

П. ХЭММОНД

ТЕОРИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Перевод с английского

М. А. БЕРМАНТА

Под редакцией

Я. З. ЦЫПКИНА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1961

FEEDBACK THEORY
AND ITS APPLICATIONS

By
P. H. HAMMOND, B. Sc., A. M. I. E. E.

Principal Scientific Officer,
Royal Radar Establishment,
Malvern

THE ENGLISH UNIVERSITIES PRESS LTD.
102 NEWGATE STREET
LONDON, E.C.1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора русского перевода	11
Предисловие автора	13
Введение	15

Г л а в а 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

1.1. Введение	19
1.2. Линейное дифференциальное уравнение	23
1.3. Преобразование Лапласа	23
1.3.1. Правило сложения	24
1.3.2. Примеры изображений	24
1.3.3. Изображения производных	25
1.3.4. Изображения интегралов	27
1.4. Операторное решение дифференциальных уравнений . .	27
1.4.1. Решение уравнения первого порядка; апериди- ческое звено	28
1.4.1.1. Пассивная RC -цепь	29
1.4.1.2. Другие виды аперидических звеньев	30
1.4.2. Решение уравнения второго порядка; колебатель- ное звено	31
1.5. Единичная импульсная функция	33
1.5.1. Реакция на единичный импульс	34
1.6. Единичная ступенчатая функция Хевисайда	36
1.6.1. Переходная функция	37
1.7. Короткий импульс конечной амплитуды	37
1.8. Реакция линейной системы на произвольное возмущение	38
1.9. Передаточная функция	40
1.9.1. Последовательное соединение элементов	41
1.10. Частотная характеристика	42
1.10.1. Частотная характеристика аперидического звена	44
1.11. Соотношение между операторами p и $j\omega$	45
1.12. Графическое изображение	46
Литература	48

Глава 2

ПРИНЦИП ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

2.1. Влияние обратной связи на передаточную функцию . . .	49
2.2. Знак обратной связи	53
2.3. Переходные характеристики	54
2.3.1. Система с одним аperiodическим звеном в прямой цепи	54
2.3.2. Система с двумя аperiodическими звеньями в прямой цепи	55
2.4. Частотные характеристики	57
2.4.1. Система с одним аperiodическим звеном	58
2.4.2. Система с двумя аperiodическими звеньями	60
2.5. Стабильность общего коэффициента усиления	62
2.6. Нелинейные искажения	64
2.6.1. Реакция системы на постоянные воздействия	65
2.6.2. Реакция на синусоидальное воздействие	67
2.6.3. Реакция системы на скачкообразное воздействие	69
2.7. Случайные флуктуации	70
2.8. Полное входное и выходное сопротивление	72
Литература	73

Глава 3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

3.1. Введение	74
3.2. Критерий устойчивости Рауса	77
3.2.1. Применение критерия Рауса к системе с обратной связью	79
3.3. Критерий устойчивости Найквиста	83
3.3.1. Плоскость p	84
3.3.2. Условие устойчивости в плоскости p	85
3.3.3. Плоскость y	85
3.3.4. Контуры в плоскостях p и y	85
3.3.5. Влияние нулей в плоскости p	86
3.3.6. Влияние полюсов в плоскости p	88
3.3.7. Совместное влияние полюсов и нулей	89
3.3.8. Возвратно-петлевые контуры	90
3.3.9. Полукруглость большого радиуса в правой части плоскости p	91
3.3.10. Преобразования в плоскостях p и y	92
3.3.11. Критерий устойчивости	97
3.3.12. Примеры применения критерия Найквиста	97
3.4. Многоконтурные системы с обратной связью	100
3.4.1. Пример многоконтурной системы	101
Литература	104

Глава 4

**ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
УСТОЙЧИВОСТИ**

4.1. Годографы частотной характеристики	105
4.1.1. Окружности постоянного модуля $ \bar{y}_0(j\omega) $	106
4.2. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики	109
4.2.1. Связь между амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками	110
4.2.2. Неминимальные фазо-частотные характеристики	119
4.3. Запасы устойчивости	122
4.3.1. Запас по фазе и запас по амплитуде	123
4.3.2. Годограф обобщенной частотной характеристики в плоскости y	125
Литература	129

Глава 5

**КАТОДНЫЙ ПОВТОРИТЕЛЬ, СИММЕТРИЧНЫЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ
И УСИЛИТЕЛЬ С ПОТЕНЦИАЛЬНО ЗАЗЕМЛЕННОЙ
СУММИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ**

5.1. Введение	130
5.2. Усилитель напряжения класса A	131
5.2.1. Упрощенное выражение для пентода	134
5.3. Катодный повторитель	135
5.3.1. Общий коэффициент усиления по напряжению (при условии пренебрежения паразитными емкостями и емкостями нагрузки)	136
5.3.2. Входное сопротивление	137
5.3.3. Влияние нагрузки на передаточную функцию	138
5.3.4. Анодное сопротивление	139
5.3.5. Выходное сопротивление	140
5.3.6. Принципиальная схема	141
5.4. Симметричный дифференциальный усилитель	143
5.4.1. Принципиальная схема	145
5.5. Принцип потенциального заземления	146
5.5.1. Исследование передаточных функций	147
5.5.2. Влияние дрейфа	148
5.5.3. Полное сопротивление суммирующей точки по отношению к земле	149

5.5.4. Сложение напряжений	150
5.5.5. Структурная схема усилителя с потенциально заземленной суммирующей точкой	151
5.6. Схемы усилителей постоянного тока	152
5.6.1. Усилитель с низким коэффициентом усиления	152
5.6.2. Усилитель со средним коэффициентом усиления	156
5.7. Способы стабилизации	160
5.7.1. Стабилизация аperiodическим звеном	161
5.7.2. Стабилизация пассивной интегрирующей цепью	164
5.8. Выходное сопротивление усилителя с потенциально заземленной суммирующей точкой	169
Литература	170

Глава 6

ПРИМЕНЕНИЯ УСИЛИТЕЛЕЙ С ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ЗАЕМЛЕНИЕМ СУММИРУЮЩЕЙ ТОЧКИ

6.1. Выполнение над электрическими напряжениями операций, зависящих от частоты	171
6.1.1. Интегрирование по времени	171
6.1.2. Дифференцирование по времени	177
6.1.3. Резонансные схемы	180
6.1.3.1. Обратная связь в виде Т-образного моста	180
6.1.3.2. Соединение интеграторов в кольцо	182
6.1.3.3. Схема с комбинированной положительной и отрицательной обратной связью	183
6.2. Нелинейные преобразования	185
6.2.1. Устройство, воспроизводящее квадратическую зависимость	187
6.2.1.1. Выбор интервалов между напряжениями смещения диодов	187
6.2.1.2. Выбор величины сопротивлений	190
Литература	191

Глава 7

СЛЕДЯЩИЕ СИСТЕМЫ

7.1. Определение	192
7.2. Применения	193
7.2.1. Следящая система гироскопа	194
7.2.2. Регулирование скорости вращения вала	196
7.2.3. Регулирование машин постоянного тока большой мощности	200
7.2.4. Сервомотор переменного тока	202
7.2.5. Мощные гидравлические следящие системы	203
7.3. Установившиеся и динамические ошибки	206
7.3.1. Системы регулирования с астатизмом первого порядка	207

ОГЛАВЛЕНИЕ

7.3.2. Системы регулирования с астатизмом второго порядка	209
7.4. Диаграмма Найквиста для следящих систем	210
Литература	212

Глава 8

МЕТОДЫ СТАБИЛИЗАЦИИ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

8.1. Введение	213
8.2. Изменение прямой цепи	215
8.2.1. Уменьшение усиления разомкнутой системы	215
8.2.2. Введение демпфирования	215
8.2.3. Успокоитель колебаний	218
8.2.4. Настроенный успокоитель колебаний	220
8.2.5. Введение первой производной от ошибки	222
8.2.5.1. Пример стабилизации введением скорости изменения ошибки	227
8.2.5.2. Замечания по поводу стабилизации введением скорости изменения ошибки	230
8.2.6. Использование цепи с бесконечной полосой пропускания	230
8.3. Дополнительные обратные связи	234
8.3.1. Скоростная обратная связь	237
8.3.2. Обратная связь по ускорению	241
8.4. Регулирование по интегралу	243
8.4.1. Интегрирующая цепь	243
8.4.2. Введение ошибки и интеграла ошибки	245
8.4.3. Применение в системе с насыщением	246
Литература	248

Глава 9

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

9.1. Введение	250
9.2. Траектории на фазовой плоскости	251
9.3. Предельные циклы	254
9.4. Определение времени	255
9.5. Определение ускорения	257
9.6. Графическое построение фазовых траекторий	258
9.6.1. Метод изоклин	258
9.6.2. Построение Льенара (Liénard)	261
9.7. Ограничения метода фазовой плоскости	264
Литература	265

Глава 10

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ**

10.1. Введение	266
10.2. Описание следящей системы и ее линейные уравнения	267
10.2.1. Скоростная обратная связь и стабилизация по скорости изменения ошибки	270
10.3. Исследование влияния ограничения вращающего момента двигателя	272
10.3.1. Безразмерные уравнения	273
10.3.2. Построение фазового портрета	276
10.3.3. Практический пример	279
10.4. Исследование влияния зазора	281
10.4.1. Уравнение системы	282
10.4.2. Построение фазового портрета	284
10.4.3. Уравнения фазовых траекторий	285
10.5. Сухое трение и трение покоя	287
10.5.1. Неустойчивость на малой скорости	288
10.5.2. Методы устранения движения рывками, вызванного статическим трением	294
Литература	295

Глава 11

**ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ**

11.1. Введение	296
11.2. Эквивалентный комплексный коэффициент усиления	297
11.3. Критерий устойчивости	300
11.4. Примеры эквивалентных комплексных коэффициентов усиления	304
11.5. Точность приближения	308
11.6. Несимметричные нелинейные элементы	313
11.7. Вынужденные колебания	314
11.8. Дальнейшие применения частотного метода	321
Литература	323

Глава 12

СВОЙСТВА РЕЛЕЙНЫХ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

12.1. Введение	324
12.1.1. Вибрационное регулирование	325
12.1.2. Релейное регулирование	327

12.2. Исследование методом фазовой плоскости	328
12.2.1. Безразмерное уравнение	330
12.2.2. Уравнения фазовых траекторий	332
12.2.3. Области на фазовой плоскости	334
12.2.4. Временное запаздывание при переключении реле	335
12.2.5. Фазовый портрет	336
12.3. Частотный метод исследования	339
12.4. Исследование предельных циклов	340
12.4.1. Метод фазовой плоскости	340
12.4.2. Частотный метод	342
12.5. Методы уменьшения амплитуды или подавления автоколебаний	345
12.5.1. Подавление автоколебаний зоной нечувствительности	345
12.5.2. Стабилизация отрицательным гистерезисом	347
12.5.3. Стабилизация скоростной обратной связью	350
12.5.3.1. Амплитуда и частота автоколебаний	352
12.5.3.2. Перерегулирование	357
12.5.4. Стабилизация форсирующей цепью	360
12.6. Оптимизация переходного процесса	361
12.6.1. Осуществление оптимального переходного процесса	366
12.6.2. Преобразования ошибки	368
12.6.3. Механическая обратная связь	369
12.6.4. Видоизменения параболического закона в реальных следящих системах	370
12.6.5. Амплитуда и частота автоколебаний	371
12.6.6. Упрежденное переключение двигателя	373
12.7. Влияние моментов нагрузки на работу релейной следящей системы	375
12.8. Реакция релейной следящей системы на синусоидальное воздействие	377
12.8.1. Частотный метод исследования	380
Литература	383

Г л а в а 13

ЭЛЕКТРОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

13.1. Введение	384
13.2. Набор задачи на моделирующем устройстве	387
13.3. Моделирование системы автоматического управления	389
13.3.1. Уравнения движения корабля	393
13.3.2. Уравнение регулятора	395
13.3.3. Структурная схема	395
13.3.4. Видоизмененная структурная схема	398
13.3.5. Схема набора задачи	399
13.3.6. Устранение перегрузки блоков	402
13.3.7. Нелинейное трение	403

13.3.8. Косинус курсового угла	405
13.3.9. Знак углового ускорения	405
13.3.10. Входные сигналы моделирующего устройства . .	406
Литература	406

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Междукаскадная связь по постоянному току	408
2. Стабилизация пассивной интегрирующей цепью	410
3. Передаточная функция гидравлического усилителя	414
4. Вывод выражения для эквивалентного комплексного коэф- фициента усиления нелинейного элемента с зазором	417
5. Данные ламп, встречающихся в тексте книги	420
Предметный указатель	421

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

За последние годы появилось большое число книг с традиционным изложением элементов теории автоматического регулирования. Эти книги весьма полезны при первоначальном ознакомлении с предметом. Однако у специалиста, работающего в избранной им узкой области, столь общее изложение безотносительно к той или иной области техники вызывает некоторое неудовлетворение. Специалист не может найти в этих книгах ответов на непосредственно интересующие его вопросы относительно автоматических систем, применяющихся в той отрасли техники, которой он занимается.

Поэтому важное значение для этого круга читателей имеют книги, в которых на примерах конкретных автоматических систем излагаются общие вопросы теории автоматического регулирования, с учетом специфики этих систем. К такого рода книгам относится книга П. Хэммонда. Она предназначена для инженеров, работающих в области электроники и радиолокации.

Большое внимание в этой книге уделено электронным схемам с обратной связью и, в частности, усилителям постоянного тока, используемым в электронных моделирующих установках. На этих примерах излагаются не только вопросы линейной и нелинейной теории регулирования, но и весьма важные подробности практического осуществления электронных схем с обратной связью.

Наряду с изложением теоретических методов исследования линейных систем (частотные методы) и нелинейных систем (метод фазовой плоскости и гармонического баланса) автор подробно описывает экспериментальные средства исследования — электронные моделирующие установки.

Весь этот материал изложен в ясной и простой форме, доступной широким инженерным кругам. Книга принесет безусловную пользу и студентам, специализирующимся в области электроники и автоматики.

В русском переводе устранены некоторые неточности оригинала, заменены ссылки на английские и американские работы ссылками на их переводы и добавлено приложение 5 с данными электронных ламп. Библиография дополнена русскими книгами.

При редактировании глав по электронным усилителям (гл. 5, 6) и электронному моделированию (гл. 10) большая помощь была оказана Б. Я. Коганом.

Я. Цыпкин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Цель этой книги состоит в изложении методов анализа линейных и нелинейных систем с обратной связью и их применения к разнообразным техническим устройствам, использующим в той или иной форме обратную связь. Книга предназначена для инженеров и физиков, для студентов и для всех, кто пожелает познакомиться с этим кругом вопросов, их состоянием и перспективами развития. Предполагается, что читатель имеет представление об операторном методе Хевисайда и преобразовании Лапласа.

Линейная теория систем с обратной связью излагается на основе дифференциальных уравнений системы. Далее, на основе преобразования Лапласа вводятся структурные схемы. После рассмотрения свойств систем, обусловленных обратной связью, и особенно отрицательной обратной связью, рассматриваются вопросы устойчивости и выводится критерий Найквиста.

Затем описываются приложения теории к определенным электронным схемам, причем особое внимание уделяется усилителям постоянного тока с потенциально заземленной суммирующей точкой и их применению в качестве элементов моделирующих устройств. Синтез стабилизирующих цепей иллюстрируется на основе частотных характеристик.

Линейная теория следящих систем и иных систем автоматического регулирования излагается на примерах гидравлических и электрических следящих систем. Однако, так как линейная теория во многих случаях не позволяет объяснить поведение системы, то две главы посвящены нелинейным аналитическим методам: методу фазовой плоскости и методу гармонического баланса

(частотный метод). Эти методы иллюстрируются на примере исследования динамики электрического нелинейного регулятора. Специальная глава посвящена релейным системам автоматического регулирования. Свойства релейных регуляторов исследуются с помощью методов фазовой плоскости и гармонического баланса. Рассматривается также оптимизация переходных процессов в релейных системах автоматического регулирования.

Последняя глава посвящена электронным моделирующим устройствам, используемым для изучения нелинейных систем регулирования. На примере системы морского автоматического рулевого описывается методика набора задач на электронной моделирующей установке.

Автор хорошо понимает, что целый ряд важных тем не был затронут в тексте. К ним относятся теория дискретных систем, поведение систем с обратной связью при воздействии случайных сигналов, которые могут быть описаны лишь статистически, метод корневых годографов для анализа линейных систем. Однако в книге, предназначенной для первого знакомства и имеющей разумный объем, совершенно неизбежен строгий отбор тем.

ВВЕДЕНИЕ

Можно сказать, что в системе имеется отрицательная обратная связь в широком смысле этого слова, если приложение к системе некоторого воздействия вызывает противодействие, восстанавливающее первоначальное состояние всей системы или ее части. С другой стороны, если обратная связь положительна, то приложенные воздействия поддерживаются и система стремится удалиться от своего первоначального состояния.

В системе, содержащей обратную связь любого знака, обнаруживается замкнутая цепь зависимостей.

Введение понятия обратной связи может способствовать если не разрешению, то постановке задач, охватывающих обширную область человеческой деятельности. В весьма общем смысле можно сказать, что любая система — биологическая, механическая или экономическая, находящаяся в состоянии равновесия по отношению к внешней среде, — обладает обратными связями. В этом смысле механизм обратной связи стар как мир, так как колебания размеров и температуры при эволюции звезд могут быть описаны с точки зрения обратной связи. В тех же терминах могут быть описаны и движения амебы.

Приведенное выше общее, эвристическое, определение обратной связи позволяет делать полезные выводы о возможном поведении системы на основании известных данных, полученных от другой системы, к которой применимы те же принципы. Например, движение органа человеческого тела можно сравнить с поведением выходного вала механической следящей системы, и, считая, что такое сравнение справедливо, мы можем решить на основании наших данных о следящей системе, что нам следует искать в нервной и мускульной структуре.

Такой подход позволяет единым способом решать задачи в различных, далеко отстоящих областях. В этом смысле понятие обратной связи является объединяющим.

В последующих главах термин обратная связь применяется в довольно ограниченном смысле. Ограничение лучше всего иллюстрируется тремя примерами технических систем, в каждой из которых существует отрицательная обратная связь в наиболее общем смысле этого слова.

Рассмотрим сначала мост. Он представляет собой систему, которая подвергается воздействию ветровой нагрузки и движущегося транспорта. Любому нарушению формы моста, вызванному переменной нагрузкой, противодействуют силы, которые стремятся восстановить форму до ее вида в ненагруженном состоянии. Таким образом, любая «ошибка» в форме вызывает силу, противодействующую «ошибке». Можно сказать, что система обладает обратной связью, причем обратной связью является сила, противодействующая изменению формы. Следовательно, мост обладает «автоматическим регулированием формы», хотя известно, что у моста могут появиться катастрофические колебания нарастающей амплитуды, вызванные нагрузкой, частота колебаний которой равна резонансной частоте системы.

Рассмотрим теперь электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением. Если к обмотке якоря приложить напряжение, то в ней протекает большой ток, ограниченный лишь сопротивлением обмотки. Этот ток взаимодействует с магнитным потоком обмотки возбуждения и в результате появляется вращающий момент, приложенный к виткам обмотки якоря. Двигатель разгоняется, и движение витков обмотки якоря относительно магнитного потока возбуждения вызывает эдс, направленную против приложенного напряжения. Скорость вращения возрастает до тех пор, пока противо-эдс не станет почти равной приложенному напряжению. Небольшая разность обеспечивает протекание через сопротивление обмотки тока, расходуемого на нагрузку и потери. В этой системе угловая скорость достигает состояния равновесия (установившегося состояния). Любое возмущение, например, колебания нагрузки вызывает соот-

ветствующее изменение в противо-эдс и, следовательно, изменение тока якоря, вследствие чего меняется вращающий момент в той степени, в какой нужно для противодействия изменению скорости. Электродвигатель обладает внутренним регулированием скорости, обусловленным замкнутым контуром зависимостей, который можно назвать цепью отрицательной обратной связи.

Третьим примером служит самолет, управляемый автопилотом. Любое отклонение от курса, установленного компасом, определяется приборами и вызывает движение рулей самолета, которые стремятся восстановить курс. Здесь снова обнаруживается замкнутая цепь зависимостей и можно сказать, что существует отрицательная обратная связь. В этом примере замкнутая цепь содержит несколько различных внутренних замкнутых цепей. Имеется чувствительный элемент (компас и его датчики), определяющий ошибку курса, вычислительное устройство, в котором ошибка преобразуется в сигнал, удобный для приложения к управляющим рулям, и исполнительный механизм, или сервомотор, регулирующий подачу энергии рулям. Цепь замыкается аэродинамическим поведением самолета, т. е. реакцией машины на движения ее управляющих рулей.

Каждая из этих трех систем находится в состоянии устойчивого равновесия. Однако мост не обладает внутренним источником энергии, кроме накопленной энергии, и, следовательно, отличается от двух других примеров. Он представляет собой пассивную систему, и его колебательная неустойчивость требует для поддержания колебаний подачи энергии извне.

Как электродвигатель, так и самолет с автопилотом являются активными системами, хотя они и отличаются тем, что двигателю обратная связь свойственна по его природе, являясь следствием закона Ленца, а в самолете она добавляется искусственно. Двигатель без свойственной ему обратной связи не является двигателем, в то время как самолет без автопилота не сможет только поддерживать заданный курс.

На последующих страницах термин «система с обратной связью» применяется только по отношению к активным системам. В большинстве примеров в замкнутой

цепи зависимостей имеются элементы, которые, можно сказать, играют роль чувствительных элементов или датчиков, вычислительных устройств или усилителей и исполнительных элементов или двигателей. Некоторые из примеров, такие, как электродвигатель, являются активными системами, в которых эти функциональные элементы неразличимы или которые при отсутствии обратной связи полностью меняют свой характер. Говорят, что такие системы обладают внутренней обратной связью.

История технических приложений обратной связи начинается с XVII века. Интересный исторический обзор дан Р. Х. Макмилланом*), который упоминает о самом раннем приложении — о «скороварке», изобретенной французским физиком Д. Папеном в 1680 г. Это была первая кастрюля для варки под давлением, в которой давление пара регулировалось грузом на крышке кастрюли. В XVIII веке появились регулятор паровой машины Уатта (1788 г.) и устройство для оперения крыльев ветряных мельниц для регулирования скорости размалывания. Начиная с этих первых шагов, число технических приложений обратной связи возрастает с большой скоростью. В настоящее время в связи с широким внедрением автоматизации производственных процессов наблюдается быстрое развитие новой техники. В то же время следует помнить, что люди как с социальной, так и с биологической точки зрения безусловно содержат в себе более компактные и высоко организованные устройства обратной связи, механизм которых пока еще трудно себе представить.

В настоящей книге основной упор сделан на теорию систем с обратной связью. Особое внимание уделяется вопросам устойчивости, которые существенны для технических систем, тем более, что обеспечение устойчивости обычно представляет значительные трудности для инженера, занимающегося вопросами обратной связи. Примеры приложений обратной связи для иллюстрации различных сторон теории относятся к усилителям с обратной связью и некоторым системам регулирования.

*) В книге: Автоматизация — Друг или Враг, Кембридж, 1956. [Automation — Friend or Foe, Cambridge, 1956.]

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

1.1. Введение

Система с обратной связью состоит из одного или нескольких отдельных звеньев, действующих друг на друга определенным образом и соединенных так, что образуется замкнутая цепь. По своей физической природе звенья могут быть электрическими, электронными или механическими. Современные исследования показывают, что биологические и экономические системы также содержат явно выраженные замкнутые цепи. Прежде чем рассматривать свойства систем с обратной связью, необходимо разработать математический аппарат, который может быть применен к описанию любого элемента системы, независимо от его физической природы.

Динамика любой физической системы может быть описана одним или несколькими дифференциальными уравнениями, связывающими переменные величины. Такими уравнениями можно описать как поведение отдельного элемента системы, так и всей системы. Для отдельного элемента такие уравнения связывают переменные в точках соединения элементов. Некоторые элементы обладают такими характеристиками, как насыщение (катушки индуктивности с железным сердечником, электронные лампы, электрические двигатели и т. д.), зазор и сухое трение (редукторы и подшипники) и геометрические нелинейности (потенциометры и кинематические цепи). Это приводит к тому, что дифференциальные уравнения становятся нелинейными.

Иллюстрацией элемента с нелинейной характеристикой может служить простой регулятор скорости вращения

двигателя, изображенный на рис. 1. К двум легким изогнутым рычагам, поворот которых вызывает осевое перемещение тяги, прикреплено по одному шарикку. Дроссельный клапан, регулирующий скорость двигателя, управляется с помощью тяги. Когда вал двигателя находится в состоянии покоя, шарики располагаются вертикально над осями шарнирного соединения рычагов и пружина находится под легким натяжением.

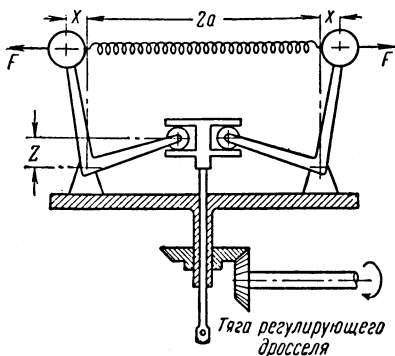


Рис. 1.

В этом механизме налицо замкнутая цепь обратной связи, так как скорость двигателя зависит от положения тяги регулятора, которое в свою очередь зависит от скорости двигателя. Уравнение регулятора, как элемента в цепи обратной связи, вызывает положение тяги со скоростью двигателя. Оно будет выведено по ходу рассмотрения примера.

Сила, пропорциональная радиальному ускорению, действует на каждый шарик и определяется выражением

$$F = m\Omega^2 (a + X),$$

где m — масса, Ω — угловая скорость, $2a$ — расстояние между осями шарнирных соединений рычагов, X — радиальное отклонение шариков, вызванное вращением вала.

Этой силе противодействуют силы: инерции шариков, трения и сопротивления пружины, суммарное действие которых равно

$$F = cX + b \frac{dX}{dt} + m \frac{d^2X}{dt^2},$$

где c — жесткость пружины, b — коэффициент трения, отнесенный к линии действия силы и зависящий от скорости.

При равенстве плеч рычагов осевое перемещение Z тяги регулирующего дросселя равно радиальному отклонению шарика X . Приравнявая полученные ранее выражения для радиальной силы и полагая $Z=X$, получаем:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dZ}{dt} + \frac{c}{m} Z = \Omega^2 a \left(1 + \frac{Z}{a} \right) \quad (1)$$

или

$$\frac{1}{a} \left(1 + \frac{Z}{a} \right)^{-1} \left[\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dZ}{dt} + \frac{c}{m} Z \right] = \Omega^2.$$

Это уравнение является нелинейным, так как переменная Z входит в него в степени, отличной от единицы, или, другими словами, коэффициенты линейного уравнения второго порядка в квадратных скобках сами являются функциями зависимой переменной.

В основе линейной теории обратной связи лежат допущения, заключающиеся в предположении: либо линейности физической системы, либо малости амплитуд переменных величин, что достаточно для применения линейного приближения. Для регулятора скорости линейное приближение может быть получено следующим образом. Пусть Ω_g — номинальная скорость вращения вала, при которой установившееся отклонение тяги есть величина постоянная и равная Z_g , а расстояние между шариками равно $2R$, где $R = a + X_g = a + Z_g$.

Тогда из уравнения (1) в установившемся состоянии, когда $\frac{dZ}{dt}$ и $\frac{d^2Z}{dt^2}$ равны нулю, получаем:

$$\frac{c}{m} Z_g = R \Omega_g^2. \quad (2)$$

Если имеют место малые отклонения $\Delta\Omega(t)$ и $\Delta Z(t)$ от номинальных значений Ω_g и Z_g , то уравнение (1) принимает вид

$$D^2 (\Delta Z) + \frac{b}{m} D (\Delta Z) + \frac{c}{m} (Z_g + \Delta Z) = \Omega_g^2 \left(1 + \frac{\Delta\Omega}{\Omega_g} \right)^2 R, \quad (3)$$

где $D = \frac{d}{dt}$, и

$$\left(1 + \frac{\Delta\Omega}{\Omega_g} \right)^2 = 1 + \frac{2\Delta\Omega}{\Omega_g} + \left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_g} \right)^2.$$

Членом $c(\Delta\Omega)^2$ можно пренебречь, как величиной второго порядка малости. Из уравнений (2) и (3) получаем:

$$D^2(\Delta Z) + \frac{b}{m}D(\Delta Z) + \frac{c}{m}\Delta Z = 2\Delta\Omega\Omega_g R. \quad (4)$$

Это уравнение является линейным приближением нелинейной зависимости между скоростью двигателя и величиной открытия дросселя. При рассмотрении малых изменений скорости регулируемого двигателя к системам с обратной связью можно применять линейную теорию.

Приближения такого рода часто хорошо удовлетворяют практическим требованиям. В противном случае необходимо прибегать к нелинейным методам. Общих методов решения нелинейных задач пока еще нет, и каждое нелинейное уравнение должно решаться в соответствии с его особенностями. Некоторые приближенные графические и аналитические методы исследования нелинейных систем будут описаны в последующих главах.

Обнаружить нелинейность элемента можно экспериментально путем приложения нескольких возмущений: сначала каждого в отдельности, а затем всех совместно. Если реакция на совместное действие всех возмущений равна сумме реакций на отдельные возмущения, то элемент описывается линейным уравнением. В этом случае говорят, что к элементу применим принцип суперпозиции. В следующих главах мы увидим, что одним из основных свойств отрицательной обратной связи является то, что, благодаря ей, характеристики всей системы оказываются менее чувствительными к изменению характеристик отдельных звеньев замкнутой системы. Это свойство может оправдать применение линейного приближения в уравнениях замкнутой системы, когда нелинейностями элементов, рассматриваемых в отдельности, нельзя пренебречь. Иногда встречаются системы, в дифференциальном уравнении которых один из коэффициентов является функцией времени, а не постоянной величиной, как было принято выше для $\frac{b}{m}$ и $\frac{c}{m}$. Например, сила трения и, следовательно, коэффициент b может изменяться с изменением внешней температуры, независимо от переменной Z или ее производных. Такое уравнение движения является

линейным, так как его коэффициенты не являются функциями зависимой переменной, и тем не менее решения уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, часто не могут быть получены прямыми аналитическими методами, описанными в следующих параграфах.

1.2. Линейное дифференциальное уравнение

Пусть уравнение относительно реакции системы $R(t)$ на возмущение $S(t)$ будет

$$a_n R + a_{n-1} \frac{dR}{dt} + a_{n-2} \frac{d^2R}{dt^2} + \dots + a_0 \frac{d^n R}{dt^n} = S(t), \quad (5)$$

где $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ — постоянные.

Если правая часть уравнения равна нулю, то решение $R(t)$, характеризующее поведение системы при данных начальных условиях и при отсутствии возмущения, называется *свободной переходной составляющей*. Полное решение уравнения (5) при заданной функции $S(t)$ определяет *реакцию* системы, включающую в себя *переходную составляющую*, обусловленную внезапным приложением воздействия $S(t)$, и если $S(t)$ периодическая функция, то еще установившуюся реакцию, остающуюся после затухания переходного процесса. Решение линейных дифференциальных уравнений существенно упрощается благодаря применению операторного метода, в котором дифференциальное уравнение преобразуется в алгебраическое путем замены символа дифференцирования $\frac{d}{dt}$ оператором p , подчиняющимся правилам алгебраических действий. Один из таких методов, а именно метод преобразования Лапласа, будет вкратце описан здесь и использован в последующих главах.

1.3. Преобразование Лапласа

Пусть $F(t)$ — функция, определенная при $0 \leq t \leq \infty$, и пусть

$$\bar{F}(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) F(t) dt. \quad (6)$$

Тогда $\bar{F}(p)$ определяется как *преобразование Лапласа функции* $F(t)$ или ее *изображение*. Уравнение (6) записывается сокращенно в виде

$$\bar{F}(p) = L[F(t)],$$

(p — действительная или комплексная величина такая, что интеграл (6) сходится). В физических приложениях, где t чаще всего имеет размерность времени, считается что p имеет обратную размерность — (время)⁻¹, поэтому показатель экспоненты представляет собой безразмерную величину. Таким образом, размерность $\bar{F}(p)$ в равенстве (6) совпадает с размерностью $F(t)$, умноженной на время. Проверка размерности уравнения, содержащего p , часто бывает полезной.

1.3.1. Правило сложения.

Это правило устанавливает, что изображение суммы двух функций времени равно сумме изображений функций, взятых по отдельности. Таким образом,

$$\begin{aligned} L[aF(t) + bG(t)] &= \int_0^{\infty} \exp(-pt) [aF(t) + bG(t)] dt = \\ &= a \int_0^{\infty} \exp(-pt) F(t) dt + b \int_0^{\infty} \exp(-pt) G(t) dt = \\ &= a\bar{F}(p) + b\bar{G}(p). \end{aligned}$$

1.3.2. Примеры изображений.

Ниже будут получены изображения нескольких часто встречающихся функций времени.

1. Пусть

$$F(t) = K = \text{const};$$

тогда

$$\begin{aligned} L[F(t)] &= \int_0^{\infty} \exp(-pt) K dt = \\ &= \frac{K}{p} \quad (\text{действительная часть } p > 0) \end{aligned}$$

2. Пусть

$$F(t) = K \exp(\alpha t);$$

тогда

$$\begin{aligned} L[F(t)] &= K \int_0^{\infty} \exp(-pt) \exp(at) dt = \\ &= \frac{K}{p-a} \text{ (действительная часть } p > a). \end{aligned}$$

3. Пусть

$$F(t) = Kt;$$

тогда

$$\begin{aligned} L[F(t)] &= K \int_0^{\infty} \exp(-pt) t dt = \\ &= \frac{K}{p^2} \text{ (действительная часть } p > 0). \end{aligned}$$

Для каждого изображения существуют определенные ограничения на значения p , при которых оно справедливо и при которых интеграл в равенстве (6) существует. Табл. 1 содержит еще несколько часто встречающихся функций (оригиналов) и их изображения. Более полные таблицы и строгое рассмотрение данного вопроса можно найти в [1].

1.3.3. Изображения производных.

Преобразование дифференциального уравнения требует, прежде всего, чтобы была преобразована каждая производная.

Рассмотрим

$$L[F'(t)], \text{ где } F'(t) = \frac{dF}{dt}.$$

Очевидно,

$$L[F'(t)] = \int_0^{\infty} \exp(-pt) F'(t) dt.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} L[F'(t)] &= [\exp(-pt) F(t)]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} F(t) \exp(-pt) dt = \\ &= -F(0) + p\bar{F}(p) \end{aligned}$$

Таблица 1

Краткий список преобразований Лапласа

	Функция времени $f(t)$ (при $t > 0$)	Преобразование $\bar{f}(p)$
1	$\delta(t)$ (дельта-функция Дирака)	1
2	$H(t)$ (ступенчатая функция Хевисайда)	$\frac{1}{p}$
3	$\delta(t-\tau)$ (смещенная дельта-функция)	$\exp(-p\tau)$ ($\text{Re } p > 0$) *
4	$F(t-\tau)$	$\bar{F}(p) \exp(-p\tau)$
5	$K = \text{const}$	$\frac{K}{p}$ ($\text{Re } p > 0$)
6	$\exp(-at)$	$\frac{1}{p+a}$ ($\text{Re } p > -a$)
7	$[1 - \exp(-at)]$	$\frac{a}{p(p+a)}$ ($\text{Re } p > 0$)
8	t^n ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$ ($\text{Re } p > 0$)
9	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
10	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
11	$\sin \omega t \exp(-at)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
12	$\cos \omega t \exp(-at)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
13	$\exp(-at) \left[\cos \omega t - \frac{a}{\omega} \sin \omega t \right]$	$\frac{p}{(p+a)^2 + \omega^2}$
14	$\exp(-\beta t) - \exp(-at)$	$\frac{\alpha - \beta}{(p+\alpha)(p+\beta)}$
15	$t^{n-1} \exp(-at)$	$\frac{(n-1)!}{(p+\alpha)^n}$ ($\text{Re } p > -\alpha$)

*) Запись «Re» означает — «действительная часть». (Прим. ред).

Аналогично

$$\begin{aligned} L[F''(t)] &= \int_0^{\infty} \exp(-pt) F''(t) dt = \\ &= [\exp(-pt) F'(t)]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} F'(t) \exp(-pt) dt = \\ &= -F'(0) - pF(0) + p^2 \bar{F}(p). \end{aligned}$$

И вообще,

$$L[F^n(t)] = -F^{n-1}(0) - pF^{n-2}(0) - \dots - p^{n-1}F(0) + p^n \bar{F}(p).$$

$F(0)$, $F'(0)$ и т. д. суть начальные условия функции $F(t)$ и ее производных при $F(t)$. Таким образом, для преобразования дифференциального уравнения необходимо знать все начальные условия.

1.3.4. Изображения интегралов.

$$L \left[\int_0^{\infty} F(t) dt \right] = \int_0^{\infty} \exp(-pt) \left[\int_0^t F(t) dt \right] dt.$$

Интегрируя правую часть равенства по частям, получаем:

$$\begin{aligned} L \left[\int_0^{\infty} F(t) dt \right] &= -\frac{1}{p} \left[\exp(-pt) \int_0^t F(t) dt \right]_0^{\infty} + \\ &+ \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \exp(-pt) F(t) dt = \frac{\bar{F}(p)}{p}. \end{aligned}$$

Изображение, соответствующее функции $F(t)$, проинтегрированной n раз от 0 до t , имеет вид

$$\frac{\bar{F}(p)}{p^n}.$$

1.4. Операторное решение дифференциальных уравнений

При решении дифференциального уравнения каждое слагаемое его преобразуется по очереди и получающиеся в результате изображения складываются. Эта операция следует из правила сложения (п° 1.3.1). Таким образом,

изображение уравнения (5) имеет вид

$$a_n \bar{R}(p) + a_{n-1} [p\bar{R}(p) - R(0)] + \\ + a_{n-2} [p^2 \bar{R}(p) - pR(0) - R'(0)] + \dots = \bar{S}(p),$$

откуда, рассматривая p как алгебраическую величину и преобразовывая уравнение, получаем:

$$\bar{R}(p) [a_n + a_{n-1} p + a_{n-2} p^2 + \dots] - \\ - R(0) [a_{n-1} + a_{n-2} p + \dots] - \\ - R'(0) [a_{n-2} + \dots] - \dots = \bar{S}(p).$$

Изображение реакции системы $\bar{R}(p)$ выражается:

$$\bar{R}(p) = \frac{\bar{S}(p) + R(0) [a_{n-1} + a_{n-2} p + \dots] + R'(0) [a_{n-2} + \dots] + \dots}{a_n + a_{n-1} p + a_{n-2} p^2 + \dots}.$$

Для определения оригинала, т. е. решения дифференциального уравнения, нужно представить $R(p)$ в виде комбинации известных изображений из числа приведенных в табл. 1, например, при помощи разложения рациональной дроби на сумму элементарных дробей.

Заметим, что если исключить начальные условия, то выражение для $\bar{R}(p)$ может быть получено из уравнения (5) заменой $\frac{d}{dt}$ на p , $S(t)$ на $\bar{S}(p)$ и $R(t)$ на $\bar{R}(p)$ и применением к p правил алгебраических действий.

1.4.1. Решение уравнения первого порядка; аperiodическое звено.

В качестве примеров аperiodических звеньев могут служить системы, содержащие элемент, накапливающий

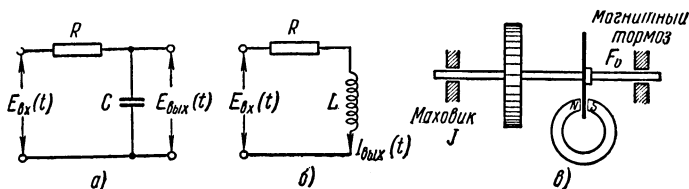


Рис. 2. Примеры аperiodических звеньев.

ливающий энергию, в соединении с сопротивлением или вязким трением. На рис. 2 показаны обычно встре-

чающиеся механические и электрические устройства такого рода. Иногда говорят, что такие элементы создают экспоненциальное запаздывание между входным воздействием и реакцией.

1.4.1.1. Пассивная RC -цепь. В пассивной электрической цепи на рис. 2, а накопителем энергии является конденсатор. Уравнение, связывающее входное и выходное напряжения, записывается следующим образом:

$$\frac{dE_{\text{вых}}}{dt} + \frac{1}{CR} E_{\text{вых}} = \frac{1}{CR} E_{\text{вх}}. \quad (7)$$

Пусть входное напряжение приложено в момент $t=0$ и имеет вид

$$E_{\text{вх}}(t) = E \cos \omega t.$$

Примем, что при $t=0$ конденсатор обладает зарядом Q_0 ; тогда

$$E_{\text{вых}}(0) = \frac{Q_0}{C}.$$

Преобразование дифференциального уравнения по Лапласу дает:

$$p\bar{E}_{\text{вых}}(p) - E_{\text{вых}}(0) + \frac{1}{CR} \bar{E}_{\text{вых}}(p) = \frac{E}{CR} \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

откуда

$$\bar{E}_{\text{вых}}(p) = \alpha E \frac{p}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{p + \alpha} + \frac{Q_0}{C} \frac{1}{p + \alpha},$$

где $\alpha = \frac{1}{CR}$ — постоянная времени цепи в секундах.

Разлагая первый член в правой части на элементарные дроби, получаем:

$$\bar{E}_{\text{вых}}(p) = \frac{\alpha E}{\alpha^2 + \omega^2} \left[\frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} + \frac{\alpha p}{p^2 + \omega^2} - \frac{\alpha}{p + \alpha} \right] + \frac{Q_0}{C} \frac{1}{p + \alpha},$$

откуда с помощью табл. 1 находим:

$$E_{\text{вых}}(t) = \frac{\alpha E}{\alpha^2 + \omega^2} [\omega \sin \omega t + \alpha \cos \omega t - \alpha \exp(-\alpha t)] + \frac{Q_0}{C} \exp(-\alpha t)$$

ИЛИ

$$E_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{\alpha E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) - \\ - \frac{\alpha^2 E}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(-\alpha t) + \frac{Q_0}{C} \exp(-\alpha t),$$

где $\varphi = \text{arctg} \frac{\omega}{\alpha}$.

$E_{\text{ВЫХ}}(t)$ есть общее решение, характеризующее реакцию цепи и включающее в себя переходную составляющую, которая затухает с ростом t , так что, когда t становится достаточно большим, остается лишь решение, соответствующее установившемуся процессу, т. е. установившейся реакции на синусоидальный входной сигнал. Члены с $\exp(-\alpha t)$ характеризуют переходный процесс, который затухает по экспоненте; они появляются благодаря внезапному приложению внешнего воздействия или существованию начального заряда на конденсаторе в момент $t = 0$.

Свободную составляющую процесса в цепи можно получить, положив $E_i(t) = 0$ и подставив начальные условия; тогда операторная форма дифференциального уравнения будет иметь вид

$$p\bar{E}_{\text{ВЫХ}}(p) - E_{\text{ВЫХ}}(0) + \frac{1}{CR}\bar{E}_{\text{ВЫХ}}(p) = 0,$$

$$\bar{E}_{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{E_{\text{ВЫХ}}(0)}{p + \alpha},$$

$$E_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{Q_0}{C} \exp(-\alpha t).$$

1.4.1.2. Другие виды аperiodических звеньев. Для индуктивной цепи (рис. 2, б) уравнение, связывающее входное напряжение и ток, записывается:

$$L \frac{dI_{\text{ВЫХ}}}{dt} + RI_{\text{ВЫХ}} = E_{\text{ВХ}}$$

ИЛИ

$$\frac{dI_{\text{ВЫХ}}}{dt} + \frac{RI_{\text{ВЫХ}}}{L} = \frac{E_{\text{ВХ}}}{L}.$$

Механическое устройство, состоящее из маховика и демпфера, описывается уравнением, связывающим при-

ложенный момент $F_{\text{вх}}$ и угол поворота вала θ , в виде

$$\frac{J d^2 \theta}{dt^2} + F_{\text{тр}} \frac{d\theta}{dt} = F_{\text{вх}}$$

или

$$\frac{d\Omega}{dt} + \frac{F_{\text{тр}}}{J} \Omega = \frac{F_{\text{вх}}}{J},$$

где Ω — угловая скорость, $F_{\text{тр}}$ — коэффициент трения, принимаемый зависимым от скорости.

Уравнения этих двух элементов одинаковы по форме с уравнением (7), так что их решения определяют временную характеристику, похожую на характеристику RC -цепи. Постоянная времени α принимает значения $\frac{L}{R}$ [сек] и $\frac{J}{F_{\text{тр}}}$ [сек] соответственно.

Сравнение уравнений электрических и механических устройств обнаруживает аналогию между величинами. Так,

$$L \sim J; \quad F \sim R; \quad \Omega \sim J_{\text{вых}}; \quad F_{\text{вх}} \sim E_{\text{вх}}.$$

Такое соответствие электрических и механических величин является основой системы аналогий, исходя из которой, механические и электрические представления могут быть свободно взаимозаменяемы.

1.4.2. Решение уравнения второго порядка; колебательное звено.

Рассмотрим в качестве примера уравнение (4) для малых отклонений скорости регулятора. Свободные колебания регулятора определяются решением этого уравнения при равенстве нулю возмущающего члена $\Delta\Omega(t)$. В качестве начальных условий предположим, что дроссельная заслонка была немного смещена относительно положения равновесия и затем отпущена. Выражение для последующей реакции получается решением следующего преобразованного уравнения:

$$\overline{\Delta Z} p^2 + \frac{b}{m} \overline{\Delta Z} p - \frac{b}{m} \Delta Z(0) + \frac{c}{m} \overline{\Delta Z} = 0,$$

где $\overline{\Delta Z} = L[\Delta Z(t)] = \overline{\Delta Z}(p)$ и $\Delta Z(0)$ — начальное отклонение дроссельной заслонки. Тогда

$$\overline{\Delta Z} \left(p^2 + \frac{b}{m} p + \frac{c}{m} \right) = \frac{b}{m} \Delta Z(0)$$

или

$$\overline{\Delta Z} = \frac{\frac{b}{m} \Delta Z(0)}{p^2 + \frac{b}{m} p + \frac{c}{m}}.$$

Функция, связывающая $\overline{\Delta Z}$ и $\Delta Z(0)$, описывает поведение *колебательного звена*. Ее временная характеристика зависит от знака выражения $\left(\frac{b^2}{m^2} - 4 \frac{c}{m}\right)$. Если эта скобка отрицательна, то знаменатель выражения для $\overline{\Delta Z}$ имеет комплексные корни и временная характеристика дается в виде оригинала № 11 в табл. 1. Если эта скобка положительна, то корни знаменателя — действительные и оригинал будет соответствовать № 14 табл. 1. Таким образом, для комплексных корней

$$\overline{\Delta Z} = \frac{\frac{b}{m} \Delta Z(0)}{\left(p + \frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{b^2}{4m^2} + \frac{c}{m}}.$$

Из соответствия № 11, табл. 1 находим:

$$\Delta Z(t) = \frac{b}{\omega_n m} \Delta Z(0) \exp(-\beta t) \sin \omega_n t,$$

где

$$\beta = \frac{b}{2m} \text{ и } \omega_n^2 = \frac{c}{m} - \frac{b^2}{4m^2}.$$

В этом случае переходный процесс имеет колебательный характер с затуханием, обусловленным наличием трения.

Если корни знаменателя действительны, то переходный процесс не колебательный и его решение представляется суммой двух экспоненциальных слагаемых. Когда $\left(\frac{b^2}{m^2} - 4 \frac{c}{m}\right) = 0$, корни равны. В этом граничном случае говорят, что переходный процесс имеет *критическое затухание*. Преобразованное по Лапласу уравнение тогда имеет вид

$$\overline{\Delta Z} = \frac{\frac{b}{m} \Delta Z(0)}{\left(p + \frac{b}{2m}\right)^2},$$

и согласно оригиналу № 15 табл. 1 временная характеристика получается в виде

$$\Delta Z(t) = \frac{b}{m} \Delta Z(0) t \exp\left(-\frac{b}{2m} t\right).$$

1.5. Единичная импульсная функция

Для сравнения характеристик линейных систем и вывода выражений их реакций на произвольное возмущение необходимо использовать функцию времени, известную под названием единичной импульсной функции, или дельта-функции. Эта функция была введена Дираком и представляет собой возмущение длительности ε сек и амплитуды $\frac{1}{\varepsilon}$, где ε есть бесконечно малая величина. На рис. 3, а изображена дельта-функция, возникающая в момент t_1 . Математическое обозначение единичной импульсной функции, возникающей в момент t_1 , имеет вид

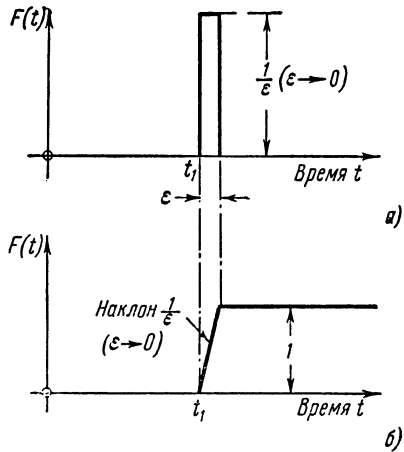


Рис. 3.

$$F(t) = \delta(t - t_1) = \delta(t_1 - t). \quad (8)$$

δ -функция обладает следующими свойствами, которые являются для нее определяющими:

свойство 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1) dt = 1;$$

свойство 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t - t_1) dt = \varphi(t_1).$$

Свойство 1 означает, что несмотря на то, что функция имеет пренебрежимо малую длительность, площадь, ограниченная ею, имеет конечное значение, равное единице. Свойство 2 означает, что произведение произвольной функции времени и дельта-функции в момент t_1 существует только в момент t_1 . Это произведение представляет собой импульсную функцию, появляющуюся в момент времени $t = t_1$ и площадь которой равна $\varphi(t_1)$. Используя уравнение (6), изображение единичной импульсной функции можно записать в виде

$$L[\delta(t - t_1)] = \int_0^{\infty} \delta(t - t_1) \exp(-pt) dt = \exp(-pt_1)$$

(из свойства 2).

Если функция появляется в начальный момент времени $t_1 = 0$, то

$$L[\delta(t)] = 1.$$

В 1.7 показано, что всякий импульс малой длительности стремится к δ -функции, площадь которой равна произведению длительности на амплитуду. Действительная длительность должна быть малой в сравнении с наименьшей постоянной времени системы, к которой импульс приложен.

1.5.1. Реакция на единичный импульс.

Если на систему, находящуюся в начале в состоянии покоя, воздействует единичная импульсная функция, то реакция системы, называемая *импульсной переходной функцией*, будет далее обозначаться через $y(t)$. В качестве примера рассмотрим пассивную электрическую цепь, описываемую уравнением (7). Полагая $E_{вх} = \delta(t)$ и начальные условия нулевыми, запишем преобразованное по Лапласу уравнение

$$p\bar{E}_{вых}(p) + \alpha\bar{E}_{вых}(p) = \alpha 1, \quad \bar{E}_{вых}(p) = \frac{\alpha}{p + \alpha}$$

и

$$E_{вых}(t) = \alpha \exp(-\alpha t) = y(t). \quad (9)$$

Если импульс аппроксимирован коротким импульсом напряжения длительностью 10 мксек и амплитудой 300 в

входное воздействие может быть представлено как

$$E_{\text{вх}}(t) \approx 0,3\delta(t).$$

Если цепь, на которую воздействует этот импульс, имеет постоянную времени α значительно большую, чем 10 мксек,

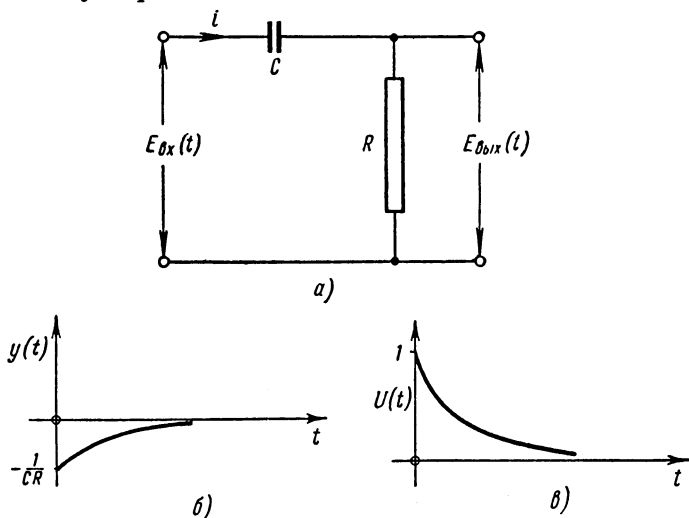


Рис. 4.

то переходный процесс определяется следующим выражением:

$$E_{\text{вых}}(t) \approx 0,3 \alpha \exp(-\alpha t).$$

Импульсная переходная функция может содержать дельта-функцию. Так, например, пассивная RC -цепь, изображенная на рис. 4, а, описывается дифференциальным уравнением

$$E_{\text{вх}}(t) - \frac{1}{C} \int_0^t i dt = E_{\text{вых}}(t)$$

и

$$iR = E_{\text{вых}}(t),$$

откуда

$$E_{\text{вх}}(t) = E_{\text{вых}}(t) + \frac{1}{CR} \int_0^t E_{\text{вых}}(t) dt.$$

Преобразование этого уравнения по Лапласу дает:

$$\begin{aligned}\bar{E}_{\text{вх}}(p) &= \bar{E}_{\text{вых}}(p) \left[1 + \frac{1}{pCR} \right], \\ \bar{E}_{\text{вых}}(p) &= E_{\text{вх}}(p) \frac{pCR}{1+pCR}.\end{aligned}$$

Если

$$E_{\text{вх}}(t) = \delta(t), \quad \text{то} \quad \bar{E}_{\text{вх}}(p) = 1.$$

Тогда из табл. 1 (соответствие № 2)

$$E_{\text{вых}}(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{ll} \exp\left(-\frac{1}{CR}t\right) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{array} \right\}.$$

Выражение в скобках в правой части имеет единичный скачок в начальный момент времени, так что на основании уравнения (10), которое дано ниже, производная этого выражения содержит единичную δ -функцию и записывается в виде

$$E_{\text{вых}}(t) = \delta(t) - \frac{1}{CR} \exp\left(-\frac{1}{CR}t\right).$$

Это и есть реакция RC -цепи на импульс, т. е. ее импульсная переходная функция (рис. 4, б): переходная функция для этой цепи показана на рис. 4, в.

1.6. Единичная ступенчатая функция Хевисайда

Единичная ступенчатая функция имеет значение, равное нулю при $t < t_1$ и единице при $t > t_1$. Единичный скачок, появляющийся в момент времени t_1 , обозначается через $H(t - t_1)$. Рис. 3, б иллюстрирует это. Скорость изменения $H(t - t_1)$ равна нулю везде, кроме $t = t_1$, где она бесконечно велика, так что дельта-функция Дирака есть результат дифференцирования скачкообразной функции Хевисайда. Символически это можно записать так:

$$\frac{d}{dt} H(t - t_1) = \delta(t - t_1). \quad (10)$$

Изображение единичной ступенчатой функции равно

$$L[H(t - t_1)] = \frac{\exp(-pt_1)}{p}$$

и

$$L[H(t)] = \frac{1}{p}.$$

В методе преобразования Лапласа изображение δ -функции равно единице. Хевисайд в своем операторном методе выбрал в качестве основной единицы ступенчатую функцию, таким образом, операторная форма для $H(t)$ по Хевисайду есть $\frac{1}{p}$. При этом правая часть уравнения (6), определяющего преобразование Лапласа, выглядит по Хевисайду

$$p \int_0^{\infty} \exp(-pt) F(t) dt.$$

Таким образом, все основные соответствия, приведенные в табл. 1, могут быть преобразованы в таблицу основных соответствий по Хевисайду умножением изображений на p (см. [3]).

1.6.1. Переходная функция.

Реакция системы на единичную ступенчатую функцию, называемая *переходной функцией*, обозначается через $U(t)$. Так как единичная ступенчатая функция есть интеграл по времени от единичной импульсной функции, то реакция системы на единичную ступенчатую функцию получается как

$$U(t) = \int_0^t y(t) dt.$$

1.7. Короткий импульс конечной амплитуды

Выражение для реакции системы на короткий импульс можно получить, рассматривая эту реакцию как сумму реакций на положительную ступенчатую функцию и следующую через короткий промежуток времени отрицательную ступенчатую функцию той же амплитуды. Если промежуток времени равен Δt , а значения ступен-

чатых функций равны соответственно $+A$ и $-A$, то

$$R(t) = AU(t) - AU(t - \Delta t) = A\Delta t \left\{ \frac{U(t) - U(t - \Delta t)}{\Delta t} \right\}.$$

Если теперь Δt стремится к нулю, то член в фигурных скобках стремится к $\frac{dU}{dt}$, т. е. к импульсной переходной функции $y(t)$. Из этого следует, что короткий импульс конечной амплитуды можно представить в виде импульсной функции, имеющей значение, равное площади этого импульса $A\Delta t$.

1.8. Реакция линейной системы на произвольное возмущение

Любая функция времени может рассматриваться как сумма большого числа близко расположенных импульсов

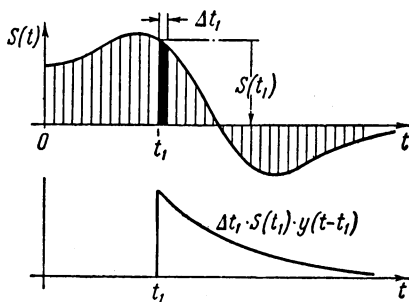


Рис. 5.

малой длительности, причем высота каждого импульса равна значению функции времени в момент появления импульса (рис. 5). Такого рода представление, но с использованием трехугольных импульсов было рассмотрено А. Тастином (А. Tustin) в связи с применением численного метода исследования поведения линейной системы [4]. Определим реакцию системы, вызываемую приложением воздействия, в виде произвольной функции времени. Для этого найдем вначале реакцию системы на каждый отдельный импульс в последовательные моменты времени t и затем просуммируем выражения реак-

ций на каждый импульс. На основании принципа суперпозиции сумма этих реакций есть реакция системы на произвольное воздействие.

Функция времени $S(t)$, изображенная на рис. 5, воздействует на систему, начиная с $t=0$, и равна 0 для $t < 0$. В момент времени t реакция на дельта-функцию, приложенную в предшествующий момент t_1 , равна импульсной переходной функции $y(t-t_1)$. Если импульс, приложенный в момент t_1 , имеет длительность Δt_1 , он эквивалентен дельта-функции площади $S(t_1) \Delta t_1$, а ее значение в момент времени t равно

$$S(t_1) \Delta t_1 y(t-t_1).$$

Следовательно, суммарная реакция на все импульсы, содержащиеся в $S(t)$ до момента времени t , равна

$$R(t) = \sum_{t_1=0}^{t_1=t} S(t_1) y(t-t_1) \Delta t_1.$$

При $\Delta t_1 \rightarrow 0$ сумма превращается в интеграл

$$R(t) = \int_0^t S(t_1) y(t-t_1) dt_1. \quad (11)$$

После замены переменных $t-t_1 = \tau$ этот интеграл преобразуется к виду

$$R(t) = \int_0^t S(t-\tau) y(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Равенства (11) и (12) представляют два вида записи так называемого *интеграла свертывания* [5]. Этот интеграл широко применяется в физике. Говорят, что $S(t)$ и $y(t)$ свертываются к форме $R(t)$. Можно показать (см., например [1], стр. 80), что

$$L[S(t)] \times L[y(t)] = L[R(t)] = L \left[\int_0^t S(t-\tau) y(\tau) d\tau \right]. \quad (13)$$

Это равенство, выражающее известную теорему Дюамеля, очень важно для анализа линейных систем,

1.9. Передаточная функция

Рассмотрим воздействие $S(t)$, приложенное к системе, обладающей импульсной переходной функцией $y(t)$. Если система в начальный момент времени находится в состоянии покоя, то из уравнения (13) имеем:

$$\bar{R}(p) = \bar{S}(p) \times \bar{y}(p)$$

или

$$\frac{\bar{R}(p)}{\bar{S}(p)} = \bar{y}(p). \quad (14)$$

Это отношение определяет зависимость между входным воздействием и реакцией системы в операторной форме. $\bar{y}(p)$ есть изображение импульсной переходной функции; ее называют *передаточной функцией*, так как она связывает изображения входного воздействия и реакции. С помощью передаточной функции можно описать в операторной форме характеристики элементов в системе с обратной связью. При этом общая характеристика замкнутой системы достаточно просто связывается с характеристиками ее отдельных элементов.

В качестве примера найдем передаточную функцию аperiodического звена, изображенного на рис. 2, а. Из уравнения (9) имеем:

$$\bar{y}(p) = \frac{ap}{p+a}.$$

Точно так же передаточная функция системы, определяемая дифференциальным уравнением (5), записывается в виде

$$\frac{\bar{R}(p)}{\bar{S}(p)} = \bar{y}(p) = \frac{1}{a_n + a_{n-1}p + a_{n-2}p^2 + \dots + a_0p^n}. \quad (15)$$

В двух приведенных примерах все слагаемые в числителе и знаменателе передаточной функции безразмерны, так как $S(t)$ и $R(t)$ имеют одинаковый физический смысл. Во многих случаях это не так, например, в регуляторе скорости дифференциальное уравнение связывает угловую скорость с линейным перемещением. Записывая

уравнение (4) в операторной форме, получаем:

$$\bar{y}(p) = \frac{\overline{\Delta Z}}{\overline{\Delta \Omega}} = \frac{2\Omega_g R}{p^2 + \frac{b}{m}p + \frac{c}{m}},$$

где $\overline{\Delta \Omega} = L[\Delta \Omega]$ и $\overline{\Delta Z} = L[\Delta Z]$.

Для простоты записи аргумент (p) в скобках опущен. Передаточная функция теперь содержит размерные коэффициенты $\frac{b}{m}$ и $\frac{c}{m}$ и размерный множитель $2\Omega_g R$. Этого и следовало ожидать, так как отношение выходных и входных переменных есть величина размерная, а изображение размерной временной функции сохраняет размерные свойства самой временной функции (см. также п°. 1.3).

1.9.1. Последовательное соединение элементов.

Предположим, что два элемента соединены последовательно, т. е. выход первого является входом второго. Единичный импульс на входе первого элемента вызывает на его выходе импульсную переходную функцию $y_1(t)$. При вычислении импульсной реакции должно быть учтено то, что первый элемент нагружен вторым.

Реакция второго элемента согласно уравнению (12) равна

$$R_2(t) = \int_0^t y_2(\tau) y_1(t - \tau) d\tau.$$

По определению, общая передаточная функция есть изображение $R_2(t)$, которое на основании уравнения (13) равно

$$L[R_2(t)] = L[y_2(t)] \times L[y_1(t)]$$

или

$$\bar{y}_{12}(p) = \bar{y}_1(p) \times \bar{y}_2(p).$$

Передаточная функция последовательно соединенных элементов равна произведению передаточных функций отдельных звеньев.

1.10. Частотная характеристика

Теперь мы рассмотрим установившуюся реакцию на периодический входной сигнал, который действует так долго, что все переходные процессы затухли. В 1.8 мы условились, что произвольный входной сигнал равен 0 в моменты, предшествующие начальному моменту (рис. 5); наименьшее значение t_1 , при котором может появиться реакция, следовательно, равно $t_1 = 0$. Для входных сигналов, появившихся в более ранние моменты, начальное значение t будем считать равным $-\infty$, так что равенство (11) должно быть переписано в виде

$$R(t) = \int_{-\infty}^t S(t_1) y(t - t_1) dt_1. \quad (16)$$

Заменяя переменные $t - t_1 = \tau$, как и раньше, получаем:

$$R(t) = \int_0^{\infty} S(t - \tau) y(\tau) d\tau. \quad (17)$$

Действительно, при $t_1 = -\infty$ $\tau = t - t_1 = t + \infty = \infty$, при $t_1 = t$ $\tau = 0$; кроме того, $dt_1 = d\tau$.

Такое расширение пределов интегрирования требует, чтобы на $y(\tau)$ было наложено ограничение. Для того чтобы интеграл (17) сходилась, необходимо, чтобы

$$\int_0^{\infty} |y(\tau)| d\tau < \infty.$$

Физически это означает, что система должна иметь ограниченную реакцию на ограниченный входной сигнал, т. е. она должна быть устойчива.

Синусоидальные колебания представляют собой удобный, с точки зрения создания, сигнал для экспериментального исследования линейных систем. Удобство этого сигнала состоит еще в том, что он вызывает синусоидальную же реакцию. Действительно, пусть $S(t)$ — синусоидальная функция. Представим ее в комплексной форме $A \exp(j\omega t)$. Реакция системы с импульсной переходной

функцией $y(t)$ на этот сигнал, как это следует из уравнения (17), равна

$$R(t) = A \int_0^{\infty} \exp[j\omega(t-\tau)] y(\tau) d\tau$$

или

107

$$R(t) = A \exp(j\omega t) \int_0^{\infty} \exp(-j\omega\tau) y(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Интеграл является функцией только $j\omega$ и не зависит от τ . Следовательно, реакция имеет синусоидальную форму и в общем случае отличается по фазе и амплитуде от входного сигнала. Равенство (18) может быть записано в виде

$$R(t) = A \exp(j\omega t) \bar{y}(j\omega).$$

$\bar{y}(j\omega)$ называется частотной характеристикой и определяется выражением

$$\bar{y}(j\omega) = \int_0^{\infty} \exp(-j\omega\tau) y(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Так как $\bar{y}(j\omega)$ имеет и модуль и аргумент, то фаза и амплитуда реакции будут отличаться от фазы и амплитуды возмущающего воздействия. Выбранный выше входной сигнал имеет действительную и мнимую части

$$S(t) = A \exp(j\omega t) = A (\cos \omega t + j \sin \omega t),$$

что эквивалентно двум сигналам. В линейной системе в случае одновременной подачи на вход двух синусоидальных сигналов амплитуда и фаза каждого сигнала передается таким же образом, как если бы каждый сигнал подавался в отдельности. Из этого следует, что $\bar{y}(j\omega)$ представляет собой отношение реакции к возмущающему гармоническому воздействию.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (5). Пусть

$$S(t) = A \exp(j\omega t)$$

и

$$R(t) = A \bar{y}(j\omega) \exp(j\omega t).$$

Подставляя эти значения в уравнение (5), получаем,

$$\left. \begin{aligned} A\bar{y}(j\omega) \exp(j\omega t) [a_n + j\omega a_{n-1} + (j\omega)^2 a_{n-2} + \dots \\ \dots + (j\omega)^n a_0] = A \exp(j\omega t), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\frac{\bar{R}(j\omega)}{\bar{S}(j\omega)} = \bar{y}(j\omega) = \frac{1}{a_n + j\omega a_{n-1} + (j\omega)^2 a_{n-2} + \dots + (j\omega)^n a_0}.$$

Следовательно, для того чтобы получить частотную характеристику из линейного дифференциального уравнения, связывающего входной сигнал с реакцией, необходимо лишь заменить в нем $\frac{d}{dt}$ на $j\omega$ и затем произвести алгебраические действия. Обобщенная частотная характеристика $\bar{y}(\sigma + j\omega)$ получается, когда $j\omega$ в уравнении (20) заменяется на $(\sigma + j\omega)$. Это соответствует реакции системы на входной сигнал вида

$$S(t) = A \exp(\sigma t) \exp(j\omega t),$$

т. е.

$$S(t) = A \exp(\sigma t) [\cos \omega t + j \sin \omega t].$$

Действительная часть этой функции времени физически представляет собой синусоиду с амплитудой, меняющейся по экспоненте, т. е. увеличивающейся или уменьшающейся с течением времени в зависимости от знака σ .

1.10.1 Частотная характеристика аperiodического звена.

Для аperiodического звена, на вход которого подается синусоидальное колебание, частотная характеристика определяется из уравнения (7). Если

$$E_{\text{вх}}(t) = E \exp(j\omega t)$$

и

$$E_{\text{вых}}(t) = E\bar{y}(j\omega) \exp(j\omega t),$$

то уравнение (7) принимает вид

$$j\omega E\bar{y}(j\omega) \exp(j\omega t) + \alpha E\bar{y}(j\omega) \exp(j\omega t) = \alpha E \exp(j\omega t),$$

откуда

$$\bar{y}(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha}.$$

Это выражение определяет также реакцию на сигнал $E_0 \cos \omega t$, представляющий собой действительную часть $E \exp(j\omega t)$.

В полярной форме частотная характеристика принимает вид

$$\bar{y}(j\omega) = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} e^{j \arctg(-\frac{\omega}{\alpha})}.$$

Таким образом, входной сигнал $E \cos \omega t$ вызывает на выходе реакцию $E_{\text{вых}}(t)$ вида

$$E_{\text{вых}}(t) = \frac{E\alpha}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} \cos(\omega t - \varphi),$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{\omega}{\alpha}.$$

Сравнение этих результатов с полным решением в 1.4.1.1 показывает, что полученное решение характеризует лишь установившееся состояние.

Как и в случае передаточных функций, частотная характеристика последовательного соединения нескольких звеньев находится перемножением их частотных характеристик.

1.11. Соотношение между операторами p и $j\omega$

Передаточная функция и частотная характеристика системы, описываемой одним и тем же дифференциальным уравнением, определяются соответственно уравнениями (15) и (20). Эти уравнения отличаются только тем, что во втором уравнении оператор p заменен на $j\omega$. Из этого следует, что при p , равном $j\omega$, соответствующие уравнения описывают установившийся процесс, вызываемый синусоидальным сигналом. Если на p не накладывается такого ограничения, то соответствующие уравнения описывают как установившийся, так и переходный процессы. Так как значение p произвольно при условии, что интеграл (6) сходится, то оно может быть сделано, в частности, равным $(\sigma + j\omega)$, при этом мы получаем обобщенную переходную характеристику.

Оператор « j », введенный Штейнмецом (Steinmetz), позволяет выразить реактивные сопротивления в виде $j\omega L$, $\frac{1}{j\omega C}$ и т. д. Полные сопротивления при этом становятся комплексными величинами. Применяя p вместо $j\omega$, можно записать соответствующие реактивные и полные сопротивления в операторной форме.

Так, например, соотношение между $\bar{E}_i(p)$ и $\bar{E}_0(p)$ на рис. 2, а запишется в виде

$$\frac{\bar{E}_{\text{вх}}(p)}{R + \frac{1}{pC}} \times \frac{1}{pC} = \bar{E}_{\text{вых}}(p),$$

$$\frac{\bar{E}_{\text{вых}}(p)}{\bar{E}_{\text{вх}}(p)} = \bar{y}(p) = \frac{\alpha}{p + \alpha} \quad \left(\alpha = \frac{1}{CR} \right).$$

1.12. Графическое изображение

При анализе и синтезе систем с обратной связью большое удобство представляет возможность краткой записи характеристик элементов и их соединений. В 1.9.1 передаточная функция последовательно соединенных элементов была представлена в виде произведения передаточных функций отдельных элементов. Один из методов описания систем с обратной связью заключается в том, что рисуют ряд соединенных между собой блоков и указывают внутри каждого блока выражение передаточной функции или частотной характеристики соответствующего элемента. Направление взаимодействия показывают стрелками на линиях, соединяющих квадратики. Для того чтобы найти выходную переменную, нужно в соответствии с уравнением (14) умножить переменные на входе каждого блока на передаточную функцию этого блока. Сложение двух или более переменных, подвергающихся затем преобразованию, изображается двумя или более линиями, входящими в соответствующий блок. Такое графическое изображение, называемое *структурной схемой*, представляет собой математическое описание, в котором не принимается во внимание физическая сущность элемента. Это может существенно помочь при рассмотрении проблемы обратной связи.

В качестве примера рассмотрим элемент, состоящий из махового колеса, сидящего на упругом валу. Элемент, изображенный на рис. 6, а, представляет собой вал, закрепленный в подшипниках, и на конце его имеется маховик с моментом инерции J . Жесткость на кручение вала равна c .

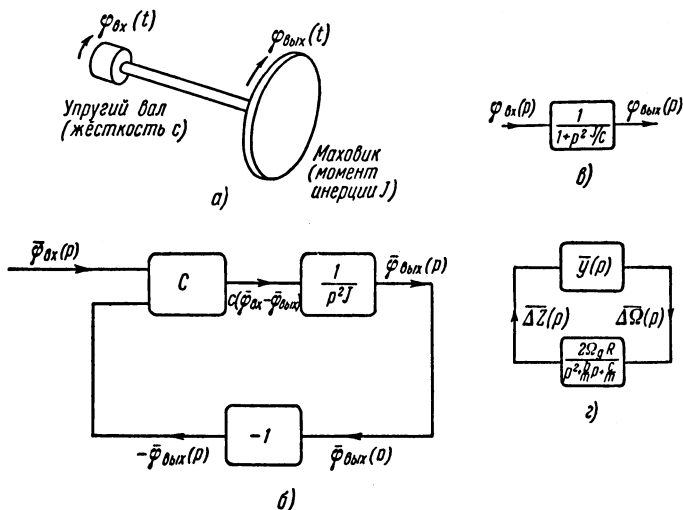


Рис. 6.

При повороте вала на угол $\varphi_{\text{вх}}(t)$ момент вращения частично передает угловое ускорение маховику, так что

$$F_t = c[\varphi_{\text{вх}} - \varphi_{\text{вых}}] = J \frac{d^2 \varphi_{\text{вых}}}{dt^2}$$

или, после замены $\frac{d^2}{dt^2}$ на p^2 ,

$$c(\bar{\varphi}_{\text{вх}} - \bar{\varphi}_{\text{вых}}) = J p^2 \bar{\varphi}_{\text{вых}}.$$

Структурная схема, соответствующая этому уравнению, показана на рис. 6, б; эта структурная схема не является единственным способом описания системы, так как преобразование последнего уравнения дает выражение

$$\bar{\varphi}_{\text{вых}} (J p^2 + c) = c \bar{\varphi}_{\text{вх}}$$

или

$$\frac{\bar{\Phi}_{\text{вых}}(p)}{\Phi_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{1 + p^2 \frac{J}{c}}.$$

Согласно этому уравнению система может быть представлена единственным блоком, как, например, на рис. 6, в. Несмотря на то, что это столь же справедливое графическое изображение, что и на рис. 6, б, оно не отражает физической сущности так хорошо, как предыдущая структурная схема.

Дальнейший пример графического представления дается на рис. 6, г; он относится к регулятору скорости, рассмотренному в 1.1, и, конечно, справедлив лишь для малых отклонений $\Delta Z(t)$. Отношение между отклонением тяги дросселя и скоростью двигателя представлено линейной передаточной функцией $\bar{y}(p)$, хотя в действительности это отношение, конечно, будет нелинейным.

Литература

1. Карслоу Х. и Егер Д., Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948.
 2. Josephs H. J., Heaviside's Electric Circuit Theory Methuen, 1946.
 3. Carter G. W., The Simple Calculation of Electrical Transients, CUP, 1944, p. 99.
 4. Tustin A., A Method of Analysing the Behaviour of Linear Systems in terms of Time Series, Journal IEE, 1947, 94, Part IIA, p. 130.
 5. Woodward P. M., Convolutions in Probability, Circuit and Aerial Theory, TRE Journal, April 1948, p. 22.
 6. Конторович М. И., Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, Гостехиздат, 1953.
-

ГЛАВА 2

ПРИНЦИП ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

2.1. Влияние обратной связи на передаточную функцию

Одноконтурная система с обратной связью графически может быть изображена в виде, представленном на рис. 7, где $\bar{y}_1(p)$ — передаточная функция прямой цепи и $\bar{y}_2(p)$ — передаточная функция цепи обратной связи. Входной сигнал $S(t)$ складывается с сигналом обратной связи $F(t)$, их сумма воздействует на прямую цепь и вызывает на выходе реакцию $R(t)$. Соотношение между входным возмущением и реакцией полу-

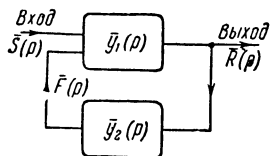


Рис. 7.

чается, согласно рис. 7, следующим образом (аргумент p переменных величин далее для простоты будем опускать, оставляя его только в передаточных функциях):

$$\bar{R} = \bar{y}_1(p) [\bar{S} + \bar{F}],$$

но

$$\bar{F} = \bar{R} \bar{y}_2(p).$$

Следовательно,

$$\frac{\bar{R}}{\bar{S}} = \bar{y}_0(p) = \frac{\bar{y}_1(p)}{1 - \bar{y}_1(p) \bar{y}_2(p)} = \frac{\bar{y}_1(p)}{1 - \bar{y}_L(p)}. \quad (1)$$

Это выражение является основным для одноконтурной системы с обратной связью. $\bar{y}_0(p)$ называется *общей передаточной функцией или передаточной функцией замкнутой системы*, а $\bar{y}_1(p) \bar{y}_2(p) = \bar{y}_L(p)$ — *передаточной функцией разомкнутой системы*.

В простейшем, но, как будет показано дальше, физически неосуществимом случае, когда прямая цепь и цепь обратной связи не зависят от частоты, передаточная функция вырождается в число, не зависящее от p . В этом случае

$$\bar{y}_1(p) = A, \quad \bar{y}_2(p) = \beta, \quad \bar{y}_0(p) = A_0.$$

Из уравнения (1) для этого случая получаем

$$A_0 = \frac{A}{1 - A\beta}. \quad (2)$$

На рис. 8 показана зависимость между коэффициентом усиления прямой цепи A и общим коэффициентом усиления

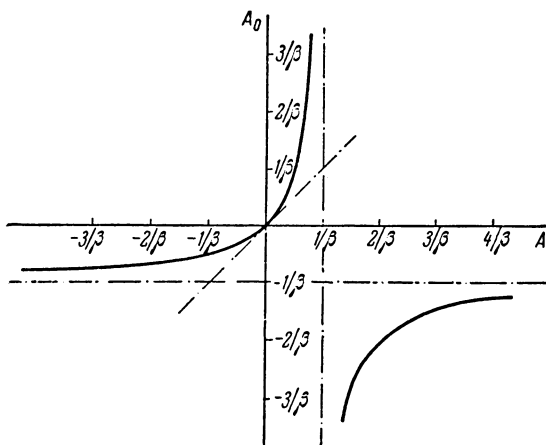


Рис. 8.

ния системы A_0 в случае, когда β — положительная постоянная величина.

Если $A\beta$ отрицательно, то A_0 отрицательно и по абсолютной величине меньше, чем A . При больших значениях $A\beta$ величина A_0 стремится к $-\frac{1}{\beta}$; таким образом, общий коэффициент усиления становится независимым от коэффициента усиления прямой цепи. При коэффициенте усиления разомкнутой системы $A\beta$, равном 1, общий коэффициент усиления становится бесконечно большой величиной. При этом система становится *неустойчивой*. Боль-

шой положительный коэффициент усиления разомкнутой системы приводит к конечному значению A_0 , стремящемуся к $-\frac{1}{\beta}$, при стремлении величины коэффициента усиления разомкнутой системы к бесконечности.

В любой физической системе коэффициент усиления разомкнутой системы и, следовательно, общий коэффициент усиления зависят от частоты. Это имеет место при наличии в системе с обратной связью элементов, накапливающих энергию. Накопителями электрической энергии являются емкость и индуктивность. В механических системах аналогичными элементами являются масса и упругость. Все системы с обратной связью содержат элементы, соответствующие аperiodическому звену и, возможно, колебательному звену с затуханием. Если, однако, такие элементы, оказывающие свое действие в рабочем диапазоне частот, отсутствуют, то все-таки остаются элементы, оказывающие свое влияние на частотах, лежащих вне нормального рабочего диапазона: например, паразитная емкость анод—катод электронной лампы. Наличие в системе элементов, накапливающих энергию, приводит к зависимости коэффициента усиления контура и коэффициента усиления прямой цепи от частоты. При этом A и β определяют частотно-независимую часть соответствующей передаточной функции $\bar{y}_1(p)$ и $\bar{y}_2(p)$.

Введение в прямую цепь описанной выше идеальной системы с обратной связью одного аperiodического звена существенно изменяет ее свойства, особенно при положительном коэффициенте усиления разомкнутой системы $A\beta$. Предположим, что передаточная функция разомкнутой системы равна

$$\bar{y}_L(p) = \frac{A\beta}{1+pT}, \quad (3)$$

где T — постоянная времени аperiodического звена в прямой цепи, A — коэффициент усиления прямой цепи, β — коэффициент усиления цепи обратной связи.

Тогда из уравнения (1)

$$\bar{y}_0(p) = \frac{A}{1+pT-A\beta} = \frac{A}{T} \frac{1}{p+\alpha},$$

где $\alpha = \frac{1-A\beta}{T}$.

Обратное преобразование Лапласа, согласно табл. 1 (соответствие № 6), определяет импульсную переходную функцию рассматриваемой системы с обратной связью

$$y_0(t) = \frac{A}{T} \exp \left[(A\beta - 1) \frac{t}{T} \right]. \quad (4)$$

При $A\beta < 0$ величина α всегда больше нуля и «память» системы с обратной связью, т. е. продолжительность реакции на импульсное возмущение всегда короче, чем системы, не охваченной обратной связью. При $A\beta > 0$, но меньшем 1 «память» замкнутой системы больше, чем системы без обратной связи. При коэффициенте усиления разомкну-

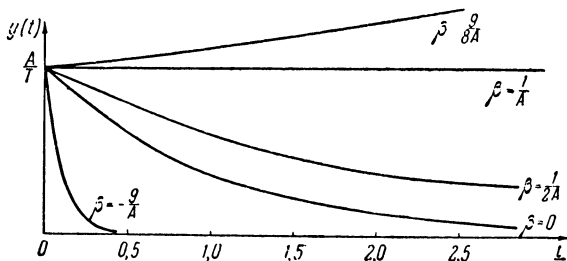


Рис. 9.

той системы, большем единицы, импульсная переходная функция становится возрастающей. В этих случаях говорят, что система *неустойчива*. На рис. 9 показано, как меняется импульсная переходная функция с изменением знака и величины $A\beta$. Коэффициент усиления прямой цепи A при этом поддерживается постоянным. Когда коэффициент усиления разомкнутой системы равен 1, реакция на единичную импульсную функцию является единичной ступенчатой функцией и система ведет себя как интегратор; ее «память» бесконечно велика.

В рассмотренной выше физической системе коэффициент усиления разомкнутой системы $A\beta$ не должен превышать 1, если система должна быть устойчивой.

Область справа от абсциссы $A = \frac{1}{\beta}$ на рис. 8 соответствует области неустойчивости.

2.2. Знак обратной связи

Термины *отрицательная* и *положительная* обратная связь обычно употребляются для того, чтобы описать воздействие обратной связи по отношению к реакции системы. Употребляются также термины *дегенеративная* и *регенеративная* обратная связь. Например, регулятор температуры имеет чувствительный элемент, обнаруживающий изменение температуры. Сигнал от этого элемента, указывающий на уменьшение температуры, вызывает увеличение подачи тепла к регулируемому устройству. Увеличение подачи тепла противодействует уменьшению температуры, вызвавшему это увеличение. Поэтому в системе имеется отрицательная или дегенеративная обратная связь.

При подаче на вход системы с обратной связью периодического входного сигнала обратная связь может менять свой знак при изменении частоты входного сигнала. Это происходит благодаря фазовым сдвигам в цепи. Модуль коэффициента усиления, иногда называемый кратко *усилением*, является функцией частоты. Его зависимость от частоты называется *амплитудной частотной характеристикой* и часто выражается в логарифмической форме

$$20 \lg |\bar{y}(j\omega)| \text{ децибел.}$$

Знак обратной связи удобно определять путем сравнения модулей общей амплитудно-фазовой характеристики системы с обратной связью и без обратной связи.

Если на какой-нибудь частоте

$$|\bar{y}_0(j\omega)| < |\bar{y}_1(j\omega)|,$$

то обратная связь отрицательная, если наоборот, то обратная связь положительная. Величина обратной связи может быть выражена в логарифмическом масштабе следующим образом:

$$20 \lg \left| \frac{\bar{y}_0}{\bar{y}_1} \right| \text{ децибел.}$$

Преимущества логарифмического масштаба будут выявлены в главе 4.

2.3. Переходные характеристики

2.3.1. Система с одним аperiodическим звеном в прямой цепи.

Для системы с обратной связью, содержащей одно аperiodическое звено в прямой цепи, общая импульсная переходная функция определяется выражением (4). Для того, чтобы получить выражение для реакции системы

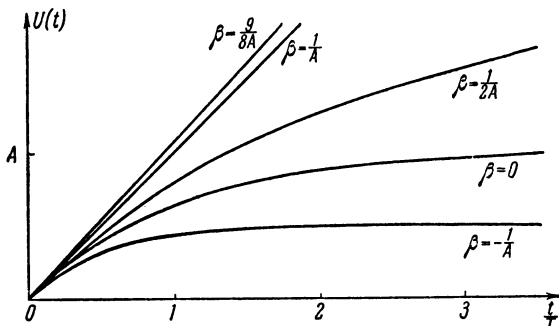


Рис. 10.

на единичную ступенчатую функцию, нужно импульсную переходную функцию проинтегрировать по времени

$$U(t) = \frac{A}{T} \int_0^t \exp(-\alpha t) dt = \frac{A}{\alpha T} [1 - \exp(-\alpha t)], \quad (5)$$

где

$$\alpha = \frac{1 - A\beta}{T}.$$

Эта функция изображена на рис. 10 для различных значений $A\beta$, полученных изменением β при постоянном A . Постоянная времени реакции и общий коэффициент усиления системы связаны друг с другом. Это очевидно из выражения (5), так как

$$\frac{\text{постоянная времени}}{\text{общий коэффициент усиления системы}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha T}{A} = \frac{T}{A} = \text{const.}$$

Следовательно, отрицательная обратная связь дает возможность увеличивать скорость реакции за счет уменьшения коэффициента усиления разомкнутой системы и, наоборот, положительная обратная связь дает возможность увеличить общий коэффициент усиления системы за счет уменьшения скорости реакции.

2.3.2. Система с двумя апериодическими звеньями в прямой цепи.

Представляет интерес рассмотреть влияние второго апериодического звена в прямой цепи. Если два звена имеют равные постоянные времени, передаточная функция разомкнутой системы становится равной

$$\bar{y}_L(p) = \frac{A\beta}{(1+pT)^2}, \quad (6)$$

если цепь обратной связи, как и прежде, не зависит от частоты. При отсутствии обратной связи импульсная переходная функция прямой цепи получается как обратное преобразование $\bar{y}_1(p)$ и согласно табл. 1 (соответствие № 15) она равна

$$y_1(t) = \frac{A}{T^2} t \exp\left(-\frac{t}{T}\right).$$

При наличии обратной связи общая передаточная функция на основании уравнений (1) и (6) равна

$$\bar{y}_0(p) = \frac{A}{T^2} \frac{1}{p^2 + \frac{2p}{T} + \left(\frac{1-A\beta}{T^2}\right)}. \quad (7)$$

Импульсная переходная функция системы будет теперь различна по форме, в зависимости от того, имеет знаменатель $\bar{y}_0(p)$ комплексные или действительные корни. Условием действительности корней квадратного относительно p уравнения (7) является выполнение неравенства

$$\frac{4}{T^2} \geq \frac{4}{T^2} (1 - A\beta),$$

т. е. коэффициент усиления разомкнутой системы $A\beta$ должен быть положительным. В этом случае общая пере-

даточная функция (7) может быть представлена в виде

$$\bar{y}_0(p) = \frac{A}{T^2} \frac{1}{(p+a)(p+b)}, \quad (8)$$

где

$$a = \frac{1}{T} [1 + \sqrt{A\beta}], \quad b = \frac{1}{T} [1 - \sqrt{A\beta}].$$

Импульсная переходная функция находится обратным преобразованием выражения (8), определяющего $\bar{y}_0(p)$, и равна

$$y_0(t) = \frac{A}{2T} \frac{1}{\sqrt{A\beta}} [\exp(-bt) - \exp(-at)].$$

При $A\beta > 1$ величина b меньше нуля и реакция на импульс есть функция расходящаяся благодаря наличию

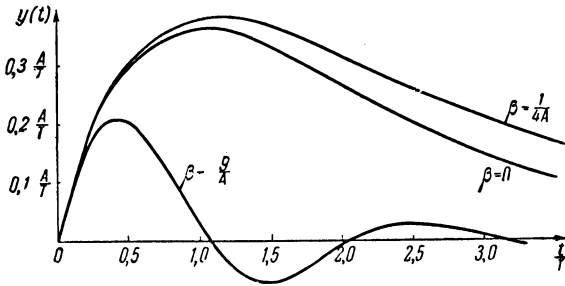


Рис. 11.

в последнем выражении экспоненциальной составляющей, возрастающей со временем.

Полином второй степени в знаменателе выражения (7) имеет комплексные корни при $A\beta < 0$. При этом общая передаточная функция записывается следующим образом:

$$\bar{y}_0(p) = \frac{A}{T^2} \frac{1}{\left(p + \frac{1}{T}\right) + \omega_1^2}, \quad (9)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\frac{|A\beta|}{T^2}}$.

Теперь импульсная переходная функция, представляющая собой обратное преобразование $\bar{y}_0(p)$, будет равна

$$y_0(t) = \frac{A}{T} \frac{1}{\sqrt{|A\beta|}} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \sin \omega_1 t.$$

На рис. 11 импульсная переходная функция для положительных и отрицательных значений $A\beta$ сравнивается с импульсной переходной функцией при отсутствии обратной связи. Как и раньше, «память» системы с обратной связью увеличивается при положительной и уменьшается при отрицательной обратной связи, но в импульсной переходной функции системы с отрицательной обратной связью появляются новые черты; она носит теперь характер затухающих колебаний, обусловленных комплексностью корней знаменателя передаточной функции. Угловая частота затухающих колебаний равна ω_1 рад/сек.

2.4. Частотные характеристики

Некоторые системы с обратной связью, особенно некоторые ламповые усилители, работают в условиях синусоидальных воздействий. Однако большинство систем предназначено для работы с воздействиями, по форме своей далекими от синусоиды. Несмотря на это, синусоида является наиболее распространенным типом воздействий при изучении систем, так как их форма остается неизменной при прохождении через линейную систему (см. 1.10 гл. 1). Кроме того, их легко получить как электрическими, так и механическими способами.

Если $\bar{y}_1(j\omega)$ и $\bar{y}_2(j\omega)$ являются частотными характеристиками прямой цепи и цепи обратной связи соответственно, то можно записать:

$$\bar{y}_1(j\omega) \bar{y}_2(j\omega) = \bar{y}_L(j\omega) = u + jv,$$

где u и v — функции частоты ω . Из уравнения (1) имеем:

$$\frac{\bar{y}_0(j\omega)}{\bar{y}_1(j\omega)} = \frac{1}{1 - u - jv},$$

так что

$$\left[\left| \frac{\bar{y}_0}{\bar{y}_1} \right| \right]^2 = \frac{1}{(1-u)^2 + v^2}. \quad (10)$$

При обратной связи, равной нулю,

$$|\bar{y}_0| = |\bar{y}_1|,$$

так что

$$(1 - u)^2 + v^2 = 1.$$

Это выражение на плоскости с координатами u и v определяет окружность единичного радиуса с центром в точке $(1, 0)$, которая изображена на рис. 12. Если на некоторой частоте вектор, изображающий $\bar{y}_L(j\omega)$, лежит внутри окружности, то имеет место положительная обратная связь, так как $|\bar{y}_0| > |\bar{y}_1|$. Окружность носит название *окружности граничной обратной связи*. Геометрические места точек, в которых обратная связь постоянна, представляют собой окружности, concentricные с окружностью граничной обратной связи.

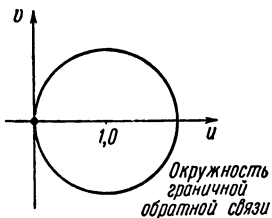


Рис. 12.

Если вектор $\bar{y}_L(j\omega)$, представляющий характеристику разомкнутой системы с обратной связью, изобразить при различных частотах, то концы полученного таким путем семейства векторов образуют годограф в плоскости координат u и v .

Такой годограф называется *годографом частотной* или *амплитудно-фазовой характеристики* разомкнутой системы. В качестве примера применения окружности граничной обратной связи и годографа амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы будут рассмотрены замкнутые системы с одним и с двумя апериодическими звеньями в прямой цепи.

2.4.1. Система с одним апериодическим звеном.

Частотная характеристика системы с одним апериодическим звеном получается заменой в уравнении (3) p на $j\omega$, так что

$$\bar{y}_L(j\omega) = \frac{A\beta}{1 + j\omega T}.$$

Эта функция изображена на рис. 13 для положительного и отрицательного значения $A\beta$. При $A\beta < 0$ обратная связь отрицательна на всех частотах. При этом годограф амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы весь находится вне окружности граничной обратной связи. Интересно сравнить $|\bar{y}_0(j\omega)|$ и $|\bar{y}_1(j\omega)|$, как

функции частоты, т. е. сравнить общую амплитудно-частотную характеристику с амплитудно-частотной характеристикой прямой цепи. Это сделано на рис. 14, где

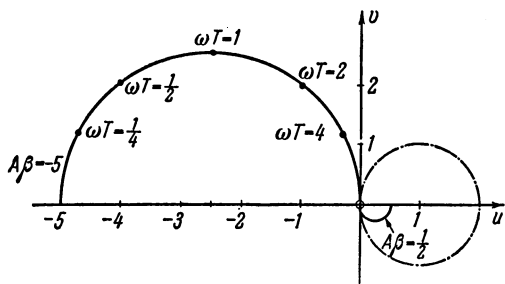


Рис. 13.

абсциссой служит ωT в логарифмическом масштабе, а ордината выражена в децибелах в линейном масштабе.

Кривые стремятся асимптотически сблизиться, причем $|\bar{y}_1|$ никогда не становится меньше $|\bar{y}_0|$, если обратная

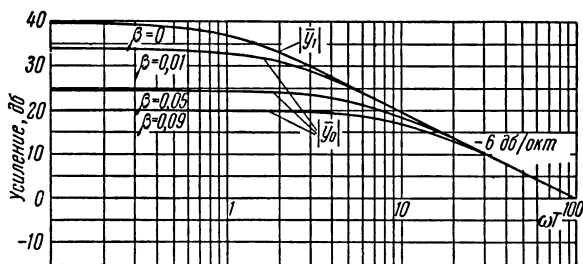


Рис. 14. Амплитудно-частотная характеристика аperiodического звена и амплитудно-частотная характеристика аperiodического звена, охваченного обратной связью ($A = -100$).

связь отрицательна на всех частотах. Заметим, что кривая $|\bar{y}_1|$ асимптотически стремится к кривой, имеющей наклон -6 дБ/окт . Это происходит потому, что на высоких частотах модуль частотной характеристики изменяется

обратно пропорционально частоте. Увеличение на октаву, т. е. удвоение частоты, вызывает уменьшение модуля частотной характеристики вдвое. Таким образом, изменение модуля частотной характеристики в децибелах при изменении частоты на октаву определяется выражением

$$20 \lg\left(\frac{1}{2}\right) \cong 20 \times (-0,3) = -6 \text{ дб}.$$

Из рис. 14 ясно, что с помощью отрицательной обратной связи модуль общей частотной характеристики уменьшается, за счет чего увеличивается ширина полосы пропускания. Полоса пропускания определяется как частота, на которой модуль частотной характеристики на 3 дб меньше, чем модуль частотной характеристики на нулевой частоте. В этом простейшем случае модуль частотной характеристики и полоса пропускания связаны обратно пропорционально.

2.4.2. Система с двумя апериодическими звеньями.

Если в прямой цепи имеются два одинаковых апериодических звена, соединенных последовательно, то частотная

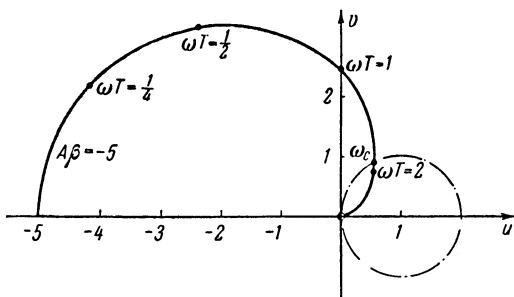


Рис. 15.

