

МАТЕМАТИ-  
ЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ  
ТЕОРИИ  
АВТОМАТИ-  
ЧЕСКОГО  
РЕГУЛИ-  
РОВАНИЯ



Depoony  
Mexuony Anexcebery

cut abropob

had Billeg  
Searrow

517  
И 20  
УДК 519(0.75)

Иванов В. А. и др.

И 20 Математические основы теории автоматического регулирования. Учеб. пособие для вузов. Под ред. Б. К. Че-  
моданова, М., Высшая школа, 1971.  
808 с., с илл.

На оборот. тит. л. авт.: В. А. Иванов, В. С. Мед-  
ведев, Б. К. Чемоданов и А. С. Ющенко.

В книге изложен математический аппарат, использу-  
емый в теории автоматического регулирования. Приведены  
необходимые сведения из теории дифференциальных и  
разностных уравнений, описывающих процессы в автома-  
тических системах. Значительное внимание уделено линей-  
ной алгебре и матричному исчислению, основам теории  
функций комплексного переменного, спектральному ана-  
лизу, операционному исчислению и теории случайных  
процессов. Изложение вопросов математики сопровож-  
дается рассмотрением основных задач теории автоматиче-  
ского регулирования.

Книга представляет собой учебное пособие для лиц,  
специализирующихся в области автоматического регули-  
рования и знакомых с математикой в объеме обычного  
курса технического вуза.

Рис. 222; библиограф. 44.

2-2-1

301-70

517

Авторы книги:

Виктор Александрович Иванов,  
Владимир Степанович Медведев,  
Борис Константинович Чемоданов,  
Аркадий Семенович Ющенко

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Основой настоящей книги послужил одноименный трехсеместро-  
вый курс лекций, читавшихся авторами в течение многих лет в  
Московском высшем техническом училище им. Баумана.

Квалификация современного инженера-специалиста по автомати-  
ческому регулированию в значительной степени определяется уров-  
нем его математических знаний. Это объясняется тем, что овладение  
теорией автоматического регулирования и разработанными на ее  
основе методами проектирования автоматических систем невозможно  
без знания довольно сложного математического аппарата. Общий  
курс математики, изучаемый в высших технических учебных заве-  
дениях, не в полной мере удовлетворяет требованиям подготовки  
инженеров на факультетах и кафедрах, в той или иной степени  
связанных с проблемами автоматического регулирования. Студенты,  
усвоившие курс высшей математики в объеме обычной программы  
вуза, оказываются тем не менее недостаточно математически под-  
готовленными к восприятию теории автоматического регулирования  
и, как следствие, ряда специальных дисциплин. По этой причине  
во многих вузах страны в учебные планы наряду с общим курсом  
высшей математики введены также и дополнительные главы. В МВТУ  
дополнительные главы высшей математики изучаются в курсе «Ма-  
тематические основы теории автоматического регулирования». В нем  
содержится математический аппарат, знание которого необходимо  
студентам для последующего изучения курса «Теория автоматического  
регулирования». Этот аппарат изложен в предлагаемой книге.

Выбор материала, составляющего содержание книги, опреде-  
ляется особенностями задач, решаемых в теории автоматического  
регулирования. Среди этих задач важнейшими следует назвать ма-  
тематическое описание систем автоматического регулирования (САР),  
являющихся сложными активными динамическими системами с об-  
ратными связями\*), а также их анализ и синтез. Математическими

\*) Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями автомати-  
ческого регулирования. Студенты МВТУ знакомы с этими понятиями из пред-  
шествующего курса «Введение в автоматику». Этой же цели может служить,  
например, книга под ред. В. А. Бесекерского «Основы автоматики». Машино-  
строение, 1967.



моделями непрерывных САР с сосредоточенными параметрами являются обыкновенные дифференциальные уравнения. Непрерывные САР с распределенными параметрами имеют своими моделями дифференциальные уравнения с частными производными. Математическими моделями дискретных САР служат разностные уравнения. Уравнения, характеризующие процессы в САР, могут быть как линейными, так и нелинейными. В первом случае САР относят к классу линейных, а во втором — к классу нелинейных систем. Многие линейные системы имеют постоянные параметры и описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Если параметры линейной системы переменны во времени, то подобная система описывается линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами.

Используемые в теории регулирования методы исследования автоматических систем базируются на ряде разделов высшей математики. Математическими моделями систем автоматического регулирования в большинстве случаев являются дифференциальные или разностные уравнения, поэтому знание основных разделов теории дифференциальных и разностных уравнений необходимо при проектировании или исследовании САР. Некоторые сведения о дифференциальных уравнениях известны студентам втузов из общего курса высшей математики, однако этих сведений недостаточно. Требуется понимание ряда специальных вопросов теории дифференциальных и разностных уравнений. К этим вопросам можно отнести, например, определение условий, при которых существует единственное решение систем уравнений, имеющее большое значение при аналитическом исследовании устойчивости автоматических систем, а также при анализе поведения систем с помощью вычислительных машин. Весьма важными являются также вопросы, связанные с методами решения систем линейных дифференциальных и разностных уравнений, свойствами решений этих систем, например определение зависимости решений от начальных условий и параметров и т. п. Большое значение имеет как изучение способов решений нелинейных дифференциальных и разностных уравнений, так и свойств самих решений.

Изучение теории дифференциальных и разностных уравнений наиболее целесообразно производить с использованием матричной (векторной) формы записи этих уравнений. Матричное исчисление нашло широкое применение в теории автоматического регулирования, благодаря присущим ему достоинствам. Матричная форма записи уравнений автоматических систем является весьма компактной; последнее имеет особенно существенное значение, например, при исследовании многомерных САР, дифференциальные уравнения которых в обычной форме записи имеют громоздкий вид. Компактность записи уравнений в матричной форме, а также характерные приемы матричного исчисления, связанные с решением уравнений, приводят к упрощению и наглядности самого процесса решения. Понимание основных вопросов теории дифференциальных уравнений, а также

необходимых элементов матричного исчисления и линейной алгебры позволяет, кроме того, овладеть общей теорией устойчивости движения и разработанными на основе теории методами исследования устойчивости автоматических систем.

В теории автоматического регулирования получили широкое распространение частотные методы анализа и синтеза САР. Частотные методы являются весьма удобным инструментом, пригодным для суждения об устойчивости системы, точности ее работы, качества переходных процессов и т. д. С наибольшим успехом эти методы используются при исследовании линейных систем, однако с их помощью можно составить представление о поведении многих нелинейных систем. Математической основой частотных методов являются спектральные представления сигналов и связанные с этими представлениями частотные характеристики системы. В свою очередь, спектральные представления непосредственно опираются на ту часть математического анализа, в которой рассматривается теория рядов Фурье и интеграла Фурье. Таким образом, знание этих разделов высшей математики необходимо для восприятия частотных методов исследования САР.

Частотные методы предусматривают анализ САР в комплексной плоскости, например в плоскости амплитудно-фазовой частотной характеристики системы, являющейся функцией комплексного переменного. Аппарат теории функций комплексного переменного широко применяется в теории автоматического регулирования. С его помощью получены весьма удобные методы анализа и синтеза САР, в частности, частотные критерии устойчивости.

Одним из важнейших математических инструментов, применяемых при исследовании САР, является операционное исчисление. Использование методов операционного исчисления при интегрировании многих типов дифференциальных, интегродифференциальных и разностных уравнений приводит к упрощениям процесса решения и поэтому операционное исчисление нашло значительное применение в теории автоматического регулирования при определении процессов, происходящих в системах.

Воздействия, прикладываемые к САР, как правило, являются случайными функциями времени. Поэтому при проектировании САР необходимо принимать во внимание статистические свойства этих воздействий и оценивать влияние такого рода сигналов на динамические свойства системы. Теория вероятностей и случайных процессов дает исследователям необходимый математический аппарат. В теории автоматического регулирования этот аппарат используется при разработке статистических методов анализа и синтеза САР.

В книге изложены указанные специальные разделы высшей математики. В ней содержатся сведения лишь из наиболее важных дополнительных разделов высшей математики, усвоение которых необходимо студентам, специализирующимся в области автоматического регулирования. В программе обязательного курса «Математические основы теории автоматического регулирования» нет дополни-



тельных разделов высшей математики, связанных с оптимизацией систем регулирования (элементы вариационного исчисления, функционального анализа, теории оптимальных процессов), поэтому эти разделы не получили отражения в книге.

Предлагаемая книга рассчитана на студентов вузов и инженеров, избравших своей специальностью автоматическое регулирование и управление. Это определило некоторые методические особенности в изложении материала. Так, доказательства теорем и рассмотрение различных математических методов в книге производится с той степенью строгости, которая делает ее доступной читателям, имеющим математическую подготовку в объеме обычного курса высшей математики технического вуза. Доказательства некоторых наиболее громоздких или не очень существенных теорем опущены и приведены лишь их формулировки и поясняющие замечания. Приводятся примеры, позволяющие лучше овладеть изучаемым математическим аппаратом. Всюду, где это возможно и целесообразно, изложение вопросов математики сопровождается рассмотрением соответствующих задач теории автоматического регулирования. В книгу включены также параграфы (§ 15, 16, 21, 39—41, 46, 47, 51, 56, 58, 69), в которых показывается применение изучаемого математического аппарата при решении ряда основных вопросов теории автоматического регулирования. Содержание этих параграфов имеет иллюстративный характер.

При написании книги авторы использовали ряд пособий и монографий. Перечень литературы приведен в конце книги.

Авторы вполне отдают себе отчет в том, что изложение математического аппарата теории автоматического регулирования представляет собой весьма сложную задачу. Все замечания и советы будут приняты с благодарностью.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ  
ЭЛЕМЕНТЫ  
МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ  
И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Глава I  
МАТРИЦЫ И ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1. Основные понятия и определения. Прямоугольной матрицей  $A$  размера  $m \times n$  называется таблица из  $m$  строк и  $n$  столбцов вида

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]. \quad (1)$$

В этой таблице первый индекс элемента означает номер строки, а второй индекс — номер столбца, в котором он расположен. Так, например, элемент  $a_{ij}$  расположен в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце. Элементы матрицы  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) могут быть действительными или комплексными числами.

В случае, когда  $m = n$ , матрица называется *квадратной матрицей*, такая матрица имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Две матрицы  $A$  и  $B$  одинакового размера называются *равными*, если равны их соответствующие элементы.

Пусть  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ ; тогда  $A = B$ , если  $a_{ij} = b_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ).



Как правило, матрицы обозначают большими буквами латинского алфавита  $A, B, C$  и т. д.

Транспонированной матрицей  $A'$  для матрицы  $A$  размера  $m \times n$  называется матрица размера  $n \times m$ , получаемая из матрицы  $A$  заменой ее строк столбцами, т. е. если

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

то транспонированная матрица будет

$$A' = [a_{ji}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Рассмотрим алгебраические операции над матрицами.

### Сложение

Суммой матриц  $A$  и  $B$  одинакового размера  $m \times n$  называется матрица  $C$  того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов исходных матриц  $A$  и  $B$ , т. е.

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

### Умножение матрицы на число

Произведением матрицы  $A$  на число  $\lambda$  (или числа  $\lambda$  на матрицу  $A$ ) называется матрица  $C$  того же размера, что и  $A$ , элементы которой равны произведению соответствующих элементов матрицы  $A$  на число  $\lambda$ .

$$C = A\lambda = \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

### Умножение двух матриц

Произведением матрицы  $A$  размера  $m_1 \times n_1$  на матрицу  $B$  размера  $n_2 \times m_2$  (произведение определено в случае  $n_1 = n_2$ , т. е. когда число столбцов множителя равно числу строк множителя) называется такая матрица  $C$ , элементы которой определяются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik} b_{kj} \quad (i=1, 2, \dots, m_1; j=1, 2, \dots, m_2). \quad (7)$$

Следовательно,

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n_1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_1 1} & a_{m_1 2} & \dots & a_{m_1 n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m_2} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n_2 1} & b_{n_2 2} & \dots & b_{n_2 m_2} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n_1} a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n_1} a_{1k} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n_1} a_{1k} b_{km_2} \\ \sum_{k=1}^{n_1} a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n_1} a_{2k} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n_1} a_{2k} b_{km_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n_1} a_{m_1 k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n_1} a_{m_1 k} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n_1} a_{m_1 k} b_{km_2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Пример 1. Заданы матрицы  $A$  и  $B$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найти произведение этих матриц  $C = AB$ .  
Согласно равенству (8) имеем:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9 & 4+12 & 2+6 \\ 5+3 & 10+4 & 5+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 & 8 \\ 8 & 14 & 7 \end{bmatrix}.$$

В ряде случаев необходимо вычислять транспонированную матрицу от произведения двух матриц. Покажем справедливость равенства

$$(AB)' = B' A'. \quad (9)$$

Пусть  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ ; согласно равенству (7)  $AB = \left[ \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik} b_{kj} \right]$ , а в соответствии с равенством (4)

$$(AB)' = \left[ \sum_{k=1}^{n_1} a_{jk} b_{ki} \right].$$



Для транспонированных матриц  $B' = [b_{ji}]$  и  $A' = [a_{ji}]$  аналогично найдем

$$B'A' = \sum_{k=1}^{n_1} b_{ki} a_{jk}.$$

Полученные выражения для  $(AB)'$  и  $B'A'$  доказывают справедливость равенства (9).

**2. Свойства матриц.** Рассмотрим некоторые свойства матриц относительно введенных выше операций сложения и умножения.

**Свойство 1.** Операция сложения матриц обладает свойством коммутативности, т. е.

$$A + B = B + A. \quad (10)$$

**Свойство 2.** Операция сложения матриц обладает свойством ассоциативности, т. е.

$$A + (B + C) = (A + B) + C. \quad (11)$$

Из свойств 1 и 2 видно, что при суммировании конечного числа матриц слагаемые можно писать в любом порядке, а скобки, определяющие порядок суммирования, расставлять произвольно.

**Свойство 3.** Существует единственная матрица  $X$  такая, что если прибавить ее к произвольной матрице  $A$ , то матрица  $A$  не изменится, т. е.

$$A + X = A. \quad (12)$$

Матрица, удовлетворяющая условию (12), является единственной, и все ее элементы есть нули. Такая матрица называется нулевой и обозначается  $0$ , т. е.

$$X = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

**Свойство 4.** Для всякой матрицы  $A$  существует единственная матрица  $Y$  такая, что сумма этих матриц равна нулевой матрице, т. е.

$$A + Y = 0. \quad (14)$$

Все элементы матрицы  $Y$  по модулю равны элементам матрицы  $A$ , но имеют противоположные знаки, поэтому

$$A + Y = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix} = 0.$$

Матрицу  $Y$  обозначают  $-A$  и называют матрицей, противоположной матрице  $A$ , т. е.

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Разностью двух матриц  $A - B$  одинакового размера называется такая матрица  $C$ , для которой справедливо равенство  $B + C = A$ .

Разность всегда существует и равна сумме  $A + (-B)$ . Действительно,

$$B + C = B + [A + (-B)] = B + [(-B) + A] = [B + (-B)] + A = 0 + A = A,$$

т. е. выбранная матрица  $C$  удовлетворяет определению разности.

**Свойство 5.** Если  $a$  и  $b$  — числа,  $A$  — матрица, то справедливы соотношения

$$a(bA) = (ab)A = b(aA). \quad (16)$$

**Свойство 6.** Если  $a$  — число,  $A$  и  $B$  — матрицы одинакового размера, то справедливо равенство

$$a(A + B) = aA + aB. \quad (17)$$

**Свойство 7.** Если  $a$  и  $b$  — числа,  $A$  — матрица, то справедливо равенство

$$(a + b)A = aA + bA. \quad (18)$$

**Свойство 8.** Произведение единицы на любую матрицу не изменяет эту матрицу, т. е.

$$1 \cdot A = A. \quad (19)$$

**Свойство 9.** Если  $a$  — число,  $A$  и  $B$  — матрицы размера соответственно  $m_1 \times n_1$  и  $m_2 \times n_2$  ( $n_1 = n_2$ ), то справедливо соотношение

$$a(AB) = (aA)B. \quad (20)$$

**Свойство 10.** Операция умножения матриц обладает свойством ассоциативности (при умножении матриц скобки, определяющие порядок выполнения умножения, можно расставлять произвольно), т. е.

$$A(BC) = (AB)C, \quad (21)$$

где размер матриц  $A$ ,  $B$  и  $C$  равен соответственно  $m_1 \times n_1$ ,  $n_1 \times n_2$ ,  $n_2 \times n_3$ .

**Свойство 11.** Среди всех матриц размера  $n \times n$  существует единственная матрица такая, что ее произведение на произвольную квадратную матрицу  $A$  слева или справа не изменяет матрицу  $A$ , т. е.

$$AE = EA. \quad (22)$$



Непосредственным умножением матрицы  $A$  на матрицу  $E$  нетрудно проверить, что матрицей  $E$ , удовлетворяющей равенству (22), является матрица, у которой элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице, а остальные элементы нули, т. е.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Матрица  $E$  называется *единичной*.

*Скалярной матрицей* называется такая матрица, у которой на главной диагонали расположены одинаковые элементы, а остальные элементы — нули. Легко заметить, принимая во внимание равенство (23), что

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix} = \alpha E. \quad (24)$$

*Свойство 12. Операция умножения матриц обладает свойством дистрибутивности относительно сложения, т. е.*

$$(A + B)C = AC + BC. \quad (25)$$

$$C(A + B) = CA + CB. \quad (26)$$

Из свойства 4 следует, что умножение матриц дистрибутивно относительно вычитания, т. е.

$$(A - B)C = AC - BC, \quad (27)$$

$$C(A - B) = CA - CB. \quad (28)$$

*Свойство 13. Числовой множитель  $\alpha$  можно ставить при любом из матричных множителей, т. е.*

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B). \quad (29)$$

В справедливости приведенных выше свойств матриц легко убедиться, записывая матрицы в виде таблиц и выполняя указанные над ними действия.

Операция умножения матриц не обладает свойством коммутативности. Действительно, пусть, например, даны две матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 18 & 11 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 14 \end{bmatrix},$$

откуда следует, что  $AB \neq BA$ .

При перемножении матриц  $A$  и  $B$  надо указывать порядок выполнения операции умножения; например, в случае произведения  $AB$  указывается, что матрица  $B$  умножена на матрицу  $A$  слева, а в случае произведения  $BA$  — что матрица  $B$  умножена на матрицу  $A$  справа.

Пусть имеем матрицу, состоящую из одного столбца, т. е. размера  $n \times 1$ ,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Тогда транспонированная одностолбцовая матрица будет состоять из одной строки (имеет размер  $1 \times n$ )

$$x' = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]. \quad (31)$$

Матрицу, состоящую из одного столбца или одной строки, будем называть *арифметическим вектором*. Естественно, что векторы, как частный вид матриц, обладают всеми их свойствами.

## § 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

**1. Инверсии и перестановки.** Пусть задано  $n$  натуральных чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ . Меняя местами различные элементы этого ряда, можно получить  $n!$  всевозможных комбинаций из  $n$  элементов. Каждая комбинация из определенных элементов, следующих в определенном порядке, называется *перестановкой*. Например, для трех чисел  $1, 2, 3$  получаем  $3! = 6$  перестановок:

$$1 \ 2 \ 3, \ 1 \ 3 \ 2, \ 2 \ 1 \ 3, \ 2 \ 3 \ 1, \ 3 \ 1 \ 2, \ 3 \ 2 \ 1.$$

Случай, когда в перестановке большее число следует перед меньшим, называется *инверсией*. Два числа в перестановке образуют инверсию, если большее число стоит впереди меньшего. Так, например, в перестановке  $1 \ 3 \ 2$  — одна инверсия, а в перестановке  $3 \ 2 \ 1$  — три инверсии.

Чтобы подсчитать число инверсий в какой-либо перестановке, нужно перебрать ее элементы в порядке возрастания, считая каждый раз число элементов, расположенных перед рассматриваемым и имеющих большее, чем этот элемент, значение. Суммирование полученных результатов дает число инверсий. Число инверсий в перестановке обозначается заключением этой перестановки в жирные квадратные скобки; так, можно записать:

$$[132] = 1, \ [321] = 3, \ [51324] = 5.$$

Если перестановка имеет четное число инверсий, то она называется *четной*; если же число инверсий нечетное, то перестановка называется *нечетной*.

Операция, которая заключается в перемене местами двух членов перестановки, называется *транспозицией*.

**Теорема 1.** Транспозиция изменяет четность перестановки.

**Доказательство.** Рассмотрим перестановку из  $n$  элементов  $a_1 a_2 \dots a_i \dots a_j \dots a_n$ . Пусть транспозиция осуществляется между элементами  $a_i$  и  $a_j$ . После транспозиции число инверсий для элементов  $a_i$  и  $a_j$  с элементами, стоящими левее  $a_i$ , не изменится. Не изменится также число инверсий для элементов, расположенных правее  $a_j$ . Обозначим число элементов, расположенных между  $a_i$  и  $a_j$ , через  $m$ . Пусть до транспозиции из этих  $m$  элементов  $\mu$  образует, а  $\nu$  не образует инверсию с элементом  $a_i$ . Пусть также  $\mu_1$  элементов образует, а  $\nu_1$  не образует инверсию с  $a_j$ . Очевидно, что  $\mu + \nu = \mu_1 + \nu_1 = m$ , т. е.

$$\nu = m - \mu, \quad \nu_1 = m - \mu_1. \quad (1)$$

После транспозиции элементы, расположенные между  $a_i$  и  $a_j$  и образывавшие ранее инверсию с  $a_i$  или  $a_j$ , не будут ее иметь и наоборот. Кроме того, после транспозиции, в случае, если  $a_i < a_j$ , добавляется инверсия между  $a_i$  и  $a_j$ ; если же  $a_j < a_i$ , транспозиция ликвидирует инверсию между ними. Таким образом, после транспозиции число инверсий изменится на величину

$$[(\mu + \mu_1) - (\nu + \nu_1)] \pm 1. \quad (2)$$

Из выражений (2) и (1) следует, что изменение числа инверсий после транспозиции равно

$$2(\mu + \mu_1 - m) \pm 1, \quad (3)$$

т. е. изменение числа инверсий после транспозиции нечетно.

Теорема доказана.

**2. Определители  $n$ -го порядка.** Рассмотрим квадратную матрицу размера  $n \times n$ , т. е. таблицу, составленную из  $n^2$  элементов

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Введем следующее определение. *Определителем (детерминантом)  $n$ -го порядка квадратной матрицы размера  $n \times n$  называется алгебраическая сумма всех возможных произведений ее элементов, взятых по одному и только одному из каждой строки и каждого столбца, причем знак каждого слагаемого определяется числом инверсий в перестановках, составленных из первых и вторых индексов членомножителей; если сумма числа инверсий четная, то слагаемое положительно, если нечетная — отрицательно.*

Для определителя вводится обозначение

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Согласно определению имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \dots i_n \\ j_1 j_2 \dots j_n}} (-1)^{s+t} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}, \quad (6)$$

где  $s$  — число инверсий в перестановке из первых индексов  $i_1 i_2 \dots i_n$ , а  $t$  — число инверсий в перестановке из вторых индексов  $j_1 j_2 \dots j_n$  ( $s = [i_1 i_2 \dots i_n]$ ,  $t = [j_1 j_2 \dots j_n]$ ).

Покажем, что если в каком-либо слагаемом определителя поменять местами два множителя, то знак этого слагаемого не изменится. Действительно, согласно теореме 1 при транспозиции двух множителей перестановки из первых и из вторых индексов изменяют свою четность, а четность суммы не изменится. Таким образом, последовательно переставляя пары множителей, всегда можно первые индексы множителей каждого слагаемого определителя расположить в порядке возрастания. Знаки каждого слагаемого в этом случае не изменяются, поэтому, не нарушая общности, выражение для определителя можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}. \quad (7)$$

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Вычислить определитель второго порядка.

Имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{0+0} a_{11} a_{22} + (-1)^{0+1} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \quad (8)$$

**Пример 2.** Вычислить определитель третьего порядка.

Имеем:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{0+0} a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{0+2} a_{12} a_{23} a_{31} + \\ &+ (-1)^{2+0} a_{31} a_{22} a_{13} + (-1)^{0+2} a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^{0+1} a_{13} a_{21} a_{32} + \\ &+ (-1)^{2+2} a_{23} a_{32} a_{11} = \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{31} a_{22} a_{13} - a_{13} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{23} a_{22} a_{11}. \end{aligned} \quad (9)$$



Из приведенных примеров следует, что введенное понятие определителя  $n$ -го порядка обобщает известное из курса высшей математики для вузов понятие определителей второго и третьего порядков.

**3. Свойства определителей.** Для вычисления определителей высшего порядка простых правил не существует. Такие определители вычисляются на основе следующих свойств.

**Свойство 1.** Если в определителе строки заменить столбцами, сохраняя при этом порядок их следования, то значение определителя не изменится. Иными словами, определители квадратной матрицы и соответствующей ей транспонированной матрицы равны.

Рассмотрим два определителя

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

отличающиеся друг от друга тем, что столбцы одного из них являются одноименными (в смысле порядка следования) строками другого.

Выберем из определителя  $D$  произвольное слагаемое  $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ ; оно также будет и слагаемым определителя  $\Delta$ , так как в него входят элементы из каждой строки и каждого столбца и только по одному, причем сумма инверсий в перестановках из первых и вторых индексов будет той же четности. Таким образом, все слагаемые определителя  $D$  войдут с тем же знаком в определитель  $\Delta$ . Отсюда получим, что  $D = \Delta$ .

Следовательно, если строки определителя обладают каким-либо свойством, то этим же свойством обладают столбцы определителя. Поэтому в дальнейшем все свойства будем формулировать только для строк определителя.

**Свойство 2.** Если одна из строк определителя нулевая, то определитель равен нулю.

В самом деле, каждое слагаемое определителя представляет собой произведение элементов, взятых из каждой строки; следовательно, в него войдет и нулевой элемент, а так как определитель равен сумме произведений элементов, то этот определитель равен нулю.

**Свойство 3.** Если в определителе поменять местами две строки, то по абсолютному значению определитель не изменится, а знак определителя изменится на обратный.

Рассмотрим два определителя, у которых переставлены строки  $i$  и  $k$ :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Выберем произвольное слагаемое  $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{i_1 j_1} \dots a_{k j_k} \dots a_{n j_n}$  определителя  $D$ . Это слагаемое будет также слагаемым второго определителя  $\Delta$ . Но так как в определителе  $\Delta$  столбцы остались те же самые, что и у определителя  $D$ , а две строки поменялись местами, то перестановки из вторых индексов элементов для обоих определителей будут одинаковой четности, а перестановки из первых индексов будут отличаться на одну инверсию, т. е. изменят четность. Следовательно, все слагаемые обоих определителей по абсолютной величине одинаковы, но имеют противоположные знаки, т. е.

$$\Delta = -D.$$

**Свойство 4.** Всякий определитель, у которого две строки одинаковы, равен нулю.

Пусть  $D$  — определитель с двумя равными строками. Поменяем местами эти строки, тогда, с одной стороны, на основании предыдущего свойства новый определитель  $\Delta = -D$ , с другой стороны,  $\Delta = D$ , так как определитель не изменяется при замене одной строки на одинаковую другую строку. Это возможно лишь в случае, когда  $D = 0$ .

**Свойство 5.** Если элементы какой-либо строки определителя имеют общий множитель, то этот множитель можно вынести за знак определителя.

Действительно, по определению имеем:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m a_{k1} & m a_{k2} & \dots & m a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots m a_{kj_k} \dots a_{nj_n} =$$

$$= m \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{kj_k} \dots a_{nj_n} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойство доказано.

Отсюда следует, что для того чтобы умножить определитель на число  $m$ , достаточно умножить на это число лишь все элементы какой-либо его строки или столбца.

**Свойство 6.** Определитель, у которого какие-либо две строки пропорциональны, равен нулю.

Пусть у определителя  $D$  элементы  $j$ -й строки равны элементам  $i$ -й строки, умноженным на постоянное число  $m$ ; тогда из свойств 4 и 5 непосредственно следует справедливость свойства 6.

**Свойство 7.** Если элементы некоторой  $i$ -й строки определителя являются суммами двух слагаемых, то определитель можно разложить на сумму двух определителей того же порядка, причем в первом определителе в качестве элементов  $i$ -й строки будут первые

слагаемые, а во втором определителе в качестве элементов  $i$ -й строки будут вторые слагаемые, остальные строки останутся такими же, как у первоначального определителя.

Рассмотрим определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} + c_{k1} & b_{k2} + c_{k2} & \dots & b_{kn} + c_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots (b_{kj_k} + c_{kj_k}) \dots a_{nj_n}.$$

Выполняя операцию умножения и разделяя результат на две суммы, найдем:

$$D = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t (a_{1j_1} a_{2j_2} \dots b_{kj_k} \dots a_{nj_n} + a_{1j_1} a_{2j_2} \dots c_{kj_k} \dots a_{nj_n}) = \\ = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots b_{kj_k} \dots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots c_{kj_k} \dots a_{nj_n} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Полученное равенство устанавливает справедливость свойства 7.

**Свойство 8.** Если к какой-либо строке определителя прибавить другую его строку, умноженную на некоторое число, то значение определителя не изменится.

Прибавим к  $i$ -й строке определителя  $D$  его  $j$ -ю строку и определитель, полученный после такого преобразования, обозначим через  $\Delta$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + ma_{j1} & a_{i2} + ma_{j2} & \dots & a_{in} + ma_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D + mD_j.$$

Согласно свойству 6  $D_1 = 0$ , следовательно,  $\Delta = D$ , что и требовалось доказать.

Из свойства 8 следует, что если какая-нибудь строка определителя является *линейной комбинацией* других строк\*), то этот определитель равен нулю.

**4. Миноры и алгебраические дополнения.** Рассмотрим определитель  $n$ -го порядка

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Выберем произвольно в этом определителе  $k$  строк и  $k$  столбцов ( $1 \leq k \leq n$ ). Из элементов, находящихся на пересечении выбранных строк и столбцов, можно образовать определитель  $k$ -го порядка, который назовем *минором*  $k$ -го порядка определителя  $D$ . Вычеркнем затем в нашем определителе выбранные  $k$  строк и  $k$  столбцов, тогда из остальных элементов можно образовать определитель  $n - k$ -го порядка, который будем называть *дополнительным минором* определителя  $D$ . Минор будем обозначать  $M$ , а дополнительный минор  $\bar{M}$ .

**Пример 3.** Вычислить минор  $M$  и дополнительный минор  $\bar{M}$  для второй и четвертой строк и первого и третьего столбцов определителя:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Выберем в определителе  $D$  вторую и четвертую строки, первый и четвертый столбцы. Тогда имеем:

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Пусть  $a_{ij}$  — некоторый элемент определителя  $D$  (очевидно, что минор первого порядка является элементом определителя). Под *алгебраическим дополнением* элемента определителя  $D$  будем понимать дополнительный минор к элементу  $a_{ij}$ , взятый со знаком  $(-1)^{i+j}$ , где  $i$  — номер выбранной строки, а  $j$  — номер столбца. Алгебраическое дополнение обозначается  $A_{ij}$ , т. е.  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \bar{M}$ .

**Пример 4.** Вычислить алгебраическое дополнение  $A_{21}$  в определителе

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

\*) *Линейной комбинацией* каких-либо элементов называется сумма произведений этих элементов на произвольные постоянные числа.



Используя определение алгебраического дополнения имеем:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

**Теорема 2.** Произведение некоторого элемента определителя  $a_{ij}$  на его алгебраическое дополнение  $A_{ij}$  равно алгебраической сумме всевозможных слагаемых определителя  $D$ , в которые  $a_{ij}$  входит в качестве общего множителя:

**Доказательство.** Рассмотрим алгебраическую сумму всевозможных слагаемых определителя, имеющих  $a_{ij}$  общим множителем, с теми же знаками, с которыми они входят в исходный определитель  $D$ . Обозначим эту сумму  $S$ , тогда

$$S = \sum (-1)^{s+t} a_{ij} a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{i-1\lambda} a_{i+1\mu} \dots a_{nr},$$

где элементы последовательности  $\alpha \beta \dots \rho$  принимают значения из ряда чисел  $1 2 \dots j-1 j+1 \dots n$ . Обозначим через  $t$  число инверсий в перестановке из первых индексов, а через  $s$  — число инверсий в перестановке из вторых индексов элементов слагаемых в сумме  $S$ :

$$s = [i 1 2 \dots i-1 j+1 \dots n] = i-1;$$

$$t = [j \alpha \beta \dots \lambda \mu \dots \rho] = j-1 + [\alpha \beta \dots \lambda \mu \dots \rho] = j-1 + t',$$

где  $t' = [\alpha \beta \dots \lambda \mu \dots \rho]$ .

Суммируя инверсии, найдем:

$$s + t = i + j + t' - 2,$$

откуда

$$(-1)^{s+t} = (-1)^{(i+j+t'-2)} = (-1)^{i+j} (-1)^{t'}.$$

Подставляя это значение в сумму  $S$ , получим

$$S = \sum (-1)^{i+j} (-1)^{t'} a_{ij} a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{i-1\lambda} a_{i+1\mu} \dots a_{nr} =$$

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} \sum (-1)^{t'} a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{i-1\lambda} a_{i+1\mu} \dots a_{nr}.$$

В сумме, входящей в правую часть последнего равенства, перестановка из первых индексов не имеет инверсии, а перестановка из вторых индексов имеет  $t'$  инверсий, поэтому

$$S = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

Полученное равенство доказывает теорему.

Следующая теорема устанавливает возможность разложения определителя по элементам строки или столбца.

**Теорема 3.** Любой определитель можно представить в виде суммы произведений элементов какой-либо строки или столбца на

соответствующие алгебраические дополнения, т. е. если

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

то справедливы следующие равенства:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}, \quad (10)$$

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}. \quad (11)$$

**Доказательство.** Теорема будет доказана, если удастся показать, что сумма (10) или (11) содержит все слагаемые определителя  $D$ , взятые с их знаком, и только эти слагаемые.

Выберем произвольное слагаемое  $a_{ij}a_{1\alpha}a_{2\beta} \dots a_{i-1\lambda}a_{i+1\mu} \dots a_{nr}$  определителя  $D$ . По доказанной выше теореме 2 оно будет входить в произведение  $a_{ij}A_{ij}$ , притом с тем же знаком, что и в определителе  $D$ . В другое произведение  $a_{ik}A_{ik}$  ( $i \neq k$ ) это слагаемое уже не войдет, так как в противном случае в это слагаемое войдут два элемента из одной и той же строки, что невозможно.

Перебирая произведения  $a_{i1}A_{i1}, a_{i2}A_{i2}, \dots, a_{in}A_{in}$ , мы учтем все члены определителя  $D$  — тем докажем возможность разложения (10) определителя  $D$  по элементам  $i$ -й строки. Аналогичным образом доказывается справедливость формулы (11) разложения определителя  $D$  по элементам  $j$ -го столбца.

Теорема доказана.

Величину суммы произведений элементов строки определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки устанавливает следующая теорема.

**Теорема 4.** Сумма произведений элементов некоторой строки определителя  $n$ -го порядка на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю, т. е.

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

**Доказательство.** Рассмотрим определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Кроме того, рассмотрим другой определитель  $\Delta$ , который получается из определителя  $D$  заменой  $j$ -й строки на  $i$ -ю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Согласно свойству 4 (см. § 2), определитель  $\Delta = 0$ . Обозначим алгебраические дополнения определителя  $\Delta$  через  $B_{ij}$ , а алгебраические дополнения определителя  $D$  через  $A_{ij}$ . Разложим вспомогательный определитель  $\Delta$  по элементам его  $j$ -й строки:

$$\Delta = a_{i1}B_{j1} + a_{i2}B_{j2} + \dots + a_{in}B_{jn} = 0.$$

Но определители  $D$  и  $\Delta$  отличаются только  $j$ -й строкой, поэтому

$$A_{j1} = B_{j1}, \quad A_{j2} = B_{j2}, \quad \dots, \quad A_{jn} = B_{jn}.$$

В результате можно записать, что

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что справедливо также равенство

$$a_{1k}A_{2k} + a_{2k}A_{3k} + \dots + a_{nk}A_{1k} = 0, \quad (13)$$

так как строки и столбцы определителя в силу свойства 1 равноправны.

**5. Вычисление некоторых определителей.** Методы вычисления определителей разберем на примерах.

**Вычисление определителя с помощью понижения его порядка**

Вычисление определителей порядка выше третьего следует выполнять путем последовательного сведения этого определителя к низшему порядку, разлагая его по элементам какой-либо строки или столбца.

**Пример 5.** Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам первой строки. Имеем в соответствии с теоремой 3

$$D = 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(12 + 4 - 32 - 2) - 2(8 + 3 - 24 - 1) - 3(4 + 36 - 32 - 6) =$$

$$= -18 + 28 - 6 = 4.$$

Однако удобнее разложить этот определитель по элементам не первой строки, а третьего столбца, так как третий столбец имеет два нулевых элемента. В этом случае получим

$$D = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(8 + 4 + 27 - 24 - 12 - 3) - (2 + 6 + 12 - 18 - 4 - 2) = 4.$$

**Вычисление определителя с помощью приведения его к треугольному виду**

Вычисление определителя упрощается, если в этом определителе элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Такой определитель называется *определителем треугольного вида*. В этом случае определитель равен произведению элементов, расположенных на главной диагонали.

**Пример 6.** Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

Согласно свойству 7, представим определитель  $D$  в виде суммы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

В первом определителе вычтем из второй, третьей и четвертой строк первую, а второй определитель представим опять в виде суммы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

Вынесем из второго слагаемого определителя общий множитель первой строки, а из третьего — общий множитель первой и второй строк:

$$D = bcd + a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + ab \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$



Вычитая из третьего и четвертого столбца определителя второго слагаемого его второй столбец и раскладывая определитель третьего слагаемого на сумму двух определителей, получим

$$D = bcd + a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \\ 1 & 1 & 0 & d \end{vmatrix} + ab \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} \right\}.$$

Вычисляя полученные определители треугольного вида, а в последнем определителе вычитая третий столбец из четвертого, получим окончательно:

$$D = bcd + acd + abc + abcd + ab \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix} = bcd + acd + abc + abd + abcd.$$

### Вычисление определителей с помощью рекуррентных соотношений

В некоторых случаях удобно производить вычисление определителей с помощью рекуррентных соотношений\*). С помощью этого метода можно, например, вычислить определитель вида

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называется определителем Вандермонда.

**Пример 7.** Вычислить определитель Вандермонда

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Вычтем из каждого столбца этого определителя начиная со второго предыдущий, умноженный на  $a_1$ :

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

\* Рекуррентным соотношением называется формула, выражающая какую-либо величину, зависящую от числа  $n$ , через ту же величину при меньшем абсолютном значении  $n$ .

Раскроем определитель  $V_n$  по элементам первой строки и вынесем общие множители строк за знак определителя:

$$V_n = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} = \\ = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots \\ \dots (a_n - a_1) V_{n-1}.$$

Здесь  $V_{n-1}$  — определитель Вандермонда  $n-1$ -го порядка с элементами  $a_2, a_3, \dots, a_n$ . Таким же способом, как и для  $V_n$ , найдем

$$V_{n-1} = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots (a_n - a_2) V_{n-2}.$$

Продолжая аналогичные операции, окончательно получим:

$$V_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1}),$$

т. е.

$$V_n = \prod_{n \geq i > k \geq 1} (a_i - a_k).$$

**6. Ранг матрицы. Обратная матрица и ее свойства.** Назовем *минором*  $k$ -го порядка матрицы  $A$  определитель, составленный из элементов произвольно выбранных ее  $k$  строк и  $k$  столбцов.

Введем понятие ранга матрицы. Если какой-либо минор порядка  $r$  матрицы  $A$  не равен нулю, а все миноры, начиная с минора порядка  $r+1$ , равны нулю, то число  $r$  называется *рангом матрицы* ( $r = \text{rang } A$ ).

Будем считать ранг матрицы равным нулю, если все элементы матрицы равны нулю. Очевидно, что ранг квадратной матрицы, определитель которой не равен нулю, равен ее размеру, т. е.  $r = n$ . При вычислении ранга матрицы определение всех миноров  $r+1$ -го порядка может оказаться громоздким.

Следующая теорема устанавливает, что возможно находить ранг матрицы, определяя не все миноры  $r+1$ -го порядка, а лишь окаймляющие миноры порядка  $r+1$ .

**Теорема 5.** Если в матрице  $A$  существует минор  $r$ -го порядка не равный нулю, а все миноры  $r+1$ -го порядка, окаймляющие этот минор, равны нулю, то  $r$  — ранг матрицы.

Теорему примем без доказательства\*).

Для вычисления ранга матрицы удобно воспользоваться методом окаймления: сначала найти минор  $r$ -го порядка не равный нулю, а затем, произвольно присоединяя к нему оставшиеся строки и столбцы, вычислить окаймляющие миноры  $k+1$ -го порядка. Затем

\* Доказательство теоремы см., например: Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М. «Наука», 1968, стр. 71 — 73.

вычислить все окаймляющие миноры  $k+2$ -го порядка и т. д. Такие вычисления надо продолжать до тех пор, пока не будет найден минор  $r$ -го порядка, не равный нулю, а все окаймляющие его миноры  $r+1$ -го порядка окажутся равными нулю. Порядок  $r$  последнего минора не равен нулю и будет рангом матрицы.

**Пример 8.** Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Минор первого порядка, расположенный в левом верхнем углу матрицы  $A$ , не равен нулю ( $1 \neq 0$ ). Окаймляющий его минор второго порядка, расположенный в левом верхнем углу матрицы, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Добавим к указанному минору первого порядка вторую строку и третий столбец матрицы  $A$ , тогда получим окаймляющий минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Вычислим окаймляющие миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как имеем минор второго порядка матрицы  $A$  не равный нулю, а все окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю, то ранг матрицы

$$r = \text{rang } A = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & -7 \end{bmatrix} = 2.$$

Введем два новых понятия.

Матрицей, *обратной* по отношению к квадратной матрице  $A$  размера  $n \times n$ , назовем такую квадратную матрицу  $A^{-1}$  того же размера, для которой справедливы соотношения

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad (14)$$

Матрица  $\tilde{A}$ , составленная из алгебраических дополнений транспонированной матрицы  $A'$ , называется *взаимной* (присоединенной) матрицей относительно  $A$ , т. е. если

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{то } \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

Следующая теорема устанавливает единственность обратной матрицы.

**Теорема 6.** Если для данной квадратной матрицы размера  $n \times n$  существует обратная матрица, то она является единственной.

**Доказательство.** Предположим, что для матрицы  $A$  существуют две обратные матрицы  $A^{-1}$  и  $A_1$ . Тогда по определению обратной матрицы имеем:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \quad AA_1 = A_1A = E.$$

Умножив последнее равенство слева на  $A^{-1}$ , получим

$$A^{-1}(AA_1) = A^{-1}E.$$

Воспользовавшись сочетательным законом умножения матриц и определением единичной матрицы, имеем:

$$A^{-1}(AA_1) = (A^{-1}A)A_1 = EA_1 = A_1 = A^{-1}E = A^{-1},$$

т. е.  $A_1 = A^{-1}$ , что и требовалось доказать.

Квадратная матрица называется *вырожденной*, или *особой*, если ее определитель равен нулю. В противном случае квадратная матрица называется *невырожденной*, или *неособой*.

Установим теперь, при каких условиях обратная матрица существует. Предварительно докажем теорему об определителе произведения двух матриц.

**Теорема 7.** Если  $A$  и  $B$  две квадратные матрицы размера  $n \times n$ , то определитель их произведения равен произведению определителей, т. е.

$$|AB| = |A||B|. \quad (16)$$

**Доказательство.** Пусть даны матрицы  $A$  и  $B$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

и произведение их  $AB$ :

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

где

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

Рассмотрим определитель произведения этих матриц:

$$|AB| = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{nk} b_{kn} \end{vmatrix}.$$

Согласно свойству определителей 7, если элементы некоторой строки определителя являются суммами, то его можно представить в виде суммы определителей. Вынося общие множители строк за знак определителя, получим сумму  $n^n$  определителей;

$$|AB| = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} b_{k_1 1} & \dots & a_{1k_1} b_{k_1 n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk_n} b_{k_n 1} & \dots & a_{nk_n} b_{k_n n} \end{vmatrix} = \\ = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & \dots & b_{k_1 n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k_n 1} & \dots & b_{k_n n} \end{vmatrix}.$$

Переставим в определителе, стоящем под знаком суммы, строки так, чтобы первые индексы элементов в каждом столбце шли в порядке возрастания номеров. Тогда согласно свойству определителя 3, получим:

$$|AB| = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} (-1)^t a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

где

$$t = [k_1 k_2 \dots k_n].$$

Вынося определитель

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

за знак суммы и пользуясь равенством (7), получим

$$|AB| = |B| \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} (-1)^t a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} = |B| |A| = |A| |B|.$$

Теорема доказана.

Доказанную теорему можно по индукции распространить на произведение нескольких матриц. Из теоремы, в частности, следует, что произведение двух или нескольких матриц размера  $n \times n$  только тогда является вырожденной матрицей, когда, по крайней мере, один из сомножителей — вырожденная матрица.

Перейдем к рассмотрению теоремы о существовании обратной матрицы.

*Теорема 8. Для данной квадратной матрицы  $A$  тогда и только тогда существует обратная матрица  $A^{-1}$ , когда эта матрица невырожденная.*

*Доказательство.* Составим матрицу  $\bar{A}$ , взаимную относительно  $A$ , и найдем произведение

$$A\bar{A} = [b_{ij}] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

По определению операции умножения матриц имеем

$$b_{ij} = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn}. \quad (19)$$

Из равенств (10) и (12) следует, что

$$b_{ij} = \begin{cases} |A| & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

т. е.

$$A\bar{A} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A| E. \quad (20)$$

Подобным же образом можно доказать, что

$$\bar{A}A = |A| E.$$

Так как по условию  $|A| \neq 0$ , то умножая обе части последних двух равенств на  $\frac{1}{|A|}$ , имеем

$$\frac{1}{|A|} (A\bar{A}) = A \left( \frac{1}{|A|} \bar{A} \right) = E, \quad \frac{1}{|A|} (\bar{A}A) = \left( \frac{1}{|A|} \bar{A} \right) A = E.$$

Полученные выражения показывают, что для невырожденной матрицы  $A$  существует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bar{A}. \quad (21)$$

Пусть теперь матрица  $A$  вырожденная, т. е.  $|A| = 0$ . Предположим, что и в этом случае существует обратная матрица  $A^{-1}$ . Тогда

$$AA^{-1} = E.$$

Но  $|E| \neq 0$ , т. е.  $E$  — невырожденная матрица. Из замечания к теореме 7 следует, что последнее равенство справедливо только тогда, когда  $A$  и  $A^{-1}$  — невырожденные матрицы. Однако по предположению, матрица  $A$  — вырожденная. Полученное противоречие доказывает, что для вырожденной матрицы обратной матрицы не существует.

Теорема доказана.

При преобразованиях матриц часто приходится определять обратную матрицу  $(AB)^{-1}$ . Покажем справедливость равенства

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, \quad (22)$$

где  $A$  и  $B$  квадратные матрицы размера  $n \times n$ . Для этого нужно доказать, что

$$(B^{-1} A^{-1})(AB) = (AB)(B^{-1} A^{-1}) = E.$$



Пользуясь свойством ассоциативности умножения матриц, имеем

$$(B^{-1} A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E,$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

т. е. равенство (22) справедливо.

В заключение введем два новых определения. *Целой положительной степенью квадратной матрицы A* называется матрица  $A^n$ , равная произведению  $n$  матриц  $A$ :

$$A^n = \underbrace{AA \dots A}_n \quad (23)$$

*Целой отрицательной степенью квадратной матрицы A* называется матрица  $A^{-n}$ , равная произведению  $n$  матриц, обратных матрице  $A$ :

$$A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_n$$

### § 3. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЦАХ

**1. Функциональные матрицы. Векторная запись дифференциальных уравнений.** При решении ряда задач удобно ввести матрицы, элементы которых являются функциями независимого переменного  $t$ . (В большинстве технических задач под буквой  $t$  понимают время.) Эти матрицы имеют вид

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix} = [a_{ij}(t)] \quad (1)$$

и называются *функциональными матрицами*.

Введенные выше операции сложения, умножения, определения обратной матрицы для числовых матриц полностью распространяются на функциональные матрицы.

Введем несколько определений.

*Пределом матрицы A(t) при стремлении независимой переменной t к t\_0* называется матрица  $A(t_0)$ , элементы которой есть пределы элементов матрицы  $A(t)$  при  $t \rightarrow t_0$  (если они существуют), т. е.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} A(t) = \begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow t_0} a_{11}(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} a_{12}(t) & \dots & \lim_{t \rightarrow t_0} a_{1n}(t) \\ \lim_{t \rightarrow t_0} a_{21}(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} a_{22}(t) & \dots & \lim_{t \rightarrow t_0} a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lim_{t \rightarrow t_0} a_{m1}(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} a_{m2}(t) & \dots & \lim_{t \rightarrow t_0} a_{mn}(t) \end{bmatrix} = [\lim_{t \rightarrow t_0} a_{ij}(t)] \quad (2)$$

*Производной матрицы A(t) по независимому переменному t* называется матрица  $A'(t)$  вида

$$A'(t) = \frac{dA(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}(t)}{dt} & \frac{da_{12}(t)}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}(t)}{dt} \\ \frac{da_{21}(t)}{dt} & \frac{da_{22}(t)}{dt} & \dots & \frac{da_{2n}(t)}{dt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{da_{m1}(t)}{dt} & \frac{da_{m2}(t)}{dt} & \dots & \frac{da_{mn}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \left[ \frac{da_{ij}(t)}{dt} \right] \quad (3)$$

Правила дифференцирования функциональных матриц

Для вычисления производных пользуются следующими правилами дифференцирования матриц:

1. *Производная суммы матриц равна сумме производных этих матриц, т. е.*

$$\frac{d}{dt}[A(t) + B(t)] = \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dB(t)}{dt} \quad (4)$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[A(t) + B(t)] &= \frac{d}{dt}([a_{ij}(t)] + [b_{ij}(t)]) = \frac{d}{dt}[a_{ij}(t) + b_{ij}(t)] = \\ &= \left[ \frac{da_{ij}(t)}{dt} + \frac{db_{ij}(t)}{dt} \right] = \left[ \frac{da_{ij}(t)}{dt} \right] + \left[ \frac{db_{ij}(t)}{dt} \right] = \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dB(t)}{dt}. \end{aligned}$$

2. *Постоянный числовой множитель можно выносить за знак дифференцирования, т. е.*

$$\frac{d}{dt}(\alpha A(t)) = \alpha \frac{dA(t)}{dt} \quad (5)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha A(t)) &= \frac{d}{dt}(\alpha [a_{ij}(t)]) = \frac{d}{dt}[\alpha a_{ij}(t)] = \left[ \frac{d(\alpha a_{ij}(t))}{dt} \right] = \\ &= \left[ \alpha \frac{da_{ij}(t)}{dt} \right] = \alpha \left[ \frac{da_{ij}(t)}{dt} \right] = \alpha \frac{dA(t)}{dt}. \end{aligned}$$

3. *Производная произведения двух матриц равна сумме произведений первой матрицы на производную от второй матрицы и производной первой матрицы на вторую, т. е.*

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = A(t) \frac{dB(t)}{dt} + \frac{dA(t)}{dt} B(t) \quad (6)$$

По правилу умножения матриц получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A(t)B(t)) &= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) b_{kj}(t) \right] = \left[ \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} (a_{ik}(t) b_{kj}(t)) \right] = \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) \frac{db_{kj}(t)}{dt} \right] + \left[ \sum_{k=1}^n \frac{da_{ik}(t)}{dt} b_{kj}(t) \right] = A(t) \frac{dB(t)}{dt} + \frac{dA(t)}{dt} B(t). \end{aligned}$$

4. Производная обратной матрицы вычисляется по формуле

$$\frac{d}{dt} A^{-1}(t) = -A^{-1}(t) \frac{dA(t)}{dt} A^{-1}(t).$$

По определению обратной матрицы имеем

$$A(t) A^{-1}(t) = E;$$

дифференцируя это равенство по правилу 3 и учитывая, что производная постоянной матрицы равна нулевой матрице, получим

$$A(t) \dot{A}^{-1}(t) + \dot{A}(t) A^{-1}(t) = 0,$$

что и доказывает справедливость выражения (7).

В ряде задач необходимо вычислять производную от определителя квадратной матрицы

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{d|A(t)|}{dt} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11}(t) & a_{i-12}(t) & \dots & a_{i-1n}(t) \\ \hat{a}_{i1}(t) & \hat{a}_{i2}(t) & \dots & \hat{a}_{in}(t) \\ a_{i+11}(t) & a_{i+12}(t) & \dots & a_{i+1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Для доказательства формулы (9), учитывая равенство (7) § 2 запишем

$$|A(t)| = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t a_{1j_1}(t) a_{2j_2}(t) \dots a_{nj_n}(t).$$

Полученное равенство продифференцируем по  $t$ . Согласно правилу дифференцирования произведения имеем

$$\begin{aligned} \frac{d|A(t)|}{dt} &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t \dot{a}_{1j_1}(t) a_{2j_2}(t) \dots a_{nj_n}(t) + \\ &+ \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t a_{1j_1}(t) \dot{a}_{2j_2}(t) a_{3j_3}(t) \dots a_{nj_n}(t) + \dots + \\ &+ \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t a_{1j_1}(t) a_{2j_2}(t) \dots \hat{a}_{ij_n}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^t a_{j_1 i}(t) \dots \\ &\dots a_{i-1 j_{i-1}}(t) \hat{a}_{ij_i}(t) a_{i+1 j_{i+1}}(t) \dots a_{nj_n}(t). \end{aligned}$$

Это равенство доказывает справедливость формулы (9), так как из него следует, что каждое слагаемое есть определитель  $|A(t)|$  у которого  $i$ -я строка заменена строкой из ее производных.

Интегралом от матрицы  $A(t)$  в пределах от  $t_0$  до  $t$  называется матрица вида

$$B(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^t a_{11}(\tau) d\tau & \int_{t_0}^t a_{12}(\tau) d\tau & \dots & \int_{t_0}^t a_{1n}(\tau) d\tau \\ \int_{t_0}^t a_{21}(\tau) d\tau & \int_{t_0}^t a_{22}(\tau) d\tau & \dots & \int_{t_0}^t a_{2n}(\tau) d\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{t_0}^t a_{m1}(\tau) d\tau & \int_{t_0}^t a_{m2}(\tau) d\tau & \dots & \int_{t_0}^t a_{mn}(\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (10)$$

Пользуясь введенными обозначениями, можно получить компактную векторную запись дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему  $n$  линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Введем векторы

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

и матрицу

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Система уравнений (11) может быть записана в векторном виде так:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t). \quad (12)$$

Воспользовавшись определением производной матрицы, правилами умножения и сложения матриц, а также условием равенства матриц, нетрудно показать, что векторное равенство (12) эквивалентно системе дифференциальных уравнений (11).





Исключая из этой системы уравнений переменные  $z$ ,  $y$ ,  $e$  и  $u$ , получим

$$(0,002p^5 + 0,1224p^4 + 5,146p^3 + 41,32p^2 + 201p + 200)x = 200(p+1)g. \quad (23)$$

Оператор  $p$  соответствует операции дифференцирования, поэтому в обычной форме записи дифференциальное уравнение (23) имеет вид

$$0,002 \frac{d^5 x}{dt^5} + 0,1224 \frac{d^4 x}{dt^4} + 5,146 \frac{d^3 x}{dt^3} + 41,32 \frac{d^2 x}{dt^2} + 201 \frac{dx}{dt} + 200x = 200 \left( \frac{dg(t)}{dt} + g(t) \right). \quad (24)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} x &= x_1, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \frac{d^3 x}{dt^3} &= \frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad g(t) = g_1(t), \\ \frac{d^4 x}{dt^4} &= \frac{dx_4}{dt} = x_5, \quad \frac{dg(t)}{dt} = g_2(t). \end{aligned} \quad (25)$$

Векторная запись дифференциального уравнения (24) в этом случае будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Cg(t), \quad (26)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 200 & 201 & 41,32 & 5,146 & 0,1224 \\ 0,002 & 0,002 & 0,002 & 0,002 & 0,002 \end{bmatrix},$$

$$g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = 100\,000 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Векторная запись уравнений особенно удобна при исследовании систем автоматического регулирования, в которых имеется несколько регулируемых величин, причем изменение одной из них вызывает изменение других. Такие системы называются системами многосвязного регулирования. Общий вид многосвязной системы

автоматического регулирования приведен на рис. 3. Эта система состоит из объекта регулирования и регулятора. К объекту приложены  $n$  возмущающих воздействий  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Задача регулирова-

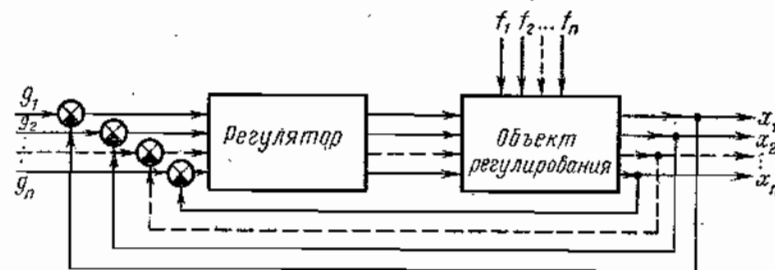


Рис. 3

ния состоит в том, чтобы обеспечить возможно меньшее отклонение значений регулируемых координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$  от управляющих воздействий  $g_1, g_2, \dots, g_n$ .

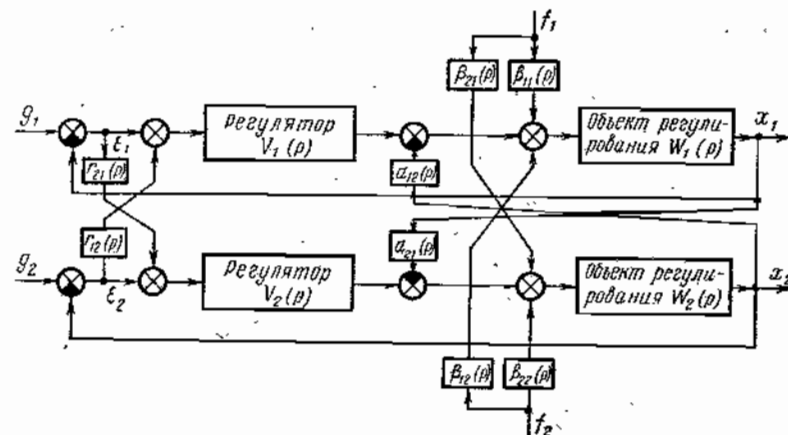


Рис. 4

Рассмотрим более подробно двухканальную систему регулирования, показанную на рис. 4. Здесь введены следующие обозначения:

- $x_i$  ( $i=1, 2$ ) —  $i$  координата объекта;
- $g_i$  ( $i=1, 2$ ) — управляющее воздействие для регулируемой координаты  $i$  объекта;
- $f_i$  ( $i=1, 2$ ) — возмущающее воздействие по каналу  $i$ ;
- $e_i = g_i - x_i$  ( $i=1, 2$ ) — отклонение координаты объекта от управляющего воздействия;
- $V_i(p)$  — передаточная функция регулятора по каналу  $i$  ( $i=1, 2$ );
- $W_i(p)$  — передаточная функция объекта регулирования по каналу  $i$  ( $i=1, 2$ );







можно придать любые значения. В результате будем иметь бесчисленное множество решений системы (5), т. е. в этом случае система (5), а значит, и эквивалентная ей система (1) неопределенны.

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.** Если в процессе Гаусса появится уравнение  $0 = b \neq 0$ , то исходная система несовместна, если она приводится к треугольному виду, то эта система является определенной, а в случае приведения к трапецидальному виду — неопределенной.

Если ввести матрицу  $A$ , составленную из коэффициентов уравнения (1), и векторы-столбцы  $x$  и  $b$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

то системе линейных уравнений (1) будет соответствовать более компактное по записи векторное уравнение

$$Ax = b. \quad (6)$$

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобно записывать ее в виде матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных и свободных членов. В такой записи система (1) имеет вид

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных системы линейных уравнений, будем называть *основной матрицей системы (1)*. Если же к основной матрице приписать справа столбец из свободных членов, то полученную матрицу назовем *расширенной матрицей системы линейных уравнений (1)*.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих метод Гаусса.

**Пример 1.** Найти решение системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 &= 5, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Запишем эту систему в виде матрицы

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right].$$

Умножая первую строку этой матрицы на  $-2$ ,  $-3$ ,  $1$  и складывая ее соответственно со второй, третьей и четвертой строками, получим новую матрицу

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Умножим вторую строку полученной матрицы на числа  $-3$  и  $2$  и сложим полученные результаты соответственно с третьей и четвертой ее строками, тогда матрица примет вид

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 4 \end{array} \right].$$

Умножим третью строку этой матрицы на  $1/2$  и сложим с четвертой ее строкой:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right].$$

Полученной матрице соответствует система линейных уравнений, эквивалентная заданной:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1, \\ -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 2, \\ 4x_3 + 12x_4 &= -4, \\ -2x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Система уравнений привелась к треугольному виду. Следовательно, она является совместной и определенной. Последовательно решая уравнения системы снизу вверх, получим решение:

$$x_4 = -1, \quad x_3 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_1 = 4.$$

Выполненные в этом примере действия удобно записать в таком виде:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \infty \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \infty \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \infty \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \infty \\ \infty \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \infty \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right].$$

Знак  $\infty$  здесь означает эквивалентность систем уравнений.







**Пример 5.** Система дифференциальных уравнений, описывающих угловое движение самолета вокруг центра масс при малых отклонениях в горизонтальном полете (рис. 5), записывается в операторной форме так:

$$\begin{aligned} p\theta + 0\delta - (n_{22} + p)\alpha &= 0, \\ (p^2 + n_{33}p)\delta + 0\theta - (n_0p + n_{32})\alpha &= -n_B\delta_B, \\ \delta + \theta - \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $n_0, n_{22}, n_{33}, n_{32}, n_B$  — некоторые числа, зависящие от конструктивных параметров самолета;  $p$  — оператор дифференцирования;  $\delta$  — угол тангажа;

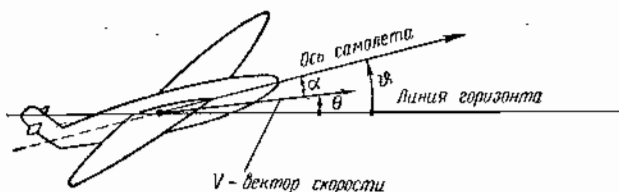


Рис. 5

$\theta$  — угол наклона траектории;  $\alpha$  — угол атаки;  $\delta_B$  — угол поворота руля высоты. Найти зависимость  $\delta, \theta$  и  $\alpha$  от  $\delta_B$ .

Вычислим главный определитель системы уравнений:

$$D = \begin{vmatrix} p & 0 & -(n_{22} + p) \\ p^2 + n_{33}p & 0 & n_0p + n_{32} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = p[p^2(n_0 + n_{22} + n_{33})p + (n_{32} + n_{22}n_{33})].$$

Вспомогательные определители этой же системы уравнений равны:

$$D_\theta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -(n_{22} + p) \\ -n_B\delta_B & 0 & n_0p + n_{32} \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -n_B(n_{22} + p)\delta_B,$$

$$D_\delta = \begin{vmatrix} p & 0 & -(n_{22} + p) \\ p^2 + n_{33}p & -n_B\delta_B & n_0p + n_{32} \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -n_B n_{22} \delta_B,$$

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ p^2 + n_{33}p & 0 & -n_B\delta_B \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -p n_B \delta_B.$$

Воспользовавшись формулами Крамера, получим выражения для углов тангажа, наклона траектории и атаки через угол поворота руля высоты:

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{n_B(n_{22} + p)}{p[p^2 + (n_0 + n_{22} + n_{33})p + (n_{32} + n_{22}n_{33})]}\delta_B, \\ \delta &= -\frac{n_B n_{22}}{p[p^2 + (n_0 + n_{22} + n_{33})p + (n_{32} + n_{22}n_{33})]}\delta_B, \\ \alpha &= -\frac{n_B}{p^2 + (n_0 + n_{22} + n_{33})p + (n_{32} + n_{22}n_{33})}\delta_B. \end{aligned}$$

откуда получаем соответствующие передаточные функции для самолета по углу тангажа

$$W_\theta(p) = -\frac{n_B(n_{22} + p)}{p[p^2 + (n_0 + n_{22} + n_{33})p + (n_{32} + n_{22}n_{33})]},$$

по углу наклона траектории

$$W_\delta(p) = -\frac{n_B n_{22}}{p[p^2 + (n_0 + n_{22} + n_{33})p + (n_{32} + n_{22}n_{33})]},$$

по углу атаки

$$W_\alpha(p) = -\frac{n_B}{p^2 + (n_0 + n_{22} + n_{33})p + (n_{32} + n_{22}n_{33})}.$$

Передаточные функции самолета используются при синтезе и анализе системы управления его полетом.

## ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

## § 5. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

## 1. Определение и основные свойства линейного пространства.

Пусть  $V$  — множество каких-либо элементов, и в этом множестве определены две операции: а) сложение элементов множества и б) умножение элементов множества на число.

Множество  $V$  называется *линейным (векторным) пространством*, если из условия, что произвольные векторы  $a$  и  $b$  принадлежат множеству  $V$ , следует, что их сумма  $a + b$  и произведение произвольного числа  $\lambda$  на вектор  $a$  также принадлежат пространству  $V$ , т. е. если

$$a \in V \text{ и } b \in V$$

а  $\lambda$  — произвольное число, то и

$$a + b \in V, \lambda a \in V^*)$$

и для названных выше операций сложения и умножения справедливы следующие свойства:

*Свойство 1. Сложение векторов коммутативно, т. е.*

$$a + b = b + a. \quad (1)$$

*Свойство 2. Сложение векторов ассоциативно, т. е.*

$$(a + b) + c = a + (b + c). \quad (2)$$

*Свойство 3. Существует хотя бы один элемент  $x$  такой, что*

$$a + x = a. \quad (3)$$

Такой элемент  $x$  называется нулевым и обозначается  $0$ .

*Свойство 4. Для всякого элемента  $a$  существует хотя бы один элемент  $y$  такой, что*

$$a + y = 0, \quad (4)$$

Элемент  $y$  называется элементом, обратным элементу  $a$ , и обозначается  $-a$ .

*Свойство 5. Для произвольного числа  $\alpha$  и векторов  $a$  и  $b$  справедливо равенство*

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b. \quad (5)$$

*Свойство 6. Для произвольных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  и вектора  $a$  справедливо равенство*

$$(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a) = \beta(\alpha a). \quad (6)$$

\*1) Обозначение  $a \in V$  означает, что элемент  $a$  принадлежит множеству  $V$ .

*Свойство 7. Если  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные числа,  $a$  — вектор, то выполняется равенство*

$$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a. \quad (7)$$

*Свойство 8. Умножение единицы на вектор  $a$  не изменяет этот вектор, т. е.*

$$1 \cdot a = a. \quad (8)$$

Элементы линейного пространства называются векторами. Например, множество однострочных и столбчатых матриц-векторов (30) и (31) § 1 удовлетворяет всем восьми свойствам линейного пространства и поэтому составляет линейное пространство.

Элементы линейного векторного пространства могут быть любой природы, достаточно лишь, чтобы они удовлетворяли всем свойствам линейного пространства. Частный случай линейного пространства с однострочными (однострочными) элементами — матрицами-векторами называется *арифметическим векторным пространством*.

**2. Линейно-независимые векторы.** Размерность линейного пространства. Рассмотрим линейное пространство  $V$ . Выберем в этом пространстве систему векторов.

$$x_1, x_2, \dots, x_m. \quad (9)$$

Назовем систему векторов (9) *линейно-зависимой*, если существуют такие числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , из которых хотя бы одно отлично от нуля, и справедливо равенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = 0. \quad (10)$$

Если же равенство (10) справедливо только тогда, когда все  $\alpha_j = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), то система векторов (9) называется *линейно-независимой*.

Любая система, содержащая нулевой вектор, является линейно-зависимой системой. Действительно, полагая в этом случае  $x_m = 0$  и выбирая  $\alpha_j = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m-1$ ); а  $\alpha_m \neq 0$ , получим

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_{m-1} + \alpha_m \cdot 0 = 0,$$

т. е. система векторов линейно-зависима.

**Пример 1.** Показать, что система векторов

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ линейно-независима.}$$

Действительно, рассмотрим равенство

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Умножая числа  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  на соответствующие векторы-столбцы и вводя сложение матриц, найдем

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из определения равенства матриц получим

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0,$$

т. е. рассматриваемая система векторов линейно-независима.

**Пример 2.** Показать, что система векторов

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

линейно-зависима.

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим равенство

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Это равенство выполняется при  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = -1$ , т. е. система векторов линейно-зависима.

Рассмотрим свойства линейно-независимых векторов.

**Теорема 1.** Если некоторая система векторов пространства  $V$   $x_1, x_2, \dots, x_n$  линейно-независима, то всякая ее подсистема также линейно-независима.

**Доказательство.** Возьмем некоторую подсистему векторов  $x_1, x_2, \dots, x_r$ . Предположим, что она линейно-зависима. Тогда справедливо равенство  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r = 0$ , где, по крайней мере, одно число  $\alpha_j$  не равно нулю. Дополним это равенство суммой произведений остальных векторов системы на нули:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r + 0x_{r+1} + \dots + 0x_n = 0.$$

Из последнего равенства следует, что исходная система из  $n$  векторов линейно-зависима, тогда как по условию теоремы эта система линейно-независима.

Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Назовем вектор  $y$  линейной комбинацией векторов  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , если его можно представить в виде

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m, \quad (11)$$

где  $k_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) — некоторые числа.

**Теорема 2.** Если система векторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  линейно-зависима, то, по меньшей мере, один из ее векторов выражается через остальные. Обратно, если некоторый вектор системы линейно выражается через остальные, то такая система линейно-зависима.

**Доказательство.** Из определения линейной зависимости следует, что существует равенство, в котором хотя бы одно число  $\alpha_j$  не равняется нулю:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0. \quad (12)$$

Тогда, разделив это равенство на  $\alpha_j$  и вводя обозначение  $-\frac{\alpha_i}{\alpha_j} = k_i$ , получим

$$x_j = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_{j-1} x_{j-1} + k_{j+1} x_{j+1} + \dots + k_n x_n, \quad (13)$$

что доказывает первую половину утверждения теоремы.

Рассмотрим теперь равенство

$$x_n = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_{n-1} x_{n-1}. \quad (14)$$

Прибавляя к правой и левой частям этого равенства вектор  $-x_n$ , получим

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_{n-1} x_{n-1} - x_n = 0, \quad (15)$$

где  $k_n = -1$ .

Из определения линейной зависимости векторов следует, что полученная система векторов линейно-зависима.

Теорема доказана полностью.

**Теорема 3.** Пусть даны две системы векторов

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (16)$$

$$y_1, y_2, \dots, y_k. \quad (17)$$

Если каждый вектор системы (16) линейно выражается через вектор системы (17) и  $n > k$ , то система (16) линейно-зависима.

Теорему примем без доказательства\*).

**3. Базис линейного пространства.** Пусть имеем систему векторов

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (18)$$

**Базисом (базой) системы векторов (18)** называется такая линейно-независимая ее подсистема, через которую линейно выражаются все указанные векторы.

Так, например, базисом в трехмерном арифметическом векторном пространстве могут быть три вектора:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Рангом системы векторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$**  называется наибольшее число линейно-независимых векторов этой системы.

Векторы базиса обладают важным свойством, устанавливаемым следующей теоремой.

\* Доказательство см., например: Курош А. Г. Курс высшей алгебры. «Наука», 1968, стр. 68, 188.





Пусть векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют базис  $n$ -мерного линейного пространства; тогда любой вектор этого пространства может быть записан в виде

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, \quad (23)$$

где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — числа.

Покажем, что вектор  $x$  выражается через базис единственным образом.

Допустим противное: пусть вектор  $x$  может быть выражен через векторы базиса еще в виде

$$x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n. \quad (24)$$

Почленно вычитая из равенства (23) равенство (24), получим

$$(\xi_1 - \eta_1) e_1 + (\xi_2 - \eta_2) e_2 + \dots + (\xi_n - \eta_n) e_n = 0. \quad (25)$$

Базис является линейно-независимой системой векторов, поэтому выражение (25) справедливо при  $\xi_j = \eta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Числа  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  будем называть координатами вектора  $x$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и записывать вектор  $x$  следующим образом:

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (26)$$

Рассмотрим два базиса линейного пространства  $V_n$ :

$$e_1, e_2, \dots, e_n \text{ и } f_1, f_2, \dots, f_n.$$

Каждый вектор второго базиса будет выражаться через линейную комбинацию векторов первого базиса

$$f_i = \tau_{i1} e_1 + \tau_{i2} e_2 + \dots + \tau_{in} e_n \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (27)$$

Составим матрицу  $T$  перехода от первого базиса ко второму из коэффициентов системы (27):

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Введем обозначения для базисов в виде векторов-столбцов

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Заметим, что векторы-столбцы в равенствах (29) отличны от рассмотренных выше векторов однострочных или однострочных числовых

матриц, так как ранее мы рассматривали арифметические векторы, элементы (координаты) которых являются числами, а в данном случае элементы векторов  $e$  и  $f$  также являются векторами. Если для векторов типа (29) ввести операцию умножения, по форме аналогичную операции умножения матриц (7) и (8) § 1, то, учитывая соотношения (28) и (29), нетрудно убедиться, что выражение

$$f = Te \quad (30)$$

эквивалентно системе из  $n$  равенств (27).

Возникает вопрос, всякая ли матрица может служить матрицей перехода от одного базиса к другому? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

*Теорема 6.* Если  $V_n$  —  $n$ -мерное линейное пространство,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — какой-нибудь базис этого пространства, а некоторая система  $n$  векторов  $f_1, f_2, \dots, f_n$  образуется по правилу

$$f_i = \tau_{i1} e_1 + \tau_{i2} e_2 + \dots + \tau_{in} e_n \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (31)$$

то для того чтобы система векторов  $f_1, f_2, \dots, f_n$  также являлась базисом пространства  $V_n$ , необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода к новому базису (28) была невырожденной.

Доказательство. Рассмотрим векторы-столбцы

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Транспонированные матрицы  $c', e', f'$  являются векторами-строками. Векторы  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) являются элементами вектора  $f$  и выражаются через базис  $e$  по формуле (31).

Проверим, являются ли векторы  $f_1, f_2, \dots, f_n$  линейно-независимыми. Рассмотрим равенство

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0.$$

Очевидно, что оно эквивалентно матричному равенству

$$c'f = 0.$$

Заменив базис  $f$  его значением согласно равенству (30), найдем:

$$c'Te = 0. \quad (33)$$

Выполнив в последнем равенстве операцию умножения, получим

$$\begin{aligned} [c_1 c_2 \dots c_n] \begin{bmatrix} \tau_{11} \tau_{12} \dots \tau_{1n} \\ \tau_{21} \tau_{22} \dots \tau_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ \tau_{n1} \tau_{n2} \dots \tau_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} &= \left( \sum_{k=1}^n c_k \tau_{k1} \right) e_1 + \left( \sum_{k=1}^n c_k \tau_{k2} \right) e_2 + \dots + \\ &+ \left( \sum_{k=1}^n c_k \tau_{kn} \right) e_n = 0. \end{aligned} \quad (34)$$





метические векторы-столбцы, составленные из их координат в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Таким образом, если вектор  $x$  имеет в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  координаты  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , а вектор  $y$  в этом же базисе — координаты  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ , то столбец из координат вектора  $y$  получается из столбца координат вектора  $x$  по формуле (10).

Мы показали, что линейному преобразованию (линейному оператору)  $A$  в данном базисе можно поставить в соответствие матрицу  $A = [a_{ij}]$ , называемую *матрицей линейного преобразования*. В этой матрице первый столбец состоит из координат образа первого базисного вектора, второй — из координат образа второго базисного вектора и т. д.

Пусть теперь  $A = [a_{ij}]$  — произвольная квадратная матрица размера  $n \times n$ . В линейном пространстве  $V_n$  размерности  $n$  определим оператор  $A$  формулами (10), т. е. координаты вектора-образа выразим в данном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  через координаты вектора-образа  $x$  с помощью формул (10).

Используя свойства матриц, нетрудно проверить, что такой оператор линеен и каждому вектору  $x \in V_n$  ставит в соответствие вектор  $y$  этого же пространства.

Таким образом, формула (10) дает общий вид линейного оператора в конечномерном линейном пространстве. Мы установили, что между линейными преобразованиями (линейными операторами) и матрицами в линейном пространстве  $V_n$  существует соответствие — каждому линейному преобразованию может быть поставлена в соответствие квадратная матрица и, наоборот, каждой квадратной матрице может быть поставлено в соответствие линейное преобразование.

*Произведением двух линейных преобразований* называется последовательное преобразование вектора  $x$  сначала линейным преобразованием с матрицей  $A$ , а затем — с матрицей  $B$ .

Покажем, что матрица произведения линейных преобразований равна произведению матриц последовательных преобразований  $BA$ .

Действительно, пусть в некотором базисе заданы два линейных преобразования пространства матрицами  $A$  и  $B$ , т. е.  $z = B(Ax)$ . Из свойств ассоциативности произведения матриц имеем

$$z = Bu = B(Ax) = (BA)x, \quad (12)$$

где  $u = Ax$ .

*Суммой линейных преобразований*, задаваемых матрицами  $A$  и  $B$ , называется такое линейное преобразование, которое задается матрицей  $A + B$ .

Рассмотрим свойства линейных преобразований.

*Свойство 1. Линейное преобразование линейной комбинации векторов равно той же линейной комбинации преобразований этих векторов, т. е.*

$$A \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (Ax_i). \quad (13)$$

*Свойство 2. Линейным преобразованием нулевого вектора является нулевой вектор, т. е.*

$$A0 = 0. \quad (14)$$

*Свойство 3. Линейным преобразованием противоположного вектора —  $x$  является вектор, противоположный образу вектора  $x$ , т. е.*

$$A(-x) = -Ax. \quad (15)$$

Справедливость свойств линейного преобразования легко доказать, используя указанные в § 1 свойства матриц.

Рассмотрим произвольный базис пространства  $V_n$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

и преобразуем его с помощью линейного преобразования с матрицей  $T = [t_{ij}]$ , причем  $\det T \neq 0$ , в новый базис

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Из равенства (30) § 5 следует, что

$$f = Te. \quad (16)$$

Вектор  $x$  в старом базисе представим в виде

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n. \quad (17)$$

Пусть матрица  $A = [a_{ij}]$  задает линейное преобразование вектора  $x$  в вектор  $y$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Найдем матрицу линейного преобразования вектора  $x$  в вектор  $y$  для нового базиса  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , который получаем с помощью матрицы перехода к новому базису  $T$ :

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n = \tilde{\xi}_1 f_1 + \tilde{\xi}_2 f_2 + \dots + \tilde{\xi}_n f_n, \quad (18)$$

здесь  $\tilde{\xi}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — координаты вектора  $x$  в новом базисе  $f$

$$y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n = \tilde{\eta}_1 f_1 + \tilde{\eta}_2 f_2 + \dots + \tilde{\eta}_n f_n. \quad (19)$$

Из равенства (42) § 5, определяющего координаты вектора при переходе к новому базису, обозначая транспонированную матрицу  $T$  через  $T_1$ , т. е.  $T' = T_1$ , получим

$$T_1 \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad T_1 \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}. \quad (20)$$



По определению линейного преобразования имеем

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где  $A$  — матрица линейного преобразования, заданного в базисе  $e$ . Подставляя значения координат векторов в старом базисе из формул (20) в формулу (21), получим

$$T_1 \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_n \end{bmatrix} = AT_1 \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Умножая полученное равенство слева на  $T_1^{-1}$ , найдем

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_n \end{bmatrix} = T_1^{-1} AT_1 \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad (23)$$

т. е. матрица  $C$  линейного преобразования вектора  $x$  в вектор  $y$  при новом базисе  $f$  выражается через матрицу  $A$  линейного преобразования при старом базисе  $e$  с помощью формулы

$$C = T_1^{-1} AT_1, \quad (24)$$

где  $T_1 = T$ ,  $T$  — матрица перехода от старого базиса к новому.

Матрица  $C$ , определяемая равенством (24), называется матрицей, подобной матрице  $A$ .

**Теорема 1.** Если линейное преобразование задается невырожденной матрицей  $A$ , то и подобное ему преобразование с матрицей  $C = T_1^{-1} AT_1$  также задается невырожденной матрицей.

**Доказательство.** Определитель произведения квадратных матриц, согласно теореме 7 § 2, равен произведению определителей сомножителей, поэтому

$$|C| = |T_1^{-1}| |A| |T_1|;$$

кроме того, из определения подобной матрицы следует, что  $\det T_1 \neq 0$ .

Следовательно, если  $\det A \neq 0$ , то и  $\det C \neq 0$ , т. е.  $C$  — невырожденная матрица.

Теорема доказана.

Рассмотрим ряд примеров линейных преобразований векторов.

**Пример 1.** Пусть за базис двумерного геометрического пространства приняты единичные орты  $e_1 = i$ ,  $e_2 = j$  осей декартовой системы координат  $xOy$ .

а другой базис этого же пространства выбраны единичные орты осей  $f_1 = i_1$ ,  $f_2 = j_1$  системы координат  $x_1Oy_1$ , полученной поворотом исходной системы координат на угол  $\alpha$  (рис. 6). Вычислить матрицу  $T$  перехода к новому базису, а также матрицу  $C$  линейного преобразования  $A$  в базисе  $f_1, f_2$ , если это линейное преобразование в базисе  $e_1, e_2$  задается матрицей  $A$ .

Из рис. 6 следует, что векторы базиса  $f_1, f_2$  выражаются через векторы базиса  $e_1, e_2$  формулами

$$\begin{aligned} f_1 &= \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2, \\ f_2 &= -\sin \alpha e_1 + \cos \alpha e_2. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что матрица перехода к новому базису имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

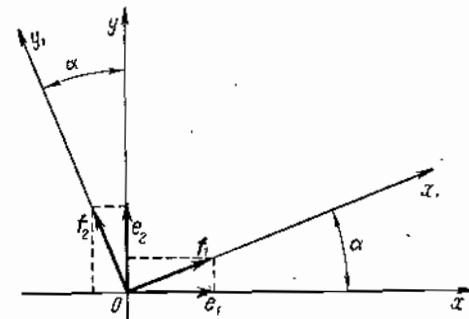


Рис. 6

Согласно равенству (24) линейное преобразование  $A$  в базисе  $f_1, f_2$  задается матрицей  $C$ , подобной матрице  $A$ :

$$C = (T^{-1})^{-1} AT^{-1}.$$

Нетрудно убедиться, что  $(T^{-1})^{-1} = T$ , поэтому

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha a_{11} + \sin^2 \alpha a_{22} + 2 \sin \alpha \cos \alpha a_{12} & \cos^2 \alpha a_{12} - \sin^2 \alpha a_{21} - 2 \sin \alpha \cos \alpha a_{11} \\ \cos^2 \alpha a_{12} - \sin^2 \alpha a_{21} - 2 \sin \alpha \cos \alpha a_{22} & \cos^2 \alpha a_{21} + \sin^2 \alpha a_{11} + 2 \sin \alpha \cos \alpha a_{12} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Положение произвольной декартовой трехмерной системы координат  $Ox_1y_1z_1$  с ортами  $i_1 = i_1, j_1 = j_1, k_1 = k_1$  относительно неподвижной системы координат  $Oxyz$  с ортами  $i = e_1, j = e_2, k = e_3$  определяется тремя углами Эйлера  $\psi, \theta$  и  $\gamma$  (рис. 7, а). Вычислить матрицу, задающую переход

от базиса  $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$  к базису  $i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$ .

Рассмотрим систему декартовых координат  $Oxyz$  с базисом  $e$ . Поворотом этой системы координат вокруг оси  $Oy$  на угол  $\psi$  перейдем к новому базису

$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$ , при этом получим систему координат  $Ox'y'z'$  (рис. 7, б). Из преды-

дущего примера, учитывая, что ось  $y$  сохраняет свое положение, т. е.  $f_2 = e_2$ , а остальные орты преобразуются поворотом вокруг точки  $O$  в плоскости, перпендикулярной оси  $Oy$ , следует, что матрица перехода к новому базису имеет вид

$$T_{fe} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}.$$

От базиса  $f$  перейдем с помощью поворота системы координат  $Ox'y'z'$  вокруг оси  $Oz'$  на угол  $\theta$  к системе  $Ox_1y_1z_1$ , которой соответствует базис

\* См., например: Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. Л. Курс теоретической механики. М., «Высшая школа», 1966, стр. 204.

$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$  (рис. 7, в). Аналогично предыдущему случаю, матрица перехода от базиса  $f$  к базису  $g$  имеет вид

$$T_{gf} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее, выполнив поворот системы координат  $Ox_1y_1z_1$  вокруг оси  $Ox_1$  на угол  $\gamma$ , перейдем к системе координат  $Ox_1y_1z_1$ , т. е. от базиса  $g$  перейдем к базису  $l$  (рис. 7, з).

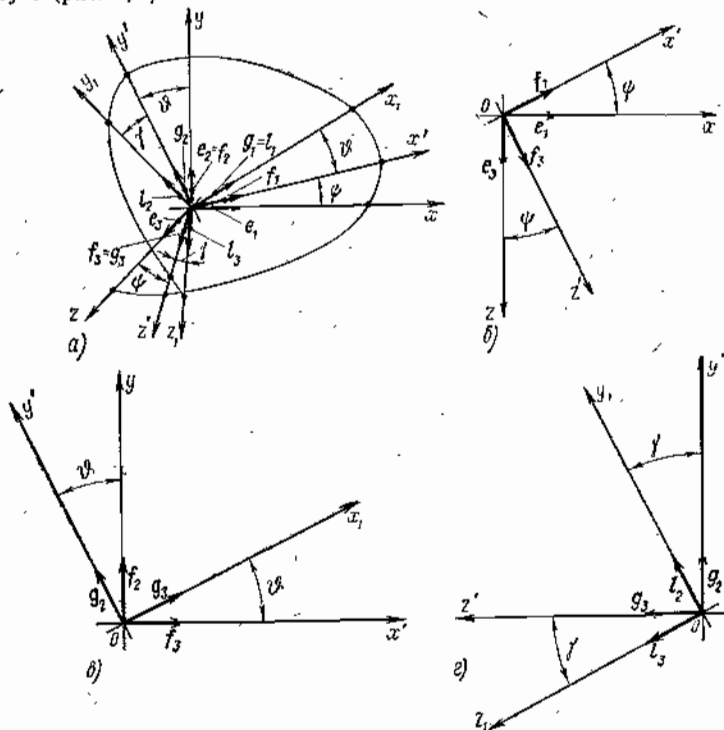


Рис. 7

Матрица перехода к новому базису имеет вид

$$T_{lg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Из формулы (30) § 5, определяющей переход к новому базису, имеем:

$$l = T_{lg} g, \quad g = T_{gf} f, \quad f = T_{fe} e.$$

Объединяя эти выражения, получим

$$l = T_{lg} T_{gf} T_{fe} e.$$

Таким образом, матрица перехода от базиса  $e$  к базису  $l$  имеет вид

$$T_{le} = T_{lg} T_{gf} T_{fe} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \vartheta & -\sin \psi \cos \vartheta \\ \sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \cos \gamma \sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma & \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma \sin \vartheta \\ \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma \sin \vartheta \end{bmatrix}.$$

Если вектор  $x$  в старом базисе имеет координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , то в новом базисе его координаты  $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3$ , согласно выражению (42) § 5, равны

$$\begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_3 \end{bmatrix} = (T_{lg})^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}.$$

Непосредственным вычислением легко убедиться, что

$$T_{le} = T_{le}^{-1} \quad \text{и} \quad (T_{le})^{-1} = T_{le}.$$

Рассмотренное преобразование координат широко используется, например, в системах управления летательными аппаратами. Координаты вектора ускорения центра масс в этом случае определяются датчиками в базисе, связанном с летательным аппаратом, а управление осуществляется в системе координат, связанной с Землей. Поэтому необходимо, кроме координат вектора ускорения, определять углы Эйлера  $\psi, \vartheta$  и  $\gamma$ , а затем с помощью матрицы  $T_{le}$  осуществлять преобразование координат вектора ускорения в базисе земной системы координат.

**Пример 3.** Структурная схема системы автоматического регулирования, рассмотренная в § 3, показана на рис. 4. Будем полагать, что внешних воздействий к системе не приложено (вектор возмущающих воздействий нулевой). В этом случае уравнение, описывающее динамику системы (33) § 3, примет вид

$$A(p)x(t) = C(p)g(t).$$

Найти зависимость вектора координат объекта от вектора управляющих воздействий.

Умножим уравнение системы слева на матрицу  $A^{-1}(p)$ :

$$x(t) = A^{-1}(p)C(p)g(t).$$

Если ввести матрицу

$$\Phi(p) = A^{-1}(p)C(p),$$

то получим

$$x(t) = \Phi(p)g(t).$$

Таким образом, система автоматического регулирования задает линейное преобразование вектора входных воздействий  $g(t)$ , описываемое матрицей  $\Phi(p) = A^{-1}(p)C(p)$ , причем каждому значению вектора управляющих воздействий  $g(t)$  ставится в соответствие вектор координат на выходе системы  $x(t)$ .

Матрица  $\Phi(p)$  называется *передаточной матрицей* *многосвязной системы*. Учтывая, что

$$A^{-1}(p) = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22}(p) - a_{12}(p) \\ -a_{21}(p) \quad a_{11}(p) \end{bmatrix},$$

имеем

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22}(p) - a_{12}(p) \\ -a_{21}(p) \quad a_{11}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}(p) & c_{12}(p) \\ c_{21}(p) & c_{22}(p) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{a_{11}(p)a_{22}(p) - a_{12}(p)a_{21}(p)} \times \\ &\times \begin{bmatrix} a_{22}(p)c_{11}(p) - a_{12}(p)c_{21}(p) & a_{22}(p)c_{12}(p) - a_{12}(p)c_{22}(p) \\ -a_{21}(p)c_{11}(p) + a_{11}(p)c_{21}(p) & -a_{21}(p)c_{12}(p) + a_{11}(p)c_{22}(p) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**2. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования.** В теории линейных преобразований часто используется понятие собственного вектора.

Неуравновешенный вектор  $x$  линейного пространства  $V_n$  называется *собственным вектором* относительно линейного преобразования  $A$ , если  $Ax = \lambda x$ , где  $\lambda$  — некоторое число. Число  $\lambda$  называется *собст-*



$= |A - \lambda E|$  — характеристический многочлен матрицы, задающей линейное преобразование. Собственный вектор не является нулевым, поэтому, по крайней мере, одна из его координат не равна нулю, следовательно, если для собственного числа  $\lambda$  существует собственный вектор, то однородная система (29) должна иметь нетривиальное решение. Это может быть только тогда, когда главный определитель системы равен нулю. Следовательно, собственное значение собственного вектора линейного преобразования совпадает с корнем характеристического многочлена матрицы, задающей линейное преобразование.

Из теоремы 2 следует, что собственные числа для одного и того же линейного преобразования, задаваемого в любом базисе, одинаковы и совпадают с характеристическими числами матрицы, задающей линейное преобразование.

Решая систему уравнений (29), если известно  $\lambda$ , можно найти значения координат собственного вектора  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  в базисе, для которого матрица  $A$  задает линейное преобразование. Главный определитель этой системы равен нулю, поэтому собственный вектор определяется не однозначно, а с точностью до постоянного множителя.

**3. Приведение матриц к диагональному виду.** Квадратная матрица называется диагональной, если по ее главной диагонали расположены элементы  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , а все остальные элементы — нули. Диагональная матрица обозначается так:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag} [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]. \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что произведение двух диагональных матриц есть также диагональная матрица, т. е.

$$\text{diag} [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n] \text{diag} [\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n] = \text{diag} [\lambda_1 \gamma_1 \lambda_2 \gamma_2 \dots \lambda_n \gamma_n]. \quad (31)$$

Из выражения (31) также следует, что произведение диагональных матриц коммутативно.

Выясним, при каком базисе матрица линейного преобразования имеет диагональный вид. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

*Теорема 3. Для того чтобы линейное преобразование пространства задавалось при некотором базисе матрицей диагонального вида, необходимо и достаточно, чтобы базис состоял из собственных векторов этого линейного преобразования.*

**Доказательство.** Рассмотрим некоторый базис  $f_1, f_2, \dots, f_n$  из собственных векторов линейного преобразования. Векторы базиса можно записать в виде

$$f_i = 0 \cdot f_1 + \dots + 0 \cdot f_{i-1} + 1 \cdot f_i + 0 \cdot f_{i+1} + \dots + 0 \cdot f_n \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Иначе, в базисе  $f$  вектор  $f_i$  может быть записан через координаты следующим образом:

$$f_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad i\text{-я строка.}$$

Согласно определению собственного вектора имеем

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad i\text{-я строка } (i = 1, 2, \dots, n). \quad (32)$$

Здесь  $A$  — матрица линейного преобразования, заданного в базисе  $f$ . Объединяя все  $n$  уравнений (32), получим матричное равенство

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = AE = A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Равенство (33) устанавливает, что если линейное преобразование задано в базисе, составленном из собственных векторов этого преобразования некоторой матрицей, то эта матрица имеет диагональный вид, причем ее диагональные элементы есть собственные значения, принадлежащие векторам базиса. Достаточность условий теоремы доказана.

Докажем необходимость этих условий. Пусть в некотором базисе  $f_1, f_2, \dots, f_n$  линейное преобразование задается диагональной матрицей, тогда

$$Af_i = \text{diag} [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad i\text{-строка,} \quad (34)$$

т. е.

$$Af_i = \lambda_i f_i.$$







**Пример 6.** Привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы  $A$ :

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2),$$

откуда находим

$$\lambda_1 = 1, \quad k_1 = 2; \quad \lambda_2 = 2, \quad k_2 = 1.$$

Вычислим координаты собственных векторов. Для  $\lambda_1 = 1$  все три уравнения системы (52) одинаковы и имеют вид

$$\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0,$$

или

$$\xi_1 = \xi_2 - \xi_3.$$

Придавая свободным координатам  $\xi_2$  и  $\xi_3$  различные значения, например  $\xi_{21} = 1, \xi_{31} = 0$  и  $\xi_{22} = 0, \xi_{32} = 1$ , получим два линейно-независимых вектора, соответствующих собственному значению  $\lambda_1 = 1$ :

$$x_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad x_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для  $\lambda_2 = 2$  система уравнений (52) имеет вид

$$\begin{aligned} -\xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ \xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы уравнений найдем собственный вектор при  $\xi_3 = 1$   $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Из теоремы 5 следует, что диагональная матрица  $C$ , подобная матрице  $A$ , имеет вид

$$C = T_1^{-1}AT_1 = \text{diag}[1 \ 1 \ 2],$$

где матрица перехода к новому базису  $T_1$  составлена из координат линейно-независимых собственных векторов линейного преобразования, задаваемого матрицей  $A$ , причем

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Пример 7.** Привести матрицу  $A$  к диагональному виду

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим собственные значения матрицы  $A$ :

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(1+\lambda);$$

отсюда

$$\lambda_1 = 1, \quad k_1 = 2; \quad \lambda_2 = -1, \quad k_2 = 1.$$

Найдем координаты собственных векторов линейного преобразования. Для  $\lambda_1$  имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} -2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ \xi_1 + \xi_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда собственный вектор  $x_1 = \begin{bmatrix} -\xi_3 \\ -\xi_3 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$ . При любых значениях  $\xi_3$  все соб-

ственные векторы, соответствующие собственному значению  $\lambda_1 = 1$ , линейно-зависимы, и согласно теореме 5 матрица  $A$  в данном примере не приводится к диагональному виду.

**4. Понятие о канонической форме Жордана.** Как видно из последнего примера, не всякую матрицу можно привести линейным преобразованием к диагональному виду. Удобно выделить класс матриц простейшего вида, к которому можно было бы привести путем некоторых линейных преобразований любую матрицу.

Рассмотрим квадратную матрицу размера  $n \times n$ , элементы главной диагонали которой равны числу  $\lambda_0$ , элементы  $a_{i, i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) — единицы, а все остальные элементы — нули:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Такая матрица называется *клеткой Жордана* порядка  $n$ , отвечающей собственному значению  $\lambda_0$ .

*Жордановой матрицей* называется клеточно-диагональная матрица, в которой на главной диагонали стоят клетки Жордана, а все элементы вне этих клеток равны нулю.

Например, матрица

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

является жордановой матрицей, состоящей из пяти клеток: двух клеток второго порядка, отвечающих собственному значению 2, клетки третьего порядка и клетки первого порядка, отвечающих собственному значению 3, и клетки первого порядка, отвечающей собственному значению 1.

Справедлива приводимая без доказательства \*) теорема о приведении матриц к жордановой форме.

*Теорема 6.* Для всякой числовой матрицы  $A$  существует подобная ей жорданова матрица  $J$ , т. е. существует такая невырожденная матрица  $C$ , что

$$J = C^{-1}AC. \quad (55)$$

Матрица  $J$  составлена из клеток Жордана, отвечающих собственным значениям матрицы  $A$ . Заметим, что одному и тому же собственному значению может соответствовать несколько клеток Жордана различного размера.

Пользуясь теорией жордановых матриц, можно доказать следующую теорему\*\*).

*Теорема 7.* Всякую квадратную матрицу  $A$  размера  $n \times n$  при помощи невырожденного преобразования с матрицей  $S$

$$A = S^{-1}AS$$

можно привести к почти диагональному виду

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \lambda_2 & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные числа матрицы  $A$ , а  $|b_{ij}| < \varepsilon$  (при  $i \neq j$ ) и  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число.

Матрицы, записанные в жордановой форме, используются в дальнейшем при изучении систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

\*) О жордановых матрицах см., например: Курош А. Г. Курс высшей алгебры. «Наука», 1968, § 61, стр. 379.

\*\*\*) Доказательство этой теоремы см., например: Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. «Наука», 1967, стр. 40.

## ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

### § 7. ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

**1. Определение и свойства унитарного пространства.** Рассмотрим линейное пространство  $V_n$ . Каждой паре векторов этого пространства  $x$  и  $y$  поставим в соответствие комплексное число  $(x, y)$  таким образом, чтобы выполнялись следующие условия-аксиомы:

$$(x, y) = \overline{(y, x)},^{*)} \quad (1)$$

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad (2)$$

где  $\lambda$  — произвольное комплексное число,

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \quad (3)$$

$$(x, x) > 0 \text{ при } x \neq 0. \quad (4)$$

Число  $(x, y)$ , поставленное в соответствие паре векторов  $x, y$ , будем называть *скалярным произведением* векторов  $x$  и  $y$ . Скалярное произведение  $(x, x)$  вектора на самого себя называется *скалярным квадратом вектора*. Линейное пространство  $V_n$ , в котором введено скалярное произведение, называется *унитарным пространством*. Действительное унитарное пространство называется *евклидовым пространством*.

Рассмотрим основные свойства скалярного произведения, вытекающие из его определения.

*Свойство 1.* Скалярный квадрат нулевого вектора равен нулю. Действительно,

$$(0, 0) = (0 \cdot 0, 0) = 0 \cdot (0, 0) = 0. \quad (5)$$

*Свойство 2.* Множитель, стоящий перед вторым членом скалярного произведения, можно выносить за знак скалярного произведения как комплексно-сопряженное число, т. е.

$$(x, \mu y) = \bar{\mu}(x, y). \quad (6)$$

В самом деле, из аксиом (1) и (2) скалярного произведения следует

$$(x, \mu y) = \overline{(\mu y, x)} = \bar{\mu} \overline{(y, x)} = \bar{\mu}(x, y).$$

*Свойство 3.* Для скалярного произведения справедлив сочетательный закон, т. е.

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) \quad (7)$$

Действительно, из равенств (1) и (2) следует, что

$$\begin{aligned} (x, y_1 + y_2) &= \overline{(y_1 + y_2, x)} = \overline{(y_1, x) + (y_2, x)} = \\ &= \overline{(y_1, x)} + \overline{(y_2, x)} = (x, y_1) + (x, y_2). \end{aligned}$$

\*) Черта сверху означает комплексно-сопряженное число.



Свойство 4. Знак суммы и постоянные множители можно выносить за знак скалярного произведения, т. е.

$$\left( \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^m \mu_j y_j \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j (x_i, y_j). \quad (8)$$

Действительно, распространяя выражение (3) по индукции на  $k$  слагаемых и используя равенство (2), получим

$$\left( \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^m \mu_j y_j \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \left( x_i, \sum_{j=1}^m \mu_j y_j \right).$$

Аналогичным образом из равенств (6) и (7) найдем

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \left( x_i, \sum_{j=1}^m \mu_j y_j \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j (x_i, y_j).$$

Свойство 4 установлено.

2. Длина вектора, ортогональность векторов. Пусть задано унитарное пространство  $V_n$ . Длиной вектора  $x$  называется положительное значение квадратного корня из его скалярного квадрата. Длина вектора обозначается  $\|x\|$ ;

$$\|x\| = +\sqrt{(x, x)}. \quad (9)$$

Вектор, длина которого равна единице, называется *нормированным*.

Из свойств скалярного произведения следует, что длина вектора равна нулю тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой. Всякий ненулевой вектор можно путем умножения на некоторое число сделать нормированным.

Пусть, например,  $\|a\| = l \neq 0$ . Рассмотрим вектор  $b = \frac{1}{l} a$ . Покажем, что  $\|b\| = 1$ . Имеем:

$$(b, b) = \left( \frac{1}{l} a, \frac{1}{l} a \right) = \frac{1}{l^2} (a, a) = \frac{(a, a)}{(a, a)} = 1.$$

Следовательно,

$$\|b\| = +\sqrt{(b, b)} = 1.$$

Вектор  $x$  называется вектором, *ортогональным* вектору  $y$ , если скалярное произведение этих векторов равно нулю, т. е.

$$x \perp y, \text{ если } (x, y) = 0^*.$$

Ортогональность векторов обладает свойством симметрии, т. е. если

$$x \perp y, \text{ то и } y \perp x.$$

\* Знак  $\perp$  означает ортогональность векторов.

Действительно, если  $(x, y) = 0$ , то и  $(y, x) = \overline{(x, y)} = 0$ .

Нулевой вектор ортогонален с любым вектором пространства. В самом деле  $(0, x) = (0 \cdot 0, x) = 0$ . Обратно, если вектор  $x$  ортогонален любому вектору пространства, то  $x$  — нулевой вектор. Действительно, в этом частном случае вектор ортогонален самому себе, т. е.  $(x, x) = 0$ , а это может быть только в том случае, если  $x = 0$ .

Система векторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  унитарного пространства  $V_n$  называется *ортогональной*, если каждая пара векторов этой системы является ортогональной, т. е.

$$(x_i, x_j) = 0 \text{ при } i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Ортогональная система векторов называется *ортонормированной*, если длина каждого вектора системы равна единице, т. е.

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij}^* \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

*Теорема 1. Всякая ортогональная система ненулевых векторов является линейно-независимой.*

*Доказательство.* Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ортогональная система ненулевых векторов. Рассмотрим равенство

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0. \quad (12)$$

Составим скалярное произведение  $(0, x_i)$ ; так как нулевой вектор ортогонален с любым вектором, то получим

$$(0, x_i) = \left( \sum_{v=1}^n a_v x_v, x_i \right) = \sum_{v=1}^n a_v (x_v, x_i) = a_i (x_i, x_i) = 0. \quad (13)$$

По условию  $x_i \neq 0$ , поэтому  $(x_i, x_i) \neq 0$ . Из выражения (13) следует, что  $a_i = 0$ , т. е. равенство (12) возможно лишь в случае, когда все коэффициенты  $a_i = 0$ . Из определения линейной независимости векторов следует, что в этом случае все векторы системы линейно-независимы.

Теорема доказана.

Базис унитарного пространства  $V_n$  называется *ортогональным*, если он образует ортогональную систему векторов. Если базис образует ортонормированную систему векторов, то он называется *ортонормированным*.

*Теорема 2. Во всяком  $n$ -мерном унитарном пространстве существует, по крайней мере, один ортонормированный базис.*

*Доказательство.* Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — какой-нибудь базис унитарного  $n$ -мерного пространства. Преобразуем этот базис в ортонормированную систему векторов следующим образом. Положим

\*  $\delta_{ij}$  — символ Кронеккера;

$x_1 = a_1$ , затем положим  $x_2 = a_2 + \lambda x_1$ , где  $\lambda$  — любое число. Вектор  $x_2$  не может быть нулевым вектором, так как в этом случае равенство  $a_2 + \lambda x_2 = 0$  может быть справедливо и при  $\lambda \neq 0$ , что невозможно, так как векторы  $a_1$  и  $a_2$  линейно-независимы.

Подберем число  $\lambda$  так, чтобы было  $x_2 \perp x_1$ . Это всегда возможно; действительно, записывая условие ортогональности векторов, получим

$$(a_2 + \lambda x_1, x_1) = (a_2, x_1) + \lambda (x_1, x_1) = 0;$$

но  $(x_1, x_1) > 0$  и, следовательно, при  $\lambda = -\frac{(a_2, x_1)}{(x_1, x_1)}$

$$(x_1, x_2) = 0, \quad (14)$$

т. е. вектор  $x_2$  ортогонален вектору  $x_1$ .

Далее строим векторы

$$x_3 = a_3 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad (15)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_j = a_j + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_{j-1} x_{j-1}. \quad (16)$$

Каковы бы ни были коэффициенты  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{j-1}$  ( $j = 2, \dots, n$ ), вектор  $x_j$ , полученный по формуле (16), не равен нулю. В самом деле, предположим противное, т. е. пусть  $x_j = a_j + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_{j-1} x_{j-1} = 0$ , тогда, выражая векторы  $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$  через векторы  $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}$ , согласно равенству (16) получим  $a_j + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{j-1} a_{j-1} = 0$  (здесь  $\alpha_k$  — некоторые комбинации коэффициентов  $\mu_j$ ). Но коэффициент при  $a_j$  в последней сумме не равен нулю. Получается, что система векторов  $a_1, a_2, \dots, a_j$  линейно-зависима, чего не может быть, так как эта система векторов, в силу условия теоремы, является подсистемой из векторов базиса. Следовательно,  $x_j \neq 0$ .

Покажем, что коэффициенты  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{j-1}$  можно подобрать таким образом, чтобы вектор  $x_j$  стал ортогонален всем предыдущим векторам  $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ . Пусть  $x_s$  — один из этих векторов. Рассмотрим скалярное произведение  $(x_j, x_s)$ . Подставляя значение  $x_j$  и учитывая ортогональность векторов  $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ , получим

$$(x_j, x_s) = (a_j + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_s x_s + \dots + \mu_{j-1} x_{j-1}, x_s) =$$

$$= (a_j, x_s) + \mu_1 (x_1, x_s) + \dots + \mu_s (x_s, x_s) + \dots + \mu_{j-1} (x_{j-1}, x_s) =$$

$$= (a_j, x_s) + \mu_s (x_s, x_s) = 0. \quad (17)$$

Но  $(x_s, x_s) > 0$ , поэтому

$$\mu_s = -\frac{(a_j, x_s)}{(x_s, x_s)}.$$

Таким образом, при соответствующем выборе коэффициентов в равенстве (16) можно получить ортогональную систему векторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Разделив каждый вектор  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) на  $\sqrt{(x_i, x_i)}$ , получим ортонормированную систему векторов  $e_i =$

$= \frac{x_i}{\|x_i\|}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). По теореме 1 все эти векторы линейно-независимы, т. е. образуют ортонормированный базис пространства  $V$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** Если  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — ортонормированный базис унитарного пространства  $V_n$  и произвольные векторы  $x$  и  $y$  этого

пространства имеют при этом базисе координаты  $x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ ,

$y = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$ , то их скалярное произведение имеет вид

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n \xi_j \bar{\eta}_j. \quad (18)$$

**Доказательство.** Используя свойство 4 скалярного произведения и определение ортонормированного базиса, имеем:

$$(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \bar{\eta}_j (e_i, e_j) = \sum_{j=1}^n \xi_j \bar{\eta}_j. \quad (19)$$

Теорема доказана.

**Пример 1.** Векторы  $a_1, a_2, a_3$  базиса пространства  $V_3$  выражаются через ортонормированный базис  $e_1, e_2, e_3$  следующим образом:

$$a_1 = 2e_1 - e_2 + e_3, \quad a_2 = e_1 + e_3, \quad a_3 = e_1 - e_2 + 2e_3.$$

Найти другой ортонормированный базис пространства.

Введем в рассмотрение векторы-столбцы из координат векторов  $a_1, a_2, a_3$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$ :

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Примем  $x_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_2 = a_2 + \lambda x_1$ , при этом коэффициент  $\lambda$  найдем из условия ортогональности векторов  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\lambda = -\frac{(a_2, x_1)}{(x_1, x_1)} = -\frac{1}{2},$$

тогда

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Положим  $x_3 = a_3 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ , тогда из условия  $x_3 \perp x_2, x_3 \perp x_1$  найдем

$$\lambda_1 = -\frac{(a_3, x_1)}{(x_1, x_1)} = -\frac{5}{6}, \quad \lambda_2 = -\frac{(a_3, x_2)}{(x_2, x_2)} = -1,$$

откуда

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{5}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

После нормализации векторов  $x_1, x_2, x_3$  получим ортонормированный базис

$$f_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

3. **Норма матрицы.** Экспоненциальная матрица. Значение длины вектора  $x$ , заданного в некотором ортонормированном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , называют *нормой вектора*. Эта норма равна

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (20)$$

и называется *евклидовой нормой вектора*. В ряде случаев применяют еще норму вектора вида

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (21)$$

Понятие нормы вектора обобщается для матриц. *Нормой матрицы*  $A$  размера  $m \times n$  называется сумма модулей ее элементов

$$\|A\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (22)$$

Норма матрицы обладает следующими свойствами.

*Свойство 1.* Числовой множитель  $c$  можно выносить за знак нормы, т. е.

$$\|cA\| = |c| \|A\|. \quad (23)$$

*Свойство 2.* Норма суммы матриц не больше суммы норм этих матриц, т. е.

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|. \quad (24)$$

*Свойство 3.* Норма произведения матриц не больше произведения норм этих матриц, т. е.

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (25)$$

Докажем, например, справедливость последнего свойства нормы матрицы. Пусть матрицы  $A$  и  $B$  имеют размер соответственно  $m_1 \times n_1$

и  $m_2 \times n_2$  ( $n_1 = m_2$ ), тогда

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{n_2} \left| \sum_{k=1}^{n_1=m_2} a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_1=m_2} |a_{ik}| |b_{kj}| = \\ &= \sum_{k=1}^{n_1=m_2} \left\{ \sum_{i=1}^{m_1} |a_{ik}| \sum_{j=1}^{n_2} |b_{kj}| \right\}. \end{aligned}$$

Сумма произведений положительных чисел меньше или равна произведению сумм этих чисел, т. е. при  $a_k > 0, b_k > 0$

$$\sum_k a_k a_k \leq \sum_k a_k \sum_k b_k,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|AB\| &\leq \sum_{k=1}^{n_1=m_2} \left\{ \sum_{i=1}^{m_1} |a_{ik}| \sum_{j=1}^{n_2} |b_{kj}| \right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{m_1} |a_{ik}| \sum_{k=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{n_2} |b_{kj}| \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

Свойство 3 установлено.

Рассмотрим функциональную матрицу  $A(t)$ , тогда для нормы интеграла от матрицы  $A(t)$  имеем следующее свойство.

*Свойство 4.* Норма интеграла от функциональной матрицы не больше интеграла от нормы этой матрицы, т. е.

$$\left\| \int_a^b A(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|A(t)\| dt. \quad (26)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b A(t) dt \right\| &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left| \int_a^b a_{ij}(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_a^b |a_{ij}(t)| dt = \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)| dt = \int_a^b \|A(t)\| dt. \end{aligned}$$

Понятие нормы матрицы дает возможность рассмотреть матричные ряды.

*Суммой ряда*

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \quad (27)$$

называется такая матрица, элементы которой являются суммами рядов, составленных из соответствующих элементов матриц  $A_k$ .

Определим *экспоненциальную матрицу*  $e^A$  для данной квадратной матрицы размера  $n \times n$  как сумму ряда

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (28)$$

Ряд (28) сходится, так как из равенства (25) следует, что  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  для всех  $k \geq 0$  и каждый из  $n^2$  рядов, составленных из соответствующих элементов матриц  $A^k$ , мажорируется рядом с общим членом  $\frac{\|A\|^k}{k!}$ , и согласно признаку Вейерштрасса\*) ряды  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}}{k!}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) сходятся. Для экспоненциальных матриц справедливо соотношение

$$e^A e^B = e^{A+B}, \quad (29)$$

где  $A$  и  $B$  квадратные матрицы размера  $n \times n$ , причем эти матрицы коммутативны относительно операции умножения, т. е.  $AB = BA$ . В самом деле

$$e^A e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^k B^l}{k! l!}.$$

Выполнив замену переменной суммирования  $l = m - k$ , получим

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{A^k B^{m-k}}{k! (m-k)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{m! A^k B^{m-k}}{k! (m-k)!} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A+B)^m}{m!} = e^{A+B}. \end{aligned}$$

При выводе этой формулы мы воспользовались формулой бинома Ньютона, которая, как нетрудно убедиться, справедлива для матриц, коммутативных относительно операции умножения.

Рассмотрим экспоненциальную матрицу  $e^{At}$ , где  $t$  — некоторое действительное переменное. Для производной экспоненциальной матрицы справедлива формула

$$\frac{d}{dt} (e^{At}) = A e^{At} = e^{At} A. \quad (30)$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{At}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (e^{A(t+\Delta t)} - e^{At}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} e^{At} (e^{A\Delta t} - E) = \\ &= e^{At} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( E + \frac{\Delta t A}{1!} + \frac{\Delta t^2 A^2}{2!} + \dots - E \right) = e^{At} A. \end{aligned}$$

По аналогии с обычным понятием логарифма введем понятие логарифма от матрицы. Матрица  $B$  называется *натуральным логарифмом матрицы*  $A$ , если справедливо равенство  $e^B = A$ , т. е.

$$B = \ln A, \text{ если } e^B = A. \quad (31)$$

**4. Неравенство Коши — Буняковского.** Найдем соотношение между скалярными произведениями векторов  $x$  и  $y$ .

\*) См., например: Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. II. «Наука», 1968, стр. 74.

**Теорема 4.** Какова бы ни была пара векторов  $x$  и  $y$   $n$ -мерного унитарного пространства  $V_n$ , всегда справедливо неравенство

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (32)$$

причем, знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда векторы  $x$  и  $y$  пропорциональны\*).

Неравенство (32) носит название неравенства Коши-Буняковского.

Доказательство. Если вектор  $y=0$ , то рассматриваемое неравенство очевидно.

Рассмотрим скалярный квадрат

$$(x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0,$$

где  $\lambda$  — произвольное комплексное число. Раскрывая скалярное произведение, на основании аксиом (2), (3), (4) и свойств 3, 4 скалярного произведения получим

$$\begin{aligned} (x - \lambda y, x - \lambda y) &= (x, x) - \bar{\lambda}(x, y) - \lambda(y, x) + \lambda\bar{\lambda}(y, y) = \\ &= (x, x) - \bar{\lambda}(x, y) - \lambda(\overline{(x, y)}) + \lambda\bar{\lambda}(y, y) \geq 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Положим  $y \neq 0$ ; так как последнее неравенство справедливо для любого  $\lambda$ , то, в частности, оно справедливо при  $\lambda = \frac{(x, y)}{(y, y)}$ . Подставляя это значение  $\lambda$  в неравенство (33), будем иметь

$$(x, x) - \frac{(x, y)(x, y)}{(y, y)} - \frac{(x, y)(\overline{(x, y)})}{(y, y)} + \frac{(x, y)(\overline{(x, y)})(y, y)}{(y, y)(y, y)} \geq 0, \quad (34)$$

откуда

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (35)$$

Предположим, что векторы  $x$  и  $y$  не пропорциональны, тогда  $\lambda y \neq x$  и  $x - \lambda y \neq 0$ . В этом случае скалярный квадрат  $(x - \lambda y, x - \lambda y) > 0$ , и в выражении (32) имеем строгое неравенство. Если  $x$  и  $y$  пропорциональны, т. е.  $x = \lambda y$ , то скалярное произведение  $(x - \lambda y, x - \lambda y) = 0$  и в этом случае выражение (32) становится равенством.

Справедливость неравенства Коши — Буняковского доказана.

Докажем теперь, что справедливо неравенство

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (36)$$

Для этого вычислим скалярный квадрат  $\|x + y\|^2$ :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + \\ &+ (y, y) = \|x\|^2 + (x, y) + \overline{(x, y)} + \|y\|^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Так как модуль суммы меньше или равен сумме модулей, то найдем

$$|\|x + y\|^2| \leq |\|x\|^2| + |(x, y)| + |\overline{(x, y)}| + |\|y\|^2|. \quad (38)$$

\*) Два вектора называются пропорциональными (коллинеарными), если один из них выражается через другой с помощью умножения его на некоторое число.

Но так как квадрат длины вектора есть действительная положительная величина, а модули комплексно-сопряженных чисел равны, то получим

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2. \quad (39)$$

Из неравенства Коши — Буняковского следует, что

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \quad (40)$$

поэтому

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad (41)$$

Извлекая корень из обеих частей последнего равенства, убеждаемся в справедливости соотношения (36).

Введем еще одно определение. *Расстоянием между двумя векторами  $x$  и  $y$  унитарного пространства (или между двумя точками, заданными этими векторами) называется число  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ .*

Нетрудно убедиться, что расстояние между векторами обладает следующими свойствами:

*Свойство 1. Расстояние между двумя различными векторами есть положительная величина, а расстояние между одним и тем же вектором равно нулю, т. е.*

$$\rho(x, x) = 0, \quad \rho(x, y) > 0 \text{ при } x \neq y. \quad (42)$$

*Свойство 2. Расстояние между двумя векторами не зависит от того, в каком порядке берутся эти векторы, т. е.*

$$\rho(x, y) = \rho(y, x). \quad (43)$$

*Свойство 3. Расстояние между двумя векторами не превышает сумм расстояний каждого из этих векторов до произвольного третьего вектора, т. е.*

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \quad (44)$$

где  $z$  — произвольный вектор.

Свойства 1 и 2 вытекают из свойств скалярного произведения. Докажем свойство 3. Из определения расстояния между векторами, используя неравенство (37), имеем:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Свойство 3 доказано.

**5. Симметричные и ортогональные преобразования.** Воспользовавшись свойствами унитарного пространства, рассмотрим некоторые специальные классы линейных преобразований.

Квадратная матрица  $A = [a_{ij}]$  размера  $n \times n$ , где  $a_{ij}$  — некоторые комплексные числа, называется *эрмитовой*, если ее элементы подчиняются условию  $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ , т. е. эрмитова матрица — это такая матрица, которая не изменится, если ее транспонировать и заменить элементы комплексно-сопряженными числами. Транспонирова-

ние матрицы  $A$  и замена элементов матрицы  $A'$  на комплексно-сопряженные приводит к матрице, которую обозначим  $A^*$ , тогда для эрмитовой матрицы имеем

$$A^* = A.$$

Эрмитова матрица с действительными элементами называется *симметричной*. Для симметричной матрицы  $A' = A$ .

Рассмотрим линейное преобразование унитарного пространства, задаваемое при некотором ортонормированном базисе эрмитовой матрицей  $A$ . Такое преобразование называется *симметричным*.

*Теорема 5. Если при некотором ортонормированном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  унитарного пространства  $V_n$  задано симметричное преобразование с эрмитовой матрицей  $A = [a_{ij}]$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), то справедливо равенство*

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad (45)$$

где  $x, y$  — произвольные векторы пространства  $V_n$ .

*Доказательство.* Выражая векторы  $x$  и  $y$  через базис, получим

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j. \quad (46)$$

Рассмотрим образы этих векторов  $Ax$  и  $Ay$ . Принимая во внимание линейность преобразования с матрицей  $A$ , найдем:

$$Ax = A \left( \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i (Ae_i), \quad Ay = A \left( \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \eta_j (Ae_j),$$

откуда, учитывая равенство (8), получим:

$$(Ax, y) = \left( \sum_{i=1}^n \xi_i (Ae_i), \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j (Ae_i, e_j), \quad (47)$$

$$(x, Ay) = \left( \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{j=1}^n \eta_j (Ae_j) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j (e_i, Ae_j). \quad (48)$$

Учитывая, что векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  (в этом же базисе) имеют соответственно координаты

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

вычислим образы векторов  $e_i$  и  $e_j$ :

$$Ae_i = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \dots + a_{in}e_n, \quad (50)$$

$$Ae_j = a_{j1}e_1 + a_{j2}e_2 + \dots + a_{jn}e_n, \quad (51)$$



учитывая условие ортонормированности системы векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , имеем

$$(Ae_i, e_j) = a_{ji}, \quad (52)$$

$$(e_i, Ae_j) = a_{ij}. \quad (53)$$

Для эрмитовой матрицы  $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$  поэтому из формул (47), (48), (52) и (53) следует, что

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \bar{\eta}_j a_{ji} = (x, Ay).$$

Теорема доказана.

Отметим теперь ряд свойств собственных векторов и собственных значений эрмитовой матрицы. Эти свойства устанавливаются в рассмотренных ниже теоремах.

**Теорема 6.** Все характеристические числа эрмитовой матрицы действительны.

**Доказательство.** Рассмотрим унитарное пространство  $V_n$ , размерность которого совпадает с размером  $n \times n$  эрмитовой матрицы  $A$ . Матрица  $A$  при ортонормированном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  будет задавать симметричное преобразование. Пусть  $\lambda$  — характеристическое число матрицы  $A$ . Унитарное пространство комплексное, поэтому  $\lambda$  есть собственное значение линейного преобразования, у которого собственный вектор  $v$ , следовательно, справедливо равенство

$$(Av, v) = (\lambda v, v) = \lambda (v, v). \quad (54)$$

С другой стороны, ввиду симметричности преобразования имеем

$$(Av, v) = (v, Av) = (v, \bar{\lambda} v) = \bar{\lambda} (v, v). \quad (55)$$

Из равенств (54) и (55) следует, что  $\lambda = \bar{\lambda}$ , а это может быть только, когда  $\lambda$  — действительное число.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что симметричное преобразование евклидова пространства имеет, по меньшей мере, один собственный вектор, так как характеристические числа такого преобразования все действительны.

В дальнейшем будем рассматривать только действительные линейные евклидовы пространства.

**Теорема 7.** Если  $v_1$  и  $v_2$  — собственные векторы симметричного преобразования, принадлежащие к различным собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то они ортогональны.

**Доказательство.** Составим скалярное произведение

$$(Av_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, v_2) = \lambda_1 (v_1, v_2),$$

здесь  $A$  — матрица симметричного преобразования в некотором ортонормированном базисе. С другой стороны, ввиду симметричности преобразования имеем

$$(Av_1, v_2) = (v_1, Av_2) = (v_1, \lambda_2 v_2) = \lambda_2 (v_1, v_2).$$

Сравнивая два последних равенства, можно записать, что

$$\lambda_1 (v_1, v_2) = \lambda_2 (v_1, v_2) \text{ и } (\lambda_1 - \lambda_2) (v_1, v_2) = 0.$$

По условию теоремы  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , поэтому  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$  и  $(v_1, v_2) = 0$ . Отсюда следует, что векторы  $v_1$  и  $v_2$  ортогональны.

Теорема доказана.

Приведем без доказательства\*) теорему о существовании матрицы симметричного преобразования диагонального вида.

**Теорема 8.** Пусть  $A$  — матрица симметричного преобразования пространства  $V_n$  при некотором ортонормированном базисе. Тогда существует ортонормированный базис пространства  $V_n$  из собственных векторов матрицы  $A$ , при котором это симметричное преобразование задается диагональной матрицей

$$B = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n], \quad (56)$$

где  $B = TAT^{-1}$ ;  $T$  — матрица перехода к новому базису, а  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — собственные значения матрицы  $A$ .

Введем новые определения.

Матрица, у которой транспонированная матрица равна обратной, т. е.

$$T' = T^{-1} \quad (57)$$

называется ортогональной.

Если линейное преобразование евклидова пространства  $V_n$  при ортонормированном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  задается ортогональной матрицей, то такое преобразование называется ортогональным.

**Теорема 9.** При ортогональном преобразовании евклидова пространства скалярное произведение любой пары векторов не изменится, т. е.

$$(x, y) = (Tx, Ty). \quad (58)$$

Здесь  $T = [t_{ij}]$  — ортогональная матрица, задающая ортогональное преобразование при ортонормированном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

**Доказательство.** Выражая векторы  $x$  и  $y$  через базис, получим

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j.$$

Найдем скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$ . С учетом равенства (8), (18), (11) получим

$$(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{\eta}_j. \quad (59)$$

С другой стороны, скалярное произведение  $(Tx, Ty)$  равно

$$(Tx, Ty) = \left( \sum_{i=1}^n \xi_i (Te_i), \sum_{j=1}^n \eta_j (Te_j) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \bar{\eta}_j (Te_i, Te_j). \quad (60)$$

\*) Доказательство см., например: Окунев Л. Я. Высшая алгебра. «Просвещение», 1966, стр. 309.

Вычислим скалярное произведение  $(Te_i, Te_j)$ . Аналогично равенству (50) имеем

$$\begin{aligned} (Te_i, Te_j) &= \left( \sum_{k=1}^n \tau_{ik} e_k, \sum_{m=1}^n \tau_{jm} e_m \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \tau_{ik} \bar{\tau}_{jm} (e_k, e_m) = \sum_{k=1}^n \tau_{ik} \bar{\tau}_{jk}. \end{aligned} \quad (61)$$

В выражении (61) сумма  $\sum_{k=1}^n \tau_{ik} \bar{\tau}_{jk}$  равна элементу, расположенному в  $i$ -й строке и  $j$ -столбце матрицы произведения  $TT'$ . По условию теоремы матрица  $T$  — ортогональная, т. е.  $T' = T^{-1}$  и  $TT = E$ , поэтому для ортогональной матрицы справедливы равенства:

$$\sum_{k=1}^n \tau_{ik} \bar{\tau}_{jk} = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad (62)$$

$$\sum_{k=1}^n \tau_{ik} \bar{\tau}_{ik} = \sum_{k=1}^n |\tau_{ik}|^2 = 1. \quad (63)$$

Следовательно,

$$(Tx, Ty) = \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{\eta}_i. \quad (64)$$

Сравнивая выражения (64) и (59), получаем

$$(x, y) = (Tx, Ty).$$

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что при ортогональном преобразовании длина любого вектора пространства не изменяется. Действительно, положив в равенстве (58)  $y = x$ , получим  $(x, x) = (Tx, Tx)$ , откуда  $\|x\| = \|Tx\|$ .

## § 8. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

### 1. Определение и основные свойства квадратичной формы.

Рассмотрим  $n$ -мерное унитарное пространство  $V_n$ . Пусть  $x \in V_n$  — произвольный вектор этого пространства, а  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — координаты вектора  $x$  в некотором базисе.

Квадратичной формой  $f(x, x)$  называется функция вектора  $x$ , которая представляет собой сумму произведений различных координат этого вектора, взятых с некоторыми коэффициентами, т. е.

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j, \quad (1)$$

где  $a_{ij}$  — коэффициенты (действительные или комплексные)\*).

\* В дальнейшем рассматриваются квадратичные формы лишь с действительными коэффициентами.

В сумме (1) всегда можно положить  $a_{ij} = a_{ji}$ , т. е. представить (1) в симметричном виде. В самом деле, пусть  $a_{ij} \neq a_{ji}$ . Рассмотрим сумму двух слагаемых

$$a_{ij} \xi_i \xi_j + a_{ji} \xi_j \xi_i = (a_{ij} + a_{ji}) \xi_i \xi_j = 2b_{ij} \xi_i \xi_j = b_{ij} \xi_i \xi_j + b_{ij} \xi_j \xi_i, \quad (2)$$

где

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}.$$

Коэффициенты  $b_{ij}$  и  $b_{ji}$  равны, т. е. левая часть равенства (1) с неравными коэффициентами всегда может быть преобразована к симметричному виду. Например, пусть

$$f(x, x) = \xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + 2\xi_2 \xi_1.$$

Суммируя второе и третье слагаемое в правой части этого равенства и деля сумму пополам, получим симметричный вид квадратичной формы:

$$f(x, x) = \xi_1^2 + \frac{3}{2} \xi_1 \xi_2 + \frac{3}{2} \xi_2 \xi_1.$$

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется матрицей квадратичной формы.

Матрица квадратичной формы всегда симметричная, т. е.  $a_{ij} = a_{ji}$ , или  $A = A'$ .

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы. В частности, если матрица  $A$  невырожденная ( $\det A \neq 0$ ), то ранг квадратичной формы равен  $n$ . Такая квадратичная форма называется невырожденной.

Всякую квадратичную форму можно записать в матричном виде:

$$f(x, x) = x'Ax. \quad (4)$$

где  $x'$  — транспонированный вектор-столбец  $x$ .

Действительно, согласно правилу умножения матриц имеем:

$$x'A = [\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[ \sum_{k=1}^n a_{k1} \xi_k \quad \sum_{k=1}^n a_{k2} \xi_k \quad \dots \quad \sum_{k=1}^n a_{kn} \xi_k \right],$$

$$x'Ax = \left[ \sum_{k=1}^n a_{k1} \xi_k \quad \sum_{k=1}^n a_{k2} \xi_k \quad \dots \quad \sum_{k=1}^n a_{kn} \xi_k \right] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{m=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{km} \xi_k \right) \xi_m = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n a_{km} \xi_k \xi_m.$$

где  $\xi_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — координаты вектора  $x$  в некотором базисе.

Квадратичная форма  $f(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$  может быть записана также в виде скалярного произведения

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j = x'Ax = (x, Ax), \quad (5)$$

где  $A=A'$  матрица квадратичной формы.

Действительно, полагая, что  $A$  есть также матрица некоторого линейного преобразования, заданного в ортонормированном базисе, из равенства (19) § 7 имеем

$$(x, Ax) = \left( [\xi_i], \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \right] \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Выясним, как изменяется матрица квадратичной формы при переходе к новому базису.

**Теорема 1.** При переходе к другому базису пространства  $V_n$  матрица квадратичной формы  $A$  изменяется по закону

$$B = CAC' \quad (6)$$

где  $C$  — матрица перехода к новому базису.

**Доказательство.** Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — какой-нибудь базис пространства  $V_n$ , а  $C$  — матрица перехода к новому базису  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , т. е.

$$f = Ce. \quad (7)$$

Тогда

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \dots + \eta_n f_n,$$

где  $\eta_i$  и  $\xi_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — координаты вектора  $x$  соответственно в новом и старом базисах.

Согласно формуле, определяющей координаты вектора при переходе к новому базису (42) § 5, имеем

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = C' \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, \quad (8)$$

или в матричной форме

$$x = C'y, \quad (9)$$

здесь  $y$  — тот же вектор  $x$ , но записанный в координатах при новом базисе.

Подставив выражение (9) в (4), получим

$$f(x, x) = x'Ax = (C'y)'A(C'y) = y'CAC'y,$$

Или, если

$$CAC' = B, \quad (10)$$

то

$$f(x, x) = f(y, y) = y'By. \quad (11)$$

Для того чтобы матрица  $B$  была матрицей квадратичной формы, необходимо, чтобы она была симметричной. Покажем симметричность этой матрицы. Имеем

$$B' = (CAC')' = (AC')'C' = CA'C',$$

но так как  $A' = A$  (в силу симметричности матрицы квадратичной формы), то и  $B' = B$ , т. е.  $B$  — симметричная матрица.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что при переходе к новому базису, т. е. при замене переменных согласно формуле (9), матрица квадратичной формы изменяется по правилу (10).

**2. Канонический вид квадратичной формы.** Выясним простейший вид квадратичной формы, который можно получить путем рационального выбора базиса. Введем новое определение. Если матрица квадратичной формы имеет диагональный вид, т. е.

$$A = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n], \quad (12)$$

то соответствующая ей квадратичная форма

$$f(x, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k^2 \quad (13)$$

называется *квадратичной формой, приведенной к каноническому виду*.

Покажем, что всякую квадратичную форму можно привести к каноническому виду.

**Теорема 2.** Квадратичная форма  $f(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$  с помощью линейного преобразования с ортогональной матрицей  $C$  может быть приведена к каноническому виду  $f(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta_i^2$ .

**Доказательство.** В евклидовом пространстве  $V_n$  рассмотрим матрицу  $A$  квадратичной формы как матрицу симметричного преобразования при том же ортонормированном базисе, в котором задана квадратичная форма. Из теоремы 8 § 7 следует, что существует такая ортогональная матрица  $C$  того же размера, что и матрица  $A$ , которой соответствует матрица  $B = CAC'$  диагонального вида, т. е.

$$B = CAC' = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n], \quad (14)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные значения матрицы  $A$ .

Перейдем от старого базиса к новому, причем в качестве матрицы перехода к новому базису выберем матрицу  $C$ . Тогда, обозначив

вектор квадратичной формы в новых координатах через  $y$ , согласно равенству (42) § 5 найдем

$$x = C'y, \quad x' = (C'y)' = y'C,$$

откуда

$$x'Ax = (y'C)A(C'y) = y'CAC'y = y'By. \quad (15)$$

Составляя выражение для квадратичной формы, исходя из матрицы  $B$ , получим ее канонический вид

$$f(x, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \eta_k^2. \quad (16)$$

Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что число слагаемых в равенстве (16) определяется рангом матрицы  $A$  исходной квадратичной формы.

*Теорема 3.* Если квадратичная форма  $f(x, x)$  с матрицей  $A$  при переходе к некоторому базису приведена к виду (16), то число не равных нулю членов в выражении (16) равно  $r$ -рангу исходной квадратичной формы.

*Доказательство.* Составим матрицу  $B$  квадратичной формы канонического вида. В выражении (16) отсутствуют члены, содержащие произведения разных координат, поэтому матрица этой квадратичной формы имеет диагональный вид

$$B = \text{diag} [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]. \quad (17)$$

Допустим, что число не равных нулю коэффициентов  $\lambda_i$  равно  $m$ . Пусть для определенности  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \dots, \lambda_m \neq 0, \lambda_{m+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$ , тогда

$$B = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0]. \quad (18)$$

В левом верхнем углу матрицы  $B$  расположен минор  $m$ -го порядка

$$M = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m \neq 0, \quad (19)$$

а все миноры матрицы  $B$  более высокого порядка равны нулю, поэтому  $\text{rang } B = m$ . С другой стороны, на основании предыдущей теоремы

$$\text{rang } B = \text{rang } CAC' = \text{rang } A = r,$$

так как матрица  $C$  является матрицей перехода к новому базису и на основании теоремы 6 § 5 она невырожденная. Следовательно,  $m = r$ .

Теорема доказана.

**Пример 1.** Привести квадратичную форму

$$f(x, x) = 3\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 + \xi_3$$

к каноническому виду.

Матрица  $A$  заданной квадратичной формы равна

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы  $A$ :

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4),$$

откуда

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1.$$

Матрица  $B$  квадратичной формы в соответствии с теоремой 2 имеет канонический вид

$$B = CAC' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

и в новом базисе квадратичная форма равна

$$f(x, x) = \eta_1^2 + 4\eta_2^2 - \eta_3^2.$$

Матрицу перехода  $C$  найдем, воспользовавшись теоремой 3 § 6. Для этого вычислим собственные векторы матрицы  $A$ . Аналогично тому, как было сделано в примере 3 § 5, получим:

- а) для  $\lambda_1 = 1$   $\begin{cases} 2\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \\ 2\xi_1 - \xi_2 = 0 \end{cases}$   $\xi_2 = \xi_3 = 0, \xi_3 = 1, x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;
- б) для  $\lambda_2 = 4$   $\begin{cases} -\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \\ -3\xi_3 = 0 \end{cases}$   $\xi_2 = 1, \xi_1 = 2, \xi_3 = 0, x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;
- в) для  $\lambda_3 = -1$   $\begin{cases} 4\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \\ 2\xi_3 = 0 \end{cases}$   $\xi_2 = -1, \xi_3 = 2, \xi_1 = 0, x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Строками матрицы  $C$  будут нормированные собственные векторы матрицы  $A$ , т. е.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix},$$

и согласно равенству (8)

$$y = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = (C')^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \frac{2}{\sqrt{5}}\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\xi_2 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\xi_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\xi_2 \end{bmatrix}.$$

3. Положительно определенные квадратичные формы. Рассмотрим класс квадратичных форм, широко используемый при анализе устойчивости автоматических систем.

Действительная квадратичная форма

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$$

$n$  переменных (координат) называется *положительно определенной*, когда она принимает строго положительное значение при всякой ненулевой системе действительных значений переменных. Если же эта квадратичная форма принимает строго отрицательные значения при любой ненулевой системе действительных значений переменных, то она называется *отрицательно определенной*. В остальных случаях квадратичная форма называется *неопределенной*.

Можно показать, что при любом невырожденном линейном преобразовании матрицы квадратичной формы (т. е. при переходе к новому базису) положительно определенная квадратичная форма остается положительно определенной, а отрицательно определенная остается отрицательно определенной\*).

При исследовании устойчивости автоматических систем необходимо определить, является ли заданная квадратичная форма положительно определенной. Определять собственные значения матрицы квадратичной формы бывает затруднительно, так как приходится решать характеристическое уравнение высокого порядка. Существует критерий, который позволяет выяснить, является ли квадратичная форма положительно определенной, не вычисляя собственных значений матрицы квадратичной формы. Следующая теорема позволяет выявить, является ли исследуемая квадратичная форма положительно определенной. Предварительно примем два определения.

*Главным минором* матрицы  $A$  называется минор, диагональные элементы которого являются диагональными элементами матрицы  $A$ .

Главным диагональным минором матрицы  $A$  порядка  $k$  называется минор, составленный из первых  $k$  строк и  $k$  столбцов матрицы  $A$ .

*Теорема 4 (критерий Сильвестра). Квадратичная форма*

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$$

*положительно определена тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры ее матрицы  $A = [a_{ij}]$  строго положительны.*

Теорему примем без доказательства\*\*).

\*). См., например: Курош А. Г. Курс высшей алгебры. «Наука», 1968, стр. 181.

\*\*). Доказательство теоремы см. там же.

Пример 2. Исследовать, является ли квадратичная форма с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

положительно определенной.

Главные диагональные миноры матрицы  $A$  равны

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = 0 - 4 < 0,$$

т. е. квадратичная форма с матрицей  $A$  не является положительно определенной.

Пример 3. Исследовать, является ли квадратичная форма матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

положительно определенной.

Имеем

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = 8 - 1 = 7 > 0, \quad \Delta_3 = 4 \cdot 6 - 1 \cdot 3 + 3(-6) = 3 > 0,$$

поэтому, согласно критерию Сильвестра, в этом случае квадратичная форма положительно определена.

Пример 4. Исследовать, является ли квадратичная форма

$$f(x, x) = -\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_2^2$$

отрицательно определенной.

Рассмотрим квадратичную форму

$$-f(x, x) = +\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2,$$

ее матрица имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Главные диагональные миноры матрицы  $A$  равны

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = 2 - 1 = 1 > 0.$$

Таким образом, квадратичная форма  $-f(x, x)$  является положительно определенной, а следовательно, квадратичная форма  $f(x, x)$  является отрицательно определенной.



ЧАСТЬ ВТОРАЯ  
**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.**  
**УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Глава IV

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 9. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

1. Дифференциальные уравнения. Геометрическая интерпретация решения. Уравнения, которые, кроме неизвестных функций одного или нескольких переменных, содержат также их производные, называются *дифференциальными*. Дифференциальные уравнения называются *обыкновенными*, если неизвестные функции являются функциями одного переменного, в противном случае дифференциальные уравнения называются *уравнениями в частных производных*. В дальнейшем мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения. Независимую переменную будем понимать как время, так как дифференциальные уравнения рассматриваются нами применительно к автоматическим системам, а переменные, описывающие их поведение, являются функциями времени.

Соотношение вида

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

которое связывает переменную  $t$ , неизвестную функцию  $x$  и ее производные до порядка  $n$  включительно, называется *дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка*.

*Решением уравнения (1)* называется функция  $x = \xi(t)$ , определенная на некотором интервале  $\Delta \ni t$ , которая, будучи поставлена в уравнение (1), обращает его в тождество на всем интервале  $\Delta$ .

Соотношение (1) можно рассматривать как функцию, определяющую неявно производную  $n$ -го порядка  $x^{(n)}$ . При определенных условиях\*) его можно решить относительно  $x^{(n)}$ ;

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \quad (2)$$

\* См. Фихтенгольд Г. М. Основы математического анализа, т. II. «Наука», 1960, стр. 187.

К дифференциальным уравнениям приводятся многие задачи физики и техники. В качестве примера рассмотрим контур  $RC$ , изображенный на рис. 8. На этом рисунке  $R$  — активное сопротивление,  $C$  — емкость. Если обозначить через  $U_{вх}(t)$  и  $U_{вых}(t)$  соответственно входное и выходное напряжения, а через  $i(t)$  — ток в контуре, то на основании второго закона Кирхгофа уравнения, описывающие изменение во времени этих величин, будут иметь вид

$$U_{вх}(t) = i(t)R + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt,$$

$$U_{вых}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt.$$

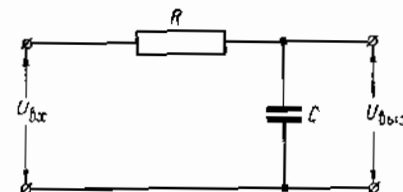


Рис. 8

Если продифференцировать второе уравнение по  $t$ , определить значение тока  $i(t)$  и подставить это значение в первое уравнение, то получится дифференциальное уравнение

$$CR \frac{dU_{вых}(t)}{dt} + U_{вых}(t) = U_{вх}(t). \quad (3)$$

Уравнение (3) является дифференциальным уравнением первого порядка; оно связывает входную и выходную величины контура  $RC$ . Зная входную величину, можно, решив уравнение, определить выходную величину как функцию времени.

Если в выражении (2) положить  $n=1$ , то получим уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$x' = f(t, x). \quad (4)$$

Решения такого уравнения можно изобразить на плоскости  $t, x$  в виде некоторого семейства кривых.

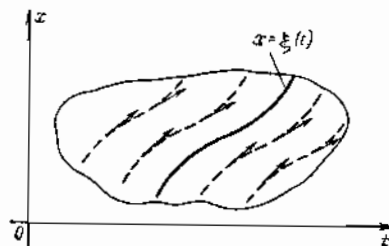


Рис. 9

Рассмотрим плоскость  $t, x$  и пусть функция  $f(t, x)$  определена и непрерывна в некоторой области  $G$  этой плоскости. Пусть  $x = \xi(t)$  — решение уравнения (4). Тогда  $\xi(t)$  является непрерывной и непрерывно-дифференцируемой функцией  $t$  в области  $G$ . На плоскости  $t, x$  решению  $x = \xi(t)$  будет соответствовать непрерывная кривая, называемая *интегральной кривой*. В каждой точке области  $G$  функция  $f(t, x)$  задает некоторое направление; в области  $G$  функция  $f(t, x)$  определяет поле направлений (рис. 9). В этом случае задачу решения уравнения (4) можно геометрически интерпретировать следующим образом: требуется найти

все кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением поля.

Функция  $x = \xi(t, C)$  называется *общим решением* уравнения (4) в области  $G$ , если путем соответствующего выбора постоянной можно получить любую интегральную кривую, находящуюся в области  $G$ .

2. **Нормальная система дифференциальных уравнений.** В дифференциальных уравнениях вида (1) может входить  $n$  неизвестных функций  $x_1, \dots, x_n$ . Тогда системой дифференциальных уравнений будет совокупность соотношений

$$\begin{aligned} F_i(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1)}, x_2, x_2', \dots, x_2^{(m_2)}, \dots, \\ x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (5)$$

Предположим, что эту систему можно разрешить относительно старших производных  $x_1^{(m_1)}, \dots, x_n^{(m_n)}$ . В этом случае получим следующую систему уравнений:

$$x_i^{(m_i)} = f_i(t, x_1, \dots, x_1^{(m_1-1)}, \dots, x_n, \dots, x_n^{(m_n-1)}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

Система (6) называется *канонической системой* дифференциальных уравнений.

Вводя новые неизвестные функции, можно привести систему (6) к системе уравнений первого порядка.

Пусть

$$\begin{aligned} x_{i1} = x_{i1}, \quad x_{i2} = x_{i1}', \quad \dots, \quad x_{im_i} = x_{i1}^{(m_i-1)}, \quad \dots, \\ x_n = x_{n1}, \quad x_{n2} = x_{n1}', \quad \dots, \quad x_{nm_n} = x_{n1}^{(m_n-1)}. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (6) запишется в виде

$$\begin{aligned} x_{i1}' &= x_{i2}, \\ x_{i2}' &= x_{i3}, \\ x_{im_i}' &= f_i(t, x_{11}, \dots, x_{1m_1}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nm_n}) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (7)$$

Система (6) привелась к системе  $N$  уравнений первого порядка, причем

$$N = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

В дальнейшем будем рассматривать систему из  $n$  уравнений первого порядка в виде

$$x_i' = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

Система (8) называется *нормальной системой* дифференциальных уравнений. Систему (8) будем записывать в векторной форме. Для

этого введем вектор-функцию

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Тогда система (8) может быть представлена в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (9)$$

*Решением системы (8) на интервале  $\Delta$*  называется совокупность  $n$  функций  $x_i = \xi_i(t)$ , определенных на интервале  $\Delta$ , и таких, что подстановка их в систему (8) обращает каждое уравнение этой системы в тождество на всем интервале  $\Delta$ .

Если вектор-функция  $f$  не зависит явно от времени  $t$ , т. е. система дифференциальных уравнений (9) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (10)$$

то эта система уравнений называется *автономной (стационарной)*.

