлялось с аналитическим решением и с решением на *RC*-моделях. Результаты показали, что погрешность на сплошных средах не выше, чем на *RC*-моделях.

УДК 621.72

Моделирование уравнения Пуассона на электропроводной бумаге. Литвинов М. М. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

Рассматривается решение уравнения Пуассона на модели с электропроводной бумагой. На базе интегратора для решения уравнений Лапласа ЭТА-2 разработано специальное моделирующее устройство для дискретного задания правой части уравнения. Приводятся примеры решенных задач. Погрешность не превышает 2–3%.

УДК 62—187 : 621.72

О точности решения задач фильтрации на электрических сетках. К о г а н Л. Г. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматриваются: паспортная погрешность моделирующих устройств, неустойчивость решения и ее связь с погрешностью моделирования, возможность получения сколь угодно точного решения линейных задач на неточных электрических сетках, причины погрешности решения на сетках и средства определения этих погрешностей, некоторые методы выявления погрешностей в решении, недостатки тестовых задач сеточных моделей УСМ-1.

УДК 681.142.33 : 001.2

Использование аналоговых и квазианалоговых счетно-решающих устройств для исследования теплофизики процессов обработки материалов резанием. Резников А. Н., Темников А. В., Басов В. В., Гаврилов Б. М. «Расчет физических процессов методами моделирования», 1968 г.

В статье описываются работы по созданию устройств и методов электро-моделирования процесса теплообмена в зоне резания, а также по решению ряда задач, относящихся к выбору оптимальных методов охлаждения.

Результаты моделирования позволяют решить ряд новых задач, относящихся к теории и практике обработки изделий твердосплавными и алмазными инструментами.

УДК 681.14.001.57

Квазианалоговые методы электро-моделирования краевых задач теплообмена при относительном перемещении тел, находящихся в тепловом контакте. Темников А. В., Гаврилов Б. М., Дилегенский Н. В. «Расчеты физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье изложены квазианалоговые методы моделирования решения уравнения теплообмена типа Фурье — Кирхгофа. Рассматриваются различные способы аппроксимации первых производных в указанном уравнении и соответственно различные схемы уравновешивания потенциалов на квазианалоге. Решение задач этим методом сравнивается с аналитическим решением. Даются рекомендации по использованию этого метода для решения практических задач теплофизики.

УДК 621.72 : 66.045

Электро-моделирование теплообменных устройств сеткой активных сопротивлений. Короленко Ю. А., Черняев Э. Ф. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В работе рассматривается способ, позволяющий моделировать широкий круг теплообменных устройств с помощью сетки из активных сопротивлений. Этот способ рассмотрен на примере параллельноточного теплообменника. Полученные результаты показывают, что такая сетка может быть применена и для перекрестных теплообменников любой схемы.

УДК 5365 : 624.131.3.001.24

О некоторых возможностях подобных преобразований при расчетах нестационарных температурных полей в промерзающих и оттаивающих грунтах. Лукьянов В. С., Цуканов Н. А. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье излагается методика приведения составных сред из мерзлого и талого грунта к однородному виду в отношении коэффициентов теплопроводности или теплоемкости при расчетах нестационарных температурных полей в промерзающих и оттаивающих грунтах. Применение этого метода на гидравлических интеграторах позволяет во многих случаях существенно упростить проведение расчетов.

УДК 536.24 : 663.631 : 624.131.6.001.24

Расчеты процессов теплопереноса при фильтрации воды в грунте методом гидравлических аналогий. Цуканов Н. А. «Расчеты физических полей методами моделирования», 1968 г.

При фильтрации воды в порах грунта распространение тепла в нем происходит путем конвекции и теплопроводности. При известных допущениях теплообмен в грунте может быть описан одним дифференциальным уравнением. Изложенная в статье методика была применена для анализа температурного режима насыпей, возводимых на многолетних мерзлых грунтах, при наличии фильтрации надмерзлотных и поверхностных вод в их основании. Результаты работы позволили разработать рекомендации по обеспечению устойчивости насыпей в этих условиях.

УДК 536.2(049.1)

Решение сложных задач теплопроводности методом гидроанalogии. Молчанов Е. И. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В работе рассматривается применение гидравлического интегратора для решения ряда сложных задач теплопроводности, а также для оценки граничных условий. К таким задачам относятся исследование распределения температуры в лопатке газовой турбины и оценка коэффициентов теплоотдачи к поверхности барабанного ротора и к лопатке газовой турбины при нестационарных тепловых режимах. Приводится пример решения задачи для ротора установки типа ГТ-700-4.