характеристика разомкнутого контура получается из уравнения (6) заменой p на $j\omega$

$$\bar{y}_L(j\omega) = \frac{A\beta}{(1 + \omega^2 T^2) + 2j\omega T}.$$

Годограф частотной характеристики изображен на рис. 15 для $A\beta < 0$. Обратная связь становится положительной, когда годограф пересекает окружность граничной обратной связи, при частоте ω_c , которая, как может быть легко показано, равна

$$\omega_c = \frac{1}{T} \left(1 + \frac{|A\beta|}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ рад/сек.}$$

Логарифмические амплитудные характеристики замкнутой системы и прямой цепи, т. е. $|\bar{y}_0|$ и $|\bar{y}_1|$, приведены на рис. 16, на котором видно, что в некотором диапазоне частот $|\bar{y}_0| > |\bar{y}_1|$. Обе кривые на высоких

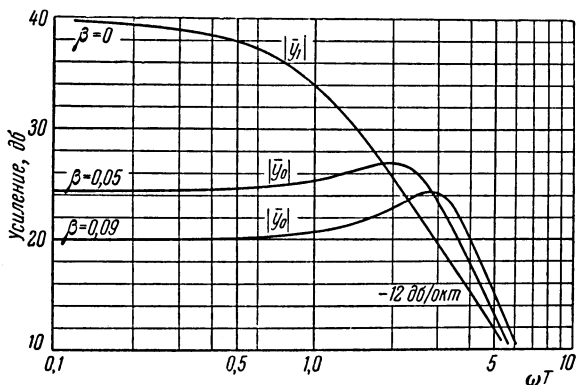


Рис. 16. Амплитудно-частотная характеристика двух последовательно соединенных аperiodических звеньев без и при наличии обратной связи ($A = -100$).

частотах асимптотически приближаются к линии, имеющей наклон -12 dB на октаву. Сравнение кривых показывает, что при $A\beta$ более отрицательном $|\bar{y}_0|$ имеет значительно более заметный пик. Это связано с импульсной переходной функцией, которая при $A\beta$ более отрицательном проявляет все более колебательный характер (см. рис. 11); частота, на которой $|\bar{y}_0|$ имеет горб, равна $\omega_1/2\pi$, т. е. это есть частота затухающих колебаний импульсной переходной функции.

2.5. Стабильность общего коэффициента усиления

Одним из свойств отрицательной обратной связи является то, что она уменьшает влияние изменений параметров в прямой цепи замкнутой системы. Это очевидно из рассмотрения любого простого устройства с обратной связью, например термостатического регулятора температуры электрической печи. В нерегулируемой печи постоянное уменьшение питающего напряжения неизбежно вызывает падение температуры, тогда как в печи с термостатическим регулятором уменьшение питающего напряжения компенсируется увеличением длительности промежутков времени включения нагревательного элемента. При этом предполагается, что при заданной температуре печи термостат работает, включая и выключая нагреватель так, что отношение времени, когда нагреватель включен, к общему времени определяет регулируемую температуру. Неавтоматическое регулирование, с другой стороны, основано на том, что нагреватель постоянно включен на более низкую мощность. Автоматическое регулирование, следовательно, имеет большие возможности, чем неавтоматическое, так как при этом можно в случае необходимости поднять температуру до уровня, значительно превышающего регулируемый. Используя терминологию этой главы, можно сказать, что в этом случае коэффициент усиления разомкнутой системы значительно выше.

Из рис. 8 следует, что при наличии отрицательной обратной связи данное относительное изменение коэффициента усиления разомкнутой системы вызывает меньшее относительное изменение общего коэффициента усиления замкнутой системы. Действительно, дифференцируя уравнение (2), получаем:

$$\frac{dA_0}{dA} = \frac{1}{(1-A\beta)^2} = \frac{A_0}{A} \frac{1}{(1-A\beta)},$$

откуда

$$\frac{dA_0}{A_0} = \frac{1}{1-A\beta} \frac{dA}{A}. \quad (11)$$

Из этого уравнения видно, что увеличение абсолютного значения отрицательной величины $A\beta$ делает A_0 менее чувствительным к изменениям A .

Для того чтобы определить влияние изменений в цепи обратной связи, продифференцируем уравнение (2) по β . Тогда получим:

$$\frac{dA_0}{d\beta} = \frac{A^2}{(1-A\beta)^2} = \frac{A_0 A}{1-A\beta},$$

откуда

$$\frac{dA_0}{A_0} = \frac{1}{\frac{1}{\beta} - A} \frac{d\beta}{\beta}. \quad (12)$$

Если $A \gg \frac{1}{\beta}$ это выражение стремится к

$$\frac{dA_0}{A_0} = -\frac{d\beta}{\beta},$$

так что изменения в цепи обратной связи вызывают те же изменения в общем коэффициенте усиления замкнутой системы. Это — очевидное следствие того, что общий коэффициент усиления системы с отрицательной обратной связью, имеющей большой коэффициент усиления в разомкнутом состоянии, определяется главным образом цепью обратной связи.

Все сказанное выше целиком переносится на тот случай, когда усиление разомкнутого контура зависит от частоты. Однако величины A_0 , A и иногда β в этом случае заменяются частотными характеристиками $\bar{y}_0(j\omega)$, $\bar{y}_1(j\omega)$ и $\bar{y}_2(j\omega)$ и, помимо изменений модуля общей амплитудно-фазовой характеристики системы, нужно учитывать относительные изменения фазового сдвига. Как это впервые было показано Блеком (Black), стабильность коэффициента усиления в пределах узкого диапазона частот можно повысить за счет стабильности фазы и наоборот.

Блек вывел соотношения между $\frac{d|\bar{y}_0|}{|\bar{y}_0|}$, $\frac{d|\bar{y}_1|}{|\bar{y}_1|}$, $\frac{d|\bar{y}_2|}{|\bar{y}_2|}$ и отношением изменения фазового сдвига в разомкнутой системе ко всему фазовому сдвигу. Результаты его работы применялись в теории усилителей с обратной связью. Им был разработан двухкаскадный усилитель переменного тока с общим коэффициентом усиления, равным 10, и коэффициентом усиления разомкнутой системы — 125,

причем коэффициент β был равен 0,1 и не зависел от частоты. Подставляя эти цифры в уравнение (11) и пренебрегая зависимостью элементов системы от частоты, получим стабильность коэффициента усиления на нулевой частоте

$$\frac{dA_0}{A_0} = \frac{1}{1+125} \frac{dA}{A}.$$

Отсюда видно, что изменение коэффициента усиления разомкнутой системы на 5% вызывает изменение общего коэффициента усиления, равное $\frac{1}{2500} = 4 \cdot 10^{-4}$. Подбирая надлежащим образом фазовый сдвиг в контуре и жертвуя общей фазовой стабильностью, можно добиться стабильности общего коэффициента усиления на частоте 1000 гц, равной $\frac{1}{10^6}$, при изменении коэффициента усиления разомкнутой системы на 5%. Для того чтобы достигнуть такой точности, конечно, необходимо, чтобы стабильность цепи обратной связи была по крайней мере такой же, как и требуемая стабильность величины $|\bar{y}_0|$. Важно, однако, отметить, что малая стабильность пассивной цепи обратной связи является в значительно большей степени ограничивающим фактором, чем стабильность коэффициента усиления лампы и других элементов прямой цепи усиления.

2.6. Нелинейные искажения

Отрицательная обратная связь применяется во многих устройствах для уменьшения влияния нелинейных элементов в прямой цепи на реакцию всей системы. Это свойство следует непосредственно из уравнения (1), показывающего, что общая передаточная функция зависит главным образом от передаточной функции цепи обратной связи, при условии, что коэффициент усиления разомкнутой системы отрицателен и достаточно велик. Из этого следует, что нелинейности в цепи обратной связи должны быть по возможности малыми, так как они не могут быть уменьшены с помощью отрицательной обратной связи.

Для того чтобы проиллюстрировать влияние нелинейности, рассмотрим систему, структурная схема кото-

рой изображена на рис. 17. Нелинейность не может быть описана с помощью передаточной функции, поэтому на структурной схеме в блоке, изображающем собой нелинейный элемент, записано выражение $(1+ae^2)$, на которое должна быть умножена его входная величина. Величина на выходе нелинейного элемента в этом случае содержит член в третьей степени и имеет вид

$$R(t) = e(t) + ae^3(t),$$

где e — входная величина нелинейного элемента.

На рис. 18, *a* изображена зависимость R от e при $a = \frac{1}{50}$. Нелинейности такого типа, в которых крутизна увеличивается с увеличением амплитуды, часто назы-

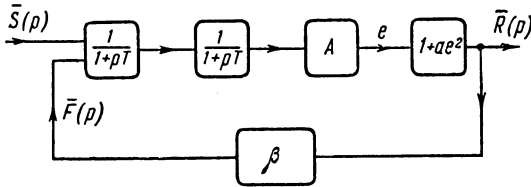


Рис. 17.

ваются «жесткой пружиной». Если e имеет форму синусоиды, то R содержит только основную и третью гармоники.

Так, если

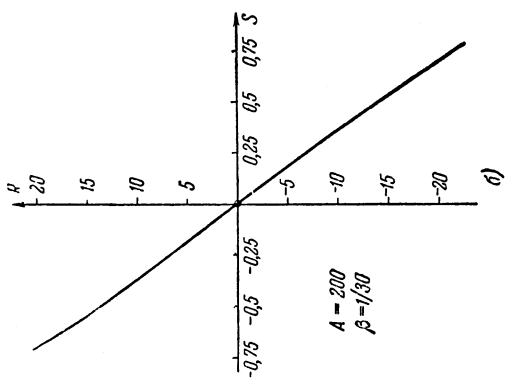
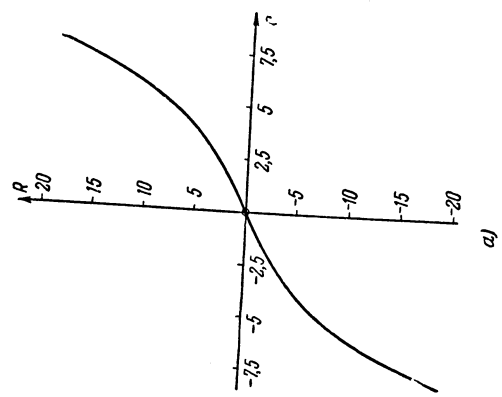
$$e = E \sin \omega t, \quad (13a)$$

то

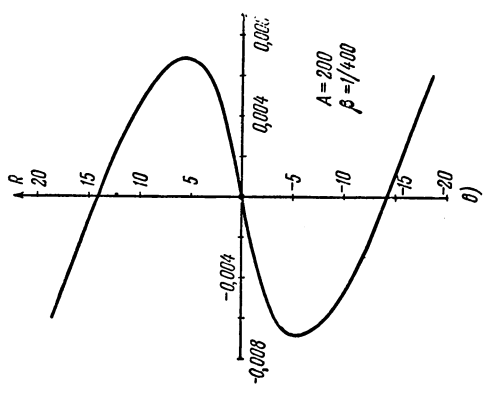
$$R = \left(E + \frac{3}{4} aE^3 \right) \sin \omega t - \frac{1}{4} aE^3 \sin^3 \omega t. \quad (13б)$$

2.6.1. Реакция системы на постоянные воздействия.

Структурная схема (см. рис. 17) изображает систему с обратной связью на постоянном токе. Рассмотрим, прежде всего, искажения, вносимые нелинейностью в реакцию системы на постоянное воздействие (на нулевой частоте). Общая реакция определяется графически из кривой, связывающей e и R на рис. 18, *a*.



$A = 200$
 $\beta = 1/30$



$A = 200$
 $\beta = 1/400$

Рис. 18.

При частоте, равной нулю, когда S — постоянный входной сигнал, для системы с обратной связью имеем:

$$e = A(S + \beta R),$$

$$S = -\beta R + \frac{e}{A}.$$

Для построения общей зависимости между R и S на рис. 18, а выбирается некоторое значение e и отмечается соответствующее значение R ; S вычисляется из выражений, приведенных выше, при известных A и β . Таким образом строится вся зависимость; она изображена на рис. 18, б при $A = -200$ и $\beta = \frac{1}{30}$. Из этого рисунка видно, что нелинейность почти не оказывает искажающего влияния на общую кривую. Кривая, построенная на рис. 18, в для $A = 200$ и $\beta = \frac{1}{400}$, показывает противоположное влияние положительной обратной связи. В этом случае общая зависимость более искажена, чем при отсутствии обратной связи.

2.6.2. Реакция на синусоидальное воздействие.

Когда необходимо найти реакцию на синусоидальное воздействие, то возникает проблема отыскания вынужденных колебаний в нелинейной системе. Это связано с большими математическими трудностями и исключает общий подход. В качестве иллюстрации опишем экспериментальное исследование, выполненное с использованием моделирующего устройства, имеющего структурную схему, изображенную на рис. 17. Воздействие $S(t)$ представляло собой синусоидальное напряжение, а амплитуда основной гармоники реакции $R(t)$ поддерживалась постоянной с помощью изменения амплитуды $S(t)$. При таких условиях определялся спектральный состав $R(t)$ при различных частотах входного сигнала.

На рис. 19 сравнивается зависимость от частоты общей реакции и реакции прямой цепи при двух значениях параметра нелинейности a , а именно при $a = 0$ и $a = \frac{1}{50}$. Значения $|\bar{y}_0|$ и $|\bar{y}_1|$ в нелинейном случае относятся к амплитуде только основной гармоники. Спектр $R(t)$ изображен на рис. 20 в относительных величинах в сравнении

с постоянной амплитудой основной гармоники. Несмотря на то, что реакция разомкнутой системы содержит лишь

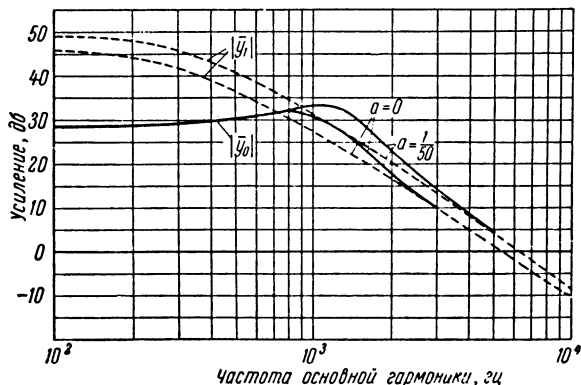


Рис. 19. Амплитудно-частотная характеристика системы с параметрами: $A = -200$, $\beta = 0,0325$.

основную и третью гармоники, реакция системы с обратной связью содержит более высокие паразитные гармоники.

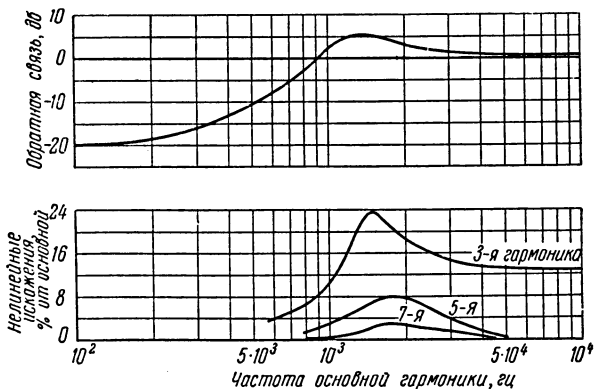


Рис. 20.

Из рис. 19 можно заметить, что «полоса пропускания», а также максимальное (пиковое) значение $|\bar{y}_0|$

в нелинейной системе больше, чем в линейной; это является результатом увеличения среднего коэффициента усиления разомкнутой системы, вызванного нелинейностью типа «жесткая пружина». Высшие гармоники пренебрежимо малы на низких частотах, на которых сильно влияние оказывает отрицательная обратная связь; на этих частотах реакция $R(t)$ почти синусоидальна и, следовательно, e сильно искажено. Когда обратная связь становится положительной, амплитуды гармоник становятся максимальными. На высоких частотах обратная связь нейтральна, но апериодические звенья в прямой цепи эффективно фильтруют гармоники и e почти синусоидально. Следовательно, реакция $R(t)$ содержит лишь основную и третью гармоники в том же соотношении, что и в разомкнутом контуре.

Положение нелинейности в прямой цепи играет важную роль при определении природы искажений в реакции $R(t)$. Например, если нелинейный элемент предшествует апериодическим звеньям, то на высоких частотах отфильтровывается третья гармоника и остается почти синусоидальная реакция.

2.6.3. Реакция системы на скачкообразное воздействие.

Если к системе, не содержащей нелинейности, приложено скачкообразное входное воздействие, то возникает реакция, изображенная на рис. 21, а, которая

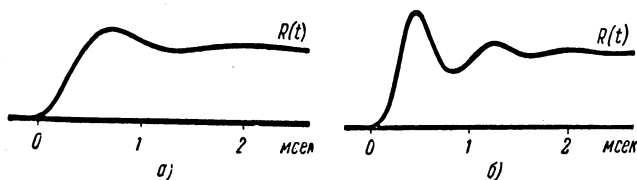


Рис. 21.

была сфотографирована на моделирующей установке. Добавление нелинейности типа «жесткая пружина» заставляет форму реакции меняться, как показано на рис. 21, б. Нелинейность с увеличивающейся крутизной увеличивает коэффициент усиления разомкнутой системы в начальные моменты приложения скачкообразного воздействия, когда величина его велика, при этом

собственная частота и, следовательно, скорость реакции возрастают. Нелинейный характер системы, вызвавший реакцию, изображенную на рис. 21, б, можно обнаружить по изменению периода колебаний при затухании переходного процесса. Такие колебания с частотой, зависящей от амплитуды, называются *неизохронными*. Элемент с характеристикой типа «жесткой пружины», как в рассматриваемой системе, дает возрастающий период с уменьшающейся амплитудой; характеристика типа «мягкой пружины», например насыщение или перегрузка, влияет обратным образом.

2.7. Случайные флуктуации

Случайные флуктуации появляются в каждой системе с обратной связью в том или ином виде, и, конечно, многие применения обратной связи специально предназначены для уменьшения их влияния. Так, в устройствах, использующих электронные лампы, имеются внутренние шумы, обусловленные дискретным характером электронного тока и изменениями в поверхности катода. При автоматическом вождении самолетов и судов причинами флуктуации являются изменения ветровой нагрузки и волнение водной поверхности. Когда температура в комнате регулируется с помощью обратной связи, случайные колебания в температурном режиме как раз и являются причиной, вызвавшей необходимость самого регулятора.

Разнообразие устройств, в которых применяется обратная связь, препятствует детальному изучению каждого из них. Однако можно сделать несколько полезных заключений общего характера, касающихся влияния на систему с обратной связью флуктуаций, приложенных к различным точкам системы. На рис. 22 показано место приложения случайных флуктуаций $N(t)$ в систему с обратной связью. Реакция на одновременное воздействие входного сигнала $S(t)$ и паразитных флуктуаций $N(t)$ определяется выражением

$$\{[\bar{S} + \bar{R}\bar{y}_2(p)]\bar{y}'(p) + N\}\bar{y}''(p) = \bar{R},$$

где передаточная функция прямой цепи $\bar{y}_1(p)$ разбита на две «последовательные» передаточные функции $\bar{y}'(p)$ и $\bar{y}''(p)$. Из последнего выражения получаем:

$$\bar{R}[1 - \bar{y}_L(p)] = \bar{S}\bar{y}_1(p) + \bar{N}\bar{y}''(p),$$

т. е.

$$\bar{R} = \frac{\bar{S}\bar{y}_1(p)}{1 - \bar{y}_L(p)} + \frac{\bar{N}\bar{y}''(p)}{1 - \bar{y}_L(p)}. \quad (14)$$

Первый член в этом выражении соответствует части реакции, обусловленной действием входного сигнала $S(t)$, а второй член — результату воздействия флуктуаций $N(t)$. Влияние флуктуаций меньше, когда они при-

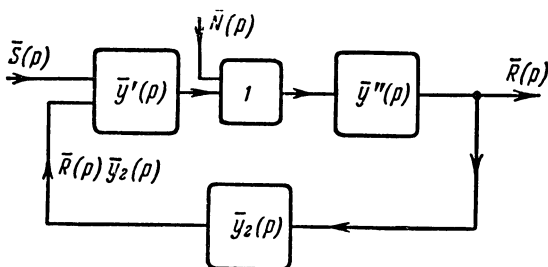


Рис. 22.

ложены к выходной точке, где \bar{y}'' равно единице, и больше, когда они приложены к входу. Точно так же флуктуации, действующие на цепь обратной связи, оказывают влияние на реакцию, увеличивающееся по мере того, как точка приложения их приближается к входу. Из уравнения (14) следует, что большая величина обратной связи делает выход системы с обратной связью в значительной степени менее чувствительным к приложенным флуктуациям.

Если частотный спектр сигнала помехи вблизи выходной точки захватывает область, в которой обратная связь положительна или нейтральна, то реакция на этих частотах может быть сильно искажена. Из этого следует, что обратная связь систем, предназначенных для подавления случайных флуктуаций, например, в регуляторах температуры, в автопилотах и т. д., должна представлять

собой отрицательную обратную связь, полоса которой по крайней мере не меньше, чем ширина спектра ожидаемых флуктуаций. В этих приложениях входным сигналом является отклонение от требуемого постоянного значения температуры, угла и т. д.

Во многих случаях входной сигнал сам является флуктуирующей функцией времени и к нему добавляется паразитная флуктуация. Это имеет место, например, в следящей системе, направляющей ствол орудия в сторону цели, обнаруженной с помощью радиолокатора. Действительное направление на цель определяется величиной $S(t)$, неизбежные помехи радиолокатора соответствуют $N(t)$ и задача заключается в том, чтобы уменьшить ошибку между линией направления ствола орудия $R(t)$ и действительным направлением на цель. В этом случае слишком большая отрицательная обратная связь заставит ствол орудия очень хорошо следовать за сигналом $S(t)$, но на него также будут действовать высокочастотные помехи радиолокатора. С другой стороны, слишком маленькая обратная связь не позволит орудийному стволу следовать за помехами радиолокатора, но одновременно будет стремиться ограничить реакцию на нужные частоты движения цели. В этом случае требуется компромисс, который может быть достигнут при достаточных сведениях о желаемом входном сигнале, паразитных шумах и о характеристиках контура обратной связи.

2.8. Полное входное и выходное сопротивления

Влияние обратной связи на полное входное сопротивление не может быть рассмотрено с помощью только передаточных функций; надо учитывать также и физический характер системы; это ясно из следующего примера. Операторная форма полного входного сопротивления электрической RC -цепочки (рис. 2, а)

$$\bar{Z}_{\text{вх}} = R + \frac{1}{pC},$$

а передаточная функция

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{1 + pT}.$$

В выражении для $\bar{y}(p)$ элементы цепи R и C потеряли свой специфический смысл, который составляет сущность выражения для $Z_{вх}$.

Входные и выходные полные сопротивления специальных систем будут рассмотрены в следующих главах.

Литература

1. B l a c k H. S., Stabilised Feedback Amplifiers, Bell System, Technical Journal, 1934, 13, p. 1.
 2. G i d d i n g s D. H. L. and T h o m p s o n A. M., Gain Stability of Feedback Amplifiers, Proceedings IEE, 1954, 101, Part III, p. 35.
-

ГЛАВА 3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

3.1. Введение

В результате охвата обратной связью любого знака группы элементов получившаяся система часто становится неустойчивой. На практике это означает, что при замыкании системы некоторые величины такой системы начинают либо колебательно, либо аperiodически возрастать. Малые флуктуации внутри системы оказываются достаточными, чтобы вызвать расходящийся переходный процесс. Такие флуктуации возникают самопроизвольно, в виде помехи при отсутствии внешних возмущений. Благодаря физической природе элементов, процессы в системе никогда не могут неограниченно возрастать; они ограничиваются насыщением какого-либо каскада, механическими параметрами или ограниченным запасом энергии питания. Эти ограничения присущи по своей природе нелинейностям. Однако в этой главе мы будем рассматривать только системы, состоящие из линейных элементов.

Неустойчивость систем с обратной связью впервые была обнаружена и рассмотрена Максвеллом*), описавшим в 1868 г. колебания регулятора Дженкинса (Jenkins) в случае, когда действительные части комплексных корней характеристического уравнения, соответствующего уравнению движения, становятся положительными. За-

*) Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А., Стодолова А., Теория автоматического регулирования. Под ред. А. А. Андропова, Изд-во АН СССР, 1949. (Прим. ред.)

метим, что характеристическое уравнение совпадает со знаменателем общей передаточной функции.

Пусть, например, общая передаточная функция будет

$$\bar{y}_0(p) = \frac{1}{p^2 - 2\alpha p + (\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Представляя ее в виде суммы элементарных дробей, получим:

$$\bar{y}_0(p) = \frac{A}{p - (\alpha + j\omega)} + \frac{B}{p - (\alpha - j\omega)}.$$

Тогда импульсная переходная функция, которая является обратным преобразованием $\bar{y}_0(p)$, получается в виде

$$y_0(t) = A \exp(\alpha t) \exp(j\omega t) + B \exp(\alpha t) \exp(-j\omega t).$$

Это выражение описывает переходный процесс, колебательно возрастающий со временем, так как показатели экспонент представляют собой действительные положительные числа.

В общем случае множитель вида $(p - \alpha)^{-1}$ в передаточной функции, где $\alpha > 0$, соответствует в импульсной переходной функции возрастающему члену вида $\exp(\alpha t)$. В этом случае неустойчивый переходный процесс возрастает аperiодически, а не колебательно.

Из этого рассмотрения становится ясным, что необходимое условие устойчивости состоит в том, чтобы корни знаменателя общей передаточной функции реального устройства с обратной связью не имели положительной действительной части, так как такие корни вызывают неустойчивость системы. Граничный случай получается, когда корни — чисто мнимые. В выражении импульсной переходной функции этим корням соответствуют слагаемые вида $\exp(j\omega t)$, где, в частности, $\omega = 0$. Такие слагаемые соответствуют незатухающим колебаниям с постоянной амплитудой, которые, однако, в любой практической схеме будут неизбежно затухать или возрастать благодаря малым изменениям характеристик элементов, появляющихся с течением времени.

Такая система не неустойчива в математическом смысле, однако практически ее нельзя считать устойчивой.

Физическая оценка условий, необходимых для устойчивости линейных систем с обратной связью, наиболее удобно получается при рассмотрении процесса возбуждения системы синусоидальными воздействиями, так как в этом случае процессы в системе тоже будут синусоидальными (см. 1.10). Уравнение, описывающее общую частотную характеристику при этих условиях, получается из уравнения (1) главы 2, в котором p заменяется на $j\omega$

$$\bar{y}_0(j\omega) = \frac{\bar{y}_1(j\omega)}{1 - \bar{y}_L(j\omega)}. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что величина $\bar{y}_0(j\omega)$ становится бесконечно большой когда $\bar{y}_L(j\omega)$ равно единице. Частотная характеристика разомкнутой системы $\bar{y}_L(j\omega)$ может быть представлена в виде вектора. Для того чтобы обеспечить устойчивость системы, амплитуда этого вектора должна быть меньше единицы при частотах, на которых фазовый сдвиг в контуре равен нулю или кратен 2π радиан. Если вектор при этих условиях больше единицы, то нельзя сказать сразу, что система неустойчива, но чаще всего она неустойчива. Частота, на которой система резонирует, лежит в диапазоне частот, в котором частотная характеристика близка к единице, и чем ближе критические условия, тем медленнее затухает переходный процесс.

При исследовании фазового сдвига и величины усиления, необходимых для устойчивости системы, могут встретиться три случая.

1) Если элементы как в прямой цепи, так и в цепи обратной связи не зависят от частоты, то модуль коэффициента передачи разомкнутой системы должен быть меньше 1 (см. рис. 8).

2) Если в системе преобладают переходные цепи для связи по переменному току, примерный вид которых изображен на рис. 4, а, то может оказаться, что вектор частотной характеристики разомкнутой системы поворачивается против часовой стрелки при уменьшении частоты, т. е. на низких частотах будет опережение по фазе. В этом случае условие устойчивости состоит в том, чтобы усиление разомкнутой системы было меньше единицы при фазовом сдвиге, равном $0, 2\pi, 4\pi, \dots$ радиан.

3) (что и встречается чаще всего) Если в прямой цепи и в цепи обратной связи преобладают цепочки, образующие апериодические и колебательные звенья, то усиление разомкнутой системы должно быть меньше единицы при фазовом сдвиге $0, -2\pi, -4\pi \dots$ радиан, так как вектор частотной характеристики контура поворачивается по часовой стрелке, т. е. отстает с увеличением частоты.

В усилителях переменного тока с обратной связью неустойчивость обуславливается двумя последними случаями, тогда как в усилителях, работающих на постоянном токе и системах регулирования, возможен лишь третий случай.

3.2. Критерий устойчивости Рауса

В 1877 г. Раус [3], математик из Кембриджа, опубликовал критерий устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений любого порядка. Раус применил свой критерий к коэффициентам характеристического уравнения, возникающего при классическом методе решения дифференциальных уравнений; но этот критерий также применим к уравнениям в операторной форме. Метод будет приведен здесь без доказательства*).

Предположим, что система с обратной связью описывается следующим уравнением относительно изображений (ср. с уравнением (5) главы 1):

$$[a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n] \bar{R}(p) = \bar{S}(p). \quad (2)$$

a_0 принято положительным, и все коэффициенты — действительные величины.

Если входным возмущением является мгновенный импульс, то правая часть уравнения равна 1, и решение является импульсной переходной функцией, сходящейся при условии, что разложение на множители левой части уравнения (2) не содержит множителей вида $(p - \alpha)$

*) Доказательство этого критерия можно найти, например, в книге: Курош А. Г. «Курс высшей алгебры», Гостехиздат, 1952. (Прим. ред.)

или $p - (\alpha \pm j\omega)$, где $\alpha > 0$, т. е. уравнение

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

не имеет корней с положительной действительной частью.

С помощью метода Рауса можно определить наличие таких корней, рассматривая все коэффициенты от a_0 до a_n .

Сначала коэффициенты выписываются в две строки:

$$\begin{array}{l} \text{Строка 1} \quad a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{и т. д.} \\ \text{Строка 2} \quad a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{и т. д.} \end{array}$$

Перекрестным перемножением первого столбца на каждый последующий по очереди образованы следующие $(n-1)$ строки:

$$\begin{array}{l} \text{Строка 3} \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 = a_1 a_4 - a_0 a_5 = a_1 a_6 - a_0 a_7 = \dots \text{ и т. д.} \\ \qquad \qquad \qquad = b_1 \qquad \qquad \qquad = b_2 \qquad \qquad \qquad = b_3 \\ \text{Строка 4} \quad b_1 a_3 - a_1 b_2 = b_1 a_5 - a_1 b_3 = b_1 a_7 - a_1 b_4 = \dots \text{ и т. д.} \\ \qquad \qquad \qquad = c_1 \qquad \qquad \qquad = c_2 \qquad \qquad \qquad = c_3 \\ \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \dots \\ \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \dots \\ \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \dots \end{array}$$

и т. д.

Критерий Рауса формулируется так:

Характеристическое уравнение не содержит корней с положительной действительной частью тогда и только тогда, когда все члены первого столбца положительны. При выполнении этого условия все члены во всех строках также положительны.

Примеры:

(1) Рассмотрим передаточную функцию второго порядка

$$\frac{\bar{R}}{\bar{S}} = \frac{1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Записываем строки:

$$\begin{array}{l} 1. \qquad \qquad a_0 \qquad \qquad a_2 \\ 2. \qquad \qquad a_1 \\ 3. \qquad \qquad a_1 a_2 \end{array}$$

причем $a_0 > 0$. Следовательно, условия устойчивости имеют вид

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0.$$

(2) Передаточная функция третьего порядка

$$\frac{\bar{R}}{\bar{S}} = \frac{1}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}.$$

Строки:

1.	a_0	a_2
2.	a_1	a_3
3.	$a_1 a_2 - a_0 a_3$	
4.	$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)$	

При $a_0 > 0$ условия устойчивости имеют вид

$$\begin{aligned} a_1 &> 0 \\ a_3 &> 0 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 &> 0. \end{aligned}$$

3.2.1. Применение критерия Рауса к системе с обратной связью.

Схему, изображенную на рис. 23, *a*, можно рассматривать как генератор с фазовым сдвигом, в котором имеет место ограничение по амплитуде за счет кривизны ламповой характеристики. Вообще говоря, эта схема не имеет такого назначения и в данном случае используется лишь в качестве примера применения критерия Рауса.

Первая лампа в схеме — пентод с коэффициентом усиления, по напряжению приближенно равным $-g_m R_L$, где g_m — крутизна характеристики (см. 5.2). За каскадом пентода следуют три апериодических звена. Первое звено образовано сопротивлением анодной нагрузки и емкостью C_L . Затем следует делительная цепь, состоящая из равных сопротивлений R_1 , где $R_1 \gg R_L$ для того, чтобы уменьшить шунтирование нагрузки. Конденсатор C_1 образует с эффективным сопротивлением делителя напряжения апериодическое звено с постоянной времени $\frac{C_1 R_1}{2}$.

Напряжение на C_1 является входным напряжением катодного повторителя на триоде (см. 5.3) с коэффициентом усиления $\frac{m}{m+1}$ (m — коэффициент усиления триода), нуль которого устанавливается изменением величины

отрицательного напряжения V_B , подпиряющего делитель напряжения. Третье аperiodическое звено с постоянной времени C_2R_2 возбуждается выходным напряжением

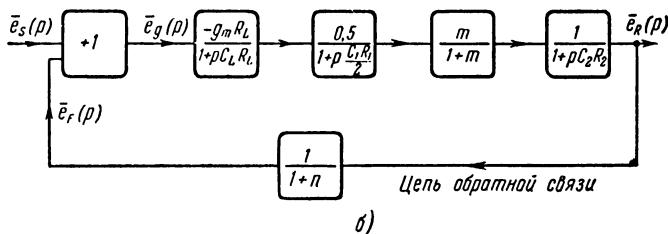
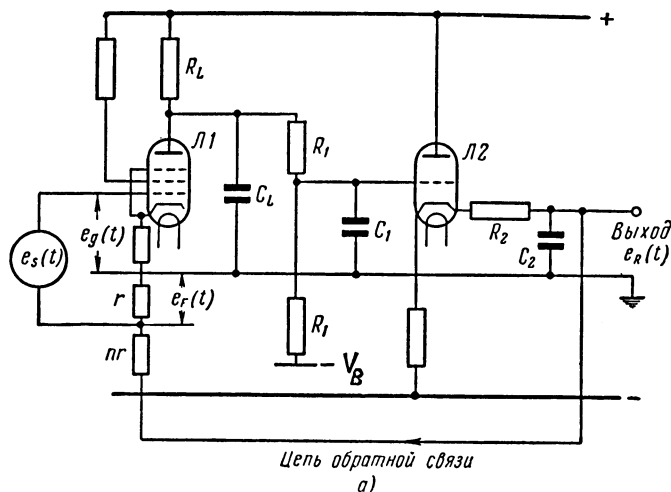


Рис. 23.

каскада катодного повторителя. Частотно-независимая цепь обратной связи с коэффициентом усиления $\frac{1}{1+n}$ образована с помощью второго делителя напряжения и подключена к сетке первой лампы L_1 . Сопротивление делителя $(n+1)r$ достаточно велико, чтобы не шунтировать цепочку C_2R_2 выходного аperiodического звена. Входной сигнал e_s подается на сетку L_1 от источника напряжения, соединенного последовательно с цепью обратной связи, а выходной сигнал e_R снимается с емкости C_2 .

Структурная схема устройства изображена на рис. 23, б. Передаточные функции прямой цепи и цепи обратной связи записываются в следующем виде:

$$\frac{e_R}{e_g} = \bar{y}_1(p) = \frac{-g_m R_L}{2(1+m)} \frac{1}{(1+pT)^3},$$

где $R_L C_L = \frac{R_1 C_1}{2} = R_2 C_2 = T$, т. е. все звенья имеют равные постоянные времени

$$\bar{y}_2(p) = \frac{1}{1+n}.$$

Отсюда общая передаточная функция системы согласно уравнению (1) главы 2 будет равна

$$\bar{y}_0(p) = \frac{\bar{e}_R}{\bar{e}_s} = \frac{A}{(1+pT)^3 - A\beta},$$

где через A обозначен коэффициент усиления $\frac{-g_m R_L m}{2(1+m)}$ и $\beta = \frac{1}{1+n}$.

Раскрываем скобки и находим:

$$\bar{y}_0(p) = \frac{A}{p^3 T^3 + 3p^2 T^2 + 3pT + (1 - A\beta)}. \quad (3)$$

Применив критерий Рауса к знаменателю, получаем в соответствии с результатами предыдущего параграфа условия устойчивости:

- (1) $3T^2 > 0$,
- (2) $(1 - A\beta) > 0$,
- (3) $9T^3 - T^3(1 - A\beta) > 0$.

Первое и второе условия всегда выполняются, так как $A\beta$ по своей природе отрицательно. Остается только третье, которое сводится к следующему: $T^3(8 + A\beta) > 0$ или $A\beta \geq -8$. Это и есть условие устойчивости системы. При $A\beta < -8$ система самовозбуждается. Заметим, что если коэффициент усиления разомкнутой системы $A\beta > 1$, то условие (2) не выполняется. В этом случае неустойчивость имеет апериодический характер, а не колебательный.

Эти результаты можно проверить с физической точки зрения, рассматривая реакцию системы на синусоидальный сигнал. При $A\beta < 0$ добавочный сдвиг по фазе, равный $\pm \pi$ радиан, появившийся благодаря звеньям, характеристики которых зависят от частоты, может дать на некоторой частоте нулевой фазовый сдвиг. Можно определить, на какой частоте, если она существует, запаздывание по фазе в контуре составляет π радиан.

Условие этого имеет вид

$$\arg \bar{y}_L(j\omega) = -\pi,$$

т. е.

$$\arg \left[\frac{1}{1+j\omega T} \right]^3 = -\pi,$$

откуда

$$\arg \left[\frac{1}{1+j\omega T} \right] = -\frac{\pi}{3}.$$

Частота, на которой это имеет место, определяется соотношением

$$\omega T = \operatorname{tg} \left(+\frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3},$$

при выполнении которого имеет место равенство

$$\left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = \frac{1}{2},$$

или

$$\left| \left[\frac{1}{1+j\omega T} \right]^3 \right| = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, при фазовом сдвиге, равном $-\pi$ радиан, модуль частотной характеристики зависящих от частоты элементов равен $\frac{1}{8}$ и для устойчивости должно выполняться неравенство $A\beta \geq -8$, чтобы модуль частотной характеристики разомкнутой системы был меньше единицы. На рис. 24 изображен годограф частотной характеристики этой схемы. Он проходит через точку $(1,0)$ при $A\beta = -8$.

Критерий Рауса имеет три недостатка:

(1) Им неудобно пользоваться при экспериментах, так как он требует знания всех коэффициентов характеристического уравнения, т. е. должны быть определены

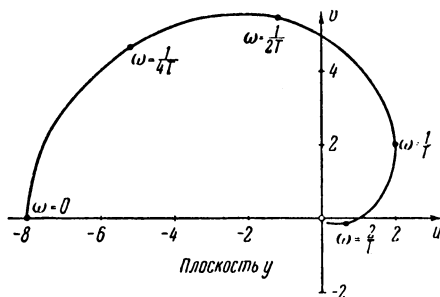


Рис. 24.

все параметры системы по отдельности. Обычно характеристики рассматриваемой схемы определяются из испытаний разомкнутой системы.

(2) Критерий не дает ясных указаний, как сделать неустойчивую систему устойчивой.

(3) Метод становится очень громоздким при рассмотрении систем высокого порядка*).

3.3. Критерий устойчивости Найквиста

Важнейший шаг в нахождении критерия устойчивости для систем с обратной связью, не имеющего недостатков метода Рауса, был сделан в 1932 г. Найквистом [1]. Критерий Найквиста, первоначально предназначенный для усилителей с обратной связью, требует некоторого расширения для применения его в более общих случаях**). Критерий основан на теории функций комплексного

*) Это верно, если необходимо получить буквенный результат. Для численной проверки устойчивости этот метод наиболее удобен. (Прим. ред.)

***) Критерий Найквиста был впервые применен к системам автоматического регулирования А. В. Михайловым; см. М и х а й л о в А. В., Метод гармонического анализа в теории регулирования, Автоматика и телемеханика, 1938, № 3. (Прим. ред.)

переменного, и поэтому здесь будет дано нестрогое рассмотрение некоторых необходимых теорем. Интересующиеся более полным рассмотрением вопроса могут обратиться к указанной ниже литературе.

3.3.1. Плоскость p .

В главе 1 было показано, что оператор p может быть представлен в виде комплексного числа $(\sigma + j\omega)$. Любое операторное выражение, например передаточная функция, при некоторых значениях p может равняться нулю, в то время как при других значениях оно может стремиться к бесконечности. Такие значения

p называются соответственно *нулями* и *полюсами* операторного выражения.

Например, выражение $(p+a)$ принимает значение, равное нулю, при $p = -a$. Следовательно, $-a$ есть нуль выражения $(p+a)$. Таким же образом выражение $\frac{1}{p-b}$ принимает значение, равное бесконечности, при $p = b$. Следовательно, b есть полюс выражения $\frac{1}{p-b}$.

Нули и полюсы могут быть действительными, мнимыми или комплексными числами и, следовательно, могут

быть изображены точками на комплексной плоскости с координатами σ и ω . Такая плоскость называется *плоскостью p* . В качестве примера на рис. 25 изображены полюсы общей передаточной функции схемы, изображенной на рис. 23, а, для четырех значений коэффициента усиления разомкнутой системы $A\beta$. Шкалы σ и ω проградуированы в единицах постоянной времени T .

Часто операторное выражение имеет несколько одинаковых полюсов; например, выражение $\frac{1}{(p+a)^2}$ имеет два

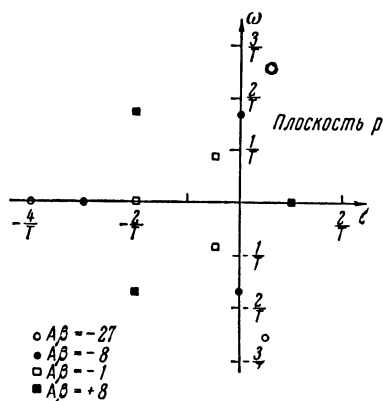


Рис. 25. Полюсы передаточной функции.

одинаковых полюса $p = -a$. В таких случаях значение p называется полюсом или нулем n -го порядка, где n —кратность полюса.

3.3.2. Условие устойчивости в плоскости p .

Условия устойчивости могут быть сформулированы в виде теоремы, связанной с распределением полюсов и нулей в плоскости p .

Т е о р е м а 1. Для того чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы в правой части плоскости p не было полюсов общей передаточной функции $\bar{y}_0(p)$ (т. е. нулей функции $[1 - \bar{y}_L(p)]$).

Когда это условие не выполняется, в знаменателе общей передаточной функции появляются члены вида $(p - \alpha)$ или $[p - (\alpha \pm j\omega)]$. Ранее было показано, что такие слагаемые приводят к импульсной переходной функции, которая бесконечно возрастает с ростом времени.

3.3.3. Плоскость y .

Как было показано в главе 1, передаточная функция системы с обратной связью, а также одного или нескольких последовательно соединенных звеньев выражается как функция p , так что ее можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}(p) &= u + jv, \\ p &= (\sigma + j\omega). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$\bar{y}(p)$ как функция комплексного переменного p может быть представлена на комплексной плоскости с координатами u и v , носящей название *плоскости y* . Теория функций комплексного переменного*), на которой основаны все последующие рассуждения, накладывает ограничения на вид функции $\bar{y}(p)$. Однако на практике в системах с обратной связью такими ограничениями можно пренебречь, так что все реальные системы представляют собой системы требуемого вида.

3.3.4. Контуры в плоскостях p и y .

Рассмотрим, что произойдет, если значение p будет ме-

*) См., например, Gireen S. L., The Theory and Use of the Complex Variable, Pitman, 1948, стр. 50 и др. [или Шабат Б. В., Лаврентьев М. А., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1959].

няться непрерывно таким образом, что в плоскости p будет образован замкнутый контур C , как показано на рис. 26.

Из уравнения (4) видно, что каждому значению p соответствует единственное значение $\bar{y}(p)$ и, таким образом,

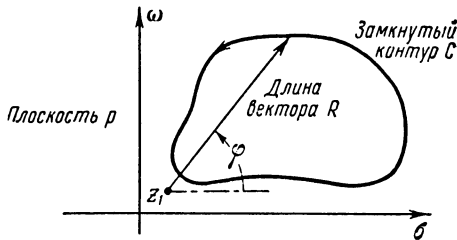


Рис. 26.

контур в плоскости p отображается на плоскость y . Преобразование контура из одной плоскости координат в другую искажает форму контура. Преобразованный контур C на плоскости y будем называть контуром D .

3.3.5. Влияние нулей в плоскости p .

Предположим, что

$$\bar{y}(p) = A(p - z_1), \quad (5)$$

где A — коэффициент усиления.

В плоскости p в точке $p = z_1$ имеется нуль (рис. 26). Пусть эта точка является начальной точкой вектора длиной R , конец которого лежит на произвольном контуре C . Угол, образованный этим вектором с абсциссой, обозначим через φ радиан. Пусть конец этого вектора движется по контуру против часовой стрелки. Это направление будем считать положительным. Вектор можно представить выражением $R(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ или $R \exp(j\varphi)$. Следовательно, каждая точка контура может быть представлена в виде

$$p = z_1 + R \exp(j\varphi). \quad (6)$$

Соответствующая точка в плоскости y на преобразованном контуре D получается подстановкой значения p из уравнения (6) в выражение для $\bar{y}(p)$ в уравнении (5). Таким образом, для контура D в плоскости y будем

иметь выражение

$$\bar{y}(p) = AR \exp(j\varphi). \quad (7)$$

Если нуль z_1 лежит внутри контура C , то когда конец вектора обходит контур один раз в положительном направлении, угол, описанный вектором, равен $+2\pi$ радиан. В этом случае уравнение (7) указывает, что контур D должен содержать внутри начало координат плоскости y , которое также должно обходиться против часовой стрелки, так как только в этом случае вектор $AR \exp(j\varphi)$ в плоскости y может описать угол $+2\pi$ радиан. Если z_1 лежит вне замкнутого контура C , то суммарный угол поворота φ вектора при обходе им этого контура равен нулю. Как следует из уравнения (7), начало координат плоскости y в этом случае должно также находиться вне контура D .

Если $\bar{y}(p)$ имеет несколько нулей, то можно записать:

$$\bar{y}(p) = A(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_z). \quad (8)$$

Проведем из каждого нуля по одному вектору так, что концы всех векторов находятся в одной и той же точке контура C . Тогда контур C в плоскости p описывается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} p &= z_1 + R_1 \exp(j\varphi_1), \\ p &= z_2 + R_2 \exp(j\varphi_2), \\ &\dots \end{aligned}$$

На контуре D в плоскости y выражение для $\bar{y}(p)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{y}(p) &= AR_1 \exp(j\varphi_1) R_2 \exp(j\varphi_2) \dots R_z \exp(j\varphi_z) = \\ &= AR_1 R_2 \dots R_z \exp(j\varphi_1 + j\varphi_2 + \dots + j\varphi_z). \end{aligned}$$

Для каждого нуля, находящегося внутри контура C , угол поворота при полном его обходе φ равен $+2\pi$ радиан, а для остальных нулей $\varphi = 0$; следовательно, контур D обходит точку начала координат против часовой стрелки столько раз, сколько нулей выражения $\bar{y}(p)$ лежит внутри контура C .

Если имеется n одинаковых нулей, то выражение для контура D имеет вид

$$\bar{y}(p) = AR^n \exp(nj\varphi),$$

т. е. наличие нуля n -го порядка внутри контура C означает, что контур D обходится вокруг точки начала координат n раз против часовой стрелки.

Влияние нулей на поведение передаточной функции $\bar{y}(p)$ изображено на рис. 27, а и б. Приведенные выше рас-

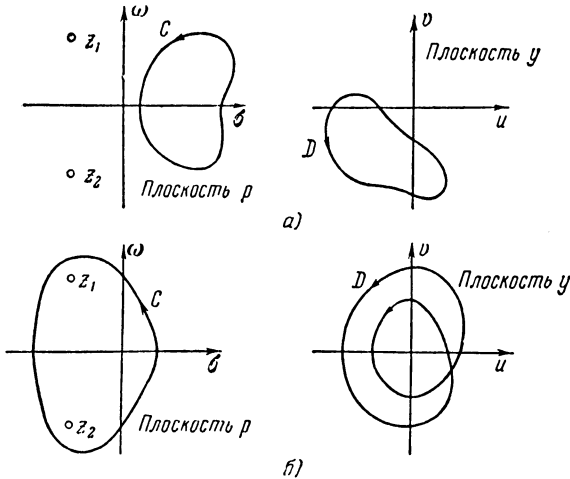


Рис. 27.

суждения справедливы как для действительных, так и для комплексных нулей в плоскости p .

3.3.6. Влияние полюсов в плоскости p .

Предположим, что

$$\bar{y}(p) = \frac{B}{p - p_1}, \quad (9)$$

где B есть коэффициент усиления.

Полюс этого выражения в плоскости p находится в точке $p = p_1$. Запишем вектор, соединяющий точку p_1 с контуром C , в виде $S \exp(j\theta)$, где θ считается положительным при повороте вектора против часовой стрелки. Произвольная точка p контура C может быть представлена в виде

$$p = p_1 + S \exp(j\theta). \quad (10)$$

Соответствующая точка $\bar{y}(p)$ контура D в плоскости y на основании уравнений (9), (10) представляется в виде

$$\bar{y}(p) = \frac{B}{S \exp(j\theta)} = BS^{-1} \exp(-j\theta). \quad (11)$$

Если конец вектора обходит контур C в положительном (против часовой стрелки), то контур D обходится в отрицательном (по часовой стрелке) направлении. Если точка p_1 окружена контуром C , угол $\theta = +2\pi$ радиан и контур D содержит внутри начало координат

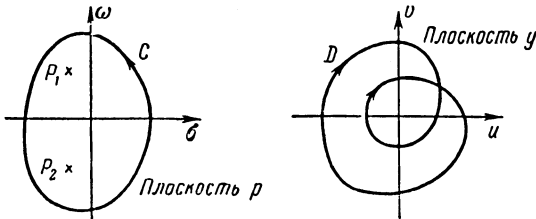


Рис. 28.

и обходится в отрицательном (против часовой стрелки) направлении. Если C не содержит в себе полюс, контур D не содержит внутри начала координат. Доказательство может быть распространено на большее число полюсов и на полюсы более высокого порядка; рис. 28 иллюстрирует это.

3.3.7. Совместное влияние полюсов и нулей.

При наличии полюсов и нулей $\bar{y}(p)$ можно представить в виде

$$\bar{y}(p) = AB \frac{(p-z_1)(p-z_2) \dots (p-z_Z)}{(p-p_1)(p-p_2) \dots (p-p_P)}. \quad (12)$$

В этом случае, выражая точки контура D в векторных обозначениях, получим:

$$\bar{y}(p) = AB \frac{R_1 R_2 \dots R_Z}{S_1 S_2 \dots S_P} \times \\ \times \exp [j\varphi_1 + j\varphi_2 + \dots + \varphi_Z - j\theta_1 - j\theta_2 - \dots - j\theta_P].$$

Следовательно, общая теорема формулируется так:

Т е о р е м а 2. Если контур в плоскости p охватывает Z нулей и P полюсов функции $\bar{y}(p)$, то при обходе замкнутого контура этой плоскости против часовой стрелки отображенный контур в плоскости y обходит начало координат $(Z-P)$ раз в том же направлении.

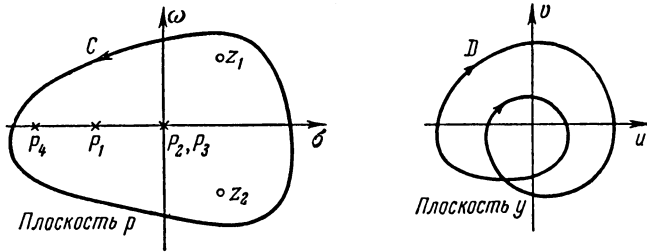


Рис. 29.

Эта теорема имеет большое значение для установления критериев устойчивости линейных систем с обратной связью. Иллюстрация этой теоремы приведена на рис. 29.

3.3.8. Возвратно-петлевые контуры.

При рассмотрении теоремы 2 предполагалось, что годографы в плоскости p и плоскости y имеют простую форму. Однако теорема равным образом применима к возвратно-петлевым контурам сложной формы, например к таким, какой изображен на рис. 30.

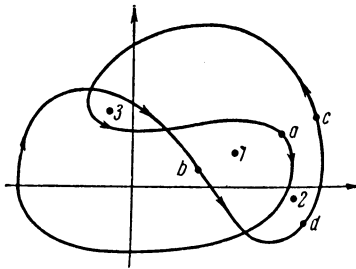


Рис. 30.

Начало вектора помещено в точку 1. Его конец сначала находится в точке a на контуре и обходит контур в направлении, указанном стрелками. Когда конец вектора находится в точке

b , вектор поворачивается на угол, равный π радиан, по часовой стрелке; для того чтобы попасть в точку c , вектору надо повернуться на π радиан против часовой стрелки. При движении вектора от точки c к точке a суммарный угол, на который поворачивается вектор, равен нулю. Следовательно, полный угол, на который

поворачивается вектор, равен нулю и точка 1 не охватывается контуром. Вектор с началом в точке 2 поворачивается на π радиан против часовой стрелки при движении от точки a до точки d и еще на π радиан в том же направлении от точки d назад к точке a ; следовательно, точка 2 охватывается контуром. Точка 3 охватывается один раз при движении по часовой стрелке и один раз при движении против часовой стрелки. В результате считается, что она не охвачена контуром.

Таким образом, может показаться, что точка охвачена контуром, не будучи на самом деле охвачена им. Это имеет большое значение при применении критерия устойчивости для некоторых определенных реальных систем с обратной связью.

3.3.9. Полуокружность большого радиуса в правой части плоскости p .

Особый интерес представляет контур в правой части плоскости p , состоящий из полуокружности бесконечно большого радиуса с центром в точке $\omega=0$ и оси ω , при значениях ω , изменяющихся от $+\infty$ до $-\infty$. При рассмотрении этого контура следует отметить два момента.

(1) Если радиус полуокружности достаточно велик, то контур охватывает все полюсы и нули, находящиеся в правой части плоскости p при обходе их против часовой стрелки.

(2) Часть контура, представляющая собой ось ω , преобразуется в контур D , в плоскости y соответствующий $\bar{y}(j\omega)$, на котором ω принимает все положительные и отрицательные значения. Эта функция соответствует частотной характеристике для положительных и отрицательных частот; положительные частоты имеют физический смысл и частотная характеристика может быть определена экспериментальным путем.

Изучая контур D , который является преобразованием контура C , представляющего собой полуокружность, мы можем установить, чему равна разность между числом полюсов и нулей в правой части плоскости p . Если число полюсов известно, то можно определить число нулей. Теорема 1 (см. 3.3.2) устанавливает, что для того, чтобы система была устойчивой, необходимо, чтобы в правой части плоскости p не было полюсов общей передаточной

функции, или, иными словами, нулей функции $[1 - \bar{y}_L(p)]$. Следовательно, по расположению контура D можно обнаружить устойчивость или неустойчивость системы.

Когда контур, представляющий собой полуокружность плоскости p , преобразуется в контур в плоскости y , значения отрицательных частот соответствует выражение $\bar{y}(-j\omega)$ при $\omega > 0$. Выражение $\bar{y}(-j\omega)$ является сопряженным выражению частотной характеристики $\bar{y}(j\omega)$ и, следовательно, зеркальным отражением годографа $\bar{y}(j\omega)$ относительно действительной оси плоскости y . Частотная характеристика для отрицательных частот есть чисто математическое понятие и, конечно, не имеет физического смысла.

3.3.10. Преобразования в плоскостях p и y .

Передаточные функции систем с обратной связью часто имеют полюсы, расположенные на оси частот ω в плоскости p , обычно в начале координат. Например, при последовательном соединении интегрирующих звеньев передаточная функция равна $\frac{A}{p^n}$. Такие полюсы могут быть исключены из контура путем обхода их по окружностям бесконечно малого радиуса.

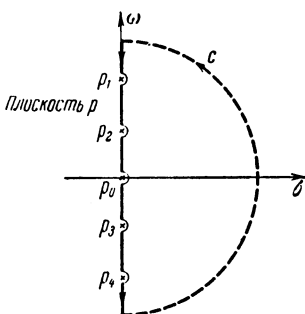


Рис. 31.

Это показано на рис. 31, где бесконечная полуокружность, соединяющая отрицательные и положительные значения ω , изображена пунктиром.

Преобразование обходов бесконечно малых окружностей вокруг полюсов на оси ω в плоскости p на плоскость y совершается следующим образом. В окрестности полюса значение $\bar{y}(p)$ в уравнении (12) определяется главным образом величиной полюса, так как один из сомножителей в скобках в знаменателе становится очень малым. Так около полюса n -го порядка на оси ω

$$\bar{y}(p) \approx \frac{k}{(p - j\omega_1)^n}, \quad (13)$$

где k — постоянная величина.

Рассмотрим в плоскости p вектор с началом в точке $\omega = \omega_1$, имеющий длину δr и угол α относительно оси абсцисс, как показано на рис. 32. На этом рисунке ω_1^+ и ω_1^- — значения ω , соответственно большее и меньшее ω_1 на бесконечно малую величину. Точки полуокружности, описываемой концом вектора, можно представить следующим образом:

$$p = j\omega_1 + \delta r \exp(j\alpha).$$

Подставляя это значение в уравнение (13), получим:

$$\bar{y}(p) = k\delta r^{-n} \exp(-nj\alpha).$$

Таким образом, если контур в виде полуокружности в плоскости p обходится в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, то бесконечно малая полуокружность вокруг полюса n -го порядка на оси ω преобразуется в дугу окружности бесконечно большого радиуса, соответствующую углу $-\pi$ на плоскости y .

Например, колебательное звено без затухания имеет передаточную функцию

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{p^2 + \omega^2}.$$

Она может быть записана в виде

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{(p + j\omega)(p - j\omega)}.$$

Контур в виде полуокружности в плоскости p и соответствующий ему контур в плоскости y изображены на рис. 33, а и б.

Имеет смысл специально исследовать часто встречающийся случай, когда полюс находится в начале координат. Полюс n -го порядка в начале координат соответствует в плоскости y окружности бесконечно большого радиуса, поворачивающегося на $-\pi$ рад при изменении частоты от малой положительной до малой отрица-

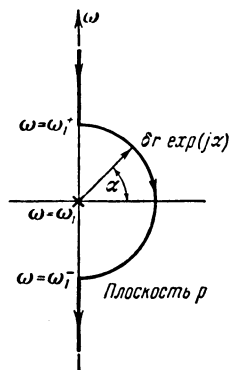


Рис. 32.

тельной частоты. Это иллюстрируется рис. 34, где полюс первого порядка находится в начале координат; этот случай соответствует наличию в передаточной функции

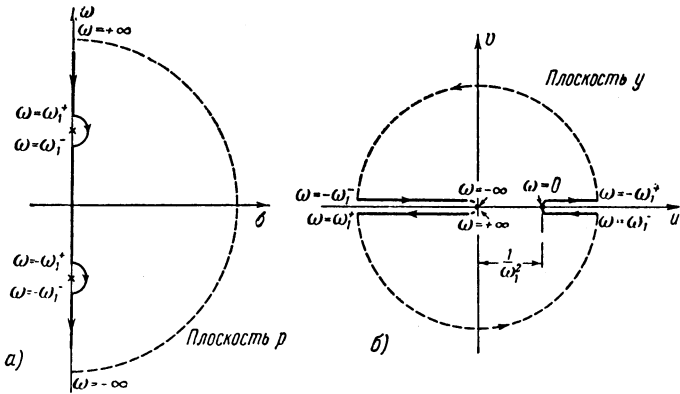


Рис. 33.

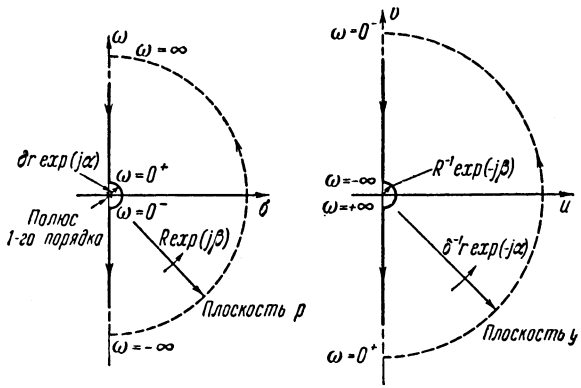


Рис. 34.

интегрирующего звена. На рис. 35 изображен контур для полюса второго порядка в начале координат.

Преобразование полуокружности в плоскости *p*, от точки больших положительных до точки больших отрицательных частот может быть получено таким же

путем. Когда p очень велико, величинами z_1, z_2, \dots и т. д. и p_1, p_2, \dots и т. д. в уравнении (12) можно пренебречь и выражение для $\bar{y}(p)$ упрощается до вида

$$\bar{y}(p) \approx AB \frac{pZ}{pP} = AB(Z-P), \quad (14)$$

где Z — число нулей, P — число полюсов.

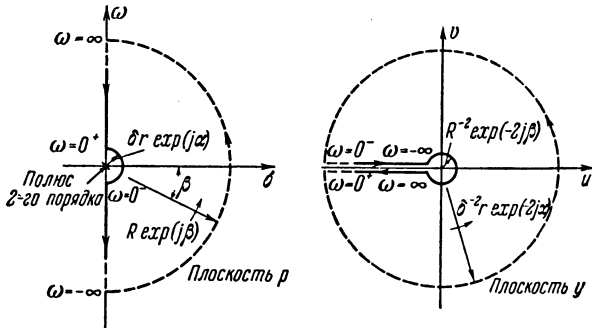


рис. 35. $\bar{y}_0(p) = \frac{A}{p^3 T^3 + 3p^2 T^2 + 3pT + (1 - A\beta)}$ в плоскости p .

Как видно из рис. 34 и 35, конец вектора $R \exp j\beta$ при изменении β от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ радиан описывает полуокружность в плоскости p . Следовательно, точки, лежащие на полуокружности, определяются выражением

$$p = R \exp j\beta.$$

Подставляя это значение в уравнение (14), получаем:

$$\bar{y}(p) = ABR^{(Z-P)} \exp [(Z-P) j\beta].$$

В реальных системах P всегда превосходит Z , так что переход от больших отрицательных до больших положительных значений ω в плоскости p соответствует в плоскости y повороту по окружности бесконечно малого радиуса против часовой стрелки на угол $(Z-P)\pi$, как показано на рис. 34 и 35.

На рисунках 36, а, б и в изображены примеры годографов $y_0(p)$ для трех типичных передаточных функций, из которых (а) и (б) относятся к устойчивым системам,

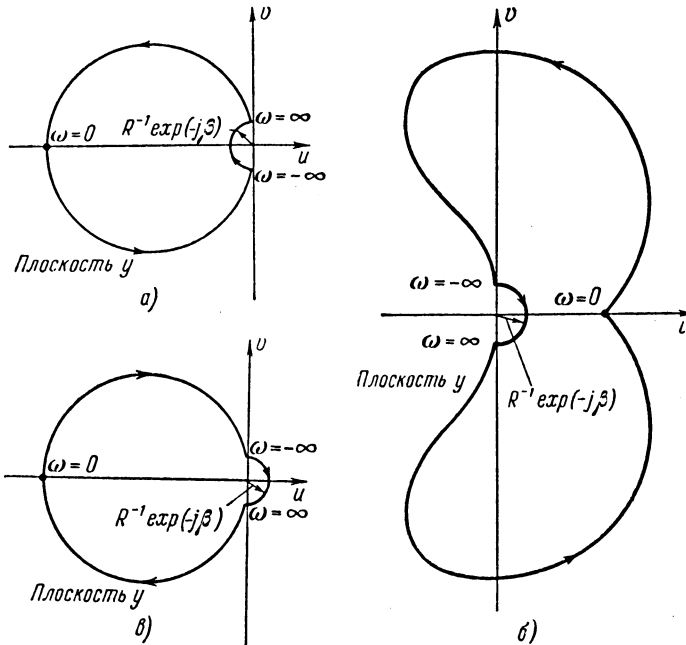


Рис. 36. Изображения годографов: а) $\bar{y}_0(p) = \frac{-1}{p-p_1}$ (p_1 действительно и отрицательно); б) $\bar{y}_0(p) = \frac{p-z_3}{(p-p_3)(p-p_3^*)}$ (z_3 действительно и отрицательно, p_3 и p_3^* — комплексно сопряженные числа с отрицательной действительной частью); в) $\bar{y}_0(p) = \frac{1}{p-p_2}$ (p_2 действительно и положительно).

а (в) — к неустойчивой. Неустойчивость может быть обнаружена с помощью годографа D , обходящего один раз по часовой стрелке начало координат плоскости y благодаря наличию полюса в правой части плоскости p .

3.3.11. Критерий устойчивости.

Критерий Найквиста применим в тех случаях, когда в правой части плоскости p отсутствуют полюсы функции $[1 - \bar{y}_L(p)]$. Такое положение имеет место в большинстве усилителей с обратной связью, для которых критерий и предназначался, а также в огромном большинстве других систем с обратной связью, с которыми приходится сталкиваться на практике. Если общая передаточная функция системы с обратной связью задается уравнением (1) главы 2, критерий Найквиста может быть сформулирован следующим образом:

Если в правой части плоскости p чет полюсов функции $[1 - \bar{y}_L(p)]$, то необходимое и достаточное условие устойчивости состоит в том, чтобы годограф функции $[1 - \bar{y}_L(j\omega)]$ в плоскости y при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ не охватывал начала координат или, иначе, чтобы годограф частотной характеристики разомкнутой системы $\bar{y}_L(j\omega)$ не охватывал точку $(1, 0)$ в плоскости y при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Доказательство критерия Найквиста содержалось в предыдущих параграфах и здесь мы подытожим результаты.

1. Для того чтобы система была устойчивой, необходимо, чтобы $[1 - \bar{y}_L(p)]$ не имела нулей в правой части плоскости p (теорема 1).

2. Если контур в плоскости p охватывает Z нулей и P полюсов функции $\bar{y}(p)$, то преобразованный контур в плоскости y обходит начало координат $(Z - P)$ раз в направлении против часовой стрелки.

3. Контур в плоскости p , лежащий на мнимой оси ω и охватывающий все полюсы и нули передаточной функции $\bar{y}(p)$ в правой части плоскости p , преобразовывается в плоскости y в годограф частотной характеристики $\bar{y}(j\omega)$ при ω , изменяющейся от $-\infty$ до $+\infty$.

Критерий Найквиста вытекает из этих трех положений.

3.3.12. Примеры применения критерия Найквиста.

На рис. 37 показаны годографы частотных характеристик разомкнутой системы $\bar{y}_L(j\omega)$ для нескольких типов передаточных функций разомкнутой системы.

Такие годографы часто называются диаграммами Найквиста независимо от того, нарисованы ли они для

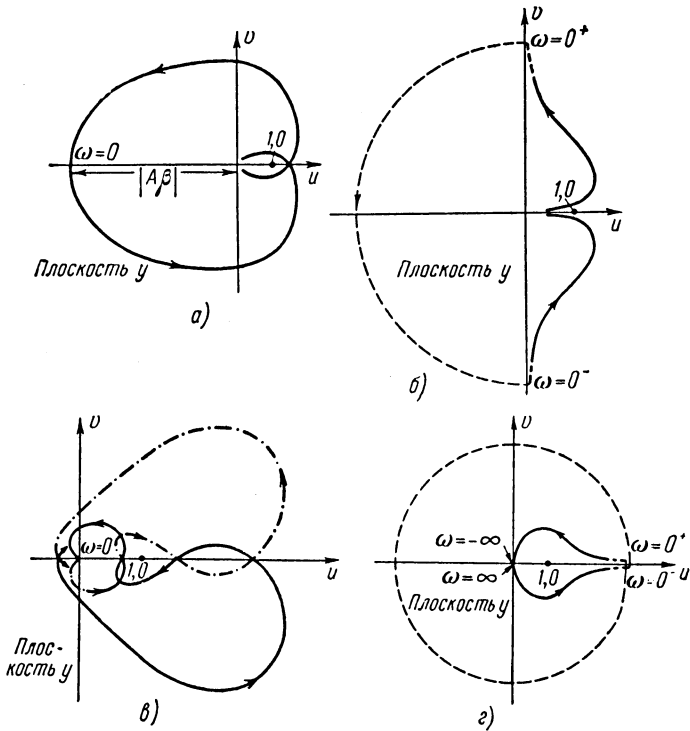


Рис. 37. Годографы частотных характеристик (диаграммы Найквиста): а) годограф $\bar{y}_L(p) = \frac{A\beta}{(1-pT_1)^3}$ для $A\beta < -8$ (неустойчивая система); б) годограф $\bar{y}_L(p) = \frac{A\beta}{p(1+pT_2)}$ для $A\beta < 0$ (устойчивая система); в) годограф условно устойчивой системы; г) годограф $\bar{y}_L(p) = \frac{A\beta}{p^2(1+pT_3)}$ для $A\beta < 0$ (неустойчивая система).

положительных и отрицательных или только для положительных частот. На рис. 37, а изображена диаграмма

Найквиста для системы с тремя одинаковыми апериодическими звеньями в прямой цепи, которая уже рассматривалась в 3.2.1. В этом случае диаграмма Найквиста только подтверждает интуитивный результат, приведенный раньше, а именно, что для того, чтобы замкнутая система была устойчива, усиление разомкнутой системы должно быть меньше единицы, когда фазовый сдвиг равен нулю или кратен $\pm 2\pi$ радиан. При коэффициенте усиления разомкнутой системы, меньшем -8 , точка $(1, 0)$ оказывается охваченной годографом, и в результате замкнутая система получается неустойчивой.

Интересным результатом работы Найквиста оказалось выяснение того, что иногда, при определенных условиях, интуитивный результат оказывается неверным и модуль частотной характеристики (усиление) может быть больше 1 при фазовом сдвиге, равном 0 или кратном $\pm 2\pi$ радиан, и тем не менее система может оставаться устойчивой. Такую систему называют условно устойчивой или устойчивой в смысле Найквиста. Годограф такой системы приведен на рис. 37, в. На этом рисунке критическая точка $(1, 0)$ не охвачена годографом. Если, однако, коэффициент усиления уменьшается или увеличивается, то критическая точка попадает внутрь годографа и система становится неустойчивой. Условная устойчивость нередко встречается в устройствах с обратной связью, но она обычно считается нежелательной по двум причинам. Во-первых, при включении источника питания коэффициент усиления контура может увеличиваться постепенно, заставляя годограф увеличиваться до его конечных установившихся размеров. Если в момент, когда годограф охватывает критическую точку, появляются колебания и если колебания перегружают какой-нибудь элемент в контуре, то эти незатухающие колебания могут остаться и в установившемся режиме. Во-вторых, старение ламп и других элементов или уменьшение питающего напряжения может вызывать уменьшение коэффициента усиления контура, что сделает систему неустойчивой.

Несмотря на это, Дюрдос (Duerdosh) описывает условно устойчивый телефонный ретрансляционный усилитель, обладающий тем преимуществом, что в нем может быть применена значительно большая обратная связь в рабочем

диапазоне частот, чем в случае безусловно устойчивой системы *).

3.4. Многоконтурные системы с обратной связью

Чаще всего в системах с обратной связью имеется более чем один замкнутый контур. Структурная схема системы с двумя цепями обратной связи изображена на рис. 38. Примером применения двух цепей обратной связи служит следующая система с внутренней обратной

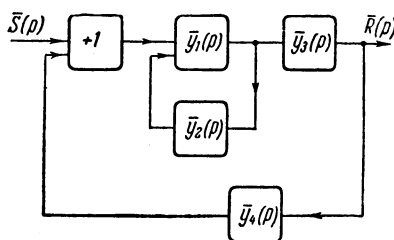


Рис. 38.

связью, устойчивость которой обеспечивается за счет подачи на вход обратной связи в виде напряжения, пропорционального скорости вращения выходного вала (см. 8.3.1). Особенностью многоконтурной системы является то, что, несмотря на неустойчивый внутренний контур, система в целом при наличии внешней обратной связи может быть устойчивой. Предположим, что изображенный на рис. 38 внутренний контур с передаточными функциями прямой цепи и цепи обратной связи $\bar{y}_1(p)$ и $\bar{y}_2(p)$ неустойчив. Из критерия Рауса следует, что общая передаточная функция внутреннего контура имеет полюсы в правой части плоскости p . Передаточная функция системы, в которой разомкнута цепь внешней обратной связи, следовательно, содержит эти полюсы, и критерий Найквиста не может быть использован в той форме, в какой он сформулирован в предыдущем параграфе, так как для этого необходимо знать нули функции в правой части плоскости p . Теорема же, на которой основывается критерий Найквиста, остается справедливой.

*) Заметим, что условная устойчивость может быть достигнута в многоконтурных системах. В ряде случаев в таких системах может быть обеспечено высокое качество процессов регулирования. (Прим. ред.)

Для того чтобы определить условия устойчивости многоконтурной системы, необходимо сначала узнать, имеет ли передаточная функция внутреннего контура полюсы в правой части плоскости и если да, то сколько. Это делается при помощи диаграммы Найквиста, соответствующей внутреннему контуру, т. е. при помощи годографа функции $\bar{y}_1(j\omega)\bar{y}_2(j\omega)$ и применения к нему критерия Найквиста. Напомним, что число нулей с положительной действительной частью в выражении $[1 - \bar{y}_1(j\omega)\bar{y}_2(j\omega)]$ равно числу полюсов с положительной действительной частью в общей передаточной функции $\bar{y}_0(p)$ внутреннего контура. Положим, что это число равно P . Диаграмма Найквиста для системы, в которой разомкнута цепь внешней обратной связи, соответствует годографу функции $\bar{y}_0(j\omega)\bar{y}_3(j\omega)\bar{y}_4(j\omega)$, который используется для определения числа обходов годографа вокруг точки $(1, 0)$ против часовой стрелки. Если передаточная функция $\bar{y}_0(p)\bar{y}_3(p)\bar{y}_4(p)$ не имеет нулей в правой части плоскости, то годограф разомкнутой системы обходит точку $(1, 0)$ по часовой стрелке P раз вследствие наличия полюсов $\bar{y}_0(p)$, лежащих в правой части плоскости. В этом случае система устойчива. Если годограф обходит критическую точку по часовой стрелке меньше чем P раз, или хотя бы один раз против часовой стрелки, то это значит, что $\bar{y}_0(p)\bar{y}_3(p)\bar{y}_4(p)$ имеет в правой части плоскости нули и система неустойчива. Критерий, пригодный для многоконтурных систем, формулируется так:

Необходимое и достаточное условие устойчивости состоит в том, чтобы годограф передаточной функции системы, в которой разомкнута цепь внешней обратной связи, обходил точку $(1, 0)$ P раз в направлении против часовой стрелки, где P есть число полюсов этой передаточной функции, лежащих в правой части плоскости.

3.4.1. Пример многоконтурной системы.

Если цепь, изображенную на рис. 23, *a*, охватить дополнительной обратной связью, то получившаяся в результате двухконтурная система обладает интересными свойствами. Выходное напряжение катодного повторителя подается на фазоинверсный каскад с частотно-независимым коэффициентом усиления— K . Обратная связь с этого каскада подается на вход фазосдвигающей цепи. Структурная

схема, получившаяся в результате, изображена на рис. 39.

Как было показано в 3.2.1, когда коэффициент усиления внутреннего контура $A\beta$ меньше -8 , этот контур неустойчив. При этих условиях диаграмма Найквиста для внутреннего контура вычерчена на рис. 37, а, и при изменении ω от $+\infty$ до $-\infty$ годограф обходит точку $(1, 0)$ дважды в направлении против часовой стрелки. Из теоремы 2 (см. 3.3.7) следует, что $(Z - P) = 2$. Передаточная

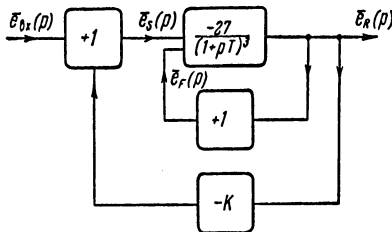


Рис. 39. Структурная схема системы, изображенной на рис. 23, б, с дополнительным контуром обратной связи. Значения параметров: $0,5gmR_L \frac{m}{m+1} = 27$, $n=0$,

$$C_L R_L = C_2 R_2 = \frac{C_1 R_1}{2} = T.$$

функция разомкнутой системы $\bar{y}_1(p) \bar{y}_2(p)$ для внутреннего контура равна

$\frac{A\beta}{(1+pT)^3}$ и не содержит полюсов в правой части плоскости p , а только полюс третьего порядка при $p =$

$$= -\frac{1}{T}.$$

Следовательно, передаточная функция $[1 - \bar{y}_1(p) \bar{y}_2(p)]$ должна содержать в правой части плоскости p два нуля для того, чтобы удовлетворить условию $(Z - P) = 2$. Таким образом, общая переда-

точная функция $\bar{y}_0(p)$ для внутреннего контура содержит два полюса в правой части плоскости p ; это изображено на рис. 25. Далее строим диаграмму Найквиста для цепи внешней обратной связи, которая представляет собой годограф общей частотной характеристики внутреннего контура $\bar{y}_0(j\omega)$, умноженный на коэффициент усиления фазоинверсного усилителя $-K$.

На рис. 40 изображена диаграмма Найквиста для внешнего контура, причем масштаб осей взят в единицах K . Так как в правой части плоскости p имеются два полюса $\bar{y}_0(p)$, то критерий устойчивости для многоконтурных систем требует, чтобы годограф обходил точку $(1, 0)$ два раза в направлении по часовой стрелке. При $K > \frac{28}{27}$ точка

(1, 0) обходится годографом один раз по часовой стрелке и система неустойчива. Точка (1, 0), лежит вблизи точки годографа, соответствующей $\omega = 0$, и это показывает, что неустойчивость носит апериодический характер. При $K < 0,7$ годограф не обходит критическую точку (1, 0) ни разу и система снова неустойчива. На этот раз ее неустойчивость носит колебательный характер с частотой,

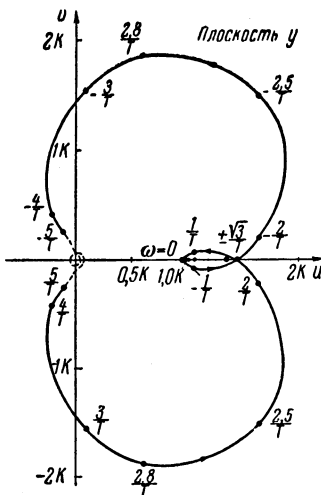


Рис. 40.

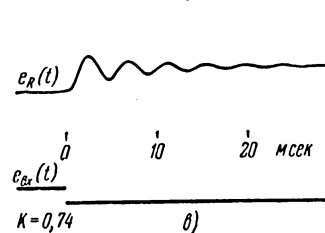
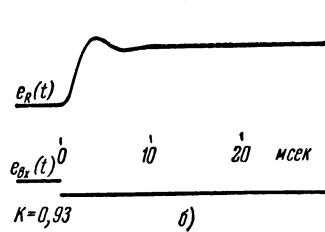
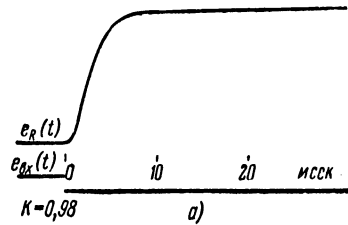


Рис. 41.

примерно равной $\omega = \frac{\sqrt{3}}{T}$. При K , лежащем между $\frac{28}{27}$ и 0,7, система устойчива, так как годограф обходит точку (1, 0) по часовой стрелке два раза, как и требуется.

На рис. 41, а, б и в изображены осциллограммы процессов, вызванных входным напряжением $e_{вх}$ в виде ступенчатой функции, при трех значениях K , принадлежащих области устойчивости. Относительные положения точки (1, 0), соответствующие этим трем значениям K , изображены на рис. 40.

Когда область нулевых частот годографа лежит вблизи критической точки (т. е. при $K \rightarrow \frac{28}{27}$), процесс имеет вид, изображенный на рис. 41, а; он соответствует высокому общему коэффициенту усиления и отсутствию затухающих колебаний, т. е. стремлению к неустойчивости экспоненциального характера. С уменьшением K критическая точка движется вправо и процесс становится колебательным. Общий коэффициент усиления уменьшается до тех пор, пока при $K \rightarrow 0,7$, как показано на рис. 41, в, процесс не приближается к незатухающим колебаниям с частотой $\omega = \frac{\sqrt{3}}{T} \text{ рад/сек.}$

Литература

1. Nyquist H., Regeneration Theory, Bell System Technical Journal, 1932, 11, p. 126.
 2. D u e r d o t h W. T., Some Considerations in the Design of Negative Feedback Amplifiers, Proceedings IEE, 1950, 97, Part III, p. 138.
 3. R o u t h E. J., Advanced Rigid Dynamics, Macmillan & Co., 1930, pp. 210—231.
-

ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

4.1. Годографы частотной характеристики

Значение годографа частотной характеристики разомкнутой системы или диаграммы Найквиста в формулировке критерия устойчивости линейных систем было описано в главе 3. Этот годограф может быть построен по частотным характеристикам отдельных звеньев системы, и это удобно осуществляется с помощью графических построений в плоскости y .

Рассмотрим два элемента с передаточными функциями $\bar{y}_a(p)$ и $\bar{y}_b(p)$, соединенных последовательно. Как было показано в 1.9.1 главы 1, общая передаточная функция равна произведению $\bar{y}_a(p) \bar{y}_b(p)$. Для заданной частоты ω частотные характеристики элементов могут быть записаны в виде

$$\bar{y}_a(j\omega) = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \exp j \left[\arctg \frac{b}{a} \right] = A \exp j\gamma,$$

$$\bar{y}_b(j\omega) = c + jd = \sqrt{c^2 + d^2} \exp j \left[\arctg \frac{d}{c} \right] = B \exp j\psi.$$

Частотная характеристика последовательно соединенных элементов равна произведению

$$\bar{y}_a(j\omega) \bar{y}_b(j\omega) = AB \exp j(\gamma + \psi). \quad (1)$$

Итак, для получения произведения двух или более векторов в плоскости y их амплитуды умножаются, а их фазы складываются. Для того чтобы получить

произведение двух годографов, нужно произвести эту операцию для различных частот, как показано на рис. 42 для случая двух простейших годографов.

Необходимость деления одного вектора на другой может возникнуть, если нужно, например, определить

влияние удаления одного элемента из цепи последовательно соединенных элементов. Деление вектора $\bar{y}_a(j\omega)$ на $\bar{y}_b(j\omega)$ дает:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y}_a(j\omega)}{\bar{y}_b(j\omega)} &= \frac{A \exp j\gamma}{B \exp j\psi} = \\ &= \frac{A}{B} \exp j(\gamma - \psi). \quad (2) \end{aligned}$$

Итак, при делении одного вектора на другой модуль одного вектора делится на модуль другого, а фазы вычитаются.

4.1.1. Окружности постоянного модуля $|\bar{y}_0(j\omega)|$.

Общую частотную характеристику замкнутой системы можно получить из диаграммы Найквиста с помощью построений в плоскости y .

Для этого вычерчиваются годографы векторов прямой цепи $\bar{y}_1(j\omega)$ и всей разомкнутой системы (диаграмма Найквиста) $\bar{y}_1(j\omega)\bar{y}_2(j\omega)$. Тогда $\bar{y}_0(j\omega)$ определяется для любой частоты с помощью соотношения

$$\bar{y}_0(j\omega) = \frac{\bar{y}_1(j\omega)}{1 - \bar{y}_1(j\omega)\bar{y}_2(j\omega)}.$$

Годограф разомкнутой системы вычитается из единичного вектора, и на полученную разность делится годограф прямой цепи. Это показано на рис. 43а для си-

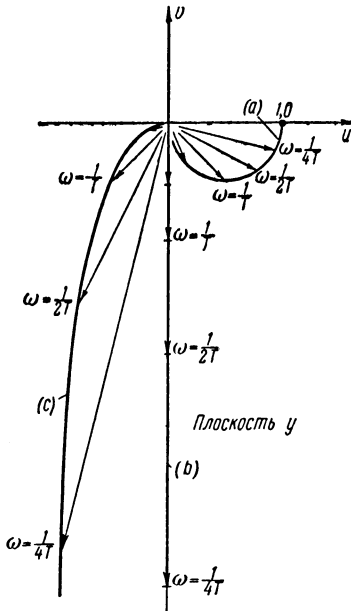


Рис. 42. Векторное умножение годографов. Годограф $a \times$ годограф $b =$ годограф c .

стемы с обратной связью, состоящей из трех одинаковых апериодических звеньев (рис. 23а). Следует обратить особое внимание на то, что максимум модуля общей частотной характеристики замкнутой системы (рис. 43б)

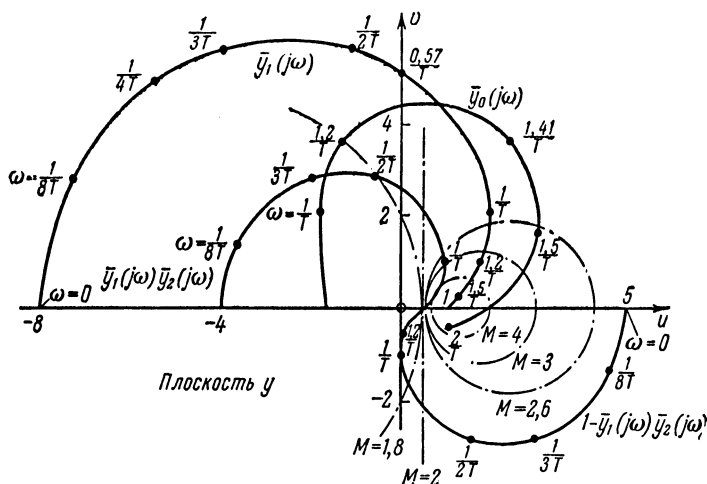


Рис. 43а. Построение $\bar{y}_0(j\omega)$ по $\bar{y}_1(j\omega)$ и $\bar{y}_2(j\omega)$ для системы, изображенной на рис. 23 при $A\beta = -4$.

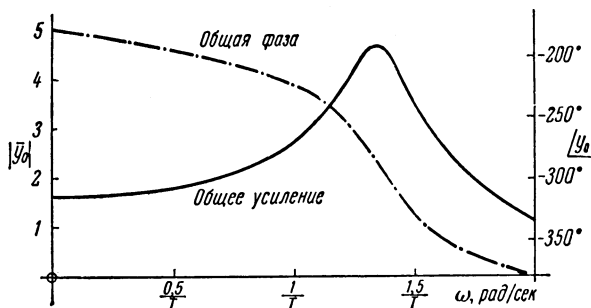


Рис. 43б.

появляется в диапазоне частот, в котором годограф разомкнутой системы расположен ближе всего к точке $(1, 0)$. Чем больше максимальное значение $|\bar{y}_0(j\omega)|$, тем меньше

затухают колебания, вызываемые приложением к системе входного возмущения в виде ступенчатой функции. В случае независимости цепи обратной связи от частоты можно получить значение $|\bar{y}_0(j\omega)|$ из годографа разомкнутой системы с помощью простого построения, которое будет описано дальше.

Предположим, что на частоте ω_1 вектор $\bar{y}_1(j\omega_1)\bar{y}_2(j\omega_2)$ разомкнутой системы равен $(x+jy)$, т. е. (x, y) — это координаты точки на годографе разомкнутой системы.

Пусть теперь вектор $\bar{y}_2(j\omega)$ не зависит от частоты и равен β . Тогда из уравнения (1) главы 2 следует:

$$\bar{y}_0(j\omega) = \frac{x+jy}{\beta} \frac{1}{1-(x+jy)}. \quad (3)$$

Нас интересует только модуль общей частотной характеристики замкнутой системы, поэтому обозначим:

$$|\bar{y}_0(j\omega)| = M.$$

Тогда из уравнения (3), взяв модуль правой части, получим:

$$\beta M = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(1-x)^2+y^2}}.$$

Возведем обе стороны в квадрат и приведем к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \beta^2 M^2 (1-x)^2 + \beta^2 M^2 y^2, \\ x^2 (1 - \beta^2 M^2) + y^2 (1 - \beta^2 M^2) + 2x\beta^2 M^2 &= \beta^2 M^2. \end{aligned}$$

Разделим обе части на $(1 - \beta^2 M^2)$:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2x\beta^2 M^2}{1 - \beta^2 M^2} + y^2 &= \frac{\beta^2 M^2}{1 - \beta^2 M^2}, \\ \left[x + \frac{\beta^2 M^2}{1 - \beta^2 M^2} \right]^2 + y^2 &= \frac{\beta^2 M^2}{1 - \beta^2 M^2} + \frac{\beta^4 M^4}{(1 - \beta^2 M^2)^2}, \\ \left[x + \frac{\beta^2 M^2}{1 - \beta^2 M^2} \right]^2 + y^2 &= \frac{\beta^2 M^2}{(1 - \beta^2 M^2)^2}, \end{aligned}$$

так что

$$(x - c)^2 + y^2 = r^2, \quad (4)$$

где

$$c = \frac{-\beta^2 M^2}{1 - \beta^2 M^2} \quad \text{и} \quad r = \frac{\beta^2 M^2}{(1 - \beta^2 M^2)^2}.$$

Уравнение (4) соответствует в плоскости y окружности с центром в точке $(c, 0)$ и радиусом r . Для различных значений $|\bar{y}_0(j\omega)| = M$ может быть построено семейство окружностей. Пересечения годографов разомкнутых систем с окружностью указывает на то, что общая частотная характеристика замкнутой системы имеет модуль M на частоте, соответствующей точке пересечения. Если модуль частотной характеристики не должен превышать заданного значения M ни на какой частоте, то годограф разомкнутой системы не должен пересекать окружности, соответствующей данному значению M . Окружности постоянного M изображены на рис. 43а. Их координаты, конечно, совершенно не зависят от прямой цепи и зависят лишь от цепи обратной связи β и от величины M .

4.2. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики

Вместо представления частотной характеристики с помощью годографа, можно изобразить отдельно модуль и аргумент частотной характеристики как функции частоты. Такие характеристики называются *амплитудно-частотной* и *фазо-частотной характеристиками* элемента или системы, к которым они относятся.

Изображая амплитуду и частоту в логарифмическом масштабе, можно аппроксимировать многие амплитудно-частотные характеристики прямолинейными отрезками. Это возможно благодаря тому, что для многих элементов модуль частотной характеристики изменяется прямо пропорционально некоторой положительной или отрицательной степени частоты, т. е.

$$|\bar{y}(j\omega)| \propto \omega^n.$$

В этом случае $\log |\bar{y}(j\omega)| = \text{const} + n \log \omega$, и зависимость амплитуды от частоты в логарифмическом масштабе представляет собой прямую с наклоном n .

Другое преимущество применения логарифмического масштаба состоит в том, что амплитудно-частотная характеристика последовательно соединенных элементов получается в результате сложения амплитудно-частотных характеристик отдельных звеньев. Это следует из того, что логарифмирование уравнения (1) проще операции умножения годографов частотных характеристик, результат которой значительно менее нагляден. Конечно, нагляднее построить годограф вектора, откладывая амплитуду в логарифмическом масштабе, при котором умножение векторов заменяется их сложением.

Еще одно преимущество амплитудно-частотных логарифмических характеристик проявляется в том случае, когда в интересующем нас диапазоне изменения частоты амплитуда изменяется сильно, на несколько порядков. Это очень часто встречается в устройствах с обратной связью, и поэтому иметь дело с логарифмическим масштабом значительно более удобно, чем с арифметическим.

Фазо-частотные характеристики изображаются в линейном масштабе, так как фазовые сдвиги в последовательно соединенных элементах складываются (см. уравнение (1)). Логарифмическая фазовая шкала не допускает простых линейных приближений, а диапазон интересующего нас изменения фазы обычно незначительно превышает 2π радиан.

На рис. 44, *а*, *б*, *в* изображены амплитудно-частотные характеристики систем с обратной связью для трех случаев различного поведения замкнутой системы, а именно: в случае неустойчивой, устойчивой и условно устойчивой систем. Рис. 44, *а*, *б* и *в* соответствуют годографам разомкнутой системы, изображенным на рис. 37, *а*, *б* и *в*.

4.2.1. Связь между амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками.

Для большого класса частотных характеристик существует общая математическая связь между амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками. С помощью этой связи фазо-частотная характеристика может быть однозначно получена из данной амплитудно-частотной характеристики; измерения фазового сдвига становятся ненужными.

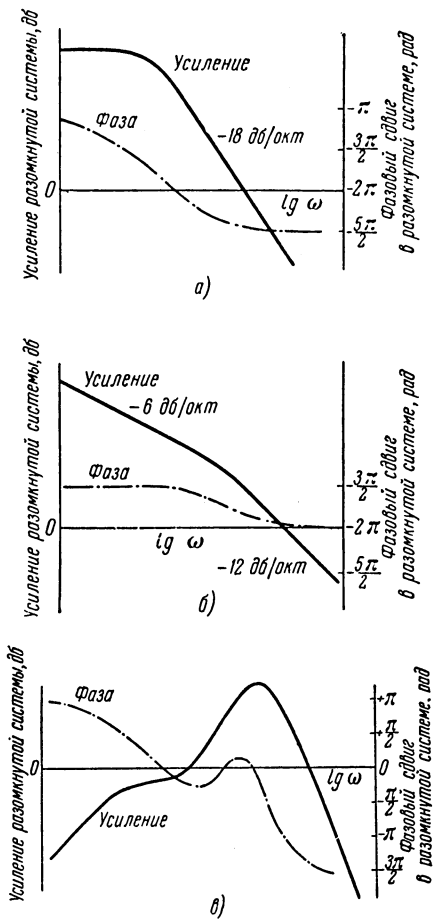


Рис. 44. Амплитудно- и фазо-частотные характеристики: а) $\bar{y}_L(j\omega) = \frac{A\beta}{(1+j\omega T)^3}$ ($A\beta$ отрицательно) — неустойчивая система; б) $\bar{y}_L(j\omega) = \frac{A\beta}{j\omega(1+j\omega T)}$ ($A\beta$ отрицательно) — устойчивая система; в) характеристики условно устойчивой системы.

В 1940 г. Боде [1] нашел способ определения минимально возможного фазового сдвига, который может быть при данном значении амплитудно-частотной характеристики. Элементы, подчиняющиеся этому соотношению, называются минимально фазовыми элементами. Под минимальной фазой понимается минимальное фазовое запаздывание или, в обозначениях этой главы, минимальный отрицательный фазовый сдвиг. Таким образом, неминимально фазовых элементов в системах с обратной связью, вообще говоря, следует избегать, так как они вносят добавочное запаздывание по фазе и увеличивают возможность неустойчивости *).

В каждом элементе, очевидно, можно увеличить фазовый сдвиг, не оказывая влияния на амплитуду. Для этого нужно последовательно подключить элемент запаздывания, например идеальную линию передачи, коэффициент усиления которой не зависит от частоты, но которая вносит запаздывание по фазе $-\omega T_d$, где ω — частота и T_d — время запаздывания. Таким образом, максимальное запаздывание по фазе для данной амплитудно-частотной характеристики нельзя определить однозначно.