Важнейшей задачей в теории дифференциальных уравнений является задача Коши. Начальной задачей, или задачей Коши, для системы (8) называется следующая задача. Найти решение

$$x_i = \xi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

системы дифференциальных уравнений (8), определенное на некотором интервале  $\Delta$ , содержащем точку  $t_0$ , и удовлетворяющее условиям

$$\xi_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (11)$$

причем  $t_0, x_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — заранее заданные числа.

Значения  $t_0, x_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) называются *начальными значениями* для решения  $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ , а условия (11) — *начальными условиями*.

Если ввести в рассмотрение  $n+1$ -мерное пространство с координатами  $t, x_1, \dots, x_n$ , то совокупность  $n$  функций  $x_i = \xi_i(t)$  будет представлять линию в этом пространстве. Начальные значения  $t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}$  представляют собой точку в  $n+1$ -мерном пространстве.

Таким образом, задача Коши состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку в  $n+1$ -мерном пространстве. Для случая  $n=1$  интегральная кривая изображена на рис. 10.

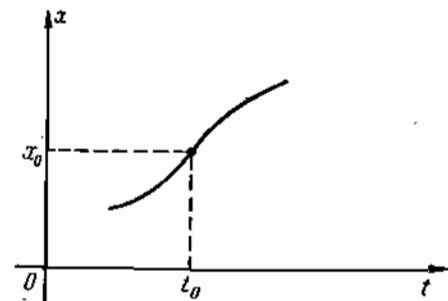


Рис. 10

В тех случаях, когда требуется подчеркнуть зависимость решения  $\xi_i(t)$   $i=1, 2, \dots, n$  от начальных значений  $t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}$ , мы будем решение записывать в виде

$$\xi_i(t, t_0, x_{i0}) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

**Пример 1.** Дифференциальное уравнение имеет вид  $x' = x^2$ ; задано начальное условие  $x(0) = 1$ . Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию.

Разделив уравнение на  $x^2$  (при делении может быть потеряно решение  $x=0$ , но это решение не удовлетворяет начальному условию), получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{x^2} = dt.$$

Интегрируя это уравнение, найдем решение:

$$-\frac{1}{x} = t + c,$$

$$\text{или } x = -\frac{1}{c+t}.$$

Учитывая начальное условие, определим постоянную интегрирования:  $c = -1$ . Решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, будет

$$x = \frac{1}{1-t}.$$

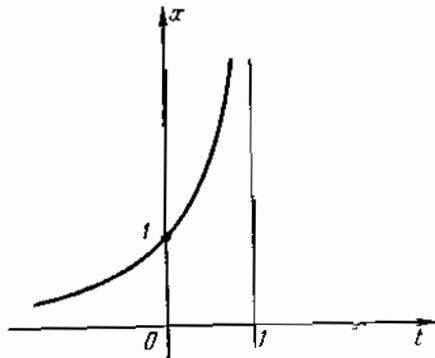


Рис. 11

Интервалом  $\Delta$  является любой интервал  $(\alpha, \beta)$ , где  $\beta < 1$ . График решения приведен на рис. 11.

**Пример 2.** Найти решение уравнения  $x' = 2\sqrt{x}$ , если задано начальное условие  $x(1) = 0$ .

Из уравнения непосредственно следует, что  $x \equiv 0$  является одним из его решений, причем это решение удовлетворяет начальному условию. Разделив дифференциальное уравнение на  $2\sqrt{x}$ , получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt.$$

После интегрирования найдем  $\sqrt{x} = t + c$ . При  $t = 1$   $x = 0$ , поэтому постоянная интегрирования  $c = -1$ .

Следовательно, искомое решение  $x = (t-1)^2$ , т. е. его график является параболой с вершиной, смещенной в точку  $(1, 0)$ . Заметим, что решением служит лишь правая ветвь параболы (рис. 12), так как в исходном уравнении рассматривается только положительное значение  $\sqrt{x}$  и поэтому  $x' > 0$ .

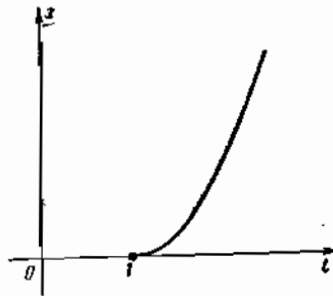


Рис. 12

В рассмотренном примере правая часть уравнения определена и непрерывна при  $x \geq 0$ . На полуплоскости  $(t, x)$  есть точки (напри-

мер, точка  $(1, 0)$ , через которые проходит более одного решения. Такие точки называются точками *неединственности решения*. Из примера 2 видно, что требование непрерывности правой части уравнения  $f(t, x)$  недостаточно для обеспечения единственности решения.

## § 10. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

**1. Теорема существования и единственности решения для одного уравнения.** Рассмотрим теорему, устанавливающую существование и единственность решения задачи Коши для уравнения

$$x' = f(t, x). \quad (1)$$

Будем говорить, что функция  $f(t, x)$  удовлетворяет *условию Липшица* по  $x$  в замкнутой области  $\bar{G}$ , если для всякой пары точек  $(t, x_1), (t, x_2) \in \bar{G}$  справедливо неравенство

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad (2)$$

где  $L = \text{const}$  — постоянная Липшица.

Заметим, что условие Липшица является более сильным, чем условие непрерывности функции  $f(t, x)$  по  $x$ . Из непрерывности функции  $f(t, x)$  по  $x$  не следует выполнение условия Липшица, однако, как показывает следующая теорема, если функция  $f(t, x)$  удовлетворяет условию Липшица по  $x$ , то она непрерывна относительно  $x$ .

**Теорема 1.** Если функция  $f(t, x)$  непрерывна по  $t$  в области  $G$  и удовлетворяет в этой области условию Липшица по переменной  $x$ , то она непрерывна по совокупности переменных  $t, x$ .

**Доказательство.** Составим полное приращение функции  $f(t, x)$ :

$$f(t + \Delta t, x + \Delta x) - f(t, x) = [f(t + \Delta t, x + \Delta x) - f(t, x + \Delta x)] + [f(t, x + \Delta x) - f(t, x)].$$

Из условия Липшица следует, что выполняется неравенство

$$|f(t, x + \Delta x) - f(t, x)| \leq L|\Delta x|.$$

Для любого числа  $\epsilon > 0$  можно так выбрать  $\Delta x$ , чтобы выполнялось неравенство  $L|\Delta x| < \frac{\epsilon}{2}$ . Зафиксируем приращение  $\Delta x$ . Тогда в силу непрерывности функции  $f(t, x)$  по  $t$  можно указать такое число  $\delta > 0$ , что при  $|\Delta t| > \delta$  будет справедливо неравенство

$$|f(t + \Delta t, x + \Delta x) - f(t, x + \Delta x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

и, следовательно,

$$|f(t + \Delta t, x + \Delta x) - f(t, x)| < \epsilon,$$

что и доказывает теорему.

Перейдем к рассмотрению теоремы о существовании и единственности решения начальной задачи Коши.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(t, x)$  задана на замкнутой области  $\bar{G}$ , непрерывна в ней по  $t$  и удовлетворяет условию Липшица по  $x$ . Тогда можно указать такой интервал  $\Delta$  на оси  $t$ , содержащий точку  $t_0$ , на котором существует и притом единственное решение  $x = \xi(t)$  уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$\xi(t_0) = x_0. \quad (3)$$

**Доказательство.** Предположим, что задача Коши имеет решение, т. е. существует такая функция  $x = \xi(t)$ , которая обращает уравнение (1) в тождество

$$\xi'(t) \equiv f(t, \xi(t)).$$

Принтегрировав это тождество с учетом начального условия, получим

$$\xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, \xi(t)) dt. \quad (4)$$

Таким образом, всякое решение задачи Коши  $\xi(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению (4). Обратное — всякое непрерывное решение интегрального уравнения (4) удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (3). В самом деле, дифференцируя равенство (4), получим исходное уравнение

$$\xi'(t) = f(t, \xi(t)).$$

Положив в равенстве (4)  $t = t_0$ , найдем  $\xi(t_0) = x_0$ , т. е. начальное условие (3) удовлетворяется.

Таким образом, интегральное уравнение (4) эквивалентно дифференциальному уравнению (1) и начальным условиям (3).

Из доказанной выше теоремы 1 следует, что функция  $f(t, x)$  является непрерывной функцией по совокупности аргументов  $t, x$ .

Известно<sup>\*)</sup>, что функция  $f(t, x)$ , непрерывная в замкнутой области  $\bar{G}$ , будет в ней ограничена, т. е. существует такое действительное число  $M > 0$ , что  $|f(t, x)| \leq M$  для всех  $t, x \in \bar{G}$ .

Будем определять решение интегрального уравнения (4) методом последовательных приближений. Проведем через точку  $O$  с координатами  $t_0, x_0$  (рис. 13) две прямые — одну с угловым коэффициентом  $+M$ , а другую — с угловым коэффициентом  $-M$  (прямые  $BD$  и  $AC$ ). На оси  $t$  возьмем некоторый отрезок  $[a, b]$ , содержащий

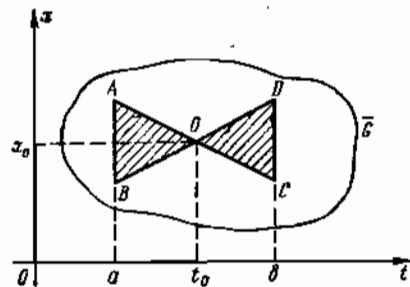


Рис. 13.

<sup>\*)</sup> См., например: Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. I. «Наука», 1968, стр. 133.

точку  $t_0$ , такой, что вертикальные прямые  $t = a$  и  $t = b$  отсекают треугольники  $AOB$  и  $DOC$ , принадлежащие области  $\bar{G}$ . В качестве нулевого приближения решения уравнения (4) возьмем произвольную непрерывную функцию  $\xi_0(t)$ , график которой принадлежит области  $\bar{G}$  (в частности, можно принять  $\xi_0(t) = x_0$ ). Подставим в правую часть уравнения (4) вместо  $\xi(t)$  функцию  $\xi_0(t)$  и введем обозначение

$$\xi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, \xi_0(t)) dt.$$

Очевидно, что функция  $\xi_1(t)$  определена для  $t \in [a, b]$ , непрерывна и  $\xi_1(t_0) = x_0$ .

Легко показать, что график функции  $\xi_1(t)$  не выходит из заштрихованной области. Действительно, имеем

$$|\xi_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(t, \xi_0(t))| dt \leq M|t - t_0|,$$

т. е. график функции  $\xi_1(t)$  расположен в области, ограниченной прямыми  $AC$  и  $BD$ .

Функция  $\xi_1(t)$  является первым приближением решения уравнения (4).

В качестве второго приближения решения примем

$$\xi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, \xi_1(t)) dt.$$

Функция  $\xi_2(t)$  определена на отрезке  $[a, b]$  и справедлива следующая оценка:

$$|\xi_2(t) - x_0| \leq M|t - t_0|.$$

Процесс построения приближений решения можно продолжить. Для  $n$ -го приближения получим

$$\xi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, \xi_{n-1}(t)) dt,$$

причем

$$|\xi_n(t) - x_0| \leq M|t - t_0|,$$

т. е. и в этом случае график  $n$ -го приближения решения не выходит из заштрихованной области (см. рис. 13).

Таким образом, получили определенную на отрезке  $[a, b]$  последовательность функций  $\{\xi_n(t)\}$ .

Покажем теперь, что эта последовательность сходится, т. е. существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(t) = \xi(t) \quad (5)$$

и предельная функция  $\xi(t)$  является искомым решением уравнения (4).

Последовательность  $\{\xi_n(t)\}$  сходится на отрезке  $[a, b]$  равномерно\*. Действительно, если перейти от этой последовательности к ряду  $\xi_n(t) = \xi_1(t) + [\xi_2(t) - \xi_1(t)] + [\xi_3(t) - \xi_2(t)] + \dots + [\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)]$ , то  $\xi_n(t)$  есть частичная сумма ряда

$$\xi_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} [\xi_{i+1}(t) - \xi_i(t)]. \quad (6)$$

Покажем, что ряд (6) сходится равномерно. Функция  $\xi_1(t)$  является непрерывной функцией на отрезке  $[a, b]$  и поэтому она ограничена на этом отрезке, т. е.  $|\xi_1(t)| < c$ . Аналогично получим, что  $|\xi_2(t)| < c$ , тогда

$$|\xi_2(t) - \xi_1(t)| \leq |\xi_2(t)| + |\xi_1(t)| < 2c$$

и

$$\begin{aligned} |\xi_3(t) - \xi_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(t, \xi_3(t)) - f(t, \xi_2(t))] dt \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(t, \xi_3(t)) - f(t, \xi_2(t))| dt. \end{aligned}$$

Функции  $\xi_3(t)$  и  $\xi_2(t)$  принадлежат области  $\bar{G}$ , поэтому к разности под знаком интеграла в правой части применимо неравенство Липшица:

$$\begin{aligned} |\xi_3(t) - \xi_2(t)| &\leq L \int_{t_0}^t |\xi_3(t) - \xi_2(t)| dt < 2cL|t - t_0| \leq \\ &\leq 2cL(b - a) = 2cm, \end{aligned}$$

где  $m = L(b - a)$ .

Аналогично получим:

$$\begin{aligned} |\xi_4(t) - \xi_3(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(t, \xi_4(t)) - f(t, \xi_3(t))| dt < \\ &< L \int_{t_0}^t |\xi_4(t) - \xi_3(t)| dt < 2cmL(b - a) = 2cm^2. \end{aligned}$$

\* Последовательность функций  $\{\xi_n(t)\}$  называется равномерно-сходящейся к функции  $\xi(t)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $N$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что для всех  $n > N$  будет справедливо неравенство  $|\xi_n(t) - \xi(t)| < \varepsilon$  для всех  $t \in [a, b]$ .

Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t)$  называется равномерно-сходящимся, если равномерно сходится последовательность его частичных сумм. Для оценки равномерной сходимости функционального ряда применяется признак Вейерштрасса: если существует такой числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , что  $|\xi_n(t)| < c_n$  для  $t \in [a, b]$  и числовой ряд сходится, то функциональный ряд сходится равномерно на данном отрезке.

Выполняя подобные оценки далее, найдем

$$|\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)| < L \int_{t_0}^t |\xi_{n-1}(t) - \xi_{n-2}(t)| dt < 2cm^{n-2}.$$

Таким образом, все члены функционального ряда (6) мажорируются членами числового ряда

$$c + 2c + 2cm + 2cm^2 + \dots + 2cm^{n-2} + \dots$$

Этот ряд представляет собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем прогрессии  $m$  и, следовательно, будет сходиться при  $|m| < 1$ .

Если выбрать отрезок  $[a, b]$  таким образом, чтобы  $m = L(b - a) < 1$ , то в силу признака Вейерштрасса функциональный ряд (6), а следовательно, и последовательность  $\{\xi_n(t)\}$  будут сходиться равномерно на отрезке  $[a, b]$ .

Из математического анализа известно, что предельная функция равномерно-сходящейся последовательности непрерывных функций есть функция непрерывная. Таким образом, функция  $\xi(t)$  является непрерывной функцией.

Покажем теперь, что  $\xi(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению (4). Напишем  $n$ -е приближение решения

$$\xi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, \xi_{n-1}(t)) dt \quad (7)$$

и перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Так как график функции  $\xi(t)$  принадлежит заштрихованной области (см. рис. 13), то имеет смысл интеграл

$$\int_{t_0}^t f(t, \xi(t)) dt.$$

Оценим разность

$$\left| \int_{t_0}^t f(t, \xi(t)) dt - \int_{t_0}^t f(t, \xi_n(t)) dt \right| \leq L \int_{t_0}^t |\xi(t) - \xi_{n-1}(t)| dt.$$

В силу равномерной сходимости последовательности функций  $\xi_n(t)$  к функции  $\xi(t)$

$$\int_{t_0}^t |\xi(t) - \xi_{n-1}(t)| dt \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(t, \xi_{n-1}(t)) dt = \int_{t_0}^t f(t, \xi(t)) dt.$$

Перейдя к пределу в равенстве (7) при  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$\xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, \xi(t)) dt,$$

т. е. функция  $\xi(t)$  является непрерывным решением уравнения (4).



Существование решения уравнения (4) доказано.

Докажем единственность полученного решения. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что на отрезке  $[a, b]$  существует два решения  $\xi(t)$  и  $\psi(t)$  интегрального уравнения (4). Оценим разность:

$$\begin{aligned} |\xi(t) - \psi(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(t, \xi(t)) - f(t, \psi(t))] dt \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(t, \xi(t)) - f(t, \psi(t))| dt < L \int_{t_0}^t |\xi(t) - \psi(t)| dt \leq \\ &\leq L \max_{[a, b]} |\xi(t) - \psi(t)| (b - a). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\max_{[a, b]} |\xi(t) - \psi(t)| \leq L(b - a) \max_{[a, b]} |\xi(t) - \psi(t)|. \quad (8)$$

Но  $L(b - a) < 1$ , поэтому неравенство (8) возможно тогда и только тогда, когда  $\xi(t) \equiv \psi(t)$ , т. е. решение уравнения (4) единственно.

Таким образом, если функция  $f(t, x)$  непрерывна в замкнутой области  $\bar{G}$  и удовлетворяет в этой области условию Липшица по  $x$ , то существует единственное решение уравнения (1), принимающее при  $t = t_0$  значение  $x_0$ .

Теорема доказана полностью.

Сделаем следующие замечания к доказанной теореме.

1. Из теоремы следует, что последовательное приближение решения уравнения (1) сходится к единственному пределу, не зависящему от выбора нулевого приближения  $\xi_0(t)$ .

2. Решение  $\xi(t)$  уравнения (1), полученное последовательным приближением, было определено на отрезке  $[a, b]$ . Покажем, что его можно продолжить и за пределы этого отрезка.

Пусть  $\xi(b) = x_1$ , причем точка  $(b, x_1) \in \bar{G}$  и является внутренней точкой области  $\bar{G}$ . Тогда методом последовательных приближений мож-

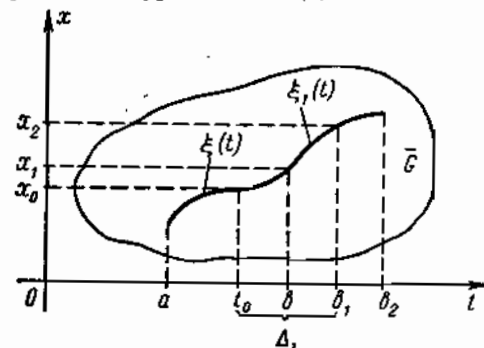


Рис. 14

жем получить решение  $\xi_1(t)$  уравнения (1) с начальным условием:  $\xi_1(b) = x_1$  на отрезке  $\Delta_1$ , содержащем точку  $b$ . Функции  $\xi_1(t)$  и  $\xi(t)$  при  $t = b$  равны. Из теоремы 2 следует, что эти функции должны совпадать на общей части отрезков  $[a, b]$  и  $\Delta_1$  (рис. 14), т. е.  $\xi_1(t) \equiv \xi(t)$  на пересечении отрезков  $[a, b]$  и  $\Delta_1$ . Но функция  $\xi_1(t)$  определена на отрезке  $[b, b_1]$ , не принадлежащем  $[a, b]$  и поэтому можно рассматривать функцию  $\xi_1(t)$  как продолжение решения  $\xi(t)$  на отрезок  $[b, b_1]$ . Аналогичным образом обозначим  $\xi_1(b_1) = x_2$ .

Если точка  $(b_1, x_2) \in \bar{G}$ , можно построить продолжение решения на некоторый отрезок  $[b_1, b_2]$  и так далее. Такое же построение можно проделать в сторону убывания значений  $t$ . С помощью указанных продолжений можно сколь угодно близко подойти к границе области  $G$ .

3. Требование выполнения условия Липшица не обязательно для существования решения уравнения (1). Существуют другие методы доказательства существования решения при предположении лишь непрерывности функции  $f(t, x)$ . Но для единственности решения требуется выполнение условий Липшица.

Покажем, что правая часть уравнения  $x' = 2\sqrt{x}$ , рассмотренного в примере 2 § 9, не удовлетворяет условию Липшица в интервале  $(0, \infty)$ .

Действительно, пусть  $f(t, x) = 2\sqrt{x}$ , тогда, если условие Липшица удовлетворяется, то должно выполняться неравенство

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

т. е. частное

$$\frac{|f(t, x_1) - f(t, x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq L,$$

и частная производная  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$  должна быть ограниченной.

В рассматриваемом примере  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , т. е.  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ . Следовательно, условие Липшица не удовлетворяется, и поэтому уравнение не имеет единственного решения, несмотря на непрерывность его правой части.

4. Если в области  $\bar{G}$  функция  $f(t, x)$  имеет ограниченную частную производную по  $x$ , т. е.  $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq N$ , где  $N$  — некоторое постоянное число, то во всей этой области выполняется условие Липшица. В самом деле, оценим модуль  $|f(t, x_1) - f(t, x_2)|$  для любой пары точек  $(t, x_1), (t, x_2) \in \bar{G}$ . По формуле Лагранжа имеем:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |f'_x(t, \bar{x})| (x_1 - x_2) \leq N|x_1 - x_2|,$$

здесь  $x_1 \leq \bar{x} \leq x_2$ . Таким образом, условие Липшица выполняется, и постоянная Липшица  $L = N$ .

Но класс функций, удовлетворяющих условию Липшица, шире, чем класс функций, имеющих ограниченные частные производные по  $x$ . Например, в уравнении  $x' = |x|$  имеем:  $f(t, x) = |x|$ . При  $x = 0$  частная производная  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  не существует. Но модуль

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|,$$

т. е. здесь условие Липшица выполняется и постоянная  $L = 1$ .

2. Теорема существования и единственности решения для нормальной системы уравнений. Пусть имеется нормальная система

дифференциальных уравнений

$$x_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (10)$$

Общим решением системы (9) в области  $\bar{G}$  называется совокупность  $n$  функций

$$x_i = \xi_i(t, c_1, \dots, c_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

из которой путем выбора произвольных постоянных  $c_1, c_2, \dots, c_n$  можно получить любое решение, принадлежащее области  $\bar{G}$ .

Будем говорить, что функция  $f(t, x_1, \dots, x_n)$  удовлетворяет условию Липшица в области  $\bar{G}$  по переменным  $x_1, \dots, x_n$ , если существует такое постоянное число  $L > 0$ , что для любой пары точек  $(t, x_1, \dots, x_n)$  и  $(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , принадлежащих  $\bar{G}$ , выполняется неравенство

$$\left| f(t, x_1, \dots, x_n) - f(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \right| \leq L \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_i| \quad (11)$$

Выше в § 9 была сформулирована задача Коши для нормальной системы уравнений. Приведем без доказательства теорему существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы уравнений\*).

**Теорема 3.** Пусть задана нормальная система уравнений (9), причем функции  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  непрерывны по  $t$  и удовлетворяют условию Липшица по  $x_1, \dots, x_n$  в некоторой области  $G$ . Тогда существует и притом единственное решение

$$x_i = \xi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

системы (9), удовлетворяющее начальным условиям

$$\xi_i(t_0) = x_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

определенное на некотором отрезке  $\Delta$ , содержащем точку  $t_0$ .

Сделаем к теореме два замечания:

1. Теорема утверждает существование единственного решения на отрезке  $\Delta$ , содержащем точку  $t_0$ . Способом, аналогичным изложенному в замечании 2 к теореме 2, это решение может быть продолжено за пределы отрезка  $\Delta$  вплоть до границы области  $\bar{G}$ .

2. Если функция  $f(t, x_1, \dots, x_n)$  имеет ограниченные частные производные по  $x_i$  в выпуклой\*\*\*) области  $\bar{G}$ , то эта функция удовле-

\*). Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы существования и единственности для уравнения  $x' = f(t, x)$  — см., например: П о л т р я г и н Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. «Наука», 1965.

\*\*) Область  $\bar{G}$  называется выпуклой, если вместе с любой парой точек в этой области ей принадлежит отрезок, соединяющий эти точки.

творяет условию Липшица. Действительно, по формуле Лагранжа имеем:

$$\begin{aligned} & f(t, x_1, \dots, x_n) - f(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \\ & = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(t, x_1 + \theta(x_1 - \bar{x}_1), \dots, x_n + \theta(x_n - \bar{x}_n))}{\partial x_i} (x_i - \bar{x}_i), \end{aligned}$$

где  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Точка  $(t, x_1 + \theta(x_1 - \bar{x}_1), \dots, x_n + \theta(x_n - \bar{x}_n))$  принадлежит отрезку, соединяющему точки  $(t, x_1, \dots, x_n)$  и  $(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . В силу выпуклости области  $\bar{G}$  эта точка принадлежит указанной области  $\bar{G}$ , поэтому частные производные ограничены. Следовательно, справедливо соотношение

$$|f(t, x_1, \dots, x_n) - f(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)| \leq N \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_i|, \quad (13)$$

т. е. условие Липшица удовлетворяется.

3. **Ломаная Эйлера и  $\epsilon$ -приближенное решение.** Рассмотрим систему уравнений (9)

$$x_i' = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

причем будем полагать, что эта система удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности.

Совокупность  $n$  функций  $\tilde{\xi}_1(t), \dots, \tilde{\xi}_n(t)$  называется  $\epsilon$ -приближенным решением системы (9) на отрезке  $\Delta$ , если каждая из этих функций непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную  $\tilde{\xi}_i'(t)$  и

$$|\tilde{\xi}_i' - f_i(t, \tilde{\xi}_1(t), \dots, \tilde{\xi}_n(t))| \leq \epsilon \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

во всех точках  $t \in \Delta$ , кроме точек разрыва непрерывности этой производной.

Пусть задана начальная точка  $(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})$  и пусть функции  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  непрерывны по  $t$  в области  $\bar{G}$  и удовлетворяют в этой области условию Липшица по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Можно показать, что в этом случае функции  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  будут непрерывны по совокупности переменных  $t, x_1, \dots, x_n$  в области  $\bar{G}$ .

Из непрерывности функций  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  в замкнутой области  $\bar{G}$  следует их равномерная непрерывность\*). Таким образом, для любого  $\epsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , зависящее только от  $\epsilon$ , что при

$$|t - \tilde{t}| < \delta, \quad |x_i - \tilde{x}_i| < \delta \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

будет справедливо неравенство

$$|f_i(t, x_1, \dots, x_n) - f_i(\tilde{t}, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)| < \epsilon \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

\*) См., например: Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа т. I. «Наука», 1968, стр. 240.

Построим  $\varepsilon$ -приближенное решение системы (9). Для этого разобьем область  $\bar{G}$  на кубы со сторонами, меньшими  $\delta$  (для случая  $n=1$  построение проведено на рис. 15, в этом случае область разбивается на квадраты). Из точки  $(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})$  проведем прямую

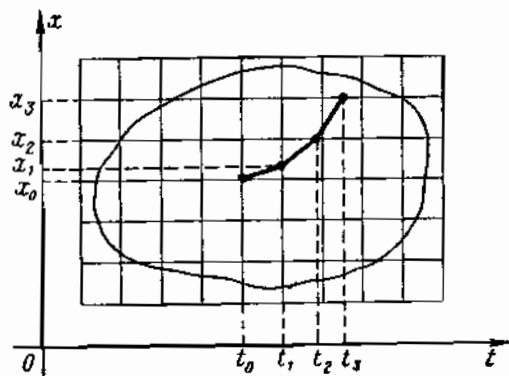


Рис. 15

$$x_i = x_{i0} + f_i(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) \times (t - t_0) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

Эту прямую продолжим до пересечения с одной из сторон соответствующего куба. Обозначим точку пересечения  $(t_1, x_{11}, \dots, x_{n1})$ . Из этой точки проведем прямую

$$x_i = x_{i1} + f_i(t_1, x_{11}, \dots, x_{n1}) \times (t - t_1) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

которую продолжим до пересечения с одной из сторон куба; обозначим точку пересечения  $(t_2, x_{12}, \dots, x_{n2})$ , через эту точку проводим новую прямую

$$x_i = x_{i2} + f_i(t_2, x_{12}, \dots, x_{n2}) (t - t_2) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и так далее.

В результате указанных действий получим ломаную  $x_i = \xi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), называемую *ломаной Эйлера*. Эта ломаная представляет собой непрерывную кусочно-линейную функцию. Ломаную Эйлера мы можем продолжить до границы области  $\bar{G}$ .

Покажем, что ломаная Эйлера является  $\varepsilon$ -приближенным решением системы уравнений (9).

Очевидно, что функция  $\xi_i(t)$  имеет кусочно-непрерывную производную, в любой неугловой точке ломаной

$$\dot{\xi}_i(t) = f_i(t_k, x_{1k}, \dots, x_{nk}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ .

Так как

$$f_i(t_k, x_{1k}, \dots, x_{nk}) = f_i(t, \xi_1(t), \dots, \xi_n(t)) + f_i(t_k, x_{1k}, \dots, x_{nk}) - f_i(t, \xi_1(t), \dots, \xi_n(t)),$$

а

$$|f_i(t_k, x_{1k}, \dots, x_{nk}) - f_i(t, \xi_1(t), \dots, \xi_n(t))| < \varepsilon$$

в силу выбора способа разбиения области  $\bar{G}$ , то справедливо неравенство

$$|\dot{\xi}_i(t) - f_i(t, \xi_1(t), \dots, \xi_n(t))| < \varepsilon. \quad (16)$$

Таким образом, построенная ломаная Эйлера является  $\varepsilon$ -приближенным решением системы (9).

Пусть теперь совокупности  $n$  функций  $\{\xi_i(t)\}$  и  $\{\psi_i(t)\}$  есть соответственно  $\varepsilon_1$ - и  $\varepsilon_2$ -приближенные решения системы (9). Дадим оценку разности этих решений. Оценка может быть произведена с использованием следующей леммы.

*Лемма.* Если  $\{\xi_i(t)\}$  —  $\varepsilon_1$ -приближенное решение,  $\{\psi_i(t)\}$  —  $\varepsilon_2$ -приближенное решение системы (9), то справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n |\xi_i(t) - \psi_i(t)| \leq n\delta e^{nL|t-t_0|} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{L} (e^{nL(t-t_0)} - 1) \quad (17)$$

при условии, что  $|\xi_i(t_0) - \psi_i(t_0)| \leq \delta$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

*Доказательство.* Так как  $\{\xi_i(t)\}$  —  $\varepsilon_1$ -приближенное решение на отрезке  $\Delta$ , то на этом отрезке функции  $\xi_i(t)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{\xi}_i(t) = f_i(t, \xi_1(t), \dots, \xi_n(t)) + \theta_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $|\theta_i(t)| \leq \varepsilon_1$  на отрезке  $\Delta$ .

Аналогично, функции  $\{\psi_i(t)\}$  удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{\psi}_i(t) = f_i(t, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)) + \tau_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $|\tau_i(t)| \leq \varepsilon_2$  на отрезке  $\Delta$ .

Проинтегрируем обе части написанных равенств:

$$\xi_i(t) = \xi_i(t_0) + \int_{t_0}^t f_i(t, \xi_1(t), \dots, \xi_n(t)) dt + \int_{t_0}^t \theta_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Аналогично получим

$$\psi_i(t) = \psi_i(t_0) + \int_{t_0}^t f_i(t, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)) dt + \int_{t_0}^t \tau_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Теперь можно оценить по абсолютной величине разность  $\xi_i(t) - \psi_i(t)$ :

$$|\xi_i(t) - \psi_i(t)| \leq |\xi_i(t_0) - \psi_i(t_0)| + \left| \int_{t_0}^t \theta_i(t) dt \right| + \left| \int_{t_0}^t \tau_i(t) dt \right| + \left| \int_{t_0}^t [f_i(t, \xi_1(t), \dots, \xi_n(t)) - f_i(t, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))] dt \right| \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Применим к последнему неравенству условие Липшица. Для случая  $t > t_0$  получим

$$|\xi_i(t) - \psi_i(t)| \leq \delta + L \int_{t_0}^t \left[ \sum_{i=1}^n |\xi_i(t) - \psi_i(t)| \right] dt + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) (t - t_0) \quad (18)$$

Просуммируем неравенство (18) по всем индексам  $i$ :

$$\sum_{i=1}^n |\xi_i(t) - \psi_i(t)| \leq n\delta + nL \int_{t_0}^t \left[ \sum_{i=1}^n |\xi_i(t) - \psi_i(t)| \right] dt + n(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) (t - t_0). \quad (19)$$

введем обозначение

$$R(t) = \int_{t_0}^t \left[ \sum_{i=1}^n |\xi_i(t) - \psi_i(t)| \right] dt$$

и перепишем неравенство (19) в виде

$$R'(t) \leq n\delta + nLR(t) + n(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0),$$

или

$$R'(t) - nLR(t) \leq n\delta + n(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0).$$

Умножим обе части последнего неравенства на  $e^{-nL(t-t_0)}$ , тогда

$$\frac{d}{dt} [R(t) e^{-nL(t-t_0)}] \leq n\delta e^{-nL(t-t_0)} + n(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0) e^{-nL(t-t_0)}.$$

Интегрируя это соотношение в пределах от  $t_0$  до  $t$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} R(t) e^{-nL(t-t_0)} - R(t_0) &\leq -\frac{\delta}{L} e^{-nL(t-t_0)} + \\ &+ \frac{\delta}{L} - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{L} \int_{t_0}^t (t - t_0) de^{-nL(t-t_0)} = -\frac{\delta}{L} e^{-nL(t-t_0)} + \\ &+ \frac{\delta}{L} - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{L} (t - t_0) e^{-nL(t-t_0)} - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{nL^2} e^{-nL(t-t_0)} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{nL^2}; \end{aligned}$$

отсюда найдем

$$\begin{aligned} R(t) &\leq -\frac{\delta}{L} + \frac{\delta}{L} e^{nL(t-t_0)} - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{L} (t - t_0) - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{nL^2} + \\ &+ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{nL^2} e^{nL(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь внесем полученную оценку (20) в неравенство (19), тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\xi_i(t) - \psi_i(t)| &\leq n\delta - n\delta + n\delta e^{nL(t-t_0)} - (\varepsilon_1 + \\ &+ \varepsilon_2)(t - t_0)n - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{L} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{L} e^{nL(t-t_0)} + n(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0) = \\ &= n\delta e^{nL(t-t_0)} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{L} (e^{nL(t-t_0)} - 1), \end{aligned}$$

что и доказывает лемму для случая  $t > t_0$ .

Аналогично доказывается неравенство (17) для случая  $t < t_0$ .

Лемма доказана.

Рассмотрим следствие, вытекающее из данной леммы.

Пусть  $\xi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — точное решение системы (9), удовлетворяющее начальным условиям (12). Обозначим через  $\psi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )  $\varepsilon$ -приближенное решение системы (9) для тех же начальных условий. Тогда, применив неравенство (17) ( $\delta=0$ , так как начальные условия одинаковые), получим

$$\sum_{i=1}^n |\xi_i(t) - \psi_i(t)| \leq \frac{\varepsilon}{L} (e^{nL(t-t_0)} - 1). \quad (21)$$

Из неравенства (21) следует, что если  $|t - t_0| < h$ , то

$$\sum_{i=1}^n |\xi_i(t) - \psi_i(t)| \leq \frac{\varepsilon}{L} (e^{nLh} - 1) = k\varepsilon,$$

где  $k = \frac{e^{nLh} - 1}{L}$ .

Таким образом, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение  $\psi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) равномерно сходится к решению  $\xi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и ломаная Эйлера, исходящая из точки  $(t_0, \xi_i(t_0))$ , равномерно сходится к точному решению.

Неравенство (21) дает оценку погрешности при замене точного решения  $\varepsilon$ -приближенным.

Полученные неравенства мы используем для выяснения важной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и параметров уравнений.

**4. Непрерывная зависимость решений от начальных условий и параметров.** Опираясь на лемму, приведенную в п. 3, докажем теорему о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и параметров уравнений. Вначале рассмотрим теорему о непрерывной зависимости решений от начальных условий.

**Теорема 4.** Пусть задана нормальная система дифференциальных уравнений (9), причем функции  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  непрерывны по  $t$  и удовлетворяют условию Липшица по  $x_1, \dots, x_n$  в некоторой области  $G$ .

Пусть далее \*)

$$x = \xi(t, t_0, x_0)$$

— решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям (12). Положим, что это решение определено на отрезке  $|t - t_0| \leq h$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon, h) > 0$ , что другое решение  $x = \tilde{\xi}(t, t_0, \tilde{x}_0)$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$\tilde{\xi}(t_0, t_0, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0,$$

где  $\|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$ , будет определено на том же отрезке  $|t - t_0| \leq h$  и удовлетворяет неравенству

$$\|\xi(t, t_0, x_0) - \tilde{\xi}(t, t_0, \tilde{x}_0)\| < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Пусть задано число  $\varepsilon > 0$ . Положим, что решение, проходящее через точку  $(t_0, x_0)$ , определено на интервале

$$|t - t_0| \leq h_1 \leq h.$$

Для заданного  $\varepsilon > 0$  примем  $\delta = \frac{\varepsilon}{ne^{nLh}}$ .

\*) Здесь  $x = \xi(t, t_0, x_0)$  — вектор решения системы дифференциальных уравнений;  $x_0$  — вектор начальных условий.

Предположим, что  $\|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$ . Тогда, применив к решениям  $\xi(t, t_0, x_0)$  и  $\tilde{\xi}(t, t_0, \tilde{x}_0)$  неравенство (17), получим

$$\|\xi(t, t_0, x_0) - \tilde{\xi}(t, t_0, \tilde{x}_0)\| < n \frac{\epsilon}{ne^{nLh}} e^{nL(t-t_0)} \leq \epsilon. \quad (22)$$

По условию теоремы решение  $\xi(t, t_0, x_0)$  определено на отрезке  $|t - t_0| \leq h$ . Решение  $\tilde{\xi}(t, t_0, \tilde{x}_0)$  также определено на этом отрезке; в противном случае на интервале  $|t - t_0| \leq h$  нашлась бы некоторая точка  $t_1$ , в которой неравенство (22) не выполняется.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь непрерывную зависимость решения системы дифференциальных уравнений от параметров.

Пусть имеется система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_s) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (23)$$

Здесь  $(\mu_1, \dots, \mu_s) = \mu$  — вещественные параметры, а функции  $f_i(t, x, \mu)$  определены и непрерывны по совокупности переменных  $t, x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_s$  в некоторой области  $G$   $n+s+1$ -мерного пространства и удовлетворяют условию Липшица по переменным  $x_1, \dots, x_n$  с постоянной  $L$ . Пусть далее  $x = \xi(t, \mu)$  — решение этой системы при значении параметров  $\mu = \mu'$ , удовлетворяющее начальным условиям  $\xi(t_0, \mu') = x_0$  и определенное на отрезке  $|t - t_0| \leq h$ .

Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** Пусть  $\xi(t, \mu')$  — решение системы (23) при значении параметров  $\mu = \mu'$ , удовлетворяющее начальным условиям:  $\xi(t_0, \mu') = x_0$ . Тогда для любого  $\epsilon > 0$ , существует такое  $\delta(\epsilon, h) > 0$ , что если справедливо неравенство  $\|\mu' - \mu''\| < \delta$ , то решение  $\xi(t, \mu'')$  определено на интервале  $|t - t_0| \leq h$  и удовлетворяет неравенству

$$\|\xi(t, \mu') - \xi(t, \mu'')\| < \epsilon. \quad (24)$$

**Доказательство.** Так как  $\xi(t, \mu')$  есть решение системы (23),

то

$$\frac{d\xi_i(t, \mu')}{dt} \equiv f_i(t, \xi_1(t, \mu'), \dots, \xi_n(t, \mu'), \mu') \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i(t, \mu')}{dt} &\equiv f_i(t, \xi_1(t, \mu'), \dots, \xi_n(t, \mu'), \mu') + \\ &+ f_i(t, \xi_1(t, \mu'), \dots, \xi_n(t, \mu'), \mu'') - \\ &- f_i(t, \xi_1(t, \mu'), \dots, \xi_n(t, \mu'), \mu') \end{aligned} \quad (25)$$

$(i=1, 2, \dots, n).$

В силу непрерывности функций  $f_i$  по  $\mu$ , для любого  $\epsilon > 0$  можно указать  $\delta(\epsilon, h) > 0$  такое, что для  $\mu'$  и  $\mu''$ , удовлетворяющих неравенству  $\|\mu' - \mu''\| < \delta$ , будет справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |f_i(t, \xi_1(t, \mu'), \dots, \xi_n(t, \mu'), \mu') - \\ - f_i(t, \xi_1(t, \mu'), \dots, \xi_n(t, \mu'), \mu'')| < \epsilon_1 \end{aligned} \quad (26)$$

$(i=1, 2, \dots, n), \text{ где } \epsilon_1 = \frac{\epsilon L}{e^{nLh} - 1}.$

Перепишем тождество (25) с учетом неравенства (26):

$$\left| \frac{d\xi_i(t, \mu')}{dt} - f_i(t, \xi_1(t, \mu'), \dots, \xi_n(t, \mu'), \mu') \right| < \epsilon_1.$$

Из полученного неравенства следует, что  $\xi(t, \mu')$  является  $\epsilon_1$ -приближенным решением для системы (23) при значении параметра  $\mu = \mu'$ .

Оценим норму  $\|\xi(t, \mu') - \xi(t, \mu'')\|$ . Используя неравенство (17) и учитывая, что начальные условия для обоих решений совпадают, получим

$$\|\xi(t, \mu') - \xi(t, \mu'')\| \leq \frac{\epsilon_1}{L} (e^{nL(t-t_0)} - 1) < \epsilon.$$

Теорема доказана.

Доказанные теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий и параметров имеют принципиальное значение. Параметры дифференциальных уравнений систем автоматического регулирования (САР) задаются с некоторыми погрешностями. На основании доказанных выше теорем можно утверждать, что если погрешность в определении параметров дифференциальных уравнений САР незначительна, то решение этого уравнения с достаточной достоверностью описывает происходящие в САР процессы.

## § 11. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**1. Нормальная линейная система дифференциальных уравнений.** Линейной системой дифференциальных уравнений называется такая система уравнений, в которую неизвестные функции и их производные могут входить только в первой степени.

Нормальная линейная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k + f_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Введем в рассмотрение векторные функции

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

и матрицу

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (1) можно переписать в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t). \quad (2)$$



Проверим, выполняются ли условия теоремы существования и единственности решения для системы (1). Положим, что  $a_{ik}(t)$  и  $f_i(t)$  — непрерывные функции на интервале  $(a, b)$ . Тогда правые части уравнений (1) будут непрерывны в бесконечной области  $G$ , определяемой неравенствами  $a < t < b$ ,  $-\infty < x_k < \infty$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). Частные производные по  $x_k$  от правых частей уравнений (1)

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + f_i(t) \right] = a_{ik}(t).$$

Из непрерывности функций  $a_{ik}(t)$  следует, что  $|a_{ik}(t)| < N$ , где  $N$  — некоторое постоянное число, если  $t \in [a_1, b_1] \subset (a, b)$ . Бесконечная полоса  $G$  является выпуклой областью, поэтому ограниченность частных производных в этой области влечет за собой выполнение условий Липшица. Следовательно, теорема существования и единственности справедлива для линейной системы на любом отрезке  $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ , где  $(a, b)$  — интервал, на котором функции  $a_{ik}(t)$  и  $f_i(t)$  непрерывны.

**2. Общее решение линейной однородной системы.** Система (1) называется *однородной*, если  $f_i(t) \equiv 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Однородная система в векторной форме запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \quad (3)$$

Изучим некоторые свойства решений линейной однородной системы, для чего рассмотрим следующую теорему.

**Теорема 1.** Совокупность  $S$  всех решений  $\{\xi(t)\}$  системы (3) образует линейное пространство размерности  $n$ .

**Доказательство.** Пусть  $\xi_1(t) \in S$  и  $\xi_2(t) \in S$ . Непосредственной подстановкой в систему (3) нетрудно убедиться, что сумма  $c_1\xi_1(t) + c_2\xi_2(t)$  также является решением системы (3), т. е.  $c_1\xi_1(t) + c_2\xi_2(t) \in S$ . Из определения линейного пространства (см. § 5) следует, что совокупность решений  $S$  образует линейное пространство.

Покажем, что в этом пространстве существует  $n$  и только  $n$  линейно-независимых элементов, т. е.  $n$  линейно-независимых решений  $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ . В качестве начальных условий возьмем векторы — единичные орты:

$$\begin{aligned} \xi_1(t_0) &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] = e_1, \\ \xi_2(t_0) &= [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0] = e_2, \\ &\dots \dots \dots \dots \\ \xi_n(t_0) &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1] = e_n. \end{aligned}$$

По теореме существования и единственности этим начальным условиям соответствуют  $n$  решений, определенных на интервале  $(a, b)$ . Пусть эти решения будут  $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ . Покажем, что они линейно-независимы.

Допустим противное, т. е. что эти решения линейно-зависимы. В этом случае существуют (см. § 5) постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ,

причем не все равные нулю, такие, что

$$c_1\xi_1(t) + c_2\xi_2(t) + \dots + c_n\xi_n(t) \equiv 0 \text{ для } t \in (a, b).$$

Введем обозначение:  $\xi(t) = \sum_{i=1}^n c_i \xi_i(t)$ ; по доказанному выше  $\xi(t) \in S$ . В точке  $t_0$  имеем:

$$c_1\xi_1(t_0) + c_2\xi_2(t_0) + \dots + c_n\xi_n(t_0) = 0,$$

или

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_n e_n = 0,$$

что невозможно в силу линейной независимости единичных ортов.

Следовательно, рассматриваемые решения линейно-независимы.

Докажем теперь, что полученные  $n$  линейно-независимых решений образуют базис линейного пространства  $S$ , т. е. любой элемент этого пространства  $\xi(t)$  представим в виде

$$\xi(t) = c_1\xi_1(t) + c_2\xi_2(t) + \dots + c_n\xi_n(t),$$

причем постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_n$  определяются однозначно.

Пусть рассматриваемое решение  $\xi(t)$  удовлетворяет начальному условию  $\xi(t_0) = x_0$ . Вектор  $x_0$  принадлежит арифметическому векторному пространству (см. § 5), поэтому он разлагается единственным образом по векторам базиса этого пространства:

$$x_0 = c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_n e_n.$$

Рассмотрим решение

$$\tilde{\xi}(t) = c_1\xi_1(t) + c_2\xi_2(t) + \dots + c_n\xi_n(t);$$

здесь  $\tilde{\xi}(t) \in S$ .

При  $t=t_0$  в силу выбора постоянных  $c_1, c_2, \dots, c_n$   $\tilde{\xi}(t_0) = x_0 = \xi(t_0)$ . Тогда из теоремы существования и единственности следует, что  $\tilde{\xi}(t) \equiv \xi(t)$  при  $t \in [a, b]$ . Поэтому решение  $\xi(t)$  представляется единственным образом:

$$\xi(t) = c_1\xi_1(t) + c_2\xi_2(t) + \dots + c_n\xi_n(t), \quad (4)$$

что и доказывает нашу теорему.

Таким образом, мы показали, что любое решение системы (3) может быть записано в виде (4). Поэтому выражение (4) называется *общим решением системы* (3). Напишем это решение в развернутом виде:

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{bmatrix}, \quad \xi_1(t) = \begin{bmatrix} \xi_{11}(t) \\ \xi_{12}(t) \\ \vdots \\ \xi_{1n}(t) \end{bmatrix}, \dots, \quad \xi_n(t) = \begin{bmatrix} \xi_{n1}(t) \\ \xi_{n2}(t) \\ \vdots \\ \xi_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$



и  $t$  существует следующая зависимость:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{Sp } A(\tau) d\tau} \quad (8)$$

где  $\text{Sp } A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$

— след матрицы  $A(t)$  \*).

Формула (8) носит название формулы Лиувилля.

Доказательство. Применим правило дифференцирования определителей (см. равенство (9) § 3):

$$\frac{d}{dt} W(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)) = \begin{vmatrix} \xi'_{11}(t) & \xi_{21}(t) & \dots & \xi_{n1}(t) \\ \xi_{12}(t) & \xi_{22}(t) & \dots & \xi_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1n}(t) & \xi_{2n}(t) & \dots & \xi_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \xi_{11}(t) & \xi_{21}(t) & \dots & \xi_{n1}(t) \\ \xi'_{12}(t) & \xi_{22}(t) & \dots & \xi_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1n}(t) & \xi_{2n}(t) & \dots & \xi_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} \xi_{11}(t) & \xi_{21}(t) & \dots & \xi_{n1}(t) \\ \xi_{12}(t) & \xi_{22}(t) & \dots & \xi_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi'_{1n}(t) & \xi_{2n}(t) & \dots & \xi_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Так как  $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$  — решения системы (3), то справедливы равенства:

$$\xi'_{11}(t) = \sum_{i=1}^n a_{1i} \xi_{i1}(t), \quad \xi'_{21}(t) = \sum_{i=1}^n a_{2i} \xi_{i1}(t), \quad \dots,$$

$$\xi'_{1n}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ni} \xi_{i1}(t), \quad \dots, \quad \xi'_{nn}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ni} \xi_{ni}(t).$$

Таким образом,

$$\frac{dW(t)}{dt} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} \xi_{i1}(t) & \sum_{i=1}^n a_{1i} \xi_{i2}(t) & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i} \xi_{in}(t) \\ \xi_{12}(t) & \xi_{22}(t) & \dots & \xi_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1n}(t) & \xi_{2n}(t) & \dots & \xi_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \xi_{11}(t) & \xi_{21}(t) & \dots & \xi_{n1}(t) \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} \xi_{i1}(t) & \sum_{i=1}^n a_{2i} \xi_{i2}(t) & \dots & \sum_{i=1}^n a_{2i} \xi_{in}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1n}(t) & \xi_{2n}(t) & \dots & \xi_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} \xi_{11}(t) & \xi_{21}(t) & \dots & \xi_{n1}(t) \\ \xi_{12}(t) & \xi_{22}(t) & \dots & \xi_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} \xi_{i1}(t) & \sum_{i=1}^n a_{ni} \xi_{i2}(t) & \dots & \sum_{i=1}^n a_{ni} \xi_{in}(t) \end{vmatrix}.$$

\* Sp — начальные буквы немецкого слова Spur — след.

Учитывая, что определитель с пропорциональными строками равен нулю, имеем

$$\frac{dW(t)}{dt} = \begin{vmatrix} a_{11}\xi_{11} & a_{11}\xi_{21}(t) & \dots & a_{11}\xi_{n1}(t) \\ \xi_{12}(t) & \xi_{22}(t) & \dots & \xi_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1n}(t) & \xi_{2n}(t) & \dots & \xi_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \xi_{11}(t) & \xi_{21}(t) & \dots & \xi_{n1}(t) \\ a_{22}\xi_{12}(t) & a_{22}\xi_{22}(t) & \dots & a_{22}\xi_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1n}(t) & \xi_{2n}(t) & \dots & \xi_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} \xi_{11}(t) & \xi_{21}(t) & \dots & \xi_{n1}(t) \\ \xi_{12}(t) & \xi_{22}(t) & \dots & \xi_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn}\xi_{1n}(t) & a_{nn}\xi_{2n}(t) & \dots & a_{nn}\xi_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Вынесем общий множитель всех элементов строки за знак определителя:

$$\frac{dW(t)}{dt} = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) W(t) = \text{Sp } A(t) W(t). \quad (9)$$

Разделяя переменные в равенстве (9) и интегрируя, получим искомую зависимость

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{Sp } A(\tau) d\tau}.$$

Теорема доказана.

4. **Линейная неоднородная система. Метод вариации произвольных постоянных.** Рассмотрим линейную неоднородную систему уравнений (2)

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t);$$

соответствующая ей однородная система (3)

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

Пусть  $x = \psi(t)$  и  $x = \varphi(t)$  — два решения системы (2). Тогда разность

$$\xi(t) = \psi(t) - \varphi(t)$$

представляет собой решение однородной системы (3).

Действительно,

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{d\psi(t)}{dt} - \frac{d\varphi(t)}{dt} = A(t)\psi(t) + f(t) - A(t)\varphi(t) - f(t) =$$

$$= A(t)[\psi(t) - \varphi(t)] = A(t)\xi(t);$$

Если  $x = \xi(t)$  — решение однородной системы (3), а  $x = \varphi(t)$  — решение системы (2), то  $x = \xi(t) + \varphi(t)$  — представляет собой решение системы (2).

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\xi(t)}{dt} + \frac{d\varphi(t)}{dt} = A(t)\xi(t) + A(t)\varphi(t) + f(t) = \\ &= A(t)[\xi(t) + \varphi(t)] + f(t) = A(t)x + f(t). \end{aligned}$$

Способ определения общего решения линейной системы (2) устанавливает следующая теорема.

*Теорема 5. Общее решение системы (2) имеет вид*

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i \xi_i(t) + \varphi(t), \quad (10)$$

где  $c_i$  — произвольные постоянные;  $\xi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — фундаментальная система решений системы (3);  $\varphi(t)$  — произвольное решение системы (2).

*Доказательство.* Зададим произвольные начальные условия

$$x(t_0) = x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Как показано выше, функция  $x(t)$ , определяемая формулой (10), является решением системы (2). Покажем, что можно так подобрать постоянные  $c_i$ , чтобы это решение удовлетворяло начальным условиям (11). Запишем решение (10) по компонентам при  $t=t_0$ :

$$x_{k0} = \sum_{i=1}^n c_i \xi_{ik}(t_0) + \varphi_k(t_0) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Если  $x_{k0} = \varphi_k(t_0)$ , то в силу теоремы единственности  $x(t) \equiv \varphi(t)$ , т. е. решение, удовлетворяющее начальным условиям (11), получается из (10) при  $c_i = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Пусть теперь  $x_{k0} \neq \varphi_k(t_0)$ . Для определения постоянных  $c_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) в этом случае имеем алгебраическую систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n c_i \xi_{ik}(t_0) = x_{k0} - \varphi_k(t_0) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

Определитель этой системы уравнений есть определитель Вронского  $W(t_0)$ . Так как система решений  $\xi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) фундаментальная, то определитель Вронского  $W(t_0) \neq 0$ . Следовательно, система уравнений (12) имеет единственное решение, обозначим его  $c_i^0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Решение

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i^0 \xi_i(t) + \varphi(t) \quad (13)$$

удовлетворяет начальным условиям (11) и в силу теоремы единственности других решений с теми же начальными условиями быть не может.

Теорема доказана.

Таким образом, если известна фундаментальная система решений однородной системы уравнений (3), то нахождение общего решения системы уравнений (2) сводится к нахождению какого-либо частного решения этой системы.

Частное решение системы (2) может быть найдено *методом вариации произвольных постоянных*. Рассмотрим этот метод.

Пусть  $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$  — фундаментальная система решений системы (3). Частное решение неоднородной системы (2) будем искать в виде

$$x = \varphi(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \xi_i(t), \quad (14)$$

полагая, что  $c_i$  являются не постоянными, а некоторыми функциями  $t$ .

Подставим решение (14) в систему (2):

$$\sum_{i=1}^n c_i'(t) \xi_i(t) + \sum_{i=1}^n c_i(t) \xi_i'(t) \equiv A(t) \sum_{i=1}^n c_i(t) \xi_i(t) + f(t). \quad (15)$$

Так как вектор-функции  $\xi_i(t)$  являются решениями однородной системы (3), то

$$\sum_{i=1}^n c_i(t) \xi_i'(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) A(t) \xi_i(t) = A(t) \sum_{i=1}^n c_i(t) \xi_i(t),$$

поэтому тождество (15) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^n c_i'(t) \xi_i(t) \equiv f(t). \quad (16)$$

Выражение (16) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно  $c_i'(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Определитель системы уравнений (16) есть определитель Вронского для фундаментальной системы решений. Он отличен от нуля, поэтому система (16) имеет единственное решение

$$c_i'(t) = \Phi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Интегрируем полученные равенства:

$$c_i(t) = \int \Phi_i(t) dt; \quad (17)$$

с учетом (17) искомое частное решение имеет вид

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \int \Phi_i(t) dt. \quad (18)$$

В соответствии с формулой (10) общее решение неоднородной системы (2) будет

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i \xi_i(t) + \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \int \Phi_i(t) dt.$$

**5. Формула Коши.** При помощи формулы Коши можно выразить решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений через некоторую фундаментальную систему решений соответствующей однородной линейной системы.

Рассмотрим неоднородную линейную систему дифференциальных уравнений (2), записанную в векторном виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t).$$

Соответствующая ей однородная линейная система имеет вид (3):

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

Пусть  $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$  — фундаментальная система решений системы уравнений (3). Образуем матрицу  $X_1(t)$ , столбцы которой являются этими решениями

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} \xi_{11}(t) & \xi_{21}(t) & \dots & \xi_{n1}(t) \\ \xi_{12}(t) & \xi_{22}(t) & \dots & \xi_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1n}(t) & \xi_{2n}(t) & \dots & \xi_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы  $X_1(t)$  представляет собой определитель Вронского. Он отличен от нуля для всех  $t \in [a, b]$ . Следовательно, существует обратная матрица  $X_1^{-1}(t)$  при каждом  $t \in [a, b]$ .

Составим матрицу

$$X(t, t_0) = X_1(t) X_1^{-1}(t_0). \quad (19)$$

Столбцы этой матрицы также образуют фундаментальную систему решений системы уравнений (3). Отметим, что

$$X(t_0, t_0) = X_1(t_0) X_1^{-1}(t_0) = E.$$

Назовем матрицу  $X(t, t_0)$  фундаментальной матрицей системы (3). Нетрудно проверить, что фундаментальная матрица  $X(t, t_0)$  удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{dX(t, t_0)}{dt} = A(t)X(t, t_0).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{dX(t, t_0)}{dt} &= \frac{dX_1(t)}{dt} X_1^{-1}(t_0) = \left[ \frac{d\xi_{11}(t)}{dt} \frac{d\xi_{21}(t)}{dt} \dots \frac{d\xi_{n1}(t)}{dt} \right] \cdot X_1^{-1}(t_0) = \\ &= [A\xi_{11}(t) \ A\xi_{21}(t) \ \dots \ A\xi_{n1}(t)] X_1^{-1}(t_0) = AX_1(t) X_1^{-1}(t_0) = A \cdot X(t, t_0). \end{aligned}$$

Решение  $\xi(t)$  системы уравнений (3), удовлетворяющее начальным условиям  $\xi(t_0) = x_0$ , можно записать в виде

$$\xi(t) = X(t, t_0) x_0. \quad (20)$$

Действительно, выполнение начальных условий для решения следует из равенства

$$\xi(t_0) = X(t_0, t_0) x_0 = E x_0 = x_0.$$

Кроме того,

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{dX(t, t_0)}{dt} x_0 = A(t)X(t, t_0) x_0 = A(t)\xi(t).$$

Таким образом, мы показали, что  $\xi(t) = X(t, t_0) x_0$  является решением системы (3), удовлетворяющим начальным условиям  $\xi(t_0) = x_0$ .

Для определения решения неоднородной системы уравнений (2) сделаем замену неизвестных функций. Положим

$$x = X(t, t_0) y, \quad (21)$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dX(t, t_0)}{dt} y + X(t, t_0) \frac{dy}{dt} = A(t)X(t, t_0) y + \\ &+ X(t, t_0) \cdot \frac{dy}{dt} = A(t)X(t, t_0) y + f(t), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dy}{dt} = X^{-1}(t, t_0) f(t). \quad (22)$$

Найдем решение  $x = x(t)$  неоднородной системы уравнений (2), удовлетворяющее начальным условиям  $x(t_0) = x_0$ .

Из формулы (21) следует, что

$$y(t_0) = X^{-1}(t_0, t_0) x_0 = x_0. \quad (23)$$

Решим систему уравнений (22) при начальных условиях (23):

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau, t_0) f(\tau) d\tau.$$

Подставляя найденное значение  $y(t)$  в (21), будем иметь

$$x(t) = X(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t X(t, t_0) X^{-1}(\tau, t_0) f(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Формула (24) позволяет найти решение  $x(t)$  неоднородной системы уравнений (2), удовлетворяющее заданным начальным условиям



$x(t_0) = x_0$ , если известна фундаментальная матрица  $X(t, t_0)$  однородной системы (3).

Следует отметить, что если матрица — постоянная, т. е. рассматриваемая система дифференциальных уравнений является системой линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t),$$

то решение  $x(t)$  этой системы, удовлетворяющее начальным условиям  $x(t_0) = x_0$ , запишется в виде

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_{t_0}^t X(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad (25)$$

где  $X(t)$  — матрица, столбцы которой состоят из фундаментальной системы решений однородной системы уравнений  $\frac{dx}{dt} = Ax$ , причем  $X(t_0) = E$ .

Таким образом,  $X(t)$  — фундаментальная матрица и может быть найдена по формуле (19). Формулы (24) и (25) носят название *формул Коши*.

Если  $A$  — постоянная матрица размера  $n \times n$ , то справедливо матричное равенство

$$\frac{d}{dt}(e^{A(t-t_0)}) = Ae^{A(t-t_0)}. \quad (26)$$

Это равенство легко проверяется путем почленного дифференцирования матричного ряда

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!}.$$

Из равенства (26) следует, что матрица  $e^{A(t-t_0)}$  является решением матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = AX.$$

Решение  $e^{A(t-t_0)}$  удовлетворяет начальным условиям  $X(t_0) = E$ . В силу единственности решения получаем следующее выражение для фундаментальной матрицы однородной системы с постоянными коэффициентами:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}. \quad (27)$$

Структура матрицы  $e^{At}$  рассматривается ниже в § 12.

6. *Линейное уравнение  $n$ -го порядка. Линейное уравнение  $n$ -го порядка имеет вид*

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t), \quad (28)$$

где  $a_0(t), \dots, a_n(t)$  — непрерывные функции для  $t \in (a, b)$ , причем  $a_0(t) \neq 0$ .

Соответствующее этому уравнению *однородное уравнение* имеет вид

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0. \quad (29)$$

Уравнения (28) и (29) путем введения новых вспомогательных функций

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x, \\ x_2 &= x', \\ &\dots \\ x_n &= x^{(n-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

можно свести соответственно к системам уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (31)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = -\frac{a_n}{a_0}x_1 - \dots - \frac{a_1}{a_0}x_n + \frac{f(t)}{a_0}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = -\frac{a_n}{a_0}x_1 - \dots - \frac{a_1}{a_0}x_n,$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

где

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(t)}{a_0} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Системы (31) и (32) являются частными случаями линейных систем, рассмотренных выше.

Рассмотрим однородную систему уравнений (32). Зададим начальные условия

$$\xi_1(t_0) = x_0, \quad \xi_2(t_0) = x'_0, \quad \dots, \quad \xi_n(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (33)$$

В силу теоремы единственности система (32) имеет решение

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{bmatrix},$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям (33) и определенное на интервале  $(a, b)$ . Исключая из системы (32) последовательно неизвестные переменные  $x_2, \dots, x_n$ , получим, что первая компонента  $\xi_1(t)$  решения системы (32) представляет собой решение уравнения (29).

Таким образом, существует и притом единственное решение уравнения (29), определенное на интервале  $(a, b)$  и удовлетворяющее начальным условиям  $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ . Все сказанное выше справедливо также и применительно к уравнению (28).

Так как уравнение (29) сводится к линейной однородной системе (32), то решения уравнения (29) обладают всеми свойствами решений линейных однородных систем, а именно:

1. Множество решений уравнения (29) образует  $n$ -мерное линейное пространство.

2. Всякая система из линейно-независимых решений  $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$  является фундаментальной системой и общим решением уравнения (29) будет

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i \xi_i(t). \quad (34)$$

3. Если функции  $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$  есть решения уравнения (29), то определитель Вронского

$$W(t) = \begin{vmatrix} \xi_1(t) & \xi_2(t) & \dots & \xi_n(t) \\ \xi_1'(t) & \xi_2'(t) & \dots & \xi_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{(n-1)}(t) & \xi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \xi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

для этого уравнения либо тождественно равен нулю, либо не обращается в нуль ни в одной точке интервала  $(a, b)$ .

4. Формула Лиувилля для уравнения (29) имеет вид

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau}. \quad (35)$$

Неоднородное линейное уравнение (28) сводится к линейной системе (31), поэтому его общее решение такое:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i \xi_i(t) + \varphi(t), \quad (36)$$

где  $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$  — фундаментальная система решений уравнения (29);  $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$  — произвольные постоянные, а  $\varphi(t)$  — частное решение уравнения (28).

Для нахождения частного решения  $\varphi(t)$  уравнения (28) можно использовать метод вариации произвольных постоянных. При этом система алгебраических уравнений для нахождения  $c_i'(t)$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} c_1'(t) \xi_1(t) + c_2'(t) \xi_2(t) + \dots + c_n'(t) \xi_n(t) &= 0, \\ c_1(t) \xi_1'(t) + c_2(t) \xi_2'(t) + \dots + c_n(t) \xi_n'(t) &= 0, \\ \dots & \dots \\ c_1(t) \xi_1^{(n-1)}(t) + c_2(t) \xi_2^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t) \xi_n^{(n-1)}(t) &= f(t). \end{aligned} \quad (37)$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского для линейно-независимой системы решений  $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ , поэтому  $W(t) \neq 0$ , и система (37) имеет единственное решение. Интегрируя полученные значения для  $c_i'(t)$ , найдем  $c_i(t)$  и тогда искомого решение будет

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \xi_i(t).$$

Как и для системы линейных уравнений, для неоднородного линейного дифференциального уравнения (28) справедлива формула Коши.

Пусть  $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$  — фундаментальная система решений уравнения (29). Составим решение  $x = x_1(t, \tau)$  уравнения (29), удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1(\tau, \tau) = x_1'(\tau, \tau) = \dots = x_1^{(n-2)}(\tau, \tau) = 0, \quad x_1^{(n-1)}(\tau, \tau) = 1. \quad (38)$$

$$x_1(t, \tau) = \sum_{i=1}^n c_i(\tau) \xi_i(t),$$

где  $c_i(\tau)$  определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} c_1 \xi_1(\tau) + \dots + c_n \xi_n(\tau) &= 0, \\ c_1 \xi_1'(\tau) + \dots + c_n \xi_n'(\tau) &= 0, \\ \dots & \dots \\ c_1 \xi_1^{(n-1)}(\tau) + \dots + c_n \xi_n^{(n-1)}(\tau) &= 1. \end{aligned} \quad (39)$$

Определитель этой системы представляет собой определитель Вронского фундаментальной системы решений  $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$  и поэтому не равен нулю. Система (39) имеет единственное решение  $c_1(\tau), \dots, c_n(\tau)$ .

Следовательно, решение  $x_1(t, \tau)$  определяется единственным образом.

Решение  $x(t)$  уравнения (28), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \quad (40)$$

дается формулой Коши

$$x(t) = \varphi(t) + \int_{t_0}^t x_1(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (41)$$

где  $\varphi(t)$  — решение уравнения (29), удовлетворяющее начальным условиям (40).

**Пример 1.** Найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0, \text{ или } x'' - \frac{2t}{1-t^2}x' + \frac{2}{1-t^2}x = 0.$$

На интервале  $(-1, 1)$  коэффициенты  $\frac{2t}{1-t^2}$  и  $\frac{2}{1-t^2}$  являются непрерывными функциями. Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что  $x=t$  является решением уравнения. Найдем второе решение, линейно-независимое с первым. Для этого воспользуемся формулой Лиувилля (8)

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \frac{2\tau}{1-\tau^2} d\tau}.$$

В нашем случае  $x_1=t$ , тогда

$$\begin{vmatrix} t & x_2(t) \\ 1 & x_2'(t) \end{vmatrix} = ce^{-\ln|1-t^2|} = \frac{c}{1-t^2}.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение для нахождения  $x_2(t)$ :

$$tx_2' - x_2 = \frac{c}{1-t^2}.$$

или

$$\left(\frac{x_2}{t}\right)' = \frac{c}{t^2(1-t^2)},$$

откуда

$$\frac{x_2}{t} = c \int \frac{dt}{t^2} + c \int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{c}{t} + \frac{c}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c_1.$$

Тогда, в соответствии с формулой (25), общее решение заданного уравнения будет иметь вид

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 t + c_2 \left( -1 + \frac{t}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right).$$

**Пример 2.** С помощью формулы Коши найти решение  $x(t)$  уравнения

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + 2x = f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1. \quad (42)$$

В предыдущем примере было получено общее решение соответствующего однородного уравнения

$$x = c_1 t + c_2 \left( -1 + \frac{t}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right).$$

Решение  $x_1(t, \tau)$  однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1(\tau, \tau) = 0, \quad x_1'(\tau, \tau) = 1, \quad (43)$$

имеет вид

$$x_1(t, \tau) = (1-\tau) \left( 1 - \frac{\tau}{2} \ln \left| \frac{1+\tau}{1-\tau} \right| \right) t + \tau(1-\tau^2) \left( \frac{t}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - 1 \right). \quad (44)$$

Решение  $\varphi(t)$  однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (42), будет

$$\varphi(t) = \left[ \left( \frac{1-t_0^2}{2} \ln \left| \frac{1+t_0}{1-t_0} \right| + t_0 \right) t - (1-t_0) \left( \frac{t}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - 1 \right) \right] x_0 + \left[ (1-t_0^2) \left( 1 - \frac{t_0}{2} \ln \left| \frac{1+t_0}{1-t_0} \right| \right) t + t_0(1-t_0^2) \left( \frac{t}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - 1 \right) \right] x_1.$$

Теперь запишем искомое решение с помощью формулы Коши:

$$x(t) = \left[ \left( \frac{1-t_0^2}{2} \ln \left| \frac{1+t_0}{1-t_0} \right| + t_0 \right) t - (1-t_0) \left( \frac{t}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - 1 \right) \right] x_0 + \left[ (1-t_0^2) \left( 1 - \frac{t_0}{2} \ln \left| \frac{1+t_0}{1-t_0} \right| \right) t + t_0(1-t_0^2) \left( \frac{t}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - 1 \right) \right] x_1 + \int_{t_0}^t \left[ (1-\tau) \left( 1 - \frac{\tau}{2} \ln \left| \frac{1+\tau}{1-\tau} \right| \right) t + \tau(1-\tau^2) \left( \frac{t}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - 1 \right) \right] f(\tau) d\tau.$$

**§ 7. Понижение порядка линейной однородной системы дифференциальных уравнений.** Выше в п. 4 было показано, что для решения линейной неоднородной системы уравнений (2)

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

требуется найти фундаментальную систему решений линейной однородной системы (3)

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

Общих методов нахождения решения однородной системы (3) с переменными коэффициентами не существует. Однако, если известны  $r$  линейно-независимых решений  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t)$  системы (3) ( $r < n$ ), то порядок системы может быть понижен на  $r$ .

Покажем, что это справедливо для случая  $r=1$ . Пусть  $x = \varphi_1(t) =$

$$= \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{1n}(t) \end{bmatrix} \text{ — решение системы (3). Будем искать решение системы (3) в виде}$$

$$x = u\varphi_1(t) + y, \quad (45)$$

где  $u$  — неизвестная функция;  $y$  — неизвестная вектор-функция, относительно которой будем предполагать, что ее первая компонента равна нулю, т. е.

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Подставив выражение (45) в систему уравнений (3), получим

$$\frac{du}{dt} \varphi_1(t) + u \frac{d\varphi_1(t)}{dt} + \frac{dy}{dt} = A(t)(u\varphi_1(t) + y). \quad (46)$$

Учитывая, что  $\varphi_1(t)$  — решение системы (3), будем иметь

$$\frac{du}{dt} \varphi_1(t) + \frac{dy}{dt} = A(t)y. \quad (47)$$

Запишем систему (47) по координатам, выделив первое уравнение:

$$\frac{du}{dt} \varphi_{11}(t) = \sum_{k=2}^n a_{1k}(t) y_k, \quad (48)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=2}^n a_{ik}(t) y_k - \frac{du}{dt} \varphi_{i1}(t) \quad (i=2, 3, \dots, n).$$

Находя  $\frac{du}{dt}$  из первого уравнения системы (48) и подставляя в последующие уравнения, получим для компонент  $y_i$  вектора  $y$  следующую систему уравнений:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=2}^n b_{ik}(t) y_k \quad (i=2, 3, \dots, n), \quad (49)$$

где

$$b_{ik} = a_{ik}(t) - \frac{\varphi_{i1}(t)}{\varphi_{11}(t)} a_{1k}(t). \quad (50)$$

Система уравнений (49) имеет порядок, равный  $(n-1)$ . Таким образом, если известно одно решение системы (3), то ее порядок понижается на единицу.

Покажем, что если известна фундаментальная система решений системы (49), то фундаментальная система решений системы (3) задается с помощью формулы (45). Действительно, пусть  $y_i = \Psi_i(t) =$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_{i2}(t) \\ \vdots \\ \Psi_{in}(t) \end{bmatrix} \quad (i=2, \dots, n) \text{ — линейно-независимые решения си-}$$

стемы (49). Определив функции  $u_2(t), \dots, u_n(t)$  из соотношения

$$\frac{du_i}{dt} \cdot \varphi_{11}(t) = \sum_{k=2}^n a_{1k}(t) \Psi_{ik}(t) \quad (i=2, \dots, n), \quad (51)$$

получим для системы (3)  $n$  линейно-независимых решений:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \varphi_1(t) \\ \xi_i(t) &= u_i(t) \varphi_1(t) + \Psi_i(t) \quad (i=2, \dots, n). \end{aligned} \quad (52)$$

Установим линейную независимость решений (52). Для этого составим определитель Вронского для этой системы решений

$\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ :

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & u_2(t) \varphi_{11}(t) & \dots & u_n(t) \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{12}(t) & u_2(t) \varphi_{12}(t) + \psi_{22}(t) & \dots & u_n(t) \varphi_{12}(t) + \psi_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1n}(t) & u_2(t) \varphi_{1n}(t) + \psi_{2n}(t) & \dots & u_n(t) \varphi_{1n}(t) + \psi_{nn}(t) \end{vmatrix} = \\ = \varphi_{11}(t) W_1(t),$$

где  $W_1(t) = \begin{vmatrix} \psi_{22}(t) & \dots & \psi_{n2}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{2n}(t) & \dots & \psi_{nn}(t) \end{vmatrix}$  — определитель Вронского для системы решений  $\psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ .

В силу линейной независимости этих решений  $W_1(t) \neq 0$  на интервале  $(a, b)$ . Следовательно, и  $W(t) \neq 0$  на этом интервале, что доказывает линейную независимость решений (52).

**Пример 3.** Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 \cos^2 t + x_2 (\sin t \cos t - 1), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 (1 + \sin t \cos t) + x_2 \sin^2 t. \end{cases} \quad (53)$$

Эта система имеет частное решение

$$\begin{aligned} x_{11} &= -\sin t \\ x_{12} &= \cos t, \end{aligned} \quad \text{т. е. } \varphi_1(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Для определения второго частного решения сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= u \varphi_1(t) + y, \\ \text{где } x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Искомая функция  $y_2$  находится из уравнения

$$\frac{dy_2}{dt} = \left[ \sin^2 t + \frac{\cos t}{\sin t} (\sin t \cos t - 1) \right] y_2 \quad (54)$$

вместо которого, разделив переменные, получим

$$\frac{dy_2}{y_2} = (1 - \operatorname{ctg} t) dt.$$

Решением этого уравнения является

$$y_2 = \frac{e^t}{\sin t}. \quad (55)$$

Функция  $u(t)$  является решением уравнения

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\sin t} (\sin t \cos t - 1) \frac{e^t}{\sin t}.$$

Решив это уравнение, получим

$$u = -\frac{e^t \cos t}{\sin t}. \quad (56)$$

Второе решение системы (53), линейно-независимое с первым, будет

$$\varphi_2(t) = u(t)\varphi_1(t) + y(t), \quad (57)$$

$$\text{где } y(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Подставив значение  $u(t)$  и  $y_2(t)$  в равенство (57), получим

$$\varphi_2(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Общим решением системы (53) будет

$$x = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t). \quad (59)$$

## § 12. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Нормальная линейная однородная система уравнений с постоянными коэффициентами. В векторной форме однородная линейная система уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (1)$$

Здесь  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$  — квадратная матрица коэффициентов уравнений;

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  — матрица-столбец (вектор) из неизвестных функций.

В общем случае матрицу  $A$  (см. § 6) можно с помощью невырожденного преобразования привести к жордановой форме, т. е. существует такая невырожденная матрица  $C$  ( $\det C \neq 0$ ), что  $C^{-1}AC = J$ . Здесь  $J$  — жорданова форма матрицы  $A$ . Для приведения матрицы  $A$  к жордановой форме сделаем замену неизвестных функций. Положим

$$x = Cy, \quad (2)$$

где  $C$  — некоторая невырожденная матрица.

Тогда

$$\frac{d(Cy)}{dt} = ACy, \quad \text{или } C \frac{dy}{dt} = ACy. \quad (3)$$

Умножая обе части равенства (3) слева на  $C^{-1}$ , получим

$$\frac{dy}{dt} = C^{-1}ACy = Jy. \quad (4)$$

Жорданова матрица  $J = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \\ & & & & O \end{bmatrix}$  состоит из клеток  $A_i$ ,

имеющих следующую структуру:

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix},$$

где  $\lambda_i$  — характеристическое число матрицы  $A$ .

Обозначим размерности клеток соответственно  $e_1, e_2, \dots, e_p$ . Тогда систему уравнений (4) можно записать в развернутом виде

$$\begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = \lambda_1 y_2 + y_3 \\ \dots \\ \frac{dy_{e_1-1}}{dt} = \lambda_1 y_{e_1-1} + y_{e_1} \\ \frac{dy_{e_1}}{dt} = \lambda_1 y_{e_1} \\ \dots \\ \frac{dy_{e_1+1}}{dt} = \lambda_2 y_{e_1+1} + y_{e_1+2} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = \lambda_p y_n \end{array} \quad (5)$$

Каждой клетке жордановой матрицы  $J$  соответствует подсистема дифференциальных уравнений. Первая подсистема системы (5) содержит  $e_1$  уравнений, в которые входят только первые  $e_1$  неизвестных и не входят неизвестные из других подсистем. (Эта подсистема выделена в выражении (5) штриховыми линиями.) И вообще, в любую из подсистем системы (5) не входят неизвестные  $y_i$  из других подсистем, поэтому каждую подсистему можно решать независимо от других.

Чтобы решить первую подсистему, сделаем замену переменных

$$\begin{array}{l} y_1 = e^{\lambda_1 t} z_1, \\ y_2 = e^{\lambda_1 t} z_2, \\ \dots \\ y_{e_1} = e^{\lambda_1 t} z_{e_1}. \end{array} \quad (6)$$



Тогда получим первую подсистему в виде

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} &= z_3, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dz_{e_1-1}}{dt} &= z_{e_1}, \\ \frac{dz_{e_1}}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Подсистема (7) легко решается, если начинать решение с последнего уравнения. Действительно, интегрируя с конца, получим

$$\begin{aligned} z_{e_1} &= c_{e_1} \\ z_{e_1-1} &= c_{e_1-1} + c_{e_1}t \\ &\dots \dots \dots \\ z_1 &= c_1 + c_2t + \dots + c_{e_1} \frac{t^{e_1-1}}{(e_1-1)!} \end{aligned} \quad (8)$$

Переходя по формуле (6) к переменным  $y_i$ , получим решение первой подсистемы в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= \left( c_1 + c_2t + \dots + c_{e_1} \frac{t^{e_1-1}}{(e_1-1)!} \right) e^{\lambda_1 t}, \\ y_2 &= \left( c_2 + c_3t + \dots + c_{e_1} \frac{t^{e_1-2}}{(e_1-2)!} \right) e^{\lambda_1 t}, \\ &\dots \dots \dots \\ y_{e_1} &= c_{e_1} e^{\lambda_1 t}. \end{aligned} \quad (9)$$

При интегрировании появились произвольные постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_{e_1}$ , число которых равно  $e_1$ . Решение остальных подсистем записывается аналогично. Напишем решение для последней подсистемы:

$$\begin{aligned} y_{n-e_\mu+1} &= \left( c_{n-e_\mu+1} + c_{n-e_\mu+2}t + \dots + c_n \frac{t^{e_\mu-1}}{(e_\mu-1)!} \right) e^{\lambda_\mu t}, \\ y_{n-e_\mu+2} &= \left( c_{n-e_\mu+2} + \dots + c_n \frac{t^{e_\mu-2}}{(e_\mu-2)!} \right) e^{\lambda_\mu t}, \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= c_n e^{\lambda_\mu t}, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь  $c_{n-e_\mu+1}, \dots, c_n$  — также произвольные постоянные.

Совокупность решений подсистем образует решение системы дифференциальных уравнений (5). Это решение зависит от  $n$  постоянных  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

Выберем  $n$  раз произвольные постоянные следующим образом:

$$\begin{aligned} &\text{первый раз } c_1=1, c_2=0, \dots, c_i=0, \dots, c_n=0, \\ &\text{второй раз } c_1=0, c_2=1, \dots, c_i=0, \dots, c_n=0, \\ &\dots \dots \dots \\ & i\text{-й раз } c_1=0, c_2=0, \dots, c_i=1, \dots, c_n=0 \\ &\dots \dots \dots \\ & n\text{-й раз } c_1=0, c_2=0, \dots, c_i=0, \dots, c_n=1. \end{aligned} \quad (10)$$

Каждому набору произвольных постоянных соответствует определенное решение системы уравнений (5). Решения, соответствующие указанной выше совокупности произвольных постоянных, будут иметь вид

$$y_1 = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, y_2 = \begin{bmatrix} te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, y_{e_1} = \begin{bmatrix} \frac{t^{e_1-1}}{(e_1-1)!} e^{\lambda_1 t} \\ \frac{t^{e_1-2}}{(e_1-2)!} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, y_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_\mu t} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Покажем, что эти  $n$  решений (11) образуют фундаментальную систему решений для системы (4). Для этого достаточно показать, что определитель Вронского  $W(t)$  системы решений (11) отличен от нуля при некотором значении  $t=t_0$ , например при  $t_0=0$ .

— Определитель Вронского для системы решений (11) имеет вид

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \dots & \frac{t^{e_1-1}}{(e_1-1)!} e^{\lambda_1 t} & & \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & \dots & \frac{t^{e_1-2}}{(e_1-2)!} e^{\lambda_1 t} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_1 t} & & \\ \hline & & & & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} & \dots & \frac{t^{e_2-1}}{(e_2-1)!} e^{\lambda_2 t} & & \\ & & & & 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & \frac{t^{e_2-2}}{(e_2-2)!} e^{\lambda_2 t} & & \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_2 t} & & \\ \hline & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & e^{\lambda_\mu t} \end{vmatrix} \quad (12)$$

или

$$W(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i t}.$$

Нетрудно видеть, что  $W(0) = 1$ , т. е. определитель Вронского в одной точке отличен от нуля. Следовательно, построенная система решений (11) образует фундаментальную систему.

Формулы (9) дают общее решение системы (4). Действительно, общее решение системы (4) есть

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t). \quad (13)$$

В развернутом виде это выражение совпадает с выражением (9).

Покажем, что если

$$y_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

некоторые линейно-независимые решения системы (4), то вектор-функции  $x_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), связанные с решениями  $y_i(t)$  соотношением

$$x_i(t) = C y_i(t), \quad (14)$$

являются решениями системы (1), притом также линейно-независимыми. Здесь матрица  $C$  — матрица линейного преобразования (2).

Действительно, так как  $y_i(t)$  есть решение системы уравнений (4), то

$$\frac{dy_i(t)}{dt} \equiv C^{-1} A C y_i(t),$$

но

$$x_i(t) = C y_i(t),$$

поэтому

$$C^{-1} \frac{dx_i(t)}{dt} \equiv C^{-1} A C C^{-1} x_i(t),$$

откуда

$$\frac{dx_i(t)}{dt} \equiv A x_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Таким образом,  $x_i(t) = C y_i(t)$  — решение системы (1).

Линейная независимость решений  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  вытекает из следующей леммы.

*Лемма.* Если  $n$  векторных функций  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  линейно-независимы, а  $y_i = B x_i$  — некоторое невырожденное линейное преобразование, то векторные функции  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  будут также линейно-независимы (и наоборот).

*Доказательство.* Предположим, что векторные функции  $y_1, \dots, y_n$  линейно-зависимы, т. е. существуют постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , причем не все равные нулю, такие, что  $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \equiv 0$ . Но  $y_i = B x_i$ , поэтому

$$B(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n) \equiv 0, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i \equiv 0,$$

что невозможно в силу линейной независимости функций  $x_1, \dots, x_n$ .

Лемма доказана.

Таким образом, если известна матрица  $C$ , с помощью которой приводится к жордановой форме матрица  $A$  и известно решение (9) системы (4), то общее решение системы (1) находится с помощью равенства (14). Обычно при решении систем вида (1) не занимают приведением матрицы  $A$  к жордановой форме, а поступают следующим образом: вначале определяют характеристические числа матрицы  $A$ , а затем, учитывая, что решение системы (4) имеет вид (9) и связано с решением системы (1) соотношением (14), ищут решение системы (1) в виде

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n P_{ij}(t) e^{\lambda_j t} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

где многочлен  $P_{ij}(t)$  имеет степень не выше  $e_j - 1$ . Коэффициенты многочленов  $P_{ij}(t)$  можно определить методом неопределенных коэффициентов.

2. **Фундаментальная матрица однородной системы.** Фундаментальная матрица линейной однородной системы уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}.$$

Выявим структуру экспоненциальной матрицы  $e^{A(t-t_0)}$ .

Пусть матрица  $A$  приведена к жордановой форме, т. е. имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_p \end{bmatrix},$$

где клетка  $A_i$ , соответствующая характеристическому числу  $\lambda_i$ ,

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

есть квадратная матрица размера  $e_i \times e_i$ . Рассмотрим частный случай, когда  $t_0 = 0$ . Тогда  $X(t) = e^{At}$  — является фундаментальной матрицей решений системы (1), причем  $X(0) = E$ . Нетрудно показать, что

$$A^k = \begin{bmatrix} A_1^k & & & 0 \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_p^k \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Действительно, равенство (16) непосредственно следует из правила умножения матриц, если считать клетки  $A_1, A_2, \dots, A_p$  элементами матриц  $A$ . С учетом равенства (16) можно написать:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_p \end{bmatrix}^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} A_1^k & & 0 \\ & A_2^k & \\ 0 & & A_p^k \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^k t^k}{k!} & & 0 \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_2^k t^k}{k!} & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_p^k t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & & 0 \\ & e^{A_2 t} & \\ 0 & & e^{A_p t} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, если матрица  $A$  имеет жорданову форму, то

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & & 0 \\ & e^{A_2 t} & \\ 0 & & e^{A_p t} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Фундаментальная система решений  $Y(t)$  для случая, когда матрица  $A$  приведена к жордановой форме, дается формулами (11), причем эта фундаментальная система решений удовлетворяет начальным условиям (10), т. е.

$$Y(0) = E.$$

В силу единственности решения задачи Коши эта фундаментальная система решений должна совпадать с  $e^{At}$ . Отсюда следует, что

$$e^{A_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{e_i-1}}{(e_i-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{e_i-2}}{(e_i-2)!} e^{\lambda_i t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

3. Нормальная линейная неоднородная система уравнений с постоянными коэффициентами. Линейная неоднородная система урав-

нений с постоянными коэффициентами в векторной форме может быть записана следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t). \quad (19)$$

Частное решение этой системы для произвольной векторной функции  $f(t)$  можно найти методом вариации произвольной постоянной.

Если компоненты векторной функции  $f(t)$  имеют специальный вид, а именно

$$f_i(t) = c_i e^{\alpha t t^\beta}, \quad (20)$$

где  $c_i$  и  $\alpha$  могут быть и комплексными числами, а  $\beta$  — целое неотрицательное число, то частное решение может быть найдено изложенным ниже способом.

Приведем матрицу  $A$  к жордановой форме. Для этого, как и ранее, сделаем замену переменных:

$$x = Cy,$$

причем матрица преобразования  $C$  выбрана такой, чтобы

$$C^{-1}AC = J,$$

где  $J$  — жорданова форма матрицы  $A$ .

Тогда система уравнений (19) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = Jy + C^{-1}f(t). \quad (21)$$

Здесь  $C^{-1}$  — числовая матрица. Произведение  $C^{-1}f(t)$  представляет собой вектор-столбец. Введем обозначение:

$$C^{-1}f(t) = \tilde{f}(t)$$

и пусть

$$\tilde{f}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(t) \end{bmatrix}, \quad (22) \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \dots & \tilde{c}_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{c}_{n1} & \dots & \tilde{c}_{nn} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Тогда получим, что

$$\tilde{f}_i(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{c}_{ik} c_k e^{\alpha t t^\beta} = c_i e^{\alpha t t^\beta},$$

где

$$c_i = \sum_{k=1}^n \tilde{c}_{ik} c_k. \quad (24)$$

Запишем систему (21) в скалярном виде

$$\begin{array}{l}
 \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + y_2 + c_1' e^{\alpha t} t^\beta \\
 \frac{dy_2}{dt} = \lambda_1 y_2 + y_3 + c_2' e^{\alpha t} t^\beta \\
 \dots \\
 \frac{dy_{e_1}}{dt} = \lambda_1 y_{e_1} + c_{e_1}' e^{\alpha t} t^\beta \\
 \dots \\
 \frac{dy_{e_1+1}}{dt} = \lambda_2 y_{e_1+1} + y_{e_1+2} + c_{e_1+1}' e^{\alpha t} t^\beta \\
 \dots \\
 \frac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n + c_n' e^{\alpha t} t^\beta
 \end{array} \quad (25)$$

Рассмотрим отдельно первую подсистему системы (25), соответствующую клетке  $A_1$  с собственным значением  $\lambda_1$ :

$$\begin{array}{l}
 \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + y_2 + c_1' e^{\alpha t} t^\beta \\
 \frac{dy_2}{dt} = \lambda_1 y_2 + y_3 + c_2' e^{\alpha t} t^\beta \\
 \dots \\
 \frac{dy_{e_1}}{dt} = \lambda_1 y_{e_1} + c_{e_1}' e^{\alpha t} t^\beta
 \end{array} \quad (26)$$

Сделаем в подсистеме (26) замену переменных, положив

$$y_i = z_i e^{\lambda_1 t} \quad (i = 1, 2, \dots, e_1).$$

Тогда подсистема (26) примет вид

$$\begin{array}{l}
 \frac{dz_1}{dt} = z_2 + c_1' e^{(\alpha - \lambda_1) t} t^\beta, \\
 \frac{dz_2}{dt} = z_3 + c_2' e^{(\alpha - \lambda_1) t} t^\beta, \\
 \dots \\
 \frac{dz_{e_1}}{dt} = c_{e_1}' e^{(\alpha - \lambda_1) t} t^\beta.
 \end{array} \quad (27)$$

При интегрировании подсистемы (27) следует различать два случая в зависимости от того, равны значения  $\alpha$  и  $\lambda_1$  или нет. Рассмотрим эти случаи.

I. Пусть  $\alpha \neq \lambda_1$ . Интегрируя уравнения системы (27) последовательно, начиная с последнего, получим

$$z_i = M_i^\beta(t) e^{(\alpha - \lambda_1) t} \quad (i = 1, 2, \dots, e_1), \quad (28)$$

где  $M_i^\beta(t)$  — многочлены по  $t$  степени не выше  $\beta$ . Отсюда следует, что

$$y_i = M_i^\beta(t) e^{\alpha t} \quad (i = 1, 2, \dots, e_1).$$

Если для всех корней  $\lambda_k$  характеристического уравнения  $|A - \lambda E| = 0$  справедливо, что  $\lambda_k \neq \alpha$ , то все компоненты решения  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) будут иметь вид

$$y_i = M_i^\beta(t) e^{\alpha t}.$$

Неизвестные функции  $y_i$  и  $x_i$  связаны соотношением  $x = Cy$ , поэтому частное решение системы (19) можно записать следующим образом:

$$x_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} M_k^\beta(t) e^{\alpha t} = \bar{M}_i^\beta(t) e^{\alpha t} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (29)$$

где  $\bar{M}_i^\beta(t) = \sum_{k=1}^n c_{ik} M_k^\beta(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — многочлены по  $t$  степени не выше  $\beta$ .

Коэффициенты многочленов  $\bar{M}_i^\beta(t)$  можно определить методом неопределенных коэффициентов путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $t$  после подстановки в уравнения (19) значений  $x_i$  из выражения (29) и сокращения полученных выражений на  $e^{\alpha t}$ .

II. Пусть теперь  $\lambda_1 = \alpha$ . Тогда подсистема (27) запишется в виде

$$\begin{array}{l}
 \frac{dz_1}{dt} = z_2 + c_1' t^\beta, \\
 \frac{dz_2}{dt} = z_3 + c_2' t^\beta, \\
 \dots \\
 \frac{dz_{e_1}}{dt} = c_{e_1}' t^\beta.
 \end{array} \quad (30)$$

Интегрируя последовательно, начиная с последнего, уравнения (30), получим

$$z_i = M_i^{e_1+1-i}(t) t^\beta \quad (i = 1, 2, \dots, e_1),$$

где  $M_i^{e_1+1-i}(t)$  — многочлен от  $t$  степени не выше  $e_1 + 1 - i$ . Тогда

$$y_i = M_i^{e_1+1-i}(t) e^{\alpha t} t^\beta \quad (i = 1, 2, \dots, e_1).$$

Аналогичный вид имеет решение  $y_i(t)$  для тех подсистем, которые соответствуют клеткам  $A_k$ , собственные значения  $\lambda_k$  которых удовлетворяют равенству  $\lambda_k = \alpha$ .

Следовательно, система (19) будет иметь частное решение

$$x_i = M_i^{\beta+e}(t) e^{\alpha t} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (31)$$

где  $M_i^{\beta+e}(t)$  — многочлены от  $t$  степени не выше  $\beta + e$ , а  $e$  — наивысший показатель степени у элементарных делителей матрицы  $A - \lambda E$ , соответствующих собственному значению  $\alpha$ .

Коэффициенты многочленов  $M_i^{\beta+e}$  находятся, как и выше, путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $t$  после подстановки решения (31) в уравнения (19) и сокращения на  $e^{\alpha t}$ .

**Пример 1.** Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= y - 4x. \end{aligned} \quad (32)$$

Найдем корни характеристического уравнения  $|A - \lambda E| = 0$ :

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0, \text{ откуда } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3.$$

Первое решение системы уравнений (32), соответствующее характеристическому корню  $\lambda_1 = -1$ , ищем в соответствии с формулой (15) в виде

$$x_1 = a_1 e^{-t}, \quad y_1 = a_2 e^{-t}.$$

Для определения  $a_1$  и  $a_2$  подставим это решение в систему (32) и сократим обе части полученных равенств на  $e^{-t}$ . Получим систему из двух уравнений для определения коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ :

$$2a_1 - a_2 = 0, \quad -4a_1 + 2a_2 = 0.$$

Определитель полученной линейной однородной системы алгебраических уравнений равен нулю, поэтому система имеет нетривиальное решение

$$a_2 = c_1, \quad a_1 = \frac{c_1}{2}.$$

Следовательно, первое решение исходного уравнения

$$x_1 = \frac{c_1}{2} e^{-t}, \quad y_1 = c_1 e^{-t}.$$

Второе решение системы уравнений, соответствующее корню  $\lambda_2 = 3$ , определим аналогичным путем. Решение ищем в виде

$$x_2 = a_1 e^{3t}, \quad y_2 = a_2 e^{3t}.$$

Имеем следующую систему уравнений для определения постоянных  $a_1$  и  $a_2$ :

$$-2a_1 - a_2 = 0, \quad -4a_1 - 2a_2 = 0.$$

Решая эту систему, получим:

$$a_2 = c_2, \quad a_1 = -\frac{c_2}{2}.$$

Тогда

$$x_2 = -\frac{c_2}{2} e^{3t}, \quad y_2 = c_2 e^{3t}.$$

Общее решение система (32) будет иметь вид

$$x = \frac{c_1}{2} e^{-t} - \frac{c_2}{2} e^{3t}, \quad y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}.$$

**Пример 2.** Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= 3y - 2x. \end{aligned} \quad (33)$$

Определим корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \\ \lambda_{1,2} &= 2 \pm j. \end{aligned}$$

Первое решение ищем в соответствии с формулой (15) в виде

$$x_1 = a_1 e^{(2+j)t}, \quad y_1 = a_2 e^{(2+j)t}.$$

После подстановки  $x_1$  и  $y_1$  в систему уравнений (33) и сокращения обеих частей полученных равенств на  $e^{(2+j)t}$  получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ :

$$(-1 - j)a_1 + a_2 = 0, \quad -2a_1 + (1 - j)a_2 = 0.$$

Решая эту систему, найдем

$$a_2 = c_1 + jc_2, \quad a_1 = \frac{c_1 + c_2}{2} + j \frac{c_2 - c_1}{2}.$$

Таким образом,

$$x_1 = \left( \frac{c_1 + c_2}{2} + j \frac{c_2 - c_1}{2} \right) e^{(2+j)t}, \quad y_1 = (c_1 + jc_2) e^{(2+j)t}.$$

Так как  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ , то второе решение будет сопряженным к первому; это решение:

$$x_2 = \left( \frac{c_1 + c_2}{2} - j \frac{c_2 - c_1}{2} \right) e^{(2-j)t}, \quad y_2 = (c_1 - jc_2) e^{(2-j)t}.$$

Общее решение заданной системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \left( \frac{c_1 + c_2}{2} + j \frac{c_2 - c_1}{2} \right) e^{(2+j)t} + \left( \frac{c_1 + c_2}{2} - j \frac{c_2 - c_1}{2} \right) e^{(2-j)t} = \\ &= e^{2t} [(c_1 + c_2) \cos t + (c_1 - c_2) \sin t], \\ y &= e^{2t} [2c_1 \cos t - 2c_2 \sin t]. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} &= x - y + 2z. \end{aligned} \quad (34)$$

Определим корни характеристического уравнения системы (34):

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3.$$

Первое решение системы (34), соответствующее характеристическому корню  $\lambda_1 = 2$ , ищем в виде

$$x_1 = a_1 e^{2t}, \quad y_1 = a_2 e^{2t}, \quad z_1 = a_3 e^{2t}. \quad (35)$$

После подстановки значений  $x_1, y_1, z_1$  в систему (34) и сокращения обеих частей полученных равенств на  $e^{2t}$  получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_1, a_2, a_3$ :

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 - a_3 = 0, \\ a_1 - a_3 = 0, \\ a_1 - a_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, будем иметь

$$a_3 = c_1, \quad a_1 = a_2 = c_1, \quad a_3 = a_2 = c_1. \quad (36)$$

Найдем теперь решение, соответствующее характеристическому корню  $\lambda_2 = -\lambda_3 = 3$ . Согласно формуле (15), решение ищем в виде

$$x_2 = (a_1 + b_1 t) e^{3t}, \quad y_2 = (a_2 + b_2 t) e^{3t}, \quad z_2 = (a_3 + b_3 t) e^{3t}. \quad (37)$$

Для определения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) подставим выражение (37) в систему (34) и сократим полученные равенства на  $e^{3t}$ :

$$\begin{cases} b_1 + 3(a_1 + b_1 t) = 4(a_1 + b_1 t) - (a_2 + b_2 t) - (a_3 + b_3 t), \\ b_2 + 3(a_2 + b_2 t) = (a_1 + b_1 t) + 2(a_2 + b_2 t) - (a_3 + b_3 t), \\ b_3 + 3(a_3 + b_3 t) = (a_1 + b_1 t) - (a_2 + b_2 t) + 2(a_3 + b_3 t). \end{cases}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  в этих равенствах, получим следующие системы уравнений для определения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\left. \begin{cases} b_1 - b_2 - b_3 = 0 \\ b_1 - b_2 - b_3 = 0 \\ b_1 - b_2 - b_3 = 0 \end{cases} \right\}, \quad (38) \quad \left. \begin{cases} b_1 - a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ b_2 - a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ b_3 - a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \right\}. \quad (39)$$

Из системы (39) следует, что  $b_1 = b_2 = b_3$ . Из системы (38) найдем  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ . Тогда решение системы (39) будет

$$a_2 = c_2, \quad a_3 = c_3, \quad a_1 = c_2 + c_3.$$

С учетом найденных значений коэффициентов общее решение системы (34) запишется в виде

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3) e^{3t}, \\ y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, \\ z = c_1 e^{2t} + c_3 e^{3t}. \end{cases}$$

**Пример 4.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases} \quad (40)$$

Вначале найдем общее решение однородной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases} \quad (41)$$

Корни характеристического уравнения этой системы:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0; \\ \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1.$$

Тогда

$$\left. \begin{cases} x_1 = a_1 e^{3t} \\ y_1 = a_2 e^{3t} \\ x_2 = a_1 e^t \\ y_2 = a_2 e^t \end{cases} \right\} \begin{cases} -a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} a_1 = a_2 = c_1; \\ a_1 = c_2 \\ a_2 = -c_2. \end{matrix} \right\}$$

Таким образом, общее решение однородной системы (41) имеет вид

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 e^t, \quad y = c_1 e^{3t} - c_2 e^t.$$

Найдем частное решение неоднородной системы (40). Так как  $\lambda = 1$  является корнем характеристического уравнения, то частное решение в соответствии с формулой (31) ищем в виде

$$x = (a_1 + b_1 t) e^t + d_1 e^{4t}, \quad y = (a_2 + b_2 t) e^t + d_2 e^{4t}. \quad (42)$$

Подставляя (42) в систему уравнений (40), получим

$$\begin{cases} (a_1 + b_1 + b_1 t) e^t + 4d_1 e^{4t} = (2a_1 + 2b_1 t) e^t + 2d_1 e^{4t} + (a_2 + b_2 t) e^t + d_2 e^{4t} + 2e^t, \\ (a_2 + b_2 + b_2 t) e^t + 4d_2 e^{4t} = (a_1 + b_1 t) e^t + d_1 e^{4t} + (2a_2 + 2b_2 t) e^t + 2d_2 e^{4t} - 3e^{4t}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + b_1 t = 2a_1 + 2b_1 t + a_2 + 2b_2 t + 2, \\ 2d_1 - d_2 = 0, \\ a_2 + b_2 + b_2 t = a_1 + b_1 t + 2a_2 + 2b_2 t, \\ 2d_2 - d_1 + 3 = 0. \end{cases}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , получим следующие системы уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $a_1, a_2, b_1, b_2, d_1, d_2$ :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - b_1 = -2, \\ b_1 + b_2 = 0, \\ a_1 + a_2 - b_2 = 0, \\ b_1 + b_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2d_1 - d_2 = 0, \\ d_1 - 2d_2 = 3. \end{cases}$$

Решив эти системы, найдем

$$d_1 = -1, \quad d_2 = -2, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = -1.$$

Тогда общее решение неоднородной системы будет иметь вид

$$\begin{cases} x = c_1 e^{3t} + c_2 e^t - (1-t) e^t - e^{4t}, \\ y = c_1 e^{3t} - c_2 e^t - t e^t - 2e^{4t}. \end{cases}$$

**4. Линейное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.** Линейное однородное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0, \quad a_0 \neq 0, \quad (43)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — постоянные числа, в общем случае комплексные.

Путем введения новых неизвестных функций

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ x_2 = x', \\ \dots \\ x_n = x^{(n-1)} \end{cases}$$

это уравнение сводится к системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (44)$$



причем матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица для системы (44) имеет вид

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} - \lambda \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Определитель этой матрицы

$$\det [A - \lambda E] = (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n) (-1)^n = M(\lambda). \quad (46)$$

Вычеркивая первый столбец и последнюю строку матрицы (45), мы получим матрицу, определитель которой равен либо +1, либо -1. Таким образом, наибольший общий делитель миноров  $(n-1)$  порядка матрицы  $A - \lambda E$   $d_{n-1} = 1$ . Поэтому матрица  $A - \lambda E$  эквивалентна следующей матрице:

$$A - \lambda E \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что если многочлен  $M(\lambda)$  имеет корень  $\lambda_i$  кратности  $e_i$ , то матрица (45) имеет элементарный делитель  $(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$  и никаких других элементарных делителей, которые представлялись бы некоторой степенью  $(\lambda - \lambda_i)$ , матрица (45) не имеет. Поэтому, согласно формуле (9), корню  $\lambda_i$  кратности  $e_i$  будут соответствовать  $e_i$  решений вида

$$(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{e_i-1} t^{e_i-1}) e^{\lambda_i t}.$$

В качестве линейно-независимых решений, соответствующих корням характеристического уравнения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , можно взять решения

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = t e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad x_{e_1} = t^{e_1-1} e^{\lambda_1 t}, \quad x_{e_1+1} = e^{\lambda_2 t}, \quad \dots \\ &\dots, \quad x_n = t^{e_n-1} e^{\lambda_n t}. \end{aligned} \quad (47)$$

Действительно, нетрудно убедиться, что определитель Вронского, составленный для этих решений при  $t=0$ ,  $W(0) = \prod_{i=1}^n (e_i - 1)! \neq 0$ .

Если все коэффициенты  $a_k$  уравнения (43) действительны, то каждому комплексному корню характеристического уравнения  $\lambda_k = \alpha_k + j\beta_k$  соответствует сопряженный с ним корень  $\bar{\lambda}_k = \alpha_k - j\beta_k$ , причем той же кратности. Тогда каждому решению уравнения (43)

$$x_1 = t^r e^{\lambda_k t} = t^r e^{\alpha_k t} (\cos \beta_k t + j \sin \beta_k t) \quad (48)$$

соответствует решение

$$x_2 = \bar{x}_1 = t^r e^{\bar{\lambda}_k t} = t^r e^{\alpha_k t} (\cos \beta_k t - j \sin \beta_k t) \quad (48')$$

того же уравнения. Поэтому уравнению (43) будут удовлетворять действительные функции

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2} = t^r e^{\alpha_k t} \cos \beta_k t, \\ \bar{x}_2 &= \frac{x_1 - x_2}{2j} = t^r e^{\alpha_k t} \sin \beta_k t. \end{aligned} \quad (49)$$

Пусть мы имеем  $n$  линейно-независимых решений уравнения (43)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , причем  $x_1$  и  $x_2$  определяются выражениями (48). Тогда  $n$  других решений  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, \dots, x_n$  являются также линейно-независимыми. Действительно, матрица перехода от первой системы решений ко второй имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2j} & -\frac{1}{2j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ее определитель не равен нулю, следовательно,  $n$  решений  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, \dots, x_n$  линейно-независимы. Таким образом, в том случае, если коэффициенты уравнения (43) действительны, можно получить  $n$  действительных линейно-независимых решений.

Для линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 x^{(n)} + \dots + a_n x = f(t) \quad (50)$$

решение  $x(t)$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \quad (51)$$

может быть получено с помощью формулы Коши

$$x(t) = \varphi(t) + \int_{t_0}^t X(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (52)$$

где  $\varphi(t)$  — решение однородного уравнения (43), удовлетворяющее начальным условиям (51);  $x_1(t)$  — решение уравнения (43), удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1(0) = x_1'(0) = \dots = x_1^{(n-2)}(0) = 0, \quad x_1^{(n-1)}(0) = 1. \quad (53)$$

Формула (52) позволяет по известному решению однородного уравнения (43) получить любое решение неоднородного уравнения при произвольной правой части  $f(t)$ . Если правая часть  $f(t)$  уравнения (50) имеет вид

$$f(t) = ct^\beta e^{at}, \quad (54)$$

то частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов.

Если число  $a$  является корнем характеристического уравнения  $M(\lambda) = 0$  кратности  $\nu$ , где  $M(\lambda)$  определяется выражением (45), то частное решение следует искать в виде

$$x(t) = M^{\beta+\nu}(t) e^{at}, \quad (55)$$

где  $M^{\beta+\nu}(t)$  — многочлен по  $t$  с неизвестными коэффициентами степени не выше  $\beta + \nu$ .

Пусть многочлен  $M^{\beta+\nu}(t)$  имеет вид

$$M^{\beta+\nu}(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_{\beta+\nu} t^{\beta+\nu}.$$

Корню характеристического уравнения  $\lambda = a$  соответствует  $\nu$  линейно-независимых решений однородного уравнения (43) вида

$$(c_0 + c_1 t + \dots + c_{\nu-1} t^{\nu-1}) e^{at}. \quad (56)$$

Выше было показано, что разность между решением неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений и решением соответствующей ей однородной системы является также решением неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений. Это справедливо и для линейного неоднородного дифференциального уравнения порядка  $n$ .

В выражении (56) можно произвольные постоянные  $c_i$  считать равными коэффициентам при одинаковых степенях  $t$  многочлена  $M^{\beta+\nu}(t)$ . Поэтому, вычитая из решения (55) решение вида (56) однородного уравнения, получим частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка

$$x(t) = \bar{M}^\beta(t) t^\nu e^{at}, \quad (57)$$

где  $\bar{M}^\beta(t)$  — многочлен от  $t$  с неизвестными коэффициентами степени не выше  $\beta$ .

Коэффициенты многочлена  $\bar{M}^\beta(t)$  можно определить путем подстановки выражения (57) в уравнение (50) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $t$  в выражении, полученном после сокращения обеих частей равенства на  $e^{at}$ . Если правая часть уравнения (50)  $f(t)$  имеет вид, отличный от (54), то частное решение может быть найдено методом вариации произвольных постоянных.

**Пример 5.** Решить однородное линейное дифференциальное уравнение

$$x'' - 2x' + x = 0. \quad (58)$$

Найдем корни характеристического уравнения  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

В соответствии с равенствами (47) общее решение заданного уравнения есть

$$x = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

**Пример 6.** Найти решение неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$x'' - 8x' + 20x = 5t e^{4t} \sin 2t. \quad (59)$$

Найдем прежде всего общее решение соответствующего однородного уравнения

$$x'' - 8x' + 20x = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$$

имеют значения

$$\lambda_{1,2} = 4 \pm 2j.$$

В соответствии с формулами (49) общее решение однородного уравнения будет

$$x = c_1 e^{(4+2j)t} + c_2 e^{(4-2j)t} = e^{4t} (\tilde{c}_1 \cos 2t + \tilde{c}_2 \sin 2t).$$

Так как  $e^{4t} \sin 2t = \frac{e^{(4+2j)t} - e^{(4-2j)t}}{2j}$ , а  $4 \pm 2j$  является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения в соответствии с формулой (57) имеет вид

$$x(t) = t(a_1 + b_1 t) e^{4t} \sin 2t + t(a_2 + b_2 t) e^{4t} \cos 2t.$$

Коэффициенты  $a_1, b_1, a_2, b_2$  можно определить, подставив  $x$  в уравнение (59), сократив на  $e^{4t}$  и приравняв коэффициенты у выражений вида  $t^k \sin 2t$  и  $t^k \cos 2t$ . Общее решение неоднородного уравнения получим в виде

$$x = e^{4t} (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) + x(t).$$

**Пример 7.** Решить неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t}. \quad (60)$$

Легко убедиться, что общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения есть

$$x = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Так как правая часть уравнения  $\frac{e^t}{t}$  отлична от вида, определяемого формулой (54), то частное решение находим методом вариации произвольных постоянных.

Согласно формуле (37) § 11 для определения производных  $c_1'$  и  $c_2'$  имеем систему

$$\begin{aligned} c_1' e^t + c_2' t e^t &= 0, \\ c_1' e^t + c_2' (t e^t + e^t) &= \frac{e^t}{t}. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений по правилу Крамера (см. § 4), получим

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & te^t \\ \frac{e^t}{t} & te^t + e^t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & te^t + e^t \end{vmatrix}} = \frac{-e^{2t}}{e^{2t}} = -1, \quad c_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & \frac{e^t}{t} \end{vmatrix}}{e^{2t}} = \frac{\frac{e^{2t}}{t}}{e^{2t}} = \frac{1}{t};$$

тогда

$$c_1 = -t + \tilde{c}_1, \quad c_2 = \ln|t| + \tilde{c}_2.$$

Общее решение уравнения (60) согласно формуле (36) § 11 будет иметь вид

$$x = (-t + \tilde{c}_1) e^t + (\ln|t| + \tilde{c}_2) te^t = c_1 e^t + c_2 te^t + te^t (\ln|t| - 1).$$

**5. Линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами удобно записывать в *символической (операторной) форме*. Введем обозначение  $-\frac{dx}{dt} = px$ ; здесь символ  $p$  является *оператором* дифференцирования. Тогда  $k$ -я производная от  $x$  может быть записана в виде

$$\frac{d^k x}{dt^k} = p^k x. \quad (61)$$

С помощью введенного символа  $p$  интеграл  $\int_{t_0}^t x dt$  можно записать следующим образом:

$$\int_{t_0}^t x(t) dt = \frac{1}{p} x.$$

Действительно, заменив производную символом дифференцирования, получим тождество

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{t_0}^t x(t) dt \right] = p \left[ \frac{1}{p} x \right], \text{ т. е. } x(t) \equiv x(t).$$

Операция дифференцирования является линейной операцией, т. е. если имеются две функции  $x(t)$  и  $y(t)$  и постоянное число  $a$ , то справедливы равенства

$$p(x + y) = px + py, \quad p(ax) = apx.$$

Пусть  $L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$  — некоторый многочлен от  $p$  степени  $n$ . Дифференциальное уравнение (43) с учетом введенных обозначений можно записать следующим образом:

$$L(p)x = 0. \quad (62)$$

Многочлен  $L(p)$  можно понимать как *дифференциальный оператор*, который ставит в соответствие функции  $x(t)$  линейную комбинацию производных этой функции до  $n$ -го порядка, т. е.

$$L(p)x = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x.$$

Оператор  $L(p)$  является линейным оператором, т. е. для функций  $x(t)$  и  $y(t)$  и постоянного числа  $a$  справедливы равенства

$$L(p)(x(t) + y(t)) = L(p)x(t) + L(p)y(t), \quad L(p)(ax(t)) = aL(p)x(t).$$

Пусть  $L_1(p)$  и  $L_2(p)$  два дифференциальных оператора; тогда справедливы следующие свойства:

$$\begin{aligned} 1) [L_1(p) + L_2(p)]x(t) &= L_1(p)x(t) + L_2(p)x(t); \\ 2) L_1(p)(L_2(p)x(t)) &= L_1(p)L_2(p)x(t). \end{aligned} \quad (63)$$

Линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в операторной форме имеет вид

$$\sum_{k=1}^n L_{ik}(p)x_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (64)$$

где  $L_{ik}(p)$  — многочлены от  $p$  с постоянными коэффициентами.

Обозначим  $m_k$  — наивысший порядок производной функции  $x_k$  в системе (64), тогда порядок системы (64)

$$N = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

В дальнейшем будем предполагать, что определитель системы (64) не равен тождественно нулю,

$$D(p) = \begin{vmatrix} L_{11}(p) & \dots & L_{1n}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{n1}(p) & \dots & L_{nn}(p) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (65)$$

**Пример 8.** Записать систему уравнений

$$\begin{aligned} x'' + y'' + x + y &= 0, \\ x' + 2y' + y + x &= 0 \end{aligned}$$

в операторной форме.

Имеем:

$$\begin{aligned} (p^2 + 1)x + (p^2 + 1)y &= 0, \\ (p + 1)x + (2p^2 + p)y &= 0. \end{aligned}$$

Определитель  $D(p)$  этой системы

$$D(p) = \begin{vmatrix} p^2 + 1 & p^2 + 1 \\ p + 1 & 2p^2 + p \end{vmatrix} = 2p^4 + p^2 - 1 \neq 0,$$

а порядок системы  $N = m_1 + m_2 = 2 + 2 = 4$ .

Покажем, что степень многочлена  $D(p)$  не превосходит порядок системы  $N$ . В самом деле, степень каждого многочлена  $L_{ik}(p)$  не превосходит числа  $m_k$ . Таким образом,

$$L_{ik}(p) = a_{ik} p^{m_k} + \dots,$$

где многоточием обозначены члены, содержащие более низкие степени  $p$ , причем некоторые  $a_{ik}$  могут быть равны нулю.

Определитель  $D(p)$  системы (64) имеет вид

$$D(p) = \begin{vmatrix} L_{11}(p) & \dots & L_{1n}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{n1}(p) & \dots & L_{nn}(p) \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11}p^{m_1} + \dots + a_{1n}p^{m_n} + \dots \\ a_{21}p^{m_1} + \dots + a_{2n}p^{m_n} + \dots \\ \dots \\ a_{n1}p^{m_1} + \dots + a_{nn}p^{m_n} + \dots \end{vmatrix} = p^N \Delta + \dots,$$

где  $\Delta$  есть определитель матрицы  $A = [a_{ij}]$ .

Если  $\Delta \neq 0$ , то степень многочлена  $D(p)$  равна  $N$ . Если  $\Delta = 0$ , то степень многочлена  $D(p)$  меньше  $N$ . В случае когда определитель  $\Delta \neq 0$ , система (64) называется *нормализуемой*. В этом случае систему (64) можно разрешить относительно старших производных  $p^{m_k} x_k$  и, следовательно, привести к нормальному виду.

Покажем, что система (64) может быть сведена в некотором смысле к одному дифференциальному уравнению, а именно, если система функций  $x_k = \xi_k(t)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) является решением системы уравнений (64), то каждая функция  $\xi_k(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D(p)x = 0. \quad (66)$$

Действительно, так как  $x_k = \xi_k(t)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) есть решение системы (64), то справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^n L_{ik}(p) \xi_k(t) \equiv 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Умножим обе части каждого из этих тождеств на алгебраическое дополнение  $A_{ij}(p)$  элемента  $L_{ij}(p)$  в определителе  $D(p)$  и просуммируем по  $i$ :

$$\sum_{i=1}^n A_{ij}(p) \left( \sum_{k=1}^n L_{ik}(p) \xi_k(t) \right) \equiv 0.$$

Переменим порядок суммирования:

$$\sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n A_{ij}(p) \cdot L_{ik}(p) \right) \xi_k(t) \equiv 0.$$

Так как сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на их алгебраические дополнения равна определителю, а сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю, то

$$\sum_{i=1}^n A_{ij}(p) L_{ik}(p) = \delta_{jk} D(p),$$

где  $\delta_{jk}$  обозначает символ Кронекера,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j=k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Таким образом, во внешней сумме останется только одно слагаемое, соответствующее индексу  $k=j$ . Окончательно имеем:

$$D(p) \xi_j(t) \equiv 0 \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Мы показали, что любая компонента  $\xi_j(t)$  решения системы (64) удовлетворяет уравнению (66). Не следует, однако, полагать, что взяв  $n$  произвольных решений  $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$  уравнения (66), можно получить решение системы уравнений (64).

Рассмотрим задачу о нахождении общего решения системы уравнений (64).

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$  — различные корни характеристического уравнения  $D(\lambda) = 0$ , а  $k_1, k_2, \dots, k_\mu$  — их кратности, причем  $k_1 + k_2 + \dots + k_\mu = N$ . В этом случае фундаментальную систему решений уравнения (66) образуют функции

$$e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \dots, t^{k_i-1} e^{\lambda_i t} \quad (i=1, 2, \dots, \mu),$$

и общее решение уравнения (66) будет

$$x = \sum_{i=1}^{\mu} \left( \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{ij} t^j \right) e^{\lambda_i t}. \quad (67)$$

Как показано выше, любая компонента  $x_k = \xi_k(t)$  решения системы (64) является решением уравнения (66), а следовательно, имеет вид (67), т. е.

$$\xi_k(t) = \sum_{i=1}^{\mu} \left( \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{ij}^k t^j \right) e^{\lambda_i t} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Остается выяснить, при каких соотношениях между произвольными постоянными  $c_{ij}^k$  написанная система функций  $\xi_k(t)$  представляет собой решение системы (64). Прежде чем перейти к определению этих соотношений, покажем с помощью следующей леммы, что структура решения системы (64) может быть упрощена. Лемма приводится без доказательства.

*Лемма.* Если функции

$$\xi_k(t) = \sum_{i=1}^{\mu} \left( \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{ij}^k t^j \right) e^{\lambda_i t} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

являются решением системы (64), то функции

$$\tilde{\xi}_k^i(t) = \left( \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{ij}^k t^j \right) e^{\lambda_i t} \quad (i=1, 2, \dots, \mu) \quad (68)$$

также являются решениями системы (64).

Система (64) является нормализуемой, следовательно, существует фундаментальная система решений. Из приведенной леммы следует, что фундаментальную систему решений нужно искать в классе функций

$$x_k = \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{ij}^k t^j e^{\lambda_i t} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (69)$$

Для определения соотношений между произвольными постоянными  $c_{ij}^k$  следует подставить решение (69) в систему уравнений (64) и сократить полученные выражения на  $e^{\lambda_i t}$ . Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , получим систему линейных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных  $c_{ij}^k$ . Эту операцию нужно проделать для всех корней  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, \rho$ ) характеристического уравнения  $D(\lambda)=0$ .

**Пример 9.** Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{aligned} x'' + y'' + x + y &= 0, \\ x' + 2y' + y' + 2x &= 0. \end{aligned} \quad (70)$$

Запишем систему (70) в операторной форме

$$\begin{aligned} (p^2 + 1)x + (p^2 + 1)y &= 0, \\ (p + 2)x + (2p^2 + p)y &= 0; \end{aligned}$$

определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

следовательно, система (70) нормализуема.

Определитель заданной системы

$$D(p) = \begin{vmatrix} p^2 + 1 & p^2 + 1 \\ p + 2 & 2p^2 + p \end{vmatrix} = (p^2 + 1)(2p^2 - 2).$$

Корни характеристического уравнения  $D(\lambda)=0$

$$\lambda_1 = j, \quad \lambda_2 = -j, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = -1.$$

Найдем решения системы (70), соответствующие различным корням характеристического уравнения.

Рассмотрим при этом четыре случая:

1)  $\lambda_1 = j$ . В соответствии с формулой (69) решение ищем в виде

$$x_1 = a_1 e^{jt}, \quad y_1 = a_2 e^{jt}. \quad (71)$$

Подставим это выражение в систему уравнений (70) и сократим полученные равенства на  $e^{jt}$ . Будем иметь следующие уравнения для определения коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ :

$$\begin{aligned} 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 &= 0, \\ (2 + j)a_1 + (-2 + j)a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы равен нулю, следовательно, система будет неопределенной. Ее решение есть, например,

$$a_1 = 2 - j, \quad a_2 = 2 + j.$$

Тогда решением системы (70), соответствующее корню  $\lambda_1 = j$  характеристического уравнения  $D(\lambda)=0$ , будет

$$x_1 = (2 - j)e^{jt}, \quad y_1 = (2 + j)e^{jt};$$

2)  $\lambda_2 = -j$ . Решение системы (70) ищем в виде

$$x_2 = a_1 e^{-jt}, \quad y_2 = a_2 e^{-jt}.$$

Постоянные  $a_1$  и  $a_2$  определяются из уравнения

$$a_1(-j + 2) + (-2 - j)a_2 = 0.$$

Имеем  $a_1 = 2 + j$ ,  $a_2 = 2 - j$ , откуда решением системы (70), соответствующим корню  $\lambda_2 = -j$  характеристического уравнения  $D(\lambda)=0$ , будет

$$x_2 = (2 + j)e^{-jt}, \quad y_2 = (2 - j)e^{-jt}.$$

Решения  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  системы (70) запишем в действительной области. Для этого в качестве решений возьмем

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

и

$$\tilde{x}_2 = \frac{x_1 - x_2}{2j}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2j}.$$

Матрица перехода от решений  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  к решениям  $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$  и  $\tilde{x}_2, \tilde{y}_2$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2j} & -\frac{1}{2j} \end{bmatrix}$$

имеет определитель, отличный от нуля. Матрица  $T$  — невырожденная, следовательно, решения  $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$  и  $\tilde{x}_2, \tilde{y}_2$  линейно-независимы.

Таким образом, корням  $\lambda_1 = j$  и  $\lambda_2 = -j$  характеристического уравнения соответствуют решения

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= 2 \cos t + \sin t & \tilde{x}_2 &= 2 \sin t - \cos t, \\ \tilde{y}_1 &= 2 \cos t - \sin t & \tilde{y}_2 &= 2 \sin t + \cos t; \end{aligned}$$

3)  $\lambda_3 = 1$ . Решение системы (70) ищем в виде

$$x_3 = a_1 e^t, \quad y_3 = a_2 e^t.$$

Подставив это выражение в систему (70) и сократив на  $e^t$ , получим следующее уравнение для определения постоянных  $a_1$  и  $a_2$ :

$$2a_1 + 2a_2 = 0.$$

Его решение, например,  $a_1 = 1, a_2 = -1$ , тогда

$$x_3 = e^t, \quad y_3 = -e^t;$$

4)  $\lambda_4 = -1$ . Решение системы (70), соответствующее этому корню характеристического уравнения, ищем в виде

$$x_4 = a_1 e^{-t}, \quad y_4 = a_2 e^{-t}.$$

Постоянные  $a_1$  и  $a_2$  определяются из уравнения

$$2a_1 + 2a_2 = 0.$$

Его решение  $a_1 = 1, a_2 = -1$ , тогда

$$x_4 = e^{-t}, \quad y_4 = -e^{-t}.$$

Покажем, что найденные решения образуют фундаментальную систему решений. Для этого составим определитель Вронского

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cos t + \sin t & 2 \sin t - \cos t & e^t & e^{-t} \\ 2 \cos t - \sin t & 2 \sin t + \cos t & -e^t & -e^{-t} \\ -2 \sin t + \cos t & 2 \cos t + \sin t & e^t & -e^{-t} \\ -2 \sin t - \cos t & 2 \cos t - \sin t & -e^t & e^{-t} \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель Вронского при  $t=0$ :

$$W(0) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 32 \neq 0.$$

Таким образом, найденная система решений линейно-независима и, следовательно, образует фундаментальную систему решений.

Общее решение системы (70):

$$\begin{aligned} x &= c_1 (2 \cos t + \sin t) + c_2 (2 \sin t - \cos t) + c_3 e^t + c_4 e^{-t}, \\ y &= c_1 (2 \cos t - \sin t) + c_2 (2 \sin t + \cos t) - c_3 e^t - c_4 e^{-t}. \end{aligned}$$

### § 13. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**1. Метод последовательных приближений.** С помощью метода последовательных приближений можно получить решение задачи Коши для любого дифференциального уравнения (линейного или нелинейного) или для системы уравнений, удовлетворяющих условиям теоремы существования и единственности. Суть метода поясним на примере решения дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1)$$

Пусть требуется найти решение  $x = \xi(t)$  уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$\xi(t_0) = x_0. \quad (2)$$

В § 10 было показано, что дифференциальное уравнение (1) с начальным условием (2) эквивалентно интегральному уравнению

$$\xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \xi(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

При решении уравнения (1) методом последовательных приближений в качестве нулевого приближения  $\xi_0(t)$  выбирается любая удобная функция (например,  $\xi_0(t) = x_0$ ) и подставляется вместо  $\xi(t)$  в правую часть уравнения (3). Находится первое приближение решения уравнения (1) в виде

$$\xi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \xi_0(\tau)) d\tau. \quad (4)$$

Затем в правую часть уравнения (3) вместо  $\xi(t)$  подставляется функция  $\xi_1(t)$ , определенная по формуле (4). В результате интегрирования получается второе приближение решения  $\xi_2(t)$ ;  $n$ -е приближение решения определится выражением

$$\xi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \xi_{n-1}(\tau)) d\tau. \quad (5)$$

Выше в § 10 показано, что  $n$ -е приближение  $\xi_n(t)$  при  $n \rightarrow \infty$  будет стремиться к  $\xi(t)$  — решению уравнения (1). Аналогично находится решение  $x = \xi(t)$  системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\xi_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

**Пример 1.** С помощью метода последовательных приближений найти решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + y, \quad \frac{dy}{dt} = 3y - 2x, \quad (8)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \quad (9)$$

Интегральные уравнения, эквивалентные системе (8) и начальным условиям (9), будут иметь вид

$$x = 1 + \int_0^t [x(\tau) + y(\tau)] d\tau, \quad y = \int_0^t [3y(\tau) - 2x(\tau)] d\tau. \quad (10)$$

Возьмем в качестве нулевого приближения решения

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0;$$

тогда первым приближением решения будет

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t d\tau = 1 + t, \quad y_1(t) = \int_0^t -2d\tau = -2t;$$

второе приближение решения

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + \tau - 2\tau) d\tau = 1 + t - \frac{t^2}{2},$$

$$y_2(t) = \int_0^t (-6\tau - 2 - 2\tau) d\tau = -2t - 4t^2;$$

третье приближение решения

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + \tau - \frac{\tau^2}{2} - 2\tau - 4\tau^2\right) d\tau = 1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}t^3,$$

$$y_3(t) = \int_0^t (-6\tau - 12\tau^2 - 2 - 2\tau + \tau^2) d\tau = -2t - 4t^2 - \frac{11}{3}t^3.$$

Точное решение системы (8), удовлетворяющее начальным условиям (9), будет (см. пример 2 в § 12):

$$x = e^{2t} (\cos t - \sin t), \quad y = -2e^{2t} \sin t. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что третье приближение представляет собой с точностью до  $t^3$  разложение в ряд Тейлора решения (11) в окрестности точки  $t=0$ . Чем больше членов разложения взять, тем выше точность приближения к точному решению. Решение получается в виде бесконечного ряда.



К недостаткам метода последовательных приближений следует отнести следующее:

1. Может оказаться, что при вычислении какого-либо приближения нельзя вычислить соответствующий интеграл.

2. Скорость сходимости последовательности  $\{\xi_n(t)\}$  к решению  $\xi(t)$  может быть невысокой и для достижения требуемой точности приближения потребуется вычислить большое число членов последовательности.

3. Решение почти всегда получается в виде бесконечного ряда, и поэтому в том случае, когда нельзя вычислить сумму этого ряда, свойства решения трудно обозримы.

Из-за перечисленных недостатков метод последовательных приближений имеет ограниченное применение.

2. **Метод ломаных Эйлера.** Способ решения дифференциальных уравнений с помощью метода ломаных Эйлера рассмотрим на примере решения уравнения первого порядка<sup>\*</sup>

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Найдем решение  $x = \xi(t)$  уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2):

$$\xi(t_0) = x_0.$$

По-прежнему считаем, что уравнение (1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности. Построим  $\epsilon$ -приближенное решение уравнения (1), которое при  $\epsilon \rightarrow 0$  будет стремиться к искомому точному решению. Для этого, используя результаты, полученные в § 10, построим на плоскости  $t, x$   $\delta$ -сетку такую, что для заданного  $\epsilon > 0$  при  $|t - \tilde{t}| < \delta$  и  $|x - \tilde{x}| < \delta$  справедливо неравенство

$$|f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})| < \epsilon.$$

Из точки  $(t_0, x_0)$  проведем прямую

$$x - x_0 = f(t_0, x_0)(t - t_0) \quad (12)$$

до пересечения с одной из сторон соответствующего квадрата (см. рис. 15). Точку пересечения обозначим  $(t_1, x_1)$  и из нее проведем прямую

$$x - x_1 = f(t_1, x_1)(t - t_1) \quad (13)$$

и так далее. При этом получается некоторая ломаная, которая аппроксимирует искомую интегральную кривую. В § 10 было показано, что выбирая соответствующим образом величину шага  $\delta$ , можно с любой степенью точности приблизить построенную ломаную к точному решению.

\* Решение систем дифференциальных уравнений с помощью метода ломаных рассмотрено, например, в книге: Э. Камкес. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, 1961.

**Пример 2.** Найти решение  $x = \xi(t)$  уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -x \cos t, \quad (14)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\xi(0) = 1. \quad (15)$$

Решение  $x = \xi(t)$  будем искать на отрезке  $[0, 1]$  с точностью  $\epsilon = 0,1$ .

Таблица 1

$t$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\xi(t)$	1,0	0,9	0,810	0,741	0,670	0,608	0,555	0,509	0,470	0,437
$f(t, \xi(t))$	-1,0	-0,896	-0,795	-0,707	-0,616	-0,532	-0,460	-0,390	-0,329	-0,270
$-\cos t$	-1,0	-0,995	-0,986	-0,955	-0,921	-0,877	-0,825	-0,765	-0,700	-0,620
$-\sin t$	0,0	-0,01	-0,198	-0,295	-0,389	-0,479	-0,565	-0,644	-0,717	-0,783
$\xi_1(t)$	1,0	0,905	0,819	0,744	0,677	0,619	0,574	0,525	0,488	0,457

Для этого необходимо выбрать  $\delta$ -сетку с шагом  $\delta = 0,1$ . Необходимые данные для построения  $\epsilon$ -приближенного решения указаны в табл. 1. Построение решения приведено на рис. 16.

Точное решение  $x = \xi_1(t)$  заданного уравнения, удовлетворяющее начальному условию (15) будет

$$\xi_1(t) = e^{-\sin t}. \quad (16)$$

На рис. 16 это решение изображено штриховой линией.

3. **Решение уравнений с помощью степенных рядов.** Если правые части системы уравнений (6)

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

разлагаются в степенной ряд в окрестности точки  $(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})$ , то решение системы уравнений (6)

может быть найдено в виде степенных рядов с неопределенными коэффициентами. Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях  $t$ , можно вычислить коэффициенты этих рядов.

Способ решения уравнений с помощью степенных рядов рассмотрим на примере решения уравнения первого порядка (1)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

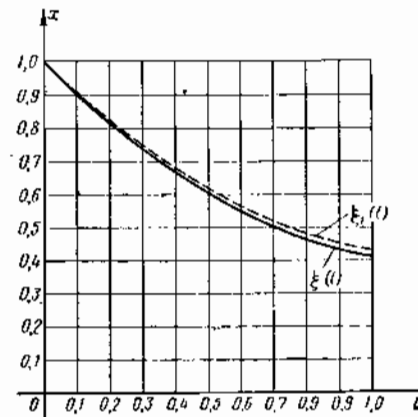


Рис. 16

Пусть функция  $f(t, x)$  разлагается в прямоугольнике  $|t - t_0| < a \ll \infty$ ,  $|x - x_0| < b \ll \infty$  в степенной ряд

$$f(t, x) = \sum_{i, j=0}^{\infty} a_{ij} (t - t_0)^i (x - x_0)^j. \quad (17)$$

Решение  $x = \xi(t)$  уравнения (1) ищем в виде ряда

$$\xi(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (t - t_0)^k. \quad (18)$$

Коэффициенты  $b_k$  вычисляются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $t - t_0$  в левой и правой частях равенства

$$\sum_{i, j=0}^{\infty} a_{ij} (t - t_0)^i \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_k (t - t_0)^k \right)^j = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k (t - t_0)^{k-1} \quad (19)$$

Этот метод применим и для решения дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.

**Пример 3.** Рассмотрим процесс решения уравнения

$$t \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + tx = 0. \quad (20)$$

Это уравнение есть частный случай уравнения Бесселя, часто встречающегося в математической физике.

Будем искать нетривиальное решение  $x = \xi(t)$  этого уравнения в виде ряда

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k. \quad (21)$$

Положим, что  $\xi(0) = b_0$ , тогда

$$\begin{aligned} t \xi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} b_{k-2} t^{k-1}, \\ \frac{d\xi(t)}{dt} &= \sum_{k=1}^{\infty} k b_k t^{k-1}, \\ t \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k t^{k-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставив выражения (22) в уравнение (20), получим тождество

$$b_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (b_{k-2} + k^2 b_k) t^{k-1} \equiv 0, \quad (23)$$

из которого следует, что

$$b_1 = 0, \quad k^2 b_k + b_{k-2} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots).$$

По индукции получим, что все коэффициенты  $b_k$  с четными номерами равны нулю:

$$b_{2l-1} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots), \quad (24)$$

а коэффициенты  $b_k$  с четными номерами определяются из рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} b_{2l} &= -\frac{1}{4l^2} b_{2l-2} \quad (l = 1, 2, \dots); \\ b_{2l} &= (-1)^l \frac{1}{(l!)^2 2^{2l}} b_0 \quad (l = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, окончательно решение уравнения (20) является степенным рядом

$$\xi(t) = \xi(0) \left( 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{t^{2l}}{(l!)^2 2^{2l}} \right). \quad (26)$$

Легко проверить, что ряд (26) сходится при любых значениях  $t$ .

**4. Метод фазовой плоскости.** Метод фазовой плоскости является графическим методом решения дифференциальных уравнений. Он отличается своей наглядностью и возможностью получения решений для любых начальных условий. К недостаткам метода фазовой плоскости следует отнести то обстоятельство, что метод применим только для решения уравнений второго порядка, либо для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, причем правые части системы уравнений не должны явно зависеть от  $t$  (система должна быть автономной).

Более подробно вопрос построения фазовых траекторий системы дифференциальных уравнений рассмотрен в следующем параграфе.

**5. Метод гармонической линеаризации.** Метод гармонической линеаризации применяется для приближенного определения параметров периодического решения нелинейного дифференциального уравнения. С помощью метода гармонической линеаризации можно выяснить существование периодического решения нелинейного дифференциального уравнения, а также определить параметры этого решения и исследовать его устойчивость.

Условие применения метода гармонической линеаризации и сам метод описаны в гл. XIII.

Кроме изложенных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений, в настоящее время широко распространены различные вычислительные методы решения уравнений на аналоговых и цифровых вычислительных машинах. В настоящей книге эти вопросы не рассматриваются\*).

## § 14. ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

**1. Фазовые пространства автономных систем.** Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (I)$$

\* Методы решения дифференциальных уравнений на аналоговых вычислительных машинах рассмотрены в книге: Лейбин Л. Методы решения технических задач с использованием аналоговых вычислительных машин. «Мир», 1966.

Правые части  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  уравнений системы (1) являются функциями переменных  $x_1, \dots, x_n$  и не зависят от времени  $t$ . Полагаем, что функции  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  определены и непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в выпуклой области  $G$  пространства размерности  $n$ , координатами которого являются переменные  $x_1, \dots, x_n$ . Из нашего предположения следует, что система (1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения (теорема 1 § 10).

Решения автономной системы уравнений обладают важным свойством, состоящим в том, что если имеется некоторое решение системы (1)

$$x_i = \xi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то выражение

$$x_i = \bar{\xi}_i(t) = \xi_i(t + c) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $c = \text{const}$ , есть также решение этой системы.

Действительно, так как  $\xi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) есть решение системы (1), то справедливы тождества

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} \equiv f_i(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Заменив в этих тождествах  $t$  на  $t + c$ , получим

$$\frac{d\bar{\xi}_i(t+c)}{d(t+c)} \equiv f_i(\xi_1(t+c), \dots, \xi_n(t+c)) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Но  $\frac{d\bar{\xi}_i(t+c)}{d(t+c)} = \frac{d\xi_i(t+c)}{dt} = \frac{d\bar{\xi}_i(t)}{dt}$ , поэтому справедливо тождество

$$\frac{d\bar{\xi}_i(t)}{dt} \equiv f_i(\bar{\xi}_1(t), \dots, \bar{\xi}_n(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

т. е. функции  $x_i = \bar{\xi}_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) являются решением системы (1).

Дадим геометрическую интерпретацию решений автономной системы (1). Эта интерпретация будет отличаться от геометрической интерпретации решений, указанной в § 9.

Пусть

$$x_i = \xi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

некоторое решение системы (1). Рассмотрим  $n$ -мерное пространство с координатами  $x_1, \dots, x_n$  и поставим в соответствие этому решению движение точки в  $n$ -мерном пространстве, задаваемое уравнениями (2).

При непрерывном изменении времени  $t$  в диапазоне  $-\infty < t < \infty$  точка опишет в соответствии с уравнениями (2) некоторую кривую — траекторию, называемую *фазовой траекторией*. Точка, которая перемещается по фазовой траектории в соответствии с уравнениями (2), называется *изображающей точкой*, а пространство размерности  $n$ , в котором геометрически интерпретируются решения системы (1) в виде фазовых траекторий, называется *фазовым пространством*.

Нетрудно показать, что фазовые траектории, соответствующие различным решениям системы (1), не могут пересекаться. Однако различным решением этой системы может соответствовать одна и та же фазовая траектория; другими словами, фазовые траектории для различных решений системы (1) могут совпадать.

Покажем, что если фазовые траектории для различных решений системы (1) имеют хотя бы одну общую точку, то они совпадают. В самом деле, пусть

$$x_i = \psi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

есть некоторое другое решение системы (1) и пусть траектории, соответствующие решениям (2) и (3), имеют общую точку, т. е.

$$\xi_i(t_1) = \psi_i(t_2) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Рассмотрим решение системы (1)

$$x_i = \bar{\xi}_i(t) = \xi_i(t + c) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где  $c = t_1 - t_2$ .

Решение (5) имеет в момент времени  $t_2$  согласно равенствам (4) одинаковые начальные условия с решением (3):

$$\bar{\xi}_i(t_2) = \xi_i(t_2 + c) = \xi_i(t_2 + t_1 - t_2) = \xi_i(t_1) = \psi_i(t_2) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и поэтому в силу теоремы единственности решения (3) и (5) совпадают друг с другом, т. е.

$$\psi_i(t) \equiv \bar{\xi}_i(t + c) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Из тождества (6) следует, что для обоих решений (2) и (3) изображающая точка описывает в фазовом пространстве одну и ту же траекторию, но для первого решения эта точка отстает по траектории на время  $c$ .

Таким образом, мы интерпретируем решение автономной системы дифференциальных уравнений (1) как *процесс движения изображающей точки по фазовой траектории*, причем фазовые траектории для различных решений системы (1) либо не пересекаются, либо совпадают.

Ранее, в § 9 решения системы дифференциальных уравнений рассматривались как некоторые кривые-интегральные кривые в  $n + 1$ -мерном пространстве с координатами  $t, x_1, \dots, x_n$ . Каждому решению в той области пространства, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения, соответствовала единственная интегральная кривая. Фазовые траектории можно рассматривать, как проекции интегральных кривых в  $n + 1$ -мерном пространстве на  $n$ -мерное пространство  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , причем проекции различных интегральных кривых либо не пересекаются, либо совпадают.

Для случая  $n = 2$  интегральные кривые и их проекции приведены на рис. 17, на котором показано, что двум решениям  $\xi(t)$

и  $\xi(t) = \xi(t+c)$ , отличающимся сдвигом по времени, соответствуют разные интегральные кривые, но одна фазовая траектория.

Можно дать геометрическую интерпретацию не только решениям, но и самой системе уравнений (1). Для этого каждой точке  $(x_{10}, \dots, x_{n0}) = x_0$  области  $G$  фазового пространства поставим в соответствие вектор  $f(x_0)$  с координатами  $f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)$ , выходящий из этой точки. Система (1) будет задавать в области  $G$  векторное

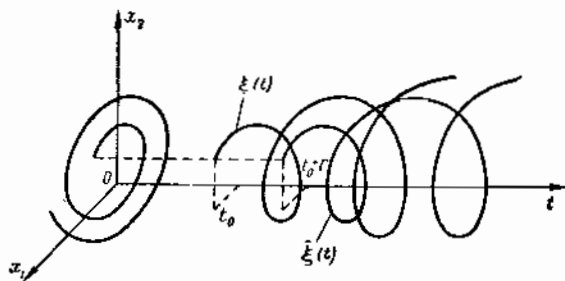


Рис. 17

поле. Пусть  $x_i = \xi_i(t)$  — решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\xi_i(t_0) = x_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Этому решению соответствует фазовая траектория, выходящая в момент времени  $t_0$  из точки  $x_0$ . Тогда вектор  $f(x_0)$  представляет собой, как это следует из тождества

$$\left. \frac{d\xi_i(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \equiv f_i(x_{10}, \dots, x_{n0}) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

вектор скорости движения изображающей точки по траектории в момент времени  $t_0$ .

Вектор  $f(x_0)$  носит название *вектора фазовой скорости*.

В фазовом пространстве существует три вида фазовых траекторий\*).

1. Фазовые траектории, которые соответствуют решениям системы (1) вида

$$\xi_i(t) = a_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

В этом случае изображающая точка в фазовом пространстве при изменении  $t$  не перемещается, а стоит на месте; фазовая траектория для решения (7) называется *состоянием равновесия*.

2. Фазовые траектории, для которых решение системы (1) является периодическим, т. е. существует такое действительное число  $T > 0$ ,

\* См.: Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. «Наука», 1965, стр. 113.

что выполняется условие

$$\xi_i(t+T) = \xi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

В данном случае фазовая траектория будет замкнутой и называется *циклом*, число  $T$  носит название *периода цикла*. Чтобы траектория не вырождалась в точку, требуется существование таких значений  $t = \tau_1$  и  $t = \tau_2$ , удовлетворяющих условию  $|\tau_1 - \tau_2| < T$ , чтобы хотя бы для одного  $i$  было справедливо неравенство

$$\xi_i(\tau_1) \neq \xi_i(\tau_2).$$

Состояния равновесия и циклы являются самопересекающимися фазовыми траекториями. Действительно, если фазовая траектория представляет собой состояние равновесия, то соотношение

$$\xi_i(\tau_1) = \xi_i(\tau_2) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

справедливо для любых  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Это же соотношение справедливо и для цикла, если  $\tau_1$  и  $\tau_2$  удовлетворяют условию

$$|\tau_1 - \tau_2| = T.$$

3. Фазовые траектории без самопересечений, которые соответствуют решениям  $x_i = \xi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) системы (1), обладающим тем свойством, что не существует значений  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , удовлетворяющих условию

$$\xi_i(\tau_1) = \xi_i(\tau_2) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Через каждую точку фазового пространства проходит фазовая траектория, которая соответствует некоторому решению системы (1). Все фазовое пространство оказывается заполненным не пересекающимися друг с другом фазовыми траекториями. Среди этих траекторий особое место занимают самопересекающиеся фазовые траектории, к которым относятся состояния равновесия и циклы.

Следующая теорема указывает на связь состояний равновесия с фазовыми скоростями.

*Теорема 1.* Для того чтобы точка  $a = (a_1, \dots, a_n)$  была состоянием равновесия, необходимо и достаточно, чтобы вектор фазовой скорости  $f(x_1, \dots, x_n)$  в этой точке обратился в ноль.

*Доказательство.* Вначале докажем достаточность условий теоремы. Пусть в точке  $(a_1, \dots, a_n)$  вектор фазовой скорости обращается в ноль, т. е.

$$f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Тогда система (1) имеет решение  $\xi_i = a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), соответствующее состоянию равновесия. В самом деле, при подстановке  $\xi_i = a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) в систему (1) получим тождество

$$\frac{da_i}{dt} = f_i(a_1, \dots, a_n) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

так как производная от постоянной величины равна нулю, а  $f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) по условию.

Достаточность условий теоремы доказана.