УДК 536.4(049.1).004.12

Особенности решения задач нестационарного тепло- и массопереноса на комбинированных моделях. Князев Л. В. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматривается комбинированная модель из сплошной электропроводной среды и элементов сеточных моделей. Магазины сопротивлений служат для задания граничных условий и для моделирования источников. Достоинствами такой комбинированной модели являются более точная конфигурация области и уменьшение числа сопротивлений. Рассмотрены примеры применения такой модели.

УДК 621.532.3/662.9 : 681.142.333.001.24

Расчет воздухообмена и отопительных систем зданий аналоговым методом. Константинова В. Е. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматривается применение гидравлического интегратора и диафрагменных элементов для расчета воздухообмена и отопительных систем зданий аналоговыми методами. На основе этого метода приведен ряд инженерных расчетов, позволявший выбрать наиболее экономичные и эффективные средства вентиляции, выявить гидравлическую устойчивость систем вентиляции и др.

УДК 621.72 : 536.2

Моделирование задач нестационарной теплопроводности в электрической ванне. Денискин Ю. Д. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

Для решения уравнения типа Фурье рассматривается методика расширения пределов регулировки величины временных интервалов в двухмерной электролитической ванне при помощи коротких придонных тоководов для моделирования внутренних источников поля. Сравнение этого метода с методом трехмерной ванны показывает ряд преимуществ предлагаемого метода. Однако перестройка работы ванны при переходе к следующему шагу решения требует автоматизации этого процесса.

УДК 536.5 : 681.142 334.001.24

Расчет температурного поля на электроинтеграторе типа ЭГДА с учетом зависимости коэффициента теплопроводности материала от температуры. Петухов В. Г. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматривается возможность учета нелинейности при решении тепловой задачи (учет зависимости коэффициента теплопроводности материала от температуры) на простой однослойной модели типа ЭГДА. Этот метод применим для случая линейной зависимости коэффициента теплопроводности материала от температуры. В качестве примера приводится температурное поле в сечении по кромке интенсивно охлаждаемой лопатки газовой турбины.

УДК 621.72 : 676 : 49 : 536.5 : 546.26—162.621.039.4

Моделирование с помощью электропроводной бумаги уравнения Пуассона с нелинейными граничными условиями для определения температур графита в ячейке реактора. Комиссаров О. В., Сидорова И. И., Филипова Н. Ф. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматривается применение модели из электропроводной бумаги для определения температур графита в ячейке реактора. Этот простой метод дает приемлемую точность решения. Применение для такого расчета цифровых вычислительных машин требует составления трудоемкой программы.

УДК 621.72 : 621.36

Моделирование стационарных электротепловых печей. Табакс К. К. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

Рассматривается методика моделирования решения стационарного теплового поля, источником которого является электрическая энергия. В качестве примера приведена задача по решению такого поля в поперечном сечении статора электрической машины. Решение проверялось на электролитической ванне и результаты сравнивались с решением на сеточной модели УСМ-1. Результаты сравнения положительные.

УДК 663.63.069.84

Расчет на гидроинтеграторе дегазации угольных пластов скважинами. Липаев Ю. А., Степченкова Г. Г., Ходот В. В. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

Рассматривается применение гидравлического интегратора для решения нелинейных дифференциальных уравнений двухмерной неустановившейся фильтрации газов в угольных пластах. Этот метод иллюстрируется примером расчета дегазации пласта угля. Приводятся результаты расчетов.

УДК 621.72 : 624.9.001.24.004

Применение электромоделирования в динамических расчетах сооружений. Медовиков А. И., Ломбардо В. Н., Шаблинский Г. Э. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

Излагается методика и результаты определения частот форм собственных колебаний балок переменной жесткости и плит на автоматизированном сеточном электроинтеграторе. Задача решается либо путем непосредственного моделирования собственного уравнения, либо путем определения в статической постановке перемещений упругой системы от действия единичных сил. В последнем случае собственные числа матрицы жесткости находятся на ЭЦВМ.

УДК 681.142.334(049.1)

Решение плоской и осесимметричной задачи теории упругости на сеточных электроинтеграторах. Квитка А. Л. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье разбираются возможности электрического моделирования задач теории упругости при различных математических формулировках задач. Рассматриваются методы моделирования бигармонического уравнения, уравнение Ляме, системы гармонических функций напряжений, применение квазианалоговых методов. Разбираются достоинства и недостатки различных моделей и методов и пути дальнейшего совершенствования электрического моделирования задач теории упругости.

УДК 53.072.13

Решение задач изгиба плит и пологих оболочек методом электроаналогии. Медовиков А. И., Бобров Э. Ш., Ванюшенков М. Г., Ключев С. П., Шаблинский Г. Э. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье описывается методика решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных IV порядка, к которым сводится расчет пологих оболочек на автоматизированном электроинтеграторе. Формулируются наиболее распространенные типы граничных условий и показан процесс их реализации на модели. Излагается методика расчета на автоматизированном электроинтеграторе прямых и косоугольных плит при различных условиях на контуре и методика решения нелинейных и динамических задач теории плит.