Связь между амплитудой и фазой довольно громоздка, но ее физическая оценка существенно помогает при использовании амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик. Одна из форм зависимости, установленная Боде [2], записывается в виде

$$\varphi_{(\omega=\omega_0)} = \frac{1}{6\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dG}{d\omega} \ln \operatorname{cth} |0,348\omega| d\omega \text{ радиан,}$$

где $\varphi_{(\omega=\omega_0)}$ — фазовый сдвиг на частоте ω , $\omega = \log_2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$ — отношение частот в октавах, $\frac{dG}{d\omega}$ — наклон амплитудно-частотной характеристики в децибелах на октаву, $G = 20 \lg |\bar{y}(j\omega)|$ — амплитуда в децибелах.

*) Это не всегда так. Неминимально фазовые элементы применяются для стабилизации благодаря возможности резкого ослабления на данной частоте. (Прим. ред.)

Функция $\ln \text{cth} |0,348 \omega|$ изображена на рис. 45. Можно показать, что площадь под кривой, т. е. ее интеграл по ω , равна $\frac{\pi^2}{2}$. По этой кривой и из уравнения, приведенного выше, можно установить, что фазовый сдвиг на данной частоте ω_0 в основном определяется наклоном

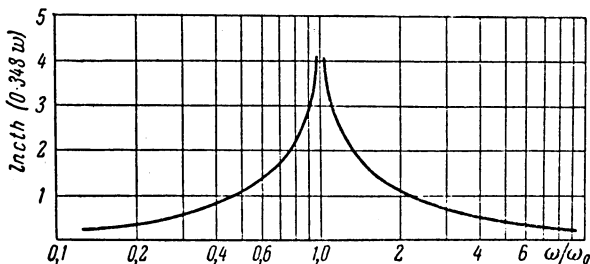


Рис. 45.

амплитудно-частотной характеристики на этой частоте. На фазовый сдвиг оказывает влияние наклон амплитудно-частотной характеристики в окрестности ω_0 , однако это влияние быстро уменьшается с увеличением разности частот. Если наклон амплитудно-частотной характеристики постоянен в некотором диапазоне частот, то фазовый сдвиг в середине диапазона стремится к

$$\varphi(\omega=\omega_0) = \frac{1}{6\pi} \frac{dG}{d\omega} \frac{\pi^2}{2}.$$

Таким образом, амплитудно-частотная характеристика, уменьшаясь с увеличением частоты со скоростью $6n \text{ дБ}$ на октаву, вызывает запаздывание по фазе, равное $-\frac{n\pi}{2}$ радиан. При $n = 1$ фазовый сдвиг равен $-\frac{\pi}{2}$ радиан (сравни 2.3.1).

На рис. 46—50 изображены амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики нескольких обычно встречающихся минимально фазовых элементов вместе с соответствующими годографами частотных характеристик. Характеристики изображены в предположении, что входной сигнал поступает от источника, обладающего

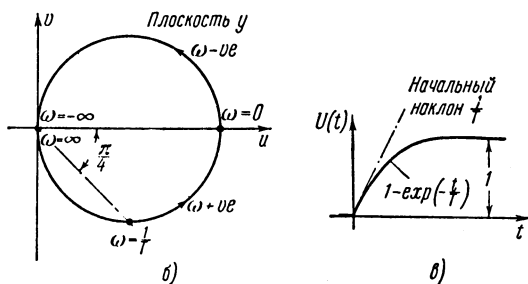
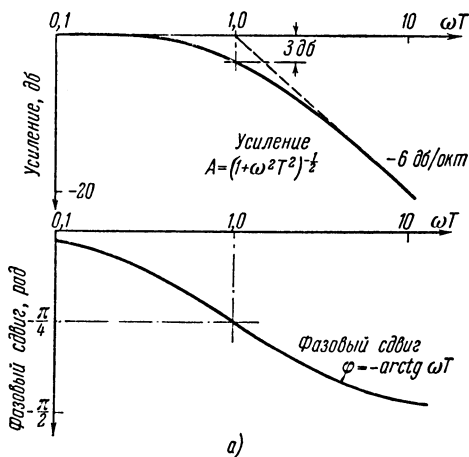


Рис. 46. Аперодическое звено $\bar{y}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$:
 а) амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики (пунктирная линия — аппроксимация); б) годограф вектора; в) единичная переходная функция

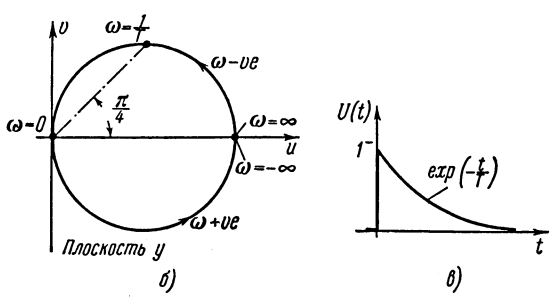
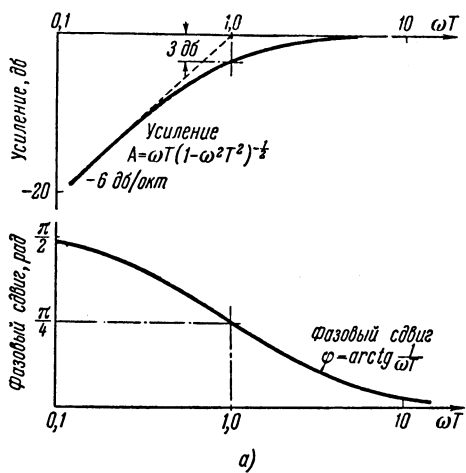
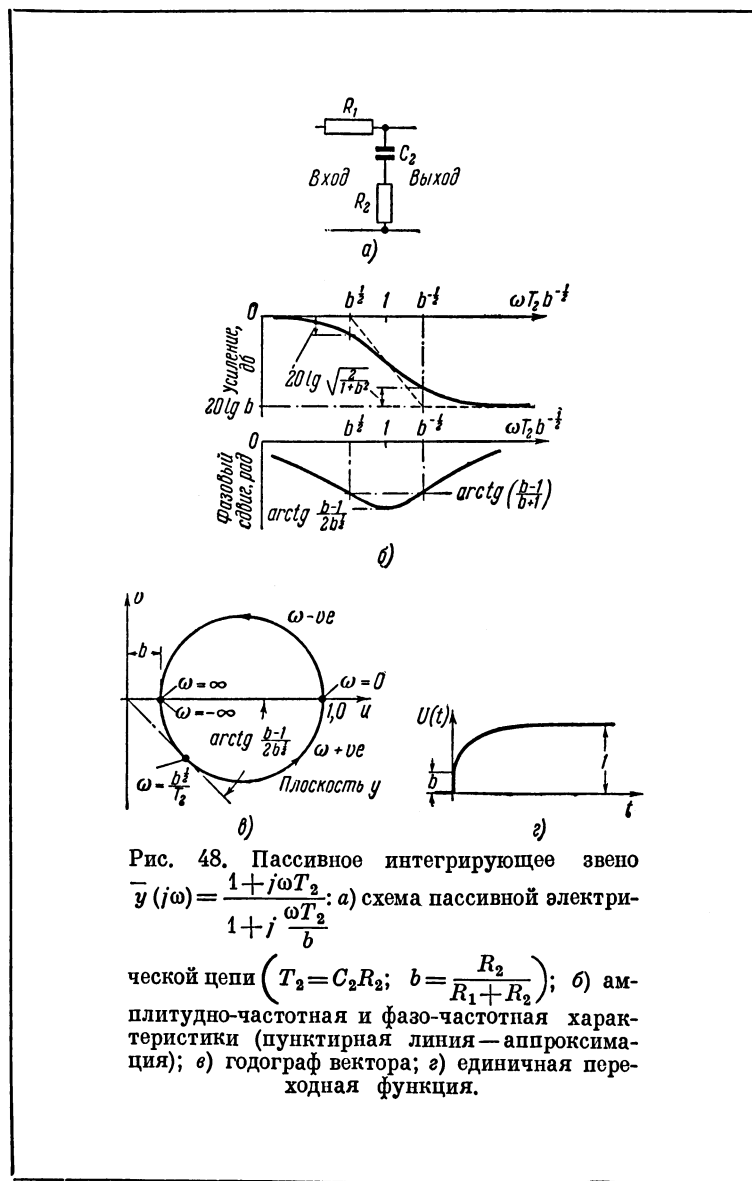


Рис. 47. Квазидифференцирующее звено $\bar{y}(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}$: а) амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики (пунктирная линия — аппроксимация); б) годограф вектора; в) единичная переходная функция.



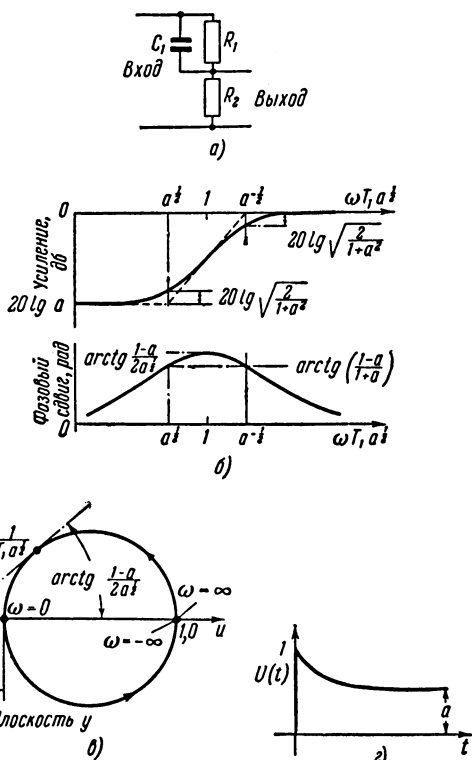


Рис. 49. Форсирующее звено $\bar{y}(j\omega) = a \frac{1+j\omega T_1}{1+j\omega a T_1}$: а) схема пассивной электрической цепи ($T_1 = C_1 R_1$; $a = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$); б) амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики (пунктирная линия — аппроксимация); в) годограф вектора; г) единичная переходная функция.

нулевым внутренним сопротивлением, а выходы элементов шунтируются незначительно. Аппроксимация амплитудно-частотных характеристик отрезками прямых изображе-

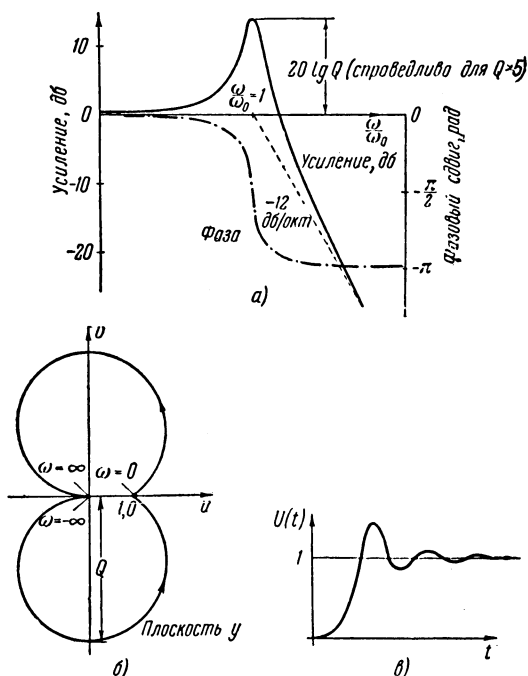


Рис. 50. Колебательное звено $\bar{y}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$:

а) амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики (пунктирная линия—аппроксимация); б) годограф вектора; в) единичная переходная функция.

на пунктирными линиями. Так как амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики таких элементов связаны между собой довольно просто, то измерять и амплитуду и фазу при экспериментальном исследовании систем совершенно излишне. Дюрдос (Duerdosh) предложил разграфленную бумагу с таким масштабом, что фазо-частотная характеристика получается немедленно после изображения снятой амплитудно-частотной зависи-

мости. Это очень полезно, когда есть уверенность в том, что все элементы в системе минимально фазовые (условие, которое обычно очевидно из схемы усилителя с обратной связью). В тех случаях, когда встречаются неминимально фазовые элементы, этот метод несправедлив, и его применение может привести к неожиданной неустойчивости, вызванной добавочным запаздыванием по фазе. В сомнительных случаях необходимо производить измерение и амплитуды и фазы.

4.2.2. Неминимальные фазо-частотные характеристики.

Определение неминимально фазовых элементов дано Боде [2]. Если элемент устойчив, т. е. общая передаточная

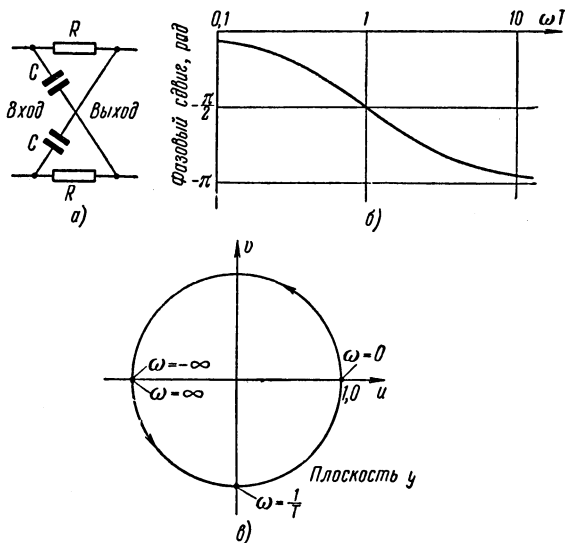


Рис. 51. Цепь с бесконечной полосой пропускания $\bar{y}(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$: а) схема пассивной электрической цепи ($T = CR$); б) фазо-частотная характеристика; в) годограф вектора.

функция его не содержит полюсов в правой части плоскости p , то он обладает неминимально фазовыми свойствами, если его общая передаточная функция имеет нули в правой части плоскости p .

Эти нули в плоскости p можно охватить контуром в виде бесконечной полуокружности, показанным на рис. 31. Из 3.3.7 следует, что годограф общей частотной характеристики неминимально фазового элемента охватывает точку начала координат плоскости y .

Неминимально фазовыми свойствами обладают такие электрические звенья, как линии передачи и подобные им цепи с распределенными параметрами, а также мостовые схемы. Идеальная линия передачи имеет усиление, равное единице на всех частотах, и сдвиг по фазе, пропорциональный частоте. Минимальный фазовый сдвиг, равный нулю, связан с частотно независимым усилением, равным единице, так что линия передачи является идеальным неминимально фазовым элементом.

Цепь с бесконечной полосой пропускания или фазовращающая цепь, изображенная на рис. 51, является примером четырехполюсника с неминимально фазовыми свойствами. Мостовая схема, внося сильное ослабление на определенной частоте, может обладать неминимально фазовыми свойствами, но это зависит от значений параметров. Такой схемой является двойной Т-образный мост, изображенный на рис. 52. Если тщательно сбалансировать мост, то можно достигнуть почти полного подавления частоты $\omega = \frac{1}{\sqrt{2C_1^2 R_1 R_2}}$. Небольшой разбаланс может привести к одной из двух возможностей. По одну сторону от баланса мост обладает свойствами минимально фазовой цепи. По другую сторону от баланса амплитудно-частотная характеристика может иметь ту же общую форму, что и раньше, но фаза поворачивается на -2π радиан с увеличением частоты и, следовательно, является неминимальной. Эти два состояния соответствуют годографам общей частотной характеристики, включающим и исключаящим точку начала координат плоскости y , как это показано на рис. 52. Числитель передаточной функции этой мостовой схемы представляет собой кубический многочлен относительно p , и условия неминимальной фазы имеют место, когда корни соответствующего кубического уравнения имеют положительные действительные части, дающие нуль передаточной функции в правой части плоскости p .

Общим в фазовращающей цепи и в двойном Т-образном мосте является то, что входной сигнал передается по двум параллельным цепям и затем, складываясь, образует

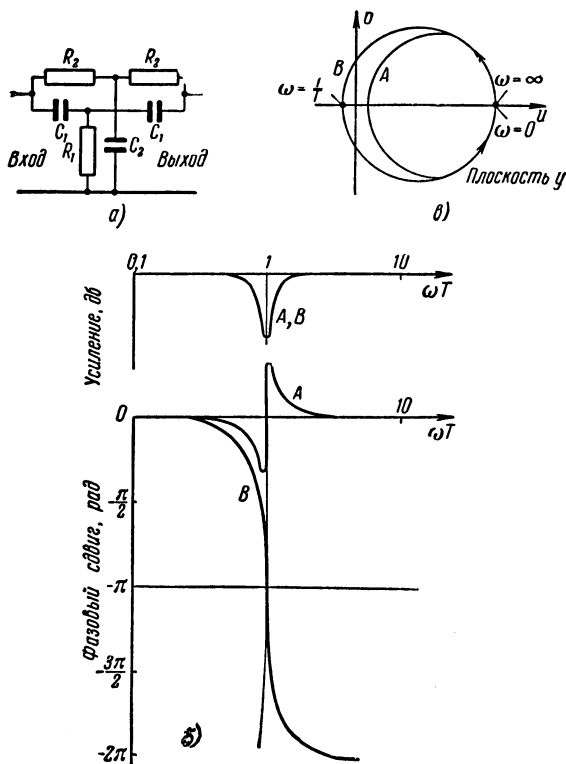


Рис. 52. Двойной Т-образный мост $\bar{y}(j\omega) = [(j\omega)^3 T_1 T_2 T_{12} + (j\omega)^2 \times 2T_1 T_{12} + j\omega 2T_1 + 1] \{ (j\omega)^3 T_1 T_2 T_{12} + (j\omega)^2 [2T_1 + 2T_1 T_{12} + T_2 T_{12}] + j\omega [2T_1 + 2T_{12} + T_2] + 1 \}^{-1}$;

а) схема пассивной электрической цепи ($T_1 = C_1 R_1$; $T_2 = C_2 R_2$; $T_{12} = C_1 R_2$); б) амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики (А — минимально фазовая; В — неминимально фазовая); в) годографы векторов (А — минимально фазовый; В — неминимально фазовый). Условия для минимальной фазы $4T_1 > T_2$.

выходной сигнал. Если только такое явление имеет место, то следует предполагать наличие неминимально фазовой ситуации.

Многие механические элементы являются неминимально фазовыми. Одним из примеров может служить ртуть в стеклянном термометре, где входная и выходная величины представляют собой окружающую температуру и высоту ртути соответственно. При внезапном повышении окружающей температуры стекло расширяется, вызывая временное понижение уровня ртути, прежде чем ртуть сама нагреется и расширится. Таким образом, на высоту ртути влияют два противоположных фактора — расширение стекла и расширение ртути, и это является аналогом параллельных цепей в мостовой схеме. Неминимально фазовые ситуации возникают также и в цепях с распределенными параметрами, например в теплообменниках и в системе передачи жидкости. Другим примером, указанным Вэссом (Wass) [4], является система управления самолетом. Когда самолет летит горизонтально и пилот хочет набрать высоту, он отклоняет рули высоты вверх. Немедленным результатом этого является понижение положения центра тяжести. Как только продольная ось самолета отклонится вверх относительно линии полета, давление воздуха на нижнюю часть крыльев и фюзеляжа вызывает подъемную силу, в результате чего центр тяжести поднимается. Частотная характеристика, связывающая угол подъема и ускорение центра тяжести, является неминимально фазовой. Два противоположных фактора действуют на центр тяжести: отрицательная подъемная сила, создаваемая рулями высоты, и положительная подъемная сила, создаваемая крыльями. Можно, однако, создать минимально фазовую зависимость, если ускорение будет измеряться в какой-либо другой точке, например на носу, а не в центре тяжести. Это аналогично изменению величин компонент в двойном Т-образном мосте, приводящему к изменению корней полинома в числителе передаточной функции.

4.3. Запасы устойчивости

Редко можно удовлетвориться устойчивостью системы с обратной связью только в математическом смысле, ибо требуемый запас устойчивости сильно изменяется в зависимости от того или иного конкретного случая. Если

система предназначена для обработки внезапного воздействия, то переходный процесс должен быть сильно затухающим. На рис. 41,б изображена переходная характеристика, которая может рассматриваться как образец той формы, которая обычно требуется.

В других системах, например в усилителях звуковых частот, общая частотная характеристика должна быть равномерной в заданном диапазоне частот. Пики вне пределов этого диапазона обычно не имеют значения. В таких случаях устойчивость может быть определена на основе общей амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы. Существует следующая зависимость между переходной характеристикой и амплитудно-частотной характеристикой замкнутой системы: чем слабее затухает переходный процесс, тем больше пики на амплитудно-частотной характеристике (сравни рис. 11 и 16).

Форма переходной характеристики зависит от формы годографа разомкнутой системы в окрестности критической точки. В одноконтурных системах годограф для положительных частот может проходить вблизи критической точки только один раз*) и переходная характеристика соответствует одночастотному режиму затухающих колебаний. В более сложных системах, например в системах, содержащих резонансные элементы, параллельные цепи или условно устойчивые элементы, годограф может приближаться к точке (1, 0) два или более раз на различных частотах, и при этом переходная характеристика может соответствовать многочастотному режиму затухающих колебаний.

4.3.1. Запас по фазе и запас по амплитуде.

Для того, чтобы возможно более просто оценить форму годографа разомкнутой системы в области критической точки, Боде ввел понятие запаса по фазе и запаса по амплитуде.

Запас по фазе ограничивает фазовое запаздывание в диапазоне частот, где амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы $|\bar{y}_L(j\omega)|$ больше единицы. Запас по амплитуде выбирается в предположении, что

*) Это верно для одноконтурных систем, степень характеристического уравнения которых $n \leq 6$. (Прим ред.).

фазовый сдвиг в контуре может превышать 2π радиан в частотном диапазоне, где амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы меньше единицы. Запас по амплитуде обычно определяется в логарифмических единицах, как $20 \lg G_m$ децибел. Запас по фазе и запас по амплитуде образуют в плоскости u границу, определяющую запретную зону, в которую не должен попадать годограф разомкнутой системы. Выбор допустимых запасов основан на экспериментальных данных с конкретным типом систем с обратной связью. Для усилителей, предназначенных для усиления речи и музыки, в заданной полосе частот, форма переходной характеристики не имеет значения и Боде предложил запас по фазе и по амплитуде, равный соответственно 30° и -9 дб. В следящих системах и системах регулирования переходный процесс должен быть слегка задемпфирован, чтобы выходная величина следовала за изменениями входного сигнала, но в то же время процесс в системе устанавливался как можно быстрее. Условия Боде для усилителей звуковых частот недостаточно удовлетворяют требованиям к переходным характеристикам, и Холл (Hall) предложил в качестве добавочного условия, чтобы амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы не превышала среднего по диапазону уровня более чем на $2,5$ дб. В следящих системах, к которым применяется последний критерий, цепь обратной связи обычно не зависит от частоты, так как выходная величина сравнивается непосредственно с входной. Воспользуемся уравнением (4) для определения координат окружности постоянного модуля M , которую годограф разомкнутой системы не должен пересекать для того, чтобы удовлетворить условиям Холла.

Согласно этим условиям

$$\begin{aligned} 20 \lg M &= 2,5 \text{ дб,} \\ M &= 1,33. \end{aligned}$$

Для следящей системы

$$\beta = -1,$$

так что

$$c = \frac{-1,33^2}{1-1,33^2} = 2,29$$

и

$$r^2 = \frac{1,33^2}{(1-1,33)^2} = 2,93,$$

$$r = 1,71.$$

Следовательно, дополнительное требование состоит в том, чтобы годограф разомкнутой системы не пересе-

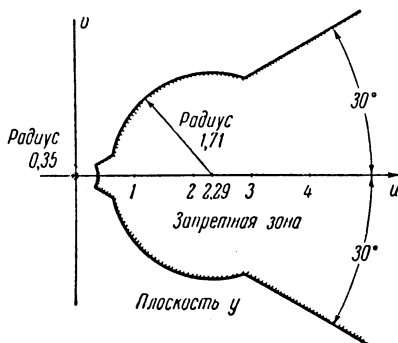


Рис. 53.

кался с окружностью в плоскости y с центром в точке 2,29 и радиусом 1,71. Это увеличивает запретную зону, так как окружность пересекает линии Боде для запаса по фазе. Видоизмененная запретная зона изображена на рис. 53.

4.3.2. Годограф обобщенной частотной характеристики в плоскости y .

Затухающие колебания в переходной или импульсной переходной характеристике системы с обратной связью появляются благодаря наличию в общей передаточной функции $\bar{y}_0(p)$ комплексных полюсов, лежащих в левой части плоскости p . Предположим, что эти полюсы равны $p = -\sigma_0 \pm j\omega_0$. Тогда общая передаточная функция может быть разбита на простейшие дроби вида

$$\bar{y}_0(p) = \frac{C}{p^2 + 2\sigma_0 p + \sigma_0^2 + \omega_0^2} + \frac{D}{x(p)} + \frac{E}{z(p)} + \dots,$$

где C, D, E, \dots — постоянные величины.

Из табл. 1 (стр. 26) видно, что импульсная переходная функция такой системы содержит колебательно затухающее слагаемое вида

$$C \exp(-\sigma_0 t) \sin \omega_0 t.$$

где σ_0 и ω_0 обозначают соответственно коэффициент затухания и резонансную частоту. Полюсы $\bar{y}_0(p)$ соответствуют корням уравнения $[1 - \bar{y}_L(p)] = 0$ (см. уравнение (1) главы 2), или

$$\bar{y}_L(p) = 1.$$

Это уравнение может быть решено при помощи построения в плоскости y семейства годографов $[1 - \bar{y}_L(\sigma + j\omega)]$. Годограф, проходящий через начало координат, удовлетворяет условию $[1 - \bar{y}(\sigma_0 + j\omega_0)] = 0$, так как годографы для значений σ более отрицательных, чем σ_0 , охватывают начало координат, и следовательно, соответствующий контур в виде полуокружности в плоскости p охватывает по крайней мере один нуль (см. 3.3.7).

Практически удобнее строить годограф $\bar{y}_L(\sigma + j\omega)$. Тогда годограф для $\sigma = 0$ есть диаграмма Найквиста и значения σ_0 и ω_0 получаются из годографа, проходящего через точку (1, 0).

Преобразование плоскости p в плоскость y показано на рис. 54. Кривые на этом рисунке относятся к системе с обратной связью, состоящей из трех апериодических звеньев, изображенной на рис. 23, при $A\beta = -1$. Прямоугольная сетка, образованная в плоскости p линиями постоянных σ и постоянных ω , преобразуется в ортогональную сетку в плоскости y . Область вокруг комплексного нуля при $p = -\frac{1}{T}(0,5 - j0,866)$ изображена более детально. Линия $p = -\frac{1}{2T}$ в плоскости p проходит через комплексный нуль функции $[1 - \bar{y}_L(p)]$, и соответствующее ей изображение в плоскости y проходит через точку (1, 0) при $\omega_0 = \frac{0,866}{T}$. В плоскости p действительный нуль функции $[1 - \bar{y}_L(p)]$ при $-\frac{2}{T}$ пересекается линией $p = -\frac{2}{T}$;

соответствующее изображение в плоскости u проходит через точку $(1, 0)$ при $\omega_0 = 0$.

В неопубликованной работе Кемпбелл (W. W. Campbell) описывает практический метод определения устойчивости

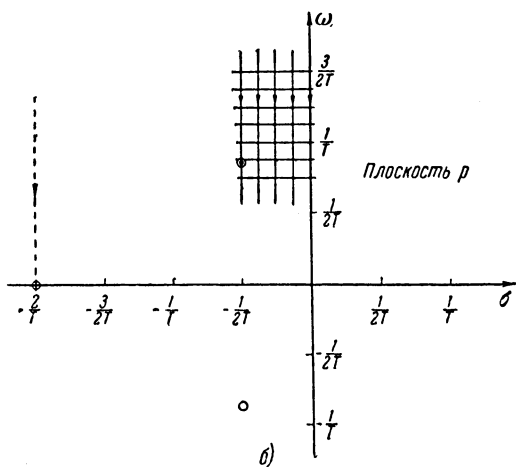
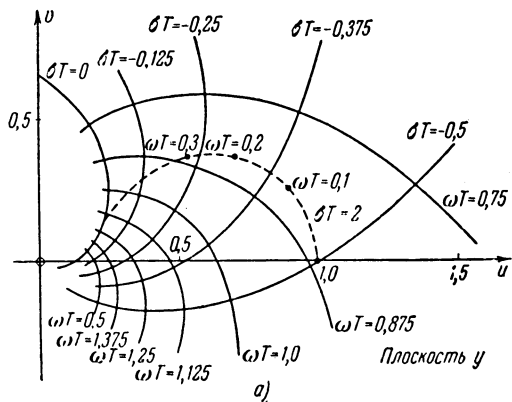


Рис. 54.

с помощью частотной характеристики разомкнутой системы. Он основан на теории, изложенной выше, и в частности на свойстве ортогональности сетки из линий σ и ω

в плоскости y . В теории функций комплексного переменного *) показывается, что переменные u и v (координаты плоскости y) удовлетворяют уравнениям Лапласа для двух измерений, т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \omega^2} = 0.$$

Аналогичным уравнениям подчиняется потенциал в точке двумерного электрического поля и многие другие физические явления; поэтому представляется возможным использовать методы построения поля, чтобы прийти к сетке из линий σ и ω , основанной на экспериментально полученном годографе разомкнутой системы. На этом годографе наносится ряд точек для равноотстоящих значений ω и для того, чтобы охватить точку $(1, 0)$, строится система криволинейных четырехугольников, причем шкала σ строится так же, как и шкала ω . Для большинства систем два комплексных сопряженных нуля функции $[1 - \bar{y}_L(p)]$ оказываются вблизи оси ω и изолированы от других нулей, как показано на рис. 54, б. Значения σ_0 и ω_0 на линиях, проходящих через точку $(1, 0)$, соответствуют коэффициенту затухания и собственной частоте свободных колебаний системы, так как другие нули оказывают слабое влияние. Если вблизи оси ω оказывается больше, чем два комплексных нуля, то такое построение может оказаться несправедливым. Так как криволинейные четырехугольники строятся от руки, то построение оказывается более точным, если система обладает небольшим затуханием, ибо в этом случае годограф разомкнутой системы проходит вблизи точки $(1, 0)$.

Недавно Вест (West) и Потс (Potts) [6] вывели выражение для коэффициента затухания и собственной частоты в зависимости от четырех параметров, берущихся из годографа разомкнутой системы вблизи критической точки.

*) См., например, М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1959. (Прим. ред.)

Этими величинами являются частота и фаза в точке, где $\bar{y}_L(j\omega) = 1$, и скорость изменения амплитуды и фазы с частотой в той же точке. Было обнаружено хорошее соответствие между экспериментально полученной и рассчитанной переходными функциями при небольшом затухании, т. е. когда годограф разомкнутой системы проходит вблизи точки (1, 0); соответствие это уменьшается для систем с сильным затуханием.

Литература

1. B o d e H. W., Relations between Attenuation and Phase in Feedback Amplifiers Design, Bell System Technical Journal, July 1940, 19, p. 421.
 2. Б о д е Г., Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью, ИЛ, 1948.
 3. D u e r d o t h W. T., Some Considerations in the Design of Negative Feedback Amplifiers, Proceedings IEE, 1950, 97, Part III, p. 138.
 4. W a s s C. A. A., Automatic and Manual Control, Ed. Tustin, Butterworths Scientific Publications, London, 1952, p. 43.
 5. H a l l A. C., The Analysis and Synthesis of Linear Servo Mechanisms, Technology Press, MIT, May 1943.
 6. W e s t J. C. and P o t t s J., A Simple Connections between Closed-Loop Transient Response and Open-Loop Frequency Response, Proceedings IEE, 1953, 100, Part II, p. 201.
-

ГЛАВА 5

КАТОДНЫЙ ПОВТОРИТЕЛЬ, СИММЕТРИЧНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ И УСИЛИТЕЛЬ С ПОТЕНЦИАЛЬНО ЗАЗЕМЛЕННОЙ СУММИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

5.1. Введение

Обратная связь в электронных усилителях применяется очень часто; действительно, трудно найти сейчас усилитель, в котором не было бы в той или иной форме обратной связи. Например, в катодном повторителе, широко применяемом для преобразования сопротивлений, имеется внутренняя обратная связь. Цепи обратной связи часто применяются в схемах звуковых усилителей и видеоусилителей, причем здесь обратная связь применяется для уменьшения нелинейных искажений и, следовательно, улучшения качества передачи сигналов. Часто обратная связь приводит к заметному уменьшению числа ламп. Для измерения многих физических величин требуются усилители, имеющие стабильный в течение длительного периода коэффициент усиления. Это может быть обеспечено с помощью цепей обратной связи, уменьшающих влияние изменений характеристик ламп и других элементов, появляющихся с течением времени. В этой главе будут рассмотрены лишь некоторые избранные вопросы, относящиеся к усилителям с обратной связью, ибо для того, чтобы охватить всю эту область, потребовалось бы несколько книг. Типы усилителей, которые будут изучены, обычно часто встречаются в различных областях техники и дают возможность проиллюстрировать различные методы применения обратной связи.

5.2. Усилитель напряжения класса А

Рассмотрим одноламповый усилитель напряжения на триоде или на пентоде, работающий в режиме А, т. е. в линейном диапазоне изменения анодного напряжения. При рассмотрении любой схемы, являющейся элементом

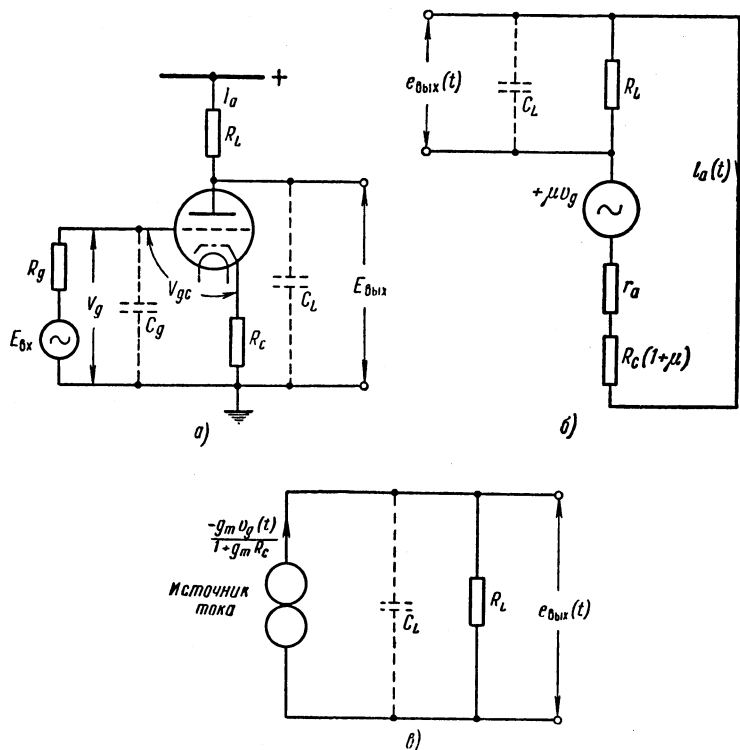


Рис. 55.

системы с обратной связью, важно определить передаточную функцию, связывающую напряжение входного и выходного сигналов. Эта передаточная функция будет выведена для схемы, изображенной на рис. 55, а. К триоде подключены анодная нагрузка R_L и катодная нагрузка R_c . Сигнал на управляющую сетку подается от источника

с внутренним сопротивлением R_g . Паразитные емкости анода и сетки C_L и C_g образуются благодаря межэлектродным емкостям и емкости монтажа. Будем считать, что сеточное смещение выбрано таким, чтобы рабочая точка на характеристике соответствовала требуемому значению анодного напряжения и тока. Для того чтобы анодное напряжение менялось линейно в наибольших пределах, эта точка должна быть выбрана так, чтобы потенциал анода был примерно равен половине разности потенциалов между плюсом высокого напряжения и землей.

Напряжение между сеткой и катодом представляет собой разность между напряжением входного сигнала и падением напряжения на сопротивлении катодной нагрузки. Это означает, что здесь вводится отрицательная обратная связь за счет катодного сопротивления незашунтированного конденсатором. Уравнение, связывающее анодное напряжение с напряжением на сетке, будет выведено в предположении, что ламповые характеристики линейны (это справедливо лишь для малых сигналов). Обозначим малые приращения напряжений анод—катод, сетка—катод и сетка—земля соответственно через δV_{ac} , δV_{gc} и δV_g . Приращение анодного тока обозначим через δI_a , причем будем считать его положительным, если оно имеет знак, обратный знаку установившегося анодного тока при отсутствии сигнала.

Тогда

$$-\delta I_a = \frac{\partial I_a}{\partial V_{gc}} \delta V_{gc} + \frac{\partial I_a}{\partial V_{ac}} \delta V_{ac},$$

или

$$-\delta I_a = g_m \delta V_{gc} + \frac{1}{r_a} \delta V_{ac}, \quad (1)$$

где g_m — крутизна характеристики лампы, r_a — внутреннее сопротивление лампы.

Уравнение, учитывающее наличие обратной связи, имеет вид

$$\delta V_{gc} = \delta V_g + \delta I_a R_c. \quad (2)$$

Изменение падения напряжения на лампе определяется выражением

$$\delta V_{ac} = (R_L + R_c) \delta I_a. \quad (3)$$

Подставляя уравнения (3) и (2) в уравнение (1), получим:

$$\delta I_a = \frac{-\mu}{r_a + R_L + R_c(1 + \mu)} \delta V_g,$$

где $\mu = g_m r_a$ — коэффициент усиления лампы.

Это уравнение справедливо и для малых сигналов произвольной формы, являющихся функциями времени, т. е.

$$i_a(t) = \frac{-\mu}{r_a + R_L + R_c(1 + \mu)} v_g(t). \quad (4)$$

Эквивалентная схема усилителя для малых сигналов, изображенная на рис. 55, б, может быть составлена на основе этого уравнения. Нетрудно видеть, что она состоит из источника напряжения, соединенного последовательно с тремя сопротивлениями, эффективное значение одного из которых, а именно катодного сопротивления, увеличено в $(1 + \mu)$ раз за счет обратной связи*).

Если учесть емкость, то соотношение между входным сигналом и напряжением на сетке в операторной форме запишется так:

$$\bar{v}_g(p) = \frac{1}{1 + pT_g} \bar{e}_{вх}(p). \quad (5)$$

Это выражение представляет собой передаточную функцию апериодического звена, постоянная времени которого равна $T_g = C_g R_g$ сек. Вследствие наличия паразитной емкости, подключенной к аноду, анодная нагрузка состоит из параллельно соединенных сопротивления R_L и емкости C_L , и ее полное операторное сопротивление равно

$$Z_L = \frac{R_L}{1 + pT_L}, \quad (6)$$

где

$$T_L = C_L R_L.$$

*) Здесь не учитывается паразитная емкость между анодом и сеткой. (Прим. ред.)

Выходное напряжение равно падению напряжения на анодной нагрузке, вызванному анодным током,

$$\bar{e}_{\text{вых}}(p) = \bar{Z}_L(p) \bar{i}_a(p). \quad (7)$$

Общую передаточную функцию, связывающую $\bar{e}_{\text{вых}}$ и $\bar{e}_{\text{вх}}$, можно определить, объединив уравнения (4), (5), (6) и (7) и заменив R_L в уравнении (4) на \bar{Z}_L . Окончательное выражение имеет вид

$$\frac{\bar{e}_{\text{вых}}}{\bar{e}_{\text{вх}}} = \frac{-\mu R_L}{r_a + R_L + R_c(1 + \mu)} \frac{1}{(1 + pT_0)} \frac{1}{(1 + pT_g)}, \quad (8)$$

где

$$T_0 = C R_L \frac{r_a + R_c(1 + \mu)}{r_a + R_L + R_c(1 + \mu)} \text{сек.}$$

Общая передаточная функция усилителя соответствует системе из двух последовательно соединенных апериодических звеньев. При заданных паразитных емкостях постоянная времени T_g зависит от внутреннего сопротивления источника входного сигнала, а постоянная времени T_0 — от сопротивления анодной нагрузки. Поэтому T_0 приближенно пропорциональна коэффициенту усиления каскада, что приводит к необходимости разумного компромисса при выборе общей полосы пропускания и коэффициента усиления.

5.2.1. Упрощенное выражение для пентода.

Если вместо триода используется пентод, уравнение (8) может быть упрощено. Строго говоря, это упрощение справедливо только тогда, когда потенциал экранной сетки пентода постоянен по отношению к катоду. Внутреннее сопротивление пентода r_a обычно очень велико, порядка нескольких сотен тысяч ом, или, иначе говоря, анодный ток пентода почти не зависит от анодного напряжения. Если сопротивление нагрузки значительно меньше внутреннего сопротивления, как это обычно и бывает, уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\bar{e}_{\text{вых}}}{\bar{e}_{\text{вх}}} \approx \frac{-g_m R_L}{1 + g_m R_c} \frac{1}{(1 + pT_g)(1 + pT_0)}, \quad (9)$$

где

$$r_a + R_L \approx r_a, \quad \text{и} \quad \begin{cases} T_g = C_g R_g, \\ T_0 = C_L R_L = T_L. \end{cases}$$

$$\mu + 1 \approx \mu$$

Хотя эквивалентная схема, изображенная на рис. 55, б, справедлива как для каскада на триоде, так и для каскада на пентоде, иногда бывает удобно из-за высокого внутреннего сопротивления пентода представить его в виде источника тока. Эквивалентная схема усилителя, соответствующая уравнению (9), но не содержащая постоянную времени входа T_g , изображена на рис. 55, в; она включает источник тока, питающий сопротивление нагрузки и паразитную емкость.

5.3. Катодный повторитель

В катодном повторителе можно получить малые выходные и большие входные сопротивления за счет уменьшения общего коэффициента усиления каскада с помощью отрицательной обратной связи. Поэтому он применяется как преобразователь сопротивлений.

На рис. 56 изображена основная схема катодного повторителя с обратной связью по постоянному току. Для удобства рассмотрения будем считать, что между сеткой и землей включен источник постоянного напряжения $+V$ вольт, смещающий рабочую точку так, чтобы на катоде был некоторый положительный потенциал при входном напряжении $E_{вх}$, равном нулю. Сопротивление анодной нагрузки отсутствует, выходное напряжение снимается с сопротивления катодной нагрузки R_c . Если на сетке с помощью батареи поддерживается потенциал $+V$ вольт, то потенциал катода принимает значение,

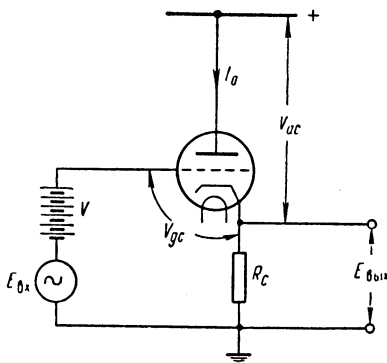


Рис. 56.

равное $(V + V_{gc})$ вольт относительно земли. Ток лампы I_a , создающий требуемый потенциал на катоде, определяется напряжением сетка—катод V_{gc} . При большой крутизне характеристики лампы малые изменения напряжения сетка—катод вызывают большие изменения в токе лампы. Увеличение положительного напряжения на сетке вызывает, следовательно, примерно равное увеличение потенциала катода, причем достаточно очень малых изменений V_{gc} для поддержания требуемого увеличения I_a . В пределах диапазона, ограниченного с одной стороны отсечкой анодного тока и с другой стороны сеточным током, катодный потенциал изменяется так же, как и потенциал на сетке, т. е. общий коэффициент усиления по напряжению примерно равен единице.

5.3.1. Общий коэффициент усиления по напряжению (при условии пренебрежения паразитными емкостями и емкостями нагрузки).

Катодный повторитель представляет собой частный случай усилителя напряжения, рассмотренного в 5.2. Поэтому можно воспользоваться уравнением (4) при $R_L = 0$. Если входной сигнал имеет произвольную форму и сопротивлением источника сигнала можно пренебречь, то можно записать:

$$\bar{i}_a(p) = \frac{-\mu}{r_a + R_c(1 + \mu)} e_{вх}(p).$$

Выходное напряжение представляет собой переменную составляющую падения напряжения на катодном сопротивлении и задается в операторной форме в виде

$$\bar{e}_{вых}(p) = -\bar{i}_a(p) R_c = \frac{\mu R_c}{r_a + R_c(1 + \mu)} e_{вх}(p), \quad (10)$$

откуда

$$\frac{e_{вых}}{e_{вх}} = \frac{A}{1 + A}, \quad (11a)$$

где

$$A = \frac{\mu R_c}{r_a + R_c} = \frac{\text{напряжение выходного сигнала}}{\text{напряжение сигнала сетка—катод}}. \quad (11б)$$

A —представляет собой коэффициент усиления каскада лампы так, что структурная схема катодного повторителя мо-

жет быть представлена в виде, изображенном на рис. 57, где коэффициент усиления прямой цепи равен A , а коэффициент усиления цепи обратной связи -1 .

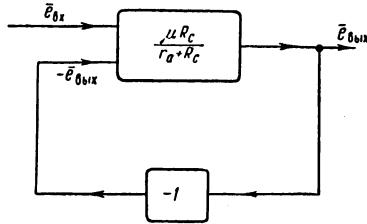


Рис. 57.

5.3.2. Входное сопротивление.

Прежде чем вывести полное выражение передаточной функции катодного повторителя, необходимо определить его входное сопротивление. При отсутствии сеточного тока входное сопротивление зависит только от паразитной емкости сетка-катод C_{gc} . Далее мы будем пренебрегать влиянием емкости внешней нагрузки.

В схеме с источником напряжения, внутреннее сопротивление которого равно нулю, входной ток i , протекающий через емкость C_{gc} , выражается следующим образом:

$$\bar{i} = (\bar{e}_{вх} - \bar{e}_{вых}) p C_{gc}. \quad (12)$$

Исключая $\bar{e}_{вых}$ при помощи уравнения (11а), получим:

$$\bar{i}(p) = \frac{\bar{e}_{вх}(p)}{1+A} p C_{gc}.$$

Следовательно, входное сопротивление будет равно

$$\bar{Z}_{вх}(p) = \frac{\bar{e}_{вх}}{\bar{i}} = \frac{1+A}{p C_{gc}}. \quad (13)$$

Таким образом, вход катодного повторителя для входного сигнала представляет собой емкость, равную $\frac{C_{gc}}{1+A}$. Обратная связь увеличила входное сопротивление в число раз, приблизительно равное коэффициенту усиления каскада.

Такое рассмотрение справедливо до частот порядка нескольких десятков мегагерц. На более высоких частотах, даже если коэффициент усиления поддерживается на прежнем уровне, паразитная емкость сетка-катод начинает нагружать входную цепь, т. е. величина $\frac{1}{\omega C_{gc}}$ становится сравнимой с R_c .

5.3.3. Влияние нагрузки на передаточную функцию.

В дальнейшем предполагается, что входной сигнал подается на катодный повторитель от источника напряжения с нулевым внутренним сопротивлением. Если сопротивление источника имеет конечную величину, то постоянная времени T_g в общей передаточной функции увеличивается на некоторую величину.

Если к выходу катодного повторителя подключается нагрузка, состоящая из сопротивления R_E с параллельно присоединенной емкостью C_E , то полное катодное сопротивление представляется следующей комбинацией из R_c , R_E и C_E :

$$\bar{Z}_c = \frac{R_c'}{1 + pT_c'}, \quad (14)$$

где $R_c' = \frac{R_E R_c}{R_E + R_c}$ — эквивалентное сопротивление катодной нагрузки, а $T_c' = C_E R_c'$ — постоянная времени катодной цепи.

Подставляя \bar{Z}_c вместо R_c в уравнение (116), получаем передаточную функцию нагруженного каскада в виде

$$\bar{A}'(p) = \frac{\mu R_c'}{(r_a + R_c')} \frac{1}{\left(1 + p \frac{T_c' r_a}{r_a + R_c'}\right)}, \quad (15)$$

следовательно,

$$\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{e_{\text{ВХ}}} = \frac{\bar{A}'}{1 + A'}.$$

Структурная схема нагруженного катодного повторителя, соответствующая уравнению (15), представлена на рис. 58. Схема с обратной связью эквивалентна апериодическому звену, постоянная времени которого, благода-

ря наличие обратной связи, значительно меньше постоянной времени катодной цепи T'_c (ср. 2.3.1).

При емкостной нагрузке и подаче на сетку коротких импульсов обратная связь может нарушиться, так как потенциал сетки быстро уменьшается в момент воздействия заднего фронта импульса. Если катодный ток изменяется с большей скоростью, чем может разряжаться конденсатор нагрузки, то потенциал катода остается высоким по отношению к сетке и лампа запирается. Обратная связь восстанавливается после того, как потенциал катода уменьшится до уровня потенциала сетки при разряде конденсатора через катодное сопротивление. На этом принципе основаны схемы удлинения импульсов.

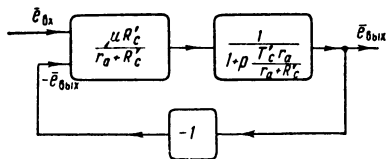


Рис. 58.

5.3.4. Анодное сопротивление.

Это сопротивление определяется как внутреннее сопротивление источника напряжения, включенного между анодом лампы и плюсом высокого напряжения. Если этим источником генерируется малое переменное напряжение сигнала $\bar{e}_a(j\omega)$, то в анодном токе появляется компонента с частотой сигнала, обусловленная воздействием напряжения сигнала одновременно на анод и на катод. Сопротивление источника напряжения легко находится из эквивалентной схемы на рис. 55, б. При R_L и v_g равных нулю, оно равно

$$\bar{Z}_a(j\omega) = \frac{\bar{e}_a}{i_a} = r_a + R_c(1 + \mu). \quad (16)$$

В этом выражении для анодного сопротивления не учитываются паразитные и нагрузочные емкости, влияние которых пренебрежимо мало на всех частотах, за исключением сверхвысоких. Внутреннее сопротивление r_a лампы обычно много меньше величины $R_c(1 + \mu)$, которая появляется в результате действия обратной связи и может быть сделана очень большой.

5.3.5. Выходное сопротивление.

Выходное сопротивление определяется как внутреннее сопротивление источника напряжения, включенного между выходными зажимами схемы. Пусть в схеме, изображенной на рис. 56, малый синусоидальный сигнал прикладывается к выходным зажимам, причем вначале на выходе устанавливается нуль постоянного напряжения, например путем подсоединения катодного сопротивления к минусу. Если приложенное напряжение равно $\bar{e}_{\text{ВЫХ}}(j\omega)$,

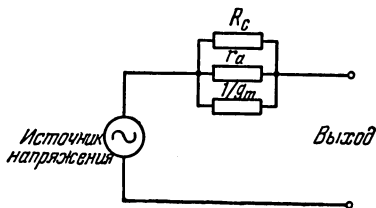


Рис. 59.

то падение напряжения сигнала на лампе равно $-\bar{e}_{\text{ВЫХ}}(j\omega)$ и вследствие этого в лампе протекает ток $-\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{r_a}$. Напряжение между сеткой и катодом, равное $-\bar{e}_{\text{ВЫХ}}$, вызывает в лампе ток $-g_m \bar{e}_{\text{ВЫХ}}$. Наконец, ток сигнала в катодном сопротивлении равен $\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{R_c}$. Для того, чтобы поддерживать падение напряжения на катодном сопротивлении равным $\bar{e}_{\text{ВЫХ}}$, несмотря на эти изменения тока, источник должен давать ток, равный

$$\bar{i}_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = \bar{e}_{\text{ВЫХ}}(j\omega) \left[g_m + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{r_a} \right].$$

Выходное сопротивление без учета паразитных и нагрузочных емкостей, следовательно, равно

$$\bar{Z}_{\text{ВЫХ}} = \frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{i}_{\text{ВЫХ}}} = \frac{1}{g_m + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{r_a}}. \quad (17)$$

Выходное напряжение катодного повторителя может поэтому рассматриваться как напряжение, получаемое от источника с активным внутренним сопротивлением (см. эквивалентную схему рис. 59). Такое представление применимо только при наличии обратной связи, т. е. когда лампа работает в линейном режиме.

5.3.6. Принципиальная схема.

Часто оказывается необходимым использовать такой катодный повторитель, связанный с другими каскадами по постоянному току, выходной потенциал которого может принимать положительные и отрицательные значения по отношению к земле. В этом случае катодное сопротивление должно быть подключено к источнику отрицательного напряжения. Так как сопротивление внешней нагрузки подключается параллельно катодному сопротивлению, то для того, чтобы ток сигнала в нагрузке был максимальным, желательно отношение катодного сопротивления к сопротивлению нагрузки сделать большим.

В типичной схеме (рис. 60) катодное сопротивление подключается к источнику отрицательного напряжения -300 в, а его величина в омах определяется требуемым

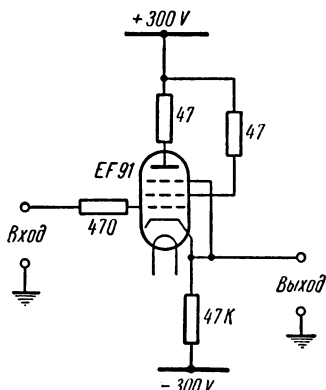


Рис. 60.

значением установившегося тока лампы, который в свою очередь ограничивается допустимой мощностью рассеяния на аноде. К управляющей и экранной сеткам, а также к аноду подключены небольшие омические сопротивления. Эти сопротивления не влияют на принцип работы и вводятся естественно в тот ламповый усилитель, в котором используются лампы с коэффициентом усиления, сохраняющимся неизменным вплоть до весьма высоких частот, т. е. в усилитель на лампах с малыми межэлектродными емкостями и большой крутизной характеристики. Назначение этих сопротивлений заключается в подавлении паразитных колебаний высокой частоты, которые могут возникать из-за наличия распределенных индуктивностей и емкостей монтажа. Эти сопротивления обычно называются запирающими.

В схеме используется лампа EF91, миниатюрный пентод с большой крутизной характеристики, включенный

триодом. При токе $6,4$ ма лампа имеет следующие параметры:

$$r_a = 12 \text{ ком}, \quad g_m = 6 \text{ ма/в}, \quad \mu = 72.$$

На основании уравнения (116) коэффициент усиления каскада лампы без нагрузки равен

$$A = \frac{\mu R_c}{r_a + R_c} = 59.$$

Следовательно, общий коэффициент усиления по напряжению равен

$$\frac{A}{1+A} = 0,985.$$

Если к выходу подключено сопротивление нагрузки $10k\Omega$ параллельно с емкостью $0,1$ мкф, то передаточная функция каскада или прямой цепи, согласно выражению (15), равна

$$A' = \frac{30,5}{1 + p \cdot 0,49 \cdot 10^{-3}}.$$

Общая передаточная функция при этом имеет вид

$$\frac{\bar{e}_{\text{вых}}}{\bar{e}_{\text{вх}}} = \frac{0,97}{1 + p \cdot 15,5 \cdot 10^{-6}}.$$

Постоянная времени нагрузки равна 1 мсек. Обратная связь уменьшает ее до $15,5$ мсек в общей передаточной функции катодного повторителя.

Добавление сопротивления нагрузки не меняет заметно общего коэффициента усиления. Однако пределы линейных изменений потенциала катода очень сильно зависят от нагрузки, так как изменения тока, достаточные для того, чтобы выйти из линейного режима работы, получаются при меньших изменениях напряжения на выходе. Из ламповых характеристик можно найти, что максимальное положительное отклонение на выходе для данной схемы равно 180 в без нагрузки и 110 в при сопротивлении нагрузки, равном 10 ком.

5.4. Симметричный дифференциальный усилитель

Принципиальная схема такого усилителя изображена на рис. 61. Равенства токов, протекающих через лампы, можно достигнуть с помощью регулировочного потенциометра P_1 . С помощью потенциометра P_2 уравниваются анодные напряжения.

При дальнейшем рассмотрении предполагается, что через катодное сопротивление R_c течет ток, не зависящий от изменений потенциала движка потенциометра P_1 (рис. 61). Единственный способ достичь этого в приводимой схеме заключается в том, что сопротивление R_c выбирается бесконечно большим и подключается к минусу источника бесконечно большого напряжения. Практически более удобный способ будет описан ниже. В дальнейшем предполагается, что лампы L_1 и L_2 имеют идентичные характеристики.

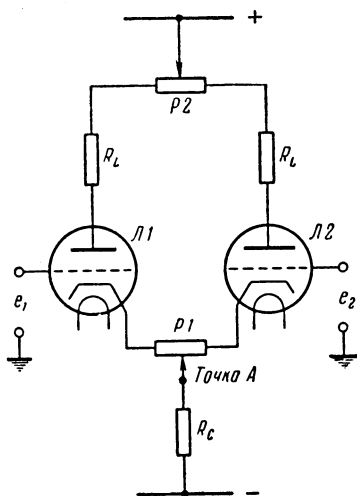


Рис. 61.

Если входные сигналы e_1 и e_2 подаются на обе сетки от сбалансированного двухтактного источника, то напряжения между сетками ламп и землей, а также анодные токи ламп находятся в противофазе. На движке потенциометра P_1 напряжение сигнала равно нулю, так как в токе, текущем через сопротивление катодной нагрузки R_c , нет переменных составляющих. По отношению к сигналам на сетке лампы ведут себя, как независимые усилители напряжения, заземленные в точке А. На анодах появляются сбалансированные сигналы в противофазе.

Если на сетки подаются синфазные сигналы с равными амплитудами, то схема ведет себя иначе, так как при неизменном токе через сопротивление R_c синфазные анодные токи течь не могут. Таким образом, потенциал движка

потенциометра P_1 следует за изменениями потенциала сеток и в токе или в анодном напряжении каждой лампы нет переменных составляющих.

Во многих случаях сигнал подается на одну сетку, а другая сетка заземляется или на нее подается постоянный потенциал. На движке потенциометра P_1 тогда появляется переменное напряжение с амплитудой, равной половине амплитуды напряжения, подаваемого на сетку, а на анодах ламп имеют место противофазные сигналы равной амплитуды. При этом коэффициент усиления усилителя равен половине коэффициента усиления, имеющего место при возбуждении от двухтактного источника.

Можно сказать, что в симметричном дифференциальном усилителе внутренняя обратная связь с катода на сетку используется для уменьшения усиления синфазных сигналов. Противофазным сигналам соответствует полный коэффициент усиления каскада лампы, уменьшенный незначительно за счет небольшой отрицательной обратной связи, образуемой собственными катодными сопротивлениями каждой лампы. Полный анализ работы схемы с изменяющимся током в общем катодном сопротивлении R_c и с несбалансированными лампами достаточно сложен и не приводится здесь. Однако полезно привести результат работы Нобля *) (Noble, 1950 г.) для случая, когда через катодное сопротивление R_c протекает постоянный ток и лампы имеют неравные коэффициенты усиления. Нобль показал, что

$$K \approx \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right], \quad (18)$$

где

$$K = \frac{\text{общий коэф. усиления синфазных сигналов}}{\text{общий коэф. усиления противофазных сигналов}}.$$

K часто называют коэффициентом ослабления усилителя и измеряют в децибелах. μ_1 и μ_2 — коэффициенты усиления ламп, считающиеся значительно большими единицы.

Одним из назначений такого усилителя является уменьшение влияния дрейфа разности потенциалов сетка-катод в первом каскаде усилителя с высоким коэффициентом усиления. Такой дрейф, появляющийся в результате изме-

*) Неопубликованная лекция в физическом отделении Т. Р. Е.

нения температуры и условий на поверхности катода, действует как синфазный сигнал на входе, и его влияние, следовательно, сильно ослабляется, особенно, если обе лампы усилителя расположены в одной колбе.

Частотная характеристика усилителя по отношению к противофазным сигналам ограничивается паразитными емкостями в анодах в комбинации с эквивалентным выходным сопротивлением схемы. Соответствующая передаточная функция может быть выведена из уравнения (8), так как принципиально можно считать, что усилитель ведет себя, как два отдельных каскада усилителя класса А, когда к его сеткам приложены сигналы в противофазе.

5.4.1. Принципиальная схема.

Схема, в которой через катодное сопротивление протекает приблизительно неизменный ток, изображена на рис. 62. Общее катодное сопротивление R_c здесь заменено катодным повторителем, общее сопротивление анодной цепи которого (см. 5.3.4) может быть сделано очень высоким. Его сетка подключена к постоянному отрицательному потенциалу, выбранному таким, чтобы ток через «катодное сопротивление» был требуемой величины. В схеме, изображенной на рис. 62, этот ток равен 10 ма, при токе в каждой половине усилителя 5 ма. В лампе EF91, включенной триодом, при падении напряжения на лампе, равном 150 в, протекает ток 10 ма и параметры лампы равны

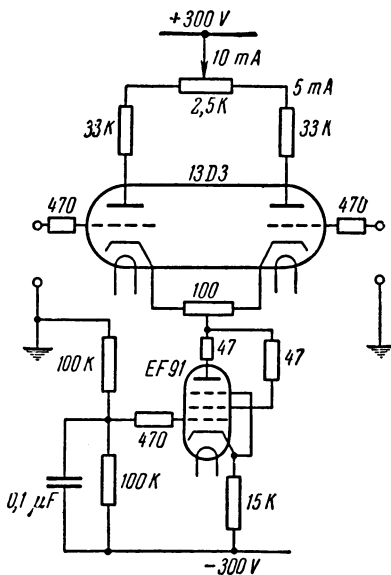


Рис. 62.

$$r_a = 8 \text{ ком}, \quad g_m = 8 \text{ ма/в}, \quad \mu = 64.$$

Следовательно, из уравнения (16) эквивалентное сопротивление 10 п. Хэммонд

тивление в катод лампы приблизительно равно 1 мгом . Катодный повторитель действует так же, как и сопротивление в 1 мгом , подключенное к отрицательному потенциалу 10 кв .

Лампа 13D3(CV 2212), используемая в усилителе, обладает номинальным коэффициентом усиления $\mu=32$ для каждого триода; допустимое отклонение μ по условиям производства ± 5 . В наихудшем случае, когда у одного триода $\mu=27$, а у другого $\mu=37$, фактор ослабления K равен $0,02$ (см. уравнение (18)).

5.5. Принцип потенциального заземления [1]

Далее будем рассматривать фазоинверсный усилитель постоянного тока с высоким коэффициентом усиления, выходное напряжение которого может быть как положительным, так и отрицательным по отношению к земле. Расчет таких усилителей будет рассмотрен ниже.

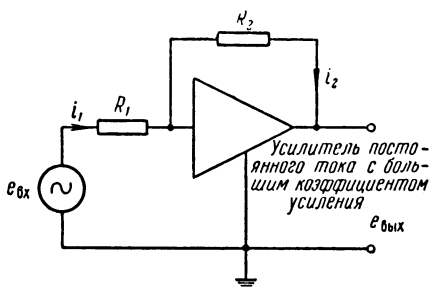


Рис. 63.

Источник напряжения подключен ко входу усилителя через сопротивление R_1 , а сигнал с выхода подается на вход через сопротивление R_2 . Будем считать, что входное со-

противление усилителя значительно больше, а выходное — значительно меньше величины $(R_1 + R_2)$. Схема усилителя изображена на рис. 63. В установившемся состоянии совместное действие источника и выходного напряжения создает на входе усилителя некоторый потенциал, который, усиливаясь, поддерживает выходной потенциал. Если коэффициент усиления усилителя бесконечно велик, а знак выходного сигнала противоположен знаку входного сигнала, то входная точка оказывается почти, т. е. потенциально, заземленной, так как совместное действие источника и выходного напряжения уравнивает друг друга^а

В этом случае

$$e_{\text{вх}} \frac{R_2}{R_1 + R_2} + e_{\text{вых}} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0,$$

откуда

$$\frac{e_{\text{вых}}}{e_{\text{вх}}} = - \frac{R_2}{R_1},$$

т. е. общий коэффициент усиления не зависит от коэффициента усиления усилителя.

Общий коэффициент усиления можно подсчитать иначе, приравняв токи в R_1 и R_2 . Это справедливо, так как входной ток усилителя (т. е. ток сетки первого каскада) пренебрежимо мал. Таким образом, мы имеем:

$$i_1 = \frac{e_{\text{вх}}}{R_1} \quad \text{и} \quad i_2 = - \frac{e_{\text{вых}}}{R_2},$$

откуда при

$$i_1 = i_2$$

имеем:

$$\frac{e_{\text{вых}}}{e_{\text{вх}}} = - \frac{R_1}{R_2}.$$

Если коэффициент усиления очень высок, усилитель ведет себя так, как будто бы вход его удерживается при потенциале земли.

5.5.1. Исследование передаточных функций.

Рассмотрим более общий случай усилителя с потенциально заземленной входной точкой*). Полные сопротивления входной цепи и цепи обратной связи**) описываются операторными выражениями $\bar{Z}_1(p)$ и $\bar{Z}_2(p)$ соответственно, а усилитель характеризуется передаточной функцией $\bar{y}_1(p)$. Если ток во входной цепи и в цепи обратной связи равен $\bar{i}(p)$ и в суммирующей точке малое напряжение сигнала равно $\bar{e}(p)$, то

$$\bar{i}(p) = \frac{\bar{e}_{\text{вх}} - \bar{e}}{\bar{Z}_1} = \frac{\bar{e} - \bar{e}_{\text{вых}}}{\bar{Z}_2}, \quad \frac{\bar{e}_{\text{вх}}}{\bar{Z}_1} = - \frac{\bar{e}_{\text{вых}}}{\bar{Z}_2} + \bar{e} \left[\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} \right].$$

*) Эта точка в литературе часто называется суммирующей, так как здесь суммируются токи входной цепи и цепи, параллельной усилителю. (Прим. ред.)

**) Следует обратить внимание на то, что в цепь обратной связи входит как $\bar{Z}_1(p)$, так и $\bar{Z}_2(p)$. $\bar{Z}_2(p)$ правильнее называть сопротивлением цепи, параллельной усилителю. (Прим. ред.)

Так как

$$\bar{e}_{\text{ВЫХ}} = \bar{y}_1(p) \bar{e},$$

то

$$\frac{\bar{e}_{\text{ВХ}}}{\bar{Z}_1} = -\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{y_1} \left[\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} \right]. \quad (19)$$

Если

$$|\bar{y}_1(p)| \gg \left| \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} + 1 \right|,$$

то

$$\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{e_{\text{ВХ}}} = -\frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1}.$$

Таким образом, при достаточно большом модуле усиления прямой цепи общая передаточная функция равна отношению операторных выражений для полных сопротивлений цепи обратной связи и входной цепи с обратным знаком. Это свойство лежит в основе многих при-

ложений, в частности, оно используется в электронных моделирующих устройствах*).

5.5.2. Влияние дрейфа.

Сетка первого каскада усилителя потенциально заземлена и низкочастотные изменения потенциала между сеткой и катодом, возникающие под влиянием дрейфа, на структурной схеме могут быть представлены в виде источника

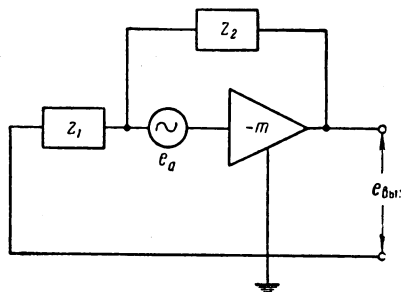


Рис. 64.

напряжения, включенного последовательно со входом усилителя (рис. 64). Если напряжение дрейфа e_d прикладывается при установившемся режиме усилителя, то выход-

*) См., например, Коган Б. Я., Электронные моделирующие устройства и их применения для исследования систем автоматического регулирования, Физматгиз, 1959. (Прим. ред.)

ное напряжение изменяется на величину $e_{\text{ВЫХ}}$ и, будучи подано с помощью обратной связи на вход, противодействует дрейфу. При очень низких частотах дрейфа передаточная функция $\bar{y}_1(p)$ представляет собой число, скажем $-m$, так что

$$\bar{e}_{\text{ВЫХ}} = -m\bar{e}_d - \frac{m\bar{e}_{\text{ВЫХ}}\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2},$$

откуда

$$\bar{e}_{\text{ВЫХ}} \left[1 + \frac{m\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \right] = -m\bar{e}_d.$$

Если

$$\left| \frac{m\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \right| \gg 1,$$

то

$$\bar{e}_{\text{ВЫХ}} = -\bar{e}_d \left[\frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \right] = -\bar{e}_d \left[\frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} + 1 \right]. \quad (20)$$

Таким образом, усиление по сигналу дрейфа несколько больше, чем общее усиление.

5.5.3. Полное сопротивление суммирующей точки по отношению к земле.

Благодаря тому, что коэффициент усиления усилителя есть величина конечная, потенциальное заземление обладает некоторым конечным малым сопротивлением, которое будет вычислено ниже при условии отсутствия полного входного сопротивления \bar{Z}_1 . Представим себе, что источник напряжения — генератор синусоидальных сигналов с низким полным сопротивлением — включен между потенциально заземленной точкой и истинной землей. Если напряжение генератора равно $\bar{e}_s(j\omega)$, то выходное напряжение усилителя должно быть $\bar{y}_1(j\omega)\bar{e}_s(j\omega)$ и ток, поступающий от генератора к потенциально заземленной точке, равен

$$\bar{i}_s = \frac{1}{\bar{Z}_2} [\bar{e}_s - \bar{y}_1(j\omega)\bar{e}_s].$$

Следовательно, полное сопротивление потенциального заземления представляет параллельное соединение \bar{Z}_2 и $-\frac{\bar{Z}_2}{y_1(j\omega)}$. На низких частотах $\bar{y}_1(j\omega)$ равно просто коэффициенту усиления и выражается числом $-m$, так что полное сопротивление потенциального заземления \bar{Z}_E определяется выражением

$$\bar{Z}_E \approx \frac{\bar{Z}_2}{1+m}.$$

5.5.4. Сложение напряжений.

Приближенное сложение двух или более напряжений в различных пропорциях может быть получено с помощью пассивных цепей, изображенных на рис. 65, а. Усилитель здесь нужен лишь для того, чтобы поднять уровень напря-

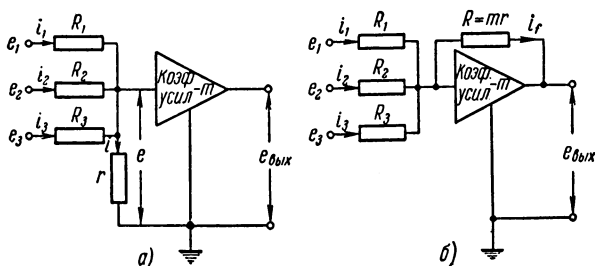


Рис. 65.

жения, который сильно понижается в пассивных суммирующих цепях. Предположим, что малое сопротивление r заменено полным сопротивлением потенциального заземления с обратной связью в виде активного сопротивления, схема которого изображена на рис. 65, б. Общий результат действия этих двух схем одинаков, но схема с потенциальным заземлением обладает важными преимуществами. Цепь обратной связи делает коэффициент усиления значительно меньше зависящим от изменений параметров усилителя и от влияния дрейфа нуля первого каскада, при этом сильно уменьшаются шумы и микрофонный эффект.

5.5.5. Структурная схема усилителя с потенциально заземленной суммирующей точкой.

Прежде чем рассматривать вопрос об устойчивости такого усилителя, составим его структурную схему. Это можно сделать, преобразовав уравнение (19) следующим образом:

$$\bar{e}_{\text{вых}}(p) = \bar{y}_1(p) \left[\bar{e}_{\text{вх}}(p) \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} + \bar{e}_{\text{вых}}(p) \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \right]. \quad (24)$$

Структурная схема, которой соответствует данное уравнение, изображена на рис. 66. Из этой схемы ясно, что

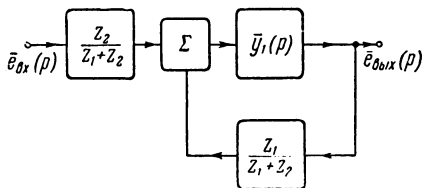


Рис. 66.

устойчивость системы зависит как от вида передаточной функции $\bar{y}_1(p)$, так и от полных сопротивлений входной цепи и цепи обратной связи. Выражение для частотной характеристики разомкнутой системы усилителя записывается следующим образом:

$$\bar{y}_L(j\omega) = \frac{\bar{y}_1(j\omega) \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}.$$

Так как \bar{Z}_1 и \bar{Z}_2 определяются требуемой частотной характеристикой всей схемы, то заданная степень устойчивости усилителя, охваченного обратной связью, обычно достигается видоизменением $\bar{y}_1(j\omega)$. Иногда встречаются исключения, например когда приходится несколько видоизменять полное сопротивление обратной связи для противодействия влиянию паразитных емкостей, неизбежно появляющихся в потенциально заземленной суммирующей точке (см. 5.6.1).

5.6. Схемы усилителей постоянного тока

Любой усилитель постоянного тока, обладающий свойствами указанными в 5.5, может быть использован как усилитель с потенциально заземленной суммирующей точкой, если он устойчив. Вообще говоря, при использовании усилителей в электронных моделях и в других случаях устойчивость должна сохраняться при 100% обратной связи, т. е. когда выход усилителя подается на его вход. Конечно, даже и при этом некоторые комбинации \bar{Z}_1 и \bar{Z}_2 могут вызвать неустойчивость системы, и об этом надо всегда помнить.

Источники питания усилителей постоянного тока должны обладать низким выходным сопротивлением, порядка нескольких ом, чтобы избежать внутрикаскадных связей через источник питания. Кроме того, источники питания должны быть высокостабильны, так как внутрикаскадные связи по постоянному току могут вследствие медленных изменений в напряжении питания вызвать ложные изменения напряжения на выходе. Поэтому требуются стабилизированные источники питания, в которых обратная связь используется для получения низкого выходного сопротивления и напряжения, стабилизированного по отношению к эталонному (например, напряжению стандартного элемента или падению напряжения на стабилитроне).

Далее усилители постоянного тока подразделяются на два типа: усилители с низким коэффициентом усиления и со средним коэффициентом усиления. Элементы схемы и характеристики будут соответственно относиться к одному из этих двух типов.

5.6.1. Усилитель с низким коэффициентом усиления.

Принципиальная схема такого усилителя изображена на рис. 67. Первая из двух ламп — пентод с высоким входным сопротивлением, т. е. с малым сеточным током, вторая — триод, включенный по схеме катодного повторителя с низкоомным выходным сопротивлением. Потенциал на сетке пентода равен нулю благодаря наличию сопротивления смещения в катод. Для уменьшения величины этого сопротивления, а также для того, чтобы избежать чрезмерного уменьшения коэффициента усиления этого каскада,

ток через сопротивление смещения подается от плюсовой шины высокого напряжения через делитель.

На экранную сетку положительное напряжение подается от движка потенциометра, используемого для установки нулевого уровня.

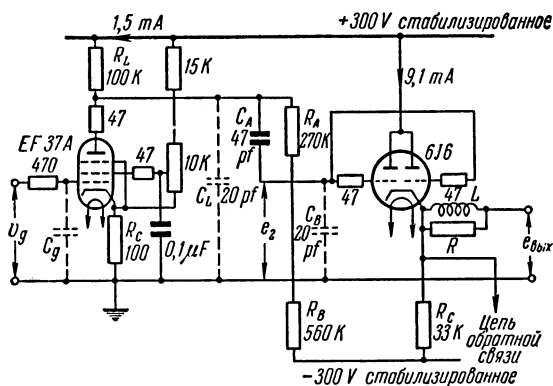


Рис. 67.

Пентод EF37A предназначен для работы при отрицательном смещении $-1,2$ в на сетке и положительном потенциале $+45$ в на экранной сетке. При этом через сопротивление нагрузки, равное 100 ком, течет анодный ток $1,5$ ма, и коэффициент усиления по напряжению от сетки к аноду на нулевой частоте равен -100 (40 дб; -180°). Большой коэффициент усиления можно получить, применяя большее сопротивление анодной нагрузки, но при этом уменьшается полоса пропускания.

Два каскада связаны между собой гальванически с помощью цепочки сопротивлений таким образом, что потенциал катода двойного триода 6J6, используемого в качестве катодного повторителя, равен потенциалу земли, когда анодное напряжение пентода равно $+150$ в. С этой цепочкой сопротивлений связаны паразитные емкости на землю, которые могут быть представлены как емкости C_L и C_B , подсоединенные к аноду пентода и сетке триода соответственно. Эквивалентная схема анодной цепочки и цепочки связи изображена на рис. 68, где пентод заме-

нен источником тока (см. рис. 55, в). При отсутствии емкости C_A в схему входят два аperiодических звена, дающих возможность сдвигать фазу почти на 180° в сторону запаздывания на высоких частотах. Для уменьшения числа этих звеньев параллельно R_A подключена емкость C_A такая, чтобы постоянная времени $C_A R_A$ была равна $C_B R_B$, где C_B — паразитная емкость, подключенная параллельно R_B .

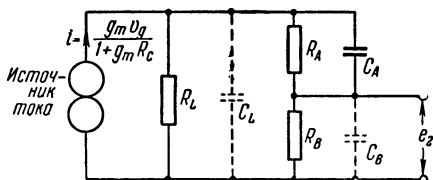


Рис. 68.

Благодаря этому два плеча делителя напряжения превращаются в комплексные сопротивления, отношение между которыми равно действительному числу. В приложении 1 показано, что передаточная функция, связывающая сигналы на сетке пентода и сетке катодного повторителя, равна

$$\frac{\bar{e}_2}{\bar{v}_g} = -\alpha \frac{g_m}{1 + g_m R_c} \frac{R_L}{1 + p T_L'}$$

где α — отношение плеч делителя напряжения, а T_L' — эквивалентная постоянная времени анодной цепи.

Так как задачей добавочного конденсатора C_A является уменьшение запаздывания, он часто называется «ускоряющим» конденсатором. При значениях параметров элементов, обозначенных в принципиальной схеме, и крутизне характеристики пентода, равной 1 ма/в , передаточная функция равна

$$\frac{\bar{e}_2}{\bar{v}_g} = \frac{-55}{1 + p \cdot 3,0 \cdot 10^{-6}} \quad (22)$$

Коэффициент усиления равен -55 (35 дб ; 180°) и сопрягающая частота аperiодического звена равна 53 кгц .

Передаточная функция катодного повторителя задается уравнением (15) и зависит от нагрузки. Если трио-

ды 6J6 включены в параллель и общий ток, установленный с помощью катодного сопротивления, равен $9,1 \text{ ма}$, то коэффициент усиления лампы равен $\mu=60$ и внутреннее сопротивление $r_a=5 \text{ ком}$. Если нагрузка катодного повторителя — емкостная, то в передаточную функцию нужно включить запаздывание, уменьшая тем самым запас устойчивости усилителя. Это запаздывание может быть устранено подключением параллельно емкостной нагрузке индуктивности с сопротивлением, как показано на рис. 67. Значения L и R выбраны такими, что R очень велико по сравнению с выходным сопротивлением катодного повторителя $R_{\text{вых}}$ и его величина ограничивается лишь требованием, чтобы постоянная времени $\frac{L}{R}$ была большой по сравнению с $C_E R_{\text{вых}}$, где C_E есть емкость нагрузки. Обычно оказывается достаточной катушка индуктивности в несколько миллигенри, подключенная параллельно сопротивлению в несколько сотен ом.

На высоких частотах в контур может быть внесено другое запаздывание за счет цепи обратной связи. Обычно встречается случай схемы с потенциальным заземлением с активными сопротивлениями на входе и в цепи обратной связи R_1 и R_2 . Передаточная функция цепи обратной связи, равная $\frac{R_1}{R_1+R_2}$, вносит затухание $20 \lg \left[\frac{R_1}{R_1+R_2} \right] \text{ дб}$ в контур на всех частотах, что увеличивает устойчивость (см. рис. 66). Однако паразитная емкость C_g , подключенная к потенциально заземленной точке вместе с сопротивлением обратной связи R_2 , может внести значительное запаздывание и, следовательно, вызвать неустойчивость. Структурная схема (рис. 66) в этом случае будет содержать добавочное апериодическое звено в цепи обратной связи, передаточная функция которой будет равна

$$\frac{R_1}{R_1+R_2} \frac{1}{1+pT_F},$$

где

168

$$T_F = \frac{C_g R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ сек.}$$

Для устранения этого запаздывания параллельно сопротивлению обратной связи подключается емкость C_2 ,

большая паразитной емкости C_g . C_2 обычно равна нескольким десяткам пикофард.

Полное входное сопротивление должно быть скорректировано с помощью конденсатора C_1 , подключенного параллельно так, чтобы сохранялось заданное отношение $\frac{Z_2}{Z_1}$.

При этом $C_1 R_1 = C_2 R_2$. Схема скорректированного усилителя изображена на рис. 69.

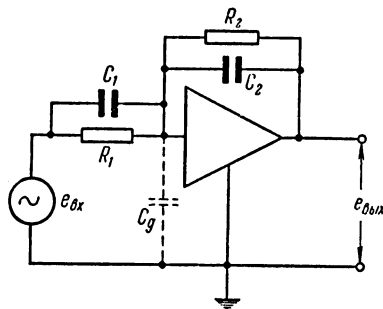


Рис. 69.

Правильным выбором корректирующих цепей, подобных описанным, можно добиться того, чтобы передаточная функция разомкнутой системы усилителя с низким коэффициентом усиления содержала лишь одно экспоненциальное запаздывание. Следовательно, система, использующая усилитель с потенциально заземленной

суммирующей точкой, будет устойчива даже при обратной связи, приближающейся к 100%.

5.6.2. Усилитель со средним коэффициентом усиления.

Коэффициент усиления такого усилителя на нулевой частоте приблизительно равен $-10\,000$ (80 дБ ; -180°). Подобный усилитель с несколько меньшим коэффициентом усиления был описан Ритсоном [2] (Ritson). Первый и второй каскады выполнены по схеме симметричного дифференциального усилителя, что вызвано желанием снизить влияние дрейфа нуля. За ними следует каскад усилителя класса A на пентоде. Низкое выходное сопротивление обеспечивается катодным повторителем на триоде. Принципиальная схема усилителя изображена на рис. 70. На ней показаны ускоряющие емкости и приведены приближенные значения паразитных емкостей. Цепи, обеспечивающие устойчивость, на схеме не показаны.

Для того чтобы установить нулевой уровень на выходе усилителя, нужно, заземлив управляющую сетку первого дифференциального каскада, получить на выходе катодного повторителя нулевое значение напряжения, используя

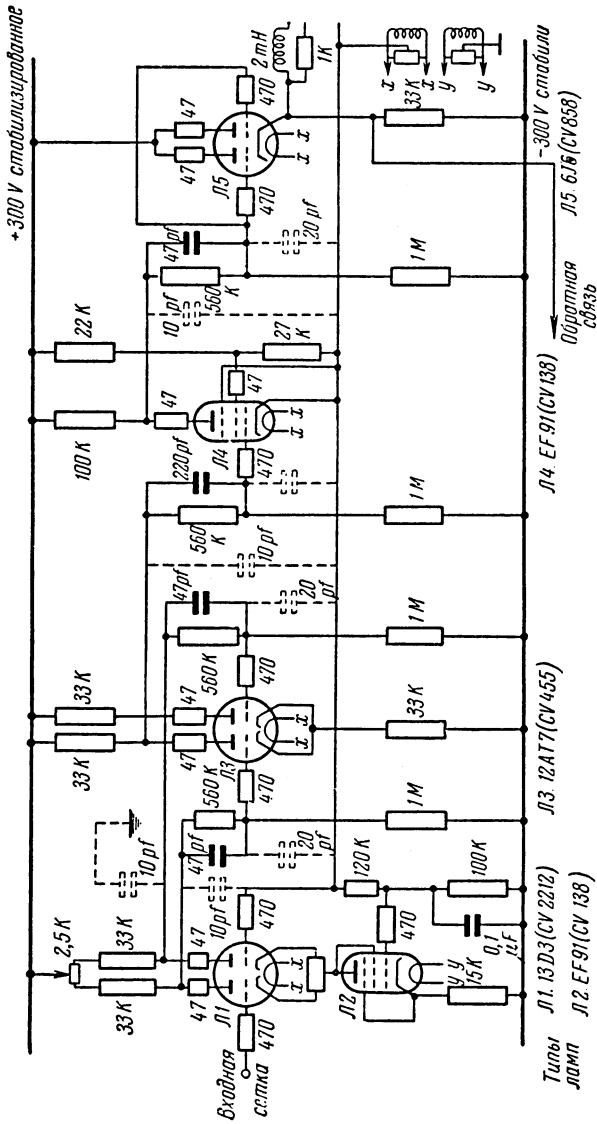


Рис. 70.

для его регулировки потенциометр анодной нагрузки первого каскада. При этом предварительно нужно уравнять токи в лампах дифференциального усилителя первого каскада регулировкой катодного потенциометра. При достижении симметрии потенциал каждого анода усилителя приблизительно равен $+150$ в. Дрейф потенциала, отнесенный к сетке первого каскада, приблизительно равен 5 мв в час, и сеточный ток приближенно равен $2 \cdot 10^{-9}$ а. Цепь связи между первым и вторым каскадом включает в себя ускоряющий конденсатор, и сигнал на нее подается с триода со сравнительно низким выходным сопротивлением, включающим сопротивление анодной нагрузки R_L , подключенное параллельно внутреннему сопротивлению лампы r_a . Для лампы 13D3(CV 2212), используемой в усилителе, эти сопротивления соответственно равны 33 и 15 ком, следовательно, выходное сопротивление приближенно равно 10 ком. Заметим, что ускоряющая емкость между вторым дифференциальным каскадом и каскадом на пентоде больше, чем остальные. Это обусловлено отчасти величиной паразитной емкости анод — сетка пентода. Обратная связь через эту емкость создает паразитную емкость сетка — земля, примерно в m раз большую, чем емкость анод — сетка, где m есть коэффициент усиления каскада. Это явление известно под названием эффекта Миллера (сравни полное сопротивление потенциального заземления, 5.5.3) и может быть уменьшено тщательным экранированием выводов анода и управляющей сетки. Другим фактором, влияющим на величину этой ускоряющей емкости, является наличие паразитной емкости экранная сетка — управляющая сетка, которая создает большую входную емкость благодаря эффекту Миллера, причем экранная сетка ведет себя, как анод триода с коэффициентом усиления, зависящим от параметра пентода μ . Влияние этой паразитной емкости может быть преодолено с помощью присоединения развязывающей емкости к экранной сетке на землю или с помощью подачи напряжения на экранную сетку от неоновой стабилизатора (на рис. 70 не изображено).

Частотная характеристика разомкнутой системы снимается с помощью подачи на вход усилителя синусоидальных сигналов. Выход подключается к частотно независи-

мому аттенюатору, калиброванному в децибелах. Аттенюатор регулируется до тех пор, пока амплитуда сигнала на его выходе не будет равна амплитуде сигнала на входе усилителя. При этом по шкале аттенюатора мы можем определить коэффициент усиления в децибелах. Фазовый сдвиг между сигналами на входе усилителя и на выходе аттенюатора наблюдается на катодно-лучевом осциллографе (например, с помощью фигур Лиссажу). Измерение фазы

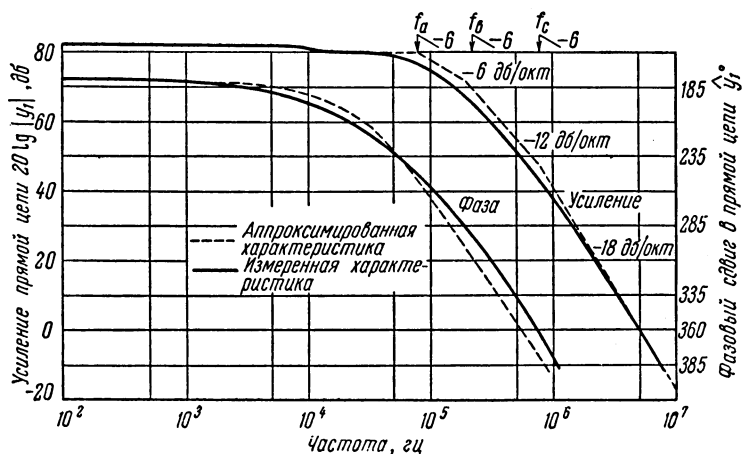


Рис. 71.

и амплитуды проводится на нескольких различных частотах в пределах диапазона, в котором коэффициент усиления больше единицы. Для схемы усилителя постоянного тока со средним коэффициентом усиления фазовая и амплитудная характеристики изображены на рис. 71. Фазовый сдвиг в прямой цепи на частоте около 750 кГц равен -360° , а коэффициент усиления равен единице (нуль децибел) приблизительно на частоте 5 мГц. Фазовые и амплитудные характеристики отдельных каскадов снимаются путем наблюдения напряжений в промежуточных точках усилителя с помощью пробника в виде катодного повторителя для того, чтобы избежать шунтирующего действия измерительного устройства.

Экспериментально полученные кривые могут быть аппроксимированы характеристиками трех апериодических звеньев с общим коэффициентом усиления 80 дб ($-10\ 000$) (рис. 71). Анодные цепи первого и второго каскадов соответствуют апериодическим звеньям, сопрягающие частоты которых $f_c=800$ кГц и $f_b=200$ кГц; третье апериодическое звено, связанное с анодной цепью пентода, имеет сопрягающую частоту $f_a=80$ кГц.

Между экспериментально снятой фазовой характеристикой и аппроксимированной кривой существует некоторое различие, не имеющее, однако, серьезного значения, в частности из-за того, что приближенно полученный фазовый сдвиг заведомо больше сдвига, полученного экспериментально. Применяв критерий Найквиста, можно увидеть, что подключение выхода ко входу, т. е. 100%-ная отрицательная обратная связь, делает систему неустойчивой, так как при фазовом сдвиге в разомкнутой системе, равном -360° , коэффициент усиления равен 45 дб. Следовательно, для того чтобы удовлетворялись условия устойчивости, необходимо как-то изменить частотную характеристику.

5.7. Способы стабилизации

Во многих случаях применения обратной связи прямая цепь системы состоит из ряда последовательно включенных простых апериодических звеньев, а цепь обратной связи состоит из элементов, не зависящих от частоты. К таким случаям часто относятся электронные усилители. Рассмотрим некоторые простейшие способы стабилизации, т. е. обеспечения устойчивости таких устройств, используя в качестве примера усилитель постоянного тока со средним коэффициентом усиления, описанный в предыдущем параграфе. Соответствующие запасы по фазе и амплитуде определяются специальными требованиями, но мы в дальнейшем будем считать, что сдвиг фазы в разомкнутой системе должен быть не больше -330° при коэффициенте усиления разомкнутой системы, равном 0 дб, и коэффициент усиления разомкнутой системы при сдвиге фазы в разомкнутой системе -360° не должен быть больше -9 дб (сравни 4.3.1).

5.7.1. Стабилизация аperiodическим звеном.

Простейший способ стабилизации заключается в замене собственного аperiodического звена, имеющего самую низкую сопрягающую частоту, стабилизирующим аperiodическим звеном со значительно более низкой сопрягающей частотой, выбранной так, что уменьшение коэффициен-

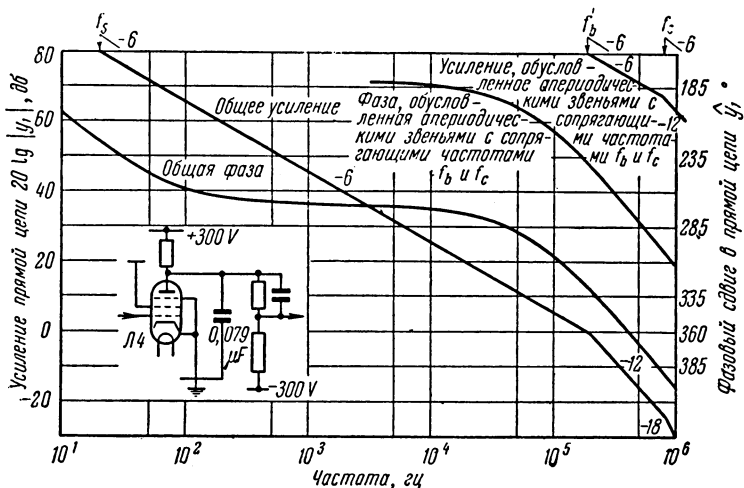


Рис. 72.

та усиления на 6 дБ на октаву благодаря этому звену обеспечивает реализацию требуемых запасов по фазе и амплитуде. Стабилизирующее звено вносит фазовый сдвиг, стремящийся к -90° на сравнительно высоких частотах, при которых оставшиеся внутренние аperiodические звенья становятся эффективными. Поэтому на частоте, при которой общий фазовый сдвиг оставшихся внутренних аperiodических звеньев равен -60° , фазовый сдвиг разомкнутой системы равен -330° . Этот сдвиг становится равным -360° , когда суммарная фаза оставшихся аperiodических звеньев равна -90° . Покажем, как можно стабилизировать усилитель постоянного тока со средним коэффициентом усиления при 100%-ной отрицательной обратной связи, т. е. при параметре обратной связи $\beta=1$. Практически это означает, что выход катодного повтори-

теля подключается к входной сетке. Звенья, имеющие сопрягающие частоты 200 *кГц* и 800 *кГц*, вместе вызывают фазовый сдвиг, равный -60° на частоте 200 *кГц* и -90° на частоте 400 *кГц* (рис. 72). Если стабилизирующее аperiodическое звено имеет сопрягающую частоту f_s , то коэффициент усиления разомкнутой системы, уменьшаясь на 6 *дБ* на октаву на частотах выше f_s , для обеспечения запаса устойчивости должен обращаться в нуль на частоте 200 *кГц*. Так как коэффициент усиления на низких частотах равен 80 *дБ*, то $f_s = \frac{200 \cdot 10^3}{2^{80/6}} \approx 20$ *Гц*.

Чтобы сопрягающая частота была равна 20 *Гц*, нужно, чтобы постоянная времени аperiodического звена была равна $\frac{1}{2\pi \cdot 20}$ *сек*. Стабилизирующее аperiodическое звено вводится с помощью конденсатора, включенного между анодом пентода и землей. При этом существующее аperiodическое звено в анодной цепи пентода уже не имеет значения. Требуемая емкость равна 0,079 *мкФ* при сопротивлении анодной нагрузки 100 *ком*. Из рис. 72 можно видеть, что требования запаса по амплитуде удовлетворяются, так как коэффициент усиления равен -13 *дБ* при фазовом сдвиге, равном -360° .

Такой способ стабилизации резко уменьшает ширину полосы пропускания каскада на пентоде и, следовательно, максимальный диапазон линейного усиления. Коэффициент усиления каскада на пентоде уменьшается до единицы, когда ослабление, вносимое стабилизирующим звеном, компенсирует усиление на низких частотах (т. е. 42 *дБ*).

Это имеет место при частоте на $\frac{42}{6}$ октавы выше сопрягающей частоты стабилизирующего звена, т. е. при частоте $2^7 \cdot 20$ *Гц* = 2,56 *кГц*. Для того чтобы усиление происходило без искажений, амплитуда сигнала на сетке пентода должна быть ограничена приблизительно до 0,5 *в*, так что максимальное неискаженное напряжение на выходе усилителя на частоте 2,56 *кГц* будет равно 0,5 *в* и соответственно еще меньше на более высоких частотах.

Для того чтобы избежать таких ограничений, стабилизирующее звено может быть подключено к аноду первого каскада, где амплитуда напряжения очень мала, при этом

заменяется аperiodическое звено с сопрягающей частотой 800 кГц (рис. 73). Аperiodическое звено с сопрягающей частотой, равной 80 кГц, остается неизменным и вместе со звеном, сопрягающая частота которого равна 200 кГц, вызывает фазовый сдвиг -60° приблизительно на частоте 67 кГц. Для того чтобы сделать коэффициент усиления равным единице, на этой частоте стабилизирующее звено

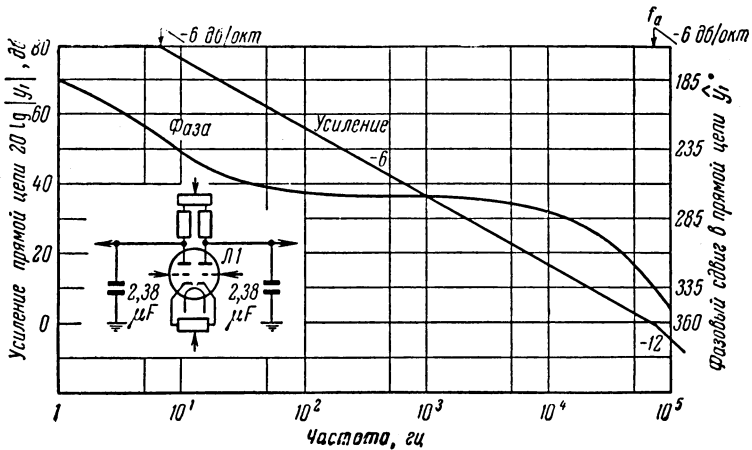


Рис. 73.