Докажем теперь необходимость условий теоремы. Пусть система (1) имеет решение вида (7), т. е. точка  $(a_1, \dots, a_n)$  является состоянием равновесия. Подставив решение (7) в систему (1), получим равенство

$$f_i(a_1, \dots, a_n) = \frac{da_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Вектор фазовой скорости  $f(x_1, \dots, x_n)$  в точке  $(a_1, \dots, a_n)$  обращается в ноль.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что состояния равновесия являются решениями системы уравнений

$$f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

**2. Фазовые траектории автономных систем второго порядка.** Рассмотрим построение фазовых траекторий для автономной системы уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad (10)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2).$$

Функции  $f_1(x_1, x_2)$  и  $f_2(x_1, x_2)$  полагаем аналитическими во всей плоскости  $x_1, x_2$ .

Для системы уравнений (10) фазовое пространство представляет собой фазовую плоскость. Точки, характеризующие состояния равновесия, являются решениями системы уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В общем случае система (11) может иметь не одно, а несколько решений. Пусть  $x_1 = a_1, x_2 = a_2$  — одно из решений системы (11). Исследуем характер фазовых траекторий в окрестности этого состояния равновесия. Для этого с помощью замены неизвестных функций

$$x_1 = a_1 + z_1, \quad x_2 = a_2 + z_2,$$

перенесем начало координат в точку  $(a_1, a_2)$  и разложим функции  $f_1(x_1, x_2)$  и  $f_2(x_1, x_2)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(a_1, a_2)$ :

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(a_1, a_2) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(a_1, a_2)} z_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{(a_1, a_2)} z_2 + F_1(z_1, z_2), \quad (12)$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_2(a_1, a_2) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{(a_1, a_2)} z_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{(a_1, a_2)} z_2 + F_2(z_1, z_2).$$

Здесь через  $F_1(z_1, z_2)$  и  $F_2(z_1, z_2)$  обозначены все члены разложения степени выше первой относительно  $z_1, z_2$ . Так как фазовые траектории

рассматриваются в окрестности начала координат плоскости  $z_1, z_2$ , то  $z_1$  и  $z_2$  малы и членами  $F_1(z_1, z_2)$  и  $F_2(z_1, z_2)$  разложения (12) можно пренебречь. Обозначив частные производные через

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(a_1, a_2)} = a_{11}, \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{(a_1, a_2)} = a_{12}, \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{(a_1, a_2)} = a_{21}, \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{(a_1, a_2)} = a_{22}$$

и учитывая (11), получим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dz_1}{dt} = a_{11}z_1 + a_{12}z_2, \quad (13)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = a_{21}z_1 + a_{22}z_2,$$

которая описывает фазовые траектории в окрестности состояния равновесия и называется *системой уравнений первого приближения*.

Запишем систему (13) в векторной форме:

$$\frac{dz}{dt} = Az, \quad (14)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Если определитель  $\det A \neq 0$ , то система (14) имеет единственное состояние равновесия — точку  $(0, 0)$ .

Исключим время  $t$  из системы (13), разделив второе уравнение системы на первое. Получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{a_{21}z_1 + a_{22}z_2}{a_{11}z_1 + a_{12}z_2}. \quad (15)$$

В уравнении (15) полагаем  $z_1$  — независимой переменной;  $z_2$  — неизвестной функцией. Правая часть уравнения (15)  $f(z_1, z_2) = \frac{a_{21}z_1 + a_{22}z_2}{a_{11}z_1 + a_{12}z_2}$  определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную по  $z_2$  всюду на плоскости  $z_1, z_2$ , за исключением прямой  $a_{11}z_1 + a_{12}z_2 = 0$ .

Разделив первое уравнение системы (13) на второе, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{a_{11}z_1 + a_{12}z_2}{a_{21}z_1 + a_{22}z_2},$$

правая часть которого определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную по  $z_1$  всюду на плоскости  $z_1, z_2$ , за исключением прямой  $a_{21}z_1 + a_{22}z_2 = 0$ .

Таким образом, условия теоремы существования и единственности для уравнения (15) выполняются всюду, за исключением

общих точек прямых  $a_{11}z_1 + a_{12}z_2 = 0$  и  $a_{21}z_1 + a_{22}z_2 = 0$ . Если  $\det A \neq 0$ , то эти прямые имеют единственную общую точку  $z_1 = 0, z_2 = 0$ .

Правая часть уравнения (15)

$$f(z_1, z_2) = \frac{a_{21}z_1 + a_{22}z_2}{a_{11}z_1 + a_{12}z_2}$$

не имеет предела при  $z_1 \rightarrow 0$  и  $z_2 \rightarrow 0$ . Действительно, если точка  $(z_1, z_2)$  стремится к точке  $(0, 0)$ , оставаясь на прямой  $a_{11}z_1 + a_{12}z_2 = 0$ , то  $\lim_{\substack{z_1 \rightarrow 0 \\ z_2 \rightarrow 0}} f(z_1, z_2) = 0$ . Если точка  $(z_1, z_2)$  стремится к точке  $(0, 0)$  по

прямой  $a_{11}z_1 + a_{12}z_2 = 0$ , то функция  $f(z_1, z_2)$  не определена, но вблизи этой прямой она может принимать сколь угодно большие значения. При стремлении точки  $(z_1, z_2)$  к точке  $(0, 0)$  по другим прямым функция  $f(z_1, z_2)$  имеет другие предельные значения. В окрестности точки  $(0, 0)$  функция  $f(z_1, z_2)$  определена. Точка  $(0, 0)$  называется *изолированной особой точкой* для функции  $f(z_1, z_2)$ .

В точке  $(0, 0)$  нарушаются условия теоремы существования и единственности решения для уравнения (15). Отметим, что в остальных точках прямой  $a_{11}z_1 + a_{12}z_2 = 0$  единственность решения имеет место, т. е. через все точки этой прямой, за исключением особой точки  $(0, 0)$ , проходит единственная интегральная кривая уравнения (15), причем касательные к интегральным кривым в точках пересечения с прямой  $a_{11}z_1 + a_{12}z_2 = 0$  параллельны оси  $z_2$ .

Если перейти от системы (10) к уравнению

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = f(x_1, x_2), \quad (16)$$

то особые точки уравнения (16) на плоскости  $x_1, x_2$  совпадут с состояниями равновесия системы уравнений (10). В особой точке нарушаются условия теоремы существования и единственности для уравнения (16). Через особую точку проходит бесчисленное множество интегральных кривых уравнения (16), причем касательные к интегральным кривым в особой точке не имеют определенного направления. Значения тангенсов углов, образованных касательными к интегральным кривым в особой точке и положительным направлением оси  $x_1$  совпадают с предельными значениями функции  $f(x_1, x_2)$  при  $x_1 \rightarrow a_1$  и  $x_2 \rightarrow a_2$ . Но предельное значение функции  $f(x_1, x_2)$  при стремлении точки  $(x_1, x_2)$  к точке  $(a_1, a_2)$  зависит от способа этого стремления, причем множество предельных значений образует всю числовую ось.

Отметим также, что интегральные кривые уравнения (16) состоят из отдельных фазовых траекторий системы уравнений (10).

Для упрощения построения фазовых траекторий системы (14) приведем с помощью замены неизвестных функций  $z = Cy$  матрицу  $A$  к жордановой форме. Получим систему уравнений

$$\frac{dy}{dt} = C^{-1}ACy = Jy, \quad (17)$$

где  $J$  — жорданова форма матрицы  $A$ ,  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ .

Исследуем различные случаи, которые могут иметь место в зависимости от вида матрицы  $J$ .

Случай 1. Характеристические числа матрицы  $A$   $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — действительные, различные и одного знака ( $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ). В этом случае система (17) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_2 y_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Система (18) не изменится при замене  $y_1$  на  $-y_1$ ,  $y_2$  на  $-y_2$  и одновременно  $y_1$  на  $-y_1$  и  $y_2$  на  $-y_2$ . Поэтому фазовые траектории этой системы расположены симметрично относительно осей  $y_1$  и  $y_2$ . Следовательно, можно ограничиться вычерчиванием фазовых траекторий только в первом квадранте плоскости  $y_1, y_2$ . Решив систему (18), получим

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{\lambda_1 t}, \\ y_2 &= c_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $c_1 \geq 0$  и  $c_2 \geq 0$ , так как рассматриваются фазовые траектории в первом квадранте. Если положить  $c_1 = 0$ , а  $c_2 \neq 0$ , то  $y_1(t) = 0$  и  $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ , т. е. получим уравнение полуоси  $Oy_2$ . Если положить  $c_2 = 0$ , а  $c_1 \neq 0$ , то  $y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$ ,  $y_2 = 0$  — уравнение полуоси  $Oy_1$ .

Таким образом, полуоси  $y_1$  и  $y_2$  являются фазовыми траекториями.

Рассмотрим случай, когда оба корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отрицательны, например,  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ; тогда

$$y_2 = c_2 (e^{\lambda_1 t})^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \frac{c_2}{c_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} [y_1(t)]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

или

$$y_2 = c y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \text{где } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1, \quad (20)$$

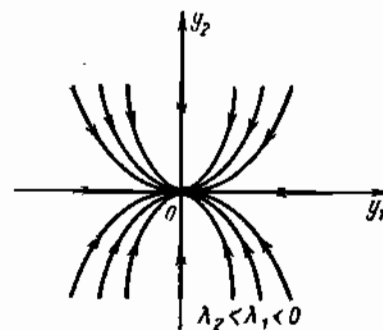


Рис. 18

т. е. фазовые траектории представляют собой параболы порядка  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  (рис. 18).

Характеристические числа матрицы  $A$  отрицательны, поэтому, как следует из (19),  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1 = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2 = 0$ . Изображающая точка стремится к началу координат. В этом случае особая точка  $(0, 0)$  называется особой точкой типа *устойчивый узел*.

Вычислим значение  $\frac{dy_2}{dy_1}$  при  $y_1 \rightarrow 0$ , т. е. вычислим угловые коэффициенты касательных к фазовым траекториям в начале координат



на плоскости  $y_1, y_2$ :

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \frac{dy_2}{dy_1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_2(t) - 0}{y_1(t) - 0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_2}{c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0.$$

Таким образом, фазовые траектории входят в начало координат, касаясь оси  $Oy_1$  (см. рис. 18).

Рассмотрим теперь случай, когда характеристические числа положительны, например  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ . Очевидно, что при этом фазовые траектории по-прежнему удовлетворяют уравнению (20), т. е. являются параболлами (рис. 19). Так как

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{c_2}{c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0,$$

то фазовые траектории в начале координат касаются оси  $Oy_1$ . Как следует из формулы (19),  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \infty$ , т. е. изображающая точка удаляется от начала координат. В этом случае особая точка  $(0, 0)$  называется особой точкой типа *неустойчивый узел*.

Случай 2. Характеристические числа матрицы  $A$  одинаковы, т. е.  $\lambda_1 = \lambda_2$  и матрица  $J$  имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (17) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_1 y_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Решением системы (21) будет:

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Аналогично предыдущему, можно показать, что полуоси  $Oy_1$  и  $Oy_2$  являются фазовыми траекториями. Исключив  $t$  из решений, получим

$$y_2 = \frac{c_2}{c_1} y_1,$$

т. е. уравнение прямых, проходящих через начало координат.

Фазовые траектории симметричны относительно осей координат, поэтому рассмотрим фазовые траектории только в первом квадранте.

Если  $\lambda_1 < 0$ , то изображающая точка при  $t \rightarrow \infty$  приближается к началу координат, если  $\lambda_1 > 0$ , то удаляется от начала координат (рис. 20, а и б).

Особая точка  $(0, 0)$  в этом случае называется *устойчивым декритическим узлом*, если  $\lambda_1 < 0$ , и *неустойчивым*, если  $\lambda_1 > 0$ .

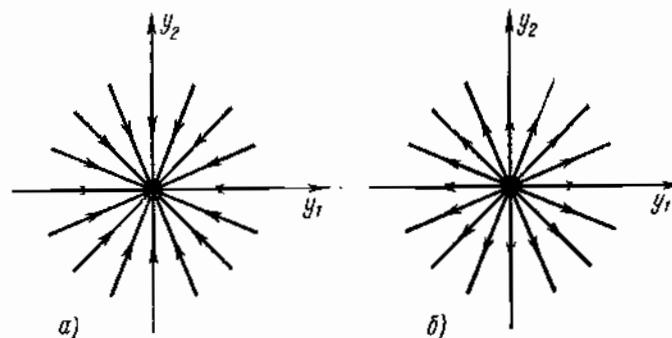


Рис. 20

Случай 3. Характеристические числа матрицы  $A$  одинаковы, т. е.  $\lambda_1 = \lambda_2$ , и матрица  $J$  имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Систему (17) в этом случае можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_1 y_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Решение системы (22) будет

$$\begin{aligned} y_1 &= (c_1 t + c_2) e^{\lambda_1 t}, \\ y_2 &= c_1 e^{\lambda_1 t}. \end{aligned} \quad (23)$$

Система уравнений (22) не изменится при одновременной замене  $y_1$  на  $-y_1$  и  $y_2$  на  $-y_2$ , поэтому фазовые траектории будут симметричны относительно начала координат. Таким образом, достаточно изучить поведение фазовых траекторий только в верхней полуплоскости (при  $c_1 \geq 0$ ) плоскости  $y_1, y_2$ . В нижней полуплоскости фазовые траектории изображаются, исходя из условия симметрии их относительно начала координат.

Положительная и отрицательная полуоси  $Oy_1$  являются фазовыми траекториями. Действительно, положив в (23)  $c_1 = 0$ ,  $c_2 \neq 0$ , получим решение  $y_1 = c_2 e^{\lambda_1 t}$ ,  $y_2 = 0$ . Фазовая траектория, соответствующая этому решению, представляет собой при  $c_2 > 0$  положительную полуось  $Oy_1$ , а при  $c_2 < 0$  — отрицательную полуось  $Oy_1$ . Если положить  $c_2 = 0$ , то из (23) получим решение

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 t e^{\lambda_1 t}, \\ y_2 &= c_1 e^{\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

При  $t=0$  фазовая траектория, соответствующая этому решению, проходит через точку  $(0, c_1)$ . График кривой  $y_1 = c_1 t e^{\lambda_1 t}$  изображен на рис. 21.

Пусть  $\lambda_1 < 0$ . Из формулы (23) следует, что при этом  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$ . Изображающая точка по любой из фазовых траекторий стремится к началу координат. Фазовые траектории при  $\lambda_1 < 0$  изображены на рис. 22, а. Особая точка  $(0, 0)$  называется в этом случае *устойчивым вырожденным узлом*.

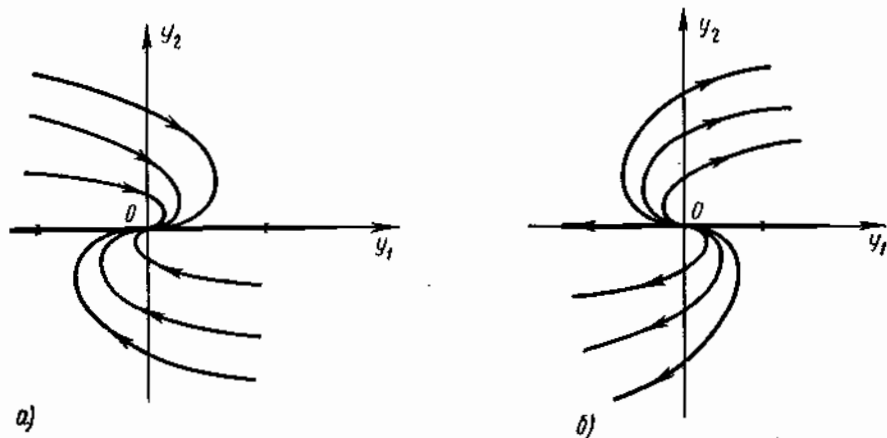


Рис. 22

Если  $\lambda_1 > 0$ , то изображающая точка удаляется от начала координат при  $t \rightarrow \infty$ , и в этом случае особая точка  $(0, 0)$  называется *неустойчивым вырожденным узлом*. Фазовые траектории при  $\lambda_1 > 0$  изображены на рис. 22, б.

Случай 4. Характеристические числа матрицы  $A$   $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  действительные и разных знаков (например,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ). Система (17)

в этом случае запишется в виде (18)

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_2 y_2. \end{aligned}$$

Фазовые траектории системы (18) симметричны относительно осей координат, поэтому рассмотрим фазовые траектории системы только в первом квадранте. Решение системы (18) имеет вид (19)

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t},$$

причем произвольные постоянные  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2 \geq 0$ , так как рассматриваются фазовые траектории только в первом квадранте. Если взять  $c_2 \neq 0$ ,  $c_1 = 0$ , то получим уравнение положительной полуоси  $Oy_1$ . Если взять  $c_2 = 0$ ,  $c_1 \neq 0$ , то получим уравнение положительной полуоси  $Oy_2$ . Следовательно, положительные полуоси  $Oy_1$  и  $Oy_2$  являются фазовыми траекториями. При  $t \rightarrow \infty$   $y_1 \rightarrow 0$ , а  $y_2 \rightarrow \infty$ .

Пусть теперь  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$ , тогда

$$y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} = c_2 (e^{\lambda_1 t})^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = c y_2^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Так как  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$ , то фазовые траектории представляют собой кривые гиперболического типа (рис. 23). Начало координат является особой точкой, называемой *седлом*.

Случай 5. Характеристические числа матрицы  $A$   $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — комплексно-сопряженные,  $\lambda_1 = \alpha + j\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - j\beta$ . При этом матрица  $J$  имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix}.$$

Система (17) запишется следующим образом:

$$\frac{dy_1}{dt} = (\alpha + j\beta) y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = (\alpha - j\beta) y_2; \quad (24)$$

ее решение:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} = c_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + j \sin \beta t), \\ y_2 &= c_2 e^{(\alpha - j\beta)t} = c_2 e^{\alpha t} (\cos \beta t - j \sin \beta t). \end{aligned} \quad (25)$$

Найдем решение системы в действительной области. Для этого рассмотрим решение

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \bar{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2j}. \quad (26)$$

Матрица перехода от решения (25) к решению (26)

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2j} & -\frac{1}{2j} \end{bmatrix}$$

— невырожденная, так как ее определитель не равен нулю. Следовательно, общее решение системы (24) такое:

$$\bar{y}_1 = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t), \quad (27)$$

$$\bar{y}_2 = e^{\alpha t} (c_2 \sin \beta t - c_1 \cos \beta t),$$

где  $\bar{c}_1 = \frac{c_1 + c_2}{2}$ ,  $\bar{c}_2 = \frac{c_1 - c_2}{2j}$  — новые произвольные постоянные. Решение (27) можно переписать в виде

$$\bar{y}_1 = \sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2} e^{\alpha t} \cos(\beta t - \delta), \quad (28)$$

$$\bar{y}_2 = \sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2} e^{\alpha t} \sin(\beta t - \delta),$$

$$\text{где } \cos \delta = \frac{\bar{c}_1}{\sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2}},$$

$$\sin \delta = \frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2}}.$$

Запишем уравнение фазовых траекторий (28) в полярных координатах. Пусть  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты изображающей точки на фазовой траектории. Тогда

$$r(t) = \sqrt{\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2} = \sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2} e^{\alpha t}, \quad (29)$$

$$\text{tg } \varphi(t) = \text{tg}(\beta t - \delta) \text{ или } \varphi(t) = \beta t - \delta + k\pi. \quad (30)$$

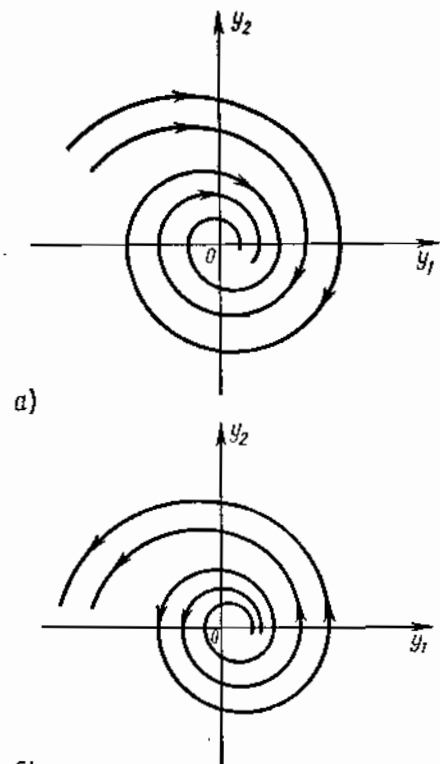


Рис. 24

Из (29) и (30) следует, что

$$r(t) = \sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2} e^{\alpha \frac{\varphi(t) + \delta - k\pi}{\beta}} = c e^{\frac{\alpha}{\beta} \varphi(t)}.$$

Таким образом, в полярных координатах уравнение фазовых траекторий будет

$$r(t) = c e^{\frac{\alpha}{\beta} \varphi(t)}. \quad (31)$$

Уравнение (31) представляет собой уравнение логарифмической спирали. Особая точка  $(0, 0)$  при  $\alpha < 0$  называется особой точкой типа *устойчивый фокус* и при  $\alpha > 0$  — особой точкой типа *неустойчивый фокус*. Фазовые траектории для устойчивого и неустойчивого фокуса изображены на рис. 24, а и б.

Случай 6. Характеристические числа матрицы  $A$   $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  мнимые,  $\lambda_1 = j\beta$ ,  $\lambda_2 = -j\beta$ . В этом случае матрица

$$J = \begin{bmatrix} j\beta & 0 \\ 0 & -j\beta \end{bmatrix}$$

и система уравнений (17) примет вид

$$\frac{dy_1}{dt} = j\beta y_1,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -j\beta y_2. \quad (32)$$

Общее решение системы (32) будет

$$y_1 = c_1 e^{j\beta t} = c_1 (\cos \beta t + j \sin \beta t), \quad (33)$$

$$y_2 = c_2 e^{-j\beta t} = c_2 (\cos \beta t - j \sin \beta t).$$

Перейдя к решениям в действительной области по формуле (26) и записав уравнение траекторий в полярных координатах, получим:

$$r(t) = c. \quad (34)$$

Уравнение (34) является уравнением окружности, поэтому фазовые траектории представляют собой семейство concentрических окружностей (рис. 25). В этом случае особая точка  $(0, 0)$  называется особой точкой типа *центр*.

Динамические системы, имеющие особую точку типа центр, называются *консервативными*.

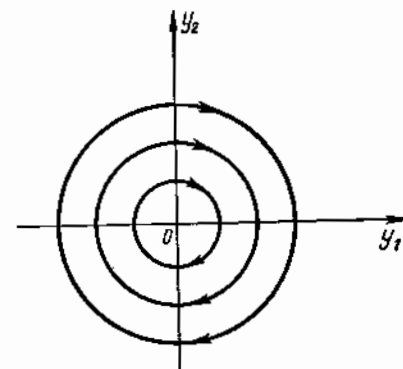


Рис. 25

**Пример 1.** Построить фазовые траектории системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y - 3x, \quad (35)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 3y.$$

Характеристическое уравнение системы (35) есть

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 1 \\ 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0;$$

его корни

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -2.$$

Так как корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  действительны и отрицательны, то начало координат плоскости  $x, y$  является особой точкой типа устойчивый узел. Для того чтобы построить фазовые траектории системы, определим обе прямые, проходящие через начало координат и являющиеся фазовыми траекториями. Уравнение этих прямых  $y = kx$ . Для определения углового коэффициента  $k$  исключим время  $t$  из системы (35), и в полученное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3y}{y - 3x}$$

подставим  $y = kx$ :

$$k = \frac{1 - 3k}{k - 3},$$

откуда

$$k^2 = 1, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1.$$

Следовательно, уравнения прямых  $y = x$  и  $y = -x$ .

Для выяснения картины фазовых траекторий построим изоклины вдоль прямой  $y = \frac{x}{2}$ .

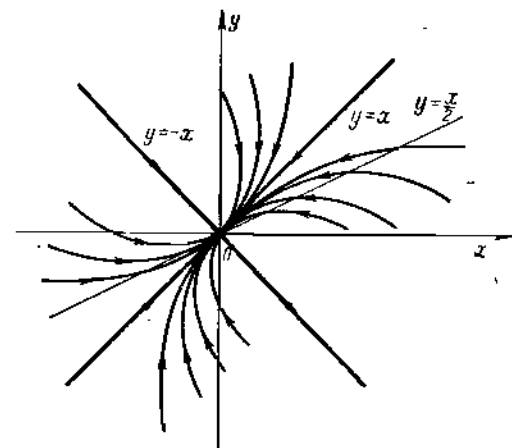


Рис. 26

Тангенс угла наклона изоклины будет  $y = \frac{1}{5}$ . Поле направлений, соответствующее этой изоклине, изображено на рис. 26. На этом же рисунке изображены фазовые траектории системы (35).

**Пример 2.** Построить фазовые траектории системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 3y. \end{aligned} \quad (36)$$

Характеристическое уравнение системы (36) имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0;$$

его корни

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2.$$

Начало координат является особой точкой типа «седло». Найдем прямые  $y = kx$ , проходящие через начало координат и являющиеся фазовыми траекториями. Для определения коэффициента  $k$  исключим время из уравнений (36), и в полученное уравнение  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3y}{4x - 3y}$  подставим  $y = kx$ , тогда

$$k = \frac{2 - 3k}{4 - 3k} \text{ или } 3k^2 - 7k + 2 = 0; \quad k_1 = 2, \quad k_2 = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, прямолинейные фазовые траектории задаются уравнениями

$$y = 2x, \quad y = \frac{x}{3}.$$

Для определения направления движения по фазовым траекториям найдем компоненты вектора фазовой скорости в точке (1, 2):

$$\dot{x} = -2, \quad \dot{y} = -4.$$

По асимптоте  $y = 2x$  изображающая точка стремится к началу координат. Фазовые траектории изображены на рис. 27.

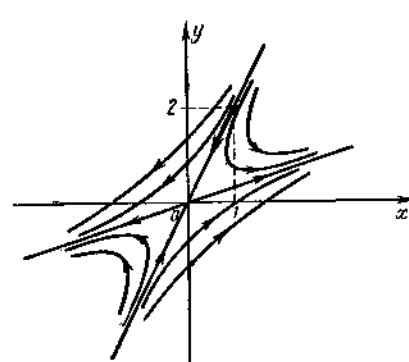


Рис. 27

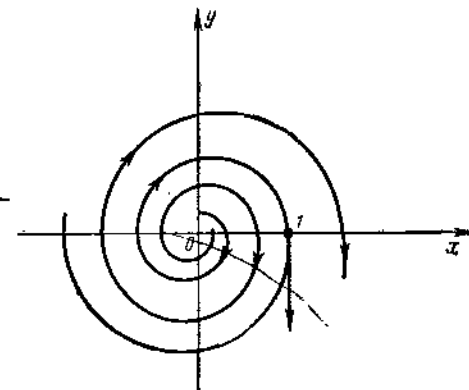


Рис. 28

**Пример 3.** Построить фазовые траектории системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= y - 2x. \end{aligned} \quad (37)$$

Характеристическое уравнение системы (37)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0,$$

его корни  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{4}}j$ , поэтому начало координат является неустойчивым фокусом.

Определим компоненты вектора фазовой скорости в точке (1, 0); имеем  $\dot{x} = 0, \dot{y} = -2$ . Фазовые траектории системы (37) изображены на рис. 28.

В случае линейной системы дифференциальных уравнений характер особой точки определяет движение системы при любых отклонениях от состояния равновесия. Для нелинейной системы уравнений характер особой точки определяет поведение фазовых траекторий лишь в некоторой малой окрестности особой точки, где справедлива система уравнений первого приближения. При рассмотрении поведения фазовых траекторий нелинейных систем на всей фазовой плоскости весьма важную роль играют *особые траектории*. Имеется три типа особых траекторий:

1. Особые точки (состояния равновесия). Различные типы особых точек рассмотрены выше.

2. **Изолированные замкнутые траектории.** Изолированность замкнутой траектории означает, что в достаточно малой ее окрестности нет других замкнутых траекторий. Изолированные замкнутые траектории называются *предельными циклами*.

В случае консервативных систем вся фазовая плоскость заполнена замкнутыми траекториями, но ни одна из них не является изолированной, так как в любой ее окрестности существует другая замкнутая траектория. Замкнутым траекториям на фазовой плоскости соответствуют периодические движения системы. Предельный цикл называется *устойчивым*, если существует такая  $\epsilon$ -окрестность этого цикла, что все фазовые траектории, начинающиеся в  $\epsilon$ -окрестности, асимптотически при  $t \rightarrow +\infty$  приближаются к предельному циклу. Если в любой, сколь угодно малой окрестности предельного цикла существует хотя бы одна фазовая траектория, не приближающаяся к предельному циклу при  $t \rightarrow +\infty$ , то предельный цикл называется *неустойчивым*. Устойчивым предельным циклом в системах автоматического регулирования соответствуют автоколебания. Характерная черта автоколебаний — локальная независимость их параметров от начальных условий.

3. **Сепаратрисы.** Сепаратрисы разделяют фазовую плоскость на области с фазовыми траекториями различных типов. В окрестности особой точки типа «седло» сепаратрисы — являются асимптотами и называются поэтому также «усами седла».

Особые траектории разбивают фазовую плоскость на ряд областей. Характер движения в каждой из этих областей нетрудно определить, если известен характер особых точек и определена устойчивость предельных циклов. Таким образом, можно получить качественную картину всевозможных движений динамической системы.

Для облегчения построения фазовых траекторий в некоторых случаях оказывается, как показано в примере 1, удобным построить семейство изоклин. Изоклины задаются уравнением  $\frac{dy}{dt} = c$  и определяют в каждой точке наклон касательной к фазовой траектории (см. § 9).

**Пример 4.** Построить фазовые траектории системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x(1+x^2) - 2y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y. \end{aligned} \quad (38)$$

Особые точки системы (38) являются решениями алгебраической системы уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + x + 2y &= 0, \\ x + y &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Решениями системы (39) являются

$$\begin{aligned} x_1 = 0, & \quad x_2 = 1, & \quad x_3 = -1, \\ y_1 = 0, & \quad y_2 = -1 & \quad \text{и} & \quad y_3 = 1. \end{aligned}$$

Исследуем характеры полученных особых точек.

1) Особая точка (0, 0). В этом случае система уравнений первого приближения будет

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y. \end{aligned} \quad (40)$$

Характеристическое уравнение для системы (40) имеет вид

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения  $\lambda_{1,2} = \pm j$ .

Таким образом, особая точка [0, 0] является особой точкой типа «центр».

2) Особая точка (1, -1). С помощью замены переменных  $\xi = x - 1$ ,  $\eta = y + 1$  перенесем начало координат в особую точку (1, -1). Тогда система уравнений (38) относительно переменных  $\xi$  и  $\eta$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\xi(\xi^2 + 3\xi + 4) - 2\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi + \eta. \end{aligned} \quad (41)$$

Система первого приближения для системы уравнений (41):

$$\frac{d\xi}{dt} = -4\xi - 2\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi + \eta; \quad (42)$$

ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0,$$

корни которого

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}.$$

Таким образом, особая точка (1, -1) является особой точкой типа «седло».

3) Особая точка (-1, 1). Перенесем начало координат в особую точку, для чего сделаем замену переменных:

$$\xi = x + 1, \quad \eta = y - 1.$$

Система (38) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\xi(\xi^2 - 3\xi + 4) - 2\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi + \eta. \end{aligned} \quad (43)$$

Система первого приближения для системы (43) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -4\xi - 2\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi + \eta. \end{aligned} \quad (44)$$

Система (44) совпадает с системой (42), поэтому особая точка (-1, 1) также представляет собой особую точку типа «седло».

Для построения фазовых траекторий системы (38) определим асимптоты в окрестности особых точек (1, -1) и (-1, 1). Уравнения асимптот  $\eta = k\xi$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ§ 15. МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. Общие замечания. Системы автоматического регулирования разнообразны по своему назначению и конструктивному исполнению. Поведение САР может описываться обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями в частных производных; разностными уравнениями и т. д. Рассмотрим методику составления уравнений для непрерывных САР с сосредоточенными параметрами, поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Любая система автоматического регулирования представляет совокупность отдельных взаимодействующих друг с другом элементов, соединенных между собой связями. Первым этапом при составлении дифференциальных уравнений систем автоматического регулирования является разделение системы на отдельные элементы и составление дифференциальных уравнений этих элементов. Дифференциальные уравнения элементов и уравнения связей между отдельными элементами описывают процессы в системе регулирования, т. е. изменение по времени всех координат системы. Зная уравнения элементов и уравнения связей, можно составить структурную схему САР.

Структурная схема САР характеризует геометрию системы, т. е. показывает, из каких элементов состоит САР и как эти элементы связаны между собой. На структурной схеме указываются пути распространения сигналов в системе. Состояние системы автоматического регулирования, а также каждого входящего в нее элемента характеризуется некоторым числом независимых переменных (обобщенных координат). Этими обобщенными координатами могут быть как электрические величины (ток, напряжение и т. д.), так и механические (скорость, угол поворота, перемещение и т. д.). Обычно, чтобы характеризовать состояние системы или ее элемента, выбирают одну обобщенную координату на входе системы или элемента и одну — на выходе. Будем обозначать входную величину  $g(t)$ , а выходную  $x(t)$ . В ряде случаев такое представление невозможно, так как система или ее элемент могут иметь несколько входных и выходных величин. В многомерных системах можно рассматривать векторные входную и выходную величины с размерностями, совпадающими соответственно с числом входных и выходных величин САР.

2. Составление и линеаризация дифференциальных уравнений элементов систем. При составлении дифференциальных уравнений

Подставив его в уравнение, полученное делением второго уравнения системы (42) на первое:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \eta}{-4\xi - 2\eta}, \quad (45)$$

будем иметь

$$k = \frac{1+k}{-4-2k}, \text{ или } 2k^2 + 5k + 1 = 0,$$

откуда

$$k_1 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}, \quad k_2 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}.$$

Уравнение изоклины, для которой коэффициент наклона  $\frac{dy}{dx} = 1$ ,

$$y = -\frac{x}{3}(x^2 + 2).$$

На рис. 29 изоклина изображена штриховой линией, особые точки  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$  и  $(-1, 1)$  на рисунке обозначены буквами A, B и C.

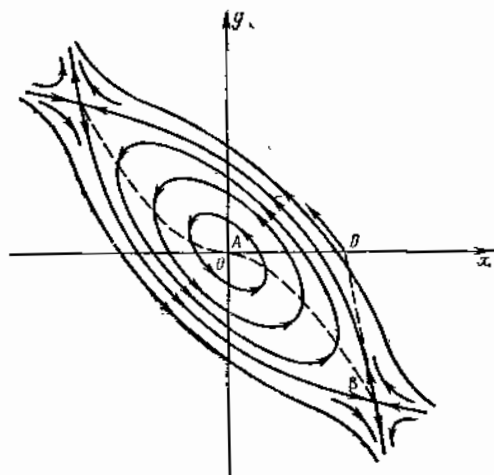


Рис. 29

Для определения направления движения изображающей точки по фазовым траекториям найдем компоненты вектора фазовой скорости в точке D пересечения асимптоты, проходящей через точку B с угловым коэффициентом  $k_1$ , и оси Oх. Уравнение асимптоты  $y + 1 = k_1(x - 1)$ . Точка D имеет координаты

$x = \frac{1+k_1}{k_1}$ ,  $y = 0$ . Компоненты вектора фазовой скорости в точке D:

$$\dot{x} = -\frac{1+k_1}{k_1} \left[ 1 + \left( \frac{1+k_1}{k_1} \right)^2 \right] < 0, \quad \dot{y} = \frac{1+k_1}{k_1} > 0.$$

Фазовые траектории системы (38) изображены на рис. 29.



систем автоматического регулирования основной задачей является получение дифференциальных уравнений отдельных элементов системы. Уравнения отдельных элементов составляются на основе тех физических законов, которые характеризуют поведение элемента. Это могут быть законы механики, электротехники, теплотехники, оптики и т. д.

Уравнения, описывающие поведение элементов, могут быть алгебраическими и интегральными, но чаще всего эти уравнения являются дифференциальными уравнениями. При составлении дифференциальных уравнений элементов САР следует стремиться возможно точнее описать поведение данного элемента. Однако сложность получаемых при этом уравнений затрудняет исследование свойств их решений. Поэтому при составлении уравнений необходимо стремиться к разумному компромиссу между возможно более полным описанием поведения элемента и возможностью обозрения и исследования полученных уравнений.

В установившемся состоянии зависимость выходной величины элемента от входной задается *статической характеристикой элемента*. Как правило, статические характеристики элементов нелинейны. Статические характеристики могут быть получены из дифференциальных уравнений элементов.

Пусть дифференциальное уравнение, описывающее поведение элемента, имеет вид

$$F(x', x, g) = 0. \quad (1)$$

Тогда статическая характеристика этого элемента задается уравнением в неявной форме

$$F(0, 0, x, g) = 0, \quad (2)$$

т. е. для ее получения в уравнении (1) следует положить

$$x = \text{const} \quad \text{и} \quad g = \text{const}.$$

Если динамика элемента описывается линейным дифференциальным уравнением, то этот элемент называется *линейным*, если дифференциальное уравнение нелинейно, то элемент называется *нелинейным*. Из-за нелинейности статических характеристик уравнения элементов САР в большинстве случаев являются нелинейными.

Для упрощения анализа, когда это возможно, приближенно заменяют нелинейные дифференциальные уравнения такими линейными уравнениями, решения которых с достаточной степенью точности совпадают с решениями нелинейных уравнений. Этот процесс замены нелинейного дифференциального уравнения линейным называется *линеаризацией*. Обычно линеаризация нелинейного уравнения производится относительно некоторого установившегося состояния элемента системы.

Если дифференциальное уравнение элемента нелинейно из-за нелинейности его статической характеристики, то линеаризация

уравнения сводится к замене нелинейной характеристики элемента  $x = \varphi(g)$  некоторой линейной функцией  $x = ag + b$ . Аналитически эта замена производится с помощью разложения в ряд Тейлора функции  $x = \varphi(g)$  в окрестности точки, соответствующей установившемуся состоянию и отбрасывания всех членов, содержащих отклонение  $\Delta g$  входной величины элемента в степени выше первой. Геометрически это означает замену кривой  $x = \varphi(g)$  касательной, проведенной к кривой в точке  $(g_0, x_0)$ , соответствующей установившемуся состоянию работы элемента (рис. 30). В других случаях линеаризация производится путем проведения секущей, мало отклоняющейся

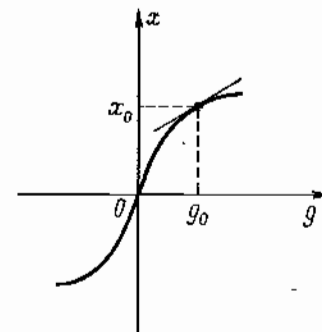


Рис. 30

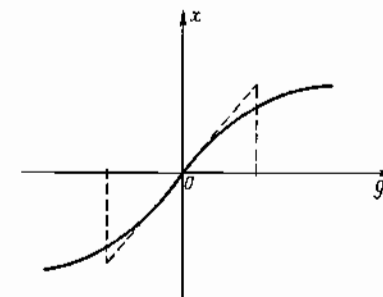


Рис. 31

от функции  $x = \varphi(g)$  в требуемом диапазоне изменения входной величины элемента.

Назовем нелинейные статические характеристики, линеаризуемые в требуемом диапазоне изменения входной величины указанным выше способом, *несущественно нелинейными характеристиками*. Наряду с линеаризуемыми нелинейными характеристиками имеются такие характеристики, которые не поддаются такой линеаризации. К ним относятся, например, характеристики, не разлагаемые в ряд Тейлора в окрестности точки установившегося состояния. Такие характеристики будем называть *существенно нелинейными*.

На рис. 31 изображена статическая характеристика электрического двигателя постоянного тока независимого возбуждения; входной координатой  $g$  здесь служит напряжение  $U_{вх}$ , подаваемое в цепь якоря, а выходной координатой  $x$  является скорость вращения ротора двигателя  $\omega$ . В широком диапазоне изменения  $g$  указанная статическая характеристика должна рассматриваться как нелинейная, однако при малых значениях  $g$  характеристика может быть заменена на линейную.

На рис. 32 изображены статические характеристики некоторых существенно нелинейных элементов САР: а) идеальный релейный элемент, б) релейный элемент с зоной нечувствительности, в) релейный элемент с петлей гистерезиса, г) механическая передача с зазором (люфтом).

Аппроксимация такого рода разрывных характеристик прямой линией с постоянным углом наклона может привести к существенному искажению представлений о процессах, происходящих в системе.

Рассмотрим подробнее процесс линеаризации нелинейного уравнения элемента с помощью ряда Тейлора. Пусть поведение элемента описывается нелинейным дифференциальным уравнением (1). Тогда установившееся состояние элемента характеризуется уравнением (2). Пусть  $g_0$  и  $x_0$  — значения установившегося состояния. Тогда координаты  $g$  и  $x$  можно записать в виде  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $g = g_0 + \Delta g$ , где

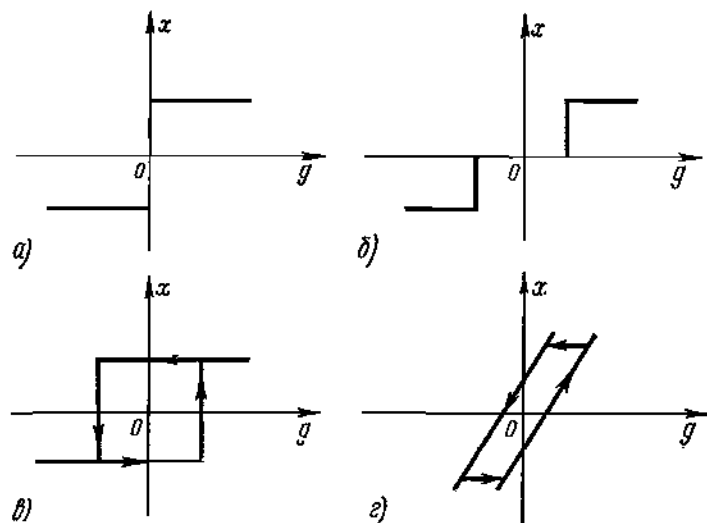


Рис. 32

$\Delta g$  и  $\Delta x$  — отклонения координат  $g$  и  $x$  от установившегося состояния. Уравнение (1) в отклонениях имеет вид

$$F(\Delta x', \Delta x, x_0 + \Delta x, g_0 + \Delta g) = 0. \quad (3)$$

Разложим левую часть уравнения (3) в ряд Тейлора относительно точки установившегося состояния  $(0, 0, x_0, g_0)$ :

$$F(0, 0, x_0, g_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_0 \Delta x' + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0 \Delta g + \dots = 0. \quad (4)$$

В левой части равенства (4) не выписаны члены, содержащие отклонения  $\Delta g$  и  $\Delta x$  и их производные в степени выше первой. Частные производные в левой части уравнения (4) представляют собой некоторые числа, величины которых зависят от вида функции  $F(x', x, g)$  и значений координат  $g_0$  и  $x_0$ .

Считая отклонения  $\Delta g$ ,  $\Delta x$  от установившегося состояния, а также их производные по времени малыми и полагая, что функция  $F(x', x, g)$  достаточно гладкая по всем аргументам в окрестности точки, соответствующей установившемуся состоянию, отбросим в уравнении (4) все члены, которые содержат отклонения  $\Delta g$  и  $\Delta x$ , а также их производные в степени выше первой. Полученное уравнение

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_0 \Delta x' + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0 \Delta g = 0 \quad (5)$$

является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами  $\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_0$ ,  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$ ,  $\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0$  и представляет собой результат линеаризации уравнения (1).

Очевидно, что необходимым условием линеаризации является возможность разложения в ряд Тейлора функции  $F(x', x, g)$  в окрестности точки, соответствующей установившемуся состоянию. Линеаризованное уравнение (5) приближенно заменяет нелинейное уравнение (1) лишь в некоторой малой окрестности точки  $(0, 0, x_0, g_0)$ . Величина этой окрестности зависит от гладкости функции  $F(x', x, g)$  в этой точке, т. е. от величин производных порядка выше первого этой функции в точке  $(0, 0, x_0, g_0)$ . Как правило, с помощью уравнения (5) можно исследовать поведение элемента САР лишь при малых отклонениях входной и выходной координаты от установившегося состояния.

Обычно при записи линеаризованного уравнения в левой части оставляют лишь члены, содержащие отклонение выходной координаты, а все остальные члены переносят в правую часть. С учетом этого уравнение (5) можно переписать в виде

$$a_0 \Delta x' + a_1 \Delta x' + a_2 \Delta x = b_1 \Delta g. \quad (6)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$a_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_0, \quad a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0, \quad a_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0, \quad b_1 = -\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0.$$

Процесс линеаризации уравнения (1) может быть геометрически интерпретирован следующим образом. В пространстве переменных  $x'$ ,  $x$ ,  $g$  уравнение (1) задает некоторую поверхность. Переход от уравнения (1) к линейному уравнению (5) означает замену поверхности некоторой касательной плоскостью, проведенной к поверхности в точке, соответствующей установившемуся состоянию. Естественно, что ошибка при такой замене тем меньше, чем меньше отличаются друг от друга точки поверхности и точки плоскости. Это справедливо лишь в некоторой малой окрестности установившегося состояния.

Возможна также иная линеаризация уравнения (1), которая состоит в замене поверхности, задаваемой уравнением (1), некоторой секущей плоскостью, уравнение которой имеет вид

$$a_1 \Delta x' + a_2 \Delta x' + a_3 \Delta x + a_4 \Delta g = 0. \quad (7)$$

Коэффициенты  $a_i$  выбираются так, чтобы получить хорошее приближение секущей плоскости к поверхности не только в окрестности установившегося состояния, но и в некоторой области возможных режимов работы элемента.

Пользуясь изложенной методикой, получим дифференциальные уравнения некоторых элементов систем автоматического регулирования, которые допускают линеаризацию.

**Пример 1.** Составить дифференциальное уравнение двигателя постоянного тока независимого возбуждения (рис. 33) и произвести его линеаризацию.

В соответствии со вторым законом Ньютона для вращательного движения уравнение моментов на валу двигателя

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_c \quad (8)$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения вала двигателя;  $J$  — момент инерции движущихся частей, приведенный к валу;  $M_d$  — вращающий момент;  $M_c$  — момент сопротивления на валу двигателя.

Пусть  $M_d = M_d(\omega, u)$ , а  $M_c = M_c(\omega, t)$ , т. е. вращающий момент

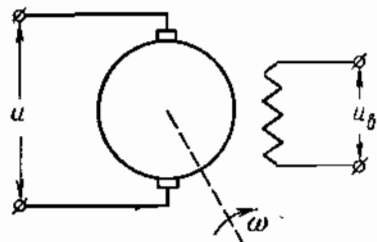


Рис. 33

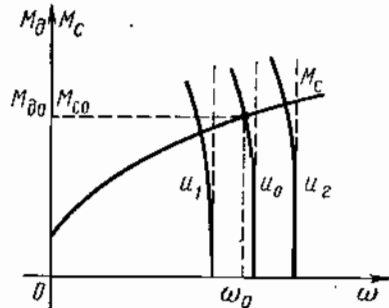


Рис. 34

$M_d$  зависит от угловой скорости  $\omega$  и напряжения  $u$ , приложенного к якору, а момент сопротивления  $M_c$  зависит от угловой скорости  $\omega$  и времени  $t$ . Эти зависимости обычно задаются аналитически или в виде графиков и определяются типом двигателя, характером нагрузки и т. д. Типичные механические характеристики электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения, показывающие зависимость  $M_d$  от  $\omega$ , приведены на рис. 34. На этом же рисунке показана характеристика  $M_c$ . Вращающий момент  $M_d$  и момент сопротивления  $M_c$  являются нелинейными функциями скорости вращения вала  $\omega$ . Поэтому уравнение (8) будет нелинейным дифференциальным уравнением.

Для линеаризации уравнения (8) перейдем к отклонениям от установившегося режима. Параметры установившегося состояния находятся из графиков, приведенных на рис. 34, если положить

$$M_{d0} = M_{c0} \quad (9)$$

Пусть эти параметры имеют значения  $\omega_0, u_0$ .

Разложим нелинейные функции  $M_d = M_d(\omega, u)$  и  $M_c = M_c(\omega, t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(\omega_0, u_0)$ :

$$M_d = M_{d0} + \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0 \Delta\omega + \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)_0 \Delta u + R_1,$$

$$M_c = M_{c0} + \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 \Delta\omega + \Delta M_c(t) + R_2,$$

где  $M_{d0} = M_d(\omega_0, u_0)$ ;  $\Delta M_c(t)$  учитывает зависимость момента сопротивления  $M_c$  от времени  $t$ ;  $R_1$  и  $R_2$  — содержат члены порядка малости выше первого относительно приращений  $\Delta\omega$  и  $\Delta u$ .

Подставим полученные выражения в уравнение (8) и отбросим члены, содержащие отклонение в степени выше первой:

$$J \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0 \Delta\omega + \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)_0 \Delta u - \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 \Delta\omega - \Delta M_c(t).$$

Теперь, перенеся в левую часть равенства члены, содержащие  $\Delta\omega$ , получим линеаризованное дифференциальное уравнение двигателя в отклонениях от состояния равновесия, выраженных в абсолютных единицах:

$$J \frac{d\omega}{dt} + \left[ \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 \right] \Delta\omega = -\Delta M_c(t) + \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)_0 \Delta u. \quad (10)$$

Все члены этого уравнения имеют размерность момента. При исследовании систем автоматического регулирования желательно получить уравнение в относительных единицах с безразмерными коэффициентами, или с коэффициентами, имеющими размерность времени в степени, равной порядку производной, при которой стоит коэффициент.

Для приведения уравнения (10) к уравнению в относительных единицах с безразмерными коэффициентами, разделим вначале обе части уравнения (10) на номинальное значение момента  $M_H$ :

$$J \frac{d\omega}{M_H dt} + \frac{1}{M_H} \left[ \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 \right] \Delta\omega = -\frac{1}{M_H} \Delta M_c(t) + \frac{1}{M_H} \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)_0 \Delta u.$$

Перейдем в полученном уравнении к относительным единицам. Выберем некоторые постоянные значения для всех переменных, входящих в уравнение. Для угловой скорости примем ее номинальное значение  $\omega_H$ , для управляющего напряжения  $u$  — максимальное значение  $u_{\max}$ . Теперь умножим и разделим каждый член уравнения на соответствующую постоянную величину:

$$\frac{J\omega_H}{M_H\omega_H} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega_H}{M_H} \left[ \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 \right] \frac{\Delta\omega}{\omega_H} = -\frac{1}{M_H} \Delta M_c(t) + \frac{u_{\max}}{M_H} \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)_0 \frac{\Delta u}{u_{\max}}.$$

Вводя обозначения

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_H} = x, \quad \frac{\Delta u}{u_{\max}} = g, \quad \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0 \frac{\omega_H}{M_H} = \alpha_c, \quad \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 \frac{\omega_H}{M_H} = \alpha_x,$$

$$\frac{\Delta M_c(t)}{M_H} = f(t), \quad \frac{J\omega_H}{M_H} = T, \quad \frac{u_{\max}}{M_H} \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)_0 = k_y$$

и учитывая, что

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(\Delta\omega)}{dt}, \quad \frac{\partial M}{\partial \omega} = \frac{\partial(\Delta M)}{\partial(\Delta\omega)},$$

найдем:

$$T \frac{dx}{dt} + (\alpha_c - \alpha_x) x = -f(t) + k_y g(t).$$

Обозначив  $\alpha_c - \alpha_x = k_c$ , окончательно получим

$$T \frac{dx}{dt} + k_c x = -f(t) + k_y g(t). \quad (11)$$

В уравнении (11) функция  $f(t)$  характеризует возмущающее воздействие, приложенное к двигателю,  $g(t)$  — управляющее воздействие, а  $x$  представляет собой выходную координату. Коэффициент  $T$  имеет размерность времени (сек)

и называется *постоянной времени* двигателя. Отношение  $\frac{k_y}{k_c}$  характеризует

зависимость между изменением выходной координаты  $x$  и управляющего воздействия  $g(t)$  в установившемся режиме и называется *коэффициентом усиления*.

**Пример 2.** Составить дифференциальное уравнение электромашинного усилителя, работающего на исполнительный двигатель постоянного тока с независимым возбуждением. Принципиальная схема включения электромашинного усилителя (ЭМУ) и двигателя постоянного тока с независимым возбуждением приведена на рис. 35; на этой схеме приняты обозначения: ПД — приводной двигатель электромашинного усилителя, ИД — исполнительный двигатель, ОВ — обмотка возбуждения исполнительного двигателя, КО — компенсационная обмотка ЭМУ,  $R_{ш}$  — реостат, шунтирующий компенсационную обмотку, ОУ — обмотка управления.

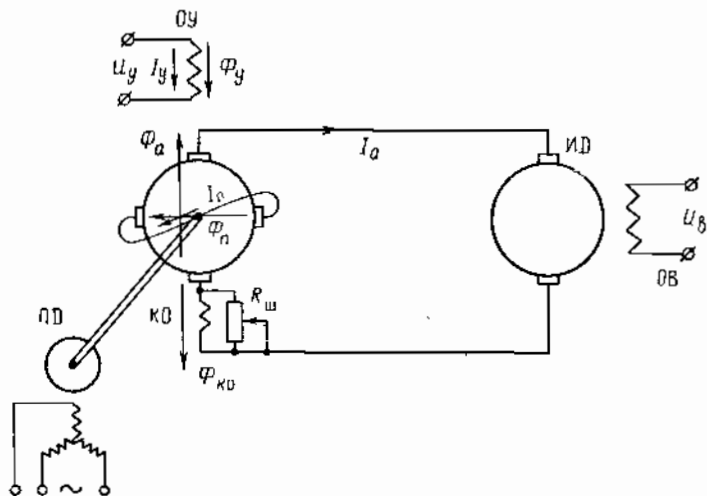


Рис. 35

Электромашинный усилитель представляет собой электрическую машину постоянного тока. В пазах ЭМУ расположены обмотка управления и компенсационная обмотка. Ротор ЭМУ приводится во вращение приводным двигателем. В качестве приводного двигателя, как правило, используется асинхронный трехфазный двигатель. В ЭМУ нераздельного исполнения приводной двигатель собран в одном корпусе с генератором. На коллекторе ротора ЭМУ установлены две пары щеток — на продольной оси и на поперечной. Щетки на поперечной оси замкнуты накоротко.

При подаче напряжения  $u_y$  на обмотку управления ЭМУ возникает магнитный поток  $\Phi_y$  обмотки управления. Магнитный поток невелик и пропорционален току  $I_y$  в обмотке управления. Так как ротор ЭМУ вращается с постоянной скоростью, то в его обмотке наводится под влиянием потока управления э. д. с.  $E_1$ , которая также невелика по величине. Но поперечные щетки ЭМУ замкнуты накоротко, и поэтому ток в поперечной цепи  $I_n$ , несмотря на незначительную величину э. д. с., будет значительным. Этот ток вызывает большой магнитный поток  $\Phi_n$ , направленный по поперечной оси. Поток  $\Phi_n$  наводит в обмотке ротора электродвижущую силу  $E_2$ , которая снимается щетками, расположенными по продольной оси. Поток  $\Phi_{\omega}$  создаваемый током нагрузки  $I_a$ , направлен против потока  $\Phi_y$  обмотки управления. Для компенсации этого потока в продольной цепи расположена компенсационная обмотка. Величина  $\Phi_{к0}$ , а следовательно, и степень компенсации регулируется с помощью реостата  $R_{ш}$ .

Зависимость э. д. с. холостого хода  $E_{x,x}$  от тока в обмотке управления  $I_y$

$$E_{x,x} = f(I_y)$$

называется *характеристикой холостого хода* ЭМУ.

Характеристика холостого хода имеет вид, изображенный на рис. 36. Эта характеристика холостого хода ЭМУ может быть принята линейной до тех значений  $I_y$ , при которых наступает насыщение магнитной системы усилителя.

Напишем дифференциальное уравнение электромашинного усилителя при его работе совместно с двигателем постоянного тока независимого возбуждения. Для простоты положим, что ЭМУ работает в режиме полной компенсации. Уравнения напряжений для управляющей, поперечной и продольной цепей будут соответственно:

$$u_y = I_y r_y + L_y \frac{dI_y}{dt}, \quad (12)$$

$$E_1 = I_n r_n + L_n \frac{dI_n}{dt}, \quad (13)$$

$$E_2 = I_a r_a + L_a \frac{dI_a}{dt} + k_{\omega} \omega. \quad (14)$$

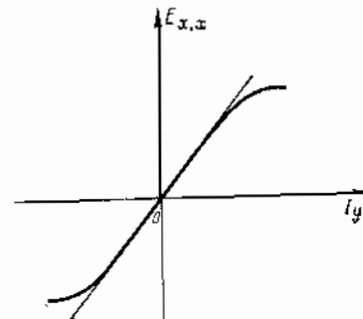


Рис. 36

К этим уравнениям следует добавить уравнение для моментов на валу двигателя

$$M_d = M_c + J \frac{d\omega}{dt}, \quad (15)$$

причем

$$M_d = k_m I_a.$$

В соотношениях (12) — (14) приняты обозначения:  $I_y$ ,  $I_n$ ,  $I_a$ ,  $r_y$ ,  $r_n$ ,  $r_a$ ,  $L_y$ ,  $L_n$ ,  $L_a$  — токи, сопротивления и индуктивности соответствующих цепи управления, поперечной цепи и цепи якорей ЭМУ—ИД;  $\omega$  — скорость вращения вала двигателя;  $J$  — момент инерции вращающихся частей, приведенный к валу двигателя;  $k_{\omega}$  — коэффициент пропорциональности между противо-э. д. с. двигателя и скоростью вращения его вала;  $k_m$  — коэффициент пропорциональности между вращающим моментом двигателя и током в якорной цепи.

Перейдем к уравнениям в отклонениях относительно установившегося состояния. Положив в уравнениях (12) — (15) производные равными нулю, получим систему уравнений, описывающих установившееся состояние агрегата ЭМУ—ИД:

$$\begin{aligned} u_{y0} &= I_{y0} r_y, & E_{20} &= f_2(I_{n0}), \\ E_{10} &= I_{n0} r_n, & M_{d0} &= M_{c0}, \\ E_{20} &= I_{a0} r_a + k_{\omega} \omega_0, & M_{d0} &= k_m I_{a0}, \\ E_{10} &= f_1(I_{y0}), \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть  $u_{y0}$ ,  $u_{y0}$ ,  $E_{10}$ ,  $E_{20}$ ,  $I_{a0}$ ,  $\omega_0$ ,  $M_{c0}$ ,  $M_{d0}$  — некоторое решение системы (16). Полагая, что

$$\begin{aligned} u_y &= u_{y0} + \Delta u_y, & \omega &= \omega_0 + \Delta \omega, \\ I_y &= I_{y0} + \Delta I_y, & M_d &= M_{d0} + \Delta M_d, \\ I_n &= I_{n0} + \Delta I_n, & M_c &= M_{c0} + \Delta M_c, \\ I_a &= I_{a0} + \Delta I_a, \end{aligned}$$

перейдем от уравнений (12) – (15) к уравнениям в отклонениях от установившегося состояния:

$$\begin{aligned} \Delta u_y &= \Delta I_y r_y + L_y \frac{d(\Delta I_y)}{dt}, \\ E_1 - E_{10} &= \Delta I_n r_n + L_n \frac{d(\Delta I_n)}{dt}, \\ E_2 - E_{20} &= \Delta I_a r_a + L_a \frac{d(\Delta I_a)}{dt} + k_\omega \Delta \omega, \\ \Delta M_x &= \Delta M_c + J \frac{d(\Delta \omega)}{dt}, \\ \Delta M_2 &= k_m \Delta I_a. \end{aligned} \quad (17)$$

Для линеаризации уравнений (17) разложим функции

$$E_1 = f_1(I_y) \text{ и } E_2 = f_2(I_n)$$

в ряд Тейлора соответственно в точках  $I_{y0}$  и  $I_{n0}$ .

Графики функций  $f_1(I_y)$  и  $f_2(I_n)$  имеют вид, аналогичный изображенному на рис. 36. Линеаризируя эти функции, будем иметь

$$\begin{aligned} f_1(I_y) &= E_{10} + k_1 \Delta I_y, \\ f_2(I_n) &= E_{20} + k_2 \Delta I_n, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  – угловые коэффициенты касательных, проведенных к кривым  $E_1$  и  $E_2$  в начале координат.

Учитывая равенства (18) и исключая из системы уравнений (17) промежуточные переменные  $\Delta I_y$ ,  $\Delta I_n$ ,  $\Delta M_x$ , получим линеаризованное дифференциальное уравнение ЭМУ–ИД в отклонениях от установившегося состояния:

$$\begin{aligned} T_m T_a T_y T_n \frac{d^4 \Delta \omega}{dt^4} + (T_m T_a T_y + T_m T_a T_n + T_m T_y T_n) \frac{d^3 \Delta \omega}{dt^3} + \\ + (T_m T_a + T_m T_y + T_m T_n + T_y T_n) \frac{d^2 \Delta \omega}{dt^2} + (T_m + T_y + T_n) \frac{d \Delta \omega}{dt} + \Delta \omega = \\ = k_y \Delta u_y - k_f \left[ T_y T_a T_n \frac{d^2 \Delta M_c}{dt^2} + (T_y T_a + T_y T_n + T_a T_n) \frac{d \Delta M_c}{dt} + \right. \\ \left. + (T_y + T_a + T_n) \Delta M_c \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

В уравнении приняты обозначения:  $T_m = \frac{r_a J}{k_m k_\omega}$  – механическая постоянная времени двигателя;  $T_y = \frac{L_y}{r_y}$  – постоянная времени цепи управления;  $T_n = \frac{L_n}{r_n}$  – постоянная времени поперечной цепи;  $T_a = \frac{L_a}{r_a}$  – постоянная времени якорных цепей ЭМУ–ИД;  $k_y = \frac{k_1 k_2}{r_y r_n k_\omega}$  – передаточный коэффициент (коэффициент усиления) ЭМУ по управляющему воздействию;  $k_f = \frac{r_a}{k_m k_\omega}$  – передаточный коэффициент ЭМУ по возмущающему воздействию.

Отметим, что линейное уравнение (19) справедливо не только при малых отклонениях от установившегося состояния, а и в достаточно широком диапазоне изменения входной координаты  $u_y$ , соответствующем работе ЭМУ без насыщения магнитной системы. Это следует из способа линеаризации характеристик

$$E_1 = f_1(I_y) \text{ и } E_2 = f_2(I_n).$$

Касательные, которыми при линеаризации были заменены нелинейные характеристики  $E_1 = f_1(I_y)$  и  $E_2 = f_2(I_n)$ , мало отличаются от этих характеристик в достаточно широком диапазоне изменения напряжения  $\Delta u_y$  (см. рис. 36). Постоянная времени поперечной цепи мала по сравнению с другими постоянными времени и ею можно пренебречь. В этом случае уравнение (19) имеет вид

$$\begin{aligned} T_m T_a T_y \frac{d^3 \Delta \omega}{dt^3} + (T_m T_a + T_m T_y) \frac{d^2 \Delta \omega}{dt^2} + (T_m + T_y) \frac{d \Delta \omega}{dt} + \Delta \omega = \\ = k_y u_y - k_f \left[ T_y T_a \frac{d^2 \Delta M_c}{dt^2} + (T_y + T_a) \frac{d \Delta M_c}{dt} + \Delta M_c \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

**Пример 3.** Составить дифференциальное уравнение асинхронного двухфазного двигателя. Линеаризацию дифференциального уравнения выполнить с помощью замены нелинейной механической характеристики двигателя секущей.

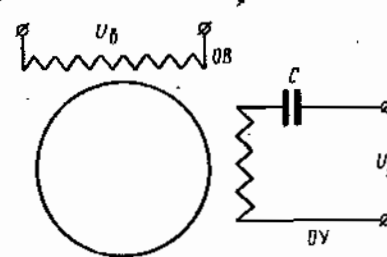


Рис. 37

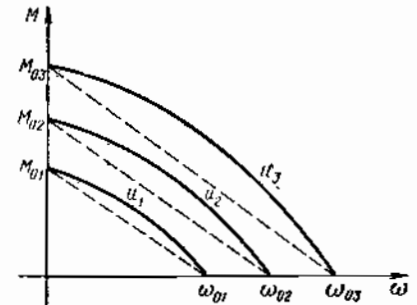


Рис. 38

Асинхронный двухфазный двигатель представляет собой электрическую машину переменного тока и широко применяется в системах автоматического регулирования. В пазах статора двигателя располагаются две обмотки таким образом, что их магнитные оси взаимно перпендикулярны. Одна обмотка подключается к источнику переменного тока с постоянным напряжением и называется обмоткой возбуждения (ОВ), другая обмотка подключается к источнику переменного тока с изменяющимся напряжением и называется обмоткой управления (ОУ). Обычно обмотка управления подключается к выходу электронного или магнитного усилителя. Ротор двигателя представляет собой полый тонкостенный металлический стакан. Схема асинхронного двухфазного двигателя изображена на рис. 37. Емкость  $C$  служит для создания сдвига по фазе в  $90^\circ$  между напряжением в обмотке возбуждения  $u_a$  и обмотке управления  $u_y$ . Этот сдвиг фазы необходим для создания вращающегося магнитного поля.

Уравнение моментов на валу асинхронного двухфазного двигателя такое:

$$M_x = M_c + J \frac{d\omega}{dt}, \quad (21)$$

где  $M_x = M_x(u_y, \omega)$  – вращающий момент на валу двигателя;  $M_c$  – момент сопротивления;  $J$  – момент инерции вращающихся частей, приведенный к валу двигателя.

Механические характеристики двигателя, приведенные на рис. 38, являются нелинейными. Линеаризацию характеристик произведем путем замены их параллельными секущими; уравнение секущих

$$M_x = M_{x0} - k_1 \omega, \quad (22)$$

где  $k_1$  – коэффициент, зависящий от вида механической характеристики. Положим, что

$$M_{x0} = k_2 u_y, \quad (23)$$

и подставим в формулу (20) выражения (22) и (23); получим

$$J \frac{d\omega}{dt} + k_1 \omega = k_2 u_y - M_c$$

или

$$T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_y u_y - k_f M_c, \quad (24)$$

где

$$k_y = \frac{k_2}{k_1}, \quad k_f = \frac{1}{k_1}, \quad T_m = \frac{J}{k_1}.$$

Уравнение (24) представляет собой линейризованное уравнение асинхронного двухфазного двигателя.

В том случае, когда элемент системы автоматического регулирования представляет собой динамическую систему с конечным числом степеней свободы, которая обладает запасом кинетической энергии, его движение может быть описано системой дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода.

Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — обобщенные координаты динамической системы. Обозначим через  $T$  кинетическую энергию системы. Тогда система дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода запишется в виде \*)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (25)$$

где  $Q_i$  — обобщенные силы.

В общем случае обобщенные силы

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} + f_i(t), \quad (26)$$

где  $\Pi$  — потенциальная энергия динамической системы;  $R$  — функция рассеяния энергии;  $f_i(t)$  — внешние силы, приложенные к динамической системе.

Кинетическая энергия  $T$  представляет собой квадратичную положительно определенную форму от обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad (27)$$

Потенциальная энергия  $\Pi$  является некоторой функцией обобщенных координат системы. Функция рассеяния или диссипативная функция  $R$  характеризует собой скорость рассеяния энергии в системе и зависит от обобщенных скоростей. Обобщенные диссипативные силы

$$Q_{R_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} \quad (28)$$

можно определить по формуле

$$Q_{R_i} = -k_i f(x_i) \frac{|x_i|}{x_i}, \quad (29)$$

\*) См., например: Добронравов В. В. и др. Курс теоретической механики. «Высшая школа», 1966, стр. 433.

где функция  $f(x_i) = 1$  — в случае сухого трения и  $f(x_i) = x_i$  — в случае вязкого трения.

Из формулы (29) следует, что диссипативная сила направлена противоположно вектору скорости  $\dot{x}_i$  и равна либо постоянной величине в случае сухого трения, либо пропорциональна скорости  $\dot{x}_i$  в случае вязкого трения. Диссипативная функция в соответствии с формулами (28) и (29) принимает вид

$$R = \sum_{i=1}^n k_i \int_0^{x_i} f_i(u) du. \quad (30)$$

Уравнения Лагранжа второго рода в общем случае представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Линеаризация этих уравнений может быть произведена с помощью разложения в ряд Тейлора.

**Пример 4.** Вывести дифференциальное уравнение центробежного маятника, который применяется в качестве чувствительного элемента в некоторых системах автоматического регулирования. Схема маятника изображена на рис. 39. Входной величиной является угловая скорость  $\omega$ , а выходной величиной — перемещение  $x$  платформы. При увеличении скорости вращения шары под действием центробежной силы расходятся и перемещают платформу. На платформу воздействуют также сила упругости пружины, силы демпфирования и силы инерции.

Введем обозначения:  $c$  — коэффициент жесткости пружины;  $k$  — коэффициент вязкого трения;  $m$  — масса шара;  $M$  — масса частей, участвующих в поступательном движении вдоль оси  $Ox$ ;  $\omega$  — угловая скорость вала;  $f_0$  — сила предварительного поджатия пружины.

Для составления дифференциального уравнения центробежного маятника используем уравнение Лагранжа второго рода (25). В качестве обобщенной координаты  $x_i$  выберем выходную координату — перемещение платформы  $x$ . Найдем выражение для кинетической энергии  $T$ , потенциальной энергии  $\Pi$  и диссипативной функции  $R$  центробежного маятника. Из рис. 39 видно, что

$$\left. \begin{aligned} \rho &= r + l \sin \alpha, \\ x &= 2a(1 - \cos \alpha). \end{aligned} \right\}$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

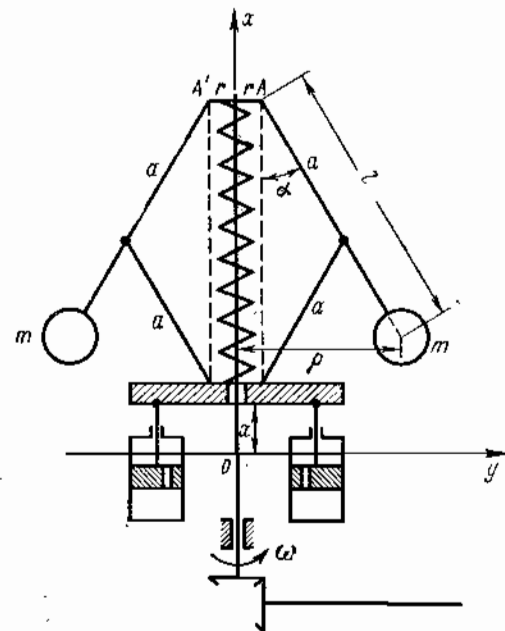


Рис. 39



где  $T_1$  — кинетическая энергия шаров во вращательном движении вокруг оси  $Ox$ ;  $T_2$  — кинетическая энергия шаров во вращательном движении вокруг точек  $A$  и  $A'$ ;  $T$  — кинетическая энергия масс в поступательном движении вдоль оси  $Ox$ . Имеем:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2m\omega^2 r^2}{2} = m\omega^2 (r + l \sin \alpha)^2 = m\omega^2 \left( r + \frac{l}{2a} \sqrt{x(4a-x)} \right)^2, \\ T_2 &= \frac{2ml^2 (\alpha')^2}{2} = \frac{ml^2 (x')^2}{x(4a-x)}, \\ T &= \frac{M(x')^2}{2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Потенциальная энергия маятника

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

где  $\Pi_1$  — потенциальная энергия масс, движущихся параллельно оси  $Ox$ ;  $\Pi_2$  — потенциальная энергия шаров;  $\Pi_3$  — потенциальная энергия пружины. Для рассматриваемого случая имеем:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= Mgx, \\ \Pi_2 &= 2mgl(1 - \cos \alpha) = \frac{mglx}{a}, \\ \Pi_3 &= f_0 x + \frac{cx^2}{2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Найдем обобщенную диссипативную силу  $Q_R$ . Благодаря наличию демфера сила сухого трения мала по сравнению с силой вязкого трения и ею можно пренебречь. Согласно формуле (29) будем иметь

$$Q_R = \frac{\partial R}{\partial x'} = -kx'. \quad (33)$$

Вычислим значения отдельных слагаемых, входящих в уравнение Лагранжа (25):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x'} &= \frac{2ml^2 x'}{x(4a-x)} + Mx', \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{m\omega^2 l(2a-x)}{a\sqrt{x(4a-x)}} \left[ r + \frac{l}{2a} \sqrt{x(4a-x)} \right] - \frac{2ml(x')^2(2a-x)}{x^2(4a-x)^2}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial x'} \right) &= Mx'' - \frac{2ml^2(x')^2(4a-2x)}{x^2(4a-x)^2} + \frac{2ml^2 x''}{x(4a-x)}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= Mg + \frac{mgl}{a} + f_0 + cx. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в уравнение Лагранжа второго рода (25), тогда

$$\begin{aligned} Mx'' - \frac{2ml^2(x')^2(4a-2x)}{x^2(4a-x)^2} + \frac{2ml^2 x''}{x(4a-x)} - \frac{m\omega^2 l(2a-x)}{a\sqrt{x(4a-x)}} \times \\ \times \left[ r + \frac{l}{2a} \sqrt{x(4a-x)} \right] + \frac{2ml^2(x')^2(2a-x)}{x^2(4a-x)^2} = \\ = -Mg - \frac{mgl}{a} - f_0 - cx - kx', \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x'' \left[ M + \frac{2ml^2}{x(4a-x)} \right] - \frac{2ml^2(2a-x)}{x^2(4a-x)^2} (x')^2 + kx' + cx - \\ - \frac{ml(2a-x)}{a\sqrt{x(4a-x)}} \left[ r + \frac{l}{2a} \sqrt{x(4a-x)} \right] \omega^2 = -Mg - \frac{mgl}{a} - f_0. \end{aligned} \quad (34)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= M + \frac{2ml^2}{x(4a-x)}, \\ f_2(x) &= \frac{2ml^2(2a-x)}{x^2(4a-x)^2}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$f_3(x, \omega) = \frac{ml(2a-x)}{a\sqrt{x(4a-x)}} \left[ r + \frac{l}{2a} \sqrt{x(4a-x)} \right] \omega^2;$$

при  $r=0$

$$f_3(x, \omega) = \frac{ml^2(2a-x)}{2a^2} \omega^2. \quad (36)$$

С учетом принятых обозначений уравнение центробежного маятника запишется в виде

$$f_1(x) x'' - f_2(x) (x')^2 + kx' + cx - f_3(x, \omega) = -f_0 - Mg - \frac{mgl}{a}. \quad (37)$$

Уравнение (37) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение. Состояние равновесия  $(x_0, \omega_0)$  является решением уравнения

$$cx_0 - f_3(x_0, \omega_0) = -f_0 - Mg - \frac{mgl}{a}. \quad (38)$$

Рассмотрим малые колебания маятника относительно состояния равновесия  $(x_0, \omega_0)$ .

Положим

$$x = x_0 + \Delta x, \quad \omega = \omega_0 + \Delta \omega. \quad (39)$$

Разложим функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x, \omega)$  в ряд Тейлора в окрестности состояния равновесия  $(x_0, \omega_0)$ :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(x_0) + \frac{df_1}{dx} \Big|_0 \Delta x + F_1(\Delta x), \\ f_2(x) &= f_2(x_0) + \frac{df_2}{dx} \Big|_0 \Delta x + F_2(\Delta x), \\ f_3(x, \omega) &= f_3(x_0, \omega_0) + \frac{\partial f_3}{\partial x} \Big|_0 \Delta x + \frac{\partial f_3}{\partial \omega} \Big|_0 \Delta \omega + F_3(\Delta x, \Delta \omega), \end{aligned} \quad (40)$$

где функции  $F_1(\Delta x)$ ,  $F_2(\Delta x)$ ,  $F_3(\Delta x, \Delta \omega)$  имеют более высокий порядок малости по сравнению с  $\Delta x$  и  $\Delta \omega$ . Учитывая, что  $x' = \Delta x'$  и  $x'' = \Delta x''$  и принимая во внимание выражения (38), (39), (40), уравнение (37) можно переписать в виде

$$f_1(x_0) \Delta x'' + k\Delta x' + \left( c - \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_0 \right) \Delta x = \frac{\partial f_3}{\partial \omega} \Big|_0 \Delta \omega + F_4(\Delta x, \Delta x', \Delta x'', \Delta \omega),$$

где функция

$$\begin{aligned} F_4(\Delta x, \Delta x', \Delta x'', \Delta \omega) &= F_2(\Delta x, \Delta \omega) + F_3(\Delta x) (\Delta x')^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_0 \Delta x (\Delta x')^2 + \\ &+ f_3(x_0) (\Delta x')^2 - F_1(\Delta x) \Delta x'' - \frac{df_1}{dx} \Big|_0 \Delta x \Delta x'' \end{aligned}$$

имеет более высокий порядок малости по сравнению с  $\Delta x$ ,  $\Delta x'$ ,  $\Delta x''$ ,  $\Delta \omega$ . Отбрасывая функцию  $F_4(\Delta x, \Delta x', \Delta x'', \Delta \omega)$ , получим линеаризованное уравнение колебаний маятника относительно состояния равновесия  $(x_0, \omega_0)$ :

$$f_1(x_0) \Delta x'' + k\Delta x' + \left( c - \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_0 \right) \Delta x = \frac{\partial f_3}{\partial \omega} \Big|_0 \Delta \omega, \quad (41)$$

где

$$f_1(x_0) = M + \frac{2ml^2}{x_0(4a-x_0)},$$

$$\left. \frac{df_2}{dx} \right|_0 = -\frac{ml\omega_0^2}{a} \left[ \frac{4a^2r}{(x_0(4a-x_0))^2} + \frac{l}{2a} \right],$$

$$\left. \frac{df_3}{d\omega} \right|_0 = \frac{2ml(2a-x_0)}{a\sqrt{x_0(4a-x_0)}} \left[ r + \frac{l}{2a} \sqrt{x_0(4a-x_0)} \right] \omega_0.$$
(42)

**3. Операторы элементов систем автоматического регулирования. Передаточные функции.** Операторный способ записи дифференциальных уравнений (см. § 12) широко используется в теории автоматического регулирования. В операторной форме линейное дифференциальное уравнение (6) запишется в виде

$$D(p) \Delta x = M(p) \Delta g, \quad (43)$$

где  $D(p) = a_0p^2 + a_1p + a_2$ ;  $M(p) = b_1$ . В общем случае  $D(p)$  и  $M(p)$  являются некоторыми многочленами от  $p$  с действительными коэффициентами.

Назовем многочлен  $D(p)$  в уравнении (43) *собственным оператором элемента*, а многочлен  $M(p)$  — *входным оператором*. Название «собственный оператор» обусловлено тем, что многочлен  $D(p)$  характеризует собственное движение элемента, т. е. его движение при отсутствии внешних возмущающих и управляющих воздействий.

Введем понятие передаточной функции элемента САР. Отношение входного оператора  $M(p)$  к собственному оператору  $D(p)$  назовем *передаточной функцией*  $W(p)$  элемента САР, описываемого линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$W(p) = \frac{M(p)}{D(p)}. \quad (44)$$

Совершенно аналогично можно ввести понятие входного и собственного оператора, а также передаточной функции для систем автоматического регулирования, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

**Пример 5.** Найти передаточные функции электромашинного усилителя, работающего совместно с исполнительным двигателем постоянного тока независимого возбуждения.

Согласно уравнению (20) собственный оператор ЭМУ—ИД

$$D(p) = T_u T_a T_y p^3 + (T_u T_a + T_u T_y) p^2 + (T_u + T_y) p + 1 = (T_u T_a p^2 + T_u p + 1)(T_y p + 1).$$

Входной оператор для управляющего воздействия  $u_y$

$$M(p) = k_y.$$

Входной оператор для возмущающего воздействия  $M_c$

$$C(p) = -k_f [T_y T_a p^2 + (T_y + T_a) p + 1] = -k_f (T_y p + 1)(T_a p + 1).$$

Передаточная функция агрегата ЭМУ—ИД по отношению к управляющему воздействию представляет собой отношение входного оператора  $M(p)$  управ-

ляющего воздействия к собственному оператору  $D(p)$ , т. е.

$$W(p) = \frac{k_y}{(T_u T_a p^2 + T_u p + 1)(T_y p + 1)}, \quad (45)$$

а передаточная функция по отношению к возмущающему воздействию  $V(p)$  представляет собой отношение входного оператора  $C(p)$  возмущающего воздействия к собственному оператору  $D(p)$ , т. е.

$$V(p) = -\frac{k_f (T_y p + 1)(T_a p + 1)}{(T_u T_a p^2 + T_u p + 1)(T_y p + 1)}. \quad (46)$$

Рассмотрим некоторые свойства передаточных функций.

**Свойство 1.** Передаточная функция параллельного соединения элементов равна сумме передаточных функций этих элементов.

Доказательство этого свойства проведем для случая параллельного соединения двух элементов (рис. 40). По индукции доказательство можно распространить на случай произвольного числа элементов.

Пусть передаточные функции первого и второго элементов

$$W_1(p) = \frac{M_1(p)}{D_1(p)}, \quad W_2(p) = \frac{M_2(p)}{D_2(p)}.$$

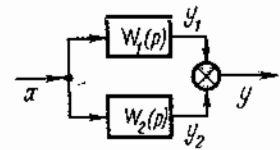


Рис. 40

Уравнения первого и второго элементов в операторной форме будут иметь вид

$$D_1(p) y_1 = M_1(p) x, \quad (47)$$

$$D_2(p) y_2 = M_2(p) x. \quad (48)$$

Применим к обеим частям уравнения (47) оператор  $D_2(p)$ , а к обеим частям уравнения (48) оператор  $D_1(p)$ . В силу свойства 2 операторов (см. § 12, п. 5) получим

$$D_2(p) D_1(p) y_1 = D_2(p) M_1(p) x,$$

$$D_1(p) D_2(p) y_2 = D_1(p) M_2(p) x.$$

Сложим обе части полученных уравнений и применим свойство 1 операторов (см. § 12, п. 5):

$$D_2(p) D_1(p) (y_1 + y_2) = [D_2(p) M_1(p) + D_1(p) M_2(p)] x,$$

тогда

$$W(p) = \frac{D_2(p) M_1(p) + D_1(p) M_2(p)}{D_1(p) D_2(p)} = \frac{M_1(p)}{D_1(p)} + \frac{M_2(p)}{D_2(p)} = W_1(p) + W_2(p) \quad (49)$$

— передаточная функция параллельного соединения элементов равна сумме передаточных функций этих элементов.

**Свойство 2.** Передаточная функция последовательного соединения элементов равна произведению передаточных функций этих элементов.

Для случая двух элементов (рис. 41) будем иметь

$$W(p) = W_1(p) W_2(p). \quad (50)$$

Доказательство этого свойства производится аналогично предыдущему и опирается на свойство 2 операторов.

В общем случае передаточные функции линейных систем автоматического регулирования с постоянными параметрами представляют собой дробно-рациональные функции от  $p$ , причем, как правило, степень числителя меньше или равна степени знаменателя.

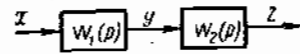


Рис. 41

По виду передаточной функции легко написать дифференциальное уравнение, описывающее поведение САР.

Не следует путать символ дифференцирования  $p$  с комплексной переменной  $s$ , имеющей место в преобразовании Лапласа (см. § 42). В отличие от преобразования Лапласа операторный способ, сокращая запись дифференциальных уравнений, не дает никаких способов для их решения.

4. Классификация звеньев. В теории автоматического регулирования принята классификация элементов в зависимости от вида их операторов или передаточных функций, т. е. в конечном итоге в зависимости от вида дифференциального уравнения, описывающего поведение элемента. Элементы САР, классифицированные по виду дифференциального уравнения, называются *типовыми звеньями* систем автоматического регулирования.

Рассмотрим эту классификацию. Пусть  $D(p)$  и  $M(p)$  являются многочленами от  $p$  с действительными коэффициентами степени соответственно  $n$  и  $m$ :

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m.$$

Эти многочлены можно представить в виде

$$D(p) = a_0 (p - \lambda_1) (p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n),$$

$$M(p) = b_0 (p - \gamma_1) (p - \gamma_2) \dots (p - \gamma_m),$$

где  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — корни многочлена  $D(p)$ , а  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) — корни многочлена  $M(p)$ .

Известно, что если среди корней многочленов  $D(p)$  и  $M(p)$  имеются комплексные корни, например  $\lambda_k = \alpha_k + j\beta_k$ , то сопряженное к нему число  $\bar{\lambda}_k = \alpha_k - j\beta_k$  также является корнем многочлена, причем той же кратности.

Преобразуя сомножители многочленов  $D(p)$  и  $M(p)$ , соответствующие действительным корням, к виду

$$p - \lambda_k = \frac{1}{T_k} (T_k p + 1),$$

$$p - \gamma_l = \frac{1}{\tau_l} (\tau_l p + 1),$$

где  $T_k = -\frac{1}{\lambda_k}$ ,  $\tau_l = -\frac{1}{\gamma_l}$ , а сомножители, соответствующие комплексным корням, к виду

$$(p - \lambda_k) (p - \bar{\lambda}_k) = p^2 - 2\alpha_k p + \alpha_k^2 + \beta_k^2 =$$

$$= \frac{1}{T_k^2} (T_k^2 p^2 + 2\xi_k T_k p + 1);$$

$$(p - \gamma_l) (p - \bar{\gamma}_l) = \frac{1}{\tau_l^2} (\tau_l^2 p^2 + 2\xi_l \tau_l p + 1),$$

где  $\lambda_k = \alpha_k + j\beta_k$ ,  $\gamma_l = \alpha_l + j\beta_l$ .

$$T_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}, \quad \xi_k = -\frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}},$$

$$\tau_l = \frac{1}{\sqrt{\alpha_l^2 + \beta_l^2}}, \quad \xi_l = -\frac{\alpha_l}{\sqrt{\alpha_l^2 + \beta_l^2}},$$

и полагая, что многочлен  $D(p)$  имеет  $\nu$  нулевых корней, уравнение (43) можно переписать следующим образом:

$$\left[ p^\nu \prod_{k=1}^{\mu} (T_k p + 1) \cdot \prod_{k=1}^r (T_k^2 p^2 + 2\xi_k T_k p + 1) \right] \Delta x =$$

$$= \left[ k \prod_{l=1}^q (\tau_l p + 1) \cdot \prod_{l=1}^s (\tau_l^2 p^2 + 2\xi_l \tau_l p + 1) \right] \Delta g, \quad (51)$$

где  $k = \frac{b_m}{a_n}$ .

Элемент, описываемый уравнением (51), имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{k \prod_{l=1}^q (\tau_l p + 1) \prod_{l=1}^s (\tau_l^2 p^2 + 2\xi_l \tau_l p + 1)}{p^\nu \prod_{k=1}^{\mu} (T_k p + 1) \prod_{k=1}^r (T_k^2 p^2 + 2\xi_k T_k p + 1)}. \quad (52)$$

В передаточную функцию (52) входят шесть различных видов сомножителей:

$$k, \tau_l p + 1, \tau_l^2 p^2 + 2\xi_l \tau_l p + 1, \frac{1}{p}, \frac{1}{T_k p + 1},$$

$$\frac{1}{T_k^2 p^2 + 2\xi_k T_k p + 1},$$

поэтому любой элемент можно рассматривать в общем случае как последовательное соединение шести различных типов простейших структурных звеньев. Эти простейшие звенья называются типовыми звеньями САР\*. Их передаточные функции входят в виде сомножителей в передаточную функцию (52). Рассмотрим типовые звенья САР.

\* См., например: «Техническая кибернетика», под редакцией Солодовникова В. В., кн. 1. «Машиностроение», 1967, стр. 270–294.

### Апериодическое звено

Апериодическое звено описывается дифференциальным уравнением

$$(Tp + 1)x = kg. \quad (53)$$

Его собственный оператор  $D(p) = Tp + 1$ ; входной оператор  $M(p) = k$ . Передаточная функция апериодического звена

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (54)$$

Коэффициент  $k$  называется *передаточным коэффициентом* (коэффициентом усиления) звена,  $T$  — является постоянной времени.

### Колебательное звено

Колебательное звено описывается дифференциальным уравнением

$$(T^2p^2 + 2\xi Tp + 1)x = kg. \quad (55)$$

Передаточная функция колебательного звена выражается так:

$$W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}, \quad (56)$$

где  $k$  — передаточный коэффициент;  $T$  — постоянная времени;  $\xi$  — относительный коэффициент затухания ( $0 < \xi < 1$ ).

### Интегрирующее звено

Поведение интегрирующего звена описывается уравнением

$$px = kg. \quad (57)$$

Его передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{p}. \quad (58)$$

### Усилительное звено

Усилительное звено описывается не дифференциальным уравнением, а алгебраическим:

$$x = kg. \quad (59)$$

т. е. передаточная функция усилительного звена

$$W(p) = k. \quad (60)$$

Дифференцирующее звено первого порядка

Уравнение дифференцирующего звена первого порядка

$$x = k(\tau p + 1)g, \quad (61)$$

где  $\tau$  — постоянная времени звена;  $k$  — передаточный коэффициент.

Передаточная функция дифференцирующего звена первого порядка имеет вид

$$W(p) = k(\tau p + 1). \quad (62)$$

Дифференцирующее звено второго порядка

Уравнение дифференцирующего звена второго порядка

$$x = k(\tau^2 p^2 + 2\xi\tau p + 1)g. \quad (63)$$

Передаточная функция этого звена

$$W(p) = k(\tau^2 p^2 + 2\xi\tau p + 1), \quad 0 < \xi < 1, \quad (64)$$

где  $k$  — передаточный коэффициент звена;  $\tau$  — постоянная времени.

5. Составление дифференциальных уравнений систем автоматического регулирования. После того как получены и, если возможно, линеаризованы уравнения отдельных элементов системы регулирования, переходят к составлению дифференциального уравнения

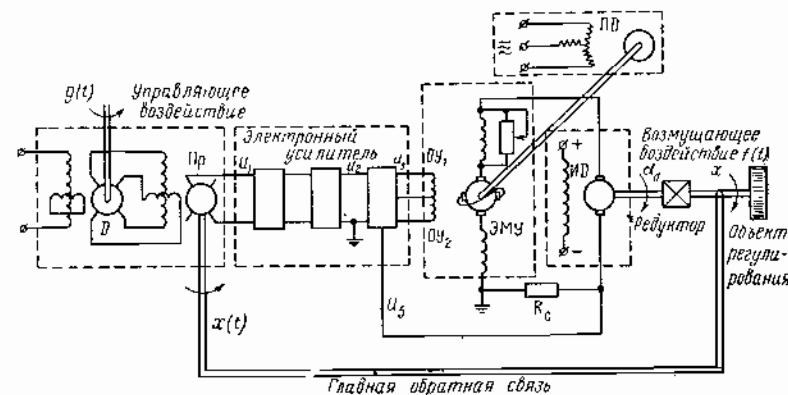


Рис. 42

системы. Совокупность дифференциальных уравнений элементов системы и уравнений связей описывает поведение системы автоматического регулирования в целом. При исследовании САР обычно представляет интерес поведение выходной координаты системы, а не выходных координат всех элементов. Поэтому от системы уравнений путем исключения промежуточных переменных переходят к одному уравнению. Это уравнение содержит только выходную координату системы, а также внешние воздействия. Зная внешние воздействия, приложенные к системе, и решив дифференциальное уравнение, описывающее поведение системы, можно определить реакцию САР на эти воздействия.

Рассмотрим процесс составления дифференциального уравнения следящей системы с электромашинным усилителем и исполнительным двигателем постоянного тока. Эта система в данной книге во многих случаях рассматривается в качестве иллюстративного примера, поэтому опишем изображенную на рис. 42 схему более подробно. На

схеме объект регулирования условно показан в виде вращающегося маховика, жестко соединенного с выходным валом редуктора. Механические связи на схеме обозначены в виде двух параллельных, рядом расположенных линий. В такой системе сигнал ошибки вырабатывается с помощью двух синусно-косинусных поворотных трансформаторов (СКПТ), работающих в трансформаторном режиме. Один СКПТ — датчик  $D$  связан с задающей осью, управляющее воздействие представляет собой угол поворота этой оси; другой СКПТ — приемник  $Pr$  связан с исполнительной осью, т. е. с объектом регулирования. Сигнал  $u_1$ , пропорциональный ошибке системы, поступает на вход фазочувствительного выпрямителя ФЧВ, преобразуется в последовательном корректирующем устройстве  $\Pi$ , усиливается усилителем постоянного тока УПТ и подается на вход (на обмотки управления) электромашинного усилителя ЭМУ; ротор ЭМУ приводится во вращение приводным двигателем ПД;

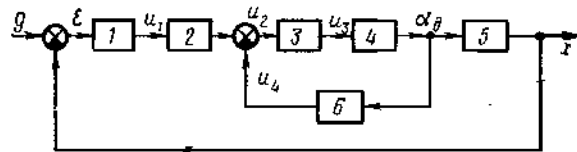


Рис. 43

ЭМУ управляет исполнительным двигателем ИД, который через редуктор вращает исполнительную ось и одновременно принимающий СКПТ. В схеме имеется местная отрицательная связь по току якоря исполнительного двигателя. Сигнал этой обратной связи снимается в виде напряжения с сопротивления  $R_c$ , включенного в цепь якоря, и поступает на вход УПТ. Местная обратная связь по току якоря ИД совместно с последовательным корректирующим устройством  $\Pi$  обеспечивают САР требуемые динамические свойства (в ряде систем в цепь местной обратной связи включается такое параллельное корректирующее устройство). Корректирующие устройства обычно выполняются в виде  $RC$ -контуров. Объект регулирования в САР с требуемой точностью воспроизводит движение задающей оси, т. е. регулируемая величина — угловое положение объекта «следит» за изменениями управляющего воздействия. Весьма характерным видом возмущающего воздействия  $f(t)$ , прикладываемого к системе, является возмущающий момент, действующий на объект регулирования. Этот момент может возникать из-за многих факторов, например вследствие трения в передаче между двигателем и объектом, ветровой нагрузки, неуравновешенности вращающихся масс и т. п.

Структурная схема рассматриваемой следящей системы содержит следующие элементы (рис. 43). Чувствительный элемент 1, вырабатывающий сигнал  $u_1$ , пропорциональный ошибке системы. В следящей системе ошибка  $e$  представляет собой разность между управляющим воздействием  $g$  и выходной координатой системы  $x$ .

Чувствительным элементом в рассматриваемой системе являются два синусно-косинусных поворотных трансформатора. Напряжение, снимаемое с трансформатора-приемника

$$u_1 = k_e e. \quad (65)$$

Фазочувствительный выпрямитель и последовательное корректирующее устройство 2, предназначенное для преобразования сигнала ошибки с целью улучшения динамических свойств системы. Оно представляет собой  $RC$ -контур (рис. 44), описываемый дифференциальным уравнением вида

$$T_1 \frac{du_2}{dt} + u_2 = k_2 \left( \tau_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 \right), \quad (66)$$

причем

$$\tau_1 > T_1.$$

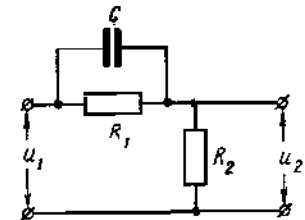


Рис. 44

Выходной каскад электронного усилителя 3, на вход которого поступает разность напряжений  $u_2 - u_4$ , где  $u_2$  — напряжение на выходе последовательного корректирующего устройства;  $u_4$  — напряжение местной отрицательной обратной связи. Полагая, что выходной каскад является безынерционным, его уравнение можно записать в виде

$$u_3 = k_3 (u_2 - u_4). \quad (67)$$

Электромашинный усилитель и исполнительный двигатель постоянного тока независимого возбуждения 4. Уравнение электромашинного усилителя, работающего совместно с двигателем постоянного тока, получено выше в примере 2. Если рассматривать в качестве выходной величины угол поворота вала двигателя  $\alpha_a$ , то уравнение системы ЭМУ—ИД примет вид

$$T_m T_a T_y \frac{d^3 \alpha_a}{dt^3} + (T_m T_a + T_m T_y) \frac{d^2 \alpha_a}{dt^2} + (T_m + T_y) \frac{d \alpha_a}{dt} + \alpha_a = k_y u_3 - k_f \left[ T_y T_a \frac{d^2 M_c}{dt^2} + (T_y + T_a) \frac{d M_c}{dt} + M_c \right]. \quad (68)$$

Редуктор 5, через который исполнительный двигатель связан с объектом регулирования. Уравнение редуктора:

$$\alpha_a = i_p x. \quad (69)$$

Элемент 6, отражающий наличие в системе обратной связи по току. Обратная связь по току служит для коррекции динамических свойств системы и сигнал на ее выходе представляет собой напряжение, пропорциональное току в цепи якорей ЭМУ—ИД. Это напряжение снимается с сопротивления  $R_c$ , включенного в цепь якорей ЭМУ—ИД. Напряжение, снимаемое с сопротивления  $R_c$ , есть

$$u_4 = R_c I_a, \quad (70)$$

где  $I_a$  — ток цепи якорей ЭМУ—ИД.

Пренебрегая моментом сопротивления  $M_c$ , из формулы (15) имеем

$$k_m J_a = J \frac{d^2 \alpha_x}{dt^2}, \quad (71)$$

тогда

$$u_a = k_g \frac{d^2 \alpha_x}{dt^2}, \quad (72)$$

где

$$k_g = \frac{R_c J}{k_m}.$$

Уравнение (72) представляет собой уравнение обратной связи. Совокупность уравнений (65) — (69), (72) совместно с уравнением ошибки

$$\varepsilon = g - x \quad (73)$$

описывает поведение следящей системы. Исключив промежуточные переменные  $\varepsilon$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$ ,  $\alpha_x$  из уравнений (65) — (69), (72), (73), получим дифференциальное уравнение следящей системы в операторной форме:

$$[(T_m T_a p^2 + T_m p + 1)(T_y p + 1)(T_1 p + 1)p + k_y k_3 k_6 (T_1 p + 1)p^2 + k(\tau_1 p + 1)]x = k(\tau_1 p + 1)g - k_{1f}(T_y p + 1)(T_a p + 1)(T_1 p + 1)M_c, \quad (74)$$

где  $k = \frac{k_1 k_2 k_3 k_y}{i_p}$ ,  $k_{1f} = \frac{k_f}{i_p}$ .

Если разомкнуть главную обратную связь, то поведение такой разомкнутой системы описывается системой уравнений (65) — (69), (72), причем в уравнении (65) следует положить  $\varepsilon = g$ . Исключив промежуточные переменные из уравнений (65) — (69), (72), получим уравнение разомкнутой системы, записанное в операторной форме:

$$[(T_m T_a p^2 + T_m p + 1)(T_y p + 1)(T_1 p + 1)p + k_y k_3 k_6 p^2 (T_1 p + 1)]x = k(\tau_1 p + 1)g - k_{1f}(T_y p + 1)(T_a p + 1)(T_1 p + 1)M_c. \quad (75)$$

Из уравнений (74) и (75) следует, что собственный оператор замкнутой системы есть

$$D(p) = (T_m T_a p^2 + T_m p + 1)(T_y p + 1)(T_1 p + 1)p + k_y k_3 k_6 (T_1 p + 1)p^2 + k(\tau_1 p + 1), \quad (76)$$

а собственный оператор разомкнутой системы есть

$$Q(p) = (T_m T_a p^2 + T_m p + 1)(T_y p + 1)(T_1 p + 1)p + k_y k_3 k_6 (T_1 p + 1)p^2. \quad (77)$$

Входные операторы по управляющему и возмущающему воздействию разомкнутых систем совпадают с соответствующими входными

операторами замкнутых систем и имеют следующий вид: входной оператор по управляющему воздействию

$$M(p) = k(\tau_1 p + 1); \quad (78)$$

входной оператор по возмущающему воздействию

$$C(p) = -k_{1f}(T_y p + 1)(T_a p + 1)(T_1 p + 1). \quad (79)$$

Назовем передаточной функцией разомкнутой системы автоматического регулирования по отношению к управляющему воздействию отношение входного оператора по управляющему воздействию к собственному оператору разомкнутой системы, т. е.

$$W(p) = \frac{M(p)}{Q(p)}. \quad (80)$$

Передаточной функцией разомкнутой системы по отношению к возмущающему воздействию назовем отношение входного оператора по возмущающему воздействию  $C(p)$  к собственному оператору разомкнутой системы, т. е.

$$V(p) = \frac{C(p)}{Q(p)}. \quad (81)$$

Аналогично определим передаточные функции замкнутой системы по отношению к управляющему воздействию  $\Phi(p)$  и по отношению к возмущающему воздействию  $Y(p)$ . Так как оператор

$$D(p) = Q(p) + M(p),$$

то

$$\Phi(p) = \frac{M(p)}{D(p)} = \frac{M(p)}{Q(p) + M(p)},$$

или

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}. \quad (82)$$

Аналогично

$$Y(p) = \frac{C(p)}{D(p)} = \frac{C(p)}{Q(p) + M(p)},$$

или

$$Y(p) = \frac{V(p)}{1 + W(p)}. \quad (83)$$

Формулы (82) и (83) устанавливают связь между передаточными функциями разомкнутых и замкнутых автоматических систем.

Уравнение (74) перепишем в виде

$$(a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5)x = (b_0 p + b_1)g + (d_0 p^3 + d_1 p^2 + d_2 p + d_3)M_c, \quad (84)$$



где

$$\begin{aligned}
 a_0 &= T_m T_a T_y T_1, \\
 a_1 &= T_m T_a T_y + T_m T_a T_1 + T_m T_y T_1, \\
 a_2 &= T_m T_a + T_m T_y + T_m T_1 + T_y T_1 + k_y k_3 k_3 T_1, \\
 a_3 &= T_m + T_y + T_1 + k_y k_3 k_3, \\
 a_4 &= 1 + k\tau_1, \\
 a_5 &= k, \\
 d_0 &= -k_1 T_a T_y T_1, \\
 d_1 &= -k_1 (T_y T_a + T_y T_1 + T_a T_1), \\
 d_2 &= -k_1 (T_y + T_a + T_1), \\
 d_3 &= -k_1, \\
 b_0 &= k\tau_1, \\
 b_1 &= k.
 \end{aligned} \tag{85}$$

Если обозначить передаточную функцию чувствительного элемента и последовательного корректирующего устройства через

$$\Pi(p) = \frac{k_1 k_3 (\tau_1 p + 1)}{T_1 p + 1},$$

передаточную функцию элемента, отражающего наличие в системе обратной связи по току, через

$$Z(p) = i_p k_3 p^2,$$

а передаточную функцию электромашинного усилителя с исполнительным двигателем так:

$$W_0(p) = \frac{k_y}{p(T_m T_a p^2 + T_m p + 1)(T_y p + 1) i_p},$$

то структурную схему рассматриваемой следящей системы можно привести к виду, изображенному на рис. 2.

## § 16. ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. Дифференциальные уравнения систем автоматического регулирования. Рассмотрим структуру дифференциальных уравнений систем автоматического регулирования. Система автоматического регулирования состоит в общем случае из объекта регулирования и регулятора (рис. 45). Состояние объекта регулирования характеризуется координатами  $x_1, \dots, x_n$ . Вектор  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  называется вектором состояния объекта регулирования. Регулятор в общем случае также представляет собой динамическую систему, характеризуемую  $m$  координатами  $y_1, \dots, y_m$ , или вектором  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ .

Регулятор описывается совокупностью уравнений

Координаты  $y_1, \dots, y_m$  являются выходными координатами регулятора и одновременно входными координатами объекта регулирования. Они называются регулируемыми воздействиями, а вектор  $y$  — вектором регулирования. Объект регулирования может находиться под влиянием возмущающих воздействий  $f_1(t), \dots, f_N(t)$ .

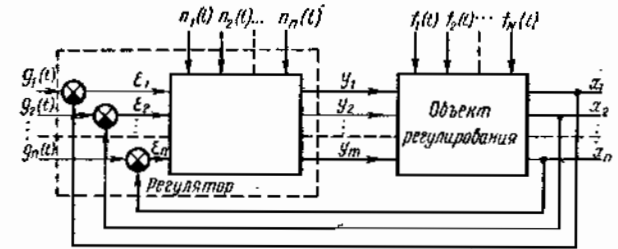


Рис. 45

Таким образом, общее уравнение объекта регулирования можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 X_j(x_1, x_1', \dots, x_1^{(k_1)}, x_2, x_2', \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(k_n)}) &= \\
 = F_j(y_1, y_1', \dots, y_1^{(l_1)}, y_2, y_2', \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(l_m)}, & \\
 f_1(t), \dots, f_1^{(r_1)}(t), f_2(t), f_2'(t), \dots, f_N(t), f_N'(t), \dots, f_N^{(r_N)}(t) & \\
 (j=1, 2, \dots, n). &
 \end{aligned} \tag{1}$$

Обычно регулятор является системой направленного действия, т. е. объект регулирования воздействует на регулятор только через обратную связь и элемент сравнения. Поэтому координаты объекта регулирования  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  не входят в уравнения регулятора. Внешними воздействиями для регулятора являются управляющие воздействия  $g_1(t), \dots, g_n(t)$ . Кроме этого, к регулятору могут быть приложены возмущающие воздействия  $n_j(t)$ , называемые помехами.

Регулятор описывается совокупностью уравнений

$$\begin{aligned}
 Y_j(y_1, y_1', \dots, y_1^{(r_1)}, y_2, y_2', \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(r_m)}) &= \\
 = E_j(\epsilon_1, \epsilon_1', \dots, \epsilon_1^{(s_1)}, \epsilon_2, \epsilon_2', \dots, \epsilon_n, \epsilon_n', \dots, \epsilon_n^{(s_n)}) + n_j(t) & \\
 (j=1, 2, \dots, n), & \\
 \epsilon_j = g_j - x_j, &
 \end{aligned} \tag{2}$$

причем уравнения (3) называются обычно уравнениями ошибки. Уравнения (1) — (3) описывают поведение  $n$ -мерной системы автоматического регулирования и являются ее математической моделью.

Для одномерной системы автоматического регулирования (рис. 46) входные и выходные координаты регулятора и объекта регулирования являются скалярными величинами. В уравнения одномерной САР входят:

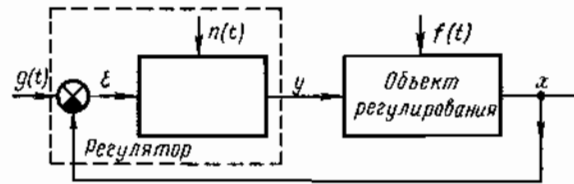


Рис. 46

1) уравнение объекта регулирования

$$X(x, x', \dots, x^{(k)}) = F(y, y', \dots, y^{(l)}, f(t), \dots, f^{(v)}(t)); \quad (4)$$

2) уравнение регулятора с записанным отдельно уравнением ошибки

$$Y(y, y', \dots, y^{(r)}) = E(\varepsilon, \varepsilon', \dots, \varepsilon^{(s)}) + n(t), \quad (5)$$

$$\varepsilon = g - x. \quad (6)$$

Если разрешить уравнения (4) и (5) относительно старшей производной и ввести новые переменные

$$\begin{aligned} x &= x_1, \\ x' &= x_2, \\ &\dots \\ x^{(k-1)} &= x_k, \\ y &= y_1, \\ &\dots \\ y^{(r-1)} &= y_r, \end{aligned} \quad (7)$$

то уравнения (4) и (5) можно заменить нормальной системой уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ &\dots \\ \frac{dx_{k-1}}{dt} &= x_k, \\ \frac{dx_k}{dt} &= X_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{l+1}, t), \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ &\dots \\ \frac{dy_{r-1}}{dt} &= y_r, \\ \frac{dy_r}{dt} &= Y_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_r, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Наличие в уравнениях (4), (5), (6) функций времени  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $n(t)$  учитывается явной зависимостью правых частей системы (8) от времени.

Система дифференциальных уравнений (8) удобна при исследовании устойчивости системы регулирования. Иногда бывает возможно исключить промежуточные переменные  $y$  и  $\varepsilon$  из уравнений (4) — (6). Тогда поведение системы регулирования будет описываться дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, x', \dots, x^{(n)}) &= \\ &= \Phi_2(g(t), g'(t), \dots, g^{(m)}(t), f(t), f'(t), \dots, f^{(v)}(t)), \end{aligned} \quad (9)$$

в котором полагаем помеху  $n(t) = 0$ .

Дифференциальное уравнение (9) может быть линейным и нелинейным. Если САР описывается линейными дифференциальными уравнениями, то такая система называется *линейной*, если дифференциальные уравнения, описывающие поведение САР, нелинейны, то система регулирования называется *нелинейной*. Как правило дифференциальные уравнения САР нелинейны, но во многих случаях нелинейные уравнения можно линеаризовать. К нелинейным системам автоматического регулирования относят только такие САР, уравнения которых не могут быть линеаризованы; это — системы, содержащие существенно нелинейные элементы. Следует отметить, что в некоторых случаях нелинейные элементы вводятся специально для улучшения динамических свойств САР.

Если параметры САР не изменяются с течением времени, то САР называется *стационарной*. Стационарные линейные САР характеризуются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Некоторые нестационарные линейные САР, описываемые линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, например уравнениями с периодическими коэффициентами, можно привести к стационарным линейным САР.

2. Процессы в линейных системах. Поведение одномерной линеаризованной системы автоматического регулирования описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, которое может быть записано в виде

$$D(p)x = M(p)g(t) + C(p)f(t), \quad (10)$$

где  $D(p)$ ,  $M(p)$ ,  $C(p)$  — некоторые многочлены от  $p$  степени соответственно  $n$ ,  $m$ ,  $l$  (обычно  $n > m$ ,  $n > l$ );  $x$  — выходная координата системы;  $g(t)$  — управляющее воздействие;  $f(t)$  — возмущающее воздействие.

Если линеаризованная система автоматического регулирования является многомерной, то ее поведение описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая в векторной форме имеет вид

$$D(p)x = M(p)g(t) + C(p)f(t), \quad (11)$$

где  $D(p) = \begin{bmatrix} D_{11}(p) & \dots & D_{1n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1}(p) & \dots & D_{nn}(p) \end{bmatrix}$  — полиномиальная матрица размера  $n \times n$ ;  $D_{ij}(p)$  — многочлен от  $p$  с постоянными коэффициентами;  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  — вектор состояния САР;  $M(p) = \begin{bmatrix} M_{11}(p) & \dots & M_{1m}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1}(p) & \dots & M_{nm}(p) \end{bmatrix}$  — полиномиальная матрица размера  $n \times m$ ;  $M_{ij}(p)$  — многочлен от  $p$  с постоянными коэффициентами;  $g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_m(t) \end{bmatrix}$  — вектор управляющих воздействий;  $C(p) = \begin{bmatrix} C_{11}(p) & \dots & C_{1l}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1}(p) & \dots & C_{nl}(p) \end{bmatrix}$  — полиномиальная матрица размера  $n \times l$ ;  $C_{ij}(p)$  — многочлен от  $p$  с постоянными коэффициентами;  $f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_l(t) \end{bmatrix}$  — вектор возмущающих воздействий.

Если задать компоненты  $f_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ) вектора возмущающих воздействий  $f(t)$  и компоненты  $g_j(t)$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) вектора управляющих воздействий  $g(t)$ , то система уравнений (11) будет представлять собой линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Аналогично, при заданных  $f(t)$  и  $g(t)$  уравнение (10) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Как было показано в § 12, всякое решение неоднородной системы (11) может быть представлено в виде

$$x = x_n(t) + x_y(t) \quad (12)$$

где  $x_n(t)$  — решение однородной системы

$$D(p)x = 0, \quad (13)$$

$x_y(t)$  — частное решение неоднородной системы (11).

Аналогично всякое решение неоднородного уравнения (10):

$$x = x_n(t) + x_y(t), \quad (14)$$

где  $x_n(t)$  — решение однородного уравнения

$$D(p)x = 0, \quad (15)$$

$x_y(t)$  — частное решение неоднородного уравнения (10).

Полное решение  $x$  описывает процесс регулирования в линейной САР. Однородная система уравнений (13) и однородное уравнение (15) описывают свободное движение системы автоматического регулирования, т. е. движение САР при отсутствии управляющего и возмущающего воздействий. Поэтому составляющая  $x_n(t)$  решения называется *свободной составляющей* (переходным процессом). Составляющая  $x_y(t)$  решения называется *вынужденной составляющей* (установившимся процессом). Установившийся процесс  $x_y(t)$  опре-

деляется внешними воздействиями, приложенными к системе. Функционально переходный процесс  $x_n(t)$  не зависит от внешних воздействий и его характер определяется свойствами самой САР. В § 12 была получена формула общего решения однородного линейного дифференциального уравнения (15) в виде

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{\mu} \left( \sum_{k=0}^{k_i-1} c_{ki} t^k \right) e^{\lambda_i t}, \quad (16)$$

где  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, \mu$ ) корни уравнения  $D(\lambda)=0$ ;  $k_i$  ( $i=1, 2, \dots, \mu$ ) — их кратности;  $c_{ki}$  — произвольные постоянные.

Если система уравнений (13) нормализуема (см. § 12), то аналогичную структуру имеют компоненты ее решения.

Назовем линейную систему автоматического регулирования *устойчивой*, если свободное движение системы с течением времени затухает\*, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_n(t)\| = 0. \quad (17)$$

Из формулы (16) следует, что для устойчивости одномерной САР необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения  $D(\lambda)=0$  лежали в левой полуплоскости, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad (i=1, 2, \dots, \mu). \quad (18)$$

Для устойчивости многомерной системы автоматического регулирования требуется, чтобы корни характеристического уравнения  $\det D(\lambda)=0$  также лежали в левой полуплоскости плоскости корней. Если справедливо равенство  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_n(t)\| = \infty$ , то система автоматического регулирования называется *неустойчивой*.

Положим в уравнении (10) возмущающее воздействие  $f(t)=0$ , тогда это уравнение примет вид

$$D(p)x = M(p)g(t). \quad (19)$$

Правая часть уравнения (19) может представлять собой сумму нескольких слагаемых:

$$D(p)x = \sum_{i=1}^n M_i(p)g_i(t). \quad (20)$$

Тогда частное решение  $x_y(t)$  уравнения (20) складывается из суммы слагаемых  $x_{yi}(t)$ , т. е.

$$x_y(t) = \sum_{i=1}^n x_{yi}(t), \quad (21)$$

\* Данное определение устойчивости не является строгим. Более строгое определение устойчивости дано в шестой главе.

причем каждое слагаемое  $x_{yi}(t)$  является частным решением уравнения

$$D(p)x = M_i(p)g_i(t). \quad (22)$$

В этом состоит принцип суперпозиции, который указывает на возможность определения частного решения дифференциального уравнения как сумму частных решений, соответствующих прикладываемым к системе воздействиям; причем, определяя частное решение, соответствующее какому-либо воздействию, остальные воздействия можно считать равными нулю.

Учитывая равенства (12) и (16), процесс регулирования можно записать в виде

$$x = x_n(t) + x_y(t) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=0}^{k_i-1} c_{ki} t^k \right) e^{\lambda_i t} + x_y(t). \quad (23)$$

Здесь произвольные постоянные  $c_{ki}$  определяются из равенства (23) с учетом начальных условий. Правая часть равенства (23) содержит слагаемое  $x_y(t)$ , зависящее от внешнего воздействия. Из этого следует, что значения коэффициентов  $c_{ki}$  зависят от внешних воздействий, прикладываемых к системе.

Если вычислять переходный процесс в системе по однородному уравнению

$$D(p)x = 0,$$

то заданные начальные условия

$$x_0 = x(t_0), \dots, x_{n-1} = x^{(n-1)}(t_0)$$

должны быть пересчитаны на следующие значения:

$$x_{0n} = x_0 - x_y(t_0), \dots, x_{n-1n} = x_{n-1} - x_y^{(n-1)}(t_0), \quad (24)$$

где  $x_y(t)$  — частное решение уравнения (19) с правой частью.

Таким образом, при исследовании переходного процесса в САР необходимо учитывать внешние воздействия, хотя, как было отмечено выше, функционально вид переходного процесса не зависит от внешних воздействий.

В теории автоматического регулирования исследуются переходные и установившиеся процессы в системах при некоторых типовых управляющих воздействиях. К ним относятся:

1. Единичное ступенчатое воздействие

$$g(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

2. Гармоническое воздействие

$$g(t) = A_0 \sin \omega_0 t, \quad t \geq 0.$$

3. Воздействие в виде дельта-функции (импульсной функции)

$$g(t) = \delta(t),$$

причем

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases}$$

$\int_a^b \delta(t) dt = 1$ , если точка 0 принадлежит интервалу  $(a, b)$ , и

$\int_a^b \delta(t) dt = 0$ , если начало координат не принадлежит интервалу  $(a, b)$ .

4. Воздействие вида

$$g(t) = \begin{cases} g_0 + g_1 t + \dots + g_r t^r, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где  $g_0, g_1, \dots, g_r$  — постоянные числа.

Одной из основных характеристик САР является *переходная функция*  $h(t)$ , которая представляет собой решение уравнения (19) при единичном ступенчатом воздействии и нулевых начальных условиях. Переходный процесс  $x_n(t)$  представляет собой разность между  $h(t)$  и  $h(\infty)$ . Качество переходного процесса в САР характеризуется (рис. 47):

1) перерегулированием

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} 100\%;$$

2) временем переходного процесса  $T$ , под которым понимают время, начиная с которого выполняется неравенство

$$|h(t) - h(\infty)| < \Delta,$$

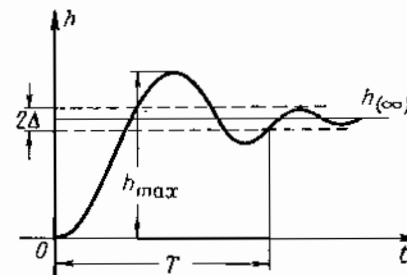


Рис. 47

где  $\Delta$  — некоторая заранее заданная величина.

Напишем дифференциальное уравнение САР относительно ошибки системы. Уравнение ошибки

$$\varepsilon = g - x. \quad (25)$$

Исключив  $x$  из уравнения (19), получим:

$$D(p)\varepsilon = [D(p) - M(p)]g(t). \quad (26)$$

Решение уравнения (26) при данном управляющем воздействии

$$\varepsilon = \varepsilon_n(t) + \varepsilon_y(t), \quad (27)$$

где  $\varepsilon_n(t)$  — переходная составляющая ошибки, которая представляет собой решение однородного уравнения

$$D(p)\varepsilon = 0, \quad (28)$$

$\varepsilon_y(t)$  — установившаяся составляющая ошибки, представляющая собой частное решение неоднородного уравнения (26).

Вычислим установившуюся составляющую ошибки САР для управляющего воздействия в виде

$$g(t) = \begin{cases} g_0 + g_1 t + \dots + g_r t^r, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Пусть коэффициенты многочленов  $D(p)$  и  $M(p)$  удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} a_{n-i} &= b_{m-i} & (i = 1, 2, \dots, \nu - 1), \\ a_{n-\nu} &\neq b_{m-\nu} \end{aligned} \quad (29)$$

Системы автоматического регулирования, для которых выполняется условие (29), называются системами, имеющими  $\nu$ -й порядок астатизма. САР, имеющие нулевой порядок астатизма ( $\nu = 0$ ), называются статическими системами.

Правую часть уравнения (26), учитывая условие (29), можно записать в виде

$$p^\nu [(a_{n-\nu} - b_{m-\nu}) + (a_{n-\nu-1} - b_{m-\nu-1})p + \dots + a_0 p^{n-\nu}] g(t). \quad (30)$$

Установившаяся составляющая ошибки  $\varepsilon_y(t)$  будет иметь различное значение в зависимости от соотношения между степенью  $r$  многочлена  $g(t)$  и порядком  $\nu$  астатизма САР:

1. Пусть  $r < \nu$ . Тогда правая часть уравнения (26) имеет вид

$$p^\nu [(a_{n-\nu} - b_{m-\nu}) + \dots + a_0 p^{n-\nu}] g(t) \equiv 0$$

и неоднородное уравнение (26) перейдет в однородное уравнение (28). В этом случае установившаяся составляющая ошибки равна нулю

$$\varepsilon_y(t) = 0.$$

2. Пусть  $r = \nu$ . В этом случае правая часть уравнения (26) имеет вид

$$p^\nu [(a_{n-\nu} - b_{m-\nu}) + \dots + a_0 p^{n-\nu}] g(t) = (a_{n-\nu} - b_{m-\nu}) r! g_r,$$

а частное решение  $\varepsilon_y(t)$  неоднородного уравнения (26) будет таково:

$$\varepsilon_y(t) = \frac{(a_{n-\nu} - b_{m-\nu}) r! g_r}{a_n}. \quad (31)$$

В этом случае установившаяся составляющая ошибки является постоянной величиной, прямо пропорциональной разности  $(a_{n-\nu} - b_{m-\nu})$  и коэффициенту  $g_r$  и обратно пропорциональной коэффициенту  $a_n$ .

3. Пусть  $r > \nu$ . Правая часть уравнения (26) согласно формуле (30) в этом случае представляет собой некоторый многочлен от  $t$  степени  $r - \nu$ . Коэффициент при старшем члене будет иметь значение

$$\frac{r!}{(r - \nu)!} g_r (a_{n-\nu} - b_{m-\nu}) \neq 0.$$

Установившаяся ошибка также является некоторым многочленом от  $t$  степени  $r - \nu$ .

Таким образом, если  $r > \nu$ , то установившаяся ошибка с течением времени неограниченно возрастает, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_y(t) = \infty.$$

В практике обычно встречаются системы регулирования нулевого порядка астатизма (статические САР), первого и второго порядка астатизма. В соответствии с изложенным выше для статических систем установившаяся ошибка отлична от нуля при управляющем воздействии вида  $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$ . Для системы первого порядка астатизма установившаяся ошибка равна нулю при входном воздействии  $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$  и является постоянной величиной при входном воздействии, изменяющемся с постоянной скоростью, т. е. при  $g(t) = (g_0 + g_1 t) \cdot 1(t)$ . Системы второго порядка астатизма имеют нулевую установившуюся ошибку при постоянном входном воздействии  $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$  и при воздействии, изменяющемся с постоянной скоростью  $g(t) = (g_0 + g_1 t) \cdot 1(t)$ . Для таких систем установившаяся ошибка постоянна и отлична от нуля для входного воздействия, изменяющегося с постоянным ускорением, т. е. при воздействии вида

$$g(t) = (g_0 + g_1 t + g_2 t^2) \cdot 1(t).$$

Многие линейные САР имеют довольно сложные структурные схемы и описываются линейными дифференциальными уравнениями высоких порядков. Однако аналитическое исследование этих систем не встречает принципиальных трудностей, хотя и связано с громоздкими выкладками, вызванными, в частности, необходимостью приближенного определения корней характеристических уравнений высоких степеней.

Анализ линейных САР с переменными параметрами связан с решением линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых изменяются во времени. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является значительно более трудной задачей, чем решение уравнений с постоянными коэффициентами. В отдельных случаях уравнение с переменными коэффициентами может быть приведено к уравнению с постоянными коэффициентами.

Независимо от вида и порядка линейного дифференциального уравнения структура его решения всегда одна и та же — это решение содержит две части: общее решение соответствующего однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения. Поэтому в линейных САР возможно раздельное определение переходных и установившихся составляющих процесса регулирования. К линейным САР применим принцип суперпозиции. Физически это означает, что если к системе приложено несколько воздействий, то суммарный эффект от этих воздействий может быть определен как сумма эффектов от каждого из воздействий.

3. **Линейные дифференциальные уравнения, правая часть которых содержит производные от разрывной функции.** При анализе линейных систем автоматического регулирования возникает необходимость находить решение линейных дифференциальных уравнений, правая часть которых содержит производные от разрывной функции. Например, для определения переходной функции САР, которая описывается уравнением (19)

$$D(p)x = M(p)g(t),$$

требуется найти решение этого уравнения при  $g(t) = 1(t)$ . Единичная функция  $1(t)$  имеет разрыв первого рода при  $t=0$ , поэтому правая часть уравнения (19) содержит производные от разрывной функции. Рассмотрим решение уравнения (19), полагая, что функция  $g(t)$  имеет разрыв непрерывности первого рода при  $t=0$ , причем производные слева и справа от точки разрыва существуют. Значения

$g^{(k)}(-0)$  ( $k=0, 1, \dots, m-1$ ),  $x^{(k)}(-0)$  ( $k=0, 1, \dots, n-1$ ) — называются *левыми начальными значениями*, а

$$g^{(k)}(+0)$$
 ( $k=0, 1, \dots, m-1$ ),  $x^{(k)}(+0)$  ( $k=0, 1, \dots, n-1$ ) — *правыми начальными значениями*.

Решением  $x(t)$  уравнения (19) называется такая функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество для всех значений  $t$ , при которых функция  $g(t)$  и ее производные до порядка  $m$  непрерывны. В тех точках, где функция  $g(t)$  терпит разрыв, тождества должны иметь место слева и справа от точки разрыва.

Рассмотрим решение уравнения (19). Для решения сведем это уравнение с помощью замены переменных к системе уравнений, правые части которых не содержат производных от разрывной функции  $g(t)$ . При этом вводятся обозначения:

$$x^{(i)} = y_{i+1} \quad (i=0, 1, \dots, n-m-1), \quad (32)$$

$$x^{(i)} = y_{i+1} + \sum_{k=0}^{i-(n-m)} c_{i-k} g^{(k)}(t) \quad (i=n-m, \dots, n-1),$$

откуда

$$y'_i = y_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, n-m-1),$$

$$y_i = y_{i+1} + c_i g(t) \quad (i=n-m, \dots, n-1). \quad (33)$$

Найдем производную  $y'_n$ . Продифференцировав равенство (32) для случая  $i=n-1$ , получим

$$y'_n = x^{(n)} - \sum_{k=1}^m c_{n-k} g^{(k)}(t). \quad (34)$$

Из уравнения (19) имеем

$$x^{(n)} = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} x^{(i)} + \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^m b_{m-k} g^{(k)}(t).$$

Подставим это выражение в уравнение (34):

$$y'_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} x^{(i)} + \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^m b_{m-k} g^{(k)}(t) - \sum_{k=1}^m c_{n-k} g^{(k)}(t). \quad (35)$$

В равенство (35) подставим  $x^{(i)}$  из соотношений (32):

$$y'_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} y_{i+1} - \frac{1}{a_0} \sum_{i=n-m}^{n-1} a_{n-i} \sum_{k=0}^{i-(n-m)} c_{i-k} g^{(k)}(t) + \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^m b_{m-k} g^{(k)}(t) - \sum_{k=1}^m c_{n-k} g^{(k)}(t). \quad (36)$$

Выберем постоянные  $c_{n-i}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) так, чтобы правая часть равенства (36) не содержала производные функции  $g(t)$ . Учитывая, что

$$\sum_{i=n-m}^{n-1} a_{n-i} \sum_{k=0}^{i-(n-m)} c_{i-k} g^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} g^{(k)}(t) \sum_{i=n-m+k}^{n-1} a_{n-i} c_{i-k}, \quad (37)$$

перепишем равенство (36) в виде

$$y'_n = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{n-i}}{a_0} y_{i+1} - \sum_{k=0}^{m-1} g^{(k)}(t) \sum_{i=n-m+k}^{n-1} \frac{a_{n-i}}{a_0} c_{i-k} + \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^m b_{m-k} g^{(k)}(t) - \sum_{k=1}^m c_{n-k} g^{(k)}(t). \quad (38)$$

Приравняв нулю коэффициенты при  $g^{(m)}(t), \dots, g'(t)$ , получим следующие соотношения для определения неизвестных  $c_{n-m}, \dots, c_{n-1}$ :

$$c_{n-m} = \frac{b_m}{a_0}, \quad (39)$$

$$c_{n-k} = \frac{b_{m-k}}{a_0} - \sum_{i=n-m+k}^{n-1} \frac{a_{n-i}}{a_0} c_{i-k} \quad (k=1, 2, \dots, m-1).$$

Если учесть выражения (39), то производная  $y'_n$  запишется в виде

$$y'_n = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{n-i}}{a_0} y_{i+1} + c_n g(t), \quad (40)$$

где

$$c_n = \frac{b_m}{a_0} - \sum_{i=n-m}^{n-1} \frac{a_{n-i}}{a_0} c_i. \quad (41)$$

Уравнения (33), (40) составляют систему дифференциальных уравнений, которая эквивалентна уравнению (19). Запишем эту си-



стему в векторной форме

$$\frac{dy}{dt} = Ay + cg(t), \quad (42)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_{n-m} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}; \quad (43)$$

причем коэффициенты  $c_{n-m}, \dots, c_n$  определяются из соотношений (39), (41). Система уравнений (42) представляет собой на каждом из интервалов непрерывности функции  $g(t)$  линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений. Решение таких систем было рассмотрено в § 12.

Отметим, что если  $m < n$ , то решение системы уравнений (42) будет непрерывной вектор-функцией и в точках разрыва функции  $g(t)$ , так как правые части уравнений не содержат производной от разрывных функций.

Пусть  $y = y(t)$  — решение системы (42), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_{i+1}(0) = x^{(i)}(-0) \quad (i=0, 1, \dots, n-m-1), \quad (44)$$

$$y_{i+1}(0) = x^{(i)}(-0) - \sum_{k=0}^{i-(n-m)} c_{i-k} g^{(k)}(-0) \quad (i=n-m, \dots, n-1).$$

Тогда первая компонента  $y_1(t)$  вектор-функции  $y(t)$  представляет собой решение  $x(t)$  уравнения (19). Из соотношений (32) следует, что это решение непрерывно и имеет непрерывные производные до порядка  $n-m-1$  включительно. Производные более высоких порядков могут иметь разрывы в точках разрыва функции  $g(t)$ ; правые начальные условия для функции  $x(t)$  определяются согласно формуле (32) из соотношений:

$$x^{(i)}(+0) = x^{(i)}(-0) \quad (i=0, 1, \dots, n-m-1), \quad (45)$$

$$x^{(i)}(+0) = y_{i+1}(0) + \sum_{k=0}^{i-(n-m)} c_{i-k} g^{(k)}(+0) \quad (i=n-m, \dots, n-1).$$

**Пример 1.** Найти решение дифференциального уравнения

$$x'' + 2x' + x = g'(t) \quad (46)$$

при заданных начальных условиях

$$x(-0) = x'(-0) = 0. \quad (47)$$

Пусть  $g(t)$  — единичная ступенчатая функция, т. е.  $g(t) = 1$  при  $t > 0$ ,  $g(-0) = 0$ ,  $g(+0) = 1$ .

Решение уравнения определим для  $t \in [0, \infty)$ . Коэффициенты уравнения (46) имеют следующие значения:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 0$ . Определим по формулам (39), (41) значения коэффициентов  $c_1$  и  $c_2$ :  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -2$ . Уравнение (46) согласно формулам (42), (43) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 + g(t), \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_1 - 2y_2 - 2g(t). \end{aligned} \quad (48)$$

По формуле (44) определим начальные условия, которым должно удовлетворять решение уравнения (46):

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = -c_1 g(-0) = 0. \quad (49)$$

Найдем общее решение системы (48). Это решение состоит из общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы (18). Общее решение однородной системы

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_1 - 2y_2 \end{aligned} \quad (50)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= (c_1 + c_2 t) e^{-t}, \\ y_2 &= (-c_1 + c_2 - c_2 t) e^{-t}. \end{aligned}$$

Частное решение системы (48) ищем, полагая, что  $g(t) = 1$ . Это решение:  $y_1 = 0$ ;  $y_2 = -1$ . Тогда общее решение системы (48) будет:

$$\begin{aligned} y_1 &= (c_1 + c_2 t) e^{-t}, \\ y_2 &= (-c_1 + c_2 - c_2 t) e^{-t} - 1. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (48), удовлетворяющее начальным условиям (49), есть

$$\begin{aligned} y_1 &= t e^{-t}, \\ y_2 &= (1-t) e^{-t} - 1. \end{aligned}$$

Тогда решение уравнения (46) при  $t > 0$  будет:

$$\begin{aligned} x &= t e^{-t}, \\ x' &= (1-t) e^{-t} - 1 + g(t). \end{aligned} \quad (51)$$

**4. Импульсная переходная функция.** Напишем для неоднородного линейного дифференциального уравнения (19) формулу, аналогичную формуле Коши (см. § 12). Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \quad (52)$$

имеет вид

$$x(t) = \varphi(t) + \int_0^t \bar{x}(t-\tau) g(\tau) d\tau, \quad (53)$$

где  $\varphi(t)$  — решение однородного уравнения  $D(p)x = 0$  (15), удовлетворяющее начальным условиям (52);  $\bar{x}(t)$  — решение однородного уравнения (15), удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{x}(0) = \eta_0, \quad \bar{x}'(0) = \eta_1, \dots, \bar{x}^{(n-1)}(0) = \eta_{n-1}. \quad (54)$$

Постоянные  $\eta_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) определяются из соотношений

$$\begin{aligned} a_0 \eta_0 &= b_{m-n-1}, \\ a_0 \eta_1 + a_1 \eta_0 &= b_{m-n-2}, \\ &\dots \dots \dots \\ a_0 \eta_{n-1} + \dots + a_{n-1} \eta_0 &= b_m, \end{aligned} \quad (55)$$

причем  $b_i = 0$ , если  $i < 0$ .

Формула (53) легко проверяется непосредственной подстановкой в уравнение (19). Следует отметить, что процесс регулирования в САР рассматривается, как правило, при  $t \geq 0$ . При этом полагается, что при  $t \leq 0$  к системе не приложены ни управляющее воздействие  $g(t)$ , ни возмущающее воздействие  $f(t)$  и выходная координата  $x$  вместе со своими производными до  $(n-1)$ -го порядка при  $t \leq 0$  равна нулю. В этом случае начальные условия (33) будут нулевыми и решение  $\varphi(t)$  уравнения (15) тождественно равно нулю. Тогда формула (53) переписывается в виде

$$x(t) = \int_0^t \bar{x}(t-\tau) g(\tau) d\tau. \quad (56)$$

Введем в рассмотрение функцию  $k(t)$ , определенную при  $-\infty < t < \infty$ , следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} \bar{x}(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (57)$$

Тогда формула (56) примет вид

$$x(t) = \int_0^{\infty} k(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t k(\tau) g(t-\tau) d\tau. \quad (58)$$

Функция  $k(t)$  называется *импульсной переходной (весовой) функцией* системы автоматического регулирования. С ее помощью можно вычислить процесс регулирования в САР при подаче на вход системы произвольного воздействия  $g(t)$ . Учитывая, что управляющее воздействие приложено к системе в момент  $t=0$ , т. е.

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ g(t), & t > 0 \end{cases} \quad (59)$$

формулу (58) можно записать следующим образом:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) g(t-\tau) d\tau. \quad (60)$$

Выясним физическую природу импульсной переходной функции. Для этого определим процесс регулирования в САР при управляющем воздействии типа дельта-функции, т. е. положим  $g(t) = \delta(t)$ .

Учитывая фильтрующее свойство дельта-функции (см. § 37)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t), \quad (61)$$

получим

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = k(t). \quad (62)$$

Таким образом, импульсная переходная функция САР представляет реакцию системы на входное воздействие типа дельта-функции. Этим объясняется ее название — импульсная переходная функция.

**Пример 2.** Произвести анализ дифференциального уравнения линеаризованной следящей системы с электромашинным усилителем (см. рис. 42).

Уравнение системы было получено в § 15 (уравнение (84)), оно имеет вид

$$(a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5) x = (b_0 p + b_1) g + (d_0 p^2 + d_1 p^2 + d_2 p + d_3) M_c. \quad (63)$$

Коэффициенты уравнения задаются соотношениями (85) § 15. Из этих соотношений следует, что  $a_n = b_1 = k$ . Таким образом, следящая система с ЭМУ имеет первый порядок астатизма по отношению к управляющему воздействию.

Определим устойчивость САР и импульсную переходную функцию системы при следующих значениях параметров системы:

$$k = 200 \text{ 1/сек}, \quad k_y k_s k_3 = 40, \quad T_y = 0,02 \text{ сек}, \quad T_a = 0,83 \text{ сек}, \quad T_x = 1,2 \text{ сек}, \\ T_1 = 0,1 \text{ сек}, \quad \tau_1 = 1,0 \text{ сек}.$$

С помощью соотношений (85) § 15 вычислим для указанных значений параметров системы коэффициенты уравнения (63):

$$a_0 = 0,002, \quad a_1 = 0,1224, \quad a_2 = 5,146, \quad a_3 = 41,32, \quad a_4 = 201, \quad a_5 = 200, \quad b_0 = 200, \quad b_1 = 200.$$

Корни характеристического уравнения

$$0,002\lambda^5 + 0,1224\lambda^4 + 5,146\lambda^3 + 41,32\lambda^2 + 201\lambda + 200 = 0 \quad (64)$$

имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1,28, \\ \lambda_2 &= -3,75 + j4,88, \\ \lambda_3 &= -3,75 - j4,88, \\ \lambda_4 &= -26,2 + j37,13, \\ \lambda_5 &= -26,2 - j37,13; \end{aligned} \quad (65)$$

все корни лежат в левой полуплоскости, т. е. удовлетворяют необходимому и достаточному условию (18) устойчивости системы автоматического регулирования. Таким образом, при выбранных значениях параметров система регулирования с ЭМУ является устойчивой.

Определим импульсную переходную функцию следящей системы с ЭМУ. Для этого найдем частное решение однородного уравнения

$$(a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5) x = 0, \quad (66)$$

причем согласно равенству (55) начальные условия для этого решения определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} a_0 \bar{x}(0) &= 0, \\ a_0 \bar{x}'(0) + a_1 \bar{x}(0) &= 0, \\ a_0 \bar{x}''(0) + a_1 \bar{x}'(0) + a_2 \bar{x}(0) &= 0, \\ a_0 \bar{x}'''(0) + a_1 \bar{x}''(0) + a_2 \bar{x}'(0) + a_3 \bar{x}(0) &= b_0, \\ a_0 \bar{x}^{IV}(0) + a_1 \bar{x}'''(0) + a_2 \bar{x}''(0) + a_3 \bar{x}'(0) + a_4 \bar{x}(0) &= b_1. \end{aligned} \quad (67)$$

Решением системы уравнений (67) будут значения

$$\begin{aligned} \bar{x}(0) &= 0, \quad \bar{x}'(0) = 0, \quad \bar{x}''(0) = 0, \quad \bar{x}'''(0) = \frac{b_0}{a_0} = 100\,000, \\ \bar{x}^{IV}(0) &= \frac{b_1 a_0 - a_3 b_0}{a_0^2} = -6020\,000. \end{aligned} \quad (68)$$

Найдем решение однородного уравнения (66), удовлетворяющее начальным условиям (68).

Общее решение уравнения (46) имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} + c_4 e^{\lambda_4 t} + c_5 e^{\lambda_5 t}. \quad (69)$$

Для определения произвольных постоянных  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ , учитывая начальные условия (68), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 &= 0, \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 + \lambda_4 c_4 + \lambda_5 c_5 &= 0, \\ \lambda_1^2 c_1 + \lambda_2^2 c_2 + \lambda_3^2 c_3 + \lambda_4^2 c_4 + \lambda_5^2 c_5 &= 0, \\ \lambda_1^3 c_1 + \lambda_2^3 c_2 + \lambda_3^3 c_3 + \lambda_4^3 c_4 + \lambda_5^3 c_5 &= \bar{x}'''(0), \\ \lambda_1^4 c_1 + \lambda_2^4 c_2 + \lambda_3^4 c_3 + \lambda_4^4 c_4 + \lambda_5^4 c_5 &= \bar{x}^{IV}(0). \end{aligned} \quad (70)$$

Определитель системы (70) есть определитель Вандермонда. Корни характеристического уравнения (64) различны, поэтому этот определитель отличен от нуля, и система уравнений (70) имеет единственное решение. Найдем это решение, используя правило Крамера (см. § 4, п. 4). Имеем:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad c_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad c_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad c_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta}. \quad (71)$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \lambda_5^3 \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \lambda_4^4 & \lambda_5^4 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq 5} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Вычислим определители  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  и  $\Delta_5$ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ 0 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 \\ \bar{x}'''(0) & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \lambda_5^3 \\ \bar{x}^{IV}(0) & \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \lambda_4^4 & \lambda_5^4 \end{vmatrix} = -\bar{x}'''(0) \bar{\Delta}_1 + \bar{x}^{IV}(0) \bar{\Delta}_1, \quad (72)$$

причем

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_5 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 & \lambda_5^2 \\ \lambda_2^3 & \lambda_2^3 & \lambda_4^3 & \lambda_5^3 & \lambda_5^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_2 & \lambda_4 - \lambda_2 & \lambda_5 - \lambda_2 & \lambda_5 - \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_2) & \lambda_4(\lambda_4 - \lambda_2) & \lambda_5(\lambda_5 - \lambda_2) & \lambda_5(\lambda_5 - \lambda_2) \\ 0 & \lambda_2^2(\lambda_2^2 - \lambda_2^2) & \lambda_4^2(\lambda_4^2 - \lambda_2^2) & \lambda_5^2(\lambda_5^2 - \lambda_2^2) & \lambda_5^2(\lambda_5^2 - \lambda_2^2) \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_2) \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 \end{vmatrix} \right\} = \\ &= \prod_{2 \leq j < i \leq 5} (\lambda_i - \lambda_j) \cdot \sum_{j=2}^5 \lambda_j, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\bar{\Delta}_1 = \prod_{2 \leq j < i \leq 5} (\lambda_i - \lambda_j). \quad (74)$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \bar{x}'''(0) \bar{\Delta}_2 - \bar{x}^{IV}(0) \bar{\Delta}_2, \\ \Delta_3 &= -\bar{x}'''(0) \bar{\Delta}_3 + \bar{x}^{IV}(0) \bar{\Delta}_3, \\ \Delta_4 &= \bar{x}'''(0) \bar{\Delta}_4 - \bar{x}^{IV}(0) \bar{\Delta}_4, \\ \Delta_5 &= -\bar{x}'''(0) \bar{\Delta}_5 + \bar{x}^{IV}(0) \bar{\Delta}_5, \end{aligned} \quad (75)$$

где

$$\bar{\Delta}_k = \prod_{1 \leq j < i \leq 5} (\lambda_i - \lambda_j) \sum_{j=1}^5 \lambda_j \quad (k=2, 3, 4, 5), \quad (76)$$

$$\bar{\Delta}_k = \prod_{1 \leq j < i \leq 5} (\lambda_i - \lambda_j) \quad (k=2, 3, 4, 5) \quad i, j \neq k. \quad (77)$$

Согласно формулам (71) – (77) найдем

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\prod_{i=2}^5 (\lambda_i - \lambda_1)} \left[ \bar{x}^{IV}(0) - \bar{x}'''(0) \sum_{j=2}^5 \lambda_j \right], \\ c_2 &= \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^5 (\lambda_i - \lambda_2)} \left[ \bar{x}^{IV}(0) - \bar{x}'''(0) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^5 \lambda_j \right], \\ c_3 &= \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^5 (\lambda_i - \lambda_3)} \left[ \bar{x}^{IV}(0) - \bar{x}'''(0) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^5 \lambda_j \right], \\ c_4 &= \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 4}}^5 (\lambda_i - \lambda_4)} \left[ \bar{x}^{IV}(0) - \bar{x}'''(0) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 4}}^5 \lambda_j \right], \\ c_5 &= \frac{1}{\prod_{i=1}^4 (\lambda_i - \lambda_5)} \left[ \bar{x}^{IV}(0) - \bar{x}'''(0) \sum_{j=1}^4 \lambda_j \right]. \end{aligned} \quad (78)$$

Подставив в равенства (78) значения  $\lambda_i$  из (65) и значения  $x'''(0)$  и  $x^{IV}(0)$  из (48), получим:

$$\begin{aligned} c_1 &= -0,47, \\ c_2 &= -0,42 - j5,59, \\ c_3 &= -0,42 + j5,59, \\ c_4 &= -0,642 + j0,328, \\ c_5 &= -0,642 - j0,328. \end{aligned}$$

Подставив найденные значения произвольных постоянных  $c_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ) в формулу (69), получим импульсную переходную функцию следящей системы с ЗМУ:

$$k(t) = -0,47e^{-1,28t} + e^{-3,75t}(-0,84 \cos 4,88t + 11,18 \sin 4,88t) + e^{-26,2t} \times \\ \times (1,285 \cos 37,13t - 0,656 \sin 37,13t), \\ t \geq 0, \\ k(t) = 0, \quad t < 0. \quad (79)$$

С помощью найденной импульсной переходной функции системы можно легко определить реакцию САР на единичное ступенчатое воздействие.

Пусть

$$g(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Тогда выходная координата системы определяется с помощью формулы (38), где следует положить  $g(t-\tau) = 1(t-\tau)$ ,  $x = h(t)$ :

$$h(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau = \int_0^t [-0,47e^{-1,28\tau} + e^{-3,75\tau}(-0,84 \cos 4,88\tau + \\ + 11,18 \sin 4,88\tau) + e^{-26,2\tau}(1,285 \cos 37,13\tau - 0,656 \sin 37,13\tau)] d\tau = \\ = 1 + 0,375e^{-1,28t} - e^{-3,75t}(1,37 \cos 4,88t + 1,3 \sin 4,88t) + \\ + e^{-26,2t}(-0,005 \cos 37,13t + 0,035 \sin 37,13t). \quad (80)$$

**5. Особенности процессов в нелинейных системах.** Анализ дифференциальных уравнений нелинейных систем автоматического регулирования значительно сложнее, чем анализ уравнений линейных САР. В § 13 рассмотрены некоторые методы решений нелинейных дифференциальных уравнений. Решения нелинейных дифференциальных уравнений не имеют той характерной структуры, которая свойственна решениям линейных уравнений. К этим уравнениям неприменим принцип суперпозиции, поэтому отдельные частные решения суммировать нельзя. Невозможно указать общие методы, пригодные для решения таких уравнений, функциональный вид решения существенно зависит от вида правой части уравнения и начальных условий. Из этого следует, что нельзя построить общее решение нелинейного дифференциального уравнения, описывающего процессы в САР, из которого можно было бы получить решение уравнения при конкретно заданных начальных условиях и определенных воздействиях, приложенных к системе. Решение нелинейных уравнений обычно производится приближенными методами или с помощью вычислитель-

ных устройств, причем выбор того или иного способа определяется конкретными условиями задачи.