УДК 53.072.13

Расчет напряженного состояния массивно-контрфорсной плотины методом электроаналогии. Ломбардо В. Н. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье излагается методика решения задачи о напряженном состоянии массивно-контрфорсной плотины на автоматизированном электроинтеграторе, приводятся результаты расчета напряженного состояния плотины на основаниях различной жесткости. Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными и дается оценка точности метода.

УДК 536.5(049.1)

Решение двух температурных задач теории упругости, возникших в транспортном строительстве. Головкин М. Д., Матросов Ю. А. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье разбирается решение двух задач теории упругости о напряжениях и деформациях, вызванных тепловым воздействием, разбирается методика решения таких задач, анализируются результаты решения, полученного аналоговым способом, производится сравнение возможностей применения для решения задач о термонапряженном состоянии цифровых и аналоговых машин.

УДК 681.14.001.57

О современном состоянии аналоговых средств и методов, используемых при решении задач электроники. Лукошков В. С. «Расчеты физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье разбираются основные задачи, связанные с определением электрического поля в электронных приборах (баллистические задачи, задачи о самосогласованном поле, задача о синтезе поля), дается обзор основных работ по решению их аналоговыми средствами, рассматриваются новые задачи по расчету магнитного поля.

УДК 681.142.35

Вычислительные машины для решения задач электроники, использующие электрическую сетку в сочетании с ЭЦВМ или с электромоделью постоянного тока. Блейвас И. М., Дубровина С. А., Зелинский Э. М., Красноперкин В. М., «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье описывается аналого-цифровая вычислительная машина, позволяющая рассчитывать траектории заряженных частиц в статических электрическом и магнитном полях с учетом пространственного заряда, релятивистских электронов и с учетом собственного магнитного поля заряженных частиц в электрическом поле, зависящем от времени. АЦВМ записывает искомые величины вдоль траектории и вычерчивает траектории заряженных частиц и эквипотенциальные линии.

УДК 621.396.6

Применение метода наведенного тока для решения краевых задач радиоэлектроники. Герштейн Г. М., Павлючук В. А., Пронин В. П., Салый И. Н., Седин В. А. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье разбирается применение метода наведенного тока для решения некоторых краевых задач радиоэлектроники, описываются установки с вибрирующим зондом типа МНТ-ВЗ и установки с пролетным зондом типа МНТ-ПЗ, излагаются особенности применения этих установок для решения задач радиоэлектроники: определение поля волноводов, анализ спектра пространственных гармоник поля, определение волнового сопротивления и параметра потерь многопроводных линий и плоских волноводов и др.

УДК 681.14.001.57

Определение пондеромоторных сил в магнитостатическом поле методом математического моделирования. Пивень Л. З. «Расчеты физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматривается задача расчета пондеромоторных сил, действующих на ферромагнитное тело в магнитостатическом поле, создаваемом другим ферромагнитным телом, рассматриваются особенности этой задачи при ее решении на интеграторе ЭГДА, приводится решение задачи.

УДК 681.14.001.57

О моделировании электрических полей с пространственным зарядом на сетке омических сопротивлений. Григоришин И. Л. «Расчеты физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматриваются методы вычислений и задания плотности пространственного заряда на сетке при различных скоростях вылета электронов из катода: с начальными скоростями, равными нулю, одинаковыми, но не равными нулю, с различными, подчиняющимися закону распределения Максвелла.

УДК 681.14.001.57

Автоматизированный электроинтегратор для решения бигармонических уравнений и опыт его эксплуатации. Медовиков А. И. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье описывается автоматизированный интегратор для решения бигармонического уравнения (или системы бигармонических уравнений), снабженный многоканальной следящей системой для автоматизации процесса подбора граничных условий или условий внутри области решения (например, при расчете плит, опирающихся на колонны), приводится методика применения следящей системы для решения различных задач.

УДК 681.14.001.57

Аналоговое вычислительное устройство для конформного отображения единичного круга на односвязную область. Супрун А. Н. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье описывается аналоговое вычислительное устройство, позволяющее получать граничные значения конформно отображающей функции в виде двух электрических сигналов, моделирующих контурные значения ее действительной и мнимой частей.

УДК 681.14.001.57

Автоматические электронные устройства для моделирования задач нестационарной теплопроводности на омических сетках. Васильев Г. И., Ильин В. В., Новиков И. Б., Сно Е. Г., Тевелева Р. П. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматривается способ автоматизации процесса моделирования на омических сетках задач нестационарной теплопроводности, рассматриваются конструктивные особенности моделирующего устройства и методика решения задач, приводится сравнение результатов решения контрольных задач на моделирующем устройстве с результатами решения на цифровых машинах.