должно иметь сопрягающую частоту f'_s , которая на $\frac{80}{6}$ октавы ниже частоты 67 кГц. Таким образом,

$$f'_s = \frac{67 \cdot 10^3}{2^{80/6}} \approx 6,7 \text{ гц.}$$

Устойчивость обеспечивается подключением емкостей, равных $2,38 \text{ мкф}$, между каждым анодом первого каскада и землей. В комбинации с эквивалентным анодным сопротивлением, равным 10 ком , это дает требуемую постоянную времени, равную $\frac{1}{2\pi \cdot 6,7} \text{ сек.}$

Если ограничить амплитуду сигнала на сетке величиной $0,5 \text{ в}$, то на выходе усилителя мы получим амплитуду напряжения, равную $0,5 \text{ в}$, при коэффициенте усиления разомкнутой системы, равном 0 дБ . Это имеет место на частоте

67 кГц, так что возможность усиления сигнала без искажений возросла во много раз по сравнению с предыдущим способом. Однако при этом полоса пропускания уменьшается примерно в три раза.

5.7.2. Стабилизация пассивной интегрирующей цепью.

Введение отрицательной обратной связи приводит к необходимости значительно сузить полосу пропускания разомкнутой системы. На рис. 71 показано, что коэффициент усиления усилителя, к которому не были применены специальные меры по обеспечению устойчивости, падает до 0 дБ на частоте 5 мГц. В усилителях, стабилизированных введением одного апериодического звена (рис. 72 и 73), эти частоты соответственно равны 200 кГц и 67 кГц. Однако с помощью более совершенных способов стабилизации можно уменьшить сужение полосы пропускания и в то же время обеспечить требуемый запас по фазе и амплитуде. Один из таких методов, использующий пассивную интегрирующую цепь (см. рис. 48) для замены апериодических звеньев в анодных цепях некоторых ламп, был описан Кэннингом (Canning, 1950 г.).

После того как входная емкость последующего каскада скомпенсирована, включение пассивного интегрирующего контура преобразует собственное апериодическое звено анодной цепи в два инерционных звена с сопрягающими частотами, расположенными выше и ниже сопрягающей частоты собственного инерционного звена, и одно дифференцирующее, форсирующее звено, дающее опережение на промежуточной частоте. Исследование влияния этого контура, а также его амплитудная и фазовая характеристики даны в приложении 2, в котором получено следующее основное соотношение между сопрягающими частотами собственного и добавленных звеньев:

$$f_1 f_2 = f_T f'_L, \quad (23)$$

где f'_L — сопрягающая частота собственного апериодического звена в анодной цепи, f_T — сопрягающая частота добавленного форсирующего звена, f_1, f_2 — сопрягающие частоты добавленных инерционных звеньев, f_T — может быть больше или меньше f'_L .

Опишем метод стабилизации на примере усилителя с тремя собственными апериодическими звеньями, обра-

зованными либо паразитными емкостями, подключенными к аноду, либо комбинацией паразитных емкостей, подключенных к аноду, и нагрузок в виде скорректированных цепочек делителя. Принцип применим к любому числу звеньев. Если сопрягающие частоты собственных звеньев равны f_a , f_b и f_c в порядке повышения, то анодная цепь, вносящая задержку на частоте f_c , остается неизменной. Цепь,

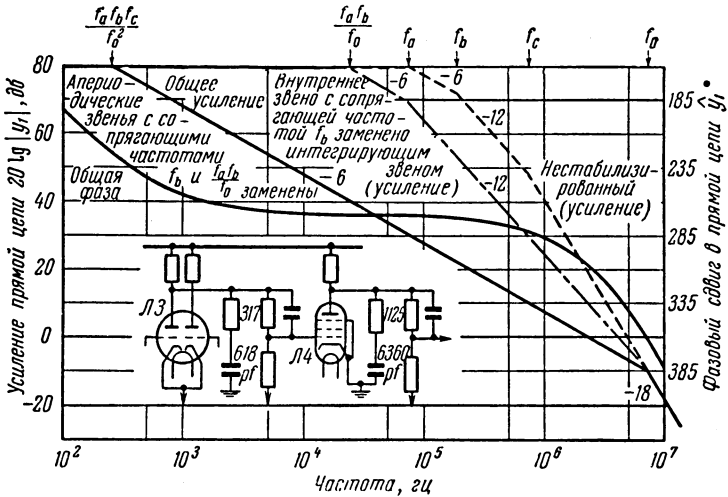


Рис. 74.

образующая аperiodическое звено с сопрягающей частотой f_b , изменяется подключением пассивной интегрирующей цепи таким образом, чтобы: на частоте f_c имело место опережение, на частоте f_0 — запаздывание и в соответствии с уравнением (23) на частоте $\frac{f_a f_b}{f_0}$ — запаздывание. Для анодной цепи, имеющей собственное аperiodическое звено с сопрягающей частотой f_a , включение интегрирующего контура устраняет запаздывание на этой частоте, но вносит запаздывание на частоте f_0 , опережение на частоте $\frac{f_b f_c}{f_L}$ и, как видно из уравнения (23), запаздывание на низкой частоте $\frac{f_a f_b f_c}{f_0^2}$. Это иллюстрируется на рис. 74, из

которого видно, что измененная амплитудная характеристика имеет постоянный наклон, равный -6 дб на октаву, от частоты $\frac{f_a f_b f_c}{f_0^3}$ до частоты f_0 , затем наклон становится равным -18 дб на октаву. Таким образом, в результате применения этого способа стабилизации сопрягающие частоты n внутренних апериодических звеньев перераспределяются так, что сопрягающие частоты $(n-1)$ звеньев преобразуются к высокой частоте f_0 , а остающееся звено оказывает влияние на низких частотах и дает уменьшение усиления, равное -6 дб на октаву, в пределах полосы пропускания усилителя.

Добавленное низкочастотное звено с сопрягающей частотой, равной $\frac{f_a f_b f_c}{f_0^3}$, дает фазовый сдвиг, равный -90° на высоких частотах, так что добавление еще двух звеньев с сопрягающей частотой, равной f_0 , дает фазовый сдвиг в разомкнутой системе, равный -360° ; f_0 определяется из рассмотрения запасов по фазе и по амплитуде.

Проиллюстрируем расчет на примере усилителя постоянного тока со средним коэффициентом усиления и 100%-ной отрицательной обратной связью (рис. 74). Чтобы удовлетворить требованиям запаса по амплитуде, коэффициент усиления разомкнутой системы должен быть равным -9 дб при фазовом сдвиге в разомкнутой системе, равном -360° , т. е. на частоте f_0 . Так как наклон амплитудной характеристики равен -60 дб на октаву в диапазоне частот от $\frac{f_a f_b f_c}{f_0^3}$ до f_0 , то мы имеем уравнение

$$\frac{f_a f_b f_c}{f_0^3} = \frac{f_0}{2^{89/6}} \cdot \frac{f_0}{28850},$$

где коэффициент усиления на низких частотах равен 80 дб, так что общее изменение коэффициента усиления от частоты $\frac{f_a f_b f_c}{f_0^3}$ до частоты f_0 равно 89 дб, откуда

$$f_0 = \sqrt[3]{2^{89/6} f_a f_b f_c} = 7,2 \text{ мГц},$$

где $f_a = 80$ кГц, $f_b = 200$ кГц и $f_c = 800$ кГц.

Таким образом, теперь можно рассчитать низкочастотное апериодическое звено. Его сопрягающая частота равна 247 кГц. На рис. 74 показано, что требования запаса по фазе легко выполняются. Однако вычисление f_0 , основанное только на запасе по фазе, приводит к неадекватному значению запаса по амплитуде вследствие большой скорости изменения фазового сдвига около частоты f_0 .

Интегрирующие цепи, необходимые для стабилизации, подключаются, как показано на рис. 74. Значения их параметров вычисляются следующим образом.

1. Инерционное звено анодных цепей первого дифференциального каскада имеет сопрягающую частоту, равную 800 кГц, и остается неизменным.

2. Апериодическое звено с сопрягающей частотой 200 кГц второго дифференциального каскада заменяется апериодическими звеньями на частотах 7,2 мГц и $\frac{f_b f_c}{f_0} = 22,2$ кГц, а также форсирующим звеном на частоте 800 кГц.

Таким образом, используя обозначения приложения 2, получим:

$$T'_L = 0,795 \text{ мксек} \left(\frac{1}{2\pi \cdot 0,2} \right); \quad T_1 = 7,16 \text{ мксек} \left(\frac{1}{2\pi \cdot 0,0222} \right),$$

$$T_T = 0,199 \text{ мксек} \left(\frac{1}{2\pi \cdot 0,8} \right); \quad T_2 = 0,022 \text{ мксек} \left(\frac{1}{2\pi \cdot 7,2} \right),$$

$$CR_L = (T_1 + T_2) - (T'_L + T_T) = 6,188 \text{ мксек}.$$

Но R_L есть эквивалентное анодное сопротивление, равное 10 ком, и поэтому

$$C = 618,8 \text{ нф},$$

$$R = \frac{T_T}{C} = 317 \text{ ом}.$$

3. Собственное апериодическое звено анодной цепи пентода (80 кГц) заменяется апериодическими звеньями на частотах 7,2 кГц и $\frac{f_a f_b f_c}{f_0^2} = 247$ кГц и форсирующим звеном на

частоте 22,2 *кГц*, откуда

$$\begin{aligned} T'_L &= 1,99 \text{ мксек}, & T_1 &= 645 \text{ мксек}, \\ T_L &= 7,16 \text{ мксек}, & T_2 &= 0,022 \text{ мксек}, \\ CR_L &= 636 \text{ мксек}. \end{aligned}$$

R_L есть анодная нагрузка пентода, равная 100 *ком*, и поэтому

$$\begin{cases} C = 6360 \text{ пф}, \\ R = \frac{T_T}{C} = 1125 \text{ ом}. \end{cases}$$

В результате применения интегрирующих цепей для стабилизации полоса пропускания значительно расширяется по сравнению со стабилизацией при помощи одного апериодического звена. Можно и дальше улучшить полосу пропускания, добившись наклона амплитудной характеристики -10 дб на октаву вместо -6 дб на октаву, создавая тем самым фазовый сдвиг, равный точно -330° на некотором диапазоне частот.

Это дает довольно хорошее приближение к идеальной характеристике Боде, в которой запас по фазе удерживается равным 36° во всей граничной области; при этом получается максимально возможная полоса пропускания. В реальном усилителе можно приблизиться к наклону, равному -10 дб на октаву, преобразуя характеристику цепи так, чтобы наклон ее был не постоянным, а равным -6 дб и -12 дб на октаву, чтобы в среднем получить наклон, равный -10 дб на октаву. Процесс приближения к идеальным характеристикам в основном определяется последовательным подбором, и в специальных случаях он может быть быстро завершен с помощью правильно выбранных интегрирующих цепей, заменяющих апериодические звенья, образованные анодными цепями. Если коэффициент усиления разомкнутой системы усилителя больше единицы на частотах выше 10 *мГц*, основное влияние могут оказывать уже не звенья, образованные анодными цепями. Например, значительные запаздывания могут быть вызваны сеточными «запирающими» сопротивлениями в сочетании с паразитной емкостью. Каскад

катодного повторителя может начать вносить опережение по фазе на частотах, достаточно высоких, чтобы коэффициент усиления каскада уменьшился. Эти вопросы, однако, лежат вне рамок этой книги.

5.8. Выходное сопротивление усилителя с потенциально заземленной суммирующей точкой

Выходное сопротивление такого усилителя может быть сделано очень низким. Докажем это на примере ранее рассмотренного усилителя, передаточная функция прямой цепи которого от входной сетки до сетки катодного повторителя равна $\bar{y}(p)$. Предположим, что крутизна характеристики лампы катодного повторителя равна g_m . Если к выходу усилителя подключен источник синусоидального напряжения $e_{\text{ВЫХ}}(t)$ с нулевым сопротивлением, то можно вычислить ток $i_{\text{ВЫХ}}$, создаваемый этим источником. Выходное сопротивление тогда равно отношению $\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{i}_{\text{ВЫХ}}}$. Напряжение на входной сетке усилителя вследствие того, что напряжение $e_{\text{ВЫХ}}$ приложено к выходной точке, равно

$$\bar{v}_g(j\omega) = \bar{e}_{\text{ВЫХ}}(j\omega) \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2},$$

где \bar{Z}_1 и \bar{Z}_2 — полные сопротивления входной цепи и цепи обратной связи.

Напряжение на сетке выходного катодного повторителя, следовательно, равно

$$\bar{e}(j\omega) = \bar{e}_{\text{ВЫХ}}(j\omega) \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \bar{y}(j\omega).$$

Так как на катод выходного каскада подается напряжение источника сигнала, то ток, проходящий через катодный повторитель, равен

$$i_{\text{ВЫХ}} = g_m (\bar{e} - \bar{e}_{\text{ВЫХ}}), \quad \bar{i}_{\text{ВЫХ}} = g_m \bar{e}_{\text{ВЫХ}} \left[\frac{\bar{y}(j\omega) \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} - 1 \right].$$

Катодное напряжение должно быть неизменным и, следовательно, источник сигнала должен дать ток, равный

— $i_{\text{ВЫХ}}$, для того, чтобы противодействовать току, вызванному наличием обратной связи.

Выходное сопротивление равно

$$\bar{Z}_{\text{ВЫХ}} = -\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{i}_{\text{ВЫХ}}} \left\{ g_m \left[1 - \frac{\bar{y}(j\omega) \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \right] \right\}^{-1}.$$

Если частота сигнала очень низка, так что $\bar{y}(j\omega)$ есть просто число — m , и если сопротивления входной цепи и цепи обратной связи — активные, то

$$\frac{1}{R_{\text{ВЫХ}}} = g_m \left[1 + \frac{mR_1}{R_1 + R_2} \right].$$

Для усилителя с низким коэффициентом усиления, описанного в 5.6.1, $m=60$, $g_m=12$ ма/в. Если $R_1=R_2$, то $R_{\text{ВЫХ}}=2,7$ ом. Для усилителя со средним коэффициентом усиления, описанного в 5.6.2, $m=14\,000$, $g_m=12$ ма/в. Если $R_1=R_2$, то $R_{\text{ВЫХ}}=0,012$ ом.

Нобль (Noble) предложил использовать это свойство для измерения тока, возникающего в короткозамкнутой цепи под действием некоторого источника сигнала, что часто представляет значительные трудности даже на постоянном токе вследствие относительно высокого сопротивления большинства миллиамперметров. Согласно методу Нобля ток от источника подается на выход усилителя с потенциально заземленной суммирующей точкой и активным сопротивлением в цепи обратной связи и определяется с помощью измерений изменений анодного тока лампы выходного катодного повторителя. Необходимо отметить, что упомянутое низкое выходное сопротивление будет эффективно при условии, что усилитель не перегружен, т. е. при условии, что обратная связь еще действует.

Литература

1. Williams F. C., Introduction to Circuit Techniques for Radio-location, Journal IEE, 1946, 93, Part IIIA, No. 1, p. 289.
2. Ritson F. J. Y. and Williams F. C., Electronics Servo Simulators, Journal IEE, 1947, 94, Part IIA, No. 1, p. 112.
3. Bode H. W., Relations between Attenuation and Phase in Feedback Amplifier Design, Bell System Technical Journal, July 1940, 19, p. 421.

ГЛАВА 6

ПРИМЕНЕНИЯ УСИЛИТЕЛЕЙ С ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ЗАЕМЛЕНИЕМ СУММИРУЮЩЕЙ ТОЧКИ

6.1. Выполнение над электрическими напряжениями операций, зависящих от частоты

Многие виды передаточных функций, связывающих два напряжения, могут быть воспроизведены путем надлежащего выбора отношения полного сопротивления входной цепи к полному сопротивлению цепи обратной связи в усилителе с потенциально заземленной суммирующей точкой или путем включения в цепь обратной связи усилителя специальных активных или пассивных цепей. В табл. 2 изображены три вида таких усилителей вместе с их переходными функциями и амплитудно-частотными и фазочастотными характеристиками. Рассмотрим эти схемы в том порядке, в котором они помещены в таблице.

6.1.1. Интегрирование по времени.

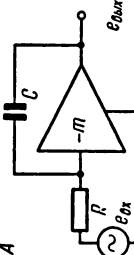
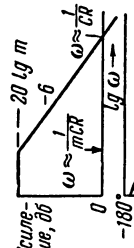

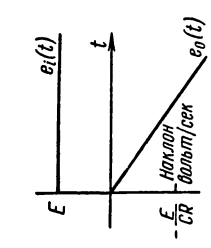
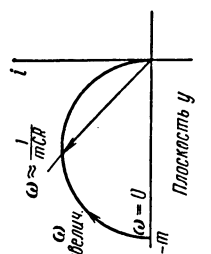
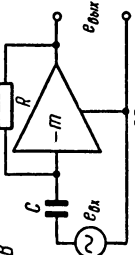
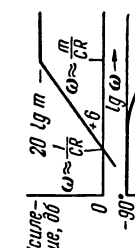

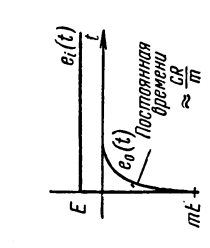
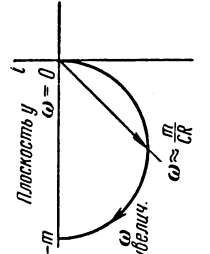
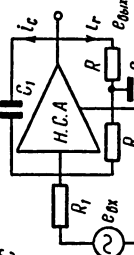
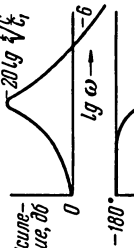
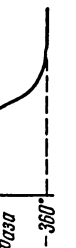
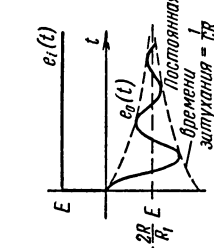
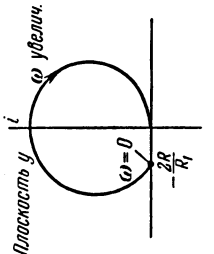
Если предположить, что коэффициент усиления усилителя по напряжению равен бесконечности, то можно видеть, что установившееся входное напряжение $e_{вх}(t)$ создает в потенциально заземленной точке ток, равный $\frac{e_{вх}}{R}$ (табл. 2, схема А). Этот ток протекает через емкость обратной связи, вследствие чего изменение выходного напряжения определяется следующим образом:

$$\frac{de_{вых}}{dt} = -\frac{i}{C},$$

откуда

$$e_{вых}(t) = -\frac{1}{C} \int i dt = -\frac{1}{CR} \int e_{вх} dt.$$

Таблица 2

Цели и передаточные функции	Амплитудно- и фазо-частотные характеристики	Реакции на ступку	Годогорлары частотных характеристик
<p>A</p>  $\frac{E_{\text{вых}}}{E_{\text{вх}}}(\rho) = \frac{-m}{1 + \rho CR(1+m)} \approx \frac{-1}{\rho CR}$	<p>Усиление, дБ</p>  <p>Фаза</p> 		 <p>Плоскость u</p> <p>$\omega \approx \frac{1}{mCR}$</p> <p>$\omega$ увелич.</p> <p>$\omega = 0$</p>
<p>B</p>  $\frac{E_{\text{вых}}}{E_{\text{вх}}}(\rho) = -m \frac{\rho CR}{1+m} \approx -\rho CR$	<p>Усиление, дБ</p>  <p>Фаза</p> 		 <p>Плоскость u</p> <p>$\omega = 0$</p> <p>$\omega \approx \frac{m}{CR}$</p> <p>$\omega$ увелич.</p>
<p>C</p>  $\frac{E_{\text{вых}}}{E_{\text{вх}}}(\rho) \approx \frac{-2R}{R_1 + R_2 C^2 \rho^2 + R_2 C_1 \rho + 1}$	<p>Усиление, дБ</p>  <p>Фаза</p> 		 <p>Плоскость u</p> <p>$\omega = 0$</p> <p>ω увелич.</p>

Таким образом, выходное напряжение равно входному напряжению, проинтегрированному по времени с коэффициентом пропорциональности $\frac{1}{CR}$. Этот результат может быть получен также, если положить, что общая передаточная функция равна отношению полных сопротивлений цепи обратной связи и входной цепи с обратным знаком, т. е.

$$\bar{y}_0(p) = \frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}(p)}{\bar{e}_{\text{ВХ}}(p)} = -\frac{1}{pCR}.$$

Если входной сигнал синусоидальный, то p заменяется на $j\omega$ и

$$\bar{y}_0(j\omega) = \frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{\bar{e}_{\text{ВХ}}(j\omega)} = -\frac{1}{j\omega CR}.$$

Для синусоидального входного сигнала с амплитудой A вольт вектор выходного напряжения равен $\frac{A}{\omega CR} e^{-j270^\circ}$. Следовательно, амплитудная характеристика этой схемы имеет постоянный наклон, равный -6 дБ на октаву и проходит через нуль децибел (усиление равно единице) при частоте, равной $\frac{1}{CR}$ радиан в секунду. Отставание по фазе равно 270° на всех частотах, причем запаздывание, равное 180° , вызывается присущей схеме инверсией фазы, а 90° определяются множителем частотной характеристики, зависящим от частоты.

Усилитель, используемый в любой реальной интегрирующей схеме, обладает конечным коэффициентом усиления прямой цепи и конечным выходным сопротивлением (см. 5.8), что обуславливает несовершенство процесса интегрирования. Это иллюстрируется на рис. 75, где коэффициент усиления усилителя равен $-m$, а выходное сопротивление при отсутствии обратной связи равно $R_{\text{ВЫХ}}$. В потенциально заземленной точке обязательно существует конечное напряжение e . На выходных зажимах при отсутствии нагрузки напряжение равно $e_{\text{ВЫХ}}$.

Из рис. 75 видно, что операторное выражение для тока i имеет вид

$$\bar{i}(p) = \frac{\bar{e}_{\text{ВХ}} - \bar{e}}{R} = (\bar{e} - \bar{e}_{\text{ВЫХ}}) pC$$

и

$$-m\bar{e} = \bar{e}_{\text{ВЫХ}} - \bar{i}R_{\text{ВЫХ}}.$$

Исключая i из этих двух уравнений, получаем:

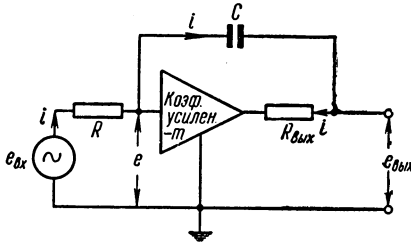


Рис. 75.

$$-m\bar{e} = \bar{e}_{\text{ВЫХ}} - \frac{(\bar{e}_{\text{ВХ}} - \bar{e})}{R} R_{\text{ВЫХ}} \quad (1)$$

и

$$\bar{e}(1 + pT) = \bar{e}_{\text{ВХ}} + pT\bar{e}_{\text{ВЫХ}}, \quad (2)$$

где $T = CR$.

Из уравнения (1) получаем:

$$\bar{e}(mR + R_{\text{ВЫХ}}) = \bar{e}_{\text{ВХ}}R_{\text{ВЫХ}} - \bar{e}_{\text{ВЫХ}}R. \quad (3)$$

Исключая \bar{e} из уравнений (2) и (3), получаем операторное выражение относительно $\bar{e}_{\text{ВХ}}$ и $\bar{e}_{\text{ВЫХ}}$

$$\bar{e} = \frac{\bar{e}_{\text{ВХ}} + pT\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{1 + pT} = \frac{\bar{e}_{\text{ВХ}}R_{\text{ВЫХ}} - \bar{e}_{\text{ВЫХ}}R}{mR + R_{\text{ВЫХ}}},$$

откуда

$$(\bar{e}_{\text{ВХ}} + pT\bar{e}_{\text{ВЫХ}})(mR + R_{\text{ВЫХ}}) = (\bar{e}_{\text{ВХ}}R_{\text{ВЫХ}} - \bar{e}_{\text{ВЫХ}}R)(1 + pT).$$

Разделяя $\bar{e}_{\text{ВХ}}$ и $\bar{e}_{\text{ВЫХ}}$, получаем:

$$\bar{e}_{\text{ВХ}}[mR - pTR_{\text{ВЫХ}}] = \bar{e}_{\text{ВЫХ}}[-pT(mR + R_{\text{ВЫХ}} + R) - R],$$

$$\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{e}_{\text{ВХ}}} = \frac{-m + pT \frac{R_{\text{ВЫХ}}}{R}}{1 + pT \left(m + 1 + \frac{R_{\text{ВЫХ}}}{R} \right)}. \quad (4)$$

Если $\bar{e}_{\text{ВХ}}(t)$ представляет собой единичную ступенчатую функцию, то решение уравнения (4) в момент приложе-

ния возмущения, т. е. при $t = 0$, получается исключением всех членов, не содержащих p^*), т. е.

$$\frac{e_{\text{вых}}}{e_{\text{вх}}}(t=0) = U(t)_{t=0} = \frac{\frac{R_{\text{вых}}}{R}}{1+m+\frac{R_{\text{вых}}}{R}} \approx \frac{R_{\text{вых}}}{mR}$$

при $m \gg 1$.

Процесс, вызванный воздействием вида ступенчатой функции величины E вольт, изображен пунктиром на рис. 76. Он представляет собой экспоненциально уменьшающееся напряжение, асимптотически стремящееся к $-mE$ вольт. Такой вид напряжения существовал бы в идеальном случае. В реальном же усилителе из-за наличия насыщения при напряжении, значительно большем, чем $-mE$, $e_{\text{вых}}$ принимает вид, изображенный сплошной линией на рис. 76. В линейных пределах изменения выходного напряжения процесс представляет собой начальную часть экспоненты, тем более близкую к линейной форме, чем больше m и, следовательно, чем больше величина напряжения, к которому асимптотически стремится выходное напряжение. Апериодическое звено с сопрягающей частотой $\omega = \frac{1}{CR(1+m)}$, по существу, является несовершенным интегратором. На частотах ниже этой коэффициент усиления стремится к $-m$ и фазовый сдвиг к -180° (вследствие изменения знака в усилителе). На более высоких частотах фаза стремится к -270° и усиление стремится к $\frac{1}{\omega T}$, как в идеальном интеграторе. Во многих случаях

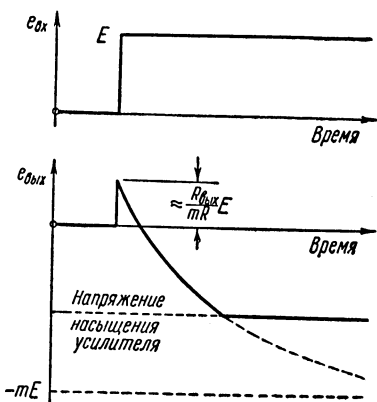


Рис. 76.

представляет собой начальную часть экспоненты, тем более близкую к линейной форме, чем больше m и, следовательно, чем больше величина напряжения, к которому асимптотически стремится выходное напряжение. Апериодическое звено с сопрягающей частотой $\omega = \frac{1}{CR(1+m)}$, по существу, является несовершенным интегратором. На частотах ниже этой коэффициент усиления стремится к $-m$ и фазовый сдвиг к -180° (вследствие изменения знака в усилителе). На более высоких частотах фаза стремится к -270° и усиление стремится к $\frac{1}{\omega T}$, как в идеальном интеграторе. Во многих случаях

*) Это следует из теоремы о начальном значении $f(t)_{t=0} = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p)$. (Прим. ред.)

(например, в схемах генераторов развертки) требуется точное линейное изменение напряжения. Этого можно достичь либо при очень большом коэффициенте усиления m , либо с помощью специальных схем компенсации, например таких, какие были описаны Вильямсом (Williams) и Муди (Moody) [1].

Для $R_{\text{вых}} \ll R$, что обычно и имеет место, эквивалентная схема усилителя, изображенного на рис. 75, имеет вид, показанный на рис. 77, а и б.

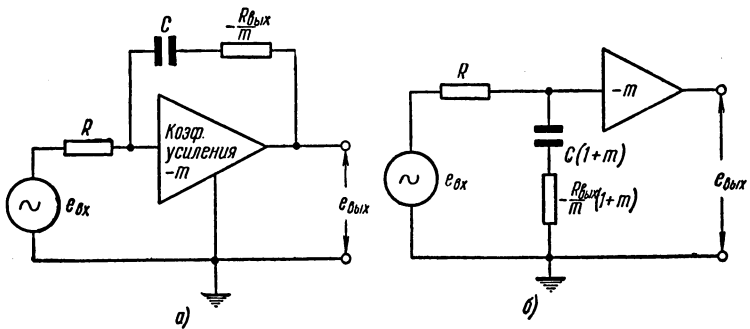


Рис. 77.

Для того, чтобы устранить начальный положительный выброс процесса (рис. 76), можно подключить сопротивление, равное $\frac{R_{\text{вых}}}{m}$ ом, последовательно с емкостью обратной связи, тем самым скомпенсировав отрицательное сопротивление $-\frac{R_{\text{вых}}}{m}$. Выходное сопротивление усилителя часто пренебрежимо мало. Это имеет место, если в качестве выходного каскада используется катодный повторитель, у которого $R_{\text{вых}}$ порядка нескольких сотен ом. С другой стороны, в интеграторе, использующем каскад на пентоде с обратной связью с анода, $R_{\text{вых}}$ может принимать значение, равное сопротивлению анодной нагрузки и может оказывать существенное влияние на реакцию. Отметим, что если $R_{\text{вых}}$ значительно, общая передаточная функция интегратора (уравнение (4)) неминимально фазовая.

Структурная схема интегратора с потенциально заземленной суммирующей точкой, на который подается напря-

жение с низкоомного источника, изображена на рис. 78 (сравни рис. 66). Цепь обратной связи создает опережение по фазе на всех частотах, и это, вообще говоря, увеличивает устойчивость системы. Например, если $\bar{y}_1(j\omega)$ видоизменена таким образом, что выполняются соответствующие требования запаса устойчивости при 100%-ной обратной связи, как было описано в предыдущей главе, то интегратор, включающий этот усилитель, тоже устойчив.

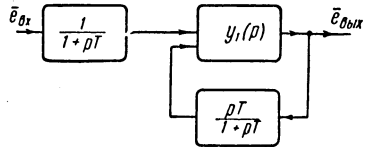


Рис. 78.

Интеграторы с обратной связью широко применяются в схемах генераторов развертки и в электронных моделях. Кроме того, они используются при интегрировании физических величин, представленных в виде напряжения, например, в навигационном оборудовании для получения напряжения, пропорционального расстоянию, пройденному самолетом, из напряжения, пропорционального скорости относительно земли.

6.1.2. Дифференцирование по времени.

Схема, выполняющая операцию дифференцирования, изображена в табл. 2, схема В. Эквивалентная схема, справедливая при отсутствии насыщения усилителя, изображена на рис. 79, из которой общая передаточная функция легко может быть получена в виде

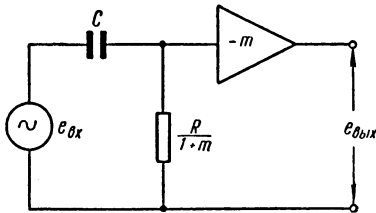


Рис. 79.

$$\bar{y}_0(p) \approx -m \frac{\frac{pT}{1+m}}{1 + \frac{pT}{1+m}},$$

где $T = CR$, а выходным сопротивлением усилителя мы пренебрегаем.

Если m очень велико, то передаточная функция стремится к передаточной функции идеального дифференцирующего устройства с постоянной времени T , т. е.

$$\bar{y}_0(p) \rightarrow -pT.$$

Реальная дифференцирующая схема подвергается сильным перегрузкам, если скорость изменения входного напряжения слишком высока; это иллюстрируется рис. 80. Если скорость изменения напряжения на входе такова, что наступает насыщение, то обратная связь нарушается и входную сетку уже нельзя считать потенциально заземленной. Тогда при внезапном изменении входного напряжения в сторону уменьшения перегрузки с малой скоростью

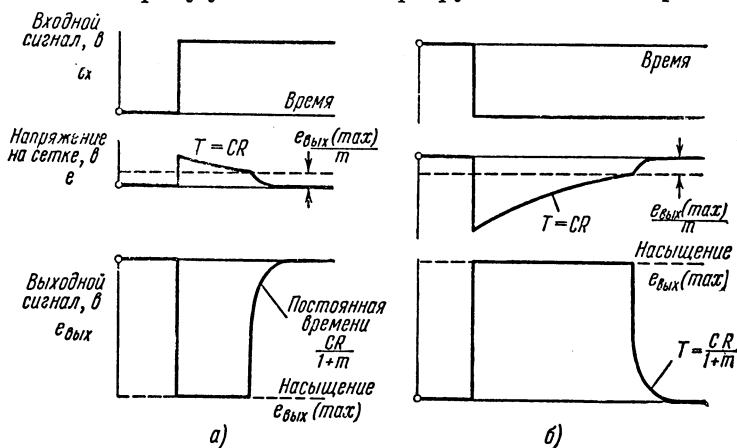


Рис. 80.

сетка первого каскада остается некоторое время под высоким потенциалом, т. е. неуправляемой, а конденсатор разряжается через сопротивление обратной связи, возвращая сеточное смещение первого каскада к уровню, при котором восстанавливается потенциальное заземление. Восстановление происходит с постоянной времени, равной CR сек, и часто является серьезным источником искажений. Вообще говоря, эти искажения сказываются сильнее при отрицательном сигнале на входе, так как отрицательный потенциал, появляющийся на сетке при перегрузке, не ограничивается сеточным током. При положительном сигнале на входе потенциал сетки ограничивается сеточным током и время восстановления соответственно уменьшается. Структурная схема дифференцирующего устройства с потенциально заземленной суммирующей точкой изображе-

на на рис. 81. В замкнутую систему входит аperiodическое звено и усилитель постоянного тока с передаточной функцией $\bar{y}_1(p)$. При разработке этого устройства должно быть учтено влияние аperiodического звена, так как фазовый сдвиг в нем может вызвать неустойчивость, даже если усилитель постоянно-го тока устойчив при 100 %-ной обратной связи, т. е. при обратной связи, подающейся непосредственно с выхода на вход устройства.

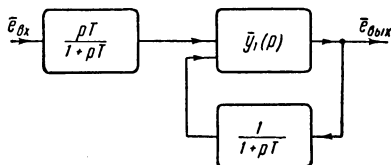


Рис. 81.

Вредное влияние перегрузки в простой дифференцирующей схеме можно устранить с помощью схемы, изображенной на рис. 82. Цепь обратной связи усилителя постоянного тока с высоким коэффициентом усиления содержит потенциально заземленный интегратор последовательно

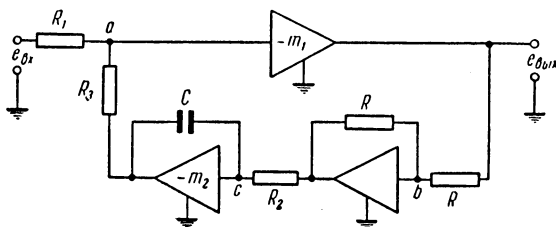


Рис. 82.

с фазоинверторным каскадом, коэффициент усиления которого равен единице. Схема потенциально заземлена в точках a , b и c . Если m_1 велико по сравнению с единицей, то передаточная функция, связывающая $\bar{e}_{\text{ВЫХ}}$ и $\bar{e}_{\text{ВХ}}$, имеет вид

$$\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{e}_{\text{ВХ}}} \approx \left[\frac{1 + pC_2R_2m_2}{m_2} \right] \frac{R_3}{R_1}. \quad (5)$$

При $m_2 \gg 1$ это выражение стремится к соответствующему выражению для дифференцирующей схемы. Быстро изменяющееся входное напряжение может привести к тому, что $\bar{e}_{\text{ВЫХ}}$ достигает предельного значения, определяемого насыщением усилителя с коэффициентом усиления $-m_1$,

Но прекращение работы первого каскада уже не может иметь места, так как между потенциально заземленной точкой и входным источником связь уже не чисто емкостная. Другой способ устранения перегрузки изображен на рис. 83. Диоды подключены параллельно сопротивлению обратной связи, и на них подано напряжение смещения от батарей или с активных делителей напряжения, так что они заперты, если выходное напряжение $e_{\text{вых}}$ не превышает E вольт;

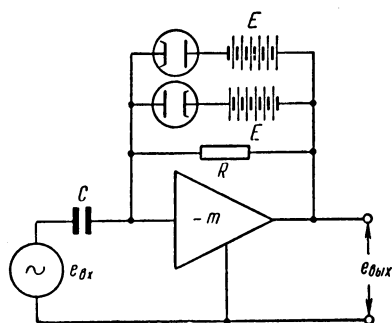


Рис. 83.

E выбрано немного меньшим, чем уровень насыщения усилителя. Если скорость изменения $e_{\text{вх}}$ такова, что $e_{\text{вых}}$ достигает предельного уровня E , диод отпирается и немедленно закорачивает сопротивление R так, что когда скорость изменения $e_{\text{вх}}$ снова падает, $e_{\text{вых}}$ восстанавливается с постоянной времени восстановления, равной CR_0 , где R_0 — сопротивление

диода и может быть много меньше R . При этом длительность периода перегрузки значительно уменьшается.

Применение индуктивности в качестве элемента обратной связи и сопротивления в качестве входного элемента усилителя с потенциально заземленной точкой (решающее действие). На практике, однако, потери в индуктивности и неудобство применения индуктивности на очень низких частотах ведут к тому, что этот метод не применяется.

Дифференцирующие устройства редко встречаются вне области электронных моделей, но могут быть также применены для получения скорости по перемещению, если известны пределы изменения скорости и схема работает внутри этих пределов.

6.1.3. Резонансные схемы.

6.1.3.1. Обратная связь в виде Т-образного моста. Если цепь обратной связи содержит пассивную цепь в виде Т-образного моста, то общая передаточная функция напоминает общую передаточную

функцию резонансной системы или колебательного звена. Т-образный мост действует, как фильтр, в узком диапазоне частот, а наличие его в цепи обратной связи придает схеме в целом обратное свойство, т. е. свойство резонансной цепи с высоким коэффициентом усиления в узкой полосе частот.

Выведем передаточную функцию такой схемы в предположении, что коэффициент усиления усилителя очень высок. Параметры схемы даны в табл. 2, схема С.

Входной ток в потенциально заземленной точке равен $i_{\text{вх}} = \frac{e_{\text{вх}}}{R_1}$. Токи обратной связи i_c и i_r (см. табл. 2, схема С) текут по двум цепям, причем

$$i_c = -pC_1 \bar{e}_{\text{вых}},$$

а

$$i_r = \frac{-\bar{e}_{\text{вых}}}{R + \frac{1}{pC}} \frac{1}{R + \frac{1}{pC}},$$

$$\begin{aligned} \bar{i}_c + \bar{i}_r &= -e_{\text{вых}} \left[pC_1 + \frac{1}{R^2 + \frac{2R}{pC}} \frac{1}{pC} \right] = \\ &= -\bar{e}_{\text{вых}} \left[pC_1 + \frac{1}{pCR^2 + 2R} \right]. \end{aligned}$$

На основании равенства

$$\bar{i}_{\text{вх}} = \bar{i}_c + \bar{i}_r$$

получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{e}_{\text{вх}}}{R_1} &= -e_{\text{вых}} \left[pC_1 + \frac{1}{2R \left(1 + p \frac{CR}{2} \right)} \right] = \\ &= -\bar{e}_{\text{вых}} \frac{p2C_1R \left(1 + p \frac{CR}{2} \right) + 1}{2R \left(1 + p \frac{CR}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Следовательно, общая передаточная функция системы равна

$$\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{e_{\text{ВХ}}} = -\frac{2R}{R_1} \frac{1+p \frac{CR}{2}}{p^2 CC_1 R^2 + p 2C_1 R + 1},$$

т. е.

$$\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{e_{\text{ВХ}}} = -\frac{2R}{R_1} \frac{1+p \frac{T}{2}}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{p}{Q\omega_0} + 1}, \quad (6)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{CC_1 R^2}; \quad Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{C_1}}; \quad T = CR.$$

Усиление при резонансе и резонансная частота определяются параметрами цепи и не зависят от коэффициента усиления усилителя, если он достаточно велик.

Эта схема применяется не только в электронных моделях, но и для исследования форм колебаний на очень низких частотах, где требуются резонансные системы с узкой полосой пропускания, а цепочки LC неприменимы. Величина Q и, следовательно, ширина полосы пропускания резонансной системы изменяются пропорционально корню квадратному из $\frac{C}{C_1}$; практически это отношение не может быть больше чем $10^4 : 1$, т. е. максимально возможное значение Q равно приблизительно 50.

6.1.3.2. Соединение интеграторов в кольцо. Другая схема устройства, имеющего передаточную функцию колебательного звена, изображена на рис. 84. Такая система называется кольцом интеграторов и часто встречается в электронных моделях (см. гл. 13). Предполагая, что коэффициенты усиления усилителей велики, можно показать, что ее общая передаточная функция имеет вид

$$\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{e_{\text{ВХ}}} = -\frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{p}{Q\omega_0} + 1}, \quad (7)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C_2 C_3 R_1 R_3}, \quad Q = R_2 \sqrt{\frac{C_2}{C_3 R_1 R_3}}.$$

Эта система ведет себя так же, как резонансная система с затуханием. Степень затухания зависит от величины сопротивления R_2 . При R_2 бесконечно большом затухание равно нулю. Практически то, что коэффициент усиления

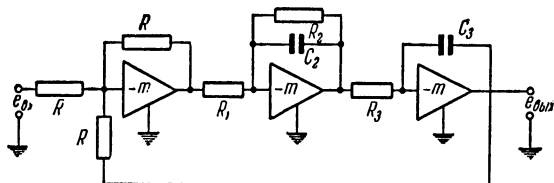


Рис. 84.

не бесконечен, вносит небольшое затухание. Фазовые и амплитудная характеристики, соответствующие общей реакции этой схемы, показаны на рис. 50.

6.1.3.3. Схема с комбинированной положительной и отрицательной обратной связью. Следующая схема, обладающая резонансными характеристиками, изображена на рис. 85. Принцип потенциального заземления здесь не применяется. Устойчивость усилителя постоянного тока, состоящего из дифференциального каскада на входе и каскада катодного повторителя на выходе, обеспечена с помощью отрицательной обратной связи. При очень высоком коэффициенте усиления прямой цепи, достаточно очень малое различие потенциалов на управляющей сетке и сетке обратной связи, G_1 и G_2 соответственно, чтобы вызвать большой разбаланс в анодных напряжениях. При этих условиях благодаря отрицательной обратной связи выходное напряжение в n раз больше напряжения на сигнальной сетке, причем на сетку обратной связи подается напряжение с выхода, равное $\frac{1}{n}$ выходного напряжения. Для данной схемы полу-

чен коэффициент усиления прямой цепи, равный 35. Для получения более высоких коэффициентов усиления можно использовать усилитель, изображенный на рис. 70.

Положительная обратная связь с выхода усилителя подается на управляющую сетку с помощью квазидифференцирующей цепи и апериодического звена. В изображенной

схеме аperiodическое звено пренебрежимо мало нагружает квазидифференцирующую цепь, так что буферного каскада в виде промежуточного катодного повторителя не требуется. Зависимость между входным напряжением

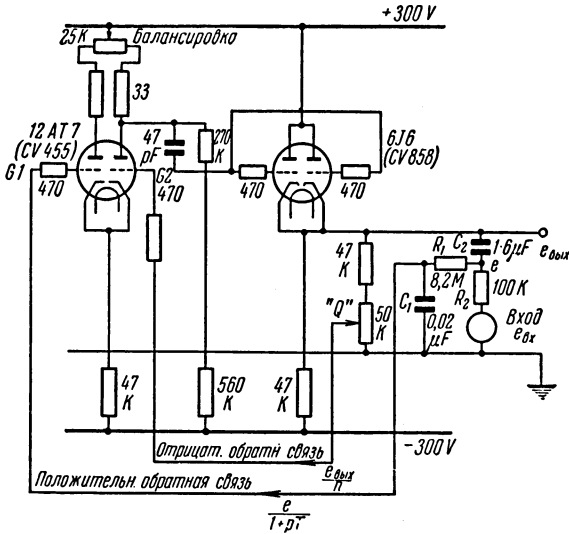


Рис. 85.

$e_{вх}$ и выходным напряжением усилителя $e_{вых}$ выводится в предположении, что отрицательная обратная связь делает усиление усилителя на низких частотах равным n . При этом

$$\bar{e} = \frac{(\bar{e}_{вых} - \bar{e}_{вх}) R_2}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} + \bar{e}_{вх} = \frac{pT_2}{1 + pT_2} \bar{e}_{вых} + \frac{1}{1 + pT_2} \bar{e}_{вх}$$

и

$$\bar{e}_{вых} = \frac{n\bar{e}}{1 + pT_1},$$

где $T_1 = C_1 R_1$, $T_2 = C_2 R_2$.

Исключая \bar{e} из этих уравнений, получаем зависимость между $\bar{e}_{вых}$ и $\bar{e}_{вх}$ в виде

$$\bar{e}_{вых} \left\{ \frac{1 + pT_1}{n} - \frac{pT_2}{1 + pT_2} \right\} = \bar{e}_{вх} \left\{ 1 - \frac{pT_2}{1 + pT_2} \right\},$$

откуда

$$\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{e_{\text{ВХ}}} = \frac{n(1+pT_2)}{(1+pT_1)(1+pT_2) - n p T_2} \frac{1}{(1+pT_2)} = \frac{n}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{p}{\omega_0 Q} + 1}, \quad (8)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{T_1 T_2} \quad \text{и} \quad Q = \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2 (1-n)}.$$

Общая передаточная функция совпадает с передаточной функцией колебательного звена. Интересно отметить, что здесь величина Q легко может быть сделана очень большой, так как при $n=1+\frac{T_1}{T_2}$, $Q=\infty$, т. е. затухание совершенно отсутствует. Если величина Q слишком велика, то n должно быть очень стабильным, а это требует большой величины обратной связи, охватывающей усилитель напряжения. Однако здесь нетрудно сделать собственную частоту очень низкой, благодаря чему схема находит применения в электронных моделях и при исследовании форм колебаний.

6.2. Нелинейные преобразования

Если ток, протекающий через потенциально заземленную точку, выпрямить диодом, электронным или кристаллическим, то можно реализовать схему, обладающую заданной нелинейной зависимостью выходного напряжения от входного.

Из рис. 86, а видно, что от одного источника напряжение подходит к потенциально заземленной точке по двум активным цепям, причем одна из цепей содержит, кроме сопротивления, последовательно включенный диод, напряжение смещения на который подается от батареи с напряжением E вольт. Если $e_{\text{ВХ}}$ меньше, чем E , то весь ток протекает через сопротивление R и схема ведет себя, как усилитель с потенциально заземленной суммирующей точкой с коэффициентом усиления, примерно равным $-\frac{R_2}{R_1}$.

При $e_{\text{ВХ}}=E$ диод отпирается, и если последовательное сопротивление диода мало по сравнению с R_1 , то к потен-

циально заземленной точке подается добавочный ток $\frac{e_{вх}-E}{R}$, вследствие чего увеличивается наклон кривой, определяющий соотношение между выходным и входным напряжением (рис. 86, б). Используя несколько параллельных входных цепей, содержащих диоды с правильно выбранным

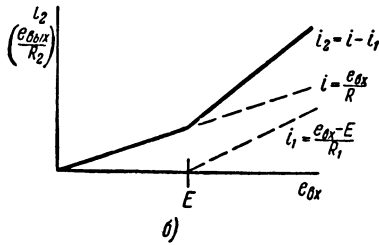
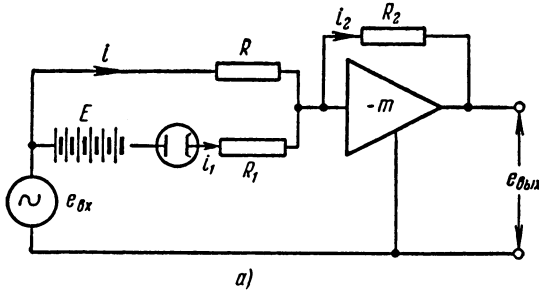


Рис. 86.

смещением, можно аппроксимировать линейными отрезками любую нелинейную зависимость напряжения с крутизной, увеличивающейся с увеличением величины входного напряжения. Диоды, включенные в обратном направлении, воспроизводят зависимость для отрицательных сигналов.

На рис. 87, а изображена схема, которая может быть использована, если требуется, чтобы наклон характеристики уменьшался с увеличением входного напряжения. Приведенные примеры являются иллюстрацией общего принципа, заключающегося в том, что данный линейный элемент, подключенный в цепь отрицательной обратной связи, оказывает влияние, обратное тому, которое бы

он оказывал, будучи подключенным во входную цепь. Общий ток, текущий от потенциально заземленной точки к цепям обратной связи, всегда равен $\frac{e_{\text{вх}}}{R_1}$, но при увеличении по абсолютной величине отрицательного выходного напряжения $e_{\text{вых}}$ до определенного значения он начинает течь по большему числу параллельных цепей. Другими словами, общее сопротивление обратной связи уменьшается

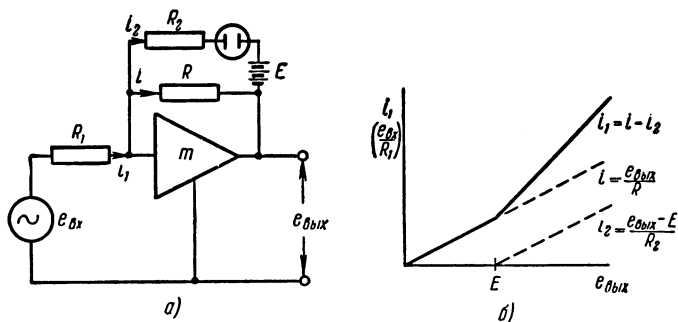


Рис. 87.

скачком и общий коэффициент усиления уменьшается при увеличении $e_{\text{вых}}$ (рис. 87, б).

6.2.1. Устройство, воспроизводящее квадратическую зависимость.

В качестве примера схемы, позволяющей получить специальную математическую зависимость, мы рассмотрим схему, выходное напряжение которой $e_{\text{вых}}$ изменяется пропорционально квадрату входного напряжения $e_{\text{вх}}$, причем знак $e_{\text{вх}}$ сохраняется, т. е.

$$e_{\text{вых}} = e_{\text{вх}} |e_{\text{вх}}|.$$

Эта схема изображена на рис. 88, а. На рис. 88, б изображена зависимость между током через потенциально заземленную точку и входным напряжением. Батареи или незаземленный источник питания обеспечивают необходимое напряжение смещения на диодах.

6.2.1.1. Выбор интервалов между напряжениями смещения диодов. Выбор

интервалов для линейных отрезков зависит от требуемой точности. Вычислим максимальное расхождение между истинной и приближенной зависимостями и на основе этого выберем интервалы.

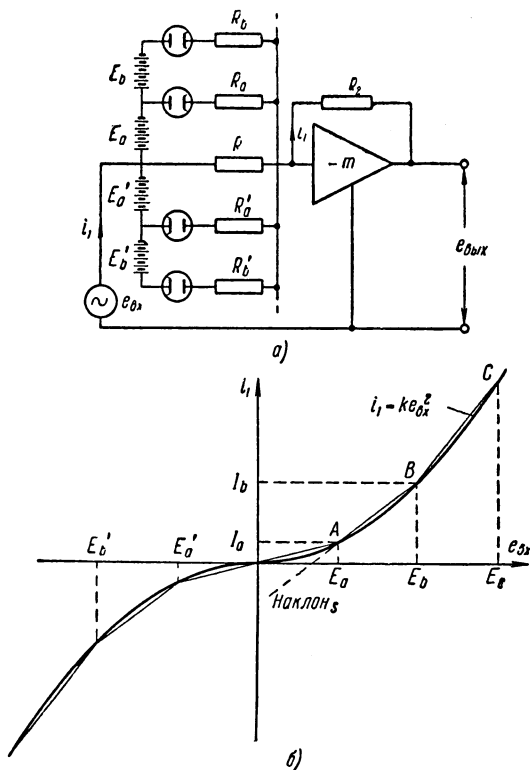


Рис. 88.

Рассмотрим интервал AB между произвольными уровнями напряжения смещения E_b и E_a на рис. 88, б. Наклон линейного отрезка, аппроксимирующего кривую в этом интервале, равен

$$s = \frac{I_b - I_a}{E_b - E_a} = K \frac{(E_b^2 - E_a^2)}{E_b - E_a} = K (E_b + E_a). \quad (9)$$

Уравнение прямой, на которой лежит отрезок AB , имеет вид

$$i_1 = s e_{\text{вх}} - s E_a + I_a.$$

Подставляя значение s из уравнения (9), получаем:

$$i = K(E_b + E_a)(e_{\text{вх}} - E_a) + I_a.$$

Идеальная зависимость, связывающая $e_{\text{вх}}$ и i_1 , имеет вид

$$i_1 = K e_{\text{вх}}^2.$$

Ошибка ε между идеальной кривой и ее приближением есть разность между двумя значениями i_1 , т. е.

$$\varepsilon = K(E_b + E_a)(e_{\text{вх}} - E_a) - I_a - K e_{\text{вх}}^2.$$

Максимальное значение ε принимает в точке между A и B , которую можно найти, продифференцировав ε по $e_{\text{вх}}$ и приравняв производную нулю:

$$\frac{d\varepsilon}{de_{\text{вх}}} = K(E_b + E_a) - 2K e_{\text{вх}} = 0,$$

откуда

$$e_{\text{вх}} = \frac{E_b + E_a}{2}.$$

Ошибка принимает максимальное значение посередине между A и B , и ее значение может быть получено подстановкой значения $e_{\text{вх}}$, соответствующего максимальной ошибке, в выражение для ε , т. е.

$$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{K}{2}(E_b + E_a)(E_b - E_a) + I_a - \frac{K}{4}(E_b + E_a)^2.$$

Подставляя значение $I_a = K E_a^2$, получаем:

$$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{K}{4}[E_a^2 + E_b^2 - 2E_a E_b] = \frac{K}{4}[E_a - E_b]^2.$$

Отсюда ясно, что максимальная ошибка между любыми двумя точками A и B есть величина постоянная, если интервалы между напряжениями смещения постоянны; при этом относительная ошибка, выраженная в процентах от максимального значения тока, есть величина постоянная. С другой стороны, если необходимо, чтобы была постоянной абсолютная процентная ошибка, то интервалы смещения должны быть преобразованы

в соответствии с уравнением

$$\frac{e_{\max}}{\text{среднее значение } E \text{ в интервале}} = \frac{\frac{K}{4} (E_a - E_b)^2}{\frac{E_a + E_b}{2}} = \text{постоянной.}$$

В этом случае интервалы сужаются с уменьшением $e_{\text{вх}}$.

6.2.1.2. Выбор величины сопротивлений. Предположим, что интервалы между напряжениями смещения равны между собой и имеют величину E вольт, и найдем значение сопротивлений. Сопротивление R таково, что $I_a = KE_a$, так что крутизна первого отрезка равна $\frac{1}{K}$ мо и сопротивление R равно K ом. При $e_{\text{вх}} = E_b$ ток равен I_b , т. е. в четыре раза больше, чем I_a , так что крутизна второго отрезка в три раза больше, чем первого, т. е. равна $\frac{3}{K}$ мо. Добавочная проводимость, равная $\frac{2}{K}$ мо, подключается при $e_{\text{вх}} = E_a$, так что сопротивление R_a становится равным $\frac{K}{2}$ ом. При $e_{\text{вх}} = E_c = 3E$ ток $I_c = 9I_a$, так что проводимость на интервале BC равна $\frac{5}{K}$ мо. Опять-таки проводимость увеличивается на $\frac{2}{K}$ мо. В дальнейшем проводимость на каждом последующем интервале становится на $\frac{2}{K}$ мо больше, чем на предшествующем, так что сопротивление, подключаемое последовательно каждому диоду, должно быть равно $\frac{R}{2}$.

На минимальное значение интервала смещения накладывается ограничение контактным потенциалом диода, который может значительно меняться от лампы к лампе. Минимальный интервал смещения должен быть много больше, чем этот контактный потенциал, для того, чтобы избежать неопределенности и нестабильности величины интервалов между напряжениями смещения. Изменения крутизны на границе интервалов не испытывают скачков благодаря постепенному подключению проводимости в диодах при прохождении их потенциалов анод — катод

через нуль. Это явление помогает при аппроксимации непрерывной кривой.

Трудности, возникающие в связи с необходимостью использовать батареи или незаземленные источники питания, могут быть преодолены с помощью схемы, изображенной

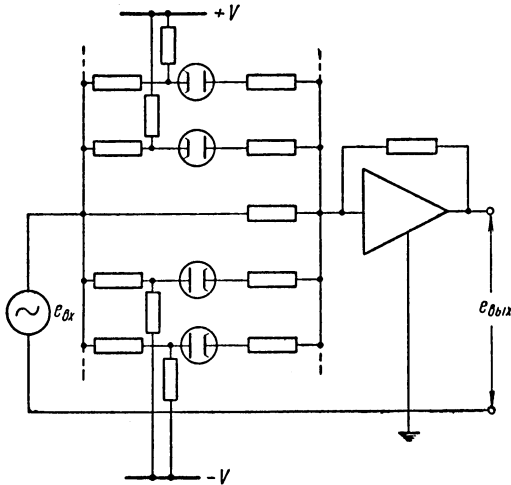


Рис. 89.

на рис. 89. При этом значительно возрастают трудности при расчете. Подача смещения диодов с использованием такой схемы была предложена Бертом (Burt) и Ланжем (Lange) [3].

Литература

1. Williams F. C. and Moody N. F., Ranging Circuits, Linear Time Base Generation and Associate Circuits, Journal IEE, 1946, 93, Part IIIA, No. 7, p. 1188.
2. Ritson F. J. U. and Hammond P. H., The Design and Testing of an Electronic Simulator for a Hydraulic Remote Position Control Servomechanism, Journal IEE, 1952, 99, Part II, No. 72, p. 533.
3. Burt E. G. C. and Lange O. H., Function Generators based on Linear Interpolation with Applications to Analogue Computing, Proceedings IEE, Monograph No. 137M, 1955 (103C, p. 51).

ГЛАВА 7

СЛЕДЯЩИЕ СИСТЕМЫ

7.1. Определение

Большое число устройств, в которых используется принцип обратной связи, носит общее название *следящих систем*. Определение следящих систем было дано Хазеном (Hazen) в классической статье [1], опубликованной в 1934 г.; следящие системы — это мощные усилительные устройства, в которых на вход усилительного элемента, управляющего исполнительным устройством, подается разность между входным и выходным сигналами устройства. Это определение остается справедливым и сейчас. Таким образом, двумя существенными чертами следящей системы являются усиление мощности и общая отрицательная обратная связь. В идеальном случае входной и выходной сигналы одинаковой физической природы равны в любой момент времени.

Блок-схема, содержащая основные элементы следящей системы, изображена на рис. 90. Выходная величина преобразуется с помощью преобразователя выходного сигнала к той же форме, что и входная величина, и затем сравнивается с ней в элементе сравнения, с выхода которого снимается величина, пропорциональная разности между входным и выходным сигналами. Эта разность называется *сигналом ошибки*, или *отклонением*. После усиления сигнал ошибки воздействует на исполнительный элемент, который изменяет выходную величину так, чтобы сигнал ошибки стремился к нулю. Таким образом, прямая цепь содержит элемент сравнения, усилитель сигнала ошибки и исполнительное устройство, а цепь обратной связи содержит преобразователь выходного сигнала. Часто

в качестве элемента сравнения используется сумматор, и в этом случае преобразованная выходная величина меняет свой знак в цепи обратной связи прежде, чем она складывается с входной величиной. Сравнение, как правило, осуществляется при низком уровне мощности. Усиление мощности происходит в каскадах усилителя ошибки и исполнительного устройства.

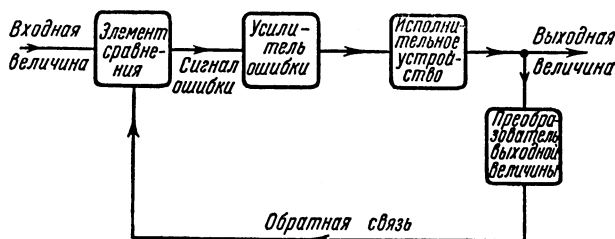


Рис. 90.

Преимущества замкнутых систем регулирования были рассмотрены в общем виде в главе 2. Эти преимущества остаются справедливыми и для следящих систем, в которых преобразованная выходная величина поддерживается равной входной величине при наличии нелинейных и зависящих от времени параметров в прямой цепи, а также изменяющихся внешних условий.

7.2. Применения

Определению следящих систем удовлетворяет очень широкий круг самых разнообразных устройств. Вследствие этого в дальнейшем мы ограничимся исследованием следящих систем, в которых регулируется движение механического вала (такие следящие системы часто называются сервомеханизмами), и исключим из рассмотрения специальные вопросы, касающиеся регуляторов температуры, химических процессов, напряжения и тока и им подобных, основанных на тех же принципах. Прежде чем приступить к более детальному исследованию свойств следящих систем и методов, используемых для их стабилизации, рассмотрим некоторые примеры.

7.2.1. Следящая система гироскопа.

В тех случаях, когда нужно точно воспроизвести движения гироскопа и затем усилить по мощности сигнал, соответствующий этому движению, необходимо предусмотреть такие датчики, которые практически не нагружают

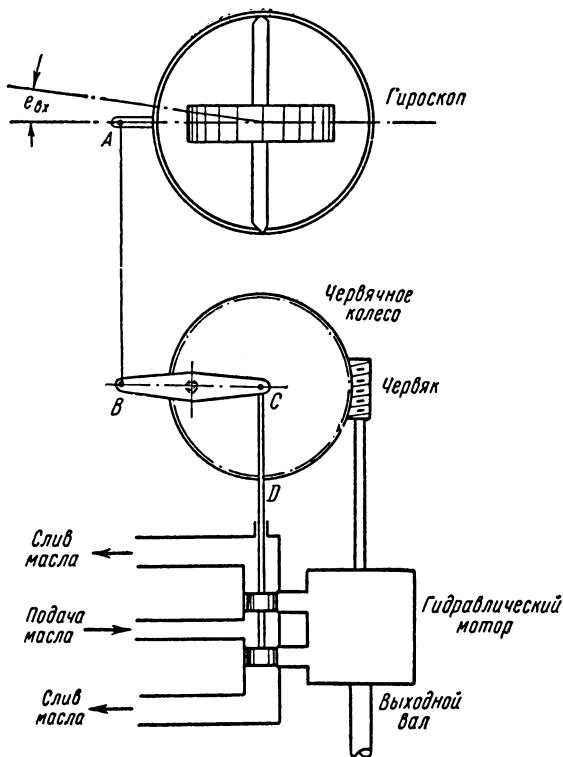


Рис. 91.

гироскоп. Были разработаны различные магнитные, электрические и пневматические датчики, но в системе, применявшейся в прошлую войну во флоте и описанной Гарднером (Gairdner) [2], используется непосредственное соединение рамки гироскопа с гидравлическим золотником. Благодаря гидравлике обеспечивается высокая чувствительность. На рис. 91 изображено устройство такой следя-

щей системы. Тяга AB соединяет рамку гироскопа с рычагом BC , центр которого закреплен на червячном колесе. Рычаг BC соединен с помощью стержня CD с небольшим золотником. Масло под высоким давлением подается к гидравлическому мотору через золотник таким образом, что направление вращения мотора зависит от направления смещения точки C от ее нейтрального положения в центре червячного колеса. На валу мотора сидит червяк, связанный с червячным колесом. Движение рамки гироскопа вызывает поворот рычага BC вокруг своей оси, так что золотник смещается и гидравлический мотор вращает червячное колесо и с ним центр рычага до тех пор, пока точка C на рычаге не займет своего нейтрального положения в центре червячного колеса и поток масла в мотор не прекратится. Таким образом, движение рамки гироскопа по отношению ко всему корпусу механизма точно воспроизводится штоком гидравлического мотора. Червячное колесо и его тяга образуют элемент сравнения, золотник усиливает сигнал ошибки благодаря преобразованию этого сигнала в поток жидкости высокого давления, приводящей в движение исполнительный элемент (в данном случае гидравлический мотор).

Ротационные гидравлические моторы используют различные варианты принципа качающейся шайбы. Один из них изображен на рис. 92. Наклонная шайба соединена с валом мотора при помощи универсального соединения и свободно вращается в упорах концевых и боковых подшипников. К ней с помощью шарнирных соединений прикреплено несколько стержней с плунжерами на концах, причем плунжеры присоединяются к стержням с помощью шариков. Плунжеры движутся в цилиндрах, объединенных в блок, который может свободно передвигаться вдоль оси, но вращаться может лишь вместе с валом. Пружина прижимает блок цилиндров к неподвижной поверхности клапана, в которой прорезаны два фасонных отверстия. Через одно отверстие подается под высоким давлением масло, через другое — масло выпускается наружу. Благодаря разности давлений в двух отверстиях на плунжеры действуют различные силы. Результирующая составляющая действует на наклонную шайбу, стремясь повернуть ее, а вместе с ней вал и блок цилиндров.

Так как масло почти несжимаемо, скорость гидравлического мотора пропорциональна скорости подачи масла. Развиваемый момент пропорционален разности давлений во входном и выходном отверстиях. Когда гидравлический мотор управляется золотником, уравнения движения нелинейны, так как скорость потока масла через цилиндрический золотник пропорциональна произведению степени

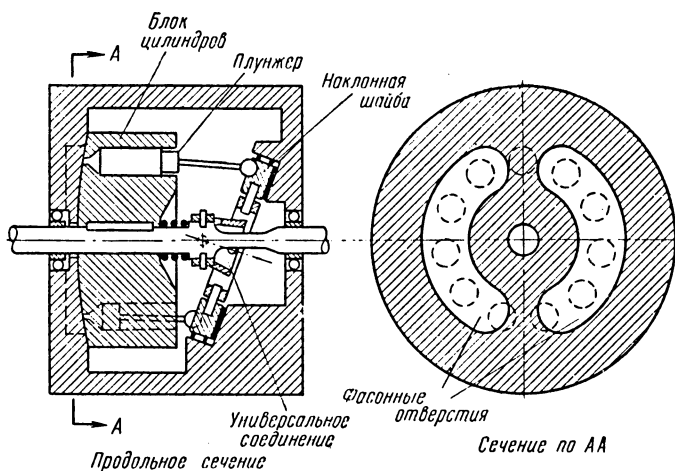


Рис. 92.

открытия отверстий золотника на квадратный корень из перепада давления на золотнике [3]. Гидравлические моторы имеют преимущества по сравнению с электрическими двигателями той же мощности. Они обладают большим отношением крутящего момента к моменту инерции и значительно меньшими размерами.

7.2.2. Регулирование скорости вращения вала.

Во многих случаях необходимо регулировать скорость вращения вала с большой точностью. Для этой цели используются следящие системы. Хорошо известным примером является велодин (тахогенератор с приводом от двигателя постоянного тока с расщепленным полем), описанный Вильямсом (Williams) и Аттли (Uttley) [4], который схематически изображен на рис. 93. Выходная величина

(скорость вала) преобразуется в напряжение генератором постоянного тока, установленным на выходном валу. Это напряжение сравнивается со входным напряжением. Таким

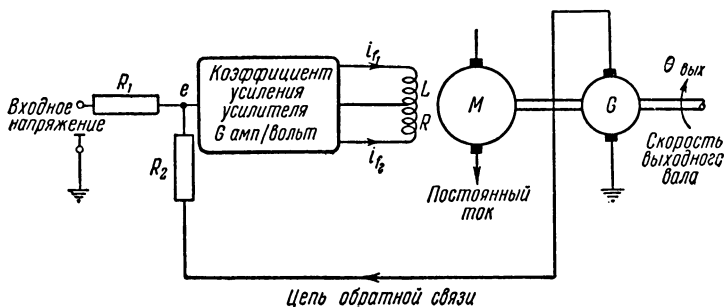


Рис. 93.

образом получается сигнал ошибки, который усиливается электронным усилителем и управляет двигателем постоянного тока, вращающим вал. Схема усилителя изображена

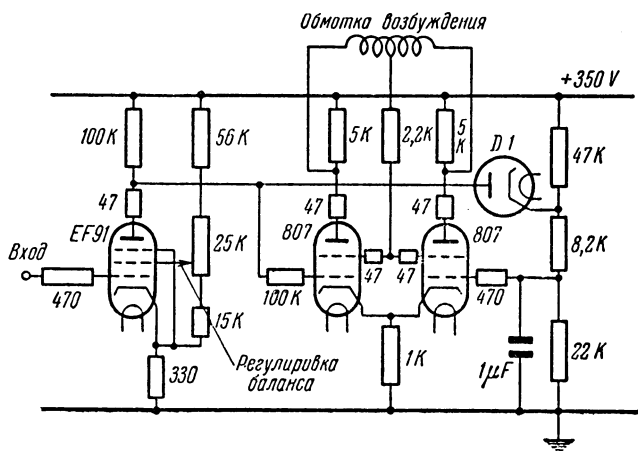


Рис. 94.

на рис. 94. Обычно применяется специальный двигатель, имеющий обмотку возбуждения со средним выводом и с высоким сопротивлением, согласованным с сопротивлением анодных цепей двух выходных ламп усилителя. Когда

сигнал ошибки равен нулю, токи в двух половинах обмотки возбуждения равны и направлены в противоположные стороны и, следовательно, результирующий поток отсутствует. Напряжение ошибки на входе усилителя уменьшает ток в одной половине обмотки возбуждения и увеличивает его в другой так, что в линейной области (т. е. вне области насыщения усилителя и цепи возбуждения) поток возбуждения пропорционален ошибке и изменяет знак с изменением знака ошибки. Так как якорь двигателя питается постоянным током, то вращающий момент мотора управляется сигналом ошибки и, если нагрузка инерционна, регулируемой величиной является ускорение вала.

Передаточную функцию усилителя и двигателя можно получить, используя обозначения рис. 93 в операторной форме,

$$i_f(p) = \frac{G\bar{e}}{1+pT_f}, \quad (1)$$

где i_f — действующий ток возбуждения в амперах, $i_f = i_{f1} - i_{f2}$, T_f — постоянная времени цепи возбуждения в секундах, G — коэффициент усиления усилителя в амперах на вольт, e — напряжение ошибки.

Пренебрегая трением на выходном валу, запишем вращающий момент двигателя:

$$T_m = Jp^2\bar{\theta}_{\text{вых}} = K_t\bar{i}_f, \quad (2)$$

где K_t — постоянная вращающего момента, имеющая размерность вращающего момента на единицу действующего тока возбуждения, J — момент инерции якоря двигателя и нагрузки.

Объединяя уравнения (1) и (2), получим:

$$p^2\bar{\theta}_{\text{вых}} = \frac{K_t G}{J} \frac{\bar{e}}{1+pT_f}. \quad (3)$$

Если входное напряжение прикладывается к двигателю, когда вал его находится в покое, то напряжение ошибки ускоряет вращение вала до тех пор, пока напряжение генератора не становится равным и противоположным входному напряжению, после чего ускорение становится равным нулю. Если коэффициент усиления усилителя по на-

пряжению достаточно высок, то очень малое напряжение ошибки вызывает большое ускорение. Тогда вход усилителя оказывается потенциально заземленным, и преобразованные выходное и входное напряжения складываются

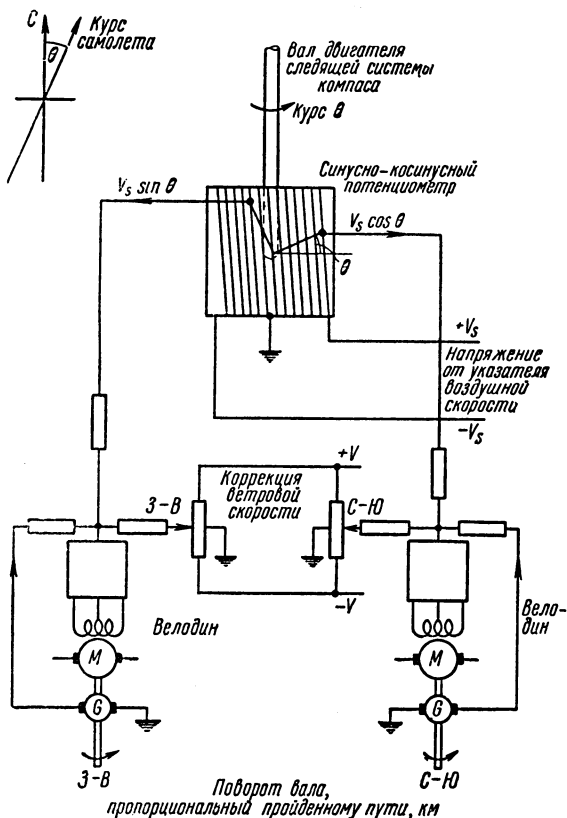


Рис. 95. Навигационное вычислительное устройство, использующее велодины.

при помощи сопротивлений, подключенных к потенциально заземленной точке (см. гл. 5).

Примером использования велодина может служить авиационное навигационное вычислительное устройство, принцип действия которого иллюстрируется рис. 95.

Пеленг по компасу воспроизводится на валу синусно-косинусного потенциометра при помощи следящей системы. Напряжение на обмотке потенциометра пропорционально воздушной скорости, так что напряжение, снимаемое со взаимно-перпендикулярных движков потенциометра, дает составляющие $B - Z$ и $C - Ю$ воздушной скорости, которые образуют входные сигналы двух велодинамов. Коэффициент усиления усилителя сигнала ошибки велодина достаточен велик, так что вход усилителя оказывается потенциально заземленным. Поэтому входной и преобразованный выходной сигналы могут быть сложены при помощи сопротивлений. Ветровая составляющая скорости, введенная штурманом, также подается в потенциально заземленную точку, так что угол, на который поворачивается вал велодина, пропорционален соответственно расстоянию в километрах, пройденному в направлениях $B - Z$ и $C - Ю$.

7.2.3. Регулирование машины постоянного тока большой мощности.

Следящие системы большой мощности применяются в виде различных вариантов системы Варда — Леонарда,

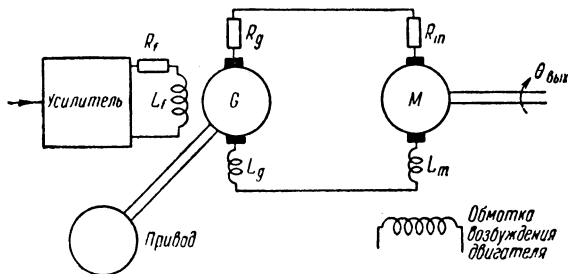


Рис. 96. Система Варда — Леонарда.

включая специальные машины с поперечным полем, использующие принципы метадина и амплидина [5], которые, по существу, являются вращающимися усилителями мощности. Обычная схема системы Варда — Леонарда изображена на рис. 96. Ток на обмотку возбуждения генератора подается от электронного или магнитного усилителя. Якорь генератора подключен непосредственно к якорю электро-

привода. Обмотка возбуждения двигателя питается отдельно. Напряжение на якоре двигателя и, следовательно, скорость вращения двигателя приблизительно пропорциональны току возбуждения генератора, несмотря на то, что передаточная функция соответствует системе с несколькими аperiodическими звеньями. Последние обусловлены: постоянной времени цепи возбуждения $\frac{L_j}{R_f}$, постоянной

времени обмотки якоря $\frac{L_g + L_m}{R_g + R_m}$ и механической постоянной времени нагрузки, если нагрузка включает трение и инерцию. Двигатели постоянного тока для мощных следящих систем обычно разрабатываются специально для каждого конкретного случая. Требование быстрого переходного процесса достигается уменьшением диаметра якоря, что приводит к уменьшению инерции. Увеличением длины якоря можно добиться компенсации вытекающего отсюда уменьшения вращающего момента.

Система Варда — Леонарда применялась для управления прожектором, автоматически следящим за прицельной линией бинокля, установленного на штативе и используемого наблюдателем для слежения за целью. Для управления высотой и азимутом с помощью координат линии визирования бинокля используются две следящие системы. Устройство для управления по одной координате изображено на рис. 97. Угловые положения входного и выходного валов сравниваются в системе передачи данных, использующей два сельсина, которые имеют однофазную роторную обмотку и обмотку статора, соединенную звездой. Ротор входного сельсина (сельсина-датчика) механически связан с биноклем, а ротор сельсина-приемника — с выходным валом следящей системы, причем статорные обмотки соединены вместе в одну замкнутую цепь. В обмотку ротора сельсина-приемника подается переменный ток возбуждения и в обмотке статора наводится эдс, вызывающая ток в обмотке статора входного сельсина; эдс, наведенная в роторе сельсина-датчика, пропорциональна синусу угла, равного разности между углами роторов: ее фаза сдвинута на 180° по отношению к фазе возбуждающих колебаний в тот момент, когда угловая ошибка равна нулю. Этот метод получения электрического

сигнала, пропорционального угловой ошибке, детально описан в [6]. Переменный ток сигнала ошибки подается на фазовый детектор, преобразующий его в однонаправленное напряжение, величина и знак которого зависят от амплитуды и знака ошибки. К выходу фазового детектора подключен усилитель постоянного тока, усиливающий в выходном каскаде ток, поступающий в обмотку возбуждения генератора Варда—Леонарда. На рис. 97 изобра-

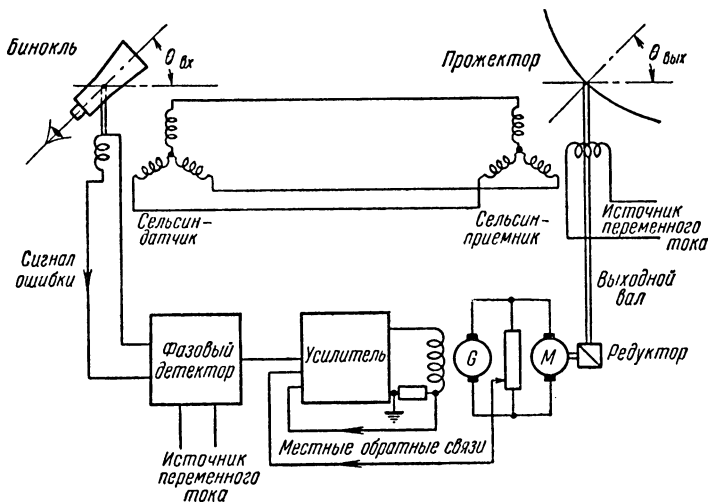


Рис. 97.

жены также стабилизирующие цепи обратной связи, которые будут рассмотрены в следующей главе.

7.2.4. Сервомотор переменного тока.

Вследствие трудности регулирования скорости или вращающего момента в многофазных асинхронных двигателях с высоким кпд следящие системы, работающие на переменном токе, встречаются лишь в маломощных сервосистемах. В современных разработках Вильямса (Williams), Лейтвейта (Laithwaite) и Пиготта (Pigott)* показано, что скорость асинхронного двигателя может меняться в широком диапазоне с помощью поворота полюсов, и потенциально

*) Бесконтактные индукционные двигатели переменной скорости, Proceedings, IEE, Paper N 2097U, June 1956.

это является хорошим способом регулирования скорости мощных двигателей переменного тока. Маломощные устройства в настоящее время обычно используют двухфазные машины с обмоткой типа «беличья клетка», в которых обмотка управления питается током, пропорциональным сигналу ошибки и опережающим или отстающим на 90° по фазе от тока в обмотке опорного напряжения в зависимости от знака сигнала ошибки. При этом в некоторых пределах

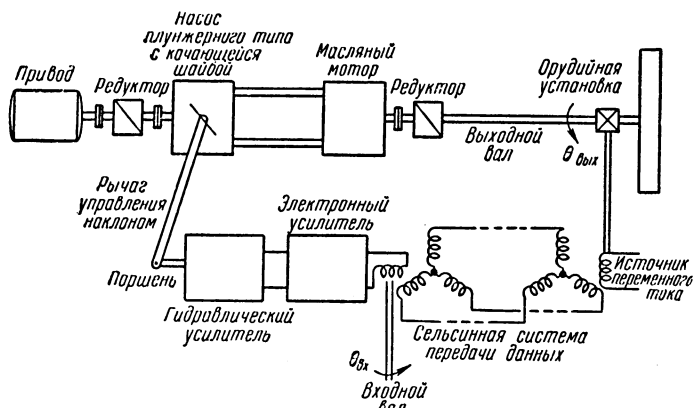


Рис. 98.

вращающий момент двигателя приблизительно пропорционален сигналу ошибки. Для удовлетворительной работы ротор должен быть сделан так, чтобы отношение реактивного сопротивления к активному было близко к единице для обеспечения высокого начального вращающего момента; но это приводит к низкому КПД машины.

7.2.5. Мощные гидравлические следящие системы.

Дистанционное управление морскими орудиями по данным азимута и угла высоты может быть либо электрическим с использованием метадинного вращающегося усилителя и двигателя постоянного тока для перемещения турели, либо гидравлическим с использованием гидравлических моторов с качающейся шайбой. Последний способ управления представляет собой интересную комбинацию электронных и гидравлических элементов, которая схематически изображена на рис. 98. Для повышения КПД золот-

никового регулирования масло подается в мотор от насоса плунжерного типа с качающейся шайбой, работающего по тому же принципу, что и мотор, изображенный на рис. 92, но имеющего наклонную шайбу с переменным наклоном, которая приводится в движение электродвигателями. При переходе угла наклона через нуль направление подачи масла меняется. Скорость подачи пропорциональна углу

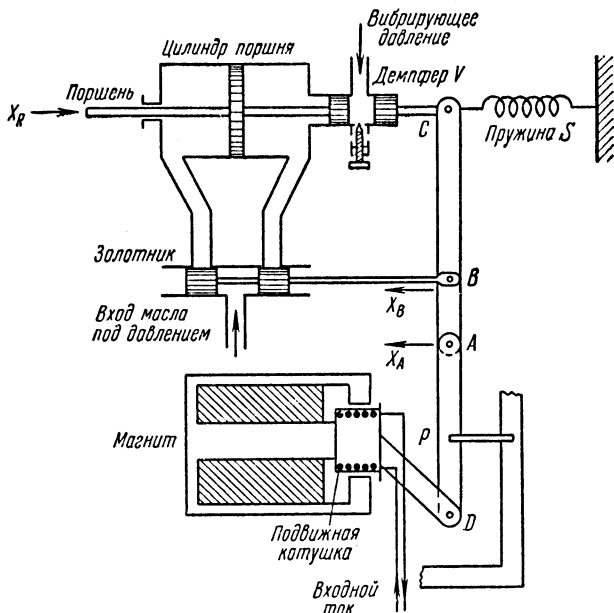


Рис. 99. Гидравлический интегрирующий усилитель.

наклона. Таким образом, скорость мотора может плавно регулироваться изменением угла наклона шайбы в насосе.

При больших мощностях, с которыми мы сталкиваемся в этом случае, силы реакции внешнего рычага, управляющего наклоном шайбы насоса, оказываются значительными. В моторе мощностью в 50 л.с. необходим вращающий момент около 5,6 кгм для изменения наклона рычага; этот момент обеспечивается с помощью гидравлического усилителя, вид которого в разрезе показан на рис. 99.

Он предназначен для использования совместно с предварительным электронным усилителем, который обеспечивает подачу тока, пропорционального сигналу ошибки, в обмотку с центральным выводом, свободно движущуюся в магнитном поле. Это устройство похоже на подвижную катушку громкоговорителя. Движение катушки передается на плечо AD рычага, вращающегося вокруг точки P , как вокруг центра, и смещающего золотник, который присоединен ко второму плечу AC . Через золотник масло поступает в цилиндр, содержащий плунжер или поршень, который при отсутствии местной обратной связи движется со скоростью, приближенно зависящей от смещения золотника. Механическая обратная связь подается с поршня на тягу AC и противодействует начальному смещению клапана. Постоянная скорость движения поршня создает постоянное давление в камере демпфера и постоянное отклонение точки C . Смещение золотника, создаваемое обратной связью, таким образом, пропорционально скорости клапана. В приложении 3 показано, что влияние обратной связи заключается в превращении устройства в интегратор, соединенный последовательно с форсирующим звеном, постоянная времени которого уменьшается с повышением чувствительности золотника. Штанга поршня изменяет наклон рычага плунжерного насоса.

Рассогласование между требуемым и действительным угловым положением орудия преобразуется с помощью сельсинов в сигнал ошибки переменного тока, который затем детектируется фазовым детектором, после чего усиливается и в виде тока подается на подвижную катушку гидравлического усилителя.

В приводах вращения орудий валы, идущие от моторов к турелям, обычно оказываются достаточно длинными, что приводит к значительному упругому скручиванию, а это влечет за собой трудности в стабилизации, если обратная связь снимается непосредственно с турели. С другой стороны, если обратная связь снимается с вала мотора, то имеется большая вероятность статической ошибки, так как валы и зубчатые передачи тогда оказываются вне замкнутой системы регулирования. Чаще всего необходимо найти компромисс, т. е. нужно, чтобы обратная связь

снималась с промежуточной точки, расположенной на соединительном валу, предпочтительно находящейся в вибрационном режиме. Такая обратная связь называется *частичной*.

7.3. Установившиеся и динамические ошибки

Всем следящим системам присущи два недостатка — это установившиеся ошибки и неустойчивость, и, как это часто встречается на практике, эти два недостатка противоречивы. Уменьшение установившейся ошибки приводит к неустойчивости. Следящие системы удобно классифицировать по характеру их установившихся ошибок, т. е. ошибок, необходимых для поддержания установившегося значения выходной величины, установившейся скорости изменения выходной величины, установившегося ускорения и т. д. Так, в следящей системе гироскопа, изображенной на рис. 91, скорость гидравлического мотора приблизительно пропорциональна смещению золотника от его центрального положения, т. е. ошибке слежения за положением гироскопа. Если гироскоп наклоняется с постоянной скоростью, то необходимо поддерживать открытие золотника для того, чтобы мотор отслеживал с постоянной скоростью. Иными словами, вал гидравлического мотора отстает от гироскопа на постоянную величину, называемую *скоростным запаздыванием*. С другой стороны, установившееся положение выходного вала может поддерживаться неопределенно долго без ошибки (если не учитывать перекрытий, трения и других нелинейных явлений), так как для того, чтобы скорость мотора равнялась нулю, золотник должен быть закрыт. В этом случае говорят, что система обладает *скоростной ошибкой* или является системой с *астатизмом первого порядка*.

Классификация по ошибкам зависит от числа операций интегрирования, имеющих место в замкнутой системе. Система с *астатизмом нулевого порядка* или система с *позиционной ошибкой* — это система, в которой нет интегрирования в прямой цепи, так что для получения установившейся выходной величины необходимо наличие ошибки. В системе с *астатизмом первого порядка* или в системе со *скоростной ошибкой* интегрирование произ-

водится один раз, как, например, в следящей системе с исполнительным устройством, скорость изменения выходной величины которого зависит от ошибки, или с усилителем, включающим активную интегрирующую цепь. В следящих системах с *астатизмом второго порядка* или следящих системах с *ошибкой ускорения* интегрирование производится дважды, и так далее. Необходимо отметить, что порядок астатизма данной системы зависит от характера выходной величины. Так, если регулируется скорость вала, то астатизм системы может быть нулевого или первого порядка, в зависимости от того, скорость или ускорение вала оказывается величиной, зависящей от ошибки между требуемой и действительной скоростью вала.

Из предыдущего ясно, что чем выше порядок астатизма, тем лучше следящая система, так как в принципе установившаяся ошибка входной величины может быть уменьшена до нуля. Однако при этом часто приходится учитывать соображения устойчивости, так как реально следящие системы с астатизмом выше третьего порядка не могут быть сделаны устойчивыми, и хотя некоторые системы дистанционного управления орудиями, например описанная в 7.2.5, приближаются к системам с астатизмом третьего порядка, большинство следящих систем — это системы с астатизмом первого и второго порядка.

7.3.1. Системы регулирования с астатизмом первого порядка.

Структурная схема системы регулирования положения вала изображена на рис. 100. Элемент сравнения на структурной схеме изображен в виде квадратика, обозначенного буквой Σ и соответствующего сложению входных величин. Рассогласование θ между требуемым и действительным положением вала управляет скоростью выходного вала, но прямая цепь, кроме элемента интегрирования, содержит также аperiodические звенья. K_1 представляет собой коэффициент усиления прямой цепи, определяющийся как отношение установившейся скорости выходного вала к рассогласованию. Прямая цепь может быть описана с помощью дифференциального уравнения

$$K_1 \theta(t) = \frac{d\theta_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a \frac{d^2\theta_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + b \frac{d^3\theta_{\text{ВЫХ}}}{dt^3} + \dots,$$

где коэффициенты a , b и т. д. определяются комбинациями постоянных времени аperiodических звеньев T_1 , T_2 и т. д.

Далее,

$$\theta_{\text{ВЫХ}}(t) = \theta_{\text{ВХ}}(t) - \theta(t),$$

так что

$$K_1 \theta(t) = \{D + aD^2 + bD^3 + \dots\} \{\theta_{\text{ВХ}}(t) - \theta(t)\},$$

где D есть оператор $\frac{d}{dt}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \{K_1 + D + aD^2 + bD^3 + \dots\} \theta(t) = \\ = \{D + aD^2 + bD^3 + \dots\} \theta_{\text{ВХ}}(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Если входной сигнал представляет собой постоянное угловое отклонение, то правая часть уравнения равна нулю

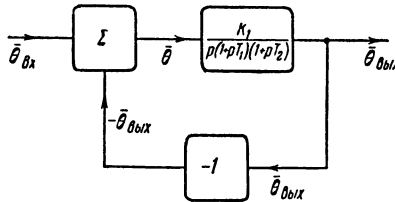


Рис. 100.

и значение ошибки в установившемся состоянии, т. е. после того как переходный процесс затухнет, тоже равно нулю.

Входной сигнал в виде постоянной угловой скорости может быть представлен следующим образом:

$$\theta_{\text{ВХ}}(t) = \Omega_{\text{ВХ}} t.$$

Подставив это в уравнение (4), получаем:

$$(K_1 + D + aD^2 + bD^3 + \dots) \theta(t) = \Omega_{\text{ВХ}}.$$

Решение для $\theta(t)$ при $t \rightarrow \infty$ получаем, приравняв все производные θ нулю, так что

$$\theta_{\text{уст}} = \frac{\Omega_{\text{ВХ}}}{K_1}. \quad (5)$$

Это есть скоростное запаздывание следящей системы с астатизмом первого порядка. Оно может быть умень-

шено увеличением коэффициента усиления K_1 . На это накладываются ограничения, так как одновременно с уменьшением скоростного запаздывания увеличенный коэффициент усиления вызывает уменьшение запаса устойчивости и, в конечном счете, неустойчивость следящей системы; иными словами, уменьшение установившихся ошибок приводит к увеличению динамических ошибок.

7.3.2. Системы регулирования с астатизмом второго порядка.

Структурная схема следящей системы с астатизмом второго порядка изображена на рис. 101, где K_2 представляет собой коэффициент усиления, определяющийся отношением ускорения выходного вала к угловой ошибке.

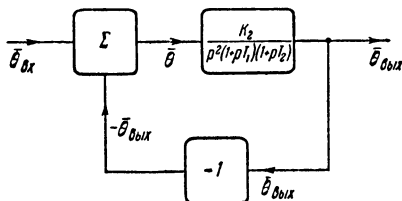


Рис. 101.

Дифференциальное уравнение, связывающее рассогласование и выходной угол, имеет следующий вид:

$$K_2 \theta(t) = \frac{d^2 \theta_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + \alpha \frac{d^3 \theta_{\text{ВЫХ}}}{dt^3} + \beta \frac{d^4 \theta_{\text{ВЫХ}}}{dt^4} + \dots,$$

где коэффициенты α , β и т. д. определяются комбинациями постоянных времени аperiodических звеньев T_1 , T_2 и т. д.

Подставив $\theta_{\text{ВЫХ}}(t) = \theta_{\text{ВХ}}(t) - \theta(t)$ в это уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} (K_2 + D^2 + \alpha D^3 + \beta D^4 + \dots) \theta(t) = \\ = (D^2 + \alpha D^3 + \beta D^4 + \dots) \theta_{\text{ВХ}}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Если входной сигнал представляет собой постоянный угол или постоянную угловую скорость, то статическая

ошибка равна нулю. Если входным сигналом является постоянное ускорение, то

$$\theta_{\text{вх}}(t) = \frac{A}{2} t^2.$$

При этом уравнение (6) принимает вид

$$(K_2 + D^2 + \alpha D^3 + \beta D^4 + \dots) \theta(t) = A.$$

Если положить $t \rightarrow \infty$, то из этого уравнения мы получим установившуюся ошибку

$$\theta_{\text{уст}} = \frac{A}{K_2}.$$

В этом случае говорят, что следящая система обладает запаздыванием по ускорению. Установившаяся ошибка опять может быть уменьшена увеличением коэффициента усиления K_2 , но при этом уменьшится запас устойчивости и увеличатся динамические ошибки.

7.4. Диаграмма Найквиста для следящих систем

Надо отметить, что иногда годограф частотной характеристики $\frac{\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{\bar{\theta}(j\omega)}$ принимают за диаграмму Найквиста.

На самом деле это есть годограф частотной характеристики *прямой цепи* при пренебрежении изменением знака фазы, подразумеваемым в цепи отрицательной обратной связи. При этом критической точкой является точка $(-1, 0)$. Для того чтобы не создавать разнобоя, здесь предлагается рассматривать в качестве диаграммы Найквиста для следящей системы годограф вектора частотной характеристики разомкнутой системы, т. е. $-\frac{\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{\bar{\theta}(j\omega)}$ в соот-

ветствии рис. 100 и 101. Тогда к следящим системам применимы общие рассуждения главы 3 без необходимости поворачивать все диаграммы в плоскости y на 180° .

Типы годографов частотной характеристики разомкнутых следящих систем с астатизмом различных порядков и без стабилизации изображены на рис. 102 (ср. рис. 37, а, б и г). Оси в плоскости y , к которым годографы

асимптотически стремятся на низких частотах, указывают на порядок астатизма системы регулирования; последующее отклонение от асимптот на более высоких частотах

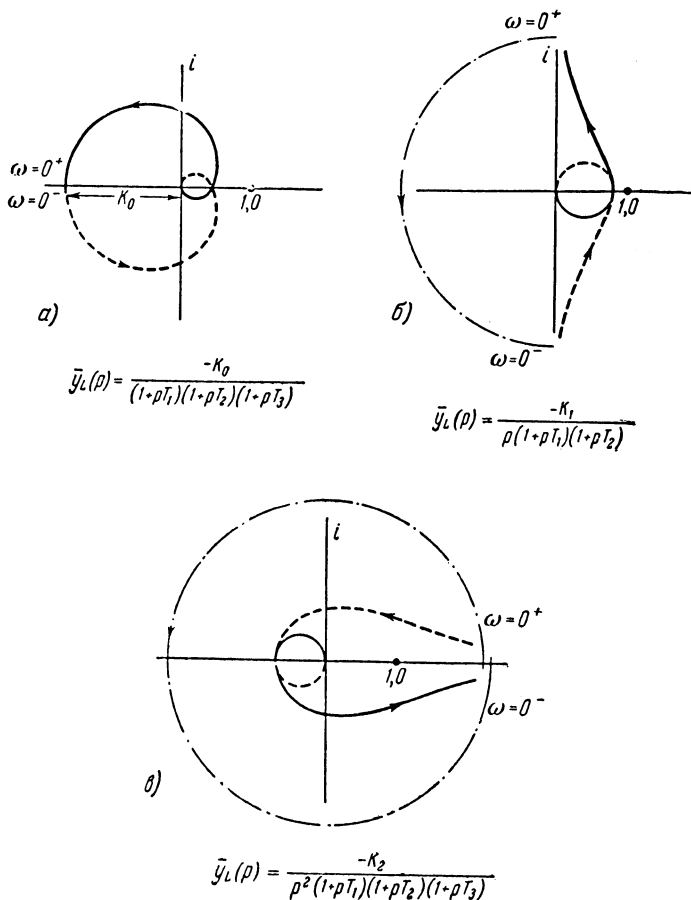


Рис. 102.