Если поведение нелинейной САР описывается уравнением (9), то при постоянных входном воздействии  $g(t) = g_0 1(t)$  и возмущающем воздействии  $f(t) = f_0 1(t)$  уравнение (9) принимает вид

$$\Phi_1(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = \Phi_2(g_0, 0, \dots, 0, f_0, 0, \dots, 0). \quad (81)$$

Каждое решение  $x(t)$  этого уравнения определяет процесс регулирования в САР. Под установившимся процессом в нелинейной САР понимают решение  $x_y(t)$  уравнения (81), обладающее некоторыми специфическими стационарными свойствами. Это могут быть либо состояние равновесия, либо колебательный установившийся процесс с постоянными амплитудой и частотой. Состояния равновесия определяются из уравнения

$$\Phi_1(x_y, 0, \dots, 0) = \Phi_2(g_0, 0, \dots, 0, f_0, 0, \dots, 0). \quad (82)$$

Уравнение (82) может иметь не одно, а множество решений. В соответствии с этим в САР возможны либо несколько состояний равновесия, либо целая область состояний равновесия.

Если установившийся процесс имеет постоянное значение  $x_y(t) = x_0$ , то для получения уравнения переходного процесса следует подставить  $x(t) = x_y + x_n(t)$  в уравнение (81) и вычесть из уравнения (81) уравнение (82):

$$\Phi_1(x_y + x_n, \frac{dx_n}{dt}, \dots, \frac{d^n x_n}{dt^n}) - \Phi_1(x_y, 0, \dots, 0) = 0. \quad (83)$$

Если в нелинейной системе наблюдается установившийся колебательный процесс  $x_k(t)$  с постоянной составляющей  $x_c$ , то он определяется уравнением

$$\Phi_1(x_k + x_c, \frac{dx_k}{dt}, \dots, \frac{d^n x_k}{dt^n}) = \Phi_2(g_0, 0, \dots, 0, f_0, 0, \dots, 0), \quad (84)$$

причем постоянная составляющая  $x_c$  удовлетворяет уравнению (82). Вычитая (82) из (84), можно получить уравнение для определения установившегося колебательного процесса:

$$\Phi_1(x_k + x_c, \frac{dx_k}{dt}, \dots, \frac{d^n x_k}{dt^n}) - \Phi_1(x_c, 0, \dots, 0) = 0. \quad (85)$$

Из сравнения уравнений (83) и (85) видно, что установившийся колебательный процесс можно рассматривать, как частное решение уравнения переходного процесса.

В линейных САР, не находящихся на границе устойчивости, периодический процесс возможен лишь при наличии внешнего периодического воздействия. В нелинейных САР, напротив, возможен устойчивый периодический процесс при отсутствии внешних периодических воздействий. Такой процесс называется *автоколебательным процессом*. Параметры автоколебаний (амплитуда и частота) не зависят от начальных условий. В случае нескольких периодических движений эта независимость имеет локальный характер.

Укажем особенности переходных процессов в линейных и нелинейных САР.

Характер переходных процессов в линейных системах связан со значениями корней характеристических уравнений систем и функционально не зависит от начальных условий. В нелинейных системах картина иная. Здесь функционально вид переходных процессов может существенно зависеть от начальных условий. В зависимости от начальных условий переходный процесс в нелинейных системах может быть монотонным или колебательным, сходящимся или расходящимся. Существенным отличием колебательных переходных процессов в нелинейных системах является также зависимость

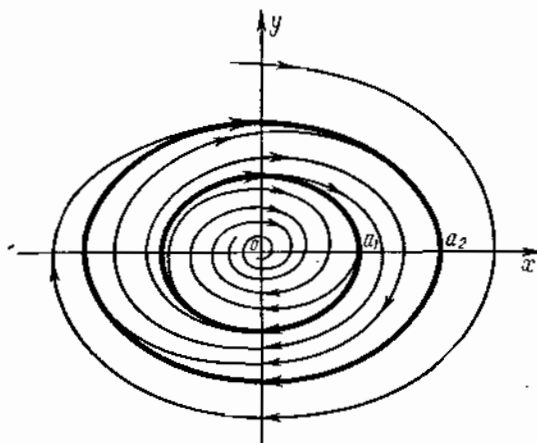


Рис. 48

частоты колебаний от амплитуды.

В линейных системах переходный процесс затухает до нуля или расходуется до бесконечности в зависимости от того, имеют ли корни характеристического уравнения системы отрицательные или положительные вещественные части. В первом случае линейная САР является устойчивой, а во втором — неустойчивой. Суждение об устойчивости такой системы никак не связано с начальными условиями.

В нелинейных системах, как отмечалось выше, возможны несколько установившихся состояний; поэтому анализ устойчивости нелинейной системы представляет собой рассмотрение устойчивости каждого установившегося состояния. Нелинейная САР при одних отклонениях регулируемой величины от какого-либо установившегося состояния может оказаться устойчивой, а при других отклонениях — неустойчивой, поэтому при исследовании устойчивости системы необходимо принимать во внимание начальные условия. Исследование устойчивости установившихся состояний в нелинейной системе позволяет выявить, какие из этих состояний могут реально существовать в системе.

Если переходный процесс в нелинейной САР затухает при начальных условиях, удовлетворяющих неравенству

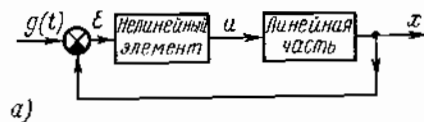
$$\|x(t_0)\| < a,$$

и расходится при начальных условиях

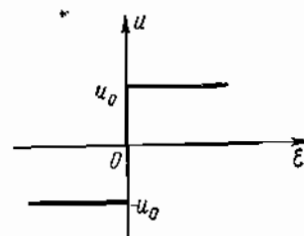
$$\|x(t_0)\| > a,$$

то говорят, что нелинейная САР устойчива «в малом» и неустойчива «в большом».

На рис. 48 изображены фазовые траектории нелинейной САР, имеющей три возможных установившихся состояния: 1) состояние равновесия  $(x, y) = (0, 0)$ ; 2) колебания с амплитудой  $a_1$ ; 3) колебания с амплитудой  $a_2$ . Колебательный процесс с амплитудой  $a_1$  неустойчив. Колебательный процесс с амплитудой  $a_2$  — устойчив, т. е. представляет собой автоколебания. В зависимости от начальных условий в системе отклонения регулируемой координаты САР будут либо затухать до нуля (система устойчива «в малом»), либо отклонения регулируемой координаты САР будут стремиться к колебаниям с амплитудой  $a_2$  (система неустойчива «в большом»).



а)



б)

**Пример 3.** Произвести анализ нелинейной системы автоматического регулирования. Структурная схема системы приведена на рис. 49, а. Характеристика нелинейного элемента изображена на рис. 49, б. Уравнение нелинейного элемента имеет вид

$$u = u_0 \operatorname{sign} \varepsilon. \quad (86)$$

Пусть линейная часть системы автоматического регулирования описывается линейным дифференциальным уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_2 - T_1) \frac{dx}{dt} - x = k_0 u. \quad (87)$$

Уравнение ошибки системы

$$\varepsilon = g - x. \quad (88)$$

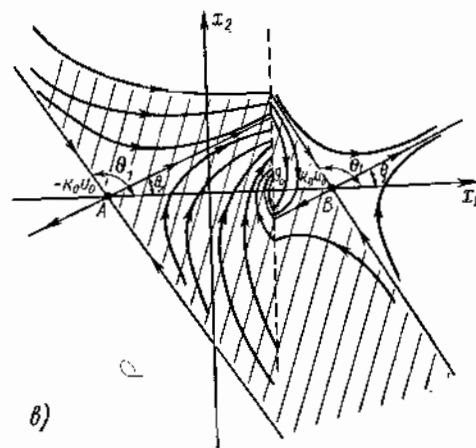


Рис. 49

Совокупность уравнений (86) — (88) описывает поведение нелинейной системы регулирования в целом. Исключив из уравнений (86) — (88) переменные  $\varepsilon$  и  $u$ , получим нелинейное дифференциальное уравнение

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_2 - T_1) \frac{dx}{dt} - x = k_0 u_0 \operatorname{sign}(g - x). \quad (89)$$

Введем обозначения

$$x = x_1, \quad \frac{dx}{dt} = x_2$$

и перейдем от уравнения (89) к нормальной системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{T_1 T_2} x_1 - \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} x_2 + \frac{k_0 u_0}{T_1 T_2} \operatorname{sign}(g - x_1). \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Рассмотрим поведение нелинейной САР при управляющем воздействии  $g = g_0 = \text{const}$  ( $t \geq 0$ ), причем полагаем, что справедливо неравенство

$$0 < g_0 < k_0 u_0. \quad (91)$$

Состояния равновесия нелинейной САР определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= 0, \\ \frac{1}{T_1 T_2} x_1 - \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} x_2 + \frac{k_0 u_0}{T_1 T_2} \operatorname{sign}(g_0 - x_1) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

решениями которой являются

$$x_1 = -k_0 u_0, \quad x_2 = 0,$$

и

$$x_1 = k_0 u_0, \quad x_2 = 0.$$

Кроме этого, при значении  $x_1 = g_0$ , система (92) будет неопределенной. Если положить  $\operatorname{sign} 0 = -\frac{g_0}{k_0 u_0}$ , то система уравнений имеет помимо указанных выше решений также решение

$$x_1 = g_0, \quad x_2 = 0.$$

Исследуем характер движения нелинейной САР в окрестности точек состояний равновесия  $A(-k_0 u_0, 0)$  и  $B(k_0 u_0, 0)$  (рис. 49, в). Для исследования состояния равновесия  $A(-k_0 u_0, 0)$  сделаем замену переменных

$$\xi = x_1 + k_0 u_0, \quad \eta = x_2, \quad (93)$$

тогда система уравнений (90) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{1}{T_1 T_2} \xi - \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \eta. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Найдем корни  $\lambda_1, \lambda_2$  характеристического уравнения

$$\left| \begin{array}{cc} -\lambda & 1 \\ \frac{1}{T_1 T_2} & -\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} - \lambda \end{array} \right| = \lambda^2 + \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \lambda - \frac{1}{T_1 T_2} = 0;$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{T_2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{T_1}.$$

Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  действительные и различных знаков, поэтому (см. § 14) в точке  $A(-k_0 u_0, 0)$  имеем особую точку типа «седло». Решение, соответствующее характеристическому числу  $\lambda_1$ , имеет вид

$$\xi_1 = c_1 e^{\frac{t}{T_2}}, \quad \eta_1 = c_2 e^{\frac{t}{T_2}}.$$

Найдем связь между постоянными  $c_1$  и  $c_2$ . Для этого подставим  $\xi_1$  и  $\eta_1$  в систему уравнений (94) и после сокращения на  $e^{\frac{t}{T_2}}$  получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_1}{T_2} &= c_2, \\ \frac{c_2}{T_2} &= -\frac{c_1}{T_1 T_2} - \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} c_2, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$c_1 = c_2 T_2.$$

Решение, соответствующее характеристическому числу  $\lambda_2$ , будет

$$\xi_2 = c_3 e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad \eta_2 = c_4 e^{-\frac{t}{T_1}},$$

причем постоянные  $c_3$  и  $c_4$  связаны между собой соотношением

$$c_3 = -c_4 T_1.$$

Общее решение системы (94) получим в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi &= c_1 T_2 e^{\frac{t}{T_2}} - c_2 T_1 e^{-\frac{t}{T_1}}, \\ \eta &= c_1 e^{\frac{t}{T_2}} + c_2 e^{-\frac{t}{T_1}}. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Найдем прямолинейные фазовые траектории, которые являются асимптотами в окрестности особой точки типа «седло». Их уравнение

$$\eta = k\xi. \quad (96)$$

Исключим время  $t$  из системы уравнений (94), поделив второе уравнение системы на первое. Получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\frac{1}{T_1 T_2} \xi - \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \eta}{\eta}. \quad (97)$$

Для определения  $k$  подставим значение  $\eta$  из уравнения (96) в уравнение (97):

$$k = \frac{\frac{1}{T_1 T_2} - \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} k}{k},$$

откуда

$$k^2 + \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} k - \frac{1}{T_1 T_2} = 0$$

и

$$k_1 = \frac{1}{T_2}, \quad k_2 = -\frac{1}{T_1}.$$

Следовательно, уравнения асимптот, проходящих через точку  $A(-k_0 u_0, 0)$  имеют вид

$$x_2 = \frac{1}{T_2} (x_1 + k_0 u_0), \quad x_2 = -\frac{1}{T_1} (x_1 + k_0 u_0). \quad (98)$$

Изучим характер движения нелинейной САР в окрестности особой точки  $B(k_0 u_0, 0)$ . Для этого сделаем замену переменных

$$\xi = x_1 - k_0 u_0, \quad \eta = x_2. \quad (99)$$



Тогда система уравнений (90) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{1}{T_1 T_2} \xi - \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \eta. \end{aligned} \quad (100)$$

Система уравнений (100) совпадает с системой (94), поэтому все результаты анализа системы уравнений (94) применимы к системе уравнений (100), т. е. особая точка  $B(k_0 u_0, 0)$  также является особой точкой типа «седло», причем прямолинейные фазовые траектории имеют уравнения

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{T_2} (x_1 - k_0 u_0), \\ x_2 &= -\frac{1}{T_1} (x_1 - k_0 u_0). \end{aligned} \quad (101)$$

Следует отметить, что система уравнений (94) справедлива в полуплоскости  $x_1 < g_0$ , а система уравнений (100) — в полуплоскости  $x_1 > g_0$ . На прямой  $x_1 = g_0$  происходит переключение релейного элемента. В соответствии с этим фазовые траектории системы имеют вид, изображенный на рис. 49, в. Заштрихованная область является областью устойчивости, так как все фазовые траектории, которые начинаются внутри этой области, с течением времени стремятся к точке  $(g_0, 0)$ , т. е. система регулирования обрабатывает поступающее на вход воздействие  $g = g_0$ .

## УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

### § 17. ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

**1. Устойчивость в смысле Ляпунова.** Под устойчивостью системы автоматического регулирования обычно понимают свойство системы возвращаться к первоначальному состоянию после прекращения действия внешнего возмущения. Требование устойчивости является одним из основных требований, предъявляемых к системе автоматического регулирования, и определяет, как правило, работоспособность системы. Полагая, что система автоматического регулирования описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотрим устойчивость решений дифференциальных уравнений. Пусть поведение системы автоматического регулирования описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — переменные, характеризующие состояние системы.

В векторном виде систему (1) можно записать следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (2)$$

В уравнении (2) приняты обозначения:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Если система уравнений (1) является автономной, то уравнение (2) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (3)$$

Введем в рассмотрение  $n + 1$ -мерное пространство  $E^{n+1}$ , координатами которого являются  $t, x_1, \dots, x_n$ . Будем рассматривать только такие системы, правые части которых непрерывны по всем аргументам и имеют непрерывные частные производные по зависимым переменным  $x_1, \dots, x_n$ . В этом случае выполняются условия теоремы существования и единственности, т. е. для любых начальных значений

$$t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}$$

существует и притом единственное решение

$$x_i = \xi_i(t, x_{i0}) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\xi_i(t_0, x_{i0}) = x_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Потребуем бесконечной продолжительности решения (4), т. е. будем считать функции  $\xi_i(t)$  определенными для  $t_0 \leq t < \infty$ , причем  $t_0$  можем считать равным  $-\infty$ .

Рассмотрим некоторое решение системы (2)  $x_i = \xi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), определенное на интервале  $[t_0, \infty)$ , причем  $\xi_i(t_0) = x_{i0}$ .

Введем важные определения. Решение  $\xi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) называется *устойчивым по Ляпунову* при  $t \rightarrow \infty$ , если для любого

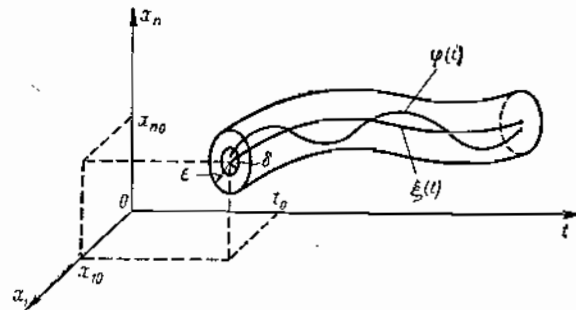


Рис. 50

$\epsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , зависящее от  $\epsilon$  и  $t_0$ , что любое решение  $x_i = \varphi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), для которого при  $t=t_0$  выполняется неравенство  $|\varphi_i(t_0) - \xi_i(t_0)| < \delta$ , удовлетворяет неравенству  $|\varphi_i(t) - \xi_i(t)| < \epsilon$  при  $t_0 \leq t < \infty$  для всех  $i=1, 2, \dots, n$ .

Геометрически это означает, что все решения, которые при  $t=t_0$  начинаются в  $\delta$ -окрестности точки  $(x_{10}, \dots, x_{n0})$ , никогда не покинут  $\epsilon$ -трубку решения  $\xi(t)$  (рис. 50).

Решение  $\xi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) называется *неустойчивым*, если существует  $\epsilon > 0$ , такое, что для любого  $\delta > 0$  найдется такой момент времени  $t=t_1$ , что для некоторого значения  $i=k$  и  $t=t_1$  будет выполняться неравенство  $|\varphi_k(t_1) - \xi_k(t_1)| \geq \epsilon$ , несмотря на то, что  $|\varphi_i(t_0) - \xi_i(t_0)| < \delta$  для всех  $i=1, 2, \dots, n$ .

Решение  $\xi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) называется *асимптотически устойчивым*, если:

1) решение  $\xi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ ;

2) существует такое число  $H > 0$ , что для любого решения  $\varphi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), удовлетворяющего при  $t=t_0$  неравенству

$|\varphi_i(t_0) - \xi_i(t_0)| < H$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), будет справедливо равенство  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_i(t) - \xi_i(t)| = 0$ .

Если  $H = \infty$ , то динамическая система называется *устойчивой в целом*.

2. **Устойчивость тривиального решения.** Покажем, что исследование устойчивости любого решения системы (1) можно свести к исследованию устойчивости тривиального решения  $x_i(t) \equiv 0$ .

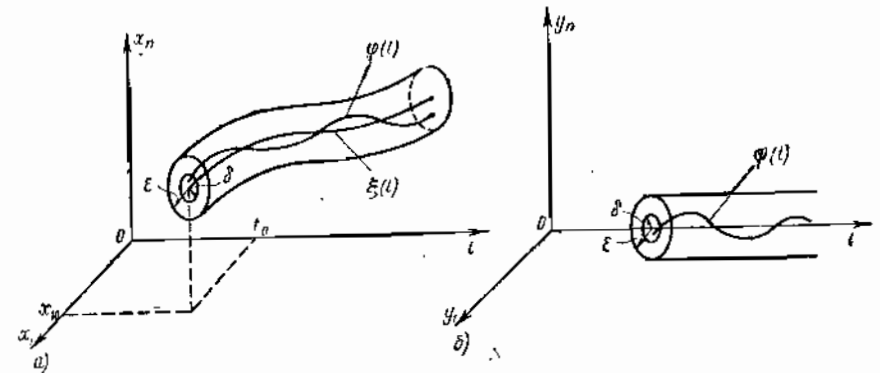


Рис. 51

Пусть  $x_i = \xi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — некоторое решение системы (1). Введем новые переменные

$$y_i = x_i - \xi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad (6)$$

тогда

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1 + \xi_1(t), \dots, y_n + \xi_n(t)) - f_i(t, \xi_1(t), \dots, \xi_n(t)),$$

т. е.

$$\frac{dy_i}{dt} = \psi_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

где

$$\psi_i(t, y_1, \dots, y_n) = f_i(t, y_1 + \xi_1(t), \dots, y_n + \xi_n(t)) - f_i(t, \xi_1(t), \dots, \xi_n(t)).$$

Очевидно, что  $\psi_i(t, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0$ , т. е. система (7) будет иметь тривиальное решение  $y_i(t) \equiv 0$ . Система (7) носит название *системы уравнений возмущенного движения*.

Рассмотрим два пространства: пространство  $E_x$  решений системы (1) и пространство  $E_y$  решений системы (7) (рис. 51).

Согласно формуле (6), каждой интегральной кривой пространства  $E_x$  соответствует некоторая интегральная кривая пространства  $E_y$ . Интегральной кривой  $x_i = \xi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) соответствует интегральная кривая  $y_i(t) \equiv 0$ .

Если решение  $x_i = \xi_i(t)$  устойчиво в пространстве  $E_x$ , то решение  $y_i(t) \equiv 0$  устойчиво в пространстве  $E_y$ , и наоборот. Поэтому вместо

исследования устойчивости решения  $x_i = \xi_i(t)$  системы (1) можно исследовать устойчивость тривиального решения системы (7).

Тривиальное решение  $y_i(t) \equiv 0$  будет устойчивым по Ляпунову, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , зависящее от  $\varepsilon$  и  $t_0$ , что для любого решения  $y_i = \psi_i(t)$ , удовлетворяющего при  $t = t_0$  неравенству  $|\psi_i(t_0)| < \delta$ , выполняется неравенство  $|\psi_i(t)| < \varepsilon$  при  $t_0 \leq t < \infty$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В тех случаях когда параметры систем автоматического регулирования не изменяются с течением времени, их поведение описывается автономной системой дифференциальных уравнений вида (3). Особое значение в этом случае имеет устойчивость состояний равновесия. Состояния равновесия определяются корнями уравнений

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Уравнения (8) являются уравнениями статики системы автоматического регулирования.

Пусть  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  — некоторое решение системы (8). С помощью замены переменных

$$y_1 = x_1 - a_1, \dots, y_n = x_n - a_n$$

исследование устойчивости состояния равновесия можно свести к исследованию устойчивости тривиального решения. В фазовом пространстве системы эта замена соответствует переносу начала координат в точку состояния равновесия  $(a_1, \dots, a_n)$ .

В дальнейшем будем изучать в основном устойчивость состояний равновесия автоматических систем.

## § 18. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

**1. Устойчивость однородной системы.** Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}(t)x_1 + \dots + a_{in}(t)x_n + f_i(t) \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $a_{ij}(t)$ ,  $f_i(t)$  — непрерывные функции в полуинтервале  $[b \leq t < \infty)$ .

В векторной форме систему (1) можно записать следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (2)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Однородная система, соответствующая системе (2), имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \quad (3)$$

Эта система имеет тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$ . Устойчивость произвольного решения связывает с устойчивостью тривиального решения следующая теорема:

**Теорема 1.** Любое решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво ее тривиальное решение.

**Доказательство.** Докажем сначала достаточность условия теоремы. Пусть тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  устойчиво. Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого решения  $x = \xi(t)$ , удовлетворяющего при  $t = t_0$  неравенству  $\|\xi(t_0)\| < \delta$ , будет справедливо неравенство  $\|\xi(t)\| < \varepsilon$  для всех значений  $t \geq t_0$ .

Пусть  $x = \psi(t)$  — произвольное решение. Докажем его устойчивость. Обозначим через  $x = \varphi(t)$  другое произвольное решение, удовлетворяющее при  $t = t_0$  условию

$$\|\psi(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta. \quad (4)$$

Из свойств решений однородной системы (см. § 11) следует, что разность  $\psi(t) - \varphi(t) = \xi(t)$  также будет решением системы (3), причем при  $t = t_0$  норма этого решения меньше  $\delta$ . Тогда в силу устойчивости тривиального решения получим неравенство  $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$  при  $t > t_0$ , что и означает устойчивость решения  $x = \psi(t)$ . Достаточность условия теоремы доказана.

Выполним доказательство необходимости условия теоремы. Пусть решение  $x = \psi(t)$  устойчиво. Покажем, что тогда будет устойчиво тривиальное решение. Устойчивость решения означает, что для произвольного решения  $\varphi(t)$ , удовлетворяющего при  $t = t_0$  неравенству  $\|\psi(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$ , будет справедливо неравенство  $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$  при  $t \geq t_0$ .

Пусть  $x = \xi(t)$  — решение системы (3), удовлетворяющее условию  $\|\xi(t_0)\| < \delta$ . Запишем это решение в виде

$$\xi(t) = [\xi(t) + \psi(t)] - \psi(t).$$

Сумма решений  $\xi(t) + \psi(t)$  представляет собой также решение системы (3), причем при  $t = t_0$  справедливо неравенство

$$\|[\xi(t) + \psi(t)] - \psi(t)\| < \delta.$$

Тогда из устойчивости решения  $\psi(t)$  следует, что при  $t \geq t_0$  будет выполняться неравенство

$$\|[\xi(t) + \psi(t)] - \psi(t)\| = \|\xi(t)\| < \varepsilon, \quad (5)$$

что и означает устойчивость тривиального решения. Этим доказана необходимость условия теоремы.

Теорема доказана полностью.

Из теоремы следует, что в линейной однородной системе с непрерывными коэффициентами из устойчивости хотя бы одного решения вытекает устойчивость всех остальных решений и обратно, если

неустойчиво хотя бы одно решение, то все остальные решения также неустойчивы.

Однородная линейная система дифференциальных уравнений, все решения которой устойчивы, называется *устойчивой системой*, если все решения этой системы неустойчивы — *неустойчивой системой*.

Следующая теорема, которую мы приведем без доказательства, связывает устойчивость линейной однородной системы с ограниченностью ее решений.

**Теорема 2.** *Линейная однородная система дифференциальных уравнений устойчива тогда и только тогда, когда каждое ее решение ограничено для  $t \geq t_0$ .*

Линейная однородная система дифференциальных уравнений называется *асимптотически устойчивой*, если каждое ее решение асимптотически устойчиво.

Приведем без доказательства теорему об асимптотической устойчивости однородной системы.

**Теорема 3.** *Линейная однородная система дифференциальных уравнений асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда асимптотически устойчиво ее тривиальное решение.*

Из теоремы 3 следует, что

1) асимптотически устойчивая линейная однородная система устойчива в целом;

2) если в линейной однородной системе асимптотически устойчиво хотя бы одно решение, то все остальные решения также асимптотически устойчивы.

**2. Устойчивость неоднородной системы.** Следующая теорема устанавливает связь устойчивости решений неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений с устойчивостью решений однородной линейной системы.

**Теорема 4.** *Линейная неоднородная система дифференциальных уравнений устойчива (асимптотически устойчива) тогда и только тогда, когда устойчива (асимптотически устойчива) соответствующая однородная система уравнений.*

**Доказательство.** Докажем достаточность условий теоремы. Пусть однородная система (3) устойчива. Покажем, что в этом случае будет устойчива и неоднородная система (2), т. е. будет устойчиво ее любое решение.

Пусть  $x = \psi(t)$  — некоторое решение системы (2). Исследуем его устойчивость. Рассмотрим норму разности

$$\|\psi(t) - \varphi(t)\|,$$

где  $\varphi(t)$  — некоторое другое решение системы (2) с начальным условием  $\varphi(t_0)$ , удовлетворяющим неравенству

$$\|\varphi(t_0) - \psi(t_0)\| < \delta. \quad (6)$$

Разность двух решений  $\psi(t) - \varphi(t)$  неоднородной системы (2) является решением однородной системы (3). По условию теоремы

однородная система (3) устойчива, т. е. если выполнено неравенство (6), то для всех  $t \geq t_0$  будет справедливо неравенство

$$\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \epsilon,$$

что и означает устойчивость решения  $x = \psi(t)$  неоднородной системы уравнений.

Необходимость условий теоремы доказывается аналогично.

**3. Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами.** Рассмотрим устойчивость линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (7)$$

где  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$  — квадратная матрица постоянных коэффици-

ентов;  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  — вектор-столбец неизвестных функций.

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — различные корни характеристического уравнения  $\det(A - \lambda E) = 0$ , а  $e_1, \dots, e_k$  — максимальные показатели степени элементарных делителей, соответствующих этим корням. В § 12 было показано, что решение системы (7) в этом случае имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^k P_i(t) e^{\lambda_i t}, \quad (8)$$

причем  $P_i(t)$  — вектор-столбец, элементами которого являются многочлены от  $t$ ; степень этих многочленов не превышает  $e_i - 1$ .

Устойчивость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами определяется следующей теоремой:

**Теорема 5.** *Для устойчивости линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения системы имели неположительные вещественные части, причем элементарные делители, соответствующие корням характеристического уравнения с нулевой вещественной частью, были бы простыми.*

Из теоремы следует, что линейная система с постоянными коэффициентами будет устойчивой и в случае кратных корней характеристического уравнения, лежащих на мнимой оси плоскости  $\lambda$ , только этим корням должны соответствовать простые элементарные делители, т. е. соответствующая клетка Жордана должна состоять из одного элемента.

**Доказательство.** Докажем достаточность условий теоремы. Для доказательства разобьем корни характеристического уравнения на две категории:

а) корни, лежащие в левой полуплоскости:

$$\lambda_m = \alpha_m + j\beta_m, \quad \operatorname{Re} \lambda_m = \alpha_m < 0, \\ (m = 1, 2, \dots, \mu);$$

б) корни, лежащие на мнимой оси:

$$\lambda_n = j\beta_n \quad (n = 1, 2, \dots, \nu).$$

Тогда решение (8) можно записать в виде (см. § 12)

$$x = \sum_{m=1}^{\mu} P_m(t) e^{\lambda_m t} + \sum_{n=1}^{\nu} e^{j\beta_n t} c_n. \quad (9)$$

Так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\lambda_m t}| P_m(t) = 0$$

и  $|e^{j\beta_n t}| = 1$ , то решение (9) будет ограничено при всех  $t \geq t_0$  и, следовательно, в силу теоремы (2) устойчиво.

Необходимость условий теоремы легко доказывается способом от противного.

Рассмотрим устойчивость линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Как было показано в § 12, в том случае, когда характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (10)$$

имеет корень  $\lambda_i$  кратности  $e_i$ , характеристическая матрица имеет элементарный делитель  $(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$  и никаких других элементарных делителей, которые представлялись бы степенью  $(\lambda - \lambda_i)$ , не имеет. Отсюда следует, что для линейного дифференциального уравнения порядка  $n$  теорема (5) может быть переформулирована в виде следующей теоремы:

**Теорема 6.** Для устойчивости линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения имели неположительные вещественные части, причем корни с нулевой вещественной частью должны быть простыми.

При исследовании линейных систем автоматического регулирования особый интерес представляет случай асимптотической устойчивости. Асимптотическая устойчивость линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами определяется следующей теоремой:

**Теорема 7.** Для асимптотической устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы вещественные части корней характеристического уравнения были отрицательны, т. е. характеристические числа матрицы  $A$  должны располагаться в левой полуплоскости.

**Доказательство.** Докажем достаточность утверждения теоремы. Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

$e_1, e_2, \dots, e_k$  — кратности этих корней.

По условию теоремы  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Каждое решение системы (7) может быть записано в виде

$$x = \sum_{i=1}^k P_i(t) e^{\lambda_i t},$$

где  $P_i(t)$  — полиномиальные вектор-столбцы, причем максимальная степень полиномов, входящих в  $P_i(t)$ , не превосходит  $e_i - 1$ .

Пусть  $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ , тогда  $x = \sum_{i=1}^k e^{\alpha_i t} e^{j\beta_i t} P_i(t)$ . В силу отрица-

тельности действительных частей характеристических чисел  $\alpha_i < 0$  и  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Так как это справедливо для любого решения, то система уравнений с постоянными коэффициентами будет устойчива асимптотически. Достаточность условий теоремы доказана.

Необходимость условий теоремы доказывается способом от противного.

Из доказанной теоремы следует, что для суждения об устойчивости системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следует знать характер расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости корней. Характер расположения корней характеристического уравнения на этой плоскости можно определить, не решая самого уравнения, с помощью критерия Гурвица, рассмотренного ниже.

**4. Критерий Гурвица.** Рассмотрим полином

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (n \geq 1). \quad (11)$$

Будем полагать, что  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) — действительные числа, причем  $a_0 > 0$ . В общем случае корни полинома  $P(\lambda)$  могут быть комплексными числами и полином  $P(\lambda)$  может рассматриваться как функция комплексного переменного  $\lambda = \alpha + j\beta$ . Такой полином назовем **стандартным**. Стандартный полином называется **полиномом Гурвица**, или **гурвицевым полиномом**, если действительные части всех его корней отрицательны, т. е. все корни расположены в левой полуплоскости;

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

Необходимое (но не достаточное) условие для того, чтобы стандартный полином был полиномом Гурвица, устанавливается следующей теоремой:

**Теорема 8.** Если стандартный полином есть полином Гурвица, то все его коэффициенты положительны.

**Доказательство.** Пусть комплексные корни полинома (11) есть

$$\lambda_m = -\alpha_m + j\beta_m \quad (m = 1, 2, \dots, \mu, \alpha_m > 0),$$

причем их кратности соответственно равны  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Но для полинома с действительными коэффициентами каждому комплексному корню соответствует сопряженный корень, причем той же кратности. Таким образом, числа

$$\bar{\lambda}_m = -\alpha_m - j\beta_m \quad (m=1, 2, \dots, \mu)$$

также будут корнями полинома  $P(\lambda)$  с кратностями  $e_1, \dots, e_\mu$ .

Пусть действительные корни полинома будут  $\lambda_n = -\gamma_n$  ( $n=1, 2, \dots, \nu$ ),  $\gamma_n > 0$  и их кратности соответственно равны  $e_n$ . Тогда полином  $P(\lambda)$  можно разложить на линейные множители, т. е. записать в виде

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= a_0 \prod_{m=1}^{\mu} (\lambda + \alpha_m - j\beta_m)^{e_m} \prod_{m=1}^{\mu} (\lambda + \alpha_m + j\beta_m)^{e_m} \prod_{n=1}^{\nu} (\lambda + \gamma_n)^{e_n} = \\ &= a_0 \prod_{m=1}^{\mu} (\lambda^2 + 2\alpha_m\lambda + \alpha_m^2 + \beta_m^2)^{e_m} \prod_{n=1}^{\nu} (\lambda + \gamma_n)^{e_n}. \end{aligned}$$

Из написанного разложения следует, что коэффициенты полинома  $P(\lambda)$   $a_i > 0$ , что и доказывает теорему.

Заметим, что для полиномов первой и второй степени указанное в условии теоремы необходимое условие является также и достаточным. Для полиномов третьей и выше степеней это условие уже не будет достаточным.

Получим достаточные условия для того, чтобы стандартный полином был полиномом Гурвица. Для этого рассмотрим сначала некоторые вспомогательные построения и леммы.

Пусть имеется стандартный полином Гурвица

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Построим полином  $P^*(\lambda)$  следующим образом:

$$P^*(\lambda) = (-1)^n P(-\lambda) = a_0\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n. \quad (13)$$

Все корни полинома  $P(\lambda)$  расположены в левой полуплоскости, поэтому полином  $P^*(\lambda)$  имеет все корни в правой полуплоскости.

Пусть  $c > 0$  — некоторое положительное число. Полином

$$Q(\lambda) = (\lambda + c)P(\lambda) + \lambda P^*(\lambda) \quad (14)$$

называется полиномом, *присоединенным к полиному  $P(\lambda)$* . Степень полинома  $Q(\lambda)$  на единицу выше, чем степень  $P(\lambda)$ .

Приведем без доказательства две леммы, устанавливающие свойства присоединенных полиномов.

*Лемма 1.* Для каждого полинома Гурвица его присоединенные полиномы также являются стандартными полиномами Гурвица.

*Лемма 2.* Каждый стандартный полином Гурвица степени выше первой является присоединенным для некоторого стандартного полинома Гурвица более низкой степени.

Если полином  $Q(\lambda) = A_0\lambda^{n+1} + A_1\lambda^n + \dots + A_{n+1}$  — стандартный полином Гурвица степени  $n+1$ , то стандартный полином Гурвица

$P(\lambda)$  степени  $n$ , для которого полином  $Q(\lambda)$  является присоединенным, определяется выражением

$$P(\lambda) = \frac{1}{c^2} [(c - \lambda)Q(\lambda) + \lambda Q^*(\lambda)], \quad (15)$$

где

$$c = \frac{2A_1}{A_0} > 0.$$

Из приведенных лемм следует, что для любого стандартного полинома Гурвица  $P(\lambda)$  степени  $n$  можно построить как стандартный полином Гурвица  $Q(\lambda)$  степени  $n+1$ , который будет присоединенным к полиному  $P(\lambda)$ , так и стандартный полином Гурвица  $R(\lambda)$  степени  $n-1$ , для которого полином  $P(\lambda)$  будет присоединенным. Построение полиномов проводится согласно равенствам (14) и (15).

Построим пространство полиномов Гурвица  $H = \{P(\lambda)\}$ . Это пространство представляет собой объединение пространств  $H_n$ , соответствующих полиномам Гурвица различных степеней. Согласно леммам 1 и 2, если полином  $P(\lambda) \in H_n$ , то присоединенный к нему полином  $Q(\lambda) \in H_{n+1}$  и, наоборот, если  $P(\lambda) \in H_n$ , то существует такой полином  $R(\lambda) \in H_{n-1}$ , для которого полином  $P(\lambda)$  является присоединенным.

Перейдем к получению необходимых и достаточных условий отрицательности вещественных частей корней алгебраического уравнения.

Пусть  $P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  — некоторый многочлен, причем  $a_i$  — действительные коэффициенты и  $a_0 > 0$ .

Образует матрицу размера  $n \times n$ :

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Эта матрица строится следующим образом: по главной диагонали откладываются коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Вправо по строке от этих элементов расположены коэффициенты с убывающими номерами, влево — с возрастающими. При этом полагается  $a_i = 0$ , если  $i < 0$  или  $i > n$ . Такая матрица  $M$  называется *матрицей Гурвица*. Главные диагональные миноры этой матрицы будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} \\ &\dots \\ \Delta_n &= a_n \Delta_{n-1}. \end{aligned} \quad (17)$$



Следующая теорема Гурвица устанавливает критерий отрицательности вещественных частей корней полинома  $P(\lambda)$ .

**Теорема 9.** Для того чтобы стандартный полином  $P(\lambda)$  был полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры его матрицы Гурвица были положительными, т. е.

$$\Delta_k > 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

Условия (18) называются условиями Гурвица.

**Доказательство.** Докажем сначала необходимость условий теоремы. Пусть  $P(\lambda) \in H_n$ . Покажем, что при этом условия Гурвица выполняются, т. е. главные диагональные миноры матрицы Гурвица положительны.

Доказательство проведем методом математической индукции. Для  $n=1$  условия Гурвица выполнены. Действительно, рассмотрим полином  $P(\lambda) = a_0\lambda + a_1$ . Так как  $P(\lambda) \in H_1$ , то его корень  $\lambda_1 = -\frac{a_1}{a_0} < 0$ , но  $a_0 > 0$ , следовательно,  $a_1 > 0$ . Главный диагональный минор матрицы Гурвица в этом случае  $\Delta_1 = a_1$ ; тогда  $\Delta_1 > 0$ , что и доказывает наше утверждение.

Допустим теперь, что условия (18) выполняются для всех полиномов Гурвица до степени  $n$  включительно. Покажем, что эти условия будут выполняться и для полиномов Гурвица  $Q(\lambda)$  степени  $n+1$ .

Рассмотрим полином  $Q(\lambda) \in H_{n+1}$ . Согласно лемме 2, найдется такой полином Гурвица  $P(\lambda)$  степени  $n$ , по отношению к которому полином  $Q(\lambda)$  будет присоединенным. Следовательно,

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2} [(\lambda + c)P(\lambda) + \lambda P^*(\lambda)],$$

причем здесь  $c = 2\gamma > 0$ .

Определим связь между коэффициентами полиномов  $Q(\lambda)$  и  $P(\lambda)$ . Если

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n,$$

а

$$Q(\lambda) = A_0\lambda^{n+1} + A_1\lambda^n + \dots + A_{n+1},$$

то

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = \gamma a_0, \quad A_2 = \gamma a_1 + a_2, \quad A_3 = \gamma a_2, \quad A_4 = \gamma a_3 + a_4, \dots$$

и вообще

$$A_{2k} = \gamma a_{2k-1} + a_{2k}, \quad A_{2k-1} = \gamma a_{2k-2}.$$

Напишем главный диагональный минор порядка  $k+1$  матрицы Гурвица для полинома  $Q(\lambda)$ :

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} A_1 & A_0 & 0 & \dots & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 & \dots & 0 \\ A_5 & A_4 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{2k+1} & A_{2k} & A_{2k-1} & \dots & A_{k+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma a_0 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma a_2 & \gamma a_1 + a_2 & \gamma a_0 & \dots & 0 \\ \gamma a_4 & \gamma a_3 + a_4 & \gamma a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma a_{2k} & \gamma a_{2k-1} + a_{2k} & \gamma a_{2k-2} & \dots & a_{k+1} \end{vmatrix} = \gamma^{k'} \gamma^{k''} a_0 \Delta_k \dots \quad (19)$$

Здесь  $k'$  — число нечетных столбцов;  $k''$  — число четных столбцов;  $\Delta_k$  — главный диагональный минор  $k$ -го порядка матрицы Гурвица полинома  $P(\lambda)$ . Таким образом

$$D_{k+1} = a_0 \gamma^{k+1} \Delta_k. \quad (20)$$

Согласно сделанному предположению, условия (18) выполняются для полиномов Гурвица  $P(\lambda)$  порядка  $n$ , тогда из формулы (20) следует, что

$$D_{k+1} > 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $D_1 > 0$ . Предположив необходимость условий теоремы для полиномов степени  $n$ , мы доказали необходимость этих условий для полиномов степени  $n+1$ . Ранее была доказана необходимость условий теоремы для полиномов первой степени. По индукции отсюда следует необходимость условий для полиномов произвольной степени. Необходимость условий теоремы доказана.

Докажем достаточность условий теоремы.

Предположим, что условия (18) выполнены, т. е. главные диагональные миноры положительны:  $\Delta_k > 0$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). Докажем, что полином  $P(\lambda)$  является полиномом Гурвица, т. е.

$$P(\lambda) \in H_n.$$

Доказательство, как и выше, проведем методом математической индукции. Рассмотрим сначала случай  $n=1$ . Пусть  $P(\lambda) = a_0\lambda + a_1$ , причем  $a_0 > 0$ . По сделанному предположению  $\Delta_1 = a_1 > 0$ . Тогда корень уравнения  $P(\lambda) = 0$   $\lambda_1 = -\frac{a_1}{a_0} < 0$ . Следовательно, полином  $P(\lambda) \in H_1$ .

Предположим теперь, что выполнение условий (18) для всех полиномов  $P(\lambda)$  степени  $n$  достаточно для того, чтобы эти полиномы были полиномами Гурвица. Покажем, что эти условия достаточны для того, чтобы полином  $Q(\lambda)$  степени  $n+1$  был также полиномом Гурвица.

Рассмотрим полином  $Q(\lambda)$  степени  $n+1$ :

$$Q(\lambda) = A_0\lambda^{n+1} + A_1\lambda^n + \dots + A_{n+1}.$$

Положим, что условия (18) для полинома  $Q(\lambda)$  выполнены, т. е. все главные диагональные миноры  $D_{k+1}$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) матрицы Гурвица для полинома  $Q(\lambda)$  удовлетворяют условию

$$D_{k+1} > 0.$$

Представим  $Q(\lambda)$  в виде

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2} [(\lambda + 2\gamma)P(\lambda) + \lambda P^*(\lambda)],$$

причем  $2\gamma > 0$ , т. е. полином  $Q(\lambda)$  является присоединенным к полиному  $P(\lambda)$ . Между главными минорами матрицы Гурвица поли-

нома  $P(\lambda)$  и полинома  $Q(\lambda)$  существует связь, выражаемая формулой (20):

$$D_{k+1} = a_0 \Gamma^{k+1} \Delta_k.$$

Так как  $D_{k+1} > 0$ , то из (20) следует, что и  $\Delta_k > 0$ . Таким образом, для полинома  $P(\lambda)$  выполнены условия (18). По предположению достаточность условий теоремы справедлива для полиномов степени  $n$ . Следовательно, полином  $P(\lambda) \in H_n$  (является полиномом Гурвица). Но тогда в силу леммы 1 и полином  $Q(\lambda)$  как присоединенный к  $P(\lambda)$  также является полиномом Гурвица. По индукции отсюда следует достаточность условий теоремы для полиномов произвольной степени.

Теорема доказана полностью.

Рассмотрим некоторые примеры применения доказанной теоремы.

**Пример 1.** Определить условия отрицательности вещественных частей корней полинома второй степени

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2, \quad a_0 > 0.$$

Матрица Гурвица в этом случае будет иметь вид

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Ее главные диагональные миноры  $\Delta_1 = a_1$  и  $\Delta_2 = a_1 a_2$ . Таким образом, положительность коэффициентов уравнения  $a_1 > 0$  и  $a_2 > 0$  является необходимым и достаточным условием, чтобы полином  $P(\lambda)$  был полиномом Гурвица.

**Пример 2.** Определить условия отрицательности вещественных частей корней полинома третьей степени

$$P_3(\lambda) = a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3, \quad a_0 > 0.$$

Матрица Гурвица для полинома  $P_3(\lambda)$

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Условия Гурвица для этого случая имеют вид

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad \Delta_3 = a_2 \Delta_2 > 0.$$

Кроме условия положительности коэффициентов (необходимого условия) для того, чтобы полином  $P_3(\lambda)$  был полиномом Гурвица, требуется выполнение неравенства  $a_2 > \frac{a_0 a_3}{a_1}$ .

**Пример 3.** Исследовать устойчивость решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + ay, \\ \frac{dy}{dt} &= -y + \beta z, \\ \frac{dz}{dt} &= -z + \alpha x. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \alpha & 0 \\ 0 & -1-\lambda & \beta \\ \alpha & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или  $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + (1 - \alpha^2\beta) = 0$ .  
Матрица Гурвица имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 - \alpha^2\beta & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha^2\beta \end{bmatrix}.$$

Определители Гурвица:

$$\Delta_1 = 3 > 0, \quad \Delta_2 = 9 - (1 - \alpha^2\beta), \\ \Delta_3 = \Delta_2 (1 - \alpha^2\beta).$$

Таким образом, для положительности главных диагональных миноров матрицы Гурвица требуется, чтобы параметр  $\beta$  удовлетворял неравенствам

$$\beta > -\frac{8}{\alpha^2}, \quad \beta < \frac{1}{\alpha^2}.$$

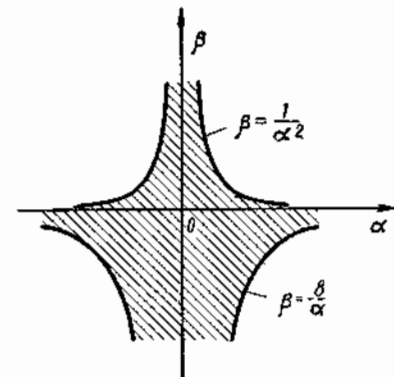


Рис. 52

На рис. 52 изображена область устойчивости решений в плоскости параметров  $\alpha, \beta$ .

## § 19. ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

Второй (или прямой) метод Ляпунова позволяет исследовать устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений, не производя решение самих уравнений. В дальнейшем мы будем исследовать устойчивость тривиального решения автономных систем дифференциальных уравнений, т. е. систем уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (1)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

При этом предполагаем, что функции  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) имеют непрерывные частные производные по всем аргументам в некоторой выпуклой области  $G$ ;  $\|x\| \leq H$   $n$ -мерного пространства. В этом случае в области  $G$  система уравнений (1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения (см. § 10). Прежде чем приступить к рассмотрению устойчивости тривиального решения системы (1), введем некоторые новые понятия.

1. Знакоопределенные и знакопостоянные функции. Рассмотрим функции  $V(x_1, \dots, x_n)$ , определенные и непрерывные в области  $G$ :  $\|x\| \leq H$  и обладающие в этой области непрерывными частными производными по переменным  $x_1, \dots, x_n$ .

Функция  $V(x)$  называется *знакоположительной* (знакоотрицательной) в указанной области  $G$ , если для любого  $x \in G$   $V(x) \geq 0$  ( $V(x) \leq 0$ ).

Функция  $V(x)$  называется *определенно положительной* (определенно отрицательной) в той же области  $G$ , если для любого  $x \in G$  имеем  $V(x) > 0$  ( $V(x) < 0$ ), причем  $V(x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ .

Функции  $V(x)$  первого типа называются *знакопостоянными*, второго типа — *знакоопределенными*.

Например, функция  $V(x) = (x_1 + x_2)^2$  является знакоположительной, так как множество нулей этой функции представляет прямую  $x_1 = -x_2$ , т. е. функция  $V(x) = 0$  вдоль прямой  $x_1 = -x_2$ . Функция  $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$  является положительно определенной, так как  $V(x) = 0$  только при  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$  а при остальных значениях  $x_1$  и  $x_2$  функция  $V(x) > 0$ . Для этих функций значение  $H$  может быть взято сколь угодно большим.

Функция  $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2$  также является положительно определенной, но значение  $H$  при этом будет достаточно малым, а именно должно выполняться неравенство  $x_3 < 2$ .

В общем случае выявление знакоопределенности или знакопостоянства функции  $V(x)$  представляет собой сложную задачу. Достаточно просто определяется знакоопределенность в том случае, если функция  $V(x)$  представляет собой квадратичную форму. Пусть функция  $V(x)$  является квадратичной формой, т. е.

$$V(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (3)$$

Функция  $V(x)$  является определено положительной (определенно отрицательной), если положительно определена (отрицательно определена) квадратичная форма (3). В § 8 приве-

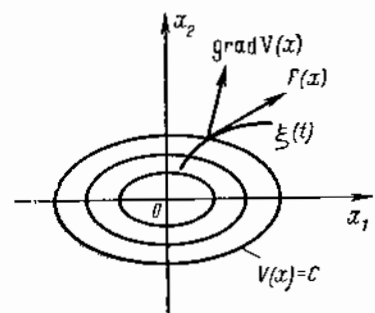


Рис. 53

ден критерий положительной определенности квадратичной формы (критерий Сильвестра), который устанавливает, что квадратичная форма (3) является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры ее матрицы строго положительны.

Дадим знакоопределенной функции  $V(x)$  геометрическую интерпретацию. Для простоты рассмотрим функцию двух переменных  $V(x_1, x_2)$ . На плоскости  $x_1, x_2$  линия  $V(x_1, x_2) = c$ , где  $c$  — некоторое число, представляет собой замкнутую кривую, содержащую внутри себя начало координат. При  $c = 0$  кривая  $V(x_1, x_2) = c$  стягивается в начало координат (рис. 53).

Пусть  $\xi(t)$  — некоторое решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\xi(t_0) = x.$$

Полной производной по времени  $t$  функции  $V(x)$  в силу системы (1) называется функция

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} V(\xi(t)) \Big|_{t=t_0},$$

или, учитывая формулу полной производной,

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n). \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что производная  $\frac{dV}{dt}$  в силу системы (1) не зависит от выбранного решения  $\xi(t)$ , а является функцией точки  $x$ .

Если ввести обозначение

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_2} \dots \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] = \text{grad } V,$$

то выражение (4) можно переписать в виде

$$\frac{dV}{dt} = (\text{grad } V, f(x)). \quad (5)$$

Формула (5) показывает, что производная  $\frac{dV}{dt}$  в силу системы (1) представляет собой скалярное произведение вектора  $\text{grad } V$  на вектор фазовой скорости  $f(x)$ . Если рассматривать в  $n$ -мерном пространстве поверхность  $V(x) = c$ , то при  $\frac{dV}{dt} > 0$  фазовые траектории системы (1) пересекают эту поверхность в сторону возрастания функции  $V(x)$ , а при  $\frac{dV}{dt} < 0$  — в сторону убывания (см. рис. 53).

Положительно определенные функции  $V(x)$ , производные от которых в силу системы (1) являются отрицательно определенными или знакоотрицательными, называются *функциями Ляпунова*.

Перейдем к рассмотрению теорем Ляпунова об устойчивости и неустойчивости тривиального решения автономной системы дифференциальных уравнений (1).

**2. Теорема Ляпунова об устойчивости.** Условия устойчивости тривиального решения системы (1) определяются следующей теоремой:

*Теорема 1. Если для системы уравнений (1) существует положительно определенная функция  $V(x)$ , производная которой в силу системы (1) знакоотрицательна, то тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  системы (1) устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. При доказательстве теоремы будем исходить из определения устойчивости тривиального решения. Возьмем произвольное число  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим множество значений  $x$ , удовлетворяющих соотношению  $\|x\| = \varepsilon$ .

Обозначим

$$\inf_{\|x\|=a} V(x) = a > 0. \quad (6)$$

Так как  $V(0) = 0$ , то из непрерывности функции  $V(x)$  следует, что можно указать такую  $\delta$ -окрестность начала координат в  $n$ -мерном пространстве  $x_1, \dots, x_n$ , что  $V(x) < a$ , если

$$\|x\| < \delta. \quad (7)$$

Рассмотрим некоторое решение  $\xi(t)$  системы (1), удовлетворяющее начальному условию  $\|\xi(t_0)\| < \delta$ . Функция  $V(\xi(t))$  будет невозрастающей функцией  $t$  вдоль этого решения, так как производная  $\frac{dV}{dt}$  в силу системы (1) неположительна. Следовательно, для любых  $t > t_0$  выполняется неравенство

$$V(\xi(t)) \leq V(\xi(t_0)) < a. \quad (8)$$

Отсюда получим, что для любых  $t > t_0$  справедливо неравенство

$$\|\xi(t)\| < \varepsilon. \quad (9)$$

Действительно, пусть для некоторого момента времени  $t_1 > t_0$  выполняется равенство  $\|\xi(t_1)\| = \varepsilon$ ; тогда

$$V(\xi(t_1)) \geq \inf_{\|x\|=a} V(x) = a, \quad (10)$$

что противоречит неравенству (8).

Теорема доказана.

Отметим, что из доказательства теоремы следует способ определения по заданному  $\varepsilon > 0$  такого числа  $\delta > 0$ , что  $\|\xi(t)\| < \varepsilon$ , если при  $t = t_0$  справедливо неравенство  $\|\xi(t_0)\| < \delta$ . Для этого по заданному числу  $\varepsilon > 0$  определяют  $a = \inf_{\|x\|=a} V(x)$  и затем выбирают  $\delta > 0$  так, чтобы  $V(\xi(t_0)) < a$  для всех  $\xi(t_0)$ , удовлетворяющих условию  $\|\xi(t_0)\| < \delta$ .

**3. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.** Условия асимптотической устойчивости тривиального решения устанавливает вторая теорема Ляпунова.

*Теорема 2.* Пусть для системы дифференциальных уравнений (1) существует положительно определенная функция  $V(x)$ , производная от которой в силу системы (1) отрицательно определена. Тогда тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Асимптотическая устойчивость тривиального решения означает, что 1) тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  устойчиво; 2) если в начальный момент времени  $t_0$  некоторое решение  $\xi(t)$

\*  $\inf_{\|x\|=a} V(x)$  — точная нижняя грань функции  $V(x)$  по всем  $x$ , удовлетворяющим условию  $\|x\|=a$ . Понятие о точной нижней грани см., например: Фихтенгольд Г. М. Основы математического анализа, т. I «Наука», 1968, стр. 25.

удовлетворяет неравенству  $\|\xi(t_0)\| < H$ , то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\xi(t)\| = 0$ . Таким образом, для доказательства асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1) требуется показать устойчивость этого решения и, кроме того, нужно показать, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\xi(t)\| = 0$  для всякого решения  $\xi(t)$ , удовлетворяющего при  $t = t_0$  неравенству  $\|\xi(t_0)\| < H$ .

Устойчивость тривиального решения  $x(t) \equiv 0$  следует из доказанной выше теоремы.

Рассмотрим произвольное нетривиальное решение  $\xi(t)$  системы (1), удовлетворяющее при  $t = t_0$  неравенству  $\|\xi(t_0)\| < H$ , и покажем, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\xi(t)\| = 0$ . Для этого изучим поведение функции  $V(x)$  вдоль этого решения. Так как производная функции  $V(x)$  в силу системы (1)  $\frac{dV}{dt} < 0$ , то функция  $V(\xi(t))$  монотонно убывает вдоль решения  $\xi(t)$  при возрастании  $t$ . Эта функция ограничена снизу, так как по условию теоремы  $V(x) \geq 0$ . Всякая монотонно убывающая, ограниченная снизу функция имеет предел\*). Следовательно, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\xi(t)) = a \geq 0. \quad (11)$$

Докажем, что  $a = 0$ . Доказательство проведем методом от противного. Пусть  $a > 0$ , тогда  $\|\xi(t)\| \geq \beta > 0$  для всех  $t \geq t_0$ . Действительно, если бы существовала последовательность значений  $\{t_k\} \rightarrow +\infty$  такая, что  $\|\xi(t_k)\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то  $V(\xi(t_k)) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Это противоречит утверждению, что  $a > 0$ . В силу отрицательной определенности производной  $\frac{dV}{dt}$  из условия  $\|\xi(t)\| \geq \beta > 0$  следует, что

$$\frac{dV(\xi(t))}{dt} \leq -\gamma < 0, \quad (12)$$

где  $\gamma > 0$  — некоторое действительное число; тогда

$$V(\xi(t)) - V(\xi(t_0)) = \int_{t_0}^t \frac{dV(\xi(t))}{dt} dt \leq -\gamma(t - t_0). \quad (13)$$

Из неравенства (13) получим

$$V(\xi(t)) \leq V(\xi(t_0)) - \gamma(t - t_0). \quad (14)$$

При достаточно большом  $t$  будет справедливо неравенство  $V(\xi(t)) < 0$ , что противоречит условию положительной определенности функции  $V(x)$ . Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\xi(t)) = 0. \quad (15)$$

\* См.: Фихтенгольд Г. М. Основы математического анализа, т. I, «Наука», 1968, стр. 97.

Докажем, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\xi(t)\| = 0$ . Пусть существует последовательность  $\{t_k\} \rightarrow +\infty$  такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\xi(t_k)\| = \delta > 0.$$

Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} V(\xi(t_k)) \neq 0$ , что противоречит равенству (15). Следовательно,  $\|\xi(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , что и доказывает теорему.

**4. Теорема Ляпунова о неустойчивости.** Докажем теорему о неустойчивости тривиального решения системы (1).

*Теорема 3. Если для системы уравнений (1) существует функция  $V(x)$ , удовлетворяющая условию  $V(0) = 0$ , производная которой в силу системы (1) знакоопределенная, причем в любой окрестности начала координат имеются точки, в которых знак функции  $V(x)$  совпадает со знаком ее производной, то тривиальное решение системы неустойчиво в смысле Ляпунова.*

**Доказательство.** Пусть множество точек  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $\|x\| < H$ , является областью знакоопределенности производной  $\frac{dV}{dt}$  функции  $V(x)$  в силу системы (1). Покажем, что как бы ни было мало число  $\delta > 0$ , в этом случае всегда имеется решение  $\xi(t)$  системы (1), обладающее следующим свойством; найдется такой момент времени  $t_1$ , при котором будет справедливо неравенство  $\|\xi(t_1)\| \geq \epsilon$ , несмотря на то, что в начальный момент времени  $t = t_0$  выполнялось неравенство  $\|\xi(t_0)\| < \delta$ . Это и будет означать неустойчивость тривиального решения.

Выберем  $\epsilon = H$ . Для определенности положим  $\frac{dV}{dt} > 0$ . Выберем начальную точку  $\xi(t_0)$  так, чтобы  $V(\xi(t_0)) > 0$ . По условию теоремы такой выбор  $\xi(t_0)$  всегда возможен. Рассмотрим теперь решение  $\xi(t)$ , удовлетворяющее выбранному начальному условию. Так как производная  $\frac{dV}{dt} > 0$  вдоль решения  $\xi(t)$ , то функция  $V(\xi(t))$  возрастает вдоль этого решения. Следовательно,

$$V(\xi(t)) \geq V(\xi(t_0)) \quad \text{при } t > t_0. \quad (16)$$

Из неравенства (16) получим, что решение  $\xi(t)$  не приближается к началу координат, т. е.

$$\|\xi(t)\| \geq \alpha > 0. \quad (17)$$

Так как  $\frac{dV}{dt}$  — определено положительная функция, то в области  $\alpha \leq \|x\| \leq H$  производная  $\frac{dV}{dt}$  удовлетворяет неравенству

$$\frac{dV(\xi(t))}{dt} \geq \beta > 0.$$

Покажем, что найдется такой момент времени  $t_1$ , для которого  $\|\xi(t_1)\| \geq H$ . Действительно, пусть для всех значений  $t \in [t_0, \infty)$

справедливо неравенство

$$\|\xi(t)\| < H.$$

Но

$$V(\xi(t)) = V(\xi(t_0)) + \int_{t_0}^t \frac{dV(\xi(t))}{dt} dt \geq V(\xi(t_0)) + \beta(t - t_0). \quad (18)$$

Из формулы (18) следует, что функция  $V(\xi(t))$  неограниченно возрастает при  $t \rightarrow \infty$ . Получили противоречие, так как из неравенства  $\|\xi(t)\| < H$  следует ограниченность  $V(\xi(t))$  для любых  $t$ .

Теорема доказана.

## § 20. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

**1. Уравнения первого приближения.** Пусть поведение системы автоматического регулирования описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1)$$

Пусть, кроме того,  $f(0) = 0$ , т. е. начало координат  $x = 0$  является состоянием равновесия. Как было показано выше, исследование устойчивости любого состояния равновесия можно свести к этому случаю с помощью соответствующей замены переменных.

Будем полагать, что функции  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) имеют непрерывные частные производные в некоторой области  $\|x\| < H$ . Разложим функции  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ , являющиеся компонентами вектор-функции  $f(x)$  в ряд Тейлора в окрестности начала координат:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x=0},$$

а функции  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$  содержат члены разложения порядка малости выше первого относительно переменных  $x_1, \dots, x_n$  и поэтому

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(x_1, \dots, x_n)}{\|x\|} = 0. \quad (3)$$

С учетом равенств (2) систему (1) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varphi(x), \quad (4)$$

где  $A = [a_{ij}]$  — числовая матрица, а  $\varphi(x)$  — вектор-столбец, удовлетворяющий условию

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} = 0. \quad (5)$$

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (6)$$

называется *системой первого приближения* для системы уравнений (4), а значит, и для системы (1).

Следует отметить, что представление функции  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  в виде (2) может быть получено, вообще говоря, не только с помощью разложения в ряд Тейлора. Существенно при этом, чтобы нелинейный член  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$  удовлетворял условию (3).

**2. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.** Покажем, что в ряде случаев об устойчивости тривиального решения системы (1) можно судить по уравнениям первого приближения.

*Теорема 1. Тривиальное решение системы (4) асимптотически устойчиво по Ляпунову, если все корни характеристического уравнения матрицы  $A$  системы (4) имеют отрицательные вещественные части, т. е.  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).*

**Доказательство.** Будем исследовать устойчивость тривиального решения системы уравнений (4). Сделаем линейное преобразование  $x = Ty$ , причем матрица  $T$  этого преобразования полагается невырожденной ( $\det T \neq 0$ ). Тогда система (4) примет вид

$$T \frac{dy}{dt} = ATy + \varphi(Ty),$$

или

$$\frac{dy}{dt} = T^{-1}ATy + T^{-1}\varphi(Ty). \quad (7)$$

Согласно теореме 7 § 6 матрицу  $T$  можно выбрать таким образом, чтобы матрица  $A$  привелась к почти диагональному виду, т. е.

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag} A + C, \quad \text{где } \|C\| < \varepsilon.$$

Обозначим

$$\psi(y) = T^{-1}\varphi(Ty); \quad (8)$$

тогда систему уравнений (7) можно переписать в виде

$$\frac{dy}{dt} = (\operatorname{diag} A + C)y + \psi(y). \quad (9)$$

Покажем, что нелинейная часть  $\psi(y)$  удовлетворяет условию (5), т. е.

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|\psi(y)\|}{\|y\|} = 0. \quad (10)$$

Действительно,

$$\frac{\|\psi(y)\|}{\|y\|} \leq \frac{\|T^{-1}\| \|\varphi(Ty)\| \|T\| \|y\|}{\|y\| \|Ty\|} = \frac{\|\varphi(Ty)\|}{\|Ty\|}.$$

Но согласно равенству (5)  $\frac{\|\varphi(Ty)\|}{\|Ty\|} \rightarrow 0$  при  $\|y\| \rightarrow 0$ , поэтому равенство (10) справедливо.

Для доказательства устойчивости тривиального решения построим функцию

$$V(y) = y^* \cdot y,$$

где

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad y^* = [\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n]^*.$$

Таким образом,  $V(y) = \sum_{i=1}^n |y_i|^2$  — положительно определенная функция.

Вычислим полную производную по времени функции  $V(y)$  в силу системы уравнений (9). Имеем

$$\frac{dV}{dt} = y^* \frac{dy}{dt} + \frac{dy^*}{dt} y. \quad (11)$$

Введем обозначение  $\operatorname{diag} A = \Lambda$ ; тогда

$$\frac{dy^*}{dt} = y^* (\Lambda^* + C^*) + \psi^*(y). \quad (12)$$

Умножим обе части системы уравнений (9) на  $y^*$ , обе части системы уравнений (12) на  $y$  и полученные значения сложим:

$$\frac{dV}{dt} = y^* (\Lambda + \Lambda^*) y + y^* (C + C^*) y + [y^* \psi(y) + \psi^*(y) y]. \quad (13)$$

По условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i = \alpha_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

поэтому

$$\Lambda + \Lambda^* = 2 \operatorname{diag} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

и

$$y^* (\Lambda + \Lambda^*) y = 2 \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \alpha_i y_i = 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i |y_i|^2 \leq -2\alpha V, \quad (14)$$

где

$$-\alpha = \max_i \alpha_i.$$

Оценим по норме второе слагаемое в выражении (13):

$$\|y^* (C + C^*) y\| \leq \|y^*\| \|C\| + \|C^*\| \|y\| \leq 2\varepsilon V. \quad (15)$$

Полагаем норму евклидовой, т. е.  $\|y\| = \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , тогда  $V = \|y\|^2$ .

\* Под матрицей  $A^*$  понимается матрица, полученная из матрицы  $A$  путем ее транспонирования и замены всех элементов на сопряженные. Если все элементы матрицы  $A$  — действительные, то  $A^* = A'$  (см. § 7, п. 5).



Оценим по норме третье слагаемое в равенстве (13); получим

$$\|y^* \Psi(y) + \Psi^*(y) y\| \leq \|y^*\| \|y\| \left\| \frac{\Psi(y)}{\|y\|} \right\| + \left\| \frac{\Psi^*(y)}{\|y\|} \right\| \|y\|^2 \leq 2\varepsilon V, \quad (16)$$

если  $y$  удовлетворяет условию  $\|y\| < h$ . Действительно, из условия (5) следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $h > 0$ , что справедливо неравенство  $\left\| \frac{\Psi(y)}{\|y\|} \right\| < \varepsilon$  как только  $\|y\| < h$ .

Из неравенств (14)–(16) следует, что

$$\frac{dV}{dt} \leq 2V(-\alpha + 2\varepsilon), \quad (17)$$

т. е. производная  $\frac{dV}{dt}$  — отрицательно определенная функция в некоторой окрестности начала координат.

Таким образом, построена положительно определенная функция  $V(y)$ , производная от которой в силу системы (7) отрицательно определена. Согласно теореме 2 § 19 тривиальное решение системы (7) устойчиво асимптотически, а следовательно, асимптотически устойчиво и тривиальное решение системы (4).

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Если среди корней характеристического уравнения матрицы  $A$  имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то тривиальное решение системы (4) неустойчиво.

Теорему приведем без доказательства. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству предыдущей \*).

В том случае когда среди корней характеристического уравнения имеются нулевые или чисто мнимые корни, нельзя судить об устойчивости тривиального решения системы (4) по уравнениям первого приближения. В этом случае, называемом критическим, устойчивость или неустойчивость тривиального решения зависит от нелинейной части  $\Phi(x)$ . Путем соответствующего выбора  $\Phi(x)$  можно сделать решение либо устойчивым, либо неустойчивым. Подробный разбор различных критических случаев приведен в книгах [9], [10].

**Пример 1.** Исследовать устойчивость тривиального решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + \sin y, \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + xy. \end{aligned} \quad (18)$$

Система первого приближения для системы (18) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= x - y. \end{aligned} \quad (19)$$

\* См., например: Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. «Наука», 1967, стр. 62.

Корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 \quad (20)$$

системы (19)

$$\lambda_1 = \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{2}.$$

Один корень  $\lambda_1 = \sqrt{2}$  лежит в правой полуплоскости. Из теоремы (2) следует, что тривиальное решение системы (18) неустойчиво.

**Пример 2.** Исследовать устойчивость тривиального решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 - x - \cos y, \\ \frac{dy}{dt} &= x^2 - y. \end{aligned} \quad (21)$$

Разложив  $\cos y$  в ряд Маклорена, получим систему первого приближения в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x, \\ \frac{dy}{dt} &= -y. \end{aligned} \quad (22)$$

Найдем корни характеристического уравнения системы (22)

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 = 0.$$

Имеем  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ .

Корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, следовательно, тривиальное решение системы (21) устойчиво.

## § 21. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

**1. Уравнения нелинейных систем. Состояния равновесия.** Рассмотрим анализ устойчивости состояния равновесия некоторого класса нелинейных систем автоматического регулирования с помощью второго метода Ляпунова. Полагаем, что нелинейная система автоматического регулирования состоит из линейного объекта регулирования и нелинейного регулятора. Поведение объекта регулирования описывается линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая в векторной записи имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + by, \quad (1)$$

где  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  — вектор координат, характеризующих состояние объекта регулирования (вектор состояния объекта регулирования);  $y$  — скалярная координата, характеризующая воздействие регулятора

на объект регулирования (регулирующее воздействие). Матрица  $A$  полагается невырожденной ( $\det A \neq 0$ ).

Регулятор имеет в своем составе сервомеханизм, уравнение которого

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = f(\varepsilon), \quad (2)$$

и чувствительный элемент, формирующий сигнал ошибки

$$\varepsilon = c'x - ry, \quad (3)$$

где  $c' = [c_1, c_2, \dots, c_n]$  — вектор постоянных коэффициентов;  $r$  — скалярный параметр обратной связи.

Относительно нелинейной функции  $f(\varepsilon)$  будем полагать, что

$$f(0) = 0, \quad \varepsilon f(\varepsilon) > 0, \quad \text{если } \varepsilon \neq 0.$$

Функция  $f(\varepsilon)$  предполагается непрерывной при  $\varepsilon \neq 0$ , а в точке  $\varepsilon = 0$  допускается разрыв непрерывности первого рода. Данный

класс нелинейных функций  $f(\varepsilon)$  охватывает статические характеристики значительного числа нелинейных элементов, встречающихся в практике автоматического регулирования.

Структурная схема нелинейной САР, описываемой совокупностью уравнений (1), (2), (3), приведена на рис. 54. Отметим, что достаточно широкий класс нели-

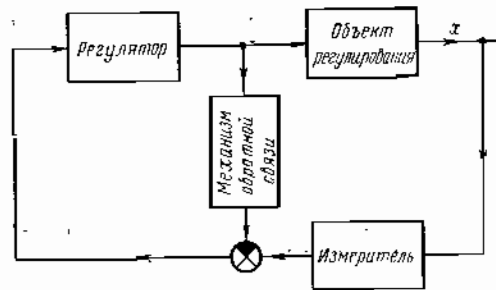


Рис. 54

нейных систем автоматического регулирования имеет структурные схемы, аналогичные представленной на рис. 54.

Введем следующую классификацию рассматриваемых нелинейных систем регулирования в зависимости от характера корней характеристического уравнения матрицы  $A$ .

1. Система автоматического регулирования будет *собственно устойчивой*, если все корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

имеют отрицательные вещественные части, т. е.

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

2. Система автоматического регулирования *нейтральна* по координатам  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , если  $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = \dots = \operatorname{Re} \lambda_k = 0$ , а остальные корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части.

3. Система автоматического регулирования *собственно неустойчива*, если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть.

Рассмотрим случай, когда корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

простые и удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

т. е. нелинейная САР *собственно устойчива* или *нейтральна* по одной координате \*).

Определим состояния равновесия, которые могут быть в нелинейной САР, описываемой уравнениями (1) — (3). Эти состояния равновесия представляют собой решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} Ax + by &= 0, \\ a_2 y &= f(\varepsilon), \\ c'x - ry &= \varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

Для определения состояний равновесия рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\begin{aligned} Ax + by &= 0, \\ c'x - ry &= \varepsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

Предположим, что определитель системы (5) не равен нулю,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & -r \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

В этом случае система (5) имеет единственное решение; определим его по правилу Крамера:

$$x_k = A_k \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad y = B \varepsilon, \quad (7)$$

где

$$A_k = (-1)^{k+n+1} \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & \dots & c_{k-1} & c_{k+1} & \dots & c_n & -r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & \dots & c_n & -r \end{vmatrix}}; \quad B = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & \dots & c_n & -r \end{vmatrix}}.$$

\* Собственно неустойчивые нелинейные САР рассмотрены в книге: Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Физматгиз, 1962.

Если  $a_2 = 0$ , то из второго уравнения системы (4) следует, что  $\varepsilon = 0$  и согласно равенствам (7) получаем

$$x_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \text{ и } y = 0.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (1) — (3) имеет единственное состояние равновесия с координатами

$$x_k = 0, \quad y = 0. \quad (8)$$

Если  $a_2 \neq 0$ , то система уравнений (4) может иметь, вообще говоря, несколько решений. Действительно, с учетом равенств (7) второе уравнение системы (4) можно переписать следующим образом:

$$Ba_2\varepsilon = f(\varepsilon). \quad (9)$$

Это уравнение может иметь различные решения в зависимости от знака величины  $Ba_2$  и формы кривой  $f(\varepsilon)$ . Если  $Ba_2 < 0$ , то уравнение (9) имеет единственное решение  $\varepsilon = 0$  и система уравнений (4) имеет решение (8). Если  $Ba_2 > 0$ , то уравнение (9) может иметь несколько решений. Обозначим их  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ ; тогда и система уравнений (4) имеет  $m$  решений, определенных равенствами

$$\begin{aligned} x_{ki} &= A_k \varepsilon_i \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ y_i &= B \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, в зависимости от вида нелинейной функции  $f(\varepsilon)$  и значений  $a_2$  и  $B$  в системе автоматического регулирования возможны следующие виды состояний равновесия:

1. Единственное состояние равновесия, определяемое выражением (8).
2. Конечное число состояний равновесия, определяемых выражением (10).

В дальнейшем будем рассматривать устойчивость тривиального решения (8). Как показано в § 17, исследование устойчивости любого из состояний равновесия (10) может быть сведено к этому случаю.

Для упрощения дальнейших выкладок положим в уравнении (2)  $a_1 = 1, a_2 = 0$ . Тогда движение нелинейной САР будет описываться системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= f(\varepsilon), \\ \varepsilon &= c'x - ry. \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно изложенному выше система уравнений (11) имеет единственное состояние равновесия с координатами  $x_k = 0, y = 0$ .

2. Приведение уравнений движения к канонической форме. Исследование устойчивости тривиального решения системы (11) удобно проводить, когда уравнения приведены к канонической форме. Канонической формой уравнений (11) назовем такой их вид, когда

матрица  $A$  приведена к жордановой форме. В § 6 было показано, что для любой числовой матрицы  $A$  существует такая невырожденная матрица  $T$ , что  $T^{-1}AT = J$ , где  $J$  — жорданова форма матрицы  $A$ .

Сделаем в системе (11) замену переменных

$$x = Tu \quad (\det T \neq 0). \quad (12)$$

Тогда система уравнений (11) примет вид

$$\begin{aligned} T \frac{du}{dt} &= ATu + by, \\ \frac{dy}{dt} &= f(\varepsilon), \\ \varepsilon &= c'Tu - ry, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Ju + b_1y, \\ \frac{dy}{dt} &= f(\varepsilon), \\ \varepsilon &= c'_1u - ry, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $b_1 = T^{-1}b, c'_1 = c'T$ .

Система уравнений (13) упрощается, если выполнить еще раз замену переменных, положив:

$$\begin{aligned} z &= Ju + b_1y, \\ \varepsilon &= c'_1u - ry. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда вместо системы уравнений (13) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Jz + b_1f(\varepsilon), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= c'_1z - rf(\varepsilon). \end{aligned} \quad (15)$$

Система уравнений (15) является канонической формой уравнений движения.

Заметим, что корни характеристического уравнения матрицы  $A$  предполагались простыми, поэтому жорданова форма матрицы  $A$  будет диагональной, т. е.  $J = \text{diag } A$ .

Для того чтобы состоянию равновесия ( $x_k = 0, y = 0$ ) системы уравнений (11) соответствовало единственное состояние равновесия ( $z_k = 0, \varepsilon = 0$ ) системы уравнений (15), требуется, чтобы определитель системы (14) был отличен от нуля, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{vmatrix} J & b_1 \\ c'_1 & -r \end{vmatrix} \neq 0,$$

которое можно свести к виду

$$r + c'_1 J^{-1} b_1 \neq 0. \quad (16)$$

Если  $a_2 = 0$ , то из второго уравнения системы (4) следует, что  $\varepsilon = 0$  и согласно равенствам (7) получаем

$$x_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \text{ и } y = 0.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (1) — (3) имеет единственное состояние равновесия с координатами

$$x_k = 0, \quad y = 0. \quad (8)$$

Если  $a_2 \neq 0$ , то система уравнений (4) может иметь, вообще говоря, несколько решений. Действительно, с учетом равенств (7) второе уравнение системы (4) можно переписать следующим образом:

$$Ba_2\varepsilon = f(\varepsilon). \quad (9)$$

Это уравнение может иметь различные решения в зависимости от знака величины  $Ba_2$  и формы кривой  $f(\varepsilon)$ . Если  $Ba_2 < 0$ , то уравнение (9) имеет единственное решение  $\varepsilon = 0$  и система уравнений (4) имеет решение (8). Если  $Ba_2 > 0$ , то уравнение (9) может иметь несколько решений. Обозначим их  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ ; тогда и система уравнений (4) имеет  $m$  решений, определенных равенствами

$$\begin{aligned} x_{ki} &= A_k \varepsilon_i \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ y_i &= B \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, в зависимости от вида нелинейной функции  $f(\varepsilon)$  и значений  $a_2$  и  $B$  в системе автоматического регулирования возможны следующие виды состояний равновесия:

1. Единственное состояние равновесия, определяемое выражением (8).
2. Конечное число состояний равновесия, определяемых выражением (10).

В дальнейшем будем рассматривать устойчивость тривиального решения (8). Как показано в § 17, исследование устойчивости любого из состояний равновесия (10) может быть сведено к этому случаю.

Для упрощения дальнейших выкладок положим в уравнении (2)  $a_1 = 1, a_2 = 0$ . Тогда движение нелинейной САР будет описываться системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= f(\varepsilon), \\ \varepsilon &= c'x - ry. \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно изложенному выше система уравнений (11) имеет единственное состояние равновесия с координатами  $x_k = 0, y = 0$ .

2. Приведение уравнений движения к канонической форме. Исследование устойчивости тривиального решения системы (11) удобно проводить, когда уравнения приведены к канонической форме. Канонической формой уравнений (11) назовем такой их вид, когда

матрица  $A$  приведена к жордановой форме. В § 6 было показано, что для любой числовой матрицы  $A$  существует такая невырожденная матрица  $T$ , что  $T^{-1}AT = J$ , где  $J$  — жорданова форма матрицы  $A$ .

Сделаем в системе (11) замену переменных

$$x = Tu \quad (\det T \neq 0). \quad (12)$$

Тогда система уравнений (11) примет вид

$$\begin{aligned} T \frac{du}{dt} &= ATu + by, \\ \frac{dy}{dt} &= f(\varepsilon), \\ \varepsilon &= c'Tu - ry, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Ju + b_1y, \\ \frac{dy}{dt} &= f(\varepsilon), \\ \varepsilon &= c_1'u - ry, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $b_1 = T^{-1}b, c_1' = c'T$ .

Система уравнений (13) упрощается, если выполнить еще раз замену переменных, положив:

$$\begin{aligned} z &= Ju + b_1y, \\ \varepsilon &= c_1'u - ry. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда вместо системы уравнений (13) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Jz + b_1f(\varepsilon), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= c_1'z - rf(\varepsilon). \end{aligned} \quad (15)$$

Система уравнений (15) является канонической формой уравнений движения.

Заметим, что корни характеристического уравнения матрицы  $A$  предполагались простыми, поэтому жорданова форма матрицы  $A$  будет диагональной, т. е.  $J = \text{diag } A$ .

Для того чтобы состоянию равновесия ( $x_k = 0, y = 0$ ) системы уравнений (11) соответствовало единственное состояние равновесия ( $z_k = 0, \varepsilon = 0$ ) системы уравнений (15), требуется, чтобы определитель системы (14) был отличен от нуля, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{vmatrix} J & b_1 \\ c_1' & -r \end{vmatrix} \neq 0,$$

которое можно свести к виду

$$r + c_1'J^{-1}b_1 \neq 0. \quad (16)$$

Если  $a_2 = 0$ , то из второго уравнения системы (4) следует, что  $\varepsilon = 0$  и согласно равенствам (7) получаем

$$x_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \text{ и } y = 0.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (1) — (3) имеет единственное состояние равновесия с координатами

$$x_k = 0, \quad y = 0. \quad (8)$$

Если  $a_2 \neq 0$ , то система уравнений (4) может иметь, вообще говоря, несколько решений. Действительно, с учетом равенств (7) второе уравнение системы (4) можно переписать следующим образом:

$$Ba_2\varepsilon = f(\varepsilon). \quad (9)$$

Это уравнение может иметь различные решения в зависимости от знака величины  $Ba_2$  и формы кривой  $f(\varepsilon)$ . Если  $Ba_2 < 0$ , то уравнение (9) имеет единственное решение  $\varepsilon = 0$  и система уравнений (4) имеет решение (8). Если  $Ba_2 > 0$ , то уравнение (9) может иметь несколько решений. Обозначим их  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ ; тогда и система уравнений (4) имеет  $m$  решений, определенных равенствами

$$\begin{aligned} x_{ki} &= A_k \varepsilon_i \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ y_i &= B \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, в зависимости от вида нелинейной функции  $f(\varepsilon)$  и значений  $a_2$  и  $B$  в системе автоматического регулирования возможны следующие виды состояний равновесия:

1. Единственное состояние равновесия, определяемое выражением (8).
2. Конечное число состояний равновесия, определяемых выражением (10).

В дальнейшем будем рассматривать устойчивость тривиального решения (8). Как показано в § 17, исследование устойчивости любого из состояний равновесия (10) может быть сведено к этому случаю.

Для упрощения дальнейших выкладок положим в уравнении (2)  $a_1 = 1, a_2 = 0$ . Тогда движение нелинейной САР будет описываться системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= f(\varepsilon), \\ \varepsilon &= c'x - ry. \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно изложенному выше система уравнений (11) имеет единственное состояние равновесия с координатами  $x_k = 0, y = 0$ .

2. Приведение уравнений движения к канонической форме. Исследование устойчивости тривиального решения системы (11) удобно проводить, когда уравнения приведены к канонической форме. Канонической формой уравнений (11) назовем такой их вид, когда

матрица  $A$  приведена к жордановой форме. В § 6 было показано, что для любой числовой матрицы  $A$  существует такая невырожденная матрица  $T$ , что  $T^{-1}AT = J$ , где  $J$  — жорданова форма матрицы  $A$ .

Сделаем в системе (11) замену переменных

$$x = Tu \quad (\det T \neq 0). \quad (12)$$

Тогда система уравнений (11) примет вид

$$\begin{aligned} T \frac{du}{dt} &= ATu + by, \\ \frac{dy}{dt} &= f(\varepsilon), \\ \varepsilon &= c'Tu - ry, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Ju + b_1y, \\ \frac{dy}{dt} &= f(\varepsilon), \\ \varepsilon &= c'_1u - ry, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $b_1 = T^{-1}b, c'_1 = c'T$ .

Система уравнений (13) упрощается, если выполнить еще раз замену переменных, положив:

$$\begin{aligned} z &= Ju + b_1y, \\ \varepsilon &= c'_1u - ry. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда вместо системы уравнений (13) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Jz + b_1f(\varepsilon), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= c'_1z - rf(\varepsilon). \end{aligned} \quad (15)$$

Система уравнений (15) является канонической формой уравнений движения.

Заметим, что корни характеристического уравнения матрицы  $A$  предполагались простыми, поэтому жорданова форма матрицы  $A$  будет диагональной, т. е.  $J = \text{diag } A$ .

Для того чтобы состоянию равновесия ( $x_k = 0, y = 0$ ) системы уравнений (11) соответствовало единственное состояние равновесия ( $z_k = 0, \varepsilon = 0$ ) системы уравнений (15), требуется, чтобы определитель системы (14) был отличен от нуля, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{vmatrix} J & b_1 \\ c'_1 & -r \end{vmatrix} \neq 0,$$

которое можно свести к виду

$$r + c'_1 J^{-1} b_1 \neq 0. \quad (16)$$

Учитывая, что

$$J^{-1} = (T^{-1}AT)^{-1} = T^{-1}A^{-1}T, \quad b_1 = T^{-1}b, \quad c_1 = cT,$$

неравенство (16) можно записать следующим образом:

$$r + c'A^{-1}b \neq 0. \quad (17)$$

3. Достаточные условия устойчивости состояния равновесия. Исследуем устойчивость тривиального решения системы уравнений (15), приведенной к канонической форме. Для исследования устойчивости построим функцию Ляпунова специального вида, предложенную А. И. Лурье<sup>\*)</sup>. С помощью этой функции найдем условия, накладываемые на параметры регулятора, при выполнении которых тривиальное решение системы (15), а следовательно, и тривиальное решение системы (11) асимптотически устойчиво.

Сначала рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения  $\det(A - \lambda E) = 0$  простые и лежат в левой полуплоскости, т. е.  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) (система автоматического регулирования собственно устойчива). Функцию Ляпунова будем искать в виде

$$V(z, \epsilon) = z'Bz + \int_0^\epsilon f(\epsilon) d\epsilon. \quad (18)$$

Для того чтобы функция  $V(z, \epsilon)$  была определенно положительной, требуется, чтобы первое слагаемое в правой части этого равенства представляло собой положительно определенную квадратичную форму. В этом случае первое слагаемое будет строго положительно для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $\|z\| \neq 0$ . Второе слагаемое в правой части равенства (18) в силу условий, накладываемых на функцию  $f(\epsilon)$ , будет также строго положительно для всех  $\epsilon$ , удовлетворяющих условию  $|\epsilon| \neq 0$ .

Таким образом, функция  $V(z, \epsilon)$ , определяемая выражением (18), будет определенно положительной, если квадратичная форма  $z'Bz$  — положительно определена.

Составим полную производную по времени  $t$  функции  $V(z, \epsilon)$  в силу системы (15):

$$\frac{dV(z, \epsilon)}{dt} = \frac{dz'}{dt} Bz + z' B \frac{dz}{dt} + f(\epsilon) \frac{d\epsilon}{dt} = z'(J'B + BJ)z - r f^2(\epsilon) + f(\epsilon)(b_1' Bz + z' B b_1) + f(\epsilon) c_1' z.$$

Учитывая, что матрица  $B$  квадратичной формы является симметрической, т. е.  $B' = B$ , получим

$$b_1' Bz + z' B b_1 = b_1' Bz + (B b_1)' z = 2(B b_1)' z.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$C = -(J'B + B'J). \quad (19)$$

<sup>\*)</sup> См. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, М., 1951.

Матрица  $C$  является симметрической. Действительно,

$$C' = -(J'B + BJ)' = -(B'J + J'B)' = -(BJ + JB)' = C.$$

Таким образом, полная производная функции  $V(z, \epsilon)$  в силу системы (18) может быть записана в виде

$$\frac{dV}{dt} = -z' C z - r f^2(\epsilon) + 2f(\epsilon) \left( B b_1 + \frac{1}{2} c_1 \right)' z. \quad (20)$$

Из выражения (20) следует, что полная производная по времени  $t$  от функции  $V(z, \epsilon)$  в силу системы (15) является квадратичной формой относительно переменных  $z_1, \dots, z_n, f(\epsilon)$ . Выясним связь между матрицей  $B$  и определяемой формулой (19) матрицей  $C$ . Покажем, что если характеристические числа матрицы  $A$  удовлетворяют условно  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), то по заданной симметрической матрице  $C$  однозначно определяется некоторая симметрическая матрица  $B$ . Действительно, так как матрица  $J = \operatorname{diag} A$ , то соотношение (19) можно переписать в виде

$$c_{ij} = -(\lambda_i b_{ij} + \lambda_j b_{ji}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

откуда

$$b_{ij} = -\frac{c_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j}, \quad (21)$$

что и доказывает наше утверждение.

Отметим, что в рассматриваемом случае условие  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) для матрицы  $A$  выполняется, так как по предположению характеристические числа матрицы  $A$  удовлетворяют условию  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ . При выводе условий отрицательной определенности производной  $\frac{dV(z, \epsilon)}{dt}$  потребуется следующая теорема, которую приведем без доказательства<sup>\*)</sup>.

**Теорема 1.** Пусть матрица  $A$  устойчива, т. е. ее характеристические числа лежат в левой полуплоскости. Тогда, если  $C$  — матрица некоторой положительно определенной квадратичной формы, то определенная по формуле (21) матрица  $B$  также является матрицей положительно определенной квадратичной формы.

Получим условия, накладываемые на параметры системы регулирования для того, чтобы функция  $V(z, \epsilon)$  была функцией Ляпунова.

Возьмем некоторую матрицу  $C$  положительно определенной квадратичной формы (например,  $C = E$ ) и обозначим через  $B$  матрицу, определяемую с помощью равенств (21). В силу сформулированной выше теоремы матрица  $B$  будет также матрицей некоторой положительно определенной квадратичной формы. В этом случае, как указано выше, функция  $V(z, \epsilon)$  является положительно определенной. Для того чтобы функция  $V(z, \epsilon)$  была функцией Ляпунова, требуется,

<sup>\*)</sup> Доказательство теоремы см., например; Лефшец С., Ла-Салль Ж. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. «Мир», 1964.



чтобы ее производная  $\frac{dV(z, \varepsilon)}{dt}$  в силу системы (15) была отрицательно определенной функцией, или, что одно и то же, функция  $-\frac{dV(z, \varepsilon)}{dt}$  была положительно определенной. Как указывалось выше, функция  $-\frac{dV(z, \varepsilon)}{dt}$  является квадратичной формой относительно переменных  $z_1, \dots, z_n$  и  $f(\varepsilon)$ .

Для положительной определенности функции  $-\frac{dV(z, \varepsilon)}{dt}$  требуется, согласно критерию Сильвестра, положительность всех главных диагональных миноров матрицы квадратичной формы.

Так как матрица  $C$  является матрицей положительно определенной квадратичной формы, то первые  $n$  неравенств критерия Сильвестра выполняются и остается последнее неравенство

$$\begin{vmatrix} C & -\left(Bb_1 + \frac{1}{2}c_1\right) \\ -\left(Bb_1 + \frac{1}{2}c_1\right)' & r \end{vmatrix} > 0. \quad (22)$$

Условие (22) является необходимым и достаточным условием отрицательной определенности производной  $\frac{dV(z, \varepsilon)}{dt}$ .

Если разложить определитель в левой части неравенства (22) по элементам последней строки и последнего столбца, то условие (22) можно переписать в виде

$$r > \left(Bb_1 + \frac{1}{2}c_1\right)' C^{-1} \left(Bb_1 + \frac{1}{2}c_1\right). \quad (23)$$

Если параметры регулятора удовлетворяют неравенству (23), то существует положительно определенная функция  $V(z, \varepsilon)$ , производная от которой в силу системы уравнений (15) отрицательно определена. Согласно теореме 2 об асимптотической устойчивости состояние равновесия ( $z_k=0, \varepsilon=0$ ) системы (15) будет асимптотически устойчиво. При выполнении неравенства (17), которое мы перепишем в виде

$$r \neq -c'A^{-1}b, \quad (24)$$

это будет означать асимптотическую устойчивость тривиального решения ( $x_k=0, y=0$ ) системы уравнений (11).

Таким образом, неравенства (23) и (24) являются достаточными условиями асимптотической устойчивости состояния равновесия системы (11).

Перейдем теперь к построению функции Ляпунова для случая, когда характеристическое уравнение матрицы  $A$  имеет один нулевой корень. Остальные корни полагаем простыми и расположенными в левой полуплоскости (нелинейная САР нейтральна по одной координате).

Выделим компоненту  $z_1$  вектор-функции  $z$ , соответствующую нулевому корню характеристического уравнения матрицы  $A$ , т. е. представим вектор  $z$  в виде  $z = \begin{bmatrix} \bar{z} \\ z_1 \end{bmatrix}$ . Тогда система уравнений (15) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}}{dt} &= \bar{J}\bar{z} + \bar{b}_1 f(\varepsilon), \\ \frac{dz_1}{dt} &= b_0 f(\varepsilon), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \bar{c}_1 \bar{z} + c_0 z_1 - r f(\varepsilon). \end{aligned} \quad (25)$$

В системе уравнений (25) приняты следующие обозначения:  $\bar{z}$  —  $n-1$ -мерная вектор-функция;  $\bar{J}$  — диагональная матрица порядка  $(n-1) \times (n-1)$ ;  $\bar{b}_1$  и  $\bar{c}_1$  —  $n-1$ -мерные вектор-столбцы;  $b_0$  и  $c_0$  — скалярные величины.

В силу сказанного выше все характеристические числа матрицы  $\bar{J}$  лежат в левой полуплоскости. Функцию Ляпунова для этого случая будем искать в виде

$$V(\bar{z}, z_1, \varepsilon) = a z_1^2 + \left\{ \bar{z}' B \bar{z} + \int_0^\varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon \right\}. \quad (26)$$

В фигурных скобках стоит выражение, которое применяется в качестве функции Ляпунова в предыдущем случае, когда все корни характеристического уравнения матрицы  $A$  лежат в левой полуплоскости. Если квадратичная форма  $\bar{z}' B \bar{z}$  является положительно определенной и  $a > 0$ , то функция  $V(\bar{z}, z_1, \varepsilon)$  будет положительно определенной функцией в пространстве  $(\bar{z}, z_1, \varepsilon)$ .

Вычислим полную производную по времени  $t$  функции  $V(\bar{z}, z_1, \varepsilon)$  в силу системы (25):

$$\begin{aligned} \frac{dV(\bar{z}, z_1, \varepsilon)}{dt} &= 2ab_0 z_1 f(\varepsilon) + \frac{d\bar{z}'}{dt} B \bar{z} + \bar{z}' B \frac{d\bar{z}}{dt} + f(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{dt} = \\ &= \left\{ -\bar{z}' C \bar{z} + 2f(\varepsilon) \left( B \bar{b}_1 + \frac{1}{2} \bar{c}_1 \right)' \bar{z} + r f^2(\varepsilon) \right\} + 2z_1 \left( ab_0 + \frac{c_0}{2} \right) f(\varepsilon). \end{aligned} \quad (27)$$

К выражению в фигурных скобках применимы все рассуждения предыдущего случая, когда все корни характеристического уравнения матрицы  $A$  лежат в левой полуплоскости. Для того чтобы выражение в фигурных скобках представляло собой отрицательно определенную квадратичную форму, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$r > \left( B \bar{b}_1 + \frac{1}{2} \bar{c}_1 \right)' C^{-1} \left( B \bar{b}_1 + \frac{1}{2} \bar{c}_1 \right). \quad (28)$$

Если  $b_0 c_0 < 0$ , то можно подобрать такое положительное  $a$ , чтобы выполнялось равенство  $ab_0 + \frac{c_0}{2} = 0$ . Тогда производная  $\frac{dV(\bar{z}, z_1, \varepsilon)}{dt}$  будет знакоотрицательной функцией. Действительно, если  $ab_0 +$

$+\frac{c_0}{2}=0$ , то  $\frac{dV(\bar{z}, z_1, \epsilon)}{dt} < 0$  при  $z \neq 0$ ,  $f(\epsilon) \neq 0$  и  $\frac{dV(\bar{z}, z_1, \epsilon)}{dt} = 0$  при  $\bar{z} = 0$ ,  $f(\epsilon) = 0$  и  $z_1 \neq 0$ .

Таким образом, если параметры регулятора удовлетворяют неравенству (28) и условию  $b_0 c_0 < 0$ , то существует положительно определенная функция  $V(\bar{z}, z_1, \epsilon)$ , производная от которой в силу системы (15) знакоотрицательна. Согласно теореме 1 об устойчивости тривиальное решение ( $z_k = 0$ ,  $\epsilon = 0$ ) системы (15) будет устойчиво. При выполнении неравенства (24) это означает устойчивость тривиального решения ( $x_k = 0$ ,  $y = 0$ ) системы уравнений (11).

**Пример 1.** Выполнить анализ устойчивости системы автоматического управления продольным движением летательного аппарата. Структурная схема системы

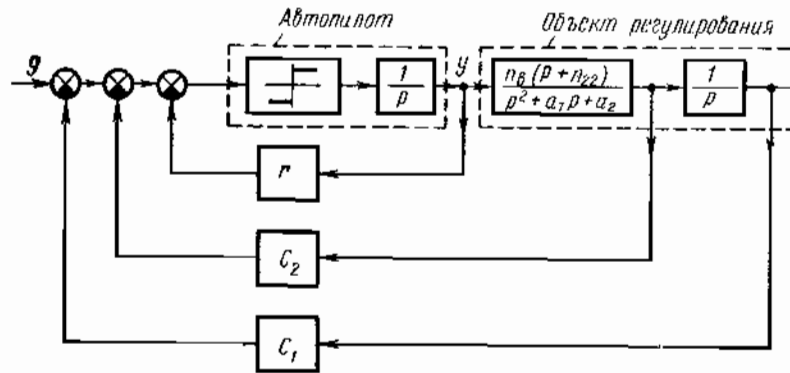


Рис. 55

управления приведена на рис. 55 и состоит из следующих элементов\*: объект регулирования, передаточная функция которого по углу тангажа

$$W(p) = \frac{n_b(p+n_{22})}{p(p^2+a_1p+a_2)}, \quad (29)$$

причем  $n_b > 0$ ,  $n_{22} > 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  и  $a_1^2 > 4a_2$ ; автопилот релейного типа, описываемый дифференциальным уравнением в операторной форме

$$py = f(\epsilon); \quad (30)$$

чувствительный элемент, уравнение которого имеет вид

$$\epsilon = g - c_1x - c_2px - ry. \quad (31)$$

Дифференциальное уравнение объекта регулирования

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = n_b \frac{dy}{dt} + n_b n_{22} y. \quad (32)$$

Если ввести новые переменные

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx}{dt}, \quad x_3 = \frac{d^2x}{dt^2} - n_b y \quad (33)$$

\* См.: Боднер В. А., Козлов М. С. Стабилизация летательных аппаратов и автопилоты. Оборонгиз, 1961.

и положить входное воздействие  $g = 0$ , то свободное движение системы управления будет описываться системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= f(\epsilon), \\ \epsilon &= c'x - ry, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_2 - a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_a \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

причем  $b_2 = n_b$ ,  $b_a = n_b(n_{22} - a_1)$ .

Для упрощения дальнейших выкладок сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} u &= Ax + by, \\ \epsilon &= c'u - ry. \end{aligned} \quad (35)$$

Тогда система уравнений (34) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Au + bf(\epsilon), \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= c'u - rf(\epsilon). \end{aligned} \quad (36)$$

Система уравнений (34) имеет единственное состояние равновесия ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ), следовательно, и система (36) имеет единственное состояние равновесия ( $u = 0$ ,  $\epsilon = 0$ ). Выполним анализ устойчивости этого состояния равновесия. Приведем систему (36) к канонической форме, для чего сделаем замену переменных

$$u = Tz, \quad (37)$$

где

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} & -\frac{1}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & 0 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Обратной к матрице  $T$  будет матрица

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_2 & 1 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 \\ \lambda_1\lambda_2 & -(\lambda_1 + \lambda_2) & 1 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

В выражениях (38) и (39)  $\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$  и  $\lambda_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$  корни характеристического уравнения  $\det(A - \lambda E) = 0$ . Кроме этих корней, характеристическое уравнение имеет корень  $\lambda_3 = 0$ . Выполнив замену переменных (37), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \text{diag } Az + T^{-1}bf(\epsilon), \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= c'Tz - rf(\epsilon). \end{aligned} \quad (40)$$

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ  
ЭЛЕМЕНТЫ  
ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ  
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Глава VII

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 22. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1. Комплексные числа; их геометрическая интерпретация. *Комплексным числом* называется выражение вида

$$z = a + jb, \quad (1)$$

где  $a = \operatorname{Re} z$  — действительная часть комплексного числа;  $b = \operatorname{Im} z$  — мнимая часть. Под символом  $j$  понимается  $\sqrt{-1}$ . Из определения следует, что  $j^2 = -1$ ,  $j^3 = j$ ,  $j^4 = -1$  и вообще

$$j^{2k} = 1, \quad j^{2k+1} = j, \quad j^{4k+2} = -1, \quad j^{4k+3} = -j \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел, получаемым при  $b=0$ . Полагают, что  $z=0$ , если  $a=0$  и  $b=0$ .

Два комплексных числа

$$z_1 = a_1 + jb_1 \quad \text{и} \quad z_2 = a_2 + jb_2$$

равны между собой, если  $a_1 = a_2$ ,  $b_1 = b_2$ , т. е. если равны соответственно их действительные и мнимые части.

Комплексное число  $\bar{z}$  называется *сопряженным* к числу  $z = a + jb$ , если  $\bar{z} = a - jb$ , т. е.  $\bar{z}$  отличается от  $z$  только знаком мнимой части.

Между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости — плоскости Гаусса можно установить взаимно однозначное соответствие. Для этого по оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа, а по оси ординат — мнимая. Тогда каждому комплексному числу будет соответствовать точка на плоскости и каждой точке на плоскости — комплексное число.

Систему уравнений (40) запишем по координатам:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1 z_1 + b'_1 f(\varepsilon), \\ \frac{dz_2}{dt} &= \lambda_2 z_2 + b'_2 f(\varepsilon), \\ \frac{dz_3}{dt} &= b'_3 f(\varepsilon), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= c'_1 z_1 + c'_2 z_2 + c'_3 z_3 - r f(\varepsilon), \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} b'_1 &= b_1 - \lambda_2 b_2, \quad b'_2 = b_2 - \lambda_1 b_1, \quad b'_3 = b_3 - (\lambda_1 + \lambda_2) b_3, \\ c'_1 &= -\frac{c_1 + \lambda_1 c_2}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad c'_2 = \frac{c_1 + \lambda_2 c_2}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad c'_3 = -\frac{c_1}{\lambda_1 \lambda_2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Функцию Ляпунова выберем в виде

$$V(z_1, z_2, z_3, \varepsilon) = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + m_3 z_3^2 + \int_0^\varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (43)$$

Производная от функции  $V(z, \varepsilon)$  в силу системы (41) будет

$$\begin{aligned} \frac{dV(z, \varepsilon)}{dt} &= 2m_1 z_1 [\lambda_1 z_1 + b'_1 f(\varepsilon)] + 2m_2 z_2 [\lambda_2 z_2 + b'_2 f(\varepsilon)] + \\ &+ 2m_3 z_3 b'_3 f(\varepsilon) + f(\varepsilon) [c'_1 z_1 + c'_2 z_2 + c'_3 z_3 - r f(\varepsilon)], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dV(z, \varepsilon)}{dt} &= 2m_1 \lambda_1 z_1^2 + 2m_2 \lambda_2 z_2^2 - r f^2(\varepsilon) + (2m_1 b'_1 + c'_1) z_1 f(\varepsilon) + \\ &+ (2m_2 b'_2 + c'_2) z_2 f(\varepsilon) + (2m_3 b'_3 + c'_3) z_3 f(\varepsilon). \end{aligned} \quad (44)$$

Выберем  $m_3$  так, чтобы выполнялось равенство  $2m_3 b'_3 + c'_3 = 0$ , т. е.

$$m_3 = -\frac{c'_3}{2b'_3} = \frac{c_1}{2a_1(b_3 + a_1 b_2)} = \frac{c_1}{2a_1 n_b n_{22}}; \quad (45)$$

так как по условию  $a_1 > 0$ ,  $n_b > 0$ ,  $n_{22} > 0$ , то  $m_3 > 0$ , если  $c_1 > 0$ . Коэффициенты  $m_1$  и  $m_2$  примем равными

$$m_1 = -\frac{1}{2\lambda_1} > 0, \quad m_2 = -\frac{1}{2\lambda_2} > 0. \quad (46)$$

Если  $c_1 > 0$ , а коэффициенты  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  удовлетворяют равенствам (45), (46), то функция  $V(z, \varepsilon)$  является положительно определенной функцией. Для того чтобы производная в силу системы (41) представляла собой отрицательно определенную квадратичную форму по переменным  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $f(\varepsilon)$  согласно критерию Сильвестра необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$r > \left(\frac{b'_2}{\lambda_2} - c'_2\right)^2 + \left(\frac{b'_1}{\lambda_1} - c'_1\right)^2. \quad (47)$$

Таким образом, если выбрать коэффициенты  $r$ ,  $c_1$  и  $c_2$  в цепи обратной связи так, чтобы удовлетворялось неравенство (47), то в силу теоремы Ляпунова об устойчивости система управления продольным движением летательного аппарата будет устойчивой.

Комплексные числа можно изображать и в виде векторов на плоскости. Действительные числа располагаются на действительной оси  $Ox$ , на мнимой оси  $Oy$  располагаются мнимые числа (рис. 56).

2. **Модуль и аргумент комплексного числа.** Положение точки  $M$  на плоскости можно определить в полярной системе координат углом наклона вектора  $OM$  и его длиной. Поставим в соответствие точке  $M$  комплексное число  $z$  (рис. 57).

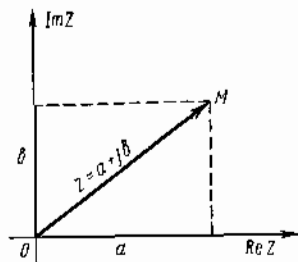


Рис. 56

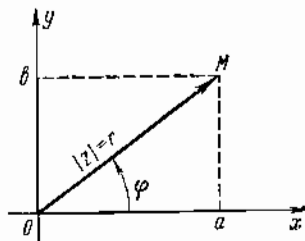


Рис. 57

Расстояние от начала координат до точки  $M$  называется *модулем комплексного числа  $z$* ;

$$\text{mod } z = |z| = r.$$

*Аргументом комплексного числа  $z$*  называется угол, образованный радиусом-вектором точки  $M$  с положительным направлением действительной оси

$$\text{Arg } z = \varphi.$$

Если  $z = a + jb$ , то

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (2)$$

$$\text{Arg } z = \varphi + 2k\pi = \arctg \frac{b}{a} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3)$$

Модуль комплексного числа есть положительное число, отличное от нуля, если  $z \neq 0$ . Аргумент комплексного числа, отличного от нуля, — функция неоднозначная. Главное значение аргумента заключено в пределах

$$0 \leq \arg z < 2\pi.$$

Если  $z = 0$ , то  $|z| = 0$ , а значение  $\arg z$  — неопределенно.

Комплексное число можно записать в *тригонометрической форме*. Так как

$$\begin{aligned} a &= r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi, \text{ то} \\ z &= r (\cos \varphi + j \sin \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что  $|\bar{z}| = |z|$  и  $\arg \bar{z} = -\arg z$ .

3. **Сложение, вычитание, умножение и деление.** Пусть  $z_1 = a_1 + jb_1$  и  $z_2 = a_2 + jb_2$  — комплексные числа. Определим опера-

ции сложения и вычитания следующим образом:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2), \quad (5)$$

т. е. при сложении (вычитании) комплексных чисел складываются (вычитаются) отдельно их действительные и мнимые части.

Геометрически сложение и вычитание комплексных чисел сводится к сложению и вычитанию соответствующих векторов (рис. 58).

Умножение комплексных чисел определим по правилу умножения многочленов: если  $z_1 = a_1 + jb_1$ ,  $z_2 = a_2 + jb_2$ , то

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Сложение и умножение комплексных чисел подчиняются обычным алгебраическим законам:

1. Сложение и умножение комплексных чисел обладают свойством *коммутативности*, т. е.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1, \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1. \end{aligned}$$

2. Сложение и умножение комплексных чисел подчиняются *ассоциативному закону*, т. е.

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3), \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3). \end{aligned}$$

3. Сложение и умножение связаны *дистрибутивным законом*, т. е.

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Введем операцию деления комплексных чисел. *Частным от деления комплексного числа  $z_1 = a_1 + jb_1$  на комплексное число  $z_2 = a_2 + jb_2$  называется число  $z_3 = a_3 + jb_3$  такое, что  $z_2 z_3 = z_1$ .*

Покажем, что если  $z_2 \neq 0$ , то деление всегда определено. Вначале запишем

$$z \bar{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 \geq 0.$$

Если  $z \neq 0$ , то  $z \bar{z} = a^2 + b^2 > 0$ . Определим частное от деления  $z_1 = a_1 + jb_1$  на  $z_2 = a_2 + jb_2$ . Имеем

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \quad (7)$$

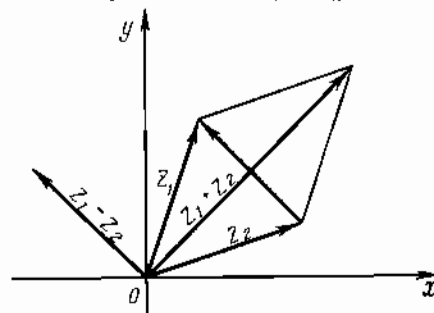


Рис. 58

Рассмотрим умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2),$$

тогда произведение комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ , заданных в тригонометрической форме, будет

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &+ j (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Из выражения (8) следует, что *модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей, т. е.*

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg (z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (9)$$

Рассмотрим деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - j \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) (\cos \varphi_2 - j \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + j (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Из выражения (10) следует, что *модуль частного комплексных чисел равен отношению модулей делимого и делителя, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя, т. е.*

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}, \\ \arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2. \end{aligned} \quad (11)$$

**4. Возведение в степень и извлечение корня.** Возведение комплексного числа  $z$  в целую положительную степень  $n$  можно производить с помощью формулы бинома Ньютона

$$z^n = (a + jb)^n. \quad (12)$$

Если распространить формулу (8) на случай  $n$  одинаковых сомножителей  $z = r (\cos \varphi + j \sin \varphi)$ , то

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi). \quad (13)$$

Следовательно, чтобы возвести комплексное число  $z$  в целую положительную степень, нужно возвести в эту степень его модуль, а аргумент умножить на показатель степени.

**Пример 1.** Выразить косинус и синус кратного угла  $n\varphi$  через косинус и синус угла  $\varphi$ .

Согласно формуле (13) имеем:

$$(\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + j \sin n\varphi.$$

Отсюда, используя формулу бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned} \cos n\varphi &= \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots \\ \sin n\varphi &= C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим операцию извлечения корня из комплексного числа.

Положим  $\omega = \sqrt[n]{z}$ , если  $\omega^n = z$ . Возникает вопрос, возможно ли в области комплексных чисел извлечение корня  $n$ -й степени и сколько различных значений корня при этом получается? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

**Теорема 1.** Из всякого комплексного числа  $z \neq 0$  можно извлечь корень  $n$ -й степени, причем получается всего  $n$  различных значений.

**Доказательство.** Запишем  $\omega$  и  $z$  в тригонометрической форме:

$$\omega = \rho (\cos \psi + j \sin \psi), \quad z = r (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Тогда согласно формуле (13)

$$\rho^n (\cos n\psi + j \sin n\psi) = r (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное  $2\pi$ , т. е.

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (15)$$

Отсюда следует, что

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

т. е.

$$\omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (16)$$

Остается выяснить, сколько различных значений будет иметь корень  $n$ -й степени.

Если давать индексу  $k$  значения  $0, 1, \dots, n-1$ , то получим  $n$  различных значений корня, так как аргументы этих значений будут отличаться не на число, кратное  $2\pi$ .

Покажем, что различных значений будет не более, чем  $n$ . Пусть  $k = m \geq n$ . Разделив  $m$  на  $n$ , получим  $m = qn + p$ , где  $q$  — частное, а остаток  $p$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq p \leq n-1$ , тогда

$$\cos \frac{\varphi + 2m\pi}{n} = \cos \frac{\varphi + 2\pi(qn + p)}{n} = \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi p}{n} + 2\pi q \right) = \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi p}{n} \right).$$

Аналогично имеем:

$$\sin \frac{\varphi + 2m\pi}{n} = \sin \frac{\varphi + 2\pi p}{n}.$$

Следовательно,  $\omega_m = \omega_p$ , т. е. значение корня для  $k = m$ , где  $m \geq n$ , совпадает со значением корня для  $k = p$ , причем  $0 \leq p \leq n-1$ .

Дадим геометрическую интерпретацию полученному результату. Обозначим  $n$  значений корня через  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ . Все значения корня имеют одинаковый модуль, а их аргументы отличаются последовательно на  $\frac{2\pi}{n}$ , причем  $\arg w_0 = \frac{\varphi}{n}$ . Следовательно, если изображать различные  $n$  значений корня векторами на комплексной плоскости, имеющими начало в начале координат, то концы векторов будут находиться в вершинах правильного

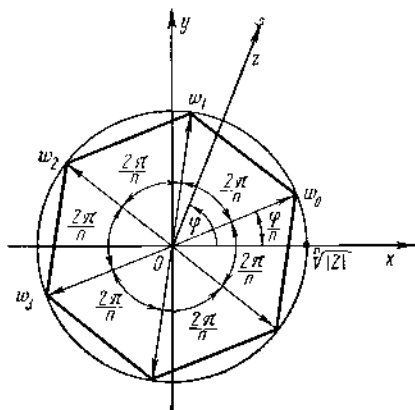


Рис. 59

$n$ -угольника, имеющего центр в начале координат, радиус описанной окружности, равный  $\sqrt[n]{r}$ , причем вектор, проведенный в одну из его вершин, расположен под углом  $\frac{\varphi}{n}$  к действительной оси (рис. 59).

**Пример 2.** Вычислить  $\sqrt[3]{j}$ .

Модуль  $|j|=1$ , а аргумент  $\arg j = \frac{\pi}{2}$ , поэтому  $\sqrt[3]{j} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  +  $+ j \sin \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k=0, 1, 2$ ).

или

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2},$$

$$w_1 = \cos \frac{5}{6} \pi + j \sin \frac{5}{6} \pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2},$$

$$w_2 = \cos \frac{3}{2} \pi + j \sin \frac{3}{2} \pi = -j.$$

Расположение корней на комплексной плоскости показано на рис. 60.

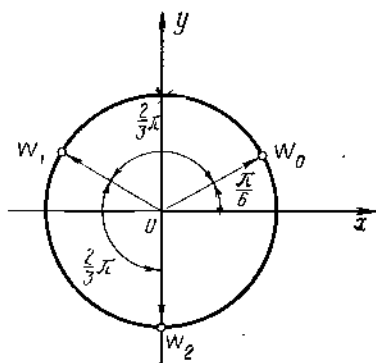


Рис. 60

## § 23. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**1. Последовательность комплексных чисел.** Бесконечно удаленная точка. Распространим основные понятия математического анализа на случай, когда независимая переменная является комплексной величиной. Одним из главнейших понятий является понятие предела, в частности предела числовой последовательности. *Последовательностью комплексных чисел* называется неограниченное перенумерованное множество комплексных чисел  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  и обозначается так:  $\{z_n\}$ . Последовательность комплексных чисел называется *ограниченной*, если существует такое действительное число  $M > 0$ , что для всех  $n$  справедливо неравенство  $|z_n| < M$ ; в противном случае последовательность называется *неограниченной*.

Комплексное число  $a$  называется *пределом* числовой последовательности  $\{z_n\}$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такой номер  $N$ , зависящий от  $\varepsilon$ , что для всех  $n > N$  будет выполняться неравенство  $|z_n - a| < \varepsilon$ .

Последовательность  $\{z_n\}$ , имеющая предел  $a$ , называется *сходящейся к числу a*.

Комплексное число  $z_n = a_n + jb_n$  характеризуется парой действительных чисел  $a_n$  и  $b_n$ , поэтому последовательности комплексных чисел  $\{z_n\}$  соответствуют две последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  действительных чисел.

Для сходимости последовательности  $\{z_n\}$  необходимо и достаточно, чтобы сходились последовательности действительных чисел  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$ . Сходимость последовательности  $\{z_n\}$  определяется критерием Коши.

*Для сходимости последовательности  $\{z_n\}$  необходимо и достаточно, чтобы для любого числа  $\varepsilon > 0$  существовал такой номер  $N(\varepsilon)$ , что  $|z_n - z_{n+m}| < \varepsilon$  для  $n > N(\varepsilon)$  и любого числа  $m \geq 0$ .*

Множество точек  $z$  комплексной плоскости, удовлетворяющее неравенству  $|z - z_0| < \varepsilon$ , называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $z_0$ . Введем понятие *бесконечно удаленной точки*. Пусть имеется неограниченно возрастающая последовательность комплексных чисел  $\{z_n\}$ , т. е. такая последовательность, что для любого числа  $R > 0$  найдется такой номер  $N(R)$ , что для всех  $n > N(R)$  справедливо неравенство  $|z_n| > R$ . Будем полагать, что эта последовательность  $\{z_n\}$  сходится к бесконечному комплексному числу  $z = \infty$ . Геометрически это означает, что точки последовательности  $\{z_n\}$  с возрастанием их номера располагаются на комплексной плоскости вне концентрических кругов с центром в начале координат, радиусы которых могут быть сколь угодно большими. Комплексная плоскость с присоединенной бесконечно удаленной точкой называется *расширенной комплексной плоскостью*. Заметим, что последовательность  $\{z_n\}$  стремится к  $\infty$  независимо от направления на расширенной комплексной плоскости.

Для бесконечно удаленной точки понятие действительной и мнимой части, а также аргумента, не определены. Если имеется неогра-



ниченно возрастающая последовательность  $\{z_n\}$ , то последовательность  $\left\{\frac{1}{z_n}\right\}$  сходится к нулю, поэтому естественно положить  $\frac{1}{\infty} = 0$  и  $\frac{1}{0} = \infty$ . Кроме того, полагают для любого числа  $a \neq 0$ , что

$$a \pm \infty = \infty, a \cdot \infty = \infty, \frac{\infty}{a} = \infty, \frac{a}{\infty} = 0.$$

Выражения  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty \pm \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\frac{0}{0}$  считаются неопределенными. Чтобы получить геометрическое изображение числа  $\infty$ , представляют комплексные числа точками на сфере (рис. 61). Для этого надо описать сферу единичного радиуса с центром в точке  $O$  комплексной плоскости. Прямая, проходящая через точку  $O$  перпендикулярно к комплексной плоскости, называется осью сферы, а точки пересечения оси со сферой  $P$  и  $S$  — соответственно северным и южным полюсом.

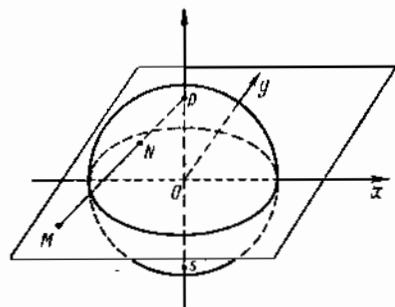


Рис. 61

Будем соединять точки  $N$  сферы лучами с северным полюсом  $P$  и отмечать точки пересечения этих лучей с комплексной плоскостью (точка  $M$  на рис. 61). Таким образом, мы можем спроектировать все точки сферы, за исключением точки  $P$ , на плоскость. Такая проекция называется *стереографической проекцией*. С помощью проекции можно каждую точку сферы (кроме  $P$ ) рассматривать как изображение соответствующей точки плоскости, а следовательно, как изображение комплексного числа, соответствующего этой точке плоскости.

Если взять бесконечно возрастающую последовательность комплексных чисел  $\{z_n\}$ , то образы этих чисел на сфере будут стремиться к северному полюсу  $P$ . Поэтому естественно рассматривать точку  $P$  как изображение на сфере бесконечно удаленной точки. Изображением начала координат на сфере является южный полюс  $S$ . Расширенной комплексной плоскости соответствует вся сфера. Конечной комплексной плоскости соответствует сфера, из которой исключена точка  $P$ .

Если взять бесконечно возрастающую последовательность комплексных чисел  $\{z_n\}$ , то образы этих чисел на сфере будут стремиться к северному полюсу  $P$ . Поэтому естественно рассматривать точку  $P$  как изображение на сфере бесконечно удаленной точки. Изображением начала координат на сфере является южный полюс  $S$ . Расширенной комплексной плоскости соответствует вся сфера. Конечной комплексной плоскости соответствует сфера, из которой исключена точка  $P$ .

**2. Множества точек на плоскости.** Введем ряд понятий, необходимых в дальнейшем. Точка  $z$  называется *внутренней точкой множества*  $E$  точек комплексной плоскости, если существует  $\varepsilon$ -окрестность точки  $z$ , целиком принадлежащая множеству  $E$ .

Множество  $E$  называется *областью*, если оно обладает следующими свойствами:

- 1) каждая точка множества  $E$  является внутренней точкой;
- 2) любые две точки, принадлежащие множеству  $E$  можно соединить ломаной, состоящей из точек множества  $E$ .

Второе свойство называется свойством *связности области*. Множество точек  $|z| < 1$  представляет собой область. Примером области является также  $\varepsilon$ -окрестность точки  $z_0$ . Множество точек  $|z| \leq 1$  не является областью, так как не все точки этого множества являются внутренними. Множество точек  $|z| < 1$ ,  $|z - 2| < 1$  также не является областью, так как не обладает свойством связности.

Области в дальнейшем будем обозначать буквой  $G$ . *Граничной точкой области*  $G$  называется точка, которая сама не принадлежит области  $G$ , но любая  $\varepsilon$ -окрестность которой содержит точки  $G$ . Например, точка  $z = 1$  является граничной точкой области  $|z| < 1$ . Совокупность всех граничных точек назовем *границей области*  $G$ .

Область  $G$  с присоединенной границей называется *замкнутой областью*. Замкнутую область обозначим  $\bar{G}$ . В дальнейшем будем полагать, что граница области состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Некоторые кривые могут вырождаться в точки.

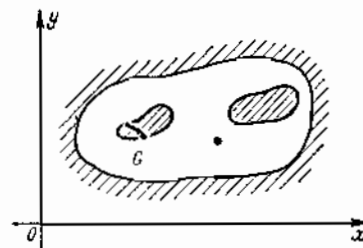


Рис. 62

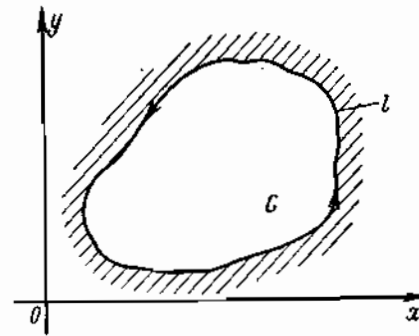


Рис. 63

Число связных частей, на которые разбивается граница, называется *порядком связности области*. На рис. 62 изображена четырехсвязная область; граница области состоит из четырех кусочно-гладких кривых, три из которых замкнутые, и точки.

Пусть имеется односвязная область  $G$  с границей  $l$ . Выберем какую-либо точку на границе и начиная с нее будем обходить область. *Положительным направлением обхода* называется такое направление, при котором обходимая область остается слева (рис. 63). Область  $G$  называется *ограниченной*, если она лежит внутри некоторого круга конечного радиуса.

**3. Функции комплексного переменного.** Понятие функции комплексного переменного вводится аналогично понятию функции действительного переменного. На множестве  $E$  комплексной плоскости задана функция комплексного переменного  $z$ , если задано правило, по которому каждому значению  $z$  множества  $E$  ставится в соответствие одно или несколько комплексных чисел  $w$ . Символически это соответствие записывается в виде  $w = f(z)$ . Множество  $E$  называется *множеством определения функции*  $f(z)$ . Мы будем рассматривать

случаи, когда множество определения  $E$  функции  $f(z)$  представляет собой область, либо замкнутую область. Функция  $f(z)$  называется *однозначной*, если каждому значению  $z \in E$  соответствует только одно комплексное число  $w$ ; если каждому значению  $z$  соответствует несколько значений  $w$ , то функция  $f(z)$  называется *многозначной*. Множество комплексных чисел  $w$ , соответствующее всем  $z \in E$ , называется *множеством значений функции  $f(z)$* .

Комплексное число  $w = u + jv$  характеризуется парой действительных чисел  $u$  и  $v$ , поэтому задание функции  $f(z)$  комплексного переменного  $z = x + jy$  равносильно заданию двух функций  $u$  и  $v$  двух действительных переменных  $x$  и  $y$ , т. е.

$$w(z) = u(x, y) + jv(x, y). \quad (1)$$

Функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  определены в области  $G$  плоскости действительных переменных  $x$  и  $y$ , соответствующей этой же области

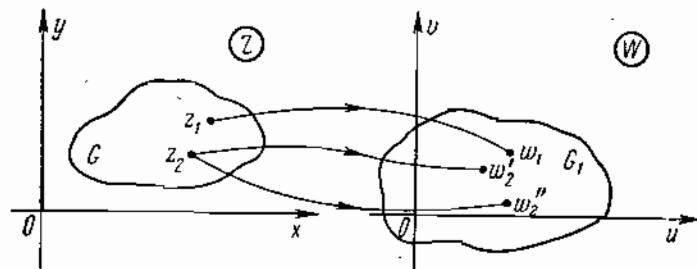


Рис. 64

плоскости комплексного переменного  $z$ , и называются соответственно *действительной* и *мнимой* частью функции  $w = f(z)$ .

Геометрически задание функции  $w = f(z)$  означает, что установлен закон, по которому каждой точке области  $G$  комплексной плоскости  $z$  ставится в соответствие некоторая точка области  $G_1$  комплексной плоскости  $w$ . Таким образом, функция  $w = f(z)$  отображает область  $G$  плоскости  $z$  на область  $G_1$  плоскости  $w$  (рис. 64).

Можно установить и обратное соответствие — каждой точке  $w \in G_1$  ставится в соответствие одна или несколько точек  $z$  области  $G$ . Это означает, что в области  $G_1$  задана функция комплексного переменного  $w$

$$z = \varphi(w).$$

Функция  $\varphi(w)$  называется *обратной* по отношению  $w = f(z)$ .

Функция  $w = f(z)$  называется *однолистной* в области  $G$ , если различным значениям  $z$  в этой области соответствуют различные значения функции  $w$ . Очевидно, что функция, обратная к однолистной функции, будет однозначной.

Рассмотрим функцию  $w = az$ , где  $a$  — некоторое комплексное число. Обозначим  $|a| = k$ ,  $\arg a = \varphi$ . Тогда согласно правилу умно-

жения комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, отображение плоскости  $z$  на плоскость  $w$  сводится к растяжению всех векторов плоскости  $z$  в  $k$  раз и к повороту их на угол  $\varphi$ . Если на плоскости  $z$  задан круг единичного радиуса с центром в начале координат, то его отображение с помощью функции  $w = az$  будет представлять на плоскости  $w$  круг радиуса  $k$  с центром в начале координат, повернутый на угол  $\varphi$ . Заштрихованный сектор при отображении поворачивается на угол  $\varphi$ , центральный угол сектора остается неизменным (рис. 65).

Введем понятие предела функции комплексного переменного. Пусть функция  $w = f(z)$  определена и однозначна в некоторой области  $G$  плоскости  $z$ . Рассмотрим некоторую последовательность

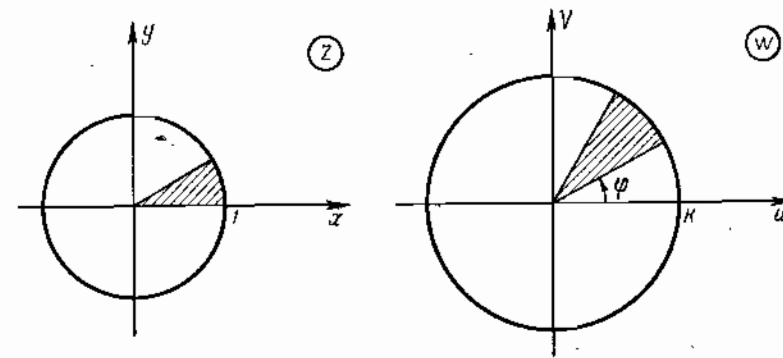


Рис. 65

чисел  $\{z_n\}$ , сходящуюся к точке  $z_0$  и соответствующую ей последовательность  $\{f(z_n)\}$  значений функции  $f(z)$ .

Если последовательность  $\{f(z_n)\}$  сходится к одному и тому же пределу  $w_0$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0,$$

причем предел  $w_0$  не зависит от выбранной последовательности  $\{z_n\}$ , то существует предел функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ , т. е.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0. \quad (2)$$

Можно дать и другое определение предела функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ .

Функция  $w = f(z)$  имеет предел  $w_0$  в точке  $z_0$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $\delta > 0$  (зависящее от  $\varepsilon$  и  $z_0$ ), что из неравенства  $|z - z_0| < \delta$  следует неравенство  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$  или, иными словами, образы точек, лежащих в  $\delta$ -окрестности точки  $z_0$ , расположены в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $w_0$ .

Функция  $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ , поэтому из существования предела функции  $f(z)$  в точке  $z_0 = x_0 + jy_0$  следует существование

пределов

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, z) = v_0, \quad (3)$$

причем

$$w_0 = u_0 + jv_0.$$

Из формул (3) следует, что предел функции комплексного переменного сводится к пределу функций двух действительных переменных. Поэтому для предела (2) функций комплексного переменного справедливы все свойства пределов функций действительных переменных \*).

Дадим определение непрерывности функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ .

Функция  $f(z)$  называется непрерывной в точке  $z_0$ , если для любого  $\epsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$  (зависящее от  $\epsilon$  и  $z_0$ ), что при выполнении неравенства  $|z - z_0| < \delta$  будет выполняться неравенство  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ .

Можно дать другое определение непрерывности функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ , эквивалентное первому.

Функция  $f(z)$  называется непрерывной в точке  $z_0$ , если для любой последовательности  $\{z_n\}$ , сходящейся к точке  $z_0$ , соответствующая последовательность значений функции  $\{f(z_n)\}$  сходится к точке  $f(z_0)$ .

Функция называется непрерывной в области  $G$ , если она непрерывна в каждой точке этой области. Из определения непрерывности функции  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  следует, что если действительная  $u(x, y)$  и мнимая  $v(x, y)$  части функции  $f(z)$  есть непрерывные функции аргументов  $x$  и  $y$ , то функция  $f(z)$  непрерывна.

Для непрерывных функций комплексного переменного справедливы все свойства непрерывных функций действительного переменного.

1. Сумма непрерывных функций есть функция непрерывная.

2. Произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная.

3. Пусть функция  $w_1 = f_1(z)$  отображает множество  $E$  плоскости  $z$  на множество  $E_1$  плоскости  $w_1$ , а функция  $w_2 = f_2(w_1)$  — множество  $E_1$  плоскости  $w_1$  на множество  $E_2$  плоскости  $w_2$ . Тогда, если функции  $f_1(z)$  и  $f_2(w_1)$  непрерывны, то сложная функция  $f_2[f_1(z)] = f(z)$ , отображающая множество  $E$  на множество  $E_2$ , также непрерывна.

4. Модуль непрерывной функции достигает в замкнутой ограниченной области своего наибольшего и наименьшего значения.

5. Функция, непрерывная в замкнутой области, равномерно непрерывна в этой области.

Функция  $f(z)$  называется равномерно-непрерывной в области  $G$ , если для любого  $\epsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , зависящее от  $\epsilon$ , что для любых двух точек  $z_1$  и  $z_2$ , принадлежащих области  $G$  из неравенства  $|z_2 - z_1| < \delta$ , следует неравенство  $|f(z_2) - f(z_1)| < \epsilon$ .

\* См. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. I «Наука», 1968, стр. 88.

**Пример 1.** Определить, является ли непрерывной функция  $w = z^2$ .

Имеем:

$$w = z^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy,$$

следовательно,

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  — непрерывные функции аргументов  $x$  и  $y$ , следовательно, функция  $f(z) = z^2$  непрерывна при любых  $z$ .

## § 24. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**1. Производная функции комплексного переменного.** Пусть функция  $f(z)$  определена и непрерывна в некоторой области  $G$ . Рассмотрим две точки  $z$  и  $z + \Delta z$ , принадлежащие области  $G$ , и составим отношение

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Назовем *производной* функции  $w = f(z)$  в точке  $z$  предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, т. е.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \quad (1)$$

Для существования производной в точке требуется, чтобы этот предел существовал и не зависел от способа стремления  $\Delta z$  к нулю.

Функция  $f(z)$  называется *аналитической (регулярной)* в области  $G$ , если в каждой точке  $z$  этой области функция определена, непрерывна и существует производная этой функции.

Введенное определение производной от функции комплексного переменного совпадает с определением производной функции действительного переменного, поэтому все правила дифференцирования функций действительного переменного справедливы и для функций комплексного переменного. Эти правила следующие:

1. Производная суммы двух функций равна сумме производных этих функций, т. е.

$$[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z).$$

2. Производная произведения двух функций равна произведению производной от первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную от второй, т. е.

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

3. Производная дроби представляет собой дробь. Числитель этой дроби равен разности между произведением производной числителя на знаменатель и произведением числителя и производной знаменателя. Знаменатель производной равен квадрату знаменателя, т. е.

$$\left[ \frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

4. Пусть имеется функция  $w_1 = f_1(z)$ , где  $z \in G$ , и функция  $w_2 = f_2(w_1)$ , где  $w_1 \in G_1$ , причем функция  $f_1(z)$  отображает область  $G$  в область  $G_1$ . Пусть  $f_1(z_0) = w_{10}$  и  $f_2(w_{10}) = w_{20}$  и существуют производные  $f_1'(z_0)$  и  $f_2'(w_{10})$ . Тогда производная от сложной функции

$$\{f_2[f_1(z)]\}'_{z=z_0} = f_2'(w_{10}) \cdot f_1'(z_0).$$

5. Пусть имеется функция  $w = f(z)$ , где  $z \in G$ , которая взаимнооднозначно отображает область  $G$  плоскости  $z$  на некоторую область  $G_1$  плоскости  $w$ . Тогда, если обратная функция  $z = \varphi(w)$  непрерывна в точке  $w_0 = f(z_0)$  и существует производная  $f'(z_0)$ , существует и производная обратной функции, причем

$$[\varphi(w_0)]' = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

**2. Условия Коши — Римана.** Дадим необходимые и достаточные условия существования производной функции  $f(z) = u + jv$  в точке  $z = z_0$ , т. е. условия аналитичности функции  $f(z)$ .

*Теорема 1.* Для того, чтобы функция  $f(z) = u + jv$ , определенная в некоторой окрестности точки  $z_0$ , имела производную в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы:

1) функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  были дифференцируемы в точке  $z = z_0$  по  $x$  и  $y$ ;

2) в точке  $z = z_0$  выполнялись условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2)$$

**Доказательство.** Сначала докажем необходимость условий Коши-Римана. Положим, что функция  $f(z)$  имеет производную в точке  $z = z_0$ , т. е. существует предел

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (3)$$

Этот предел не зависит от способа стремления  $\Delta z$  к нулю. Положим  $\Delta z = \Delta x$ , тогда

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) + jv(x_0 + \Delta x, y_0)] - [u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0)]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)] + j[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть теперь  $\Delta z = j\Delta y$ , тогда

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) + jv(x_0, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0)]}{j\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] + j[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{j\Delta y} = \\ &= \frac{1}{j} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как предел (3) не зависит от способа стремления  $\Delta z$  к нулю, то, приравнявая действительные и мнимые части выражений (4) и (5), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Необходимость условий теоремы доказана.

Докажем достаточность условий Коши — Римана. Положим, что функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  дифференцируемы по  $x$  и  $y$  и удовлетворяют условиям Коши — Римана. Покажем, что в этом случае производная функции  $f(z)$  в точке  $z = z_0$  существует.

Из дифференцируемости функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  следует, что

$$\Delta w = \Delta u + j\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + j \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + o(\Delta z),$$

где  $o(\Delta z)$  — бесконечно-малая более высокого порядка малости, чем  $\Delta z$ .

Рассмотрим отношение  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ :

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + j \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + o(\Delta z)}{\Delta x + j\Delta y} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}.$$

В силу условий Коши — Римана

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y + j \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y \right) + o(\Delta z)}{\Delta x + j\Delta y} = \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + j\Delta y) + j \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + j\Delta y) + o(\Delta z)}{\Delta x + j\Delta y}. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при  $\Delta z \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = w'(z_0),$$

т. е. предел существует и не зависит от способа стремления  $\Delta z$  к нулю. Таким образом, установлена достаточность условий Коши — Римана.

Теорема доказана полностью.

Используя условия Коши — Римана, можем написать:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - j \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial v}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6)$$

Приведем без доказательства \*) условия Коши — Римана для функции  $f(z)$ , когда  $z$  задано в тригонометрической форме. Пусть

$$f(z) = f[r(\cos \varphi + j \sin \varphi)] = u(r, \varphi) + jv(r, \varphi).$$

\*) Доказательство см., например, Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. «Наука», 1966, стр. 39.

Для существования производной в точке  $z_0 = r_0 (\cos \varphi_0 + j \sin \varphi_0)$  необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) функции  $u(r, \varphi)$  и  $v(r, \varphi)$  были дифференцируемы по  $r$  и  $\varphi$ ;
- 2) выполнялись в точке  $z_0$  условия Коши — Римана в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (7)$$

**Пример 1.** Определить аналитичность функции

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + j2xy.$$

Действительная и мнимая части этой функции

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы по  $x$  и  $y$ ; их частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

Таким образом, условия Коши — Римана выполняются для всех точек комплексной плоскости  $z$ . Следовательно, функция  $f(z) = z^2$  аналитична всюду на комплексной плоскости.

**Пример 2.** Определить аналитичность функции

$$f(z) = |z| = r.$$

Для этой функции

$$u(r, \varphi) = r, \quad v(r, \varphi) = 0.$$

Вычислим частные производные:  $\frac{\partial u}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0$ . Условия Коши — Римана (7) не выполняются, следовательно, функция  $f(z) = |z|$  не является аналитической.

**3. Гармонические функции.** Многие задачи, встречающиеся в технике, приводят к уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta u = 0.$$

Это уравнение называется *уравнением Лапласа*;  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Введем определение. *Гармонической функцией*  $u(x, y)$  двух переменных  $x$  и  $y$  называется функция, имеющая непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяющая уравнению Лапласа.

Примером гармонической функции является функция

$$u(x, y) = \ln |z| = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2).$$

Действительно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Функция  $v(x, y)$  называется *сопряженной гармонической функцией* по отношению к гармонической функции  $u(x, y)$ , если функ-

ция  $v(x, y)$  — гармоническая функция и вместе с  $u(x, y)$  она удовлетворяет уравнениям Коши — Римана.

**Теорема 2.** *Вещественная и мнимая части  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  аналитической функции  $f(z)$  являются гармоническими сопряженными функциями от  $x$  и  $y$ .* (Доказательство)

**Доказательство.** При доказательстве теоремы будем предполагать, что вещественная и мнимая части  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  аналитической функции обладают непрерывными частными производными второго порядка по  $x$  и  $y$ . Существование непрерывных частных производных второго порядка у функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  будет доказано позднее.

Покажем, что функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  удовлетворяют уравнению Лапласа, предполагая, что они обладают непрерывными частными производными второго порядка. Напишем уравнения Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируем первое уравнение по  $x$ , а второе — по  $y$ ; после сложения получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Аналогично получим равенство

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Теорема доказана.

Зная гармоническую функцию  $u(x, y)$ , можно найти сопряженную к ней гармоническую функцию  $v(x, y)$  с точностью до постоянного множителя.

Действительно, рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int_{z_0}^z \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = v(z) - v(z_0),$$

где  $z$  и  $z_0$  — некоторые точки на плоскости  $x, y$ . Заменяем  $\frac{\partial v}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y}$ , учитывая условия Коши — Римана, получим:

$$v(z) - v(z_0) = \int_{z_0}^z -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (8)$$

Под знаком интеграла стоит полный дифференциал. Действительно, из математического анализа известно, что для того, чтобы подынтегральное выражение представляло собой полный дифференциал, требуется выполнение равенства

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это равенство выполняется, так как  $u(x, y)$ , по предположению, — гармоническая функция. В равенстве (8)  $v(z_0)$  — постоянная величина, зависящая от положения точки  $z_0$ ; таким образом,

$$v(z) = \int_{z_0}^z -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + c. \quad (9)$$

Формула (9) позволяет по известной действительной части  $u(x, y)$  аналитической функции  $f(z)$  определить с точностью до постоянного множителя ее мнимую часть  $v(x, y)$ .

Аналогично может быть получена формула

$$u(z) = \int_{z_0}^z \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + c, \quad (10)$$

с помощью которой можно определить по известной мнимой части  $v(x, y)$  аналитической функции ее действительную часть  $u(x, y)$ .

Таким образом, формулы (9) и (10) позволяют определить аналитическую функцию  $f(z)$  по одной из ее компонент.

**Пример 3.** Задана функция  $u(x, y) = x^3 - y^3$ . Найти аналитическую функцию  $f(z)$ , вещественная часть которой  $u(x, y) = x^3 - y^3$ .

Покажем, что  $u(x, y)$  — гармоническая функция. Действительно, имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0,$$

т. е. заданная функция является гармонической. Воспользовавшись формулой (9), определим мнимую часть аналитической функции  $f(z)$ :

$$v(x, y) = \int_{z_0}^z -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_{z_0}^z 2y dx + 2x dy = 2xy + c.$$

Искомая аналитическая функция  $f(z)$  имеет вид

$$f(z) = x^3 - y^3 + j(2xy + c) = z^3 + jc.$$

**4. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.** Положим, что функция  $f(z)$  аналитична в области  $G$ , причем  $f'(z_0) \neq 0$ . Пусть образом кривой  $l_z$  на плоскости  $z$  будет кривая  $l_w$  на плоскости  $w$  (рис. 66).

Пусть точки  $M$  и  $M_1$  на плоскости  $z$  соответствуют значениям  $z = z_0$  и  $z = z_0 + \Delta z$ , а точки  $N$  и  $N_1$  на плоскости  $w$  соответствуют значениям  $w = w_0$  и  $w = w_0 + \Delta w$ ; тогда значения углов будут:  $\alpha = \arg \Delta z$ ,  $\beta = \arg \Delta w$ . Следовательно,

$$\arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg \Delta w - \arg \Delta z = \beta - \alpha.$$

Если положить  $\Delta z \rightarrow 0$ , то точка  $M_1$  будет стремиться к точке  $M$ , а точка  $N_1$  — к точке  $N$ . Секущие  $MM_1$  и  $NN_1$  в пределе занимают положения касательных и

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg f'(z_0) = \psi_1 - \varphi_1. \quad (11)$$

Из выражения (11), следует, что аргумент производной функции  $f'(z)$  в точке  $z_0$  представляет собой *угол поворота касательной к кривой  $l_z$  в точке  $z_0$  при отображении этой кривой на плоскость  $w$  с помощью функции  $f(z)$* . В этом состоит геометрический смысл аргумента производной  $f'(z)$ .

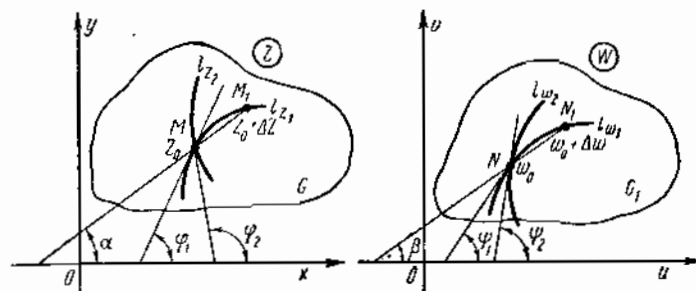


Рис. 66

Если рассмотреть другую кривую  $l_z$ , проходящую через точку  $M$ , то можно записать:

$$\arg f'(z_0) = \psi_2 - \varphi_2,$$

или, принимая во внимание (11),

$$\psi_2 - \psi_1 = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (12)$$

Таким образом, если взять на плоскости  $z$  две кривые  $l_z$  и  $l_z$ , и обозначить их образы на плоскости  $w$  соответственно  $l_w$  и  $l_w$ , то при отображении с помощью аналитической функции  $f(z)$  углы между кривыми сохраняются при условии, что  $f'(z_0) \neq 0$ .

Выясним теперь геометрический смысл модуля производной  $f'(z)$ .

Рассмотрим модуль отношения  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ ; имеем

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = \frac{N_1 N}{M_1 M}.$$

При  $\Delta z \rightarrow 0$  получим:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)|. \quad (13)$$

Из равенства (13) видно, что модуль производной характеризует *растяжение (модуль производной равен коэффициенту растяжения) бесконечно-малых векторов, выходящих из точки  $z_0$  при отображении с помощью функции  $w = f(z)$* . Это растяжение не зависит от направления бесконечно-малого вектора, т. е. растяжение будет одинаково по всем направлениям.

Из геометрических свойств аргумента и модуля аналитической функции следует, что отображение с помощью аналитической функции в окрестности одной точки будет *подобным, или конформным (сохраняющим форму)*.



§ 25. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ  
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. **Линейная и дробно-линейная функции.** *Линейной функцией комплексного переменного  $z$*  называется функция вида

$$f(z) = az + b, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  — комплексные числа. Производная линейной функции  $f'(z) = a$ .

При отображении с помощью этой функции в каждой точке  $z$  бесконечно-малый вектор растягивается в  $|a|$  раз и поворачивается на угол  $\varphi = \arg a$ .

Рассмотрим более подробно отображение, совершаемое линейной функцией. Пусть имеем функцию

$$f(z) = |a|z. \quad (2)$$

С помощью этой функции осуществляется преобразование подобия с коэффициентом  $|a|$ , т. е. при отображении на плоскость  $w$   $\arg z$  не изменяется, а длина вектора возрастает в  $|a|$  раз.