УДК 681.14.001.57

О некоторых принципах построения цифро-аналоговых устройств для решения краевых задач. Бухман В. Е. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматривается возможность применения цифро-аналоговых устройств для решения некоторых краевых задач (третья краевая задача для уравнения нестационарной теплопроводности и бигармоническое уравнение).

УДК 681.14.001.57

Электрическая цифро-аналоговая модель ЭМ-10 для решения задач нестационарной теплопроводности. Бухман В. Е., Волынский Б. А., Макаренко Н. Н. «Расчеты физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье описывается специализированная цифро-аналоговая машина, предназначенная для решения задач нестационарной теплопроводности с переменными во времени граничными условиями I, II и III родов, содержащая датчик цифровой информации и периодизатор (магнитный барабан) и цифро-аналоговые преобразователи.

УДК 681.14.001.57

Устройство для полной автоматизации процесса последовательных приближений при решении уравнения Пуассона. Блейвас И. М., Дубровина С. А., Зелинский Э. М., Белинский Н. А. «Расчет физических полей моделирования», 1968 г.

Рассмотрены структуры вычислительных машин для решения уравнений движения заряженных частиц в неоднородных электрическом и магнитном полях. Обсуждается устройство и алгоритм решения вычислительной машины, обладающей высокими производительностью и точностью решения. Электрические и магнитные поля моделируются с помощью двух сеток сопротивлений.

Приводится описание аналоговой вычислительной машины, представляющей сочетание сетки сопротивлений со структурной электромоделью постоянного тока.

УДК 681.14.001.57

Электроинтегратор для решения задач нестационарной теплопроводности ЭТНА-4. Кириллов В. И., Литвинов М. М., Олешкевич Б. Б. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье описывается полуавтоматический электроинтегратор ЭТНА-4, основанный на решении задач нестационарной теплопроводности методом Либмана, дается краткое описание схемы и конструкции интегратора, приводится ряд задач, решенных на интеграторе.

УДК 681.14.001.57

Модернизация приборов ЭГДА и дальнейшие перспективы их развития. Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассказывается об областях, в которых в настоящее время применяется электро моделирование на электропроводной бумаге, анализируются рекомендации организаций, использующих ЭГДА, по улучшению конструкции интегратора, даются выводы по модернизации интеграторов ЭГДА и перспективах их развития, обобщается опыт эксплуатации.

УДК 681.14.001.57

Статический электроинтегратор (промышленный образец) и опыт его применения. Дзибалова В. И., Дзибалов Ю. И., Дмитриев В. А., Кравченко Б. П., Лукьянов А. Т., Романовский В. Л. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье описываются устройство и конструкция специализированного статического электроинтегратора, предназначенного для решения линейных и нелинейных уравнений теплопроводности, рассматривается методика решения нестационарных линейных уравнений в различных координатных системах описаны различные разностные схемы.

УДК 681.14.001.57

Построение отрицательных сопротивлений на базе операционного дифференциального усилителя и их применение для решения задач теории поля. Вринтизенко И. Г. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

Рассматриваются методы построения отрицательных сопротивлений на базе операционных усилителей. Описывается правило для учета имеющихся в схеме операционных усилителей с бесконечно большим коэффициентом усиления. Рекомендуется усилитель с дифференциальным входным каскадом. Автором рекомендуется применение таких усилителей для решения задач по расчету поля.

УДК 681.14.001.57

Автоматическое измерительное устройство. Плеханов В. А., Коган Р. М. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье рассматривается разработанное автоматическое измерительное устройство АИУ, в котором использован электронный цифровой вольтметр ЭВЦ-2 и цифровая печатающая машина типа ЦПМ-1. Погрешность АИУ составляет $\pm 0,5\%$ от шкалы. Дискретность измеряемой величины в диапазоне от 0 до ± 100 составляет 0,1.

УДК 681.14.001.57

Приставка к электроинтегратору ЭГДА-9/60 для съема результатов моделирования. Саламатин Н. Е. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

В статье описывается установка, позволяющая наблюдать на экране осциллографа распределение потенциала и градиента его вдоль заданной линии тока. Такое распределение необходимо при решении задач гидродинамики.

УДК 681.14.001.57

Электрическая коррекция погрешностей зондовой системы в моделирующих устройствах с электролитической ванной. Кухтин Э. С., Шепсенов М. А. «Расчет физических полей методами моделирования», 1968 г.

Путем линейной комбинации сигналов, поступающих с двух пар произвольно ориентированных зондов, формируются напряжения, пропорциональные проекциям вектора напряженности на оси координат электролитической ванны. Применение коррекции исключает необходимость изготовления зондовой системы с высокой точностью и производить ее тщательную юстировку.