происходит благодаря тому, что начинают оказывать влияние аperiодические звенья в усилителе и исполнительном элементе.

Литература

1. H a z e n H. L., Theory of Servomechanisms, Journal of the Franklin Institute, September 1934, 218, No 3, p. 279.
 2. G a i r d n e r J. O. H., Some Servomechanisms used by the Royal Navy, Journal IEE, 1947, 94, Part IIa, No 2, p. 208.
 3. C o o m b e r s J. E. M., Hydraulic Remote Position Controllers, Journal IEE, 1947, 94, Part IIA, No 2, p. 270.
 4. W i l l i a m s F. C. and U t t l e y A. M., The Velodyne, Journal IEE, 1946, 93, Part IIIA, No 7, p. 1256.
 5. A d k i n s, Amplidyne Regulating Systems, Journal IEE, 1947, 94, Part IIA, No. 1, p. 49.
 6. B e l l J., Data Transmission Systems, Journal IEE, 1947, 94, Part IIA, No 2, p. 222.
 7. Иосифьян А. Г., Каган Б. М., Основы следящего привода, Госэнергоиздат, 1954. [Добавлено редактором.]
-

ГЛАВА 8

МЕТОДЫ СТАБИЛИЗАЦИИ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

8.1. Введение

Большинство следящих систем требует той или иной стабилизации. Но чисто теоретические соображения обычно недостаточны для выбора средств стабилизации, так как в полученных теоретическим путем передаточных функциях механических и электрических элементов невозможно учесть множество посторонних факторов. В связи с этим при расчете следящих систем очень большое значение имеет частотный метод исследования, который может применяться как к отдельным элементам, так и к частям системы для выяснения, какое именно стабилизирующее устройство должно быть применено. Экспериментальное определение частотных характеристик проводится следующим образом: цепь обратной связи разрывается в какой-либо точке с низким уровнем мощности вблизи элемента сравнения и к этой точке подводится «искусственный» синусоидальный сигнал для того, чтобы определить установившуюся реакцию разомкнутой системы на разных частотах. В главе 11 будет показано, что эту операцию часто можно применить с некоторыми оговорками, даже если в системе есть нелинейные элементы. В большинстве следящих систем при разрыве цепи обратной связи выходной вал начинает вращаться из-за дрейфа, возникающего вследствие того, что разомкнутая система обладает интегрирующими свойствами. Для устранения этой трудности производится экспериментальное исследование замкнутой системы при подаче на вход синусоидального сигнала и измеряются фазовые и амплитудные соотношения ошибки и выходных величин. Конечно, это возможно лишь при

условии, что замкнутая следящая система устойчива. Однако в системе с астатизмом высокого порядка ошибка очень мала, и часто бывает трудно различить ее на фоне помех, появившихся в редукторах, выходных преобразователях и т. д. Обычно экспериментальные исследования проводятся при наличии частичной обратной связи, достаточной для уменьшения влияния дрейфа, но недостаточной для того, чтобы сделать ошибку слишком малой, или для того, чтобы появилась неустойчивость. Степень стабилизации, так же как и вид стабилизирующего устройства, зависит от конкретных условий.

Различают три вида реакций линейных следящих систем.

1. Реакция системы на скачкообразное воздействие. Она должна обладать заданными величинами скорости нарастания и перерегулирования (максимальным выбросом).

2. Реакция системы на синусоидальное воздействие. Полоса пропускания следящей системы должна быть достаточно широка для того, чтобы пропустить самые высокие частоты входного сигнала с заданным максимумом отношения выходного сигнала к входному сигналу.

3. Реакция на входное воздействие, описываемое статистически и включающее нежелательные помехи. В этом случае следящая система может быть «оптимизирована» по отношению к помехам, т. е. построена так, что на выходе системы будет наилучшее отношение сигнала к помехе.

Эти три условия математически связаны в любой линейной системе, и характер входного сигнала определяет, какая из реакций представляет наибольший интерес. В последующих рассуждениях мы будем предполагать, что критерий устойчивости основан на рассмотрении реакции системы на синусоидальный сигнал при запасах по амплитуде и фазе, описанных в главе 4.

Стабилизация может быть достигнута двумя путями: во-первых, за счет изменения характеристики системы с помощью последовательного подключения элементов в прямую цепь и, во-вторых, с помощью введения дополнительных обратных связей. Последующее изложение будет вестись в этих двух направлениях.

8.2. Изменение прямой цепи

8.2.1. Уменьшение усиления разомкнутой системы.

Устойчивость систем с астатизмом нулевого и первого порядка всегда может быть достигнута с помощью достаточного уменьшения коэффициентов усиления системы K_0 или K_1 . При этом, однако, происходит увеличение установившейся ошибки. Например, если частотная характеристика разомкнутой системы с астатизмом нулевого или первого порядка записывается таким образом:

$$\bar{y}_L(j\omega) = -\frac{\bar{\theta}_0}{\bar{\theta}} = \frac{-K_1}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}, \quad (1)$$

то годограф ее имеет вид, изображенный на рис. 102,б. Для того чтобы найти условия устойчивости, необходимо определить условия, при которых $\bar{y}_L(j\omega)$ действительно и меньше единицы. Раскрывая скобки в уравнении (1), получим:

$$\bar{y}_L(j\omega) = \frac{K_1}{\omega^2(T_1+T_2) + j(\omega^3 T_1 T_2 - \omega)}. \quad (2)$$

$\bar{y}_L(j\omega)$ становится действительной величиной, когда мнимая часть знаменателя равна нулю, т. е. при

$$\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2} \text{сек}^{-2}.$$

При этом $\bar{y}_L(j\omega)$ равно $\frac{K_1 T_1 T_2}{T_1 + T_2}$. Поэтому условие устойчивости системы запишется следующим образом:

$$\frac{K_1 T_1 T_2}{T_1 + T_2} < 1, \text{ т. е. } K_1 < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \text{сек}^{-1}. \quad (3)$$

Такой способ стабилизации применим к любой следящей системе с астатизмом нулевого или первого порядка, в которой коэффициент усиления в какой-либо точке прямой цепи может быть уменьшен.

8.2.2. Введение демпфирования.

Маломощные следящие системы, в которых величина коэффициента полезного действия не имеет значения, могут быть стабилизированы с помощью введения дополнительного вязкого или сухого трения к выходному валу. Например, для регулятора положения, в котором

вращающий момент двигателя пропорционален отклонению, а нагрузка главным образом инерционная с добавочной составляющей, вызванной вязким трением, величина вращающего момента, которую должен обеспечить двигатель, определяется операторным выражением

$$N\bar{T}_m = Jp^2\bar{\theta}_0 + F_v p\bar{\theta}_0,$$

где N — передаточное отношение от вала двигателя к выходному валу, J — момент инерции, отнесенный к выходному валу, F_v — коэффициент трения, зависящий от скорости (вращающий момент на единицу угловой скорости).

Если цепь возбуждения обладает постоянной времени T_f сек, то, используя обозначения, принятые в разделе 7.2.2, можно записать:

$$\bar{T}_m = \frac{K_t \bar{i}_f}{1 + pT_f}$$

и $\bar{i}_f = G'\bar{\theta}$, где G' — коэффициент усиления усилителя сигнала ошибки в амперах на единицу угловой ошибки, так что

$$-\frac{\bar{\theta}_0(p)}{\bar{\theta}(p)} = \bar{y}_L(p) = \frac{K_t G' N}{p F_v (1 + pT_f) \left(1 + p \frac{I}{F_v}\right)}.$$

Если коэффициент трения F_v равен нулю, то мы имеем:

$$\bar{y}_L(p) = \frac{-K + G'N}{p^2 J (1 + pT_f)} = \frac{-K_2}{p^2 (1 + pT_f)},$$

где $\frac{K_t G' N}{J} = K_2$ — ускорение на выходе на единицу угловой ошибки (см. 2.2).

Фазо-частотные и амплитудно-частотные характеристики следящей системы с вязким трением и без вязкого трения изображены на рис. 103, из которого видно, что система без демпфирования неустойчива, независимо от того, как мал коэффициент усиления K_2 . Введение демпфирования приводит к замене интегрирующего звена апериодическим, так что система преобразуется из системы с астатизмом второго порядка в систему с астатизмом первого порядка и можно добиться того, чтобы годограф частотной характеристики разомкнутой

системы не охватывал точку (1, 0). С увеличением коэффициента демпфирования F_v механическая постоянная времени $\frac{J}{F_v}$ становится пренебрежимо малой и годограф частотной характеристики разомкнутой системы пересекает действительную ось ближе к началу координат, т. е. модуль усиления для фазового сдвига, равного 2π рад,

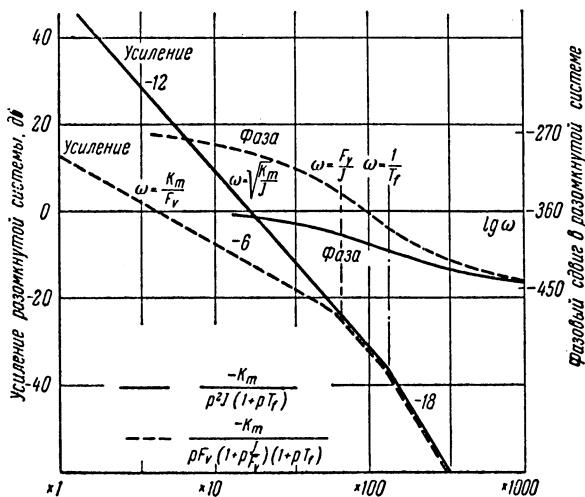


Рис. 103.

становится меньше. В то же время коэффициент усиления разомкнутой системы $\frac{K_1 G' N}{F_v}$ становится очень малым, а скоростное запаздывание — очень большим. Этот способ стабилизации в принципе идентичен способу стабилизации усилителя с обратной связью введем аперiodического звена, описанному в 5.7.1 Вязкое демпфирование может быть осуществлено с помощью тормоза, действие которого основано на вихревых токах, или с помощью крыльчатки, вращающейся в вязкой жидкости.

Иногда вводится демпфирование с помощью сухого трения. Оно вносит статическую ошибку, так как выходной вал останавливается, когда вращающий момент

двигателя становится меньше момента сухого трения. Вредное влияние статического и сухого (кулоновского) трения более детально рассматривается в главе 10.

8.2.3. Успокоитель колебаний.

Улучшенный способ введения демпфирования состоит в присоединении маховика, создающего вязкое трение, к выходному валу следящей системы. Это может быть сделано, например, следующим образом. Цилиндрическая камера наполнена вязкой жидкостью и закреплена на валу. Внутри камеры помещен свободно вращающийся,

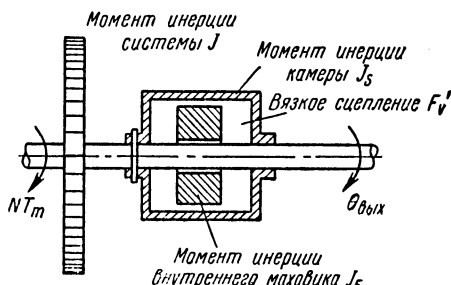


Рис. 104. Успокоитель колебаний.

независимо от вала, маховик (рис. 104). При низких частотах колебаний вала внутренний маховик движется вместе с валом и эффективного гашения колебаний не происходит. На высоких частотах инерционность внутреннего маховика не позволяет ему следовать за камерой и почти находящийся в покое внутренний маховик оказывает демпфирующее действие на выходной вал. В этом случае статическая ошибка устраняется, но при быстрых изменениях в положении вала успокоитель оказывает стабилизирующее действие, по характеру сходное с описанным в предыдущем параграфе. Сильно упрощенный анализ этого устройства приведен ниже, с использованием обозначений рис. 104.

Вращающий момент вала равен

$$N\bar{T}_m = (J + J_s) p^2 \bar{\theta}_{\text{вых}} + F'_v (p \bar{\theta}_{\text{вых}} - p \bar{\theta}_F), \quad (4)$$

где θ_F — угол поворота внутреннего маховика, F'_v — коэффициент вязкого сцепления.

Вращающий момент, вызванный сцеплением с внутренним маховиком, равен

$$F'_v (p\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}} - p\bar{\theta}_F) = J_F p^2 \theta_F. \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что

$$p\bar{\theta}_F (F'_v + pJ_F) = F'_v p\theta_{\text{ВЫХ}}.$$

Подставляя в уравнение (4) значение $\bar{\theta}_F$, получаем:

$$N\bar{T}_m = (J + J_s) p^2 \bar{\theta}_{\text{ВЫХ}} + \frac{J_F p^2 \bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}}{1 + p \frac{J_F}{F'_v}} \quad (6)$$

Таким образом,

$$N\bar{T}_m = p^2 (J + J_s + J_F) \frac{\left[1 + p \frac{J_F}{F'_v} \frac{J + J_s}{J + J_s + J_F} \right] \bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}}{1 + p \frac{J_F}{F'_v}}. \quad (7)$$

Пренебрегая постоянной времени цепи возбуждения двигателя T_F и используя обозначения предыдущего параграфа, получаем:

$$\bar{T}_m = K_t G' \bar{\theta}$$

и

$$-\frac{\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}(p)}{\bar{\theta}(p)} = \bar{y}_L(p) = \frac{K_t G' N (1 + pT_F)}{p^2 J_T \left[1 + pT_F \frac{J + J_s}{J_T} \right]}, \quad (8)$$

где $T_F = \frac{J_F}{F'_v}$ — постоянная времени успокоителя, а $J_T = J + J_s + J_F$ — общий момент инерции вала.

Без успокоителя передаточная функция разомкнутой системы имеет вид передаточной функции идеальной системы второго порядка, т. е.

$$-\frac{\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{\theta}} = -\frac{K_t G' N}{p^2 J} = -\frac{K_2}{p^2}.$$

Влияние успокоителя заключается в том, что действующий момент инерции увеличивается и в прямую цепь вводится форсирующее звено (см. рис. 49). Это эквивалентно стабилизации по производной от отклонения, которая

будет рассмотрена в 8.2.5. На рис. 105 изображен измененный годограф частотной характеристики разомкнутой системы, из которого видно, что влияние успокоителя, параметры которого выбраны соответствующим образом, состоит в удалении годографа от критической точки. Для эффективности успокоителя величина J_F должна быть в несколько раз больше, чем $(J + J_S)$, так как максимальный угол опережения по фазе в форсирующем звене возрастает от нуля,

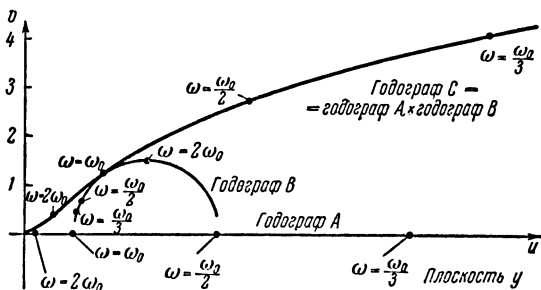


Рис. 105. Годограф А; $\bar{y}(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$; годограф В;

$$\bar{y}(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_F}{1 + j\omega T_F \left(\frac{J + J_S}{J_T} \right)}.$$

когда величина $\frac{J + J_S + J_F}{J + J_S}$ возрастает от единицы. При этом действующий момент инерции значительно возрастает и скорость реакции следящей системы при наличии успокоителя соответственно уменьшается. Установившееся запаздывание по скорости отсутствует, так как следящая система остается системой с астатизмом второго порядка.

8.2.4. Настроенный успокоитель колебаний.

Настроенный успокоитель выполняется с помощью присоединения внутреннего махового колеса ненастроенного успокоителя к камере с помощью пружины [1]. На резонансной частоте системы, состоящей из пружины и диска, энергия отбирается от вала следящей системы и при правильной настройке это может оказывать стабилизирующее действие. Упрощенный анализ такого успо-

контеля аналогичен анализу ненастроенного варианта, но при учете сдерживающего влияния пружины. При этом выражение (4) для вращающего момента вала принимает вид

$$N\bar{T}_m = (J + J_s) p^2 \bar{\theta}_0 + F'_v (p \bar{\theta}_{\text{вых}} - p \bar{\theta}_F) + c (\bar{\theta}_{\text{вых}} - \bar{\theta}_F), \quad (9)$$

где c — жесткость пружины, соединяющей камеру с внутренним маховиком. Выражение (5) для вращающего момента на внутреннем маховом колесе теперь принимает вид

$$J_F p^2 \bar{\theta}_F = F'_v (p \bar{\theta}_{\text{вых}} - p \bar{\theta}_F) + c (\bar{\theta}_{\text{вых}} - \bar{\theta}_F). \quad (10)$$

После алгебраических преобразований, аналогичных тем, которые были проделаны в предыдущем параграфе, передаточная функция разомкнутой идеальной следящей системы с астатизмом второго порядка и с подключенным успокоителем принимает вид

$$y_L(p) = \frac{-K_t G' N}{p^2 J_T} \left\{ \frac{\frac{p^2}{\omega_d^2} + \frac{p}{\omega_d Q} + 1}{\frac{p^2}{\omega_d^2} \left[\frac{J + J_s}{J_T} \right] + \frac{p}{\omega_d Q} + 1} \right\}, \quad (11)$$

где ω_d — собственная частота, на которую настроен успокоитель,

$$\omega_d = \sqrt{\frac{c}{J_F}}$$

и

$$Q = \sqrt{\frac{c J_F}{F'_v}}.$$

Здесь $J_T = J + J_s + J_F$ — общий момент инерции на выходном валу. Годограф вектора частотной характеристики для выражения в скобках в уравнении (11) изображен на рис. 106. Достоинство настроенного успокоителя состоит в том, что величина угла, вносящего опережение по фазе, зависит в значительно большей степени от Q , чем от отношения $\frac{J_T}{J + J_s}$. Таким образом, с помощью резонансного успокоителя с высоким значением Q , имеющего малые размеры, может быть образован большой угол опережения по фазе со значительно меньшим уменьшением

скорости реакции, чем в случае ненастроенного успокоителя. Максимальное значение величины Q практически ограничено неизбежными изменениями в собственной частоте следящей системы благодаря наличию нелинейностей и параметров, изменяющихся со временем. При разработке успокоителя его собственная частота выбирается близкой к собственной частоте следящей системы,

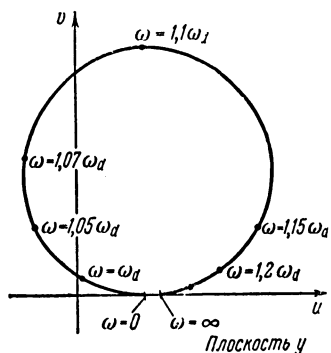


Рис. 106. Годограф $\bar{y}(j\omega) =$

$$= \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_d^2} + \frac{j\omega}{Q\omega_d} + 1}{-\frac{\omega^2}{\omega_d^2} \frac{J+J_s}{JT} + \frac{j\omega}{Q\omega_d} + 1},$$

где $Q=20$, $\frac{J+J_s}{JT}=0,84$.

так что наибольшее влияние опережения по фазе проявляется вблизи точки наибольшего приближения годографа к критической точке.

Успокоители колебаний могут быть применены к следящим системам любых типов, хотя они в основном применяются в малых приборных следящих системах.

8.2.5. Введение первой производной от ошибки.

В следящей системе сигнал ошибки вызывает действие, стремящееся уменьшить ошибку, и неустойчивость в основном является результатом запаздывания этого действия из-за наличия инерционных звеньев в прямой цепи. Поэтому очевидно, что если бы ошибку можно было каким-

либо образом предвидеть и на основе этой информации начать вносить коррекцию как можно раньше, то неустойчивость можно было бы предотвратить. Простейший путь осуществления такого предвидения заключается в том, чтобы управляющее воздействие зависело не только от ошибки, но и от скорости ее изменения, так как последняя является мерой того, какой будет ошибка в ближайшее время. Чтобы предсказать будущую ошибку с большей точностью, можно использовать наряду с первой производной ошибки и вторую производную.

Регулирование по первой производной от ошибки может осуществляться подачей сигнала ошибки на активную дифференцирующую или на пассивную квазидифференцирующую цепь с последующим сложением сигнала ошибки и его производной и использованием этого суммарного сигнала для управления исполнительным механизмом. Передаточная функция прямой цепи в идеальном случае тогда содержит в числителе двучлен вида $(1+pT)$. Если постоянную времени T дифференцирующего устройства сделать равной постоянной времени одного из апериодических звеньев в прямой цепи, то в результате число апериодических звеньев уменьшится на одно, что, как мы знаем, может повысить запас устойчивости.

Вместо того чтобы подключать параллельную дифференцирующую цепь, обычно в какой-либо точке усилителя подключается последовательно пассивная дифференцирующая цепь. Из рис. 49 видно, что такая цепь вносит опережение, определяемое выражением $(1+pT)$, и запаздывание, определяемое выражением $\frac{1}{1+apT}$. Коэффициент усиления ее равен $\frac{1}{a}$. Для того чтобы избежать увеличения установившейся ошибки, коэффициент усиления усилителя должен быть увеличен так, чтобы скомпенсировать ослабление в стабилизирующей цепи на низких частотах. Для соответствующего угла опережения по фазе это ослаб-

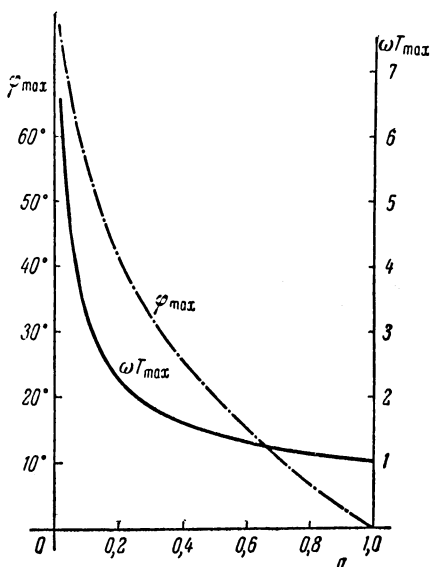


Рис. 107. Графики для проектирования форсирующего звена.

ление должно быть порядка десяти (т. е. $a \approx 0,1$). Кривая, показывающая зависимость между a и максимально возможным опережением по фазе, изображена на рис. 107 вместе с кривой, показывающей частоты, на которых этот максимальный фазовый сдвиг имеет место. При разработке пассивной дифференцирующей цепи прежде всего необходимо получить частотную характеристику следящей системы без стабилизирующей цепи, но с коэффициентом усиления разомкнутой системы, умноженным на соответствующий множитель, такой, чтобы добавочное ослабление на низких частотах, вызванное этой цепью, не вызвало бы увеличения допустимой установившейся ошибки. Годограф частотной характеристики разомкнутой системы, полученный таким образом, умножается на годограф частотной характеристики пассивной дифференцирующей цепи. При этом мы добиваемся того, чтобы частота максимального фазового сдвига $\left(\omega_{\max} = \frac{1}{TVa} \right)$ лежала вблизи частоты, на которой годограф частотной характеристики исходной разомкнутой системы наиболее приближается к критической точке. Решение этой задачи разобрано на примере в 8.2.5.1.

В некоторых следящих системах сигнал ошибки модулирует несущую, а затем усиливается и воздействует на исполнительное устройство переменного тока (например, управляющую обмотку возбуждения двухфазного двигателя). В таких случаях обычная форсирующая цепь бесполезна, так как необходимо изменять огибающую модулированного колебания, а не несущую. Пример образования сигнала ошибки переменного тока с помощью сельсинной передачи данных был рассмотрен в главе 7 в связи с системой управления прожектором. Если ошибка синусоидальна с амплитудой A и частотой ω_m , то напряжение на роторе сельсина-датчика равно

$$A \sin \omega_m t \sin \omega_c t, \quad (12)$$

где ω_c — частота тока возбуждения, подаваемого на ротор сельсина-приемника.

Форма колебания сигнала ошибки изображена на рис. 108. Если преобразовать формулу (12), то можно

заметить, что в нее входят две компоненты в соответствии с выражением

$$\frac{A}{2} \{ \cos(\omega_c - \omega_m)t - \cos(\omega_c + \omega_m)t \}. \quad (13)$$

Эти компоненты представляют собой боковые частоты

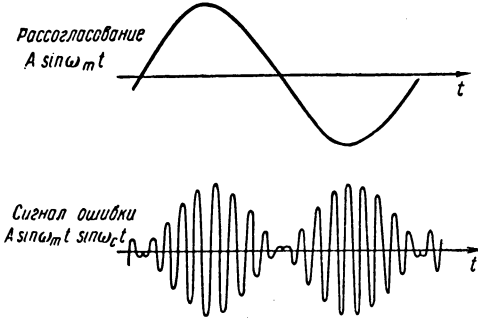


Рис. 108.

и могут быть изображены в виде двух векторов, вращающихся соответственно с угловой частотой $(\omega_c - \omega_m)$ и $(\omega_c + \omega_m)$ (рис. 109).

Для того чтобы создать опережение по фазе огибающей частоты модуляции, необходимо повернуть каждую боковую составляющую на тот же самый угол против

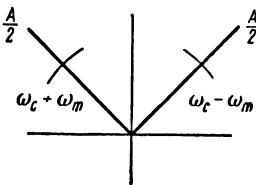


Рис. 109.

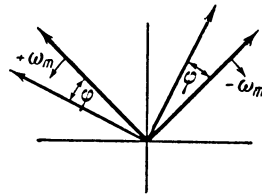


Рис. 110.

часовой стрелки. По отношению к несущей частоте ω_c векторы боковых частот вращаются в противоположных направлениях с угловой скоростью $-2\pi f_m$ и $+2\pi f_m$ радиан в секунду соответственно (рис. 110). Таким образом, чтобы повернуть каждую боковую составляющую против часовой стрелки на угол ϕ , необходимо для боковой

составляющей на частоте $+\omega_m$ создать угол опережения по фазе φ , а для составляющей на частоте $-\omega_m$ — равный ему угол запаздывания по фазе. Это может быть осуществлено цепью, создающей опережение по фазе для составляющих с частотами ниже ω_c , отставание по фазе для составляющих с частотами выше ω_c и имеющей фазовую характеристику, симметричную относительно ω_c . Такими фазовыми характеристиками обладают мостовые схемы: Т-образный мост и двойной Т-образный мост (рис. 52), если их параметры таковы, что максимальное ослабление вносится на несущей частоте. В большинстве следящих систем частота сигнала ошибки колеблется в пределах от нуля до 10—20 гц, в то время как частота несущая должна быть по крайней мере в десять раз больше максимальной частоты ошибки. Отсюда следует, что максимальный стабилизирующий сдвиг по фазе должен быть на частоте, отстоящей лишь на 10—20 гц от несущей частоты, а это в свою очередь вызывает необходимость в мостовых цепочках с узким «провалом» ослабления на частоте ω_c . Для того чтобы избежать несимметричности в работе и возможного прекращения стабилизирующего действия, необходимо поддерживать несущую частоту стабильной в пределах 1—2 гц, что является главным недостатком этого метода на практике.

В гидравлических следящих системах очень часто используются электрические элементы сравнения, и поэтому обычно сигнал ошибки задается в электрической форме. Однако можно создать механические устройства, обладающие дифференцирующими свойствами, и использовать их в условиях, когда ошибка представлена в форме механического перемещения. Примером может служить устройство, изображенное на рис. 111. Оно содержит две пружины различной жесткости, к одной из которых присоединен успокоитель. Если жесткости пружин обозначить через c_1 и c_2 (сила на единицу длины), а постоянную вязкости успокоителя обозначить через r (сила на единицу скорости), то смещения x_a и x_b и скорости \dot{x}_a и \dot{x}_b , вызванные возмущающей силой F , будут связаны следующим соотношением:

$$c_1(x_a - x_b) + r(\dot{x}_a - \dot{x}_b) = F = c_2 x_b.$$

Подставив $x=px$, получаем выражение в операторной форме

$$\bar{x}_a (c_1 + pr) = \bar{x}_b (c_1 + c_2 + pr),$$

откуда

$$\frac{\bar{x}_b}{\bar{x}_a} = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \frac{1 + p \frac{r}{c_1}}{1 + p \frac{r}{c_1 + c_2}}. \quad (14)$$

Устройство обладает передаточной функцией форсирующей цепи и может быть применено, если перемещение

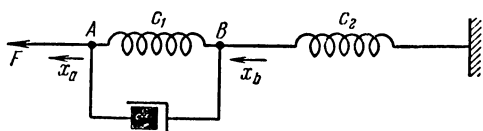


Рис. 111. Механическая форсирующая система.

точки A задать пропорциональным ошибке и присоединить точку B к гидравлическому золотнику, управляющему исполнительным механизмом.

8.2.5.1. Пример стабилизации введением скорости изменения ошибки.

В линейном режиме передаточная функция разомкнутой следящей системы, описанной в 10.2, определяется уравнением (1) настоящей главы, причем T_1 — постоянная времени цепи возбуждения, а T_2 — механическая постоянная времени, обусловленная инерцией нагрузки и вязким трением, т. е. $\frac{J}{F_v}$. Используя обозначения главы 10, запишем передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$\bar{y}_L(p) = -\frac{\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{\theta}} = -\frac{NK_1 GK_p}{F_v} \frac{1}{p(1+pT_1)(1+pT_2)}.$$

Если максимально допустимое скоростное запаздывание равно 1° при входной скорости 200° в секунду $\left(33 \frac{1}{3} \text{ об/мин}\right)$, то необходимый коэффициент усиления K_1 равен 200

эффекту стабилизации. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики, которые должны быть добавлены к первоначальным характеристикам разомкнутой системы, изображенным на рис. 112, соответствуют коэффициенту усиления, равному 20 дБ, который вносится изменением параметра разомкнутой системы, например G .

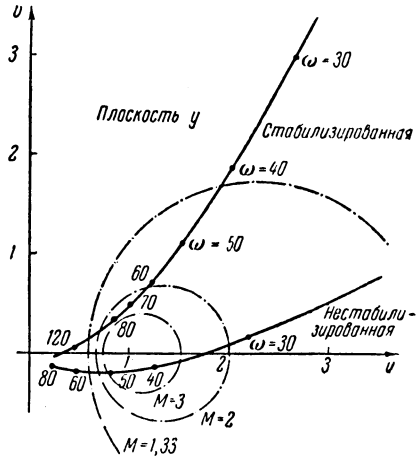


Рис. 113.

Характеристика форсирующей цепи, оказывающей максимальный эффект на частоте 70 рад/сек, имеет вид

$$\frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega a T}.$$

Как показано на рис. 112 и на соответствующем годографе частотной характеристики (рис. 113), стабилизированная следящая система имеет запас по амплитуде, равный 10 дБ, и запас по фазе, равный 24°. Несмотря на то, что эта следящая система устойчива, ее переходный процесс довольно плохо затухает, что видно из диаграммы, соответствующей постоянному $\left| \frac{\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{\theta}_{\text{ВХ}}} \right|$ (рис. 113). Максимальное значение $\left| \frac{\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{\theta}_{\text{ВХ}}} \right|$, равное M , приближенно равно

2,5 на частоте около 80 рад/сек . Это может оказаться неприемлемым. Незначительные улучшения могут быть достигнуты изменением постоянной времени форсирующей цепи. Если не вводить добавочных стабилизирующих элементов (например, добавочные форсирующие цепи), то коэффициент усиления разомкнутой системы K_1 должен быть уменьшен, в результате чего установившаяся ошибка увеличится, а ширина полосы пропускания и скорость реакции уменьшится.

8.2.5.2. З а м е ч а н и я п о п о в о д у с т а б и л и з а ц и и в в е д е н и е м с к о р о с т и и з м е н е н и я о ш и б к и. Описанный выше метод применяется очень широко и обладает замечательным свойством не вводить установившихся ошибок, отсутствующих в нестабилизированной системе. Иными словами, этот метод не меняет порядка астатизма системы регулирования. Основным недостатком этого метода проявляется, когда на входе следящей системы присутствуют помехи, так как форсирующая цепь, подчеркивая высокие частоты в сигнале ошибки сильнее, чем низкие частоты, вызывает перегрузку последующего каскада.

Иногда две форсирующие цепи соединяются последовательно через буферные каскады, согласующие входные и выходные сопротивления (например, катодные повторители). Таким образом, можно приближенно осуществить упреждение более высокого порядка, так как в управляющий сигнал вносится ускорение ошибки. Такой метод используется в гидравлической следящей системе с преобразованием ошибки в усилителе постоянного тока, описанной в 7.2.5.

8.2.6. Использование цепи с бесконечной полосой пропускания.

Если система регулирования содержит резонансный элемент с малым затуханием, то амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы имеет пик на резонансной частоте и, при изменении частоты в небольших пределах в каждую сторону от резонансной, фазовый сдвиг меняется на $-\pi$ радиан (см. характеристики колебательного звена на рис. 50).

Система регулирования с астатизмом первого порядка, содержащая колебательное и аperiodическое звено, имеет

передаточную функцию разомкнутой системы следующего вида:

$$\bar{y}_L(p) = \frac{-K_1}{p \left(\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{p}{Q\omega_0} + 1 \right) (1 + pT)},$$

где ω_0 есть собственная частота незатухающих колебаний резонансного элемента, а Q — добротность.

На рис. 114 изображена структурная схема такой системы. Если добротность Q колебательного звена велика, резонансный элемент вносит резкое увеличение усиления разомкнутой системы на резонансной частоте. Если

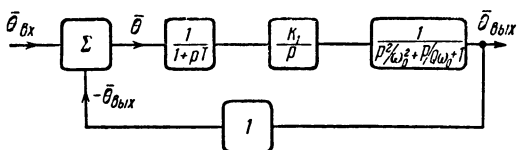


Рис. 114.

к тому же постоянная времени T апериодического звена несколько меньше, чем $\frac{1}{\omega_0}$, то фазовый сдвиг в контуре на частоте максимума усиления разомкнутой системы значительно больше, чем -2π рад. Если добротность Q достаточно велика, так что максимум усиления разомкнутой системы превышает единицу, то это может привести к неустойчивости замкнутой системы.

Годограф частотной характеристики изображен на рис. 115 для положительных частот в логарифмическом масштабе. Большой лепесток на годографе обусловлен резонансом колебательного звена. Охват годографом точки 0 db указывает на неустойчивость замкнутой системы.

Устойчивость может быть достигнута уменьшением либо коэффициента усиления прямой цепи K_1 , либо уменьшением добротности Q колебательного элемента. Уменьшение K_1 вызывает увеличение установившейся ошибки и уменьшение скорости реакции и поэтому часто является неприемлемым. Уменьшение Q часто невозможно по другой причине и должно быть найдено иное решение. Одна

возможность заключается в подключении последовательно прямой цепи аperiodического звена с достаточно большой постоянной времени. Это уменьшает усиление разомкнутой системы на высоких частотах и таким образом уменьшает ширину полосы пропускания и скорость реакции следящей системы. На низких частотах частотная характеристика меняется незначительно.

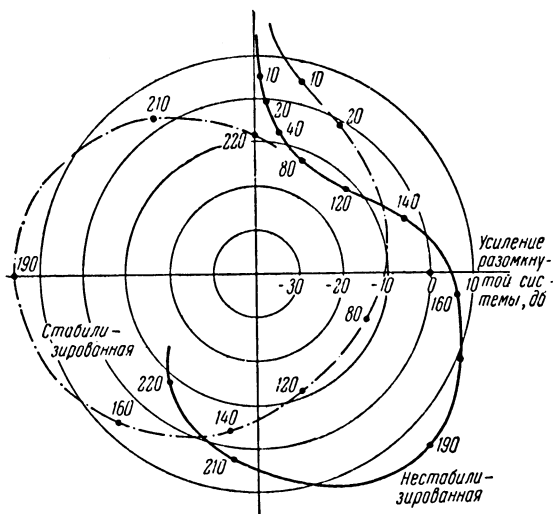


Рис. 115. Логарифмический годограф частотной характеристики для разомкнутой системы, содержащей колебательный элемент (значения ω отмечены на годографах). Значения параметров: $K_1 = 16,7$, $\omega_0 = 190$, $T = 52$ мсек, $Q = 30$, постоянная времени цепи с бесконечной полосой пропускания равна 12,5 мсек.

Включением четырехполюсника с бесконечной полосой пропускания в прямую цепь может быть достигнута устойчивость без уменьшения скорости реакции [3]. Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики такого четырехполюсника представлены на рис. 51 и на первый взгляд могут показаться неэффективными, так как они соответствуют характеристикам неминимально фазового элемента. Однако при правильном выборе фазовой харак-

теристики большой лепесток в первоначальном годографе частотной характеристики может быть повернут более чем на $-\frac{\pi}{2}$ рад, так что максимум амплитудно-частотной характеристики разомкнутой системы окажется при фазовом сдвиге, лежащем ближе к -3π рад, чем к -2π рад, а при фазовом сдвиге, равном -2π рад, усиление разомкнутой системы теперь окажется меньше единицы. Годограф разомкнутой системы в логарифмическом масштабе,

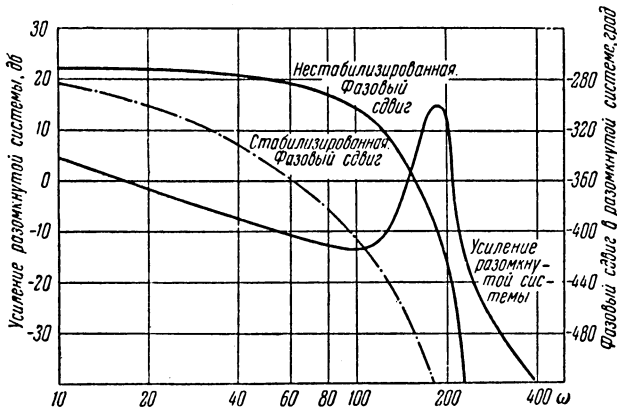


Рис. 116.

измененный благодаря введению в систему цепи с бесконечной полосой пропускания (рис. 115), показывает, что замкнутая система теперь устойчива. Интересным свойством системы, стабилизированной таким образом, является то, что, независимо от величины Q колебательного звена, система с обратной связью всегда устойчива. Фактически Q почти не влияет на характеристику замкнутой системы. Соответствующие амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики изображены на рис. 116.

Передаточные функции колебательных звеньев встречаются в передаточных функциях разомкнутых систем автоматического управления самолетами. В этом случае источником резонансных явлений служат поперечные колебания вокруг центра тяжести, обусловленные аэродинамическими восстанавливающими силами на несущих

поверхностях, действующими на момент инерции самолета. Таким образом, зависимость между отклонением руля и вызываемым им изменением направления полета соответствует зависимости, определяемой колебательным звеном. Другой случай, когда резонансные элементы входят в систему регулирования, относится к гироскопическим стабилизаторам. Передаточная функция гироскопа входит в передаточную функцию прямой цепи. В этих случаях вращающий момент прикладывается к карданному подвесу гироскопа и вызывает прецессию. Если угловая прецессия θ гироскопа является выходной величиной, а вращающий момент T , приложенный к оси внешнего карданного подвеса, — входной величиной, то операторная форма передаточной функции, связывающей входную и выходную величины, имеет вид

$$\bar{\theta} = \frac{KT}{p \left[\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{p}{Q\omega_n} + 1 \right]},$$

где ω_n — частота мутации гироскопа, т. е. частота затухающих колебаний вокруг внутренней и внешней осей карданных подвесов, вызванных инерционностью подвижной системы; Q добротность колебательного элемента, обратно пропорциональная трению в подшипниках карданного подвеса и в хороших гироскопах может быть очень высокой.

8.3. Дополнительные обратные связи

Мощным средством стабилизации следящих систем является охват элементов прямой цепи дополнительными обратными связями. С помощью охвата обратными связями отдельных звеньев в прямой цепи может быть значительно уменьшено их влияние на общую характеристику, и если коэффициент усиления разомкнутого дополнительного контура, образованного таким образом, достаточно высок, то общая передаточная функция может быть сделана приближенно равной обратной передаточной функции его цепи обратной связи. Далее, с помощью дополнительных обратных связей можно значительно уменьшить влияние нелинейностей в прямой цепи. Пример обратной

связи такого вида приведен на рис. 97, где ток в катушке возбуждения генератора Варда—Леонарда вызывает падение напряжения на последовательно включенном малом сопротивлении, и это напряжение подается на входной каскад усилителя в противофазе с сигналом ошибки. Цель этой обратной связи, изображенной схематически на рис. 117, состоит в уменьшении постоянной времени цепи

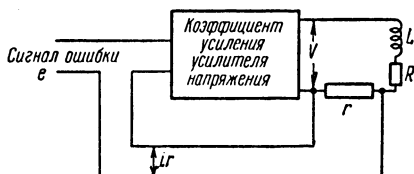


Рис. 117.

возбуждения генератора — процесс, известный под названием форсировки поля. Усилитель напряжения (рис. 117) с коэффициентом усиления m питает обмотку возбуждения. Если цепь обратной связи включена так, чтобы сигнал обратной связи противодействовал напряжению сигнала ошибки e , то

$$\begin{aligned}
 m(\bar{e} - \bar{i}r) &= \bar{V} = \bar{i}(Lp + R + r), \\
 \bar{i}[Lp + R + r(1 + m)] &= m\bar{e}, \\
 \bar{i} &= \frac{m\bar{e}}{R + r(1 + m)} \frac{1}{1 + p \frac{L}{R + r(1 + m)}}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Вспомогательная обратная связь уменьшает общий коэффициент усиления сигнала ошибки, выраженный в амперах/вольт, т. е. она является дегенеративной или отрицательной. Она также уменьшает эффективную постоянную времени цепи возбуждения от $\frac{L}{R}$ до $\frac{L}{R + r(1 + m)}$. Если коэффициент усиления m бесконечно велик, то реакция становится равной $\bar{i} \approx \frac{\bar{e}}{r}$.

Другим примером использования дополнительной обратной связи может служить гидравлический усилитель,

изображенный на рис. 99 и в приложении 3. В этом гидравлическом усилителе местная механическая обратная связь, образованная пружиной и успокоителем, используется для изменения общей реакции.

В 3.4 было показано, что для того, чтобы была устойчива вся система в целом, не обязательно должны быть устойчивы все внутренние контуры. Однако обычно в следящих системах стремятся избегать употребления неустойчивых дополнительных контуров.

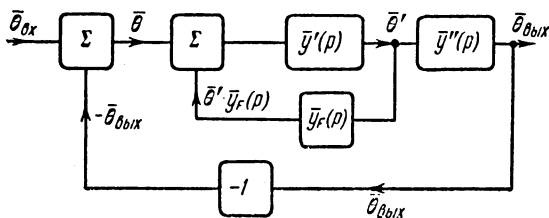


Рис. 118.

Стабилизация при помощи местных обратных связей не является универсальной и применяется лишь в определенных типах следящих систем. Однако есть два способа стабилизации, имеющих общее применение, которые и будут рассмотрены в следующих параграфах. Оба эти способа основаны на применении дополнительной обратной связи, охватывающей всю прямую цепь или большую часть ее и, следовательно, параллельной основной управляющей цепи обратной связи. Структурная схема, содержащая эту дополнительную обратную связь, изображена на рис. 118.

Пользуясь этой схемой, можно вывести общую передаточную функцию системы.

Для дополнительного контура имеем:

$$[(\bar{\theta}_{вх} - \bar{\theta}_{вых}) + \bar{y}_F(p) \bar{\theta}'] \bar{y}'(p) = \bar{\theta}'$$

и

$$\bar{\theta}_{вых} = \bar{y}''(p) \bar{\theta}'.$$

Исключая $\bar{\theta}'$ из этих двух уравнений, получаем:

$$\left[(\bar{\theta}_{\text{вх}} - \bar{\theta}_{\text{вых}}) + \bar{y}_F(p) \frac{\bar{\theta}_0}{\bar{y}''(p)} \right] \bar{y}'(p) = \frac{\bar{\theta}_{\text{вых}}}{\bar{y}''(p)},$$

откуда передаточная функция разомкнутой системы получается в виде

$$\bar{y}_L(p) = \frac{-\bar{\theta}_{\text{вых}}}{\bar{\theta}_{\text{вх}} - \bar{\theta}_{\text{вых}}} = \frac{-\bar{\theta}_{\text{вых}}}{\bar{\theta}} = \frac{-\bar{y}_1(p)}{1 - \bar{y}_F(p) \bar{y}'(p)}, \quad (16)$$

где $\bar{y}_1(p) = \bar{y}'(p) \bar{y}''(p)$ — передаточная функция прямой цепи и

$$\frac{\bar{\theta}_{\text{вых}}}{\bar{\theta}_{\text{вх}}} = \frac{\bar{y}_1(p)}{1 + \bar{y}_1(p) - \bar{y}_F(p) \bar{y}'(p)}. \quad (17)$$

Из уравнения (16) видно, что обратная связь оказывает то же влияние, что и включение цепи с передаточной функцией $\left[\frac{1}{1 - \bar{y}_F(p) \bar{y}_1(p)} \right]$ последовательно с прямой цепью. Для стабилизации эта передаточная функция должна давать опережение по фазе в диапазоне частот, где годограф вектора $\bar{y}_1(j\omega)$ лежит ближе всего к критической точке.

8.3.1. Скоростная обратная связь.

Простейшим видом стабилизирующей обратной связи является связь, при которой вводится величина, пропорциональная скорости изменения выходной величины. При отрицательной обратной связи

$$\bar{y}_F(p) = -pK_F,$$

где K_F — коэффициент пропорциональности в секундах.

Если следящая система представляет собой идеальную систему с астатизмом второго порядка, то

$$\bar{y}_1(p) = \frac{K_2}{p^2}$$

и передаточная функция разомкнутой системы, изменен-

ная введением обратной связи, находится из уравнения (16)

$$\bar{y}_L(p) = -\frac{K_2}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_2 K_F}{p}} = -\frac{K_2}{p^2} \frac{pT}{1 + pT},$$

где $T = \frac{1}{K_2 K_F}$ сек.

Результат воздействия обратной связи эквивалентен последовательному подключению в контур квазидиффе-

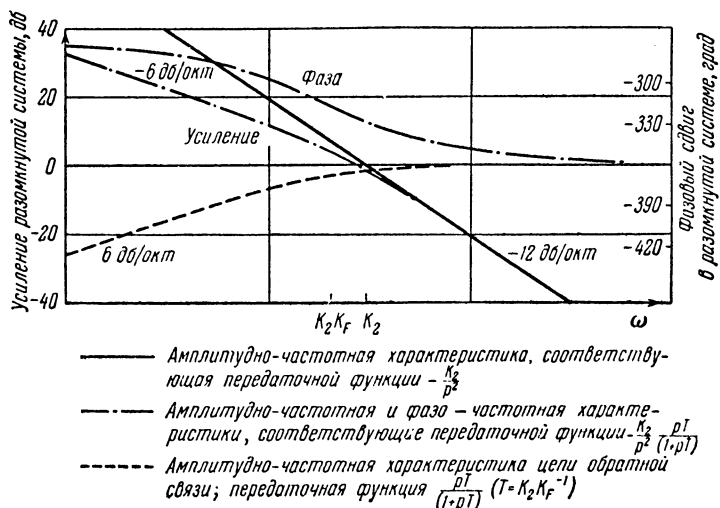


Рис. 119.

ренцирующей цепи, передаточная функция которой имеет вид $\frac{pT}{1+pT}$. Влияние обратной связи на амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики, а также на годограф частотной характеристики разомкнутой следящей системы, являющейся идеальной системой с астатизмом второго порядка, изображено на рис. 119 и 120. Скоростная обратная связь превращает следящую систему в систему с астатизмом первого порядка, и если коэффициент K_2 бесконечно велик, то передаточная функция разомкнутой следящей системы стремится к $-\frac{1}{pK_F}$. В этом слу-

чае влияние прямой цепи благодаря обратной связи устраняется. Этого можно практически достичь при условии, что внутри контура обратной связи имеется не более двух апериодических звеньев. Сигнал ошибки, который в системе без обратной связи управлял ускорением выходной величины, теперь управляет скоростью ее изменения.

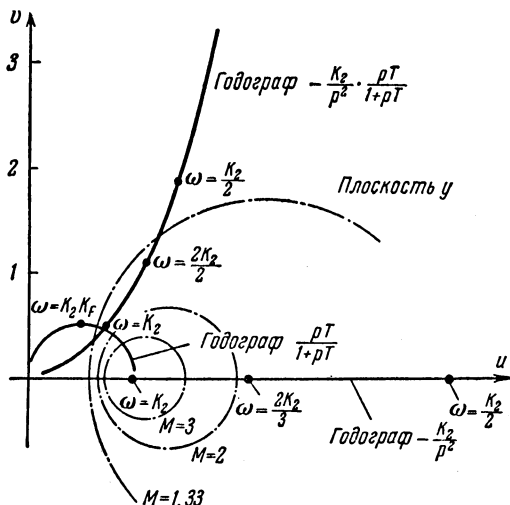


Рис. 120.

С увеличением интенсивности обратной связи запаздывание по скорости в следящей системе увеличивается, так что если скорость выходной величины поддерживается постоянной, то и сигнал обратной связи тоже постоянен, и так как напряжение ошибки на входе усилителя следящей системы должно быть равно нулю при отсутствии ускорения выходной величины, то отсюда следует, что напряжение ошибки должно быть равно и противоположно по знаку сигналу обратной связи. Таким образом, скоростное запаздывание равно

$$\theta_{уст} = \Omega_{вх} K_F,$$

где $\Omega_{вх}$ — скорость, поддерживаемая на входе. Однако если коэффициент усиления прямой цепи K_2 очень велик, то малое скоростное запаздывание приведет к насыщению

в прямой цепи и вызовет максимальный вращающий момент в двигателе. Таким образом, практически скоростное запаздывание определяется скорее максимально возможным вращающим моментом и механическим демпфированием на валу двигателя, чем постоянной времени цепи обратной связи.

Отрицательная скоростная обратная связь в следящей системе с двигателем, вращающий момент которого может регулироваться, оказывает на устойчивость то же самое влияние, что и добавление к выходному валу вязкого трения, так как сигнал обратной связи на входе усилителя сигнала ошибки вызывает увеличение вращающего момента, пропорциональное скорости вала. Так как демпфирование с помощью обратной связи не является естественным демпфированием, то оно не вызывает потерь энергии, ибо вместо того, чтобы заставлять двигатель создавать вращающий момент, а затем уменьшать его с помощью трения, зависящего от скорости, отрицательная скоростная обратная связь лишь обеспечивает изменение вращающего момента обратно пропорционально скорости изменения ошибки. В пределах насыщения каждый метод дает одинаковое уменьшение скорости реакции и увеличение запаздывания по скорости при сравнимых стабилизирующих эффектах.

Ввиду того, что сигналом ошибки во многих системах является постоянное напряжение, скоростная обратная связь часто может быть получена с помощью присоединения к выходному валу тахогенератора постоянного тока. Тахогенератор должен иметь очень малые пульсации коллектора, и напряжение на его зажимах должно линейно зависеть от его скорости. Если сигнал ошибки представляет собой переменное напряжение, то подходящий сигнал обратной связи может быть получен от специального индукционного тахогенератора, подключенного к выходному валу. Этот тахогенератор возбуждается с помощью переменного напряжения несущей частоты и его напряжение зависит от скорости вращения вала и от амплитуды тока возбуждения. Выходное напряжение тахогенератора либо в фазе, либо в противофазе с несущей, в зависимости от направления вращения. Это напряжение, складываясь с сигналом ошибки, создает отрицательную обратную связь.

Иногда напряжение, пропорциональное скорости вала, уже существует в следящей системе. Например, в системе регулирования Варда—Леонарда (рис. 97) некоторая часть напряжения якоря двигателя подается (желательно с предосторожностями, описанными в 12.5.3) для компенсации падения напряжения на сопротивлении. Отметим, что хотя теоретически скорости вращения вала двигателя и регулируемой нагрузки, связанные редуктором, могут отличаться лишь отношением, определяемым передаточным числом, редуктор практически вносит нелинейное трение и иногда зазоры.

В некоторых системах двигатель соединяется с нагрузкой гибким валом, влияние которого тоже должно быть учтено в структурной схеме. Оба эти обстоятельства могут привести к тому, что влияние скоростной обратной связи существенно различно, в зависимости от того, откуда обратная связь снимается: с двигателя, нагрузки или промежуточной точки.

8.3.2. Обратная связь по ускорению.

Для того чтобы избежать увеличения скоростного запаздывания, вызванного скоростной обратной связью, естественно осуществить обратную связь через квазидифференцирующую цепь, которая передает изменения, но не пропускает постоянное значение. Так как стабилизация требуется лишь при наличии изменений, то эта обратная связь оказывает стабилизирующее действие, не вводя установившихся ошибок. Передаточная функция цепи обратной связи теперь представляет собой произведение передаточной функции вида $-pK_F$ и передаточной функции квазидифференцирующей цепи (рис. 47), т. е.

$$\bar{y}_F(p) = -pK_F \frac{pT}{1+pT}.$$

Если

$$\bar{y}_1(p) = \frac{K_2}{p^2},$$

то согласно уравнению (16) передаточная функция разомкнутой системы со стабилизирующей обратной связью

имеет вид

$$\bar{y}_L(p) = -\frac{K_2}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_2 K_F T}{1 + pT}},$$

или

$$\bar{y}_L(p) = -\frac{K_2}{p^2} a \frac{1 + pT}{1 + a pT},$$

где

$$a = \frac{1}{1 + K_2 K_F T}.$$

При K_2 очень большом по сравнению с единицей получим:

$$\bar{y}_L(p) \approx -\frac{1 + pT}{p^2 K_F T}.$$

Обратная связь оказывает влияние, аналогичное стабилизации с помощью дифференцирующей цепи, с той важной разницей, что когда K_2 очень велико, то ускорение выходной величины на единицу сигнала ошибки становится почти полностью зависимым от характеристик цепи обратной связи. Это происходит потому, что сигнал обратной связи, поданный на вход усилителя, вызывает вращающий момент, приближенно пропорциональный ускорению (с точностью до аperiодического звена с постоянной времени T), что эквивалентно увеличению момента инерции нагрузки. При этом собственная частота следящей системы уменьшается. Это может оказаться полезным, например, в тех случаях, когда надо бороться с возмущающими воздействиями порывов ветра на вращающиеся антенны.

В то же время большой коэффициент усиления усилителя приводит к насыщению системы при очень малых ошибках. Инерция, обусловленная обратной связью, исчезает, и полного вращающего момента мотора оказывается достаточно для того, чтобы сделать ошибку равной нулю.

В гидравлических следящих системах можно получить составляющую, обусловленную обратной связью по ускорению, из перепада давления масла на гидравлическом моторе. Она пропорциональна вращающему моменту и является единственной истинной мерой ускорения, когда

нагрузка в основном инерционная. Сигнал обратной связи может быть получен в виде механического отклонения, если заставить давление действовать на плунжер, нагруженный пружиной, или этот сигнал может быть передан непосредственно в виде давления к более ранней точке в прямой цепи. Так, например, давление обратной связи может быть приложено к успокоителю гидравлического интегрирующего усилителя (рис. 99), вызывая дополнительное смещение золотника.

8.4. Регулирование по интегралу

Еще в 1922 г. Минорским [5] было указано, что установившиеся ошибки в замкнутой системе регулирования могут быть значительно уменьшены введением интегрирующих элементов. Это эквивалентно повышению порядка астатизма системы, что, как известно, уменьшает запас устойчивости (см. 7.3). Добавление интегрирующих элементов увеличивает усиление, а следовательно, и величину обратной связи на низких частотах, тем самым уменьшая ошибку на низких частотах. Таким образом, для того чтобы уменьшить низкочастотные и установившиеся ошибки, не нарушая устойчивости, в контур необходимо внести формирующие элементы, увеличивающие усиление на низких частотах и коэффициент усиления по постоянному току, но оставляющие неизменным усиление и фазовый сдвиг в диапазоне собственной частоты следящей системы. Для достижения этого обычно используются два метода, которые будут рассмотрены ниже.

8.4.1. Интегрирующая цепь.

В простейшем случае регулирования по интегралу для формирования сигнала ошибки на низких частотах используется пассивная интегрирующая цепь. Один из вариантов такой цепи, удовлетворительно работающей с сигналами ошибки постоянного тока, изображен на рис. 48; его передаточная функция имеет вид

$$\frac{1 + pT}{1 + p \frac{T}{b}},$$

где b — число, меньшее единицы.

На частотах ниже $\frac{b}{T}$ рад/сек усиление этой цепи стремится к единице; на частотах выше $\frac{1}{T}$ усиление стремится к b . Амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы имеет подъем на низких частотах за счет увеличения усиления прямой цепи в $\frac{1}{b}$ раз и введения интегрирующей цепи; передаточная функция разомкнутой системы при этом должна быть умножена на выражение вида

$$\frac{1}{b} \frac{1+pT}{1+p \frac{T}{b}}.$$

Цепь такого вида имеет максимальный сдвиг по фазе на частоте $\frac{\sqrt{b}}{T}$, причем фазовый сдвиг стремится к нулю по обе стороны от этой частоты. Если добиться того, чтобы сдвиг по фазе на собственной частоте следящей системы был пренебрежимо мал, то устойчивость замкнутой системы незначительно изменится из-за этой цепи.

В качестве примера рассмотрим рассматриваемую систему, стабилизированную добавлением сигнала, обусловленного скоростью ошибки, как описано в 8.2.5.1. На рис. 121 изображены амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики разомкнутой стабилизированной следящей системы с коэффициентом усиления K_1 , равным 200. Коэффициент усиления разомкнутой системы может быть увеличен в $\frac{1}{b}$ раз (например, за счет увеличения коэффициента усиления усилителя сигнала ошибки). Введение интегрирующей цепи ослабит высокие частоты в b раз. Для того чтобы обеспечить как можно меньшее влияние на запас по фазе, параметры цепи выбраны таким образом, чтобы максимальный сдвиг по фазе, вызванный цепью, был на частоте на две декады ниже, чем собственная частота следящей системы. Собственная частота следящей системы равна 80 рад/сек, а максимальный фазовый сдвиг, вызванный дифференцирующей цепью, лежит на частоте 1 рад/сек (рис. 121), b равно 0,1, так что усиление возрастает от

200 до 2000, понижая порядок установившегося скоростного запаздывания. Полоса пропускания и запас устойчивости почти не меняются.

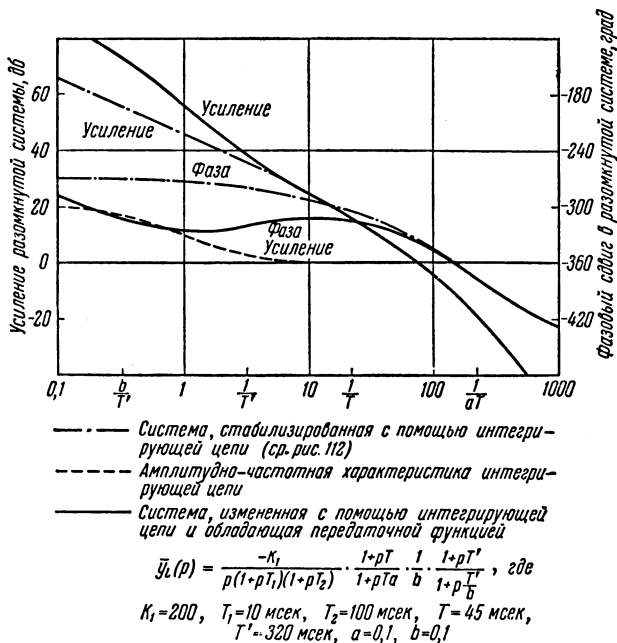


Рис. 121.

8.4.2. Введение ошибки и интеграла ошибки.

В более совершенном способе регулирования по интегралу используется активная интегрирующая цепь, включенная параллельно прямой цепи, так что регулирование осуществляется по ошибке и интегралу ошибки. Если e — сигнал ошибки, то формирующий блок должен иметь передаточную функцию следующего вида:

$$L \left\{ e + K \int e dt \right\} = \bar{e} \left(1 + \frac{K}{p} \right) = \bar{e} \frac{1+pT}{pT},$$

где

$$T = \frac{1}{K}.$$

Амплитудно-частотная характеристика этого элемента отличается от амплитудно-частотной характеристики интегрирующего звена тем, что она имеет постоянный наклон, равный 6 дб/окт до сопрягающей частоты, равной $\frac{1}{T} \text{ рад/сек.}$ На частотах выше сопрягающей она стремится к единице.

Когда сигнал ошибки представлен в виде постоянного напряжения, то интеграл может быть введен с помощью

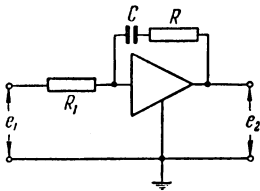


Рис. 122. Активная цепь, обладающая передаточной функцией:

$$\frac{\bar{e}_2}{e_1} \approx -\frac{R}{R_1} \left[1 + \frac{1}{pCR} \right].$$

усилителя с высоким коэффициентом усиления с потенциально заземленной суммирующей точкой, изображенного на рис. 122. В то время как применение пассивной цепи требует увеличения коэффициента усиления разомкнутой системы для компенсации ослабления, вносимого цепью, применение активной интегрирующей цепи не связано с этим требованием. Другой способ введения интеграла в закон регулирования состоит в применении гидравлического интегрирующего усилителя. Это сделано в следящей системе управления положением вала, изображенной на рис. 98, а передаточная функция выведена в приложении 3.

8.4.3. Применение в системе с насыщением.

Регулирование по интегралу может оказаться полезным при перегрузке следящей системы. В качестве примера рассмотрим следящую систему для регулирования скорости велодина*), кратко описанную в 7.2.2.

Внезапное увеличение скорости в соответствии со скачкообразным увеличением входного напряжения в устройстве, изображенном на рис. 93, может вызвать перегрузку усилителя, питающего обмотку возбуждения двигателя. В течение интервала существования перегрузки двигатель вращается с постоянным ускорением до тех пор, пока сигнал ошибки на входе усилителя не становится

*) См. [4] к главе 7.

достаточно малым, таким, что система работает в линейной области, после чего быстро устанавливается новая скорость (рис. 123). Если необходимо, чтобы велодин производил точное интегрирование, например в навигационных счетно-решающих устройствах, то такая

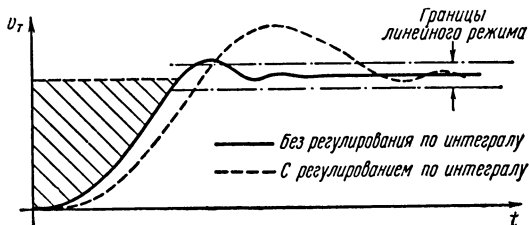


Рис. 123.

форма реакции неприемлема, так как угол поворота выходного вала должен быть пропорционален интегралу входного напряжения. Ошибка в интегрировании пропорциональна заштрихованной площади на рис. 123.

Для того чтобы устранить эту неточность, на вход усилителя следящей системы включается блок, изобра-

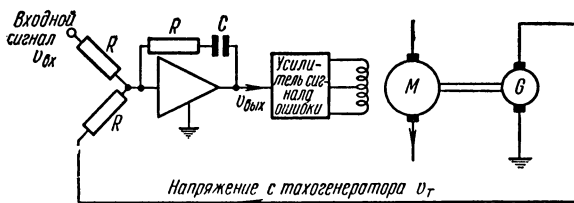


Рис. 124. Велодин с регулированием по интегралу.

женный на рис. 122, дающий на выходе ошибку и интеграл ошибки. Входное напряжение $U_{вх}$ и напряжение тахогенератора U_T складываются в потенциально заземленной точке, как показано на рис. 124. Глубокая обратная связь предохраняет интегрирующий каскад от перегрузки при подачи на его вход скачкообразного напряжения, и в течение времени, когда двигатель ока-

зывается перегруженным, на выходе этого каскада появляется напряжение, определяемое выражением

$$-v_{\text{вых}}(t) = (v_{\text{вх}} + v_T) + \frac{1}{CR} \int_0^t (v_{\text{вх}} + v_T) dt.$$

В результате наличия интегрального слагаемого выходной вал продолжает ускоряться после того, как ошибка становится равной нулю, и лишь когда $v_{\text{вых}}$ становится равной нулю, двигатель достигает установившейся скорости. При этом

$$-\frac{1}{CR} \int_0^t (v_{\text{вх}} + v_T) dt = v_{\text{вх}} + v_T.$$

Если коэффициент усиления разомкнутой системы в линейном режиме достаточно велик, то $(v_{\text{вх}} + v_T) \rightarrow 0$ и

$$-\int_0^t v_{\text{вх}} dt \approx \int_0^t v_T dt.$$

Но интеграл $\int_0^t v_T dt$ пропорционален $\theta_{\text{вых}}$, углу поворота выходного вала, и, следовательно, угол $\theta_{\text{вых}}$ пропорционален $\int_0^t v_{\text{вх}} dt$.

Это и есть необходимое условие точности интегрирования велодинамом.

Типы реакций, полученные при регулировании по интегралу, изображены на рис. 123; выброс представляет собой дополнительное вращение вала, которое компенсирует реакцию, вызванную начальными условиями.

Литература

1. Greenwood I. A. et al., *Electronic Instruments*, McGraw-Hill Book Co., 1948, p. 332.
2. Mall A. G., *Damper Stabilised Instrument Servomechanisms*, AIEE, Tech. Paper 49-79, December 1948.

3. T a n n e r J. A., Minimum Phase Networks, Electronic Engineering, November 1951.
 4. I n g l i s C. E., Gyroscopic Principles and Applications, Proceedings I. Mech. E., 1943, 150, p. 85.
 5. M i n o r s k y N., Directional Stability of Automatically Steered Bodies, Journal Amer. Soc. of Naval Engrs, May 1922, 34, No. 2, pp. 280—309.
 6. J a m e s H. M., N i c h o l s N. B. and P h i l l i p s R. S., Theory of Servomechanisms, McGraw-Hill Book Co., 1947. [Русский перевод: Джеймс Х., Никольс Н., Филипс Ф. (ред.), Теория следящих систем, ИЛ, 1953.]
 7. W e s t J. C., A Textbook of Servomechanisms, English Universities Press, 1953.
-

ГЛАВА 9

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

9.1. Введение

Для исследования нелинейных динамических систем независимо от того, охвачена ли система обратной связью или нет, нет общих аналитических методов, аналогичных методам исследования линейных систем. Так как понятие «нелинейная» включает любую систему, характеристика которой не принадлежит к классу линейных, то разнообразие нелинейностей неограниченно. Те немногие нелинейные дифференциальные уравнения, которые были детально исследованы, почти без исключения являются уравнениями первого или второго порядка, и вследствие этого их решения редко применимы к практическим системам. Среди них системы, описываемые уравнениями второго порядка, содержащие нелинейности, описываемые точно математически, являются скорее исключением, чем правилом.

Ввиду трудностей строгого анализа наиболее плодотворные результаты дают численные методы последовательного приближения и приближенные методы, графические и другие. В этой главе излагается метод, который может быть применен для определения переходных процессов в системах с обратной связью, описываемых уравнениями второго порядка и содержащих нелинейности, которые могут быть заданы лишь графически. Принципиально этот метод может быть применен к системам более высокого порядка, но практически осуществить это довольно трудно.

Уравнения рассматриваемых систем с обратной связью имеют вид

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x, \dot{x}) = 0, \quad (1)$$

где x — зависимая переменная системы (функция времени), $f(\dot{x})$ и $g(x, \dot{x})$ — нелинейные функции соответствующих переменных.

Уравнение (1) может быть представлено в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(v) + g(x, v)}{v}, \quad (2a)$$

$$v = \dot{x} \quad (2б)$$

Для получения уравнения (2a) было использовано следующее соотношение:

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}. \quad (2в)$$

9.2. Траектории на фазовой плоскости

Плоскость с координатами v и x называется *фазовой плоскостью*. Уравнение (2a) определяет наклон фазовой траектории, т. е. *траектории* на фазовой плоскости. Фазовая траектория может быть получена интегрированием уравнения (2a). Через каждую точку фазовой плоскости проходит фазовая траектория и притом только одна. Заметим, что переменная времени t не фигурирует в уравнении фазовой траектории в явном виде.

Значения v и x , в которых наклон траектории не определен, называются *особыми точками*. Из уравнения (2a) видно, что особые точки имеют место при одновременном равенстве нулю v и $[f(v) + g(x, v)]$. Из рассмотрения уравнения (2a) следует, что фазовые траектории всегда пересекают прямую $v = 0$ под прямым углом.

В качестве примера фазового представления рассмотрим идеализированную линейную замкнутую систему с затуханием, равным нулю. Это соответствует, например, тому случаю, когда интеграторы в системе, изображенной на рис. 84, идеальны, т. е. когда $m = \infty$, $R_2 = \infty$.

Общая передаточная функция может быть получена из уравнения (7) главы 6 в виде

$$\bar{y}_0(p) = \frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{e_{\text{ВХ}}} = -\frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 1},$$

так как $Q = \infty$, когда $m = \infty$ и $R_2 = \infty$.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний можно получить, положив $\bar{e}_{\text{ВХ}} = 0$ и заменив p на $\frac{d}{dt}$; таким образом,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3)$$

где

$$x = e_{\text{ВЫХ}}(t),$$

$$v = \dot{e}_{\text{ВЫХ}}(t).$$

На основании уравнения (2а) имеем:

$$\frac{dv}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{v}.$$

Интегрируя это уравнение, находим уравнение фазовой траектории в виде

$$\int v dt = -\omega_0^2 \int x dx,$$

откуда

$$v^2 + \omega_0^2 x^2 = K^2. \quad (4)$$

Это — уравнение эллипса в фазовой плоскости; K — постоянная интегрирования, которая может быть определена по начальным условиям.

Некоторые из возможных фазовых траекторий изображены на рис. 125. Стрелки на фазовых траекториях обозначают направление увеличения времени. Замкнутые кривые, образованные каждой траекторией, соответствуют незатухающим колебаниям, при которых

$$x(t+T) = x(t) \text{ и } v(t+T) = v(t).$$

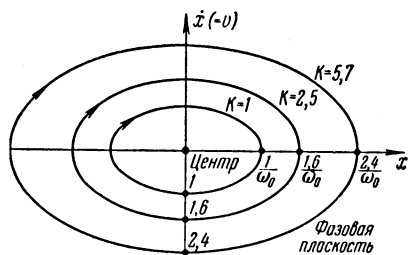


Рис. 125.

Амплитуда колебаний полностью определяется начальными условиями, а период колебаний T — величина постоянная. Особая точка расположена в начале координат и называется *центром*. Траектории окружают центр, но ни одна из них не проходит через него.

Более реальным примером является кольцо интеграторов с затуханием (см. рис. 84), общая передаточная функция которого равна

$$\bar{y}_0(p) = \frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{e_{\text{ВХ}}} = - \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q\omega_0} p + 1}$$

(ср. с уравнением (7) главы 6). Дифференциальное уравнение, описывающее свободные колебания, имеет вид

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5)$$

где $x = e_{\text{ВЫХ}}(t)$; $\dot{x} = v = \dot{e}_{\text{ВЫХ}}(t)$ и $b = \frac{\omega_0}{2Q}$, откуда

$$\frac{dv}{dx} = - \left[\frac{2bv + \omega_0^2 x}{v} \right]. \quad (6)$$

Уравнение (6) интегрируется с помощью разделения переменных и введения новой переменной $u = \frac{v}{x}$, откуда получается следующее уравнение траекторий*):

$$v^2 + 2bv x + \omega_0^2 x^2 = \\ = \exp \left[\frac{2b}{\omega_1} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{v} + b \right) + C \right], \quad (7)$$

где $\omega_1^2 = \omega_0^2 - b^2$, а C — постоянная интегрирования.

Для каждой точки $P(x, v)$ фазовой плоскости значение C может быть вычислено, и это значение однозначно определяет фазовую траекторию, проходящую через эту точку.

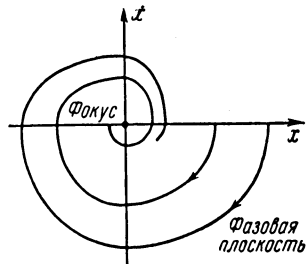


Рис. 126.

*) См. [1], стр. 17.

Фазовые траектории представляют собой спирали, стремящиеся к началу координат с увеличением времени. Особая точка в начале координат, на которую навертываются все траектории, называется *фокусом*. Две траектории для различных начальных условий (т. е. для различных значений C) изображены на рис. 126.

9.3. Предельные циклы

В предыдущем параграфе было показано, что амплитуда замкнутых траекторий в линейных системах без затухания зависит лишь от начальных условий и что вокруг центра имеется бесконечное число таких траекторий.

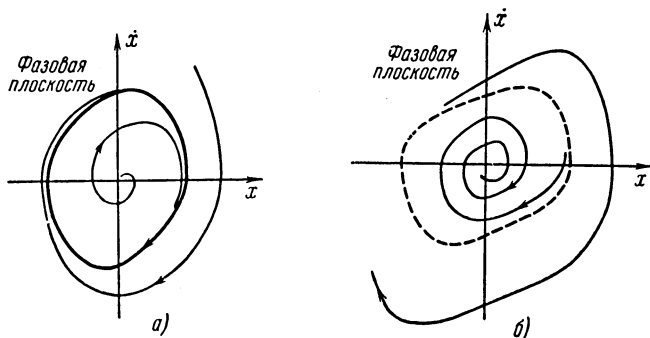


Рис. 127.

В реальных системах было обнаружено, что амплитуда самовозбуждающихся колебаний, или автоколебаний, не зависит от начальных условий. Одним из наиболее часто встречающихся примеров являются часы, где в задемпфированной колебательной системе (маятник или балансное колесо) поддерживаются колебания с помощью импульсных сил [2]. Конечное состояние колебаний маятника совершенно не зависит от начальных условий, т. е. от амплитуды начального толчка, необходимого для пуска часов. *Предельным циклом* называются изолированные замкнутые траектории, соответствующие таким колебаниям. Это название введено математиком Пуанкаре, но приложением его применительно к колебаниям в нели-

нейных системах мы обязаны Андронову [3]. Предельные циклы, являющиеся свойством, присущим лишь нелинейным, неконсервативным системам, могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Устойчивый предельный цикл — это такой, к которому неограниченно стремятся все траектории с увеличением времени (рис. 127, а). Неустойчивый предельный цикл — это такой цикл, к которому траектории стремятся при движении по ним в направлении уменьшения времени (рис. 127, б). Вообще говоря, устойчивые и неустойчивые предельные циклы на фазовой плоскости чередуются, хотя только устойчивые имеют физический смысл, как незатухающие колебания.

9.4. Определение времени

На фазовых траекториях всегда изображаются стрелки, показывающие направление возрастания времени. Однако интервал времени не всегда можно определить непосредственно из рассмотрения фазового портрета. Интервал прошедшего времени вычисляется из следующего интеграла:

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{v} dx. \quad (8)$$

Время может быть определено графически. Если изобразить $\frac{1}{v}$ как функцию x для рассматриваемой фазовой траектории, то площадь под кривой между данными значениями x является мерой интервала прошедшего времени. Основная неточность этого метода заключается в определении площади, заключенной между асимптотой и кривой, когда меняется знак v и $\frac{1}{v}$ стремится к бесконечности.

Второй графический метод, разработанный Дипрозом (Diprose) [4], иллюстрируется с помощью рис. 128. Из точки $P_1(x_1, v_1)$, лежащей на фазовой траектории, под малым углом $\frac{\theta}{2}$ к оси v проводится линия, пересекающая ось x в точке a . Из точки a проводится вторая линия,

составляющая с первой линией угол θ и пересекающая фазовую траекторию в точке $P_2(x_2, v_2)$. Если угол θ мал, то

$$x_2 - x_1 \approx v_1 \theta,$$

откуда

$$\theta = \frac{x_2 - x_1}{v_1}.$$

Исходя из уравнения (8) и полагая, что v имеет постоянное значение v_1 в пределах малого интервала $x_2 - x_1$, мы получаем выражение для интервала времени, соответствующего двум точкам на фазовой траектории, имеющее вид

$$t_2 - t_1 \approx \theta.$$

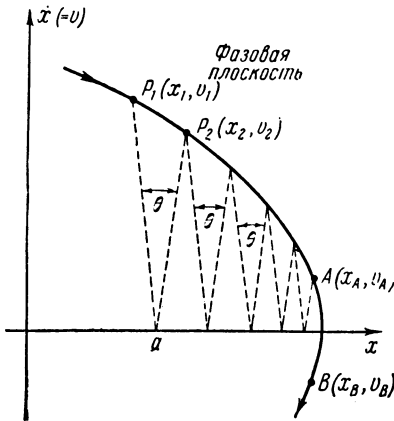


Рис. 128.

Если масштабы x и v отличаются, то угол θ должен быть умножен на отношение масштабов, для того чтобы он соответствовал интервалу прошедшего времени.

Интервал времени между любыми двумя точками на фазовой траектории, отстоящими достаточно да-

леко друг от друга, может быть определен повторением этого процесса, как показано на рис. 128.

Применение любого из двух предыдущих методов измерения времени в точке, где фазовая траектория пересекает ось абсцисс, вызывает трудности, так как при этом v равно нулю. Эта трудность может быть преодолена введением приближенного выражения для интервала времени, соответствующего двум точкам на фазовой траектории, расположенным вблизи и на равных расстояниях от точки пересечения с осью абсцисс, например между

точками A и B на рис. 128. При этом делаются следующие предположения:

(1) $f(x)$ и $g(x, \dot{x})$ симметричны относительно $\dot{x}=0$, или они являются функциями, меняющимися плавно, когда \dot{x} меняет знак;

(2) x фактически остается постоянным между точками A и B и имеет значение, равное x_A .

При этом

$$\int_{t_A}^{t_B} f(\dot{x}) dt \approx f(0) (t_B - t_A)$$

и

$$\int_{t_A}^{t_B} g(x, \dot{x}) dt \approx g(x_A, 0) (t_B - t_A).$$

Интегрируя уравнение (1) по времени между точками A и B , получаем:

$$(\dot{x}_B - \dot{x}_A) + f(0) (t_B - t_A) + g(x_A, 0) (t_B - t_A) = 0,$$

откуда

$$(t_B - t_A) \approx \frac{\dot{x}_A - \dot{x}_B}{f(0) + g(x_A, 0)}.$$

При сближении точек A и B точность приближения возрастает.

9.5. Определение ускорения

На рис. 129 наклон фазовой траектории в точке P равен $\frac{dv}{dx}$, так что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dv}{dx},$$

где α есть угол между нормалью к фазовой траектории PN и перпендикуляром PL , опущенным из точки P на

ось x . В треугольнике NPL

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{NL}{PL} = \frac{NL}{v_p},$$

так что $NL = v_p \operatorname{tg} \alpha = v_p \frac{dv}{dx} = \ddot{x}_p$ (из уравнения (2в)).

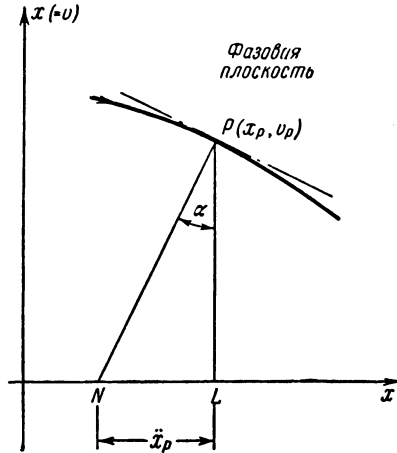


Рис. 129.

Следовательно, ускорение в любой точке фазовой траектории пропорционально величине поднормали к этой точке.

9.6. Графическое построение фазовых траекторий

В редких случаях можно без труда проинтегрировать уравнение (2а). Особую трудность это представляет в случаях, когда нелинейности не могут быть выражены точно математически, а задаются графически. В большинстве случаев простейшим путем получения фазовых траекторий является графическое построение. Ниже будут описаны два удобных метода графического построения фазовых траекторий.

9.6.1. Метод изоклин.

Этот метод часто применяется для построения фазовых траекторий, когда нелинейности могут быть выра-

жены математически. Он был впервые использован Ван дер Полем [5] при исследовании уравнения

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

которое встречается в связи с ламповыми генераторами.

Для применения этого метода необходимо, прежде всего, вывести уравнение наклона фазовых траекторий (т. е. уравнение (2а)). Затем наклон приравнивается произвольной постоянной C . Это приводит к уравнению вида

$$\frac{dv}{dx} = C = - \left[\frac{f(v) + g(x, v)}{v} \right].$$

Если выражения для $f(v)$ и $g(x, v)$ точно известны, то это уравнение определяет кривую, связывающую значения x и v , на которых наклон фазовой траектории постоянен. Такая кривая называется *изоклиной*. Вдоль каждой изоклины нанесены короткие линии, имеющие соответствующий наклон C . Фазовая траектория получается вычерчиванием плавной кривой, пересекающей каждую изоклину под соответствующим углом.

Рассмотрим в качестве примера уравнение системы с обратной связью, содержащей элемент с кубической нелинейностью, структурная схема которой изображена на рис. 17. Запишем уравнение, связывающее S , R и e , в операторной форме

$$[\bar{S} + \beta\bar{R}] \frac{A}{1 + pT^2} = \bar{e} \quad (9a)$$

и

$$R(t) = e(t) + ae^3(t). \quad (9б)$$

Из уравнения (9а) получаем:

$$A\bar{S} = \bar{e} + 2pT\bar{e} + p^2T^2\bar{e} - A\beta\bar{R}.$$

Заменяя p на $\frac{d}{dt}$ и $\bar{e}(p)$, $\bar{R}(p)$ и $\bar{S}(p)$ на $e(t)$, $R(t)$ и $S(t)$ соответственно, получим из уравнений (9а) и (9б) следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{2}{T} \frac{de}{dt} + \frac{e}{T^2} - \frac{A\beta e}{T^2} - \frac{aA\beta e^3}{T^2} = \frac{A}{T^2} S(t).$$

При равенстве нулю правой части этим уравнением описываются свободные колебания, так что

$$\ddot{e} + \frac{2}{T} \dot{e} + \frac{e(1-A\beta) - aA\beta e^3}{T^2} = 0$$

(ср. уравнение (1)).

Наклон фазовой траектории при этом согласно уравнению (2а) равен

$$\frac{d\dot{e}}{de} = -\frac{2}{T} - \left[\frac{e(1-A\beta) - aA\beta e^3}{T^2 e} \right].$$

Зададим численные значения:

$$T = 1, \quad A\beta = -9, \quad a = 0,02.$$

Подставляя эти значения в уравнение для фазовой траектории, получим:

$$\frac{d\dot{e}}{de} = -2 - \left[\frac{10e + 0,18e^3}{e} \right].$$

Из этого уравнения вычисляем:

$\frac{d\dot{e}}{de}$	$\frac{10e + 0,18e^3}{e}$
-10	8
-2	(e=0) 0
0	-2
1	-3
5	-7
10	-12
∞	(e=0) -∞

Изоклины, построенные по этим данным, нанесены на рис. 130. Здесь же изображены две типичные траектории. Свободные колебания, соответствующие каждой фазовой траектории, представляют собой затухающие колебания

(см. рис. 21, б), и особой точкой является расположенный в начале координат фазовой плоскости фокус, к которому стремятся все фазовые траектории.

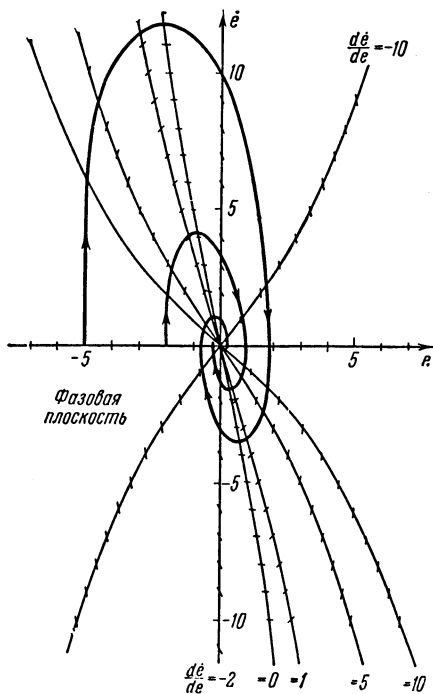


Рис. 130.

9.6.2. Построение Льенара (Liénard).

Второй метод, описываемый ниже, является видоизменением метода Льенара [6] и дает возможность точно вычерчивать фазовые траектории. Его удобно применять в двух случаях, соответствующих двум типам нелинейных уравнений второго порядка, часто встречающихся на практике.

Первому случаю соответствует уравнение, которое имеет вид

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + h(x) = 0. \quad (10)$$

и v , как и прежде, одинаковы. В этом случае необходимы четыре направляющие линии, а именно:

$$x = f(v); x = rv; v = sx \text{ и } x = g(v). \quad (14)$$

Начальные условия задаются точкой $P_1(x_1, v_1)$. В точки A и B на осях x и v опускаются из этой точки перпендикуляры. Пересечения с направляющими линиями в точках C и D определяют sx_1 и rv_1 . Эти значения равны AC и BD соответственно. Эти два отрезка складываются алгебраически вдоль оси v с точкой O в качестве начала координат. Положительные величины откладываются в направлении положительных v , и наоборот; OE , следовательно, равно $(sx_1 + rv_1)$. Через точку E проводится линия, параллельная оси x , пересекающая кривую $x = g(v)$ в точке F ; EF тогда равно $g(sx_1 + rv_1)$. $f(v_1)$ изображается линией BG , и величина этого отрезка алгебраически складывается с EF вдоль оси x с точкой A в качестве начала координат; положительные величины откладываются слева от A , и наоборот. Тогда AH равно $(BG + EF) = [f(v_1) + g(sx_1 + rv_1)]$, т. е. числителю уравнения (13). Дуга окружности с центром в точке H , проведенная через P_1 , представляет собой часть фазовой траектории, как и в предыдущем построении, а полная фазовая траектория может быть получена, если на этой дуге взять точку и повторить только что описанную процедуру.

Хотя эти построения при их описании могут показаться сложными, применение их очень просто. Если построение выполняется на графленной бумаге, то шаги, приводящие к построению кусочка траектории, часто могут быть выполнены с помощью циркуля и несложной арифметики. Примеры построения приведены в следующей главе.

9.7. Ограничения метода фазовой плоскости

Исследование систем методом фазовой плоскости может быть применено для определения переходных процессов и нахождения предельных циклов любой нелинейной системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка. Для систем более высокого порядка требуется многомерное фазовое пространство. Например, уравнение третьего порядка может быть представлено

в трех измерениях с координатами x , \dot{x} и \ddot{x} . Такие исследования принципиально осуществимы, но их сложность делает их непривлекательными, хотя в направлении исследования уравнений третьего порядка были сделаны некоторые шаги.

Метод фазовой плоскости может быть применен для определения реакции на входные сигналы в виде линейно возрастающей функции, т. е. сигналов, возрастающих со временем с постоянной скоростью. Однако этот метод неприменим к исследованию реакций на периодическое возмущение.

Литература

1. Minorsky N., Introduction to Non-Linear Mechanics, J. W. Edwards, Ann Arbor, USA, 1947.
 2. Андронов А. А., Витт А. А. и Хайкин С. Э., Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
 3. Андронов А. А., Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний, Собрание трудов, Изд-во АН СССР, 1956, стр. 41.
 4. Diprose K. V., Automatic and Manual Control, ed. Tustin. Butterworths Scientific Publications, 1952, p. 304.
 5. Van der Pol B., On Relaxation Oscillations, Phil. Mag., Nov. 1926, 2.
 6. Liénard A. L., Etude des oscillations entretenues, Revue Generale de l'Electricite, XXIII, No 21, pp. 901—912, and No 22, pp. 946—954.
-

ГЛАВА 10

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

10.1. Введение

В предыдущих главах было показано, как методы исследования нелинейных систем с обратной связью могут быть применены к решению практических задач. Во многих случаях, и в особенности, когда система содержит механические элементы, внутренние нелинейности могут оказывать сильное влияние на поведение системы. Если рассматривать малые возмущения относительно состояния равновесия, то полезные результаты могут дать идеализированные линейные уравнения, выведенные таким же образом, как для регулятора скорости в 1.1. Однако эти методы могут оказаться неверными при наличии нелинейностей, и они совершенно неспособны объяснить, например, незатухающие колебания с малой амплитудой при отсутствии входного сигнала или внезапные скачки амплитуды на выходе при плавном изменении сигнала на входе. Эти явления относятся исключительно к области нелинейных явлений.

Наиболее распространенным видом нелинейностей является насыщение или перегрузка, которые свойственны всем физическим системам независимо от их природы [1]. Наступление насыщения в электронных цепях часто является мгновенным, в то время как в других случаях, например, магнитное насыщение системы возбуждения двигателя, представляет собой постепенный процесс, происходящий по мере увеличения тока возбуждения. Другие нелинейности вызываются геометрией элементов; так,

например, в регуляторе скорости, описанном в главе 1, радиус вращения шариков меняется с изменением скорости и поэтому зависимость, связывающая открытие дросселя со скоростью машины, нелинейна. Гидравлические механизмы с дроссельным регулированием существенно нелинейны, так как скорость потока жидкости через дроссель пропорциональна перепаду давления на дросселе. Другие нелинейности вызываются, например, трением в подшипниках, которое не зависит от скорости [2, 3], или такими дефектами, как зазор в элементах соединений и зубчатых передачах, неоднородность обмоток потенциометров, синусоидальная зависимость между сигналом ошибки и отставанием вала в следящих системах (8.2.5) и т. д.

Нелинейные явления в системах, описывающихся уравнениями второго порядка, могут быть исследованы методом фазовой плоскости. В качестве примера мы рассмотрим три типа нелинейностей и покажем, как они влияют на поведение следящей системы с механической нагрузкой, обладающей инерцией и трением. Такой тип следящей системы широко используется в устройствах, мощность на выходе которых не превышает 100 *вт*. Эти следящие системы применяются в устройствах развертки в радиолокационных установках, в системах управления прожекторами и в моделирующих устройствах. В связи с тем, что даже в простейшем практическом случае порядок уравнения выше второго, для использования метода фазовой плоскости необходимо будет сделать некоторые допущения.

10.2. Описание следящей системы и ее линейные уравнения

Схема следящей системы, рассматриваемой в качестве примера, изображена на рис. 133. Угол поворота вала следит за изменениями уровня напряжения (например, управление положением параболоидной антенны с помощью сигнала, пропорционального рассогласованию между направлением на цель радиолокатора и осью параболоида).

Угол поворота выходного вала преобразуется в пропорциональное напряжение с помощью потенциометра,

питаемого постоянным током. Это напряжение на входе усилителя постоянного тока сравнивается с входным напряжением $e_{вх}$. Усилитель имеет двухтактный выходной каскад, напряжение с которого подается на обмотку возбуждения двигателя. Когда входное напряжение и напряжение обратной связи равны и противоположно направлены, то токи в плечах обмотки возбуждения равны по величине. Сигнал ошибки вызывает разбаланс магнитных потоков. Результирующий поток создает вращающий момент на якоре двигателя, причем направление вращающего мо-

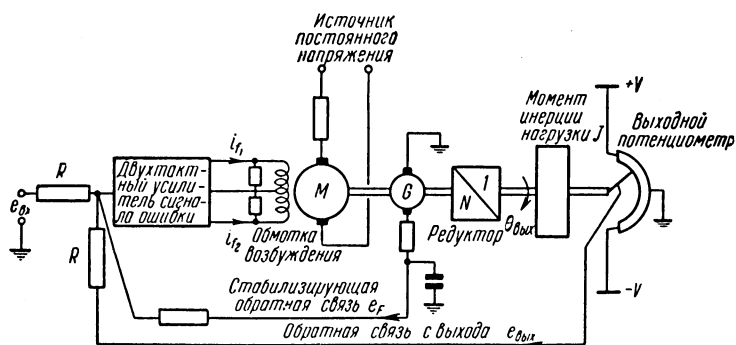


Рис. 133. Электрическая следящая система.

мента зависит от знака ошибки. Ток якоря поддерживается почти независимым от противо-эдс, так как питание обмотки якоря осуществляется через сопротивление большее, чем сопротивление якоря, от источника, напряжение которого выше, чем противо-эдс. Вследствие этого вращающий момент пропорционален разностному току в обмотке возбуждения без ограничений, вызываемых насыщением железа в системе возбуждения. На выходной вал, присоединенный к валу двигателя через понижающий редуктор, действуют момент инерции и трение.

Если исключить на время стабилизирующую обратную связь и внутренние нелинейности, то уравнения системы будут иметь следующий вид:

Напряжение ошибки

$$e = e_{вх} - e_{вых}. \quad (1)$$

Разностный ток возбуждения

$$i_f = i_{f1} - i_{f2} = Ge, \quad (2)$$

где G — коэффициент усиления усилителя в амперах на вольт.

Момент при заторможенном двигателе

$$NT_m = NK_t i_f, \quad (3)$$

где K_t — постоянный коэффициент, N — понижающее отношение редуктора.

Напряжение обратной связи

$$e_{\text{вых}} = K_p \theta_{\text{вых}}, \quad (4)$$

где K_p — постоянная выходного потенциометра в вольтах на радиан.

Вращающий момент двигателя расходуется на создание ускорения и на преодоление трения, так что из уравнений (1)–(4) получаем выражение

$$J \ddot{\theta}_{\text{вых}} + F_v \dot{\theta}_{\text{вых}} = NT_m = NK_t i_f = NK_t G (e_{\text{вх}} - K_p \theta_{\text{вых}}), \quad (5)$$

где J — эффективный момент инерции двигателя, редуктора и нагрузки, отнесенный к выходному валу, F_v — коэффициент трения, зависящий от скорости, отнесенный к выходному валу.

Преобразуя уравнение (5), мы получаем:

$$\ddot{\theta}_{\text{вых}} + \frac{F_v}{J} \dot{\theta}_{\text{вых}} + \frac{NK_t GK_p}{J} \theta_{\text{вых}} = \frac{NK_t G}{J} e_{\text{вх}}$$

или

$$\ddot{\theta}_{\text{вых}} + \frac{E_v}{J} \dot{\theta}_{\text{вых}} + \omega_0^2 \theta_{\text{вых}} = \frac{\omega_0^2}{K_p} e_{\text{вх}}, \quad (6)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{NK_t GK_p}{J}}$ — собственная частота следящей системы.

Свободные колебания выходного вала имеют характер затухающей синусоиды. Собственная частота возрастает с «жесткостью» регулирования, т. е. с увеличением отношения вращающего момента выходного вала к ошибке. Декремент затухания свободных колебаний зависит от величины фрикционного демпфирования в нагрузке.

10.2.1. Скоростная обратная связь и стабилизация по скорости изменения ошибки.

Так как трение вносит потери, то его обычно стремятся уменьшить до минимума и ищут другие способы равноценной стабилизации. Как было описано в главе 8, обычным методом является применение тахогенератора, измеряющего скорость на валу двигателя. Напряжение тахогенератора складывается с $e_{вх}$ и $e_{вых}$ в потенциально заземленной точке, образованной управляющей сеткой усилителя ошибки. Обычно высокочастотная компонента напряжения тахогенератора ослабляется пассивным апериодическим звеном с постоянной времени, малой по сравнению с периодом собственной частоты следящей системы. Если напряжение скоростной обратной связи имеет правильный знак, то оно обеспечивает демпфирование, не отбирая при этом энергии у двигателя. Уравнение, связывающее напряжение скоростной обратной связи со скоростью выходного вала, при условии пренебрежения постоянной времени сглаживания записывается следующим образом:

$$e_F + K_g \dot{\theta}_{\text{вых}}, \quad (7)$$

где постоянная K_g включает передаточное отношение N . Уравнение (2) принимает вид

$$i_f = G(e_{\text{вх}} - e_{\text{вых}} - e_F) = G(e_{\text{вх}} - K_p \theta_{\text{вых}} - K_g \dot{\theta}_{\text{вых}}).$$

В связи с изменением значения i_f изменится и уравнение (5) и мы получим:

$$J \ddot{\theta}_{\text{вых}} + F_v \dot{\theta}_{\text{вых}} = NK_i i_f = NK_i G (e_{\text{вх}} - K_p \theta_{\text{вых}} - K_g \dot{\theta}_{\text{вых}}), \quad (8)$$

откуда

$$\ddot{\theta}_{\text{вых}} + \frac{F_v + F_F}{J} \dot{\theta}_{\text{вых}} + \omega_0^2 \theta_{\text{вых}} = \frac{\omega_0^2}{K_p} e_{\text{вх}}, \quad (9)$$

где $F_F = NK_i GK_g$ — коэффициент демпфирования, вызванный скоростной обратной связью, а ω_0 — собственная частота следящей системы.