Пусть теперь

$$f(z) = z(\cos \alpha + j \sin \alpha). \quad (3)$$

Эта функция осуществляет поворот вектора  $z$  на угол  $\alpha$ , оставляя модуль  $|z|$  неизменным.

Функция

$$f(z) = az = |a|e^{j\alpha}z, \quad (4)$$

где  $\alpha = \arg a$ , осуществляет последовательно поворот вектора  $z$  на угол  $\alpha$  и растяжение этого вектора в  $|a|$  раз, т. е. производит как преобразование (2), так и преобразование (3).

При отображении с помощью функции

$$f(z) = z + b \quad (5)$$

осуществляется сдвиг всех векторов плоскости  $z$  на постоянный вектор  $b$ .

Таким образом, при отображении с помощью функции  $f(z) = az + b$  осуществляется последовательно поворот и растяжение векторов плоскости  $z$ , а также их сдвиг на вектор  $b$ . Преобразование (1) имеет две неподвижные точки (при  $a \neq 0$  и  $a \neq 1$ ): 1) бесконечно удаленная точка, которая с помощью отображения (1) переходит в бесконечно удаленную точку плоскости  $w$ ; 2) конечная неподвижная точка  $z_1$ , которая при отображении остается на месте, т. е.  $f(z_1) = z_1$ . Эта точка определится из уравнения  $z = az + b$ , решение которого  $z_1 = \frac{b}{1-a}$ . Если  $a = 1$ , то точка  $z = \infty$  будет двойной неподвижной точкой, так как точка  $z_1$  уходит в бесконечность. Если  $a = 0$ , то  $f(z) = b$ , и в этом случае будет одна неподвижная точка, в которую отображается вся плоскость  $z$ .

*Дробно-линейной функцией* называется функция вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (6)$$

причем  $|c| + |d| \neq 0$ . Дробно-линейная функция определена всюду, кроме точки  $z = -\frac{d}{c}$ . Производная дробно-линейной функции

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}. \quad (7)$$

Если выполнено условие  $ad - bc \neq 0$ , то производная  $f'(z) \neq 0$  во всей комплексной плоскости. Если  $ad - bc = 0$ , то  $ad = bc$ , или  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$ . В этом случае функция  $f(z)$  принимает вид

$$f(z) = \frac{\lambda(cz + d)}{cz + d} = \lambda.$$

Следовательно, если функция  $f(z) \neq \text{const}$ , то отображение (6) конформно всюду на конечной комплексной плоскости  $z$ , за исключением точки  $z = -\frac{d}{c}$ . В дальнейшем будем полагать, что  $ad - bc \neq 0$ .

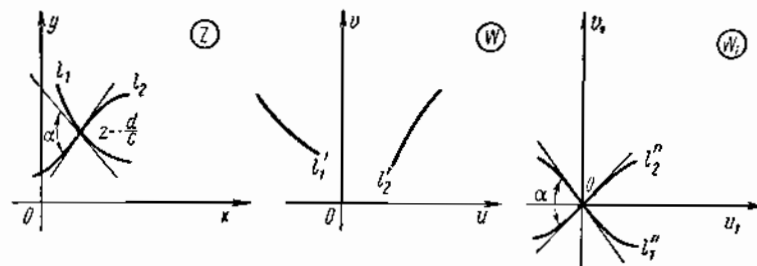


Рис. 67

Преобразование  $f(z) = \frac{1}{z}$  переводит бесконечно удаленную точку  $z = \infty$  плоскости  $z$  в ноль. Поэтому полагаем, что кривые  $l_1'$  и  $l_2'$  (рис. 67), уходящие в бесконечность, образуют угол  $\alpha$  в бесконечно удаленной точке, если при преобразовании  $w_1 = \frac{1}{w}$  образы  $l_1''$  и  $l_2''$  этих кривых на плоскости  $w_1$  образуют угол  $\alpha$  в точке  $O$ .

Покажем, что дробно-линейная функция сохраняет углы и в точке  $z = -\frac{d}{c}$ . Функция  $f_1(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{cz + d}{az + b}$  отображает точку  $z = -\frac{d}{c}$  плоскости  $z$  в точку  $w_1 = 0$  плоскости  $w_1$ . Чтобы сохранялись углы между кривыми, проходящими через точку  $z = -\frac{d}{c}$ , требуется, чтобы производная функции  $f_1(z)$  в этой точке была отлична от нуля, т. е.

$$f_1'(z) = \frac{cb - ad}{(az + b)^2} \Big|_{z = -\frac{d}{c}} \neq 0.$$

Таким образом, углы с вершиной в точке  $z = -\frac{c}{a}$  при отображении с помощью дробно-линейной функции сохраняются.

Точка  $z = -\frac{d}{c}$  называется *полюсом функции*  $f(z)$  и обладает тем свойством, что  $\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} f(z) = \infty$ .

Бесконечно удаленная точка плоскости  $z$  с помощью функции  $f(z)$  переходит в точку  $w = \frac{a}{c}$ . Функция  $z = \varphi(w)$ , обратная к функции (6),

$$z = \varphi(w) = -\frac{dw - b}{cw - a} \quad (8)$$

также является дробно-линейной. Точка  $w = \frac{a}{c}$  является полюсом функции  $z = \varphi(w)$ . В силу доказанного выше отображение с помощью функции (8) сохраняет углы и в точке  $\frac{a}{c}$ .

Таким образом, *дробно-линейная функция взаимно однозначно отображает расширенную комплексную плоскость на себя с сохранением углов между кривыми во всех точках расширенной комплексной плоскости, т. е. дробно-линейное преобразование конформно всюду на плоскости  $z$ .*

Найдем неподвижные точки дробно-линейного преобразования. Неподвижные точки определяются из уравнения  $f(z) = z$ , которое с учетом формулы (6) примет вид

$$z = \frac{az + b}{cz + d},$$

или

$$cz^2 + z(d - a) - b = 0;$$

корни этого уравнения равны

$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{a^2 - 2ad + d^2 + 4bc}}{2c}. \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что дробно-линейное преобразование имеет не более двух неподвижных точек. Если  $(a - d)^2 + 4bc = 0$ , то имеем двойную неподвижную точку.

Следующая теорема устанавливает, что не может быть двух отличных друг от друга дробно-линейных функций, значения которых совпадают в трех различных точках. Теорему приведем без доказательства.

**Теорема 1.** *Если две дробно-линейные функции совпадают в трех различных точках, то они тождественны.*

Из приведенной теоремы следует, что всякая дробно-линейная функция определяется своими значениями в трех различных точках.

Рассмотрим подробнее это свойство дробно-линейной функции. Пусть даны на плоскости  $z$  точки  $z_1, z_2, z_3$  и на плоскости  $w$  точки

$w_1, w_2, w_3$ . Покажем, что всегда существует дробно-линейное преобразование  $w(z)$ , такое, что оно переводит точки  $z_1, z_2, z_3$  в точки  $w_1, w_2, w_3$ .

Положим сначала, что все точки конечные, и найдем преобразование  $\zeta_1(z)$  такое, что  $\zeta_1(z_1) = 0, \zeta_1(z_2) = \infty, \zeta_1(z_3) = 1$ .

В общем случае дробно-линейная функция имеет вид

$$\zeta_1(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Из условия  $\zeta_1(z_1) = 0$  найдем:

$$az_1 + b = 0, \text{ откуда } b = -az_1.$$

Учитывая другое условие  $\zeta_1(z_2) = \infty$ , получим

$$cz_2 + d = 0, \text{ т. е. } d = -cz_2.$$

Подставим найденные значения  $b$  и  $d$  в преобразование  $\zeta_1(z)$ :

$$\zeta_1(z) = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Отношение  $\frac{a}{c}$  найдем из условия  $\zeta_1(z_3) = 1$ :

$$1 = \frac{a}{c} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}, \text{ откуда } \frac{a}{c} = 1 : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Окончательно  $\zeta_1(z)$  запишется в виде

$$\zeta_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \quad (10)$$

Аналогично преобразование

$$\zeta_2(w) = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} \quad (11)$$

переводит точки  $w_1, w_2, w_3$  плоскости  $w$  соответственно в точки  $0, \infty$  и  $1$  плоскости  $\zeta_2$ .

Тогда преобразование  $w = \varphi_2(\zeta_1(z))$ , где  $\varphi_2(z)$  — функция, обратная к функции  $\zeta_2(z)$ , переводит точки  $z_1, z_2, z_3$  в точки  $w_1, w_2, w_3$ . Это преобразование запишется в виде

$$\zeta_2(w) = \zeta_1(z),$$

или

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}. \quad (12)$$

Формула (12) соответствует случаю, когда все точки  $z_i$  и  $w_i$  конечные.

Пусть теперь одна из точек, например точка  $z_1$ , совпадает с бесконечностью. Тогда, переписав  $\zeta_1(z)$  в виде

$$\zeta_1(z) = \frac{z - 1}{z - z_2} : \frac{z_3 - 1}{z_3 - z_2}$$

и устремив  $z_1$  к бесконечности, получим

$$\zeta_1(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_2}.$$

Преобразование  $\zeta_1(z) = \zeta_2(w)$  в этом случае будет иметь вид

$$\frac{1}{z - z_2} : \frac{1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}. \quad (13)$$

Из изложенного следует общее правило построения дробно-линейной функции, отображающей заданные точки  $z_1, z_2, z_3$  плоскости  $z$  в точки  $w_1, w_2, w_3$  плоскости  $w$ : если какие-либо точки  $z_i$  или  $w_i$  совпадают с бесконечностью, то в уравнении (12) следует члены, в которые входят  $z_i$  или  $w_i$ , заменить единицей.

Следующая теорема устанавливает круговое свойство дробно-линейной функции.

**Теорема 2.** При дробно-линейном преобразовании  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  окружности и прямые расширенной комплексной плоскости  $z$  переходят в окружности и прямые расширенной комплексной плоскости  $w$ . При этом окружности и прямые на плоскости  $z$ , проходящие через полюс  $z = -\frac{c}{a}$ , переходят на плоскости  $w$  в прямые, а все остальные окружности и прямые на плоскости  $z$  — в окружности плоскости  $w$ .

Доказательство. Общее уравнение окружности на плоскости  $z$  имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0; \quad (14)$$

в частном случае, при  $A = 0$ , оно будет общим уравнением прямой.

Преобразуем уравнение (14), полагая, что  $A \neq 0$ :

$$A \left[ \left( x^2 + \frac{2B}{A}x + \frac{B^2}{A^2} \right) + \left( y^2 + \frac{2C}{A}y + \frac{C^2}{A^2} \right) \right] = \frac{B^2}{A} + \frac{C^2}{A} - D,$$

или

$$\left( x + \frac{B}{A} \right)^2 + \left( y + \frac{C}{A} \right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - AD}{A^2}, \quad A \neq 0. \quad (15)$$

Чтобы уравнение (15) было уравнением окружности, необходимо и достаточно, чтобы  $A \neq 0$  и  $B^2 + C^2 - AD > 0$ . Если  $A = 0$  и  $B^2 + C^2 > 0$ , то уравнение (14) представляет собой уравнение прямой.

Запишем общее уравнение окружности в комплексной форме. Так как  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ,  $y = \frac{z - \bar{z}}{2j}$ , то уравнение (14) можно записать в виде

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + Ez + D = 0, \quad (16)$$

где

$$E = B + jC.$$

Условия, при которых уравнение (16) является уравнением окружности, такие:

$$A \neq 0, \quad E\bar{E} - AD > 0. \quad (17)$$

Здесь  $A$  и  $D$  — вещественные числа. Если  $A = 0$  и  $E \neq 0$ , (18) то уравнение (16) является уравнением прямой.

Пусть теперь  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  — некоторая дробно-линейная функция. Полагаем, что  $c \neq 0$ , так как в противном случае дробно-линейная функция сведется к линейной, для которой справедливость кругового свойства была показана выше. Перепишем функцию  $w$  в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{1}{c} \frac{bc - ad}{cz + d}. \quad (19)$$

Из равенства (19) следует, что преобразование с помощью функции  $w$  представляет собой последовательность трех преобразований:

- 1) линейного преобразования  $z_1 = cz + d$ ;
- 2) преобразования  $z_2 = \frac{e}{z_1}$ , где  $e = \frac{bc - ad}{c}$ ;
- 3) линейного преобразования  $w = \frac{a}{c} + z_2$ .

Преобразования 1) и 3) обладают круговым свойством. Следовательно, для того чтобы преобразование с помощью дробно-линейной функции  $w(z)$  обладало этим свойством, достаточно показать, что преобразование 2) обладает круговым свойством. Для этого рассмотрим преобразование

$$w = \frac{1}{z}. \quad (20)$$

На плоскости  $w$  образы окружностей, задаваемых уравнением (16), определяются уравнением

$$Dw\bar{w} + Ew + \bar{E}\bar{w} + A = 0, \quad (21)$$

которое получится, если в уравнение (16) подставить  $z = \frac{1}{w}$  из выражения (20).

Уравнение (21) также представляет собой уравнение окружности или прямой. Исследуем это уравнение.

1. Пусть  $D \neq 0$ . Это означает, что исходная кривая на плоскости  $z$  не проходит через начало координат. Пусть при этом исходная кривая — окружность, т. е. выполнены условия (17). Тогда для уравнения (21) выполняются условия

$$D \neq 0, \quad E\bar{E} - AD > 0,$$

т. е. уравнение (21) представляет собой уравнение окружности.

Таким образом, всякая окружность на плоскости  $z$ , не проходящая через начало координат, переходит при отображении на плоскость  $w$  с помощью функции (20) в окружность.

Пусть теперь для уравнения (21) выполнены условия (18), т. е. исходная кривая на плоскости  $z$  — прямая. В этом случае для уравнения (21) будут справедливы условия  $E\bar{E} - DA = E\bar{E} > 0$ ,  $D \neq 0$ , т. е. уравнение (21) является уравнением окружности на плоскости  $w$ , проходящей через начало координат.

Таким образом, прямые на плоскости  $z$ , не проходящие через начало координат, переходят при отображении  $w = \frac{1}{z}$  в окружности, проходящие через начало координат плоскости  $w$ .

2. Пусть  $D=0$ . Уравнение (21) в этом случае принимает вид

$$Ew + \bar{E}\bar{w} + A = 0. \quad (22)$$

Если исходная кривая на плоскости  $z$  была окружность, т. е. выполнялись условия

$$A \neq 0, \quad E\bar{E} - AD > 0,$$

то уравнение (22) будет уравнением прямой на плоскости  $w$ , не проходящей через начало координат. Если исходная кривая — прямая, т. е.  $E \neq 0$ ,  $A=0$ , то уравнение (22) будет уравнением прямой, проходящей через начало координат.

Таким образом, окружности на плоскости  $z$ , проходящие через начало координат, переходят в прямые на плоскости  $w$ , не проходящие через начало координат, а прямые на плоскости  $z$ , проходящие через начало координат, переходят в прямые на плоскости  $w$ , также проходящие через начало координат.

Дробно-линейная функция  $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  имеет полюсом точку  $z = -\frac{d}{c}$ , поэтому все сказанное выше для точки  $z=0$  следует отнести к точке  $z = -\frac{d}{c}$ .

Теорема доказана.

2. Показательная и логарифмическая функции. Рассмотрим показательную функцию

$$e^z = \exp z.$$

Покажем, что

$$e^z = e^x (\cos y + j \sin y). \quad (23)$$

В формулах разложения в ряд Маклорена функций

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}$$

положим показатель степени мнимым. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots = \\ &= \left[ 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots \right] + j \left[ \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \right], \end{aligned}$$

т. е. в квадратных скобках получено разложение в ряд соответственно  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ , следовательно,

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi. \quad (24)$$

Формула (24) называется *формулой Эйлера*.

Учитывая эту формулу, получим

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + j \sin y).$$

Из формулы (23) следует, что

$$\operatorname{mod} e^z = e^x, \quad \operatorname{Arg} e^z = y + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (25)$$

С помощью формулы Эйлера можно получить выражения тригонометрических функций через показательную:

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}. \quad (26)$$

Учитывая формулу (4) § 22, а также используя формулу Эйлера, получим показательную форму комплексного числа:

$$z = r e^{j\varphi}, \quad (27)$$

где  $r$  — модуль, а  $\varphi$  — аргумент комплексного числа.

Функция  $f(z) = e^z$  является аналитической функцией на всей комплексной плоскости. Действительно, если

$$e^z = u(x, y) + jv(x, y),$$

то

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Проверим для функции  $e^z$  выполнение условий Коши — Римана. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x \cos y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y, & \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y. \end{aligned} \quad (28)$$

Из равенств (28) следует, что условия Коши — Римана выполняются на всей комплексной плоскости, т. е.  $e^z$  является функцией, аналитической на всей плоскости  $z$ .

Вычислим производную показательной функции:

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + j e^x \sin y = e^z. \quad (29)$$

Производная отлична от нуля во всей комплексной плоскости, т. е.

функция  $e^z$  осуществляет конформное преобразование во всей плоскости  $z$ .

Поставим задачу о нахождении функции, обратной к показательной, т. е. функции  $w = f(z)$ , удовлетворяющей соотношению

$$z = e^w. \quad (30)$$

Эта обратная функция называется *логарифмической функцией* и обозначается следующим образом:

$$w = \text{Ln } z.$$

Пусть  $w = u + jv$ , а  $z = re^{j\varphi}$ . Тогда равенство (30) означает, что

$$r = e^u, \quad \varphi = v + 2k\pi,$$

т. е.

$$u = \ln |z|, \quad v = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Отсюда получим, что логарифмическая функция определяется равенством

$$w = \text{Ln } z = \ln |z| + j(\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2). \quad (31)$$

Отметим, что логарифмическая функция — многозначная.

Изучим геометрические свойства отображения с помощью показательной функции. Функция  $e^z$  является периодической функцией с периодом, равным мнимой величине  $2\pi j$ . Действительно, имеем

$$e^{z+2\pi j} = e^{x+j(y+2\pi)} = e^x [\cos(y+2\pi) + j \sin(y+2\pi)] = e^x (\cos y + j \sin y) = e^z.$$

Отсюда следует, что две точки  $z_1$  и  $z_2$  плоскости  $z$ , действительные части которых совпадают, а мнимые отличаются на число, кратное  $2\pi$ , отображаются в одну точку плоскости  $w$ . Таким образом, функция  $w = e^z$  — однозначная, но не однолистная. Обратная к этой функции функция  $w = \text{Ln } z$  — бесконечно-значная. Ввиду периодичности функции  $w = e^z$  достаточно рассмотреть отображение полосы плоскости  $z$ :  $\alpha \leq \text{Im } z < \alpha + 2\pi$ , например полосы  $0 \leq \text{Im } z < 2\pi$ . В этой полосе функция  $w = e^z$  будет однолистной. Если точки  $z_1$  и  $z_2$  принадлежат указанной полосе, то  $|\text{Im } z_1 - \text{Im } z_2| < 2\pi$  и, следовательно,  $e^{z_1} \neq e^{z_2}$ .

Рассмотрим, отображение прямой  $y = c$ . Функция

$$w = e^x (\cos c + j \sin c)$$

при постоянном  $c$  характеризует на плоскости  $w$  прямую, выходящую из начала координат под углом  $c$  к оси абсцисс. Действительно, так как

$$u = e^x \cos c, \quad v = e^x \sin c, \quad \text{то } v = u \text{tg } c,$$

получили уравнение прямой на плоскости  $w$ , проходящей через начало координат под углом  $c$  к оси абсцисс  $u$ .

При изменении  $x$  в пределах  $-\infty < x < \infty$  модуль  $|w|$  изменяется в пределах  $0 < |w| < \infty$ . Полосу  $c_1 < \text{Im } z < c_2$  на плоскости  $z$ , показательная функция  $e^z$  переводит на плоскости  $w$  в сектор, для которого  $c_1 < \arg w < c_2$  (рис. 68).

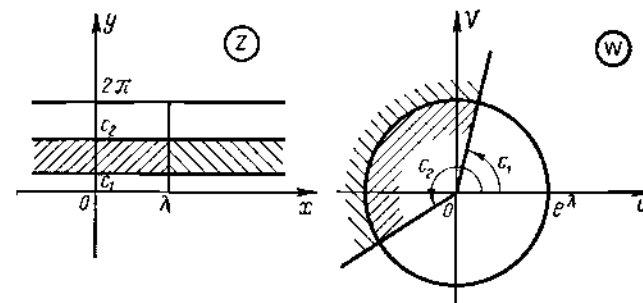


Рис. 68

Рассмотрим теперь отображение отрезка прямой на плоскости  $z$ :  $x = \lambda, 0 \leq y < 2\pi$ . Будем иметь

$$w = e^\lambda (\cos y + j \sin y);$$

на плоскости  $w$  образом этого отрезка будет окружность с радиусом  $e^\lambda$  и с центром в начале координат. Действительно,

$$u = e^\lambda \cos y, \quad v = e^\lambda \sin y.$$

Исключив  $y$  из этих равенств, получим  $u^2 + v^2 = (e^\lambda)^2$ , т. е. имеем уравнение окружности с центром в начале координат и с радиусом  $e^\lambda$ .

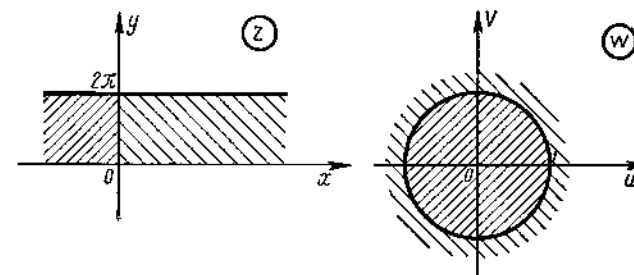


Рис. 69

Полуполосу  $-\infty < x \leq 0; 0 \leq y < 2\pi$  плоскости  $z$  показательная функция  $e^z$  отображает на внутренность единичного круга плоскости  $w$ , а полуполосу  $0 < x < \infty; 0 \leq y < 2\pi$  — на внешность единичного круга (рис. 69).

3. Степенная функция. Степенная функция имеет вид

$$w = z^n,$$

где  $n$  — целое положительное число.

Если  $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ , то  $w = r^n(\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$ . Для этой функции

$$u = r^n \cos n\varphi, \quad v = r^n \sin n\varphi.$$

Проверим выполнение условий Коши—Римана (7) § 24 для степенной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = nr^{n-1} \cos n\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = nr^{n-1} \sin n\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -nr^n \sin n\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = nr^n \cos n\varphi,$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Следовательно, для степенной функции условия Коши—Римана

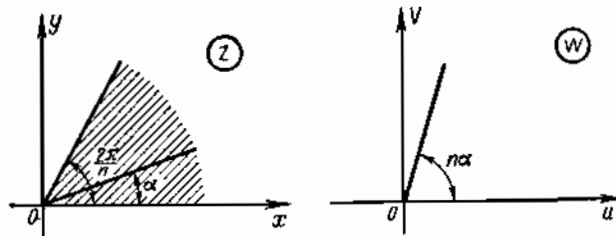


Рис. 70

выполняются на всей комплексной плоскости  $z$ . Поэтому функция  $w = z^n$  является аналитической на всей плоскости  $z$ .

Производная степенной функции

$$w'(z) = nz^{n-1}. \quad (32)$$

При  $z \neq 0$   $w'(z) \neq 0$ , т. е. отображение с помощью степенной функции является всюду конформным, за исключением точки  $z = 0$ .

Рассмотрим отображение, осуществляемое степенной функцией (рис. 70). Луч  $\arg z = \alpha$ ,  $0 \leq |z| < \infty$  на плоскости  $z$  отображается в луч  $\arg w = n\alpha$ ,  $0 \leq |w| < \infty$  на плоскости  $w$ . В точке  $z = 0$  конформность отображения нарушается, так как  $w'(z) = 0$  при  $z = 0$ . Это нарушение конформности в точке  $z = 0$  состоит в том, что угол между двумя любыми лучами, выходящими из начала координат, при отображении возрастает в  $n$  раз. Если повернуть луч на плоскости  $z$  на угол  $\frac{2\pi}{n}$ , то луч на плоскости  $w$  повернется на угол  $2\pi$  и заметет всю плоскость  $w$ .

Таким образом, угол  $0 \leq \arg z < \frac{2\pi}{n}$  является областью однолистности степенной функции. Окружности  $|z| = c$  на плоскости  $z$  пере-

ходят при отображении с помощью функции  $z^n$  в окружности  $|w| = c^n$  на плоскости  $w$ .

Введем понятие степени комплексного числа  $z$  с произвольным показателем. Пусть  $z$  — произвольное, отличное от нуля комплексное число. Тогда, если  $n$  — целое положительное число, то

$$z^n = |z|^n [\cos(n \arg z) + j \sin(n \arg z)].$$

Если  $r = \frac{p}{q}$  — рациональное число, причем дробь  $\frac{p}{q}$  — несократима, то

$$z^r = z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \left[ \cos\left(\frac{p}{q} \arg z\right) + j \sin\left(\frac{p}{q} \arg z\right) \right].$$

Пусть теперь  $\alpha$  — иррациональное число. Тогда существует последовательность рациональных чисел  $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\} \rightarrow \alpha$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Положим

$$z^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} z^{\frac{p_n}{q_n}} = |z|^\alpha [\cos(\alpha \arg z) + j \sin(\alpha \arg z)]. \quad (33)$$

Мы получаем одно значение степени  $z^\alpha$ , если  $\alpha$  — целое число;  $q$  различных значений, если  $\alpha$  — рациональное число, представленное в виде  $\alpha = \frac{p}{q}$ , и бесконечное множество значений, если  $\alpha$  — иррациональное число.

Для определения степени с любым комплексным показателем представим формулу (33) в виде

$$z^\alpha = |z|^\alpha [\cos(\alpha \arg z) + j \sin(\alpha \arg z)] = e^{\alpha \ln |z| + j\alpha \operatorname{Arg} z} = \exp(\alpha \operatorname{Ln} z).$$

Это выражение имеет смысл и для комплексных  $\alpha$ . Поэтому положим для любого комплексного  $\alpha$

$$z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Ln} z). \quad (34)$$

Пример 1. Вычислить  $1^j$ .

Согласно формуле (34) имеем

$$1^j = \exp(j \operatorname{Ln} 1) = \exp(j \cdot 2k\pi j) = e^{-2k\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пример 2. Вычислить  $j^j$ .

$$j^j = \exp(j \operatorname{Ln} j) = \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{2} j + 2k\pi j \right) \right] = e^{-\frac{\pi}{2}(4k+1)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

#### 4. Тригонометрические функции.

Определим тригонометрические функции комплексного аргумента  $z$  следующим образом:

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}. \quad (35)$$

Из формул (35) следует, что  $\cos z$  и  $\sin z$  — периодические функции с периодом  $2\pi$ .



ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ  
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Определим действительные и мнимые части, а также модули функций  $\sin z$  и  $\cos z$ :

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \frac{e^{-y+jx} + e^{y-jx}}{2} = \frac{e^{-y}(\cos x + j \sin x) + e^y(\cos x - j \sin x)}{2} = \\ &= \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - j \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - j \sin x \operatorname{sh} y; \quad (36)\end{aligned}$$

аналогично получим

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + j \cos x \operatorname{sh} y. \quad (36')$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \cos z &= \cos x \operatorname{ch} y, & \operatorname{Im} \cos z &= -\sin x \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{Re} \sin z &= \sin x \operatorname{ch} y, & \operatorname{Im} \sin z &= \cos x \operatorname{sh} y.\end{aligned}$$

Модули  $|\cos z|$  и  $|\sin z|$  определяются равенствами

$$\begin{aligned}|\cos z| &= \sqrt{(\cos x \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \operatorname{sh} y)^2} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}, \\ |\sin z| &= \sqrt{(\sin x \operatorname{ch} y)^2 + (\cos x \operatorname{sh} y)^2} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}.\end{aligned}$$

Для тригонометрических функций комплексного переменного справедливы все формулы тригонометрических функций действительного переменного. Так, например, справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}\right)^2 + \left(\frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2jz} - 2 + e^{-2jz}}{-4} + \\ &+ \frac{e^{2jz} + 2 + e^{-2jz}}{4} = 1,\end{aligned} \quad (37)$$

т. е. получено основное тригонометрическое тождество

$$\begin{aligned}\sin(z_1 + z_2) &= \frac{e^{j(z_1+z_2)} - e^{-j(z_1+z_2)}}{2j} = \frac{e^{jz_1} \left(\frac{e^{jz_2} + e^{-jz_2}}{2}\right) -}{-} \\ &- e^{-jz_1} \left(\frac{e^{jz_2} + e^{-jz_2}}{2}\right) + e^{jz_2} \left(\frac{e^{jz_1} + e^{-jz_1}}{2}\right) - e^{-jz_2} \left(\frac{e^{jz_1} + e^{-jz_1}}{2}\right)}{2j} = \\ &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;\end{aligned} \quad (37')$$

аналогично можно получить

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2. \quad (37'')$$

Отображения, производимые тригонометрическими функциями, в настоящей книге не рассматриваются.

## § 26. ИНТЕГРАЛ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Понятие об интеграле функции комплексного переменного. Пусть дана функция комплексного переменного  $w = f(z)$ , непрерывная в области  $G$  плоскости  $z$ , и пусть задана кривая  $\overline{AB}$ , целиком находящаяся в области  $G$  (рис. 71). Разобьем кривую  $\overline{AB}$  на части и составим сумму вида  $\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$ , где  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ ;  $\zeta_k$  — произвольная точка на дуге  $(z_{k-1}, z_k)$ . Обозначим  $\lambda_n = \max_k |\Delta z_k|$  и рассмотрим предел

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda_n \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k &= \\ &= \int_{\overline{AB}} f(z) dz.\end{aligned} \quad (1)$$

Если этот предел существует и не зависит от способа разбиения кривой  $\overline{AB}$  на части и от выбора точек  $\zeta_k$ , то он называется *интегралом от функции  $f(z)$  вдоль кривой  $\overline{AB}$* .

*Теорема 1.* Если кривая  $\overline{AB}$  — кусочно-гладкая, а функция  $f(z)$  — кусочно-непрерывная и ограниченная, то интеграл  $\int_{\overline{AB}} f(z) dz$  существует.

*Доказательство.* Пусть

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

и

$$\begin{aligned}z_k &= x_k + jy_k, & x_k - x_{k-1} &= \Delta x_k, & u(\xi_k, \eta_k) &= u_k, \\ \zeta_k &= \xi_k + j\eta_k, & y_k - y_{k-1} &= \Delta y_k, & v(\xi_k, \eta_k) &= v_k,\end{aligned}$$

тогда

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + j \sum_{k=1}^n (u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k).$$

Переходя к пределу в обеих частях равенства при  $n \rightarrow \infty$  так, что

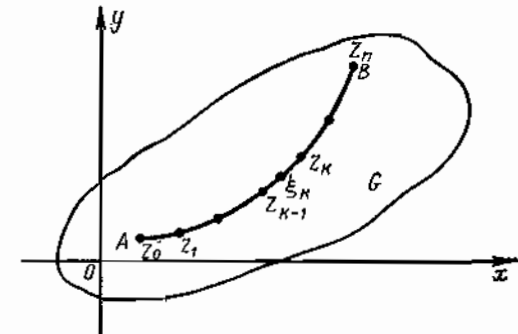


Рис. 71

$\max_k \Delta x_k \rightarrow 0$  и  $\max_k \Delta y_k \rightarrow 0$ , получим

$$\int_{\overline{AB}} f(z) dz = \int_{\overline{AB}} u(x, y) dx - v(x, y) dy + j \int_{\overline{AB}} v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (2)$$

Криволинейные интегралы, стоящие в правой части равенства (2), существуют. Действительно, из кусочной непрерывности и ограниченности функции  $f(z)$  следует кусочная непрерывность и ограниченность ее действительной  $u(x, y)$  и мнимой  $v(x, y)$  частей. Кусочно-гладкая дуга  $\overline{AB}$  является спрямляемой.

Таким образом, выполняются условия существования криволинейного интеграла второго рода<sup>\*</sup>. Следовательно, существует и интеграл  $\int_{\overline{AB}} f(z) dz$ .

Теорема доказана.

Формула (2) дает способ вычисления интеграла (1) через криволинейные интегралы функций действительного переменного. Кроме того, из формулы (2) следует, что интеграл функции комплексного переменного имеет свойства, аналогичные свойствам криволинейного интеграла второго рода. Укажем эти свойства.

1. При изменении направления интегрирования знак интеграла меняется на обратный, т. е.

$$\int_{\overline{AB}} f(z) dz = - \int_{\overline{BA}} f(z) dz. \quad (3)$$

2. Если кривую  $\overline{AB}$  разбить на части, то интеграл по кривой  $\overline{AB}$  равен сумме интегралов по отдельным частям, т. е.

$$\int_{\overline{ACB}} f(z) dz = \int_{\overline{AC}} f(z) dz + \int_{\overline{CB}} f(z) dz. \quad (4)$$

3. Для любых постоянных чисел  $k_1$  и  $k_2$  справедливо равенство

$$\int_{\overline{AB}} [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)] dz = k_1 \int_{\overline{AB}} f_1(z) dz + k_2 \int_{\overline{AB}} f_2(z) dz. \quad (5)$$

Произведем оценку интеграла по модулю. Пусть  $M = \max_{\overline{AB}} |f(z)|$

и  $s$  — длина кривой  $\overline{AB}$ , тогда

$$\left| \int_{\overline{AB}} f(z) dz \right| \leq \int_{\overline{AB}} |f(z)| |dz| \leq Ms. \quad (6)$$

<sup>\*</sup> См., например: Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. II. «Наука», 1968, стр. 221.

Доказательство этого соотношения следует из определения интеграла. В самом деле,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k|. \quad (7)$$

Сумма  $\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$  представляет собой длину ломаной, вписанной в кривую  $\overline{AB}$ . Переходя к пределу в неравенстве (7) при  $n \rightarrow \infty$  и  $\max_k \Delta z_k \rightarrow 0$ , получим неравенство (6).

В частности, имеем  $\int_{\overline{AB}} |dz| = s$ , т. е. интеграл представляет собой

длину кривой  $\overline{AB}$ .

2. **Интегральная теорема Коши.** Пусть  $G$  — односвязная область на плоскости  $z$  и  $l$  — замкнутая спрямляемая кривая, целиком лежащая в области  $G$ . Тогда справедлива следующая интегральная теорема Коши:

**Теорема 2.** Если функция  $f(z)$  аналитична в области  $G$ , то интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, т. е.

$$\int_l f(z) dz = 0. \quad (8)$$

**Доказательство.** Для упрощения доказательства введем дополнительное предположение о непрерывности производной  $f'(z)$ <sup>\*</sup>. Используем равенство

$$\int_l f(z) dz = \int_l u(x, y) dx - v(x, y) dy + j \int_l v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Покажем, что криволинейные интегралы второго рода

$$\int_l u dx - v dy \text{ и } \int_l v dx + u dy \text{ по замкнутому контуру равны нулю.}$$

Действительно для равенства нулю криволинейных интегралов второго рода требуется, чтобы:

1) функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  имели непрерывные частные производные в области  $G$ ;

2) всюду в области  $G$  выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (9)$$

Первое условие выполняется в силу предположения о непрерывности производной  $f'(z)$ . Равенства (9) совпадают с условиями Коши — Римана и выполняются всюду в области  $G$ , так как функция  $f(z)$  по условию теоремы аналитична в этой области.

<sup>\*</sup> Доказательство теоремы без предположения о непрерывности производной  $f'(z)$  можно найти, например, в книге: Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. «Наука», 1966, стр. 147.

Таким образом, криволинейные интегралы

$$\int_l u dx - v dy = 0 \quad \text{и} \quad \int_l v dx + u dy = 0,$$

а следовательно,

$$\int f(z) dz = 0.$$

Теорема доказана.

**Следствие.** Пусть дана односвязная область  $G$  и две спрямляемые кривые  $l_1$  и  $l_2$ , целиком лежащие в  $G$  и имеющие общие концы  $A$  и  $B$ . Тогда для любой аналитической в области  $G$  функции  $f(z)$  справедливо равенство

$$\int_{l_1} f(z) dz = \int_{l_2} f(z) dz,$$

т. е. если  $f(z)$  — аналитична в односвязной области  $G$ , то интеграл по кривой  $l \in G$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ , зависит только от расположения точек  $A$  и  $B$  на плоскости  $z$  и не зависит от вида кривой.

Если  $z$  и  $z_0$  — некоторые точки области  $G$ , причем точка  $z_0$  фиксирована, то интеграл  $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$  можно рассматривать как функцию верхнего предела  $z$ , ибо интеграл имеет одно и то же значение для любой кривой, соединяющей точки  $z$  и  $z_0$  и расположенной в области  $G$ .

Основываясь на интегральной теореме Коши, докажем ряд теорем, аналогичных теоремам в теории интеграла функций действительного переменного.

**Теорема 3.** Если функция  $f(z)$  определена и непрерывна в односвязной области  $G$  и интеграл от этой функции по любой замкнутой кривой  $l$ , лежащей целиком в области  $G$ , равен нулю,

то функция  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ , где

$z, z_0 \in G$ , причем точка  $z_0$  фиксирована, является аналитической в области  $G$  и  $F'(z) = f(z)$ .

**Доказательство.** Точка  $z + \Delta z$  находится в некоторой окрестности точки  $z$  (рис. 72), причем окрестность принадлежит области  $G$ . Учитывая, что интеграл

по замкнутому контуру равен нулю, и используя свойство 2 интеграла, можем записать:

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left[ \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right] = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta.$$

Интегрируя по прямой, соединяющей точки  $z + \Delta z$  и  $z$ , будем иметь

$$\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta = f(z).$$

Оценим модуль разности:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta z} \left[ \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_z^{z + \Delta z} f(z) d\zeta \right] \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z + \Delta z} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \max_{\zeta \in [z, z + \Delta z]} |f(\zeta) - f(z)| \cdot |\Delta z| = \\ &= \max_{\zeta \in [z, z + \Delta z]} |f(\zeta) - f(z)|. \end{aligned}$$

Так как функция  $f(z)$  непрерывна в области  $G$ , то для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что если  $|\Delta z| < \delta$ , то  $\max_{\zeta \in [z, z + \Delta z]} |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ . Таким образом, когда  $|\Delta z| < \delta$ , то выполняется неравенство

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon.$$

По определению предела функции это означает, что

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z) = f(z).$$

Теорема доказана.

Введем определение. Пусть дана некоторая область  $G$  и задана функция  $f(z)$ , аналитическая в этой области. Тогда функция  $F(z)$  называется *первообразной от функции  $f(z)$* , если  $F'(z) = f(z)$ . Из доказанной теоремы следует, что интеграл с переменным верхним пределом является первообразной от функции  $f(z)$ .

**Теорема 4.** Две первообразные от одной и той же функции  $f(z)$  отличаются друг от друга на постоянную величину.

**Доказательство.** Пусть функции  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  — первообразные от функции  $f(z)$ .

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z).$$

Имеем:

$$\Phi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) \equiv 0.$$

Если

$$\Phi(z) = u(x, y) + jv(x, y),$$

то

$$\Phi'(z) = u'_x(x, y) + jv'_x(x, y) = v'_y(x, y) - ju'_y(x, y) \equiv 0,$$

следовательно,

$$u'_x(x, y) = v'_x(x, y) = v'_y(x, y) = u'_y(x, y) \equiv 0;$$

откуда

$$u(x, y) = c_1, \quad v(x, y) = c_2, \quad \text{или} \quad \Phi(z) = c_1 + jc_2 = c.$$

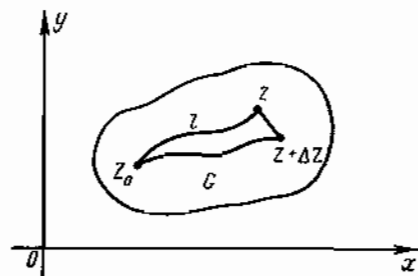


Рис. 72

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что если функция  $F(z)$  — некоторая первообразная от аналитической функции  $f(z)$ , то справедлива формула

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) d\zeta = F(z_1) - F(z_0), \quad (10)$$

аналогичная формуле Ньютона — Лейбница для функций действительного переменного.

В самом деле, согласно теореме 3 функция  $F_1(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$  является первообразной, а так как две первообразные отличаются друг от друга только на постоянную величину, то

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) + c. \quad (11)$$

Полагая в равенстве (11)  $z = z_0$ , найдем  $c = -F(z_0)$ .

Следовательно,

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(z_0).$$

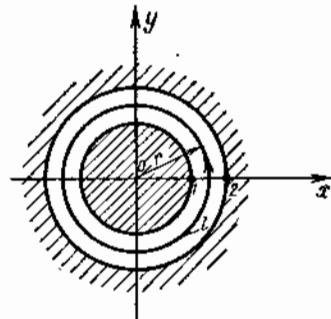


Рис. 73

Если принять в этом равенстве  $z = z_1$ , то получим формулу (10).

Для односвязной области интегральная теорема Коши в общем случае не верна. Покажем это на примере. Пусть задана функция  $f(z) = \frac{1}{z}$  в области  $G$ , определяемой неравенством  $1 < |z| < 2$ . Эта функция аналитична в указанной области, но интеграл вдоль окружности  $l$  (рис. 73) не равен нулю. Действительно, имеем

$$\int \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{jre^{j\varphi} d\varphi}{re^{j\varphi}} = 2\pi j \neq 0.$$

Получили, что в двухсвязной области  $G$  интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции не равен нулю. Интегральная теорема Коши в этом случае не выполняется.

Распространим интегральную теорему Коши на многосвязную область.

Пусть  $G$  — многосвязная область и  $l$  — спрямляемый контур, целиком лежащий в  $G$ . Пусть имеются контуры  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , лежащие внутри контура  $l$ . Контуры  $l_k$  принадлежат области  $G$  и не пересекаются (рис. 74). Область  $\Omega$ , ограниченная снаружи

контуром  $l$ , а изнутри контурами  $l_k$ , целиком принадлежит области  $G$ . Совокупность контуров  $l, l_1, \dots, l_n$  назовем составным спрямляемым контуром  $\Gamma$ . Зададим на контуре  $\Gamma$  направление обхода — обход считается положительным, если обходимая область  $\Omega$  остается слева.

**Теорема 5.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в многосвязной области  $G$ . Тогда интеграл по любому составному спрямляемому контуру  $\Gamma$ , лежащему в области  $G$ , равен нулю.

**Доказательство.** Соединим контуры  $l$  с  $l_1, l_1$  с  $l_2$ , и т. д. спрямляемыми дугами  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  так, чтобы эти дуги не имели самопересечений и взаимных пересечений (см. рис. 74). Тогда область, получаемая из области  $\Omega$  с помощью разрезов вдоль дуг  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , будет односвязной, ограниченной контуром  $L$ , состоящим из дуг  $l_1, \gamma_1^+, l_2, \dots, \gamma_n^+, l_n, \gamma_n^-, \dots, l_1^-, l_1$ ; здесь  $l_1^+$  и  $l_1^-$  — дуги, на которые распадается контур  $l_1$  при разрезе по дугам  $\gamma_1, \gamma_2$  и т. д.;  $\gamma_1^+$  и  $\gamma_1^-$  — верхняя и нижняя границы разреза вдоль дуги  $\gamma_1$  и т. д.

В силу теоремы Коши для односвязной области интеграл от функции  $f(z)$  вдоль контура  $L$  равен нулю. Поэтому

$$\int_{\gamma_1^+} f(z) dz + \int_{l_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n^+} f(z) dz + \int_{l_n} f(z) dz + \int_{\gamma_n^-} f(z) dz + \dots + \int_{l_1^-} f(z) dz = 0.$$

Устремим к нулю ширину всех разрезов. Тогда

$$\int_{\gamma_k^+} f(z) dz = - \int_{\gamma_k^-} f(z) dz,$$

следовательно,

$$\int_{l_1} f(z) dz + \dots + \int_{l_n} f(z) dz + \int_l f(z) dz = 0.$$

Теорема доказана.

## § 27. ФОРМУЛА КОШИ

**1. Формула Коши.** Теорема о среднем. Получим важную в теории функций комплексного переменного формулу Коши.

**Теорема 1.** Пусть задана функция  $f(z)$ , аналитическая в многосвязной области  $G$ , и задан составной или простой контур  $l$ , огра-

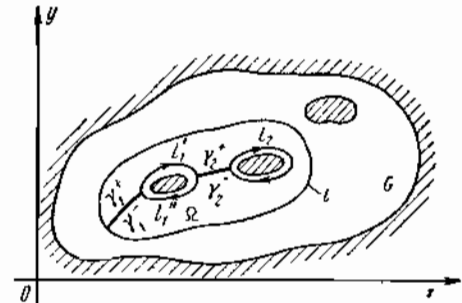
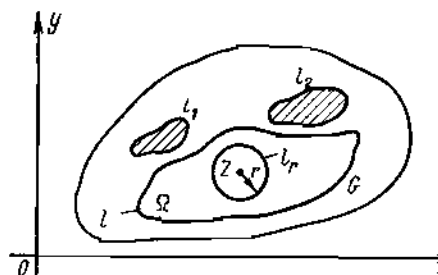


Рис. 74

ничающей некоторую область  $\Omega \subset G$  (рис. 75). Тогда для любой внутренней точки  $z$ , принадлежащей области  $\Omega$ , справедлива формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{l_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (1)$$

Доказательство. Удалим из области  $\Omega$  кружок радиуса  $r$  с центром в точке  $z$ . В полученной области  $\Omega^*$  числитель и знаменатель подынтегральной функции аналитичны относительно  $\zeta$ , причем знаменатель нигде не обращается в ноль. Следовательно, подынтегральная функция аналитична в области  $\Omega^*$ . По теореме Коши для многосвязной области имеем



$$\int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \int_{l_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

Рис. 75

где  $l_r$  — окружность радиуса  $r$ , причем черточка означает, что окружность обходится по часовой стрелке.

Учитывая свойство (1) интеграла, получим

$$\int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{l_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (2)$$

На окружности  $l_r$  справедливо равенство

$$\zeta - z = re^{j\varphi}, \text{ т. е. } d\zeta = jre^{j\varphi} d\varphi;$$

тогда

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{l_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{2\pi j} \int_{l_r} \frac{jre^{j\varphi} d\varphi}{re^{j\varphi}} = f(z). \quad (3)$$

Из формул (2) и (3) следует, что

$$\frac{1}{2\pi j} \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{l_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4)$$

Оценим по модулю правую часть равенства (4):

$$\left| \frac{1}{2\pi j} \int_{l_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{l_r} |f(\zeta) - f(z)| \frac{2\pi r}{r} = \max_{l_r} |f(\zeta) - f(z)|.$$

Так как функция  $f(z)$  непрерывна в области  $\Omega$ , то при  $r \rightarrow 0$   $\max_{l_r} |f(\zeta) - f(z)| \rightarrow 0$ . Но левая часть равенства (4) от  $r$  не зависит,

поэтому

$$\frac{1}{2\pi j} \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z).$$

Теорема доказана.

Формула Коши устанавливает одно из важнейших свойств аналитической функции. Из формулы следует, что, зная значение аналитической функции  $f(z)$  на контуре  $l$ , можно вычислить ее значение в любой точке области  $\Omega$ , ограниченной этим контуром. Если, в частности, задать контур  $l$  в виде окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $z$ , то  $\zeta - z = Re^{j\varphi}$  и формула (1) примет вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{j\varphi}) d\varphi. \quad (5)$$

или

$$f(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{c_R} f(\zeta) ds.$$

Формула (5) называется формулой среднего значения и показывает, что значение аналитической функции  $f(z)$  в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности.

2. Интегралы, зависящие от параметра. Пусть функция  $f(z, \zeta)$  является функцией двух комплексных переменных  $z$  и  $\zeta$ , причем эта функция определена и однозначна для значений переменного  $z$ , принадлежащих области  $G$ , и для значений переменного  $\zeta$ , принадлежащих кусочно-гладкой кривой  $l$  (рис. 76). Взаимное расположение области  $G$  и кривой  $l$  может быть произвольным. Рассмотрим интеграл

$$\int_l f(z, \zeta) d\zeta. \quad (6)$$

Если функция  $f(z, \zeta)$  непрерывна по  $z$  и кусочно-непрерывна и ограничена по  $\zeta$  для любых значений  $z \in G$  и  $\zeta \in l$ , то этот интеграл существует и определяет некоторую функцию  $z$ :

$$F(z) = \int_l f(z, \zeta) d\zeta.$$

Следующие теоремы, рассматривающие свойства интеграла, зависящего от параметра, приведем без доказательства.

**Теорема 2.** Если функция  $f(z, \zeta)$  является непрерывной функцией двух комплексных переменных  $z$  и  $\zeta$  для любых значений  $z \in G$

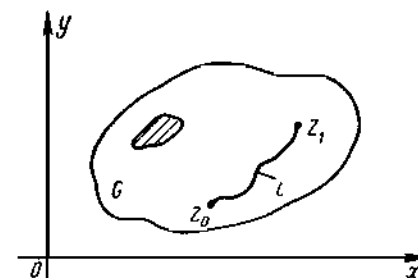


Рис. 76

и  $\zeta \in l$ , то интеграл (6) будет непрерывной функцией переменного  $z$  в области  $G$ , т. е. справедливо равенство

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \int_l f(z, \zeta) d\zeta = \int_l f(z_0, \zeta) d\zeta. \quad (7)$$

**Теорема 3.** Пусть  $f(z, \zeta)$  при любом значении  $\zeta \in l$  является аналитической функцией  $z$  в области  $G$  и, кроме того, функция  $f(z, \zeta)$  и ее производная по  $z$   $\frac{\partial f}{\partial z}$  являются непрерывными функциями двух комплексных переменных  $z$  и  $\zeta$  для любых значений  $z \in G$  и  $\zeta \in l$ . Тогда функция

$$F(z) = \int_l f(z, \zeta) d\zeta$$

является аналитической функцией  $z$  в области  $G$ , причем производная  $F'(z)$  может быть вычислена с помощью дифференцирования под знаком интеграла, т. е.

$$F'(z) = \int_l \frac{\partial f(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta. \quad (8)$$

Приведенные теоремы могут быть доказаны с помощью сведения интеграла (6) к интегралам, зависящим от параметра для функций действительных переменных и использования свойств этих интегралов \*).

**3. Производные высших порядков.** Покажем, что если функция  $f(z)$  является аналитической в области  $G$ , то она имеет в этой области производные сколь угодно высокого порядка.

**Теорема 4.** Если функция  $f(z)$  аналитична в области  $G$  и непрерывна в замкнутой области  $\bar{G}$ , то она обладает в каждой точке области  $G$  производными всех порядков, причем  $n$ -я производная задается формулой

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad (9)$$

где  $l$  — граница области  $G$ , проходимая в положительном направлении.

**Доказательство.** Проведем доказательство методом математической индукции. Сначала покажем, что формула (9) справедлива при  $n=1$ . Пусть точка  $z \in G$ . Так как функция  $f(z)$  аналитична в области  $G$  и непрерывна в области  $\bar{G}$ , то, пользуясь определением производной и формулой Коши, получим

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_l \left[ \frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z} \right] f(\zeta) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} d\zeta. \end{aligned}$$

\* Свойства интегралов, зависящих от параметра для функций действительных переменных см., например, в книге: Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. II. «Наука», 1960, п. 296, 297.

Подынтегральная функция  $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)}$  является непрерывной функцией переменных  $\Delta z$  и  $\zeta$ , если  $z \in G$ , а  $\zeta \in l$ . Переходя к пределу под знаком интеграла, будем иметь

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Для  $n=1$  формула (9) доказана.

Предположим, что формула (9) справедлива для производной  $k$ -го порядка и покажем, что она будет справедлива для производной порядка  $k+1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(z + \Delta z) - f^{(k)}(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{k!}{2\pi j} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_l \left[ \frac{1}{(\zeta - z - \Delta z)^{k+1}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} \right] f(\zeta) d\zeta = \frac{k!}{2\pi j} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \times \\ &\quad \times \int_l \left\{ \frac{(\zeta - z)^{k+1} - [(\zeta - z)^{k+1} - (k+1)(\zeta - z)^k \Delta z + o(\Delta z)]}{(\zeta - z - \Delta z)^{k+1} (\zeta - z)^{k+1}} \right\} f(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Подынтегральная функция является непрерывной функцией переменных  $\Delta z$  и  $\zeta$ . Поэтому в силу теоремы 2 можем перейти к пределу под знаком интеграла:

$$f^{(k+1)}(z) = \frac{(k+1)!}{2\pi j} \int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta.$$

Таким образом, предположив справедливость формулы (9) для  $n=k$ , мы доказали ее справедливость для  $n=k+1$ . Выше была доказана формула (9) для случая  $n=1$ . Отсюда следует, что формула (9) будет справедлива для любого  $n$ .

Теорема доказана.

Из формулы (9) получим неравенства Коши. Введем обозначения:  $M = \max_l |f(z)|$ ;  $R$  — расстояние от точки  $z$  до границы области  $G$  и  $s$  — длина границы  $l$  области  $G$ . Оценивая по модулю обе части равенства (9), получим

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \right| \leq \frac{n! M s}{2\pi R^{n+1}}. \quad (10)$$

Выражение (10) является неравенством Коши.

Если функция  $f(z)$  аналитична в круге радиуса  $R$ , то, принимая в качестве области  $G$  круг с радиусом  $R$ , получим для точки  $z$ , лежащей в центре круга,

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M 2\pi R}{2\pi R^{n+1}} = \frac{n! M}{R^n}. \quad (11)$$

Неравенство (11) представляет собой неравенство Коши для круговой области.



**4. Теорема Морера.** Используя теорему 4 о существовании производной любого порядка у аналитической функции, докажем теорему, обратную основной теореме Коши.

*Теорема 5.* Если функция  $f(z)$  непрерывна в односвязной области  $G$  и интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру  $l$ , целиком принадлежащему области  $G$ , равен нулю, то функция  $f(z)$  аналитична в области  $G$ .

Доказательство. Выше (см. § 26, теорема 3) было показано, что при выполнении условий теоремы интеграл

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

при фиксированном  $z_0$  является аналитической функцией  $z$ , причем  $F'(z) = f(z)$ . В силу предыдущей теоремы существует и вторая производная функции  $F(z): F''(z) = f'(z)$ . Таким образом, функция  $f(z)$  аналитична в области  $G$ .

Теорема доказана.

§ 28. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

**1. Числовые комплексные ряды.** Числовым комплексным рядом называется сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad (1)$$

где  $z_n = a_n + jb_n$  — комплексные числа.

Ряд (1) называется *сходящимся*, если существует предел его частичных сумм:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S, \text{ где } S_N = \sum_{n=1}^N z_n. \quad (2)$$

Рассмотрим ряды, составленные из вещественных и мнимых частей  $a_n$  и  $b_n$  комплексных чисел  $z_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (3)$$

Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды (3)

причем, если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$ , то  $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S_1 + jS_2$ .

Приведем без доказательства критерий Коши\*) сходимости ряда (1).

Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\epsilon > 0$  существовало такое целое положительное число  $N$ , зависящее от  $\epsilon$ , что для всех  $n > N$  и для любого целого числа  $m$  выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} z_k \right| < \epsilon.$$

Ряды (3) являются обычными числовыми рядами и для исследования сходимости этих рядов можно применять все известные из математического анализа признаки сходимости числовых рядов.

Приведем некоторые из признаков сходимости знакоположительных рядов. Пусть имеется знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0). \quad (4)$$

\*) Доказательство критерия Коши см., например, в книге: Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. II. Физматгиз, 1968, стр. 29.

Тогда справедливы следующие признаки сходимости ряда (4):

1. **Признак Даламбера.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , то при  $q < 1$  ряд (4) сходится, при  $q > 1$  — ряд расходится.

2. **Признак Коши.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ , то при  $q < 1$  ряд (4) сходится, при  $q > 1$  — ряд расходится.

3. **Признак Раабе.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p$ , то при  $p > 1$  ряд (4) сходится, при  $p < 1$  — расходится.

Если сходится ряд, составленный из модулей  $|z_n|$ , т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty, \quad (5)$$

то ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*.

Исследовать сходимость ряда (5) можно с помощью любого, приведенного выше признака сходимости числовых рядов. Связь между сходимостью ряда и его абсолютной сходимостью устанавливает следующая теорема:

**Теорема 1.** Если ряд (1) сходится абсолютно, то он сходится.

**Доказательство.** Из сходимости ряда (5) согласно критерию Коши следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  и целого положительного  $m$  существует такое целое положительное число  $N$ , что сумма

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} |z_k| < \varepsilon, \text{ для всех } n > N. \text{ Но}$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |z_k| < \varepsilon,$$

поэтому согласно критерию Коши ряд (1) сходится.

Теорема доказана.

2. **Функциональные ряды.** Пусть в области  $G$  определена бесконечная последовательность функций  $\{f_n(z)\}$  комплексного переменного.

**Функциональным рядом** называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z). \quad (6)$$

Функциональный ряд (6) сходится в области  $G$ , если числовой ряд, получающийся из ряда (6) при любом фиксированном  $z$  из области  $G$ , сходится.

Введем понятие равномерной сходимости последовательности функций  $\{f_n(z)\}$ .

Последовательность функций  $\{f_n(z)\}$  называется *равномерно сходящейся* к функции  $f(z)$  в области  $G$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое целое положительное число  $N$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что при

$n > N$  для всех  $z$  из области  $G$  будет выполняться неравенство  $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ .

Равномерно сходящиеся последовательности функций  $\{f_n(z)\}$  комплексного переменного  $z$  обладают свойствами, аналогичными свойствам равномерно сходящихся последовательностей функций действительного переменного. Укажем эти свойства:

1. Предел  $f(z)$  равномерно сходящейся в области  $G$  последовательности непрерывных функций  $\{f_n(z)\}$  является непрерывной функцией в этой области.

2. Если последовательность непрерывных функций  $\{f_n(z)\}$  на кривой  $l$  равномерно сходится к  $f(z)$ , то справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_l f_n(z) dz = \int_l \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \int_l f(z) dz.$$

С понятием равномерной сходимости последовательностей функций  $\{f_n(z)\}$  тесно связано понятие равномерной сходимости ряда. Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  называется *равномерно сходящимся* в области  $G$ , если равномерно сходится в этой области последовательность  $\{S_n\}$  его частичных сумм.

Из указанных выше свойств равномерно сходящихся последовательностей следует, что сумма равномерно сходящегося ряда есть функция непрерывная в области  $G$  и равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно.

Для функций комплексного переменного справедлив следующий признак равномерной сходимости функционального ряда.

**Признак Вейерштрасса.** Если функциональный ряд (6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

мажорируется в области  $G$  некоторым сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ с положительными членами } a_n > 0, \text{ т. е. всюду в области } G$$

справедливо неравенство  $|f_n(z)| < a_n$ , то он сходится равномерно.

Доказательство этого признака равномерной сходимости функционального ряда не отличается от доказательства аналогичного признака для функций действительного переменного.

3. **Теорема Вейерштрасса.** Сумма ряда, составленного из аналитических функций, не всегда будет функцией аналитической. Следующая теорема показывает, при каких условиях сумма ряда является функцией аналитической.

**Теорема 2.** Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

составленный из функций  $f(z)$ , аналитических в области  $G$ , равно-

мерно сходится в каждой замкнутой области  $\bar{G}$ , лежащей в области  $G$ . Тогда сумма ряда является функцией, аналитической в области  $G$ .

Доказательство. В п. 2 было показано, что сумма  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  равномерно сходящегося ряда есть функция, непрерывная в области  $G$ .

Пусть  $l$  — произвольный замкнутый контур, содержащий внутри себя область  $\Omega$ . По условию теоремы функции  $f_n(z)$  являются аналитическими в области  $G$ . В силу теоремы Коши имеем  $\int f_n(z) dz = 0$ .

В п. 2 отмечено также, что равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать. Выполним почленное интегрирование ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  и, учитывая формулу Коши, будем иметь

$$\int f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(z) dz = 0.$$

Таким образом,  $f(z)$  — непрерывная функция в области  $G$  и интеграл от нее по любому замкнутому контуру равен нулю. Согласно теореме 5 § 27 функция  $f(z)$  в этом случае является аналитической функцией в области  $G$ .

Теорема доказана.

## § 29. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

### 1. Теорема Коши—Адамара. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (1)$$

где  $a_n$  — некоторые комплексные числа, является простейшим примером функционального ряда. Такой ряд может сходиться при одних значениях  $z$  и расходиться при других. Область сходимости степенного ряда выясняет следующая теорема:

**Теорема 1.** Степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  сходится абсолютно в каждой точке круга  $|z - z_0| < R$ , сходится равномерно в каждом круге  $|z - z_0| \leq R_1 < R$  и расходится в области  $|z - z_0| > R$ , где

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (2)$$

\* Число  $A$  называется верхним пределом последовательности действительных чисел  $\{a_n\}$   $A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такой номер  $N(\varepsilon)$ , что  $a_n < A + \varepsilon$  при всех  $n > N$  и, кроме того, существует последовательность  $\{a_{n_k}\}$ , которая сходится к  $A$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Пусть  $z_1$  — произвольная точка круга  $|z - z_0| < R$ . Покажем, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n$  сходится в точке  $z = z_1$ . Так как  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое целое положительное число  $N$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что для всех значений  $n > N$  будет справедливо неравенство  $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R} + \varepsilon$ . Тогда

$$\sqrt[n]{|a_n|} |z_1 - z_0|^n = \sqrt[n]{|a_n|} |z_1 - z_0| < \frac{z_1 - z_0}{R} + \varepsilon |z_1 - z_0|.$$

Выберем  $\varepsilon$  так, чтобы выполнялось неравенство  $\sqrt[n]{|a_n|} |z_1 - z_0| < q < 1$  для всех  $n > N$ . Переходя к пределу, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |z_1 - z_0|^n \leq q < 1.$$

Из признака Коши следует, что числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z_1 - z_0|^n$  сходится. В силу произвольности выбора точки  $z_1$  это означает, что степенной ряд (1) сходится абсолютно в круге  $|z - z_0| < R$ .

Докажем теперь равномерную сходимость степенного ряда в круге  $|z - z_0| \leq R_1 < R$ . В этом круге степенной ряд (1) мажорируется сходящимся числовым рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R_1^n$ , т. е.

$$|a_n| |z - z_0|^n \leq |a_n| R_1^n, \quad (3)$$

и поэтому в силу критерия Вейерштрасса ряд (1) сходится равномерно.

Исследуем сходимость степенного ряда в области  $|z - z_0| > R$ . Выберем точку  $z_1$  такую, что  $|z_1 - z_0| > R$ . Так как  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ ,

то существует последовательность  $\{n_k\} \rightarrow \infty$  такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \frac{1}{R}$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое целое положительное число  $N$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что  $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon$  при  $n_k > N$ .

Тогда, если выбрать  $\varepsilon$  таким, чтобы выполнялось неравенство  $\frac{z_1 - z_0}{R} - \varepsilon |z_1 - z_0| = q > 1$ , то для последовательности  $\{n_k\}$  оказывается справедливым соотношение

$$|a_{n_k} (z_1 - z_0)^{n_k}| > \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^{n_k} |z_1 - z_0|^{n_k} = \left[\frac{|z_1 - z_0|}{R} - \varepsilon |z_1 - z_0|\right]^{n_k} = q^{n_k} \rightarrow \infty \quad \text{при } n_k \rightarrow \infty.$$

Общий член числового ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$  по последовательности  $\{n_k\}$  стремится по модулю к бесконечности. Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости числового ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ . Следовательно, степенной ряд (1) расходится в области  $|z - z_0| > R$ .

Теорема доказана.

**2. Теорема Абеля.** Из теоремы Коши—Адамара вытекает следующая теорема Абеля:

*Теорема 2.* Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  сходится в точке  $z = z_1 \neq z_0$ , то он сходится абсолютно в круге  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ , причем в каждом круге радиуса  $R_1 < |z_1 - z_0|$  он сходится равномерно.

**Доказательство.** Действительно, из сходимости ряда в точке  $z_1$ , следует, что радиус сходимости степенного ряда  $R \leq |z_1 - z_0|$ . Тогда утверждения теоремы Абеля являются следствием теоремы Коши—Адамара.

Заметим, что согласно теореме Вейерштрасса сумма степенного ряда в круге сходимости является аналитической функцией.

**3. Ряды Тейлора.** Обобщим на случай функций комплексного переменного известную из математического анализа формулу ряда Тейлора.

Пусть функция  $f(z)$  является аналитической в области  $G$ . В этой области задан замкнутый контур  $l$ , ограничивающий область  $\Omega$ . Пусть точка  $\zeta$  принадлежит контуру  $l$ , а точка  $z$  является некоторой точкой области  $\Omega$ . Возьмем произвольную точку  $a$ , принадлежащую также области  $\Omega$ . Составим отношение

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}}.$$

Учитывая формулу суммы геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

или

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1 - q}, \quad (4)$$

указанное отношение можно переписать в виде

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \left\{ 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \dots + \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} \left( \frac{z - a}{\zeta - a} \right)^{n+1} \right\}.$$

Умножив обе части последнего равенства на  $\frac{1}{2\pi j} f(\zeta)$  и проинтегрировав полученное выражение по  $\zeta$  вдоль замкнутого контура  $l$ ,

получим, учитывая формулы (1) и (9) § 27:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (z - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n + R_n, \quad (5)$$

где

$$R_n = \frac{(z - a)^{n+1}}{2\pi j} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - a)^{n+1}}. \quad (6)$$

Если остаток  $R_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то формула (5) переходит в формулу ряда Тейлора для функции  $f(z)$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(z - a)^n}{n!}. \quad (7)$$

Следующая теорема Коши указывает на возможность разложения функции  $f(z)$  в ряд Тейлора.

*Теорема 3.* Функция  $f(z)$  представима своим рядом Тейлора в любом круге  $|z - a| < R$  с центром в точке  $a$ , в котором она аналитична. Во всякой замкнутой области, принадлежащей этому кругу, ряд Тейлора сходится равномерно.

**Доказательство.** Для доказательства сходимости ряда Тейлора (7) выберем произвольную точку  $z_1$  внутри круга  $|z - a| < R$  и построим окружность радиуса  $R_1 < R$  так, чтобы точка  $z_1$  лежала внутри этой окружности. Очевидно, что  $|z_1 - a| < R_1$ . Если  $\zeta$  — произвольная точка на окружности  $|z - a| = R_1$ , то ряд

$$\frac{1}{\zeta - z_1} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_1 - a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - a)^n}{(\zeta - a)^n}, \quad (8)$$

где  $\left| \frac{z_1 - a}{\zeta - a} \right| < 1$ , сходится равномерно по  $\zeta$ , так как мажорируется

сходящимся числовым рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - a)^n}{R_1^n}$ .

Умножим обе части ряда (8) на  $\frac{1}{2\pi j} f(\zeta)$  и проинтегрируем по-членно вдоль окружности  $|z - a| = R_1$ . Согласно формулам (1) и (9) § 27 будем иметь

$$f(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z_1 - a)^n.$$

Так как  $z_1$  — произвольная точка круга  $|z - a| < R$ , то ряд Тейлора сходится к функции  $f(z)$  всюду внутри круга  $|z - a| < R$ .

Докажем теперь равномерную сходимость ряда Тейлора в любой замкнутой области, принадлежащей кругу  $|z - a| < R$ . В качестве такой замкнутой области выберем круг  $|z - a| \leq kR_1$ , где  $k$  — фиксированное число, удовлетворяющее неравенству  $0 < k < 1$ , а  $R_1 < R$ . Этот замкнутый круг лежит внутри круга  $|z - a| < R$ . Для дока-

зательства равномерной сходимости ряда Тейлора (7) требуется показать, что остаток  $R_n$  в разложении

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k + R_n$$

стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $z$ .

Произведем оценку остатка  $R_n$  ряда по модулю. Так как функция  $f(z)$  аналитична в круге радиуса  $R$ , то она ограничена по модулю в замкнутом круге  $|z-a| \leq kR_1$ , т. е.  $|f(z)| < M$ . Оценим модуль разности:

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - a| - |z - a| \geq R_1 - kR_1 = R_1(1-k).$$

Тогда в соответствии с формулой (6) получим:

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi j} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-a)^{n+1}} \right| \leq \\ &\leq \frac{k^{n+1} R_1^{n+1}}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi R_1}{R_1(1-k)R_1^{n+1}} = \frac{k^{n+1}}{1-k} M. \end{aligned}$$

Так как  $k < 1$ , то  $|R_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , причем оценка остатка ряда не зависит от  $z$ . Следовательно, ряд Тейлора сходится и притом равномерно в любом круге  $|z-a| \leq kR_1$ .

Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает связь между степенным рядом и рядом Тейлора.

**Теорема 4.** Пусть функция  $f(z)$  представляет собой сумму степенного ряда, т. е.  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ . Тогда ряд Тейлора для функции  $f(z)$  совпадает с этим степенным рядом.

**Доказательство.** Пусть в некотором круге  $|z-a| < R$  сходимости степенного ряда его сумма

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n. \quad (9)$$

Тогда в силу теоремы 2 § 28 функция  $f(z)$  является аналитической функцией в этом круге.

Положим в выражении (9)  $z=a$ , получим  $a_0=f(a)$ . Дифференцируем ряд (9) почленно, полагая каждый раз  $z=a$ :

$$f'(a) = a_1, \quad f''(a) = 2a_2, \quad \dots, \quad f^{(n)}(a) = n! a_n, \quad \dots$$

Отсюда следует, что  $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$  и ряд (9) является рядом Тейлора функции  $f(z)$ .

Теорема доказана.

Эта теорема устанавливает единственность разложения функции  $f(z)$  в ряд Тейлора. Из теоремы также следует, что радиус сходи-

мости степенного ряда (9) совпадает с расстоянием от точки  $a$  до ближайшей точки, в которой нарушается аналитичность функции  $f(z)$ .

Ниже указаны разложения в ряд Тейлора некоторых функций в окрестности точки  $z=0$ :

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} (-1)^n,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n, \quad (10)$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} (-1)^{n+1}.$$

### § 30. РЯДЫ ЛОРАНА

В предыдущем параграфе рассматривалось разложение в ряд Тейлора функций, являющихся аналитическими в некотором круге радиуса  $R$ . Но иногда приходится рассматривать области и другого вида. Например, если функция  $f(z)$  является аналитической всюду, кроме точки  $z=a$ , то областью аналитичности функции может служить кольцо  $r < |z-a| < R$ .

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в кольце  $r < |z-a| < R$  (рис. 77). Выберем произвольные числа  $r'$  и  $R'$ , удовлетворяющие неравенствам  $r < r' < R' < R$ , и число  $k$ , причем  $0 < k < 1$ , и рассмотрим кольцевую область

$$\frac{r'}{k} \leq |z-a| \leq kR'.$$

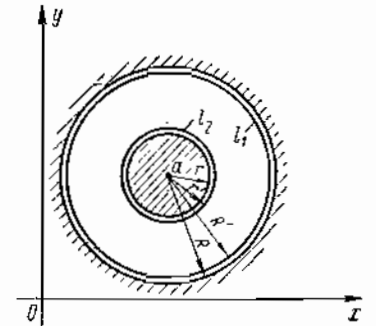


Рис. 77

В этом кольце функция  $f(z)$  аналитична. По формуле Коши для двухсвязного контура имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{l_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi j} \int_{l_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta. \quad (1)$$

Здесь  $l_1$  и  $l_2$  — окружности на плоскости  $z$ , определяемые равенствами  $|z-a|=R'$  и  $|z-a|=r'$ , причем интегрирование вдоль этих окружностей производится против часовой стрелки;  $z$  — произвольная внутренняя точка кольца.

Рассмотрим первый интеграл в выражении (1). Если  $\zeta$  — некоторая точка окружности  $l_1$ , то справедливо соотношение

$$\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| \leq \frac{kR'}{R'} = k < 1.$$

Поэтому дробь  $\frac{1}{\zeta-z}$  в первом интеграле можно представить по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta-a} \left[ 1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^n} + \dots \right], \quad (2)$$

причем ряд в правой части последнего равенства сходится равномерно, так как его можно промажорировать геометрической прогрессией со знаменателем  $k < 1$ . Умножив обе части выражения (2) на  $\frac{1}{2\pi j} f(\zeta)$  (при этом равномерная сходимость ряда не нарушается) и проинтегрируем почленно полученное равенство по окружности  $l_1$ :

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{l_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad (3)$$

здесь

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{l_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Отметим, что в отличие от ряда Тейлора коэффициенты  $a_n$  в равенстве (3) нельзя представить в виде  $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ , так как функция  $f(z)$ , вообще говоря, не аналитична в точке  $z=a$ .

Рассмотрим второй интеграл в формуле (1). Так как интегрирование ведется по окружности  $l_2$ , то справедливо неравенство

$$\left| \frac{\zeta-a}{z-a} \right| \leq \frac{kr'}{r'} = k < 1.$$

По формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии получим

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a} \left[ 1 + \frac{\zeta-a}{z-a} + \dots + \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^n} + \dots \right]. \quad (5)$$

Подставим выражение (5) во второй интеграл равенства (1) и выполним почленное интегрирование по окружности  $l_2$ :

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi j} \int_{l_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}, \quad (6)$$

здесь

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi j} \int_{l_2} f(\zeta) (\zeta-a)^{n-1} d\zeta \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (7)$$

Формула (6) представляет собой разложение в степенной ряд функции  $f_2(z)$  по отрицательным степеням  $(z-a)$ . Заменяем в формулах (6) и (7) индекс  $-n$ , где  $n$  принимает значения 1, 2, 3, ... индексом  $n$ , принимающим значения  $-1, -2, -3, \dots$ . Тогда, объединив разложения (3) и (6), получим:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n. \quad (8)$$

Согласно интегральной теореме Коши для многосвязной области (см. § 26) окружности  $l_1$  и  $l_2$  можно заменить любой окружностью  $l$  с центром в точке  $a$  и радиусом  $\rho$ , причем  $r < \rho < R$ . Поэтому формулы (4) и (7) можно записать в виде одной формулы

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (9)$$

Полученное разложение (8) называется *разложением в ряд Лорана* функции  $f(z)$  в окрестности точки  $a$ . Ряд (3) называется *правильной частью* ряда Лорана, ряд (6) — *главной частью* ряда Лорана.

Таким образом, справедлива следующая теорема:

*Теорема 1.* Пусть функция  $f(z)$  аналитична в кольце  $r < |z-a| < R$ . Тогда она разлагается в этом кольце в ряд Лорана

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ , причем разложение единственно. Коэффициенты разложения определяются по формуле

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где  $l$  — окружность, для которой  $|z-a| = \rho$ , причем удовлетворяется неравенство  $r < \rho < R$ . Полученный ряд сходится равномерно в каждой замкнутой области, принадлежащей целиком данному кольцу.

Докажем единственность разложения функции  $f(z)$  в ряд Лорана.

Пусть в кольце  $r < |z-a| < R$  функция  $f(z)$  разлагается в ряд Лорана двумя способами:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \text{ и } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n.$$

Поскольку оба ряда сходятся равномерно в любой замкнутой области, принадлежащей кольцу  $r < |z-a| < R$ , то, умножив обе части первого ряда на  $\frac{1}{2\pi j} \frac{1}{(z-a)^{k+1}}$  и проинтегрировав по окружности  $l$ , для которой  $|z-a| = \rho$ , причем  $r < \rho < R$ , получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2\pi j} \int (\zeta-a)^{n-k-1} d\zeta.$$



Но

$$\int_l (\zeta - a)^{n-k-1} d\zeta = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 2\pi j, & n = k, \end{cases}$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi j} \int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta = a_k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Проделав аналогичные операции со вторым рядом, получим, что

$$b_k = \frac{1}{2\pi j} \int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta,$$

т. е.  $a_k = b_k$ , и разложение в ряд Лорана единственно.

Заметим, что если функция  $f(z)$  аналитична в круге  $|z - a| < R$ , то  $a_n = 0$  для  $n = -1, -2, \dots$ , и ряд Лорана функции  $f(z)$  переходит в ее ряд Тейлора.

**Пример 1.** Разложить в ряд Лорана функцию  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  в кольце  $0 < |z-1| < 1$  с центром в точке  $z=1$ .  
Данную функцию представим в виде

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1};$$

так как  $|z-1| < 1$ , то по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии имеем

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} = -\frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n.$$

Главная часть ряда Лорана функции  $f(z)$

$$f_1(z) = \frac{1}{z-1},$$

а его правильная часть

$$f_2(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n.$$

### § 31. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

**1. Классификация особых точек.** Введем некоторые определения. Точка  $z = a$  называется *изолированной особой точкой* функции  $f(z)$ , если в области  $0 < |z - a| < R$  функция  $f(z)$  является аналитической, а в точке  $z = a$  аналитичность функции  $f(z)$  нарушается.

Например, функция  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  имеет в точке  $z = 0$  изолированную особую точку, так как в точке  $z = 0$  функция  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  не определена, но в любой окрестности этой точки эта функция является аналитической. Для функции  $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$  точка  $z = 0$  не явля-

ется изолированной особой точкой, так как в точках  $z_k = \frac{1}{k\pi}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) функция  $f(z)$  обращается в  $\infty$ , а точка  $z = 0$  является предельной точкой для последовательности  $\{z_k\}$ , т. е. нельзя указать такую окрестность точки  $z = 0$ , в которой функция  $f(z)$  была бы аналитической. В дальнейшем будем рассматривать только изолированные особые точки.

В основу классификации изолированных особых точек может быть положено поведение функции  $f(z)$  в окрестности этих точек, либо вид разложения функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности особых точек. Дадим классификацию изолированных особых точек в зависимости от поведения функции  $f(z)$  в их окрестности.

**1.** Изолированная особая точка  $z = a$  называется *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \neq \infty.$$

**2.** Назовем изолированную особую точку  $z = a$  *полюсом*, если

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty,$$

т. е. модуль функции  $f(z)$  неограниченно возрастает при  $z \rightarrow a$ .

**3.** Изолированная особая точка  $z = a$  называется *существенно особой точкой*, если не существует  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ .

Между типом изолированной особой точки и видом разложения в ряд Лорана функции  $f(z)$  в окрестности этой точки существует тесная связь. Прежде чем установить эту связь, получим неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.

Пусть в кольце  $r < |z - a| < R$  функция  $f(z)$  разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

где  $a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$ , а контур  $l$  является окружностью  $|z - a| = \rho$  ( $r < \rho < R$ ).

Обозначим максимум модуля функции  $f(z)$  на окружности  $l$   $\max_{|z-a|=\rho} |f(z)| = M(\rho)$ .

Тогда будет справедливо неравенство

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}} |\rho^n| d\rho = \frac{M(\rho)}{\rho^n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1)$$

**2. Разложение в ряд Лорана в окрестности особых точек.** Связь типа особой точки с видом разложения в ряд Лорана функции  $f(z)$  в окрестности этой точки устанавливают следующие теоремы:

**Теорема 1.** Для того чтобы особая точка  $z = a$  была *устранимой особой точкой* для функции  $f(z)$ , аналитичной в кольце

$0 < |z - a| < R$ , необходимо и достаточно, чтобы разложение в ряд Лорана этой функции в указанном кольце не содержало главной части.

**Доказательство.** Докажем вначале достаточность условий теоремы. Пусть ряд Лорана функции  $f(z)$  не содержит главной части, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

Тогда  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = a_0$ . По определению точка  $z = a$  в этом случае является устранимой особой точкой.

Докажем теперь необходимость условий теоремы. Пусть существует  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ , причем  $A \neq \infty$ . Тогда функция  $f(z)$  ограничена в окрестности точки  $z = a$ , т. е.  $|f(z)| < M$  для всех  $z$ , удовлетворяющих неравенству  $|z - a| \leq \rho$ . Учитывая неравенства (1), имеем  $|a_n| = \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{-n}$ . Так как величина  $\rho$  может быть выбрана сколь угодно малой, то все коэффициенты разложения функции  $f(z)$  в ряд Лорана с отрицательными индексами  $n$  равны нулю и ряд Лорана не содержит главной части. Этим доказывается необходимость условий теоремы.

Теорема доказана.

Если положить  $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z) = a_0$ , то функция  $f(z)$  будет аналитической в круге  $|z - a| < \rho$  с центром в точке  $a$ , так как во всем круге она представима сходящимся степенным рядом. Отсюда следует название «устраиваемая» особая точка. Устраиваемая особая точка называется также правильной точкой функции  $f(z)$ .

Прежде чем рассматривать разложение функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности полюса, введем некоторые определения.

Точка  $z = a$  называется *нулем порядка  $k$*  ( $k$  — целое положительное число) функции  $g(z)$ , если эта функция может быть представлена в виде  $g(z) = (z - a)^k \varphi(z)$ , причем  $\varphi(a) \neq 0$ . Если функция  $g(z) \not\equiv 0$ , то ее разложение в ряд Тейлора в окрестности точки  $a$  имеет коэффициенты, не все равные нулю. Номер младшего, отличного от нуля коэффициента совпадает с порядком нуля функции  $g(z)$  в точке  $z = a$ , т. е.

$$g(z) = a_k (z - a)^k + a_{k+1} (z - a)^{k+1} + \dots \quad (2)$$

Заметим, что порядок нуля функции  $g(z)$  в точке  $z = a$  совпадает с порядком младшей, отличной от нуля производной функции  $g(z)$  в точке  $z = a$ . Функция  $\varphi(z)$  является аналитической в окрестности точки  $z = a$  и отлична от нуля в этой точке.

Из определения особой точки-полюса следует, что если функция  $f(z)$  имеет полюс в точке  $z = a$ , то функция  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  аналитична в окрестности точки  $z = a$  и  $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$ , т. е. функция  $g(z)$  имеет ноль в точке  $z = a$ . Справедливо и обратное, если точка  $z = a$

является нулем функции  $g(z)$ , то функция  $f(z) = \frac{1}{g(z)}$  имеет в этой точке полюс. Будем называть *порядком полюса  $z = a$*  функции  $f(z)$  порядок нуля  $z = a$  функции  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ .

**Теорема 2.** Для того чтобы точка  $z = a$  была полюсом порядка  $k$  функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы ее разложение в ряд Лорана в окрестности точки  $z = a$  имело вид

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - a)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - a)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad (3)$$

или, что то же самое, функция  $f(z)$  могла быть записана в виде  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - a)^k}$ , где функция  $\varphi(z)$  аналитична в окрестности точки  $z = a$  и  $\varphi(a) \neq 0$ .

**Доказательство.** Сначала докажем необходимость условий теоремы. Пусть точка  $z = a$  является полюсом порядка  $k$  функции  $f(z)$ . Согласно изложенному выше, для функции  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  точка  $z = a$  будет нулем порядка  $k$ . Таким образом, функцию  $g(z)$  можно записать в виде  $g(z) = (z - a)^k \varphi(z)$ , где  $\varphi(z)$  — аналитическая функция в окрестности точки  $z = a$ , причем  $\varphi(a) \neq 0$ . Тогда

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - a)^k \varphi(z)}. \quad (4)$$

Функция  $\varphi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$  является аналитической функцией в окрестности точки  $z = a$ ,  $|z - a| < \rho$ . Поэтому функция  $\varphi(z)$  разлагается в этой окрестности в ряд Тейлора

$$\varphi(z) = a_{-k} + a_{-k+1} (z - a) + \dots + a_0 (z - a)^k + \dots,$$

причем  $a_{-k} = \frac{1}{\varphi(a)} \neq 0$ . Подставив это выражение для  $\varphi(z)$  в формулу (4), получим

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - a)^k} = \frac{a_{-k}}{(z - a)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

Таким образом, необходимость условий теоремы доказана.

Докажем достаточность условий теоремы. Пусть в окрестности точки  $z = a$  функция  $f(z)$  разлагается в ряд Лорана с конечным числом членов в главной части, т. е.

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - a)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

Тогда функция

$$\psi(z) = (z - a)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1} (z - a) + \dots$$

представима в виде ряда Тейлора в окрестности точки  $z = a$ , т. е.

функция  $\psi(z)$  аналитична в круге  $|z - a| < \rho$ , причем  $\psi(a) = a_{-k} \neq 0$ . Следовательно, функция

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^k}{\psi(z)} = (z-a)^k \varphi(z),$$

где  $\varphi(0) = \frac{1}{a_{-k}} \neq 0$ , имеет в точке  $z=a$  ноль  $k$ -го порядка. По доказанному выше в этом случае функция  $f(z)$  имеет в точке  $z=a$  полюс порядка  $k$ , что и доказывает достаточность условий теоремы.

Теорема доказана полностью.

Вид разложения функции  $f(z)$  в окрестности существенно особой точки устанавливает следующая теорема:

**Теорема 3.** Для того чтобы функция  $f(z)$  имела в точке  $z=a$  существенно особую точку, необходимо и достаточно, чтобы главная часть разложения в ряд Лорана функции  $f(z)$  в окрестности этой точки содержала бесконечное число членов.

Доказательство теоремы легко проводится методом от противного.

Введем понятие предельного значения функции  $f(z)$ .

Число  $A$  называется предельным значением функции  $f(z)$  в точке  $z=a$ , если существует последовательность комплексных чисел  $\{z_n\}$ , сходящаяся к точке  $a$ , такая, что соответствующая последовательность значений функции  $\{f(z_n)\}$  сходится к точке  $A$ .

Приведем без доказательства теорему\*, которая характеризует поведение функции  $f(z)$  в окрестности существенно особой точки.

**Теорема 4.** Множество предельных значений функции  $f(z)$  в ее существенно особой точке есть вся расширенная комплексная плоскость.

**Пример 1.** Определить характер особых точек функции

$$f(z) = \frac{1 - \cos^2 z}{z^3}.$$

Эта функция имеет в начале координат  $z=0$  устранимую особую точку. Действительно, учитывая, что  $1 - \cos^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2}$ , и используя разложение в ряд Тейлора функции  $\cos 2z$

$$\cos 2z = 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \dots,$$

будем иметь

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 z}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \left[ 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \dots \right]}{2z^3} = 1.$$

По определению точка  $z=0$  является устранимой особой точкой функции  $f(z) = \frac{1 - \cos^2 z}{z^3}$ .

**Пример 2.** Определить характер особых точек функции

$$f(z) = \frac{1}{e^z + 1}.$$

\* Доказательство теоремы см., например, в книге: Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. «Наука», 1966, стр. 234.

Функция  $g(z) = \frac{1}{f(z)} = e^z + 1$  имеет в точках  $z_k = (2k+1)\pi j$  ( $k=0, \pm 1, \dots$ ) нули первого порядка. В самом деле, решая уравнение  $e^z + 1 = 0$ , будем иметь  $z_k = (2k+1)\pi j$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Кроме того,

$$g'(z_k) = e^{z_k} = -1 \neq 0.$$

Таким образом, функция  $g(z)$  имеет в точках  $z_k = (2k+1)\pi j$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) нули первого порядка, следовательно, функция  $f(z) = \frac{1}{g(z)}$  имеет в этих точках полюсы первого порядка.

**Пример 3.** Определить характер особой точки  $z=0$  функции  $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$ . Разложение в ряд Лорана этой функции в окрестности точки  $z=0$  имеет вид

$$e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n}}.$$

Из написанного разложения видно, что главная часть ряда Лорана имеет бесконечное число членов. Следовательно, функция  $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$  имеет в точке  $z=0$  существенно особую точку. Покажем, что для любого наперед заданного числа

$A$  можно указать такую последовательность  $\{z_k\} \rightarrow 0$ , что  $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{z_k^2}} = A$ .

Действительно, пусть  $z_k = \frac{1}{\sqrt{\ln A + 2k\pi j}}$ ; тогда последовательность  $\{z_k\} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{z_k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\ln A + 2k\pi j} = A.$$

Рассмотрим случай бесконечно удаленной точки. Пусть функция  $f(z)$  аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки. С помощью замены переменной  $\zeta = \frac{1}{z}$  переведем бесконечно удаленную точку в начало координат. Характер особенности функции  $f(z)$  в бесконечно удаленной точке определяется характером особенности функции  $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  в окрестности начала координат. Пусть разложение в ряд Лорана функции  $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  в окрестности начала координат имеет вид

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n. \quad (5)$$

Тогда функция  $f(z)$  разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{z^n}. \quad (6)$$

§ 32. ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ

В этом случае функция  $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$  — правильная часть ряда Лорана функции  $f(z)$  в окрестности бесконечно удаленной точки, а функция  $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}z^n$  — главная часть ряда Лорана.

Таким образом, бесконечно удаленную точку по виду разложения в ряд Лорана функции  $f(z)$  в окрестности этой точки можно классифицировать следующим образом:

1. Бесконечно удаленная точка — правильная, если ряд Лорана не содержит членов с положительными степенями  $z$ .
2. Бесконечно удаленная точка является полюсом порядка  $k$ , если ряд Лорана содержит член с  $z$  в степени  $k$  ( $k \geq 1$ ), но не содержит членов с  $z$  в более высокой степени.
3. Бесконечно удаленная точка является существенно особой, если ряд Лорана содержит бесконечное число членов с положительными степенями  $z$ .

**Пример 4.** Определить особенности следующих функций в бесконечно удаленной точке:

а)  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

Для этой функции бесконечно удаленная точка является правильной точкой;

б) функция  $f(z) = z^2$  имеет бесконечно удаленную точку полюсом второго порядка;

в) для функции  $f(z) = e^z$  бесконечно удаленная точка является существенно особой точкой.

1. Понятие о вычете. Общая формула определения вычета относительно полюса. Введем определение.

Вычетом функции  $f(z)$  в изолированной особой точке  $z = a$  ( $a \neq \infty$ ) называется число  $\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) dz$ , где  $\Gamma$  — достаточно малая окружность

$|z - a| = \rho$ , такая, что в круге  $|z - a| \leq \rho$  нет других особых точек, кроме точки  $z = a$ . В этом случае величина вычета не зависит от величины радиуса  $\rho$ .

Обозначается вычет функции  $f(z)$  в точке  $z = a$  следующим образом\*):

$$\text{Res } f(z)|_{z=a}, \text{ или } \text{Выч } f(z)|_{z=a}.$$

Из формулы (9) § 30 для коэффициентов ряда Лорана при  $n = 1$  следует, что

$$\text{Res } f(z)|_{z=a} = a_{-1}, \quad (1)$$

т. е. вычет функции  $f(z)$  в изолированной особой точке  $z = a$  равен коэффициенту при  $(z - a)$  в минус первой степени в разложении функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z = a$ . Если особая точка  $z = a$  — устранимая, то вычет в ней равен нулю. Данное определение вычета относится к конечной изолированной особой точке  $z = a \neq \infty$ .

Дадим теперь определение вычета в бесконечно удаленной точке. Пусть в окрестности бесконечно удаленной точки функция  $f(z)$  разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \quad (2)$$

Тогда вычет в бесконечно удаленной точке  $z = \infty$  определяется формулой

$$\text{Res } f(z)|_{z=\infty} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) dz,$$

где  $\Gamma$  — окружность достаточно большого радиуса, обход которой производится по часовой стрелке (бесконечно удаленная точка должна оставаться слева).

\* Начальные буквы французского слова *residu* (вычет).

Проинтегрировав почленно ряд (2) по контуру  $\bar{l}$  (в силу равномерной сходимости ряда (2) это всегда возможно), получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\bar{l}} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\bar{l}} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right) dz = -\frac{a_{-1}}{2\pi j} \cdot 2\pi j = -a_{-1}. \quad (3)$$

Из формулы (3) следует, что

$$\operatorname{Res} f(z) |_{z=\infty} = -a_{-1}. \quad (4)$$

Таким образом, вычет в бесконечно удаленной точке может быть отличен от нуля, когда  $z=\infty$  — правильная точка. Например, функция  $f(z) = \frac{1}{z}$  не имеет особенностей в бесконечно удаленной точке, но  $\operatorname{Res} f(z) |_{z=\infty} = -1$ .

Получим формулу для определения вычета функции  $f(z)$  относительно полюса. Пусть функция  $f(z)$  имеет в точке  $z=a$  полюс порядка  $k$ . Тогда ее разложение в ряд Лорана в окрестности точки  $z=a$  имеет вид

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Умножим обе части последнего равенства на  $(z-a)^k$  и продифференцируем полученное выражение  $k-1$  раз:

$$\frac{d^{k-1} [(z-a)^k f(z)]}{dz^{k-1}} = a_{-1} (k-1)! + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(n+k)!}{n!} (z-a)^{n+1}.$$

Перейдя к пределу в обеих частях равенства при  $z \rightarrow a$ , будем иметь

$$a_{-1} = \operatorname{Res} f(z) |_{z=a} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)]. \quad (5)$$

Если  $k=1$  (полюс первого порядка), то

$$\operatorname{Res} f(z) |_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} f(z) (z-a). \quad (6)$$

Если при этом функция  $f(z)$  представляет собой отношение двух функций  $P(z)$  и  $Q(z)$ , аналитических в окрестности точки  $z=a$ , т. е.  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , причем  $P(a) \neq 0$ , и функция  $Q(z)$  имеет в точке  $z=a$  нуль первого порядка, то

$$\operatorname{Res} f(z) |_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \quad (7)$$

**Пример 1.** Определить вычет функции  $f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ .

Эта функция имеет полюсы первого порядка в точках  $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k=0 \pm 1, \dots$ ). Определим вычет функции в полюсе  $z_0 = \frac{\pi}{2}$ . По формуле (7)

найдем

$$\operatorname{Res} f(z) |_{z_0 = \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{-\sin \frac{\pi}{2}} = -1.$$

**Пример 2.** Определить вычет функции  $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$  в особой точке  $z=j$ .

В точке  $z=j$  эта функция имеет полюс первого порядка. Вычет функции  $f(z)$  в этом полюсе

$$\operatorname{Res} f(z) |_{z=j} = \lim_{z \rightarrow j} \frac{z-j}{z^2+1} = \frac{1}{2j} = -\frac{j}{2}.$$

**Пример 3.** Определить вычет функции  $f(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$  ( $n$  — натуральное число) в особой точке  $z=-1$ .

В точке  $z=-1$  эта функция имеет полюс порядка  $n$ . Вычет функции  $f(z)$  в полюсе  $z=-1$

$$\operatorname{Res} f(z) |_{z=-1} = \lim_{z \rightarrow -1} \left[ \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z^{2n}) \right] = \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{(n-1)! (n+1)!}.$$

**2. Теорема о вычетах.** С помощью вычетов можно значительно облегчить вычисление интегралов от функций комплексного переменного. Следующая теорема показывает, что вычисление интегралов можно свести к вычислению вычетов подынтегральных функций относительно их особых точек.

**Теорема 1.** Пусть  $l$  — спрямляемый замкнутый контур и  $G$  — область, ограниченная этим контуром. Пусть далее функция  $f(z)$  является аналитической функцией в области  $G$  за исключением конечного числа изолированных особых точек  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Тогда

$$\int_l f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z) |_{z=a_k}. \quad (8)$$

**Доказательство.** Окружим каждую особую точку  $z=a_k$  окружностью  $l_k$ , имеющей радиус  $\rho_k$  столь малый, что все эти окружности не пересекаются между собой и лежат в области  $G$  (рис. 78).

Рассмотрим область  $G_1$ , полученную из области  $G$  с помощью удаления кругов  $l_k$ . В области  $G_1$  функция  $f(z)$  будет аналитична. Согласно интегральной теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\int_l f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{l_k} f(z) dz = 0. \quad (9)$$

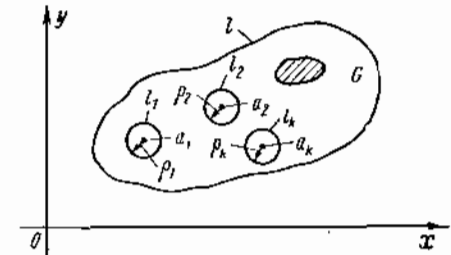


Рис. 78

Здесь окружности  $\bar{l}_k$  проходятся по часовой стрелке. Изменив направление сбхода и пользуясь определением вычета, получим

$$\int_l f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z)|_{z=a_k}.$$

Теорема доказана.

Пользуясь понятием вычета в бесконечно удаленной точке, можно доказать следующую теорему:

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(z)$  имеет в расширенной комплексной плоскости лишь конечное число изолированных особых точек  $a_1, \dots, a_n$ . Тогда сумма вычетов функции  $f(z)$  относительно этих точек, а также относительно бесконечно удаленной точки равна нулю.

**Доказательство.** Рассмотрим окружность  $l: |z|=R$  с центром в начале координат, имеющую настолько большой радиус  $R$ , чтобы на самой окружности и вне ее не было особых точек функции  $f(z)$ , за исключением может быть бесконечно удаленной точки  $z=\infty$ . Тогда

$$\int_l f(z) dx + \int_l f(z) dz = 0. \quad (10)$$

Здесь  $\bar{l}$  — окружность  $|z|=R$ , проходимая в отрицательном направлении. Но

$$\int_l f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z)|_{z=a_k}, \quad (11)$$

а

$$\int_l f(z) dz = 2\pi j \operatorname{Res} f(z)|_{z=\infty}. \quad (12)$$

Подставив (11) и (12) в (10), получим:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z)|_{z=a_k} + \operatorname{Res} f(z)|_{z=\infty} = 0. \quad (13)$$

Теорема доказана.

**3. Применение вычетов для вычисления несобственных интегралов.** Прежде чем перейти к вопросам применения вычетов для вычисления некоторых несобственных интегралов, докажем две леммы.

**Лемма 1.** Если функция  $f(z)$  непрерывна в окрестности бесконечно-удаленной точки  $z=\infty$  и  $zf(z) \rightarrow 0$  равномерно относительно  $\arg z$  при  $z \rightarrow \infty$ \*, то интеграл  $\int_l f(z) dz$  по любой дуге  $l$  окружности  $|z|=R$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ .

\* Произведение  $zf(z)$  стремится к нулю равномерно относительно аргумента  $z$  при  $z \rightarrow \infty$ , если для любой неограниченно возрастающей последовательности точек  $\{z_n\}$  справедливо равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n f(z_n) = 0$ .

**Доказательство.** Введем обозначение  $M = \max_l |zf(z)|$ . Равномерность стремления к нулю функции  $zf(z)$  относительно аргумента означает, что  $M \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ .

Оценим по модулю интеграл  $\int_l f(z) dz$ :

$$\left| \int_l f(z) dz \right| = \left| \int_l zf(z) \frac{1}{z} dz \right| \leq \max_l |zf(z)| \frac{1}{R} s \leq M 2\pi.$$

Здесь  $s$  — длина дуги  $l$ .

Так как  $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_l |zf(z)| = 0$ , то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_l f(z) dz = 0. \quad (14)$$

Лемма доказана.

Очевидно, что дуга  $l$  может быть всей окружностью. С помощью доказанной леммы можно вычислить несобственные интегралы вида

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ , подынтегральная функция  $f(x)$  которых удовлетворяет условию  $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0$  (15)

и имеет конечное число изолированных особых точек. Условие (15), в частности, выполняется, если  $f(x)$  является дробно-рациональной функцией и степень числителя по крайней мере на две единицы меньше степени знаменателя.

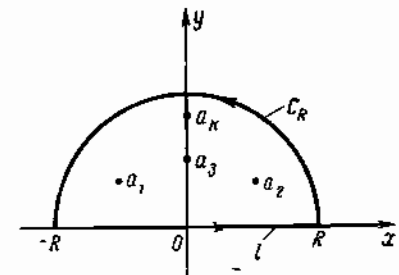


Рис. 79

Для вычисления интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  перейдем от действительного переменного  $x$  к комплексному переменному  $z$  и рассмотрим интеграл  $\int_l f(z) dz$ , где  $l$  — замкнутый контур, состоящий из полу-

окружности  $C_R$  радиуса  $R$ , лежащей в верхней полуплоскости, и отрезка  $[-R, R]$  действительной оси (рис. 79). Радиус  $R$  выбираем столь большим, чтобы все особые точки функции  $f(z)$ , лежащие в верхней полуплоскости, попали внутрь области, ограниченной контуром  $l$ .

Согласно свойству 2 интеграла от функции комплексного переменного имеем

$$\int_l f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx.$$

С другой стороны, в силу теоремы о вычетах

$$\int_l f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z)|_{z=a_k},$$



где  $a_1, \dots, a_n$  — особые точки функции  $f(z)$ , лежащие в верхней полуплоскости. Таким образом,

$$\int_{C_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=a_k} \quad (16)$$

Перейдем в равенстве (16) к пределу при  $R \rightarrow \infty$ . Из доказанной леммы следует, что  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$  и равенство (16) примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=a_k} \quad (17)$$

Аналогично можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=a'_k}$$

где  $a'_k$  — особые точки функции  $f(z)$ , расположенные в нижней полуплоскости. Для этого необходимо рассмотреть

интеграл  $\int_{l'} f(z) dz$ , где контур  $l'$  состоит из отрезка  $[-R, R]$  действительной оси и полуокружности  $C'_R$ , расположенной в нижней полуплоскости плоскости  $z$  (рис. 80).

**Пример 4.** Вычислить интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ .

Подынтегральная функция  $\frac{1}{(x^2+1)^n}$  имеет в верхней полуплоскости одну особую точку  $z=j$  — полюс  $n$ -го порядка. Согласно формуле (17) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2\pi j \operatorname{Res} \frac{1}{(z^2+1)^n} \Big|_{z=j}$$

Вычислим вычет функции  $\frac{1}{(z^2+1)^n}$  в точке  $z=j$ . В соответствии с формулой (5) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \frac{1}{(z^2+1)^n} \Big|_{z=j} &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow j} \left[ \frac{(z-j)^{n-1}}{(z^2+1)^n} \right] = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow j} [(z+j)^{-n}]^{n-1} = -\frac{n(n+1) \dots (2n-2)}{(n-1)! 2^{2n-1}} j. \end{aligned}$$

Окончательно найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2n-2}}.$$

С помощью леммы 1 можно вычислять интегралы по мнимой оси. Вычисление такого интеграла рассмотрено в следующем примере.

**Пример 5.** Вычислить интеграл

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(j\omega)}{h_n(j\omega)h_n(-j\omega)} d\omega, \quad (18)$$

где

$$g_n(y) = b_0 y^{2n-2} + b_1 y^{2n-4} + \dots + b_{n-1} \quad (19)$$

$$h_n(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n \quad (20)$$

причем все корни многочлена  $h_n(y)$  лежат в левой полуплоскости. Предполагается также, что все корни многочлена  $h_n(y)$  — простые\*1.

Заменим в (18)  $j\omega$  на  $y$ :

$$J_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{g_n(y)}{h_n(y)h_n(-y)} dy \quad (21)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль мнимой оси плоскости  $z$  (рис. 81).

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру  $l$ , состоящему из отрезка мнимой оси  $[-R, R]$  и дуги окружности  $C_R$  радиуса  $R$  с центром в начале координат. Согласно теореме о вычетах, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int \frac{g_n(z)}{h_n(z)h_n(-z)} dz &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-jR}^{jR} \frac{g_n(y)}{h_n(y)h_n(-y)} dy + \\ &+ \frac{1}{2\pi j} \int_{C_R} \frac{g_n(z)}{h_n(z)h_n(-z)} dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \frac{g_n(z)}{h_n(z)h_n(-z)} \Big|_{z=a_k} \end{aligned} \quad (22)$$

Вычеты здесь берутся по всем полюсам подынтегральной функции, расположенным в левой полуплоскости, т. е. по нулям многочлена  $h_n(z)$ . Если устремить радиус окружности  $R$  к бесконечности, то в силу леммы 1 интеграл по дуге  $C_R$  будет стремиться к нулю:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{g_n(y)}{h_n(y)h_n(-y)} dy = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \frac{g_n(z)}{h_n(z)h_n(-z)} \Big|_{z=a_k} \quad (23)$$

Пусть  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — корни многочлена  $h_n(y)$ . Тогда

$$h_n(y) = a_0 \prod_{k=1}^n (y - y_k), \quad h_n(-y) = a_0 \prod_{k=1}^n (-y - y_k).$$

Разложим подынтегральную функцию  $\frac{g_n(y)}{h_n(y)h_n(-y)}$  на простые дроби:

$$\frac{g_n(y)}{h_n(y)h_n(-y)} = \sum_{k=1}^n A_k \left( \frac{1}{y - y_k} - \frac{1}{y + y_k} \right). \quad (24)$$

\*1 Интегралы такого типа встречаются при определении среднеквадратической ошибки систем автоматического регулирования, находящихся под случайными воздействиями.

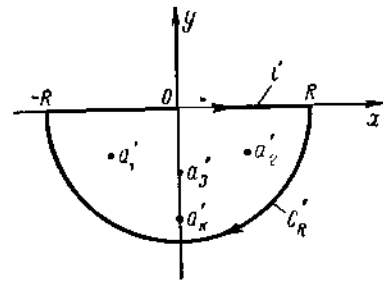


Рис. 80

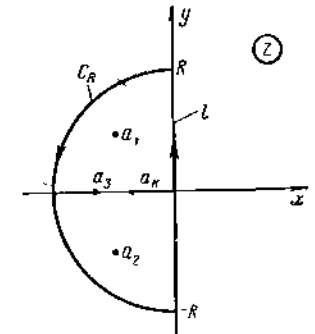


Рис. 81

Так как  $A_k$  есть вычет функции  $\frac{g_n(y)}{h_n(y)h_n(-y)}$  в полюсе  $y_k$ , то

$$J_n = \sum_{k=1}^n A_k \quad (25)$$

Определим коэффициенты  $A_k$ . Перепишем равенство (24) в виде

$$g_n(y) = \sum_{k=1}^n A_k \left[ \frac{h_n(y)}{y-y_k} h_n(-y) + \frac{h_n(-y)}{-y-y_k} h_n(y) \right]. \quad (26)$$

Произведя деление, получим

$$\frac{h_n(y)}{y-y_k} = \sum_{r=1}^n B_{rk} y^{n-r}, \quad \frac{h_n(-y)}{-y-y_k} = \sum_{r=1}^n (-1)^{n-r} B_{rk} y^{n-r}.$$

Коэффициенты  $B_{rk}$  в общем случае при фиксированном  $r$  различны для различных значений  $k$ . Исключение составляют коэффициенты  $B_{1k} = a_0$ .

Принимая во внимание полученные выражения для  $\frac{h_n(y)}{y-y_k}$  и  $\frac{h_n(-y)}{-y-y_k}$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{h_n(y)}{y-y_k} h_n(-y) + \frac{h_n(-y)}{-y-y_k} h_n(y) &= \sum_{s=0}^n \sum_{r=1}^n (-1)^{n-s} a_s B_{rk} y^{n-s-r} + \\ + \sum_{s=0}^n \sum_{r=1}^n a_s B_{rk} (-1)^{n-r} y^{n-s-r} &= 2 \sum_{m=1}^n \sum_{r=1}^{2m} a_{2m-r} B_{rk} (-1)^{n+r} y^{n-2m}, \end{aligned} \quad (27)$$

причем  $a_{2m-r} = 0$ , если  $2m-r > n$  и  $2m-r < 0$ .

Учитывая (19) и (27), выражение (26) можно записать в виде

$$\begin{aligned} g_n(y) &= \sum_{m=1}^n b_{m-1} y^{2n-2m} = \sum_{k=1}^n A_k \sum_{m=1}^n \sum_{r=1}^{2m} 2(-1)^{n+r} a_{2m-r} B_{rk} y^{n-2m} = \\ &= 2(-1)^n \sum_{m=1}^n y^{2n-2m} \sum_{k=1}^n A_k \sum_{r=1}^{2m} (-1)^r a_{2m-r} B_{rk}. \end{aligned} \quad (28)$$

Приравняв в равенстве (28) коэффициенты при одинаковых степенях  $y$ , получим

$$\sum_{k=1}^n A_k \sum_{r=1}^{2m} a_{2m-r} (-1)^r B_{rk} = (-1)^n \frac{b_{m-1}}{2} \quad (m=1, 2, \dots, n). \quad (29)$$

Переменим порядок суммирования:

$$\sum_{r=1}^{2m} a_{2m-r} (-1)^r \sum_{k=1}^n A_k B_{rk} = (-1)^n \frac{b_{m-1}}{2} \quad (m=1, 2, \dots, n) \quad (30)$$

и обозначим

$$c_r = \frac{(-1)^{r+1}}{a_0} \sum_{k=1}^n A_k B_{rk} \quad (r=1, 2, \dots, n). \quad (31)$$

При  $r=1$ , учитывая, что  $B_{1k} = a_0$  для всех  $k$ , будем иметь

$$c_1 = \sum_{k=1}^n A_k = J_n.$$

С учетом (31) выражение (30) примет вид

$$\sum_{r=1}^{2m} a_{2m-r} c_r = (-1)^{n+1} \frac{b_{m-1}}{2a_0} \quad (m=1, 2, \dots, n). \quad (32)$$

Получили систему из  $n$  алгебраических уравнений относительно неизвестных  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Решая ее по правилу Крамера, получим значение искомого интеграла

$$J_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2a_0} \cdot \frac{N_n}{D_n}, \quad (33)$$

где

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} - \text{определитель системы (32)}.$$

Определить  $N_n$  получается из определителя  $D_n$  с помощью замены первого

столбца на столбец  $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$ .

Нетрудно видеть, что определитель  $D_n$  есть старший определитель Гурвица для многочлена  $h_n(y)$ . Так как все корни многочлена  $h_n(y)$  содержатся в левой полуплоскости, то  $D_n \neq 0$  и система (32) имеет единственное решение. Следовательно, интеграл  $J_n$  всегда определяется, причем единственным образом.

Для вычисления несобственных интегралов широкое применение находит так называемая лемма Жордана. С ее помощью, в частности, можно вычислить интегралы, которые не берутся с помощью леммы 1. Рассмотрим лемму Жордана.

**Лемма 2.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в полуплоскости  $\text{Im}z \geq a$ , за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно относительно  $\text{arg}z$  стремится к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$  на последовательности дуг окружностей  $l_n: |z| = R_n, \text{Im}z \geq a$ . Тогда для любого числа  $\lambda > 0$

$$\lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{l_n} f(z) e^{\lambda z} dz = 0. \quad (34)$$

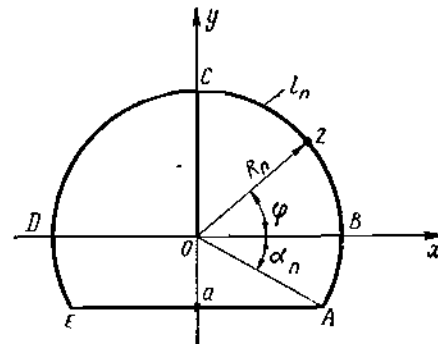


Рис. 82

Доказательство. Рассмотрим случай, когда  $a < 0$  (рис. 82). Произведем оценку интеграла  $\int_{l_n} f(z) e^{\lambda z} dz$  по различным участкам дуги  $l_n$ . Введем обозначения:  $M_n = \max |f(z)|$ ,  $\alpha_n = \arcsin \frac{a}{R_n}$ . Усло-

вие равномерности стремления  $f(z)$  к нулю означает, что  $M_n \rightarrow 0$  при  $R_n \rightarrow \infty$ . На дуге  $\overline{AB}$  имеем  $|e^{j\lambda z}| = e^{-\lambda y} \leq e^{-a\lambda}$ . Тогда

$$\left| \int_{\overline{AB}} f(z) e^{j\lambda z} dz \right| \leq M_n e^{-a\lambda} \alpha_n R_n. \quad (35)$$

Учитывая, что  $\alpha_n R_n = \frac{a\alpha_n}{\sin \alpha_n}$  и  $\alpha_n \rightarrow 0$  при  $R_n \rightarrow \infty$ , получим

$\lim_{R_n \rightarrow \infty} \alpha_n R_n = a$ . Из неравенства (35) следует, что  $\left| \int_{\overline{AB}} f(z) e^{j\lambda z} dz \right| \rightarrow 0$  при  $R_n \rightarrow \infty$ .

Оценка, аналогичная неравенству (35), имеет место и для интеграла по дуге  $\overline{DE}$ . Следовательно, и этот интеграл стремится к нулю при  $R_n \rightarrow \infty$ . Произведем оценку интеграла вдоль дуги  $\overline{BCD}$ . Воспользуемся неравенством

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi, \quad (36)$$

справедливым при  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  (рис. 83). Получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\overline{BCD}} f(z) e^{j\lambda z} dz \right| &\leq \int_{\overline{BCD}} |f(z)| |e^{j\lambda z}| |dz| \leq M_n R_n \int_0^\pi e^{-\lambda R_n \sin \varphi} d\varphi = \\ &= 2M_n R_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R_n \sin \varphi} d\varphi \leq 2M_n R_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{M_n \pi}{\lambda} (1 - e^{-\lambda R_n}). \end{aligned} \quad (37)$$

Из выражения (37) следует, что интеграл по дуге  $\overline{BCD}$  стремится к нулю при  $R_n \rightarrow \infty$ . Лемма для случая  $a < 0$  доказана.

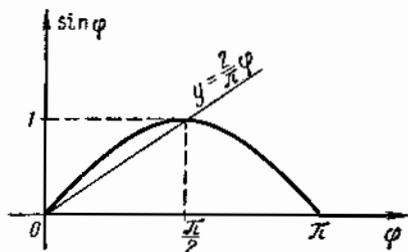


Рис. 83

Если  $a \geq 0$ , то доказательство леммы следует из неравенства (37).

Лемму можно сформулировать и на случай, когда  $\lambda < 0$ , а именно: если на некоторой последовательности дуг  $l_n: |z| = R_n, \text{Im } z \leq a$  ( $a$  — фиксированное число) функция  $f(z)$  стремится к нулю равномерно относительно

$\arg z$  при  $R_n \rightarrow \infty$ , то для любого числа  $\lambda < 0$  справедливо равенство

$$\lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{l_n} f(z) e^{j\lambda z} dz = 0.$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы для случая, когда  $\lambda > 0$ .

При исследовании линейных систем автоматического регулирования широко используется преобразование Лапласа (см. гл. XIV).

Преобразование Лапласа состоит в переходе от функций действительного переменного  $t$ , называемых оригиналами, к функциям комплексного переменного  $s = c + j\omega$ , называемых изображениями. Переход осуществляется с помощью равенства

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt. \quad (38)$$

Если известна функция  $F(s)$ , то соответствующую ей функцию  $f(t)$  можно вычислить с помощью так называемой формулы обращения (см. § 42).

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (39)$$

Формула (39) предполагает вычисление интегралов по прямой, параллельной мнимой оси. С помощью некоторого изменения леммы Жордана вычисление таких интегралов можно производить с помощью вычетов.

Сделаем в равенстве (34) замену переменной, положив  $jz = s$ . Эта замена соответствует повороту комплексной плоскости  $z$  на  $90^\circ$  в положительном направлении. На плоскости комплексного переменного  $s$  последовательность дуг плоскости  $z$  (см. рис. 82) перейдет в последовательность дуг  $l_n: |s| = R_n, \text{Res} < a$  (рис. 84), и лемма Жордана для этого случая может быть сформулирована следующим образом:

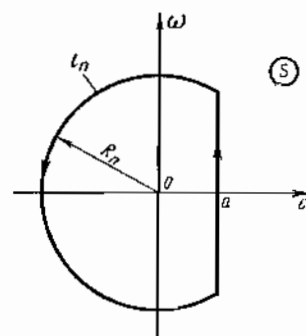


Рис. 84

Если функция  $F(s)$  стремится к нулю при  $R_n \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $\arg s$ , то для любого  $t > 0$  справедливо равенство

$$\lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{l_n} F(s) e^{st} ds = 0. \quad (40)$$

Для  $t < 0$  лемма справедлива при тех же условиях для последовательности дуг  $l_n: |s| = R_n, \text{Res} > a$  ( $a$  — фиксированное число).

Рассмотрим примеры вычисления некоторых несобственных интегралов с помощью леммы Жордана.

**Пример 6.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx \quad (41)$$

( $a$  и  $b$  — действительные числа).

Пусть сначала  $a > 0$ . Для вычисления интеграла  $I$  рассмотрим интеграл от функции комплексного переменного  $z$ :

$$\int \frac{z e^{jaz}}{z^2 + b^2} dz.$$

Контур  $l$  изображен на рис. 85. Он состоит из отрезка действительной оси  $[-R, R]$  и дуги окружности  $C_R$  радиуса  $R$ . Радиус  $R$  выбирается таким, чтобы точка  $jb$  лежала в области, ограниченной контуром  $l$ .

Согласно теореме о вычетах, имеем

$$\int_l \frac{ze^{jaz}}{z^2 + b^2} dz = 2\pi j \operatorname{Res} \frac{ze^{jaz}}{z^2 + b^2} \Big|_{z=jb} = \pi j e^{-ab}.$$

Но

$$\int_l \frac{ze^{jaz}}{z^2 + b^2} dz = \int_{-R}^R \frac{xe^{jax}}{x^2 + b^2} dx + \int_{C_R} \frac{ze^{jaz}}{z^2 + b^2} dz.$$

При  $R \rightarrow \infty$  второй интеграл в правой части предыдущего равенства согласно

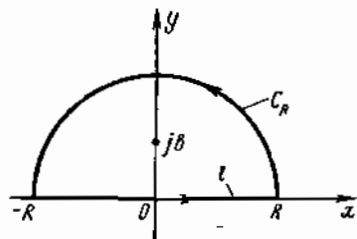


Рис. 85

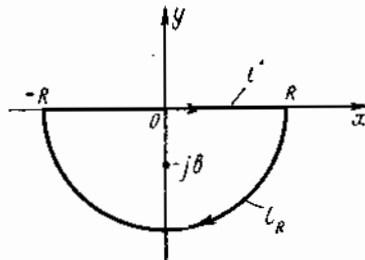


Рис. 86

лемме Жордана стремится к нулю. В пределе получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{jax}}{x^2 + b^2} dx = \pi j e^{-ab}.$$

Используя формулу Эйлера, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos ax}{x^2 + b^2} dx + j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx = \pi j e^{-ab}.$$

Приравняем отдельно действительные и мнимые части последнего равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos ax}{x^2 + b^2} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx = \pi e^{-ab}.$$

Так как функция  $f(x) = \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2}$  — четная, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx.$$

Окончательно имеем при  $a > 0$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2} a^{-ab}. \quad (42)$$

Если  $a < 0$ , то рассматривается интеграл  $\int_l \frac{ze^{jaz}}{z^2 + b^2} dz$ . Контур  $l'$  изображен

на рис. 86.

Согласно теореме о вычетах будем иметь

$$\int_l \frac{ze^{jaz}}{z^2 + b^2} dz = -2\pi j \operatorname{Res} \frac{ze^{jaz}}{z^2 + b^2} \Big|_{z=-jb} = -\pi j e^{ab}.$$

Знак минус учитывает, что обход области, ограниченной контуром  $l'$ , производится в отрицательном направлении. Так как

$$\int_l \frac{ze^{jaz}}{z^2 + b^2} dz = \int_{-R}^R \frac{xe^{jax}}{x^2 + b^2} dx + \int_{C_R} \frac{ze^{jaz}}{z^2 + b^2} dz$$

и согласно лемме Жордана при  $R \rightarrow \infty$   $\int_{C_R} \frac{ze^{jaz}}{z^2 + b^2} dz \rightarrow 0$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{jax}}{x^2 + b^2} dx = -\pi j e^{ab}.$$

После преобразований, аналогичных тем, которые были проведены для случая  $a > 0$ , получим

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx = -\frac{\pi}{2} e^{ab}. \quad (43)$$

Объединив выражения (42) и (43) в одно, окончательно будем иметь

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|ab|} \operatorname{sign} a. \quad (44)$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_l} \frac{se^{st}}{s^2 + a^2} ds. \quad (45)$$

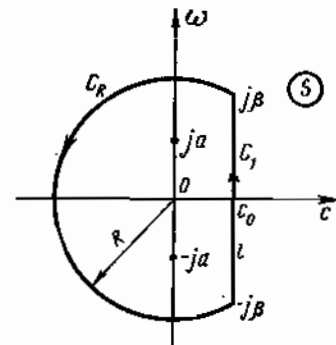


Рис. 87

Интеграл берется вдоль прямой  $C_1: \operatorname{Re} s = c_0 > 0$ , проходимой снизу вверх, причем  $c_0$  выбрано так, что все особые точки подынтегральной функции расположены слева от прямой  $C_1$ .

Для вычисления интеграла при  $t > 0$  рассмотрим интеграл по замкнутому контуру  $l$ :

$$\frac{1}{2\pi j} \int_l \frac{se^{st}}{s^2 + a^2} ds.$$

Контур  $l$  состоит из дуги  $C_k$  радиуса  $R$  и отрезка прямой  $C_1: \operatorname{Re} s = c_0$ ,  $|\operatorname{Im} s| \leq \beta$  (рис. 87). Радиус  $R$  выбирается достаточно большим, чтобы все особые точки подынтегральной функции попали внутрь области, ограниченной контуром  $l$ . Согласно теореме о вычетах будем иметь

$$\frac{1}{2\pi j} \int_l \frac{se^{st}}{s^2 + a^2} ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \frac{se^{st}}{s^2 + a^2} = \frac{e^{jat}}{2} + \frac{e^{-jat}}{2} = \cos at;$$

но

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{se^{st}}{s^2+a^2} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_0-j\beta}^{c_0+j\beta} \frac{se^{st}}{s^2+a^2} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{C_R} \frac{se^{st}}{s^2+a^2} ds.$$

При  $R \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow \infty$  и второй интеграл в правой части равенства согласно лемме Жордана стремится к нулю. Поэтому для случая  $t > 0$  получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} \frac{se^{st}}{s^2+a^2} ds = \cos at. \quad (46)$$

Учитывая, что подынтегральная функция аналитична в полуплоскости  $\text{Re } s > c_0$ , будем иметь  $\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{se^{st}}{s^2+a^2} ds = 0$ . Контур  $\Gamma$  изображен на рис. 88

и состоит из отрезка прямой  $C_1$  и дуги  $C_R$ . При  $R \rightarrow \infty$  с учетом леммы Жордана, получим для случая  $t < 0$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} \frac{se^{st}}{s^2+a^2} ds = 0. \quad (47)$$

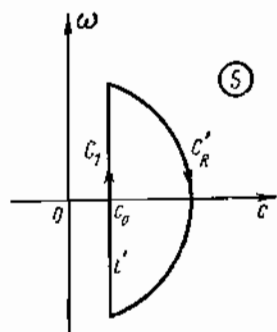


Рис. 88

Из соотношений (46) и (47) имеем

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} \frac{se^{st}}{s^2+a^2} ds = \begin{cases} \cos at, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

### § 33. ПРИНЦИП ПРИРАЩЕНИЯ АРГУМЕНТА

**1. Логарифмический вычет.** Пусть задана функция  $f(z)$ , аналитическая всюду в области  $G$ , за исключением конечного числа изолированных особых точек. Полагаем, что все особые точки являются полюсами и, кроме того, граница  $l$  области  $G$  не содержит ни нулей, ни полюсов функции  $f(z)$ .

Рассмотрим логарифмическую производную функции  $f(z)$

$$h(z) = \frac{d}{dz} [\ln f(z)] = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

и назовем *логарифмическим вычетом функции  $f(z)$  в точке  $z=a$*  вычет в этой точке ее логарифмической производной  $h(z)$ . Очевидно, что особыми точками функции  $h(z)$  будут как полюсы, так и нули функции  $f(z)$ . Поэтому имеет смысл говорить о логарифмическом вычете не только в полюсе, но и в нуле функции  $f(z)$ .

Пусть функция  $f(z)$  имеет в точке  $z=a$  ноль порядка  $k$ , т.

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z), \quad \text{где } \varphi(a) \neq 0.$$

Тогда производная будет равна

$$f'(z) = k(z-a)^{k-1} \varphi(z) + (z-a)^k \varphi'(z)$$

и логарифмическая производная будет

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}. \quad (2)$$

Так как нули аналитической функции изолированы, то в достаточно малом круге  $|z-a| < \rho$  функция  $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$  является аналитической и может быть разложена в окрестности точки  $z=a$  в ряд Тейлора; разложение имеет вид

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Учитывая это равенство, получим

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n. \quad (3)$$

Формула (3) представляет разложение в ряд Лорана функции  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  в окрестности точки  $z=a$ . Из этой формулы следует, что точка  $z=a$  является полюсом первого порядка функции  $\frac{f'(z)}{f(z)}$ , причем вычет в точке  $z=a$  равен  $k$ .

Пусть теперь функция  $f(z)$  имеет в точке  $z=a$  полюс порядка  $p$ . Тогда функция  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  имеет в точке  $z=a$  ноль порядка  $p$ ; но

$$\frac{d}{dz} [\ln f(z)] = -\frac{d}{dz} [\ln g(z)].$$

По доказанному функция  $\frac{d}{dz} [\ln g(z)]$  имеет в точке  $z=a$  полюс первого порядка, причем вычет этой функции в полюсе  $z=a$  равен  $p$ . Следовательно, функция  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  имеет в точке  $z=a$  полюс первого порядка и ее вычет в этом полюсе равен  $-p$ .

Таким образом, в нулях и полюсах функции  $f(z)$  ее логарифмическая производная имеет полюсы первого порядка, причем в нуле функции  $f(z)$  логарифмический вычет равен порядку нуля, а в полюсе функции  $f(z)$  логарифмический вычет равен взятому со знаком минус порядку полюса.

Рассмотрим интеграл  $\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ . Относительно функции  $f(z)$

полагаем по-прежнему, что она аналитична в области  $G$ , за исключением конечного числа полюсов  $z=a_k$  ( $k=1, 2, \dots, l$ ), имеющих кратности  $p_k$ . Предполагаем также, что функция  $f(z)$  имеет в области  $G$  конечное число нулей  $z=b_r$  ( $r=1, 2, \dots, m$ ) с кратностями  $n_r$  и граница  $l$  области  $G$  не имеет ни нулей, ни полюсов функции  $f(z)$ .

Применяя теорему о вычетах, можем написать:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_k \operatorname{Res} \frac{f'(z)}{f(z)} \Big|_{z=z_k} = (n_1 + \dots + n_m) - (p_1 + \dots + p_l) = N - P, \text{ где } N = \sum_{r=1}^m n_r, P = \sum_{k=1}^l p_k. \quad (4)$$

2. Принцип приращения аргумента. В § 25 было показано, что

$$\operatorname{Ln} f(z) = \ln |f(z)| + j \operatorname{Arg} f(z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi j} \int d(\operatorname{Ln} f(z)) = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int d \ln |f(z)| + \frac{1}{2\pi j} \int d[j \operatorname{Arg} f(z)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Если  $l$  — замкнутый контур, то первый интеграл в равенстве (5) обратится в ноль, так как в результате обхода контура  $l$  модуль функции  $|f(z)|$  не получает приращения. Второй интеграл в том случае, если точка  $w=0$  лежит внутри контура, описываемого концом вектора  $w=f(z)$  на плоскости  $w$ , когда конец вектора  $z$  проходит по контуру  $l$ , может быть отличен от нуля.

Будем полагать, что функция  $f(z)$  однозначна в области  $G$ , ограниченной контуром  $l$ , аналитична в замкнутой области  $\bar{G}$  за исключением конечного числа полюсов, которые находятся внутри области  $G$  и не обращаются в ноль на контуре  $l$ . Тогда приращение аргумента функции  $f(z)$  кратно  $2\pi$ , т. е. вектор  $w=f(z)$  совершит целое число оборотов, когда конец вектора  $z$  проходит по контуру  $l$ . Обозначим через  $\Delta \arg f(z)$  приращение аргумента функции  $f(z)$ , когда конец вектора  $z$  обходит по контуру  $l$  область  $G$ . Из формул (4) и (5) получим

$$\sum_{r=1}^m n_r - \sum_{k=1}^l p_k = N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg f(z), \quad (6)$$

т. е. разность между числом нулей функции  $f(z)$  внутри области  $G$  и числом ее полюсов в этой области (с учетом их кратности) равна количеству оборотов вектора  $w=f(z)$  вокруг начала координат, когда точка  $z$  однократно пробегает контур  $l$  в положительном направлении.

Это предложение и составляет суть принципа приращения аргумента. Следует подчеркнуть, что контур  $l$  не должен содержать ни нулей, ни полюсов функции  $f(z)$ , ибо в противном случае приращение аргумента функции  $f(z)$  становится неопределенным. Из принципа приращения аргумента следует, что если функция  $f(z)$  аналитична в области  $G$  и отлична от нуля на границе  $l$  этой области, то число нулей функции внутри области  $G$  равно числу оборотов вектора  $w=f(z)$  при однократном обходе точкой  $z$  контура  $l$ . Так как в этом случае  $P=0$ , то

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg f(z) = N. \quad (7)$$

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ  
СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ  
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Глава XI

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

§ 34. РЯДЫ ФУРЬЕ

1. Гармонический анализ. В теории и практике автоматического регулирования часто встречаются процессы, которые могут рассматриваться как периодические.

Функция  $f(t)$  называется *периодической функцией*, если при некотором постоянном числе  $T > 0$  выполняется равенство

$$f(t) = f(t + nT), \quad (1)$$

где  $T$  — период функции;  $n$  — любое целое число, положительное или отрицательное, а аргумент  $t$  принимает значения из области определения этой функции.

Периодическая функция  $f(t)$  с периодом  $T$  обладает свойством, состоящим в том, что интеграл от этой функции, взятый на интервале длиной  $T$ , не изменяется при изменении пределов интегрирования при условии, что длина интервала интегрирования остается равной  $T$ , т. е.

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt \quad (2)$$

при любых  $a$  и  $b$ .

Действительно, пусть, например,  $0 < a < T$ ,  $0 < b < T$ . Тогда

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_a^T f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt.$$

Пусть  $t = \tau + T$ . Найдем  $\int_T^{a+T} f(t) dt = \int_0^a f(\tau + T) d\tau = \int_0^a f(\tau) d\tau = \int_0^T f(t) dt.$

Теперь имеем

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_a^T f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Аналогично получим

$$\int_b^{b+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Сравнивая правые и левые части полученных равенств, убеждаемся в справедливости равенства (2).

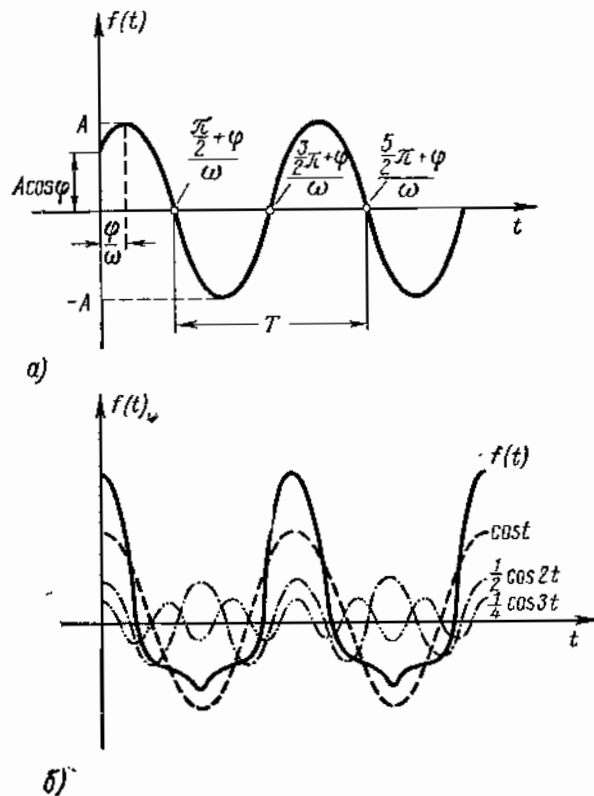


Рис. 89

Косинусоидальный (или синусоидальный) гармонический колебательный процесс

$$f(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

является примером простейшей периодической функции (рис. 89, а). Эта функция называется гармоникой с амплитудой  $A$ , угловой частотой

той  $\omega$  и начальной фазой  $\varphi$ . Нетрудно убедиться, что гармоника имеет период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . В самом деле,

$$A \cos\left[\omega\left(t + n \frac{2\pi}{\omega}\right) - \varphi\right] = A \cos[(\omega t - \varphi) + 2\pi n] = A \cos(\omega t - \varphi),$$

т. е. равенство (1) выполняется.

Сложение гармоник

$$f_1(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad f_2(t) = A_2 \cos(2\omega t - \varphi_2), \\ f_3(t) = A_3 \cos(3\omega t - \varphi_3)$$

с различными частотами  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ , кратными наименьшей из них  $\omega$ , приводит к образованию периодической функции с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , равным периоду первой гармоники с частотой  $\omega$ . Эта функция отличается от гармоник  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$ . На рис. 89, б приведен график функции

$$f(t) = \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \cos 3t.$$

Каждое из слагаемых функции характеризует косинусоидальное колебание, однако график функции  $f(t)$  не является косинусоидой. Еще более будет отличаться от косинусоиды график функции

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \varphi_k),$$

представляющий собой сумму бесконечного ряда. В результате суммирования членов ряда получаем периодическую функцию, причем ее период совпадает с периодом  $T$  первой гармоники ряда. Частоты соседних гармоник отличаются друг от друга на величину  $\omega$ .

В дальнейшем приращение частоты при переходе от какой-либо гармоники с номером  $k$  к соседней гармонике с номером  $k+1$  будем обозначать  $\Delta\omega$ . Тогда частоту первой гармоники также следует обозначить  $\Delta\omega$ , т. е.  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  — период функции  $f(t)$ .

С учетом вновь введенного обозначения сумму бесконечного ряда можно записать в виде

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Delta\omega t - \varphi_k). \quad (3)$$

Общий член ряда (3)  $A_k \cos(k\Delta\omega t - \varphi_k)$  называется  $k$ -й гармоникой, частота  $k$ -й гармоники равна  $k\Delta\omega$ , т. е. кратна частоте первой гармоники  $\Delta\omega$ .

Сделанные выше суждения об образовании периодической функции теперь подводят к следующим обратным вопросам. Всякую ли заданную периодическую функцию  $f(t)$  можно представить в виде



суммы гармонических составляющих, т. е. произвести ее тригонометрическое разложение? Если функцию  $f(t)$  возможно разложить на гармоники, то как найти неизвестные параметры каждой из этих гармоник? Ниже показано, что периодические функции, принадлежащие весьма обширному классу функций, могут быть представлены в виде суммы гармонических составляющих вида (3).

Допуская существование нулевой гармоники  $A_0$ , функцию  $f(t)$  с периодом  $T$  можно записать в виде

$$f(t) = A_0 + A_1 \cos(\Delta\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\Delta\omega t - \varphi_2) + \dots \\ \dots = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Delta\omega t - \varphi_k). \quad (4)$$

Если учесть, что

$$A_k \cos(k\Delta\omega t - \varphi_k) = \\ = A_k \cos k\Delta\omega t \cos \varphi_k + A_k \sin k\Delta\omega t \sin \varphi_k$$

и ввести обозначения

$$A_k \cos \varphi_k = a_k, \quad A_k \sin \varphi_k = b_k, \quad A_0 = \frac{a_0}{2},$$

то

$$A_k \cos(k\Delta\omega t - \varphi_k) = a_k \cos k\Delta\omega t + b_k \sin k\Delta\omega t, \quad (5)$$

и функцию (4) можно записать в более удобной форме:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Delta\omega t + b_k \sin k\Delta\omega t). \quad (6)$$

Форма (6) записи тригонометрического разложения будет в дальнейшем широко использоваться.

Периодическая функция  $f(t)$ , имеющая период  $T$ , оказывается разложенной по косинусам и синусам углов, кратных углу  $\Delta\omega \cdot t$ .

Если период функции  $f(t)$   $T = 2\pi$ , то  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ , тогда

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (7)$$

Пусть функция  $f(t)$  имеет период, равный  $2\pi$ , и принадлежит к классу функций, для которого разложение (7) существует. Определим неизвестные постоянные коэффициенты разложения (7)  $a_0, a_k, b_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Предварительно отметим свойство семейства функций

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots, \quad (8)$$

состоящее в том, что интеграл, взятый от произведения любых двух функций этого семейства на интервале, имеющем длину  $2\pi$ ,

равен нулю независимо от выбора нижнего предела интегрирования — свойство ортогональности на интервале длиной  $2\pi$ .

Действительно ( $c$  — любое действительное число):

$$\int_c^{c+2\pi} \cos kt \, dt = \frac{\sin kt}{k} \Big|_c^{c+2\pi} = 0, \text{ так как } \sin(kc + 2\pi) = \sin kc;$$

$$\int_c^{c+2\pi} \sin kt \, dt = -\frac{\cos kt}{k} \Big|_c^{c+2\pi} = 0;$$

$$\int_c^{c+2\pi} \cos kt \cdot \cos lt \, dt = \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} \cos(k-l)t \, dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} \cos(k+l)t \, dt = 0 \quad (k \neq l);$$

$$\int_c^{c+2\pi} \sin kt \sin lt \, dt = \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} \cos(k-l)t \, dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} \cos(k+l)t \, dt = 0 \quad (k \neq l);$$

$$\int_c^{c+2\pi} \sin kt \cos lt \, dt = \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} \sin(k-l)t \, dt + \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} \sin(k+l)t \, dt = 0.$$

Найдем коэффициент  $a_0$ . Предполагая, что ряд (7) является равномерно сходящимся, проинтегрируем этот ряд почленно от  $-\pi$  до  $+\pi$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \, dt.$$

Заменим интеграл от бесконечной суммы суммой интегралов от отдельных слагаемых (это возможно благодаря равномерной сходимости ряда (7)), тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \pi a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \, dt + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \, dt \right) = \pi a_0;$$

все интегралы под знаком суммы равны нулю из-за ортогональности семейства функции (8), откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt. \quad (9)$$

Определим коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ . Для этого умножим обе части равенства (7) на  $\cos nt$ , где  $n$  — целое положительное число,

и проинтегрируем в прежних пределах от  $-\pi$  до  $+\pi$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nt \, dt + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt \cos nt + b_k \sin kt \cos nt) \, dt = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos nt \, dt + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos nt \, dt \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части, а также все интегралы под знаком суммы, кроме одного при  $k=n$ , из-за ортогональности семейства (8) обращаются в ноль, т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt \, dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nt}{2} \, dt = \pi a_n.$$

Следовательно,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k=1, 2, 3 \dots). \quad (10)$$

Аналогично умножим слева и справа ряд (7) на  $\sin nt$ ; после интегрирования в тех же пределах получим:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k=1, 2, 3 \dots) \quad (11)$$

Формулы (9) — (11) позволяют по заданной функции  $f(t)$  с периодом  $2\pi$  найти коэффициенты разложения этой функции в тригонометрический ряд (7), называемый *рядом Фурье*. Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  называются *коэффициентами Фурье*.

Если функция  $f(t)$  четная на интервале  $(-\pi, \pi)$ , то произведение  $f(t) \cos kt$  представляет собой четную, а произведение  $f(t) \sin kt$  — нечетную функцию. В этом случае  $b_k = 0$  ( $k=1, 2, 3 \dots$ ), а коэффициенты  $a_0$  и  $a_k$  можно определять по формулам

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \, dt, \quad (12)$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k=1, 2, 3 \dots). \quad (13)$$

Если функция  $f(t)$  нечетная на интервале  $(-\pi, \pi)$ , то произведение  $f(t) \cos kt$  является нечетной, а произведение  $f(t) \sin kt$  — четной функцией. Очевидно, что для такой функции  $f(t)$  коэффициенты

равны соответственно  $a_0 = 0$ ,  $a_k = 0$  ( $k=1, 2, 3 \dots$ ), а коэффициент  $b_k$  может быть определен по формуле

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k=1, 2, 3 \dots). \quad (14)$$

В формулах (9) — (11) интегрирование производится на интервале  $(-\pi, \pi)$ . Однако результат интегрирования не изменится, если производить интегрирование на каком-либо другом интервале длиной  $2\pi$ , например на интервале  $(0, 2\pi)$ .

Зная коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ , легко определить значения амплитуды и начальной фазы  $k$ -той гармоники:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}. \quad (15)$$

Совокупность операций, в результате выполнения которых могут быть определены гармоники периодической функции  $f(t)$ , называется *гармоническим анализом*.

**Пример 1.** Разложить на сумму гармонических составляющих прямоугольную волну (рис. 90), определяемую функцией

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{при } 0 \leq t \leq \pi, \\ -a & \text{при } \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

Предполагая, что заданная функция допускает ее разложение в ряд Фурье, определим коэффициенты разложения  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$ . Так как функция  $f(t)$  нечет-

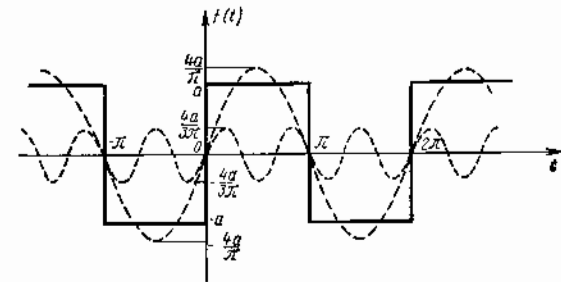


Рис. 90

ная, то  $a_0 = 0$ ,  $a_k = 0$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ). Определим коэффициент  $b_k$ , применяя формулу (14):

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a \sin kt \, dt = \frac{2a}{\pi k} [-\cos kt] \Big|_0^{\pi} = \frac{2a}{\pi k} [-\cos k\pi + 1] = \\ &= \frac{2a}{\pi k} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ четном,} \\ \frac{4a}{\pi k} & \text{при } k \text{ нечетном.} \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, ряд Фурье, представляющий собой разложение прямоугольной волны на сумму бесконечного числа гармоник, в соответствии с фор-

мулой (6) имеет вид

$$f(t) = \frac{4a}{\pi} \left[ \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right].$$

Амплитуда первой гармоники (см. рис. 90)  $A_1 = \frac{4a}{\pi}$ , ее частота  $\Delta\omega = 1 \frac{1}{сек}$ , амплитуда второй гармоники равна нулю; амплитуда третьей гармоники  $A_3 \neq \frac{4}{3} \frac{a}{\pi}$ , ее частота  $3\Delta\omega = 3 \frac{1}{сек}$  и т. д. Значения начальных фаз для всех гармоник разложения  $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$ .

Пусть функция  $f(t)$  задана на интервале  $(-\pi, \pi)$  и допускает на этом интервале разложение в ряд Фурье. Это значит, что тригонометрический ряд (6) с коэффициентами  $a_0, a_k, b_k$ , определенными по формулам (9) — (11), сходится к функции  $f(t)$ . При этом функция  $f(t)$  может быть непериодической. Разложение подобной функции в ряд Фурье на интервале  $(-\pi, \pi)$  означает, что функция  $f(t)$  периодически продолжена вне интервала  $(-\pi, \pi)$  (рис. 91) на

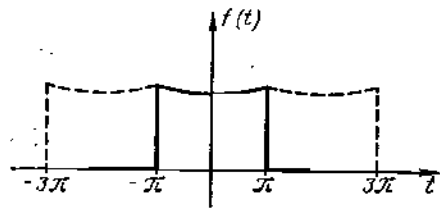


Рис. 91

всю ось  $Ot$ . Функция, получившаяся в результате продолжения функции  $f(t)$ , будет периодической функцией с периодом  $2\pi$ ; на интервале  $(-\pi, \pi)$  эта новая функция совпадает с функцией  $f(t)$ . Гармоники полученной периодической функции, суммируясь в интервале  $(-\pi, \pi)$ , составляют значения заданной функции  $f(t)$ .

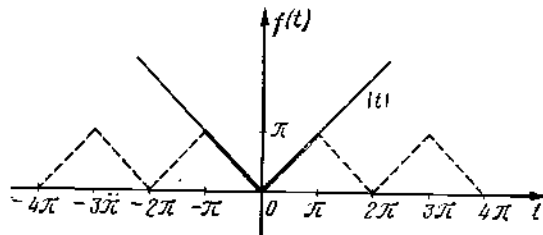


Рис. 92

Таким образом, в виде суммы гармонических составляющих может быть представлена не только периодическая функция, допускающая разложение в ряд Фурье. Ряд Фурье для непериодической функции  $f(t)$ , заданной в интервале  $(-\pi, \pi)$ , совпадает с рядом Фурье для функции, периодически продолженной на всю ось  $Ot$ . Очевидно, что при изучении вопроса о сходимости ряда Фурье для функции  $f(t)$ , можно ограничиться рассмотрением сходимости ряда Фурье, составленного для периодической функции.

**Пример 2.** Разложить в ряд Фурье в интервале  $(-\pi, \pi)$  функцию  $f(t) = |t|$  (рис. 92).

Заданная функция не является периодической, поэтому разложить ее в ряд Фурье на всей оси  $Ot$  не представляется возможным. Для разложения функции в интервале  $(-\pi, \pi)$  продолжим ее периодически с периодом  $2\pi$  вне интервала  $(-\pi, \pi)$  (пунктирная ломаная линия на рис. 92).

Представим в виде ряда Фурье образовавшуюся периодическую функцию, которая в интервале  $(-\pi, \pi)$  совпадает с заданной функцией. Заданная функция является четной, т. е.  $b_k = 0$  и определению подлежат коэффициенты  $a_0$  и  $a_k$ . Учитывая формулы (12) и (13), найдем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt dt = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{t}{k} \sin kt \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kt dt \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{k^2} \cos k\pi - \frac{1}{k^2} \right] = \frac{2}{\pi k^2} [(-1)^k - 1] = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при четном } k, \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{при нечетном } k. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, в интервале  $(-\pi, \pi)$  будет разложение

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} \right) \quad (-\pi < t < \pi).$$

Вне интервала  $(-\pi, \pi)$  сумма ряда не будет совпадать с заданной функцией.

Отметим, что в формулах (12) — (14) интегрирование производится в пределах от 0 до  $\pi$ , поэтому при вычислениях коэффициентов  $a_0, a_k, b_k$  нет необходимости строить график периодически продолженной функции.

При разложении периодических функций на сумму гармоник, необходимом при решении многих задач техники, обычно ограничиваются несколькими первыми гармониками, а остальные отбрасываются. В этом случае представление функции с помощью гармонических составляющих производится с точностью, зависящей от числа отброшенных членов тригонометрического ряда. Приближенно представляя функцию  $f(t)$  с помощью тригонометрического многочлена вида

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + \beta_k \sin kt),$$

можно получить большую или меньшую ошибку представления в зависимости от способа выбора коэффициентов многочлена  $a_0, a_k, \beta_k$ . Оценить величину ошибки наиболее удобно с помощью средней квадратической погрешности  $\delta_n$ , определяемой для периодической с периодом  $2\pi$  функции  $f(t)$  равенством

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right\}^2 dt. \quad (16)$$

Ответ на вопрос, при каких условиях величина  $\delta_n$  имеет минимальное значение, дает следующая теорема:

**Теорема 1.** Средняя квадратическая погрешность приближенного представления функции  $f(t)$  с помощью тригонометрического многочлена порядка  $n$  будет наименьшей, если коэффициентами этого многочлена являются коэффициенты Фурье функции  $f(t)$ .

**Доказательство.** Возведем сумму членов, стоящих под знаком фигурных скобок в равенстве (16), в квадрат и проинтегрируем получившийся результат почленно:

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f^2(t) - 2f(t) \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right]^2 \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - \frac{a_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt + \frac{1}{2\pi} \frac{a_0^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \beta_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt dt + \frac{1}{2\pi} a_0 \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt dt + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} a_0 \sum_{k=1}^n \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_k \alpha_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos lt dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} a_0 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_k \beta_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \sin lt dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_k \beta_l \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \sin lt dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемые в правой части этого равенства. Учитывая формулы (9) — (11), найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt &= a_0; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = a_k, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt &= b_k, \end{aligned}$$

т. е. полученные выражения являются коэффициентами Фурье для

функции  $f(t)$ . Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt dt = \pi.$$

Принимая во внимание свойство ортогональности семейства функций (8) на интервале  $(-\pi, \pi)$ , также получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos lt dt &= 0; \quad \text{кроме того, при } k \neq l \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos lt dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \sin lt dt &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, выражение для квадрата средней квадратической погрешности можно записать теперь в виде

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - \frac{a_0 a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \\ &\quad + \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2). \end{aligned}$$

В правой части этого равенства прибавим и вычтем сумму

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2):$$

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{4} (a_0 - a_0)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]. \end{aligned}$$

От величин  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  зависят лишь три последних неотрицательных слагаемых правой части этого равенства, поэтому наименьшее значение величина  $\delta_n^2$  будет иметь в том случае, когда указанные слагаемые обратятся в ноль, т. е. при  $\alpha_k = a_k$  и  $\beta_k = b_k$ .

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы можно получить соотношение, называемое *неравенством Бесселя*:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \quad (17)$$

Убедимся в справедливости этого соотношения. Наименьшая величина квадрата средней квадратической погрешности есть

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2),$$

поэтому при любом  $n$  имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt \geq \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2),$$

так как  $\delta_n^2 \geq 0$ .

Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что существуют интегралы, используемые при вычислениях коэффициентов Фурье, а также что существует интеграл от квадрата функции  $f(t)$ . При выполнении этих предположений левая часть последнего соотношения является определенным положительным числом, и, следовательно, при  $n \rightarrow \infty$  бесконечный ряд в правой части того же соотношения будет сходящимся. Отсюда вытекает справедливость неравенства Бесселя.

А. М. Ляпуновым было установлено, что для всякой функции  $f(t)$  с интегрируемым квадратом средняя квадратическая погрешность  $\delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Неравенство (17) в этом случае дает соотношение, называемое *равенством Ляпунова*:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \quad (18)$$

Следующая теорема устанавливает еще одно свойство коэффициентов ряда Фурье.

*Теорема 2.* Коэффициенты Фурье  $a_n, b_n$  для любой непрерывной или кусочно-непрерывной в интервале  $(-\pi, \pi)$  функции  $f(t)$  стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

*Доказательство.* По условию теоремы функция  $f(t)$  в интервале  $(-\pi, \pi)$  непрерывна или кусочно-непрерывна<sup>\*</sup>, поэтому квадрат этой функции интегрируем, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt.$$

При этом бесконечный ряд в правой части соотношения (17) будет сходящимся. Следовательно, общий член этого ряда  $(a_k^2 + b_k^2)$  будет

<sup>\*</sup> Функция  $f(t)$  называется кусочно-непрерывной в интервале  $(a, b)$  если она имеет в этом интервале конечное число точек разрыва непрерывности первого рода.

стремиться к нулю при беспредельном удалении от начала ряда. Однако это возможно лишь тогда, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

Теорема доказана.

2. Сходимость ряда Фурье. Рассмотрим, какие периодические функции  $f(t)$  могут быть разложены на гармоники, т. е. представлены в виде ряда Фурье. Ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Delta\omega t + b_k \sin k\Delta\omega t)$$

будет сходиться и его сумма будет равна функции  $f(t)$  лишь в том случае, если наложить на эту функцию определенные ограничивающие условия.

При решении вопроса о сходимости ряда потребуются, прежде всего, интегральная формула, дающая выражение для частичной суммы ряда Фурье. Получим эту формулу. Пусть имеем периодическую с периодом  $2\pi$  функцию  $f(t)$ . Для такой функции  $n$ -я частичная сумма будет

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

причем

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos k\tau d\tau, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin k\tau d\tau.$$

Подставим выражения  $a_k$  и  $b_k$  в формулу для  $s_n(t)$ :<sup>\*</sup>

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos kt \cos k\tau d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin kt \sin k\tau d\tau \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos k\tau + \right. \\ &+ \left. \sin kt \sin k\tau) \right] d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(\tau - t) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму, стоящую в квадратных скобках. Так как

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(\tau - t)$$

<sup>\*</sup> В формулах для  $a_k$  и  $b_k$  взята в качестве переменной интегрирования  $\tau$  вместо  $t$ , так как при использовании в качестве переменной  $t$  после подстановки  $a_k$  и  $b_k$  в формулу для  $s_n(t)$  не будет различия между переменной интегрирования и аргументом  $t$  как независимой координатой.

ражения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n e^{jk(\tau-t)} &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^n e^{jk(\tau-t)} = -\frac{1}{2} + \\ &+ \frac{1 - e^{j(n+1)(\tau-t)}}{1 - e^{j(\tau-t)}} = -\frac{1}{2} + \frac{[1 - e^{j(n+1)(\tau-t)}][1 - e^{-j(\tau-t)}]}{|1 - e^{j(\tau-t)}|^2} = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1 - e^{-j(\tau-t)} + e^{jn(\tau-t)} - e^{j(n+1)(\tau-t)}}{[1 - \cos(\tau-t)]^2 + \sin^2(\tau-t)}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(\tau-t) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n e^{jk(\tau-t)} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1 - \cos(\tau-t) + \cos n(\tau-t) - \cos(n+1)(\tau-t)}{2[1 - \cos(\tau-t)]} = \\ &= \frac{\cos n(\tau-t) - \cos(n+1)(\tau-t)}{2[1 - \cos(\tau-t)]} = \frac{\sin(2n+1)\frac{\tau-t}{2}}{2 \sin \frac{\tau-t}{2}}. \end{aligned}$$

Теперь частичную сумму  $s_n(t)$  можно записать в виде

$$s_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{\sin(2n+1)\frac{\tau-t}{2}}{2 \sin \frac{\tau-t}{2}} d\tau.$$

Произведем в интеграле замену переменного, положив  $t - \tau = u$ :

$$s_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(t+u) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du.$$

Подынтегральная функция (по переменной  $u$ ) является периодической с периодом  $2\pi$ , а интервал интегрирования  $(-\pi-t, +\pi-t)$  имеет длину  $2\pi$ , поэтому величина интеграла не изменится, если взять другой интервал интегрирования, например  $(-\pi, \pi)$ , имеющий длину  $2\pi$ . Тогда выражение для  $n$ -й частичной суммы можно представить в виде

$$s_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du. \quad (19)$$

Полученная формула называется интегральной формулой Дирихле. Эта формула необходима для установления условий, при которых ряд Фурье для функции  $f(t)$  будет сходящимся к этой функции.

Пусть  $f(t) \equiv 1$  в интервале  $(-\pi, \pi)$ ; в этом случае  $a_0 = 2$ ,  $a_k = 0$ ,  $b_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), т. е.  $s_n(t) = 1$  для любого  $n$ , и формула (19) приобретает вид

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (20)$$

Подынтегральная функция является четной, поэтому вместо (19) можно также записать:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du.$$

Полученные равенства также будут в дальнейшем использованы. Прежде чем переходить к установлению условий сходимости ряда Фурье, необходимо доказать лемму.

*Лемма.* Если функция  $f(t)$  непрерывна или кусочно-непрерывна в интервале  $(a, b)$ , совпадающем с интервалом  $(-\pi, \pi)$  или являющимся его частью, то справедливы равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos nt dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin nt dt = 0. \quad (21)$$

Доказательство. Пусть интервал  $(a, b)$  совпадает с интервалом  $(-\pi, \pi)$ , при этом утверждение леммы следует из доказанной выше теоремы 2.

Обратимся к случаю, когда интервал  $(a, b)$  является частью интервала  $(-\pi, \pi)$ . Введем в рассмотрение новую функцию

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } a < t < b, \\ 0 & \text{при } b < t < a + 2\pi. \end{cases}$$

Продолжим функцию  $f_1(t)$  периодически с периодом  $2\pi$  на всю ось  $Ot$ . Учитывая равенство (2), где будем полагать  $T = 2\pi$ ,  $b = -\pi$ , получим,

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} f_1(t) \cos nt dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \cos ntdt, \\ \int_a^{a+2\pi} f_1(t) \sin nt dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \sin ntdt. \end{aligned}$$

Но из определения функции  $f_1(t)$  следует, что

$$\int_a^{a+2\pi} f_1(t) \cos nt \, dt = \int_a^b f_1(t) \cos nt \, dt,$$

$$\int_a^{a+2\pi} f_1(t) \sin nt \, dt = \int_a^b f_1(t) \sin nt \, dt,$$

поэтому

$$\int_a^b f(t) \cos nt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \cos nt \, dt,$$

$$\int_a^b f(t) \sin nt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \sin nt \, dt.$$

Если функция  $f(t)$  непрерывна или кусочно-непрерывна в интервале  $(a, b)$ , то функция  $f_1(t)$  будет непрерывна или кусочно-непрерывна в интервале  $(-\pi, \pi)$ . Применяя теорему 2, получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \cos nt \, dt = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \sin nt \, dt = 0,$$

следовательно, справедливы и равенства (21).

Лемма доказана.

Обратимся теперь к теореме, устанавливающей достаточные условия сходимости ряда Фурье.

**Теорема 3.** Если функция  $f(t)$  непрерывна или кусочно-непрерывна в интервале  $(-\pi, \pi)$ , то ее ряд Фурье сходится в этом интервале; сумма ряда равна  $f(t)$  в точках, где функция непрерывна и равна  $\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$  в тех точках разрыва непрерывности, в которых существуют правая и левая производные.

**Доказательство.** Доказательство теоремы выполним в два этапа. Сначала докажем, что ряд Фурье сходится и его сумма равна  $f(t)$  в точках, где функция  $f(t)$  не только непрерывна, но и дифференцируема, а затем докажем теорему применительно к случаю, когда рассматривается сходимость ряда и значение его суммы в точках, где функция  $f(t)$  или непрерывна или имеет разрывы непрерывности первого рода.

По условию теоремы функция  $f(t)$  кусочно-непрерывна на интервале  $(-\pi, \pi)$ . Периодически продолжая эту функцию вне интервала  $(-\pi, \pi)$ , получим периодическую функцию, имеющую период  $2\pi$ .

Пусть функция  $f(t)$  в точке  $t$  дифференцируема, т. е. существует конечный предел  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(t+u) - f(t)}{u}$  независимо от характера стремления приращения  $u$  к нулю.

Будет установлено, что ряд Фурье сходится к функции  $f(t)$  и его сумма равна значению этой функции в точках  $t$ , где функция дифференцируема, если удастся показать, что при  $n \rightarrow \infty$  разность  $s_n(t) - f(t)$  стремится к нулю.

Умножим обе части равенства (20) на  $f(t)$  и, учитывая формулу (19), образуем разность

$$s_n(t) - f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t+u) + f(t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du,$$

которую перепишем в виде

$$s_n(t) - f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+u) - f(t)}{u} \cdot \frac{u}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u \, du.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(u) = \frac{f(t+u) - f(t)}{u} \cdot \frac{u}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

в интервале  $(-\pi, \pi)$ . Так как функция  $f(t)$  имеет в точке  $t$  производную и, кроме того,  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{2 \sin \frac{u}{2}} = 1$ , то  $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = f'(t)$ , т. е. при

$u \rightarrow 0$  функция  $\varphi(u)$  является ограниченной. При  $u \neq 0$  функция  $\varphi(u)$  может иметь разрывы непрерывности в тех точках, в которых имеет разрывы непрерывности функция  $f(t+u)$ . Функция  $f(t)$  является кусочно-непрерывной, поэтому функция  $\varphi(u)$  также является кусочно-непрерывной функцией на интервале  $(-\pi, \pi)$ . Применяя к функции  $\varphi(u)$  доказанную выше лемму, найдем из (21):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u \, du = 0,$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t+u) - f(t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n(t) - f(t)] = 0,$$

т. е. ряд Фурье для функции  $f(t)$  сходится к этой функции и сумма его равна  $f(t)$  в точках, где эта функция дифференцируема.

Пусть теперь функция  $f(t)$  в точке  $t$  непрерывна или даже имеет разрыв непрерывности первого рода, и в этой точке существуют правая и левая производные, т. е. имеются конечные не равные друг другу пределы

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(t+u) - f(t)}{u} = f'_+(t), \quad \lim_{u < 0} \frac{f(t+u) - f(t)}{u} = f'_-(t). \quad (22)$$



Геометрически существование этих пределов означает, что в точке  $t$  график функции  $f(t)$  имеет угловую точку-излом (рис. 93, а), или разрыв непрерывности первого рода (рис. 93, б). Если  $f_+(t) \neq f_-(t)$ ,

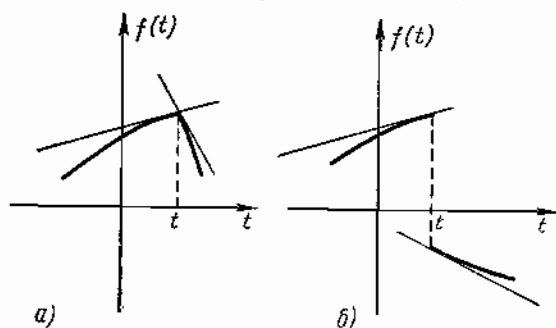


Рис. 93

то в точке  $t$  существуют правая и левая касательные (тонкие линии на рис. 93).

Образум разность

$$s_n(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}.$$

Теорема будет доказана, если покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) - \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = 0. \quad (23)$$

Умножим равенство (20) слева и справа сначала на  $f(t+0)$ , а затем на  $f(t-0)$ :

$$\frac{f(t+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t+0) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du,$$

$$\frac{f(t-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t-0) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du.$$

Частичная сумма  $s_n(t)$  ряда Фурье определяется равенством (19), поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) - \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(t+u) - f(t+0)] \times \\ &\times \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(t+u) - f(t-0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du. \end{aligned}$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части этого равенства. Пусть

$$\varphi(u) = \frac{f(t+u) - f(t+0)}{u} \cdot \frac{u}{2 \sin \frac{u}{2}}.$$

Функция  $f(t)$  в точке  $t$  имеет конечную правую производную, поэтому

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \varphi(u) = f_+(t),$$

т. е. функция  $\varphi(u)$  остается ограниченной при  $u \rightarrow 0$  ( $u > 0$ ). Рассуждая таким же образом, как и выше, мы приходим к выводу, что функция  $\varphi(u)$  кусочно-непрерывна в интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Применяя лемму, найдем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \varphi(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u du = 0.$$

Вводя обозначение

$$\varphi(u) = \frac{f(t+u) - f(t-0)}{u} \cdot \frac{u}{2 \sin \frac{u}{2}},$$

аналогичным путем получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^0 \varphi(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u du = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(t+u) - f(t+0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(t+u) - f(t-0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = 0,$$

т. е. равенство (23) справедливо.

Теорема доказана.

На концах интервала, т. е. при  $t = \pm \pi$  сумма ряда Фурье равна  $\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$ , так как концы интервала являются для периодически продолженной (вне интервала  $(-\pi, \pi)$ ) функции  $f(t)$  точками разрыва непрерывности, если  $f(-\pi+0) \neq f(\pi-0)$ . Характер сходимости ряда Фурье определяет следующая теорема:

**Теорема 4.** Ряд Фурье непрерывной или кусочно-непрерывной функции  $f(t)$  сходится к ней абсолютно и равномерно в точках непрерывности функции.

Теорему эту примем без доказательства \*).

\* Доказательство теоремы см., например: Г. П. Толстов. Ряды Фурье. Физматгиз, 1960 г., стр. 106.

Применим теорему 3 к разложениям, рассмотренным в примерах. Функция в примере 1 в точках  $0, \pm\pi, \pm 2\pi \dots$  имеет разрывы непрерывности первого рода, а в других точках она дифференцируема. Следовательно, во всех точках, в которых нет разрыва непрерывности, ряд Фурье сходится к значениям функции в этих точках. В точках разрыва непрерывности сумма ряда Фурье равна  $\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$ , т. е. для рассматриваемой функции равна нулю.

В примере 2 функция в точках  $0, \pm\pi, \pm 2\pi$  непрерывна и удовлетворяет условиям (22), т. е. имеет в этих точках левую и правую производные. В остальных точках функция дифференцируема. В соответствии с доказанной теоремой 3 ряд Фурье для такой функции сходится и имеет во всех точках сумму, равную значениям функции  $f(t)$ .

Условия теоремы 3 являются достаточными, но не необходимыми. Существуют функции, удовлетворяющие более общим ограничениям и допускающие разложение в ряд Фурье. Например, справедлива следующая теорема:

**Теорема 5.** Если функция  $f(t)$  кусочно-монотонна в интервале  $(-\pi, \pi)$  и имеет в нем конечное число точек разрыва непрерывности, то ее ряд Фурье сходится в этом интервале; сумма ряда равна  $f(t)$  в точках, где функция непрерывна и равна  $\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$  в каждой точке разрыва непрерывности\*).

Условия, указанные в теореме 5, называются условиями Дирихле.

**3. Разложение в интервале  $(0, \pi)$ .** Пусть функция  $f(t)$  задана в интервале  $(0, \pi)$  и удовлетворяет в этом интервале условиям раз-

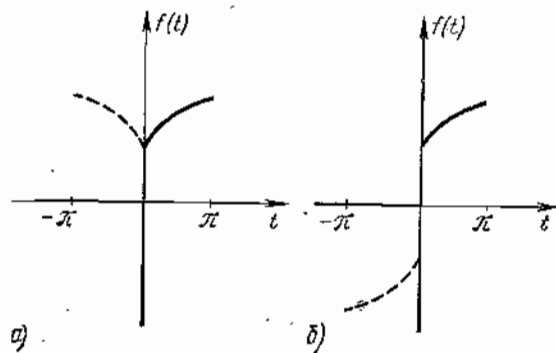


Рис. 94

ложения в ряд Фурье. Функцию  $f(t)$  можно продолжить в интервале  $(-\pi, 0)$  как четным, так и нечетным образом (рис. 94) и, таким образом, свести задачу о разложении функции  $f(t)$  в ряд Фурье

\* Доказательство этой теоремы см., например, в книге: Смирнов В. И. Курс высшей математики. ГИТТЛ, 1967, т. 2, стр. 439.

в интервале  $(0, \pi)$  к рассмотренной выше задаче о разложении функции  $f(t)$  в ряд Фурье в интервале  $(-\pi, \pi)$ .

При четном продолжении функции  $f(t)$  в интервал  $(-\pi, 0)$   $b_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и разложение имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt. \quad (24)$$

Коэффициенты  $a_0$  и  $a_k$  определяются при этом по формулам (12) и (13).

Если функция  $f(t)$  продолжена нечетным образом в интервал  $(-\pi, 0)$ , то  $a_0 = 0$ ,  $a_k = 0$  ( $k = 1, 2, 3 \dots$ ), и разложение получим в виде

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt. \quad (25)$$

Здесь коэффициент  $b_k$  определяется по формуле (14). В первом случае функция  $f(t)$  оказывается разложенной в интервале  $(0, \pi)$  по косинусам, а во втором случае — по синусам. Оба ряда (24) и (25) в интервале  $(0, \pi)$  имеют своей суммой заданную функцию  $f(t)$ , однако вне этого интервала суммы указанных рядов различны.

Заметим, что в формулах (12)–(14) вычисление коэффициентов  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$  производится в пределах от 0 до  $\pi$ , поэтому при вычислениях этих коэффициентов нет необходимости производить фактическое четное или нечетное продолжение функций  $f(t)$  в интервал  $(-\pi, 0)$ . Однако график функции, получающейся из функции  $f(t)$  четным (или нечетным) продолжением в интервал  $(-\pi, 0)$ , а затем периодически продолжением с периодом  $2\pi$  вне интервала  $(-\pi, \pi)$  на всю ось  $O_t$ , полезен, так как он позволяет проанализировать поведение ряда Фурье на концах интервала  $(0, \pi)$ .

Пусть функция  $f(t)$  непрерывна при  $t=0$  и  $t=\pi$ . Если эта функция раскладывается в ряд Фурье по косинусам в интервале  $(0, \pi)$ , то ее следует продолжить четным образом, в интервал  $(-\pi, 0)$ . Тогда для интервала  $(-\pi, \pi)$   $f(-t) = f(t)$ , следовательно, при  $t=0$  и  $t=\pi$  непрерывность продолженной функции сохраняется, т. е. если ряд Фурье сходится в интервале  $(0, \pi)$ , то при  $t=0$  и  $t=\pi$  ряд сходится именно к значениям функций  $f(0)$  и  $f(\pi)$ . Если функция  $f(t)$  раскладывается в ряд Фурье по синусам, то она нечетным образом продолжается в интервал  $(-\pi, 0)$ . В этом случае в интервале  $(-\pi, 0)$   $f(-t) = -f(t)$  и значит при  $t=0$  и  $t=\pi$  непрерывность продолженной функции не сохраняется.

При  $t=0$  и  $t=\pi$  сумма ряда Фурье равна  $\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$ , т. е. ряд сходится при  $t=0$  и  $t=\pi$  к значениям функций  $f(0)$  и  $f(\pi)$  лишь в том случае, если эти значения равны нулю.

**Пример 3.** Разложить в ряд Фурье по синусам в интервале  $(0, \pi)$  функцию  $f(t) = t$  (рис. 95).

Заданная функция, продолженная в интервал  $(-\pi, 0)$ , является нечетной, поэтому для искомого разложения  $a_0 = 0$ ,  $a_k = 0$  ( $k = 1, 2, 3 \dots$ ) и ряд Фурье

определяется формулой (25). Учитывая равенство (14), найдем коэффициент  $b_k$ , выполнив интегрирование по частям:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{t \cos kt}{k} \Big|_{t=0}^{t=\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kt \, dt \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\pi \cos k\pi}{k} + \frac{1}{k^2} \sin kt \Big|_{t=0}^{t=\pi} \right] = -2 \frac{\cos k\pi}{k} = 2 \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad (k=1, 2, \dots)$$

В соответствии с теоремой 3, ряд Фурье при  $0 \leq t < \pi$  для функции  $f(t) = t$  будет

$$t = 2 \left[ \sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \dots + \frac{(-1)^{k-1} \sin kt}{k} + \dots \right].$$

При  $t = \pi$  сумма ряда обращается в ноль.

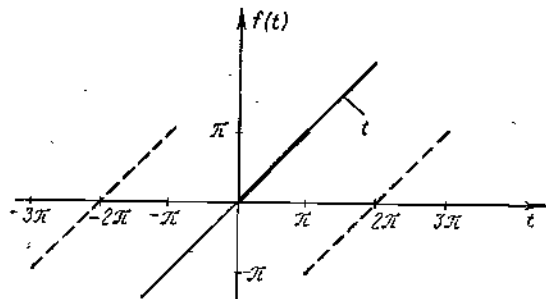


Рис. 95

**Пример 4.** Разложить в ряд Фурье по косинусам в интервале  $(0, \pi)$  функцию  $f(t) = t^2$  (рис. 96).

Продолжая заданную функцию четным образом в интервал  $(-\pi, 0)$ , а затем периодически продолжая с периодом  $2\pi$  вне интервала  $(-\pi, \pi)$ , получим график функции, изображенной на рис. 96.

Для искомого разложения  $b_k = 0$  ( $k=1, 2, \dots$ ). По формулам (12) и (13) найдем

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \, dt = \frac{2}{\pi} \frac{t^3}{3} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2\pi^3}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos kt \, dt =$$

$$= -\frac{4}{\pi k} \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt =$$

$$= \frac{4}{k^2} \cos k\pi = 4 \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

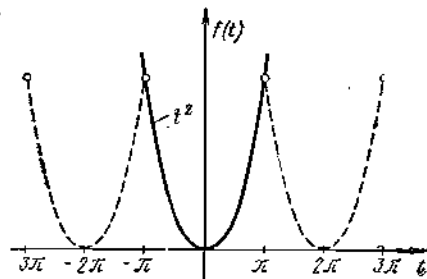


Рис. 96

В соответствии с теоремой 3 при  $0 \leq t \leq \pi$  для функции  $f(t) = t^2$  имеем разложение

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \cos t - \frac{\cos 2t}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^k \cos kt}{k^2} \right).$$

**4. Функции с периодом  $T$ .** Результаты разложения на сумму гармонических составляющих функции  $f(t)$ , имеющей период  $2\pi$ ,

распространим на периодические функции с периодом, отличным от  $2\pi$ . Разложим в тригонометрический ряд функцию  $f(t)$  периода  $T$ . Введем новую переменную

$$\eta = \frac{2\pi}{T} t.$$

Так как  $t = \frac{\eta T}{2\pi}$ , то  $f(t) = f\left(\frac{\eta T}{2\pi}\right) = g(\eta)$ .

Пусть функция  $f(t)$  задана в интервале  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ , тогда, очевидно, функция  $g(\eta)$  определяется в интервале  $(-\pi, \pi)$  переменной  $\eta$ .

Из условия периодичности функции  $f(t)$  имеем  $f(t + nT) = f(t)$ . Следовательно,

$$g(\eta + 2\pi n) = f\left(\frac{(\eta + 2\pi n) T}{2\pi}\right) = f\left(\frac{\eta T}{2\pi} + nT\right) = f(t) = g(\eta),$$

т. е. функция  $g(\eta)$  периодическая с периодом  $2\pi$ . К функции  $g(\eta)$  применима формула (7) разложения периодической функции с периодом  $2\pi$  в ряд Фурье, т. е. справедливо равенство

$$g(\eta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\eta + b_k \sin k\eta),$$

где  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\eta) \, d\eta$ ,  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\eta) \cos k\eta \, d\eta$  ( $k=1, 2, \dots$ ),  $b_k =$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\eta) \sin k\eta \, d\eta \quad (k=1, 2, \dots).$$

Переходя в этих формулах к старой переменной  $t$ , получим

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (26)$$

где, учитывая, что  $d\eta = \frac{2\pi}{T} dt$ ,

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \, dt, \quad (27)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k \frac{2\pi}{T} t \, dt \quad (k=1, 2, \dots), \quad (28)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k \frac{2\pi}{T} t \, dt \quad (k=1, 2, \dots). \quad (29)$$

Интегрирование в этих формулах может быть произведено и по другому интервалу длиной  $T$ , например по интервалу  $(0, T)$ .

В отличие от разложения (7) с помощью формулы (26) разложение функции  $f(t)$  производится по косинусам и синусам углов, кратных не  $t$ , а  $\frac{2\pi t}{T}$ .

Так как разложение (26) является следствием разложения (7), то теорема 3 об условиях сходимости ряда Фурье остается справедливой и для интервала  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ . Ряд Фурье для функции  $f(t)$ , заданной в интервале  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ , имеет вид (26), а коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$  определяются по формулам (27)–(29)

Если функция  $f(t)$  четная, то

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad (30)$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k \frac{2\pi}{T} t dt \quad (k=1, 2, \dots), \quad (31)$$

$$b_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots).$$

Для нечетной функции  $f(t)$  соответственно

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k \frac{2\pi}{T} t dt, \quad (32)$$

$$a_k = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Функция  $f(t)$  в интервале  $(0, \frac{T}{2})$  может быть разложена по косинусам или по синусам так же, как и при разложении по косинусам или по синусам функции  $f(t)$  в интервале  $(0, \pi)$ .

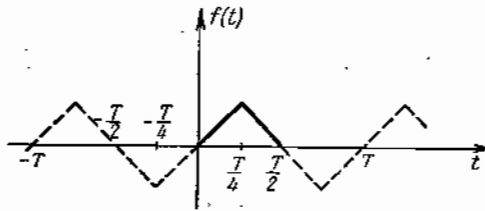


Рис. 97

**Пример 5.** Разложить в ряд Фурье по синусам функцию  $f(t)$ , заданную в интервале  $(0, \frac{T}{2})$  следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq \frac{T}{4}), \\ \frac{T}{2} - t & (\frac{T}{4} < t \leq \frac{T}{2}). \end{cases}$$

Продолжим функцию  $f(t)$  нечетным образом в интервал  $(-\frac{T}{2}, 0)$ , а затем периодически с периодом  $T$  продолжим график полученной функции на всю ось  $Ot$  (рис. 97). В соответствии с теоремой 3 ряд Фурье сходится для всех значений аргумента  $t$  и имеет своей суммой значения функции  $f(t)$ . Так как

продолженная функция является нечетной, то  $a_k = 0$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ). Коэффициент  $b_k$  найдем в соответствии с формулой (32):

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} t \sin k \frac{2\pi}{T} t dt + \frac{4}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} (T/2 - t) \sin k \frac{2\pi}{T} t dt,$$

или, полагая  $\eta = \frac{2\pi}{T} t$ ,

$$b_k = \frac{T}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \sin k\eta d\eta + \frac{T}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - \eta) \sin k\eta d\eta.$$

Интегрируя по частям, найдем

$$b_k = -\frac{T}{\pi^2} \cdot \frac{\eta \cos k\eta}{k} \Big|_{\eta=0}^{\eta=\frac{\pi}{2}} + \frac{T}{\pi^2 k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos k\eta d\eta - \frac{T}{\pi^2} \frac{(\pi - \eta) \cos k\eta}{k} \Big|_{\eta=\frac{\pi}{2}}^{\eta=\pi} - \frac{T}{\pi^2 k} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos k\eta d\eta = \frac{2T}{\pi^2 k^2} \sin \frac{\pi k}{2} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Следовательно, ряд будет иметь вид

$$\frac{2T}{\pi^2} \left( \sin \frac{2\pi}{T} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{6\pi}{T} t + \frac{1}{5^2} \sin \frac{10\pi}{T} t \dots \right) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{T}{4}, \\ \frac{T}{2} - t & \text{при } \frac{T}{4} < t \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

**5. Комплексная форма ряда Фурье.** Запишем тригонометрический ряд (6) в комплексной форме. Используя формулы Эйлера (см. § 25)

$$\cos \Delta\omega t = \frac{e^{j\Delta\omega t} + e^{-j\Delta\omega t}}{2}, \quad \sin \Delta\omega t = \frac{e^{j\Delta\omega t} - e^{-j\Delta\omega t}}{2j},$$

получим

$$a_k \cos k\Delta\omega t + b_k \sin k\Delta\omega t = a_k \frac{e^{jk\Delta\omega t} + e^{-jk\Delta\omega t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\Delta\omega t} - e^{-jk\Delta\omega t}}{2j},$$

или, вводя обозначения

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}, \quad (33)$$

$$a_k \cos k\Delta\omega t + b_k \sin k\Delta\omega t = c_k e^{jk\Delta\omega t} + c_{-k} e^{-jk\Delta\omega t}.$$

Обозначив  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ , получим для функции  $f(t)$ , заданной в интервале  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ , ряд Фурье (6) в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Delta\omega t}. \quad (34)$$

Здесь, как и выше,  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$  представляет собой частоту первой гармоники разложения функции в ряд Фурье или, что одно и то же, приращение частоты при переходе от гармоники с номером  $k$  к гармонике с номером  $k+1$ . Величины  $c_k$  являются комплексными коэффициентами разложения функции  $f(t)$  в ряд (34). Функция  $e^{jk\Delta\omega t}$  называется *комплексной гармоникой*.

Если ряд (6) сходится к функции  $f(t)$ , то к той же функции сходится и ряд (34). Так как  $2c_k = a_k - jb_k$ , то, принимая во внимание формулу (27) § 25 и равенство (15), найдем

$$2c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} e^{-j \arctg \frac{b_k}{a_k}} = A_k e^{-j\varphi_k}. \quad (35)$$

Величину  $C_k = 2c_k$  называют *комплексной амплитудой*  $k$ -й гармоники. Очевидно, что амплитуда  $k$ -й гармоники  $A_k = 2|c_k|$ .

Формулу (34) иногда удобнее записывать в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(jk\Delta\omega) \Delta\omega e^{jk\Delta\omega t}, \quad (36)$$

где

$$F(jk\Delta\omega) = \frac{2c_k}{\Delta\omega} \pi \quad (37)$$

— *относительная комплексная амплитуда*  $k$ -й гармоники.

Получим формулу для определения неизвестных коэффициентов в разложении (34).

Принимая во внимание равенства (28) и (29), имеем

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\Delta\omega t dt - j \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\Delta\omega t dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \left[ \frac{e^{jk\Delta\omega t} + e^{-jk\Delta\omega t}}{2} - j \frac{e^{jk\Delta\omega t} - e^{-jk\Delta\omega t}}{2j} \right] dt. \end{aligned}$$

Из последнего равенства получим

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt. \quad (38)$$

Учитывая равенство (37), найдем выражение для  $F(jk\Delta\omega)$ :

$$F(jk\Delta\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt. \quad (39)$$

Если разложение функции  $f(t)$  на сумму гармонических составляющих производится в интервале  $(-\pi, \pi)$ , то формула (34) заменится следующей:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt}, \quad (40)$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jkt} dt \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (41)$$

В формулах (34) и (40) суммирование производится как по положительным, так и по отрицательным значениям  $k$ ; таким образом, комплексная форма ряда Фурье допускает существование и положительных и отрицательных частот  $\omega = k\Delta\omega$ . Однако после суммирования комплексных слагаемых останутся только вещественные величины, так как комплексные коэффициенты  $c_k$  и  $c_{-k}$  являются сопряженными.

**6. Понятие о спектрах.** Введем определение. *Совокупности коэффициентов  $a_k, b_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) разложения периодической функции  $f(t)$  в ряд Фурье называются частотными спектрами этой функции.*

Из формул (13) и (14) видно, что  $a_k = a_k(k)$ ,  $b_k = b_k(k)$ , если функция  $f(t)$  имеет период  $2\pi$ . Если же период функции равен  $T$ , то  $a_k = a_k(k\Delta\omega)$ ,  $b_k = b_k(k\Delta\omega)$ . Здесь частота первой гармоники  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Следовательно, спектры являются функциями, зависящими от номера гармоники  $k$  как независимой переменной. Графически частотные спектры удобно изображать в виде отрезков длины  $a_k, b_k$ , проведенных перпендикулярно к оси, на которую наносятся значения  $k$  или  $\Delta\omega k$ . Так как  $k=1, 2, \dots$ , то очевидно, что частотные спектры имеют дискретный (разрывный) характер. Расстояние между отдельными линиями спектра в общем случае равно  $\Delta\omega$ . Если период функции  $f(t)$  равен  $2\pi$ , то расстояние между линиями равно единице.

Совокупность комплексных чисел  $C_k = 2c_k$ , определяемая для функции  $f(t)$  с периодом  $T$  формулой (38), а для функции  $f(t)$  с периодом  $2\pi$  — формулой (41), называется *комплексным амплитудным частотным спектром*; совокупности (15) величин  $A_k = A_k(k\Delta\omega)$  и  $\varphi_k = \varphi_k(k\Delta\omega)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) называются соответственно *амплитудным* и *фазовым частотными спектрами* периодической функции  $f(t)$ .

Для четной функции  $f(t)$   $b_k = 0$ , а для нечетной функции  $a_k = 0$ . Следовательно, амплитудный и фазовый частотные спектры четной периодической функции  $A_k = |a_k|$ ,  $\varphi_k = 0$ , а для нечетной периодической функции  $A_k = |b_k|$ ,  $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$ . Спектры  $A_k$  и  $\varphi_k$  также удобно графически изображать в виде отдельных линий.

В п. 5 отмечалось, что число  $k$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому графики спектров  $A_k$  и  $\varphi_k$  имеют смысл и при положительных, и при отрицательных

частотах  $\omega = k\Delta\omega$ . Из равенства (35) имеем

$$A_k = 2|c_k|, \quad \varphi_k = -\arg c_k = \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}.$$

Отсюда получим, что  $A_{+|k|} = A_{-|k|}$ ,  $\varphi_{+|k|} = -\varphi_{-|k|}$ , т. е. амплитудный частотный спектр является *четно-симметричной*, а фазовый частотный спектр — *нечетно-симметричной функцией* частоты  $\omega$ . Таким образом, при определении спектров можно не строить тогда, когда в этом нет необходимости, графики спектров при  $\pm k\Delta\omega$ , а достаточно изобразить лишь половину спектра при  $k\Delta\omega > 0$ .

**Пример 6.** Определить частотные спектры периодической функции

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{при } 0 \leq t \leq \pi, \\ -a & \text{при } \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

Заданная функция имеет значения коэффициентов разложения ее в ряд Фурье (см. пример 1):  $b_k = 0$  при  $k$  четном,  $b_k = \frac{4a}{\pi k}$  при  $k$  нечетном;  $a_k = 0$ .

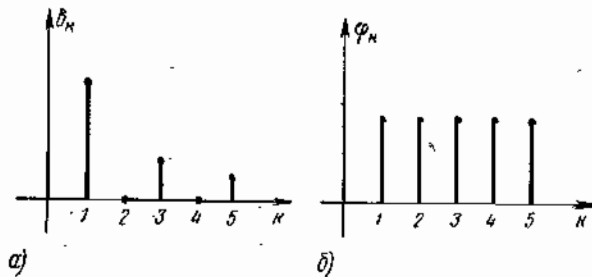


Рис. 98

Так как функция  $f(t)$  является нечетной, то амплитудный частотный спектр  $A_k = b_k$ , а фазовый частотный спектр  $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$ . На рис. 98 изображены линии частотных спектров  $b_k = A_k$  и  $\varphi_k$ .

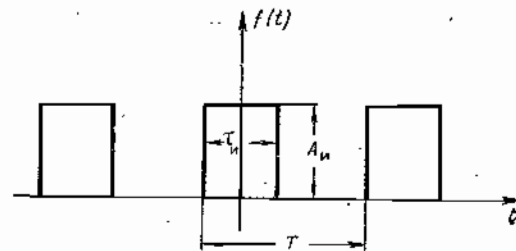


Рис. 99

**Пример 7.** Найти частотные спектры периодической последовательности импульсов высотой  $A_n$ , длительностью  $\tau_n$  и периодом  $T$  (рис. 99).  
Функция

$$f(t) = \begin{cases} A_n & \text{при } -\frac{\tau_n}{2} \leq t \leq \frac{\tau_n}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{\tau_n}{2} < t < T - \frac{\tau_n}{2}, \end{cases}$$

характеризующая заданную последовательностью импульсов, является функцией четной, поэтому  $b_k = 0$ .

Найдем значения коэффициентов  $a_k$ :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} f(t) \cos k\Delta\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} A_n \cos k \frac{2\pi}{T} t dt = \\ = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{\tau_n}{2}} A_n \cos k \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2A_n}{\pi k} \sin k \frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{\frac{\tau_n}{2}} = \frac{2A_n}{\pi k} \sin \frac{k\pi\tau_n}{T}.$$

Так как  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ , то

$$a_k = \frac{2A_n}{\pi k} \sin \frac{k\Delta\omega\tau_n}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow 0} a_k = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2A_n \Delta\omega\tau_n}{\pi} \cos \frac{k\Delta\omega\tau_n}{2} = \frac{A_n \Delta\omega\tau_n}{\pi} = \frac{2A_n\tau_n}{T}.$$

На рис. 100, а изображены линии частотного спектра  $a_k = a_k(k\Delta\omega)$ , а на рис. 100, б — линии амплитудного частотного спектра  $A_k = |a_k|$ . Так как функция  $f(t)$  четная, то фазовый частотный спектр  $\varphi_k = 0$ .

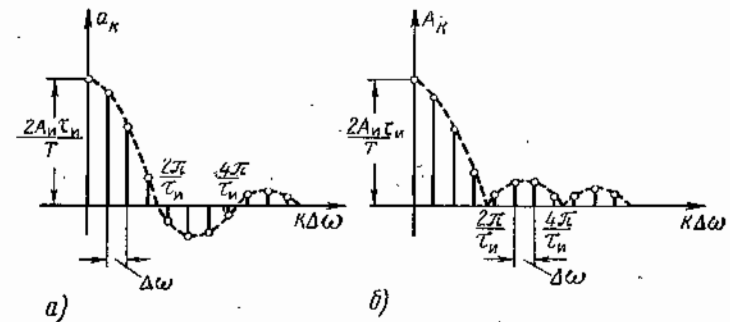


Рис. 100

Ряд Фурье для рассматриваемой последовательности импульсов, можно записать в комплексной форме так:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Delta\omega t} = \frac{A_n}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\Delta\omega\tau_n}{2} e^{jk\Delta\omega t}.$$

Отметим, что между периодическими функциями и их частотными спектрами существует взаимно-однозначное соответствие: периодическая функция  $f(t)$  полностью определяет ее частотные спектры и, наоборот, зная частотные спектры, можно указать, какой периодической функции они принадлежат. Благодаря этому соответствию в ряде задач техники оказывается удобным оперировать над периоди-

ческими процессами заменять операциями над частотными спектрами, характеризующими эти процессы. Спектры полностью информируют о том, какого рода колебания имеют место в данном процессе, какова его структура.

Предположим, например, что функция  $f(t)$  характеризует собой ток, протекающий в электрической цепи, активное сопротивление которой равно 1 ому. Найдем среднюю мощность, выделяемую током в этой цепи за время  $0 < t < T$ , выразив ее через коэффициенты разложения функции  $f(t)$  в ряд Фурье.

Так как  $f^2(t)$  является мгновенной мощностью, выделяемой током в момент времени  $t$ , то средняя мощность будет

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt. \quad (42)$$

Для определения  $P_{\text{cp}}$  используем равенство Ляпунова (18), которое для интервала  $0 < t < T$  имеет вид

$$\frac{2}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2), \quad (43)$$

причем  $a_0, a_k, b_k$  могут быть определены в соответствии с равенствами (27) – (29). Тогда

$$P_{\text{cp}} = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2), \quad (44)$$

или, учитывая равенство (15),

$$P_{\text{cp}} = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2. \quad (45)$$

Правая часть этого равенства дает представление о распределении составляющих средней мощности по гармоникам разложения функции  $f(t)$  в интервале  $(0, T)$  в ряд Фурье. Следовательно, средняя мощность тока, а в общем случае сигнала  $f(t)$ , равна сумме средних значений мощностей всех частотных компонент.

Совокупность значений  $A_k^2$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) может быть названа *энергетическим спектром* периодической функции  $f(t)$ . График энергетического спектра также состоит из отдельных линий, длина которых зависит от номера  $k$  гармоник разложения функции  $f(t)$  в ряд Фурье. Из выражения (45) следует, что в образовании энергетического спектра участвуют лишь амплитуды  $A_k$  гармоник и не участвуют фазовые сдвиги  $\varphi_k$ .

**1. Предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье.** Для разложения функции  $f(t)$  в ряд Фурье на всей оси  $Ot$  необходимо, чтобы эта функция была периодической. При представлении функции, заданной в некотором интервале  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ , в виде ряда Фурье в этом интервале функция периодически продолжается с периодом  $T$  за пределы интервала  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ . В этом случае получающаяся периодическая функция представляется в виде бесконечной суммы гармонических составляющих – гармоник. Установим, как будет изменяться разложение периодической функции на сумму гармоник, если период  $T$  функции увеличивать, устремляя его к бесконечности.

Пусть дана непериодическая функция  $f(t)$ , удовлетворяющая в интервале  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  условиям Дирихле, т. е. разложение функции в ряд Фурье в этом интервале возможно. В точках интервала, где функция  $f(t)$  непрерывна, она может быть представлена в виде ряда Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t), \quad (1)$$

причем коэффициенты разложения здесь

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau, \quad (2)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos k \frac{2\pi}{T} \tau d\tau \quad (k=1, 2, \dots), \quad (3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \sin k \frac{2\pi}{T} \tau d\tau \quad (k=1, 2, \dots). \quad (4)$$

Предположим также, что заданная функция удовлетворяет на всей оси  $Ot$  условию абсолютной интегрируемости, т. е. интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = M < \infty \quad (5)$$

существует.



Подставим в ряд (1) выражения для коэффициентов  $a_0, a_k, b_k$ :

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \left[ \cos k \frac{2\pi}{T} t \cos k \frac{2\pi}{T} \tau + \right. \\ \left. + \sin k \frac{2\pi}{T} t \sin k \frac{2\pi}{T} \tau \right] d\tau = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau + \\ + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos k\Delta\omega (t - \tau) d\tau. \quad (6)$$

Оценим модуль первого слагаемого правой части равенства (6) при  $T \rightarrow \infty$ . Так как

$$\left| \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(\tau)| d\tau < \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau = \frac{1}{T} M,$$

то первое слагаемое правой части стремится к нулю.

При  $T \rightarrow \infty$  частота первой гармоники разложения функции  $f(t)$  в ряд Фурье  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ . Однако величина  $\Delta\omega$  является приращением частоты при переходе в совокупности частот гармоник  $1 \cdot \Delta\omega, 2\Delta\omega, 3\Delta\omega, \dots$ , от одной частоты к соседней. При  $T \rightarrow \infty$  приращение частоты становится величиной бесконечно малой, и в этом случае приращение  $\Delta\omega$  можно отождествить с дифференциалом  $d\omega$ .

Обозначим через  $\omega$  частоту  $k$ -й гармоники, т. е. положим  $\omega = k\Delta\omega$ . Под знаком суммы бесконечного ряда в правой части равенства (6) величина  $\omega$  принимает дискретные значения; если же  $T \rightarrow \infty$ , то частота  $\omega$  делается непрерывной величиной. В этом случае\*)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos k\Delta\omega (t - \tau) d\tau = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos k\Delta\omega (t - \tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega (t - \tau) d\tau$$

\*) Более строгое доказательство предельного перехода см., например, Будаков Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. Физматгиз, 1967, стр. 511.

Следовательно, для непериодической функции  $f(t)$ , удовлетворяющей указанным выше условиям, справедливо равенство

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega (t - \tau) d\tau. \quad (7)$$

Равенство (7) имеет место для тех значений независимой переменной  $t$ , для которых функция  $f(t)$  является непрерывной. В точках разрыва непрерывности функции  $f(t)$  в интервале  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  сумма членов ряда Фурье (1) равна  $\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$  (см. § 34). Можно показать, что в точках разрыва непрерывности правая часть выражения (7) будет определяться равенством

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega (t - \tau) d\tau = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}. \quad (8)$$

Интеграл в правой части равенства (7) называется *интегралом Фурье*.

Получим выражение для интеграла Фурье в виде, несколько отличном от (7). Учитывая формулу для косинуса разности, найдем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega (t - \tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right) \cos \omega t d\omega + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right) \sin \omega t d\omega.$$

Введем обозначения:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (\omega \geq 0), \quad (9)$$

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \quad (\omega \geq 0), \quad (10)$$

тогда

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [U(\omega) \cos \omega t + V(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (11)$$

Сравнивая разложения (11) и (1), а также формулы (9) и (10) соответственно с формулами (3) и (4), можно установить определенную аналогию между рядом и интегралом Фурье. В обоих случаях функция  $f(t)$  раскладывается на сумму гармонических составляющих. Однако в ряде Фурье суммирование производится по индексу  $k$ , принимающему дискретные значения  $k=1, 2, \dots$ , вследствие чего смежные гармоники ряда имеют частоты, отличающиеся друг от друга на величину  $\Delta\omega$ . В интеграле Фурье в отличие от

ряда Фурье производится интегрирование по непрерывной переменной  $\omega$ . Коэффициенты ряда Фурье  $a_k = a_k(k\Delta\omega)$ ,  $b_k = b_k(k\Delta\omega)$  есть функции дискретной переменной  $k$ , являющейся номером гармоники в разложении. Функции  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  напоминают коэффициенты Фурье, однако эти функции зависят от переменной  $\omega$ , изменяющейся не дискретно, а непрерывно. Следовательно, частоты смежных гармоник в представлении функции  $f(t)$  в виде интеграла Фурье непрерывно переходят одна в другую, т. е. отличаются на величину бесконечно малую.

Рассмотрим частные случаи разложения (11). Пусть функция  $f(t)$  — четная. Тогда, как следует из (9) и (10),

$$\begin{aligned} U(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \\ V(\omega) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

в этом случае функция  $f(t)$  может быть представлена в виде интеграла Фурье по формуле

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (13)$$

где  $U(\omega)$  определяется первым равенством (12).

Пусть теперь  $f(t)$  — нечетная функция. Для такой функции

$$\begin{aligned} U(\omega) &= 0, \\ V(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \end{aligned} \quad (14)$$

и интеграл Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} V(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (15)$$

Формула (11) и ее частные случаи — формулы (13), (15) характеризуют разложение непериодической функции  $f(t)$  на сумму гармонических составляющих с частотами  $\omega$ , непрерывно изменяющимися от 0 до  $\infty$ .

Заметим, что если функция  $f(t)$  задана лишь в интервале  $(0, \infty)$ , то формула (13) продолжает эту функцию четным образом, а формула (15) — нечетным образом на всю ось  $Ot$ . При  $t > 0$  обе формулы дают один и тот же результат.

Введем обозначения:

$$\tilde{U}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (16)$$

$$\tilde{V}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \quad (17)$$

тогда вместо формул (13) и (15) соответственно получим:

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\tilde{U}(\omega)}{\pi} \cos \omega t d\omega, \quad (18)$$

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\tilde{V}(\omega)}{\pi} \sin \omega t d\omega. \quad (19)$$

Функции  $\tilde{U}(\omega)$  и  $\tilde{V}(\omega)$  называются соответственно *косинус-преобразованием* и *синус-преобразованием Фурье*.

Из формул (16) и (18) видно, что  $\tilde{U}(\omega)$  определяется по заданной функции  $f(t)$  точно так же, как определяется  $f(t)$  по заданной функции  $\tilde{U}(\omega)$ . То же самое можно сказать и в отношении функций  $f(t)$  и  $\tilde{V}(\omega)$ . Другими словами, функции  $f(t)$  и  $\tilde{U}(\omega)$  взаимно являются косинус-преобразованиями, а функции  $f(t)$  и  $\tilde{V}(\omega)$  взаимно являются синус-преобразованиями. Равенство (16) (или (17)) можно рассматривать как интегральное уравнение, если задана функция  $\tilde{U}(\omega)$  (или  $\tilde{V}(\omega)$ ), а определению подлежит функция  $f(t)$ . Формула (18) (или (19)) дает решение этого уравнения.

**Пример 1.** Задана функция

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & (\alpha > 0, t \geq 0), \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Определить косинус- и синус-преобразования для этой функции.

По формулам (16) и (17) найдем:

$$\tilde{U}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2},$$

$$\tilde{V}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Функция  $f(t) = e^{-at}$  интегрируема в интервале  $(0, \infty)$ , поэтому справедливы и взаимные соотношения

$$\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = e^{-at} \quad (t \geq 0),$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = e^{-at} \quad (t \geq 0).$$

**2. Комплексная форма интеграла Фурье.** Покажем, что интеграл Фурье для функции  $f(t)$  может быть записан в комплексной форме

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau. \quad (20)$$

В самом деле, используя формулу Эйлера

$$e^{j\omega(t-\tau)} = \cos \omega(t-\tau) + j \sin \omega(t-\tau),$$

найдем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right) d\omega + \\ + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right) d\omega.$$

Выражения, стоящие в круглых скобках в первом и во втором слагаемых правой части, являются соответственно четной и нечетной функциями относительно переменной  $\omega$ , поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right) d\omega = 0.$$

Заметим, что здесь рассматривается главное значение \*) несобственного внешнего интеграла, т. е. полагаем

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right) d\omega.$$

Итак

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right) d\omega. \quad (21)$$

Сравнивая формулы (21) и (7), видим, что они полностью совпадают друг с другом. Следовательно, интеграл Фурье для функции  $f(t)$  может быть представлен в комплексной форме (20). Так как  $t$  не зависит от  $\tau$ , то множитель  $e^{j\omega\tau}$  можно вынести из под знака внутреннего интеграла в формуле (20), тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

\*) Может оказаться, что предел  $\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(t) dt$  не существует, если  $a$  и  $b$

стремятся к своим пределам независимо друг от друга, т. е. интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$

расходится. Но при этом может существовать предел  $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(t) dt$ , который

называется главным значением несобственного интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ . Ниже все несобственные интегралы рассматриваются в смысле их главных значений.

Величина интеграла не зависит от наименования переменной интегрирования, поэтому, возвращаясь к старой переменной  $t$ , т. е. заменяя  $\tau$  на  $t$ , получим формулу для интеграла Фурье в следующем виде:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (22)$$

Комплексная форма интеграла Фурье (22) имеет своим аналогом комплексную форму ряда Фурье (34) (см. § 34). Здесь роль коэффициентной комплексной функции  $c_k$  выполняет внутренний интеграл, который обозначим  $F(j\omega)$ , т. е.

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (23)$$

следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (24)$$

Функция  $F(j\omega)$  называется *преобразованием Фурье функции  $f(t)$*  (\*). Как показано ниже, эта функция характеризует спектральный состав функции  $f(t)$  и может быть названа также *спектральной плотностью* или *спектральной характеристикой* функции  $f(t)$  (\*\*).

Формула (24) определяет значение функции  $f(t)$  в точках, где эта функция непрерывна. В точках разрыва непрерывности получим, учитывая равенство (8), что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}. \quad (25)$$

Формулу (24) можно представить в несколько ином виде. Имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [F(j\omega) e^{j\omega t} + F(-j\omega) e^{-j\omega t}] d\omega;$$

так как слагаемые под знаком квадратных скобок являются сопряженными величинами, то

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (26)$$

В этой формуле интегрирование производится лишь по положительным частотам  $\omega$ .

\*) Преобразованием Фурье называется также процесс определения функции  $F(j\omega)$  с помощью формулы (23).

\*\*) Полагаем, что аргумент  $t$  имеет размерность времени, в этом случае аргумент  $\omega$  имеет размерность частоты.

Получим формулу преобразования Фурье в ином виде, для чего равенство (23) перепишем следующим образом, используя формулу Эйлера:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt. \quad (27)$$

Учитывая обозначения (9) и (10), будем иметь

$$F(j\omega) = U(\omega) - jV(\omega),$$

где

$$V(\omega) = -\operatorname{Im} F(j\omega),$$

$$U(\omega) = \operatorname{Re} F(j\omega).$$

Из (9) и (10) видно, что функция  $U(\omega)$  является четной, а  $V(\omega)$  — нечетной относительно переменной  $\omega$ .

Функцию  $F(j\omega)$  можно записать в виде

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (28)$$

где

$$|F(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} \quad (29)$$

— модуль преобразования Фурье — является функцией четной, а его аргумент

$$\varphi(\omega) = \arg F(j\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \quad (30)$$

является функцией нечетной относительно  $\omega$ . Так как

$$U(\omega) = |F(j\omega)| \cos \varphi(\omega), \quad V(\omega) = |F(j\omega)| \sin \varphi(\omega),$$

то вместо формулы интеграла Фурье (11) можно использовать формулу

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)| \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega. \quad (31)$$

Сравним преобразование Фурье  $F(j\omega)$  с относительной комплексной амплитудой  $k$ -й гармоники  $F(jk\Delta\omega)$ , определяемой равенством (39) § 34:

$$F(jk\Delta\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt.$$

В пределе при  $T \rightarrow \infty$  (т. е. при  $\Delta\omega \rightarrow 0$ ) правая часть этого равенства совпадает с правой частью равенства (23), т. е., учитывая формулы (35) и (37) § 34, найдем:

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} F(jk\Delta\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2c_k}{\Delta\omega} \pi = \lim_{T \rightarrow \infty} \pi \frac{A_k}{\Delta\omega} e^{-j\varphi_k},$$

Функция  $F(jk\Delta\omega)$  дает при фиксированном  $k$  значение относительной комплексной амплитуды  $k$ -й гармоники разложения периодической функции в ряд Фурье. Если  $k$  принимает значения  $0, 1, 2, \dots$ , то  $F(jk\Delta\omega)$  будет принимать дискретный ряд значений  $F(j0)$ ,  $F(j\Delta\omega)$ ,  $F(j2\Delta\omega)$ . Функция  $F(j\omega)$  характеризует закон изменения относительных комплексных амплитуд разложения непериодической функции на сумму гармоник. Так как частота  $\omega$  принимает непрерывный ряд значений, то график функции  $F(j\omega)$  состоит не из отдельных (дискретных) точек, а является непрерывной кривой.

Для случая непериодической функции, т. е. при  $T \rightarrow \infty$ , частотный интервал между смежными гармониками  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , следовательно, интеграл (24) дает разложение, представляющее собой сумму бесконечно большого числа гармоник, амплитуды которых бесконечно малы, а частоты смежных гармоник отличаются друг от друга бесконечно мало. Комплексная бесконечно малая амплитуда каждой гармоники, как следует из интеграла (24), будет

$$dC = \frac{1}{\pi} F(j\omega) d\omega. \quad (32)$$

Итак, если с помощью ряда Фурье можно периодическую функцию разложить на сумму бесконечного числа гармоник с частотами, принимающими дискретные значения, то интеграл Фурье позволяет непериодическую функцию представить в виде бесконечного числа гармоник, частоты которых образуют непрерывную последовательность.

Амплитуда  $A$  каждой из гармоник в разложении с помощью интеграла Фурье непериодической функции  $f(t)$  является величиной бесконечно малой, поэтому изобразить графически амплитудный частотный спектр такой функции не представляется возможным. Для того чтобы можно было использовать спектральные представления и для анализа непериодических процессов, при построении графика амплитудного частотного спектра по оси ординат откладывают не амплитудное значение гармоники  $A$ , а значение относительной амплитуды, равной  $\pi \frac{A}{\Delta\omega}$ . Если подобное построение выполнить для случая, когда функция  $f(t)$  является периодической с периодом  $T$ , то вместо графика амплитудного спектра  $A_k$  получится график  $|F(jk\Delta\omega)| = \pi \frac{A_k}{\Delta\omega}$  средней плотности амплитуды, т. е. график, характеризующий значение амплитуды, приходящейся на единицу длины данного интервала частот. В пределе при  $T \rightarrow \infty$  функция  $F(jk\Delta\omega)$  превращается в спектральную плотность  $F(j\omega)$  непериодической функции  $f(t)$ , которая, как следует из (27), с точностью до постоянного множителя  $\pi$  представляет собой отношение бесконечно малого приращения комплексной амплитуды, имеющее место при бесконечно малом приращении частоты, к указанному приращению частоты, т. е.

$$F(j\omega) = \pi \frac{dC}{d\omega}. \quad (33)$$

Аргумент спектральной плотности  $\arg F(j\omega) = \varphi(\omega)$  характеризует начальную фазу гармоник разложения непериодической функции  $f(t)$ , а функция  $\frac{1}{\pi} |F(j\omega)|$  является относительной амплитудой этих гармоник.

**Пример 2.** Определить частотные свойства одиночного импульса высотой  $A_n$  и длительностью  $\tau_n$  (рис. 101).

Функция, характеризующая этот импульс,

$$f(t) = \begin{cases} A_n & \text{при } -\frac{\tau_n}{2} \leq t \leq \frac{\tau_n}{2}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{\tau_n}{2} \text{ и } t < -\frac{\tau_n}{2}. \end{cases}$$

Прежде всего попытаемся получить график амплитудного частотного спектра заданного импульса. Из примера 7 § 34 видно, что для периодической последовательности такого рода импульсов с периодом  $T$

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{2A_n}{\pi k} \sin \frac{k\Delta\omega\tau_n}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

где

$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$  — частотный интервал между смежными гармониками. Запишем выражение для  $a_k$  в виде

$$a_k = \frac{\tau_n A_n}{\pi} \Delta\omega \frac{\sin \frac{k\Delta\omega\tau_n}{2}}{k\Delta\omega\tau_n}.$$

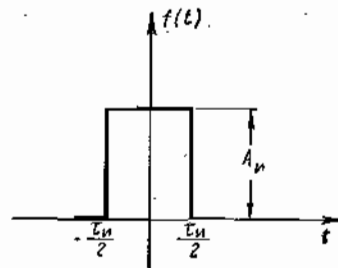


Рис. 101

Последовательность импульсов (см. рис. 99) при  $T \rightarrow \infty$  заменится одним импульсом. Расстояние между линиями спектра  $\Delta\omega \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$ , а значения амплитуд гармоник разложения

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} A_k &= \lim_{T \rightarrow \infty} |a_k| = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\tau_n A_n}{\pi} \Delta\omega \left| \frac{\sin \frac{k\Delta\omega\tau_n}{2}}{k\Delta\omega\tau_n} \right| = \\ &= \frac{\tau_n A_n}{\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \Delta\omega \left| \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{k\Delta\omega\tau_n}{2}}{k\Delta\omega\tau_n} \right| = 0. \end{aligned}$$

Амплитуды гармонических составляющих разложения заданного импульса в ряд Фурье являются величинами бесконечно малыми, поэтому графически невозможно изобразить амплитудный частотный спектр заданного импульса в виде отрезков линий, параллельных оси ординат, как это наблюдается для периодической последовательности импульсов (см. рис. 100, б).

Построим теперь график функции  $|F(jk\Delta\omega)|$ , т. е. график средней плотности амплитуд гармоник разложения периодической последовательности импульсов (см. рис. 99) в ряд Фурье. Так как

$$F(jk\Delta\omega) = \frac{2c_k}{\Delta\omega} \pi, \quad c_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2},$$

то, учитывая, что в рассматриваемом случае  $b_k = 0$ , найдем

$$|F(jk\Delta\omega)| = \frac{|a_k| \pi}{\Delta\omega} = \frac{2A_n}{\Delta\omega\tau_n} \left| \sin \frac{k\Delta\omega\tau_n}{2} \right|.$$

При  $k=0, 1, 2, \dots$ , функция  $|F(jk\Delta\omega)|$  принимает дискретный ряд значений  $|F(j\Delta\omega)|, |F(j \cdot 2\Delta\omega)|, \dots$ . Эти значения будем обозначать, как и при графическом изображении частотных спектров, в виде вертикальных отрезков соответствующей длины. Через концы отрезков проходит огибающая  $|F(j\omega)|$ , представляющая собой зависимость не от дискретного аргумента  $k$ , а от непрерывной частоты  $\omega$ . Для  $\omega > 0$  огибающая изображена на рис. 102, а пунктирной линией.

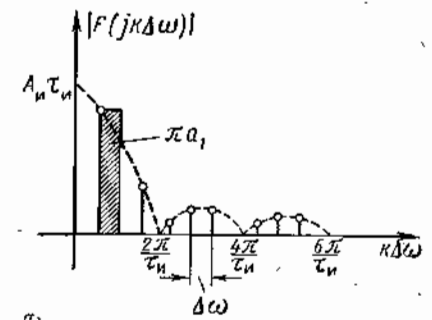
Величина площадей заштрихованных прямоугольников с точностью до множителя  $\pi$  равна соответствующим коэффициентам  $a_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) разложения периодической последовательности импульсов в ряд Фурье. Нетрудно видеть, что в отличие от огибающей для частотного спектра  $a_k$  кривая  $|F(j\omega)|$  не зависит от уменьшения (увеличения) частотного интервала  $\Delta\omega$ , происходящего при увеличении (уменьшении) периода  $T$  последовательности импульсов. При увеличении, например, периода  $T$

в два раза, расстояние  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$  между вертикальными линиями в два раза уменьшится (рис. 102, б), при этом вид огибающей  $|F(j\omega)|$  не изменится. При  $T \rightarrow \infty$  частотный интервал  $\Delta\omega$  делается величиной бесконечно малой (рис. 102, в), однако относительные амплитуды остаются неизменными. Кривая  $|F(j\omega)|$  проходит через концы вертикальных отрезков, бесконечно близко расположенных один к другому. Вся область под кривой оказывается заполненной этими отрезками. Функция  $|F(j\omega)|$  является модулем спектральной плотности рассматриваемого одиночного импульса (см. рис. 101), т. е.

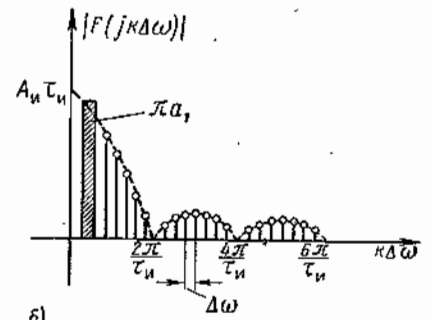
$$F(j\omega) = \frac{2A_n}{\omega} \sin \frac{\omega\tau_n}{2},$$

которая в данном примере является действительной функцией. В общем случае спектральная плотность есть функция комплексная.

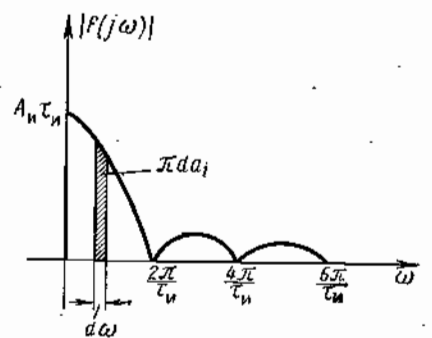
Отметим, что часто функцию  $F(j\omega)$  называют, используя терминологию спектрального анализа периодических функций, условно комплексным амплитудным частотным спектром непериодической функции  $f(t)$ , а функцию  $|F(j\omega)|$  — амплитудным частотным спектром этой функции. Такая терминология может привести к неудобству, если приходится сравнивать спектральные представления для периодических и непериодических функций. Следует еще раз под-



а)



б)



в)

Рис. 102

черкнуть, что амплитудный частотный спектр  $A_k$  периодической функции характеризует распределение амплитуд гармоник разложения по частотам этих гармоник, а модуль  $|F(j\omega)|$  спектральной плотности непериодической функции характеризует распределение относительных амплитуд гармоник разложения. Однако термин «Спектральная плотность» также не является вполне удачным, поскольку его использование тоже может привести к недоразумениям, так как подобная терминология используется в теории случайных процессов для обозначения распределения мощности флуктуаций стационарного случайного процесса по спектру частот. Ниже в § 66 указанное распределение мощности называется «спектральной плотностью мощности» (или просто спектральной плоскостью). Поскольку применительно к случайным процессам название «спектральная плотность» является общеупотребительным, то мы в дальнейшем будем избегать называть функцию  $F(j\omega)$  спектральной плотностью, оставляя за этой функцией название «спектральная характеристика».

## Глава XII ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

### § 36. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

**1. Прямое и обратное преобразования.** Совокупность операций, позволяющих по заданной функции  $f(t)$  находить ей соответствующую спектральную характеристику  $F(j\omega)$ , называется преобразованием Фурье. Из формулы (23) § 35

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

видно, что преобразование Фурье состоит в умножении функции  $f(t)$  на множитель  $e^{-j\omega t}$  и интегрировании произведения в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Символически формулу (1) будем записывать в виде

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega). \quad (2)$$

Интеграл в правой части равенства (1), как и выше, понимаем в смысле главного значения, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Равенство (1) устанавливает связь между функцией  $f(t)$ , аргументом которой служит время  $t$ , и ей соответствующей комплексной функцией  $F(j\omega)$ , имеющей в качестве аргумента частоту  $\omega$ .

**Пример 1.** Найти спектральную характеристику функции  $f(t) = e^{-a|t|}$ , причем  $a > 0$  — действительное число.

Заданная функция на всей оси  $Ox$  кусочно-непрерывна и абсолютно интегрируема, вследствие чего она преобразуема по Фурье. Имеем

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{2}{a + j\omega} e^{-(a + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{a + j\omega},$$

т. е.

$$\mathcal{F}\{e^{-at}\} = \frac{2}{a + j\omega}.$$

Покажем, что интеграл (1) сходится абсолютно и равномерно относительно  $\omega$ . Действительно, получим следующую оценку, учитывая равенство (5) § 35:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = M.$$

Так как интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-j\omega t}| dt$  сходится, то интеграл (1) сходится

абсолютно, а так как  $|f(t)e^{-j\omega t}| = |f(t)|$  и интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  сходится, то в соответствии с признаком равномерной сходимости несобственных интегралов, интеграл (1) сходится равномерно относительно  $\omega$ .

Формула интеграла Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3)$$

позволяет по известной функции  $F(j\omega)$  определить ей соответствующую функцию  $f(t)$ ; на этом основании формулу (3) (или формулу (26) § 35) называют *обратным преобразованием Фурье*. Символически это преобразование можно записать в виде

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = f(t). \quad (4)$$

Интеграл в правой части равенства (4) также следует рассматривать в смысле главного значения, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\omega_1 \rightarrow -\infty} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Нетрудно показать, что если интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega$  абсолютно сходится, то интеграл в правой части равенства (3) сходится равномерно относительно  $t$ . В самом деле, справедлива оценка

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega) e^{j\omega t}| d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| d\omega.$$

Так как  $|F(j\omega) e^{j\omega t}| = |F(j\omega)|$  и интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| d\omega$  по условию сходится, то интеграл (3) сходится равномерно относительно  $t$ .

В ряде задач автоматического регулирования функция  $f(t)$  характеризует процесс, имеющий место лишь начиная с некоторого времени  $t$ , который можно принять за нулевой. В этом случае  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$  и формула (1) принимает вид

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (5)$$

или символически

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) \quad (t > 0). \quad (6)$$

Интеграл в правой части формулы (5) следует определять с помощью предельной операции

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

где  $\epsilon \rightarrow +0$  означает правый предельный переход. В дальнейшем операция предельного перехода будет предполагаться выполненной.

Преобразование, определяемое формулой (5), называется *прямым односторонним преобразованием Фурье*.

Обратное преобразование Фурье, соответствующее прямому одностороннему преобразованию, остается двусторонним по переменной  $\omega$  и дается равенством

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (t > 0), \quad (7)$$

где  $F(j\omega)$  определяется формулой (5), или символически

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = f(t) \quad (t > 0). \quad (8)$$

При  $t=0$  значение правой части равенства (7), как это следует из равенства (25) § 35, равно  $\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ ; при  $t < 0$   $f(t) \equiv 0$ .

Если функция  $F(j\omega)$  удовлетворяет условию леммы Жордана (см. § 32), то в формуле (7) интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{Res } F(j\omega) e^{j\omega t} \Big|_{\omega=\omega_k} \quad (t > 0),$$

где  $\omega_k$  — особые точки функции  $F(j\omega)$ , расположенные в верхней полуплоскости плоскости  $\omega$ . В этом случае

$$f(t) = j \sum_{k=1}^n \text{Res } F(j\omega) e^{j\omega t} \Big|_{\omega=\omega_k} \quad (t > 0). \quad (9)$$

Очевидно, что одностороннему преобразованию Фурье могут быть подвергнуты те функции  $f(t)$ , которые в любом интервале, заключенном в пределах  $0 \leq t < \infty$ , удовлетворяют условиям Дирихле, и интеграл  $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$  существует.

**Пример 2.** Найти спектральную характеристику функции

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

причем  $\alpha > 0$ .

Данная функция удовлетворяет условиям применимости преобразования Фурье. Из формулы (5) получим

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega},$$

т. е.

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (t > 0).$$

**Пример 3.** Найти функцию  $f(t)$  при  $t \geq 0$ , если спектральная характеристика этой функции  $F(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$ .



Функция  $F(j\omega) = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{\omega + \frac{\alpha}{j}}$  имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку

$$\omega = \omega_1 = -\frac{\alpha}{j} = j\alpha.$$

Следовательно, принимая во внимание формулу (9), получим

$$f(t) = j \operatorname{Res} \frac{1}{j} \frac{1}{\omega - j\alpha} e^{j\omega t} \Big|_{\omega = \omega_1} = \lim_{\omega \rightarrow +j\alpha} (\omega - j\alpha) \frac{1}{\omega - j\alpha} e^{j\omega t} = e^{-\alpha t} \quad (t > 0);$$

при  $t < 0$   $f(t) = 0$ ; при  $t = 0$   $f(t) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +0} e^{-\alpha t} = \frac{1}{2}$ .

**2. Спектральные характеристики суммы, производной и интеграла.** Рассмотрим основные теоремы, относящиеся к преобразованию Фурье.

**Теорема 1.** Если функции  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  преобразуемы по Фурье и их спектральными характеристиками являются соответственно  $F_1(j\omega), F_2(j\omega), \dots, F_n(j\omega)$  и если  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — величины, не зависящие от  $t$  и  $\omega$ , то справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t) \right\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(j\omega), \quad (10)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(j\omega) \right\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t). \quad (11)$$

**Доказательство.** По формуле (1) найдем

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Так как интеграл суммы равен сумме интегралов, а множитель, не зависящий от переменной интегрирования, можно выносить за знак интеграла, то

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t) \right\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(j\omega).$$

Аналогично получим, используя формулу (3),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(j\omega) \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Эта теорема устанавливает линейность преобразования Фурье, т. е. показывает, что линейной комбинации функций соответствует линейная комбинация спектральных характеристик этих функций.

**Пример 4.** Найти спектральную характеристику функции

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} + e^{-\beta t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Принимая во внимание доказанную теорему и результат примера 2, найдем

$$\mathcal{F} \{e^{-\alpha t} + e^{-\beta t}\} = \mathcal{F} \{e^{-\alpha t}\} + \mathcal{F} \{e^{-\beta t}\} = \frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\beta + j\omega} \quad (t > 0).$$

**Теорема 2.** Если функция  $f(t)$  и ее производная  $f'(t)$  преобразуемы по Фурье и  $f(t)$  имеет спектральную характеристику  $F(j\omega)$ , то спектральная характеристика производной

$$\mathcal{F} \{f'(t)\} = j\omega F(j\omega). \quad (12)$$

**Доказательство.** Преобразование по Фурье производной определяется равенством

$$\mathcal{F} \{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Проинтегрируем правую часть этого выражения по частям, тогда

$$\mathcal{F} \{f'(t)\} = f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Так как функция  $f(t)$  преобразуема по Фурье, то

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0, \text{ откуда } f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Замечая, что  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(j\omega)$ , найдем

$$\mathcal{F} \{f'(t)\} = j\omega F(j\omega).$$

Теорема доказана.

Используя  $n$ -кратное интегрирование по частям, можно показать, что спектральная характеристика абсолютно интегрируемой в интервале  $(-\infty, \infty)$  производной  $f^{(n)}(t)$  определяется равенством

$$\mathcal{F} \{f^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n F(j\omega), \quad (13)$$

если

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f^{(k)}(t) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Легко убедиться, что при одностороннем преобразовании Фурье спектральная характеристика производной

$$\mathcal{F} \{f'(t)\} = j\omega F(j\omega) - f(+0), \quad (14)$$

где  $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ .

**Теорема 3.** Если функция  $f(t)$  преобразуема по Фурье и  $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$ , то

спектральная характеристика интеграла  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{F(j\omega)}{j\omega}. \quad (15)$$

Доказательство. Найдем преобразование по Фурье интеграла

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt.$$

Проинтегрируем интеграл в правой части этого равенства по частям. Тогда

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right\} = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Так как по условию теоремы  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau = 0$  (это справедливо, например, для нечетной функции  $f(t)$ ), то первое слагаемое правой части обращается в нуль, и мы имеем

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} F(j\omega).$$

Теорема доказана.

Теорему можно распространить и на интегралы кратности  $n$ . Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (dt)^n = 0,$$

то справедливо равенство

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t f(\tau) (d\tau)^n \right\} = \frac{1}{(j\omega)^n} \cdot F(j\omega). \quad (16)$$

При одностороннем преобразовании Фурье находится спектральная характеристика интеграла  $\int_0^t f(\tau) d\tau$ . Нетрудно убедиться, что если справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau = 0,$$

то

$$\mathcal{F} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{F(j\omega)}{j\omega}. \quad (17)$$

Из последних двух теорем видно, что спектральная характеристика производника интеграла — делением спектральной характеристики функции  $f(t)$  на  $j\omega$ .

3. Спектральная характеристика смещенной функции. Смещение спектральной характеристики. Сжатие и растяжение функции. Пусть задана функция  $f(t-a)$ , которая отличается от функции  $f(t)$  тем, что первая смещена (запаздывает) по отношению ко второй на

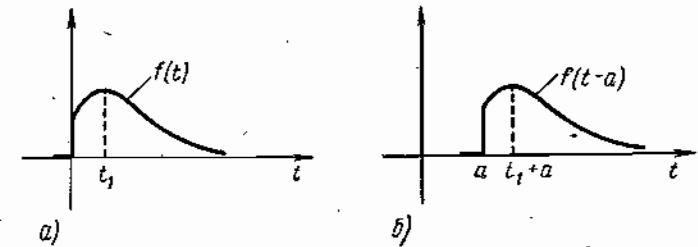


Рис. 103

время  $a$  (рис. 103). Спектральная характеристика смещенной функции  $f(t-a)$  может быть определена с помощью следующей теоремы:

Теорема 4. Если функция  $f(t)$  преобразуема по Фурье и  $F(j\omega)$  — ее спектральная характеристика, то спектральная характеристика смещенной функции  $f(t-a)$ , где  $a$  — положительное число, есть

$$\mathcal{F} \{ f(t-a) \} = e^{-j\omega a} F(j\omega). \quad (18)$$

Доказательство. При доказательстве теоремы используем равенство

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau.$$

Введем новую переменную  $t = \tau + a$ ; тогда

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-j\omega (t-a)} dt.$$

Умножая это равенство слева и справа на  $e^{-j\omega a}$  ( $a$  считаем не зависящим от  $t$ ), найдем

$$e^{j\omega a} F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-j\omega t} dt.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F} \{ f(t-a) \},$$

поэтому

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-j\omega a} F(j\omega).$$

Теорема доказана.

Заменяя  $a$  на  $-a$ , получим спектральную характеристику функции  $f(t+a)$ , «опережающей» функцию  $f(t)$ :

$$\mathcal{F}\{f(t+a)\} = e^{j\omega a} F(j\omega). \quad (19)$$

**Пример 5.** Найти спектральную характеристику смещенного импульса высотой  $A_n$  и длительностью  $\tau_n$  (рис. 104).  
Заданный импульс

$$f_1(t) = \begin{cases} A_n & \text{при } \frac{\tau_n}{2} \leq t \leq \frac{3\tau_n}{2}, \\ 0 & \text{при } t < \frac{\tau_n}{2} \text{ и } t > \frac{3\tau_n}{2}. \end{cases}$$

Функция  $f_1(t)$  является запаздывающей на время  $\tau_n$  по отношению к функции  $f(t)$ , рассмотренной в примере 7 § 35. Следовательно, ее спектральная характеристика определяется формулой (18), где нужно положить  $a = \tau_n$ . Так как спектральная характеристика несмещенной функции (см. пример 7 § 35)

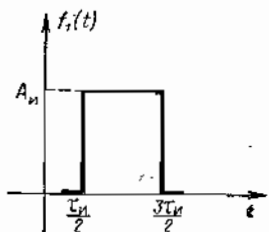


Рис. 104

$$F(j\omega) = \frac{2A_n}{\omega} \sin \frac{\omega\tau_n}{2}, \text{ то}$$

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = e^{-j\omega\tau_n} \frac{2A_n}{\omega} \sin \frac{\omega\tau_n}{2}.$$

**Теорема 5.** Если функция  $f(t)$  преобразуема по Фурье и  $F(j\omega)$  — ее спектральная характеристика, то

$$\mathcal{F}\{e^{-jat} f(t)\} = F(j(\omega+a)), \quad (20)$$

где  $a$  — любое вещественное неотрицательное число:

Доказательство. Используя формулу преобразования Фурье

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

найдем

$$\mathcal{F}\{e^{-jat} f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega+a)t} dt = F(j(\omega+a)).$$

Теорема доказана.

Заменяя  $a$  на  $-a$ , получим еще одну формулу

$$\mathcal{F}\{e^{jat} f(t)\} = F(j(\omega-a)). \quad (21)$$

**Пример 6.** Определить, какая функция имеет спектральную характеристику, равную

$$\frac{1}{a+j(\omega+a)},$$

где  $a > 0$  — вещественное число.

Обозначим  $\frac{1}{a+j(\omega+a)}$  через  $F(j(\omega+a))$ . Несмещенная спектральная характеристика  $F(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$ , как видно из примера 1, соответствует функции

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Тогда, учитывая формулу (20), получим, что спектральной характеристике  $F(j(\omega+a))$  соответствует функция

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{-(a+j)t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Пусть задана функция  $f(t)$  и ее спектральная характеристика есть  $F(j\omega)$ . Разделим аргумент функции  $t$  на некоторое положительное число  $a$ , независимое от  $t$  и  $\omega$ . Графики функций  $f\left(\frac{t}{a}\right)$

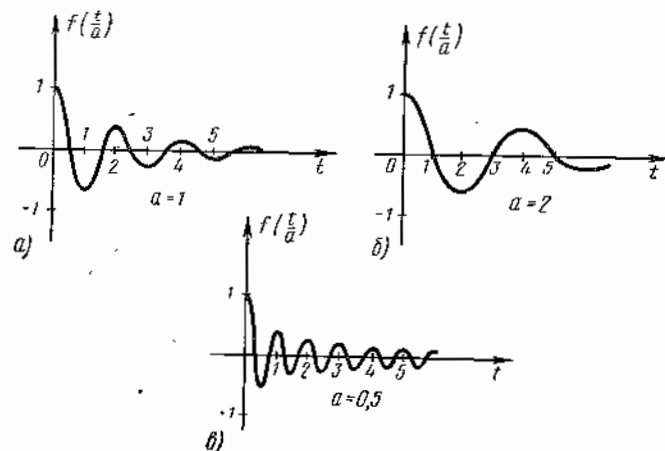


Рис. 105

относительно переменной  $t$  отличаются друг от друга при различных значениях  $a$ . На рис. 105 приведены, например, графики функций  $f\left(\frac{t}{a}\right) = e^{-0.5 \frac{t}{a}} \cos \pi \frac{t}{a}$  для значений  $a = 0.5; 1; 2$ . Если  $a > 1$ , то график функции  $f\left(\frac{t}{a}\right)$  растянут вдоль оси  $Ot$  относительно графика функции  $f\left(\frac{t}{a}\right)$ , у которой  $a = 1$ . Если же  $a < 1$ , то график будет, наоборот, сжат.

Следующая теорема устанавливает, как изменяется спектральная характеристика функции  $f(t)$  в результате растяжения (сжатия) графика этой функции вдоль оси времени.

**Теорема 6.** Если функция  $f(t)$  преобразуема по Фурье,  $F(j\omega)$  — ее спектральная характеристика и  $a$  — положительное вещественное число, то справедливо равенство

$$\mathcal{F}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aF(ja\omega). \quad (22)$$

**Доказательство.** Используя в формуле преобразования Фурье вместо обозначения переменной  $\omega$  обозначение  $\omega$ , получим

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Умножим и разделим  $\tau$  на  $a$  и введем новые переменные  $t = \tau a$  и  $\omega = \frac{\omega}{a}$ , тогда

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\tau a}{a}\right) e^{-j\omega \frac{\tau a}{a}} \frac{d\tau a}{a} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-j\omega t} dt,$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-j\omega t} dt = aF(ja\omega).$$

Теорема доказана.

Из формулы (22) видно, что при растяжении (сжатии) в  $a$  раз графика функции  $f(t)$  вдоль оси времени график модуля спектральной характеристики  $|F(j\omega)|$ , во-первых, сжимается (растягивается) вдоль оси частот в  $a$  раз и, во-вторых, увеличивается (уменьшается) в  $a$  раз его значения. Следовательно, чем короче импульс, тем шире график модуля его спектральной характеристики. В § 37 показано, что бесконечно короткий импульс имеет бесконечно широкий график модуля  $|F(j\omega)|$ .

**4. Теорема Парсеваля.** Следующая теорема позволяет сделать вывод о распределении энергии по гармоникам непериодического сигнала.

**Теорема 7.** Если функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  преобразуемы по Фурье и их спектральные характеристики есть соответственно  $F_1(j\omega)$  и  $F_2(j\omega)$ , причем интегралы  $\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) d\omega$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega) d\omega$  сходятся абсолютно, то справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) F_2(-j\omega) d\omega. \quad (23)$$

**Доказательство.** Для функции  $f_1(t)$  напомним представление в виде интеграла Фурье

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Обе части этого равенства умножим на  $f_2(t)$  и проинтегрируем по  $t$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt.$$

Так как по условию теоремы интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) d\omega$  сходится

абсолютно, то интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$  сходится равномерно относительно  $t$  (см. п. 1 § 36). В этом случае в правой части последнего равенства можно поменять порядок интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{j\omega t} dt = F_2(-j\omega),$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) F_2(-j\omega) d\omega.$$

Теорема доказана.

Утверждение, записываемое в виде равенства (23), носит название *теоремы Парсеваля*. Теорема позволяет находить интеграл в бесконечных пределах от произведения двух функций, оперируя лишь со спектральными характеристиками этих функций. Если  $f_1(t)$  характеризует, например, мгновенное значение напряжения, а  $f_2(t)$  — мгновенное значение тока в электрической цепи, то произведение

$f_1(t) f_2(t)$  есть мгновенная мощность, а интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt$  —

энергия. Таким образом, зная спектральные характеристики  $F_1(j\omega)$  и  $F_2(j\omega)$  соответственно напряжения и тока, можно с помощью формулы (23) вычислить энергию, выделяемую током за время  $-\infty < t < \infty$ .

Получим формулу (23) в несколько ином виде. Пусть

$$F_1(j\omega) = |F_1(j\omega)| e^{j\varphi_1(\omega)}, \quad F_2(-j\omega) = |F_2(-j\omega)| e^{j\varphi_2(-\omega)},$$

где

$$\varphi_1(\omega) = \arg F_1(j\omega), \quad \varphi_2(-\omega) = \arg F_2(-j\omega);$$

тогда

$$F_1(j\omega) F_2(-j\omega) = |F_1(j\omega)| |F_2(j\omega)| [\cos \varphi_1(\omega) + j \sin \varphi_1(\omega)] \times \\ \times [\cos \varphi_2(\omega) - j \sin \varphi_2(\omega)],$$

так как модуль  $|F_2(j\omega)|$  является четной, а аргумент  $\varphi_2(\omega)$  — нечетной функцией относительно переменной  $\omega$ . Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) F_2(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(j\omega)| |F_2(j\omega)| \times$$

$$\times [\cos \varphi_1(\omega) \cos \varphi_2(\omega) + \sin \varphi_1(\omega) \sin \varphi_2(\omega)] d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(j\omega)| \times$$

$$\times |F_2(j\omega)| [\sin \varphi_1(\omega) \cos \varphi_2(\omega) - \cos \varphi_1(\omega) \sin \varphi_2(\omega)] d\omega.$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль, так как под знаком интеграла находится нечетная функция относительно  $\omega$ . Подынтегральная функция под знаком первого интеграла, наоборот, четная. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) F_2(-j\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F_1(j\omega)| |F_2(j\omega)| \times \\ \times \cos [\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)] d\omega$$

и формулу (23) можно записать в вещественной форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F_1(j\omega)| |F_2(j\omega)| \cos [\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)] d\omega. \quad (24)$$

Если положить  $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ , то  $F_1(j\omega) = F_2(j\omega) = F(j\omega)$ , и соотношение (24) превращается в равенство, называемое *формулой Парсевалля*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (25)$$

Применительно к задачам электрических цепей  $f(t)$  можно рассматривать как функцию, характеризующую изменение тока. Тогда интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$  является энергией, выделяемой током за время  $-\infty < t < \infty$  в цепи с единичным сопротивлением. Формула (25) в некотором смысле аналогична формуле (45) § 34, определяющей среднюю мощность сигнала. Величина  $\frac{1}{\pi} |F(j\omega)|^2 d\omega$  является энергией, выделяемой гармониками функции  $f(t)$ , частоты которых расположены в полосе частот  $d\omega$ , содержащей частоту  $\omega$ .

Функция  $\frac{1}{\pi} |F(j\omega)|$ , как показано ранее, представляет собой

относительную амплитуду гармоник представления функции  $f(t)$  в виде интеграла Фурье. Функция  $|F(j\omega)|^2$  характеризует распределение энергии по частотам этих гармоник и может быть названа *энергетической спектральной характеристикой* непериодической функции  $f(t)$ .

5. Умножение спектральных характеристик. Спектральная характеристика произведения двух функций. Пусть заданы две функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , определенные в интервале  $-\infty < t < \infty$ . Введем новую функцию

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau, \quad (26)$$

которую назовем *сверткой* функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ . Символически свертка  $f(t)$  обозначается

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \quad (27)$$

и читается так: функция  $f_1(t)$ , свернутая с функцией  $f_2(t)$ .

Для получения свертки следует, как видно из (26), в функциях  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  заменить переменную  $t$  на  $\tau$ ; затем в функции  $f_1(\tau)$  аргумент  $\tau$  заменить на  $-\tau$ ; сместить функцию  $f_1(-\tau)$  на величину  $t$ , т. е. образовать функцию  $f_1(t - \tau)$ ; перемножить функции  $f_1(t - \tau)$  и  $f_2(\tau)$ , а затем проинтегрировать получившееся произведение в интервале  $(-\infty < \tau < \infty)$ . Совокупность этих операций называется *свертыванием* функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ .

### Основные свойства свертки функций

*Свойство 1. Свертывание обладает свойством коммутативности, т. е.*

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t). \quad (28)$$

*Доказательство.* Требуется показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) f_1(\tau) d\tau.$$

Сделаем в первом интеграле подстановку  $t - \tau = \eta$ , тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta) f_2(t - \eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \eta) f_1(\eta) d\eta,$$

следовательно, равенство (28) справедливо.

Свойство коммутативности свертки имеет своим аналогом свойство коммутативности умножения двух чисел  $a$  и  $b$ , в силу которого  $ab = ba$ .

Если имеются три числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , то операция умножения этих чисел обладает, как известно, свойством ассоциативности, т. е.  $(ab)c = a(bc)$ . Аналогичное свойство имеет и операция свертывания.

**Свойство 2.** Свертывание обладает свойством ассоциативности, т. е.

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]. \quad (29)$$

Доказательство. Положим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = g(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) f_3(\tau) d\tau = h(t).$$

Свойство (29) будет доказано, если удастся установить справедливость равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) f_3(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) h(\tau) d\tau. \quad (30)$$

В правую часть очевидного равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) f_3(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau-\eta) f_2(\eta) d\eta \right] f_3(\tau) d\tau$$

введем новую переменную  $\gamma = \eta + \tau$ , тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) f_3(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\gamma) f_2(\gamma-\tau) d\gamma \right] f_3(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\gamma) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\gamma-\tau) f_3(\tau) d\tau \right] d\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\gamma) h(\gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

Так как значение интеграла не зависит от наименования переменной интегрирования, то правая часть этого равенства совпадает с правой частью равенства (30), что и доказывает свойство ассоциативности.

**Свойство 3.** Свертывание обладает свойством дистрибутивности относительно сложения, т. е.

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t). \quad (31)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) [f_2(\tau) + f_3(\tau)] d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_3(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (31) справедливо.

Дистрибутивность свертки является аналогом дистрибутивности произведения чисел; т. е.

$$a(b+c) = ab+ac.$$

Таким образом, свертка имеет те же свойства, что и произведение чисел:

Если функции  $f_1(t) = 0$  при  $t < 0$ ,  $f_2(t) = 0$  при  $t < 0$ , то  $f_2(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ ,  $f_1(-\tau) = 0$  при  $\tau > 0$  и  $f_1(t-\tau) = 0$  при  $\tau > t$ . В этом случае свертка функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  определяется равенством

$$f(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (32)$$

Символическая запись (27) операции свертывания при этом не изменяется.

Следующая теорема позволяет найти спектральную характеристику свертки двух функций.

**Теорема 8.** Если функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  преобразуемы по Фурье и их спектральные характеристики есть соответственно  $F_1(j\omega)$  и  $F_2(j\omega)$ , то спектральная характеристика свертки определяется равенством

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right\} = F_1(j\omega) F_2(j\omega). \quad (33)$$

Доказательство. По условию теоремы функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  преобразуемы по Фурье; поэтому интеграл  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$  также преобразуем по Фурье. Найдем спектральную характеристику  $\mathcal{F}\{f(t)\}$ . Имеем в соответствии с равенством (1):

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau. \end{aligned}$$

Введем новую переменную  $t-\tau = \eta$ , тогда

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta) e^{-j\omega \eta} d\eta \right] e^{-j\omega \tau} d\tau.$$

Так как по условию теоремы

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta) e^{-j\omega \eta} d\eta = F_1(j\omega), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = F_2(j\omega),$$

то

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right\} = F_1(j\omega) F_2(j\omega).$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, как следствие, получим, что обратное преобразование Фурье произведения  $F_1(j\omega) F_2(j\omega)$  спектральных

характеристик определяется равенством

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(j\omega)F_2(j\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau. \quad (34)$$

Если  $f_1(t) \equiv 0$  при  $t < 0$  и  $f_2(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ , то формулы (33) и (34) соответственно приобретают вид

$$\mathcal{F}\left\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} = F_1(j\omega)F_2(j\omega) \quad (35)$$

и

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(j\omega)F_2(j\omega)\} = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau. \quad (36)$$

Докажем теперь теорему, позволяющую определять спектральные характеристики произведения двух функций.

*Теорема 9. Если функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  преобразуемы по Фурье и их спектральные характеристики есть соответственно  $F_1(j\omega)$  и  $F_2(j\omega)$ , то спектральная характеристика произведения  $f_1(t)f_2(t)$  дается равенством*

$$\mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j(\omega-\omega'))F_2(j\omega')d\omega', \quad (37)$$

Доказательство. По теореме Парсеваля имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega)G(-j\omega)d\omega;$$

здесь обозначено

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt.$$

Пусть функция  $g(t)$  определена в виде  $g(t) = f_1(t)e^{-j\omega t}$ . Тогда в соответствии с равенством (20) имеем:

$$G(\omega) = F_1(j(\omega + \omega));$$

следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega)G(-j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega)F_1(j(\omega - \omega))d\omega$$

или

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)g(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j(\omega - \omega'))F_2(j\omega')d\omega'. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Интеграл в правой части равенства (37) является сверткой спектральных характеристик  $F_1(j\omega)$  и  $F_2(j\omega)$ .

Из последних двух теорем следует, что спектральная характеристика свертки равна произведению спектральных характеристик  $F_1(j\omega)F_2(j\omega)$  свертываемых функций, а свертка спектральных характеристик соответствует произведению функций  $f_1(t)f_2(t)$ .

### § 37. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

**1. Единичная ступенчатая функция. Дельта-функция.** В § 16 в качестве воздействия, прикладываемого к автоматической системе, рассматривалось воздействие вида

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Функция  $1(t)$  называется *единичной ступенчатой функцией*, а функция

$$1(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \\ 1 & \text{при } t > \tau \end{cases} \quad (2)$$

— *смещенной единичной ступенчатой функцией* (рис. 106). Из представления (1) следует, что единичная ступенчатая функция имеет

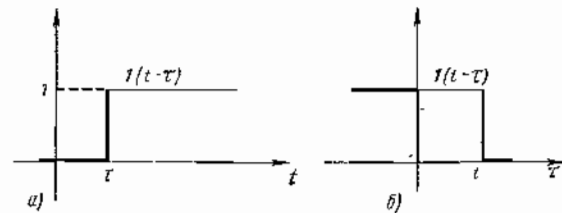


Рис. 106

при  $t=0$  разрыв непрерывности первого рода, причем значение функции в точке разрыва не определено. Однако единичным ступенчатым функциям в ряде случаев приписывают при  $t=0$  вполне определенные значения; наиболее часто встречаются функции следующего вида:

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases} \quad (5)$$



Выбор того или иного значения единичной ступенчатой функции при  $t=0$  связан с особенностями решаемой задачи. Например, представление (3) (рис. 107, а) удобно в том случае, когда рас-

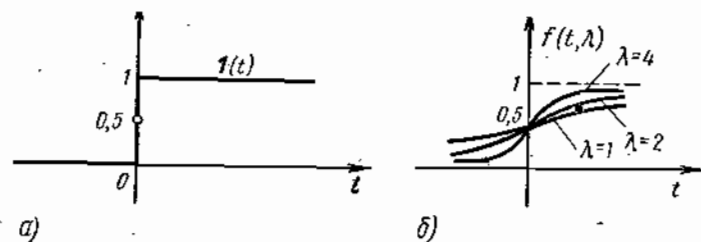


Рис. 107

сматривают функцию  $1(t)$  как предел при  $\lambda \rightarrow \infty$  последовательности непрерывных функций

$$f(t, \lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \lambda t, \quad (6)$$

где  $\lambda$  является параметром (рис. 107, б), т. е.

$$1(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(t, \lambda).$$

При этом следует принимать во внимание лишь главные значения многозначной функции (6), т. е. значения, принадлежащие интервалу  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \lambda t < \frac{\pi}{2}$ . Последовательность непрерывных функций

$$f(t, \lambda) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda t}} \quad (7)$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$  также имеет своим пределом функцию (3). Если в качестве последовательности непрерывных функций принять последовательность

$$f(t, \lambda) = a e^{-\lambda t} \quad (0 < a < 1), \quad (8)$$

то предел этой последовательности

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(t, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

При  $t=0$  предел последовательности (8) равен  $a$ , т. е. значение функции  $1(t)$  при  $t=0$  может быть любым, принадлежащим интервалу  $0 < a < 1$ .

Таким образом, различные аппроксимирующие последовательности непрерывных функций приводят к различным значениям функции  $1(t)$  при  $t=0$ .

К категории особых функций относится *дельта-функция Дирака*, называемая также *импульсной функцией первого порядка*. Дельта-функция определяется равенством

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ \infty & \text{при } t = 0, \end{cases} \quad (9)$$

причем интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (10)$$

Условия (9) и (10) оказываются несовместимыми, если рассматривать их с позиций классического математического анализа, и по-

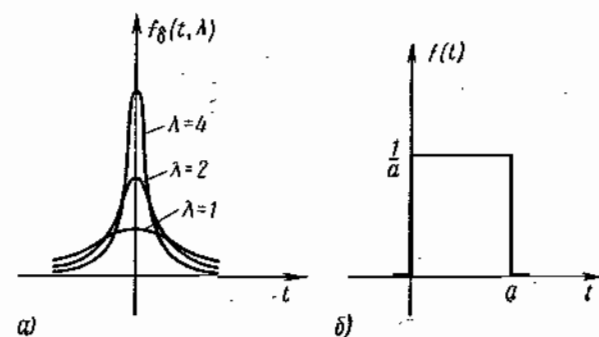


Рис. 108

этому дельта-функция не является «функцией» в обычном смысле. Однако в классе обобщенных функций\*) дельта-функция занимает равноправное место.

Дельта-функция обычно рассматривается как предел последовательностей дельта-образных гладких (имеющих производные любого порядка) функций. Например, последовательность функций

$$f_\delta(t, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)}, \quad (11)$$

являющихся производными по  $t$  (рис. 108, а) от гладких функций последовательности (6), является дельта-образной последовательностью, так как предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\delta(t, \lambda) = \delta(t).$$

\*) См., например: Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, 1958, а также Розенфельд А. С., Яхinson Б. И. Переходные процессы и обобщенные функции. «Наука», 1966.

В самом деле, при  $t \neq 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)} = 0,$$

$$\text{при } t=0 \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\pi} = \infty,$$

причем интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2 t^2} \cdot \frac{1}{\pi} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \lambda t \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] = 1.$$

Следовательно, функция, определяемая как предел последовательности функций (11) при  $\lambda \rightarrow \infty$ , является дельта-функцией, т. е. последовательность (11) представляет собой дельта-образную последовательность. При таком определении дельта-функции она является четной функцией.

Нетрудно убедиться, что производные по  $t$  от последовательностей гладких функций (7) и (8) также являются дельта-образными последовательностями.

Дельта-функция может аппроксимироваться и разрывными функциями. Например, последовательность функций

$$f_{\delta}(t, a) = \frac{1(t) - 1(t-a)}{a}, \quad (12)$$

характеризующих импульсы высотой  $\frac{1}{a}$  и длительностью  $a$  (рис. 108, б) при  $a \rightarrow 0$  сходятся к дельта-функции, т. е.

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} f_{\delta}(t, a) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t-a)}{a}.$$

Смещенная дельта-функция  $\delta(t - \tau)$  определяется равенством

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq \tau, \\ \infty & \text{при } t = \tau, \end{cases} \quad (13)$$

при этом интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1. \quad (14)$$

Функцию  $\delta(t - \tau)$  следует понимать как предел при  $\lambda \rightarrow \infty$  смещенных дельта-образных последовательностей, например последовательностей гладких функций вида

$$f_{\delta}(t - \tau, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi[1 + \lambda^2(t - \tau)^2]}, \quad (15)$$

т. е.

$$\delta(t - \tau) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_{\delta}(t - \tau, \lambda).$$

Выше было отмечено, что гладкие дельта-образные последовательности образуются в результате дифференцирования последовательностей гладких функций, сходящихся к единичной ступенчатой функции; поэтому дельта-функцию  $\delta(t - \tau)$  можно считать производной по  $t$  от единичной ступенчатой функции  $1(t - \tau)$ , т. е.

$$\delta(t - \tau) = 1'(t - \tau). \quad (16)$$

Таким образом, понятие дельта-функции оказывается плодотворным при распространении операции дифференцирования на разрывные функции.

Если выполнить дифференцирование по  $t$  дельта-образной последовательности, то получим последовательность, сходящуюся к производной от дельта-функции. Например, дифференцируя выражение (15), получим последовательность

$$f'_{\delta}(t - \tau, \lambda) = -\frac{2\lambda^3(t - \tau)}{\pi[1 + \lambda^2(t - \tau)^2]^2}.$$

Тогда производная от дельта-функции по аргументу  $t$  будет

$$\delta'(t - \tau) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f'_{\delta}(t - \tau, \lambda).$$

На рис. 109 приведены графики функций  $f'_{\delta}(t - \tau, \lambda)$  для различных значений параметра  $\lambda$  при  $\tau = 0$ .

Первую производную от дельта-функции называют также *импульсивной функцией второго порядка*.

Производная порядка  $n$  от дельта-функции

$$\delta^{(n)}(t - \tau) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_{\delta}^{(n)}(t - \tau, \lambda) \quad (17)$$

может быть названа *импульсивной функцией  $n+1$  порядка*.

Рассмотрим важное свойство дельта-функции. Пусть функция  $f(t)$  непрерывна и ограничена в интервале  $-\infty < t < \infty$ , тогда справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau). \quad (18)$$

Действительно, подынтегральная функция согласно равенству (13) равна нулю при  $t \neq \tau$ , поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau + \varepsilon} f(t) \delta(t - \tau) dt.$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  — произвольно малая величина. При  $t = \tau$  функция  $f(t)$  имеет значение  $f(\tau)$  и может быть вынесена за знак интеграла при

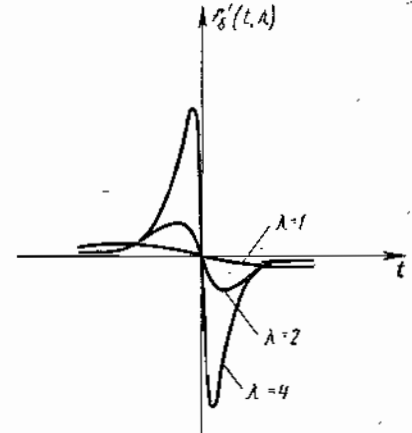


Рис. 109

интегрировании в бесконечно малой окрестности точки  $t = \tau$ , тогда получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau) \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \delta(t - \tau) dt = f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = f(\tau),$$

следовательно, соотношение (18) является справедливым. Это соотношение определяет так называемое «фильтрующее» или «выхватывающее» свойство дельта-функции.

Пусть  $f(t) = g'(t)$ ; тогда вместо равенства (18) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t) \delta(t - \tau) dt = g'(\tau).$$

Проинтегрируем интеграл в левой части равенства по частям. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g'(t) \delta(t - \tau) dt &= g(t) \delta(t - \tau) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta'(t - \tau) dt = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta'(t - \tau) dt, \end{aligned}$$

так как произведение  $g(t) \delta(t - \tau)$  обращается в ноль при  $t = \pm \infty$ . Следовательно,

$$- \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta'(t - \tau) dt = g'(\tau)$$

или, сменив наименование функции  $g(t)$  на  $f(t)$ , найдем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - \tau) dt = -f'(\tau). \quad (19)$$

Аналогичным образом можно показать справедливость соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta^{(n)}(t - \tau) dt = (-1)^n f^{(n)}(\tau), \quad (20)$$

если функция  $f(t)$  имеет непрерывные производные до  $n$ -го порядка в интервале  $-\infty < t < \infty$ .

Определим теперь спектральные характеристики единичной ступенчатой функции. Единичная ступенчатая функция  $1(t)$  не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, и поэтому преобразование Фурье для такой функции не существует. Однако, используя понятие дельта-функции, можно построить спектральную характеристику и для функции  $1(t)$ . Покажем, что ее спектральная характеристика определяется равенством

$$\mathcal{F}\{1(t)\} = F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega). \quad (21)$$

Подставляя  $F(j\omega)$  в формулу (24) § 36 обратного преобразования Фурье и учитывая фильтрующее свойство дельта-функции, получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Учитывая лемму Жордана и основанные на этой лемме способы вычисления несобственных интегралов (см. § 32), найдем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega = j\pi \quad \text{при } t > 0$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega = -j\pi \quad \text{при } t < 0.$$

Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot j\pi + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{при } t > 0$$

и

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} (-j\pi) + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Таким образом, обратное преобразование Фурье функции  $F(j\omega)$  приводит к единичной ступенчатой функции, и поэтому правая часть равенства (21) является спектральной характеристикой функции  $1(t)$ .

Отметим, что отделяя в выражении (22) действительные и мнимые части, получим представление единичной ступенчатой функции в виде интеграла Фурье

$$1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{2}. \quad (23)$$

Для смещенной единичной ступенчатой функции (2) найдем, учитывая равенство (21) и теорему 4 § 36, следующую спектральную характеристику:

$$\mathcal{F}\{1(t - \tau)\} = F(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \left( \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right). \quad (24)$$

Определим спектральную характеристику дельта-функции (9). Получим, принимая во внимание фильтрующее свойство дельта-функции, что

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1. \quad (25)$$

Спектральная характеристика смещенной дельта-функции будет

$$\mathcal{F}\{\delta(t - \tau)\} = F(j\omega) = e^{-j\omega\tau}. \quad (26)$$

Из последних двух равенств видно, что модуль спектральной характеристики дельта-функции  $|F(j\omega)|$  равен единице (рис. 110). Отсюда следует, что амплитуды гармоник представления дельта-функции в виде интеграла Фурье равны на всем диапазоне частот от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

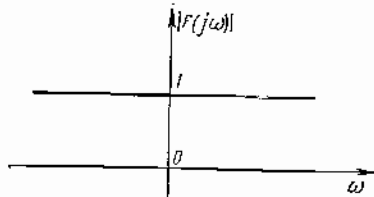


Рис. 110

Найдем спектральную характеристику суммы двух дельта-функций  $\delta(t - \tau)$  и  $\delta(t + \tau)$  (рис. 111, а):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta(t - \tau) + \delta(t + \tau)\} &= F(j\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t - \tau) + \delta(t + \tau)] e^{-j\omega t} dt = \\ &= e^{-j\omega\tau} + e^{j\omega\tau} = 2 \cos \omega\tau, \end{aligned}$$

т. е. в этом случае спектральной характеристикой является косинусоида (рис. 111, б).

Следует заметить, что полученные соотношения имеют чисто формальный характер, так как дельта-функция не является обычной функцией. Строгое обоснование этих формул может быть дано лишь

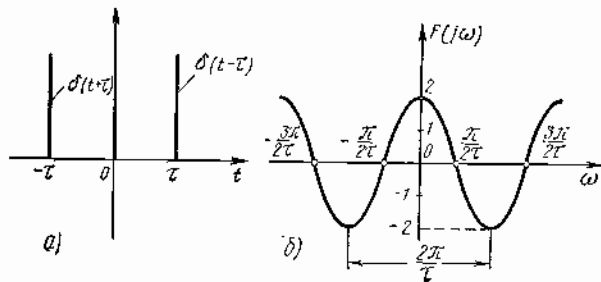


Рис. 111

с привлечением теории обобщенных функций, поскольку дельта-функция может рассматриваться как один из примеров обобщенных функций.

**2. Гармонические колебания.** Пусть задана косинусоидальная функция

$$f(t) = A_1 \cos \omega_1 t \quad (27)$$

с амплитудой  $A_1$  и частотой  $\omega_1$ . Амплитудный спектр этой функции состоит из двух отрезков высотой  $A_1$  при частотах  $\omega = \pm \omega_1$ ; для других значений частоты  $\omega$  значения амплитудного спектра равны нулю (рис. 112, а).

Косинусоида не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости на интервале  $(-\infty, \infty)$ , поэтому формула

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

не может быть непосредственно использована для определения спектральной характеристики функции (27). Однако введенное выше понятие дельта-функции позволяет расширить область применимости

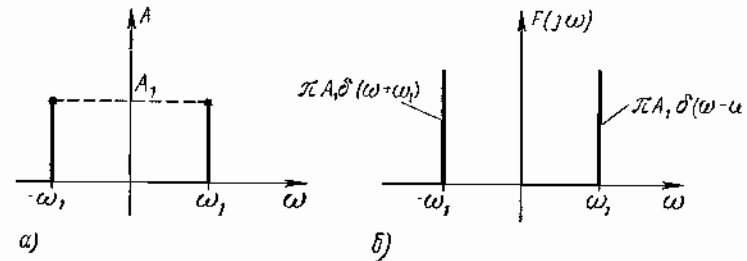


Рис. 112

этой формулы и, в частности, определить спектральную характеристику периодической функции.

Покажем, что спектральная характеристика косинусоиды будет

$$F(j\omega) = \pi A_1 [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]. \quad (28)$$

Для этого подставим в формулу (26) § 36 обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (29)$$

выражение (28):

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \pi A_1 \delta(\omega - \omega_1) e^{j\omega t} d\omega = A_1 \operatorname{Re} e^{j\omega_1 t}.$$

Здесь мы использовали свойство (18) дельта-функции, причем точка  $\omega = \omega_1$  расположена внутри интервала  $(0, \infty)$ , а  $\delta(\omega + \omega_1) = 0$  при  $\omega > 0$ . Следовательно, с учетом формулы Эйлера найдем

$$f(t) = A_1 \operatorname{Re} [\cos \omega_1 t + j \sin \omega_1 t] = A_1 \cos \omega_1 t,$$

т. е. обратное преобразование Фурье спектральной характеристики (28) дает косинусоиду (27). Итак, показали, что

$$\mathcal{F}^{-1}\{\pi A_1 [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]\} = A_1 \cos \omega_1 t \quad (30)$$

и, как следствие, получаем, что спектральная характеристика косинусоиды (рис. 112, б)

$$\mathcal{F}\{A_1 \cos \omega_1 t\} = F(j\omega) = \pi A_1 [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]. \quad (31)$$

Равенство (28) может быть доказано также с помощью предельного перехода. Найдем предварительно спектральную характеристику произведения  $e^{-\lambda|t|} A_1 \cos \omega_1 t$ , где  $\lambda > 0$  — некоторый параметр:

$$\mathcal{F} \{e^{-\lambda|t|} A_1 \cos \omega_1 t\} = F(j\omega, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} A_1 \cos \omega_1 t e^{-j\omega t} dt.$$

Множитель  $e^{-\lambda|t|}$  обеспечивает сходимость интеграла в интервале  $(-\infty, \infty)$ ; имеем:

$$\begin{aligned} F(j\omega, \lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} A_1 \cos \omega_1 t e^{-j\omega t} dt = \\ &= A_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} \cos \omega_1 t \cos \omega t dt - j A_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} \cos \omega_1 t \sin \omega t dt = \\ &= 2A_1 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos \omega_1 t \cos \omega t dt. \end{aligned}$$

В этом равенстве мы приняли во внимание, что произведение  $e^{-\lambda|t|} \cos \omega_1 t \cos \omega t$  является четной, а произведение  $e^{-\lambda|t|} \cos \omega_1 t \times \sin \omega t$  — нечетной функцией относительно аргумента  $t$ . Так как

$$\cos \omega_1 t \cos \omega t = \frac{1}{2} [\cos(\omega_1 - \omega)t + \cos(\omega_1 + \omega)t],$$

то

$$\begin{aligned} F(j\omega, \lambda) &= A_1 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} [\cos(\omega_1 - \omega)t + \cos(\omega_1 + \omega)t] dt = \\ &= A_1 \left[ \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega - \omega_1)^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega + \omega_1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Найдем теперь интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega, \lambda) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} A_1 \left[ \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega - \omega_1)^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega + \omega_1)^2} \right] d\omega = \\ &= A_1 \left[ \arctg \frac{\omega - \omega_1}{\lambda} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \arctg \frac{\omega + \omega_1}{\lambda} \Big|_{-\infty}^{\infty} \right] = 2\pi A_1. \end{aligned}$$

После предельного перехода получим:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(j\omega, \lambda) = \infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} F(j\omega, \lambda) = \infty,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(j\omega, \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad \omega \neq \pm \omega_1,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega, \lambda) d\omega = 2\pi A_1.$$

Сравнивая полученные выражения со свойствами дельта-функции (12) и (13), найдем, что при  $\lambda \rightarrow 0$  спектральная характери-

стика  $F(j\omega, \lambda)$  имеет характер суммы двух смещенных дельта-функций, т. е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(j\omega, \lambda) = F(j\omega) = \pi A_1 [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)].$$

Следовательно, равенство (28) является справедливым. Пусть теперь задана периодическая функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_1 t. \quad (32)$$

Ее спектральная характеристика

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_1 t \right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F} \{A_k \cos k\omega_1 t\} = \\ &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} A_k [\delta(\omega - k\omega_1) + \delta(\omega + k\omega_1)], \end{aligned} \quad (33)$$

т. е. равна сумме дельта-функций, смещенных по оси  $\omega$  на величину  $\pm k\omega_1$ .

Спектральная характеристика синусоиды

$$f(t) = A_1 \sin \omega_1 t \quad (34)$$

есть

$$F(j\omega) = \frac{A_1 \pi}{j} [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)], \quad (35)$$

ее модуль

$$|F(j\omega)| = A_1 \pi [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]. \quad (36)$$

Спектральная характеристика периодической функции

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\omega_1 t \quad (37)$$

определяется равенством

$$F(j\omega) = \frac{\pi}{j} \sum_{k=1}^{\infty} A_k [\delta(\omega - k\omega_1) - \delta(\omega + k\omega_1)]. \quad (38)$$

### § 38. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ

Введем понятие *текущей спектральной характеристики*, которую определим следующим образом:

$$F_t(j\omega) = \int_0^t f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1)$$

Текущая спектральная характеристика позволяет со спектральной точки зрения описать свойства и историю развития реально

существующего и наблюдаемого физического процесса. В самом деле, если функция  $f(t)$  характеризует некоторый процесс, начинающийся в известный момент времени, который может быть принят за нулевой, то в формуле преобразования Фурье

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

необходимо положить  $f(t) = 0$  при  $-\infty < t < 0$ , другими словами, следует перенести нижний предел интегрирования из  $-\infty$  в 0. Вид функции  $f(t)$  может быть точно установлен лишь в интервале наблюдения  $(0, t)$ , поэтому интегрирование надо производить в пределах от 0 до  $t$ , а не от 0 до  $\infty$ , так как после окончания наблюдения за процессом вид функции  $f(t)$  в общем неизвестен. Подобные соображения приводят к формуле (1).

Из формулы (1) видно, что текущая спектральная характеристика зависит не только от частоты  $\omega$ , но и от времени окончания наблюдения  $t$ . Значение времени  $t$  может соответствовать также моменту окончания самого физического процесса. Факт зависимости  $F_t(\omega)$  как от  $\omega$ , так и от  $t$  позволяет наглядно устанавливать связь между изменением во времени физического процесса и ему соответствующим изменением характера разложения этого процесса на сумму гармонических составляющих.

**Пример.** Определить текущую спектральную характеристику синусоиды  $f(t) = A_1 \sin \omega_1 t$ .  
Имеем

$$F_t(j\omega) = \int_0^t A_1 \sin \omega_1 t e^{-j\omega t} dt.$$

Проинтегрируем правую часть этого равенства по частям; тогда

$$\begin{aligned} F_t(j\omega) &= -A_1 e^{-j\omega t} \frac{1}{\omega_1} \cos \omega_1 t \Big|_0^t - jA_1 \frac{\omega}{\omega_1} \int_0^t e^{-j\omega t} \cos \omega_1 t dt = \\ &= -A_1 \frac{1}{\omega_1} e^{-j\omega t} \cos \omega_1 t + \frac{A_1}{\omega_1} - jA_1 \frac{\omega}{\omega_1} \int_0^t e^{-j\omega t} \cos \omega_1 t dt = \\ &= -A_1 \frac{1}{\omega_1} e^{-j\omega t} \cos \omega_1 t + \frac{A_1}{\omega_1} - jA_1 \frac{\omega}{\omega_1} \left[ \frac{1}{\omega_1} e^{-j\omega t} \sin \omega_1 t \Big|_0^t + \right. \\ &\quad \left. + j \frac{\omega}{\omega_1} \int_0^t e^{-j\omega t} \sin \omega_1 t dt \right] = -A_1 e^{-j\omega t} \frac{\cos \omega_1 t}{\omega_1} + \frac{A_1}{\omega_1} - \\ &\quad - jA_1 \frac{\omega}{\omega_1^2} e^{-j\omega t} \sin \omega_1 t + \frac{\omega^2}{\omega_1^3} \int_0^t A_1 \sin \omega_1 t e^{-j\omega t} dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_0^t A_1 \sin \omega_1 t e^{-j\omega t} dt = \frac{A_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \left[ 1 - e^{-j\omega t} \left( \cos \omega_1 t + j \frac{\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \frac{1}{\omega_1},$$

и искомая текущая спектральная характеристика

$$F_t(j\omega) = A_1 \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \left[ 1 - e^{-j\omega t} \left( \cos \omega_1 t + j \frac{\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right]. \quad (2)$$

Обозначим через  $n$  число полупериодов синусоиды, считая их с момента возникновения процесса, и рассмотрим  $F_t(\omega)$  для дискретных моментов времени  $t = n \frac{T}{2} = n \frac{\pi}{\omega_1}$ , причем  $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$  — период синусоиды. Так как  $\sin n\pi = 0$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то для дискретных моментов времени вместо (2) получим

$$F_t(j\omega) = A_1 \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \left[ 1 - (-1)^n e^{-jn\pi \frac{\omega}{\omega_1}} \right]. \quad (3)$$

Найдем модуль текущей спектральной характеристики:

$$\begin{aligned} |F_t(j\omega)| &= \frac{A_1}{\omega_1} \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \right| |1 - (-1)^n [\cos \omega t - j \sin \omega t]| = \\ &= \frac{A_1}{\omega_1} \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \right| \sqrt{[1 - (-1)^n \cos \omega t]^2 + \sin^2 \omega t} = \\ &= \frac{A_1}{\omega_1} \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \right| \sqrt{2 - 2(-1)^n \cos \omega t}. \end{aligned}$$

Известно, что

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

поэтому

$$|F_t(j\omega)| = \frac{2A_1}{\omega_1} \left| \sin n \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_1} \right| \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \right|, \quad (4)$$

если  $n$  — четное, и

$$|F_t(j\omega)| = \frac{2A_1}{\omega_1} \left| \frac{\cos n \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \right|, \quad (5)$$

если  $n$  — нечетное.

При  $\omega = \omega_1$  значение  $|F_t(j\omega)|$  становится неопределенным. Раскроем неопределенность по правилу Лопиталя. Если  $n$  — четное, то

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} |F_t(j\omega)| &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \frac{2A_1}{\omega_1} = \frac{1}{\left| -\frac{2\omega}{\omega_1^2} \right|} \cdot \pi \frac{n}{2\omega_1} \left| \cos n \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_1} \right| = \\ &= A_1 \frac{\pi}{2} \frac{n}{\omega_1} = A_1 \frac{t}{2} = A_1 n \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично для  $n$  нечетного:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_1} |F_t(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \frac{2A_1}{\omega_1} \frac{1}{\left| \frac{2\omega}{\omega_1^2} \right|} \left[ \pi \frac{n}{2\omega_1} \right] \left| -\sin \pi \frac{n}{2} \frac{\omega}{\omega_1} \right| = A_1 n \frac{T}{4}.$$

Следовательно, модуль текущей спектральной характеристики  $|F_t(j\omega)|$  при  $\omega = \omega_1$  возрастает при увеличении числа полупериодов  $n$  по линейному закону. На рис. 113 приведено рельефное изображение модуля  $|F_t(j\omega)|$  для различных значений  $n$  и положительных  $\omega$ . Из рисунка видно, что с увеличением числа  $n$  все более увеличивается максимум модуля спектральной характеристики на частоте  $\omega = \omega_1$ .

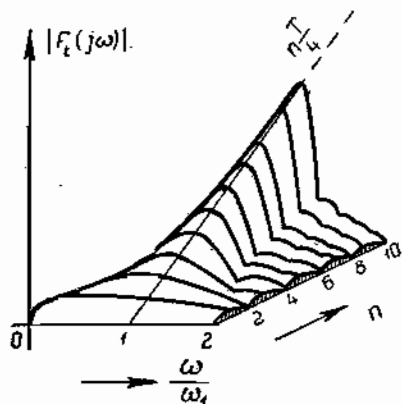


Рис. 113

При  $n = \infty$  периодичность функции  $f(t)$  проявляется наиболее полно; в этом случае график  $|F_t(j\omega)|$  представляет собой смещенную дельта-функцию  $\delta\left(\frac{\omega}{\omega_1} - 1\right)$ . При  $n = 1$  недостаточно признаков, свидетельствующих о возможной периодичности функции  $f(t)$ , следствием этого является отсутствие на графике  $|F_t(j\omega)|$  максимумов, в том числе и на частоте  $\omega = \omega_1$ .

Таким образом, по характеру текущей спектральной характеристики  $F_t(j\omega)$  можно сделать суждения о поведении функции  $f(t)$  при изменении времени  $t$ .

Рассмотрим еще один вид спектральной характеристики, зависящей от времени — мгновенную спектральную характеристику, которую

определим с помощью формулы

$$F_T(j\omega, t) = \int_{t-T}^t f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (T > 0). \quad (6)$$

В этой формуле интегрирование производится в отличие от формулы (1) не во всем интервале наблюдения за процессом  $(0, t)$ , а лишь начиная с момента времени  $t - T$ . Этот момент времени предшествует текущему моменту времени  $t$  и удален от него на время  $T$ . Необходимость введения понятия мгновенной спектральной характеристики связана с целесообразностью иметь спектральную характеристику, которая отражала бы не всю историю процесса  $f(t)$  начиная с момента его возникновения, а учитывала бы лишь свойства этого процесса во временном интервале, непосредственно примыкающем к данному моменту наблюдения за процессом. Так как значение  $T$  может быть выбрано сколь угодно малым, то мгновенная спектральная характеристика позволяет выявить особенности процесса в данный момент времени  $t$ .

Найдем связь между спектральными характеристиками  $F_t(j\omega)$  и  $F_T(j\omega, t)$ . Формулу (6) перепишем в виде

$$F_T(j\omega, t) = \int_0^t f(t) e^{-j\omega t} dt - \int_0^{t-T} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Правая часть этого равенства представляет собой разность двух текущих спектральных характеристик для функции  $f(t)$ . Обозначим эту разность через  $\Delta F_t(j\omega)$ , тогда

$$F_T(j\omega, t) = \Delta F_t(j\omega), \quad \text{или} \quad \frac{F_T(j\omega, t)}{T} = \frac{\Delta F_t(j\omega)}{T}.$$

Если выбрано значение  $T$  достаточно малым, то будет справедлива приближенная формула

$$F_T(j\omega, t) \approx T \frac{\partial F_t(j\omega)}{\partial t}. \quad (7)$$



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА  
ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 39. СПЕКТРЫ СИГНАЛОВ В АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ.  
ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Преобразование линейной системой гармонического входного сигнала. Определение процесса регулирования. Рассмотрим линейную автоматическую систему, описываемую дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами,

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) x(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) g(t). \quad (1)$$

Здесь  $x = x(t)$  — регулируемая величина;  $g = g(t)$  — управляющее воздействие, приложенное к системе;  $p = \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования.

Используя обозначения

$$\left. \begin{aligned} D(p) &= a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \\ M(p) &= b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

уравнение (1) удобно записать сокращенно в виде

$$D(p) x(t) = M(p) g(t). \quad (3)$$

Передаточная функция автоматической системы (см. § 15) по отношению к управляющему воздействию  $g(t)$  есть

$$\Phi(p) = \frac{M(p)}{D(p)}. \quad (4)$$

Пусть воздействие  $g(t) = A_1 \sin \omega_1 t$  и требуется определить изменение  $x(t)$  в установившемся процессе, т. е. найти частное решение уравнения (1).

Заметим, что в результате приложения воздействия в системе возникает переходный процесс, который с течением времени стремится к нулю, так как система предполагается устойчивой. Характер протекания переходного процесса мы рассматривать не будем и предположим, что в интервале наблюдения  $(-\infty, \infty)$  за установившимся процессом переходная составляющая отклонения регулируемой величины пренебрежимо мала. Подобный подход позволяет считать воздействие  $g(t)$  заданным на всей оси времени (не рассматривается начальный момент приложения к системе управляющего воздействия) и использовать полученное в § 37 выражение (35) для спектральной характеристики синусоиды.

Для определения характера изменения  $x(t)$  в установившемся процессе преобразуем обе части уравнения (1) по Фурье, при этом используем теорему 2 § 36. Имея в виду, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt, \\ \mathcal{F}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} [a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} j\omega + a_n] \mathcal{F}\{x(t)\} = \\ = [b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1} j\omega + b_m] \mathcal{F}\{g(t)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем обозначение

$$\Phi(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\{x(t)\}}{\mathcal{F}\{g(t)\}} = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1} j\omega + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} j\omega + a_n}, \quad (6)$$

а также заметим, что в соответствии с формулой (35) § 37

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{A_1 \sin \omega_1 t\} = \frac{A_1 \pi}{j} [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)].$$

Тогда спектральная характеристика вынужденных колебаний регулируемой величины определится из выражения (6) в виде

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \Phi(j\omega) \frac{A_1 \pi}{j} [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)]. \quad (7)$$

Из этого выражения видно, что спектральная характеристика сигнала на выходе системы в общем случае не совпадает со спектральной характеристикой сигнала на ее входе. Функциональный множитель  $\Phi(j\omega)$  учитывает изменение спектральной характеристики при прохождении воздействия  $g(t)$  через линейную динамическую систему.

Представим комплексную функцию  $\Phi(j\omega)$  в показательной форме

$$\Phi(j\omega) = |\Phi(j\omega)| e^{j \arg \Phi(j\omega)} \quad (8)$$

и найдем  $x(t)$  по формуле обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{x(t)\} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) \frac{A_1 \pi}{j} [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)] e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, будем иметь с учетом равенства (8)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_1}{2j} [|\Phi(j\omega_1)| e^{j \arg \Phi(j\omega_1)} e^{j\omega_1 t} - \\ &- |\Phi(-j\omega_1)| e^{j \arg \Phi(-j\omega_1)} e^{-j\omega_1 t}]. \end{aligned}$$

Так как справедливы равенства (см. § 35)

$$|\Phi(-j\omega_1)| = |\Phi(j\omega_1)|, \quad \arg \Phi(-j\omega_1) = -\arg \Phi(j\omega_1),$$

то получим

$$x(t) = \frac{A_1}{2j} |\Phi(j\omega_1)| \{ e^{j[\omega_1 t + \arg \Phi(j\omega_1)]} - e^{-j[\omega_1 t + \arg \Phi(j\omega_1)]} \} = A_1 |\Phi(j\omega_1)| \sin[\omega_1 t + \arg \Phi(j\omega_1)]. \quad (9)$$

Отсюда следует, что в установившемся режиме реакция  $x(t)$  линейной автоматической системы на синусоидальное воздействие является также синусоидой. Угловые частоты входного и выходного сигналов совпадают. Амплитуда синусоиды на выходе системы равна  $A_1 |\Phi(j\omega_1)|$ , а ее начальная фаза равна  $\arg \Phi(j\omega_1)$ .

Если на вход линейной системы поступает периодическое воздействие в виде

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\omega_1 t,$$

то, используя принцип суперпозиции, справедливый для линейной системы, найдем, что в этом случае вынужденное установившееся движение системы

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k |\Phi(j\omega)| \sin[k\omega_1 t + \arg \Phi(j\omega)], \quad (10)$$

причем величине  $\omega$  здесь следует придавать дискретные значения, т. е. полагать, что  $\omega = \omega_1 k$ .

Зная частотные спектры сигнала на входе системы, можно легко определить частотные спектры сигнала на выходе системы. Если, например, известен амплитудный частотный спектр  $A_k$  входного сигнала  $g(t)$ , то, очевидно, что амплитудный частотный спектр выходного сигнала есть  $A_k |\Phi(j\omega_1 \cdot k)|$ .

В рассматриваемых выражениях функция  $\Phi(j\omega)$  характеризует динамические свойства самой автоматической системы и не зависит от характера приложенных к системе воздействий. Она легко может быть получена из передаточной функции системы (4); для этого следует в передаточной функции заменить  $p$  на  $j\omega$ .

Функция  $\Phi(j\omega)$  от непрерывного аргумента  $\omega$  называется *амплитудно-фазовой характеристикой системы по отношению к управляющему воздействию  $g(t)$* , приложенному к системе. Проводя параллель с терминологией электрических цепей, функцию  $\Phi(j\omega)$  можно также назвать *комплексной проводимостью (адмитанцем)* системы. В этом

случае функция  $\frac{1}{\Phi(j\omega)}$  называется *комплексным сопротивлением (импеданцем)* системы. Исходя из формулы (6), амплитудно-фазовая характеристика может быть определена так же, как отношение спектральной характеристики сигнала на выходе системы к спектральной характеристике сигнала на ее входе. Модуль амплитудно-фазовой характеристики  $|\Phi(j\omega)|$  характеризует изменение амплитуды гармо-

нического сигнала при прохождении последнего через систему, а аргумент ее — фазовый сдвиг сигнала. Функция  $|\Phi(j\omega)|$  получила название *амплитудно-частотной характеристики*, а функция  $\arg \Phi(j\omega)$  — *фазо-частотной характеристики системы*.

**Пример 1.** Определить частотные характеристики линейной автоматической системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)x(t) = k g(t). \quad (11)$$

Здесь  $T$  — постоянная времени системы;  $\xi$  — коэффициент относительного затухания;  $k$  — коэффициент усиления системы.

По формуле (4) найдем амплитудно-фазовую характеристику, соответствующую уравнению (11),

$$\Phi(j\omega) = \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 2\xi T j\omega + 1}. \quad (12)$$

Изображающий вектор амплитудно-фазовой характеристики при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  описывает своим концом кривую (рис. 114). Каждой точке на этой кривой ставится в соответствие вполне определенное значение частоты  $\omega$ . Имея такую характеристику, легко определить с учетом формулы (9) значения амплитуды и начальной фазы вынужденных колебаний  $x(t)$  на выходе системы при наличии на ее входе гармонического управляющего воздействия  $g(t) = A_1 \sin \omega_1 t$  (рис. 115). Амплитудно-частотная характеристика имеет вид

$$|\Phi(j\omega)| = \left| \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 2\xi T j\omega + 1} \right| = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}}, \quad (13)$$

а фазо-частотная характеристика определяется равенством

$$\arg \Phi(j\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}. \quad (14)$$

Найдем максимальное значение  $|\Phi(j\omega)|$ , для чего определим минимум подкоренного выражения в знаменателе правой части равенства (13). Имеем

$$\frac{d}{d\omega} [(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2] = 2(1 - T^2\omega^2)(-2T^2\omega) + 8\xi^2 T^2\omega;$$

привняв правую часть этого равенства нулю, найдем

$$T^2\omega^2 + 2\xi^2 - 1 = 0.$$

Следовательно, экстремум (легко показать, что это максимум) амплитудно-частотной характеристики будет существовать при частоте

$$\omega_{\max} = \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{T}. \quad (15)$$

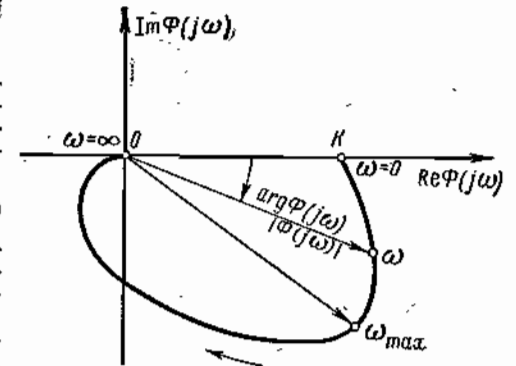


Рис. 114

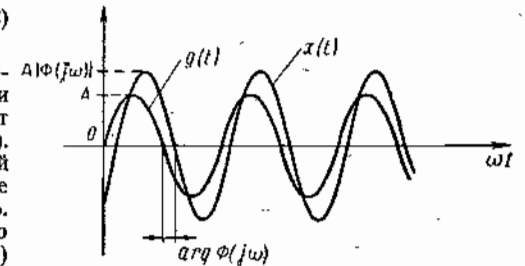


Рис. 115

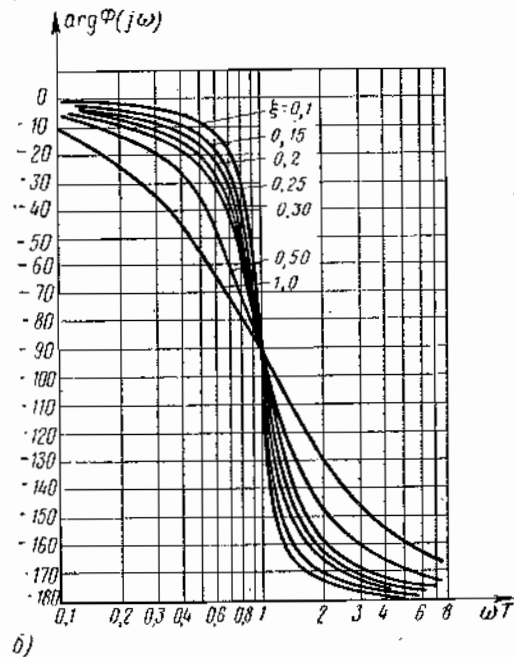
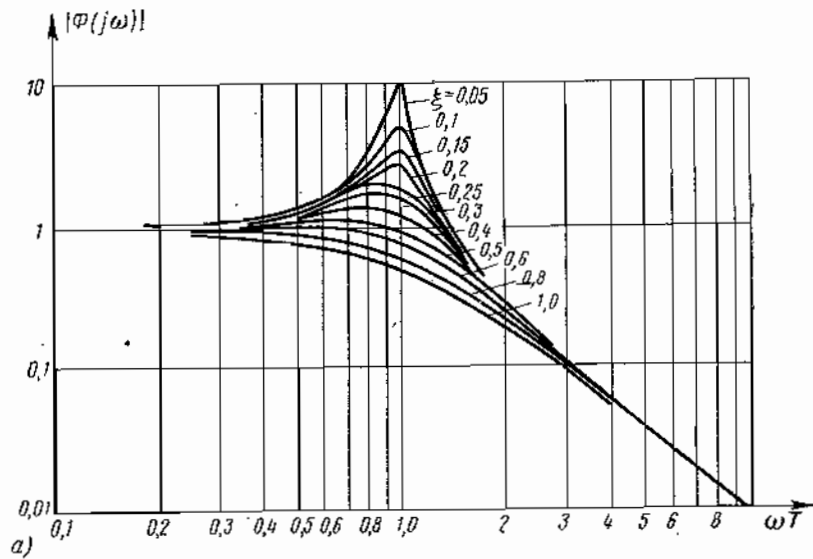


Рис. 116

При этом значении частоты модуль изображающего вектора амплитудно-фазовой характеристики имеет наибольшее значение (см. рис. 114). При  $\xi = 0$  частота  $\omega_{\max}$  совпадает с собственной частотой  $\omega_c$  колебаний системы, т. е.

$$\omega_{\max} = \omega_c = \frac{1}{T}. \quad (16)$$

Подставив значение  $\omega_{\max}$  в равенство (13), найдем максимальное значение амплитудно-частотной характеристики

$$|\Phi(j\omega)|_{\max} = \frac{k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (17)$$

Чем меньше значение  $\xi$ , тем больше величина  $|\Phi(j\omega)|$ . При  $\xi = 0$   $|\Phi(j\omega)| \rightarrow \infty$ . На рис. 116 изображены графики функций  $|\Phi(j\omega)|$  и  $\arg \Phi(j\omega)$  для различных значений  $\xi$ . Эти графики удобны при анализе изменения амплитуды и сдвига фазы гармонического сигнала при его прохождении через линейную автоматическую систему, описываемую уравнением (11). В идеальной автоматической системе должно выполняться равенство  $x(t) \equiv g(t)$ , однако в реальной системе это равенство не выполняется. При малых значениях угловой частоты  $g(t)$  гармонического управляющего воздействия  $g(t)$  значения  $|\Phi(j\omega)|$  близки к единице, а фазовые сдвиги  $\arg \Phi(j\omega)$  незначительно отличаются от нуля (см. рис. 116); поэтому для малых значений  $\omega$  можно приближенно считать сигналы  $x(t)$  и  $g(t)$  равными друг другу. При частоте  $\omega = \omega_{\max}$  амплитуда регулируемой величины  $A|\Phi(j\omega_{\max})|$  имеет максимальное значение; при этом фазовый сдвиг  $\arg \Phi(j\omega_{\max})$  гармонического сигнала на выходе системы по отношению к гармоническому сигналу на ее входе близок или равен  $90^\circ$ . При  $\omega > \omega_{\max}$  амплитудно-частотная характеристика быстро уменьшается, а фазовый сдвиг увеличивается. В этом случае амплитуда регулируемой величины становится меньше амплитуды управляющего воздействия. Автоматическая система не успевает обрабатывать гармонический входной сигнал, изменяющийся с большой частотой.

Пусть воздействие  $g(t)$ , приложенное к автоматической системе, представляет собой комплексную гармонику с частотой  $\omega_1$  (см. п. 5 § 34), т. е.  $g(t) = e^{j\omega_1 t}$ .

Реакция системы на подобное воздействие в установившемся режиме определяется равенством

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) \mathcal{F}\{e^{j\omega_1 t}\} e^{j\omega t} d\omega.$$

Или, используя формулу Эйлера и учитывая формулы (30) и (35) § 37, получим

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) \{\pi[\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] + \pi[\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)]\} e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) \delta(\omega - \omega_1) e^{j\omega t} d\omega.$$

Интеграл в правой части этого равенства найдем, используя фильтрующее свойство дельта-функции. Тогда искомое значение  $x(t)$

определится выражением

$$x(t) = \Phi(j\omega_1) e^{j\omega_1 t}. \quad (18)$$

Следовательно, для того чтобы получить в комплексной форме установившуюся составляющую реакции системы на воздействие в виде комплексной гармоники с частотой  $\omega_1$ , необходимо значение амплитудно-фазовой характеристики системы  $\Phi(j\omega_1)$  умножить на  $e^{j\omega_1 t}$ .

Амплитудно-фазовая характеристика  $\Phi(j\omega)$  может быть использована не только для анализа установившихся колебаний на выходе автоматической системы, но и для определения процесса регулирования в целом. В последнем случае момент времени  $t_0$  приложения к системе управляющего воздействия удобно считать нулевым моментом времени и воспользоваться формулами одностороннего преобразования Фурье. Определив спектральную характеристику  $\mathcal{F}\{g(t)\}$  и найдя спектральную характеристику регулируемой величины по формуле

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \Phi(j\omega) \mathcal{F}\{g(t)\}, \quad (19)$$

изменение регулируемой величины  $x(t)$  после приложения воздействия  $g(t)$  находится с использованием формулы (9) § 36.

**Пример 2.** Определить характер изменения регулируемой величины  $x(t)$  в автоматической системе, описываемой дифференциальным уравнением (11), если управляющее воздействие  $g(t)$  имеет вид:

- 1)  $g(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{при } t > 0 \ (\alpha > 0), \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases}$
- 2)  $g(t) = 1(t)$ . Начальные условия системы — нулевые. Для первого вида управляющего воздействия  $g(t)$  спектральная характеристика (см. пример 3 § 36)

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

и спектральная характеристика регулируемой величины с учетом формулы (12)

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{\alpha + j\omega} \cdot \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 2\xi Tj\omega + 1}$$

Правая часть этого выражения, очевидно, удовлетворяет условию леммы Жордана, поэтому для нахождения  $x(t)$  можно воспользоваться формулой (9) § 36:

$$x(t) = j \sum_{\nu=1}^n \text{Res} \frac{ke^{j\omega t}}{(\alpha + j\omega) [T^2(j\omega)^2 + 2\xi Tj\omega + 1]} \Big|_{\omega=\omega_\nu}, \quad (t > 0).$$

Здесь  $\omega_\nu$  — особые точки спектральной характеристики  $\mathcal{F}\{x(t)\}$ , расположенные в верхней полуплоскости.

Особые точки названной спектральной характеристики есть

$$\omega_1 = j\alpha, \quad \omega_2 = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + j \frac{\xi}{T}, \quad \omega_3 = -\frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + j \frac{\xi}{T}.$$

Все особые точки расположены в верхней полуплоскости, поэтому имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-k}{T^2} \times \\ &\times \sum_{\nu=1}^3 \text{Res} \frac{e^{j\omega t}}{(\omega - j\alpha) \left[ \omega - \left( \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + j \frac{\xi}{T} \right) \right] \left[ \omega - \left( -\frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + j \frac{\xi}{T} \right) \right]} \Big|_{\omega=\omega_\nu} = \\ &= -\frac{k}{T^2} \left\{ \frac{e^{-\alpha t}}{\left[ j\alpha - \left( \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + j \frac{\xi}{T} \right) \right] \left[ j\alpha - \left( -\frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + j \frac{\xi}{T} \right) \right]} + \right. \\ &+ \frac{e^{j \left[ \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + j \frac{\xi}{T} \right] t}}{e^{j \left[ \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + j \frac{\xi}{T} \right] t}} + \frac{e^{j \left[ -\frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + j \frac{\xi}{T} \right] t}}{e^{j \left[ -\frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + j \frac{\xi}{T} \right] t}} \left. \right\} = \\ &= -\frac{k}{T^2} \left\{ \frac{-e^{-\alpha t}}{\frac{1}{T^2} (1 - \xi^2) + \left( \alpha - \frac{\xi}{T} \right)^2} + \frac{\left[ \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + j \left( \alpha - \frac{\xi}{T} \right) \right] e^{-\left( \frac{\xi}{T} + j \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} \right) t}}{\frac{2}{T} \sqrt{1 - \xi^2} \left[ \frac{1}{T^2} (1 - \xi^2) + \left( \alpha - \frac{\xi}{T} \right)^2 \right]} + \right. \\ &+ \left. \frac{\left[ \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} - j \left( \alpha - \frac{\xi}{T} \right) \right] e^{-\left( \frac{\xi}{T} - j \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} \right) t}}{\frac{2}{T} \sqrt{1 - \xi^2} \left[ \frac{1}{T^2} (1 - \xi^2) + \left( \alpha - \frac{\xi}{T} \right)^2 \right]} \right\} = \frac{k}{1 - \xi^2 + \left( \alpha - \frac{\xi}{T} \right)^2} \times \\ &\times \left[ e^{-\alpha t} - \frac{e^{-\frac{\xi}{T} t}}{T \sqrt{1 - \xi^2}} \left( \frac{2}{T} \sqrt{1 - \xi^2} \cos \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} t - 2 \left( \alpha - \frac{\xi}{T} \right) \sin \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} t \right) \right] \quad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$x(t) = \frac{k}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\xi} \left[ e^{-\alpha t} - e^{-\frac{\xi}{T} t} \left( \cos \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} t - \frac{T\alpha - \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} t \right) \right] \quad (t > 0);$$

при  $t < 0$   $x(t) \equiv 0$ .

Для второго вида управляющего воздействия  $g(t) = 1(t)$  найдем изменение регулируемой координаты  $x(t)$ , выполнив в последнем равенстве предельный переход при  $\alpha \rightarrow 0$ . Тогда при  $t > 0$  получим

$$x(t) = k \left[ 1 - e^{-\frac{\xi}{T} t} \left( \cos \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} t \right) \right]$$

при  $t < 0$   $x(t) \equiv 0$ .

## 2. Связь между частотными и временными характеристиками линейной системы

Пусть имеется предварительно невозбужденная (с нулевыми начальными условиями) линейная автоматическая система (рис. 117), причем ее амплитудно-фазовая частотная характеристика по отношению к управляющему воздействию есть  $\Phi(j\omega)$ .

Предположим, что в момент времени  $t=0$  на вход системы подано управляющее воздействие в виде дельта-функции, т. е.  $g(t) = \delta(t)$ . Реакция  $x(t)$  системы на это воздействие называется *импульсной переходной функцией* и обычно обозначается  $k(t)$  (см. § 16). Импульсная переходная функция является одной из временных характеристик автоматической системы. Так как  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ , то в соответствии с формулой (19) найдем, что спектральная характеристика импульсной переходной функции системы есть

$$\mathcal{F}\{k(t)\} = \Phi(j\omega) \cdot 1,$$

или, учитывая, что  $k(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ , получим

$$\Phi(j\omega) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (20)$$

Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика системы является спектральной характеристикой импульсной переходной функции. Справедлива также формула обратного преобразования Фурье

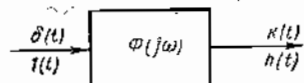


Рис. 117

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (t > 0). \quad (21)$$

Реакция  $x(t)$  системы на воздействие в виде единичной ступенчатой функции  $1(t)$  называется *переходной функцией* системы и обозначается  $h(t)$ . Используя формулы (21) § 37 и (19), найдем спектральную характеристику переходной функции \*)

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \Phi(j\omega) \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] \quad (22)$$

или

$$\Phi(j\omega) \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (23)$$

так как  $h(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Переходная функция является временной характеристикой системы; она может быть определена с помощью обратного преобразования Фурье

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (t > 0). \quad (24)$$

Из теоремы 2 § 36 известно, что умножению спектральной харак-

\*) Наличие дельта-функции в правой части равенства (22) свидетельствует о том, что переходная функция так же, как и единичная ступенчатая функция, преобразуема по Фурье лишь условно.