В только что приведенном анализе предполагалось, что ток возбуждения устанавливается мгновенно. Фактически из-за индуктивности обмотки возбуждения и под-

ключенного параллельно ей сопротивления, ограничивающего выброс напряжения, нарастание тока происходит по экспоненциальному закону. Но этим пренебрегают для того, чтобы свести уравнение движения к уравнению второго порядка и, следовательно, иметь возможность исследовать его методами фазовой плоскости.

Скоростное запаздывание может быть устранено путем дифференцирования сигнала тахогенератора с помощью пассивной дифференцирующей цепи. Благодаря этому постоянная составляющая тока при постоянной скорости устранивается (8.3.2). Другой путь заключается в том, что можно обойтись без стабилизации с помощью обратной связи, а ввести форсирующую цепь в усилитель (8.2.5). При этом его передаточная функция примет вид

$$i_f = G \frac{1+pT}{1+apT} (e_{\text{вх}} - e_{\text{вых}}),$$

где $a < 1$.

Любой из этих способов стабилизации приводит к уравнениям третьего порядка. Однако стабилизация с помощью производной от ошибки может быть рассмотрена с помощью методов фазовой плоскости, если a считать равным нулю, что практически допустимо, так как a обычно меньше 1.

Уравнение, описывающее поведение следящей системы, тогда имеет вид

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta}_{\text{вых}} + F_v\dot{\theta}_{\text{вых}} &= NK_t i_f = \\ &= NK_t G (e_{\text{вх}} - e_{\text{вых}}) + NK_t GT (\dot{e}_{\text{вх}} - \dot{e}_{\text{вых}}) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta}_{\text{вых}} + F_v\dot{\theta}_{\text{вых}} &= \\ &= NK_t G e_{\text{вх}} - NK_t GK_p \theta_{\text{вых}} + NK_t GT \dot{e}_{\text{вх}} - NK_t GTK_p \dot{\theta}_{\text{вых}}, \\ \ddot{\theta}_{\text{вых}} + \frac{F_v + F_D}{J} \dot{\theta}_{\text{вых}} + \omega_0^2 \theta_{\text{вых}} &= \frac{\omega_0^2}{K_p} e_{\text{вх}} + \frac{\omega_0^2 T}{K_p} \dot{e}_{\text{вх}}, \quad (10) \end{aligned}$$

где ω_0 определено уравнением (6), а $F_D = NK_t GK_p T$ — коэффициент демпфирования, появившийся благодаря производной от ошибки.

Необходимо отметить, что переходный процесс, вызванный входным скачкообразным возмущением, неодинаков

у следящих систем, стабилизированных скоростной обратной связью и производной от ошибки. Различие вызывается тем, что в правую часть уравнения (10) входит производная входного напряжения, которая дает импульс на входе следящей системы дополнительно ко входному скачку напряжения. Свободные колебания можно вызвать, если выходной вал вращать в направлении против восстанавливающего момента до тех пор, пока ошибка не достигнет заданного уровня, после чего, освободив вал, можно изучать движение. Так как при этой операции $e_{вх}$ и $\dot{e}_{вх}$ остаются равными нулю, то свободные колебания идентичны для каждого метода стабилизации.

10.3. Исследование влияния ограничения вращающего момента двигателя

Характеристики насыщения различаются по форме в зависимости от их природы. Магнитное насыщение оказывает влияние, постоянно увеличивающееся с увеличением тока возбуждения, и в уравнении представляется заменой постоянного коэффициента вращающего момента K_t нелинейной функцией тока возбуждения. Тогда параметр K_t определяется наклоном нелинейной характеристики в начале координат. Если ограничение имеет место сначала в усилителе ошибки, то оно наступает значительно раньше, чем магнитное насыщение. В этом случае коэффициент усиления усилителя G становится зависимым от амплитуды и для следящей системы со скоростной обратной связью ток в обмотке возбуждения двигателя записывается таким образом:

$$i_f = f_s(e_{вх} - e_{вых} - e_F), \quad (11)$$

где f_s — нелинейная функция, обусловленная ограничением в усилителе, G — крутизна характеристики вблизи начала координат, e_F определяется уравнением (7).

Согласно уравнению (3) вращающий момент определяется выражением

$$T_m = K_t f_s(e_{вх} - e_{вых} - e_F),$$

так что уравнение (8) принимает вид

$$J\ddot{\theta}_{\text{вых}} + F_v\dot{\theta}_{\text{вых}} = NT_m = NK_l f_s (e_{\text{вх}} - K_p\theta_{\text{вых}} - K_g\dot{\theta}_{\text{вых}}). \quad (12)$$

Так как аргументом характеристики насыщения является входной сигнал усилителя, то желательно преобразовать последнее уравнение в уравнение относительно ошибки, выразив $e_{\text{вх}}$ в угловых величинах. Угловая мера ошибки, полученная отнесением сигнала ошибки ($e_{\text{вх}} - e_{\text{вых}}$) к постоянной выходного вала потенциометра, равна

$$\theta = \frac{(e_{\text{вх}} - e_{\text{вых}})}{K_p}.$$

Физически она эквивалентна получению входного напряжения $e_{\text{вх}}$ от идентичного потенциометра, повернутого на угол $\theta_{\text{вх}}$, где

$$e_{\text{вх}} = K_p\theta_{\text{вх}}.$$

В уравнении, характеризующем свободные колебания, входная величина и все ее производные равны нулю, так что $\theta_{\text{вых}} = -\theta$ и уравнение (12) принимает вид

$$\ddot{\theta} + \frac{F_v}{J}\dot{\theta} = -\frac{NK_l}{J}f_s(K_p\theta + K_g\dot{\theta}). \quad (13)$$

Когда следящая система работает в линейном режиме с малыми ошибками, недостаточными для того, чтобы перегрузить усилитель, стабилизация обеспечивается частично за счет присущего системе трения, зависящего от скорости, а частично за счет скоростной обратной связи. При ограничении вращающего момента стабилизирующая обратная связь не может влиять на величину вращающего момента, зависящего лишь от пределов перегрузки усилителя. Обратная связь, однако, изменяет величину ошибки в момент входа и выхода из линейной зоны и таким образом может оказать стабилизирующее влияние.

10.3.1. Безразмерные уравнения.

При исследовании нелинейных систем очень удобно записывать их уравнения в безразмерной форме. Этим путем достигается большая общность результатов и сравнение систем между собой проводится значительно легче. Для приведения уравнений к безразмерной форме амплитуды зависимых величин выражаются через максимальные амплитуды, связанные с нелинейностью характеристик,

а временные переменные выражаются через собственную постоянную времени системы.

Характеристика элемента с насыщением, определяемая уравнением (11), изображена на рис. 134. Она отличается от линейной характеристики тем, что при больших значениях рассогласования величина тока возбуждения

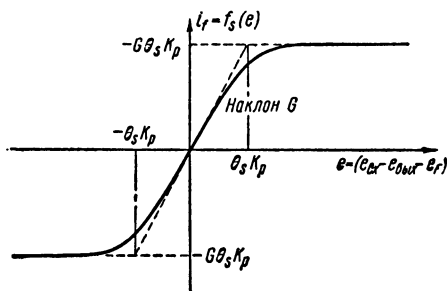


Рис. 134. Характеристика элемента с насыщением.

становится постоянной. Следовательно, при наличии насыщения двигатель разгоняет выходной вал до предельной угловой скорости Ω_{\max} рад/сек, ограниченной трением. Эта предельная скорость может быть выражена в угловых единицах умножением угловой скорости на какую-либо постоянную времени следящей системы (например, на $\frac{J}{F_v}$ — механическую постоянную времени нагрузки). При этом можно выразить углы и угловые скорости соответственно через параметры $\frac{\Omega_{\max} J}{F_v}$ и Ω_{\max} .

Часто оправданным упрощением является аппроксимация нелинейных характеристик с помощью отрезков прямых. Это дает величину углового параметра прямо как напряжение на входе усилителя e на границе линейной зоны, записываемое в виде $K_p \theta_s$, где θ_s есть максимальная угловая ошибка, при которой работа еще происходит в линейной области.

Временную переменную можно сделать безразмерной, положив

$$\omega_0 t = \tau \quad (14)$$

и выразив зависимую переменную и ее производные через τ . Следовательно, собственный период незатухающих колебаний линейной следящей системы в безразмерных обозначениях равен 2π . Производные по τ определяются следующим образом:

$$d\tau = \omega_0 dt$$

(из уравнения (14)) и

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}, \quad (15a)$$

а также

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{d\theta}{d\tau} \right] = \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right] = \frac{\ddot{\theta}}{\omega_0^2}. \quad (15b)$$

Уравнение (13) теперь может быть записано:

$$\frac{\omega_0^2}{\theta_s} \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{F_v}{J} \frac{\omega_0}{\theta_s} \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{NK_t}{J\theta_s} f_s \left(K_p \theta + K_g \omega_0 \frac{d\theta}{d\tau} \right).$$

Пусть

$$x = \frac{\theta}{\theta_s}; \quad \dot{x} = \frac{1}{\theta_s} \frac{d\theta}{d\tau} \quad \text{и} \quad \ddot{x} = \frac{1}{\theta_s} \frac{d^2\theta}{d\tau^2}.$$

Тогда уравнение, записанное выше, можно переписать в виде

$$\ddot{x} + \frac{F_v}{J\omega_0} \dot{x} = -\frac{1}{GK_p\theta_s} f_s (K_p x \theta_s + K_g \omega_0 \dot{x} \theta_s).$$

Правая часть этого уравнения может быть выражена еще проще. Сначала ордината функции $f_s(e)$ (см. рис. 134) делится на $GK_p\theta_s$, затем абсцисса делится на $K_p\theta_s$ и становится масштабом x , так что характеристика насыщения выражается в безразмерных величинах следующим образом:

$$S \left(x + \frac{K_g}{K_p} \omega_0 \dot{x} \right).$$

Она изображена на рис. 135. Уравнение системы теперь принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{F_v}{J\omega_0} \dot{x} + S \left(x + \frac{K_g \omega_0}{K_p} \dot{x} \right) = 0,$$

по

$$\frac{K_g}{K_p} \omega_0 = \frac{F_F}{J \omega_0}$$

(из уравнения (9)), так что

$$\ddot{x} + \frac{F_v}{J \omega_0} \dot{x} + S \left(x + \frac{F_F}{J \omega_0} \dot{x} \right) = 0. \quad (16)$$

Это есть безразмерное уравнение, описывающее свободные колебания переходного процесса следящей системы с насыщением относительно безразмерной ошибки x .

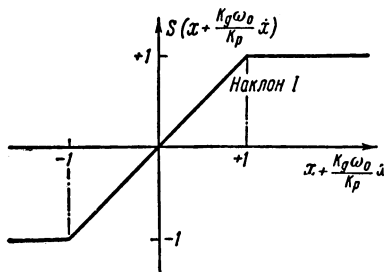


Рис. 135.

10.3.2. Построение фазового портрета.

Сравнивая безразмерное уравнение следящей системы (16) с уравнением (12) главы 9, можно заметить, что эти уравнения

имеют одну и ту же форму и что

$$f(v) \sim \frac{F_v}{J \omega_0} v \quad (\text{где } v = \dot{x})$$

и

$$g(sx + rv) \sim S \left(x + \frac{F_F}{J \omega_0} v \right).$$

Следовательно, для построения траекторий на фазовой плоскости один из методов, описанных в 9.6.2, может быть применен. Построение иллюстрируется рис. 136. Из уравнения (14) главы 9 видно, что основными направляющими линиями являются

$$x = \frac{F_v}{J \omega_0} v; \quad x = \frac{F_F}{J \omega_0} v; \quad v = x \quad \text{и} \quad x = S(v).$$

Эти линии изображены на рис. 136, где каждому коэффициенту $\frac{F_F}{J \omega_0}$ и $\frac{F_v}{J \omega_0}$ дано произвольное численное значение, равное $\frac{1}{8}$, т. е. стабилизирующие эффекты коэффициентов,

обусловленных трением и скоростной обратной связью, сделаны равными. Способ вычерчивания фазовых траекторий для любых начальных условий описан в 9.6.2.

Для физической интерпретации фазового портрета на рис. 136 полезно заметить, что функции $\frac{F_F}{J\omega_0}v$ и $S\left(x + \frac{F_F}{J\omega_0}v\right)$

пропорциональны соответственно механическому моменту, обусловленному трением, и вращающему моменту двигателя. Вращая выходной вал против направления действия вращающего момента двигателя до тех пор, пока не установится требуемая ошибка, и освобождая его, мы получим движение, соответствующее начальной ошибке. Таким образом, на рис. 136 начальная ошибка сделана в четыре раза больше, чем максимальная амплитуда линейной зоны, т. е. $x=4$. Будучи отпущенным, выходной вал вращается в направлении уменьшения ошибки до нуля под влиянием вращающего момента двигателя с насыщением и входит в линейную зону в точке a . В линейной зоне ошибка становится равной нулю и направление вращающего момента мотора изменяется. В точке b следящая система снова входит в зону насыщения, но, вернувшись в зону линейного режима в точке c , следящая система уже больше не выходит за пределы линейной зоны и уменьшает ошибку до нуля. Изменение x в зависимости от τ , соответствующее этой фазовой траектории, изображено на рис. 137 вместе с реакцией следящей системы без насыщения на ту же начальную

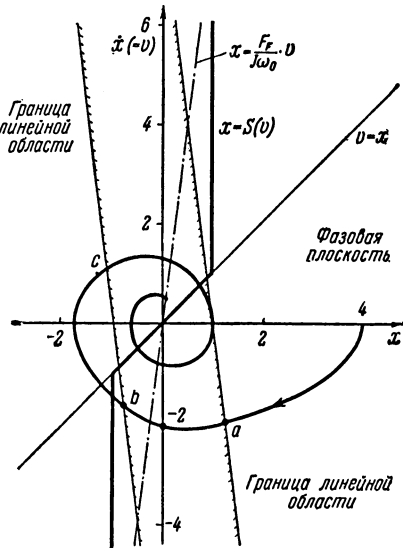


Рис. 136. Фазовый портрет следящей системы с насыщением.

ошибку. Безразмерный период последней системы незначительно больше, чем 2π , благодаря затуханию. Из рис. 137 ясно, что в случае, когда следящая система работает большую часть периода в режиме насыщения, период колебаний больше. По сравнению с линейной следящей системой амплитуда колебаний переходного

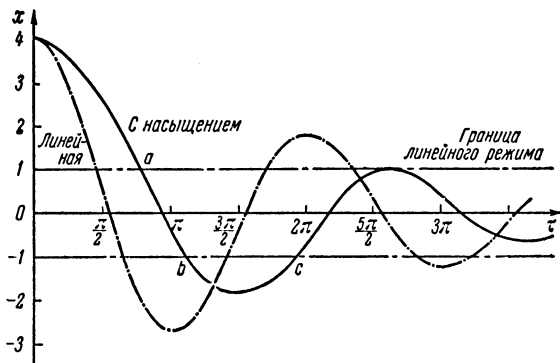


Рис. 137.

процесса уменьшается, а частота колебаний возрастает в нелинейной следящей системе.

Аппроксимация характеристики насыщения с помощью отрезков прямых линий дает возможность разбить фазовую плоскость на области, разделенные границами, представляющими резкие изменения в наклоне $S(x)$. Безразмерные уравнения, соответствующие трем областям, получаются из уравнения (16) и рис. 135 в следующем виде:

$$\ddot{x} + \frac{F_F}{J\omega_0} \dot{x} = \begin{cases} -1 & x > 1 \\ -\left(x + \frac{F_F}{J\omega_0} \dot{x}\right) & -1 < x < 1 \\ +1 & x < -1 \end{cases}. \quad (17)$$

Следовательно, границы областей, изображенные на рис. 136, задаются выражением

$$x + \frac{F_F}{J\omega_0} \dot{x} = \pm 1. \quad (18)$$

Заметим, что их наклон не зависит от механического демпфирования и зависит лишь от коэффициента, обусловленного скоростной обратной связью. Внутри этих границ справедливо линейное уравнение. Вне линейной области скоростная и позиционная обратная связь определяет знак вращающего момента двигателя, но не его амплитуду, причем следящая система практически разомкнута и выходной вал вращается по направлению к состоянию равновесия под влиянием постоянного вращающего момента, стремящегося разогнать выходной вал до такой скорости, при которой вращающий момент двигателя уравновешивается сопротивлением вязкого трения. Наклон границ областей зависит только от скоростной обратной связи. Ее влияние заключается в приближении момента входа в линейную зону, что уменьшает максимальную кинетическую энергию, накопленную в зоне насыщения, и таким образом способствует стабилизации.

10.3.3. Практический пример.

В следящей системе рассматриваемого типа для управления положением УКВ антенны в синхронно следящей радиолокационной установке обычно используется мотор-генератор типа 74*). Якорь этой машины обычно питается от сети постоянного напряжения 24 в через гасящее сопротивление 4 ом. Если в одной половине обмотки возбуждения протекает ток 80 ма, а в другой — он равен нулю, то ток якоря падает от 5 а при остановленном роторе до 2 а при 4000 об/мин вследствие наличия противо-эдс. Это непостоянство тока якоря изменяет вращающий момент обратно пропорционально скорости, что аналогично влиянию сил вязкого трения, действующих на якорь.

Значения постоянных следящей системы типичны.

Момент инерции нагрузки $J = 5,4 \text{ кгм сек}^2$, отнесенный к выходному валу.

Момент на валу при заторможенном двигателе $T_m = 1,25 \text{ кгсм}$.

Передаточное отношение $N = 50$.

«Жесткость» прямой цепи $GK_1 = 4 \text{ кгсм}$ вращающего момента двигателя на вольт сигнала ошибки.

*) Описание этой машины можно найти в [4] главы 7,

Постоянная потенциометра $K_p = 57$ в/рад поворота выходного вала.

Постоянная тахогенератора $K_g = 2,42$ в на 1 рад/сек скорости выходного вала.

Предельная скорость выходного вала $\Omega_{\max} = 5,2$ рад/сек.

Рассогласование, на которое необходимо повернуть выходной вал, чтобы получить полный вращающий момент мотора, равно

$$\theta_s = \frac{T_m}{GK_t K_p} = 0,0056 \text{ рад} = 0,32^\circ.$$

Эта очень маленькая линейная зона показывает, что для анализа этой следящей системы при ошибках в несколько градусов невозможно применять линейные методы. Собственная частота следящей системы в линейной зоне, как следует из уравнения (6), равна

$$\omega_0 = \frac{NK_t GK_p}{J} = 46 \text{ рад/сек} \quad (\text{т. е. } f_0 = 7,3 \text{ гц}).$$

Эффективный коэффициент вязкого трения с учетом влияния тока якоря, зависящего от скорости, задается выражением

$$F_v = \frac{\text{момент при заторможенном двигателе на выходе}}{\text{предельная скорость}}$$

так что

$$\frac{F_v}{J\omega_0} = \frac{NT}{\Omega_{\max} J\omega_0} = \frac{50 \cdot 1,29}{5,2 \cdot 5,4 \cdot 4,6} = 0,05.$$

Наконец, на основании уравнения (9) безразмерный коэффициент, обусловленный скоростной обратной связью, выражается следующим образом:

$$\frac{F_F}{J\omega_0} = \frac{NK_t GK_g}{J\omega_0} = \frac{50 \times 4 \times 2,42}{5,4 \times 4,6} = 1,95.$$

Подставляя в уравнение (16) численные данные, получаем:

$$\ddot{x} + 0,05\dot{x} + S(x + 1,95\dot{x}) = 0.$$

В линейной области это — уравнение системы с критическим затуханием, т. е.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0,$$

Фазовый портрет свободных колебаний изображен на рис. 138. Для линейной ошибки, превышающей предел насыщения менее чем в 17 раз (т. е. $< 5,5^\circ$), фазовая траектория, один раз попав в линейную зону, остается внутри нее. Если начальная ошибка становится больше, то ошибка в переходном процессе, прежде чем стать равной нулю, становится отрицательной. Максимально возможное перерегулирование получается, когда ошибка

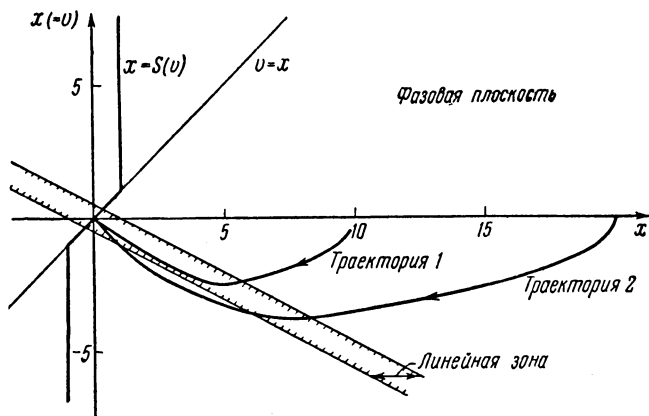


Рис. 138. Фазовый портрет следящей системы с насыщением.

настолько велика, что система входит в линейную зону с максимально возможной угловой скоростью Ω_{\max} . При этих условиях максимальное перерегулирование в 18,8 раза больше предела насыщения, т. е. равно 6° , и вслед за перерегулированием даже в этом предельном случае не следует отрицательного выброса.

10.4. Исследование влияния зазора

Этот дефект неизбежно присутствует в редукторах и в механических тягах. Влияние, оказываемое им, носит двойственный характер. Во-первых, точность следящей системы уменьшается из-за неопределенности, вносимой зазором, и, во-вторых, что менее очевидно, степень устойчивости системы с обратной связью, вообще говоря, уменьшается при устранении зазора,

Для примера предположим, что между выходным валом и потенциометром в следящей системе, изображенной на рис. 133, существует зазор. При полном исследовании влияния зазора должен учитываться детальный механизм этого явления, т. е. сопротивление трения, связанное с движущимся валом, и потери энергии в интервале времени столкновения между движущимися и движимыми элементами. Сделаем некоторые упрощающие предположения.

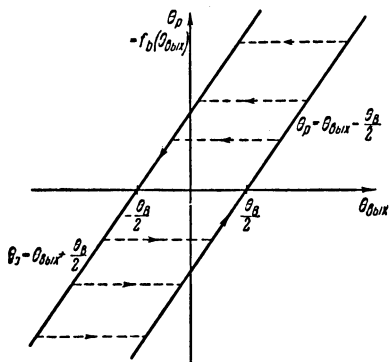


Рис. 139. Характеристика элемента с зазором.

1. Энергия, необходимая для приведения в движение потенциометра, пренебрежимо мала; это означает, что его инерция мала.

2. Вал потенциометра останавливается после освобождения от движущего вала, другими словами, существует значительное сухое трение.

Идеальная нелинейная зависимость между углом поворота выходного вала $\theta_{\text{ВЫХ}}$ и углом поворота вала потенциометра изображена на рис. 139. Пунктирные горизонтальные линии на рисунке показывают, что когда $\theta_{\text{ВЫХ}}$ достигает максимального значения и начинает уменьшаться, вал потенциометра остается в покое до тех пор, пока не выбран весь зазор, т. е. пока $\theta_{\text{ВЫХ}}$ не уменьшится на угол $\theta_{\text{В}}$. В последующем анализе ограничения вращающего момента пренебрегают.

10.4.1. Уравнение системы.

Если предположить, что в следящей системе есть одна лишь нелинейность, а именно зазор, то уравнения (1), (2), (3) и (7) остаются справедливыми, но уравнение (4) принимает следующий вид:

$$e_{\text{ВЫХ}} = K_p f_b(\theta_{\text{ВЫХ}}), \quad (19)$$

где $f_b(\theta_{\text{ВЫХ}})$ есть характеристика зазора, изображенная на рис. 139.

Общее уравнение следящей системы со скоростной обратной связью получается видоизменением уравнения (8) следующим образом:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta}_{\text{ВЫХ}} + F_v\dot{\theta}_{\text{ВЫХ}} &= MGK_t [K_p\theta_{\text{ВХ}} - K_p f_b(\theta_{\text{ВЫХ}}) - K_v\dot{\theta}_{\text{ВЫХ}}], \\ \ddot{\theta}_{\text{ВЫХ}} + \frac{F_v + F_F}{J}\dot{\theta}_{\text{ВЫХ}} + \omega_0^2 f_b(\theta_{\text{ВЫХ}}) &= \omega_0^2 \theta_{\text{ВХ}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для записи этого уравнения в безразмерной форме $\theta_{\text{ВЫХ}}$ выражается через угол зазора θ_B , чтобы получить безразмерную единицу измерения угла поворота выходного вала в виде

$$x_{\text{ВЫХ}} = \frac{\theta_{\text{ВЫХ}}}{\theta_B}.$$

Таким же образом из уравнения (15) получается:

$$\frac{d^2\theta_{\text{ВЫХ}}}{d\tau^2} = \frac{\ddot{\theta}_{\text{ВЫХ}}}{\omega_0^2}$$

и

$$\frac{d\theta_{\text{ВЫХ}}}{d\tau} = \frac{\dot{\theta}_{\text{ВЫХ}}}{\omega_0},$$

так что уравнение (20) принимает вид

$$\frac{\omega_0^2}{\theta_B} \frac{d^2\theta_{\text{ВЫХ}}}{d\tau^2} + \frac{(F_v + F_F)}{J\theta_B} \omega_0 \frac{d\theta_{\text{ВЫХ}}}{d\tau} + \frac{\omega_0^2}{\theta_B} f_b(x_{\text{ВЫХ}}\theta_B) = \frac{\omega_0^2}{\theta_B} \theta_{\text{ВХ}},$$

т. е.

$$\ddot{x}_{\text{ВЫХ}} + \frac{F_v + F_F}{J\omega_0} \dot{x}_{\text{ВЫХ}} + B(x_{\text{ВЫХ}}) = x_{\text{ВХ}}, \quad (21)$$

где

$$\dot{x}_{\text{ВЫХ}} = \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{d\tau}; \quad \ddot{x}_{\text{ВЫХ}} = \frac{d^2x_{\text{ВЫХ}}}{d\tau^2}.$$

Безразмерной характеристикой зазора является $B(x_{\text{ВЫХ}}) = \frac{f_b(x_{\text{ВЫХ}}, \theta_B)}{\theta_B}$, получаемая делением ординат $f_b(\theta_{\text{ВЫХ}})$ (рис. 139) на θ_B , а также делением абсцисс на θ_B , так что она выражается в масштабе $x_{\text{ВЫХ}}$. Результирующая характеристика изображена на рис. 140. Полагая $x_{\text{ВХ}} = 0$ в уравнении (21), мы получаем уравнение свободных колебаний выходного вала следящей системы.

Сравнивая уравнения (1) и (2а) главы 9 с уравнением (21), записанным выше, мы можем выразить кру-

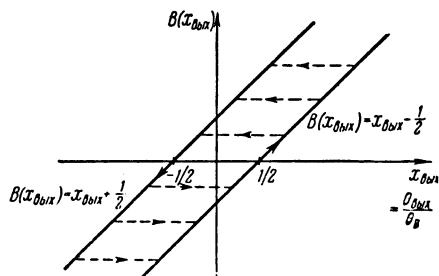


Рис. 140.

тизну фазовой траектории на фазовой плоскости следующим образом:

$$\frac{dv_{\text{ВЫХ}}}{dx_{\text{ВЫХ}}} = - \frac{\frac{F_v + F_F}{J\omega_0} v_{\text{ВЫХ}} + B(x_{\text{ВЫХ}})}{v_{\text{ВЫХ}}} = - \frac{\gamma x_{\text{ВЫХ}} + B(x_{\text{ВЫХ}})}{v_{\text{ВЫХ}}}, \quad (22)$$

где $v_{\text{ВЫХ}} = \dot{x}_{\text{ВЫХ}}$ и $\gamma = \frac{F_v + F_F}{J\omega_0}$.

10.4.2. Построение фазового портрета.

Для построения фазового портрета следящей системы с зазором использован метод, рассмотренный на рис. 131. В соответствии с этим на фазовой плоскости начерчены две направляющие линии $x_{\text{ВЫХ}} = \gamma_{\text{ВЫХ}}$ ($\gamma = 0,25$) и $v_{\text{ВЫХ}} = B(x_{\text{ВЫХ}})$ (рис. 141) и после выбора начальных условий для $x_{\text{ВЫХ}}$ и $v_{\text{ВЫХ}}$ построены фазовые траектории.

Полезно иметь физическое представление о движении, которому соответствует фазовая траектория. Представим, что движущий вал повернут на угол $\theta_{\text{ВЫХ}}$ против восстанавливающего вращающего момента, пропорционального $\omega_0^2 f_b(\theta_{\text{ВЫХ}})$, вызванного присоединением обратной связи. После того как движущий вал отпущен, он, прежде чем начать вращать потенциометр, поворачивается на угол зазора θ_B , и в результате этого восстанавливающий вращающий момент постоянен, пока угол поворота движущего вала не станет равным $(\theta_{\text{ВЫХ}} - \theta_B)$. После этого восстанавливающий момент уменьшается

с уменьшением $\theta_{\text{вых}}$ и реверсируется при заходе $\theta_{\text{вых}}$ в отрицательную область. Фазовые траектории, соответствующие этому движению, изображены на безразмерном фазовом портрете на рис. 141. Фазовая траектория 1 начинается в точке a , где $x_{\text{вых}}(0) = 2,4$ и $v_{\text{вых}} = 0$. Она представляет собой закручивающуюся спираль. Соответствующие точки на траектории и на линии $B(x_{\text{вых}})$ обозначены последовательно a, b, c и т. д. и A, B, C и т. д. Фазовая траектория 2 начинается при $x_{\text{вых}}(0) = 1,5$, и спираль раскручивается; из этого очевидно, что существует устойчивый предельный цикл, лежащий между этими двумя фазовыми траекториями.

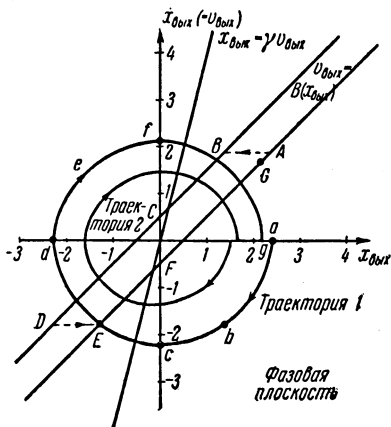


Рис. 141. Фазовый портрет следящей системы с зазором ($\gamma = 0,25$).

10.4.3. Уравнения фазовых траекторий.

В области зазора, т. е. между точками A и B на рис. 141, наклон фазовой траектории получается из уравнения (22), если предположить, что $B(x_{\text{вых}}) = \left[x_{\text{вых}}(0) - \frac{1}{2} \right]$. В области движения, т. е. между точками B и D , $B(x_{\text{вых}})$ задается выражением $\left(x_{\text{вых}} + \frac{1}{2} \right)$. Следовательно, уравнения наклона фазовых траекторий в двух областях имеют вид

(1) Область зазора

$$\frac{dv_{\text{вых}}}{dx_{\text{вых}}} = - \left[\frac{\gamma x_{\text{вых}} + \left(x_{\text{вых}}(0) - \frac{1}{2} \right)}{v_{\text{вых}}} \right]. \quad (23)$$

(2) Область движения

$$\frac{dv_{\text{вых}}}{dx_{\text{вых}}} = - \left[\frac{\gamma x_{\text{вых}} + \left(x_{\text{вых}} + \frac{1}{2} \right)}{v_{\text{вых}}} \right]. \quad (24)$$

Проинтегрировав уравнение (23), получаем уравнение фазовой траектории с начальными условиями $(x_{\text{ВЫХ}}(0), 0)$ в виде

$$\left[x_{\text{ВЫХ}} - x_{\text{ВЫХ}}(0) + \frac{v_{\text{ВЫХ}}}{\gamma} \right] = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(0) - \frac{1}{2}}{\gamma^2} \ln \left[1 + \frac{\gamma v_{\text{ВЫХ}}}{x_{\text{ВЫХ}}(0) - \frac{1}{2}} \right]. \quad (25)$$

Значение $v_{\text{ВЫХ}}$ в точке b , где фазовая траектория выходит из области зазора, получается, если в уравнении (25) положить $x_{\text{ВЫХ}} = x_{\text{ВЫХ}}(0) - 1$.

Проинтегрировав уравнение (24), получаем уравнение фазовой траектории в зоне движения (ср. уравнение (7) гл. 9) в виде

$$v_{\text{ВЫХ}}^2 + \gamma v_{\text{ВЫХ}} \left(x_{\text{ВЫХ}} + \frac{1}{2} \right) + \left(x_{\text{ВЫХ}} + \frac{1}{2} \right)^2 = C \exp \left[\frac{\gamma}{\omega_1} \operatorname{arctg} \frac{v_{\text{ВЫХ}} + \frac{\gamma}{2} \left(x_{\text{ВЫХ}} + \frac{1}{2} \right)}{\omega_1 \left(x_{\text{ВЫХ}} + \frac{1}{2} \right)} \right], \quad (26)$$

где $\omega_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2}$, а C — постоянная интегрирования.

Подставив значения $x_{\text{ВЫХ}}$ и $v_{\text{ВЫХ}}$, соответствующие точке b , получаем значение C в уравнении (26), относящееся к фазовой траектории 1. Затем из уравнения (26) можно вычислить значение $x_{\text{ВЫХ}}$ в точке d на фазовой траектории 1, где фазовая траектория снова входит в зону зазора, так как известно, что здесь $v_{\text{ВЫХ}} = 0$. Таким образом, каждая фазовая траектория может быть определена с помощью ряда точек на границах между областью зазора и областью движения. Особый интерес представляет фазовая траектория, соответствующая предельному циклу. Если, как в нашем случае, $h(x)$ и $f(v)$ симметричны по отношению к абсциссе, то условия предельного цикла могут быть записаны следующим образом:

$$-x_{\text{ВЫХ}} \left(t + \frac{T}{2} \right) = x_{\text{ВЫХ}}(t)$$

и

$$-v_{\text{вых}}\left(t + \frac{T}{2}\right) = v_{\text{вых}}(t).$$

Половина периода $\frac{T}{2}$ представляет собой отрезок времени между моментами, когда скорость равна нулю, так что условием предельного цикла является равенство значений x при нулевой скорости по абсолютной величине и противоположность знаков. В принципе это условие может быть выражено через параметры следящей системы из уравнений фазовых траекторий (25) и (26), решаемых для условий, дающих равные и противоположные значения x в точках a и d (рис. 141). К сожалению, эти уравнения — трансцендентные. Их решение требует применения численных методов последовательного приближения и является очень трудоемким. Этим методом было найдено, что точки пересечения предельного цикла с осью абсцисс на рис. 141 оказались при $x_{\text{вых}} = \pm 2,29$; следовательно, выходной вал устойчиво колеблется с амплитудой, в 2,29 раза превышающей угол зазора.

Определив амплитуду автоколебаний, соответствующих предельному циклу, мы можем подсчитать безразмерный период автоколебаний или определить его с помощью графических методов (см., например, рис. 128). В случае предельного цикла на рис. 141 частота становится равной $0,89 \omega_0$, где ω_0 есть незатухающая собственная частота линейной следящей системы. Влияние изменения величины затухания в следящей системе с зазором на предельный цикл описано в следующей главе.

10.5. Сухое трение и трение покоя

В ряде применений следящих систем возникает проблема большой практической важности. Речь идет о том, что иногда механическое сопротивление движению со стороны нагрузки не является чисто вязким, а содержит также сухое или кулоновское трение, увеличивающее силы, противодействующие движению выходного вала, но не зависящее от скорости. Статическое трение (трение покоя) всегда присутствует вместе с сухим трением. Чтобы начать движение, требуется больший вращающий

момент, чем для того, чтобы поддерживать его. Типичная характеристика трения изображена на рис. 142. Сухое трение, даже не сопровождаемое значительным вязким трением, может действовать в качестве гасителя колебаний, поглощая энергию выходного вала. В следящих системах оно вводит статическую ошибку, когда

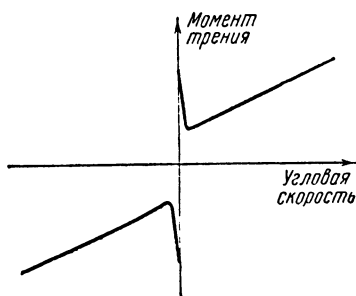


Рис. 142.

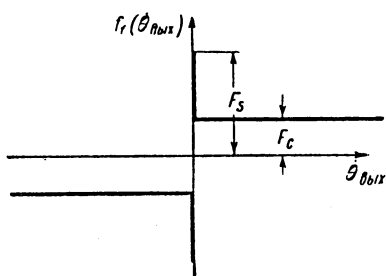


Рис. 143.

выходной вал находится в покое, и поэтому его стараются уменьшить во всех системах, за исключением систем низкого качества.

Будем считать, что следящая система, изображенная на рис. 133, линейна, за исключением наличия сухого трения и трения покоя на выходном валу. Уже было показано, что скоростная обратная связь оказывает то же влияние, что и добавочное вязкое трение, которое может быть объединено с механическим вязким трением, как это сделано в уравнении (9). К трению, зависящему от скорости, добавляется нелинейное сухое трение, так что уравнение движения принимает вид

$$\ddot{\theta}_{\text{вых}} + \left(\frac{F_v + F_F}{J} \right) \dot{\theta}_{\text{вых}} + \frac{f_f(\dot{\theta}_{\text{вых}})}{J} + \omega_0^2 \theta_{\text{вых}} = \omega_0^2 \theta_{\text{вх}}, \quad (27)$$

где $f_f(\dot{\theta}_{\text{вых}})$ есть идеализированная нелинейная характеристика трения, показанная на рис. 143.

10.5.1. Неустойчивость на малой скорости.

Много трудностей доставляет явление, часто встречающееся в тех случаях, когда нужно, чтобы следящая система следила с низкой угловой скоростью. Если вход-

ная скорость ниже определенной величины, то выходной вал движется рывками. При исследовании движения рывками нас интересует постоянная скорость на входе следящей системы, и поэтому нужно выразить слагаемые уравнения (27) через эту скорость. Так как

$$\theta_{\text{ВЫХ}} = \theta_{\text{ВХ}} - \theta,$$

то

$$\begin{aligned} (\ddot{\theta}_{\text{ВХ}} - \ddot{\theta}) + \left(\frac{F_v + F_F}{J} \right) (\dot{\theta}_{\text{ВХ}} - \dot{\theta}) + \frac{f_f (\dot{\theta}_{\text{ВХ}} - \dot{\theta})}{J} + \\ + \omega_0^2 (\theta_{\text{ВХ}} - \theta) = \omega_0^2 \theta_{\text{ВХ}}. \end{aligned}$$

Если $\dot{\theta}_{\text{ВХ}}$ — постоянная скорость на входе, то $\ddot{\theta}_{\text{ВХ}} = 0$, т. е.

$$\ddot{\theta} - \left(\frac{F_v + F_F}{J\omega_0} \right) \left(\frac{\dot{\theta}_{\text{ВХ}} - \dot{\theta}}{\omega_0} \right) - \frac{f_f (\dot{\theta}_{\text{ВХ}} - \dot{\theta})}{J\omega_0^2} + \theta = 0. \quad (28)$$

$J\omega_0^2$ представляет собой вращающий момент выходного вала на единицу угловой ошибки.

Итак, пусть $\frac{F_s}{J\omega_0^2} = \varphi$ — угловая ошибка, необходимая для того, чтобы преодолеть момент статического трения F_s , и пусть $\frac{\theta}{\varphi} = x$ — безразмерная единица рассогласования, а $\omega_0 t = \tau$ — безразмерная единица времени.

Нелинейная характеристика трения распадается на две составляющие, зависящие от величины $\dot{\theta}_{\text{ВЫХ}}$, таким образом:

$$f_f (\dot{\theta}_{\text{ВХ}} - \dot{\theta}) = \begin{cases} F_s \text{ sign} (\dot{\theta}_{\text{ВХ}} - \dot{\theta})^* & \text{при } \dot{\theta}_{\text{ВХ}} - \dot{\theta} = \theta_{\text{ВЫХ}} = \\ & = \pm \varepsilon (\varepsilon \rightarrow 0), \\ F_C \text{ sign} (\dot{\theta}_{\text{ВХ}} - \dot{\theta}) & \text{при } \dot{\theta}_{\text{ВХ}} - \dot{\theta} = \theta_{\text{ВЫХ}} \neq 0, \end{cases}$$

где F_C — момент сухого трения.

Соответствующим образом уравнение (28) распадается на два безразмерных уравнения в зависимости от величины $\dot{\theta}_{\text{ВЫХ}}$. Если \ddot{x} и \dot{x} — производные по τ (см. уравнение (15)), то

$$\ddot{x} - \gamma \left(\frac{\Omega}{\varphi} - \dot{x} \right) - \text{sgn} \left(\frac{\Omega}{\varphi} - \dot{x} \right) + x = 0 \quad (29a)$$

$$*) \text{ sign } x = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

при

$$\left(\frac{\Omega}{\varphi} - \dot{x}\right) = \dot{x}_{\text{вых}} = \pm \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

$$\ddot{x} - \gamma \left(\frac{\Omega}{\varphi} - \dot{x}\right) - \frac{F_C}{F_S} \operatorname{sgn}\left(\frac{\Omega}{\varphi} - \dot{x}\right) + x = 0 \quad (296)$$

при

$$\left(\frac{\Omega}{\varphi} - \dot{x}\right) = \dot{x}_{\text{вых}} \neq 0,$$

где Ω есть фиксированная входная скорость, а γ — величина, определенная в уравнении (22). Сравнивая уравнения (29а) и (29б) с уравнением (10) главы 9, мы видим, что

$$h(x) = x \text{ и } f(v) = -F\left(\frac{\Omega}{\varphi} - v\right),$$

где

$$F\left(\frac{\Omega}{\varphi} - v\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{\Omega}{\varphi} - v\right) \text{ при } \left(\frac{\Omega}{\varphi} - v\right) = \pm \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

$$F\left(\frac{\Omega}{\varphi} - v\right) = \frac{F_C}{F_S} \operatorname{sign}\left(\frac{\Omega}{\varphi} - v\right) + \gamma \left(\frac{\Omega}{\varphi} - v\right) \text{ при}$$

$$\left(\frac{\Omega}{\varphi} - v\right) \neq 0.$$

Графическое изображение этой характеристики представлено на рис. 144.

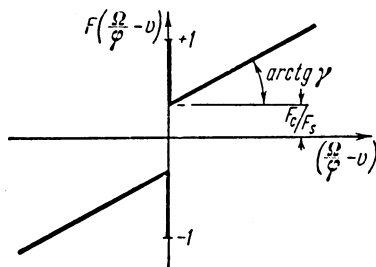


Рис. 144.

Наклон фазовой траектории можно получить, исходя из уравнений (1) и (2) главы 9:

$$\frac{dv}{dx} = - \left[\frac{f(v) + h(x)}{v} \right] =$$

$$= \frac{F\left(\frac{\Omega}{\varphi} - v\right) - x}{v}. \quad (30)$$

После определения наклона фазовой траектории, фазовый портрет строится на рис. 145 при помощи метода, иллюстрация которого была приведена на рис. 131. Прежде всего строятся направляющие кривые $x = -F\left(\frac{\Omega}{\varphi} - v\right)$

и $v = x$. Величине демпфирования γ , зависящей от скорости, дано произвольное значение $\frac{1}{2}$, так что затухание в чисто линейной следящей системе равно $\frac{1}{4}$ критического; момент статического трения сделан в четыре

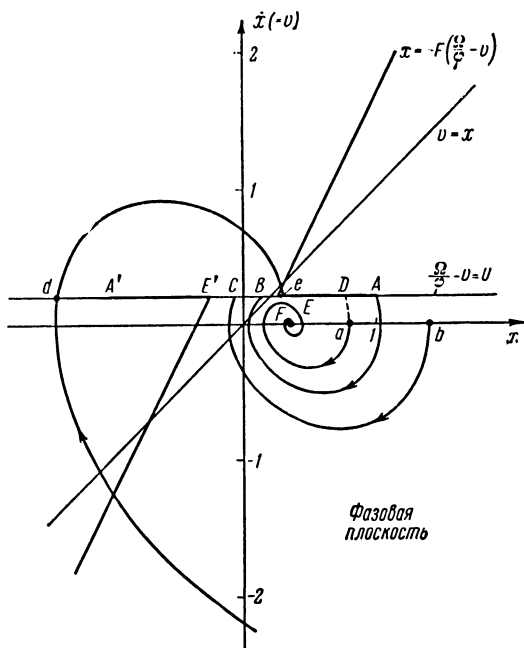


Рис. 145. Фазовый портрет следящей системы с сухим трением ($\gamma=0,5$; $F_s/F_c=4$).

раза большим момента сухого трения; $\frac{\Omega}{\Phi}$ взято равным 0,2. Для того чтобы выявить физический смысл фазовых траекторий, полезно заметить, что $f(v)$ есть мера момента трения, а $h(x)$ есть мера восстанавливающего момента.

Если ошибка первоначально равна 0,8 в точке a , то фазовая траектория представляет собой спираль, навертывающуюся на фокус, расположенный в точке $(0,35; 0)$.

Эта установившаяся ошибка представляет собой запаздывание по скорости при слежении за входным сигналом, имеющим постоянную скорость. В точке фокуса восстанавливающий момент уравновешивает момент трения, т. е. $f(v) + h(x) = 0$. Скоростное запаздывание может быть найдено из уравнения (29б), если положить $\ddot{x} = \dot{x} = 0$, так что ошибка в отслеживании постоянной скорости равна

$$x_s = \gamma \frac{\Omega}{\Phi} + \frac{F_C}{F_S}.$$

При большой начальной ошибке в точке b фазовая траектория представляет собой свертывающуюся спираль, пересекающую линию $\left(\frac{\Omega}{\Phi} - v\right) = 0$ в точке C . На этой линии скорость ошибки v равна входной скорости $\frac{\Omega}{\Phi}$, и следовательно, выходной вал находится в покое, удерживаемый моментом статического трения, который превосходит восстанавливающий момент. При подходе к точке C на фазовой траектории и при $v = 0,2 - \varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) имеем: $f(v) = -1$ и $h(x) = -0,06$; следовательно, наклон траектории положителен (из уравнения (30)). Однако при $v = 0,2 + \varepsilon$, $f(v)$ уже равно $+1$, в то время как $h(x)$ остается неизменным, так что наклон фазовой траектории становится отрицательным и скорость снова становится равной $(0,2 - \varepsilon)$. Другими словами, фазовая траектория стремится к линии $v = 0,2$, в то время как ошибка и, следовательно, восстанавливающий момент накапливаются с постоянной скоростью вдоль линии до тех пор, пока в точке A восстанавливающий момент не становится равным по величине моменту статического трения и выходной вал сдвигается с места. Ошибка уменьшается вдоль фазовой траектории AB до тех пор, пока в точке B выходной вал снова застревает, после чего ошибка накапливается вдоль линии AB и цикл повторяется. ABA есть замкнутый путь или предельный цикл, соответствующий движению рывками при низких входных скоростях.

Когда начальная ошибка очень велика, то может оказаться, что фазовая траектория приближается к линии $\left(\frac{\Omega}{\Phi} - v\right) = 0$ в точке более отрицательной, чем A' , напри-

мер в точке d на рис. 145, где для $v=(0,2-\epsilon)$, $f(v)=-1$ и $h(x)=-1,4$. Момент статического трения и, следовательно, $f(v)$ реверсируются, когда фазовая траектория пересекает линию, но восстанавливающий момент все еще превышает его так, что движение продолжается до точки e , где выходной вал останавливается, и начинается движение рывками по предельному циклу ABA , как и прежде.

Таким образом, каждая фазовая траектория, пересекающая линию AA' , сливается с ней и образует предельный цикл. Могут встретиться фазовые траектории

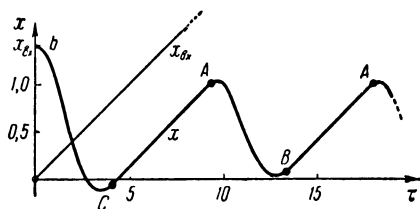


Рис. 146.

и не пересекающие вначале отрезка AA' , но как только они пересекают этот отрезок, то за этим немедленно следует образование предельного цикла.

Форма колебаний безразмерной ошибки и входной сигнал, соответствующий фазовой траектории, начинающейся в точке b , изображены на рис. 146. Точки, помеченные буквами на кривой ошибки, соответствуют точкам траектории на фазовой плоскости. От начального значения в точке b ошибка стремится к нулю и дает выброс. Сразу после выброса в точке C скорости изменения ошибки и входного сигнала совпадают на мгновение и выходной вал останавливается. Ошибка накапливается со скоростью входного сигнала до тех пор, пока в точке A она не даст достаточного вращающего момента, после чего она опять приближается к нулю и выходной вал снова останавливается в точке B . Колебания ошибки имеют среднюю положительную постоянную составляющую, являющуюся скоростным запаздыванием, большим, чем запаздывание

в фокусе F фазовой траектории, соответствующей движению без застревания.

При уменьшении отношения статического трения к сухому трению возможность появления движения рывками уменьшается. Например, если бы на рис. 145 максимальное значение момента статического трения представлялось бы точкой D вместо A , то всякая фазовая траектория, соответствующая застреванию, оставляла бы линию совпадения в точке D и двигалась бы по спирали к точке фокуса так же, как фазовая траектория, проходящая через точку a . Далее, если трение покоя совершенно отсутствует, то линией совпадения является отрезок EE' и каждая фазовая траектория, слившаяся с этой линией, оставляет ее в точке E и движется по спирали к точке фокуса, как бы ни было мало затухание γ , зависящее от скорости.

При прочих равных условиях уменьшение степени затухания, зависящей от скорости, приводит к тому, что застревание проявляется чаще из-за уменьшения плотности спиральной фазовой траектории, навивающейся на фокус, и из-за увеличения при этом возможности пересечения фазовой траекторией линии застревания.

При увеличении входной скорости застревание встречается реже, так как при этом линия застревания $\left(\frac{\Omega}{\Phi} - v\right) = 0$ оказывается дальше от точки фокуса и, следовательно, вероятность того, что фазовая траектория сольется с ней, уменьшается.

10.5.2. Методы устранения движения рывками, вызванного статическим трением.

Статическое трение неизбежно присутствует в механических приводах, и поэтому разработаны различные методы устранения его влияния в замкнутых системах. Один из методов состоит в следующем: надо заставить вибрировать застревающий элемент с частотой, более высокой, чем та, за которой может следовать следящая система. Небольшое движение, вызываемое вибрацией, устраняет статическое трение, но может потребовать значительной мощности для того, чтобы его поддерживать. Этот метод, часто называемый «вибрационной линеаризацией», особенно популярен в гидравлике, где статическое

трение в дросселях и поршнях может быть преодолено с помощью приложения быстро меняющихся колебаний давления к рабочей жидкости. Применение этого метода в гидравлическом усилителе показано на рис. 99.

Использование обратной связи для стабилизации очень полезно в тех случаях, когда статическое трение вызывает трудности. Например, в следящей системе, изображенной на рис. 133, скоростная обратная связь приводит к тому, что скорость выходного вала пропорциональна ошибке. Если коэффициент усиления усилителя ошибки достаточно велик, то эта зависимость выполняется, несмотря на неравномерность вращающих моментов нагрузки, так как такие моменты преодолеваются мотором с очень малым изменением скорости. Это применимо даже на малой (ползучей) скорости, и плавное слежение возможно вплоть до нескольких *об/мин*, так как очень малые ошибки заставляют мотор развивать полный вращающий момент. Влияние скоростной обратной связи в этом смысле эквивалентно влиянию значительного вязкого трения, срывающего статическое трение даже на низких скоростях, вследствие того, что оно заставляет фазовые траектории приближаться к фокусу по очень тесной спирали, тем самым избегая линии застревания.

Литература

1. West J. C. and Daiton I. R., The Step Function Response of an R. P. C. Servomechanism possessing Torque Limitation, Proceedings IEE, 1954, 101, Part II, p. 166.
 2. Michel J. G. L. and Porter A., The Effect of Friction on the Behaviour of Servomechanisms at creep Speeds, Proceedings IEE, 1951, 98, Part II, p. 297.
 3. Harmer J. D., The Jerking Motion caused by Static Friction in Position Control Systems, Automatic and Manual Control, edited by Tustin Butterworths Scientific Publications, London, 1952.
 4. Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954. [Добавлено редактором.]
-

ГЛАВА 11

ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

11.1. Введение

Две предыдущие главы были посвящены исследованию систем, содержащих нелинейные элементы, методом фазовой плоскости. Этот метод сильно ограничен, так как распространение его на дифференциальные уравнения n -го порядка требует применения n -мерного фазового пространства. Трудности использования n -мерного пространства столь велики, что инженеры предпочитают приближенный, но более простой метод исследования нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями высоких порядков. Более того, часто разомкнутая система описывается не дифференциальным уравнением, а частотной или переходной характеристиками, полученными экспериментальным путем, и поэтому приближенный метод исследования систем, использующий эти характеристики, находит широкое применение.

Распространение частотного метода исследования линейных систем на системы, содержащие амплитудные нелинейности, было изложено в неопубликованной работе покойного проф. Даниэля (P. J. Daniel) в 1940 г.*). Этот метод был развит некоторыми исследователями, на которых мы сошлемся в последующих параграфах.

Не все системы с обратной связью удовлетворяют необходимым требованиям для применения подобного мето-

*) Подобный метод был разработан Л. С. Гольдфарбом и описан им в Бюллетене ВЭИ № 1941 и для более общих случаев в журнале «Автоматика и телемеханика», § 5, 1947 г. (*Прим. ред.*)

да, но ко многим из них, в особенности к системам управления, он применим и позволяет осуществить анализ и даже синтез их. Достоинство этого метода состоит в том, что его точность повышается с увеличением порядка дифференциального уравнения системы и для его применения необходимы лишь те данные, которые могут быть получены экспериментально.

11.2. Эквивалентный комплексный коэффициент усиления

Структурная схема нелинейной системы, которая исследуется с помощью частотного метода, изображена на рис. 147. Здесь $\bar{y}'(j\omega)$ и $\bar{y}''(j\omega)$ — частотные характеристики линейных элементов в прямой цепи, разделенные амплитудной нелинейностью; $\bar{y}_2(j\omega)$ — частотная

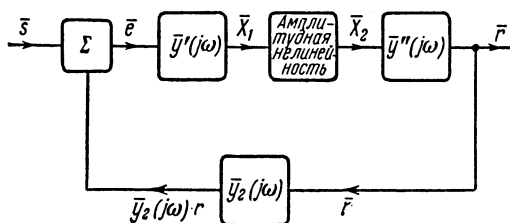


Рис. 147.

характеристика линейной цепи обратной связи. Если в системе имеют место незатухающие колебания (предельный цикл) при отсутствии сигналов на входе, то, вообще говоря, колебания в любой точке имеют несинусоидальную форму. Очевидно, можно считать, что составляющие основной частоты и гармоник этих колебаний после обхода замкнутой системы соответственно равны друг другу, т. е. усиление разомкнутой системы для каждой составляющей равно единице. Если усиление и фазовый сдвиг для основной составляющей в нелинейном элементе не зависят от наличия на входе других гармоник, то исследование может быть проведено на основе эквивалентного коэффициента усиления нелинейного элемента по отношению к основной составляющей,

пренебрегая гармониками. Если, к тому же, нелинейный элемент таков, что фазовый сдвиг и усиление для каждой гармоники не зависят от остальных гармоник, то полный анализ незатухающих колебаний можно произвести для каждой гармоники независимо.

Практически такие нелинейные элементы не существуют, но обычно основная составляющая является единственной существенной величиной на входе нелинейного элемента. Такое положение встречается, когда гармоники, созданные нелинейным элементом, сильно подавляются в последовательно соединенных линейных элементах, обладающих частотной характеристикой $\bar{y}''(j\omega)\bar{y}_2(j\omega)\bar{y}'(j\omega)$, прежде чем поступить снова на вход нелинейного элемента после прохождения всей системы. Далее мы примем, что нелинейный элемент обладает следующими свойствами:

(а) не вносит постоянной составляющей (т. е. симметричен) (это ограничение несущественно, и этот вопрос будет рассмотрен ниже);

(б) создает только высшие гармоники входного колебания и не дает субгармоник и иных частот (т. е. исключаются делители частоты и умножающие устройства непрерывного действия и т. д.);

(в) его реакция зависит лишь от амплитуды на входе и не зависит от частоты в интересующем нас диапазоне частот (в действительности реакция всех нелинейных элементов зависит от частоты, из-за неизбежных паразитных накопителей энергии, но во многих нелинейных элементах в довольно широком диапазоне частот этим можно пренебречь).

Если периодическая функция времени, имеющая вид

$$X_1(t) = A \cos \omega t, \quad (1)$$

приложена ко входу нелинейного элемента, то несинусоидальное колебание, возникающее на выходе, может быть представлено в виде ряда Фурье следующим образом:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t, \quad (2)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n\omega t dt$$

и

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\omega t dt.$$

Если в замкнутой системе единственно существенной составляющей на входе нелинейного элемента является составляющая с частотой $\omega/2\pi$, то на выходе его с учетом ограничений, упомянутых выше, возникает колебание, выражающееся следующим образом:

$$X_2(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

Полагая, что гармоники сильно затухают в линейных элементах, следующих за нелинейным элементом, мы видим, что основная гармоника в $X_1(t)$ является единственной составляющей, которая представляет интерес, так что мы можем записать:

$$\begin{aligned} X_2'(t) &= a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t = \\ &= a_1 \cos \omega t + b_1 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Представим X_2' в векторной форме:

$$\bar{X}_2'(j\omega) = a_1 - jb_1.$$

В нелинейном элементе рассматриваемого типа a_1 и b_1 фактически не зависят от частоты (см. условие б).

Комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента для синусоидального сигнала может быть записан в виде

$$N(A) = \frac{\bar{X}_2'}{\bar{X}_1} = \frac{a_1 - jb_1}{A}. \quad (4)$$

Назовем $N(A)$ эквивалентным комплексным коэффициентом усиления нелинейного элемента. Модуль и аргумент его являются функциями только амплитуды входного сигнала A и не зависят от частоты ω .

Важно отметить, что использование эквивалентного комплексного коэффициента усиления не ведет к «линеаризации» процесса в обычном смысле этого слова, как, например, в методе малых возмущений, описанном в 1.1. Зависимость амплитуды от формы характеристики нелинейного элемента полностью учитывается, но внимание сосредоточивается на основной составляющей колебаний в системе.

11.3. Критерий устойчивости

Установим критерий устойчивости системы с обратной связью, структурная схема которой имеет вид, изображенный на рис. 147, используя понятия эквивалентного комплексного коэффициента усиления.

При отсутствии входного сигнала s и предположении, что гармоники, созданные нелинейным элементом, в дальнейшем отфильтровываются, можно записать зависимость между векторными величинами на основной частоте на входе и на выходе нелинейного элемента в следующем виде:

$$\bar{X}'_2 \bar{y}_L(j\omega) = \bar{X}_1, \quad (5)$$

где

$$\bar{y}_L(j\omega) = \bar{y}''(j\omega) \bar{y}_2(j\omega) \bar{y}'(j\omega).$$

Если в системе существуют установившиеся колебания, то усиление разомкнутой системы для основной гармоники должно быть равно единице. Таким образом, из уравнений (4) и (5) следует, что

$$\frac{\bar{X}'_2}{\bar{X}_1} = N(A) = \frac{1}{y_L(j\omega)}$$

или

$$N(A) \bar{y}_L(j\omega) = 1,$$

где левая часть уравнения представляет собой коэффициент усиления разомкнутой системы для основной составляющей колебаний. Условие для поддержания незатухающих колебаний может быть переписано в виде

$$\bar{y}_L(j\omega) = N(A)^{-1}. \quad (6)$$

Это условие можно интерпретировать графически, начертив функции $\bar{y}_L(j\omega)$ и $N(A)^{-1}$ в комплексной плоскости y при изменении переменных ω и A соответственно. Пересечения этих двух кривых дают решения уравнения (6) и определяют амплитуду и частоту возможных автоколебательных состояний X_1 . Для того чтобы определить, которое из этих решений соответствует устойчивым колебаниям, необходимо рассмотреть более общую форму уравнения (6) для комплексных значений частоты, которая может быть записана так:

$$\bar{y}_L(\sigma + j\omega) = N(A)^{-1}. \quad (7)$$

Левая часть уравнения представляет собой обобщенную частотную характеристику линейных элементов (см. 4.3.2). Если ее начертить в плоскости y для различных σ и ω , то в результате мы получим семейство кривых, которое, например, изображено на рис. 54, а. При $\sigma=0$ получаем годограф частотной характеристики $\bar{y}_L(j\omega)$. В линейной системе, как показано в главе 4, значения ω и σ при прохождении годографа $\bar{y}_L(\sigma + j\omega)$ через точку (1, 0) определяют частоту и коэффициент затухания переходного процесса в замкнутой системе. Уравнение этого процесса имеет вид

$$\exp(\sigma t) \sin \omega t.$$

Если в системе имеется нелинейный элемент, амплитуда на выходе которого зависит от амплитуды на входе, то точка (1, 0) заменяется кривой $N(A)^{-1}$. Таким образом, пересечения кривых $\bar{y}_L(\sigma + j\omega)$ с кривой $N(A)^{-1}$ соответствуют колебательным решениям с экспоненциально изменяющейся амплитудой, причем знак экспоненты зависит от знака σ в соответствующей точке пересечения. Надо, однако, помнить, что в силу допущений, принятых при определении $N(A)^{-1}$, это рассмотрение имеет приближенный характер.

На рис. 148 изображены кривые, необходимые для определения устойчивости. Годограф вектора $\bar{y}_L(j\omega)$ необходимо вычерчивать с большой точностью, но что касается кривых $\bar{y}_L(\sigma + j\omega)$, то нужно лишь знать, где они расположены по отношению к $\bar{y}_L(j\omega)$ для различных знаков σ , т. е. детального вычерчивания не требуется.

Решения уравнения (6) соответствуют точкам пересечения P_1 и P_2 кривых $\bar{y}_L(j\omega)$ и $N(A)^{-1}$. Рассмотрим сначала устойчивость решения, соответствующего точке P_1 . Если амплитуда колебаний переходного процесса возрастает, то рабочая точка движется от точки P_1 вдоль годографа вектора эквивалентного комплексного коэффициента усиления в направлении возрастания A . Кривая $N(A)^{-1}$

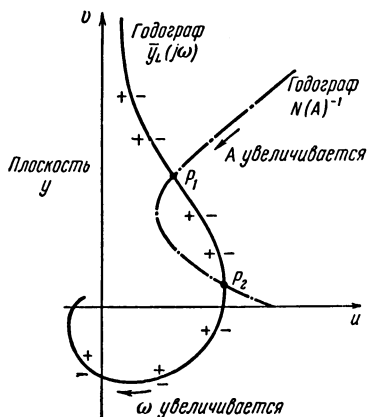


Рис. 148.

пересекается с годографом функции $\bar{y}_L(\sigma + j\omega)$, соответствующей положительному σ , так что переходный процесс содержит член вида $e^{\sigma t}$ и амплитуда колебаний возрастает со временем. С другой стороны, если амплитуда колебаний переходного процесса, соответствующего точке P_1 , уменьшается, то годограф вектора эквивалентного комплексного коэффициента усиления пересекает годограф обобщенной частотной характеристики с

отрицательным σ , в результате чего амплитуда колебаний уменьшается.

Следовательно, точка P_1 соответствует неустойчивому предельному циклу (см. рис. 127, б). В точке P_2 наблюдается обратное положение. Изменение амплитуды колебаний, в конечном итоге, приводит к противодействию этому изменению. Следовательно, точка P_2 соответствует устойчивому предельному циклу, амплитуда и частота которого определяются значениями A и ω в точке пересечения годографов векторов эквивалентного комплексного коэффициента и частотной характеристики.

Гренстед (Grensted) [1] указал, что когда годографы имеют вид, изображенный на рис. 149, появляется неоднозначность. Годограф вектора частотной характеристики разомкнутой системы может иметь такую форму, если

в ней содержится элемент запаздывания (например, медленно действующее реле или линия задержки). В этом случае уравнение (6) имеет решение в трех точках, обозначенных цифрами 1, 2 и 3. Предположим, что автоколебания возбуждаются на частоте f_1 , соответствующей точке 1. Через эту точку проходит годограф вектора $\bar{y}_L(j\omega)$ и, кроме того, годограф вектора обобщенной частотной характеристики $\bar{y}_L(\sigma + j\omega)$, где σ положительно по отношению к частоте точки 2. Следовательно, на более низкой частоте f_2 возбуждаются колебания вследствие случайных возмущений и точка 2 становится рабочей точкой. Колебание на частоте f_1 подавляется, так как соответствующее значение σ теперь отрицательно; с другой стороны, через точку 2 проходит годограф вектора обобщенной частотной характеристики с

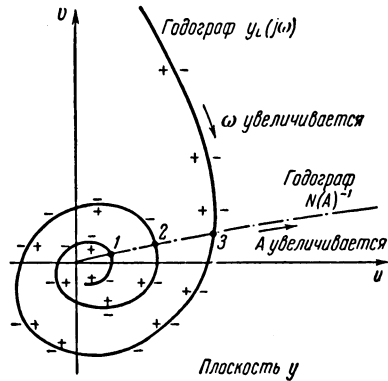


Рис. 149.

положительным σ по отношению к частоте в точке 3, так что на частоте f_3 возбуждаются автоколебания, а автоколебания на частоте f_2 подавляются. Следовательно, точка 3 представляет собой в этом случае единственное устойчивое колебательное решение.

В линейной системе с обратной связью переходный процесс обладает коэффициентом затухания σ и собственной частотой колебаний ω , не зависящими от амплитуды воздействия. В нелинейных системах σ и ω могут меняться в течение переходного процесса. Качественно это явление можно видеть из рис. 148, где, в то время как A меняется по мере изменения переходного отклонения от точки P_2 , годограф вектора эквивалентного комплексного коэффициента пересекается семейством кривых $\bar{y}_L(\sigma + j\omega)$, так что σ и ω меняются во время переходного процесса. Гренстед показал, что критерий устойчивости, о котором говорилось выше, справедлив только тогда,

когда $\dot{\sigma} \ll \sigma^2$ и $\dot{\omega} \ll (\omega - \omega_s)^2$, где ω есть мгновенная частота, ω_s — частота устойчивого решения и σ — мгновенный коэффициент затухания. Эти ограничения следует всегда иметь в виду; однако таких нелинейных систем, к которым бы не был применим описанный выше критерий при условии, что гармоники, созданные нелинейным элементом, соответствующим образом фильтруются, еще не встречалось*).

11.4. Примеры эквивалентных комплексных коэффициентов усиления

В таблице 3 приведено несколько эквивалентных комплексных коэффициентов для часто встречающихся нелинейностей**). Все они симметричны относительно осей X_1 и X_2 . Первым примером является нелинейный элемент, характеристика которого представлена двумя прямолинейными отрезками с произвольным наклоном. Таким элементом могут быть аппроксимированы многие реальные характеристики. На нелинейных характеристиках, соответствующих зазору или гистерезису, горизонтальные пунктирные линии соответствуют различным возможным амплитудам входного сигнала; стрелки на этих линиях обозначают направление движения. Вывод выражения эквивалентного комплексного коэффициента усиления, соответствующего этой нелинейности, дан в приложении 4. В таблице приведена характеристика нелинейного элемента, называемая «ограниченным полем»

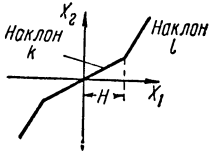
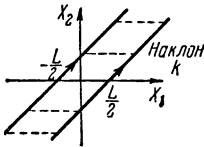
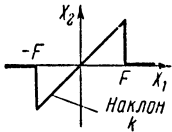
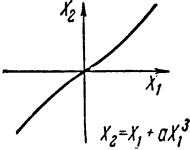
*) Приведенные выше рассуждения, устанавливающие критерий устойчивости автоколебаний, нельзя считать вполне обоснованными. Строгое определение устойчивости автоколебаний связано с исследованием решений линейного уравнения с периодическими коэффициентами и представляет собой сложную задачу.

Сформулированный критерий можно обосновать для линейных резонансных систем. В общем же случае этот критерий дает лишь необходимое условие. (Прим. ред.)

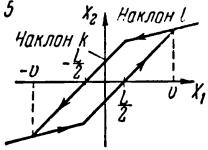
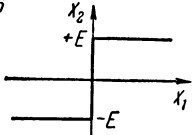
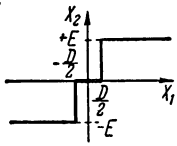
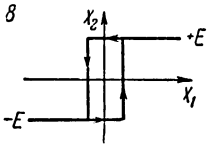
***) Большое число зависимостей для эквивалентных комплексных коэффициентов нелинейных элементов приведено в работе Л. С. Г о л ь д ф а р б а «О некоторых нелинейностях в системах автоматического регулирования», Автоматика и телемеханика. т. 8, № 5, 1947. (Прим. ред.)

Таблица 3

Эквивалентные комплексные коэффициенты усиления для часто встречающихся амплитудных нелинейностей

Вид нелинейности	Эквивалентный комплексный коэффициент усиления при входном воздействии $x_i(t) = A \cos \omega t$
	$N[A] = \frac{2k}{\pi} \left\{ (1-r) [\arcsin d + d \sqrt{1-d^2}] + \frac{\pi r}{2} \right\} \text{ при } d < 1$ $= k \text{ при } d > 1,$ <p>где $r = \frac{l}{k}$, $d = \frac{H}{A}$</p>
<p>2</p> 	$N[A] = \frac{k}{\pi} \left\{ \left\langle (1-b) [b(2-b)]^{\frac{1}{2}} + \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right\rangle - j \langle b(2-b) \rangle \right\} \text{ при } b < 2$ $= 0 \text{ при } b > 2,$ <p>где $\alpha = \arccos(1-\beta)$, $\beta = \arccos(b-1)$, $b = \frac{L}{A}$</p>
<p>3</p> 	$N[A] = \frac{2k}{\pi} [\arcsin c - c \sqrt{1-c^2}] \text{ при } c < 1$ $= k \text{ при } c > 1,$ <p>где $c = \frac{F}{A}$</p>
<p>4</p>  <p>$x_2 = x_1 + a x_1^3$</p>	$N[A] = 1 + \frac{3}{4} a A^2$

Продолжение табл. 3

Вид нелинейности	Эквивалентный комплексный коэффициент усиления при входном воздействии $x_i(t) = A \cos \omega t$
<p>5</p> 	$N[A] = k + \frac{k-l}{\pi} \left\{ \alpha - \beta + g \sqrt{1-g^2} + h \sqrt{1-h^2} \right\} - j \frac{kL}{\pi A} \left\{ 2g - \frac{kL}{k-l} \right\} \text{ при } g < 1,$ <p>где $\alpha = \arcsin g$, $\beta = \frac{\pi}{2} + \arccos h$,</p> $g = \frac{v}{A}, \quad h = \frac{v}{A} - \frac{kL}{A(k-l)}$
<p>6</p> 	$N[A] = \frac{4E}{\pi A} \text{ при всех } A$
<p>7</p> 	$N[A] = \frac{4E}{\pi A} \left[1 - \left(\frac{D}{2A} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ при } \frac{D}{2A} < 1$ $= 0 \text{ при } \frac{D}{2A} > 1$
<p>8</p> 	$N[A] = \frac{4E}{\pi A} \left\{ \sqrt{1 - \frac{L^2}{4A^2}} - j \frac{L}{2A} \right\}$ <p>при $\frac{A}{L} > \frac{1}{2}$</p> $= \frac{4E}{\pi A} \exp \left(-j \arcsin \frac{L}{2A} \right)$

(пример 3); такой характеристикой обладают некоторые следящие системы радиолокаторов, где слишком большая ошибка может привести к полной потере сигнала цели вследствие ограниченной ширины луча антенны радиолокатора. Аналитическое выражение кубической характеристики имеет вид, рассмотренный в 2.6, а соответствующий ей эквивалентный комплексный коэффициент усиления (пример 4) может быть получен из уравнений

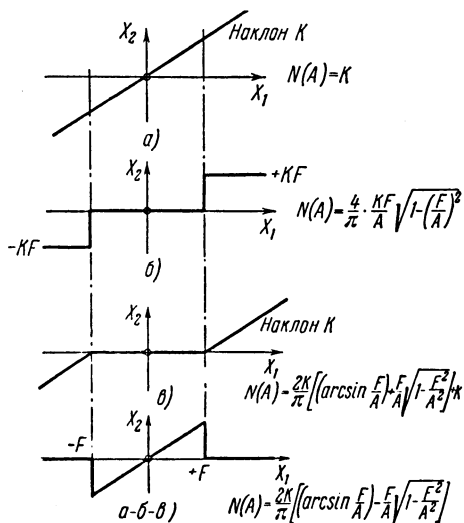


Рис. 150.

(13а) и (13б) главы 2. Пример 5 соответствует приближению к комбинации магнитного гистерезиса и насыщения, всегда имеющих место в электрических машинах. Приведены также три характеристики, встречающиеся в релейных системах регулирования (примеры 6, 7, 8). Они будут рассмотрены в следующей главе.

Очень полезным свойством эквивалентных комплексных коэффициентов усиления является их аддитивность. Если нелинейная характеристика образована сложением двух или более нелинейных характеристик, то эквивалентный комплексный коэффициент усиления, соответствующий общей характеристике, определяется суммой

эквивалентных коэффициентов усиления, соответствующих отдельным характеристикам. Так, нелинейный элемент типа «ограниченное поле» может быть представлен в виде суммы трех других нелинейностей, как это показано на рис. 150, и эквивалентный комплексный коэффициент элемента, обладающего характеристикой «ограниченного поля», получается в результате суммирования эквивалентных коэффициентов трех нелинейных элементов.

Следует отметить, что только нелинейные элементы с характеристиками типа гистерезиса или зависящими от времени обладают комплексным эквивалентным коэффициентом усиления, так как только в этом случае фаза выходного колебания будет изменена по отношению к фазе входного колебания.

11.5. Точность приближения

Достоинство частотного метода исследования нелинейных систем с обратной связью состоит в том, что его точность возрастает с увеличением порядка передаточной функции разомкнутой системы. Это является следствием того, что в системе более высокого порядка гармоники затухают сильнее*), т. е. предположение, что на входе нелинейного элемента сигнал имеет синусоидальную форму, оказывается более обоснованным. Поэтому с помощью частотного метода можно получать довольно точные результаты в тех случаях, когда другие аналитические способы неприменимы.

Следящая система с астатизмом второго порядка может содержать линейные элементы с передаточной функцией, приближенное выражение которой имеет вид

$$\bar{y}_L(p) = \frac{K_2}{p^2}$$

(см. 7.3.2). Следовательно, частотная характеристика элемента выражается таким образом:

$$y_L(j\omega) = -\frac{K_2}{\omega^2}.$$

*) Это не совсем точно. Фильтрующая способность разомкнутой системы тем больше, чем больше разность степеней знаменателя и числителя. (Прим. ред.)

Предположим, что на входе этих линейных элементов включен нелинейный элемент, имеющий релейную однозначную характеристику. Тогда при подаче на вход нелинейного элемента синусоидального сигнала на вход линейного элемента будет поступать прямоугольный сигнал. Амплитуды основной, третьей и пятой гармоник сигнала прямоугольной формы находятся в отношении $1, \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$, так что периодическая функция на выходе линейного элемента состоит из параболических дуг, а амплитуды гармонических составляющих сигнала равны $1, \frac{1}{27}$ и $\frac{1}{125}$ соответственно. Процентное содержание третьей и пятой гармоник, следовательно, равно 3,7% и 0,8% соответственно, так что рассматриваемая система действует как эффективный фильтр, ослабляющий гармоники, даже при наличии сильно искажающей нелинейности такого вида.

Эти заключения о точности непременно должны быть связаны с конкретными системами с обратной связью, которые мы рассмотрим.

Один из путей выяснения точности решения, соответствующего установившемуся режиму, состоит в учете содержания третьей гармоники в сигнале, поступающем на вход нелинейного элемента, методом последовательного приближения. Решение, полученное таким образом, считается приближением второго порядка к истинному решению и позволяет определить точность первого приближения, в котором учитывается лишь основная гармоника.

Строгое сравнение истинного процесса с процессом, вычисленным с помощью метода эквивалентного комплексного коэффициента, возможно, однако, лишь для некоторых нелинейных систем, допускающих точное решение. Грейстед, например, вычислил с помощью точного метода период автоколебаний в релейных системах регулирования с линейными элементами, имеющими передаточные функции следующего вида:

$$\bar{y}_L(p) = \frac{-1}{p(1+pT_1)(1+pT_2)}$$

$$\bar{y}_L(p) = - \frac{\exp(-pT_1)}{p(1+pT_2)}.$$

Сравнение результатов, полученных с помощью частотного метода, с точным периодом показывает, что максимальная ошибка равна $-10,3\%$ для $T_1=0$ и уменьшается, когда T_1 становится сравнимой с T_2 .

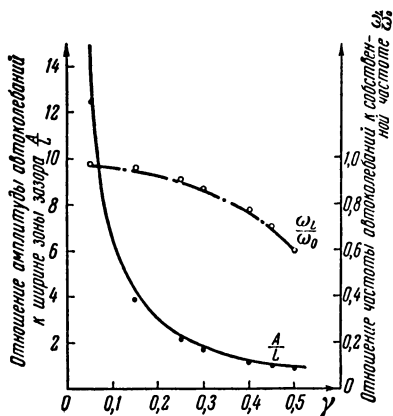


Рис. 151. Условия автоколебаний (предельного цикла) в следящей системе с люфтом. (Кривые получены с помощью вычислений. Точки соответствуют приближенным значениям эквивалентного комплексного коэффициента усиления.)

Сравним точные результаты и результаты, полученные с помощью частотного метода для амплитуды и частоты автоколебаний в следящей системе, содержащей элемент с зазором, который был рассмотрен в 10.4.

Автоколебания могут быть точно определены с помощью метода фазовой плоскости, уже описанного в 10.4.3. Зависимости, изображающие амплитуду и частоту автоколебаний, вычисленные таким образом для различных степеней демпфирования, изображены на рис. 151.

Структурная схема этой следящей системы, определяемая выражениями раздела 10.4.1, изображена на рис. 152, где выходной величиной нелинейного элемента с зазором является $\theta_{\Pi}(t)$ — угол поворота вала регулирующего потенциометра. В автоколебательном режиме на вход следящей системы ничего не подается и передаточная функция разомкнутой линейной системы, связывающая $\bar{\theta}'_{\Pi}$ (основную составляющую θ_{Π}) с $\bar{\theta}_{\text{вых}}$, получается следующим образом:

$$- [K_{\Pi} \bar{\theta}'_{\Pi} + p K_g \bar{\theta}_{\text{вых}}] \frac{GK_1 N}{p(pJ + F_v)} = \bar{\theta}_{\text{вых}},$$

где приняты те же обозначения, что и в главе 10,

Таким образом,

$$\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}} \left[1 + \frac{GK_t NK_g}{pJ + F_v} \right] = - \frac{GK + NK_{\Pi}}{p(pJ + F_v)} \bar{\theta}'_{\Pi}.$$

Отсюда

$$\frac{\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{\theta}'_{\Pi}} = - \frac{GK_t NK_{\Pi}}{p^2 J + pF_v + pGK_t NK_g}.$$

Обозначим $\omega_0 = \sqrt{\frac{GNK_t K_{\Pi}}{J}}$ — частота незатухающих колебаний,

$$\frac{\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{\theta}'_{\Pi}} = - \frac{\omega_0^2}{p^2 + p \left(\frac{F_v}{J} + \frac{GK_t NK_{\Pi}}{J} \right)} = - \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + p \frac{\gamma}{\omega_0}},$$

где

$$\gamma = \frac{F_v + GK_t NK_{\Pi}}{J \omega_0}.$$

Частотная характеристика разомкнутой системы, свя-

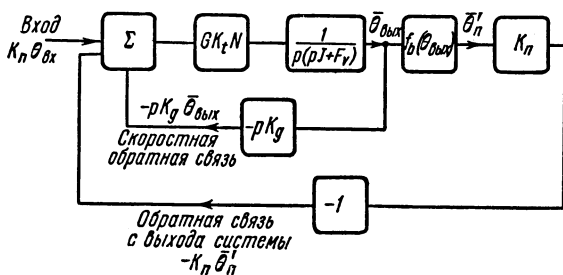


Рис. 152.

зывающая сигналы на входе и на выходе нелинейного элемента, следовательно, имеет вид

$$\bar{y}_L(j\omega) = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - i \frac{\omega}{\omega_0} \gamma}.$$

Она изображена на рис. 153 для нескольких значений безразмерной постоянной затухания γ и частоты $\frac{\omega}{\omega_0}$.

Теперь вернемся к нелинейному элементу с зазором, эквивалентный комплексный коэффициент усиления которого уже был рассмотрен (табл. 3, № 2 и приложение 4). Функция, обратная эквивалентному комплексному коэффициенту усиления $N(A)^{-1}$, изображена на рис. 153, причем масштабы действительной и мнимой осей те же,

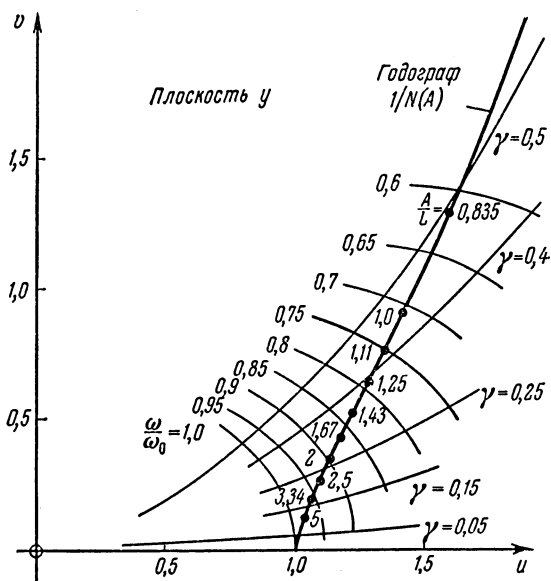


Рис. 153.

что и для $\bar{y}_L(j\omega)$. Исходя из результатов, полученных в 11.3, можно сказать, что точки пересечения годографа $\bar{y}_L(j\omega)$ и годографа $N(A)^{-1}$ соответствуют устойчивому предельному циклу. Амплитуды и частоты этих предельных циклов определяются значениями $\frac{A}{L}$ и $\frac{\omega}{\omega_0}$ в точках пересечения. Они изображены в виде точек на рис. 151. Как видно из рис. 151, ошибка приближенного метода мала почти во всем рассматриваемом диапазоне изменения затухания.

Пересечения годографов частотной характеристики и эквивалентного комплексного коэффициента усиления

имеют место и при меньших значениях $\frac{A}{L}$, чем это показано на рис. 153. При помощи рассуждений, приведенных в 11.3, можно показать, что они соответствуют неустойчивым предельным циклам и появляются при амплитудах колебаний, ненамного превышающих ширину зоны зазора. Существование таких неустойчивых предельных циклов подтверждается точным анализом. Теоретически колебания в этих неустойчивых точках либо возрастают до устойчивых предельных циклов, либо затухают внутри зазора. В любых реальных системах маловероятно, что зазор может быть сделан таким, чтобы в нем проявился только этот эффект.

В реальных системах с зазором кинетическая энергия движимого элемента заставляет его продолжать движение после отделения от движущего элемента. Мы не учитывали этой возможности. Тем не менее, исследования показывают, что степень точности определения частоты и амплитуды автоколебаний, достигаемая с помощью этого метода для таких типов нелинейных элементов, в широком диапазоне значений ω и γ значительно лучше 10%.

11.6. Несимметричные нелинейные элементы

В предыдущих параграфах предполагалось, что a_0 в уравнении (2) равно нулю, т. е. что характеристика нелинейного элемента симметрична. Если это не справедливо, то через линейные элементы системы передается постоянная составляющая, и для определения устойчивости системы необходим способ, несколько отличный от изложенного выше. Обращаясь к рис. 147 при отсутствии сигнала на входе, т. е. при $s(t)=0$, и учитывая, что система с обратной связью теперь содержит нелинейный элемент с несимметричной характеристикой, запишем необходимые условия существования постоянной составляющей в виде

$$b_0 = a_0 \bar{y}_L(0),$$

где b_0 — постоянная составляющая на входе нелинейного элемента, a_0 — постоянная составляющая на выходе

нелинейного элемента, $\bar{y}_L(0)$ — коэффициент усиления линейных элементов.

Чтобы проверить выполнение этого условия, необходимо вычислить значение a_0 для рассматриваемого нелинейного элемента для нескольких значений b_0 . Из графика a_0 в зависимости от b_0 и известного $\bar{y}_L(0)$ могут быть найдены значения a_0 и b_0 , удовлетворяющие приведенному выше уравнению. Затем нужно вычислить эквивалентный комплексный коэффициент усиления, рассматривая синусоидальный сигнал на входе нелинейности, смещенный на величину b_0 , и использовать его при решении вопроса об устойчивости*). В передаточную функцию $\bar{y}_L(p)$ систем регулирования и следящих систем часто входит по крайней мере один множитель, соответствующий интегрирующему элементу. В этих случаях постоянная составляющая на выходе нелинейного элемента в установившемся состоянии должна быть равна нулю и смещение на входе b_0 должно быть таким, чтобы выполнилось это условие. Обычно значение b_0 легко определяется при исследовании нелинейных характеристик.

11.7. Вынужденные колебания

Если на систему с обратной связью, содержащую один нелинейный элемент, амплитуда сигнала на выходе которого зависит от амплитуды на входе, воздействует синусоидальный сигнал, то поведение системы может быть проанализировано с помощью частотного метода. Предположим, что в следящей системе, изображенной на рис. 147, входной сигнал $s(t)$ — синусоидальная функция времени. Если s , r , e и X_1 выражены в виде векторных величин (т. е. в виде функций $j\omega$), то справедливо следующее уравнение:

$$s + \bar{r}\bar{y}_2(j\omega) = \bar{e}. \quad (8)$$

Выражая \bar{e} и \bar{r} через сигнал \bar{X}_1 на входе нелинейного

*) Вместе с уравнением для постоянной составляющей. (Прим. ред.)

элемента, получаем:

$$\bar{e} = \frac{\bar{X}_1}{\bar{y}'(j\omega)}$$

и

$$\bar{r} = \bar{X}_1 N(A) \bar{y}''(j\omega),$$

где $N(A)$ — эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента.

Подставляя значения \bar{e} и \bar{r} в уравнение (8), получаем значение \bar{s} , выраженное через сигнал на входе нелинейного элемента в виде

$$\bar{s} = \frac{\bar{X}_1}{\bar{y}_1(j\omega)} - \bar{X}_1 \bar{y}''(j\omega) \bar{y}_2(j\omega) N(A). \quad (9)$$

Сигнал на входе нелинейного элемента \bar{X}_1 рассматривается как заданный вектор $(A, \hat{0}^\circ)$, расположенный вдоль действительной оси в комплексной плоскости. Если сигнал на входе имеет постоянную амплитуду и изменяющуюся частоту, то конец вектора \bar{s} должен скользить по окружности радиуса $|\bar{s}|$ с центром в точке O . Выражение для \bar{s} в уравнении (9) есть функция двух переменных ω и A . Следовательно, графическое изображение (9) представляет семейство годографов вектора. Каждый годограф соответствует определенному значению ω , причем A является параметром годографа. Пересечение кривых семейства годографов и годографа s , имеющего вид окружности, дает решение уравнения (9); значения A и ω , соответствующие пересечению, определяют амплитуду и частоту вынужденных колебаний на входе нелинейного элемента, а также фазу \bar{X}_1 относительно \bar{s} .

В качестве примера применения метода рассмотрим вынужденные колебания в следящей системе, подобной описанной в 10.2, но имеющей нелинейный усилитель ошибки. В структурной схеме, приведенной на рис. 154, используются обозначения, принятые в главе 10; на рис. 155, а изображена прямолинейная аппроксимация

характеристики нелинейного усилителя ошибки, имеющего крутизну G ампер на вольт, если входное напряжение лежит в пределах e_L , и увеличенную крутизну M ампер на вольт вне этих пределов. Разумеется, при достаточно большом напряжении на входе усилитель попадает

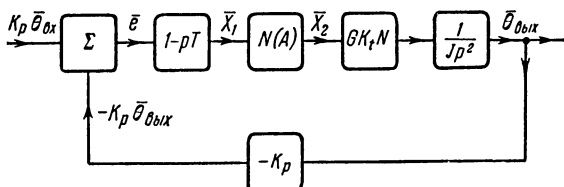


Рис. 154.

в режим насыщения, но сейчас мы будем считать, что нормальная работа происходит внутри границ насыщения. Характеристика усилителя может рассматриваться как характеристика двух последовательно соединенных элементов: линейного элемента с коэффициентом усиления

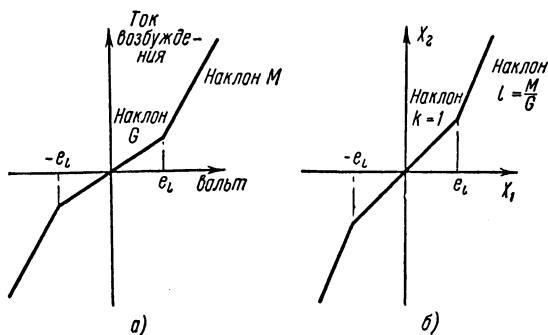


Рис. 155.

G ампер на вольт и нелинейного элемента, коэффициент усиления которого k равен 1 для входных сигналов, меньших e_L вольт, и равен $\frac{M}{G}$ для входных сигналов, больших e_L вольт (рис. 155, б). На выходе усилителя находятся два интегрирующих звена, соответствующих идеальному двигателю с инерционной нагрузкой, а перед ним

находится элемент, зависящий от частоты, вносящий опережение по фазе и стабилизирующий систему. Для сигналов на входе усилителя с амплитудой меньше, чем e_L вольт, следящая система ведет себя, как линейная система, и ее общая передаточная функция имеет вид

$$\frac{\bar{\theta}_{\text{ВМХ}}}{\bar{\theta}_{\text{ВХ}}} = \frac{1 + pT}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + pT + 1}. \quad (10)$$

Собственная частота определяется выражением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{NK_t GK_p}{J}} \text{ рад/сек}$$

(ср. уравнение (10) гл. 10).

Общая частотная характеристика системы в линейном режиме может быть записана в безразмерной форме. Заменяя для этого p в уравнении (10) на $j\omega$, получаем:

$$\frac{\bar{\theta}_{\text{ВМХ}}}{\bar{\theta}_{\text{ВХ}}} = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 T}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 T + 1},$$

где $\frac{\omega}{\omega_0}$ — безразмерная частота, $\omega_0 T$ — безразмерная постоянная времени стабилизации.

Остается выразить в безразмерной форме величины, зависящие от амплитуды. Это можно сделать, выразив амплитуду входного сигнала $|\bar{\theta}_{\text{ВХ}}|$ через ширину линейного отрезка нелинейной характеристики, т. е. через $\frac{|\bar{\theta}_{\text{ВХ}}|}{e_L} K_p$. Сигнал на входе нелинейного элемента $X_1(t)$ берется вида $A \cos \omega t$ вольт, и в безразмерной форме это выражается в виде вектора $\left(\frac{A}{e_L}, \hat{\theta}^0\right)$. Частотные характеристики в уравнении (9) определяются выражениями

$$\bar{y}'(j\omega) = \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 T\right)$$

и

$$\bar{y}''(j\omega) \bar{y}_2(j\omega) = \frac{NK_t GK_p}{J \omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

Эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента вычисляется по формуле, приведенной под № 1 в табл. 3. Она не содержит мнимой части, так как характеристика этого нелинейного элемента однозначна. Зависимость эквивалентного коэффициента усиления изображена на рис. 156 для значений $k=1$ и $l=6$. Если амплитуда входного сигнала A меньше, чем e_L , то эквивалентный коэффициент усиления $N(A)$ равен единице и не зависит от A , т. е. система линейна.

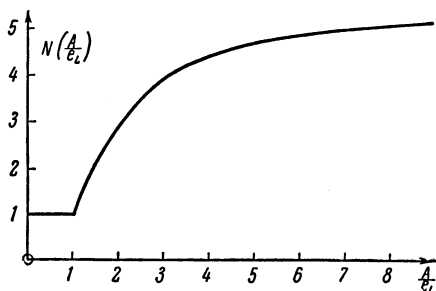


Рис. 156.

Если A превышает e_L , то эквивалентный коэффициент усиления стремится к значению $\frac{M}{G} (=6)$, так как входная синусоида большую часть времени находится в области высокого коэффициента усиления. В любой реальной следящей системе явление насыщения усилителя заставляет эквивалентный коэффициент усиления стремиться к нулю при достаточно больших амплитудах на входе.

Для того чтобы вычислить семейство годографов, соответствующих правой части уравнения (9), выбирается значение $\frac{\omega}{\omega_0}$, и для данного значения $\omega_0 T$ определяются значения частотных характеристик $\bar{y}'(j\omega)$ и $\bar{y}''(j\omega)$. Затем для различных значений $\frac{A}{e_L}$, безразмерной амплитуды сигнала на входе нелинейного элемента, вычисляются точки на годографе с использованием эквивалентного коэффициента усиления, данного на рис. 156.

Семейство годографов, полученных таким образом для $\omega_0 T = 0,33$, показано на рис. 157 вместе с окружностью, являющейся годографом входного сигнала и имеющей радиус $K_p \frac{|\bar{\theta}_{вх}|}{e_L}$. Пересечения годографа окружности для определенных амплитуд входного сигнала и годографов для постоянных $\frac{\omega}{\omega_0}$ являются решениями уравнения

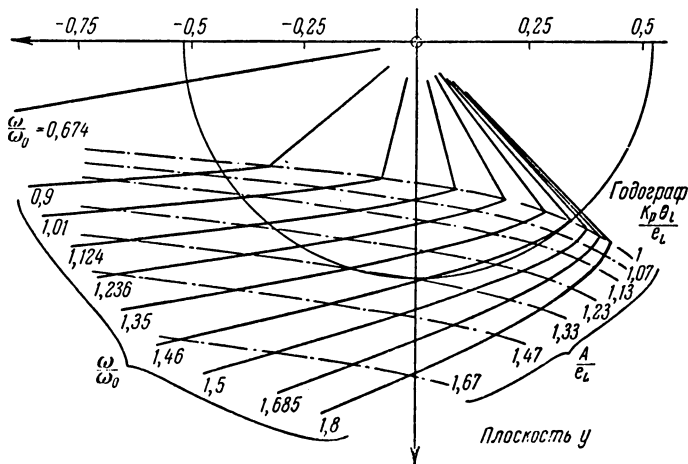


Рис. 157. Определение синусоидальных вынужденных колебаний нелинейной системы регулирования.

(9), дающими зависимость между безразмерными величинами $\bar{\theta}_{вх}(j\omega)$ и $\bar{X}_1(j\omega)$. Часто бывает необходимо определить зависимость между $\bar{\theta}_{вх}(j\omega)$ и $\bar{\theta}_{вых}(j\omega)$, т. е. найти частотную характеристику замкнутой следящей системы. В этом случае для получения необходимой частотной характеристики $r = \frac{K_p \bar{\theta}_{вых}}{e_L}$ безразмерная амплитуда $\frac{A}{e_L}$ синусоидального сигнала на входе нелинейного элемента умножается на $N(A) \bar{y}''(j\omega)$.

При определенных значениях $\frac{\omega}{\omega_0}$ окружность пересекается с кривыми семейства годографов в трех точках.

Вообще говоря, эти пересечения оказываются при различных значениях $\frac{A}{e_L}$ и означают три одновременных решения уравнения (9). Таким образом, когда вычерчивается график $\frac{A}{e_L}$ в зависимости от $\frac{\omega}{\omega_0}$, то зависимость амплитуд от $\frac{\omega}{\omega_0}$ имеет вид, показанный на рис. 158.

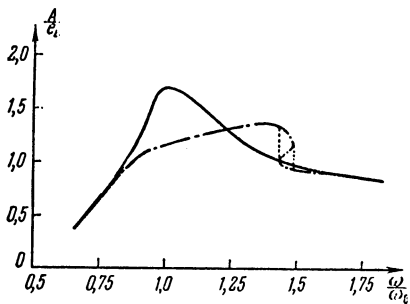


Рис. 158. Вынужденные колебания. Сплошная линия — линейная система; штрих-пунктирная линия — система с нелинейностью вида «жесткая пружина».

В некотором диапазоне частот имеются три возможных значения $\frac{A}{e_L}$.

Среднее значение неустойчиво, и физическим результатом изменения частоты являются скачки амплитуды и фазы, как показано пунктирными линиями (рис. 158).

Частота, на которой происходит скачок, зависит от направления изменения частоты. Явления скачка обычно имеют место в нелинейных уст-

ройствах как с обратной связью, так и без обратной связи, имеющих характеристики, похожие на характеристики резонансных систем с небольшим затуханием.

Вест (West) и Никифорок (Nikiforuk) исследовали свойства следящей системы, обладающей характеристикой с увеличивающимся коэффициентом усиления (рис. 155), которую иногда называют характеристикой «жесткой пружины», в противоположность кривой насыщения (рис. 134), называемой характеристикой «мягкой пружины».

Эти авторы используют частотный метод, несколько отличающийся от описанного выше, но приходят к тем же результатам. Проведенная ими проверка на электронной модели обнаружила хорошее соответствие между теорией и экспериментом.

Построение, приведенное на рис. 157, непосредственно применимо к нелинейным элементам, обладающим эквивалентным комплексным коэффициентом усиления, например к элементам с зазором и гистерезисом.

11.8. Дальнейшие применения частотного метода

При исследовании частотным методом нелинейной системы, возбуждаемой синусоидальными колебаниями, мы можем столкнуться с рядом новых явлений. Например, некоторые из систем обладают коэффициентом усиления, называемым Вестом (West), Дусом (Douce) и Лайвеслеем (Livesley) двойственным. Если сигнал на входе нелинейного элемента имеет вид

$$X_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + B \cos n\omega t,$$

где A , B и n — действительные величины, то сигнал на выходе содержит составляющие суммарной и разностной частоты одновременно с гармониками частоты входного сигнала. Двойственный эквивалентный комплексный коэффициент усиления определяется как комплексное отношение выходной составляющей к входной составляющей одной и той же частоты. Предполагается, что на эффективное усиление нелинейным элементом сигнала на частоте одной из составляющих влияет присутствие другой составляющей.

Говорят, что в нелинейной системе с обратной связью появляется субгармонический резонанс, если входной гармонический сигнал частоты f_1 вызывает выходной гармонический сигнал частоты $\frac{f_1}{n}$, где n — целое число.

Предполагая, что на входе нелинейного элемента при субгармоническом резонансе существуют две составляющие с частотами f_1 и $\frac{f_1}{n}$ соответственно, можно вычислить двойственный эквивалентный комплексный коэффициент усиления в единицах выходной составляющей на частоте $\frac{f_1}{n}$. Если нелинейная характеристика однозначна и сигнал на выходе ее не зависит от частоты на входе,

то эквивалентный коэффициент усиления — действительный. Однако, когда вычисляется двойственный эквивалентный коэффициент нелинейного элемента даже с однозначной характеристикой, он может оказаться комплексным и фазовый сдвиг, вносимый им, может вызвать неустойчивость на субгармонической частоте.

Частотный метод позволяет при решении некоторых нелинейных задач использовать методы синтеза, аналогичные тем, которые применимы к линейным системам. Например, при определении устойчивости по годографам $N(A)^{-1}$ и $\bar{y}_L(j\omega)$ легко установить, каким образом должен быть видоизменен годограф линейного и нелинейного элементов, чтобы обеспечить устойчивость. Изменение формы годографа линейных элементов может осуществляться общепринятыми способами, рассмотренными в предыдущих главах, но можно также изменять форму годографа нелинейного элемента изменением характеристик нелинейных элементов. Последняя возможность ставит вопрос о применимости этого метода, когда в системе имеется более чем один нелинейный элемент. Так как сигнал на входе каждого элемента должен быть приближенно синусоидальным, для того чтобы этот метод был применим, между двумя нелинейными элементами должна иметь место эффективная фильтрация. Однако представляется возможным, что понятие двойственного и более высоких порядков эквивалентных коэффициентов усиления позволит разрешить эти проблемы даже для случая последовательно соединенных элементов.

Другая возможность, которая открывается при частотном подходе, — это исследование систем с обратной связью, подверженных случайным воздействиям, описываемых статистическим образом, например с помощью спектральных плотностей и функций распределений вероятностей. Эти методы зависят от представления нелинейных элементов с помощью эквивалентного линейного элемента. Они были рассмотрены в недавней статье Барретта (Barrett) и Коулза (Coales)*).

*) См. также статью И. Е. Казакова «Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных автоматических систем», Автоматика и телемеханика, т. XVII, № 5, 1956.

Литература

1. Grensted P. E. W., Frequency Response Analysis of Non-Linear Systems, Proceedings IEE, Monograph No 126 M, 1955, 102C, p. 244.
 2. Johnson E. C., Sinusoidal Analysis of Feedback Control Systems containing Non-Linear Elements, Transactions of the American IEE, 1952, 71, Part II, p. 169.
 3. West J. C. and Nikiforuk P. N., The Behaviour of a Remote Position Control Servomechanism with Hard-Spring Non-Linear Characteristics, Proceedings IEE, 1954, 101, Part II, p. 481.
 4. West J. C. and Nikiforuk P. N., The Response of Remote Position Control Systems with Hard-Spring Non-Linear Characteristics to Step-Function and Random Inputs, Proceedings IEE, Paper No 1728 M, 1954, 102B, p. 575.
 5. West J. C., Douce J. L. and Livesley R. K., The Dual-Input Describing Function and its Use in the Analysis of Non-Linear Feedback Systems, Proceedings IEE, Paper No 1877, 1955, 103B, p. 463.
 6. West J. C. and Douce J. L., The Mechanism of Sub-Harmonic Generation in a Feedback System, Proceedings IEE, Paper No 1693M, 1954, 102B, p. 569.
 7. Barrett J. F. and Coales J. F., An Introduction of the Analysis of Non-Linear Control System with Random Inputs, Proceedings IEE, Monograph No 154M, 1955, 103C, p. 190.
 8. Попов Е. П., Пальтов И. П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1960. [Добавление редактора.]
-

ГЛАВА 12

СВОЙСТВА РЕЛЕЙНЫХ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

12.1. Введение

Методы анализа линейных систем основаны на прочном фундаменте, созданном Найквистом и Боде, и в прошлом у инженеров существовало естественное желание избегать введения существенно нелинейных элементов в систему регулирования. Однако теперь стало очевидным, что во многих случаях ограничиваться линейными системами нет смысла, и поэтому при проектировании систем надо пожертвовать преимуществами линейных методов исследования ради преимуществ, получаемых от введения в систему определенных нелинейностей.

В одном из типов нелинейных систем в качестве регулирующего элемента используется реле или какое-либо другое устройство, работающее в режиме «включено—выключено». Этот способ называется регулированием по принципу «да — нет», «on — off», «bang — bang», «schwartz — weiss», «ja — nein» и «tout—au—rien». Релейный элемент дает информацию лишь о знаке входного сигнала, вся информация об амплитуде теряется.

Публикация теоретических работ о релейных следящих системах началась со статьи Хазена (1934 г.), в которой для вычисления процесса в релейной системе, вызываемого скачкообразным или линейно меняющимся воздействием, используются методы последовательного приближения. Вторая мировая война, во время которой возникла необходимость в легких системах регулирования для самолетов и беспилотных ракет, ускорила прогресс в области теории и практики релейных систем регулирования. Некоторые из этих результатов в области

релейного управления двигателями переменного и постоянного тока в следящих системах были опубликованы Гринвудом (Greenwood) и Холлом (Hall) в 1947—1948 гг. Макколлом (MacColl) (1945 г.) и Вейсом (Weiss) (1945 г.) были разработаны аналитические методы исследования. Частотные методы для анализа релейных следящих систем были применены Кохенбургером (Kochenburger) в 1950 г.

На первый взгляд реле может показаться самым малообещающим элементом для целей точного регулирования, хотя для регулирования температуры оно применяется довольно часто. Если в систему, охваченную глубокой отрицательной обратной связью, включено реле, то система, образовавшаяся в результате этого, может вести себя, как хорошая следящая система и может иметь определенные преимущества перед системами непрерывного регулирования.

Вначале релейное регулирование применялось в маломощных следящих системах и, в качестве эксперимента, в системах управления беспилотными снарядами. Есть все основания полагать, что этот принцип в ряде случаев может использоваться в мощных следящих системах, уменьшая сложность и вес систем и, кроме того, заметно увеличивая экономичность по сравнению с непрерывным регулированием. Большой простор для применения релейного регулирования открывается в области гидравлических и пневматических систем регулирования. Создание, например, золотников с линейной характеристикой представляет большие трудности, тогда как золотники с характеристикой, похожей на релейную, могут быть очень легко реализованы.

Существуют два основных пути применения релейного управления в следящих системах. Они описываются ниже, причем в качестве примеров взяты электрические релейные элементы.

12.1.1. Вибрационное регулирование.

Как показано на рис. 159а, сигнал ошибки может быть использован для изменения отношения длительности импульса к интервалу между импульсами поляризованного реле. Для этого якорь реле заставляют непрерывно вибрировать при помощи дополнительной

обмотки, питаемой от отдельного источника переменным током. Через контакты реле проходит некоторый средний ток, пропорциональный ошибке, который затем управляет электрическим двигателем или воздействует на

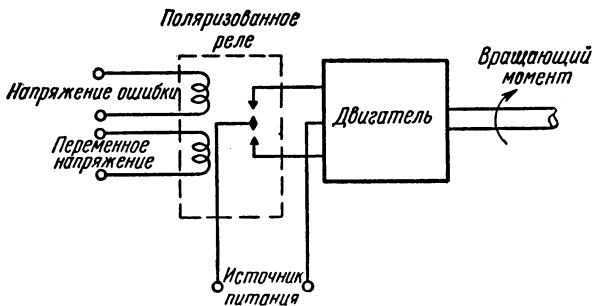


Рис. 159а. Вибрационная система регулирования.

гидравлический либо иной усилитель мощности. Здесь реле действует как модулятор и зависимость среднего вращающего момента от сигнала ошибки приблизительно линейна в диапазоне ошибки. Это устройство было описано Макколлом и иногда называется вибрационным

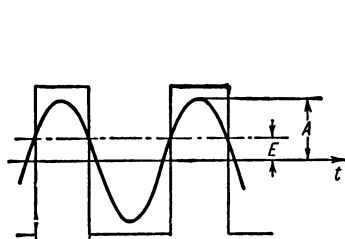


Рис. 159б.

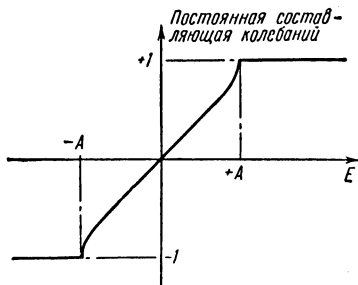


Рис. 159в.

регулятором. На рис. 159б показано, каким образом при приложении постоянного напряжения ошибки E колебания реле становятся несимметричными. Если напряжение генератора имеет форму $A \sin \omega_L t$, то длительность переменных полупериодов колебаний реле

равна соответственно $\left(\frac{T}{2} + 2t_0\right)$ и $\left(\frac{T}{2} - 2t_0\right)$ сек, где T — период $\frac{2\pi}{\omega_L}$ напряжения генератора. Из равенства

$$A \sin \omega_L t_0 = E$$

находим:

$$t_0 = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{E}{A} \text{ сек.}$$

Следовательно, постоянная составляющая колебаний тока на выходе реле равна

$$a_0 = \frac{1}{T} \left\{ \left(\frac{T}{2} + 2t_0 \right) - \left(\frac{T}{2} - 2t_0 \right) \right\}$$

или

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{E}{A}.$$

Так как вращающий момент двигателя пропорционален этой постоянной составляющей, то реле ведет себя, как усилитель с коэффициентом усиления, равным производной написанного выше выражения, т. е.

$$\frac{da_0}{dE} = \frac{2}{\pi} (A^2 - E^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Зависимость среднего значения сигнала на выходе реле от сигнала ошибки изображена на рис. 159в. При частотах ошибки, значительно меньших частоты генератора, и амплитудах ошибки, меньших амплитуды напряжения генератора, система в отношении сигнала ошибки ведет себя, как непрерывный регулятор.

12.1.2. Релейное регулирование.

При релейном регулировании сигнал ошибки управляет релейным элементом непосредственно, а сигнал на выходе реле имеет постоянную величину и знак, зависящий от знака ошибки. Регулирование выходного вала может осуществляться двумя путями.

(а) Как показано на рис. 160. Двигатель, создающий вращающий момент, вращается непрерывно с постоянной скоростью и приводит в движение выходной вал с помощью магнитных муфт. Муфты включаются через контакты

реле, так что направление вращения выходного вала зависит от знака ошибки, и инерция двигателя, являющегося источником энергии, не влияет на реакцию следящей системы.

(б) Релейный элемент управляет вращающим моментом или скоростью двигателя непосредственно путем реверсирования направления тока в цепи якоря или обмотки возбуждения.

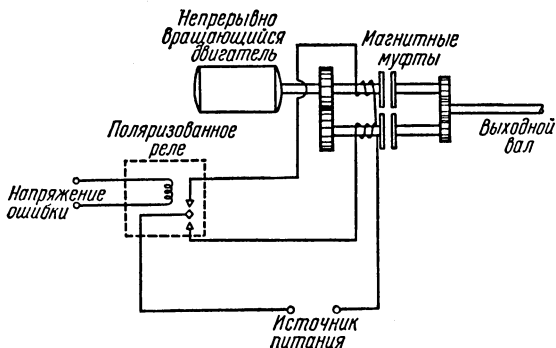


Рис. 160. Система регулирования с магнитными муфтами.

Мы ограничимся в этой главе рассмотрением регулятора последнего типа, хотя принципы, которые будут рассмотрены, легко могут быть применены к регулированию с помощью муфт.

12.2. Исследование методом фазовой плоскости

Рассмотрим следящую систему, в которой регулируемый вал несет нагрузку, обладающую инерцией и трением, и с его выхода снимается часть механической мощности. Схема следящей системы такого типа изображена на рис. 161а. Входная и выходная величины представлены в виде углов $\theta_{вх}$ и $\theta_{вых}$. Задачей следящей системы является поддержание равенства этих углов. Углы преобразуются в напряжения $e_{вх}$ и $e_{вых}$ с помощью потенциометров. Обычно напряжение, пропорциональное $\theta_{вх}$, получается от другого датчика, например от радиолока-

ционной установки или от датчика гироскопа, и $\theta_{ВХ}$ соответствует координате мишени радиолокатора или положению гироскопа. Напряжения $e_{ВХ}$ и $e_{ВЫХ}$ сравниваются в поляризованном реле, и значение разности напряжений ($e_{ВХ} - e_{ВЫХ}$) определяет положение якоря реле. Мощные реле, управляемые поляризованным реле, подают ток к якору электрического двигателя, обмотка возбуждения которого питается от отдельного источника.

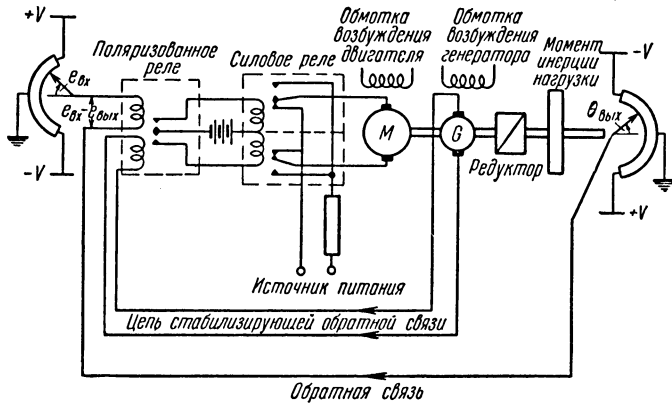


Рис. 161а. Релейная система регулирования.

Другая возможность, состоящая в управлении током обмотки возбуждения вместо тока якоря, связана со значительно большим запаздыванием по времени, определяемым индуктивностью обмотки возбуждения. Кроме того, в этом случае труднее предотвратить искрение в контактах силовых реле. Наличие порога срабатывания поляризованного реле вносит зону нечувствительности, которая при необходимости может быть устранена при помощи использования лишь одной пары контактов, как изображено на рис. 161б. В этом устройстве наличие порога срабатывания вызывает лишь небольшое статическое рассогласование между $\theta_{ВХ}$ и $\theta_{ВЫХ}$, так как для переключения контактов необходима небольшая ошибка. Вращающий момент двигателя зависит от тока якоря, а этот ток в свою очередь является функцией скорости

вращения двигателя. Для ограничения тока последовательно с якорем подключается сопротивление, так что ток якоря и вращающий момент линейно уменьшаются

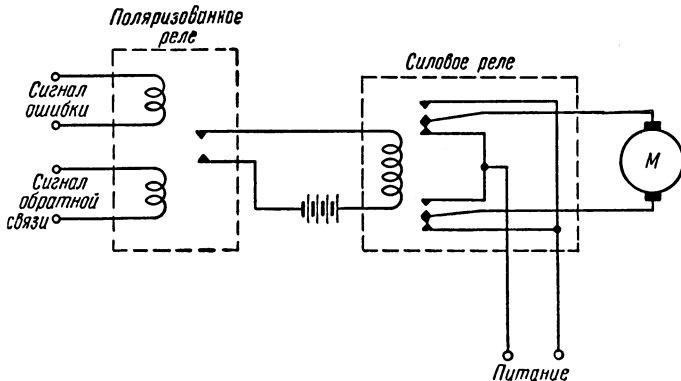


Рис. 1616. Другой вариант схемы соединения контактов.

с увеличением скорости — эффект, аналогичный влиянию механического вязкого трения, который может быть исследован теми же методами.

12.2.1. Безразмерное уравнение.

Параметрами следящей системы являются следующие величины:

J — момент инерции двигателя и нагрузки, приведенный к нагрузке (выходному валу),

F_c — момент сухого трения, приведенный к нагрузке,

F_v — коэффициент эффективного вязкого трения, приведенного к нагрузке,

F_L — момент внешней нагрузки (например, сопротивление воздуха),

T_m — вращающий момент на валу двигателя,

N — понижающее передаточное отношение редуктора,

$\theta = (\theta_{\text{вх}} - \theta_{\text{вых}})$ — угол рассогласования.

Приравнявая вращающий момент двигателя, приведенный к выходному валу, вращающему моменту, затрачиваемому на преодоление инерции, трения и момента нагрузки, получим:

$$N | T_m | \text{sign } \theta = J \ddot{\theta}_{\text{вых}} + F_v \dot{\theta}_{\text{вых}} + |F_c| \text{sign } \dot{\theta}_{\text{вых}} + F_L, \quad (1)$$

где

$$\text{sign } \theta = \frac{\theta}{|\theta|} = \pm 1.$$

Если входной сигнал обладает ускорением, равным нулю, и постоянной скоростью изменения, то

$$\ddot{\theta}_{\text{ВХ}} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\theta}_{\text{ВХ}} = \Omega_{\text{ВХ}}.$$

Подставив эти условия в уравнение (1) и поделив обе части уравнения на F_v , получаем:

$$T\ddot{\theta} + \dot{\theta} = -\Omega_{\text{ВЫХ}} \text{sign } \theta + \frac{|F_c|}{F_v} \text{sign} |\Omega_{\text{ВХ}} - \dot{\theta}| + \frac{F_L}{F_v} + \Omega_{\text{ВХ}}, \quad (2)$$

где $T = \frac{J}{F_v}$ — постоянная времени механической нагрузки и $\Omega_{\text{ВЫХ}} = \frac{N|T_m|}{F_v}$ — предельная угловая скорость выходного вала при отсутствии сухого трения и момента нагрузки.

Для того чтобы выразить переменные в безразмерных величинах, обозначим соответственно безразмерные единицы времени и рассогласования следующим образом:

$$s = \frac{t}{T} \quad \text{и} \quad x = \frac{\theta}{\Omega_{\text{ВЫХ}} T}.$$

Тогда

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T},$$

так что

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{\Omega_{\text{ВЫХ}}}$$

и

$$\ddot{x} = \frac{d}{ds} (\dot{x}) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\theta}{dt} \frac{1}{\Omega_{\text{ВЫХ}}} \right) = \frac{d}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{\Omega_{\text{ВЫХ}}} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{T}{\Omega_{\text{ВЫХ}}}.$$

Подставив безразмерные переменные в уравнение (2), получаем:

$$\ddot{x} + \dot{x} = -\text{sign } x + f_c \text{sign} \left(\frac{\Omega_{\text{ВХ}}}{\Omega_{\text{ВЫХ}}} - \dot{x} \right) + f_L + \frac{\Omega_{\text{ВХ}}}{\Omega_{\text{ВЫХ}}}, \quad (3)$$

где $f_c = \frac{|F_c|}{N|T_m|}$ — безразмерная величина сухого трения,

$f_L = \frac{F_L}{N|T_m|}$ — безразмерная величина момента нагрузки.

Уравнение (3) может быть записано таким образом:

$$\ddot{x} + \dot{x} = K \quad (4)$$

или

$$v \frac{dv}{dx} + v = K, \quad \text{где } v = \dot{x},$$

откуда

$$\frac{dx}{dv} = \frac{v}{K-v}. \quad (5)$$

Параметр K меняется скачком от одного постоянного значения до другого при изменении знаков x и v во время движения. В диапазоне постоянства величины K движение описывается линейным дифференциальным уравнением (4) и общее уравнение, следовательно, относится к классу «кусочно-линейных».

12.2.2. Уравнения фазовых траекторий.

Принтегрировав уравнение (5), мы можем выразить x через v и, значит, найти уравнение фазовой траектории. Если начальные условия следующие:

$$x = x_0, \quad v = v_0, \quad s = 0,$$

то, интегрируя уравнение (5), получаем:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{v_0}^v \frac{v}{K-v} dv,$$

$$x|_{x_0}^x = -[K \ln(K-v) + v]|_{v_0}^v,$$

откуда

$$x = x_0 - K \ln \left[\frac{K-v}{K-v_0} \right] - v + v_0. \quad (6)$$

Важными свойствами фазовых траекторий, описываемых этими уравнениями, являются следующие.

(1) Наклон фазовой траектории $\frac{dv}{dx}$ в каждой точке, как следует из уравнения (5), не зависит от значения x .

Это является чрезвычайно полезным свойством, так как, вычертив фазовую траекторию для данных значений K , x_0 и v_0 , можно получить фазовые траектории для других начальных значений x_0 с помощью смещения по горизонтали первоначальной фазовой траектории.

(2) Фазовые траектории асимптотически стремятся к линии $v = \pm K$, причем K есть безразмерная предельная скорость выходного вала, когда вращающий момент двигателя полностью расходуется на преодоление трения и момента нагрузки.

(3) Время, за которое изображающая точка проходит расстояние между соседними точками на фазовой траектории, обозначенными 1 и 2, может быть определено путем интегрирования уравнения (4) по s , так что мы получаем:

$$[v + x]_1^2 = [Ks]_1^2.$$

В безразмерном выражении время, за которое изображающая точка проходит расстояние между точками 1 и 2, записывается следующим образом:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{K} [(v_2 + x_2) - (v_1 + x_1)]. \quad (7)$$

Простое построение на фазовой плоскости позволяет определить отрезок времени графически (рис. 162). P_1 и P_2 — точки на траектории, линии N_1P_1 и N_2P_2 начерчены с наклоном -1 , причем предполагается, что масштабы по осям v и x идентичны. Тогда

$$ON_1 = x_1 + v_1,$$

$$ON_2 = x_2 + v_2,$$

откуда (на основании уравнения (7))

$$N_2N_1 = (x_2 + v_2) - (x_1 + v_1) = K(s_2 - s_1).$$

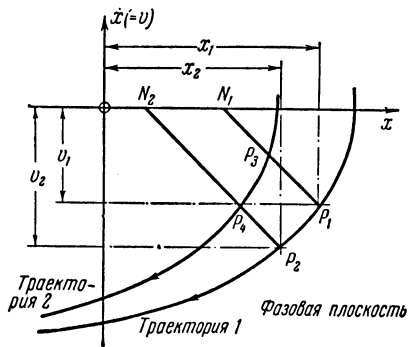


Рис. 162.

12.2.3. Области на фазовой плоскости.

Параметр K принимает постоянные значения на фазовой плоскости в областях, отделенных ярко выраженными границами. Фазовые траектории меняют свою форму, переходя из одной области в другую и пересекая границу. Области на фазовой плоскости для релейной следящей системы с зоной нечувствительности, сухим

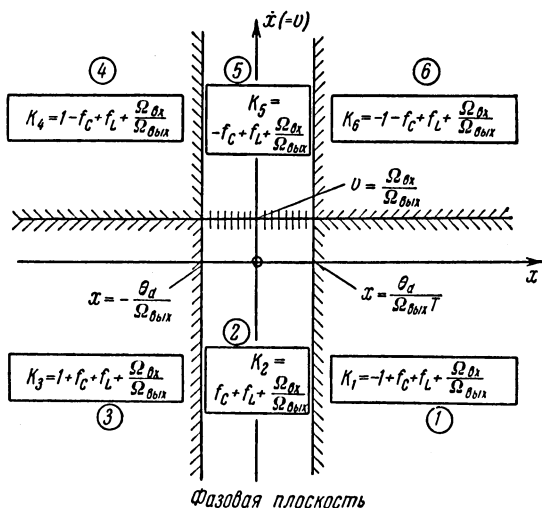


Рис 163.

и вязким трением, моментом нагрузки и постоянной входной скоростью изображены на рис. 163. Значения K в различных областях определяются из уравнения (3).

В области 1 x положительно, а v отрицательно. Выходной вал разгоняется до безразмерной предельной скорости K_1 . Его движению противодействуют моменты трения и нагрузки.

В области 2 величина рассогласования находится внутри зоны нечувствительности и вращающий момент двигателя равен нулю. Если зона нечувствительности, выраженная через угол отклонения выходного вала, равна θ_d , то в безразмерной форме зона нечувствитель-

ности запишется в виде $\frac{\theta_d}{\Omega_{\text{вых}} T}$. Двигатель не обеспечивает вращающего момента, так что под действием моментов трения и нагрузки происходит замедление и слагаемое — $\text{sign } x$ в уравнении (3) равно нулю. На рис. 161а якорь двигателя изображен закороченным, когда поляризованное реле находится в зоне нечувствительности. Следовательно, замедление усиливается динамическим торможением, вызванным протеканием токов в якоре. Это обстоятельство не было учтено при оценке K_2 на основании уравнения (3).

В области 3 вращающий момент двигателя меняет свое направление с переменной знака x . Замедление происходит под действием моментов трения и нагрузки, к которым теперь добавляется полный вращающий момент двигателя.

В области 4 момент трения меняет свой знак с изменением направления движения выходного вала. Выходной вал разгоняется до предельной скорости K_4 , причем ускорению противодействуют моменты трения и нагрузки.

В области 5, в мертвой зоне, замедление происходит под действием момента трения, которому противодействует момент нагрузки.

В области 6 замедление происходит под действием вращающего момента и трения, которым противодействует момент нагрузки.

12.2.4. Временное запаздывание при переключении реле.

Будем считать, что с реле связано постоянное временное запаздывание. Это строго справедливо для мощных реле, которые переключаются с помощью контактов поляризованного реле. Временное запаздывание поляризованного реле зависит частично от скорости нарастания тока ошибки в его обмотке, так как эта скорость нарастания определяет время, необходимое для достижения порога срабатывания. Мощные реле имеют значительно большее временное запаздывание, которое позволяет не учитывать небольшую зависимость запаздывания поляризованного реле от частоты.

Благодаря наличию временного запаздывания реле изменение вращающего момента двигателя запаздывает относительно изменения знака ошибки. Следовательно,

фазовая траектория, входящая в зону нечувствительности, заходит за границу зоны на фазовой плоскости на величину, зависящую от времени запаздывания.

Если точки P_1 и P_2 (рис. 162) смещены по времени на определенную величину, то точки P_3 и P_4 смещены на ту же определенную величину. Вейсом (Weiss) [5] было показано, что если точки на семействе фазовых траекторий лежат на прямой линии, то точки на фазовых траекториях, смещенные от этой линии на расстояния, которые изображающая точка проходит за постоянный отрезок времени, тоже лежат на прямой линии, не обязательно параллельной первой. Следовательно, границы линейных областей, измененные временным запаздыванием, тоже линейны и называются «линиями изменения вращающего момента» или «линиями переключения» двигателя в зависимости от наличия или отсутствия зоны нечувствительности.

Временное запаздывание, вызываемое переключением реле, обозначают t_d сек, или в безразмерной форме $s_d = \frac{t_d}{T}$.

12.2.5. Фазовый портрет.

Прежде чем получить фазовый портрет, на фазовой плоскости вычерчиваются фазовые траектории, соответствующие шести областям, согласно уравнению (6). Фазовая траектория, составляющая фазовый портрет, получается смещением первоначальных фазовых траекторий по горизонтали и припасовыванием фазовых траекторий, принадлежащих к различным областям в соответствующих точках на границах областей. На рис. 164а изображен фазовый портрет релейной следящей системы с зоной нечувствительности и сухим трением. График зависимости ошибки от времени в безразмерных единицах изображен на рис. 164б. Начальные условия вызваны внезапным приложением входного сигнала, состоящего из скачка и линейно изменяющейся функции. Это приводит к начальной ошибке, а также к начальной скорости изменения ошибки и вызывает колебательный процесс, форма которого изображена на рис. 164в. После затухания переходного процесса выходной вал следует за входным сигналом с колебаниями вокруг среднего положения. В данном частном случае колебания происходят относительно одного края зоны нечувствительности и при

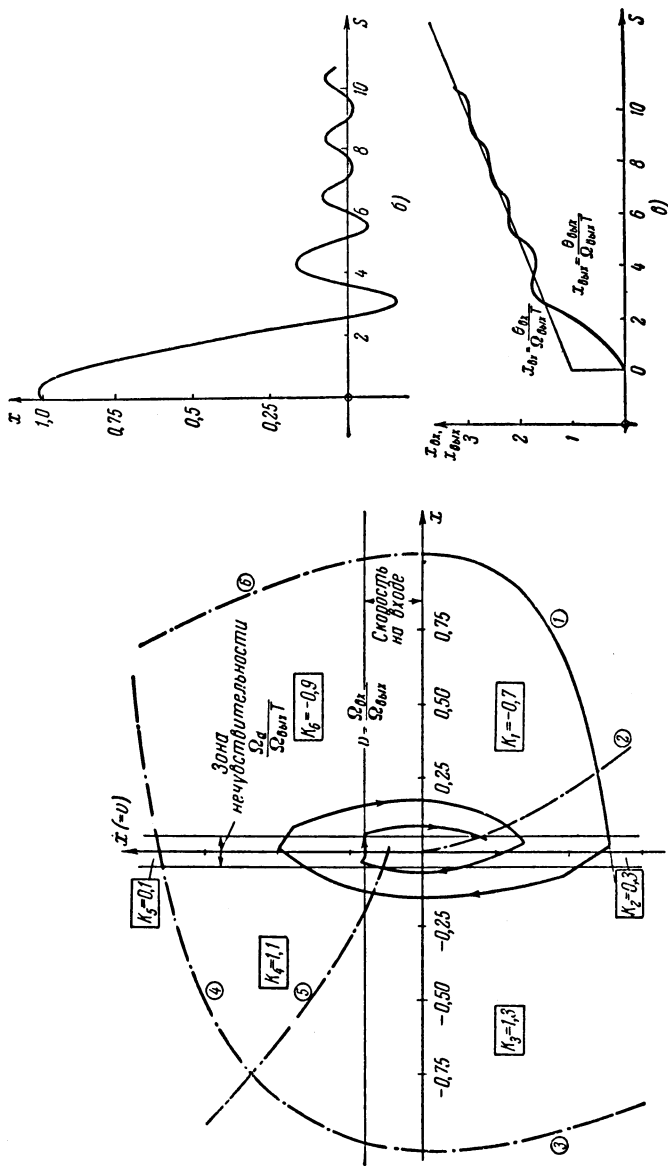


Рис. 164а. Фазовый портрет релейной следящей системы с зоной нечувствительности в реле и сухим трением. Параметры: $\frac{\Omega_{вых}}{\Omega_{вых}} = 0,1$; $\frac{\Omega_1}{\Omega_{вых}} = 0,2$; $s_d = 0,05$; $f_i = 0,1$; $f_L = 0$.

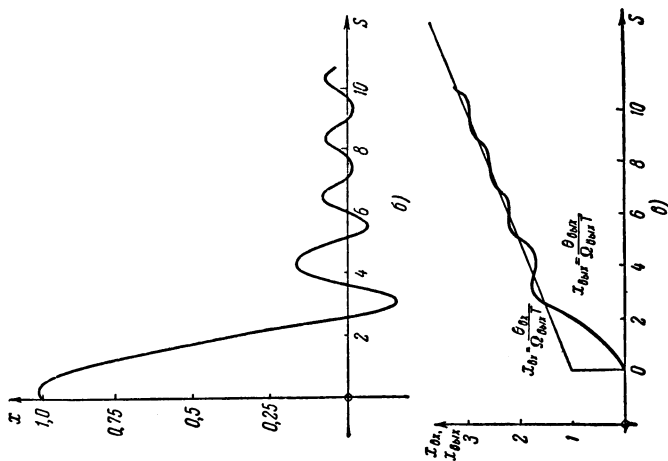


Рис. 164, б и в.

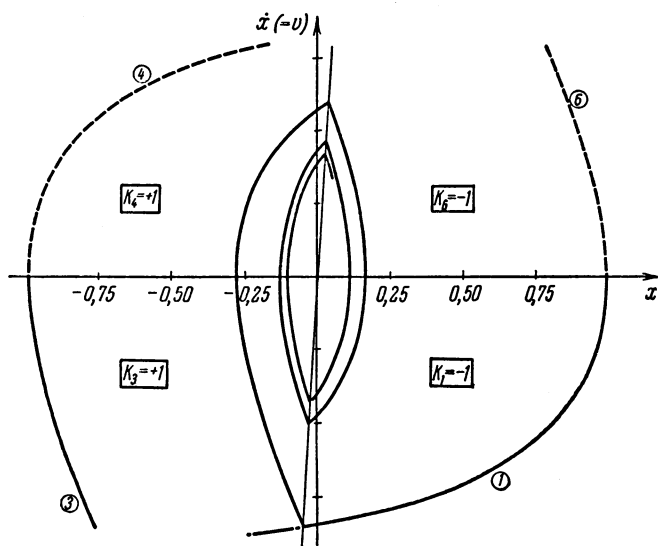


Рис. 165а. Фазовый портрет релейной следящей системы без зоны нечувствительности или сухого трения. Парамет-

$$\text{ры: } \frac{\Omega_{\text{вх}}}{\Omega_{\text{вых}}} = f_c = f_L = \frac{\theta_d}{\Omega_{\text{вых}} T} = 0, \quad s_d = 0,06.$$

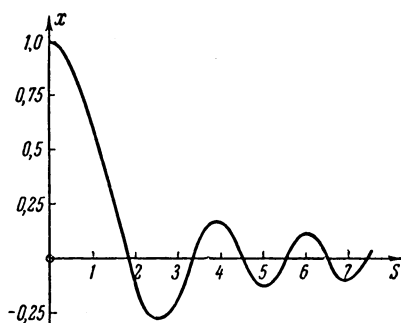


Рис. 165б.

слежении за входным сигналом, изменяющимся с постоянной скоростью, возникает скоростное запаздывание.

Фазовый портрет и соответствующий процесс, вызываемый скачкообразным воздействием, в релейной следящей системе без зоны нечувствительности изображены на рис. 165а и б. Процесс изменения ошибки затухает и стремится к автоколебаниям, соответствующим предельному циклу. В течение переходного процесса период колебаний уменьшается со временем (ср. характеристику следящей системы с насыщением на рис. 137).

12.3. Частотный метод исследования

Как было показано в предыдущих главах, анализ периодических режимов с помощью приближенного метода возможен, когда система содержит один нелинейный элемент, а в линейных элементах отфильтровываются гармоники, возникшие в нелинейном элементе. Следовательно, этим методом может быть исследована устойчивость релейной следящей системы любого порядка. Однако, как будет показано дальше, возможности применения этого метода для исследования реакции на синусоидальное воздействие несколько ограничены.

Из таблицы эквивалентных комплексных коэффициентов усиления, приведенной в предыдущей главе (табл. 3), видно, что релейные характеристики с зоной нечувствительности или без зоны нечувствительности обладают действительным эквивалентным коэффициентом. Годограф $N(A)^{-1}$ расположен вдоль положительной действительной оси. Таким образом, любое пересечение годографа $N(A)^{-1}$ и годографа частотной характеристики линейных элементов должно происходить, когда фазовый сдвиг в разомкнутой системе равен или кратен 360° .

Следовательно, в первом приближении можно считать, что автоколебания в системе возбуждаются на частотах, для которых фазовый сдвиг в линейных элементах равен $2n\pi$ радиан, где n — целое число. Фазовые сдвиги, кратные 360° , должны рассматриваться с учетом временного запаздывания. Передаточная функция элемента с временным запаздыванием имеет вид $\exp(-pt_d)$, и годограф его частотной характеристики определяется выражением

$\exp(-j\omega t_d)$. Такой элемент, включенный последовательно с аperiodическими и интегрирующими звеньями, заставляет годограф частотной характеристики разомкнутой системы поворачиваться по спирали к центру и обуславливает множество пересечений с $N(A)^{-1}$. Что касается этих пересечений, то в 11.3 было указано, что единственно устойчивое состояние — это то, которому соответствует пересечение с самой низкой частотой.

Моменты сухого трения и нагрузки не могут быть просто учтены обычным частотным методом, и там, где они оказывают значительное влияние, должен быть применен метод фазовой плоскости.

12.4. Исследование предельных циклов

12.4.1. Метод фазовой плоскости.

При отсутствии зоны нечувствительности в релейной системе регулирования неизбежны автоколебания и соответствующая им ошибка. Амплитуда этих автоколебаний может быть уменьшена различными способами, некоторые из которых приводят к приемлемому переходному процессу.

Точный метод определения амплитуды и частоты автоколебаний, соответствующих предельному циклу, выраженных через параметры следящей системы, основан на рассмотрении формы колебания. Половина периода такого колебания изображена на рис. 166 с соответствующим изображением предельного цикла на фазовой плоскости.

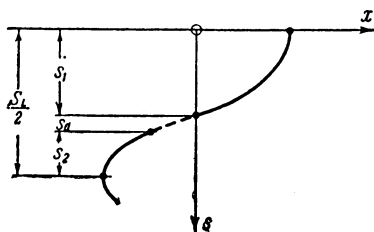
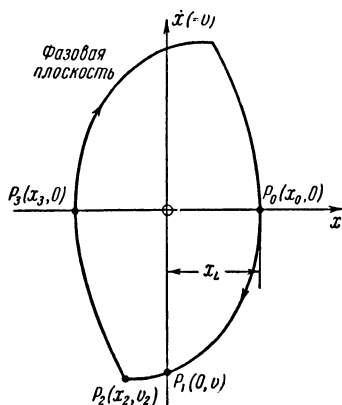


Рис. 166.

На этом рисунке x_L означает безразмерную амплитуду предельного цикла, S_L — безразмерный период, а s_d — безразмерное время запаздывания реле. Уравнения трех частей полуволны, указанных на рис. 166, получаются интегрированием уравнения (4) по s . Рассматривая уравнение (4) как уравнение первого порядка относительно $v = \dot{x}$ и умножая левую и правую части этого уравнения на $\exp(s)$, получаем уравнение

$$\frac{d}{ds} [v \exp(s)] = K \exp(s),$$

которое после интегрирования принимает вид

$$v \exp(s) = K \exp(s) + C,$$

где C — постоянная интегрирования

$$v = K + C \exp(-s),$$

и

$$x = \int v ds = Ks - C \exp(-s) + Q,$$

где Q — другая постоянная интегрирования.

Эти уравнения для x и v применяются поочередно для трех частей полуволны, изображенных на рис. 166, причем в уравнение подставляются значения K и начальные условия, соответствующие рассматриваемой части. Выражение, полученное в результате сопряжения этих уравнений и выполнения условий существования предельного цикла (т. е. $-x_3 = x_0$), определяет период автоколебаний S_L в зависимости от времени запаздывания s_d и значений K .

Для релейной следящей системы, схема которой изображена на рис. 161а, но без зоны нечувствительности, сухого трения или момента нагрузки, значения K меняются от $+1$ до -1 в зависимости от той или иной области фазовой плоскости. Для этого случая было получено следующее соотношение:

$$\left(1 + \exp \frac{S_L}{2}\right) (4s_d + 4 - S_L) = 8 \exp s_d. \quad (8)$$

Из уравнения (8) период S_L может быть найден как функция s_d — единственной переменной, от которой он зависит.

Амплитуда автоколебаний x_L определяется подстановкой периода S_L в исходные уравнения и может быть записана в таком виде:

$$x_L = \frac{S_L}{4} - \ln 0,5 + \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{S_L}{2} \right) \right]. \quad (9)$$

Кривые S_L и x_L , построенные в зависимости от s_d , представлены на рис. 167. Так как параметры — безразмер-

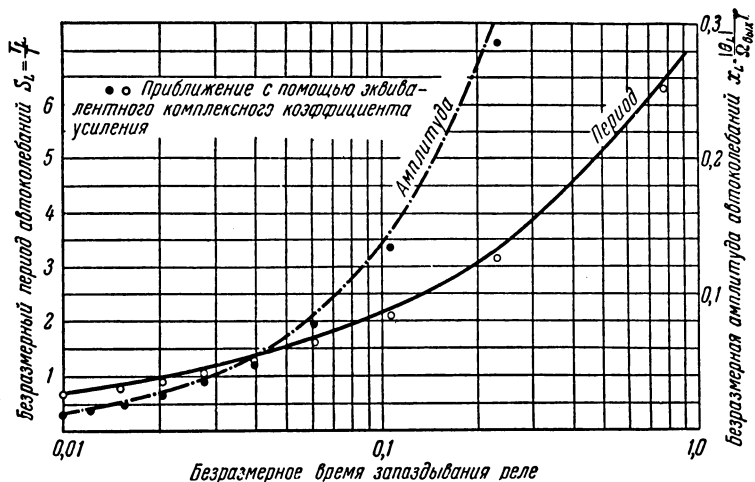


Рис. 167. Кривые для определения амплитуды и периода автоколебаний в релейной системе без зоны нечувствительности или сухого трения.

ные, то эти кривые могут быть использованы для любой реальной релейной следящей системы, которая приводится к такому типу.

12.4.2. Частотный метод.

Из частотного метода следует, что частота автоколебаний ω_L должна быть такой, чтобы фазовый сдвиг в разомкнутой системе был равен 360° , а это получается, когда мнимая часть частотной характеристики разомкнутой системы равна нулю (см. 12.3). При отсутствии сухого трения, момента нагрузки и зоны нечувствительности операторная форма уравнения, связывающего вращающий момент двигателя и угол поворота выходного

вала, на основании уравнения (1) имеет вид

$$N\bar{T}_m = Jp^2\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}} + Fvp\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}},$$

так что

$$\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}} = \frac{N\bar{T}_m}{Jp^2 + Fvp} = \frac{\Omega_{\text{В·Х}}}{p(1+pT)},$$

где $\Omega_{\text{ВЫХ}}$ и T имеют значения, определенные в 12.2.1.

Структурная схема системы, возбуждаемой синусоидальным сигналом, изображена на рис. 168; реле представлено элементом с эквивалентным коэффициентом

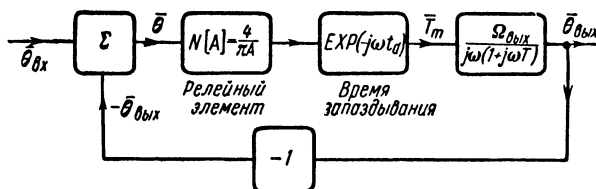


Рис. 168.

усиления и последовательно включенным элементом временного запаздывания. Сигнал на выходе реле принимает значения $+1$ или -1 . Следовательно, условие существования предельного цикла удовлетворяется, когда

$$\bar{y}_1(j\omega) = \frac{\Omega_{\text{ВЫХ}} \exp(-j\omega_L t_d)}{j\omega_L(1+j\omega_L T)}$$

представляет собой действительную величину. После преобразования этого уравнения можно заметить, что условие существования предельного цикла принимает вид:

$$\exp(-j\omega_L t_d) [j\omega_L + \omega_L^2 T] = \text{действительной величине.}$$

Раскрывая экспоненциальный член, условие существования предельного цикла запишем так:

$$\cos \omega_L t_d - j \sin \omega_L t_d (j\omega_L + \omega_L^2 T) = \text{действительной величине.}$$

Приравняв мнимую часть нулю, получаем следующее условие:

$$\omega_L T \operatorname{tg} \omega_L t_d = 1. \quad (10)$$

Для данной величины $\frac{t_d}{T}$ безразмерный период $\frac{T_L}{T} \left(= \frac{2\pi}{\omega_L T} \right)$ имеет много значений. Эти значения соответствуют возможным автоколебаниям, и только самый большой период устойчив (см. 11.3).

Из частотного метода следует, что усиление разомкнутой системы на частоте автоколебаний равно единице, так как колебания в контуре незатухающие. Таким образом, чтобы определить амплитуду автоколебаний на входе релейного элемента, необходимо решить уравнение, полученное приравниванием частотной характеристики разомкнутого контура единице на частоте ω_L , т. е.

$$\frac{4}{\pi A_L} \left\{ \frac{\Omega_{в.х} \exp(-j\omega_L t_d)}{j\omega_L - \omega_L^2 T} \right\} = 1, \quad (11)$$

где A_L — амплитуда автоколебаний, соответствующих основной составляющей сигнала ошибки. На частоте автоколебаний мнимая часть выражения частотной характеристики разомкнутой системы равна нулю. Преобразуя левую часть уравнения (11) и приравнявая мнимую часть нулю, мы получаем выражение

$$\frac{4\Omega_{в.х}}{\pi A_L \omega_L} \left\{ \frac{\omega_L T \cos \omega_L t_d + \sin \omega_L t_d}{1 + \omega_L^2 T^2} \right\} = 1,$$

откуда

$$x_L \approx \frac{A_L}{\Omega_{в.х} T} = \frac{2}{\pi^2} \frac{T_L}{T} \left\{ \frac{\omega_L T \cos \omega_L t_d + \sin \omega_L t_d}{1 + \omega_L^2 T^2} \right\}, \quad (12)$$

где x_L — безразмерная величина рассогласования — амплитуда автоколебаний, а T_L — период автоколебаний $\left(S_L = \frac{T_L}{T} \right)$.

Значения S_L и x_L , полученные из уравнений (10) и (12), нанесены в виде точек на рис. 167, где они могут быть сравнены с кривыми, определенными точным образом. Различие вызвано пренебрежением высшими гармониками автоколебаний в замкнутой системе.

12.5. Методы уменьшения амплитуды или подавления автоколебаний

12.5.1. Подавление автоколебаний зоной нечувствительности.

Во многих случаях автоколебания выходного вала оказываются недопустимыми. Это вызывает постоянную работу релейных контактов и износ подшипников и шестерен, а также потребление излишней мощности. Простейшим способом устранения автоколебаний является введение в характеристику реле зоны нечувствительности,

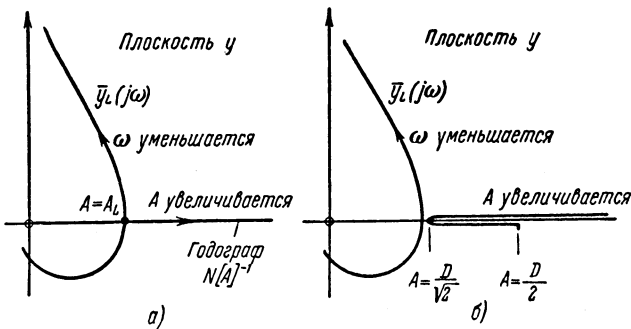


Рис. 169.

так чтобы ошибка после возмущения всегда возвращалась в зону нечувствительности.

Выбрать зону нечувствительности можно, рассмотрев эквивалентный коэффициент усиления релейного элемента с зоной нечувствительности и без зоны нечувствительности. Они приведены в табл. 3. Влияние, которое зона нечувствительности оказывает на эквивалентный коэффициент усиления, заключается в том, что у величины $N(A)^{-1}$, которая при отсутствии зоны нечувствительности стремится к бесконечности при стремлении амплитуды A к нулю, появляется верхний предел. На рис. 169, а и б изображен годограф частотной характеристики линейных элементов следящей системы вместе с годографами $N(A)^{-1}$ для двух типов релейных элементов. Для идеального релейного элемента годографы пересекаются при амплитуде, равной A_L , указывая на существование автоколеба-

ний с такой амплитудой на входе релейного элемента. Годограф релейного элемента с зоной нечувствительности на некотором участке двузначен, и если эта двузначность начинается при амплитуде, равной или большей A_L , то никакого пересечения между $y_L(j\omega)$ и $N(A)^{-1}$ не происходит, т. е. автоколебания*) подавляются. Для измерения необходимой величины зоны нечувствительности мы должны определить значение A , соответствующее пику $N(A)$ для характеристики релейного элемента с зоной нечувствительности. На основании табл. 3, если ширина зоны нечувствительности равна D , то

$$N(A) = \frac{4}{\pi A} \left[1 - \left(\frac{D}{2A} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dN(A)}{dA} = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{2A} \left[1 - \left(\frac{D}{2A} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{D^2}{2A^3} - \left[1 - \left(\frac{D}{2A} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{A^2} \right\}.$$

Для минимального значения $N(A)$ это выражение приравняется нулю, и получается:

$$\frac{D^2}{4A^2} = \frac{1}{A^2} \left[1 - \left(\frac{D}{2A} \right)^2 \right],$$

откуда

$$\frac{D}{A} = \sqrt{2},$$

так что $N(A)_{\max} = \frac{4}{\pi D}$.

Значение $N(A)$ для идеального релейного элемента, где A_L есть амплитуда автоколебаний, приравнивается значению $N(A)_{\max}$, полученному выше. Это определяет минимальную ширину зоны нечувствительности, необходимой для подавления автоколебаний

$$D = A_L. \quad (13)$$

*) Исследуемого вида. (Прим. ред.)

Эту величину нужно выбирать с запасом. Сделанный вывод не зависит от формы годографа линейных элементов, и, следовательно, он применим для широкого класса систем.

Если релейным элементом является поляризованное реле, то зона нечувствительности может быть введена так, как это показано на рис. 161а. Ширина зоны зависит от порога срабатывания и может быть изменена с помощью изменения воздушного магнитного зазора. Поляризованное реле может быть заменено двумя неполяризованными реле, на обмотки которых через выпрямители поступает сигнал ошибки, так что одно срабатывает при положительном знаке ошибки, а другое — при отрицательном. При таком устройстве ширина зоны нечувствительности может регулироваться электрическим смещением, подаваемым на выпрямители. Хотя соответствующая зона нечувствительности подавляет автоколебания, она либо мало влияет, либо совсем не влияет на амплитуду первого выброса ошибки при скачкообразном входном воздействии.

12.5.2. Стабилизация отрицательным гистерезисом.

Если реле следящей системы обладают гистерезисом, то эквивалентный коэффициент усиления — комплексный; это видно из табл. 3. Запаздывание по фазе, вносимое

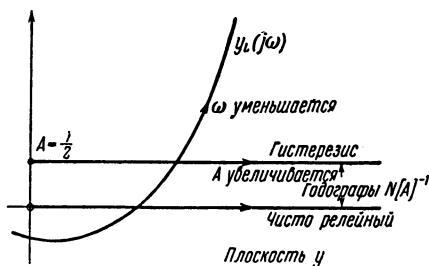


Рис. 170.

в систему гистерезисом, вызывает появление автоколебания с иной амплитудой и относительно более низкой частотой, чем при идеальном релейном элементе. На рис. 170 изображены годографы $N(A)^{-1}$ релейного элемента с гисте-

резисом и идеального релейного элемента. Из сравнения частот, соответствующих пересечениям каждого годографа с годографом типичного линейного элемента, на рис. 170 видно, что влияние гистерезиса заключается в уменьшении частоты автоколебаний. Влияние гистерезиса проявляется либо в увеличении, либо в уменьшении амплитуды автоколебаний, в зависимости от формы годографа линейного элемента в окрестности точек пересечения с годографом $N(A)^{-1}$. Существует метод увели-

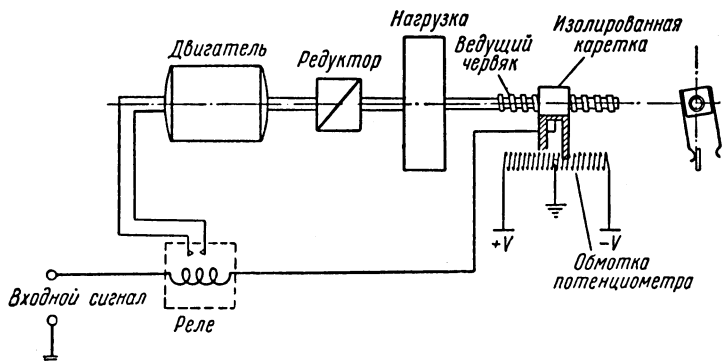


Рис. 171а. Релейная следящая система с отрицательным гистерезисом.

чения частоты автоколебаний, использующий явления гистерезиса и известный под названием стабилизации при помощи отрицательного гистерезиса. Этот метод был рассмотрен Вейсом [5] и Холлом [3]. В работе последнего описана гироскопическая следящая система, в которой двигатель подключен к потенциометру обратной связи с помощью устройства, обладающего характеристикой с отрицательным гистерезисом. Это устройство изображено на рис. 171а. Ведущий червяк вращается двигателем и перемещает изолированную каретку, к которой прикреплены два движка, электрически соединенных между собой. В зависимости от направления вращения ведущего червяка один из движков имеет контакт с обмоткой линейного потенциометра. Трение между червяком и кареткой обеспечивает реверсирование. Зависимость

между вращающим моментом двигателя и рассогласованием изображена на рис. 1716 (ср. табл. 3, № 8). Нужно заметить, что отрицательный гистерезис в потенциометре заставляет вращающий момент двигателя реверсироваться, прежде чем рассогласование достигнет нуля. Такая характеристика создает опережение по фазе в контуре и в этом смысле является обратной гистерезису.

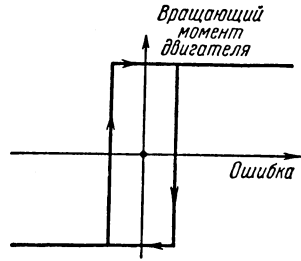


Рис. 1716. Характеристика элемента с отрицательным гистерезисом.

Фазовые портреты, отражающие влияние положительного и отрицательного гистерезиса, представлены на рис. 172, а и б. На рис. 172, а ширина безразмерной зоны гистерезиса

равна $\frac{\theta_h}{\Omega_{\text{ВЫХ}} T}$ и фазовые траектории, входящие в зону, проходят через нее до линии переключения $x = -\frac{\theta_h}{2\Omega_{\text{ВЫХ}} T}$.

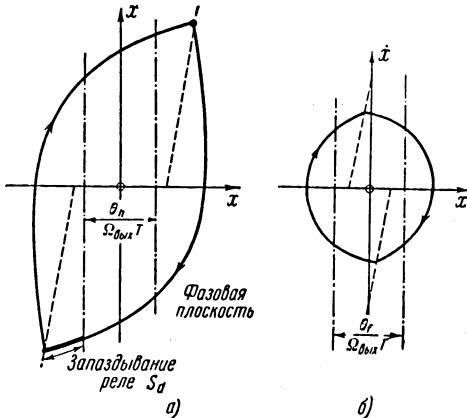


Рис. 172.

После того как проходит время запаздывания реле, двигатель реверсируется и движение продолжается до следующего переключения, которое происходит на

линии $x = + \frac{\theta_h}{2\Omega_{\text{вых}} T}$. В конце концов фазовая траектория замыкается и образуется предельный цикл. Представим себе, что движки в стабилизированной с помощью отрицательного гистерезиса следящей системе (рис. 171а) вначале смещены до предела в левую сторону обмотки потенциометра. При этом начальная ошибка положительна. Вначале имеет контакт правый движок и ток в обмотке реле реверсируется прежде, чем достигается нулевое рассогласование. Следовательно, линией переключения является $x = + \frac{\theta_f}{2\Omega_{\text{вых}} T}$, когда ошибка — положительная и уменьшающаяся. Реверсирование двигателя задерживается на время запаздывания реле, после чего движение продолжается до тех пор, пока фазовая траектория не замыкается и, следовательно, пока не образуется предельный цикл.

Сравнение фазовых портретов показывает, что при наличии положительного гистерезиса он добавляет дестабилизирующее влияние к времени запаздывания реле, в то время как отрицательный гистерезис оказывает влияние, обратное влиянию запаздывания. Вообще говоря, любой способ, с помощью которого граница вращающего момента может быть сдвинута в направлении против часовой стрелки, уменьшает амплитуду автоколебаний.

12.5.3. Стабилизация скоростной обратной связью.

Весьма эффективный метод уменьшения времени переходного процесса и амплитуды автоколебаний релейной следящей системы заключается в том, чтобы сделать переключение реле зависящим не только от величины рассогласования, но также и от скорости изменения рассогласования. Этого можно достичь с помощью дополнительной обратной связи внутри основной цепи регулирования, если сигналы стабилизирующей обратной связи могут быть сложены алгебраически с сигналом рассогласования в чувствительном элементе. Если на поляризованное реле подается сигнал ошибки, то алгебраическое сложение удобно осуществляется с помощью добавочных обмоток у реле.

Сигнал, пропорциональный скорости вращения выходного вала, получается от двигателя и подводится с пра-

вильным знаком к дополнительной обмотке реле; правильным знаком будет такой, при котором магнитодвижущая сила за счет сигналов обратной связи противодействует магнитодвижущей силе за счет рассогласования.

Предполагая, что обмотки реле, на которые подаются сигналы ошибки и обратной связи, имеют равные сопротивления, мы получаем условия для нулевого магнитного потока в обмотке реле (пренебрегая магнитным гистерезисом) в следующей форме:

$$K_R (\theta_{\text{вх}} - \theta_{\text{вых}}) - K_F \dot{\theta}_{\text{вых}} = 0$$

или

$$K_R (\theta_{\text{вх}} - \theta_{\text{вых}}) - K_F (\Omega_{\text{вх}} - \dot{\theta}) = 0, \quad (14)$$

где K_F — напряжение стабилизирующей обратной связи в вольтах на *рад/сек* на выходном валу, K_R — напряжение рассогласования в вольтах на радиан на выходном валу, $\Omega_{\text{вх}}$ — скорость изменения входного сигнала.

Уравнение (14) может быть записано в безразмерной форме:

$$x + S_F v - S_F \frac{\Omega_{\text{вх}}}{\Omega_{\text{вых}}} = 0, \quad (15)$$

где $S_F = \frac{K_F}{TK_R}$ — безразмерная постоянная обратной связи, $\Omega_{\text{вых}} = \frac{N |T_m|}{F_v}$ определена в 12.2.1.

Уравнение (15) соответствует на безразмерной фазовой плоскости линии переключения. Реверсирование двигателя запаздывает по отношению к этой линии на время запаздывания реле.

Напряжение обратной связи может быть получено либо от тахогенератора, расположенного на выходном валу, как показано на рис. 161а, либо с самого якоря двигателя.

Мостовая схема, изображенная на рис. 173, обеспечивает отделение составляющей противо-эдс двигателя от падения напряжения, вызванного током нагрузки в якоре. Когда двигатель находится в покое, мост балансируется с помощью регулировочных сопротивлений так, чтобы выходное напряжение между точками *a* и *b* было

равно нулю. На основании теории мостовых схем Уитстона можно видеть, что величины сопротивлений должны удовлетворить равенству $\frac{r_m}{r_1} = \frac{r_3}{r_2}$. Когда двигатель вращается, его противо-эдс E вызывает разбаланс моста и меняет потенциал точки a , который становится по отношению к отрицательному потенциалу равным

$$\frac{V-E}{r_m+r_3} r_3.$$

Потенциал точки b не меняется, так что разность потенциалов между точками a и b равна

$$V_{ab} = \frac{r_3(V-E)}{r_m+r_3} - \frac{Vr_2}{r_1+r_2} = -\frac{E}{1+\frac{r_1}{r_2}}. \quad (16)$$

Влияние отрицательной скоростной обратной связи иллюстрируется фазовым портретом на рис. 174а, а соответствующий переходный процесс представлен на рис. 174б.

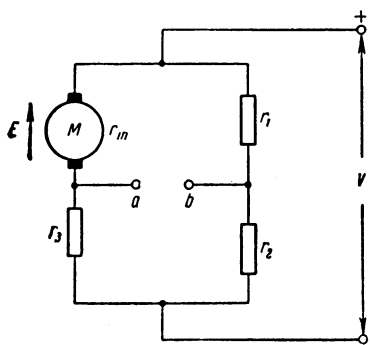


Рис. 173. Мостовая схема для получения напряжения, пропорционального скорости вращения двигателя.

Линия переключения изображена для условий нулевой скорости на входе ($\Omega_{вх} = 0$) на основании уравнения (15); линия переключения благодаря обратной связи поворачивается против часовой стрелки, поэтому амплитуда автоколебаний уменьшается по сравнению с амплитудой автоколебаний в той же следящей системе без обратной связи (ср. рис. 165). Пре-

дельный цикл в увеличенном масштабе изображен на рис. 174в.

12.5.3.1. Амплитуда и частота автоколебаний. В следящей системе, стабилизированной скоростной обратной связью, автоколебания либо полностью подавляются зоной нечувствительности, либо

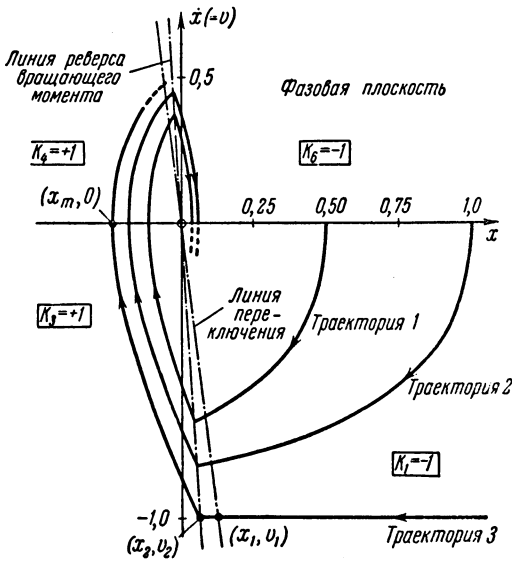


Рис. 174а. Фазовый портрет релейной системы со скоростной обратной связью. Параметры: $\frac{\Omega_{\text{вх}}}{\Omega_{\text{вых}}} = f_c = f_L = \frac{\theta_d}{\Omega_{\text{вых}} T} = 0$; $s_d = 0,06$; $S_F = 0,125$.

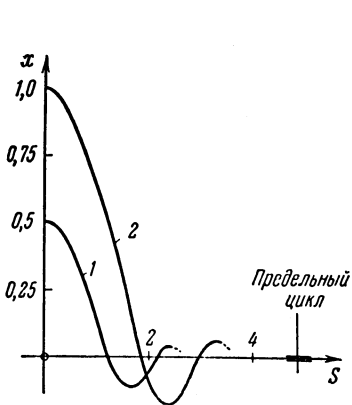


Рис. 174б.

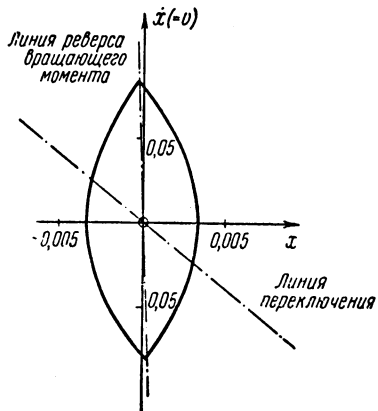


Рис. 174в.

их амплитуда бывает очень малой. Известен простой приближенный метод для определения амплитуды и частоты автоколебаний. На рис. 175 изображен идеализированный предельный цикл. Для малых амплитуд (т. е. $x \ll 1$)

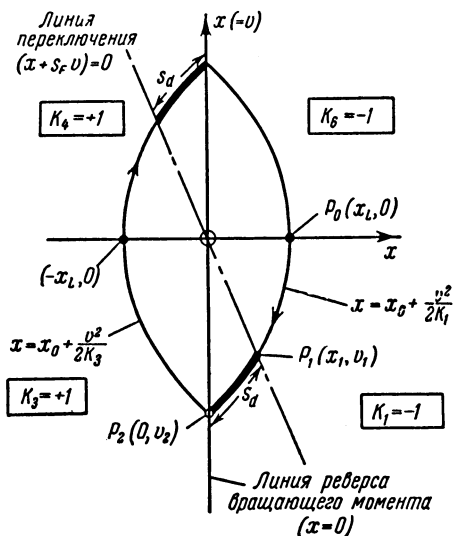


Рис. 175.

и малых максимальных скоростей уравнение фазовой траектории можно упростить, если разложить логарифм в уравнении (6) в ряд и пренебречь степенями выше второй.

Если $v_0 = 0$, то

$$x = x_L - K \left[-\frac{v}{K} - \frac{v^2}{2K^2} - \frac{v^3}{3K^3} - \dots \right] - v,$$

откуда

$$x \approx x_L + \frac{v^2}{2K}. \quad (17)$$

Если пренебречь сухим трением и моментом нагрузки, то абсолютная величина K равна единице, но его знак меняется при переходе через линию переключения.

Отсюда следует, что предельный цикл симметричен относительно оси v . Так как амплитуды максимальных положительных и отрицательных ошибок равны, изменение направления вращающего момента происходит на оси v и предельный цикл имеет такую форму, что время, за которое изображающая точка проходит фазовую траекторию от линии переключения до оси v , равно безразмерному времени запаздывания s_d .

Рассмотрим точки P_0 , P_1 и P_2 на фазовой траектории предельного цикла в области, в которой $K = -1$. Координаты точки $P_0 = (x_L, 0)$. В точке P_1 фазовая траектория пересекает линию переключения. На основании уравнений (15) и (17), приравнявая $\Omega_{вх} = 0$, получаем:

$$x_1 = x_L - \frac{v_1^2}{2} = -S_F v_1,$$

откуда

$$v_1 = S_F \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2x_L}{S_F^2}} \right]$$

и

$$x_1 = -S_F v_1.$$

В точке P_2 фазовая траектория пересекает ось v , так что $x_2 = 0$ и на основании уравнения (17)

$$x_L - \frac{v_2^2}{2} = 0,$$

откуда

$$v_2 = -\sqrt{2x_L} \quad (+\sqrt{2x_L} - \text{недопустимо})$$

и

$$x_2 = 0.$$

Время, за которое изображающая точка проходит расстояние между точками P_1 и P_2 , представляет собой время запаздывания реле s_d , так что согласно уравнению (7)

$$K s_d = (v_2 + x_2) - (v_1 + x_1).$$

Подставляя значения для v , x и K , получаем:

$$s_d = \sqrt{2x_L} + \left[(1 - S_F) S_F \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2x_L}{S_F^2}} \right) \right]. \quad (18)$$

Из этого уравнения следует, что амплитуда автоколебаний x_L зависит только от s_d и S_F . Эта зависимость

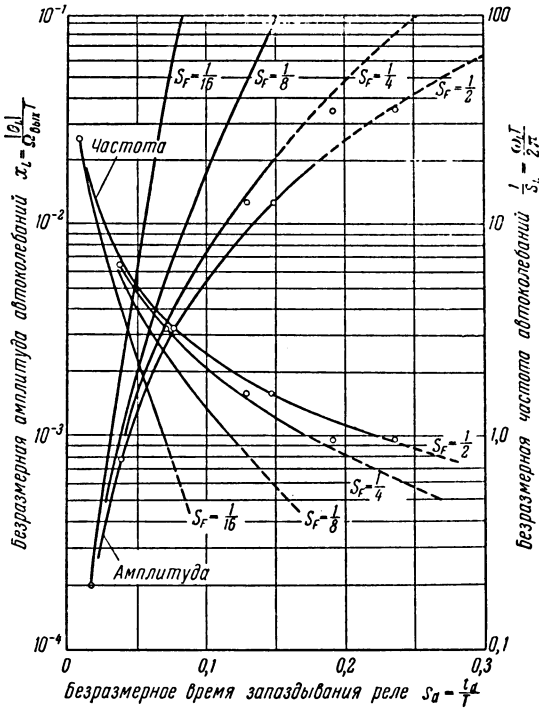


Рис. 176. Кривые для определения амплитуды и частоты автоколебаний в релейной системе без зоны нечувствительности или сухого трения, стабилизированной с помощью скоростной обратной связи.

изображена на рис. 176 для четырех значений параметра обратной связи S_F .

Период автоколебаний получается суммированием отрезков времени по всему предельному циклу (рис. 175) согласно уравнению (7).

Так, между точками P_0 и P_2

$$s_{02} = K_1^{-1} (v_2 - x_L) = (\sqrt{2x_L} + x_L).$$

аналогично

$$s_{23} = K_3^{-1} (-x_L - v_2) = (-x_L + \sqrt{2x_L})$$

и

$$s_{34} = K_4^{-1} (v_4 + x_L) = (\sqrt{2x_L} + x_L)$$

и

$$s_{40} = K_6^{-1} (x_L - v_4) = (-x_L + \sqrt{2x_L}).$$

Период автоколебаний S_L определяется выражением

$$S_L = s_{02} + s_{23} + s_{34} + s_{40},$$

откуда

$$S_L = 2(\sqrt{2x_L} + x_L) + 2(-x_L + \sqrt{2x_L}), \quad S_L = 4\sqrt{2x_L}.$$

На рис. 176 приведена зависимость безразмерной частоты автоколебаний $\frac{1}{S_L}$, построенная на основании этих выражений.

Амплитуды и частоты автоколебаний, определенные с помощью частотного метода, нанесены в виде точек на рис. 176 для сравнения с результатами метода фазовой плоскости. При прочих равных параметрах наличие скоростной обратной связи вызывает увеличение амплитуд гармонических составляющих. По этой причине частотные методы при наличии скоростной обратной связи менее точны, чем в следящих системах без скоростной обратной связи.

12.5.3.2. Пере р е г у л и р о в а н и е. В любой нелинейной системе величина перерегулирования процесса, вызванного скачкообразным воздействием, является функцией величины этого воздействия. В релейной системе величина перерегулирования при увеличении величины входного скачка достигает некоторого предельного значения. Ограничение перерегулирования происходит, когда выходной вал достигает своей предельной скорости, при разгоне в направлении уменьшения ошибки; это положение иллюстрируется фазовой траекторией 3 на рис. 174а. Фазовая траектория пересекает линию переключения, когда ошибка равна x_1 , а скорость ее изменения равна K_1 в соответствии с областью фазовой плоскости, в которой происходит ускорение. Реверсирование

двигателя происходит при x_2 с запаздыванием s_d , и после этого начинается торможение до тех пор, пока скорость изменения не становится равной нулю, при этом перерегулирование достигает наибольшей величины x_m . На основании уравнения (7)

$$s_d = \frac{1}{K_1} [(x_2 + v_2) - (x_1 + v_1)],$$

где

$$v_1 = K_1$$

и

$$x_1 = -S_F v_1 = -S_F K_1,$$

а также

$$v_2 = K_1,$$

откуда

$$s_d = \frac{1}{K_1} [K_1 + x_2 - K_1 + S_F K_1],$$

$$x_2 = K_1 (s_d - S_F).$$

Для фазовой траектории в области, где $K = K_3$, на основании уравнения (6), x_m и v_m определяются выражением

$$x_m = x_2 - K_3 \ln \left[\frac{K_3 - v_m}{K_3 - v_2} \right] - v_m + v_2.$$

Так как $v_m = 0$, а выражение для x_2 задано выше, то

$$x_m = K_1 (s_d - S_F) - K_3 \ln \left[\frac{K_3}{K_3 - K_1} \right] + K_1.$$

Если

$$\begin{cases} K_1 = -1, \\ K_3 = +1, \end{cases}$$

т. е. сухое трение и момент нагрузки отсутствует, то

$$x_m = (S_F - s_d) - \ln 0,5 - 1$$

или

$$x_m = S_F - s_d - 0,307. \quad (19)$$

График зависимости x_m от S_F и s_d представлен на рис. 177. Если S_F превышает $(s_d + 0,307)$, то x_m положительно и фазовая траектория пересекает линию переключения опять с отрицательной скоростью изменения ошибки. Фазовая траектория тогда приближается к нулю

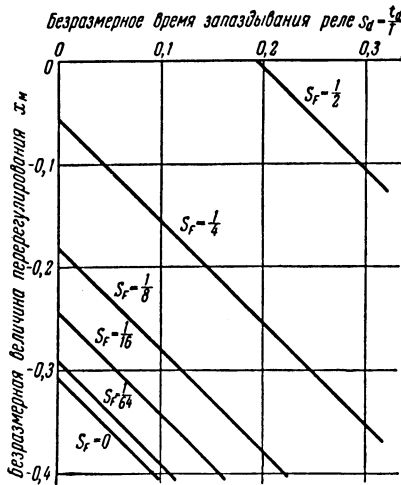


Рис. 177. Перерегулирование процесса, вызванного скачкообразным воздействием, в релейной системе, стабилизированной с помощью скорости обратной связи.

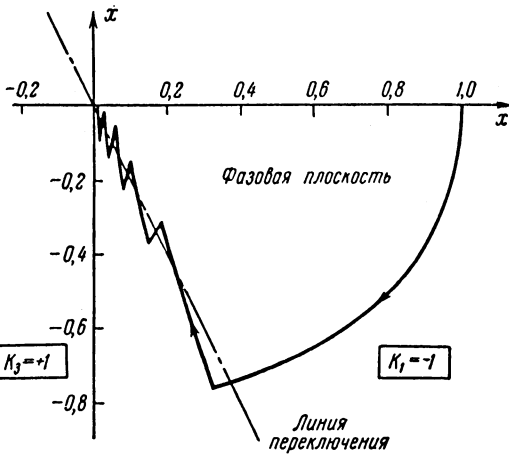


Рис. 178. Фазовый портрет релейной следящей системы со слишком большой скоростью обратной связи. Параметры: $s_d = 0,05$; $S_F = 0,5$.

с колебаниями вокруг линии переключения, как показано на рис. 178. Такое поведение аналогично процессу в передемпфированной линейной следящей системе.

12.5.4. Стабилизация форсирующей цепью.

Если к следящей системе со скоростной обратной связью приложен входной сигнал, изменяющийся с постоянной скоростью, то в ней при достижении установившегося состояния будет установившаяся ошибка.

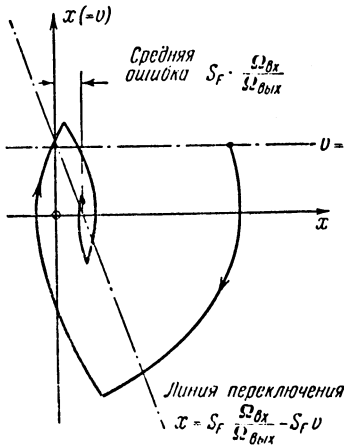


Рис. 179.

Фазовый портрет такой системы представлен на рис. 179. Линия переключения определяется уравнением (15), и автоколебания происходят вокруг средней ошибки

$$S_F \frac{\Omega_{ВХ}}{\Omega_{ВЫХ}}.$$

Это скоростное запаздывание может быть устранено удалением скоростной обратной связи и включением перед реле цепи, формирующей ошибку и производную от

ошибки. Передаточная функция этой цепи в идеальном случае должна быть $(1 + pT_F)$. Так как такая передаточная функция не может быть физически реализована, то в качестве приближения применяется форсирующая цепь, рассмотренная в главах 4 и 8. Возможная схема приведена на рис. 180, а. Серьезным недостатком этой схемы является большое ослабление по постоянному току в форсирующей цепи, так что при отсутствии усилителя чувствительность реле по отношению к сигналу ошибки сильно уменьшается. В другой схеме, изображенной на рис. 180, б, используются две обмотки реле и предполагается, что сопротивление источника напряжения ошибки мало. В одну обмотку подается ток, пропорциональный ошибке, а в другую — ток, пропорциональный производной от ошибки.

Если сопротивление обмотки R_1 значительно меньше, чем сопротивление R , то условие переключения реле

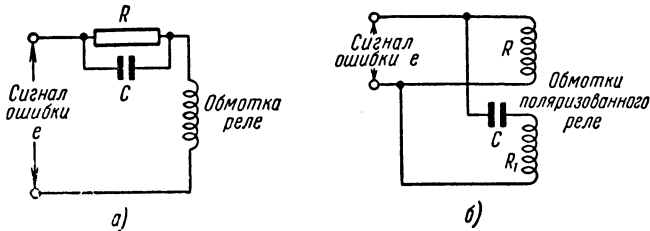


Рис. 180.

в описанных схемах в грубом приближении записывается следующим образом:

$$e + CR\dot{e} = 0$$

или

$$x = -S'_F v,$$

где

$$x = \frac{e}{K_R \Omega_0 T}; \quad v = \frac{\dot{e}}{K_R T}; \quad S'_F = \frac{CR}{T}.$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение линии переключения, проходящей через точку, в которой ошибка равна нулю. Так как она не зависит от входной скорости, то скоростное запаздывание теперь отсутствует. Процессы при скачкообразных входных воздействиях идентичны по форме с процессами в следящей системе, стабилизированной скоростной обратной связью, для которой $S'_F = S'_F$.

12.6. Оптимизация переходного процесса

Из всех следящих систем наиболее экономичным образом вращающий момент двигателя используется в релейных системах, так как двигатель развивает максимальный момент для ликвидации даже самых малых ошибок, в то время как в линейных системах максимальный вращающий момент имеет место лишь тогда, когда ошибка

настолько велика, что происходит насыщение усилителя. Тем не менее, полностью преимущества релейного регу-

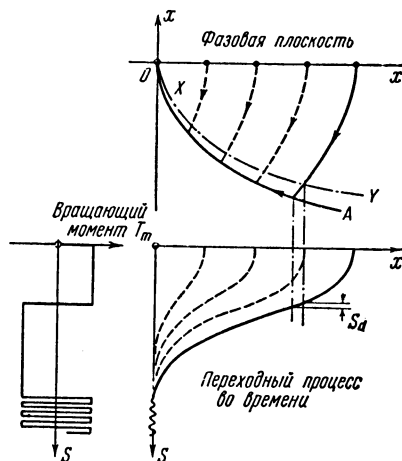


Рис. 181. Оптимальные переходные процессы.

лирования могут быть использованы только при условии применения специальных методов стабилизации. Рассмотрим фазовую плоскость (рис. 181). Линия OA представляет собой фазовую траекторию, соответствующую торможению двигателя. Ее особенность состоит в том, что она проходит через начало координат. Предположим, что каким-либо способом линия OA сделана линией переключения двигателя, тогда изображающая точка, движущаяся по фазовой траектории, соответствующей разгону двигателя, достигнув линии OA , начнет двигаться по этой линии и одновременно достигнет нулевой ошибки и нулевой скорости изменения ошибки. Так как двигатель реверсируется после изменения направления магнитного потока реле, то существует линия переключения, опережающая фазовую траекторию OA на время запаздывания реле. Процесс в следящей системе при скачкообразном воздействии изображен на рис. 181. Он характерен тем, что в нем нет перерегулирования независимо от величины входного скачка (сравни с рис. 174 для линейной линии переключения). Кроме того, этот переходный процесс таков, что любая начальная ошибка ликвидируется в минимально возможное время. Это будет доказано при рассмотрении процессов, отличающихся от оптимальных. На рис. 182 оптимальному переходному процессу соответствует фазовая траектория abO ; реверсирование двигателя происходит один раз в точке b . Если реверсирование двигателя происходит слишком рано, скажем в точке c , то дальнейшее движение к началу координат может про-

использованы только при условии применения специальных методов стабилизации. Рассмотрим фазовую плоскость (рис. 181). Линия OA представляет собой фазовую траекторию, соответствующую торможению двигателя. Ее особенность состоит в том, что она проходит через начало координат. Предположим, что каким-либо способом линия OA сделана линией переключения двигателя, тогда изображающая точка, движущаяся по фазовой траектории, соответствующей разгону

исходить по ломаной кривой $cdeO$; тогда в течение переходного процесса двигатель реверсируется дважды. Если переключение происходит слишком поздно, то изображающая точка может пойти по ломаной кривой $bfgO$. Докажем, что из всех возможных путей от a до O в наикратчайшее время проходит тот, при котором имеет место только одно реверсирование двигателя.

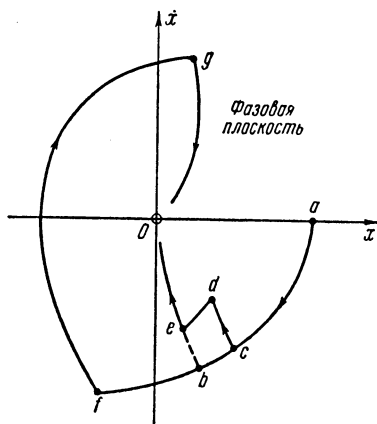


Рис. 182.

Безразмерное выражение для времени, за которое изображающая точка проходит расстояние между двумя точками на фазовой траектории, получается интегрированием уравнения (4) по s . Таким образом,

$$(x_2 + v_2) - (x_1 + v_1) = \int_{s_1}^{s_2} K ds.$$

K обычно постоянная (ср. уравнение (7)), но если K претерпевает изменения, то приближенно

$$\bar{K}(s_2 - s_1) = (x_2 + v_2) - (x_1 + v_1), \quad (20)$$

где \bar{K} — среднее значение K за интервал времени. При каждом реверсировании двигателя K меняет знак, так что на оптимальной фазовой траектории отрезок bO лежит в области, где K есть величина постоянная. На ломаной кривой $bfgO$, начальные и конечные условия которой те же, что и у оптимальной фазовой траектории, K меняет знак, будучи отрицательным на отрезке bf , положительным на fg и отрицательным на gO . Среднее значение K на данной кривой должно быть меньше при изменении знаков, и следовательно, согласно уравнению (20), время, затраченное на то, чтобы пройти путь от b до O , в случае движения без реверсирования двигателя короче.

Другое выражение для времени, за которое изображающая точка пройдет путь между двумя точками на фазовой траектории, на основании уравнения (8) главы 9 имеет вид

$$(s_2 - s_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v}.$$

Рассмотрим ломаную кривую $acdeO$ на рис. 182; значения v на этой фазовой траектории или равны или меньше значений v на оптимальной фазовой траектории abO . Следовательно, интеграл от a до O в уравнении, записанном выше, на оптимальной фазовой траектории меньше, т. е. время, затраченное на прохождение этого пути, меньше. Колс (Coales) и Нотон (Noton) [8] распространили эти рассуждения на следящую систему, имеющую дополнительное аperiodическое замедляющее нарастание вращающего момента двигателя, и показали справедливость этого рассуждения для любого числа аperiodических звеньев.

Мы рассмотрели случай, в котором регулируемой величиной является вращающий момент двигателя, так как этот случай является наиболее обычным; если нагрузка — в основном инерционная, то регулирование вращающего момента приводит к ограничению ускорения. Рассмотрим следящую систему, в которой ограничена скорость изменения ускорения, т. е. в которой реле регулирует скорость изменения вращающего момента. В такой следящей системе запаздывание по ускорению мало, так как для того, чтобы поддерживать выходной вал в состоянии постоянного ускорения, в принципе не требуется никакой средней ошибки, если мы имеем следящую систему с астатизмом третьего порядка. Приближение к идеальной следящей системе с нулевым запаздыванием по ускорению возможно, если силовое реле (рис. 161а) будет управлять активным интегратором, который в свою очередь изменяет вращающий момент двигателя. В любой реальной системе производные тех или иных величин, за исключением, быть может, регулируемой, ограничены благодаря, например, вязкому трению в следящей системе с нулевым скоростным запаздыванием или инерции в случае системы с нулевым запаздыванием по ускорению.

А. Я. Лернер [9] показал, что если в идеальной следящей системе i -я производная выходной величины ограничена, то длительность оптимального переходного процесса должна быть поделена на $2^{(i-1)}$ равных интервалов и знак ограниченной производной должен меняться в конце каждого нечетного интервала, а также в точке половины интервала для четных значений i . На рис. 183 изображена

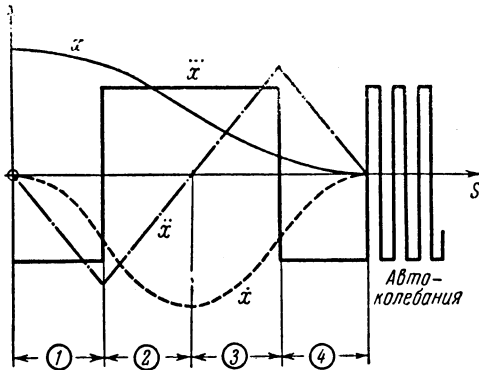


Рис. 183.

форма колебаний идеального оптимального переходного процесса для следящей системы с ограниченной скоростью изменения ускорения; переходный процесс поделен на четыре интервала*).

В реальном случае, когда ограничено несколько производных, производная самого высокого порядка всегда поддерживается на предельном уровне. Таким образом, для следящей системы (рис. 171а) \ddot{x} лимитируется инерцией, а \dot{x} — вязким трением и, чтобы переходный процесс был оптимальным, \ddot{x} поддерживается на своем предельном значении и время переходного процесса делится на два

*) Это утверждение верно для $i=1$ и 2. Для $i>2$ такой процесс хотя и близок к оптимальному, но не является оптимальным в строгом смысле этого слова. Для ограниченной i -ой производной число интервалов, вообще говоря неравных, равно i . (Прим. ред.)

интервала; при этом процесс имеет форму, изображенную на рис. 181*).

12.6.1. Осуществление оптимального переходного процесса.

В 12.5.3 было показано, что отрицательная скоростная обратная связь или стабилизация производной от ошибки приближают момент переключения, т. е. поворачивают линию переключения в направлении против часовой стрелки. Это дает возможность предположить, что кривая переключения двигателя, необходимая для того, чтобы переходный процесс был оптимальным, может быть получена

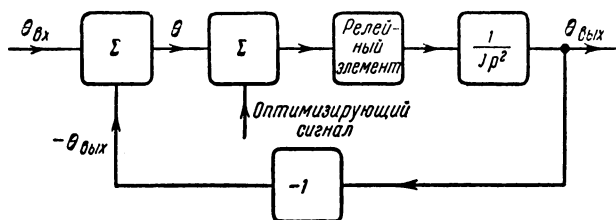


Рис. 184.

с помощью нелинейной отрицательной скоростной обратной связи или с помощью нелинейных операций над сигналом ошибки. Рассмотрим структурную схему идеализированной следящей системы, изображенную на рис. 184. Неизвестный оптимизирующий сигнал складывается с расогласованием θ , и сумма образует входной сигнал релейного элемента. Задача заключается в том, чтобы определить форму требуемого оптимизирующего сигнала.

Предположим пока, что оптимизирующий сигнал отсутствует, так что сигнал на входе релейного элемента равен θ , а уравнение движения выходного вала имеет вид

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = |T_m| \operatorname{sign} \theta;$$

далее, если $\theta_{\text{вх}} = 0$, то

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -|T_m| \operatorname{sign} \theta.$$

*) В этом случае $i=2$.

Для того чтобы получить уравнение фазовой траектории, воспользуемся тождеством

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\dot{\theta} d\dot{\theta}}{d\theta},$$

так что

$$\frac{J\dot{\theta}}{|T_m| \operatorname{sign} \theta} d\dot{\theta} = -d\theta.$$

откуда, интегрируя обе части уравнения и подставляя начальные условия $\dot{\theta}(0) = 0$, получаем уравнение фазовой траектории

$$\frac{J(\dot{\theta})^2}{2|T_m| \operatorname{sign} \theta} = [\theta(0) - \theta]. \quad (21)$$

Фазовые траектории, соответствующие этому уравнению, изображены на рис. 185; они имеют вид парабол. Для

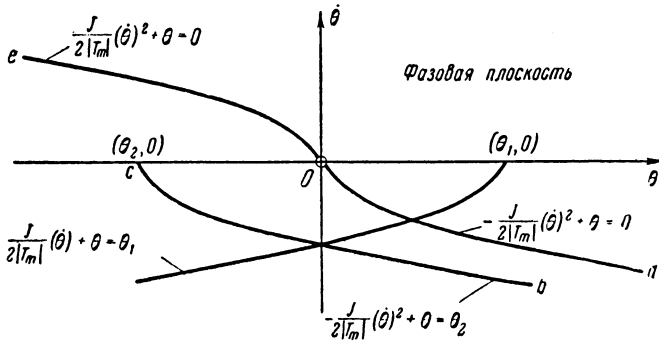


Рис. 185

оптимального переходного процесса все фазовые траектории, соответствующие торможению двигателя, должны пройти через начало координат. Оптимальная фазовая траектория, соответствующая торможению двигателя, получается сдвигом фазовой траектории bc вправо до тех пор, пока она не пройдет через начало координат и не превратится в фазовую траекторию Od . Для фазовых траекторий, начинающихся при отрицательных значениях рассогласования, оптимальной фазовой траекторией торможения

аналогично является кривая Oe . Кривая dOe может быть описана одним уравнением

$$\frac{J}{2|T_m|} \dot{\theta} |\dot{\theta}| + \theta = 0. \quad (22)$$

Для того чтобы переходный процесс был оптимальным, переключение двигателя должно происходить на этой линии, так что условие переключения двигателя определяется уравнением (22). Далее будут рассмотрены возможности приложения этой теории.

12.6.2 Преобразования ошибки.

Оптимальные процессы в системе могут быть реализованы с помощью поляризованного реле с двумя обмотками; в одну обмотку подается ток, пропорциональный ошибке, а в другую — пропорциональный квадрату скорости ошибки с тем же знаком, т. е. пропорциональный $\dot{\theta} |\dot{\theta}|$. Для этого напряжение, пропорциональное скорости ошибки, преобразуется нелинейным элементом; это может быть осуществлено дифференцированием сигнала ошибки и затем подачей его на диодный нелинейный преобразователь, выходной ток которого пропорционален квадрату входного напряжения (см. 6.2.1).

Другой способ основан на том, что мгновенное значение магнитодвижущей силы в магнитной цепи реле не особенно важно, если магнитодвижущая сила равна нулю в надлежащие моменты. Таким образом, над величинами в уравнении (22) мы можем производить произвольные операции при условии, что их знаки будут совпадать со знаками θ и $\dot{\theta}$. Имея это в виду, можно извлечь квадратный корень из каждого слагаемого с сохранением знаков и получить условия оптимальности процесса в следующем виде:

$$\dot{\theta} \sqrt{\frac{J}{2|T_m|}} + \sqrt{|\dot{\theta}|} \text{sign } \theta = 0. \quad (23)$$

Теперь в обмотки реле подаются токи, пропорциональные соответственно скорости ошибки и квадратному корню из ошибки. Этот закон положен в основу оптимальной системы SERME, предложенной Вестом и др. [10] и осу-

ществленной в следящей системе с насыщением и узкой зоной линейности *).

Преобразованное условие оптимальности имеет то преимущество, что оно не вносит скоростного запаздывания в следящую систему, когда сигнал на входе имеет постоянную скорость.

12.6.3. Механическая обратная связь [11].

Если на вход подается скачкообразное воздействие, то скорость изменения входного сигнала в течение переходного процесса в следящей системе равна нулю. Поэтому можно в уравнении (22) заменить $\dot{\theta}$ на $-\dot{\theta}_{\text{вых}}$, получив при этом условие для оптимального переходного процесса в виде

$$-\frac{J}{2|T_m|} \dot{\theta}_{\text{вых}} |\dot{\theta}_{\text{вых}}| + \theta = 0. \quad (24)$$

Для того чтобы практически реализовать это, необходимо ток, пропорциональный θ , и ток, пропорциональный квадрату скорости выходного вала, знак которого тот же, что и знак скорости, просуммировать на реле таким образом, чтобы обратная связь противодействовала ошибке. Это достигается созданием напряжения, пропорционального скорости, либо с якоря двигателя (рис. 173), либо от тахогенератора, сидящего на выходном валу, и преобразованием его в ток обмотки реле с помощью диодного нелинейного преобразователя, подобного изображенному на рис. 88, где e — напряжение, пропорциональное скорости, а i — ток, подаваемый в обмотку реле вместо потенциально заземленной точки усилителя. Вторая обмотка реле питается током, пропорциональным ошибке.

Если входной сигнал не электрический, а представляет собой угол поворота вала, то от реле можно избавиться и сделать обратную связь чисто механической; подобное устройство изображено на рис. 186. В качестве датчика рассогласования используется коммутатор, состоящий из двух проводящих сегментов, разделенных небольшой зоной нечувствительности. Контакты коммутатора вращаются вместе с входным валом. Коммутатор

*) SERME — sign error root mod. error — знак ошибки на корень из модуля ошибки.

вращается двигателем при помощи червячного колеса. Сегменты коммутатора подключены к источнику напряжения, и в двигатель подается ток либо непосредственно с контактов, либо через реле. При правильном соединении двигатель всегда поворачивает коммутатор так, чтобы контакты соприкасались с зоной нечувствительности,

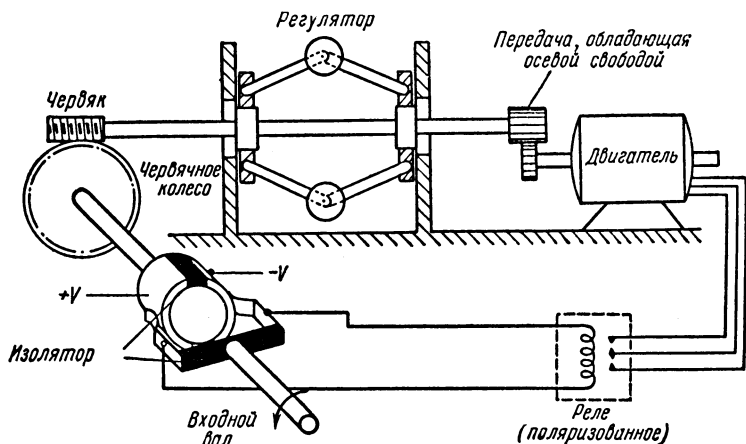


Рис. 186. Релейная следящая система с механической обратной связью.

Механическая обратная связь осуществляется включением центробежного регулятора между двигателем и червячным валом. Осевое перемещение муфт регулятора при раздвижении шариков передается валу, и таким образом коммутатору задается угловое опережение, пропорциональное смещению муфты. Радиальные силы, действующие на шарики регулятора, на которые не оказывает влияния направление вращения, вызывают перемещение червячного вала, знак которого меняется с изменением направления вращения. Зависимость между скоростью вала и осевым перемещением определяется выбором связей и сжатием пружины между муфтами.

12.6.4. Видоизменения параболического закона в реальных следящих системах.