теристики на  $j\omega$  соответствует операция дифференцирования во временной плоскости, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dh(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) [1 + \pi j\omega\delta(\omega)] e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\delta(\omega) \Phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, получим при  $\Phi(j0) \neq \infty$ , что второе слагаемое равно нулю, откуда найдем

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (25)$$

Сравнивая выражения (21) и (25), получим равенство

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (26)$$

т. е. импульсная переходная функция является производной по времени от переходной функции.

Пусть теперь на вход автоматической системы в момент времени  $t=0$  поступает управляющее воздействие  $g(t)$  общего вида. Найдем реакцию  $x(t)$  системы на это воздействие. Для этого воспользуемся теоремой 8 § 36 о свертывании функций в вещественной плоскости. Принимая во внимание равенство (36) § 36 и равенство (19), получим

$$x(t) = \int_0^t k(t-\tau) g(\tau) d\tau. \quad (27)$$

Формула (22) является временным аналогом формулы (19), характеризующей спектральные (частотные) соотношения в автоматической системе. Интеграл в правой части называется *интегралом Дюамеля*. В § 17 соотношение, аналогичное соотношению (27), было получено с помощью формулы Коши.

Рассмотрим детальнее роль импульсной переходной функции  $k(t-\tau)$ . Управляющее воздействие  $g(t)$ , поступающее в автоматическую систему, можно аппроксимировать ступенчатой ломаной (рис. 118, а) с бесконечно большим числом ступеней и бесконечно малым шагом каждой ступени. Тогда возбуждение системы воздействием  $g(t)$  сводится к возбуждению системы непрерывной серией импульсов величиной  $g(\tau) d\tau$ . Реакция системы на единичный импульс в виде дельта-функции, приложенной к системе в момент времени  $t=\tau$ , известна — это импульсная переходная функция  $k(t-\tau)$ . Очевидно, что реакция системы на импульс величиной  $g(\tau) d\tau$ , приложенный к системе в тот же момент времени  $t=\tau$ , есть  $k(t-\tau) g(\tau) d\tau$ . Реакция системы на всю совокупность импульсов, т. е. на управляющее воздействие  $g(t)$ , определяется равенством (27),

т. е. состоит из суммы реакций на каждый импульс в отдельности. Пусть  $t$  является моментом наблюдения за реакцией системы  $x(t)$ , разность  $t - \tau$  — интервалом времени (рис. 118, б) между моментом приложения к системе импульса  $g(\tau) d\tau$  и рассматриваемым (текущим) моментом времени  $t > \tau$ . Функция  $k(t - \tau)$  будет определять, таким образом, степень участия импульсов, приложенных к системе

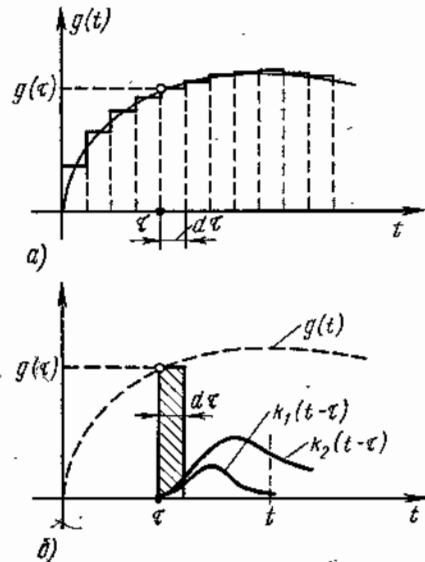


Рис. 118

до рассматриваемого момента времени в образовании значения  $x(t)$  реакции системы в текущий момент времени  $t$ . Влияние импульсов, предшествующих моменту времени  $t$ , на значение величины  $x(t)$  зависит от характера импульсной переходной функции  $k(t - \tau)$ . Из рис. 118, б, например, видно, что импульс  $g(\tau) d\tau$  проявляет себя в момент времени  $t$  более существенно, если импульсная переходная функция имеет вид  $k_2(t - \tau)$ . Если же эта функция имеет вид  $k_1(t - \tau)$ , то влияние импульса будет проявляться слабее. Следовательно, импульсная переходная функция как бы «взвешивает» роль каждого импульса, приложенного к системе в момент времени  $t = \tau$ , в обра-

зовании реакции системы в рассматриваемый момент времени  $t > \tau$ . По этой причине часто импульсную переходную функцию называют также *весовой функцией*.

Наряду с формулой (20) можно, принимая во внимание теорему 6 § 36, установить еще одно соответствие между импульсной переходной функцией  $k(t)$  и амплитудно-фазовой характеристикой  $\Phi(j\omega)$ :

$$a\Phi(j\omega) = \int_0^{\infty} k\left(\frac{t}{a}\right) e^{-j\omega t} dt, \quad (28)$$

где  $a$  — положительная постоянная, не зависящая от  $t$  и  $\omega$ .

Отсюда следует, что если функцию  $k(t)$  растягивать (сжимать) вдоль оси времени  $t$ , то соответствующая ей амплитудно-частотная характеристика  $|\Phi(j\omega)|$  будет сжиматься (растягиваться) вдоль оси частот  $\omega$ .

**Пример 3.** Определить амплитудно-фазовую и амплитудно-частотную характеристики линейной системы, если весовая функция этой системы  $k(t) = kb(t)$ . По формуле (20) имеем, используя фильтрующее свойство дельта-функции,

$$\Phi(j\omega) = \int_0^{\infty} kb(t) e^{-j\omega t} dt = k.$$

Отсюда видно, что годограф амплитудно-фазовой характеристики системы представляет собой точку на действительной оси плоскости  $\Phi(j\omega)$  (рис. 119, а), а амплитудно-частотная характеристика  $|\Phi(j\omega)|$  является прямой, параллельной

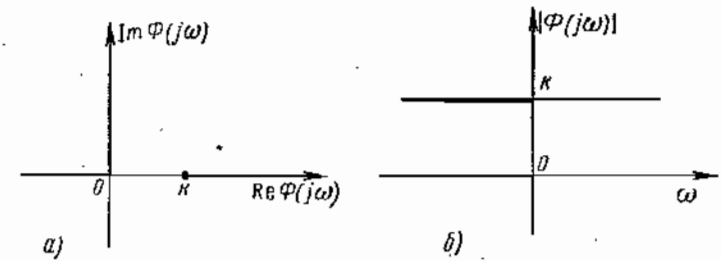


Рис. 119

оси частот (рис. 119, б). Весовой функции  $k(t)$  в виде бесконечно короткого импульса соответствует бесконечно широкая частотная характеристика  $|\Phi(j\omega)| = k$ .

#### § 40. ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**1. Критерий Михайлова.** В § 18 было показано, что для устойчивости линейной автоматической системы требуется, чтобы все корни характеристического многочлена этой системы

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (1)$$

были отрицательными, если они вещественны, и имели бы отрицательные вещественные части, если они комплексные.

В общем случае непосредственное вычисление корней характеристического многочлена порядка выше четвертого для анализа устойчивости представляет собой весьма трудоемкую задачу, хотя и решаемую с применением методов приближенных вычислений. Для использования в практике проектирования автоматических систем более удобны способы, не требующие непосредственного вычисления корней и позволяющие судить о характере корней характеристического многочлена по некоторым косвенным признакам. Разработаны правила, устанавливающие необходимые и достаточные условия, которые следует наложить на систему, чтобы корни ее характеристического многочлена были бы отрицательными или имели бы отрицательные вещественные части. Эти правила называются *критериями устойчивости системы*. В § 18 был получен алгебраический критерий устойчивости.

Разработаны критерии устойчивости, базирующиеся на частотных представлениях. Сначала рассмотрим критерий Михайлова. Этот критерий предусматривает использование частотного годографа  $D(j\omega)$ , который может быть получен из характеристического многочлена системы  $D(\lambda)$ , если положить  $\lambda = j\omega$ .



Применяя принцип аргумента (см. § 33), найдем условия, при выполнении которых характеристический многочлен (1) не имеет корней (нулей) в правой полуплоскости плоскости независимой переменной  $\lambda = \alpha + j\omega$ . Для этой цели на плоскости образуем замкнутый контур  $l_\lambda$  (рис. 120), состоящий из полуокружности  $C_R$  радиуса  $R$  и отрезка  $[-jR, jR]$  мнимой оси  $l_R$ . Если устремить  $R$  к бесконечности, то замкнутый контур  $l_\lambda$  будет охватывать всю правую полуплоскость плоскости  $\lambda$ , и если при этом в правой полуплоскости характеристический многочлен  $D(\lambda)$  имеет корни, то эти корни окажутся внутри замкнутого контура.

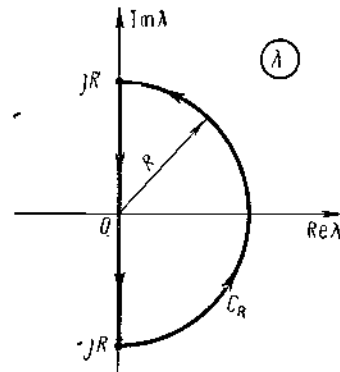


Рис. 120

В соответствии с принципом аргумента число полных оборотов изображающего вектора на плоскости  $D(\lambda)$  вокруг начала координат, имеющее место при полном обходе изображающей точкой  $\lambda$  контура  $l_\lambda$ , определяется равенством

$$k = N. \quad (2)$$

Здесь  $N$  — число нулей многочлена  $D(\lambda)$  внутри замкнутого контура  $l_\lambda$  (см. рис. 120), причем на мнимой оси многочлен  $D(\lambda)$  нулей не имеет. Если при

отображении контура  $l_\lambda$  на плоскость  $D(\lambda)$  при  $R \rightarrow \infty$  окажется, что число оборотов  $k$  изображающего вектора на плоскости  $D(\lambda)$  равно нулю, то, как следствие, в правой полуплоскости плоскости  $\lambda$  нет нулей многочлена  $D(\lambda)$ , т. е. автоматическая система является устойчивой.

Обозначим через  $\Delta_{l_\lambda} \arg D(\lambda)$  приращение аргумента многочлена  $D(\lambda)$  при полном обходе изображающей точкой  $\lambda$  контура  $l_\lambda$  против часовой стрелки. Очевидно, что

$$\Delta_{l_\lambda} \arg D(\lambda) = 2\pi N \quad (3)$$

или

$$\Delta_{l_R} \arg D(\lambda) + \Delta_{C_R} \arg D(\lambda) = 2\pi N. \quad (4)$$

Первое и второе слагаемые в левой части этого равенства характеризуют приращение аргумента при движении изображающей точки  $\lambda$  по отрезку  $[+jR, -jR]$  и полуокружности  $C_R$  соответственно.

Обратимся к равенству (1). Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{C_R} \arg D(\lambda) &= \Delta_{C_R} \arg a_0 \lambda^n \left( 1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{\lambda} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \frac{1}{\lambda^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0} \frac{1}{\lambda^n} \right) = \\ &= \Delta_{C_R} \arg \lambda^n + \Delta_{C_R} \arg a_0 \left( 1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{\lambda} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \frac{1}{\lambda^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0} \frac{1}{\lambda^n} \right). \end{aligned}$$

Пусть  $|\lambda| = R \rightarrow \infty$ ; тогда модуль

$$\left| a_0 \left( 1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{\lambda} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \frac{1}{\lambda^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0} \frac{1}{\lambda^n} \right) \right| \rightarrow 0$$

и приращение аргумента

$$\Delta_{C_R} \arg a_0 \left( 1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{\lambda} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \frac{1}{\lambda^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0} \frac{1}{\lambda^n} \right) \rightarrow 0.$$

Но

$$\Delta_{C_R} \arg \lambda^n = \pi n,$$

поэтому справедливо также равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \arg D(\lambda) = \pi n. \quad (5)$$

Таким образом, для определения приращения аргумента многочлена  $D(\lambda)$ , когда изображающая точка  $\lambda$  движется по полуокружности  $C_R$  бесконечно большого радиуса, достаточно показатель степени многочлена умножить на число  $\pi$ .

Для определения приращения аргумента  $\Delta_{l_R} \arg D(\lambda)$  при  $R \rightarrow \infty$  необходимо найти образ мнимой оси плоскости  $\lambda$  на плоскости  $D(\lambda)$ . Подставив в выражение (1)  $\lambda = j\omega$  и изменяя  $\omega$  от  $+\infty$  до  $-\infty$ , на плоскости  $D(j\omega)$  получим кривую — образ мнимой оси плоскости  $\lambda$ . Используя эту кривую, можно определить приращение аргумента  $\Delta_{l_R} \arg D(\lambda)$  при  $R \rightarrow \infty$ . Если окажется, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{l_R} \arg D(\lambda) = -\pi n, \quad (6)$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{l_\lambda} \arg D(\lambda) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{l_R} \arg D(\lambda) + \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \arg D(\lambda) = \\ &= -\pi n + \pi n = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

и в соответствии с равенством (3)  $N=0$ , т. е. в этом случае многочлен  $D(\lambda)$  не имеет нулей в правой полуплоскости плоскости  $\lambda$ .

Кривая, получаемая на плоскости  $D(\lambda)$  в результате отображения на эту плоскость мнимой оси плоскости  $\lambda$ , является симметричной относительно действительной оси, так как  $D(j\omega)$  и  $D(-j\omega)$  являются сопряженными функциями; поэтому можно производить отображение на плоскость  $D(\lambda)$  не всей мнимой оси  $\lambda = j\omega$ , а лишь ее положительной части. Если справедливо равенство (6), то при изменении  $\omega$  от  $+\infty$  до 0, т. е. при движении по положительной части мнимой оси  $\lambda = j\omega$  сверху вниз получим приращение аргумента

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{l_R} \arg D(\lambda) = -\frac{\pi}{2} n. \quad (8)$$

Если движение происходит по положительной части мнимой оси  $\lambda = j\omega$  снизу вверх, т. е. если изменять значения  $\omega$  от нуля до  $+\infty$ , то вместо равенства (8) найдем:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{l_R} \arg D(\lambda) = \frac{\pi}{2} n. \quad (9)$$

Таким образом, равенство (8) или (9) устанавливает условия, при выполнении которых характеристический многочлен автоматической



системы не имеет корней в правой полуплоскости, т. е. система является устойчивой.

Найденные условия имеют простую геометрическую интерпретацию. Представим характеристический многочлен (1) в виде

$$D(\lambda) = a_0 (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n), \quad (10)$$

где  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — корни многочлена, которые в общем случае могут быть расположены как в левой, так и в правой полуплоскости плоскости корней  $\lambda$  (рис. 121). Полагая  $\lambda = j\omega$ , будем иметь

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega - \lambda_1) (j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_n). \quad (11)$$

Каждому множителю  $(j\omega - \lambda_i)$  можно поставить в соответствие вектор, начало которого находится в точке  $\lambda_i$ , а конец расположен на мнимой оси в точке  $j\omega$ . При изменении  $\omega$  от нуля до  $\infty$  приращение аргумента  $\Delta \arg(j\omega - \lambda_i)$  равно

$\frac{\pi}{2}$  (или  $-\frac{\pi}{2}$ ), если корень  $\lambda_i$  вещественный и расположен в левой (правой) полуплоскости (рис. 121). Если  $\lambda_i$  и  $\lambda_{i+1}$  — сопряженные комплексные корни, то сумма  $\Delta \arg(j\omega - \lambda_i) + \Delta \arg(j\omega - \lambda_{i+1})$  будет равна  $\pi$  (или  $-\pi$ ), если эти корни расположены в левой (правой) полуплоскости (см. рис. 121).

Пусть в правой части плоскости  $\lambda$  многочлен  $D(\lambda)$  имеет  $l$  корней. Тогда в левой части он имеет  $n-l$  корней. В этом случае получим, что приращение аргумента

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} D(j\omega) = (n-l) \frac{\pi}{2} - l \frac{\pi}{2} = (n-2l) \frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

Автоматическая система является устойчивой, если в правой полуплоскости корней нет, т. е.  $l=0$ . Следовательно, для устойчивости системы необходимо выполнение равенства

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} D(j\omega) = n \frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

Это условие не отличается от условия устойчивости (9).

Полученное условие устойчивости системы можно сформулировать в виде следующего правила, получившего название *критерия Михайлова*.

**Правило.** Автоматическая система будет устойчива, если при возрастании  $\omega$  от нуля до  $\infty$  вектор  $D(j\omega)$  повернется на угол  $\frac{\pi}{2} n$ ,

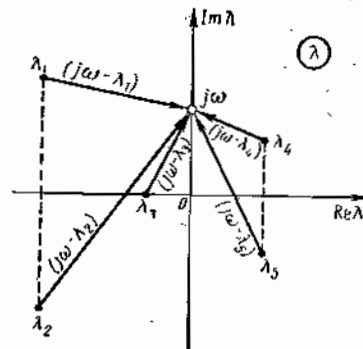


Рис. 121

где  $n$  — степень характеристического многочлена  $D(\lambda)$ , или, что то же самое, если характеристическая кривая при изменении  $\omega$  от нуля до  $\infty$  обходит, начиная с положительной действительной полуоси, последовательно в положительном направлении  $n$  квадрантов.

Кривая, которую опишет своим концом вектор  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до  $\infty$ , называется *частотным годографом Михайлова*. Из равенства (4) § 39 и равенства (1) следует, что  $D(j\omega)$  является знаменателем амплитудно-фазовой характеристики системы.

**Пример 1.** Определить, является ли устойчивой автоматическая система, если ее характеристический многочлен есть

$$D(\lambda) = 0,414 \cdot 10^{-9} \lambda^5 + 0,388 \cdot 10^{-3} \lambda^4 + 3,47 \cdot 10^{-2} \lambda^3 + 1,83 \lambda^2 + 58 \lambda + 380.$$

Заменим в данном многочлене  $\lambda$  на  $j\omega$  и выделим вещественную и мнимую части:

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

В рассматриваемом случае

$$U(\omega) = 0,388 \cdot 10^{-3} \omega^4 - 1,83 \omega^2 + 380,$$

$$V(\omega) = 0,414 \cdot 10^{-9} \omega^5 - 3,47 \cdot 10^{-2} \omega^3 + 1,83 \omega.$$

Кривая, вычерченная концом вектора  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности, изображена на рис. 122 (длины векторов отложены в логарифмическом масштабе). Каждой точке кривой поставлено в соответствие определенное значение частоты  $\omega$ .

Частотный годограф начинается на положительной части действительной оси (при  $\omega=0$   $U(\omega)=380$ ,  $V(\omega)=0$ ) и обходит последовательно в положительном направлении пять квадрантов. В соответствии с критерием Михайлова автоматическая система является устойчивой.

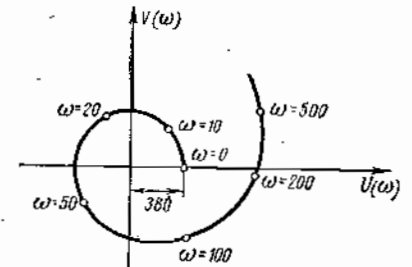


Рис. 122

**2. Критерий Найквиста.** Этот критерий позволяет судить об устойчивости автоматической системы по виду ее амплитудно-фазовой характеристики в разомкнутом состоянии.

В соответствии с формулой (82) § 15 передаточная функция замкнутой автоматической системы (рис. 123) может быть выражена через передаточную функцию  $W(p)$  разомкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}.$$

Пусть

$$W(p) = \frac{M(p)}{Q(p)}, \quad (14)$$

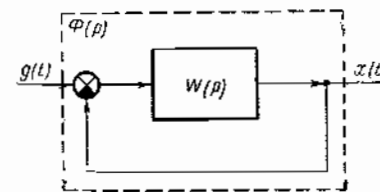


Рис. 123

где  $M(p)$  и  $Q(p)$  — многочлены от  $p$ , причем степень многочлена  $M(p)$  меньше степени многочлена  $Q(p)$ .

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{M(p)}{Q(p) \left[ 1 + \frac{M(p)}{Q(p)} \right]} = \frac{M(p)}{D(p)}, \quad (15)$$

где

$$D(p) = Q(p) + M(p). \quad (16)$$

Многочлен  $D(\lambda)$  является характеристическим многочленом замкнутой, а многочлен  $Q(\lambda)$  — характеристическим многочленом разомкнутой автоматической системы; очевидно, что степени этих многочленов равны.

Образуем сумму

$$1 + W(j\omega) = 1 + \frac{M(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)}. \quad (17)$$

Из критерия Михайлова следует, что замкнутая автоматическая система будет устойчивой, если приращение аргумента

$$\Delta \arg D(j\omega) = n \frac{\pi}{2},$$

где  $n$  — степень характеристического многочлена  $D(\lambda)$ ; при этом условии характеристический многочлен  $D(\lambda)$  не имеет корней в правой полуплоскости плоскости  $\lambda$ . В разомкнутом состоянии автоматическая система в общем случае может быть неустойчивой, т. е. характеристический многочлен  $Q(\lambda)$  может иметь корни в правой полуплоскости (полагаем, что на мнимой оси многочлен  $Q(\lambda)$  корней не имеет). Если число таких корней равно  $l$ , то, имея в виду формулу (12), найдем приращение аргумента

$$\Delta \arg Q(j\omega) = (n - 2l) \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, приращение аргумента суммы (17) равно:

$$\begin{aligned} \Delta \arg [1 + W(j\omega)] &= \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg Q(j\omega) = \\ &= n \frac{\pi}{2} - (n - 2l) \frac{\pi}{2} = l\pi. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя равенство (18), можно судить об устойчивости автоматической системы по характеру годографа вектора  $1 + W(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до  $\infty$ . Действительно, если в разомкнутом состоянии автоматическая система устойчива ( $l=0$ ) и годограф вектора  $1 + W(j\omega)$  не охватывает начало координат (рис. 124, а), то

$$\Delta \arg [1 + W(j\omega)] = 0,$$

т. е. автоматическая система в замкнутом состоянии устойчива. Если система в разомкнутом состоянии неустойчива, причем ее характеристический многочлен имеет  $l$  корней в правой части плоскости  $\lambda$  и если годограф вектора  $1 + W(j\omega)$  охватывает в положительном направлении начало координат  $\frac{l}{2}$  раз, то

$$\Delta \arg [1 + W(j\omega)] = l\pi,$$

т. е. автоматическая система будет устойчивой в замкнутом состоянии.

Полученное условие устойчивости системы легко распространить на плоскость амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы  $W(j\omega)$ . Годограф вектора  $W(j\omega)$ , являющийся отображением положительной части мнимой оси плоскости корней  $\lambda$  на плоскость  $W(\lambda)$ , получается из годографа вектора  $1 + W(j\omega)$ , если вектор  $1 + W(j\omega)$  сложить с  $-1$ . Началу координат на плоскости  $1 + W(j\omega)$  соответствует точка  $(-1, j0)$  на плоскости  $W(j\omega)$  (рис. 124, б).

Если годограф вектора  $1 + W(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  охватывает (не охватывает) начало координат, то при этом годограф вектора  $W(j\omega)$  охватывает (не охватывает) точку с координатами  $(-1, j0)$ .

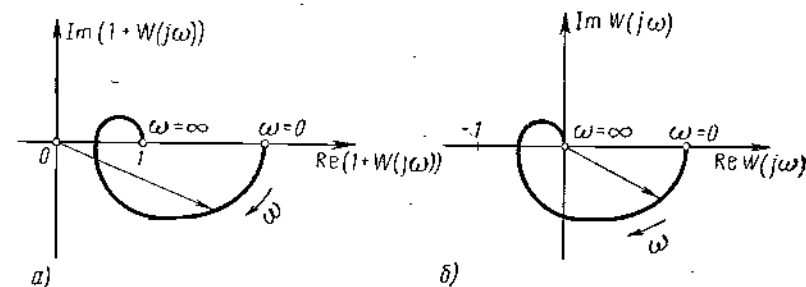


Рис. 124

Таким образом, мы приходим к следующему правилу — критерию устойчивости Найквиста.

**Правило.** Автоматическая система, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом состоянии, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы  $W(j\omega)$  не охватывает точку  $(-1, j0)$ . Если система в разомкнутом состоянии неустойчива и ее характеристический многочлен имеет  $l$  корней в правой полуплоскости, то для устойчивости автоматической системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика  $W(j\omega)$  охватывала точку  $(-1, j0)$  в положительном направлении  $\frac{l}{2}$  раз.

Выше мы предполагали, что характеристический многочлен  $Q(\lambda)$  не имеет корней на мнимой оси плоскости  $\lambda$ . Подобное предположение позволило обойти затруднение, связанное с тем, что значение аргумента  $\arg Q(\lambda_i)$  является неопределенным, если  $\lambda_i$  является корнем многочлена  $Q(\lambda)$ , расположенным на мнимой оси\*). Однако известны системы с консервативными или интегрирующими звеньями,

\* При  $\lambda = \lambda_i$   $Q(\lambda_i) = 0$ . Напомним, что ноль является комплексным числом, не имеющим определенного значения аргумента.

у которых передаточная функция  $W(p)$  имеет полюсы на мнимой оси. Наиболее распространен случай, при котором  $W(p)$  имеет полюс в начале координат (автоматические системы с астатизмом первого порядка), соответствующий подобной передаточной функции характеристический многочлен  $Q(\lambda)$  имеет корень в начале координат плоскости  $\lambda$ , т. е. при  $\lambda=0$ .

Распространим критерий устойчивости Найквиста на автоматические системы, содержащие интегрирующие звенья. Пусть многочлен  $Q(\lambda)$  имеет при  $\lambda=0$  корень  $\nu$ -й кратности; тогда этот многочлен можно представить в виде

$$Q(\lambda) = \lambda^\nu Q_1(\lambda), \quad (19)$$

где  $Q_1(\lambda)$  — многочлен, не имеющий корней в начале координат плоскости  $\lambda$ .

Будем, как и выше, полагать  $\lambda = j\omega$ , если  $\omega$  изменяется в пределах  $0 < \omega < \infty$ . Однако при  $\omega \rightarrow 0$  положим  $\lambda = \rho e^{j\varphi}$ . Здесь  $\rho \rightarrow 0$  и  $\varphi$  изменяется в пределах  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Геометрически это означает, что на плоскости  $\lambda$  начало координат, в котором значение аргумента  $\arg Q(\lambda)$  неопределенно, обходится по дуге бесконечно малого радиуса (рис. 125). С помощью такого приема удастся устранить неопределенность аргумента  $\arg Q(\lambda)$ , так как в каждой точке дуги значение аргумента определено.

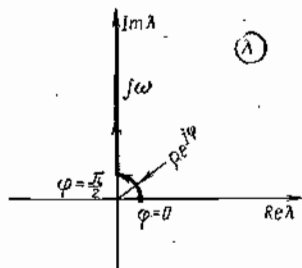


Рис. 125

Для суждения об устойчивости автоматической системы следует построить амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы. Эта характеристика в данном случае является образом положительной части мнимой оси  $\lambda = j\omega$  плоскости корней, дополненной дугой (см. рис. 125) бесконечно малого радиуса. При изменении  $\lambda$  вдоль положительной части мнимой оси амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы определяется равенством

$$W(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{(j\omega)^\nu Q_1(j\omega)}. \quad (20)$$

При изменении  $\lambda$  вдоль дуги бесконечно малого радиуса  $\rho$  имеем

$$W(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{\lambda^\nu Q_1(\lambda)} \approx \frac{k}{\rho^\nu e^{j\nu\varphi}} = \frac{k}{\rho^\nu} e^{-j\nu\varphi}, \quad (21)$$

где

$$k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{M(\lambda)}{Q_1(\lambda)}.$$

Из равенства (21) можно сделать вывод, что когда изображающая точка на плоскости  $\lambda$  обходит в положительном направлении дугу бесконечно малого радиуса, ей соответствующая изобра-

жающая точка на плоскости  $W(\lambda)$  движется в отрицательном направлении по дуге бесконечно большого радиуса. При этом приращению аргумента  $\Delta \arg \lambda = \frac{\pi}{2}$  соответствует приращение аргумента

$$\Delta \arg W(\lambda) = -\nu \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, для получения годографа, с помощью которого можно судить об устойчивости автоматической системы, имеющей интегрирующие звенья, необходимо, во-первых, построить амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы (20) и, во-вторых, дополнить эту характеристику дугой бесконечно большого радиуса с центральным углом, равным  $-\nu \frac{\pi}{2}$ . На рис. 126, а и 126, б пунктиром показаны дуги для систем, содержащих соответственно одно и два интегрирующих звена (системы первого и второго порядков астатизма).

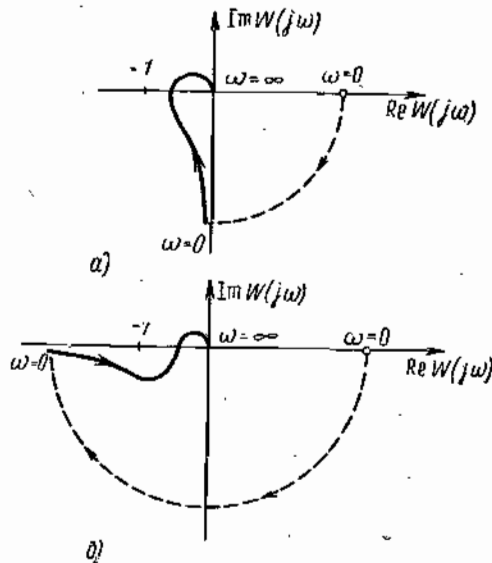


Рис. 126

Используя таким образом полученный частотный годограф, можно с помощью критерия Найквиста исследовать устойчивость автоматических систем с интегрирующими звеньями. Если точка  $(-1, j0)$  расположена вне годографа, то система, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива и в замкнутом виде. Для устойчивости системы, неустойчивой в разомкнутом состоянии и имеющей  $l$  корней в правой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы годограф охватывал в положительном направлении точку  $(-1, j0)$   $\frac{l}{2}$  раз.

**Пример 2.** Исследовать с помощью критерия Найквиста устойчивость системы автоматического регулирования, рассмотренной в § 15.

Структурная схема этой системы изображена на рис. 2. Система имеет две петли обратной связи, поэтому необходимо прежде всего выполнить анализ устойчивости внутреннего контура.

Передаточные функции элементов, входящих в состав внутреннего контура, равны:

$$W_0(p) = \frac{4}{p(p^2 + 1,2p + 1)(0,02p + 1)}, \quad Z(p) = 10p^2,$$

поэтому передаточная функция разомкнутого внутреннего контура имеет вид

$$W_{в.к}(p) = W_0(p)Z(p) = \frac{40p}{(p^2 + 1,2p + 1)(0,02p + 1)}.$$

Положив  $p = j\omega$  и изменяя  $\omega$  от нуля до бесконечности, можно получить годограф амплитудно-фазовой характеристики разомкнутого внутреннего контура  $W_{в.к}(j\omega)$ . Этот годограф изображен на рис. 127, а. Указанной годограф не охватывает точку  $(-1, j0)$ , поэтому внутренний контур системы устойчив.

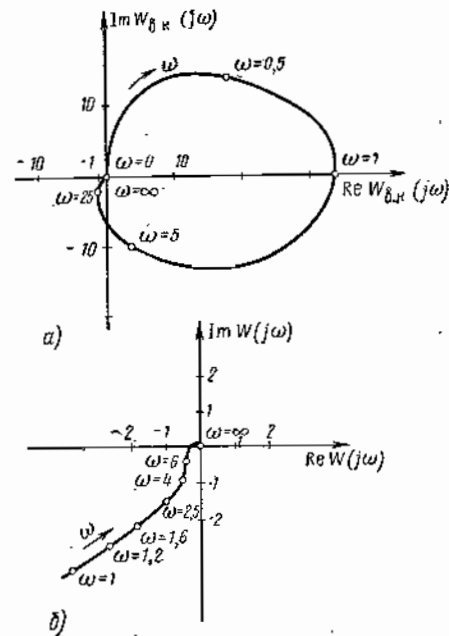


Рис. 127

Исследуем теперь устойчивость системы автоматического регулирования в целом. Передаточная функция системы с разомкнутой главной обратной связью есть

$$W(p) = \Pi(p) \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)Z(p)}$$

Передаточная функция последовательного корректирующего устройства

$$\Pi(p) = \frac{50(p+1)}{0,1p+1},$$

поэтому

$$W(p) = \frac{200(p+1)}{p[(p^2+1,2p+1)(0,02p+1)+40p](0,1p+1)}.$$

Положив  $p = j\omega$ , получим амплитудно-фазовую характеристику  $W(j\omega)$  разомкнутой системы. Годограф этой характеристики изображен на рис. 127, б. Так как годограф не охватывает точку  $(-1, j0)$ , то в соответствии с критерием Найквиста система является устойчивой.

#### § 41. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

1. Гармоническая линеаризация нелинейностей. Гармоническое представление сигналов может быть положено в основу приближенного метода исследования периодических режимов в нелинейных

автоматических системах. Наличие в системе одного или нескольких нелинейных звеньев при определенных условиях приводит к появлению в системе предельных циклов (см. § 14), параметры которых — амплитуда и частота — могут быть приближенно определены путем гармонической линеаризации нелинейности.

Предположим, что в структурной схеме автоматической системы, к которой не приложены внешние воздействия, выделены линейная и нелинейная части (рис. 128). Линейная часть системы представляет собой совокупность определенным образом взаимосвязанных линейных звеньев системы. Эта часть описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Нелинейная часть системы является совокупностью определенным образом взаимосвязанных нелинейных звеньев. В частном случае это может быть, например, одно звено с нелинейной статической характеристикой. Нелинейная часть описывается нелинейным дифференциальным уравнением. Для ряда простых нелинейных звеньев уравнение динамики сводится к уравнению статики, имеющему нелинейный алгебраический характер. В дифференциальном или алгебраическом уравнении нелинейной части всегда имеется нелинейность, т. е. по крайней мере одна нелинейная функция, обуславливающая нелинейный характер динамических явлений в автоматической системе. Нелинейные функции могут иметь различный характер. При исследовании автоматических систем, например, часто встречаются уравнения нелинейных частей, в которых под знак одной или нескольких нелинейных функций входит только одна входная координата  $x_1$  (и ее производные) или только одна выходная координата  $x_2$  (и ее производные) нелинейной части системы. Такие уравнения имеют вид

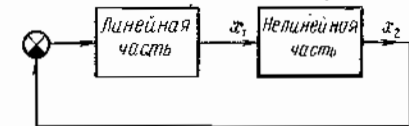


Рис. 128

$$x_2 = f(x_1), \quad x_2 = f(x_1, \dot{x}_1), \quad x_2 = f_1(x_1) + f_2(\dot{x}_1), \quad (1)$$

$$f(x_2, \dot{x}_2) = x_1, \quad f_1(\dot{x}_2, \dot{x}_2) + f_2(x_2) = x_1.$$

В более сложных случаях под знак нелинейной функции входят обе координаты  $x_1$  и  $x_2$ , например в уравнениях вида:

$$f_2(\dot{x}_2, x_2) = f_1(x_1), \quad f_3(\dot{x}_2) + f_2(x_2) = f_1(x_1), \quad (2)$$

$$f(\dot{x}_2, x_2, x_1) = 0, \quad f_2(x_2) + f_1(x_2, x_1) = 0.$$

Рассмотрим основную идею гармонической линеаризации нелинейностей. Пусть уравнение линейной части автоматической системы будет

$$D_n(p)x_1(t) = -M_n(p)x_2(t), \quad (3)$$

где  $D_n(p)$  и  $M_n(p)$  — операторные многочлены вида (2) § 39, а уравнение нелинейной части, например, задано в виде

$$x_2 = f(x_1, \dot{x}_1). \quad (4)$$

Предположим, что в системе (см. рис. 128) возник периодический режим (предельный цикл), т. е. при отсутствии внешних воздействий существуют собственные периодические колебания нелинейной автоматической системы. Изменения выходной координаты линейной части будем считать подчиняющимися синусоидальному закону

$$x_1(t) = A \sin \omega t \quad (5)$$

с амплитудой  $A$  и частотой  $\omega$ . В действительности периодические колебания на выходе линейной части не являются синусоидальными.

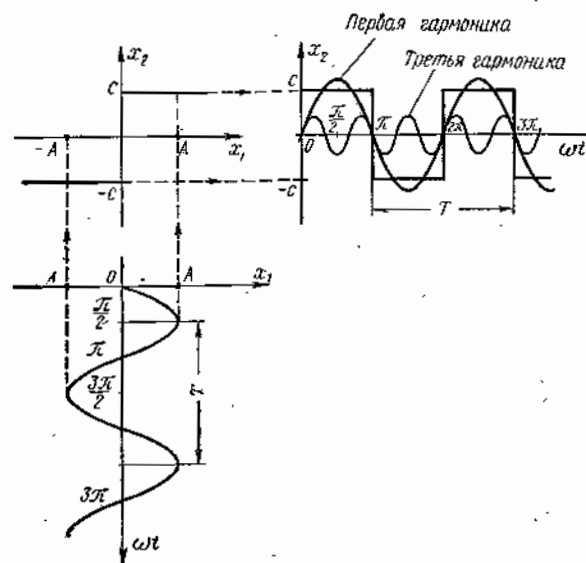


Рис. 129

Однако, как отмечено ниже, форма этих колебаний во многих случаях близка к синусоиде.

Синусоидальные колебания  $x_1$ , пройдя через нелинейную часть системы, существенно изменяют свою форму. Периодические колебания на выходе нелинейной части  $x_2$  всегда несинусоидальные, вид этих колебаний зависит от характера нелинейностей нелинейной части системы. На рис. 129 показано, например, прохождение синусоидального сигнала  $x_1$  через нелинейное звено релейного типа с идеальной статической характеристикой. Частота периодических колебаний на выходе этого звена совпадает с частотой  $\omega$  колебаний

на его входе. Прямоугольная форма колебаний на выходе существенно отличается от синусоидальных колебаний на входе звена. Выполнив разложение функции  $x_2(t)$  в ряд Фурье, можно представить прямоугольные периодические колебания в виде суммы гармонических составляющих (см. рис. 129) различной частоты. Каждая из составляющих воздействует на линейную часть автоматической системы. Однако линейная часть системы, как правило, является «фильтром низких частот». Ее амплитудно-частотная характеристика

$$|W_n(j\omega)| = \left| \frac{M_n(j\omega)}{D_n(j\omega)} \right|$$

удовлетворяет соотношениям

$$\left| \frac{M_n(j\omega)}{D_n(j\omega)} \right| \geq \left| \frac{M_n(jk\omega)}{D_n(jk\omega)} \right| \quad (k=2, 3 \dots),$$

причем

$$\left| \frac{M_n(jk\omega)}{D_n(jk\omega)} \right| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Это означает, что высшие гармоники (применительно к рис. 129 третья, пятая и т. д.) сигнала на выходе нелинейной части пройдут через линейную часть, будучи значительно уменьшенными по амплитуде. Кроме того, следует учесть, что амплитудные значения гармоник разложения тем меньше, чем больше номер гармоники. Эти обстоятельства позволяют сделать вывод, что в образовании сигнала на выходе линейной части основную роль играет первая гармоника сигнала, поступающего на вход линейной части системы.

Таким образом, несмотря на то, что нелинейная часть автоматической системы «генерирует» гармоники, можно рассматривать в качестве сигнала на выходе нелинейной части лишь первую гармонику и пренебрегать участием высших гармоник в формировании сигнала на выходе линейной части. В этом случае в качестве выходного сигнала линейной части можно рассматривать синусоидальный сигнал (5).

Такой взгляд на процессы, происходящие в нелинейной автоматической системе, позволяет гармонически линеаризовать уравнения нелинейной части системы. Выполним гармоническую линеаризацию уравнения (4), которое после подстановки (5) получим в виде

$$x_2 = f(A \sin \omega t, A \omega \cos \omega t). \quad (6)$$

Разложим функцию  $x_2(t)$  в ряд Фурье:

$$x_2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \quad (7)$$

Введя новую переменную  $u = \omega t$ , определим, учитывая формулы

(9) — (11) § 34, коэффициенты разложения  $a_0, a_k, b_k$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) du, \quad (8)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) \cos u du, \quad (9)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) \sin u du \quad (k=1, 2, 3 \dots). \quad (10)$$

Следовательно,

$$x_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) du + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) \cos u du \cos k\omega t + \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) \sin u du \sin k\omega t. \quad (11)$$

Предположим, что периодические колебания  $x_2(t)$  имеют симметрический характер, т. е. в разложении (11) нет постоянной составляющей. Кроме того, пренебрежем в этом разложении в соответствии с приведенными выше соображениями второй, третьей и другими высшими гармониками. Тогда вместо равенства (11) приближенно получим

$$x_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) \cos u du \cos \omega t + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) \sin u du \sin \omega t. \quad (12)$$

Учитывая, что

$$\sin \omega t = \frac{x_1}{A}, \quad \cos \omega t = \frac{\dot{x}_1}{A\omega},$$

и введя обозначения

$$q(A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) \sin u du, \quad (13)$$

$$q'(A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) \cos u du \quad (14)$$

получим приближенную запись сигнала на выходе нелинейной части системы

$$x_2 = q(A, \omega) x_1 + \frac{q'(A, \omega)}{\omega} \dot{x}_1. \quad (15)$$

При постоянных значениях амплитуды  $A$  и частоты  $\omega$  синусоидального сигнала на входе нелинейной части коэффициенты гармонической линеаризации  $q(A, \omega)$  и  $q'(A, \omega)$  имеют постоянные значения, определяемые формулами (13) и (14).

Уравнение (15) представляет собой гармонически линеаризованное уравнение нелинейной части автоматической системы. Другими словами, нелинейное уравнение (6) при гармонической линеаризации заменяется линейным уравнением (15), коэффициенты которого  $q$  и  $q'$  зависят от значений параметров  $A$  и  $\omega$  синусоидального сигнала  $x_1$ .

Если выходная координата  $x_2$  нелинейной части системы не зависит от величины производной  $\dot{x}_1$  входной координаты, т. е. имеется нелинейность

$$x_2 = f(x_1), \quad (16)$$

то гармонически линеаризованное уравнение нелинейной части имеет вид

$$x_2 = q(A) x_1 + \frac{q'(A)}{\omega} \dot{x}_1. \quad (17)$$

В этом случае коэффициенты гармонической линеаризации не зависят от частоты  $\omega$  синусоидального сигнала на входе нелинейной части и определяются равенствами

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin u) \sin u du, \quad (18)$$

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin u) \cos u du. \quad (19)$$

К уравнениям вида (16) могут быть отнесены, например, уравнения нелинейных звеньев, статические характеристики которых имеют петлю гистерезиса (рис. 130, а, в). На рис. 130, а изображена характеристика нелинейного звена релейного типа с петлей гистерезиса. Наличие петли гистерезиса приводит к неоднозначной зависимости  $x_2$  от  $x_1$ , при этом значение  $x_2$  зависит не от величины, а от знака производной  $\dot{x}_1$ . Применительно к характеристике на рис. 130, а при  $\dot{x}_1 > 0$  рабочей является правая ветвь характеристики, а при  $\dot{x}_1 < 0$  — левая ветвь характеристики. Второе слагаемое в правой части уравнения (17) учитывает указанную зависимость  $x_2$  от знака производной  $\dot{x}_1$ . Если статическая характеристика нелинейной части является однозначной, т. е. без петли гистерезиса (рис. 130, б), то  $x_2$  не зависит ни от величины, ни от знака производной  $\dot{x}_1$ . В этом случае гармонически линеаризованное уравнение

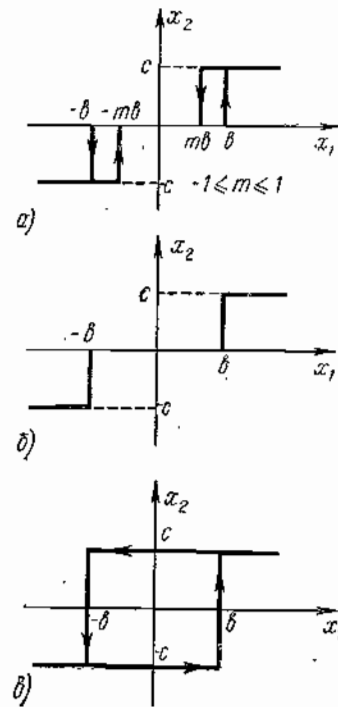


Рис. 130



нелинейной части имеет вид

$$x_2 = q(A) x_1, \quad (20)$$

где  $q(A)$  определяется равенством (18). Коэффициент  $q'(A)$  для таких нелинейностей равен нулю.

**Пример 1.** Определить коэффициенты гармонической линейзации для нелинейного звена релейного типа (см. рис. 130, а).

При подаче на вход релейного звена синусоидального сигнала  $x_1 = A \sin \omega t$  (рис. 131, а) на его выходе возникает сигнал, характер которого (рис. 131, б) легко определить, рассматривая совместно рис. 130, а и рис. 131, а.

Если  $A > b$ , переключение реле происходит при значениях  $u$ , равных  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , поэтому, принимая во внимание формулу (18), будем иметь

$$\begin{aligned} q(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin u) \sin u \, du = \\ &= \frac{1}{\pi A} \left( \int_{u_1}^{u_2} c \sin u \, du + \int_{u_2}^{u_3} -c \sin u \, du \right) = \\ &= \frac{1}{\pi A} \left( \int_{u_1}^{u_2} c \sin u \, du - \int_{\pi+u_1}^{\pi+u_2} c \sin u \, du \right) = \\ &= \frac{c}{\pi A} \left( -\cos u \Big|_{u_1}^{u_2} + \cos u \Big|_{\pi+u_1}^{\pi+u_2} \right) = \\ &= \frac{2c}{\pi A} (\cos u_1 - \cos u_2). \end{aligned}$$

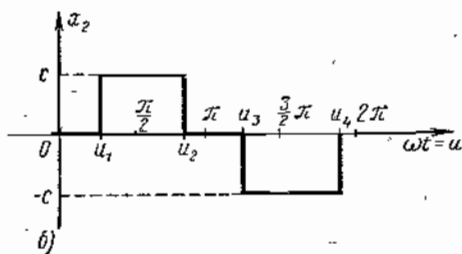
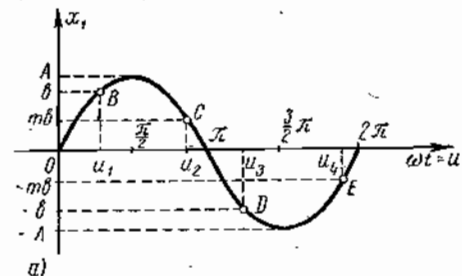


Рис. 131

По формуле (19) аналогично получим

$$q'(A) = -\frac{2c}{\pi A} (\sin u_1 - \sin u_2).$$

Так как

$$\begin{aligned} u_1 &= \arcsin \frac{b}{A}, \quad u_2 = \pi - \arcsin \frac{mb}{A}, \\ \sin u_1 &= \frac{b}{A}, \quad \sin u_2 = \frac{mb}{A}, \\ \cos u_1 &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}, \quad \cos u_2 = -\sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A^2}}, \end{aligned}$$

то искомые коэффициенты гармонической линейзации определяются равенствами:

$$\begin{aligned} q(A) &= \frac{2c}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A^2}} \right), \\ q'(A) &= -\frac{2cb}{\pi A^2} (1 - m), \\ &(A > b). \end{aligned}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Релейное звено имеет идеальную статическую характеристику (см. рис. 129). В этом случае  $b=0$  и, следовательно,

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A}, \quad q'(A) = 0.$$

Гармонически линейризованное уравнение (17) такого звена будет

$$x_2 = \frac{4c}{\pi A} x_1.$$

При гармонической линейризации идеальное релейное звено заменяется линейным звеном, коэффициент усиления которого обратно пропорционален амплитуде  $A$  синусоидального сигнала  $x_1$ .

б) Релейное звено имеет зону нечувствительности, но петля гистерезиса отсутствует (см. рис. 130, б). Полагая  $m=1$ , найдем:

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}, \quad q'(A) = 0 \quad (A > b).$$

Гармонически линейризованное уравнение этого звена имеет вид

$$x_2 = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} x_1 \quad (A > b).$$

в) Релейное звено с петлей гистерезиса (см. рис. 130, в). Для такого звена  $m=1$ , поэтому

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}, \quad q'(A) = -\frac{4cb}{\pi A^2} \quad (A > b).$$

В этом случае гармонически линейризованное уравнение есть

$$x_2 = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} x_1 - \frac{4cb}{\pi A^2} \cdot \frac{1}{\omega} \dot{x}_1.$$

Наличие в правой части этого уравнения производной  $\dot{x}_1$  со знаком минус свидетельствует об отставании по фазе сигнала на выходе нелинейного звена по отношению к сигналу на его входе. Введение в правую часть линейризованного уравнения отрицательной производной позволяет учесть влияние петли гистерезиса статической характеристики нелинейного звена на его выходной сигнал.

Мы рассмотрели гармоническую линейризацию нелинейности, когда аргументом нелинейной функции является входная координата нелинейной части  $x_1$ . Если уравнение нелинейной части имеет под знаком нелинейной функции выходную координату  $x_2$ , то методика линейризации не изменяется, однако следует полагать, что синусоидальным является выходной сигнал нелинейной части

$$x_2 = A \sin \omega t. \quad (21)$$

Для нелинейного уравнения, например, вида

$$f(x_2, \dot{x}_2) = x_1 \quad (22)$$

получим гармонически линейризованное уравнение

$$\frac{q'(A, \omega)}{\omega} \dot{x}_2 + q(A, \omega) x_2 = x_1. \quad (23)$$



При этом коэффициенты гармонической линейаризации  $q$  и  $q'$  определяются по формулам (13) и (14), где  $A$  и  $\omega$  обозначают амплитуду и частоту выходного сигнала  $x_2$ .

В случаях когда под знаком нелинейных функций находятся и входная и выходная координаты (см. уравнения (2)), методика гармонической линейаризации имеет некоторые особенности.

Пусть, например, нелинейное уравнение имеет вид

$$f_2(\dot{x}_2, x_2) = f_1(x_1). \quad (24)$$

Полагаем, что

$$x_2 = A_2 \sin \omega t, \quad x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi), \quad (25)$$

т. е. рассматриваем сигналы на входе и выходе нелинейной части имеющими разные амплитуды  $A_1$  и  $A_2$ , а фазовый сдвиг этих сигналов считаем равным  $\varphi$ .

Поочередно гармонически линейаризируем нелинейности  $f_2(\dot{x}_2, x_2)$  и  $f_1(x)$ . Имеем

$$f_2(\dot{x}_2, x_2) = q_2(A_2, \omega) x_2 + \frac{q'_2(A_2, \omega)}{\omega} \dot{x}_2;$$

здесь коэффициенты  $q_2$  и  $q'_2$  в соответствии с формулами (13) и (14) равны:

$$q_2(A_2, \omega) = \frac{1}{\pi A_2} \int_0^{2\pi} f_2(A_2 \sin u, A_2 \omega \cos u) \sin u \, du, \quad (26)$$

$$q'_2(A_2, \omega) = \frac{1}{\pi A_2} \int_0^{2\pi} f_2(A_2 \sin u, A_2 \omega \cos u) \cos u \, du. \quad (27)$$

Положив в (25)  $u = \omega t + \varphi$ , найдем

$$f_1(x_1) = q_1(A_1) x_1 + \frac{q'_1(A_1)}{\omega} \dot{x}_1,$$

где

$$q_1(A_1) = \frac{1}{\pi A_1} \int_0^{2\pi} f_1(A_1 \sin u) \sin u \, du, \quad (28)$$

$$q'_1(A_1) = \frac{1}{\pi A_1} \int_0^{2\pi} f_1(A_1 \sin u) \cos u \, du. \quad (29)$$

Следовательно, гармонически линейаризованное уравнение (24) имеет вид

$$q_2(A_2, \omega) x_2 + \frac{q'_2(A_2, \omega)}{\omega} \dot{x}_2 = q_1(A_1) x_1 + \frac{q'_1(A_1)}{\omega} \dot{x}_1. \quad (30)$$

Амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  синусоидальных сигналов на входе и выходе нелинейной части, как следует из уравнения линейной части (3), связаны между собой функциональной зависимостью

$$A_1 = A_2 |W_n(j\omega)|,$$

а фазовый сдвиг

$$\varphi = \arg W_n(j\omega).$$

**2. Определение параметров предельных циклов.** Амплитуда и частота собственных периодических колебаний нелинейной автоматической системы в общем случае являются неизвестными и подлежат определению. Рассмотрим некоторые способы приближенного определения параметров предельных циклов, в основу которых положена идея гармонической линейаризации нелинейностей.

Пусть уравнение нелинейной части системы имеет вид (4)

$$x_2 = f(x_1, \dot{x}_1),$$

тогда ему соответствует гармонически линейаризованное уравнение (15). Подставив  $x_2$  из (15) в уравнение линейной части (3), получим линейное дифференциальное уравнение замкнутой автоматической системы:

$$\left\{ D_n(p) + M_n(p) \left[ q(A, \omega) + \frac{q'(A, \omega)}{\omega} p \right] \right\} x_1 = 0, \quad (31)$$

коэффициенты которого зависят от коэффициентов гармонической линейаризации  $q(A, \omega)$  и  $q'(A, \omega)$ . При постоянных значениях  $A$  и  $\omega$  уравнение (31) является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Этому уравнению соответствует характеристический многочлен

$$D(\lambda) = D_n(\lambda) + M_n(\lambda) \left[ q(A, \omega) + \frac{q'(A, \omega)}{\omega} \lambda \right]. \quad (32)$$

Наличие в линейной автоматической системе собственных периодических колебаний с амплитудой  $A = A_n$  и частотой  $\omega = \omega_n$ , т. е. колебаний вида

$$x_1 = A_n \sin \omega_n t, \quad (33)$$

означает, что характеристический многочлен  $D(\lambda)$  имеет на мнимой оси пару корней  $\lambda = \pm j\omega_n$ , т. е. автоматическая система находится на границе устойчивости.

Из критерия Михайлова следует, что система будет находиться на границе устойчивости, если годограф  $D(j\omega)$  проходит через начало координат (рис. 132). При этом отметка  $\omega$  на кривой  $D(j\omega)$ ,

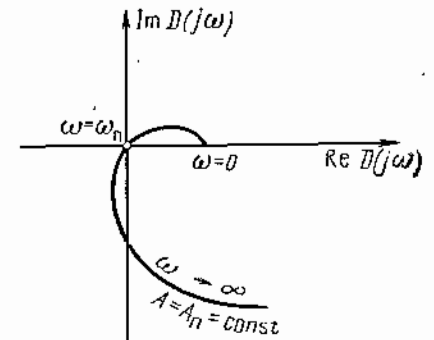


Рис. 132

соответствующая началу координат (см. рис. 132), является частотой собственного периодического колебания системы, т. е.  $\omega = \omega_n$ . Отсюда вытекает следующий способ определения амплитуды  $A_n$  и частоты  $\omega_n$  собственных периодических колебаний. Подставим в характеристический многочлен  $D(\lambda)$   $\lambda = j\omega$  и выделим вещественную и мнимую части. Из равенства (32) видно, что вещественная и мнимая части зависят от параметров  $A$  и  $\omega$ , т. е.

$$D(j\omega) = U(A, \omega) + jV(A, \omega). \quad (34)$$

Потребуем, чтобы годограф  $D(j\omega)$  проходил через начало координат; при этом, положив  $A = A_n$ ,  $\omega = \omega_n$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} U(A_n, \omega_n) &= 0, \\ V(A_n, \omega_n) &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

из которой можно аналитически определить амплитуду  $A_n$  и частоту  $\omega_n$  собственных периодических колебаний. В соответствии с основной идеей гармонической линеаризации таким образом найденные значения  $A_n$  и  $\omega_n$  могут рассматриваться как параметры предельного цикла нелинейной автоматической системы.

Рассмотрим еще один из способов определения значений  $A_n$  и  $\omega_n$ , основывающийся на использовании критерия Найквиста. Пусть, как и выше, гармонически линеаризованное уравнение нелинейной части системы имеет вид (15). Тогда можно определить приближенную передаточную функцию

$$W_n(p; \omega, A) = q(A, \omega) + \frac{q'(A, \omega)}{\omega} p, \quad (36)$$

а сделав подстановку  $p = j\omega$ , найти приближенную амплитудно-фазовую характеристику нелинейной части

$$W_n(j\omega, A) = q(A, \omega) + jq'(A, \omega). \quad (37)$$

Эта характеристика зависит как от частоты  $\omega$ , так и от амплитуды  $A$  гармонического сигнала на входе нелинейной части автоматической системы.

В соответствии с критерием Найквиста, линеаризованная автоматическая система будет находиться на границе устойчивости, если амплитудно-фазовая характеристика (по первой гармонике) разомкнутой системы проходит через точку  $(-1, j0)$ . Следовательно, при выполнении равенства

$$W(j\omega) = W_n(j\omega) W_n(j\omega, A) = -1 \quad (38)$$

в системе возникают собственные периодические колебания с амплитудой и частотой, равными тем значениям  $A_n$  и  $\omega_n$ , при которых амплитудно-фазовая характеристика  $W(j\omega)$  проходит через точку  $(-1, j0)$ . Условие (38) является приближенным условием возникновения в нелинейной автоматической системе предельных циклов.

Введем обозначение

$$M_n(j\omega, A) = \frac{1}{W_n(j\omega, A)}, \quad (39)$$

тогда условие (38) запишется в виде

$$W_n(j\omega_n) = -M_n(j\omega_n, A_n). \quad (40)$$

Здесь левая часть равенства зависит от частоты  $\omega = \omega_n$ , а правая зависит от частоты  $\omega = \omega_n$  и от амплитуды  $A = A_n$ . Однако во многих практически важных случаях правая часть равенства (39) зависит

только от амплитуды, при этом условие (40) будет иметь вид

$$W_n(j\omega_n) = -M_n(A_n). \quad (41)$$

Для определения неизвестных значений  $A_n$  и  $\omega_n$  необходимо решить уравнение (40); решение наиболее удобно производить графически. Особенно просто определяются графическим путем значения  $A_n$  и  $\omega_n$ , если условие появления в системе предельных циклов имеет вид (41). В этом случае на комплексной плоскости следует построить кривые  $W_n(j\omega)$  и  $-M_n(A)$ , придавая  $\omega$  и  $A$  значения от 0 до  $\infty$  (рис. 133). Если кривые  $W_n(j\omega)$  и  $-M_n(A)$  пересекаются, то это означает, что в автоматической системе существует предельный цикл. Наличие нескольких точек пересечения свидетельствует о существовании нескольких предельных циклов. Частота предельного цикла равна значению отметки частоты  $\omega = \omega_n$  на кривой  $W_n(j\omega)$ , а амплитуда равна значению отметки амплитуды  $A = A_n$  на кривой  $-M_n(A)$  в точке пересечения этих двух кривых.

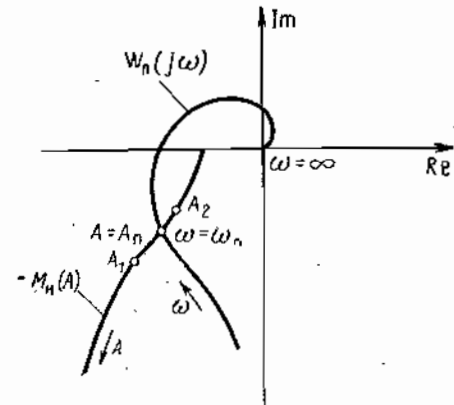


Рис. 133

При графическом решении уравнения (40) приходится строить на плоскости  $W_n(j\omega)$  семейство кривых  $-M_n(j\omega, A)$ , изменяя  $A$  от 0 до  $\infty$  и фиксируя для каждой кривой значение частоты  $\omega$  как параметр. При этом искомые значения  $A_n$  и  $\omega_n$  определяются как соответствующие отметки точки пересечения кривой  $W_n(j\omega)$  с той кривой из семейства  $-M_n(j\omega, A)$ , у которой значение параметра  $\omega$  совпадает со значением отметки  $\omega$  на кривой  $W_n(j\omega)$  в точке их пересечения.

**Пример 2.** Определить параметры  $A_n$  и  $\omega_n$  предельных циклов в автоматической системе (см. рис. 128), нелинейная часть которой представляет собой идеальное релейное звено (см. рис. 129), а линейная часть является последовательным соединением интегрирующего и колебательного звеньев с передаточной функцией

$$W_n(s) = \frac{k}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)},$$

причем  $k = 100 \frac{1}{\text{сек}}$ ,  $T = 0,6$  сек,  $\xi = 0,4$ .

Решение этой задачи проведем двумя способами, рассмотренными выше. В примере 1 было установлено, что гармонически линеаризованное уравнение идеального релейного звена есть

$$x_2 = \frac{4c}{\pi A} x_1.$$

Уравнение линейной части системы имеет вид

$$p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) x_1 = -k x_2.$$

Исключив из этих уравнений какую-либо координату, например  $x_2$ , найдем характеристический многочлен автоматической системы  $D(\lambda)$ :

$$D(\lambda) = T^2\lambda^3 + 2\xi T\lambda^2 + \lambda + k \frac{4c}{\pi A}$$

Делая в этом многочлене подстановку  $\lambda = j\omega$ , отделяя вещественную и мнимую части и приравнявая их нулю, получим систему уравнений для определения неизвестных значений  $A_n$  и  $\omega_n$ :

$$U(A_n, \omega_n) = -2\xi T\omega_n^2 + k \frac{4c}{\pi A_n} = 0,$$

$$V(A_n, \omega_n) = -T^2\omega_n^3 + \omega_n = 0.$$

Из трех решений второго уравнения этой системы  $\omega_n = 0$ ,  $\omega_n = \frac{1}{T}$ ,  $\omega_n = -\frac{1}{T}$  лишь значение  $\omega_n = \frac{1}{T}$  может соответствовать частоте физически возможного предельного цикла. При  $\omega_n = \frac{1}{T}$  из первого уравнения найдем  $A_n = \frac{kT}{\pi\xi}$ . Так

как параметры  $A$  и  $\omega$  имеют действительные и положительные значения, то в рассматриваемой автоматической системе существует предельный цикл с относительной амплитудой  $\frac{A_n}{c} = \frac{kT}{\pi\xi} = \frac{100 \cdot 0,5}{\pi \cdot 0,4} = 47,8$  и частотой  $\omega_n = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,6} = 1,67$  1/сек.

Выполним теперь решение этой задачи графически. На рис. 134 построена амплитудно-фазовая характеристика  $W_n(j\omega)$ , а также характеристика  $-M_n(A) = -\frac{1}{q(A)} = -\frac{\pi A}{4c}$  для различных значений относительной амплитуды  $\frac{A}{c}$ . Так как кривые  $W_n(j\omega)$  и

$-M_n(A)$  пересекаются, то в автоматической системе существует предельный цикл. Отметка точки пересечения на кривой  $-M_n(A)$  равна значению относительной амплитуды предельного цикла,  $\frac{A}{c} = \frac{A_n}{c} = 47,8$ , а отметка точки пересечения на кривой  $W_n(j\omega)$  равна частоте предельного цикла  $\omega = \omega_n = 1,67$  1/сек.

**3. Устойчивость предельных циклов.** После того как в автоматической системе установлено наличие предельных циклов, необходимо исследовать их на устойчивость. В гл. V было отмечено, что в нелинейной системе могут существовать как неустойчивые, так и устойчивые предельные циклы. Во втором случае предельные циклы являются автоколебаниями, т. е. представляют собой устойчивые собственные периодические колебания нелинейной системы. Неустойчивые предельные циклы не являются отражением физически существующего и реально наблюдаемого периодического колебательного процесса в системе и в большинстве случаев характеризуют границу устойчивости автоматической системы в малом.

Ниже рассмотрены два способа приближенного исследования устойчивости предельных циклов нелинейных систем. В основу этих способов положена, как и ранее, идея гармонической линеаризации нелинейностей.

Первый способ удобен при аналитическом анализе устойчивости предельных циклов и требует знания вещественной и мнимой частей  $U(A, \omega)$ ,  $V(A, \omega)$  годографа Михайлова (34). Рассмотрим сущность этого способа. Предположим, что в системе возник предельный цикл с амплитудой  $A = A_n$  и частотой  $\omega = \omega_n$ . Как показано в п. 2, годограф  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  проходит при наличии предельного цикла через начало координат (см. рис. 132), причем для всей кривой значения  $A = A_n = \text{const}$  и в начале координат отметка  $\omega = \omega_n$ .

Дадим амплитуде предельного цикла приращение  $\Delta A$ , т. е. положим  $A = A_n + \Delta A$ . При этом первоначальное положение годографа  $D(j\omega)$  изменится (на рис. 135 новое положение кривой  $D(j\omega)$  показано лишь в окрестности начала координат). Пусть при  $\Delta A > 0$  кривая  $D(j\omega)$  занимает положение 1, а при  $\Delta A < 0$  — положение 2. В соответствии с критерием Михайлова положение кривой 1 относится к устойчивой системе, а положение 2 — к неустойчивой. Это означает, что в первом случае амплитуда колебаний уменьшается до значения  $A = A_n$ , а во втором — увеличивается до значения  $A = A_n$ . В обоих случаях приращение  $\Delta A$  стремится к нулю, т. е. предельный цикл является устойчивым. Если при  $\Delta A < 0$  кривая занимает положение 1, а при  $\Delta A > 0$  — положение 2, то в первом случае амплитуда колебаний уменьшается до нуля, а во втором — увеличивается до бесконечности, т. е.  $\Delta A$  не стремится к нулю, и предельный цикл является неустойчивым.

Следовательно, для того чтобы предельный цикл был устойчивым, т. е. представлял собой автоколебания, необходимо, чтобы при  $\Delta A > 0$  годограф Михайлова занимал положение 1, а при  $\Delta A < 0$  — положение 2. Другими словами, если вектор  $r$ , характеризующий перемещение точки 0 кривой  $D(j\omega)$  при изменении  $A$ , расположен при  $\Delta A > 0$  справа по отношению к наблюдателю, смотрящему вдоль вектора  $l$ , касательного к кривой в точке 0 (рис. 135), а при  $\Delta A < 0$  вектор  $r$  расположен слева, то предельный цикл будет устойчивым. Дадим этому необходимому условию математическое описание.

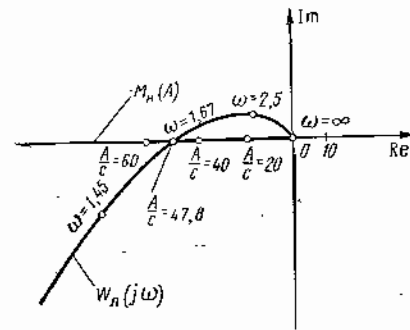


Рис. 134

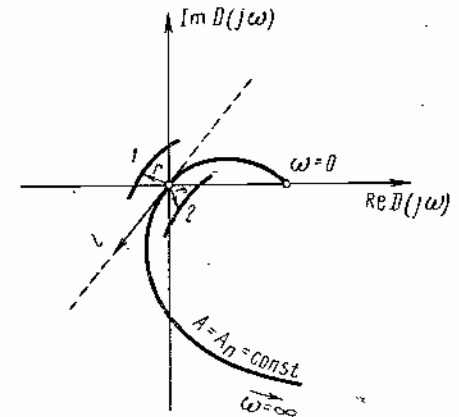


Рис. 135

Определим модуль векторного произведения векторов  $r$  и  $l$ :

$$|r \times l| = rl \sin(\widehat{rl}) = \begin{vmatrix} u_r v_l \\ u_l v_r \end{vmatrix} = u_r v_l - u_l v_r,$$

где  $u_r, v_r$  и  $u_l, v_l$  — проекции соответственно векторов  $r$  и  $l$  на оси  $U$  и  $V$ ;  $r$  и  $l$  — модули этих векторов. Следовательно,

$$\sin(\widehat{rl}) = \frac{u_r v_l - u_l v_r}{rl}. \quad (42)$$

Если годограф Михайлова  $D(j\omega)$  при  $A = A_n + \Delta A$  занимает положение 1, то угол  $(\widehat{rl})$  является положительным, так как вращение вектора  $r$  для кратчайшего совмещения с вектором  $l$  происходит против часовой стрелки. В этом случае

$$u_r v_l - u_l v_r > 0. \quad (43)$$

Если годограф  $D(j\omega)$  при  $A = A_n + \Delta A$  занимает положение 2, то угол  $(\widehat{rl})$  будет отрицательным, поскольку вращение вектора  $r$  для кратчайшего совмещения с вектором  $l$  должно быть по часовой стрелке. При этом

$$u_r v_l - u_l v_r < 0. \quad (44)$$

Дадим параметрам  $A = A_n$  и  $\omega = \omega_n$  соответственно малые приращения  $\Delta A$  и  $\Delta \omega$ . Тогда проекции векторов  $r$  и  $l$  на оси  $U$  и  $V$  можно приближенно записать в виде:

$$u_r = \left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_n \Delta A, \quad v_r = \left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)_n \Delta A, \quad (45)$$

$$u_l = \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)_n \Delta \omega, \quad v_l = \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)_n \Delta \omega. \quad (46)$$

Индекс  $n$  здесь означает, что соответствующие частные производные находятся при значениях  $A = A_n, \omega = \omega_n$ .

Пусть  $\Delta \omega > 0$ , т. е. вектор  $l$  направлен по касательной к кривой Михайлова в сторону возрастания параметра  $\omega$ . При  $\Delta A > 0$  получим, подставляя (45) и (46) в (43):

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_n \Delta A \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)_n \Delta \omega - \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)_n \Delta \omega \left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)_n \Delta A > 0.$$

При  $\Delta A < 0$  аналогично найдем

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_n \Delta A \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)_n \Delta \omega - \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)_n \Delta \omega \left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)_n \Delta A < 0.$$

Разделив первое неравенство на положительную величину  $\Delta A \cdot \Delta \omega$ , а второе неравенство — на отрицательную величину  $\Delta A \cdot \Delta \omega$  и изменив при этом во втором неравенстве его смысл, получим в обоих случаях

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_n \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)_n - \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)_n \left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)_n > 0. \quad (47)$$

Неравенство (47) устанавливает необходимое условие устойчивости предельного цикла. Это условие имеет аналитический характер; функции  $U = U(A, \omega)$  и  $V = V(A, \omega)$  легко определяются по виду характеристического многочлена (34).

**Пример 3.** Исследовать аналитически устойчивость предельного цикла автоматической системы, рассмотренной в примере 2.

Из примера 2 получим:

$$U(A, \omega) = -2\xi T \omega^3 + k \frac{4c}{\pi A}, \quad V(A, \omega) = -T^2 \omega^3 + \omega,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_n = -\frac{4kc}{\pi A^2} \Big|_{A = \frac{kcT}{\pi\xi}} = -\frac{4\pi\xi^2}{kT^2c}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)_n = (-3T^2\omega^2 + 1) \Big|_{\omega = \frac{1}{T}} = -2,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)_n = -4\xi T \omega \Big|_{\omega = \frac{1}{T}} = -4\xi, \quad \frac{\partial V}{\partial A} = 0.$$

Следовательно, учитывая условие (47), получим

$$\left(-\frac{4\pi\xi^2}{kT^2c}\right)(-2) > 0,$$

т. е. предельный цикл с параметрами  $A_n = \frac{kcT}{\pi\xi}, \omega_n = \frac{1}{T}$  устойчив.

Второй способ позволяет производить приближенное графическое исследование устойчивости предельных циклов и основан на использовании критерия Найквиста. В п. 2 было отмечено, что при выполнении равенства (38) в автоматической системе возникает по крайней мере один предельный цикл с амплитудой  $A_n$  и частотой  $\omega_n$ . При значениях  $A = A_n$  и  $\omega = \omega_n$  амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы  $W(j\omega)$  проходит через точку  $(-1, j0)$ . Как и прежде, дадим амплитуде предельного цикла  $A_n$  приращение  $\Delta A$ , т. е. полагаем  $A = A_n + \Delta A$ . При этом характеристика  $W(j\omega)$  сместится так, что она будет или не будет охватывать точку  $(-1, j0)$ . Если при  $\Delta A > 0$  характеристика  $W(j\omega)$  не охватывает, а при  $\Delta A < 0$  — охватывает указанную точку, то в соответствии с критерием Найквиста в первом случае амплитуда колебаний уменьшается до значения  $A = A_n$ , а во втором увеличивается до того же значения  $A = A_n$ . В обоих случаях приращение  $\Delta A$  стремится к нулю, т. е. предельный цикл является устойчивым. Если при  $\Delta A > 0$  характеристика  $W(j\omega)$  охватывает, а при  $\Delta A < 0$  не охватывает точку  $(-1, j0)$ , то предельный цикл, как легко убедиться, применив критерий Найквиста, будет неустойчивым.

Определение параметров предельных циклов ранее производилось на основе условия (40) без построения амплитудно-фазовой характеристики  $W(j\omega)$ , но с использованием характеристик  $W_n(j\omega)$  и  $M_n(j\omega, A)$ , поэтому целесообразно отмеченное выше условие устойчивости предельных циклов переформулировать применительно к этим функциям. Охват характеристикой  $W(j\omega)$  при  $\Delta A < 0$  точки  $(-1, j0)$  соответствует охвату характеристикой  $W_n(j\omega)$  точки на кривой —  $M_n(A)$ , для которой  $\Delta A < 0$  (точка  $A_2$  на рис. 133). Если

$W(j\omega)$  при  $\Delta A > 0$  не охватывает точку  $(-1, j0)$ , то  $W_n(j\omega)$  не охватывает точку на кривой  $-M_n(A)$ , для которой  $\Delta A > 0$  (точка  $A_1$  на рис. 133). Следовательно, для того чтобы предельный цикл с

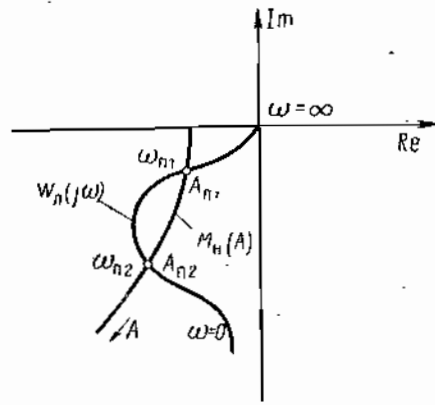


Рис. 136

амплитудой  $A_n$  и частотой  $\omega_n$  был устойчив, необходимо выполнение условия: изображающая точка при перемещении по кривой  $-M_n(A)$  в направлении возрастания  $A$  должна подходить к точке пересечения кривых  $W_n(j\omega)$  и  $-M_n(A)$  изнутри амплитудно-фазовой характеристики  $W_n(j\omega)$ . На рис. 136 изображены характеристики  $W_n(j\omega)$  и  $-M_n(A)$ , пересекающиеся в двух точках; при этом в системе существуют два предельных цикла с параметрами  $A_{n1}$ ,  $\omega_{n1}$  и  $A_{n2}$ ,  $\omega_{n2}$ . Из условия устойчивости ясно, что лишь предельный цикл

с амплитудой  $A_{n2}$  и частотой  $\omega_{n2}$  является устойчивым, т. е. представляет собой автоколебания.

Оба рассмотренных способа исследования устойчивости предельных циклов дают лишь необходимые условия устойчивости. Однако эти условия являются и достаточными для многих важных практических задач. Можно показать, что рассмотренные условия тем ближе к достаточным, чем лучше приведенная линейная часть системы фильтрует высшие гармоники.

## ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### Глава XIV

#### ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

##### § 42. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

**1. Основные понятия.** В настоящее время под операционным исчислением понимается совокупность методов прикладного математического анализа, позволяющих экономными и непосредственно ведущими к цели средствами получать решения линейных дифференциальных уравнений, а также разностных и некоторых типов интегральных уравнений [3].

Операционное исчисление нашло широкое применение в теории автоматического регулирования, где с его помощью производится анализ переходных и установившихся процессов в автоматических системах. Сущность операционного метода заключается в следующем. Пусть задана некоторая функция  $f(t)$  действительной переменной  $t$ , причем такая, что для нее существует преобразование Лапласа ( $\mathcal{L}$ -преобразование)

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

т. е. интеграл в правой части этого равенства является сходящимся. Используя  $\mathcal{L}$ -преобразование, можно каждой преобразуемой по Лапласу функции  $f(t)$  (в этом случае функция  $f(t)$  называется «оригиналом») поставить в соответствие функцию  $F(s)$  комплексной переменной  $s$  (при этом функция  $F(s)$  называется «изображением» функции  $f(t)$ ). Преобразование Лапласа обладает рядом замечательных свойств. Например, дифференцированию оригинала  $f(t)$  по переменной  $t$  соответствует операция умножения изображения  $F(s)$



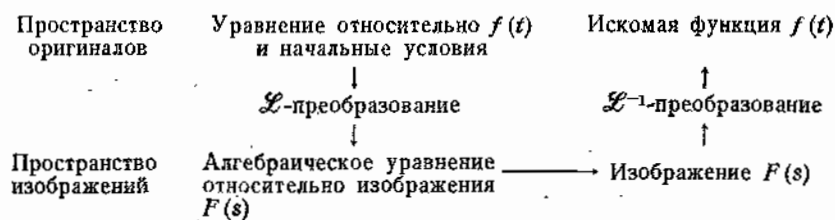
на комплексную переменную  $s$ , а интегрированию оригинала  $f(t)$  соответствует операция деления  $F(s)$  на  $s$ . Таким образом, операции дифференцирования и интегрирования оригинала заменяются в пространстве изображений оригинала более простыми операциями алгебры — соответственно умножением и делением изображения  $F(s)$  на  $s$ . Это позволяет дифференциальное уравнение, записанное относительно искомой функции  $f(t)$ , заменить в пространстве изображений на алгебраическое уравнение относительно изображения  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ . Решив это алгебраическое уравнение и найдя  $F(s)$ , мы получим изображение решения исходного дифференциального уравнения. Для определения самого решения можно воспользоваться обратным преобразованием Лапласа ( $\mathcal{L}^{-1}$ -преобразованием), устанавливающим связь между изображением  $F(s)$  и ему соответствующим оригиналом  $f(t)$ :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad t > 0,$$

где  $c = \text{Re } s$ .

Во многих случаях при нахождении решения  $f(t)$  можно избежать непосредственного вычисления этого интеграла, воспользовавшись таблицей соответствий «оригинал — изображение» (см. таблицу оригиналов и изображений (стр. 491); более подробная таблица приведена в [6]), а также рассмотренными в настоящей главе способами определения оригинала по ему соответствующему изображению.

Метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью операционного исчисления сводится, таким образом, к следующей наглядной схеме:



Ниже рассмотрены основные свойства преобразования Лапласа, показано применение операционного исчисления для решения линейных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, а также рассмотрены некоторые приложения операционного метода к анализу автоматических систем.

**2. Интеграл Лапласа. Аналитичность изображения.** Рассмотрим функцию  $f(t)$  вещественной переменной  $t$ , при этом будем предполагать выполненными следующие условия:

1. Функция  $f(t)$  непрерывна для всех значений  $t \geq 0$ . Непрерывность может быть нарушена лишь в отдельных точках, являющихся точками разрыва непрерывности первого рода, причем число этих точек должно быть конечным на любом интервале ограниченной длины.

2. Функция  $f(t) = 0$  для значений  $t < 0$ .

3. Функция  $f(t)$  имеет ограниченный порядок возрастания, т. е. можно указать такие постоянные числа  $M > 0$  и  $c_0 \geq 0$ , при которых выполняется неравенство

$$f(t) < Me^{c_0 t} \quad (t > 0).$$

Число  $c_0$  является показателем роста функции  $f(t)$ . Функция  $f(t)$ , удовлетворяющая условиям 1—3, называется оригиналом. Многие функции, встречающиеся при описании процессов в автоматических системах, являются оригиналами. Например, оригиналами будут функции  $1(t)$ ,  $A \sin \omega t 1(t)$ ,  $A \cos \omega t 1(t)$ ,  $t^n 1(t)$  ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ),  $e^{\alpha t} 1(t)$ ,  $e^{-\alpha t} 1(t)$  ( $\alpha > 0$ ) и ряд других функций. Наличие в этих функциях множителя — единичной ступенчатой функции  $1(t)$  — обеспечивает выполнение второго условия, т. е. обращение функции  $f(t)$  в ноль при  $t < 0$ . С физической точки зрения это условие является вполне естественным. Действительно, в автоматических системах обычно представляют интерес процессы, начинающиеся с некоторого момента времени. Например, если функция  $f(t)$  характеризует отклонение регулируемой величины, происходящее при приложении к системе в момент  $t = t_0$  возмущающего воздействия, то очевидно, что при  $t < t_0$   $f(t) = 0$ , так как реакция на возмущение не может возникнуть ранее момента времени приложения к системе самого возмущения. Этот момент времени может быть принят за нулевой момент, т. е. можно полагать, что  $t_0 = 0$ ; тогда при  $t < 0$  получим  $f(t) = 0$ . Условие 2 поэтому естественно учитывает начальные условия, в которых находится автоматическая система и не является обременительным с математической точки зрения. Как правило, условия 1 и 3 также выполняются для большинства функций  $f(t)$ , характеризующих процессы в автоматических системах.

Если хотя бы одно из условий 1—3 не выполняется, то функция  $f(t)$  не будет являться оригиналом. Согласно условию 1 оригинал  $f(t)$  не может обращаться в бесконечность при  $0 \leq t < \infty$ , поэтому не являются оригиналами функции  $\frac{1}{t}$ ,  $\text{tg } \omega t$ . Не является оригиналом также функция  $e^{t^2}$ , поскольку для этой функции не выполнено условие 3: функция  $e^{t^2}$  при  $t \rightarrow \infty$  возрастает быстрее, чем возрастает функция  $e^{c_0 t}$ .

Функция  $F(s)$  комплексного переменного  $s = c + j\omega$ , определяемая равенством

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (1)$$

называется изображением функции  $f(t)$  по Лапласу. Интеграл в

правой части равенства (1) называется *интегралом Лапласа*. Этот несобственный интеграл по определению равен

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon}^T f(t) e^{-st} dt, \quad (2)$$

причем  $\varepsilon \rightarrow +0$  означает правый предельный переход.

С помощью интеграла Лапласа устанавливается соответствие между функцией  $f(t)$  и ее изображением  $F(s)$ . Процесс получения изображения  $F(s)$  по заданной функции  $f(t)$  называется *преобразованием Лапласа*. Как видно из (1), это преобразование состоит в умножении  $f(t)$  на  $e^{-st}$  и интегрировании по  $t$  получившегося произведения в пределах от 0 до  $\infty$ . Символически преобразование Лапласа записывается в виде

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s). \quad (3)$$

Если функции  $f(t)$  соответствует изображение  $F(s)$ , то это соответствие часто записывают следующим образом:

$$f(t) \doteq F(s), \text{ или } f(t) \doteq F(s).$$

Интеграл Лапласа будет сходящимся, если существует предел в правой части равенства (2).

Установим, для каких функций  $f(t)$  существует интеграл (1); другими словами — какие функции  $f(t)$  преобразуемы по Лапласу? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

**Теорема 1.** Если функция  $f(t)$  является оригиналом, то эта функция преобразуема по Лапласу и ее изображение  $F(s)$  определено в полуплоскости  $\text{Re } s > c_0$ , где  $c_0$  — показатель роста функции  $f(t)$ .

**Доказательство.** Утверждение теоремы будет доказано, если окажется возможным показать, что интеграл в правой части равенства (1) сходится в части плоскости комплексного переменного  $s$ , для которой  $\text{Re } s > c_0$ .

Учитывая условие 3 существования оригинала, получим следующую оценку:

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| |e^{-st}| dt < \int_0^{\infty} M e^{c_0 t} |e^{-st}| dt;$$

но  $|e^{-st}| = |e^{-(\sigma + j\omega)t}| = e^{-\sigma t}$ , поэтому

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right| < M \int_0^{\infty} e^{-(\sigma - c_0)t} dt = -M \frac{e^{-(\sigma - c_0)t}}{\sigma - c_0} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{\sigma - c_0}. \quad (4)$$

Так как  $M < \infty$ , то при  $\sigma > c_0$  ( $\sigma = \text{Re } s$ ) интеграл Лапласа сходится.

Следовательно, функция  $f(t)$ , являющаяся оригиналом, преобразуема по Лапласу, и ее изображение  $F(s)$  определено в части плоскости комплексного переменного  $s$ , находящейся правее прямой,

параллельной мнимой оси и проходящей от нее на расстоянии  $c_0$  (заштрихованная полуплоскость на рис. 137).

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует, что существует интеграл  $\int_0^{\infty} |f(t) e^{-st}| dt$ , т. е. интеграл Лапласа при  $\text{Re } s > c_0$  является не

только сходящимся, но и абсолютно сходящимся интегралом. На этом основании число  $c_0$  называют *абсциссой абсолютной сходимости* интеграла (1). Ее можно определить как нижнюю грань совокупности чисел  $c$ , для которой

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-st}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-ct} dt$$

сходится \*).

Покажем теперь, что интеграл Лапласа при  $\text{Re } s > c_0$  сходится равномерно. Имеем

$$|f(t) e^{-st}| < M e^{-(\sigma - c_0)t}$$

при  $t \geq 0$  и при значениях  $s$ , для которых  $\text{Re } s > c_0$  и, кроме того,

интеграл  $\int_0^{\infty} M e^{-(\sigma - c_0)t} dt$ , как показано выше, сходится; поэтому

в соответствии с признаком равномерной сходимости несобственных интегралов \*\*\*) интеграл Лапласа сходится равномерно относительно  $s$  при  $\text{Re } s > c_0$ .

Отметим еще одно свойство изображения  $F(s)$ , вытекающее из теоремы 1. Из неравенства (4) получим, что при стремлении  $\text{Re } s = \sigma$  к  $+\infty$  модуль интеграла Лапласа стремится к нулю. Следовательно, если функция  $F(s)$  является изображением, то справедливо равенство

$$\lim_{\text{Re } s = \sigma \rightarrow \infty} F(s) = 0. \quad (5)$$

Следующая теорема устанавливает свойство изображения  $F(s)$ .

**Теорема 2.** Изображение  $F(s)$  оригинала  $f(t)$  в полуплоскости, для которой  $\text{Re } s > c_0$ , где  $c_0$  — показатель роста оригинала, является аналитической функцией.

**Доказательство.** В соответствии с теоремой Морера (см. § 27) изображение  $F(s)$  будет аналитической функцией в полуплоскости  $\text{Re } s > c_0$ , если, во-первых, в этой полуплоскости функция  $F(s)$  непрерывна и, во-вторых, ее интеграл вдоль любой замкнутой кривой, расположенной в этой полуплоскости, равен нулю.

\*) При таком определении следует допустить существование и отрицательных значений  $c_0$ .

\*\*) См., например: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. Физматгиз, 1962, стр. 689.

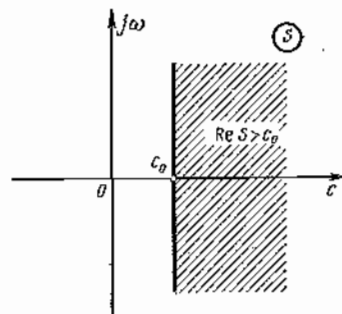


Рис. 137



Непрерывность  $F(s)$  при  $\operatorname{Re} s > c_0$  вытекает из доказанной выше равномерной сходимости интеграла Лапласа в указанной полуплоскости относительно параметра  $s$ .

Проинтегрируем функцию  $F(s)$  по какому-либо произвольному замкнутому контуру  $l$ , расположенному в полуплоскости  $\operatorname{Re} s > c_0$ :

$$\oint_l F(s) ds = \oint_l \left\{ \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right\} ds.$$

Интеграл Лапласа при  $\operatorname{Re} s > c_0$  сходится равномерно, в этом случае, как известно<sup>\*</sup>), можно изменить порядок интегрирования в правой части написанного равенства:

$$\oint_l F(s) ds = \int_0^{\infty} f(t) \left\{ \int_l e^{-st} ds \right\} dt.$$

Подынтегральная функция во внутреннем интеграле является функцией аналитической, поэтому в соответствии с теоремой Коши внутренний интеграл равен нулю. Следовательно, выполнено и второе условие теоремы Морера.

Теорема доказана.

Приведем примеры нахождения изображений.

**Пример 1.** Найти изображение единичной ступенчатой функции (см. рис. 106, а)

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Учитывая равенство (1), при  $\operatorname{Re} s > 0$  имеем:

$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

Следовательно, справедливо соответствие

$$1(t) \div \frac{1}{s}, \quad \text{или} \quad \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}. \quad (6)$$

Абсцисса абсолютной сходимости для функции  $1(t)$   $c_0 = 0$ . Изображение  $\frac{1}{s}$

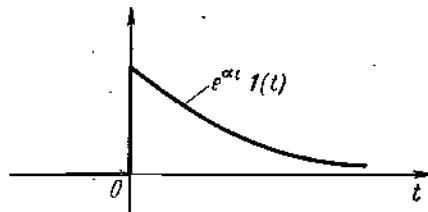


Рис. 138

(на рис. 138 изображена усеченная экспонента при действительном  $\alpha < 0$ ).  
Имеем

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} 1(t)] = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt.$$

<sup>\*</sup> См., например: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. Физматгиз, 1962, стр. 718.

При  $\operatorname{Re}(s - \alpha) > 0$ , т. е. при  $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$ , интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = -\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-\alpha}.$$

Получили соответствие  $e^{\alpha t} 1(t) \div \frac{1}{s-\alpha}$ , или

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} 1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}. \quad (7)$$

Для рассматриваемой функции абсцисса абсолютной сходимости  $c_0 = \operatorname{Re} \alpha$ . При  $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$  изображение  $\frac{1}{s-\alpha}$  всюду определено и является аналитической функцией.

Наличие у функции  $e^{\alpha t} 1(t)$  в последнем примере множителя  $1(t)$  обеспечивает выполнение условия 2 существования оригинала. В дальнейшем будем полагать это условие выполненным, и при записи функций, подлежащих преобразованию по Лапласу, опускать множитель  $1(t)$ . Например, соответствие (7) будем кратко записывать следующим образом:

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}.$$

При этом будем подразумевать, что преобразовывалась по Лапласу функция

$$e^{\alpha t} 1(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

**Пример 3.** Найти изображение функции  $f(t) = t$ .  
Интегрируя по частям, получим при  $\operatorname{Re} s > 0$ :

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -\frac{t e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}.$$

Следовательно,

$$t \div \frac{1}{s^2}, \quad \text{или} \quad \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$$

Повторным интегрированием по частям легко показать, что

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad (8)$$

где  $n \geq 0$  целое число.

Интеграл вида (1) определяет одностороннее преобразование Лапласа. В некоторых случаях в теории автоматического регулирования используется *двустороннее преобразование Лапласа*, которое задается равенством

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (9)$$

причем здесь  $f(t) \neq 0$  при  $t < 0$ .

Непрерывность  $F(s)$  при  $\operatorname{Re} s > c_0$  вытекает из доказанной выше равномерной сходимости интеграла Лапласа в указанной полуплоскости относительно параметра  $s$ .

Проинтегрируем функцию  $F(s)$  по какому-либо произвольному замкнутому контуру  $L$ , расположенному в полуплоскости  $\operatorname{Re} s > c_0$ :

$$\int_L F(s) ds = \int_L \left\{ \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right\} ds.$$

Интеграл Лапласа при  $\operatorname{Re} s > c_0$  сходится равномерно, в этом случае, как известно<sup>\*)</sup>, можно изменить порядок интегрирования в правой части написанного равенства:

$$\int_L F(s) ds = \int_0^{\infty} f(t) \left\{ \int_L e^{-st} ds \right\} dt.$$

Подынтегральная функция во внутреннем интеграле является функцией аналитической, поэтому в соответствии с теоремой Коши внутренний интеграл равен нулю. Следовательно, выполнено и второе условие теоремы Морера.

Теорема доказана.

Приведем примеры нахождения изображений.

**Пример 1.** Найти изображение единичной ступенчатой функции (см. рис. 106, а)

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Учитывая равенство (1), при  $\operatorname{Re} s > 0$  имеем:

$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

Следовательно, справедливо соответствие

$$1(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \text{ или } \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}. \quad (6)$$

Абсцисса абсолютной сходимости для функции  $1(t)$   $c_0 = 0$ . Изображение  $\frac{1}{s}$

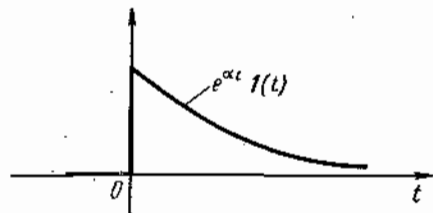


Рис. 138

(на рис. 138 изображена усеченная экспонента при действительном  $\alpha < 0$ ).  
Имеем

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} 1(t)] = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt.$$

<sup>\*)</sup> См., например: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. Физматгиз, 1962, стр. 718.

При  $\operatorname{Re}(s - \alpha) > 0$ , т. е. при  $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$ , интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = -\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-\alpha}.$$

Получили соответствие  $e^{\alpha t} 1(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}$ , или

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} 1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}. \quad (7)$$

Для рассматриваемой функции абсцисса абсолютной сходимости  $c_0 = \operatorname{Re} \alpha$ . При  $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$  изображение  $\frac{1}{s-\alpha}$  всюду определено и является аналитической функцией.

Наличие у функции  $e^{\alpha t} 1(t)$  в последнем примере множителя  $1(t)$  обеспечивает выполнение условия 2 существования оригинала. В дальнейшем будем полагать это условие выполненным, и при записи функций, подлежащих преобразованию по Лапласу, опускать множитель  $1(t)$ . Например, соответствие (7) будем кратко записывать следующим образом:

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}.$$

При этом будем подразумевать, что преобразовывалась по Лапласу функция

$$e^{\alpha t} 1(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

**Пример 3.** Найти изображение функции  $f(t) = t$ .  
Интегрируя по частям, получим при  $\operatorname{Re} s > 0$ :

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -\frac{t e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}.$$

Следовательно,

$$t \leftrightarrow \frac{1}{s^2}, \text{ или } \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$$

Повторным интегрированием по частям легко показать, что

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad (8)$$

где  $n \geq 0$  целое число.

Интеграл вида (1) определяет одностороннее преобразование Лапласа. В некоторых случаях в теории автоматического регулирования используется *двустороннее преобразование Лапласа*, которое задается равенством

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (9)$$

причем здесь  $f(t) \neq 0$  при  $t < 0$ .

Для существования изображения (9) необходимо, чтобы интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-ct} dt$  был сходящимся. Этому требованию не удовлетворяют многие функции, например функции  $f(t) = \text{const}$ ,  $f(t) = A \sin \omega t$ ,  $f(t) = A \cos \omega t$  и др.; поэтому применение двустороннего преобразования Лапласа в теории автоматического регулирования является ограниченным.

В дальнейшем под преобразованием Лапласа будем понимать именно одностороннее преобразование (1).

**3. Формула обращения.** Для перехода от изображения  $F(s)$  к ему соответствующему оригиналу  $f(t)$  необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа; в следующей теореме определяется аналитическое выражение оригинала через изображение.

*Теорема 3.* Оригиналу  $f(t)$  в точках непрерывности определяется равенством

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds, \quad (10)$$

где  $F(s)$  — изображение по Лапласу оригинала  $f(t)$ , а интеграл в правой части этого равенства понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds,$$

и берется вдоль прямой, параллельной мнимой оси и расположенной в полуплоскости  $\text{Re } s > c_0$ .

*Доказательство.* Теорема будет доказана, если окажется возможным показать, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = f(t).$$

Принимая во внимание равенство (1), найдем

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} \left[ \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} ds.$$

Интеграл Лапласа, как показано выше, сходится при  $\text{Re } s = c > c_0$  равномерно относительно параметра  $s$ , поэтому в правой части этого равенства можно изменить порядок интегрирования, при этом получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} e^{s(t-\tau)} ds.$$

Так как интеграл

$$\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} e^{s(t-\tau)} ds = \frac{1}{t-\tau} e^{s(t-\tau)} \Big|_{c-j\omega}^{c+j\omega} = \\ = \frac{1}{t-\tau} [e^{(c+j\omega)(t-\tau)} - e^{(c-j\omega)(t-\tau)}] = 2je^{c(t-\tau)} \frac{\sin \omega(t-\tau)}{t-\tau},$$

то имеем

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{c(t-\tau)} \frac{\sin \omega(t-\tau)}{t-\tau} d\tau.$$

Введем новую переменную  $\tau - t = \xi$ , кроме того, положим  $f(t) e^{-ct} = \varphi(t)$ , тогда получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{\pi} e^{ct} \int_{-t}^{\infty} f(\xi+t) e^{-c(\xi+t)} \frac{\sin \omega \xi}{\xi} d\xi = \\ = \frac{1}{\pi} e^{ct} \int_{-\omega t}^{\infty} \varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta,$$

где  $\eta = \omega \xi$ , или

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{\pi} e^{ct} \int_{-\omega t}^{\infty} \left[ \varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) - \varphi(t) \right] \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta + \\ + \frac{1}{\pi} f(t) \int_{-\omega t}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta. \quad (11)$$

Рассмотрим пределы каждого из интегралов в правой части последнего равенства при  $\omega \rightarrow \infty$ . Как известно,  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \pi$ , поэтому

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} f(t) \int_{-\omega t}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = f(t). \quad (12)$$

Интеграл в первом слагаемом правой части равенства (11) представим в виде суммы трех интегралов

$$\int_{-\omega t}^{\infty} \left[ \varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) - \varphi(t) \right] \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \int_{-\omega t}^{-\omega_0 t} \left[ \varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) - \varphi(t) \right] \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta + \\ + \int_{-\omega_0 t}^0 \left[ \varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) - \varphi(t) \right] \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta + \int_0^{\infty} \left[ \varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) - \varphi(t) \right] \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta.$$

Функция  $f(t)$  является оригиналом, поэтому функция  $\varphi(t)$  в интервале  $(0, \infty)$  ограничена. Все три интеграла в правой части послед-

него равенства являются сходящимися, т. е. можно подобрать постоянные значения  $\omega_0$  и  $\Omega$  настолько большими, что модули интегралов по интервалам  $(-\omega t, -\omega_0 t)$  (где  $\omega > \omega_0$  произвольно) и  $(\Omega, \infty)$  будут меньше всякого наперед заданного и сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$ . Далее, значения  $t$  характеризуют собой точки непрерывности функции  $f(t)$ , т. е. при фиксированном  $\eta$  имеем  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) = \varphi(t)$ ; поэтому при  $\omega \rightarrow \infty$  модуль интеграла по интервалу  $(-\omega_0 t, \Omega)$  стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} e^{ct} \int_{-\omega_0 t}^{\Omega} \left[ \varphi\left(t + \frac{\eta}{\omega}\right) - \varphi(t) \right] \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = 0.$$

Из равенства (11) окончательно найдем:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = f(t).$$

Теорема доказана.

Формула (10) называется *формулой обращения*. С ее помощью устанавливается связь между изображением  $F(s)$  и ему соответствующим оригиналом  $f(t)$ . Процесс получения оригинала по заданному изображению  $F(s)$  представляет собой *обратное преобразование Лапласа*. Это преобразование состоит в умножении  $F(s)$  на  $e^{st}$ , интегрировании по  $s$  получившегося произведения вдоль прямой, параллельной мнимой оси, и делении интеграла на  $2\pi j$ . Символически обратное преобразование Лапласа записывают в виде

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad (t > 0). \quad (13)$$

Условие  $t > 0$  учитывает то обстоятельство, что оригинал  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$  (см. § 44).

Следует подчеркнуть, что формула (10) определяет оригинал только в точках его непрерывности. Однако оригинал  $f(t)$  может иметь точки разрыва непрерывности первого рода. Методом, аналогичным использованному при доказательстве теоремы 3, можно показать, что в точках  $t$  разрыва непрерывности оригинала имеем

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)]. \quad (14)$$

Следовательно, формула обращения определяет оригинал  $f(t)$  по изображению  $F(s)$  с точностью до значений в точках разрыва непрерывности. Оригиналу всегда соответствует единственное изображение, которое может быть определено по формуле (1), так как значения оригинала в точках разрыва непрерывности не изменяют вида изображения. Однако одному и тому же изображению можно поставить в соответствие множество оригиналов, значения которых отличаются друг от друга лишь в точках разрыва непрерывности.

Если оригинал  $f(t)$  является дифференцируемой функцией всюду в интервале  $0 < t < \infty$ , то оригинал по заданному изображению определяется однозначно.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия, при выполнении которых функция  $F(s)$  является изображением.

**Теорема 4.** Если функция  $F(s)$  аналитична в полуплоскости  $\text{Res} > c_0$ , стремится к нулю при  $|s| \rightarrow \infty$  в любой полуплоскости  $\text{Res} \geq c > c_0$  равномерно относительно  $\arg s$  и интеграл  $\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) ds$  абсолютно сходится, то  $F(s)$  является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds.$$

Данную теорему примем без доказательства \*).

Из теоремы 4 ясно, что не все функции  $F(s)$  комплексного переменного  $s$  могут быть изображениями. В частности, не являются изображениями периодические функции, например, вида  $e^{as}$ ,  $\cos s$ ,  $\sin s$  несмотря на то, что эти функции являются аналитическими во всей плоскости  $s$ .

**4. Связь преобразований Фурье и Лапласа.** Формула (1) прямого преобразования Лапласа может рассматриваться как результат определенным образом построенного обобщения одностороннего преобразования Фурье. Пусть, например, функция  $f(t)$  удовлетворяет условиям Дирихле в интервале  $0 \leq t < \infty$ , причем  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ .

Как известно (см. § 35), преобразование Фурье может быть применено к функциям  $f(t)$ , для которых интеграл  $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$  существует (условие абсолютной интегрируемости). Этому условию не удовлетворяют многие функции, используемые при анализе процессов в автоматических системах, например функции  $1(t)$ ,  $A \sin \omega t$ ,  $A \cos \omega t$ ,  $e^{\alpha t}$  (при действительном  $\alpha > 0$ ),  $t$  и др. Для того чтобы иметь возможность подобную функцию  $f(t)$  преобразовать по Фурье, предварительно ее надо умножить на множитель  $e^{-ct}$ , где вещественное число  $c > c_0$  выбрано таким образом, чтобы интеграл

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-ct} dt \quad (15)$$

был сходящимся. Значение  $c_0$  для каждой функции  $f(t)$  является вполне определенным. Используя формулу прямого одностороннего

\* Доказательство теоремы см., например, в книге: Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. «Наука», 1965, стр. 496.

преобразования Фурье

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

будем преобразовывать по Фурье не функцию  $f(t)$ , а функцию  $f(t)e^{-ct}$ , удовлетворяющую условиям применения этого преобразования:

$$F(c, j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-ct} e^{-j\omega t} dt. \quad (16)$$

Введя новую комплексную переменную  $s = c + j\omega$ , получим:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Это выражение представляет собой формулу (1) прямого преобразования Лапласа.

Таким образом, преобразование Лапласа является результатом распространения преобразования Фурье на функции, которые, удовлетворяя условиям Дирихле в интервале  $0 \leq t < \infty$ , не удовлетворяют в этом интервале условию абсолютной интегрируемости.

В гл. XII функция  $F(j\omega)$  частоты  $\omega$  названа спектральной характеристикой функции  $f(t)$ . Аналогичным образом функция  $F(s)$  комплексной переменной  $s$  является спектральной характеристикой затухающей функции времени  $f(t) e^{-ct}$ .

Рассмотрим теперь формулу обратного преобразования Фурье (см. § 36)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left( \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) d\omega.$$

Заменив в левой и правой частях этого равенства  $f(t)$  на  $f(t) e^{-ct}$ , получим

$$f(t) e^{-ct} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left( \int_0^{\infty} f(t) e^{-ct} e^{-j\omega t} dt \right) d\omega.$$

Учитывая, что  $s = c + j\omega$ ,  $d\omega = \frac{ds}{j}$ , найдем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds.$$

Это равенство, как видно из (9), является формулой обратного преобразования Лапласа.

Таким образом, обратное преобразование Лапласа может рассматриваться как развитие обратного преобразования Фурье.

В гл. XI было отмечено, что представление функции в виде интеграла Фурье соответствует представлению функции в виде суммы бесконечно большого числа гармоник с бесконечно малыми амплитудами, причем частоты гармоник отличаются друг от друга бесконечно мало. Аналогично этому представлению функции  $f(t)$  в виде интеграла (10) соответствует представлению этой функции в виде бесконечно большого числа бесконечно малых составляющих, являющихся колебаниями с бесконечно малыми амплитудами, затухающими по экспоненциальному закону.

#### § 43. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

**1. Линейность преобразования.** Рассмотрим теорему, используемую при установлении соответствий «оригинал — изображение».

*Теорема 1.* Если функции  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  являются оригиналами и их изображения есть соответственно  $F_1(s), F_2(s), \dots, F_n(s)$  и если  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — величины, не зависящие от  $t$  и  $s$ , то справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t) \right\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(s), \quad (1)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(s) \right\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t). \quad (2)$$

Доказательство теоремы совпадает с доказательством теоремы 1 § 36.

**Пример 1.** Найти изображения по Лапласу функций  $\sin \omega t, \cos \omega t, e^{-\alpha t} \sin \omega t, e^{-\alpha t} \cos \omega t$ , где  $\alpha > 0$  — вещественное число.

Определим изображение по Лапласу  $\sin \omega t$ . Принимая во внимание теорему 1, получим

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \mathcal{L} \left[ \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right] = \frac{1}{2j} \{ \mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}] \}.$$

Учитывая соответствия (7) § 42, найдем далее

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2},$$

т. е.

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (3)$$

Аналогично будем иметь

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (4)$$

Определим теперь изображение по Лапласу  $e^{-\alpha t} \sin \omega t$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t] &= \mathcal{L} \left[ e^{-\alpha t} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \{ \mathcal{L}[e^{-(\alpha - j\omega)t}] - \mathcal{L}[e^{-(\alpha + j\omega)t}] \}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание соответствие (7) § 42, получим

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s + a - j\omega} - \frac{1}{s + a + j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \frac{2j\omega}{(s + a)^2 + \omega^2},$$

т. е.

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}, \quad (5)$$

Аналогично найдем

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s}{(s + a)^2 + \omega^2}. \quad (6)$$

**2. Дифференцирование и интегрирование оригинала.** Следующие теоремы устанавливают два важных свойства преобразования Лапласа.

*Теорема 2.* Если функция  $f(t)$  и ее производная  $f'(t)$  являются оригиналами и  $F(s)$  есть изображение оригинала  $f(t)$ , то справедливо равенство

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(+0), \quad (7)$$

где  $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ .

*Доказательство.* Изображение по Лапласу производной  $f'(t)$ , как следует из равенств (1) и (2) § 42, есть

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon}^T f'(t) e^{-st} dt.$$

Проинтегрируем интеграл в правой части этого равенства по частям:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} f(t) e^{-st} \Big|_{\varepsilon}^T + s \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon}^T f(t) e^{-st} dt.$$

Так как  $f(t)$  является оригиналом, то его модуль  $|f(t)| < Me^{c_0 t}$  при  $t > 0$ , поэтому  $|f(t) e^{-st}| < Me^{(c_0 - c)t}$ , когда  $\text{Re } s = c > c_0$ , т. е.  $\lim_{T \rightarrow \infty} f(T) e^{-sT} = 0$ . Кроме того, найдем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(\varepsilon) e^{-s\varepsilon} = f(+0).$$

Учитывая, что согласно равенств (1) и (2) § 42  $\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon}^T f(t) e^{-st} dt = F(s)$ ,

получим \*)

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(+0).$$

Теорема доказана.

\*) Ранее отмечалось, что  $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ , т. е. значение функции  $f(t)$  при стремлении аргумента  $t$  к нулю берется справа. Следует отличать «значение функции в точке» от предельного значения функции при приближении к этой точке. Например, для единичной ступенчатой функции  $1(t)$  всегда  $\lim_{t \rightarrow +0} 1(t) = 1$ , в то время как значение  $1(t)$  при  $t = 0$  не определено и может быть принято (в зависимости от аппроксимирующей последовательности функций — см. § 37) равным 0,1 или любому дробному числу, заключенному в интервале (0, 1).

Если положить начальное значение  $f(+0) = 0$ , то из формулы (7) получим

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s),$$

т. е. операции дифференцирования оригинала соответствует операция умножения изображения этого оригинала на комплексное число  $s$ . Если производные высших порядков  $f^{(2)}(t)$ ,  $f^{(3)}(t)$ , ...,  $f^{(n)}(t)$  являются оригиналами, то справедливы следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(2)}(t)] &= s^2 F(s) - f(+0)s - f'(t)(+0), \\ \mathcal{L}[f^{(3)}(t)] &= s^3 F(s) - f(+0)s^2 - f'(t)(+0)s - f^{(2)}(t)(+0), \\ &\dots \\ \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(+0). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

*Теорема 3.* Если функция  $f(t)$  является оригиналом, причем  $F(s)$  — его изображение, то интеграл  $\int_0^t f(\tau) d\tau$  также является оригиналом и справедливо равенство

$$\mathcal{L}[f^{-1}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(+0)}{s}. \quad (9)$$

Здесь

$$f^{-1}(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau + f^{-1}(+0),$$

причем  $f^{-1}(+0)$  — постоянная интегрирования.

*Доказательство.* Прежде всего покажем, что интеграл  $\int_0^t f(\tau) d\tau$  является оригиналом. Условия 1 и 2 существования оригинала, очевидно, для этого интеграла выполняются, так как они выполняются для функции  $f(t)$ . Проверим выполнение условия 3. Имеем оценку

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau < \int_0^t Me^{c_0 \tau} d\tau = \frac{M}{c_0} (e^{c_0 t} - 1) < M_1 e^{c_0 t}.$$

Следовательно, условие 3 также выполняется.

Убедимся теперь в справедливости равенства (9). Найдем изображение интеграла  $\int_0^t f(\tau) d\tau$ :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \int_0^{\infty} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) e^{-st} dt = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon}^T \left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) e^{-st} dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow +0}} \int_{\epsilon}^T \left( \int_0^t t(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow +0}} \left( -\frac{1}{s} e^{-st} \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \Big|_{\epsilon}^T + \\ + \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow +0}} \frac{1}{s} \int_{\epsilon}^T f(t) e^{-st} dt.$$

Так как

$$\left| e^{-st} \int_0^t f(\tau) d\tau \right| < M_1 e^{(c_0 - c)t} \quad (t > 0, \operatorname{Re} s = c > c_0),$$

то предел первого слагаемого правой части равен нулю. Для второго слагаемого правой части найдем, согласно равенствам (1) и (2) § 42,

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow +0}} \frac{1}{s} \int_{\epsilon}^T f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} F(s).$$

Следовательно,

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s). \quad (10)$$

Теперь имеем, учитывая свойство линейности преобразования Лапласа,

$$\mathcal{L} \left[ \int f(t) dt \right] = \mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] + \mathcal{L} [f^{-1}(+0)].$$

Так как  $\mathcal{L} [f(+0)] = \mathcal{L} [f(+0) 1(t)] = \frac{f(+0)}{s}$ , то окончательно получим

$$\mathcal{L} [f^{-1}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(+0)}{s}. \quad (11)$$

Теорема доказана.

Если положить  $f(+0) = 0$ , то из теоремы найдем, что операция интегрирования оригинала соответствует операции деления изображения этого оригинала на комплексное число  $s$ .

Распространяем теорему на интегралы высших порядков. Пусть

$$f^{(-k)}(t) \equiv \underbrace{\int \dots \int}_k f(t) (dt)^k,$$

тогда

$$\mathcal{L} [f^{(-2)}(t)] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{-1}(+0)}{s^2} + \frac{f^{(-2)}(+0)}{s}, \\ \mathcal{L} [f^{(-3)}(t)] = \frac{F(s)}{s^3} + \frac{f^{-1}(+0)}{s^2} + \frac{f^{(-2)}(+0)}{s^2} + \frac{f^{(-3)}(+0)}{s}, \\ \dots \\ \mathcal{L} [f^{(-n)}(t)] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(-k)}(+0)}{s^{n-k+1}}. \quad (12)$$

**3. Смещение в области оригиналов и в области изображений. Изменение масштаба.** Рассмотренные ниже теоремы позволяют образовывать новые соответствия «оригинал — изображение».

**Теорема 4.** Если функция  $f(t)$  является оригиналом и  $F(s)$  — его изображение, то изображение смещенного оригинала  $f(t-a)$ , где  $a$  — положительное число, определяется равенством

$$\mathcal{L} [f(t-a)] = e^{-as} F(s). \quad (13)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4 § 36. Следует лишь иметь в виду, что  $f(t-a) = 0$ , при  $t < a$ , так как оригинал  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ .

При обратном преобразовании Лапласа справедливо равенство

$$\mathcal{L}^{-1} [e^{-as} F(s)] = \begin{cases} 0 & \text{при } t < a, \\ f(t) & \text{при } t > a. \end{cases} \quad (14)$$

**Пример 2.** Найти изображение смещенного оригинала  $(t-a)^2$  (рис. 139). По формуле (13) имеем, учитывая равенство (8) § 42:

$$\mathcal{L} [(t-a)^2] = e^{-as} \mathcal{L} [t^2] = e^{-as} \frac{2}{s^3}. \quad (15)$$

**Пример 3.** Определить изображение функции  $f(t) = A [1(t) + 1(t-\tau) + 1(t-2\tau) + \dots]$ , характеризующей бесконечный ступенчатый ход (рис. 140).

Имеем

$$\mathcal{L} [f(t)] = A \mathcal{L} [1(t)] + A \mathcal{L} [1(t-\tau)] + A \mathcal{L} [1(t-2\tau)] + \dots = \\ = \frac{A}{s} + e^{-\tau s} \frac{A}{s} + e^{-2\tau s} \frac{A}{s} + \dots = \frac{1}{s} \cdot \frac{A}{1 - e^{-\tau s}}. \quad (16)$$

Воспользовавшись теоремой (4), получим формулу, удобную для определения изображений кусочно-непрерывных оригиналов общего вида. Предположим, что требуется определить изображение

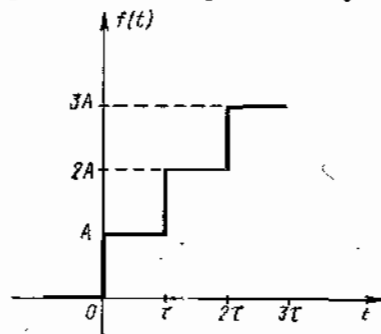


Рис. 140

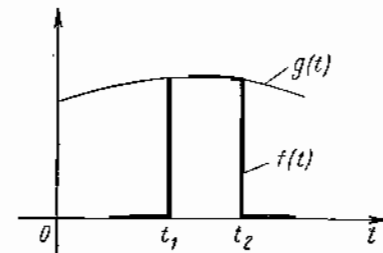


Рис. 141

$F(s)$  оригинала  $f(t)$  (рис. 141), определяемого равенством

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1, \\ g(t) & \text{при } t_1 < t < t_2, \\ 0 & \text{при } t > t_2. \end{cases} \quad (17)$$



Изображение функции  $g(t)$  обозначим  $G(s)$ . Найдем изображение смещенной функции  $g(t + \tau)$ . Пусть это изображение есть  $G_\tau(s)$ , тогда в соответствии с формулой (15) получим:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-st_1}G_{t_1}(s)] = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1, \\ g(t + t_1 - t_1) = g(t) & \text{при } t > t_1, \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-st_2}G_{t_2}(s)] = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_2, \\ g(t + t_2 - t_2) = g(t) & \text{при } t > t_2. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, будем иметь, учитывая равенство (17):

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-st_1}G_{t_1}(s)] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-st_2}G_{t_2}(s)] = f(t).$$

Следовательно, изображение кусочно-непрерывной функции  $f(t)$  определяется выражением

$$F(s) = e^{-st_1}G_{t_1}(s) - e^{-st_2}G_{t_2}(s). \quad (18)$$

**Пример 4.** Найти изображение оригинала  $f(t)$ ,

$$f(t) = \begin{cases} at + b & \text{при } t < t_2, \\ at_2 + b & \text{при } t_2 < t < t_3, \\ 0 & \text{при } t > t_3, \end{cases}$$

график которого изображен на рис. 142.

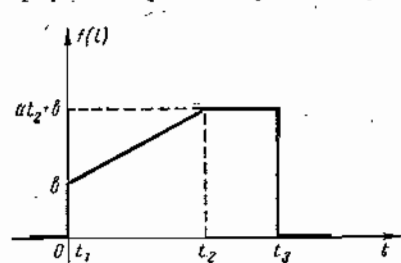


Рис. 142

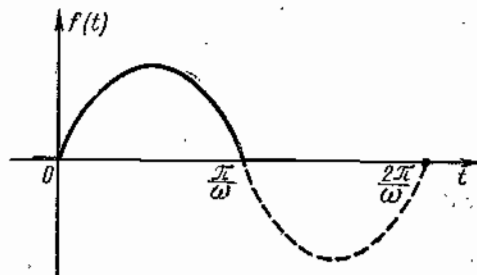


Рис. 143

Пусть  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ , где

$$f_1(t) = \begin{cases} at + b & \text{при } t < t_2, \\ 0 & \text{при } t > t_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_2, \\ at_2 + b & \text{при } t_2 < t < t_3, \\ 0 & \text{при } t > t_3 \end{cases}$$

Определим изображение функции  $f_1(t)$ ; воспользовавшись формулой (18). Для этой функции  $g(t + \tau) = a(t + \tau) + b$ , следовательно,

$$G_\tau(s) = \mathcal{L}[a(t + \tau) + b] = \frac{a}{s^2} + \frac{a\tau}{s} + \frac{b}{s}.$$

Так как  $\tau = t_1 = 0$  и  $\tau = t_2$ , то

$$G_{t_1}(s) = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s}, \quad G_{t_2}(s) = \frac{a}{s^2} + \frac{at_2}{s} + \frac{b}{s}.$$

По формуле (18) найдем

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + e^{-st_2} \left( \frac{a}{s^2} + \frac{at_2}{s} + \frac{b}{s} \right).$$

Определим теперь изображение функции  $f_2(t)$ :

$$\mathcal{L}[f_2(t)] = \mathcal{L}[(at_2 + b)(1(t - t_2) - 1(t - t_3))] = (at_2 + b) \frac{e^{-t_2 s} - e^{-t_3 s}}{s}.$$

Просуммировав  $\mathcal{L}[f_1(t)]$  и  $\mathcal{L}[f_2(t)]$ , изображение функции  $f(t)$  получим в виде

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} \left[ \frac{a}{s} + b + e^{-st_2} \left( \frac{a}{s} + 2at_2 + 2b \right) - e^{-t_3 s} (at_2 + b) \right].$$

**Пример 5.** Определить изображение функции (рис. 143).

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{при } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Имеем:

$$g(t) = \sin \omega t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\pi}{\omega},$$

т. е.

$$G_{t_1}(s) = \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

$$G_{t_2}(s) = \mathcal{L}\left[\sin \omega \left(t + \frac{\pi}{\omega}\right)\right] = \mathcal{L}[-\sin \omega t] = -\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

По формуле (18) найдем

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + e^{-\frac{\pi}{\omega} s} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left( 1 + e^{-\frac{\pi}{\omega} s} \right).$$

Формула (18) позволяет построить изображение периодической функции. Пусть  $\varphi(t)$  — периодическая функция с периодом  $T$ , пусть, кроме того, функция  $f(t)$  совпадает с функцией  $\varphi(t)$  в интервале  $(0, T)$  и равна нулю вне этого интервала. Изображение  $F(s)$  функции  $f(t)$  определяет формула (18), причем в этом случае  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = T$ , т. е.

$$G_{t_1}(s) = \mathcal{L}[\varphi(t)] = \Phi(s),$$

$$G_{t_2}(s) = \mathcal{L}[\varphi(t + T)] = \Phi(s),$$

так как из условия периодичности  $\varphi(t) = \varphi(t + T)$ . Подставляя выражения  $G_{t_1}(s)$  и  $G_{t_2}(s)$  в формулу (18), найдем изображение  $\Phi(s)$  периодической функции  $\varphi(t)$ :

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1 - e^{-sT}}. \quad (19)$$

**Пример 6.** Найти изображение периодической с периодом  $\frac{\pi}{\omega}$  функции (рис. 144)

$$\varphi(t) = |\sin \omega t| = \begin{cases} \sin \omega t & \text{при } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ -\sin \omega t & \text{при } \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Изображение  $F(s)$  функции

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{при } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{\pi}{\omega}, \end{cases}$$

совпадающей с функцией  $\varphi(t)$  в интервале  $(0, T)$  и равной нулю вне этого интервала, было определено в примере 5. Подставляя  $F(s)$  из указанного примера в формулу (19), получим искомое изображение

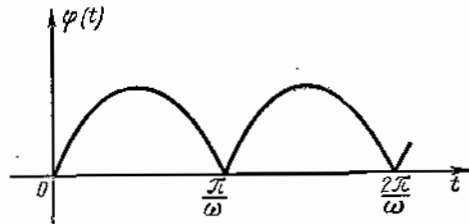


Рис. 144

$$\Phi(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}$$

**Теорема 5.** Если функция  $f(t)$  является оригиналом и  $F(s)$  — его изображение и если  $a$  — любое комплексное число, то справедливо равенство

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a). \quad (20)$$

Доказательство теоремы совпадает с доказательством теоремы 5 § 36.

Из этой теоремы следует, что умножение оригинала на экспоненциальную функцию приводит к смещению особых точек и нулей его изображения.

Заметим, что если соответствие  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  справедливо в полуплоскости  $\text{Re } s = c > c_0$ , то соответствие (20) имеет смысл при  $\text{Re}(s + a) > c_0$ , т. е. при  $\text{Re } s > c_0 - \text{Re } a$ .

**Пример 7.** Найти изображения функций  $e^{-at} \cos \omega t$ ,  $e^{-at} \sin \omega t$ . Учитывая равенства

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

из теоремы 5 получим, что

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}, \quad (21)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}. \quad (22)$$

**Пример 8.** Определить изображение функции  $e^{-at} t^n$ .

По формуле (8) § 42 имели  $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$ , поэтому, принимая во внимание равенство (20), найдем, что

$$\mathcal{L}[e^{-at} t^n] = \frac{n!}{(s + a)^{n+1}}. \quad (23)$$

**Теорема 6.** Если функция  $f(t)$  является оригиналом и  $F(s)$  — его изображение и если  $a$  — вещественное положительное число, то справедливо равенство

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as). \quad (24)$$

Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства теоремы 6 § 36.

Формула (24) характеризует изменение изображения оригинала, если в оригинале изменяется масштаб аргумента.

**Пример 9.** Найти изображение функции  $\sin a\omega t$  ( $a > 0$ ).

Учитывая теорему 6, получим из равенства  $\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ , что

$$\mathcal{L}[\sin a\omega t] = \frac{a\omega}{s^2 + a^2\omega^2}.$$

**4. Умножение в комплексной и действительной областях.** Рассмотренные ниже теоремы позволяют находить оригинал, соответствующий произведению изображений, а также определять изображение произведения оригиналов.

**Теорема 7.** Если функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  являются оригиналами и их изображения есть соответственно  $F_1(s)$  и  $F_2(s)$ , то справедливо равенство

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s). \quad (25)$$

Доказательство этой теоремы в общем совпадает с доказательством теоремы 8 § 36. Однако необходимо установить, что интеграл свертки  $\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$  является оригиналом, т. е. преобразуем по Лапласу. Покажем это.

Условия 1 и 2 существования оригинала применительно к свертке, очевидно, выполняются. Убедимся в выполнении условия 3. Выберем числа  $M$  и  $c_0$  такие, что  $|f_1(t)| < Me^{c_0 t}$  и  $|f_2(t)| < Me^{c_0 t}$ . Тогда получим оценку

$$\left| \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \right| < M^2 \int_0^t e^{c_0 \tau} e^{c_0 (t - \tau)} d\tau = M^2 t e^{c_0 t},$$

т. е.

$$\left| \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \right| < M_1 e^{(c_0 + \varepsilon)t},$$

где  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число. Таким образом, условие 3 также выполняется, и свертка является оригиналом.

С точки зрения обратного преобразования Лапласа вместо формулы (25) получим

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) F_2(s)] = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (t > 0). \quad (26)$$

Правая часть этого равенства представляет собой оригинал, соответствующий изображению в виде произведения сомножителей  $F_1(s) F_2(s)$ .

Пример 10. Найти оригинал  $f(t)$ , изображение которого

$$F(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 1)^2}.$$

Представим заданное изображение в виде произведения сомножителей

$$F_1(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \quad \text{и} \quad F_2(s) = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Так как  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 1}\right] = \cos t$ , то по формуле (26) найдем искомый оригинал:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2 + 1)^2}\right] = \int_0^t \cos(t - \tau) \cos \tau \, d\tau = \\ &= \cos t \int_0^t \cos^2 \tau \, d\tau + \sin t \int_0^t \sin \tau \cos \tau \, d\tau = \frac{1}{2}(t \cos t + \sin t) \quad (t > 0). \end{aligned}$$

**Теорема 8.** Если функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  являются оригиналами и  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$  — соответственно их изображения, то произведение  $f_1(t)f_2(t)$  также является оригиналом и справедливо равенство

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c^* - j\infty}^{c^* + j\infty} F_1(s - w) F_2(w) \, dw, \quad (27)$$

где

$$\int_{c^* - j\infty}^{c^* + j\infty} F_1(s - w) F_2(w) \, dw = \lim_{w_1 \rightarrow \infty} \int_{c^* - jw_1}^{c^* + jw_1} F_1(s - w) F_2(w) \, dw;$$

$c^*$  — вещественное число, удовлетворяющее неравенству  $c_2 < c^* < c - c_1$ , причем  $c_1$  и  $c_2$  — абсциссы абсолютной сходимости функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  соответственно;  $c = \operatorname{Re} s$ , кроме того,  $\max(c_1, c_2, c_1 + c_2) < c$ .

**Доказательство.** Функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  являются оригиналами, поэтому, очевидно, условия 1 и 2 существования оригиналов удовлетворяются и для произведения  $f_1(t)f_2(t)$ . Условие 3 также выполняется, так как при  $\max(c_1, c_2, c_1 + c_2) < c$

$$f_1(t)f_2(t) < Me^{ct}.$$

Следовательно, произведение  $f_1(t)f_2(t)$  является оригиналом. Найдем изображение функции  $f_1(t)f_2(t)$ . Имеем

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \int_0^{\infty} f_1(t)f_2(t) e^{-st} \, dt.$$

Заменим в правой части этого равенства  $f_2(t)$  по формуле обращения:

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c^* - j\infty}^{c^* + j\infty} F_2(w) e^{tw} \, dw \quad (c^* > c_2),$$

тогда

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} f_1(t) \int_{c^* - j\infty}^{c^* + j\infty} F_2(w) e^{tw} e^{-st} \, dw \, dt.$$

Благодаря равномерной сходимости внутреннего интеграла относительно параметра  $t$ , можно изменить порядок интегрирования; в этом случае будем иметь

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c^* - j\infty}^{c^* + j\infty} F_2(w) \left( \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-(s-w)t} \, dt \right) dw.$$

Но справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} f_1(t) e^{-(s-w)t} \, dt = F_1(s - w)$$

при  $\operatorname{Re}(s - w) = c - \operatorname{Re} w > c_1$ , т. е. при  $\operatorname{Re} w < c - c_1$ , поэтому

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c^* - j\infty}^{c^* + j\infty} F_1(s - w) F_2(w) \, dw.$$

Таким образом, получили формулу (27).

Выполнение условия  $c_2 < c^* < c - c_1$  обеспечивает интегрирование по прямой, параллельной мнимой оси и расположенной в полосе (заштрихованная полоса на рис. 145), где подынтегральная функция  $F_1(s - w)F_2(w)$  является аналитической. Действительно, функция  $F_2(w)$  аналитична при  $\operatorname{Re} w > c_2$ , а функция  $F_1(s - w)$  является аналитической при  $\operatorname{Re} w < c - c_1$ . Отсюда ясно, что произведение  $F_2(w)F_1(s - w)$  будет аналитической функцией при  $c_2 < c^* < c - c_1$ .

Теорема доказана.

Интеграл в равенстве (27) представляет собой свертку функций  $F_1(s)$  и  $F_2(s)$ . Таким образом, умножение оригиналов соответствует операции свертывания изображений этих оригиналов.

Интеграл

$$\int_{c^* - j\infty}^{c^* + j\infty} F_1(s - w) F_2(w) \, dw$$

является несобственным интегралом и может быть вычислен с помощью вычетов (см. § 32). Вычеты подынтегральной функции  $F_1(s - w)F_2(w)$  следует определять или относительно особых точек  $w = w_k$  функции  $F_2(w)$ , или относительно особых точек  $w = w_i$  функции  $F_1(s - w)$ . В первом случае названные особые точки, явля-

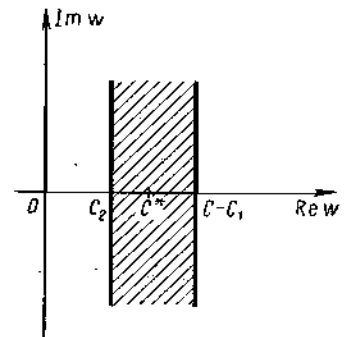


Рис. 145

яющиеся также особыми точками функции  $F_1(s-w)F_2(w)$ , расположены на плоскости  $w$  левее прямой, параллельной мнимой оси и проходящей от нее на расстоянии  $c_2$  (см. рис. 145); при этом формула (27) принимает вид

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} F_1(s-w)F_2(w) \Big|_{w=w_k} \quad (28)$$

Здесь  $m$  — число особых точек функции  $F_2(w)$ . Во втором случае принимаются во внимание особые точки функции  $F_1(s-w)F_2(w)$ , расположенные правее прямой, параллельной мнимой оси и проходящей от нее на расстоянии  $c-c_1$  (см. рис. 145), при этом формула (26) запишется в виде

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = - \sum_{i=1}^l \operatorname{Res} F_1(s-w)F_2(w) \Big|_{w=w_i} \quad (29)$$

где  $l$  — число особых точек функции  $F_1(s-w)$ . Знак «минус» в этой формуле отражает отрицательное направление обхода контура, состоящего из указанной выше параллельной прямой и дуги бесконечно большого радиуса, расположенной в части плоскости  $w$ , для которой  $\operatorname{Re} w > c-c_1$ .

**Пример 11.** Найти изображение произведения оригиналов  $te^{-at}$ , используя формулы (28) и (29).

Имеем:

$$\mathcal{L}[t] = F_1(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}[e^{-at}] = F_2(s) = \frac{1}{s+a},$$

поэтому с помощью формулы (28) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[te^{-at}] &= \operatorname{Res} \frac{1}{(s-w)^2(w+a)} \Big|_{w=-a} = \\ &= \lim_{w \rightarrow -a} (w+a) \frac{1}{(s-w)^2(w+a)} = \frac{1}{(s+a)^2}. \end{aligned}$$

Применим теперь формулу (29):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[te^{-at}] &= - \operatorname{Res} \frac{1}{(s-w)^2(w+a)} \Big|_{w=s} = \\ &= - \lim_{w \rightarrow s} \frac{d}{dw} (s-w)^2 \frac{1}{(s-w)^2(w+a)} = - \lim_{w \rightarrow s} \left[ - \frac{1}{w+a^2} \right] = \frac{1}{(s+a)^2}. \end{aligned}$$

В обоих случаях результаты совпадают.

**5. Дифференцирование и интегрирование изображений.** Рассмотрим две теоремы, которые аналогичны теоремам о дифференцировании и интегрировании оригинала.

**Теорема 9.** Если функция  $f(t)$  является оригиналом и  $F(s)$  — его изображение, то справедливо равенство

$$\mathcal{L}[tf(t)] = - \frac{d}{ds} F(s). \quad (30)$$

**Доказательство.** Функция

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

является аналитической при  $\operatorname{Re} s = c > c_0$ , поэтому ее можно дифференцировать по  $s$ ; а так как интеграл Лапласа сходится при  $\operatorname{Re} s = c > c_0$  равномерно относительно параметра  $s$ , то допустимо дифференцирование под знаком интеграла. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} f(t) e^{-st} dt = \\ &= - \int_0^{\infty} tf(t) e^{-st} dt = - \mathcal{L}[tf(t)]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathcal{L}[tf(t)] = - \frac{d}{ds} F(s).$$

Теорема доказана.

Таким образом, операции дифференцирования изображения по  $s$  соответствует операция умножения оригинала на  $t$  с изменением знака на обратный. Справедлива и обратная формула

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{(ds)^n} F(s). \quad (31)$$

**Пример 12.** Из соответствия  $\cos \omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$  можно получить с помощью формулы (30) новое соответствие

$$t \cos \omega t \leftrightarrow - \frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = - \frac{s^2 + \omega^2 - 2s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2},$$

т. е.

$$\mathcal{L}[t \cos \omega t] = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}. \quad (32)$$

**Теорема 10.** Если функция  $f(t)$  является оригиналом и  $F(s)$  — его изображение и если интеграл  $\int_s^{\infty} F(s) ds$  сходится, то справедливо равенство

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s) ds; \quad (33)$$

здесь

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \int_s^{s_1} F(s) ds,$$

и контур интегрирования расположен в части плоскости, где функция  $F(s)$  является аналитической.

**Доказательство.** Рассмотрим интеграл  $\int_s^{\infty} F(s) ds$ , где путь интегрирования лежит в части плоскости комплексного переменного  $s$ , в которой функция  $F(s)$  аналитична, т. е. при  $\operatorname{Re} s = c > c_0$ .

Принимая во внимание выражение (1) § 42, получим

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \int_s^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt ds = \int_0^{\infty} f(t) \int_s^{\infty} e^{-st} ds dt.$$

Здесь мы изменили порядок интегрирования, что возможно благодаря равномерной сходимости внутреннего интеграла относительно  $s$ . Так как

$$\int_s^{\infty} e^{-st} ds = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \int_s^{s_1} e^{-st} ds = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \left[ -\frac{e^{-st}}{t} \right]_s^{s_1} = \frac{e^{-st}}{t},$$

то

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt,$$

т. е.

$$\mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] = \int_s^{\infty} F(s) ds.$$

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что операции деления оригинала на  $t$  соответствует операция интегрирования изображения по контуру в пределах от  $s$  до  $\infty$ . Важным при этом является условие существования интеграла  $\int_s^{\infty} F(s) ds$ . Если, например,  $f(t) = 1(t)$ , т. е.  $F(s) = \frac{1}{s}$ , то интеграл

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \int_s^{\infty} \frac{ds}{s} = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \int_s^{s_1} \frac{ds}{s} = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \ln s_1 - \ln s.$$

Так как  $\lim_{s_1 \rightarrow \infty} \ln s_1 = \infty$ , то интеграл  $\int_s^{\infty} F(s) ds$  в этом случае не существует, т. е. применять формулу (33) к функции  $\frac{1}{t}$  нельзя. Этот результат совпадает со сделанным ранее заключением, что функция  $\frac{1}{t}$  не является оригиналом.

**Пример 13.** Определить изображение функции  $\frac{\sin \omega t}{t}$ .

Справедливо соответствие  $\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ . Применим к этому соответствию формулу (33):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{\sin \omega t}{t} \right] &= \int_s^{\infty} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} ds = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \int_s^{s_1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} ds = \\ &= \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \arctg \frac{s}{\omega} \Big|_s^{s_1} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{s}{\omega} = \text{arctg} \frac{s}{\omega}. \end{aligned}$$

Получили новое соответствие

$$\frac{\sin \omega t}{t} \leftrightarrow \text{arctg} \frac{s}{\omega}.$$

**6. Начальное и предельное значения оригинала.** Следующие две предельные теоремы позволяют по виду изображения оригинала судить о поведении оригинала при  $t=0$  и при  $t \rightarrow \infty$ .

**Теорема 11.** Если функции  $f(t)$  и  $f'(t)$  являются оригиналами и  $F(s)$  — изображение оригинала  $f(t)$ , то при существовании предела  $\lim_{t \rightarrow +0} f(t)$  справедливо равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t), \quad (34)$$

причем  $s \rightarrow \infty$  по такому пути, что  $\text{Re } s = c$  неограниченно возрастает.

**Доказательство.** В соответствии с формулой (7) изображение производной  $f'(t)$  дается равенством

$$\mathcal{L} [f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(+0).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу по  $s$ ; пусть  $s \rightarrow \infty$  таким образом, что  $\text{Re } s = c$  неограниченно возрастает. Так как всякое изображение (см. равенство (5) § 42), в том числе и изображение производной, при указанном предельном переходе стремится к нулю, то получим равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(+0) = 0.$$

Но  $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ , поэтому

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t).$$

Теорема доказана.

**Пример 14.** Найти начальное значение оригинала  $f(t)$ , если его изображение  $F(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$ .

По формуле (34) получим

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{(s+\alpha)^2} = 0.$$

Этот результат можно проверить, непосредственно используя соответствие (см. равенство (23))  $te^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^2}$ :

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{t \rightarrow +0} te^{-at} = 0.$$

Формула (34) может быть использована, если известно, что  $\lim_{t \rightarrow +0} f(t)$  существует (при этом само значение  $f(t)$  неизвестно). В большинстве задач теории автоматического регулирования существование предела  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  свидетельствует и о существовании пре-

дела  $\lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ . Однако можно указать отдельные примеры, когда подобное заключение будет неверным.

**Теорема 12.** Если функции  $f(t)$  и  $f'(t)$  являются оригиналами,  $F(s)$  — изображение оригинала  $f(t)$  и если  $sF(s)$  является аналитической функцией в правой полуплоскости и на мнимой оси, то справедливо равенство

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \quad (35)$$

**Доказательство.** Справедливо равенство (7):

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(+0).$$

Пусть  $s \rightarrow 0$ , тогда

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(+0).$$

Интеграл в левой части равенства сходится равномерно относительно  $s$ , поэтому возможен переход к пределу под знаком интеграла:

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(+0).$$

Из аналитичности функции  $sF(s)$  при  $\text{Res} = c \geq 0$  следует, что производная  $f'(t)$  является функцией, убывающей по показательному закону; при этом интеграл в левой части последнего равенства существует. Имеем

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow +0}} \int_{\epsilon}^t f'(\tau) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(+0).$$

Сравнивая последние два равенства, получим, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Теорема доказана.

**Пример 15.** Определить с помощью формулы (35) предельное значение оригинала, если его изображение  $F(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$  ( $\alpha > 0$ ) — действительное число.

Функция  $sF(s) = \frac{s}{(s+\alpha)^2}$  является аналитической в правой полуплоскости и на мнимой оси. По формуле (35) найдем:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{(s+\alpha)^2} = 0.$$

**7. Вторая независимая переменная.** При определении новых соответствий «оригинал — изображение» оказываются полезными сле-

дующие формулы:

$$\mathcal{L}_t \left[ \lim_{a \rightarrow a_0} f(t, a) \right] = \lim_{a \rightarrow a_0} F(s, a), \quad (36)$$

$$\mathcal{L}_t \left[ \frac{\partial}{\partial a} f(t, a) \right] = \frac{\partial}{\partial a} F(s, a), \quad (37)$$

$$\mathcal{L}_t \left[ \int_{a_0}^a f(t, a) da \right] = \int_{a_0}^a F(s, a) da. \quad (38)$$

Здесь  $f(t, a)$  — функция, преобразуемая по Лапласу относительно переменной  $t$ ;  $F(s, a)$  — ее изображение;  $a$  — переменная, не зависящая от  $t$  и  $s$ . Из формул (36) — (38) следует, что соответствие  $f(t, a) \leftrightarrow F(s, a)$  не нарушится, если в левой и правой его частях выполнять операции предельного перехода, дифференцирования и интегрирования относительно второй независимой переменной  $a$ . При этом предполагается, что пределы, производные и интегралы, указанные в равенствах, существуют. Справедливость формул (36) — (38) вытекает из основного соотношения  $\mathcal{L}_t[f(t, a)] = F(s, a)$  в результате поочередного применения к нему операций предельного перехода, дифференцирования и интегрирования.

**Пример 16.** Найти изображение дельта-функции  $\delta(t)$  (импульсивной функции первого порядка (см. § 37)).

Так как

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t-a)}{a},$$

то по формуле (36) получим

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}_t \left[ \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t-a)}{a} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L}_t \left[ \frac{1(t) - 1(t-a)}{a} \right].$$

Используя формулы (1) и (13), найдем

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-as}}{sa}.$$

Справа мы имеем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ , раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталья, получим изображение дельта-функции

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1. \quad (39)$$

Изображение смещенной дельта-функции  $\delta(t-a)$  определяется равенством

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}. \quad (40)$$

Найдем изображение производной от дельта-функции  $\delta'(t)$  — импульсивной функции второго порядка. Так как

$$\delta'(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1(t) - 2 \cdot 1(t-a) + 1(t-2a)}{a^2},$$

то, учитывая формулы (1), (13) и (36), получим:

$$\mathcal{L} [b'(t)] = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L}_t \left[ \frac{1(t) - 2 \cdot 1(t-a) + 1(t-2a)}{a^2} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - 2e^{-as} + e^{2as}}{a^2 s}$$

После двукратного применения правила Лопитала получим

$$\mathcal{L} [b'(t)] = s. \tag{41}$$

Вообще, изображение импульсивной функции порядка  $n$  будет

$$\mathcal{L} [b^{(n-1)}(t)] = s^{n-1}. \tag{42}$$

Заметим, что функции  $F(s) = 1, s, \dots, s^{n-1}$  не стремятся к нулю при  $s \rightarrow \infty$ , поэтому их можно считать изображениями лишь условно. Эта условность является следствием той условности, которая отмечалась при введении понятия дельта-функции.

**Пример 17.** Применить формулу (37) к соответствию  $\cos \omega t \div \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ .

Из формулы (37) следует, что соответствие не нарушится, если его продифференцировать слева и справа по независимой переменной  $\omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \cos \omega t \div \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Так как  $\frac{\partial}{\partial \omega} \cos \omega t = -t \sin \omega t$ ,  $\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{-2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$ , то получим новое соответствие

$$t \sin \omega t \div \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}. \tag{43}$$

**Пример 18.** Применять формулу (38) к соответствию

$$\cos \omega t \div \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Проинтегрируем это соответствие слева и справа по переменной  $\omega$ :

$$\int_0^{\omega} \cos \omega t d\omega \div \int_0^{\omega} \frac{s}{s^2 + \omega^2} d\omega,$$

$$\int_0^{\omega} \cos \omega t d\omega = \frac{\sin \omega t}{t} \Big|_0^{\omega} = \frac{\sin \omega t}{t},$$

$$\int_0^{\omega} \frac{s}{s^2 + \omega^2} d\omega = \text{arctg} \frac{\omega}{s} \Big|_0^{\omega} = \text{arctg} \frac{\omega}{s} = \text{arccctg} \frac{s}{\omega}.$$

Получили соответствие

$$\frac{\sin \omega t}{t} \div \text{arccctg} \frac{s}{\omega},$$

известное также из примера 13.

Таблица оригиналов и их изображений

№	Оригинал	Изображение
1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
3	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{\beta - \alpha}$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
4	$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\beta e^{-at} - \alpha e^{-\beta t}}{\alpha\beta(\alpha - \beta)}$	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$
8	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{\omega} e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{1}{(s+a)^2 + \omega^2}$
11	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
12	$\frac{e^{-at} + at - 1}{a^2}$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
13	$[(a_0 - a)t + 1] e^{-at}$	$\frac{s+a_0}{(s+a)^2}$
14	$\frac{1 - (1+at)^{-at}}{a^2}$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
15	$\frac{a_0}{a^2} + \left( \frac{a - a_0}{a} t - \frac{a_0}{a^2} \right) e^{-at}$	$\frac{s+a_0}{s(s+a)^2}$
16	$\frac{1}{\omega^2} t - \frac{1}{\omega^3} \sin \omega t$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)s^2}$
17	$\frac{1}{\omega^4} \text{sh} \omega t - \frac{1}{\omega^3} t$	$\frac{1}{(s^2 - \omega^2)s^2}$
18	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$



№	Оригинал	Изображение
19	$\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
20	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
21	$t^{-\alpha} \cos \omega t$	$\frac{(s + \alpha)^2 - \omega^2}{[(s + \alpha)^2 + \omega^2]^2}$
22	$\frac{\sin \omega t}{t}$	$\text{arctg} \frac{\omega}{s}$
23	$J_n(t) \quad (n > -1)$	$\frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^n}{\sqrt{s^2 + 1}}$
24	$\frac{J_1(t)}{t}$	$\frac{1}{s + \sqrt{s^2 + 1}}$
25	$1(t - a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$
26	$(t - a) 1(t - a)$	$\frac{1}{s^2} e^{-as}$
27	$1(t - a) - 1(t - b)$	$\frac{1}{s} (e^{-as} - e^{-bs})$ при $a < b$ .

§ 44. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ

Рассмотрим некоторые способы определения оригинала по заданному изображению.

В § 42 было показано, что оригинал  $f(t)$  может быть найден в результате обратного преобразования Лапласа над его изображением  $F(s)$ :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (1)$$

Формула обращения (1) устанавливает однозначное соответствие между изображением и оригиналом в точках непрерывности оригинала.

Вычисление оригинала по формуле (1) удобно производить с помощью вычетов. Пусть функция  $F(s)$  является изображением, т. е. удовлетворяет условиям теоремы 4 § 42. Пусть, кроме того, эта функция при  $\text{Re } s < c_0$  имеет конечное число особых точек-полюсов. Допустим, далее, что  $F(s)$  удовлетворяет условиям леммы Жордана (см. § 35), т. е. при  $F(s)$ , стремящейся на дуге  $C_R$  к нулю

при  $R \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $\arg s$  и лобом положительном значении  $t$  имеем

$$\int_{C_R} F(s) e^{st} ds \rightarrow 0, \quad (2)$$

где  $C_R$  — часть окружности (см. рис. 87) с радиусом  $R$ , находящаяся в полуплоскости  $\text{Re } s < c_0$ .