Если в двигателе и нагрузке имеется трение, то фазовые траектории уже больше не будут параболами; вы-

воды, относящиеся к идеальным следящим системам, оказываются тем более несправедливыми при наличии временного запаздывания реле. Нелинейные преобразования, которым должны быть подвергнуты скорость изменения ошибки и выходная скорость для получения оптимального переходного процесса, наилучшим образом определяются графически для каждой конкретной следящей системы. Это осуществляется вычерчиванием оптимальной фазовой траектории торможения с использованием параметра K с соответствующим знаком (рис. 187). Для нескольких фазовых траекторий, соответствующих разгону двигателя, определяются точки пересечения p, q, r, \dots . Точки p', q', r', \dots и т. д., опережающие p, q, r, \dots и т. д. на время, определяемое временем запаздывания реле s_d , находятся графически; линия, проведенная через эти опережающие точки, есть искомая линия переключения. Требуемая характеристика преобразования скоростных сигналов получается вычерчиванием линии переключения в безразмерных координатах θ и $\dot{\theta}$. Диодный нелинейный преобразователь проектируется таким, чтобы его характеристика совпадала с этой кривой.

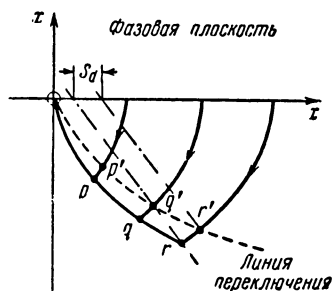


Рис. 187.

Обычно сравнительно грубое приближение к вычисленному нелинейному закону оказывается совершенно достаточным для того, чтобы получить переходный процесс, неотличимый от оптимального в очень широком диапазоне изменения входных амплитуд.

12.6.5. Амплитуда и частота автоколебаний.

Проведем приближенное рассмотрение, следуя методу, использованному для случая линейной скоростной обратной связи в 12.5.3.1. Предельный цикл на фазовой плоскости изображен на рис. 188. Здесь использовано разложение уравнения фазовой траектории в степенной ряд (12.5.3.1). Фазовые траектории предельного цикла для различных знаков K представляют собой зеркальные

отображения друг друга относительно оси v . Из этого следует, что для того, чтобы существовал предельный цикл, охватывающий начало координат, точка переключения двигателя должна лежать на оси v и отрезок OP_0 должен быть равен отрезку OP_3 (рис. 188). Следовательно, точка P_1 пересечения линии переключения и фазовой траектории отстоит на время запаздывания от точки P_2 .

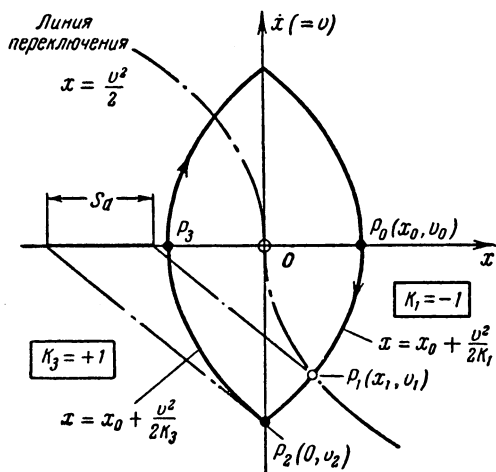


Рис. 188.

Для малых значений v уравнения линии переключения и фазовой траектории, соответствующей торможению двигателя, почти идентичны; таким образом OP_1 и P_2P_3 являются эквидистантными кривыми и пересечение в точке P_1 происходит при ошибке, равной половине расстояния от P_0 до нуля. Другими координатами точек пересечения траектории с линией переключения и осью v являются:

$$\text{точка } P_1 \begin{cases} x_1 = \frac{x_0}{2}, \\ v_1 = -\sqrt{x_0} \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{точка } P_2 \begin{cases} x_2 = 0, \\ v_2 = -\sqrt{2x_0}. \end{cases}$$

Время, за которое изображающая точка проходит расстояния между точками P_1 и P_2 , приравняется s_d .

Таким образом, на основании уравнения (7)

$$s_d = \frac{1}{K_1} \left[-\sqrt{2x_0} - \frac{x_0}{2} + \sqrt{x_0} \right].$$

Когда трением и моментом нагрузки можно пренебречь, $K_1 = -1$ и

$$s_d \approx \frac{x_0}{2} + 0,414\sqrt{x_0}. \quad (25)$$

Период автоколебаний определяется по способу, описанному в 12.5.3.1; он равен

$$S_L = 4\sqrt{2x_0}. \quad (26)$$

Когда x_0 много меньше единицы, то на основании уравнения (25)

$$s_d \approx 0,414\sqrt{x_0},$$

так что согласно уравнению (26) имеем:

$$S_L \approx 4\sqrt{2x_0} \approx \frac{4\sqrt{2}s_d}{0,414} \approx 13,7s_d. \quad (27)$$

Если для реализации нелинейной кривой переключения используется диодный нелинейный преобразователь, то амплитуда автоколебаний обычно определяется наклоном первого отрезка кривой, т. е. величиной сопротивления R (рис. 88, а). В этом случае предыдущий анализ для идеальной оптимальной системы неприменим, так как обратная связь при малых амплитудах линейна.

12.6.6. Упрежденное переключение двигателя.

Из рассмотрения областей на фазовой плоскости и уравнения фазовой траектории при постоянной скорости изменения входного сигнала (рис. 163 и 164 и уравнение (6)) очевидно, что форма фазовых траекторий зависит от скорости изменения входного сигнала. Отсюда следует, что оптимальная фазовая траектория торможения имеет форму, которая является функцией входной скорости, и следящая система, переходный процесс которой оптимален при скачкообразном входном воздействии, не обязательно оптимальна по отношению к входному сигналу, изменяющемуся с постоянной скоростью. Последние работы Колса (Coales) и Нотона (Noton) [8] привели

к важным результатам в области релейных следящих систем. Колс и Нотон распространили понятие оптимального переходного процесса на переходные процессы, вызываемые входными сигналами, изменяющимися с постоянной скоростью и постоянным ускорением, и дали указания для проектирования релейных следящих систем, оптимизированных по отношению к сигналам, описываемым статистическим образом.

Входные координаты $\theta_{вх}$, $\dot{\theta}_{вх}$ и $\ddot{\theta}_{вх}$ и выходные координаты $\theta_{вых}$, $\dot{\theta}_{вых}$ и $\ddot{\theta}_{вых}$ релейной следящей системы периодически замеряются *) и подаются на вычислительное устройство.

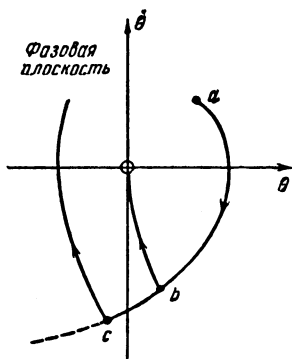


Рис. 189.

На вычислительном устройстве, работающем с периодизацией и на порядок быстрее реальной системы, входная информация используется для предсказания формы процесса на некоторое время вперед. Информация с выхода этого устройства подается на модель реальной системы, предсказывающей будущую форму процесса также в измененном масштабе времени. Таким образом, определяется форма будущей ошибки и скорости изменения ошибки. Это иллюстрируется на фазовой плоскости на рис. 189. В момент первого замера действительная ошибка и скорость изменения ошибки соответствуют произвольной точке a фазовой плоскости, и задача следящей системы заключается в том, чтобы одновременно уменьшить ошибку и скорость изменения ошибки до нуля лишь при одном переключении двигателя. На вычислительном устройстве определяется произвольный момент реверсирования двигателя. Предположим, что переключение произойдет в точке c по убыстренной шкале времени; при этом ошибка имеет перерегулирование и очевидно, что переключение двигателя должно произойти

*) То есть имеет место операция квантования по времени. (Прим. ред.)

раньше. Моделирующая установка исследует результат переключения в точке c , и в следующий момент замера пробное переключение двигателя должно быть произведено раньше. Это происходит до тех пор, пока после нескольких замеров не находится момент переключения, дающий оптимальный переходный процесс, и двигатель реверсируется в точке b . Благодаря высокой частоте замеров по отношению к собственному периоду следящей системы вычисленное время τ между моментом замера в точке a и моментом реверсирования в точке b оказывается всегда достаточным для получения оптимального переходного процесса. Если вычисленное время τ становится равным нулю, то контакты силовых реле, управляющие двигателем, переключаются и вычисляется новый момент реверсирования для следующего переключения реле.

Так как сама следящая система управляется моделирующей установкой, то в случае маломощных следящих систем ее сложность сводит на нет все преимущества. Но это оказывается особенно привлекательным для случая мощных следящих систем, в которых оптимальное регулирование позволяет применять двигатели меньшей мощности. Колсом и Нотоном было установлено, что при мощности в 100 л. с. этот метод позволяет уменьшить мощность двигателя на 50% и, следовательно, уменьшить размеры двигателя по сравнению с теми, которые требуются в обычной квазилинейной следящей системе. Устройства для переключения направления вращения двигателя в таких мощных следящих системах еще не применяются, и это представляет собой плодотворную область для исследования.

12.7. Влияние моментов нагрузки на работу релейной следящей системы

В анализе, который был проведен в 12.2, в уравнении учитывался постоянный момент нагрузки; влияние его на величину K в областях фазовой плоскости показано на рис. 163.

С моментами нагрузки приходится сталкиваться во многих случаях, например в случае, когда нагрузка

вызвана сопротивлением воздуха при движении антенн и орудий, управляемых следящими системами, или в случае аэродинамических нагрузок в следящих системах, управляющих положением рулей самолетов. В первом случае момент нагрузки представляет собой случайную

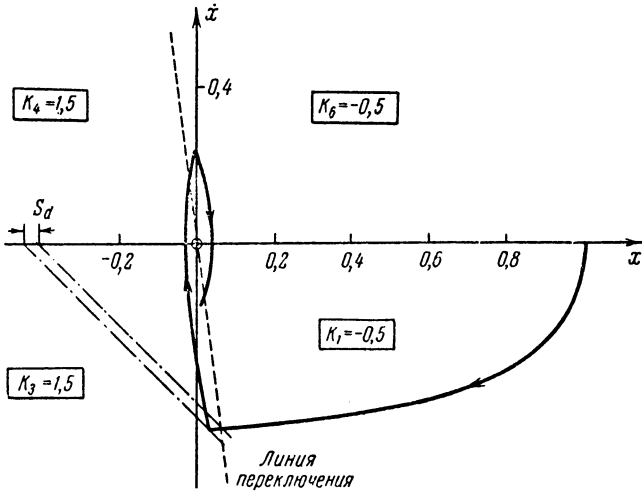


Рис. 190а. Фазовый портрет релейной следящей системы со скоростной обратной связью и моментом нагрузки. Параметры: $s_d = 0,06$; $S_F = 0,125$; $f_L = 0,5$.

функцию, обусловленную случайными порывами ветра. Эта функция может быть описана лишь статистически. Во втором случае момент нагрузки является функцией угла наклона управляющей поверхности руля.

Здесь мы лишь исследуем влияние постоянного момента нагрузки на поведение следящей системы, стабилизированной скоростной обратной связью, аналогичной рассмотренной в 12.5.3; фазовый портрет на рис. 190а соответствует процессу, вызванному скачкообразным воздействием в такой следящей системе с постоянным моментом нагрузки (ср. рис. 174). Предельный цикл, изображенный в большем масштабе на рис. 190б, теперь содержит среднюю постоянную составляющую, которая

должна вызвать в установившемся состоянии противодействующий вращающий момент двигателя.

Влияние момента нагрузки на следящую систему, спроектированную таким образом, чтобы ее переходный процесс при подаче на вход скачкообразного воздействия был оптимальным, состоит в том, что переходный процесс становится неоптимальным, так как момент нагрузки меняет форму фазовых траекторий и, следовательно, форму оптимальной характеристики нелинейного преобразователя ошибки.

Даже когда автоколебания подавляются зоной нечувствительности, наличие момента нагрузки вызывает автоколебания, соответствующие предельному циклу, так как только таким образом двигатель может создавать необходимый момент, уравновешивающий момент нагрузки.

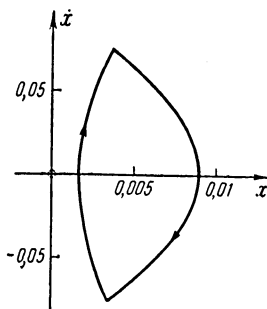


Рис. 190б.

12.8. Реакция релейной следящей системы на синусоидальное воздействие

В предыдущих параграфах мы в основном сталкивались с процессами, возникающими в следящих системах при скачкообразном воздействии и линейно изменяющемся воздействии. Экспериментальные результаты, полученные для релейных систем со скоростной обратной связью при синусоидальном входном воздействии, изображены на рис. 191 и 192. На рис. 191 изображена зависимость отношения выходной амплитуды ко входной от отношения частоты входного сигнала к частоте автоколебаний. Амплитуда $|\theta_{\text{вых}}|$ выходного сигнала определяется как амплитуда составляющей выходного сигнала, частота которой равна частоте входного сигнала; в этом эксперименте амплитуда входного сигнала постоянна. При увеличении частоты входного сигнала от нуля движение выходного вала сначала представляет автоколебания с частотой, определяемой предельным циклом, наложенным

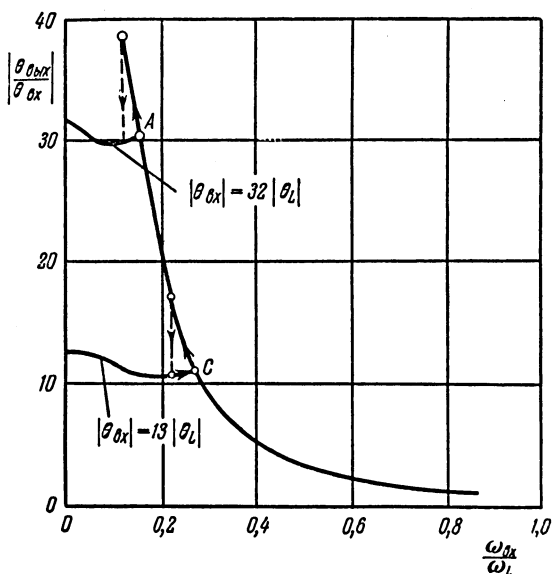


Рис. 191.

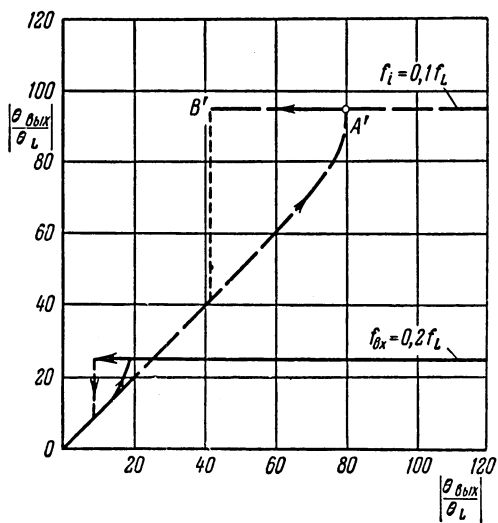


Рис. 192.

на синусоидальные колебания входного сигнала. Как показано на рис. 193, а, вращающий момент на выходном валу характеризуется переменным отношением длительности импульса к расстоянию между импульсами. Таким образом, среднее значение вращающего момента соответствует частоте входного сигнала. При определенной частоте входного сигнала происходит внезапное изменение

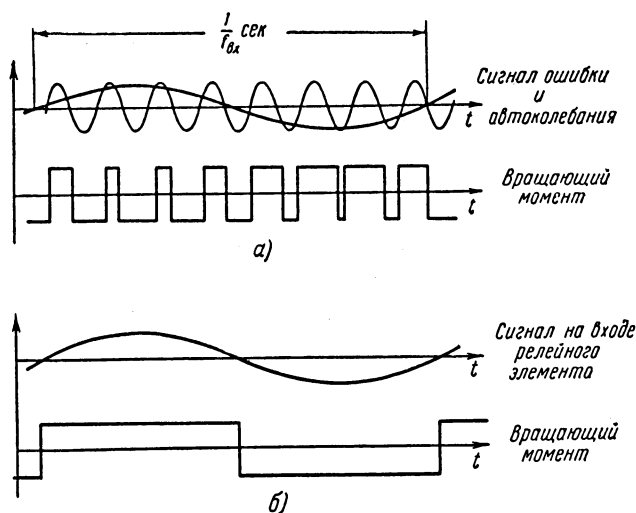


Рис. 193.

режима работы; А и С на рис. 191 представляют собой точки, в которых происходят эти изменения. Значения этих частот зависят от амплитуды входного сигнала. Выше этой частоты автоколебания прекращаются, и реле теперь переключается с частотой входного сигнала. Форма автоколебаний изображена на рис. 193, б. Колебания выходного вала имеют приближенно параболическую форму, и амплитуда их полностью определяется входной частотой. Если входная частота уменьшается, то возникают автоколебания с более низкой частотой, чем это происходило при движении в противоположном направлении; это явление называется захватыванием.

На рис. 192 частота входного сигнала поддерживается постоянной, а изменяется входная амплитуда. Зависимость $|\theta_{\text{вых}}|$ от $|\theta_{\text{вх}}|$ вначале носит линейный характер, причем движение выходного вала сопровождается автоколебаниями. Изменение режима происходит при критическом значении амплитуды входного сигнала в точке A' . Пределы линейной области обратно пропорциональны входной частоте.

Эти два режима работы называются соответственно *квазилинейным* и *нелинейным*. Работа в квазилинейном режиме характеризуется автоколебаниями, линеаризующими характеристику замкнутой системы благодаря изменению отношения длительности импульса вращающего момента к расстоянию между импульсами. В этом режиме работа очень похожа на вибрационное регулирование (рис. 159), с тем отличием, что высокочастотные колебания самовозбуждаются, а не подаются от отдельного генератора.

12.8.1. Частотный метод исследования.

Частотный метод применим только к *нелинейному* режиму работы, так как только тогда частота колебаний

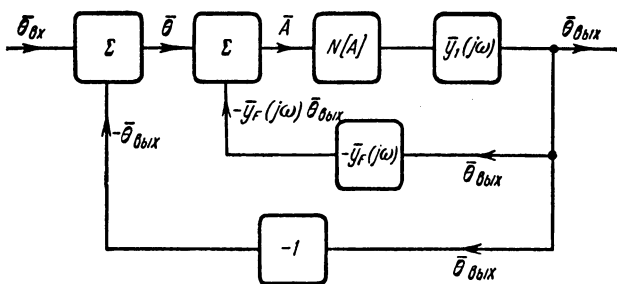


Рис. 194.

вращающего момента равна частоте входного сигнала. Метод может быть использован для определения границы области квазилинейного режима путем нахождения нижнего предела частоты нелинейного режима.

Структурная схема релейной следящей системы с линейной скоростной обратной связью изображена на рис. 194. Если предположить, что высшие гармонические

составляющие в $\theta_{\text{ВЫХ}}$ пренебрежимо малы, то можно записать векторное уравнение

$$\bar{\theta}_{\text{ВХ}} - \bar{\theta}_{\text{ВЫХ}} - \bar{y}_F(j\omega) \bar{\theta}_{\text{ВЫХ}} = \bar{A},$$

где $\bar{A} = (A, 0^\circ)$ — основная гармоника на входе нелинейного элемента. Отсюда очевидно, что

$$\bar{\theta}_{\text{ВХ}} = \bar{\theta}_{\text{ВЫХ}} [1 + \bar{y}_F(j\omega)] + \bar{A}, \quad (28)$$

а также

$$\theta_{\text{ВХ}} = \bar{A} N(A) \bar{y}_1(j\omega),$$

где $N(A)$ — эквивалентный коэффициент усиления релейного элемента. Для идеальной релейной характеристики $N(A) = \frac{4}{\pi A}$ (см. табл. 3 в гл. 11). $\bar{y}_1(j\omega)$ выражается в соответствии с 12.4.2 (ср. рис. 168). Подставляя выражение для $\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}$ в уравнение (28), получаем:

$$\bar{\theta}_{\text{ВХ}} = \frac{4}{\pi} \bar{y}_1(j\omega) [1 + \bar{y}_F(j\omega)] + \bar{A}. \quad (29)$$

Если $\theta_{\text{ВХ}}$ постоянна, то конец соответствующего вектора должен лежать в какой-либо точке на окружности радиуса $|\theta_{\text{ВХ}}|$. $\bar{\theta}_{\text{ВЫХ}}$ определяется амплитудой \bar{A} , которой на рис. 195 соответствует вектор, лежащий на положительной действительной оси. Годограф вектора, соответствующий комплексному слагаемому в уравнении (29), также изображен на рис. 195. Этот годограф может быть получен экспериментально, если систему разомкнуть на входе релейного элемента и подать на него сигналы различной частоты, определяя фазу и амплитуду суммы сигналов основной и стабилизирующей обратной связи. Очевидно, этот годограф не зависит от амплитуды сигнала, подаваемого на релейный элемент. Для произвольно выбранной частоты ω_1 уравнение (29) может быть представлено с помощью векторной диаграммы; для этого через точку $\omega = \omega_1$ на годографе надо провести линию, параллельную действительной оси. Эта линия пересекается с окружностью в точке P и определяет

собой местоположение конца векторов $\bar{\theta}_{\text{вх}}$ и \bar{A} . Уменьшение ω_1 вызывает уменьшение \bar{A} до тех пор, пока концы векторов \bar{A} и $\bar{\theta}_{\text{вх}}$ не попадут в точку R . В этой точке вектор \bar{A} превращается в касательную к окружности — годографу $\bar{\theta}_{\text{вх}}$. На более низких частотах построение

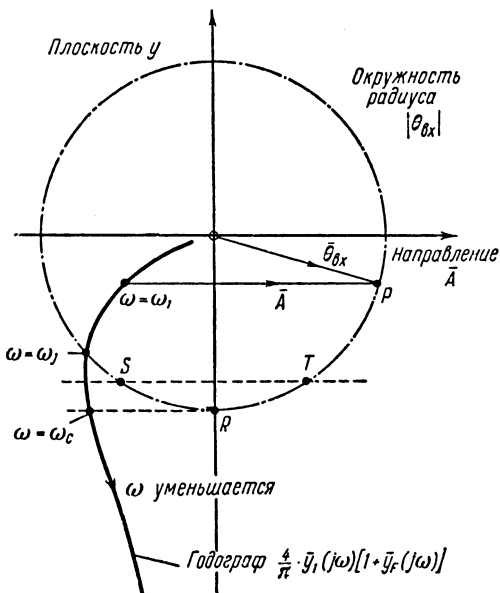


Рис. 195.

нарушается. Критическая частота ω_c , на которой это происходит, соответствует пределу нелинейного режима и частоте перехода на квазиплинейный режим. Надо отметить, что для частот, лежащих между ω_c и ω_j , существуют два возможных решения для векторной диаграммы в таких точках, как S и T . Эти решения соответствуют двум возможным значениям \bar{A} в области захватывания частоты на общей характеристике (рис. 191). Эксперименты*) показали, что предсказания, основан-

*) Неопубликованные техн. заметки Т. Р. Е.

ные на уравнении (29) и рис. 195, имеют тот же порядок точности, как и в других случаях применения метода эквивалентного комплексного коэффициента (т. е. около 10%), и что эта точность повышастся с повышением фильтрующих свойств линейных элементов.

Литература

1. H a z e n H. L., Theory of Servomechanisms, J. Franklin Inst., 1934, 218, No 3, p. 279.
 2. G r e e n w o o d I. A., H o l d a m J. V. and M a s c r a e D., Electronic Instruments, M. I. T. Rad. Lab. Series, No. 21, McGraw—Hill, 1948.
 3. H a l l A. A., The Use of Servomechanisms in Aircraft, Journal IEE, 1947, 94, Part IIA, No 2, p. 256.
 4. М а к к о л Л. А., Основы теории сервомеханизмов, ИЛ, 1947.
 5. W e i s s H. K., Analysis of Relay Servomechanisms, J. Aeronautical Sciences, July 1946, 13, p. 364.
 6. К о с е н б у р г е р R. J., A Frequency Response Method of Analysing and Synthesising Contactor Servomechanisms, Transactions of the American IEE, 1950, 69, Part I, p. 270.
 7. Ф л ю г г е - Л о т ц И., Метод фазовой плоскости в теории релейных систем, Физматгиз, 1959.
 8. C o a l e s J. F. and N o t o n A. R. M., An On-Off Servomechanism with Predicted Change-over, Proceedings IEE, Paper No. 1895M, 1955, 103B, p. 449.
 9. Л е р н е р А. Я., Улучшение динамических свойств автоматических компенсаторов при помощи нелинейных связей. Автоматика и телемеханика, 1952, 13, № 2, стр. 134—144 и 1952, № 4, стр. 429—444.
 10. W e s t J. C., D o u c e J. L. and N a y l o r R., The Effects of the Addition of Some Non-Linear Elements on the Transient Performance of a Simple R. P. C. System possessing Torque Limitation, Proceedings IEE, 1954, 101, Part II, p. 156.
 11. А т т л и А. и Х э м м о н д П., Стабилизация релейных следящих систем. Автоматическое регулирование. Сборник материалов конференции в Грэнфилде 1951 г., ИЛ, 1954, стр. 296—313.
 12. Цыпкин Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955. (Добавлено редактором.)
 13. Ф е л ь д б а у м А. А., Вычислительные устройства в автоматических системах, Физматгиз, 1960. (Добавлено редактором.)
 14. Горская Н. С., Крутова И. Н., Рутковский В. Ю., Динамика нелинейных сервомеханизмов, Изд-во АН СССР, 1959. (Добавлено редактором.)
-

ЭЛЕКТРОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

13.1. Введение

Модели, описываемые теми же уравнениями, что и исходная система, могут оказать большую помощь при проектировании систем и уяснении процессов, протекающих в них. Имеются два различных вида таких моделей. Первый вид — это дифференциальный анализатор общего назначения, предназначенный для решения любых линейных дифференциальных уравнений, порядок которых не выше заданного. Такая модель оказывается чрезвычайно негибкой, так как изменение численного значения одного из параметров конкретной системы вызывает изменение нескольких параметров элементов вычислительного устройства, потому что каждый коэффициент в дифференциальном уравнении является, вообще говоря, функцией нескольких параметров системы и данный параметр может входить более чем в один коэффициент. Кроме того, в таком вычислительном устройстве нелинейности исходной системы не могут быть легко учтены. Второй вид модели, который мы и будем рассматривать в этой главе, — это такой, в котором существует приближенное соответствие между элементами модели и элементами исходной системы. В этом случае не обязательно точно знать общее уравнение исходной системы; достаточно знать уравнение, соответствующее каждому элементу или каскаду, и образовать модель из элементов, имеющих соответствующие уравнения, соединяя их в определенном порядке. Изменение одного элемента в исходной системе обычно влечет за собой изме-

нение только одного элемента в модели. К таким моделям относятся *моделирующие устройства непрерывного действия*. Совершенно необязательно, чтобы физическая природа исходной системы совпадала с физической природой моделирующего устройства. Более того, модель, физическая природа которой отличается от физической природы исходной системы, обычно имеет целый ряд преимуществ. Она может работать в различных масштабах времени, и ее структуру легче изменить, чем структуру исходной системы.

Схемы на электронных лампах обладают гибкостью, и они могут быть построены без особого труда. По этим причинам они часто применяются в моделирующих устройствах, которые в этом случае называются *электронными моделирующими устройствами*. Эти устройства широко используются для исследования систем регулирования, химических процессов, а также экономических и биологических систем. Мы уже видели, что усилители с потенциально заземленной суммирующей точкой позволяют осуществить различные виды передаточных функций и нелинейных зависимостей. Эти свойства используются в одной из разновидностей электронных моделирующих устройств*), состоящей из усилителей с потенциально заземленной точкой. Элементы исходной системы представляются с помощью этих усилителей, обладающих, в зависимости от элементов, включенных на входе и в цепь обратной связи, соответствующей передаточной функцией.

В исходной системе передаточная функция связывает две величины, физический характер которых зависит от рассматриваемой системы. В электронном моделирующем устройстве, которое будет рассмотрено, все величины представлены напряжениями на входе и выходе усилителей с потенциально заземленной суммирующей точкой и пассивных формирующих цепей или в виде токов, протекающих через потенциально заземленные суммирующие точки. Например, с помощью схемы интегратора с потенциально заземленной суммирующей точкой можно воспроизводить любой процесс, в котором происходит интегрирование по времени, например: определять

*) См. [1], [2], [3] и [4].

положение тела, интегрируя скорость изменения положения, объем жидкости по скорости ее потока; заряд по электрическому току; угол поворота самолета по отклонению элеронов и т. д. В моделирующем устройстве каждая из этих физических величин представляется в виде напряжения и численное значение постоянной, связывающей две величины, эквивалентно постоянной интегратора.

Рассмотрим пример. На массу m воздействует сила $F(t)$, причем сопротивление движению пренебрежимо мало. Требуется определить мгновенную скорость тела $\dot{x}(t)$.

Уравнение, связывающее силу и скорость, определяется вторым законом Ньютона и имеет вид

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

или

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F dt. \quad (1)$$

Чтобы промоделировать это выражение, можно представить F в виде напряжения на входе интегратора с потенциально заземленной суммирующей точкой. Если постоянная интегратора эквивалентна m , то выходное напряжение его будет соответствовать $-\dot{x}$. Для схемы интегратора, приведенной в табл. 2, при m значительно большем единицы имеем:

$$e_{\text{вых}}(t) \approx -\frac{1}{CR} \int_0^t e_{\text{вх}} dt. \quad (2)$$

Сравнение уравнений (1) и (2) показывает, что отношение численного значения $\frac{1}{CR}$ к численному значению m определяет масштаб силы и скорости по отношению к напряжению моделирующего устройства. В динамической системе установившаяся сила в 1 дн вызывает ускорение $\frac{1}{m} \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$.

В моделирующем устройстве, если входное напряжение $e_{\text{вх}}$ равно 1 в, то выходное напряжение изменяется со ско-

ростью $\frac{1}{CR}$ в/сек. Таким образом, если 1 в соответствует 1 дн и 1 см/сек на выходе, то t и CR численно равны. С другой стороны, если 1 в соответствует p дн на входе и q см/сек на выходе, то t численно равно $\frac{p}{q} CR$.

13.2. Набор задачи на моделирующем устройстве

При наборе задачи на моделирующем устройстве первый шаг заключается в составлении уравнений, описывающих поведение исследуемой системы, и построении структурной схемы на основании этих уравнений. Каждый блок структурной схемы соответствует элементу моделирующего устройства, который может быть функциональным преобразователем, пассивной цепью, элементом запаздывания, множительным устройством непрерывного действия и т. д. Обычно один элемент моделирующего устройства соответствует нескольким блокам структурной схемы. Преобразование структурной схемы может привести к более экономному использованию элементов моделирующей установки или к устранению необходимости в дифференцирующих элементах, которых следует по возможности избегать из-за их склонности к перегрузке (см. 6.1.2).

Из предыдущего ясно, что способы набора задач на моделирующих устройствах очень разнообразны, но существуют определенные общие принципы, которые мы и рассмотрим. После выбора подходящей структурной схемы на элементах моделирующего устройства последовательно набираются численные значения каждого параметра. Коэффициенты дифференциальных уравнений, описывающих систему, представляют собой комбинацию этих параметров. Поскольку коэффициенты уравнения моделирующего устройства имеют те же численные значения, что и коэффициенты уравнения системы, нет необходимости в том, чтобы соответствующие параметры моделирующего устройства и исходной системы были численно идентичны. Так как каждый параметр или комбинация параметров определяют передаточную функцию элемента моделирующего устройства, то необходимо

убедиться в том, что выбранные численные значения могут быть промоделированы с помощью усилителей с ограниченным коэффициентом усиления разомкнутой системы. Необходимо избегать включения усилителя с высоким коэффициентом усиления последовательно с усилителем с низким коэффициентом усиления, так как это может повлечь за собой перегрузку предшествующего каскада. В сложной структурной схеме один из способов набора численных значений заключается в том, что меняются единицы, через которые выражаются параметры. Это эквивалентно тому, что меняется множитель масштабного соотношения напряжений в моделирующем устройстве и величин в реальной системе, а основные свойства, характеризующие собственной частотой и коэффициентом ослабления замкнутой системы, остаются неизменными.

При составлении схемы моделирующего устройства по структурной схеме необходимо помнить, что каждый усилитель с потенциально заземленной суммирующей точкой одновременно с выполнением операций над входным напряжением вносит перемену знака. Когда в структурной схеме встречается суммирование, то соответствующие напряжения суммируются в потенциально заземленной точке моделирующего устройства.

Масштаб времени в моделирующем устройстве может быть сделан отличным от масштаба времени в исходной системе с помощью надлежащего изменения параметров передаточных функций усилителей моделирующего устройства по сравнению с параметрами передаточных функций элементов исходной системы. Масштаб времени 1 : 1 получается, если коэффициенты уравнений моделирующего устройства и исходной системы численно равны. Если моделирующее устройство должно работать в n раз быстрее, чем исходная система, то все емкости и индуктивности в моделирующем устройстве с масштабом 1 : 1 должны быть уменьшены в n раз. В результате этого коэффициенты дифференциального уравнения умножаются на nK , где K — порядок дифференциального оператора, к которому относится коэффициент.

Масштаб напряжений в моделирующем устройстве по отношению к величинам в исходной системе произволен до тех пор, пока не вносится нелинейность. Нелинейность

ограничивает масштаб напряжения для одной переменной.

После того как масштаб для одной переменной установлен, масштабы всех остальных переменных определяются однозначно.

13.3. Моделирование системы автоматического управления

Составим схему моделирующего устройства для моделирования системы автоматического управления курсом корабля. Теоретическое рассмотрение проблемы автома-

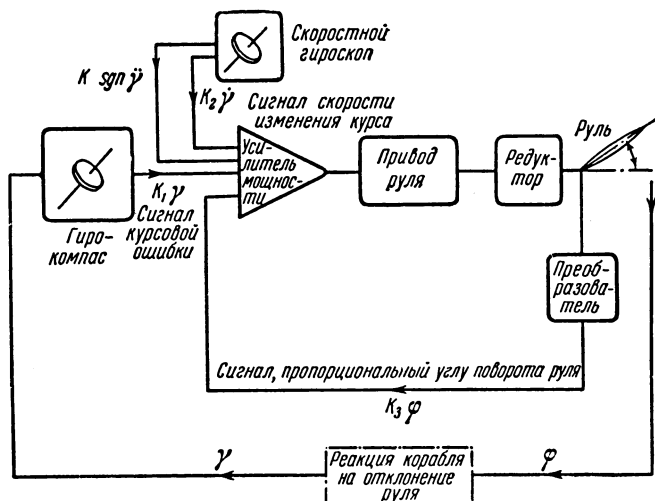


Рис. 196. Схема системы автоматического управления.

тического управления было дано Минорским в 1922 г. В 1930 г. им была создана реальная система управления кораблем. С тех пор принципы, положенные в основу этой системы, нашли также широкое применение в автопилотах.

Блок-схема возможной системы управления курсом изображена на рис. 196. Направление курса корабля определяется гирокомпасом, который создает некое устойчивое опорное направление, не зависящее от движений

корабля. Разность между требуемым курсом (задаваемым указанным выше опорным направлением) и фактическим курсом непрерывно поступает от датчика, связанного с корпусом гироскопа, в виде электрического сигнала, который называется сигналом курсовой ошибки. Руль отклоняется электрическим или гидравлическим приводом, управляемым следящей системой, в которой величина отклонения руля измеряется с помощью потенциометра, присоединенного к валу руля. Этот сигнал сравнивается с сигналом курсовой ошибки, и разность между ними заставляет привод действовать в направлении уменьшения ошибки. Нулевая курсовая ошибка соответствует среднему положению руля, а связи выбраны таким образом, что всякое отклонение от требуемого курса увеличивает отклонение руля, стремящееся уменьшить отклонение корабля от заданного курса. В устройстве, изображенном на рис. 196, постоянное отклонение руля может поддерживаться только при существовании статической ошибки, т. е. в статической системе или системе с астатизмом нулевого порядка. Минорский [5] один из первых описал способ регулирования по интегралу, при котором курсовая ошибка вызывает соответствующую угловую скорость движения руля, образуя, таким образом, систему с астатизмом первого порядка. Это достигается подачей в качестве сигнала обратной связи напряжения, пропорционального угловой скорости руля, а не угловому положению руля, как было показано на рис. 196. Регулятор с астатизмом нулевого порядка в принципе неточен при наличии боковых сил, вызванных ветром или возмущающим действием волн*). Эта неточность существенно уменьшается в системе с астатизмом первого порядка, так как руль автоматически отклоняется на величины, необходимые для того, чтобы преодолеть боковые силы, не создавая при этом курсовой ошибки (ср. 8.4).

В системе автоматического управления, изображенной на рис. 196, имеются два главных источника, определяющих наличие постоянных времени. Во-первых, постоянной времени обладает рулевой привод, реагирующий

*) Имеются в виду постоянно действующие силы. (*Прим. ред.*)

на изменение курсовой ошибки как аperiodическое звено, а также цепь обратной связи при отдаленном расположении руля. Реакция рулевой следящей системы сходна с реакцией колебательного звена с затуханием, близким к критическому.

Во-вторых, постоянная времени определяется моментом инерции корабля относительно оси поворота. Обычно эта постоянная значительно превышает постоянную времени рулевой следящей системы.

Следует отметить, что дополнительная цепь обратной связи, образующая рулевую следящую систему, оказывает сильное стабилизирующее влияние на поведение корабля в целом. Если предположить, что эта дополнительная цепь обратной связи отсутствует и рулевой привод управляется сигналом усилителя, то эта система будет включать последовательное соединение двух интегрирующих звеньев. Такая система по своей природе неустойчива.

Наличие постоянных времени может при изменении курса, вызванного, например, поперечной волной, привести к колебательному переходному процессу. Для увеличения демпфирования руля обычно вводят сигнал, пропорциональный скорости поворота руля. Рулевой осуществляет это, следя за скоростью изменения курса относительно горизонта и соответствующим образом управляя рулем. Другими словами, он предвидит, что курсовая ошибка увеличится, и не ждет, пока она увеличится до большой величины, а подает сигнал, устраняющий ее. При автоматическом управлении сигнал, пропорциональный скорости поворота корабля, снимается с обмотки ротора, включенного в цепь электрической пружины скоростного гироскопа. Этот сигнал добавляет к сигналу отклонения руля составляющую, пропорциональную скорости поворота, и оказывает стабилизирующее действие, благодаря введению в систему опережения по фазе (см. стабилизацию при помощи скорости изменения ошибки в гл. 8).

Применяя такое управление на военном корабле «Нью-Мексико», Минорский [6] обнаружил, что добавление сигнала, пропорционального скорости, к сигналу, пропорциональному отклонению руля, оказалось недо-

статочным и корабль попадал в режим автоколебаний с амплитудой по курсу в 2° . Для того чтобы еще уменьшить запаздывание по фазе в системе, Минорский решил дополнительно ввести в рулевую следящую систему сигнал, пропорциональный угловому ускорению. Это он осуществил, прикрепив легкую дужку к валу двигателя следящей системы скоростного гироскопа, угол поворота которого пропорционален скорости поворота (рис. 197). Сухое трение вызывает поворот дужки, так что направление наклона изменяет знак при максимумах скорости изменения курса корабля. Движение дужки ограничивается упорами с расположенными на них контактами. С этих контактов снимаются сигналы в виде прямоугольных импульсов, имеющих ту же фазу, что и угловое ускорение корабля, и сдвинутых на 90° по отношению к скорости поворота. Подавая прямоугольные импульсы с надлежащей амплитудой на рулевую следящую систему, можно стабилизировать курс корабля с точностью, лучшей чем $10'$, в зависимости от разрешающей способности гирокомпа.

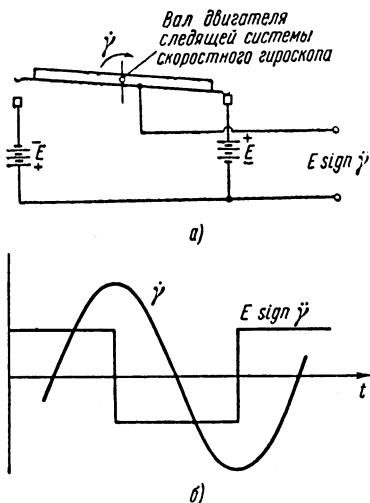


Рис. 197. Релейное устройство, определяющее угловое ускорение: а) схема устройства; б) форма колебаний.

Автоматический рулевой «Нью-Мексико» существенно улучшил поддержание заданного курса по сравнению с человеком-рулевым, так как любое отклонение от курса определялось с помощью дужки и контактов в тот момент времени, когда угловое ускорение изменения курса было невозможно определить человеческим глазом. Составляющая «релейного» ускорения Минорского будет воспроизведена на моделирующем устройстве для иллюстрации возможности моделирования релейной характеристики.

Автоматический рулевой «Нью-Мексико» существенно улучшил поддержание заданного курса по сравнению с человеком-рулевым, так как любое отклонение от курса определялось с помощью дужки и контактов в тот момент времени, когда угловое ускорение изменения курса было невозможно определить человеческим глазом. Составляющая «релейного» ускорения Минорского будет воспроизведена на моделирующем устройстве для иллюстрации возможности моделирования релейной характеристики.

Автоматический рулевой «Нью-Мексико» существенно улучшил поддержание заданного курса по сравнению с человеком-рулевым, так как любое отклонение от курса определялось с помощью дужки и контактов в тот момент времени, когда угловое ускорение изменения курса было невозможно определить человеческим глазом. Составляющая «релейного» ускорения Минорского будет воспроизведена на моделирующем устройстве для иллюстрации возможности моделирования релейной характеристики.

13.3.1. Уравнения движения корабля.

Полное выражение, определяющее движение корабля, вызванное отклонением руля, здесь не приводится. Мы ограничимся качественным описанием этого движения. Если вначале корабль шел установившимся курсом, то при повороте руля возникают боковая составляющая силы, действующая на руль, и соответствующий вращающий момент вокруг центра тяжести корабля. Далее корабль будет поворачиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через центр тяжести (т. е. курсовой угол будет изменяться), хотя направление движения центра тяжести относительно заданного направления еще не изменилось. Благодаря несовпадению продольной оси корабля с вектором скорости возникает боковое давление на корпус. Эта боковая сила приложена к центру давления погруженной площади, т. е. к точке, расположенной позади центра тяжести, и вызывает вращающий момент, который действует вокруг центра тяжести и противодействует моменту, вызванному отклонением руля. Между этими двумя моментами в конце концов наступает равновесие, когда угол поворота корабля по отношению к направлению движения центра тяжести достигает установившегося значения, зависящего от отклонения руля и от указанного выше вращающего момента. Следовательно, вначале в результате отклонения руля корабль продолжает следовать своим первоначальным курсом, но с измененным курсовым углом. Затем корабль начинает поворачиваться благодаря боковой силе, действующей на корпус (совместно с прямой скоростью). В конце концов устанавливается постоянная скорость изменения курса и вследствие отклонения руля корабль движется по кругу.

Цель автоматического управления заключается в том, чтобы поддерживать заданный курс корабля. Обычно отклонения от этого заданного курса малы; они равны, скажем, долям градуса.

Минорский [5] показал, что для малых углов следует рассматривать только первый этап поворота, так как целью управления является устранение тенденции отклонения корабля от курса на самых начальных стадиях поворота. Уравнения, которые мы будем выводить, ограничиваются этим условием. Для полного управления

поворотом корабля требуются более детальные уравнения движения с учетом боковых сил, действующих на корабль. Это также необходимо в том случае, когда нужно поддерживать истинный курс при наличии боковых течений.

Выведем упрощенное уравнение движения для малых курсовых углов, используя обозначения рис. 198. Условимся положительные углы и моменты откладывать в направлении по часовой стрелке. Поток воды, проходящий

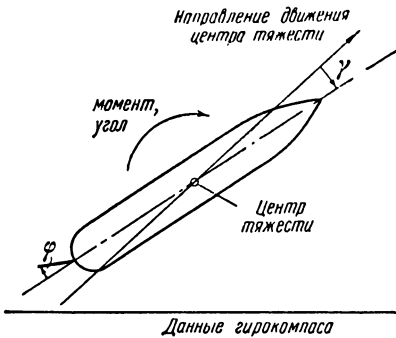


Рис. 198.

мимо отклоненного руля, увеличивает силу, нормальную к поверхности руля и имеющую вид $K_r V^2(\varphi + \gamma)$ *), где V — скорость центра тяжести корабля, $(\varphi + \gamma)$ — угол, который составляет руль с направлением потока, и K_r — параметр, зависящий от формы и площади руля и от плотности воды. K_r является также функцией $(\varphi + \gamma)$, если этот

угол превышает 30° . Силу, нормальную к поверхности руля, можно разложить на составляющие, действующие вдоль оси корабля и перпендикулярно к этой оси и вызывающие соответственно тягу вперед и вращение. Вращающая составляющая имеет вид

$$P_r = K_r V^2 (\varphi + \gamma) \cos \varphi,$$

и если плечо этой составляющей (расстояние между центром тяжести корабля и центром давления на руль) равно L , то вращающий момент стремится восстановить курс и имеет значение

$$T_r = -LK_r V^2 (\varphi + \gamma) \cos \varphi. \quad (3)$$

Этому противодействует сопротивление вращению погруженной площади корпуса, создающее момент вокруг

*) См., например, Theoretical Naval architecture attwood и Pen-gelly (Longsman, Green and Co, 1953).

центра тяжести, $B(\dot{\gamma})$, где B — нелинейная функция, которая может быть представлена в виде полинома, т. е.

$$B(\dot{\gamma}) = B_1\dot{\gamma} + B_2\dot{\gamma}^2 + B_3\dot{\gamma}^3 + \dots \quad (4)$$

Суммарный момент, действующий вокруг центра тяжести, как известно, равен инерционному моменту, т. е.

$$-LK_r V^2 (\varphi + \gamma) \cos \varphi - B(\dot{\gamma}) = J\ddot{\gamma} \quad (5)$$

где J — эффективный момент инерции вокруг вертикальной оси, проходящей через центр тяжести. Он включает в себя эффективную инерцию воды, приведенную в движение корпусом корабля.

Уравнение (5), устанавливающее зависимость между курсовым углом и углом отклонения руля, справедливо лишь для малых изменений угла курса.

13.3.2. Уравнение регулятора.

На входе усилителя следящей системы (рис. 196) электрические сигналы датчиков с обоих гироскопических приборов сравниваются с сигналом, пропорциональным углу отклонения руля. Если рулевая следящая система является системой второго порядка, то ее уравнение движения относительно изображений имеет вид

$$K_3\bar{\varphi} = \frac{K_1\bar{\gamma} + K_2 p\bar{\gamma} + K \operatorname{sign} \ddot{\gamma}}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{p}{Q\omega_0} + 1}, \quad (6)$$

где K_1 — постоянная датчика гироскопа, связывающая угол курса с его электрическим сигналом, K_2 — постоянная датчика скоростного гироскопа, K_3 — постоянная потенциометра руля, $K \operatorname{sign} \ddot{\gamma}$ — релейная функция, знак которой определяется знаком углового ускорения корабля, ω_0 — собственная частота рулевой следящей системы, Q — «усиление», характеризующее следящую систему, [$Q=1$ для системы с затуханием, равным половине критического].

13.3.3. Структурная схема.

Появляющиеся с началом движения корабля величины φ и γ суммируются согласно уравнению (3), образуя, таким образом, один элемент в структурной схеме (рис. 199).

Затем слагаемое, обусловленное сопротивлением жидкости, вычитается из вращающего момента, и разность умножается на $\frac{1}{J\rho}$, в результате чего получается угловая скорость $\ddot{\gamma}$, интеграл которой равен курсовому углу γ .

Регулятор, описываемый уравнением (6), преобразует γ и его производные в угол отклонения руля. Структурная схема регулятора вместе со структурной схемой, соответствующей движению корабля, образует структурную схему системы управления.

Для иллюстрации в табл. 4 приведены гипотетические значения параметров, относящиеся к кораблю с водоизмещением 3000 т. Рулевая следящая система имеет параметры ω_0 и Q , и ее общая передаточная функция может

Обозначения параметров	$\frac{K_1}{K_3}$	$\frac{K_2}{K_3}$	ω_0	Q
Единицы измерения	$\frac{\text{откл. руля, рад}}{\text{курс, рад}}$	$\frac{\text{откл. руля, рад}}{\text{скорость руля, рад/сек}}$	сек ⁻¹	—
Численные значения	10	5	2	2
Исходные значения параметров для моделирования	10	5	2	2
Измененные значения параметров для моделирования без перегрузок	10	$\frac{5}{\sqrt{10}}$	2	2
Параметры модели	$\frac{R_7}{R_8}$	$\frac{R_9}{R_8}$	$\frac{R_1}{2} \sqrt{C_1 C}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{C_1}}$

быть воспроизведена на моделирующем устройстве с помощью колебательного звена такого же типа, какой был описан в 6.1.3. Параметры $\frac{K_1}{K_3}$ и $\frac{K_2}{K_3}$ при моделировании принимают значения, представленные в табл. 4. Численные значения коэффициентов вращающего момента, момента сопротивления и момента инерции LV^2K_r , B_1 и J таковы, что их совершенно невозможно набрать на моделирующей установке в том виде, в каком они заданы. Эту трудность можно исключить, приняв за единицу массы мегакилограмм (10^6 кг) и за единицу длины декаметр (10 м). Тогда численные значения станут приемлемыми без изменения коэффициентов уравнения, связывающего

Таблица 4

LV^2K_r	J	B_1	T_1	T_2
$\frac{\text{килодинометры}}{\text{откл. руля, рад}}$	кг м ²	$\frac{\text{килодинометры}}{\text{рад/сек}}$	сек	сек
$50 \cdot 10^6$	10^9	$2 \cdot 10^8$	1	1
0,5	10	2	1	1
0,5	$\sqrt{10}$	$\frac{2}{\sqrt{10}}$	$\sqrt{10}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$
$\frac{R_3}{R_2}$	$C_4 R_4$	$\frac{R_4}{R_f}$	$C_5 R_5$	$C_{10} R_{10}$

$\dot{\gamma}$ и $(\varphi + \gamma)$. Согласно уравнению (5)

$$-(\bar{\varphi} + \bar{\gamma}) \frac{LK_r V^2 \cos \varphi}{J\rho} = \rho \bar{\gamma} + \frac{B(\dot{\gamma})}{J\rho}. \quad (7)$$

$\frac{B}{J}$ и $\frac{LK_r V^2}{J}$ не меняются при изменении масштаба единиц.

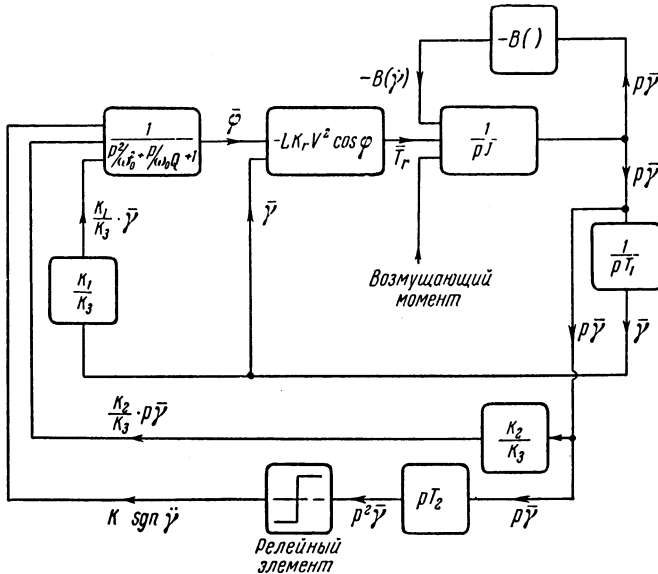


Рис. 199. Структурная схема системы автоматического управления ($T_1 = T_2 = 1$ сек).

В четвертой строке табл. 4 приведены величины коэффициентов усиления всех элементов моделирующего устройства, полученные из исходных численных данных изменением единиц массы и длины

13.3.4. Видоизмененная структурная схема.

Видоизменим структурную схему, соответствующую приведенным выше уравнениям, учитывая свойство усилителя с потенциально заземленной суммирующей точкой инвертировать фазу. Эта схема представлена на рис. 200. В видоизмененной структурной схеме каждый квадратик соответствует элементу моделирующего устройства. В моделирующем устройстве имеются три нелинейных элемен-

та. Два из них соответствуют простым нелинейным элементам. Сигнал на выходе этих элементов нелинейно зависит от входного сигнала. К этим элементам относится релейный элемент, воспроизводящий слагаемое, зависящее

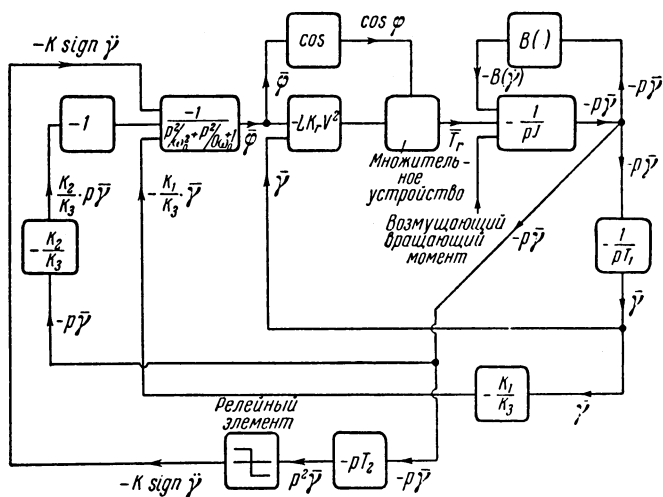


Рис. 200. Структурная схема системы автоматического управления ($T_1 = T_2 = 1$ сек).

от ускорения, введенное Минорским, и элемент, воспроизводящий функцию сопротивления $B(\dot{\gamma})$. Сложная нелинейность вносится косинусом угла отклонения руля, фигурирующим в уравнении (3). В этом случае выходной сигнал зависит нелинейно от одного из двух входных сигналов. Для того чтобы воспроизвести это, на модели необходимо устройство, формирующее на выходе сигнал, пропорциональный косинусу входной величины, и множительное устройство непрерывного действия. Это также относится к случаю, когда выходной сигнал зависит от величины, не связанной с входным сигналом элемента.

13.3.5. Схема набора задачи.

Рассмотрим схему набора задачи (рис. 201), соответствующую видоизмененной структурной схеме, изображенной на рис. 200.

Рулевая следящая система воспроизведена в виде блока 2, в состав которого входит усилитель с потенциально заземленной суммирующей точкой с обратной связью через двойной Т-образный мост (табл. 2). Последовательно с усилителем включена пассивная апериодическая цепь

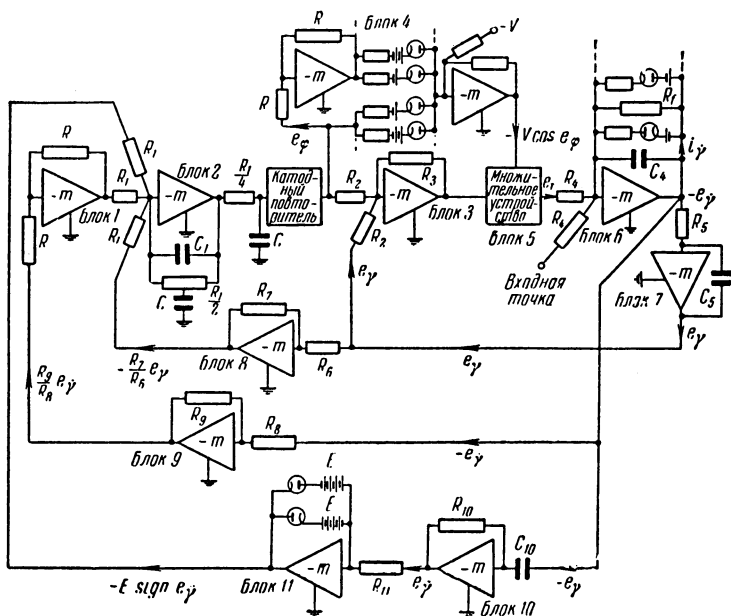


Рис. 201. Схема набора задачи на моделирующей установке.

и буферный каскад катодного повторителя. Апериодическое звено включено для того, чтобы устранить член $\left(1 + p \frac{CR_1}{4}\right)$ в числителе передаточной функции усилителя с обратной связью через Т-образный мост. Катодный повторитель обеспечивает низкое выходное сопротивление.

Входные напряжения, соответствующие $\dot{\gamma}$, $\ddot{\gamma}$ и $\ddot{\gamma}$, суммируются в потенциально заземленной точке блока 2 через равные входные сопротивления. Усилители с потенциально заземленной точкой (блоки 8 и 9) с активными сопротивлениями на входе и в цепях обратной связи вос-

производят численные значения $\frac{K_1}{K_3}$ и $\frac{K_2}{K_3}$, причем последовательно с блоком 9 включен знакоинверсный каскад с коэффициентом усиления, равным единице (блок 1), для получения нужного знака сигнала производной, поступающего на рулевую следящую систему. В блоке 10 напряжение $-e_v$ дифференцируется для получения e_v ; напряжение e_v подается на блок 11, с выхода которого снимается напряжение, пропорциональное слагаемому $K \text{ sign } \ddot{\gamma}$ уравнения (6).

Интегратор (блок 7) преобразует напряжение $-e_v$ в напряжение $+e_v$ в соответствии с преобразованием $-\dot{\gamma}$ в γ в реальной системе.

Вращающему моменту T_r , вызванному отклонением руля, противодействует момент трения, нелинейно зависящий от скорости поворота. Пренебрежем на время нелинейностью и будем считать, что момент сопротивления пропорционален $\dot{\gamma}$, т. е. ограничимся первым членом многочлена $B(\dot{\gamma})$ (4). Считая, что блок 6 — это усилитель с высоким внутренним коэффициентом усиления, и временно пренебрегая обратной связью через диоды, можно приравнять токи, текущие к потенциально заземленной точке, следующим образом:

$$\frac{\bar{e}_T}{R_4} = -\bar{e}_v p C_4 - \frac{\bar{e}_v}{R_f}, \quad (8)$$

т. е.

$$\bar{e}_T = -\left(p C_4 R_4 + \frac{R_4}{R_f} \right) \bar{e}_v.$$

Соответствующее уравнение (5) реальной системы регулирования имеет в операторной форме вид

$$\bar{T}_r = (pJ + B_1) p \bar{\gamma}. \quad (9)$$

Сравнение уравнений модели (8) и системы (9) указывает на следующее соответствие параметров:

$$J \propto C_4 R_4 \quad \text{и} \quad B_1 \propto \frac{R_4}{R_f}, \quad (10)$$

где согласно табл. 4 $J=10$ и $B_1=2$.

13.3.6. Устранение перегрузки блоков.

До сих пор считалось, что блок 7 моделирующего устройства имеет постоянную времени C_5R_5 , равную одной секунде. Он преобразовывает напряжение, соответствующее угловой скорости, в напряжение, соответствующее углу с масштабom времени, равным единице. При составлении схемы оказалось, что усиления блоков 6 и 7 отличаются на широком диапазоне частоты в 10 раз, и существует опасность перегрузки блока с более высоким коэффициентом усиления (№ 7).

Амплитудно-частотные характеристики блоков 6 и 7 изображены на рис. 202. При их построении диоды в цепи

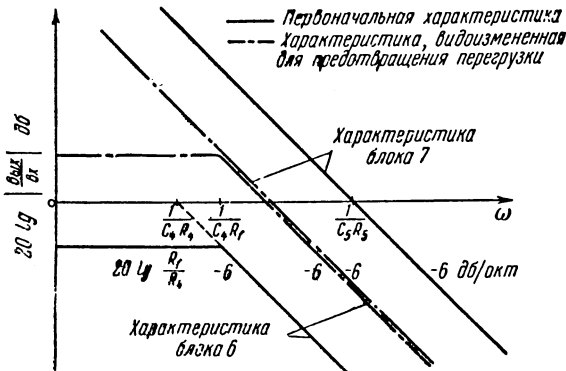


Рис. 202.

обратной связи не учитывались, но принималось во внимание сопротивление обратной связи R_f для моделирования B_1 . На частотах, превышающих $\omega = \frac{1}{C_4R_f}$, усиление отличается на порядок (20 dB). Для того чтобы скорректировать это в возможно более широком диапазоне частот, необходимо сделать постоянные времени C_5R_5 и C_4R_4 равными, не изменяя при этом общую амплитудно-частотную характеристику последовательно соединенных блоков 6 и 7. В данном примере это достигается уменьшением C_4R_4 от 10 сек до $\sqrt{10} \text{ сек}$ и увеличением C_5R_5 от 1 сек до $\sqrt{10} \text{ сек}$.

Значение постоянной времени $C_4 R_f$ неизменно и равно постоянной времени системы $\frac{J}{B_1} = 5$ сек. Видоизмененные амплитудно-частотные характеристики показаны на рис. 202 штрихпунктиром.

Эта коррекция приводит к изменению масштаба напряжения модели для величин, характеризующих состояние системы, так как B_1 теперь имеет значение $0,2\sqrt{10}$, а $J - \sqrt{10}$ вместо 2 и 10 соответственно, как это было раньше. Для того чтобы компенсировать увеличение усиления блока 6 и уменьшение усиления блока 7 в $\sqrt{10}$ раз, необходимо перераспределить усиления блоков модели, на вход которых подается напряжение e_γ с измененным масштабом. Таким образом, коэффициенты усиления блоков 9 и 10 должны быть поделены на $\sqrt{10}$. Измененные значения параметров указаны в строке 5 табл. 4. Значения параметров при R_4 , равном 1 мгом, теперь следующие:

$$C_4 R_4 \propto J = \sqrt{10} \text{ сек},$$

но

$$R_4 = 1 \text{ мгом}; \quad C_4 = \sqrt{10} \text{ мкф},$$

$$C_4 R_f = \frac{J}{B_1} = 5 \text{ сек}, \quad R_f = \frac{5}{\sqrt{10}} \text{ мгом},$$

а также

$$C_5 R_5 = \sqrt{10} \text{ сек}.$$

13.3.7. Нелинейное трение.

Характеристика трения $B(\dot{\gamma})$ воспроизводится с помощью диодного нелинейного преобразователя в цепи обратной связи блока 6.

Прежде чем определять величины сопротивлений нелинейного преобразователя, выбирается масштаб, связывающий напряжение в модели e_γ и скорость поворота корабля. Этот масштаб должен быть таким, чтобы возможные величины этой скорости поворота давали бы допустимые величины напряжения на блоках моделирующего устройства. Например, предположим, что 200 в соответ-

ствуют скорости в 1 рад/сек . Тогда, если к кораблю прикладывается постоянный вращающий момент 10^8 килодинометров, то угловая скорость в конце концов достигнет установившегося значения, ограниченного трением. Предположим, что трение линейное и коэффициент трения имеет значение $B_1 = 2 \cdot 10^8 \text{ килодинометр/рад/сек}$

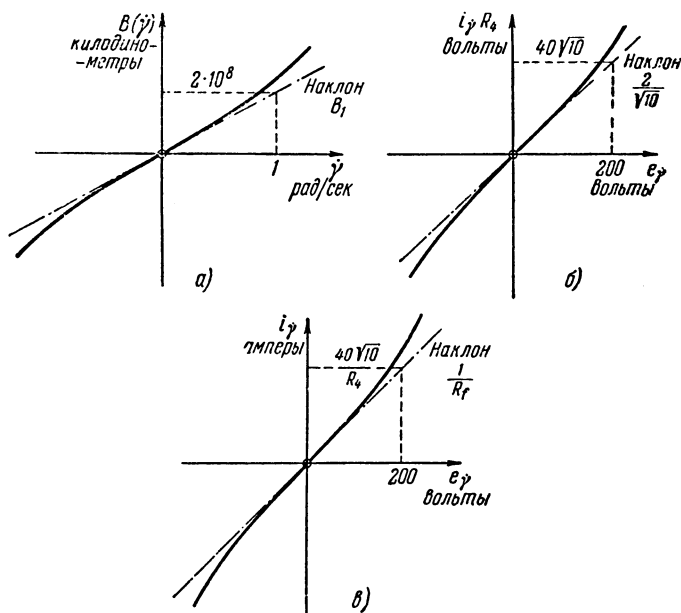


Рис. 203.

(из табл. 4); тогда предельная скорость будет равна $0,5 \text{ рад/сек}$. В моделирующем устройстве этому соответствует $e_\gamma = 100 \text{ в}$, и так как коэффициент усиления блока β равен $\frac{R_f}{R_4} = \frac{1\sqrt{10}}{2}$, то для того, чтобы сигнал на выходе был равен 100 в , входной сигнал должен быть равен $20\sqrt{10} \text{ в}$.

Следовательно, напряжение $20\sqrt{10} \text{ в}$ соответствует вращающему моменту 10^8 килодинометров. Таким образом,

масштабное соотношение, связывающее вращающий момент и напряжение, установлено.

Аналогично интеграл от 1 рад/сек в системе управления дает 1 рад . Это соответствует 200 в на входе блока 7, причем на выходе получается $\frac{200}{C_3 R_3} \text{ в/сек}$. Следовательно, $\frac{200}{C_3 R_3}$ соответствует одному радиану. Масштабы других переменных системы, выраженных через напряжения модели в вольтах, получаются таким же образом.

На рис. 203, а изображена типовая характеристика, связывающая момент трения и скорость вращения. Используя соответствующие масштабы напряжения для ординат и абсцисс (рис. 203, б), находим нелинейную зависимость между e_γ и $R_4 i_\gamma$, где i_γ — ток, поступающий в диод цепи обратной связи блока 6 (рис. 201). Поделив масштаб оси ординат на R_4 , получим требуемую характеристику нелинейного диодного преобразователя, выраженную через ток i_γ и напряжение e_γ (рис. 203, в). Далее, для составления структуры моделирующего устройства следуем методике, указанной в 6.2.

13.3.8. Косинус курсового угла.

Напряжение, пропорциональное косинусу e_φ , получается от нелинейного диодного преобразователя (блок 4 на рис. 201) и затем умножается на $(e_\varphi + e_\gamma)$ при помощи непрерывного множительного устройства*). Коэффициент усиления блока 3 численно равен параметру $LK_r V^2$, так что выходным сигналом множительного устройства является напряжение e_T — аналог вращающего момента руля $LK_r V^2 \cos \varphi$.

13.3.9. Знак углового ускорения.

Знак напряжения углового ускорения, воспроизводящего $K \text{ sign } \ddot{\gamma}$, получается подачей напряжения с выхода дифференциатора (блок 10) на усилитель с потенциально заземленной суммирующей точкой, в цепи обратной связи которого имеются диоды, подзапертые напряжением, подаваемым в катод. Если внутренний коэффициент усиления усилителя — m и на катод диодов подано смещение

*) Подробно о множительных устройствах см., например, [4].

$\pm E$, то входного напряжения, равного $\pm \frac{E}{m}$, достаточно, чтобы заставить один из диодов проводить, и если последовательное сопротивление диода и источника смещения значительно меньше, чем входное сопротивление R_{11} , то напряжение на выходе будет оставаться равным $\pm E$ вольт до тех пор, пока входное напряжение снова не примет значение в пределах от $+\frac{E}{m}$ до $-\frac{E}{m}$ вольт. Следовательно, выходное напряжение зависит только от знака входного напряжения при условии, что m велико.

Важно, чтобы дрейф нуля первого каскада усилителя не был значительным по сравнению с наименьшим значением e_{γ} , так как усилитель имеет высокий коэффициент усиления — m для входного напряжения, лежащего в пределах от $+\frac{E}{m}$ до $-\frac{E}{m}$.

13.3.10. Входные сигналы моделирующего устройства.

Набрав схему на моделирующем устройстве и подавая входные сигналы в виде скачкообразного напряжения через сопротивления в потенциально заземленную суммирующую точку блока δ , мы можем определить переходные процессы. Таким образом, моделируются процессы при внезапном воздействии, стремящиеся изменить курсовой угол. Хорошая система управления должна скорректировать это стремление, изменяя курс быстро и без чрезмерных колебаний.

Влияние изменений в системе управления на переходный процесс легко можно наблюдать, изменяя передаточные функции соответствующих элементов модели.

Литература

1. Williams F. C., and Ritson F. U., Electronic Servo-Simulators, Journal IEE, 1947, 94, Part IIA, p. 270.
2. Ritson F. J. U. and Hammond P. H., The Design and Testing of an Electronic Simulator for a Hydraulic Remote-Position-Control Servomechanism, Proceedings IEE, 1952, 99, Part II, p. 533.
3. Spearman F. J. R., Gait J. J., Hemingway A. V. and Hynes R. W., Tridac a Large Analogue Computing Machine, Proceeding IEE, Paper No 1899 M., 1955, 103B, p. 375.

4. W a s s C. A. A., An Introduction to Electronic Analogue Computers, Pergamon Press Ltd., 1956.
 5. M i n o r s k y N., Directional Stability of Automatically Steered Bodies, Journal Amer. Soc. of Naval Engrs., May 1922, 34, No 2, pp. 280—309.
 6. M i n o r s k y N., Automatic Steering Tests, Journal Amer. Soc. of Naval Engrs., May 1930, 42, No 2, p. 285.
 7. Т е т е л ь б а у м И. М., Электронное моделирование, Физматгиз, 1959. (Добавлено редактором.)
 8. К о б р и н с к и й Н. Е., Математические машины непрерывного действия, Гостехиздат, 1954. (Добавлено редактором.)
 9. К о г а н Б. Я., Электронные моделирующие устройства и их применения для исследования систем регулирования, Физматгиз, 1959. (Добавлено редактором.)
-

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

МЕЖДУКАСКАДНАЯ СВЯЗЬ ПО ПОСТОЯННОМУ ТОКУ

Если анод лампы усилителя непосредственно подключен к последующему каскаду, то эквивалентная схема, в которой лампа заменена источником напряже-

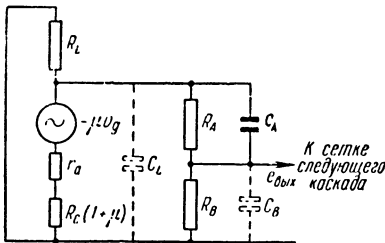


Рис. 204.

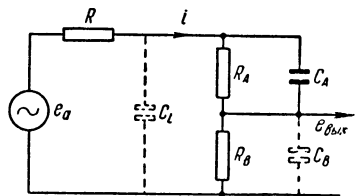


Рис. 205.

ния, имеет вид, представленный на рис. 204. Здесь C_L и C_B — паразитные емкости. Параллельно R_A подключена емкость C_A такая, что $C_A R_A = C_B R_B$.

На основании теоремы Тевенина эквивалентная схема лампы может быть заменена источником напряжения с последовательно подключенным сопротивлением (рис. 205).

Если $\bar{Z}_A = \frac{R_A}{1 + pC_A R_A}$ — полное операторное сопротивление параллельного соединения C_A и R_A и $\bar{Z}_B = \frac{R_B}{1 + pC_B R_B}$ — полное операторное сопротивление параллельного соединения C_B и R_B , то операторная форма выражения для

тока в цепи делителя имеет вид

$$\bar{i} = \frac{\bar{e}_\alpha}{R + \frac{1}{pC_L}(\bar{Z}_A + \bar{Z}_B)} \cdot \frac{1}{pC_L + \bar{Z}_A + \bar{Z}_B},$$

$$\bar{i} = \frac{\bar{e}_A}{R + (1 + pC_L R)(\bar{Z}_A + \bar{Z}_B)}.$$

Пусть $C_A R_A = C_B R_B = T_A$. Тогда

$$\bar{e}_{\text{вых}} = \bar{i} \bar{Z}_B = \frac{\bar{e}_A R_B}{R + pT_A R + (1 + pC_L R)(R_A + R_B)} =$$

$$= \frac{\bar{e}_A R_B}{(R + R_A + R_B) + p(T_A R + C_L R R_A + C_L R R_B)},$$

$$\bar{e}_{\text{вых}} = \bar{e}_A \frac{R_B}{R_A + R_B + R} \cdot \frac{1}{1 + pR \frac{T_A + C_L R_A + C_L R_B}{R_A + R_B + R}}. \quad (\text{П1})$$

Эта зависимость показывает, что передаточная функция, связывающая анодное напряжение с напряжением на входе следующего каскада, соответствует аперриодическому звену с ослаблением по постоянному току.

Для пентода $r_A \gg R_L$ и эквивалентная схема имеет вид, представленный на рис. 68.

Выражение для $\bar{e}_{\text{вых}}$ тогда записывается следующим образом:

$$\bar{e}_{\text{вых}} = -\bar{i} R_L \frac{\alpha}{1 + pT'_L}, \quad (\text{П2})$$

где

$$\alpha = \frac{R_B}{R_A + R_B + R_L} \quad \text{и} \quad T'_L = R \left[\frac{T_A + C_L R_A + C_L R_B}{R_A + R_B + R_L} \right].$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПАССИВНОЙ ИНТЕГРИРУЮЩЕЙ ЦЕПЬЮ

Пассивная интегрирующая цепь рассматривалась ранее (рис. 48). Здесь мы рассмотрим влияние включения этой цепи между анодом лампы и землей. Сначала предположим, что напряжение с анодной нагрузки подается только на интегрирующую цепь. Влияние шунтирования интегрирующей цепи делителем напряжения будет рассмотрено позже. Эквивалентная схема, в которой лампа представлена в виде источника напряжения, изображена на рис. 206 (ср. рис. 205), причем R_T и C_T образуют пассивную интегрирующую цепь.

Для определения передаточной функции выразим $\bar{e}_{\text{вых}}$ через \bar{e}_A . Операторная форма выражения для тока i' , протекающего через R , имеет вид

$$\bar{i}' = \frac{\bar{e}_A}{R + \frac{\frac{1}{pC_L} \left(R_T + \frac{1}{pC_T} \right)}{\frac{1}{pC_L} + R_T + \frac{1}{pC_T}}}$$

Напряжение $e_{\text{вых}}$ представляет собой падение напряжения, вызванное током i' через цепь, содержащую параллельно соединенные C_L , C_T и R_T , т. е.

$$e_{\text{вых}} = \frac{\bar{e}_A \frac{1}{pC_L} \left(R_T + \frac{1}{pC_T} \right)}{R \left(\frac{1}{pC_L} + R_T + \frac{1}{pC_T} \right) + \frac{1}{pC_L} \left(R_T + \frac{1}{pC_T} \right)}$$

Таким образом,

$$\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{e}_a} = \frac{1 + pC_T R_T}{pC_T R + p^2 C_L C_T R R_T + pC_L R + pC_T R_T + 1},$$

$$\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{e}_a} = \frac{1 + pT_T}{p^2 T_L T_T + p(T_L + T_T + C_T R) + 1}, \quad (\text{П3})$$

где $T_T = C_T R_T$ — постоянная времени интегрирующей цепи,

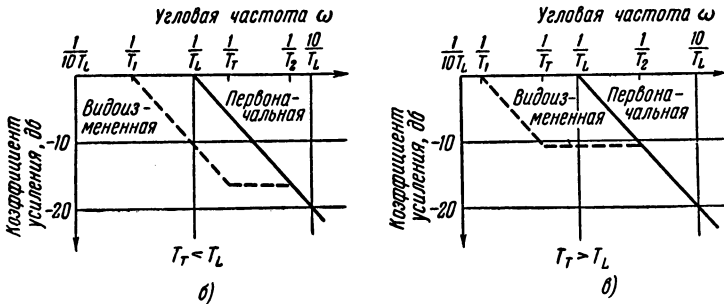
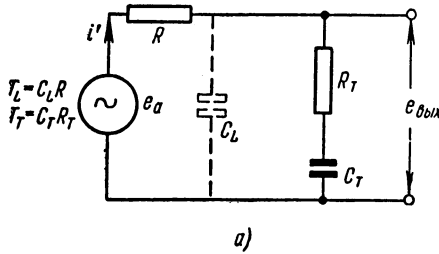


Рис. 206.

$T_L = C_L R$ — постоянная времени анодной цепи лампы,

$$\frac{\bar{e}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{e}_a} = \frac{1 + pT_T}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}, \quad (\text{П4})$$

где

$$T_1 T_2 = T_T T_L \quad (\text{П5})$$

и

$$T_1 + T_2 = T_T + T_L + C_T R. \quad (\text{П6})$$

Когда известна постоянная времени T_L и нужно заменить ее постоянной времени опережения T_T и постоянной времени T_2 , то выполняется такая последовательность действий:

- из уравнения (П5) определяется $T_1 T_2$;
- определяется T_1 при заданном T_2 ;
- из уравнения (П6) вычисляется $C_T R$;
- по известному R определяется C_T ;
- по известному T_T определяется R_T .

Подключение пассивной интегрирующей цепи устранило постоянную времени анодной цепи T_L и заменило его двумя постоянными времени T_1 и T_2 и постоянной времени опережения T_T . Поэтому полная схема называется схемой полюс — нуль — полюс.

Амплитудная характеристика этой схемы изображена на рис. 206, б и в для T_T соответственно меньшего и большего, чем T_L . Сопряженные частоты $\frac{1}{T_T}$ и $\frac{1}{T_L}$ лежат между частотами $\frac{1}{T_1}$ и $\frac{1}{T_2}$, и на логарифмической частотной шкале расстояние между частотами $\frac{1}{T_1}$ и $\frac{1}{T_L}$ равно расстоянию между частотами $\frac{1}{T_T}$ и $\frac{1}{T_2}$. Описанная цепь удобна для стабилизации систем с обратной связью, содержащих несколько аperiodических звеньев (см. гл. 5).

Если напряжение с анода подается на делитель напряжения, как показано на рис. 204, то предыдущие результаты должны быть несколько изменены. При условии, что шунтирование не очень велико, т. е. $(R_A + R_B) \gg R$, эффективная постоянная времени анодной цепи T'_L из уравнения (П2) может использоваться вместо T_L из уравнения (П3), так что

$$\frac{\bar{e}_{\text{вых}}}{e_a} = \frac{R_B}{R_A + R_B + R} \frac{1 + pT_T}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}, \quad (\text{П7})$$

где

$$T_1 T_2 = T_T T'_L \quad (\text{П8})$$

и

$$T_1 + T_2 = T_T + T'_L + C_T R,$$

$$T'_L = \frac{R}{R_A + R_B + R} (T_A + C_L R_A + C_L R_B) \quad (\text{из уравнения (П2)}).$$

Постоянные времени связаны с сопрягающими частотами на графике логарифмической характеристики уравнением $\frac{1}{T} = 2\pi f$. Следовательно, уравнению (П8) эквивалентно следующее выражение, связывающее сопрягающие частоты:

$$f_1 f_2 = f_T f'_L.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ

Работа гидравлического усилителя была рассмотрена в 7.2.5, а его устройство было изображено на рис. 99. Выведем общую передаточную функцию гидроусилителя в предположении, что зависимость между переменными линейна.

Предположим, что скорость поршня пропорциональна открытию отверстия золотника, которое в свою очередь пропорционально смещению катушки золотника от ее центрального положения.

Следовательно,

$$p\bar{x}_R = K\bar{x}_B, \quad (\text{П9})$$

где x_R — перемещение поршня, x_B — смещение золотника, K — коэффициент пропорциональности, p — оператор дифференцирования.

Перемещение золотника вызвано совместным воздействием отклонения подвижной катушки и составляющей отрицательной обратной связи, обусловленной наличием демпфера и пружины. Рассмотрим сначала составляющую, обусловленную наличием обратной связи; сила, действующая на пружину S , равна

$$F = K_v [p\bar{x}_R - p\bar{x}_C],$$

где K_v — постоянная демпфера (сила на единицу скорости); x_C — смещение точки закрепления пружины. Далее

$$F = \bar{x}_C S,$$

где S — жесткость пружины (сила на единицу отклонения). Следовательно,

$$K_v p (\bar{x}_R - \bar{x}_C) = S \bar{x}_C$$

и

$$\bar{x}_C = \frac{K_v p \bar{x}_R}{p K_v + S} = \frac{p T \bar{x}_R}{1 + p T}, \quad (II10)$$

где $T = \frac{K_v}{S}$ — механическая постоянная времени демпфера и пружины.

Тяга $CBAD$ обеспечивает сложение отклонения пружины и отклонения подвижной катушки с перемещением золотника. Из рассмотрения этой тяги видно, что отклонения x_A , x_C и x_B точек A , C и B связаны следующим образом:

$$\bar{x}_B = (1 - N) \bar{x}_A - N \bar{x}_C, \quad (II11)$$

где N есть отношение $\frac{AB}{AC}$ (из рис. 99).

Исключая \bar{x}_C и \bar{x}_B из уравнений (II9), (II10), (II11), получаем зависимость между \bar{x}_A и отклонением поршня \bar{x}_R , имеющую вид

$$p \bar{x}_A = K \left[(1 - N) \bar{x}_A - N \frac{p T \bar{x}_R}{1 + p T} \right],$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}_R}{\bar{x}_A} &= \frac{K(1-N)}{p} \frac{1+pT}{1+pT+KNT}, \\ \frac{\bar{x}_R}{\bar{x}_A} &= \frac{K(1-N)}{p} \alpha \frac{1+pT}{1+\alpha pT}, \end{aligned} \quad (II12)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{1+KNT}.$$

Точка A на тяге прямо связана с подвижной катушкой, так что уравнение (II12) дает общую передаточную функцию усилителя. Она соответствует последовательному соединению интегрирующего и форсирующего звеньев (ср. рис. 49).

Структурная схема усилителя изображена на рис. 207. Отношение плеч рычага N определяет величину отрицательной обратной связи и, следовательно, общий коэффициент усиления. Цепь обратной связи содержит квазидифференцирующую цепочку, и если K велико, то

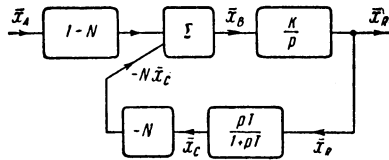


Рис. 207.

передаточная функция замкнутой системы стремится к выражению, обратному передаточной функции цепи обратной связи, и становится независимой от K . Таким образом,

$$\frac{\bar{x}_R}{\bar{x}_A} \approx \frac{1-N}{N} \frac{1+pT}{pT} = \frac{1-N}{N} \left[\frac{1}{pT} + 1 \right].$$

Из этого уравнения видно, что если x_A пропорционально сигналу ошибки следящей системы, то отклонение поршня в гидравлическом усилителе приблизительно пропорционально сумме ошибки и интеграла ошибки. Это устройство является гидравлическим эквивалентом схемы с потенциально заземленной суммирующей точкой (рис. 122) при регулировании по интегралу от ошибки в следящих системах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЭКВИВАЛЕНТНОГО КОМПЛЕКСНОГО КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЕМЕНТА С ЗАЗОРОМ

Приведем в общих чертах вывод выражения для эквивалентного комплексного коэффициента усиления, данного во 2-й строке табл. 3. В этой таблице представлена зависимость между x_1 и x_2 ; в последующем анализе крутизна k будет взята равной единице.

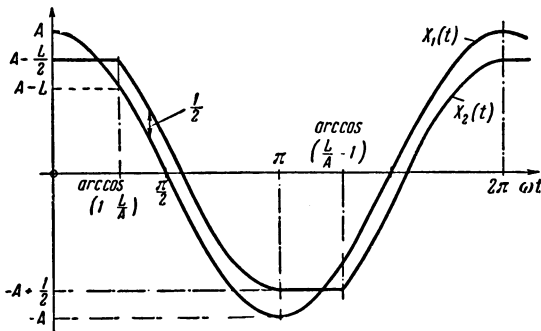


Рис. 208.

Если входные колебания имеют вид $X_1(t) = A \cos \omega t$, то форма колебаний $X_2(t)$ на выходе нелинейного элемента с зазором будет иметь вид, показанный на рис. 208.

Аналитическая форма выражения $X_2(t)$ для отдельных частей периода имеет следующий вид:

$$X_2(t) = \left(A - \frac{L}{2} \right)$$

при $0 < \omega t < \arccos\left(1 - \frac{L}{A}\right)$,

$$\begin{aligned}
 X_2(t) &= \left(A \cos \omega t + \frac{L}{2} \right) \text{ при } \arccos \left(1 - \frac{L}{A} \right) < \omega t < \pi, \\
 X_2(t) &= \left(-A + \frac{L}{2} \right) \text{ при } \pi < \omega t < \arccos \left(\frac{L}{A} - 1 \right), \\
 X_2(t) &= \left(A \cos \omega t - \frac{L}{2} \right) \text{ при } \arccos \left(\frac{L}{A} - 1 \right) < \omega t < 2\pi.
 \end{aligned}
 \tag{П13}$$

Разложение в ряд Фурье для $X_2(t)$ может быть записано в виде

$$X_2(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \tag{П14}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X_2(t) \cos n\omega t d(\omega t)$$

и

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X_2(t) \sin n\omega t d(\omega t).$$

Для того чтобы вычислить значение коэффициентов Фурье, функция $X_2(t)$ интегрируется на отдельных участках интервала от 0 до 2π , так что коэффициент a_n определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\alpha} \left(A - \frac{L}{2} \right) \cos n\omega t d(\omega t) + \right. \\
 + \int_{\alpha}^{\pi} \left(A \cos \omega t + \frac{L}{2} \right) \cos n\omega t d(\omega t) + \\
 + \int_{\pi}^{\beta} \left(-A + \frac{L}{2} \right) \cos n\omega t d(\omega t) + \\
 \left. + \int_{\beta}^{2\pi} \left(A \cos \omega t - \frac{L}{2} \right) \cos n\omega t d(\omega t) \right],
 \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \arccos \left(1 - \frac{L}{A} \right)$$

и

$$\beta = \arccos \left(\frac{L}{A} - 1 \right).$$

Каждый из четырех определенных интегралов вычисляется. Так как нас интересует лишь основная составляющая,

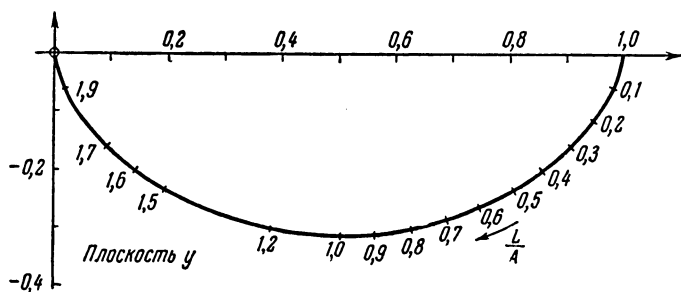


Рис. 209.

вляющая, то принимается $n = 1$. Суммируя результаты, получим выражение для a_1 :

$$a_1 = A \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{L}{A} \right) \left[\frac{L}{A} \left(2 - \frac{L}{A} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Аналогичным образом находится b_n при $n = 1$. В результате мы имеем:

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ 2L - \frac{L^2}{A} \right\}.$$

Эквивалентный комплексный коэффициент усиления определяется в уравнении (4) главы 11 следующим образом:

$$N(A) = \frac{a_1 - j b_1}{A},$$

так что в этом случае

$$N(A) = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{L}{A} \right) \left[\frac{L}{A} \left(2 - \frac{L}{A} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} - \\ - j \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{L}{A} \left(2 - \frac{L}{A} \right) \right\}.$$

Изображение этой функции на плоскости y представлено на рис. 209. Его форма напоминает форму годографа вектора характеристики аperiodического звена для положительных частот.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ДАННЫЕ ЛАМП, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕКСТЕ КНИГИ

	Тип лампы	U_f , в	I_f , ма	U_a , в	I_a , ма	U_{g3} , в	U_{g2} , в	U_{g1} , в	G_m , ма/в	D	R_a , ком
6F37A	пентод	6,3	0,2	250	3	0	100	-2	1,8	4,5	1000
6F91	пентод	6,3	0,3	250	10	0	250	-2	7,6	1,4	2500
6J6	двойной триод	6,3	0,45	100	28,5	—	—	-0,85	5,3	2,5	7,1
12AT7	двойной триод	12,6 6,3	0,15 0,3	250	210	—	—	-2	5,5	1,4	10
13D3	двойной триод	12,6 6,3	0,3 0,6	250	26	—	—	-4,6	2,3	—	14
807	тетрод	6,3	0,9	750	100	—	250	-45	—	—	—
D1	диод	6,3	0,15	200	5	—	—	—	—	—	—

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 345, 354, 356, 373
—, подавление 345
—, —, закон нечувствительности 345
Автопилот 17, 389
Амплидин 200
Анализатор дифференциальный 384
Астатизм второго порядка 207
— нулевого порядка 206
— первого порядка 206, 207 и д.
- Вал вращающийся 196
Велюдин 196, 199
Воздействие постоянное 65 и д.
— синусоидальное 67 и д., 377
— скачкообразное 69 и д.
- Генератор с фазовым сдвигом 79
Гироскоп 194, 206, 234
Годограф частотной характеристики 98, 105 и д.
- Дельта-функция 33
Демпфирование 215, 218, 220
Диаграмма Найквиста 210
- Заземление потенциальное 146
Зазор 281
Запаздывание экспоненциальное 29
Запас устойчивости 123
— — по амплитуде 124
— — по фазе 123
Затухание критическое 32
Звено аperiodическое 28, 30, 114
— — в прямой цепи 54—56
— — квазидифференцирующее 115
— — характеристика частотная 44, 45
— колебательное 32, 118, 181
— пассивное интегрирующее 116
— форсирующее 117
- Изображение интеграла 27
— производной 25
— суммы 24
— функции 24
Изоклина фазовой траектории 259
Импульс единичный 34
— короткий конечной амплитуды 37
Интеграл свертывания 39
Искажения нелинейные 64, 65
- Колебания вынужденные 314 и т.
— неизохронные 70
Кольцо интеграторов 182, 183
Корабль 392, 393 и д.
Коэффициент усиления 53, 62 и д.
— — эквивалентный комплексный 299
— — — двойственный 321
Критерий устойчивости Найквиста 97
— — Рауса 78 83,
- Метадин 200
Моделирование системы регулирования 384
Момент нагрузки 375
Мост 16
— Т-образный 120, 121, 180
Мотор гидравлический ротационный 195
- Неустойчивость 50
Ноль операторного выражения 84
- Окружность граничной обратной связи 58
Оптимизация переходного процесса 361
Отклонение 192
Ошибка позиционная 206
— скоростная 206
— ускорения 207
- Перерегулирование 357
Плоскость фазовая 251
Повторитель катодный 135 и д.
Подавление автоколебаний 345 и д.
Полюс операторного выражения 84
Преобразование Лапласа 24, 26
Принцип потенциального заземления 146
— суперпозиции 22
«Пружина жесткая» 65, 70, 320
«— мягкая» 270, 320
- Радиолокатор 279
Реакция вынужденная 23
— на воздействие постоянное 65 и д.
— — — синусоидальное 67 и д., 377
— — — скачкообразное 69 и д.
— — короткий импульс 38
Регулирование вибрационное 326
— релейное 324
Регулятор скорости вращения двигателя 20, 21

- Реле 324
 —, запаздывание при переключении 335
 Решение операторное 27 и д.
 Рулевой корабля автоматический 392
- Самолет 17, 122, 233, 389
 Связь обратная внутренняя 18
 — — дегенеративная 53
 — — дополнительная (стабилизирующая) 234
 — — механическая 369, 370
 — — отрицательная 15
 — — положительная 15
 — — по ускорению 241
 — — регенеративная 53
 — — скоростная 237, 270
- Сельсин 201
 Сервомеханизм 193
 Сервомотор переменного тока 202
 Сигнал ошибки 192
 Система неустойчивая 50, 52
 — с обратной связью 15, 19 и д.
 — — — активная 17
 — — — многоконтурная 100 и д.
 — — — одноконтурная 49
 — — — пассивная 17
 — — — резонансная 181
 — — — с двумя аperiodическими звеньями 55
 — — — с одним аperiodическим звеном 54, 58, 60
 — — —, стабилизация 160
 — — следящая 192
 — — Варда — Леонарда 200 и д.
 — —, ошибки установившиеся 206
 — — релейная 324 и д.
 — —, воздействие синусоидальное 377
 — — —, портрет фазовый 336, 339, 353
 — — — с обратной связью скоростной линейной 359, 380
 — —, стабилизация 212 и д.
 — — SERME 368
- Сложные функций времени 24
 Соединение элементов последовательное 41
- Спротивление анодное катодного повторителя 139
 — запирающее 141
 — катодное катодного повторителя 141
 — полное входное 72
 — — выходное 72
 — — потенциального заземления 150
- Стабилизация 160, 212 и д.
 — аperiodическим звеном 161
 — демпфированием 215, 218, 220
 — дополнительными обратными связями 234, 236
 — воной нечувствительности 345
 — интегрирующими элементами 243
 — отрицательным гистерезисом 347
 — пассивной интегрирующей цепью 164, 410
- Стабилизация по интегралу ошибки 245
 — по первой производной от ошибки 223, 270
 — скоростной обратной связью 350
 — уменьшением коэффициента усиления 215
 — форсирующей цепью 360
 Стабильность общего коэффициента усиления 62 и д.
 Схема мостовая 351, 352
 — структурная системы с обратной связью 46
- Теорема Дюамеля 39
 Точка особая 251
 — суммирующая 147
 Траектория фазовая 251
 — —, построение методом изоклин 258
 — —, — — Льенара 261
 Трение покоя 288
 — сухое 287
- Управление кораблем автоматическое 392, 393
 — —, моделирование 399, 400
 — —, схема структурная 395 и д.
 — морскими орудиями дистанционное 203
 — самолетом автоматическое 389
- Уравнение дифференциальное линейное 23
 — — — второго порядка 31
 — — — первого порядка 28
- Усиление 53
 Усилитель гидравлический 204, 414
 — напряжения класса А 131
 — симметричный дифференциальный 143, 145
 — постоянного тока 152
 — — с низким коэффициентом 152, 156 и д., 261
 — с потенциально заземленной суммирующей точкой 151
- Ускорение в точке фазовой траектории 257
 Условие устойчивости 75, 85
 Успокоитель колебаний 218
 — настроенный 220
- Установка радиолокационная 279
 Устойчивость системы с обратной связью 75, 300 и д., 304
- Устройство, воспроизводящее квадратную зависимость 187
 —, дифференцирующее по времени 177 и д., 180
 — интегрирующее активное 245
 — — пассивное 243
 — — по времени 171 и д., 176, 177
 — моделирующее 384
 — непрерывного действия 385
 — —, схема структурная 387
 — — электронное 385

- Флюктуации случайные 70
Фокус 254
Функция передаточная 40
— — катодного повторителя 138
— — замкнутой системы (общая передаточная функция) 49
— — обратной связи 49
— — общая усилителя напряжения 134
— — — с потенциальным заземлением 148
— — прямой цепи 49
— — разомкнутой системы 49
— переходная 37
— импульсная 34, 52, 54, 56
— ступенчатая единичная Хевисайда 36
- Характеристика амплитудно-частотная 53, 109
- Характеристика свободная переходная 23
— фазо-частотная 109
— — не минимальная 119
— частотная 43, 57
— — обобщенная 44
- Центр 253
Цепь обратной связи 49
— прямая 49
— RC пассивная 29, 35
— с бесконечной полосой пропускания 119, 120
Цикл предельный 254
— — неустойчивый 255
— — устойчивый 255
- Электродвигатель 16
Элемент нелинейный с зазором 417
-

П. Хэммонд.

Теория обратной связи и ее применения.

Редакторы *И. В. Пыцкий.*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*
и *К. Ф. Брудно.*

Корректор *С. А. Стоцкая.*

Сдано в набор 14/III 1961 г. Подписано
к печати 26/VI 1961 г. Бумага $84 \times 108^{1/32}$.
Физ. печ. л. 13 25. Условн. печ. л. 21,73.
Уч.-изд. л. 19,54. Тираж 15 000 экз.
Цена книги 1 р. 18 к. Заказ № 892.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 5
Мосгорсовнархоза.
Москва, Трехпрудный пер., 9.

П. Ланголд

ТЕОРИЯ
ОБРАТНОЙ СВЯЗИ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