Тогда интеграл (1) по прямой, параллельной мнимой оси, сводится к контурному интегралу, где контур интегрирования состоит из указанной прямой и дуги  $C_R (R \rightarrow \infty)$ . Применяя теорему о вычетах, получим

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{\nu=1}^n \text{Res } F(s) e^{st} \Big|_{s=s_\nu}, \quad (3)$$

где  $s=s_\nu$  — полюсы функции  $F(s) e^{st}$ . Так как изображение  $F(s)$  является аналитической функцией при  $\text{Re } s > c_0$ , то указанные полюсы расположены левее прямой, параллельной мнимой оси и проходящей от нее на расстоянии  $c_0$  (см. рис. 137).

При  $t < 0$  следует положить  $f(t) \equiv 0$ . В самом деле, из леммы Жордана следует, что при  $t < 0$  имеем

$$\int_{C_R} F(s) e^{st} ds \rightarrow 0, \quad (4)$$

где  $C_R$  — часть окружности (см. рис. 88) с радиусом  $R$ , находящаяся в полуплоскости  $\text{Re } s > c_0$ , поэтому при  $t < 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^l \text{Res } F(s) e^{st} \Big|_{s=s_k},$$

где  $s_k$  — особые точки функции  $F(s) e^{st}$ , расположенные в полуплоскости  $\text{Re } s > c_0$ . Однако в указанной полуплоскости изображение  $F(s)$  является аналитической функцией, т. е. сумма вычетов равна нулю, откуда можно найти, что  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ .

Рассмотрим случай, когда изображение является рациональной функцией, т. е. представляет собой отношение двух многочленов

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, \quad (5)$$

причем  $m < n$  и коэффициенты  $a$  и  $b$  — действительные. Вычислив корни знаменателя  $s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , представим это изображение в виде

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 (s - s_1)^{k_1} (s - s_2)^{k_2} \dots (s - s_n)^{k_n}}. \quad (6)$$

Здесь  $k_i$  — кратность корня  $s_i$ .

Для определения оригинала, соответствующего изображению (6), используем формулу (3). Тогда, принимая во внимание формулу (5)

§ 32 нахождения вычета относительно полюса, получим при  $t > 0$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(k_i-1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}} [(s-s_i)^{k_i} F(s) e^{st}]. \quad (7)$$

Пусть теперь все корни  $s_i$  знаменателя изображения  $F(s)$  будут простыми, т. е.  $k_i=1$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Так как

$$a_0 (s_1 - s_1)(s_1 - s_2) \dots (s_1 - s_{i-1})(s_1 - s_{i+1}) \dots (s_1 - s_n) = \frac{d}{ds} B(s) \Big|_{s=s_1} = B'(s_i),$$

то вместо (7) в этом случае получим более простую формулу

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} e^{s_i t} \quad (t > 0). \quad (8)$$

Если знаменатель  $B(s)$  имеет один корень при  $s=0$ , т. е.

$$B(s) = sB_1(s),$$

где

$$B_1(s) = a_0 (s - s_2)(s - s_3) \dots (s - s_n),$$

то формула (8) примет следующий вид:

$$f(t) = \frac{A(0)}{B_1(0)} + \sum_{i=2}^n \frac{A(s_i)}{s_i B_1'(s_i)} e^{s_i t} \quad (t > 0). \quad (9)$$

При наличии у многочлена  $B(s)$  пары мнимых корней  $s_1 = j\omega_1$ ,  $s_2 = -j\omega_1$  имеем

$$B(s) = (s - j\omega_1)(s + j\omega_1) \cdot B_2(s) = (s^2 + \omega_1^2) B_2(s),$$

где

$$B_2(s) = a_0 (s - s_3)(s - s_4) \dots (s - s_n).$$

Формула (8) запишется в этом случае следующим образом:

$$f(t) = \frac{A(s)}{(s + j\omega_1) B_2(s)} \Big|_{s=j\omega_1} e^{j\omega_1 t} + \frac{A(s)}{(s - j\omega_1) B_2(s)} \Big|_{s=-j\omega_1} e^{-j\omega_1 t} + \sum_{i=3}^n \frac{A(s)}{(s^2 + \omega_1^2) B_2'(s)} \Big|_{s=s_i} e^{s_i t} = \frac{A(j\omega_1)}{2j\omega_1 B_2(j\omega_1)} e^{j\omega_1 t} + \frac{A(-j\omega_1)}{-2j\omega_1 B_2(-j\omega_1)} e^{-j\omega_1 t} + \sum_{i=3}^n \frac{A(s_i)}{(s_i^2 + \omega_1^2) B_2'(s_i)} e^{s_i t}.$$

Первые два слагаемых в правой части этого равенства являются комплексными сопряженными величинами, при сложении их вещественные части удвоятся, а мнимые части взаимно уничтожаются, поэтому получим

$$f(t) = \operatorname{Re} \frac{A(j\omega_1)}{j\omega_1 B_2(j\omega_1)} e^{j\omega_1 t} + \sum_{i=3}^n \frac{A(s_i)}{(s_i^2 + \omega_1^2) B_2'(s_i)} e^{s_i t}. \quad (10)$$

**Пример 1.** Определить оригинал  $f(t)$ , соответствующий изображению

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)^2}.$$

Изображение имеет единственный полюс  $s = -a$  второй кратности. Положив в формуле (7)  $n=1$ ,  $k_1=2$ , получим

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s+a)^2} \right] = \lim_{s \rightarrow -a} \frac{d}{ds} (s+a)^2 \frac{1}{(s+a)^2} e^{st} = \lim_{s \rightarrow -a} t e^{-st} = t e^{-at} \quad (t > 0).$$

**Пример 2.** Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Применим формулу (8). Для заданного изображения  $A(s) = s$ ,  $B(s) = (s+1)(s+2)(s+3)$ . Имеем

$$B'(s) = (s+2)(s+3) + (s+1)(s+3) + (s+1)(s+2).$$

Корни многочлена  $B(s)$ :  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -2$ ,  $s_3 = -3$ . Тогда  $A(s_1) = -1$ ,  $A(s_2) = -2$ ,  $A(s_3) = -3$ ;  $B'(s_1) = 2$ ,  $B'(s_2) = -1$ ,  $B'(s_3) = 2$ .

Следовательно,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right] = -\frac{1}{2} e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-3t} \quad (t \geq 0).$$

**Пример 3.** Найти оригинал  $f(t)$ , изображение которого

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$$

Здесь корни знаменателя  $B(s) = s^2 + s + 1$  являются комплексными:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ имеем: } A(s) = 1, B'(s) = 2s + 1, \text{ т. е.}$$

$$B'(s_1) = 2 \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 = j\sqrt{3}; \quad B'(s_2) = 2 \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 = -j\sqrt{3}.$$

По формуле (8) найдем

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + s + 1} \right] = \frac{1}{j\sqrt{3}} e^{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} - \frac{1}{j\sqrt{3}} e^{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ e^{-\frac{1}{2}t} \frac{e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} - e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{2j} \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \quad (t \geq 0).$$

В этом примере можно определить оригинал более простым путем, если дополнить знаменатель изображения  $F(s)$  до полного квадрата, тогда

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Умножим и разделим правую часть этого равенства на  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  и примем во внимание соответствие (22) § 43

$$e^{-at} \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2};$$

тогда получим уже известный результат

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + s + 1} \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

В равенстве (5) мы полагали, что  $m < n$ . Если  $m \geq n$ , т. е. рациональная функция  $F(s)$  является неправильной алгебраической дробью, то следует предварительно разделить числитель этой дроби на знаменатель до получения остатка в виде правильной дроби. Если, например,  $m = n + 1$ , то

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = k_1 s + k_2 + \frac{A_1(s)}{B(s)}. \quad (11)$$

Здесь  $k_1, k_2$  — постоянные коэффициенты,  $\frac{A_1(s)}{B(s)}$  — правильная дробь. В этом случае

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[k_1 s] + \mathcal{L}^{-1}[k_2] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{A_1(s)}{B(s)} \right].$$

Принимая во внимание формулу (42) § 43 для изображения импульсивных функций различных порядков, получим

$$f(t) = k_1 \delta'(t) + k_2 \delta(t) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{A_1(s)}{B(s)} \right]. \quad (12)$$

Третье слагаемое в правой части этого равенства может быть найдено с помощью формулы (8).

В некоторых случаях можно найти оригинал  $f(t)$ , соответствующий изображению  $F(s)$ , если разложить  $F(s)$  в ряд по степеням  $\frac{1}{s}$ :

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s^k}. \quad (13)$$

Учитывая равенство (см. формулу (8) § 42)

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad (14)$$

формально будем иметь оригинал  $f(t)$  в виде суммы степенного ряда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1} \quad (t > 0). \quad (15)$$

Формальность процесса определения оригинала с использованием равенств (13) и (15) состоит в том, что не была установлена сходимость указанных рядов. Покажем, что если изображение  $F(s)$  является аналитической функцией в бесконечно удаленной точке, то оригинал  $f(t)$  может быть определен с помощью формулы (15).

Введем новую комплексную переменную  $q = \frac{1}{s}$ . Тогда функция  $F\left(\frac{1}{q}\right) = \Phi(q)$  может быть представлена в виде степенного ряда

$$\Phi(q) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k q^k; \quad (16)$$

этот ряд сходится в круге сходимости  $|q| < R$ , где  $R$  — радиус сходимости. Функция  $\Phi(q)$  в указанном круге будет аналитической. Используя оценку (8) § 27 коэффициентов разложения аналитической функции в степенной ряд, получим, что

$$|a_k| \leq M \frac{1}{R^k} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Здесь  $M = \max_{C_R} |\Phi(q)|$ ,  $C_R$  — окружность радиуса  $R$ .

Убедимся теперь, что при этом условии, наложенном на коэффициенты  $a_k$ , ряд (15) сходится. Имеем

$$\begin{aligned} |f(t)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{(k-1)!} |t|^{k-1} \leq \\ &\leq \frac{M}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{R^k k!} = \frac{M}{R} e^{\frac{1}{R}|t|}. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд (15) сходится для всех значений  $t$ , причем в соответствии с признаком Вейерштрасса эта сходимость равномерная.

Так как  $|f(t)| \leq M e^{C_0 t}$ , т. е. удовлетворяется условие 3 определения оригинала и, очевидно, условия 1 и 2 также выполняются, то функция  $f(t)$  является оригиналом.

Итак, мы показали, что справедливо соответствие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1} \leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s^k} \quad (\text{Res} > 0, |s| > \frac{1}{R}). \quad (17)$$

**Пример 4.** Определить с помощью соответствия (17) оригинал  $f(t)$ , имеющий своим изображением функцию  $F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$ .

Указанная функция  $F(s)$  аналитична в бесконечно удаленной точке, поэтому применение соответствия (17) является законным. Раскладывая  $F(s)$  в ряд по степеням  $\frac{1}{s}$ , получим

$$\frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^5} - \frac{1}{s^7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{s^{2k+1}}.$$

Находя по формуле (14) оригиналы, соответствующие каждому слагаемому правой части этого равенства, будем иметь

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2+1} \right] = 1(t) - \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{4!} t^4 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \times \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cos t \quad (t > 0).$$

Этот пример имеет лишь иллюстративный характер. Для изображений, имеющих вид рациональной дроби, более удобно использовать при определении оригинала формулу (8).

Заметим, что равенства (17) и (8) выражают соответственно первую и вторую теоремы разложения Хевисайда. Эти теоремы наряду с теоремами, приведенными в § 43, позволяют определять оригинал по заданному его изображению. Из теорем § 43 наиболее часто применяется для нахождения оригинала теорема о свертывании в вещественной области.

#### § 45. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**1. Уравнения с постоянными коэффициентами.** С помощью преобразования Лапласа можно весьма просто производить решение линейных дифференциальных (интегродифференциальных) уравнений с постоянными коэффициентами. Общая схема решения приведена выше (см. стр. 462). В соответствии с этой схемой, преобразуя заданное дифференциальное уравнение по Лапласу и учитывая при этом начальные условия, приходим к алгебраическому уравнению относительно изображения решения дифференциального уравнения. Решая алгебраическое уравнение, находим изображение решения дифференциального уравнения. Переход от изображения решения к самому решению может быть произведен способами, указанными в § 44. В ряде случаев можно воспользоваться также имеющимися таблицами соответствий «оригинал — изображение»<sup>\*)</sup>.

**Пример 1.** Найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 0,$$

с начальными условиями: при  $t=0$ ,  $x(0)=0$ ,  $x'(0)=1$ .

Преобразуем каждый член этого уравнения по Лапласу. При этом положим  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$  и используем формулы (8) § 43, тогда получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{d^2x}{dt^2} \right] &= s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2 X(s) - 1, \\ \mathcal{L} \left[ 3 \frac{dx}{dt} \right] &= 3 \mathcal{L} \left[ \frac{dx}{dt} \right] = 3sX(s) - 3x(0) = 3sX(s), \\ \mathcal{L} [2x] &= 2X(s). \end{aligned}$$

<sup>\*)</sup> См., например: Диткин В. А. и Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. «Высшая школа», 1965, а также Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л. Переходные процессы в линейных системах, Физматгиз, 1961.

После преобразования по Лапласу исходное дифференциальное уравнение делается алгебраическим относительно изображения  $X(s)$ :

$$s^2 X(s) - 1 + 3sX(s) + 2X(s) = 0;$$

найдем  $X(s)$ :

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Знаменатель этой дроби имеет корни  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -2$ , поэтому  $X(s)$  можно представить в виде суммы элементарных слагаемых:

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}.$$

Здесь  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = -1$ .

Для определения оригинала  $x(t)$ , соответствующего изображению  $X(s)$ , т. е. решения заданного дифференциального уравнения, выполним обратное преобразование Лапласа. Имеем, учитывая соответствие (7) § 42,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+1} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+2} \right] = e^{-t} - e^{-2t} \quad (t \geq 0).$$

При определении  $x(t)$  можно было бы воспользоваться также формулой (8) § 44.

**Пример 2.** Выполнить интегрирование дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 1$$

с начальными условиями: при  $t=0$   $x(0)=3$ ,  $x'(0)=-2$ .

Пусть  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ , тогда, учитывая формулы (8) § 43 и принимая во внимание, что  $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$  (см. формулу (6) § 42), получим уравнение относительно изображения  $X(s)$ :

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 5sX(s) - 5x(0) + 6X(s) = \frac{1}{s}.$$

Далее найдем

$$X(s) = \frac{3s^2 + 13s + 1}{(s^2 + 5s + 6)s} = \frac{3s^2 + 13s + 1}{(s+2)(s+3)s}.$$

Для определения оригинала  $x(t)$  применим формулу (9) § 44:

$$x(t) = \frac{A(0)}{B_1(0)} + \sum_{i=2}^3 \frac{A(s_i)}{B'_i(s_i)} e^{s_i t} \quad (t > 0).$$

Здесь  $A(s) = 3s^2 + 13s + 1$ ,  $B_1(s) = s^2 + 5s + 6$ ,  $B'_1(s) = 2s + 5$ . Имеем  $A(0) = 1$ ,  $B_1(0) = 6$ . При  $s_2 = -2$ ,  $s_3 = -3$ ,  $B'_2(-2) = 2(-2) + 5 = 1$ ,  $B'_3(-3) = 2(-3) + 5 = -1$ ;  $A(-2) = 3 \cdot 4 + 13(-2) + 1 = -13$ ,  $A(-3) = 3 \cdot 9 + 13(-3) + 1 = -11$ .

Следовательно, искомое решение дифференциального уравнения

$$x(t) = \frac{1}{6} + \frac{13}{2} e^{-2t} - \frac{11}{3} e^{-3t} \quad (t > 0).$$

**Пример 3.** Найти решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} + 3x + 2 \int x dt = e^{-t}$$

с начальными условиями: при  $t=0$   $x(0)=2$ ,  $x^{(-1)}(0)=1$ .

Пусть  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ . Преобразуем заданное уравнение по Лапласу, при этом будем использовать формулы (7) § 42, (7) и (9) § 43:

$$sX(s) - 2 + 3X(s) + 2\frac{X(s)}{s} + \frac{2}{s} = \frac{1}{s+1}.$$

Изображение решения определится равенством

$$X(s) = \frac{2s^2 + s - 2}{(s+1)(s^2 + 3s + 2)} = \frac{2s^2 + s - 2}{(s+1)^2(s+2)}.$$

Для нахождения  $x(t)$  воспользуемся формулой (7) § 44. В данном случае  $s_1 = -1$ ,  $k_1 = 2$ ;  $s_2 = -2$ ;  $k_2 = 1$ , поэтому

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[ (s+1)^2 \frac{(2s^2 + s - 2)e^{st}}{(s+1)^2(s+2)} \right] + \\ &+ \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{(2s^2 + s - 2)e^{st}}{(s+1)^2(s+2)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{[(4s+1)e^{st} + (2s^2 + s - 2)te^{st}](s+2) - (2s^2 + s - 2)e^{st}}{(s+2)^2} + \\ &+ \lim_{s \rightarrow -2} \frac{(2s^2 + s - 2)e^{st}}{(s+1)^2} = -2e^{-t} + 4e^{-2t} - te^{-t} \quad (t > 0). \end{aligned}$$

Решение системы линейных дифференциальных (или интегро-дифференциальных) уравнений с постоянными коэффициентами производится способом, аналогичным указанному выше. Каждое из уравнений, входящих в систему, при этом преобразуется по Лапласу, а затем получившаяся система алгебраических уравнений решается относительно изображения решения. Методика определения оригинала по найденному его изображению изложена ранее.

**Пример 4.** Решить систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y - 2z,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + 7y + 5z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -2x - 4y - 2z.$$

Заданы начальные условия: при  $t=0$   $x(0)=0$ ,  $y(0)=3$ ,  $z(0)=-2$ .

Пусть

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s), \quad \mathcal{L}[y(t)] = Y(s), \quad \mathcal{L}[z(t)] = Z(s).$$

Преобразуя каждое уравнение системы по Лапласу, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (s-1)X(s) + 2Y(s) + 2Z(s) &= 0, \\ -2X(s) + (s-7)Y(s) - 5Z(s) &= 3, \\ 2X(s) + 4Y(s) + (s+2)Z(s) &= -2. \end{aligned}$$

Из этой системы найдем  $X(s)$ :

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & s-7 & -5 \\ -2 & 4 & s+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 2 & 2 \\ -2 & s-7 & -5 \\ 2 & 4 & s+2 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{(s-1)(s-3)}.$$

Откуда получим

$$X(s) = \frac{k_1}{s-1} + \frac{k_2}{s-3},$$

где  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = -1$ ; поэтому

$$x(t) = e^t - e^{3t} \quad (t > 0).$$

Аналогично найдем:

$$y(t) = -2e^t + 2e^{3t} + 3e^{2t} \quad (t > 0),$$

$$z(t) = 2e^t - 2e^{3t} - 2e^{2t} \quad (t > 0).$$

Приведенные примеры свидетельствуют о преимуществах метода решения интегро-дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа по сравнению с классическим методом решения.

Покажем на примере дифференциального уравнения второго порядка, что изображение решения уравнения имеет характерную структуру, отражающую физическую сущность процессов, происходящих в динамической системе, описываемой этим дифференциальным уравнением.

Пусть дифференциальное уравнение, описывающее поведение системы, имеет вид

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = b_0 \frac{df}{dt} + b_1 f. \quad (1)$$

Здесь  $f(t)$  — воздействие, приложенное к системе;  $x(t)$  — координата системы. Заданы начальные условия: при  $t=+0$   $x(+0)=x_0$ ,  $x'(+0)=x'_0$ . Кроме того, задано начальное значение воздействия  $f(t)$ : при  $t=+0$   $f(+0)=f_0$ . Полагая

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s), \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

и преобразуя уравнение (1) по Лапласу, будем иметь

$$\begin{aligned} a_0 s^2 X(s) + a_1 s X(s) + a_2 X(s) &= \\ = b_0 s F(s) - f_0 b_0 + b_1 F(s) + a_0 x'_0 + a_1 x_0, \end{aligned}$$

откуда найдем изображение решения

$$X(s) = \frac{1}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} [F(s)(b_0 s + b_1) - f_0 b_0 + x_0(a_0 s + a_1) + a_0 x'_0]. \quad (2)$$

Множитель в виде дроби в правой части этого равенства называется *системной функцией*. Системная функция характеризует физические особенности динамической системы, в том числе учитывает ее параметры, связи и т. п. Знаменателем системной функции является характеристический многочлен; приравнивая его нулю, можно получить характеристическое уравнение системы:

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Множитель в квадратной сколке в равенстве (2) содержит сведения об изображении воздействия, приложенного к системе, а также о начальных условиях. Из (2) следует, что изменение координаты  $x(t)$  может произойти или при приложении к системе воздействия  $f(t)$ , или из-за ненулевых начальных условий. Этот мно-

житель дает представление о причинах возбуждения системы и называется *возбуждающей функцией*.

Таким образом, изображение решения дифференциального уравнения представляет собой произведение системной функции на возбуждающую функцию. Каждая из указанных функций вносит свой вклад в формирование процесса изменения координаты  $x(t)$ . Структурный облик изображения решения (2) не изменяется и для дифференциальных уравнений более высокого порядка.

Заметим, что в состав возбуждающей функции входят правые начальные значения функций  $x(+0)$ ,  $f(+0)$  и их производных. Это утверждение следует из теоремы 2 § 43, при доказательстве которой предполагалось, что преобразуемая по Лапласу функция дифференцируема требуемое число раз и существуют предельные значения при  $t \rightarrow +0$  как самой функции, так и ее производных. Если функция  $f(t)$  в правой части дифференциального уравнения (содержащей производные) является разрывной, то при ее дифференцировании появляются дельта-функции и их производные, которые можно считать преобразуемыми по Лапласу лишь условно (см. п. 7 § 43). Если использовать формулы (8) § 43 при определении изображений дельта-функций и их производных, то необходимо положить  $f(+0) = f'(+0) = \dots = f^{(n-1)}(+0) = 0$ . В самом деле, изображение, например, дельта-функции  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ ; однако, если непосредственно применить теорему 2 § 43, то найдем, что

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d1(t)}{dt}\right] = s\mathcal{L}[1(t)] - 1(+0) = s \frac{1}{s} - 1 = 0.$$

Получили неверный результат, поэтому необходимо считать в данном случае, что значение  $1(+0)$  равно не единице, а нулю. Такие же рассуждения имеют смысл и при определении изображений производных от дельта-функций.

Учитывая сделанное замечание, в формуле (2) следует положить  $f_0 = 0$ , если, например,  $f(t) = 1(t)$ . При этом  $F(s) = \frac{1}{s}$  и изображение решения имеет вид

$$X(s) = \frac{1}{a_0 s^n + a_1 s + a_n} \left[ \frac{1}{s} (b_0 s + b_1) + x_0 (a_0 s + a_1) + a_0 x'_0 \right]. \quad (3)$$

**2. Уравнения с переменными коэффициентами.** С помощью преобразования Лапласа можно выполнить интегрирование некоторых видов обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть задано линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a_0(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx(t)}{dt} + a_n(t) x(t) = f(t), \quad (4)$$

причем коэффициенты этого уравнения  $a_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ )

являются многочленами от  $t^*$ ). Уравнение такого вида может быть преобразовано по Лапласу, если воспользоваться теоремой 9 § 43, из которой следует, что дифференцирование по  $s$  изображения  $X(s)$  оригинала  $x(t)$  соответствует операции умножения этого оригинала на переменную  $t$  с изменением знака на обратный, т. е.

$$\mathcal{L}[tx(t)] = -\frac{d}{ds} X(s). \quad (5)$$

Если оригинал  $x(t)$  умножается на  $t^n$ , то изображение этого произведения определится равенством

$$\mathcal{L}[t^n x(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s). \quad (6)$$

Из теоремы 2 § 43, с другой стороны, известно, что изображение производной  $n$ -го порядка есть

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(0). \quad (7)$$

С помощью формул (5) — (7) могут быть образованы следующие соответствия:

$$\begin{aligned} x(t) &\div X(s), & tx(t) &\div -\frac{d}{ds} X(s), & t^2 x(t) &\div \frac{d^2}{ds^2} X(s), \dots; \\ \frac{dx(t)}{dt} &\div sX(s) - x(0), & t \frac{dx(t)}{dt} &\div \frac{d}{ds} sX(s), & t^2 \frac{dx(t)}{dt} &\div \frac{d^2}{ds^2} sX(s), \dots; \\ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &\div s^2 X(s) - sx(0) - x'(0), & t \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &\div -\frac{d}{ds} s^2 X(s) + x(0), \\ & & \frac{t^2 d^2 x(t)}{dt^2} &\div \frac{d^2}{ds^2} s^2 X(s) \end{aligned}$$

и т. д.

Преобразуя уравнение (4) по Лапласу с учетом указанных соответствий, приходим к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению относительно изображения  $X(s)$ ; порядок этого уравнения равен наивысшей степени  $t$ , имеющейся в коэффициентах исходного уравнения. Решив уравнение относительно изображения  $X(s)$ , т. е. определив это изображение, можно способами, рассмотренными в § 44, перейти к оригиналу  $x(t)$ , который является решением исходного уравнения.

Целесообразность преобразования по Лапласу уравнения с переменными коэффициентами состоит в том, что преобразованное дифференциальное уравнение оказывается более простым, чем исходное уравнение.

\* Операционное исчисление может быть использовано также при интегрировании обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами — см., например: Левинштейн М. Л. Операционное исчисление и его приложения к задачам электротехники. «Энергия», 1964.

Пример 4. Найти решение уравнения

$$t \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + tx = 0$$

с начальными условиями: при  $t=0$   $x(0)=1$ ,  $x'(0)=0$ .

Пусть  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ . Преобразуя заданное уравнение по Лапласу и принимая во внимание приведенные выше соответствия, получим уравнение относительно изображения

$$-\frac{d}{ds} s^2 X(s) + x(0) + sX(s) - x(0) - \frac{d}{ds} X(s) = 0$$

или

$$(s^2 + 1) \frac{dX(s)}{ds} + sX(s) = 0.$$

Это уравнение также имеет переменные коэффициенты, но является более простым, чем исходное уравнение, поскольку имеет разделяющиеся переменные.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dX(s)}{X(s)} = -\frac{s ds}{s^2 + 1}$$

и после интегрирования найдем

$$\ln X(s) = -\frac{1}{2} \ln(s^2 + 1) + c,$$

или

$$X(s) = \frac{c}{\sqrt{s^2 + 1}},$$

где  $c$  — постоянная интегрирования.

Для определения значения  $c$  воспользуемся теоремой 11 § 43 о начальном значении оригинала:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{c}{\sqrt{s^2 + 1}} = c;$$

следовательно, постоянная интегрирования  $c = x(0) = 1$ .

Определим оригинал, соответствующий изображению  $X(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$ ,

для чего используем таблицу соответствий (см. таблицу на стр. 491). Из таблицы имеем, что оригинал  $x(t)$ , являющийся решением исходного уравнения, представляет собой функцию Бесселя:

$$x(t) = J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}.$$

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ АНАЛИЗА НЕПРЕРЫВНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 46. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с применением преобразования Лапласа к анализу непрерывных систем автоматического регулирования. Будем полагать, что процессы, происходящие в САР, описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Таким образом, мы ограничимся в настоящей главе рассмотрением линейных САР с постоянными параметрами, т. е. параметрами, не зависящими ни от времени, ни от состояния системы.

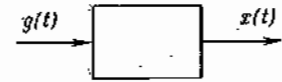


Рис. 146

Пусть для динамической системы (рис. 146) дифференциальное уравнение записано в операторной форме (см. § 15)

$$D(p)x(t) = M(p)g(t). \quad (1)$$

Здесь  $D(p)$  и  $M(p)$  — многочлены от  $p$ :

$$\begin{aligned} D(p) &= a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \\ M(p) &= b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m. \end{aligned} \quad (2)$$

$p$  — оператор дифференцирования;  $x(t)$  — выходная координата системы;  $g(t)$  — входное воздействие.

Преобразуем уравнение (1) по Лапласу, предположив нулевые начальные условия. Введя обозначения

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)], \quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)],$$

получим

$$D(s)X(s) = M(s)G(s), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} D(s) &= a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n, \\ M(s) &= b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m. \end{aligned} \quad (4)$$

Используем обозначение

$$\Phi(s) = \frac{M(s)}{D(s)}, \quad (5)$$

тогда уравнение (3) примет вид

$$X(s) = \Phi(s)G(s). \quad (6)$$

Уравнение (6) связывает изображение  $X(s)$  выходной координаты системы с изображением  $G(s)$  входного воздействия. Функция  $\Phi(s)$



характеризует динамические свойства системы. Как следует из равенств (4) и (5) эта функция не зависит от воздействия, приложенного к системе, а зависит лишь от параметров системы. Учитывая равенство (6), функцию  $\Phi(s)$  можно записать следующим образом:

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{\mathcal{L}[x(t)]}{\mathcal{L}[g(t)]} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (7)$$

Функция  $\Phi(s)$  называется *передаточной функцией* системы. Из выражения (7) видно, что передаточная функция представляет собой отношение изображения по Лапласу выходной координаты системы к изображению по Лапласу входного воздействия при нулевых начальных условиях\*).

Зная передаточную функцию системы  $\Phi(s)$  и определив изображение  $G(s)$  воздействия  $g(t)$ , приложенного к системе, можно найти по формуле (6) изображение  $X(s)$  выходной координаты системы  $x(t)$ , затем, переходя от изображения  $X(s)$  к оригиналу  $x(t)$  (см. § 44), получить процесс изменения выходной координаты системы при приложении к этой системе входного воздействия.

Если начальные условия ненулевые, то вместо уравнения (3) получим уравнение

$$D(s) X(s) = M(s) G(s) + M_n(s). \quad (8)$$

Здесь многочлен  $M_n(s)$  содержит члены, отражающие влияние ненулевых начальных условий на преобразование по Лапласу левой и правой частей уравнения (1). Как известно (см. § 43), лишь при нулевых начальных условиях справедливы равенства

$$\mathcal{L}[px(t)] = sX(s), \quad \mathcal{L}[p^2x(t)] = s^2X(s), \quad \dots, \quad \mathcal{L}[p^nx(t)] = s^n X(s);$$

$$\mathcal{L}[pg(t)] = sG(s), \quad \mathcal{L}[p^2g(t)] = s^2G(s), \quad \dots, \quad \mathcal{L}[p^mg(t)] = s^m G(s).$$

При ненулевых начальных условиях имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[px(t)] &= sX(s) - x(+0), \\ \mathcal{L}[p^2x(t)] &= s^2X(s) - sx(+0) - x'(+0), \dots, \\ \mathcal{L}[p^nx(t)] &= s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(+0), \\ \mathcal{L}[pg(t)] &= sG(s) - g(+0), \\ \mathcal{L}[p^2g(t)] &= s^2G(s) - sg(+0) - g'(+0), \dots, \\ \mathcal{L}[p^mg(t)] &= s^m G(s) - \sum_{k=1}^m s^{m-k} g^{(k-1)}(+0). \end{aligned}$$

\* Подобное определение передаточной функции не находится в противоречии с определением, введенным в § 18, так как при нулевых начальных условиях комплексная переменная  $s$  может быть отождествлена с оператором дифференцирования  $p$ .

Многочлен  $M_n(s)$  в правой части равенства (8) представляет собой сумму слагаемых, появляющихся в этом равенстве за счет ненулевых начальных условий.

Введя обозначение

$$V_n(s) = \frac{M_n(s)}{D(s)}$$

и учитывая равенство (3), вместо уравнения (8) получим следующее:

$$X(s) = \Phi(s) G(s) + V_n(s). \quad (9)$$

Переходя от изображения  $X(s)$  к оригиналу  $x(t)$ , найдем процесс изменения  $x(t)$  при приложении к системе входного воздействия и ненулевых начальных условиях.

Передаточная функция системы полностью характеризует динамические свойства системы и поэтому является важнейшей ее характеристикой. Зная передаточную функцию системы, всегда можно определить процесс изменения выходной координаты системы при наличии входного воздействия и заданных начальных условиях.

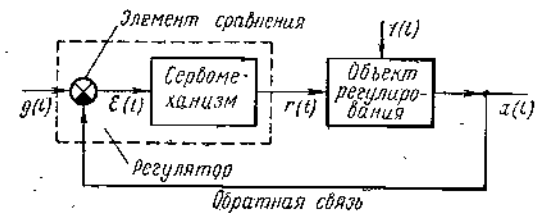


Рис. 147

Из равенства (5) следует, что полюсы передаточной функции устойчивой системы должны быть расположены в левой полуплоскости плоскости  $s$ , так как знаменателем передаточной функции служит характеристический многочлен системы  $D(s)$ , корни которого в случае устойчивой системы должны иметь отрицательные вещественные части.

Имея передаточную функцию системы, нетрудно получить амплитудно-фазовую частотную характеристику этой системы. Из сравнения формулы (7) с формулой (6) § 39 видно, что для этой цели достаточно в формуле (7) заменить  $s$  на  $j\omega$ . В этом случае амплитудно-фазовая характеристика системы определяется равенством

$$\Phi(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1} (j\omega) + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n}.$$

Рассмотрим обобщенную структурную схему САР, изображенную на рис. 147. В схеме выделены объект регулирования, сервомеханизм, элемент сравнения, прямые и обратная связи. К системе приложено управляющее воздействие  $g(t)$  и возмущающее воздействие  $f(t)$ . Регулируемая величина обозначена  $x(t)$ , ошибка САР —  $e(t)$ , выходная величина сервомеханизма —  $r(t)$ .

Пусть элементы САР характеризуются следующими дифференциальными уравнениями, записанными в операторном виде:

$$D_0(p) x(t) = M_0(p) r(t) + C_0(p) f(t). \quad (10)$$

— уравнения объекта регулирования;

$$B(p)r(t) = N(p)\varepsilon(t) \quad (11)$$

— уравнение сервомеханизма;

$$\varepsilon(t) = g(t) - x(t) \quad (12)$$

— уравнение элемента сравнения.

В уравнениях (10)—(12)  $D_0(p)$ ,  $M_0(p)$ ,  $C_0(p)$ ,  $B(p)$ ,  $N(p)$  — соответствующие операторные многочлены.

Используя обозначения

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)], \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)], \quad R(s) = \mathcal{L}[r(t)], \quad E(s) = \mathcal{L}[\varepsilon(t)],$$

преобразуем уравнения САР по Лапласу с учетом начальных условий. После такого преобразования уравнения (10)—(12) соответственно будут иметь следующий вид:

$$D_0(s)X(s) = M_0(s)F(s) + C_0(s)R(s) + M_{1n}(s), \quad (13)$$

$$B(s)R(s) = N(s)E(s) + M_{2n}(s), \quad (14)$$

$$E(s) = G(s) - X(s). \quad (15)$$

В этих уравнениях многочлены  $M_{1n}(s)$  и  $M_{2n}(s)$  содержат члены, отражающие влияние ненулевых начальных условий на формирование изображений производных от функций  $x(t)$ ,  $r(t)$ ,  $f(t)$  и  $\varepsilon(t)$ , входящих в левые и правые части уравнений (10) и (11). Если начальные условия нулевые, то  $M_{2n}(s) = 0$ ,  $M_{1n}(s) = 0$ .

Найдем изображения регулируемой величины  $X(s)$  и ошибки  $E(s)$ . Подставляя  $R(s)$  из уравнения (14) в уравнение (13) и учитывая равенство (15), получим

$$[D_0(s)B(s) + C_0(s)N(s)]X(s) = C_0(s)N(s)G(s) + M_0(s)B(s)F(s) + C_0(s)M_{2n}(s) + M_{1n}(s)B(s). \quad (16)$$

Введем следующие обозначения:

$$M_n(s) = C_0(s)M_{2n}(s) + B(s)M_{1n}(s), \quad (17)$$

$$W(s) = \frac{C_0(s)N(s)}{D_0(s)B(s)}, \quad (18)$$

$$V(s) = \frac{M_0(s)}{D_0(s)}, \quad (19)$$

$$V_n(s) = \frac{M_n(s)}{D_0(s)B(s)}. \quad (20)$$

Разделив все члены уравнения (16) на  $D_0(s)B(s)$ , найдем изображение регулируемой величины:

$$X(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}G(s) + \frac{V(s)}{1+W(s)}F(s) + \frac{V_n(s)}{1+W(s)}. \quad (21)$$

Аналогичным образом определим изображение ошибки:

$$E(s) = \frac{1}{1+W(s)}G(s) - \frac{V(s)}{1+W(s)}F(s) - \frac{V_n(s)}{1+W(s)}. \quad (22)$$

Используя обозначения

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}, \quad (23)$$

$$Y(s) = \frac{V(s)}{1+W(s)}, \quad (24)$$

$$\Phi_n(s) = \frac{1}{1+W(s)} = 1 - \Phi(s), \quad (25)$$

уравнения (21) и (22) перепишем в виде

$$X(s) = \Phi(s)G(s) + Y(s)F(s) + \Phi_n(s)V_n(s), \quad (26)$$

$$E(s) = \Phi_n(s)G(s) - Y(s)F(s) - \Phi_n(s)V_n(s). \quad (27)$$

Зная выражения, входящие в правые части равенств (26) и (27), в частности, определив изображения управляющего воздействия  $G(s)$  и возмущающего воздействия  $F(s)$ , нетрудно найти с помощью этих равенств изображение регулируемой величины  $X(s)$  и ошибки  $E(s)$ . Затем, переходя от изображений к оригиналам, можно определить регулируемую величину  $y(t)$  и ошибку системы  $\varepsilon(t)$ .

Если начальные условия нулевые, т. е.  $V_n(s) = 0$ , то уравнения (26) и (27) имеют более простой вид:

$$X(s) = \Phi(s)G(s) + Y(s)F(s), \quad (28)$$

$$E(s) = \Phi_n(s)G(s) - Y(s)F(s). \quad (29)$$

Выясним, что представляют собой функции

$$\Phi(s), \quad Y(s), \quad \Phi_n(s), \quad W(s), \quad V(s).$$

Пусть к системе не приложено возмущающее воздействие, т. е. изображение  $F(s) = 0$ . В этом случае имеем

$$X(s) = \Phi(s)G(s), \quad (30)$$

$$E(s) = \Phi_n(s)G(s), \quad (31)$$

откуда найдем

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{\mathcal{L}[x(t)]}{\mathcal{L}[g(t)]}. \quad (32)$$

Следовательно, функция  $\Phi(s)$  представляет собой *передаточную функцию САР по отношению к управляющему воздействию*.

Из равенства (31) найдем, что

$$\Phi_n(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{\mathcal{L}[\varepsilon(t)]}{\mathcal{L}[g(t)]}, \quad (33)$$

поэтому функция  $\Phi_n(s)$  может быть названа *передаточной функцией ошибки*.

Пусть теперь в уравнениях (27) и (28) изображение  $G(s)$  равно нулю, что будет справедливо, если к системе не приложено управляющее воздействие. В этом случае вместо уравнения (27) получим:

$$X(s) = Y(s)F(s),$$

откуда

$$Y(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\mathcal{L}[x(t)]}{\mathcal{L}[f(t)]}, \quad (34)$$

т. е. функция  $Y(s)$  является *передаточной функцией САР по отношению к возмущающему воздействию*.

Для выявления смысла функций  $W(s)$  и  $V(s)$  разорвем в САР (см. рис. 147) обратную связь. В этом случае сигнал с выхода системы не поступает на ее вход, поэтому входным воздействием для сервомеханизма будет служить не сигнал ошибки  $\varepsilon(t)$ , а управляющее воздействие  $g(t)$ . Такая разомкнутая система описывается следующими уравнениями:

$$D_0(p)x(t) = M_0(p)f(t) + C_0(p)r(t) \quad (35)$$

— уравнение объекта регулирования;

$$B(p)r(t) = N(p)g(t) \quad (36)$$

— уравнение сервомеханизма.

В преобразованном по Лапласу виде при нулевых начальных условиях уравнения (35) и (36) имеют вид

$$D_0(s)X(s) = M_0(s)F(s) + C_0(s)R(s), \quad (37)$$

$$B(s)R(s) = N(s)G(s). \quad (38)$$

Из этих уравнений получим

$$X(s) = \frac{M_0(s)}{D_0(s)}F(s) + \frac{C_0(s)N(s)}{D_0(s)B(s)}G(s). \quad (39)$$

Учитывая равенства (17) и (18), вместо выражения (39) будем иметь следующее:

$$X(s) = V(s)F(s) + W(s)G(s). \quad (40)$$

Последовательно полагая  $F(s) = 0$ ,  $G(s) = 0$ , получим, что отношение

$$W(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{\mathcal{L}[x(t)]}{\mathcal{L}[g(t)]} \quad (41)$$

представляет собой *передаточную функцию САР в разомкнутом состоянии по отношению к управляющему воздействию*, а отношение

$$V(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\mathcal{L}[x(t)]}{\mathcal{L}[f(t)]} \quad (42)$$

является *передаточной функцией САР в разомкнутом состоянии по отношению к возмущающему воздействию*.

Если положить в рассмотренных выше передаточных функциях  $s = j\omega$ , то получим соответствующие *амплитудно-фазовые частотные характеристики системы*. Например,  $\Phi_e(j\omega)$  — амплитудно-фазовая характеристика ошибки;  $Y(j\omega)$  — амплитудно-фазовая характеристика системы по отношению к возмущающему воздействию;  $W(j\omega)$  — ампли-

тудно-фазовая характеристика разомкнутой системы и т. д. С помощью частотных характеристик могут быть рассмотрены многие стороны работы САР, например, используя характеристику  $W(j\omega)$ , можно выполнить анализ устойчивости системы на основе критерия Найквиста (см. § 40), оценить точность работы системы и т. п.

Отметим некоторые свойства передаточных функций и частотных характеристик САР. Пусть на вход системы (см. рис. 147) поступает управляющее воздействие в виде единичной ступенчатой функции, т. е.  $g(t) = 1(t)$ . Реакция системы  $x(t)$  на это воздействие, как было указано в § 16, является переходной функцией. В соответствии с равенством (30) изображение переходной функции  $h(t)$  есть  $\mathcal{L}[h(t)] = \Phi(s)\mathcal{L}[1(t)]$ . Так как  $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$ , то будем иметь

$$\mathcal{L}[h(t)] = \Phi(s)\frac{1}{s}. \quad (43)$$

Используя теорему о начальном значении (см. § 43), найдем, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\Phi(s)\frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(s). \quad (44)$$

Положим  $s = j\omega$ ,  $\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ , где  $P(\omega)$ ,  $Q(\omega)$  — вещественная и мнимая частотные характеристики САР. Тогда из равенства (44) получим, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} h(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega). \quad (45)$$

Таким образом, начальное значение переходной функции равно конечному значению вещественной частотной характеристики САР. Если  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega) = 0$ , то переходный процесс в системе начинается из начала координат.

Учитывая теорему о предельном значении (см. § 43), из равенства (43) получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi(s)\frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s). \quad (46)$$

При  $s = j\omega$  имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} [P(\omega) + jQ(\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0} P(\omega), \quad (47)$$

так как  $\lim_{\omega \rightarrow 0} Q(\omega) = 0$  вследствие нечетности функции  $Q(\omega)$ . Следовательно, конечное значение переходной функции равно начальному значению вещественной частотной характеристики САР.

Теорема о предельном значении оказывается полезной и при анализе свойств передаточных функций статических и астатических систем (см. § 16). Из равенства (32) найдем, принимая во внимание теорему о предельном значении, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_e(s)G(s). \quad (48)$$

Пусть на вход САР поступает управляющее воздействие  $g(t) = 1(t)$ , тогда  $G(s) = \frac{1}{s}$ , и вместо последнего равенства будем иметь

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_e(s). \quad (49)$$

Если передаточная функция ошибки  $\Phi_e(s)$  имеет при  $s=0$  ноль какого-либо порядка, то  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$  и САР является астатической. Если же функция  $\Phi_e(s)$  не имеет нулей при  $s=0$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \neq 0$  и САР является статической.

Используя формулу (49), найдем, каким свойством должна обладать передаточная функция разомкнутой САР  $W(s)$ , для того чтобы система была астатической. Введем обозначение

$$W(s) = \frac{W_0(s)}{s^\nu}, \quad (50)$$

где функция  $W_0(s)$  не имеет нулей и полюсов при  $s=0$ . Тогда, учитывая равенство (24), вместо равенства (49) получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + W(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^\nu}{s^\nu + W_0(s)}. \quad (51)$$

Отсюда найдем, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ , т. е. система является астатической, если передаточная функция разомкнутой системы  $W(s)$  имеет при  $s=0$  полюс какой-либо кратности.

Выше рассматривались свойства передаточных функций астатических и статических САР по отношению к управляющему воздействию. Аналогичным образом могут быть получены свойства передаточных функций астатических и статических САР по отношению к возмущающему воздействию. Из равенства (34) найдем с учетом теоремы о предельном значении, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) F(s). \quad (52)$$

Если к системе приложено возмущающее воздействие в виде единичной ступенчатой функции, т. е.  $f(t) = 1(t)$ , то  $F(s) = \frac{1}{s}$  и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} Y(s). \quad (53)$$

Введем обозначение  $V(s) = \frac{V_0(s)}{s^\nu}$ , где функция  $V_0(s)$  не имеет при  $s=0$  ни нулей, ни полюсов. Учитывая это обозначение и подставляя в формулу (53) вместо  $Y(s)$  правую часть равенства (24), получим с учетом выражения (50)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{V_0(s) s^{\nu-x}}{s^\nu + W_0(s)}. \quad (54)$$

Отсюда следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , если дробь в правой части

равенства (54) имеет при  $s=0$  ноль какой-либо кратности, т. е. если  $\nu > x$ .

Таким образом, САР будет астатической по отношению к возмущающему воздействию, если порядок полюса при  $s=0$  передаточной функции разомкнутой САР по отношению к управляющему воздействию выше порядка полюса при  $s=0$  передаточной функции разомкнутой САР (объекта регулирования) по отношению к возмущающему воздействию. Очевидно, что САР может быть астатической по отношению к управляющему воздействию и статической по отношению к возмущающему воздействию.

#### § 47. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ

В § 44 были указаны способы нахождения оригиналов по известным изображениям. Эти способы могут быть применены при определении процесса регулирования в автоматической системе.

Пусть на вход САР (см. рис. 146) поступает управляющее воздействие  $g(t)$ . Требуется определить процесс регулирования, т. е. найти функцию  $x(t)$ , характеризующую изменение регулируемой величины. Для решения этой задачи необходимо записать дифференциальное уравнение, связывающее регулируемую величину  $x(t)$  с управляющим воздействием  $g(t)$ , в преобразованном по Лапласу виде с учетом начальных условий.

Пусть уравнение относительно изображения регулируемой величины  $X(s)$  записывается в виде (см. § 46)

$$D(s) X(s) = M(s) G(s) + M_n(s), \quad (1)$$

где  $D(s)$ ,  $M(s)$ ,  $M_n(s)$  — многочлены относительно  $s$ ;  $G(s)$  — изображение управляющего воздействия  $g(t)$ .

В общем случае регулируемая величина  $x(t)$ , являющаяся оригиналом, может быть найдена с помощью формулы обращения (1) § 44; при этом

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left[ \frac{M(s) G(s)}{D(s)} + \frac{M_n(s)}{D(s)} \right] e^{st} ds \quad (t > 0), \quad (2)$$

откуда получим

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Res} \left[ \frac{M(s) G(s)}{D(s)} + \frac{M_n(s)}{D(s)} \right] e^{st} \Big|_{s=s_\nu}, \quad (t > 0), \quad (3)$$

где  $s=s_\nu$  — полюсы изображения  $X(s)$ , или

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Res} \left[ \Phi(s) G(s) + \frac{M_n(s)}{D(s)} \right] e^{st} \Big|_{s=s_\nu}, \quad (t > 0), \quad (4)$$

где  $\Phi(s)$  — передаточная функция САР.

Однако во многих случаях удается избежать необходимости непосредственного вычисления  $x(t)$  по формуле обращения. Эти случаи рассмотрены в § 44. Наиболее просто определяется процесс изменения регулируемой величины  $x(t)$ , когда изображение  $X(s)$  имеет вид рациональной дроби.

**Пример 1.** Передаточная функция разомкнутой САР равна

$$W(s) = \frac{10}{s(1+0,1s)}$$

Определить процесс изменения в САР регулируемой величины  $x(t)$  при наличии управляющего воздействия  $g(t) = 1(t)$ . Начальные условия — нулевые.

Найдем прежде всего передаточную функцию замкнутой САР. По формуле (22) § 46 имеем

$$\Phi(s) = \frac{\mathcal{L}[x(t)]}{\mathcal{L}[g(t)]} = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{10}{0,1s^2 + s + 10}$$

Так как  $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$ , то изображение по Лапласу регулируемой величины определится равенством

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{10}{s(0,1s^2 + s + 10)} = \frac{100}{s(s^2 + 10s + 100)}$$

Для нахождения оригинала  $x(t)$  воспользуемся формулой (3), где следует положить  $M_n(s) = 0$ , так как начальные условия нулевые. Изображение  $X(s)$  имеет три полюса:

$$s_1 = 0, s_2 = -5 + j\sqrt{75}, s_3 = -5 - j\sqrt{75},$$

поэтому в данном случае имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{v=1}^3 \text{Res} \left[ \frac{100e^{st}}{s(s^2 + 10s + 100)} \right] \Big|_{s=s_v} = \\ &= \sum_{v=1}^3 \text{Res} \left[ \frac{100e^{st}}{s[s - (-5 + j\sqrt{75})][s - (-5 - j\sqrt{75})]} \right] \Big|_{s=s_v} \end{aligned}$$

Вычисляя по формуле (6) § 32 вычеты относительно каждого из полюсов, получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{100e^{st}}{[s - (-5 + j\sqrt{75})][s - (-5 - j\sqrt{75})]} + \\ &+ \lim_{s \rightarrow -5 + j\sqrt{75}} \frac{100e^{st}}{s[s - (-5 - j\sqrt{75})]} + \lim_{s \rightarrow -5 - j\sqrt{75}} \frac{100e^{st}}{s[s - (-5 + j\sqrt{75})]} = \\ &= \frac{100}{(-5)^2 + (\sqrt{75})^2} + \frac{100e^{(-5 + j\sqrt{75})t}}{(-5 + j\sqrt{75})2j\sqrt{75}} + \frac{100e^{(-5 - j\sqrt{75})t}}{(-5 - j\sqrt{75})(-2j\sqrt{75})} = \\ &= 1 - \frac{5}{\sqrt{75}} e^{-5t} \frac{e^{j\sqrt{75}t} - e^{-j\sqrt{75}t}}{2j} - e^{-5t} \frac{e^{j\sqrt{75}t} + e^{-j\sqrt{75}t}}{2} = \\ &= 1 - e^{-5t} \left[ \frac{5}{\sqrt{75}} \sin \sqrt{75}t + \cos \sqrt{75}t \right] \quad (t > 0). \end{aligned}$$

Получен процесс регулирования в САР при наличии заданного управляющего воздействия.

Определим теперь процесс регулирования  $x(t)$  другим, более простым способом. Представим изображение  $X(s)$  в виде суммы двух слагаемых:

$$X(s) = \frac{100}{s(s^2 + 10s + 100)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 10s + 100}$$

Неизвестные коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  определим из равенства

$$100 = As^2 + 10As + 100A + Bs^2 + Cs,$$

которое может быть представлено в виде системы уравнений

$$A + B = 0, 10A + C = 0, 100 = 100A;$$

откуда найдем  $A = 1, B = -1, C = -10$ . Изображение  $X(s)$  может быть теперь записано в виде

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 10s + 100} - \frac{10}{s^2 + 10s + 100}$$

Определим оригинал, соответствующий каждому из слагаемых в правой части этого равенства. Известно, что  $\frac{1}{s} \rightarrow 1(t)$ . Для нахождения оригиналов, соответствующих двум другим изображениям, предварительно запишем квадратный трехчлен в виде

$$s^2 + 10s + 100 = (s + 5)^2 - 25 + 100 = (s + 5)^2 + 75;$$

тогда, учитывая, что

$$\sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \cos \omega t \rightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

$$e^{-\alpha t} \sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}, \quad e^{-\alpha t} \cos \omega t \rightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2 + 10s + 100} &= \frac{s + 5 - 5}{(s + 5)^2 + 75} = \frac{s + 5}{(s + 5)^2 + (\sqrt{75})^2} - \frac{5}{(s + 5)^2 + (\sqrt{75})^2} \cdot \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{75}} \rightarrow \\ &\rightarrow e^{-5t} \cos \sqrt{75}t - \frac{5}{\sqrt{75}} e^{-5t} \sin \sqrt{75}t; \end{aligned}$$

$$\frac{10}{s^2 + 10s + 100} = \frac{10}{(s + 5)^2 + (\sqrt{75})^2} \cdot \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{75}} \rightarrow \frac{10}{\sqrt{75}} e^{-5t} \sin \sqrt{75}t.$$

Окончательно найдем:

$$x(t) = 1 - e^{-5t} \left[ \frac{5}{\sqrt{75}} \sin \sqrt{75}t + \cos \sqrt{75}t \right] \quad (t \geq 0),$$

что совпадает с ранее полученным результатом. Во втором способе вычисления оказываются менее громоздкими.

**Пример 2.** В САР, рассмотренной в предыдущем примере, имеется начальное рассогласование  $x(0) = x_0$ , причем начальная скорость  $\dot{x}(0) = 0$ . Определить процесс изменения регулируемой величины  $x(t)$ , если к системе не прикладывается управляющее воздействие, т. е.  $g(t) = 0$ .

Из передаточной функции САР  $\Phi(s)$ , полученной в предыдущем примере, следует, что дифференциальное уравнение системы, записанное в операторной форме, имеет вид

$$(0,1p^2 + p + 10)x(t) = 10g(t).$$

Преобразуем это уравнение по Лапласу, принимая во внимание начальные условия. Тогда, учитывая, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[p^2 x(t)] &= s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0), \\ \mathcal{L}[px(t)] &= sX(s) - x(0), \quad g(t) = 0, \end{aligned}$$

получим следующее уравнение:

$$0,1s^2X(s) - 0,1sx_0 + sX(s) - x_0 + 10X(s) = 0,$$

откуда найдем изображение регулируемой величины:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{sx_0 + 10x_0}{s^2 + 10s + 100} = \frac{sx_0}{(s+5)^2 + (\sqrt{75})^2} + \frac{10x_0}{(s+5)^2 + (\sqrt{75})^2} = \\ &= x_0 \frac{s+5}{(s+5)^2 + (\sqrt{75})^2} - \frac{5x_0}{\sqrt{75}} \frac{1}{(s+5)^2 + (\sqrt{75})^2} + \frac{10x_0}{\sqrt{75}} \frac{1}{(s+5)^2 + (\sqrt{75})^2} = \\ &= x_0 \frac{s+5}{(s+5)^2 + (\sqrt{75})^2} + \frac{5x_0}{\sqrt{75}} \frac{1}{(s+5)^2 + (\sqrt{75})^2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание результат предыдущего примера, найдем оригинал  $x(t)$ :

$$x(t) = x_0 e^{-5t} \cos \sqrt{75} t + \frac{5x_0}{\sqrt{75}} e^{-5t} \sin \sqrt{75} t \quad (t > 0).$$

Это выражение и характеризует процесс изменения регулируемой величины при наличии в САР начального рассогласования  $x_0$ .

**Пример 3.** Найти процесс изменения регулируемой величины  $x(t)$  в САР, рассмотренной в примере 2 § 16, если управляющее воздействие  $g(t) = 1(t)$ , а начальные условия нулевые.

В указанном примере было получено следующее дифференциальное уравнение системы, записанное в операторной форме:

$$(0,002p^5 + 0,1224p^4 + 5,146p^3 + 41,32p^2 + 201p + 200)x(t) = 200(p+1)g(t).$$

Преобразуя это уравнение по Лапласу и учитывая, что  $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$ , получим изображение регулируемой величины  $X(s)$  в виде

$$X(s) = \frac{200(s+1)}{s(0,002s^5 + 0,1224s^4 + 5,146s^3 + 41,32s^2 + 201s + 200)}.$$

Многочлен в знаменателе имеет корни (см. пример 2 § 16)

$$s_1 = -1,28, \quad s_{2,3} = -3,75 \pm 4,88j, \quad s_{4,5} = -26,21 \pm 37,13j,$$

поэтому изображение  $X(s)$  может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{10^5(s+1)}{s(s+1,28)(s^2+7,5s+37,8)(s^2+52,4s+2055)} = \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1,28} + \frac{C_1}{s+3,75-4,88j} + \frac{C_2}{s+3,75+4,88j} + \\ &\quad + \frac{D_1}{s+26,2-37,13j} + \frac{D_2}{s+26,2+37,13j}. \end{aligned}$$

Определим неизвестные коэффициенты:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10^5(s+1)}{(s+1,28)(s^2+7,5s+37,8)(s^2+52,4s+2055)} = 1,$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1,28} (s+1,28)X(s) = \lim_{s \rightarrow -1,28} \frac{10^5(s+1)}{s(s^2+7,5s+37,8)(s^2+52,4s+2055)} = 0,375,$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -3,75+4,88j} [s - (-3,75+4,88j)]X(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow -3,75+4,88j} \frac{10^5(s+1)}{s(s+1,28)(s+3,75+4,88j)(s^2+52,4s+2055)} = -0,686 + 0,653j,$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -3,75-4,88j} [s - (-3,75-4,88j)]X(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow -3,75-4,88j} \frac{10^5(s+1)}{s(s+1,28)(s+3,75-4,88j)(s^2+52,4s+2055)} = -0,686 - 0,653j,$$

$$D_1 = \lim_{s \rightarrow -26,2+37,13j} [s - (-26,2+37,13j)]X(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow -26,2+37,13j} \frac{10^5(s+1)}{s(s+1,28)(s^2+7,5s+37,8)(s+26,2+37,13j)} = -0,0023 - 0,016j,$$

$$D_2 = \lim_{s \rightarrow -26,2-37,13j} [s - (-26,2-37,13j)]X(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow -26,2-37,13j} \frac{10^5(s+1)}{s(s+1,28)(s^2+7,5s+37,8)(s+26,2-37,13j)} = -0,0023 + 0,016j.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в разложение  $X(s)$  на сумму слагаемых, получим

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{0,375}{s+1,28} - \frac{1,37s+11,49}{s^2+7,5s+37,8} + \frac{-0,005s+1,08}{s^2+52,4s+2055}.$$

Учитывая формулы (6) и (7) § 42, получим оригиналы, соответствующие слагаемым в правой части этого равенства:

$$1(t) \div \frac{1}{s}, \quad 0,375e^{-1,28t} \div \frac{0,375}{s+1,28}.$$

Применяя второй способ, использованный в примере 1, также найдем

$$1,37e^{-3,75t} \cos 4,88t + 1,3e^{-3,75t} \sin 4,88t \div \frac{1,37s+11,49}{s^2+7,5s+37,8}$$

$$-0,005e^{-26,2t} \cos 37,13t + 0,035e^{-26,2t} \sin 37,13t \div \frac{-0,005s+1,08}{s^2+52,4s+2055}.$$

Следовательно, процесс изменения регулируемой величины определяется следующей функцией:

$$x(t) = 1(t) + 0,375e^{-1,28t} - e^{-3,75t} (1,37 \cos 4,88t + 1,3 \sin 4,88t) + e^{-26,2t} \times \\ \times (-0,005 \cos 37,13t + 0,035 \sin 37,13t) \quad (t > 0).$$

Другим способом этот же результат получен в примере 2 § 16.

ЧАСТЬ ШЕСТАЯ  
**РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
 И ДИСКРЕТНОЕ  
 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА.  
 ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ  
 АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Глава XVI

**РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ  
 ДЛЯ ОПИСАНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ  
 АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ**

§ 48. РЕШЕТЧАТЫЕ ФУНКЦИИ

1. **Определение решетчатой функции.** Наряду с функциями, определенными на всей вещественной прямой  $t$ , можно рассматривать функции, которые определены только в некоторых точках  $t_1, t_2, \dots$ . Такие функции называют *решетчатыми*. Мы будем рассматривать функции, определенные только в равноотстоящих точках  $t = nT$ , где  $n$  — любое целое число, а  $T$  — постоянная, называемая периодом дискретности. Эти функции принято обозначать  $f[nT]$  (рис. 148).

Любой непрерывной функции  $f(t)$  можно поставить в соответствие некоторое множество решетчатых функций, если представить переменную  $t$  в виде

$$t = nT + \varepsilon T \quad (0 \leq \varepsilon \leq 1).$$

При каждом фиксированном значении переменной  $\varepsilon$  функцию  $f(nT + \varepsilon T)$  можно рассматривать как решетчатую функцию, определенную в точках  $\varepsilon T, (\varepsilon + 1)T, (\varepsilon + 2)T, \dots$  (рис. 149). Такие функции называются *смещенными решетчатыми функциями*. Для них принято обозначение  $f(nT + \varepsilon T) = f[nT, \varepsilon T]$ . Изменяя переменную  $\varepsilon$  в пределах от нуля до единицы, можно получить множество

смещенных решетчатых функций  $f[nT, \varepsilon T]$ , соответствующих данной непрерывной функции  $f(t)$ . Благодаря непрерывности функции  $f(t)$  функция  $f[nT, \varepsilon T]$  является непрерывной по аргументу  $\varepsilon$  и удовлетворяет условию

$$f[(n-1)T, T] = f[nT, 0].$$

Если функция  $f(t)$  терпит разрыв непрерывности первого рода в точках  $t = nT$ , то написанное равенство не выполняется, поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} f[(n-1)T, \varepsilon T] \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f[nT, \varepsilon T].$$

В этом случае под значением функции  $f[nT]$  будем понимать предел справа:

$$f[nT] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f[nT + \varepsilon T].$$

В соответствии с этим значения переменной  $\varepsilon$  рассматриваются на полуинтервале  $0 \leq \varepsilon < 1$ .

Функции  $f[nT, \varepsilon T]$  являются функциями двух аргументов  $n$  и  $\varepsilon$ , поэтому целесообразно обозначать эти функции как  $f_1[n, \varepsilon] = f[nT, \varepsilon T]$ . В частности, при  $\varepsilon = 0$  обозначают  $f_1[n] = f[nT, 0]$ . В тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, индекс единицы будем опускать.

Для решетчатых функций вводятся понятия конечных разностей и сумм, которые в некотором смысле соответствуют понятиям производной и интеграла для обычных функций.

2. **Конечные разности решетчатых функций.** Выражение

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n] \quad (1)$$

называется *конечной разностью* первого порядка решетчатой функ-

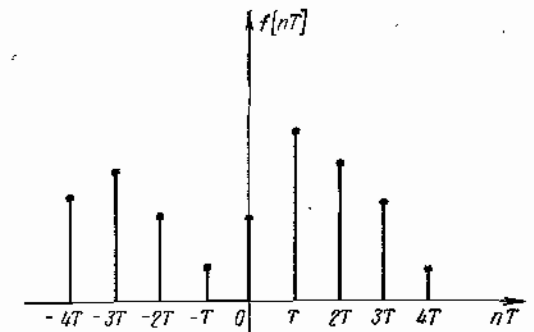


Рис. 148

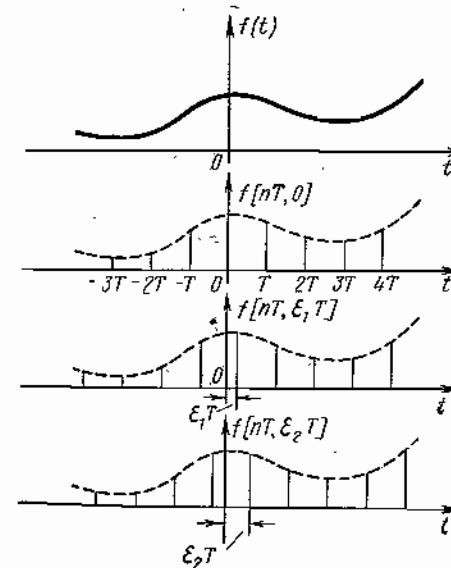


Рис. 149



ции. Ради краткости  $\Delta f[n]$  называют просто *первой разностью*. Первая разность от решетчатой функции  $\Delta f[n]$  называется *разностью второго порядка* решетчатой функции  $f[n]$ , или просто второй разностью, т. е.

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n]. \quad (2)$$

Разность  $k$ -го порядка решетчатой функции  $f[n]$  определяется формулой

$$\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n]. \quad (3)$$

Разность любого порядка можно выразить через значения решетчатой функции  $f[n]$ . В частности, для второй разности получим

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n]. \quad (4)$$

Аналогично найдем выражение для третьей разности:

$$\Delta^3 f[n] = f[n+3] - 3f[n+2] + 3f[n+1] - f[n]. \quad (5)$$

Для разности произвольного порядка  $k$  справедлива формула

$$\Delta^k f[n] = \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \binom{k}{\nu} f[n+k-\nu], \quad (6)$$

где

$$\binom{k}{\nu} = C_k^\nu = \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!}.$$

Формулы (1) — (6), определяющие разности решетчатых функций, позволяют выразить саму решетчатую функцию  $f[n]$  через ее разности различных порядков. Так, из равенства (1) можно получить, что

$$f[n+1] = f[n] + \Delta f[n]. \quad (7)$$

Из равенств (1) и (2) можно найти, что

$$\Delta^2 f[n] = f[n+2] - f[n+1] - \Delta f[n] = f[n+2] - f[n] - 2\Delta f[n];$$

таким образом,

$$f[n+2] = f[n] + 2\Delta f[n] + \Delta^2 f[n]. \quad (8)$$

Из равенства (3) при  $k=3$  и равенств (4), (7), (8) аналогично получим:

$$\begin{aligned} \Delta^3 f[n] &= \Delta^2 f[n+1] - \Delta^2 f[n] = f[n+3] - 2f[n+2] + f[n+1] - \\ &- \Delta^2 f[n] = f[n+3] - 2f[n] - 4\Delta f[n] - 2\Delta^2 f[n] + f[n] + \Delta f[n] - \\ &- \Delta^2 f[n] = f[n+3] - f[n] - 3\Delta f[n] - 3\Delta^2 f[n], \end{aligned}$$

откуда

$$f[n+3] = f[n] + 3\Delta f[n] + 3\Delta^2 f[n] + \Delta^3 f[n]. \quad (9)$$

Продолжая вычисления в том же порядке, можно получить следующую формулу:

$$f[n+l] = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \Delta^k f[n], \quad (10)$$

или, в частности, при  $n=0$

$$f[l] = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \Delta^k f[0]. \quad (11)$$

Формулы (10), (11) выражают значения решетчатой функции через ее конечные разности до порядка  $l$  включительно. Эти формулы являются дискретным аналогом разложения непрерывных функций в ряд Тейлора.

**Пример 1.** Задана решетчатая функция  $f[n] = a$ , где  $a$  — постоянная величина. Найти первую разность данной функции.

По формуле (1) имеем

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n] = a - a = 0,$$

т. е. первая разность от постоянной величины равна нулю.

**Пример 2.** Дана решетчатая функция  $f[n] = an + b$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные величины. Определить первую разность этой функции.

По формуле (1) получим

$$\Delta f[n] = a(n+1) + b - an - b = a.$$

Итак, первая разность от линейной решетчатой функции есть постоянная величина. Вторая разность от функции  $f[n] = an + b$  равна нулю, действительно,

$$\Delta^2 f[n] = \Delta a = 0.$$

**Пример 3.** Определить разности решетчатой функции  $f[n] = n^2$ . Получим:

$$\begin{aligned} \Delta f[n] &= (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1, \\ \Delta^2 f[n] &= \Delta f[n+1] - \Delta f[n] = 2(n+1) + 1 - 2n - 1 = 2, \\ \Delta^3 f[n] &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вторая разность от степенной решетчатой функции  $n^2$  постоянна, а разности более высокого порядка равны нулю.

**Пример 4.** Определить конечные разности экспоненциальной функции  $f[n] = e^{an}$ .

Аналогично предыдущему получим

$$\begin{aligned} \Delta f[n] &= e^{a(n+1)} - e^{an} = e^{an}(e^a - 1), \\ \Delta^2 f[n] &= (e^a - 1) \Delta e^{an} = e^{an}(e^a - 1)^2. \end{aligned}$$

Продолжая процесс вычисления разностей, найдем следующую формулу для разности порядка  $k$

$$\Delta^k f[n] = e^{an}(e^a - 1)^k. \quad (12)$$

**Пример 5.** Задана факториальная решетчатая функция  $f[n] = n^{(m)} = n(n-1)\dots(n-(m-1))$ , где  $m \geq 1$  — некоторое целое число. Вычислить разности факториальной функции.

Первая разность равна

$$\begin{aligned} \Delta n^{(m)} &= (n+1)n(n-1)\dots[n+1-(m-1)] - n(n-1)\dots[n-(m-1)] = \\ &= n(n-1)\dots[n-(m-2)]\{n+1-[n-(m-1)]\} = m \cdot n^{(m-1)}. \end{aligned}$$

Далее получим

$$\Delta^2 n^{(m)} = \Delta m n^{(m-1)} = m \Delta n^{(m-1)} = m(m-1) n^{(m-2)}.$$

Вообще при всех значениях  $k$ , удовлетворяющих условию  $k \leq m-1$ , найдем:

$$\Delta^k n^{(m)} = m(m-1) \dots [m-(k-1)] n^{(m-k)} = m^{(k)} n^{(m-k)}. \quad (13)$$

В частности, при  $k = m-1$  имеем

$$\Delta^{m-1} n^{(m)} = m! n.$$

При  $k = m$  из формулы (13) следует, что

$$\Delta^m n^{(m)} = m!$$

Разности более высокого порядка, очевидно, равны нулю.

Таким образом, формулы взятия разности для факториальных функций имеют тот же вид, что и формулы взятия производных для обычных степенных функций.

Отметим, что операция взятия конечных разностей является линейной операцией. Это следует непосредственно из определения конечной разности. Действительно,

$$\Delta \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i [n] = \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i [n+1] - \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i [n] = \sum_{i=1}^k c_i \Delta \varphi_i [n],$$

где  $c_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) — постоянные коэффициенты.

Рассмотрим теперь разность от произведения двух решетчатых функций  $\varphi [n]$  и  $\psi [n]$ . Имеем

$$\Delta (\varphi [n] \psi [n]) = \varphi [n+1] \psi [n+1] - \varphi [n] \psi [n].$$

Прибавляя и вычитая в правой части этого равенства выражение  $\varphi [n] \psi [n+1]$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta (\varphi [n] \psi [n]) &= \varphi [n+1] \psi [n+1] - \varphi [n] \psi [n] + \\ &+ \varphi [n] \psi [n+1] - \varphi [n] \psi [n+1] = \psi [n+1] \Delta \varphi [n] + \\ &+ \Delta \psi [n] \varphi [n]. \end{aligned}$$

Итак,

$$\Delta (\varphi [n] \psi [n]) = \psi [n+1] \Delta \varphi [n] + \Delta \psi [n] \varphi [n]. \quad (14)$$

Если прибавить и вычесть выражение  $\psi [n] \varphi [n+1]$  вместо  $\varphi [n] \psi [n+1]$ , то получится

$$\Delta (\varphi [n] \psi [n]) = \varphi [n+1] \Delta \psi [n] + \Delta \varphi [n] \psi [n]. \quad (15)$$

Оба выражения (14) и (15) определяют разность произведения  $\varphi [n] \psi [n]$ . Аналогично можно получить формулу для второй разности:

$$\begin{aligned} \Delta^2 (\varphi [n] \psi [n]) &= \varphi [n] \Delta^2 \psi [n] + 2 \Delta \varphi [n] \Delta \psi [n+1] + \\ &+ \Delta^2 \varphi [n] \psi [n+2] = \psi [n] \Delta^2 \varphi [n] + 2 \Delta \psi [n] \Delta \varphi [n+1] + \Delta^2 \psi [n] \varphi [n+2]. \end{aligned}$$

Для разности произвольного порядка  $k$  справедлива следующая формула:

$$\Delta^k (\varphi [n] \psi [n]) = \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} \Delta^\nu \varphi [n] \Delta^{k-\nu} \psi [n+\nu]. \quad (16)$$

**3. Суммирование решетчатых функций.** Рассмотрим теперь операцию, которая является обратной по отношению к операции взятия конечной разности. Пусть решетчатая функция  $f [n]$  определена при положительных значениях аргумента  $n=0, 1, 2, \dots$ . Требуется найти такую решетчатую функцию  $F [n]$ , для которой функция  $f [n]$  является первой разностью.

Эта задача аналогична задаче о нахождении первообразной в анализе обычных функций. Искомая функция имеет вид

$$F [n] = \sum_{k=0}^{n-1} f [k] \quad (n=1, 2, \dots). \quad (17)$$

Действительно,

$$\Delta F [n] = F [n+1] - F [n] = \sum_{k=0}^n f [k] - \sum_{k=0}^{n-1} f [k] = f [n].$$

Функцию  $F [n]$  называют *первообразной* для решетчатой функции  $f [n]$ .

Если решетчатая функция  $f [n]$  определена при всех целочисленных значениях аргумента  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , то для определения первообразной необходимо дополнительно потребовать, чтобы при каждом конечном  $n$  сходился ряд  $\sum_{k=-\infty}^n f [k]$ . При этом условии первообразная определяется выражением

$$F [n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} f [k]. \quad (18)$$

Если функция  $F [n]$  является первообразной для функции  $f [n]$ , то и функция  $F [n] + c$ , где  $c$  — постоянная величина, также является первообразной для решетчатой функции  $f [n]$ . Действительно,

$$\Delta [F [n] + c] = \Delta F [n] + \Delta c = f [n].$$

Таким образом, общий вид первообразной для данной решетчатой функции  $f [n]$  определяется формулой

$$F [n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} f [k] + c. \quad (19)$$

Значение постоянной  $c$  можно выразить через значение первообразной при некотором фиксированном значении аргумента  $n=N$ :

$$c = F [N] - \sum_{k=-\infty}^{N-1} f [k].$$

Подставляя полученное выражение в формулу (19), найдем

$$F [n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} f [k] + F [N] - \sum_{k=-\infty}^{N-1} f [k] = \sum_{k=n}^{N-1} f [k] + F [N].$$

откуда

$$F[n] - F[N] = \sum_{k=N}^{n-1} f[k] \quad (20)$$

для любого  $n > N$ .

Формула (20) является аналогом соответствующей формулы интегрального исчисления, связывающей интеграл с первообразной; ее можно записать в виде

$$F[N+l] - F[N] = \sum_{k=N}^{N+l-1} f[k] = \sum_{v=0}^{l-1} f[N+v] \quad (l=1, 2, \dots). \quad (21)$$

Сумму, стоящую в правой части этого выражения, иногда называют *определенной суммой* по аналогии с определенным интегралом. Учитывая условие  $f[n] = \Delta F[n]$ , можно переписать равенство (21) следующим образом:

$$F[N+l] - F[N] = \sum_{k=N}^{N+l-1} \Delta F[k], \quad (22)$$

или при  $N=0$

$$F[l] = \sum_{k=0}^{l-1} \Delta F[k] + F[0]. \quad (23)$$

Для решетчатых функций справедлива формула суммирования по частям, аналогичная формуле интегрирования по частям для обычных функций. Если в формуле (23) положить

$$F[n] = u[n]v[n], \quad l = n+1,$$

то

$$\begin{aligned} u[n+1]v[n+1] &= \sum_{k=0}^n \Delta(u[k]v[k]) + u[0]v[0] = \\ &= \sum_{k=0}^n [u[k]\Delta v[k] + v[k+1]\Delta u[k]] + u[0]v[0]. \end{aligned}$$

Это равенство можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=0}^n u[k]\Delta v[k] = u[k]v[k] \Big|_{k=0}^{k=n+1} - \sum_{k=0}^n v[k+1]\Delta u[k]; \quad (24)$$

получена формула суммирования по частям.

**Пример 6.** Задана функция  $f[n] = e^{-an}$ ;  $a > 0$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ). Найти сумму  $F[n]$ .

Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии, получим:

$$F[n] = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ak} = \frac{1 - e^{-an}}{1 - e^{-a}}. \quad (25)$$

Здесь  $e^{-a}$  — знаменатель прогрессии.

**Пример 7.** Дана функция  $f[n] = e^{-a|n|}$ , где  $n$  — любое целое число:  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $a > 0$ . Найти сумму  $F[n] = \sum_{k=-\infty}^n e^{-a|k|}$ .

Выполним суммирование по отдельности для положительных и отрицательных значений аргумента  $n$ :

$$F_+[n] = \sum_{k=0}^n e^{-ak} = \frac{1 - e^{-a(n+1)}}{1 - e^{-a}},$$

$$F_-[n] = \sum_{k=-1}^{-\infty} e^{ak} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ak} = \frac{e^{-a}}{1 - e^{-a}}.$$

Для положительных значений  $n=0, 1, 2, \dots$  найдем

$$F[n] = F_+[n] + F_-[n] = \frac{1 - e^{-a(n+1)}}{1 - e^{-a}} + \frac{e^{-a}}{1 - e^{-a}} = \frac{1 + e^{-a}(1 - e^{-a(n+1)})}{1 - e^{-a}}. \quad (26)$$

Для отрицательных значений  $n=-1, -2, \dots$  имеем

$$F[n] = \sum_{k=-\infty}^n e^{ak} = \sum_{k=-n}^{\infty} e^{-ak} = \frac{e^{an}}{1 - e^{-a}}. \quad (27)$$

**Пример 8.** Для решетчатой функции  $f[n] = n$ , где  $n$  принимает значения  $0, 1, 2, \dots$ , найти первообразную  $F[n]$ .  
Имеем

$$F[n] = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2} n(n-1). \quad (28)$$

**Пример 9.** Пусть  $f[n] = n^2$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ). Найти первообразную.

Для нахождения суммы  $F[n] = \sum_{k=0}^{n-1} k^2$  воспользуемся определением первообразной, в соответствии с которым имеем

$$\Delta F[n] = f[n] = n^2.$$

Будем искать функцию  $F[n]$ , удовлетворяющую этому условию. Вычислим разности

$$\begin{aligned} \Delta n^3 &= (n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1, \\ \Delta n^2 &= 2n + 1, \\ \Delta n &= 1. \end{aligned}$$

Выразим из этих равенств функцию  $n^2$  через первые разности:

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{1}{3} \Delta n^3 - n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Delta n^3 - \left( \frac{1}{2} \Delta n^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} = \\ &= \Delta \left( \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{3} n + \frac{1}{2} n \right), \end{aligned}$$

откуда определим

$$F[n] = \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{3} n + \frac{1}{2} n + c.$$

Постоянную  $c$  найдем из условия  $F[1] = 0$ :

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + c; \quad c = 0.$$

Искомая сумма определяется формулой

$$F[n] = \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{3} n + \frac{1}{2} n = \\ = \frac{1}{3} (n^3 - 1)n - \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1). \quad (29)$$

**Пример 10.** Найти двойную сумму

$$F[n] = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{k-1} l = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k-1)k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (k^2 - k).$$

Воспользуемся результатами примеров 8 и 9:

$$F[n] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) - \frac{1}{2} n(n-1) \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1-3) \right] = \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) = \frac{1}{3!} n^{(3)}. \quad (30)$$

Выполняя аналогичные выкладки, можно получить формулу для суммы произвольной кратности  $m$ :

$$\sum_{k_m=0}^{n-1} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3-1} \sum_{k_1=0}^{k_2-1} k_1 = \frac{n^{(m+1)}}{(m+1)!}. \quad (31)$$

Понятия разности и суммы вводятся без изменения и для смещенных решетчатых функций; в этом случае

$$\Delta f[n, \varepsilon] = f[n+1, \varepsilon] - f[n, \varepsilon], \quad (32)$$

$$F[n, \varepsilon] = \sum_{k=0}^{n-1} f[k, \varepsilon]. \quad (33)$$

## § 49. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**1. Основные понятия и определения.** Всякое соотношение, связывающее решетчатую функцию  $x[n]$  и ее разности до некоторого порядка  $k$ :

$$\Phi[n, x[n], \Delta x[n], \dots, \Delta^k x[n]] = 0, \quad (1)$$

называется *разностным уравнением*.

Используя формулу (6) § 48, соотношение (1) можно преобразовать к виду

$$\Phi_1[n, x[n], x[n+1], x[n+2], \dots, x[n+k]] = 0. \quad (2)$$

Например, линейное разностное уравнение

$$a_0 \Delta^3 x[n] + a_1 \Delta^2 x[n] + a_2 \Delta x[n] + a_3 x[n] = f[n], \quad (3)$$

где  $f[n]$  — заданная решетчатая функция;  $a_0, a_1, a_2, a_3$  — постоянные коэффициенты, можно преобразовать следующим образом:

$$a_0 (x[n+3] - 3x[n+2] + 3x[n+1] - x[n]) + a_1 (x[n+2] - \\ - 2x[n+1] + x[n]) + a_2 (x[n+1] - x[n]) + a_3 x[n] = f[n],$$

или после группировки

$$x[n+3] a_0 + x[n+2] (a_1 - 3a_0) + x[n+1] (3a_0 - 2a_1 + a_2) + \\ + x[n] (a_2 - a_1 + a_0) = f[n]. \quad (4)$$

Если соотношение (2) содержит в явном виде функции  $x[n]$  и  $x[n+k]$ , то исходное разностное уравнение (1) называется *уравнением порядка  $k$* .

В процессе приведения уравнения (1) к виду (2) функции  $x[n]$  могут взаимно уничтожиться; при этом получается разностное уравнение вида

$$\Phi_2[n, x[n+1], x[n+2], \dots, x[n+k]] = 0. \quad (5)$$

Если заменить переменную  $n$  по формуле  $m = n + 1$ , то получится

$$\Phi_2[m-1, x[m], \dots, x[m+k-1]] = 0. \quad (6)$$

Это уравнение является, согласно принятому определению, разностным уравнением порядка  $k-1$ .

При переходе от разностей решетчатых функций к самим решетчатым функциям могут взаимно уничтожиться не только функции  $x[n]$ , но также и функции  $x[n+1], \dots, x[n+l]$  ( $l < k$ ). Если заменить переменную по формуле  $m = n + l + 1$ , то в этом случае получится разностное уравнение порядка  $k-l-1$ .

Таким образом, порядок разностного уравнения может отличаться от порядка старшей разности.

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\Delta^3 x[n] + \Delta^2 x[n] + 2\Delta x[n] + 2x[n] = f[n]. \quad (7)$$

В соответствии с формулой (6) § 48 его можно преобразовать к виду

$$x[n+3] - 2x[n+2] + 3x[n+1] = f[n]. \quad (8)$$

Введем новую переменную  $m = n + 1$ , тогда получим

$$x[m+2] - 2x[m+1] + 3x[m] = f[m-1]. \quad (9)$$

Таким образом, уравнение (7) является уравнением второго порядка, несмотря на то что оно содержит разность третьего порядка.

Решетчатая функция  $x[n]$ , которая обращает уравнение в тождество, называется *решением разностного уравнения*. Решение определяется наиболее просто, если разностное уравнение порядка  $k$  можно разрешить относительно функции  $x[n+k]$ , т. е. представить его в виде

$$x[n+k] = F[n, x[n], x[n+1], \dots, x[n+k-1]]. \quad (10)$$

Относительно функции  $F[n, y_1, y_2, \dots, y_k]$  будем предполагать, что она определена при всех вещественных значениях своих аргу-

ментов  $n, y_1, y_2, \dots, y_k$ , ограничена и однозначна. Зададим  $k$  начальных условий при некотором значении аргумента  $n = n_0$ :

$$x[n_0] = x_0, \quad x[n_0 + 1] = x_1, \dots, x[n_0 + k - 1] = x_{k-1}.$$

Соотношение (10) определяет по заданным начальным условиям значение решения при  $n = n_0 + k$ . Используя значение  $x[n_0 + k]$ , вычислим последовательно  $x[n_0 + k + 1]$ ,  $x[n_0 + k + 2]$  и все остальные значения решения  $x[n]$  при  $n \geq n_0 + k$ . Полагая теперь  $n = n_0 - 1 - k$ ,  $n = n_0 - 2 - k, \dots$ , последовательно вычислим из уравнения (10) значения решения при  $n \leq n_0 - 1$ , т. е.  $x[n_0 - 1]$ ,  $x[n_0 - 2], \dots$ .

Таким образом, решение  $x[n]$  разностного уравнения (10) единственным образом определяется при всех значениях аргумента  $n$  в функции от  $k$  начальных условий:

$$x[n] = \xi[n, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]. \quad (11)$$

Рассматривая всевозможные начальные условия, мы получим *общее решение* уравнения (10) как функцию  $k$  произвольных постоянных  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ :

$$x[n] = \xi[n, c_0, c_1, \dots, c_{k-1}]. \quad (12)$$

Решение (12) является общим решением в том же смысле, что и общее решение дифференциального уравнения. А именно, любое решение разностного уравнения (10) может быть получено по формуле (12) при соответствующем выборе постоянных  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ . Заметим, что число произвольных постоянных совпадает с порядком уравнения.

Решение (12) определено при сделанных предположениях для всех значений аргумента  $n$ . Однако в тех задачах, где  $n$  имеет смысл дискретных моментов времени, обычно рассматривают решение лишь при  $n \geq 0$ .

Наряду с разностными уравнениями относительно решетчатых функций  $x[n]$ , можно рассматривать разностные уравнения относительно смещенных решетчатых функций  $x[n, \varepsilon]$ :

$$\Phi[n + \varepsilon, x[n, \varepsilon], \Delta x[n, \varepsilon], \Delta^2 x[n, \varepsilon], \dots, \Delta^k x[n, \varepsilon]] = 0. \quad (13)$$

Если, в частности, порядок разностного уравнения (13) совпадает с порядком старшей разности и уравнение (13) можно разрешить относительно  $x[n + k, \varepsilon]$ , то это уравнение представимо в виде

$$x[n + k, \varepsilon] = F[n + \varepsilon, x[n, \varepsilon], x[n + 1, \varepsilon], \dots, x[n + k - 1, \varepsilon]], \quad (14)$$

где  $0 \leq \varepsilon < 1$ .

Для того чтобы получить решение разностного уравнения порядка  $k$  для произвольных значений  $\varepsilon$ , следует задать в качестве начальных условий  $k$  функций переменной  $\varepsilon$ :

$$x[n_0, \varepsilon] = x_0[\varepsilon], \quad x[n_0 + 1, \varepsilon] = x_1[\varepsilon], \dots, x[n_0 + k - 1, \varepsilon] = x_{k-1}[\varepsilon]$$

Тогда из рекуррентного соотношения (14) можно найти решение для любого значения  $0 \leq \varepsilon < 1$ ,  $n \geq n_0$ , которое можно записать следующим образом:

$$x[n, \varepsilon] = \xi[n, \varepsilon, x_0[\varepsilon], x_1[\varepsilon], \dots, x_{k-1}[\varepsilon]]. \quad (15)$$

Отсюда следует, что общее решение разностного уравнения (14) зависит от  $k$  произвольных функций, заданных при  $0 \leq \varepsilon < 1$ , т. е.

$$x[n, \varepsilon] = \xi[n, \varepsilon, c_0[\varepsilon], c_1[\varepsilon], \dots, c_{k-1}[\varepsilon]]. \quad (16)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать главным образом разностные уравнения относительно решетчатых функций при  $\varepsilon = 0$ . Тем не менее все результаты, приведенные ниже, могут быть легко распространены на уравнения типа (13), (14) для смещенных решетчатых функций. Перейдем к более подробному изучению линейных разностных уравнений.

**2. Линейные разностные уравнения. Однородные уравнения.** *Линейное разностное уравнение порядка  $k$  имеет следующий вид:*

$$a_0[n] \Delta^r x[n] + a_1[n] \Delta^{r-1} x[n] + \dots + a_{r-1}[n] \Delta x[n] + a_r[n] x[n] = f[n] \quad (r \geq k), \quad (17)$$

где  $f[n], a_0[n], a_1[n], \dots, a_r[n]$  — заданные решетчатые функции. Будем предполагать, что эти функции определены при всех положительных значениях аргумента  $n = 0, 1, 2, \dots$  и ограничены. Уравнение (17) называется *неоднородным разностным уравнением*, если правая часть  $f[n]$  не равна тождественно нулю; в противном случае уравнение (17) называется *однородным разностным уравнением*.

Уравнение (17) можно преобразовать к виду

$$b_0[n] x[n + k] + b_1[n] x[n + k - 1] + \dots + b_{k-1}[n] x[n + 1] + b_k[n] x[n] = f[n], \quad (18)$$

используя формулу (6) § 48. При этом коэффициенты  $b_i[n]$  ( $i = 0, 1, \dots, k - 1$ ) связаны с коэффициентами  $a_i[n]$  соотношением

$$b_i[n] = \sum_{\nu=0}^i (-1)^{i-\nu} \binom{k-\nu}{i-\nu} a_\nu[n]. \quad (19)$$

Заметим, что  $b_k[n] \neq 0$ , так как мы предположили, что разностное уравнение (17) имеет порядок  $k$ . Коэффициент  $b_0[n]$  без ограничения общности можно считать постоянным и равным единице.

Для линейных разностных уравнений мы рассмотрим несколько общих теорем, которые аналогичны соответствующим теоремам для линейных дифференциальных уравнений.

**Теорема 1.** *Если решетчатые функции  $\xi_1[n], \dots, \xi_l[n]$  являются решениями линейного однородного разностного уравнения*

$$x[n + k] + b_1[n] x[n + k - 1] + \dots + b_k[n] x[n] = 0, \quad (20)$$

то функция

$$\xi[n] = \sum_{i=1}^l c_i \xi_i[n], \quad (21)$$

где  $c_i$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ) — произвольные постоянные, также является его решением.

Доказательство. Подставляя функцию  $\xi[n]$  в левую часть уравнения (20), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l c_i \xi_i[n+k] + b_1[n] \sum_{i=1}^l c_i \xi_i[n+k-1] + \dots + b_k[n] \sum_{i=1}^l c_i \xi_i[n] = \\ = \sum_{i=1}^l c_i (\xi_i[n+k] + b_1[n] \xi_i[n+k-1] + \dots + b_k[n] \xi_i[n]). \end{aligned}$$

Функции  $\xi_i[n]$  являются решениями однородного уравнения (20), поэтому справедливы равенства

$$\xi_i[n+k] + b_1[n] \xi_i[n+k-1] + \dots + b_k[n] \xi_i[n] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, l).$$

Отсюда следует, что  $\xi[n]$  — решение уравнения (20).

Теорема доказана.

В частности, выбирая  $l=k$ , можно получить решение разностного уравнения (20) в функции  $k$  произвольных постоянных:

$$\xi[n] = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n].$$

Ниже будут указаны условия, налагаемые на решения  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$ , при которых функция  $\xi[n]$  является общим решением однородного уравнения. Предварительно введем понятие линейной зависимости решетчатых функций.

Решетчатые функции  $x_1[n], x_2[n], \dots, x_k[n]$  называются *линейно-зависимыми*, если существуют такие постоянные числа  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , среди которых по крайней мере одно отличается от нуля, что для всех значений аргумента  $n$ , при которых определены эти функции, справедливо соотношение

$$c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n] + \dots + c_k x_k[n] = 0. \quad (22)$$

Если же соотношение (22) может быть выполнено лишь при условии  $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ , то решетчатые функции называются *линейно-независимыми*.

Справедлива следующая теорема о линейной зависимости решетчатых функций:

**Теорема 2.** Если решетчатые функции  $x_1[n], \dots, x_k[n]$  линейно-зависимы, то при всех значениях аргумента  $n$ , при которых они определены, обращается в ноль определитель

$$\begin{aligned} W[x_1[n], x_2[n], \dots, x_k[n]] = \\ = \begin{vmatrix} x_1[n] & x_1[n+1] & \dots & x_1[n+k-1] \\ x_2[n] & x_2[n+1] & \dots & x_2[n+k-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k[n] & x_k[n+1] & \dots & x_k[n+k-1] \end{vmatrix}. \quad (23) \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть функции  $x_1[n], \dots, x_k[n]$  линейно-зависимы и в соотношении (22) постоянная  $c_1 \neq 0$ . Умножим первую строку определителя на  $c_1$  и прибавим к ней все остальные строки определителя, умноженные на  $c_i$  ( $i=2, 3, \dots, k$ ):

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^k c_i x_i[n] & \sum_{i=1}^k c_i x_i[n+1] & \dots & \sum_{i=1}^k c_i x_i[n+k-1] \\ x_2[n] & x_2[n+1] & \dots & x_2[n+k-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k[n] & x_k[n+1] & \dots & x_k[n+k-1] \end{vmatrix}.$$

Все элементы первой строки этого определителя нулевые, вследствие чего определитель равен нулю. Замечая, что полученный определитель равен  $c_1 W[x_1[n], \dots, x_k[n]]$ , запишем следующее равенство

$$c_1 W[x_1[n], \dots, x_k[n]] = 0;$$

поскольку  $c_1 \neq 0$ , то  $W[x_1[n], \dots, x_k[n]] = 0$ .

Теорема доказана.

Пусть  $\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]$  — решения однородного разностного уравнения (20), определенные при  $n \geq n_0$ . Составим из этих решетчатых функций определитель (23). Определитель  $W[\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]]$  играет в теории разностных уравнений ту же роль, что и определитель Вронского в теории линейных дифференциальных уравнений (см. § 11).

Составим рекуррентное соотношение, по которому можно вычислить значение определителя  $W[\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]]$  при любом значении аргумента  $n \geq n_0$ . Подставляя решения  $\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]$  в уравнение (20), получим систему  $k$  уравнений

$$\begin{aligned} b_1[n] \xi_1[n+k-1] + b_2[n] \xi_1[n+k-2] + \dots \\ \dots + b_k[n] \xi_1[n] = -\xi_1[n+k], \\ b_1[n] \xi_2[n+k-1] + b_2[n] \xi_2[n+k-2] + \dots \\ \dots + b_k[n] \xi_2[n] = -\xi_2[n+k], \\ \dots \\ b_1[n] \xi_k[n+k-1] + b_2[n] \xi_k[n+k-2] + \dots \\ \dots + b_k[n] \xi_k[n] = -\xi_k[n+k]. \end{aligned} \quad (24)$$

Из системы уравнений (24) можно определить функцию  $b_k[n]$ :

$$b_k[n] = \frac{W_k[\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]]}{W[\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]]}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} W_k[\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]] = \\ = - \begin{vmatrix} \xi_1[n+k-1] & \dots & \xi_1[n+1] \xi_1[n+k] \\ \xi_2[n+k-1] & \dots & \xi_2[n+1] \xi_2[n+k] \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_k[n+k-1] & \dots & \xi_k[n+1] \xi_k[n+k] \end{vmatrix}. \quad (26) \end{aligned}$$



Заметим, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} W_k[\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]] &= \\ &= (-1)^k W[\xi_1[n+1], \xi_2[n+1], \dots, \xi_k[n+1]]. \end{aligned} \quad (27)$$

Из формулы (25) с учетом последнего равенства получим уравнение

$$\begin{aligned} b_k[n] W[\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]] &= \\ &= (-1)^k W[\xi_1[n+1], \xi_2[n+1], \dots, \xi_k[n+1]]. \end{aligned} \quad (28)$$

Рассматривая это уравнение как рекуррентное соотношение, можно последовательно вычислить значение определителя  $W[\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]]$  при значениях аргумента  $n \geq n_0$ :

$$\begin{aligned} &W[\xi_1[n_0+1], \dots, \xi_k[n_0+1]] = \\ &= b_k[n_0] (-1)^k W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]], \\ &W[\xi_1[n_0+2], \dots, \xi_k[n_0+2]] = \\ &= b_k[n_0+1] (-1)^k W[\xi_1[n_0+1], \dots, \xi_k[n_0+1]] = \\ &= (-1)^{2k} b_k[n_0] b_k[n_0+1] W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]], \\ &\dots \\ &W[\xi_1[n_0+l], \dots, \xi_k[n_0+l]] = \\ &= (-1)^{kl} \prod_{i=0}^{l-1} b_k[n_0+i] W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]]. \end{aligned} \quad (29)$$

Формула (29) позволяет найти значение определителя  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  при любом значении  $n \geq n_0$ . Эта формула является аналогом формулы Остроградского — Лиувилля в теории дифференциальных уравнений (см. § 11). Из формулы (29) следует, что определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  равен нулю при всех  $n \geq n_1 + 1$ , если функция  $b_k[n]$  обращается в ноль при значении  $n = n_1 \geq n_0$ . Если функция  $b_k[n]$  не обращается в ноль ни при одном значении  $n \geq n_0$ , то возможны два случая:

а)  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]] = 0$  при всех значениях  $n \geq n_0$ , если  $W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]] = 0$ ;

б)  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]] \neq 0$  ни при одном значении  $n \geq n_0$ , если  $W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]] \neq 0$ .

Докажем теперь теорему, которая позволяет установить линейную независимость решений разностного уравнения.

**Теорема 3.** Если решетчатые функции  $\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]$  являются линейно-независимыми решениями однородного разностного уравнения (20) при  $n \geq n_0$  и функция  $b_k[n]$  не обращается в ноль ни при одном значении  $n \geq n_0$ , то определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  не обращается в ноль ни при одном значении  $n \geq n_0$ .

**Доказательство.** Из условий теоремы и равенства (29) следует, что определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  не обращается в ноль ни при одном значении  $n \geq n_0$ , если  $W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]] \neq 0$ . Докажем, что определитель  $W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]]$  не равен нулю способом

от противного. Пусть определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  равен нулю при  $n = n_0$ :

$$W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]] = 0.$$

Рассмотрим однородную систему уравнений относительно постоянных  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , определителем которой служит  $W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]]$ :

$$\begin{aligned} c_1 \xi_1[n_0] + c_2 \xi_2[n_0] + \dots + c_k \xi_k[n_0] &= 0, \\ c_1 \xi_1[n_0+1] + c_2 \xi_2[n_0+1] + \dots + c_k \xi_k[n_0+1] &= 0, \\ \dots &\dots \\ c_1 \xi_1[n_0+k-1] + c_2 \xi_2[n_0+k-1] + \dots + c_k \xi_k[n_0+k-1] &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку определитель системы равен нулю, существует ненулевое решение этой системы  $c_1, c_2, \dots, c_k$ . Таким образом, справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n] = 0 \quad (30)$$

при  $n = n_0, n_0+1, \dots, n_0+k-1$ .

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что функции  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  являются решениями разностного уравнения (20):

$$\begin{aligned} \xi_i[n+k] + b_1[n] \xi_i[n+k-1] + \dots \\ \dots + b_k[n] \xi_i[n] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k). \end{aligned}$$

Положим в этом уравнении  $n = n_0$ , умножим обе его части на  $c_i$  и просуммируем по  $i$  в пределах от 1 до  $k$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \xi_i[n_0+k] c_i + b_1[n_0] \sum_{i=1}^k \xi_i[n_0+k-1] c_i + \dots \\ \dots + b_k[n_0] \sum_{i=1}^k \xi_i[n_0] c_i = 0. \end{aligned}$$

Учитывая условие (30), получим, что

$$\sum_{i=1}^k \xi_i[n_0+k] c_i = 0.$$

Используя таким же образом разностное уравнение (20) при  $n = n_0+1, n_0+2, \dots$ , найдем, что равенство (30) справедливо также при  $n = n_0+k+1, n = n_0+k+2, \dots$

Итак, мы получили, что существуют такие постоянные  $c_1, \dots, c_k$ , не все равные нулю, что равенство (30) выполняется при всех значениях  $n \geq n_0$ . Следовательно, решения  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  линейно-зависимы, что противоречит предположению теоремы.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Из теорем 2 и 3 следует признак линейной независимости решений разностных уравнений:



Для того чтобы решения  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  однородного разностного уравнения порядка  $k$  были линейно-независимы, необходимо и достаточно, чтобы определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  был отличен от нуля при всех тех значениях  $n \geq n_0$ , при которых определено решение уравнения (20). Этому признаку можно придать другой вид, более удобный для практического применения. Пусть решения  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  однородного разностного уравнения определены при  $n \geq n_0$ . Если функция  $b_k[n]$  не обращается в ноль ни при одном значении  $n \geq n_0$ , а определитель  $W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]]$  отличен от нуля, то решения  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  линейно-независимы. Действительно, в этом случае в соответствии с формулой (28)

$$W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]] \neq 0$$

при всех  $n \geq n_0$  и мы приходим к признаку линейной независимости в его первоначальной формулировке. Если  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]] \neq 0$ , но функция  $b_k[n]$  обращается в ноль при некотором значении  $n = n_1 \geq n_0$ , то определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  обращается в ноль при  $n \geq n_1 + 1$ . Следовательно, любые  $k$  решений разностного уравнения (20)  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  являются линейно-зависимыми во всей области определения  $n \geq n_0$ . Если, однако, существует такое число  $N \geq n_0$ , что функция  $b_k[n]$  не обращается в ноль при  $n \geq N$ , то всегда можно построить систему линейно-независимых решений, определенных при  $n \geq N$ . Для этого достаточно выбрать начальные значения из условия

$$W[\xi_1[N], \dots, \xi_k[N]] \neq 0$$

и построить систему решений  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  при  $n \geq N$  с выбранными начальными значениями.

Совокупность  $k$  линейно-независимых решений разностного однородного уравнения (20) порядка  $k$  называется *фундаментальной системой решений*. Для того чтобы построить фундаментальную систему решений, следует выбрать начальные условия при  $n = n_0$  таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]] \neq 0.$$

Выберем, например, следующие начальные условия:

$$\xi_1[n_0] = 1, \xi_1[n_0 + 1] = 0, \dots, \xi_1[n_0 + k - 1] = 0,$$

$$\xi_2[n_0] = 0, \xi_2[n_0 + 1] = 1, \dots, \xi_2[n_0 + k - 1] = 0,$$

$$\dots$$

$$\xi_k[n_0] = 0, \xi_k[n_0 + 1] = 0, \dots, \xi_k[n_0 + k - 1] = 1.$$

Тогда определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  при  $n = n_0$  отличен от нуля,  $W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]] = 1$ . Предположим, кроме того, что  $b_k[n] \neq 0$  при  $n \geq n_0$ ; тогда система решений  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$ , построенная на заданных начальных условиях, является фундаментальной системой. Каждое из решений этой системы можно определить из уравнения (20), пользуясь им как рекуррентным соотношением.

Докажем теперь теорему, позволяющую определить общее решение уравнения (20) по его фундаментальной системе решений.

**Теорема 4.** Если при  $n \geq n_0$  существует фундаментальная система решений  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  однородного разностного уравнения (20), то общее решение этого уравнения выражается формулой

$$\xi[n] = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n] \quad (n \geq n_0), \quad (31)$$

где  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) — произвольные постоянные.

**Доказательство.** Из теоремы 1 следует, что функция (31) является решением уравнения (20). Надо показать, что любое решение уравнения (20), определенное при  $n \geq n_0$ , можно представить в виде (31). Пусть  $\varphi[n]$  — произвольное решение уравнения (20). Выберем постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_k$  из системы уравнений

$$\varphi[n] = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n] \quad (n = n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k - 1). \quad (32)$$

Это всегда можно сделать и притом однозначно, поскольку определитель системы уравнений (32) относительно неизвестных  $c_1, \dots, c_k$

$$W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]] \neq 0.$$

Подставляя начальные значения

$$\xi_i[n_0], \xi_i[n_0 + 1], \dots, \xi_i[n_0 + k - 1] \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

в уравнение (20), найдем

$$\begin{aligned} \varphi[n_0 + k] &= - \sum_{i=1}^k b_i[n_0] \varphi[n_0 + k - i] = \\ &= - \sum_{i=1}^k b_i[n_0] \sum_{j=1}^k c_j \xi_j[n_0 + k - i] = \\ &= - \sum_{j=1}^k c_j \sum_{i=1}^k b_i[n_0] \xi_j[n_0 + k - i] = \sum_{j=1}^k c_j \xi_j[n_0 + k]. \end{aligned}$$

Поступая таким же образом при  $n = n_0 + k + 1, n = n_0 + k + 2, \dots$ , получим, что

$$\varphi[n] = \sum_{j=1}^k c_j \xi_j[n]$$

при всех значениях  $n \geq n_0$ , т. е. произвольное решение уравнения (20) представлено в виде (31).

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что решение линейного однородного разностного уравнения (20) сводится к определению фундаментальной системы решений. В том случае когда коэффициенты  $b_i[n]$

( $i=1, \dots, k$ ) уравнения (20) постоянны, фундаментальная система решений может быть легко определена, как показано ниже в п. 4. Если же коэффициенты  $b_i[n]$  линейного разностного уравнения (20) являются решетчатыми функциями, то задача существенно усложняется. Тем не менее в отличие от дифференциальных уравнений решение такого рода разностных уравнений может быть определено и в этом случае и даже в более общем случае, когда уравнение нелинейно и имеет вид (10). Для этого нужно осуществить процесс последовательных вычислений, о котором уже говорилось в начале параграфа.

**3. Линейные неоднородные разностные уравнения.** Перейдем к рассмотрению линейных неоднородных разностных уравнений. Докажем следующую теорему о решениях неоднородных уравнений:

*Теорема 5. Общее решение линейного неоднородного разностного уравнения*

$$x[n+k] + b_1[n]x[n+k-1] + \dots + b_k[n]x[n] = f[n] \quad (33)$$

равно сумме его частного решения  $\psi[n]$  и общего решения соответствующего однородного уравнения (20), т. е.

$$x[n] = \psi[n] + \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n], \quad (34)$$

где  $c_i$  — произвольные постоянные, а  $\xi_i[n]$  — решения однородного уравнения (20), удовлетворяющие условию

$$W[\xi_1[n_0], \dots, \xi_k[n_0]] \neq 0.$$

**Доказательство.** Пусть  $\psi[n]$  — частное решение неоднородного уравнения (33). Будем искать общее решение этого уравнения в виде

$$x[n] = \psi[n] + \varphi[n], \quad (35)$$

где  $\varphi[n]$  — решетчатая функция, подлежащая определению. Подставляя функцию  $x[n]$  в уравнение (33), получим:

$$\begin{aligned} \psi[n+k] + b_1[n]\psi[n+k-1] + \dots + b_k[n]\psi[n] + \\ + \varphi[n+k] + b_1[n]\varphi[n+k-1] + \dots + b_k[n]\varphi[n] = f[n] \end{aligned}$$

Функция  $\psi[n]$  является решением неоднородного уравнения, поэтому

$$\psi[n+k] + b_1[n]\psi[n+k-1] + \dots + b_k[n]\psi[n] = f[n]$$

и, следовательно,

$$\varphi[n+k] + b_1[n]\varphi[n+k-1] + \dots + b_k[n]\varphi[n] = 0.$$

Таким образом, функция  $\varphi[n]$  является решением однородного уравнения (20). Выбирая в качестве  $\varphi[n]$  общее решение однородного уравнения (20), можно получить общее решение неоднородного уравнения (33) в виде (34).

Теорема доказана.

В качестве примера применения этой теоремы найдем общее решение неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$\Delta x[n] + a_1[n]x[n] = f[n]. \quad (36)$$

Прежде всего определим общее решение однородного уравнения

$$\Delta x[n] + a_1[n]x[n] = 0, \quad (37)$$

которое запишем в форме (10):

$$x[n+1] = (1 - a_1[n])x[n]. \quad (38)$$

Рассматривая это уравнение как рекуррентное соотношение, последовательно получим:

$$\begin{aligned} x[1] &= (1 - a_1[0])x[0], \\ x[2] &= (1 - a_1[1])x[1] = (1 - a_1[1])(1 - a_1[0])x[0], \end{aligned} \quad (39)$$

$$\dots$$

$$x[n] = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - a_1[i])x[0].$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения (37) имеет следующий вид:

$$\xi[n] = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - a_1[i])c_1, \quad (40)$$

где  $c_1$  — произвольная постоянная.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\psi[n] = \xi[n]z[n], \quad (41)$$

где  $z[n]$  — неизвестная решетчатая функция. Подставляя  $\psi[n]$  в исходное уравнение, получим

$$\Delta(\xi[n]z[n]) + a_1[n]\xi[n]z[n] = f[n],$$

откуда следует

$$\xi[n+1]\Delta z[n] + \Delta\xi[n]z[n] + a_1[n]\xi[n]z[n] = f[n],$$

или

$$\xi[n+1]\Delta z[n] + z[n](\Delta\xi[n] + \xi[n]a_1[n]) = f[n].$$

Выражение, заключенное в скобках в левой части последнего равенства, равно нулю. Таким образом,

$$\xi[n+1]\Delta z[n] = f[n],$$

или

$$\Delta z[n] = \frac{f[n]}{\xi[n+1]}. \quad (42)$$

Суммируя обе части уравнения (42) в пределах от 0 до  $n-1$ , получим

$$z[n] = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f[m]}{\xi[m+1]} + c_2 = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f[m]}{\prod_{i=0}^m (1-a_1[i])} + c_2. \quad (43)$$

По теореме 3 общее решение неоднородного уравнения (36) равно

$$x[n] = \psi[n] + \xi[n] = \xi[n] (1 + z[n]) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - a_1[i]) \times \left( c + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f[m]}{\prod_{i=0}^m (1 - a_1[i])} \right), \quad (44)$$

где  $c = (1 + c_2) c_1$ .

Итак, получено общее решение разностного уравнения первого порядка (36). Это решение зависит от одной произвольной постоянной  $c$ .

Решение неоднородного разностного уравнения (33) можно определить методом вариации произвольных постоянных. Пусть  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  — линейно-независимые решения однородного разностного уравнения (20), определенные при  $n \geq 0$ . Будем искать решение неоднородного уравнения (33) в следующем виде:

$$x[n] = \sum_{i=1}^k c_i[n] \xi_i[n], \quad (45)$$

где  $c_i[n]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) — неизвестные решетчатые функции.

Подставляя функцию (45) в уравнение (33), получим:

$$\sum_{i=1}^k c_i[n+k] \xi_i[n+k] + b_1[n] \sum_{i=1}^k c_i[n+k-1] \xi_i[n+k-1] + \dots + b_k[n] \sum_{i=1}^k c_i[n] \xi_i[n] = f[n].$$

Вычтем из левой части этого равенства следующие выражения, каждое из которых равно нулю, поскольку  $\xi_i[n]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) — решения уравнения (20),

$$c_1[n] (\xi_1[n+k] + b_1[n] \xi_1[n+k-1] + \dots + b_k[n] \xi_1[n]),$$

$$c_2[n] (\xi_2[n+k] + b_1[n] \xi_2[n+k-1] + \dots + b_k[n] \xi_2[n]),$$

$$\dots$$

$$c_k[n] (\xi_k[n+k] + b_1[n] \xi_k[n+k-1] + \dots + b_k[n] \xi_k[n]);$$

$$\sum_{i=1}^k (c_i[n+k] - c_i[n]) \xi_i[n+k] + b_1[n] \sum_{i=1}^k (c_i[n+k-1] - c_i[n]) \times \xi_i[n+k-1] + \dots + b_{k-1}[n] \sum_{i=1}^k (c_i[n+1] - c_i[n]) \xi_i[n+1] = f[n]$$

Перепишем полученное уравнение, используя первые разности функций  $c_i[n]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) в соответствии с формулой (10) § 48:

$$\sum_{i=1}^k (\Delta c_i[n+k-1] + \Delta c_i[n+k-2] + \dots + \Delta c_i[n]) \xi_i[n+k] + b_1[n] \sum_{i=1}^k (\Delta c_i[n+k-2] + \Delta c_i[n+k-3] + \dots + \Delta c_i[n]) \times \xi_i[n+k-1] + \dots + b_{k-1}[n] \sum_{i=1}^k (\Delta c_i[n]) \xi_i[n+1] = f[n]. \quad (46)$$

Будем выбирать функции  $c_i[n]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^k \Delta c_i[n] \xi_i[n+1] = 0$$

при всех  $n \geq 0$ . Тогда, в частности, равны нулю все суммы

$$\sum_{i=1}^k \Delta c_i[n+j] \xi_i[n+j+1] \quad (j=0, 1, 2, \dots, k-1),$$

и уравнение (46) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^k (\Delta c_i[n+k-2] + \dots + \Delta c_i[n]) \xi_i[n+k] + b_1[n] \times \sum_{i=1}^k (\Delta c_i[n+k-3] + \dots + \Delta c_i[n]) \xi_i[n+k-1] + \dots + b_{k-2}[n] \times \sum_{i=1}^k \Delta c_i[n] \xi_i[n+2] = f[n]. \quad (47)$$

Полагая далее

$$\sum_{i=1}^k \Delta c_i[n] \xi_i[n+2] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^k \Delta c_i[n] \xi_i[n+3] = 0,$$

$$\dots$$

$$\sum_{i=1}^k \Delta c_i[n] \xi_i[n+k-1] = 0,$$

из уравнения (46) получим, что

$$\sum_{i=1}^k \Delta c_i[n] \xi_i[n+k] = f[n]. \quad (48)$$

Итак, построена система, состоящая из  $k$  алгебраических уравнений, относительно неизвестных функций  $\Delta c_i[n]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \Delta c_i[n] \xi_i[n+1] &= 0, \\ \sum_{i=1}^k \Delta c_i[n] \xi_i[n+2] &= 0, \\ \dots & \\ \sum_{i=1}^k \Delta c_i[n] \xi_i[n+k-1] &= 0. \end{aligned} \quad (49)$$

$$\sum_{i=1}^k \Delta c_i[n] \xi_i[n+k] = f[n].$$

Составим определитель этой системы. В принятых нами обозначениях это есть определитель

$$W[\xi_1[n+1], \dots, \xi_k[n+1]].$$

По теореме 3 он не обращается в ноль ни при каком значении  $n \geq 0$ . Следовательно, существует единственное решение системы (49), которое равно

$$\Delta c_i[n] = (-1)^{k+i} f[n] \frac{W_i[n+1]}{W[n+1]} \quad (i=1, 2, \dots, k), \quad (50)$$

где

$$W[n+1] = W[\xi_1[n+1], \dots, \xi_k[n+1]] = \begin{vmatrix} \xi_1[n+1] & \xi_2[n+1] & \dots & \xi_k[n+1] \\ \xi_1[n+2] & \xi_2[n+2] & \dots & \xi_k[n+2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1[n+k] & \xi_2[n+k] & \dots & \xi_k[n+k] \end{vmatrix}$$

$$W_i[n+1] = \begin{vmatrix} \xi_1[n+1] \dots \xi_{i-1}[n+1] & [n+1] \xi_{i+1}[n+1] & \dots \xi_k[n+1] \\ \xi_1[n+2] \dots \xi_{i-1}[n+2] & [n+2] \xi_{i+1}[n+2] & \dots \xi_k[n+2] \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_1[n+k-1] \dots \xi_{i-1}[n+k-1] & \xi_{i+1}[n+k-1] \dots \xi_k[n+k-1] \end{vmatrix}$$

Произвольно выбирая значения постоянных  $c_{i0} = c_i[0]$  и суммируя по  $n$  обе части равенств (50) в пределах от нуля до  $m$  найдем неизвестные решетчатые функции  $c_i[n]$ :

$$c_i[m] = \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^{k+i} f[n] \frac{W_i[n+1]}{W[n+1]} + c_{i0},$$

где ( $i=1, 2, \dots, k$ ;  $m=1, 2, \dots$ ).

Подставляя функции  $c_i[m]$  в выражение (45), находим решение неоднородного разностного уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{i=1}^k \xi_i[n] c_i[n] = \sum_{i=1}^k \xi_i[n] \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{k+i} f[m] \frac{W_i[m+1]}{W[m+1]} + c_{i0} \right\} = \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} f[m] \sum_{i=1}^k \xi_i[n] (-1)^{k+i} \frac{W_i[m+1]}{W[m+1]} + \sum_{i=1}^k \xi_i[n] c_{i0} = \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} f[m] \frac{G[n, m]}{W[m+1]} + \sum_{i=1}^k \xi_i[n] c_{i0}, \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$G[n, m] = \begin{vmatrix} \xi_1[m+1] & \xi_2[m+1] & \dots & \xi_k[m+1] \\ \xi_1[m+2] & \xi_2[m+2] & \dots & \xi_k[m+2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1[m+k-1] & \xi_2[m+k-1] & \dots & \xi_k[m+k-1] \\ \xi_1[n] & \xi_2[n] & \dots & \xi_k[n] \end{vmatrix} \quad (n \geq 1).$$

При  $n=0$  мы получаем из (45)

$$x[0] = \sum_{i=1}^k c_i[0] \xi_i[0] = \sum_{i=1}^k c_{i0} \xi_i[0]. \quad (53)$$

Вводя обозначение

$$k[n, m] = \frac{G[n, m]}{W[m+1]}, \quad (54)$$

можно записать решение уравнения (33) в окончательном виде:

$$x[n] = \sum_{m=0}^{n-1} k[n, m] f[m] + \sum_{i=1}^k \xi_i[n] c_{i0}. \quad (55)$$

Итак, найдено общее решение неоднородного разностного уравнения (33) методом вариации произвольных постоянных:

Функция  $k[n, m]$  удовлетворяет следующим равенствам:

$$\begin{aligned} k[m+i, m] &= 0 \quad \text{при } i=1, 2, \dots, k-1, \\ k[m+k, m] &= 1. \end{aligned} \quad (56)$$

Используя эти равенства, которые следуют непосредственно из рассмотрения формулы (54), можно выразить постоянные  $c_{i0}$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) через начальные условия  $x[0]=x_0$ ,  $x[1]=x_1, \dots$ ,  $x[k-1]=x_{k-1}$ . Полагая в выражении (55)  $n=1, 2, \dots, k-1$ ,

получим с учетом равенства (53)

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{i=1}^k \xi_i [0] c_{i0}, \\ x_1 &= \sum_{i=1}^k \xi_i [1] c_{i0}, \\ &\dots \dots \dots \\ x_{k-1} &= \sum_{i=1}^k \xi_i [k-1] c_{i0}. \end{aligned} \quad (57)$$

Определитель системы алгебраических уравнений (57) отличен от нуля и, следовательно, постоянные  $c_{i0}$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) однозначно выражаются через заданные начальные условия.

Если, в частности, начальные условия нулевые  $x_0 = x_1 = \dots = x_{k-1} = 0$ , то единственным решением системы (57) является нулевое решение  $c_{i0} = 0$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ). В этом случае получим следующее частное решение неоднородного уравнения (33):

$$x[n] = \sum_{m=0}^{n-1} k[n, m] f[m]. \quad (58)$$

Положим в этом выражении

$$f[m] = \begin{cases} 1 & \text{при } m=l \geq 0, \\ 0 & \text{при } m \neq l; \end{cases} \quad (59)$$

тогда

$$x[n] = k[n, l].$$

Таким образом, функция  $k[n, l]$  представляет собой частное решение неоднородного уравнения (33), если начальные условия нулевые, а правая часть уравнения  $f[n]$  определяется условием (59).

Вводя решетчатую функцию

$$\delta_0[n] = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0, \end{cases} \quad (60)$$

можно записать:

$$k[n+k, m] + b_1[n] k[n+k-1, m] + \dots + b_k[n] k[n, m] = \delta_0[n-m], \quad (61)$$

причем в соответствии с равенствами (56)

$$k[l, m] = 0 \text{ при } l = m+1, m+2, \dots, m+k-1.$$

Если коэффициенты  $b_i[n]$  разностного уравнения (33) постоянны то функция  $k[n, m]$  зависит только от разности своих аргументов. Действительно, пусть  $\psi[n]$  — частное решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$x[n+k] + b_1 x[n+k-1] + \dots + b_k x[n] = \delta_0[n]. \quad (62)$$

Тогда функция  $\psi[n-m]$  будет частным решением уравнения

$$x[n+k] + b_1 x[n+k-1] + \dots + b_k x[n] = \delta_0[n-m]. \quad (63)$$

В этом можно убедиться непосредственной подстановкой функции  $\psi[n-m]$  в уравнение (63). Отсюда следует, что частное решение уравнения (62)  $k[n, m]$  зависит только от разности аргументов, т. е.

$$k[n, m] = k[n-m].$$

Формула (55) в этом случае принимает следующий вид:

$$x[n] = \sum_{m=0}^{n-1} k[n-m] f[m] + \sum_{i=1}^k \xi_i [n] c_{i0}. \quad (64)$$

4. Разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Пусть дано однородное разностное уравнение порядка  $k$ :

$$x[n+k] + b_1 x[n+k-1] + \dots + b_k x[n] = 0, \quad (65)$$

где  $b_1, b_2, \dots, b_k$  — постоянные коэффициенты, причем  $b_k \neq 0$ . Будем искать решение уравнения (65) в виде

$$\xi[n] = \lambda^n,$$

где  $\lambda$  — некоторое число.

Подставляя функцию  $\xi[n]$  в уравнение (65), получим

$$\lambda^{n+k} + b_1 \lambda^{n+k-1} + \dots + b_k \lambda^n = 0. \quad (66)$$

Значение  $\lambda=0$  соответствует тривиальному решению однородного уравнения  $\xi[n]=0$ . Отбрасывая это значение, получим уравнение

$$\lambda^k + b_1 \lambda^{k-1} + \dots + b_k = 0. \quad (67)$$

Уравнение (67) называется *характеристическим уравнением* для рассматриваемого разностного уравнения. Найдем корни характеристического уравнения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . Предположим вначале, что все корни являются простыми. Тогда они определяют следующие  $k$  решений разностного уравнения:  $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n$ . Покажем, что эти решения линейно-независимы. Для этого рассмотрим определитель

$$\begin{aligned} W[\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n] &= \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_1^{n+1} & \dots & \lambda_1^{n+k-1} \\ \lambda_2^n & \lambda_2^{n+1} & \dots & \lambda_2^{n+k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_k^n & \lambda_k^{n+1} & \dots & \lambda_k^{n+k-1} \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k)^n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_k & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (68)$$

Среди корней уравнения (67) нет нулевых, так как мы предполагали, что  $b_k \neq 0$ , поэтому произведение  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$  отлично от нуля. Второй сомножитель в выражении (60) является определителем Вандермонда; он равен

$$\prod_{i > j} (\lambda_i - \lambda_j) \quad (i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, k).$$

Этот определитель отличен от нуля, так как все корни характеристического уравнения простые. Следовательно, решетчатые функции  $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n$  образуют систему линейно-независимых решений уравнения (65). Согласно теореме 4 общее решение однородного уравнения (65) имеет вид

$$\xi[n] = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^n, \quad (69)$$

где  $c_i$  — произвольные постоянные, в том числе и комплексные.

Если среди корней  $\lambda_i$  есть комплексный корень, то найдется и сопряженный к нему корень  $\bar{\lambda}_i$ , причем  $\lambda_i$  и  $\bar{\lambda}_i$  входят в линейную комбинацию (69) с комплексно-сопряженными коэффициентами, т. е. в виде  $c_i \lambda_i^n + \bar{c}_i \bar{\lambda}_i^n$ . Сумма двух комплексно-сопряженных членов

$$c_i \lambda_i^n + \bar{c}_i \bar{\lambda}_i^n,$$

где

$$\lambda_i = \rho (\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad \bar{\lambda}_i = \rho (\cos \varphi - j \sin \varphi), \\ c_i = a_i + j b_i, \quad \bar{c}_i = a_i - j b_i,$$

может быть записана как

$$c_i \rho^n (\cos \varphi n + j \sin \varphi n) + \bar{c}_i \rho^n (\cos \varphi n - j \sin \varphi n) = \\ = a_i \rho^n \cos \varphi n - b_i \rho^n \sin \varphi n.$$

Таким образом, решение  $\xi[n]$  разностного уравнения (65) представимо в виде линейной комбинации с вещественными коэффициентами решетчатых функций

$$\lambda^n, \rho^n \cos \varphi n, \rho^n \sin \varphi n,$$

где  $\lambda$  — вещественный корень характеристического уравнения (67).

Рассмотрим теперь случай кратных корней. Пусть корень характеристического уравнения (67) имеет кратность  $r_1 > 1$ . Будем искать решение разностного уравнения (65) в виде

$$\xi[n] = \lambda^n z[n],$$

где  $z[n]$  — неизвестная решетчатая функция. Из уравнения (65) получим

$$\lambda^k z[n+k] + b_1 \lambda^{k-1} z[n+k-1] + \dots \\ \dots + b_{k-1} \lambda z[n+1] + b_k z[n] = 0.$$

Выражая функции  $z[n+k]$ ,  $z[n+k-1]$ , ...,  $z[n+1]$  через известные разности функции  $z[n]$  по формуле (10) § 48 и группируя

члены при разностях функции  $z[n]$  одного и того же порядка, получим разностное уравнение порядка  $k$  относительно функции  $z[n]$ :

$$D(\lambda) z[n] + \lambda D'(\lambda) \Delta z[n] + \dots + \frac{\lambda^{r_1}}{r_1!} D^{(r_1)}(\lambda) \Delta^{r_1} z[n] + \dots + \\ + \frac{\lambda^k}{k!} D^{(k)}(\lambda) \Delta^k z[n] = 0, \quad (71)$$

где

$$D(\lambda) = \lambda^k + b_1 \lambda^{k-1} + \dots + b_{k-1} \lambda + b_k, \quad (72) \\ D^{(i)}(\lambda) = k(k-1) \dots (k-i+1) \lambda^{k-i} + (k-1)(k-2) \dots \\ \dots (k-i) \lambda^{k-i-1} b_1 + \dots + i! b_{k-i} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Здесь  $D(\lambda)$  — левая часть характеристического уравнения (67), а  $D^{(i)}(\lambda)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) — производная многочлена  $D(\lambda)$  порядка  $i$ . Мы предположили, что корень  $\lambda_1$  характеристического уравнения (67) имеет кратность  $r_1 > 1$ , тогда будем иметь

$$D(\lambda_1) = D'(\lambda_1) = \dots = D^{(r_1-1)}(\lambda_1) = 0,$$

но  $D^{(r_1)}(\lambda_1) \neq 0$ ; поэтому уравнение (71) принимает вид

$$\frac{\lambda_1^{r_1}}{r_1!} D^{(r_1)}(\lambda_1) \Delta^{r_1} z[n] + \frac{\lambda_1^{r_1+1}}{(r_1+1)!} D^{(r_1+1)}(\lambda_1) \Delta^{r_1+1} z[n] + \dots + \\ + \frac{\lambda_1^k}{k!} D^{(k)}(\lambda_1) \Delta^k z[n] = 0. \quad (73)$$

Из этого соотношения можно определить неизвестные функции  $z[n]$ . Соотношение (73) содержит разности, начиная с порядка  $r_1$  от функции  $z[n]$ , поэтому ему удовлетворяют функции

$$1, n, n^2, \dots, n^{r_1-1},$$

так как разность порядка  $k \geq r_1$  от каждой из этих функций равна нулю. Очевидно, что линейная комбинация указанных функций удовлетворяет уравнению (73). Следовательно, функцию  $z[n]$  можно определить следующим образом:

$$z[n] = \sum_{i=0}^{r_1-1} c_i n^i, \quad (74)$$

где  $c_i$  — постоянные коэффициенты.

Теперь можно, наконец, получить решения разностного уравнения (65), соответствующие корню  $\lambda_1$ . В соответствии с формулой  $\xi_1[n] = \lambda_1^n z[n]$  решениями будут следующие решетчатые функции:

$$\lambda_1^n, \lambda_1^n n, \dots, \lambda_1^n n^{r_1-1}.$$

Решение однородного уравнения (65), соответствующее корню  $\lambda_1$  кратности  $r_1$ , можно представить как линейную комбинацию этих функций:

$$\xi_1[n] = \sum_{i=0}^{r_1-1} c_i n^i \lambda_1^n, \quad (75)$$

где  $c_i$  — произвольные постоянные.



Итак, для каждого корня  $\lambda_i$  кратности  $r_i$  получено  $r_i$  решений разностного уравнения (65). Для того чтобы написать общее решение этого уравнения в виде линейной комбинации решений (75), необходимо доказать, что найденные для кратных корней решения линейно-независимы. Мы не приводим здесь доказательства этого факта\*).

## § 50. СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

**1. Основные определения.** Система разностных уравнений связывает решетчатые функции  $x_1[n], x_2[n], \dots, x_l[n]$  и их разности вплоть до порядков  $k_1, k_2, \dots, k_l$  соответственно. В общем случае систему разностных уравнений можно записать следующим образом:

$$\Phi_i[n, x_1[n], \dots, \Delta^{k_1} x_1[n], x_2[n], \dots, \Delta^{k_2} x_2[n], \dots, x_l[n], \dots, \Delta^{k_l} x_l[n]] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, l). \quad (1)$$

Переходя по формуле (6) § 48 от разностей к решетчатым функциям, получим:

$$\Phi_i[n, x_1[n], \dots, x_1[k_1+n], x_2[n], \dots, x_2[k_2+n], \dots, x_l[n], \dots, x_l[k_l+n]] = 0. \quad (2)$$

Если система разностных уравнений (2) содержит в явном виде функции  $x_i[n]$  и  $x_i[n+k_i]$ , то она вместе с исходной системой (1) называется системой порядка  $k_i$  по отношению к решетчатой функции  $x_i[n]$ . Может оказаться, что в систему (2) не входит в явном виде какая-либо из функций  $x_i[n]$ , например  $x_1[n]$ , т. е. система разностных уравнений (2) имеет следующий вид:

$$\Phi_i[n, x_1[n+1], \dots, x_1[n+k_1], x_2[n], \dots, x_2[n+k_2], \dots, x_l[n], \dots, x_l[n+k_l]] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, l). \quad (3)$$

Система (3) и соответствующая ей система (1) называются системами порядка  $k_i-1$  относительно  $x_i[n]$ . Вообще, если в систему разностных уравнений (2) не входят функции

$$x_i[n], x_i[n+1], \dots, x_i[n+m] \quad (m \leq k_i-1),$$

то система имеет порядок  $k_i-m-1$  относительно функции  $x_i[n]$ . Сумма порядков системы относительно каждой из функций  $x_1[n], x_2[n], \dots, x_l[n]$  называется *порядком системы разностных уравнений*. Если система разностных уравнений имеет порядок  $k_i$  относительно каждой функции  $x_i[n]$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ), то порядок этой системы равен  $k=k_1+k_2+\dots+k_l$ .

*Решением системы разностных уравнений (1)* называется совокупность решетчатых функций  $x_1[n], \dots, x_l[n]$ , обращающих все уравнения системы в тождества. Если систему (2) можно разрешить относительно  $l$  решетчатых функций  $x_1[k_1+n], x_2[k_2+n], \dots,$

$\dots, x_l[k_l+n]$ , то получается следующая система разностных уравнений:

$$x_i[n+k_i] = F_i[n, x_1[n], \dots, x_l[n+k_i-1], \dots, \dots, x_l[n], \dots, x_l[n+k_i-1]] \quad (i=1, 2, \dots, l). \quad (4)$$

Будем предполагать, что функции  $F_i[n, y_1, \dots, y_{k_1}, \dots, y_l, \dots, \dots, y_{k_l}]$  определены, ограничены и однозначны при всех значениях аргументов  $n, y_1, \dots, y_{k_1}, \dots, y_l$ . Тогда для заданных при  $n=n_0$  начальных условиях существует единственное решение системы (4), которое можно определить, осуществляя процесс последовательного вычисления функций  $x_i[n+k_i]$  при  $n=n_0, n_0+1, n_0+2, \dots$  из системы рекуррентных соотношений (4).

Пусть при  $n=n_0$  заданы начальные условия

$$x_{i0} = x_i[n_0], \dots, x_{i, k_i-1} = x_i[n_0+k_i-1] \quad (i=1, 2, \dots, l).$$

По заданным начальным условиям найдем из системы (4) значения

$$x_i[n_0+k_i] = F_i[n_0, x_{10}, \dots, x_{1, k_1-1}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{i, k_i-1}] \quad (i=1, 2, \dots, l).$$

Используя найденные значения, на следующем этапе вычислений определим  $x_i[n_0+k_i+1]$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ).

Продолжая процесс вычислений, найдем решение системы разностных уравнений (4) для любого значения аргумента  $n \geq n_0$  в зависимости от заданных начальных условий

$$x_i[n] = \xi_i[n, x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1, k_1-1}, \dots, x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{i, k_i-1}]. \quad (5)$$

Заменяя здесь начальные условия произвольными постоянными, получим общее решение системы разностных уравнений (4):

$$x_i[n] = \xi_i[n, c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1, k_1-1}, \dots, c_{i0}, c_{i1}, \dots, c_{i, k_i-1}]. \quad (6)$$

Если система уравнений (4) не содержит в явном виде какую-либо из функций  $x_i[n]$ , например  $x_1[n]$ , т. е. имеет вид

$$x_i[n+k_i] = F_{ii}[n, x_1[n+1], \dots, x_l[n+k_i-1], \dots, x_l[n], \dots, \dots, x_l[n+k_i-1]], \quad (7) \quad (i=1, 2, \dots, l),$$

то решение системы определяется следующими начальными условиями:

$$x_{i0} = x_i[n_0] \quad (i=2, 3, \dots, l), \quad x_{i1} = x_i[n_0+1] \quad (i=1, 2, \dots, l), \dots, \dots, x_{i, k_i-1} = x_i[n_0+k_i-1] \quad (i=1, 2, \dots, l),$$

число которых меньше на единицу, чем в предыдущем случае. Вообще число начальных условий, необходимых для определения

\* См.: Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Наука, 1967, стр. 315.



решения системы разностных уравнений, совпадает с порядком системы. Как и выше, мы будем предполагать, что аргумент  $n$  принимает только неотрицательные значения  $n=0, 1, 2, \dots$ , причем начальные условия будем обычно задавать при  $n=0$ .

Систему разностных уравнений (4) можно привести к нормальному виду, если ввести новые решетчатые функции:

$$x_{i0}[n] = x_i[n], \quad x_{i1}[n] = x_i[n+1], \quad \dots, \quad x_{ik_i-1}[n] = x_i[n+k_i-1].$$

С учетом этих обозначений систему (4) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{i0}[n+1] &= x_{i1}[n] \\ x_{i1}[n+1] &= x_{i2}[n] \\ &\dots \\ x_{ik_i-2}[n+1] &= x_{ik_i-1}[n] \\ x_{ik_i-1}[n+1] &= F_i[n, x_{i0}[n], \dots, x_{ik_i-1}[n], \dots, x_{l0}[n], \dots, \\ &\dots, x_{lk_l-1}[n]] \\ &(i=1, 2, \dots, l). \end{aligned} \quad (8)$$

Мы получили систему разностных уравнений первого порядка, которая называется *нормальной системой разностных уравнений*. Число уравнений нормальной системы совпадает с порядком исходной системы разностных уравнений (4). Если правые части системы (4) содержат все функции  $x_i[n]$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ), то число уравнений системы (8) равно  $k=k_1+k_2+\dots+k_l$ . Если же какие-либо из функций  $x_i[n]$  отсутствуют в правых частях системы (4), то число уравнений нормальной системы (8) уменьшится. Задавая начальные условия при  $n=n_0$  в соответствии с равенствами

$$x_{i0}[n_0] = x_i[n_0], \quad x_{i1}[n_0] = x_i[n_0+1], \quad \dots, \quad x_{ik_i-1}[n_0] = x_i[n_0+k_i-1]$$

можно последовательно определить из нормальной системы разностных уравнений (8) значения функций

$$x_{i0}[n], \dots, x_{ik_i-1}[n] \quad (i=1, 2, \dots, l)$$

при любом значении аргумента  $n \geq n_0$ . В общем случае нормальная система разностных уравнений имеет вид

$$x_i[n+1] = F_i[n, x_1[n], x_2[n], \dots, x_k[n]] \quad (i=1, 2, \dots, k). \quad (9)$$

Порядком нормальной системы (9) называется число  $k$  ее уравнений. Система (8) является частным случаем системы (9) и ее порядок совпадает с порядком системы разностных уравнений (4), из которой она была получена.

Мы будем рассматривать в основном системы линейных разностных уравнений, записанные в нормальном виде:

$$x_i[n+1] = \sum_{j=1}^k a_{ij}[n] x_j[n] + f_i[n] \quad (i=1, 2, \dots, k). \quad (10)$$

Здесь  $a_{ij}[n]$ ,  $f_i[n]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ,  $j=1, 2, \dots, k$ ) — заданные решетчатые функции, определенные при  $n \geq 0$ . Система (10) называется *неоднородной*, если функции  $f_i[n]$  тождественно не равны нулю. Если же  $f_i[n] \equiv 0$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ), то система (10) называется *однородной*. Систему разностных уравнений (10) можно записать в векторном виде. Введем квадратную матрицу  $A[n]$  и векторы  $x[n]$ ,  $f[n]$ , причем

$$A[n] = \begin{bmatrix} a_{11}[n] & a_{12}[n] & \dots & a_{1k}[n] \\ a_{21}[n] & a_{22}[n] & \dots & a_{2k}[n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}[n] & a_{k2}[n] & \dots & a_{kk}[n] \end{bmatrix}, \quad x[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ x_k[n] \end{bmatrix}, \quad f[n] = \begin{bmatrix} f_1[n] \\ f_2[n] \\ \vdots \\ f_k[n] \end{bmatrix}.$$

С учетом этих обозначений система разностных уравнений (10) примет вид

$$x[n+1] = A[n] x[n] + f[n]. \quad (11)$$

**2. Однородные системы линейных разностных уравнений.** Прежде чем переходить к рассмотрению теорем о решениях систем разностных уравнений, введем понятие линейной зависимости для векторных решетчатых функций. Векторные решетчатые функции  $x_1[n], \dots, x_k[n]$  называются *линейно-зависимыми*, если существуют такие постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , среди которых по крайней мере одно отлично от нуля, что при всех  $n=0, 1, \dots$  справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^k c_i x_i[n] = 0. \quad (12)$$

Это равенство можно, очевидно, записать как систему равенств

$$\sum_{i=1}^k c_i x_{ij}[n] = 0 \quad (j=1, 2, \dots, l),$$

где  $x_{ij}[n]$  — компоненты  $l$ -мерной векторной функции  $x_i[n]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ). Если равенство (12) удовлетворяется только при условии  $c_1=c_2=\dots=c_k=0$ , то векторные функции  $x_1[n], \dots, x_k[n]$  называются *линейно-независимыми*.

Пусть размерность векторных решетчатых функций  $x_i[n]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) равна  $k$ . Для того чтобы проверить, являются ли эти функции линейно-зависимыми, составим определитель, строками которого являются компоненты  $x_{ij}[n]$  векторных функций  $x_i[n]$ :

$$W[x_1[n], \dots, x_k[n]] = \begin{vmatrix} x_{11}[n] & x_{12}[n] & \dots & x_{1k}[n] \\ x_{21}[n] & x_{22}[n] & \dots & x_{2k}[n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1}[n] & x_{k2}[n] & \dots & x_{kk}[n] \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Из свойств определителей (см. § 2) следует, что определитель  $W[x_1[n], \dots, x_k[n]]$  тождественно равен нулю, если решетчатые функции  $x_1[n], \dots, x_k[n]$  линейно-зависимы.

Пусть теперь  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  — различные решения однородной системы разностных уравнений порядка  $k$

$$x[n+1] = A[n]x[n]. \quad (14)$$

Составим матрицу  $X[n]$ , столбцами которой являются решения  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  системы (14):

$$X[n] = \begin{bmatrix} \xi_{11}[n] & \xi_{21}[n] & \dots & \xi_{k1}[n] \\ \xi_{12}[n] & \xi_{22}[n] & \dots & \xi_{k2}[n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1k}[n] & \xi_{2k}[n] & \dots & \xi_{kk}[n] \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что матрица  $X[n]$  удовлетворяет разностному уравнению (14), т. е. при всех  $n=0, 1, \dots$  справедливо равенство

$$X[n+1] = A[n]X[n]. \quad (15)$$

Из этого равенства получим разностное уравнение для определителей

$$\det X[n+1] = \det A[n] \det X[n]. \quad (16)$$

Заметим, что определитель матрицы  $X[n]$  можно записать так:

$$\det X[n] = W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]].$$

Выбирая начальное значение определителя (13) при  $n=0$ , найдем решение разностного уравнения (16) в виде

$$W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]] = \prod_{m=0}^{n-1} \det A[m] W[\xi_1[0], \dots, \xi_k[0]] \quad (17) \\ (n=1, 2, \dots).$$

Эта формула является аналогом формулы Лиувилля — Остроградского для систем линейных дифференциальных уравнений. Определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  играет роль определителя Вронского. Из полученной формулы (17) следует, что определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  равен нулю при всех  $n \geq n_1 + 1$ , если только определитель  $\det A[n]$  обращается в ноль при  $n = n_1 \geq 0$ . Если же  $\det A[n]$  не обращается в ноль ни при одном значении  $n \geq 0$ , то возможны два случая:

- а)  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]] = 0$  при всех  $n \geq 0$ , если  $W[\xi_1[0], \dots, \xi_k[0]] = 0$ ;
- б)  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]] \neq 0$  ни при одном значении  $n \geq 0$ , если  $W[\xi_1[0], \dots, \xi_k[0]] \neq 0$ .

Докажем теперь теорему о линейно-независимых решениях однородной системы разностных уравнений.

*Теорема 1.* Если векторные решетчатые функции  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  являются линейно-независимыми решениями однородного векторного уравнения (14) и, кроме того, определитель  $\det A[n]$  не обращается в ноль ни при одном значении  $n \geq 0$ , то определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  также не обращается в ноль ни при одном значении  $n \geq 0$ .

*Доказательство.* Из условия теоремы и равенства (17) следует, что определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  не обращается в ноль ни при одном значении  $n \geq 0$ , если он отличен от нуля при  $n=0$ . Докажем, что последнее условие выполняется методом от противного.

Пусть определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  обращается в ноль при  $n=0$ . Составим систему уравнений относительно постоянных  $c_1, c_2, \dots, c_k$ :

$$\begin{aligned} c_1 \xi_{11}[0] + c_2 \xi_{21}[0] + \dots + c_k \xi_{k1}[0] &= 0, \\ c_1 \xi_{12}[0] + c_2 \xi_{22}[0] + \dots + c_k \xi_{k2}[0] &= 0, \\ \dots &\dots \\ c_1 \xi_{1k}[0] + c_2 \xi_{2k}[0] + \dots + c_k \xi_{kk}[0] &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы равен нулю. Следовательно, система имеет нетривиальное решение. Таким образом, существуют постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , не все равные нулю, для которых справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^k c_i \xi_{ij}[0] = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k),$$

или в векторной записи

$$\sum_{i=1}^k c_i \xi_i[0] = 0.$$

Теперь воспользуемся разностным уравнением (14), из которого при  $n=0$  будем иметь

$$\xi_i[1] = A[0] \xi_i[0]$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^k c_i \xi_i[1] = A[0] \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[0] = 0.$$

Полагая в уравнении (14)  $n=1, 2, \dots$ , получим, что равенство

$$\sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n] = 0 \quad (18)$$

выполняется при всех значениях  $n \geq 0$ . Это противоречит принятому предположению о линейной независимости функций

$$\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n].$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим, что в том случае, когда определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  отличен от нуля при всех значениях  $n \geq 0$ , система решений однородного разностного уравнения (14)  $\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]$  линейно-независима. Действительно, в этом случае система уравнений (18) при каждом  $n \geq 0$  имеет только тривиальное решение  $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ . Отсюда и следует линейная независимость решений  $\xi_i[n]$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Таким образом, условие  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]] \neq 0$  при  $n \geq 0$  является необходимым и достаточным условием линейной независимости решений  $\xi_i[n]$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) уравнения (14).

Учитывая равенство (17), признак линейной независимости решений уравнения (14) можно сформулировать следующим образом: если  $\det A[n] \neq 0$  при всех значениях  $n \geq 0$  и определитель  $W[\xi_1[0], \dots, \xi_k[0]]$  отличен от нуля, то решения  $\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]$  линейно-независимы.

Совокупность  $k$  линейно-независимых решений системы однородных разностных уравнений (14) порядка  $k$  называется *фундаментальной системой решений*. Покажем, что фундаментальные системы решений существуют. Пусть выполнено условие  $\det A[n] \neq 0$  при всех  $n \geq 0$ . Выберем начальные условия при  $n=0$  таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$W[\xi_1[0], \dots, \xi_k[0]] \neq 0.$$

С помощью рекуррентного соотношения (14) можно построить по этим начальным значениям решения  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$ . Эти решения будут линейно-независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений.

Если определитель  $\det A[n]$  обращается в ноль при  $n = n_1 \geq 0$ , то, как показано выше,  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]] = 0$  при  $n \geq n_1 + 1$  и следовательно, не существует фундаментальной системы решений определенных при всех значениях  $n \geq 0$ . Однако, если известно, что определитель  $\det A[n]$  не обращается в ноль ни при одном значении  $n \geq n_1 + 1$ , то можно построить фундаментальную систему решений, определенных при  $n \geq n_1 + 1$ . Выберем для этого начальные условия при  $n = n_1 + 1$  такие, чтобы выполнялось неравенство

$$W[\xi_1[n_1 + 1], \dots, \xi_k[n_1 + 1]] \neq 0,$$

и построим по этим начальным условиям решения  $\xi_i[n]$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), определенные при  $n \geq n_1 + 1$ . В соответствии с формулой (17) определитель  $W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]]$  не равен нулю при всех  $n \geq n_1 + 1$ , откуда и следует линейная независимость построенных решений.

Докажем теперь теорему об общем решении однородной системы разностных уравнений (14).

**Теорема 2.** Пусть векторные решетчатые функции  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  образуют фундаментальную систему решений однородной

системы разностных уравнений (14) порядка  $k$ . Тогда общее решение системы (14) имеет следующий вид:

$$\xi[n] = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n], \quad (19)$$

где  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) — произвольные постоянные.

Доказательство. Заметим прежде всего, что линейная комбинация решений (19) системы (14) также является ее решением. Это проверяется непосредственной подстановкой функции (19) в систему разностных уравнений (14). Покажем, что любое решение системы (14) можно представить в виде (19). Пусть  $\varphi[n]$  — произвольное решение системы (14), определенное при  $n \geq 0$ . Найдем постоянные  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) из системы уравнений

$$\varphi_j[0] = \sum_{i=1}^k c_i \xi_{ij}[0] \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (20)$$

Постоянные  $c_i$  определяются единственным образом, так как определитель системы (20)  $W[\xi_1[0], \dots, \xi_k[0]]$  отличен от нуля. Из уравнения (14) получим при  $n=1$ :

$$\begin{aligned} \varphi[1] &= A[0] \varphi[0] = A[0] \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[0] = \\ &= \sum_{i=1}^k c_i A[0] \xi_i[0] = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[1]. \end{aligned}$$

Полагая  $n=2, 3, \dots$ , найдем, что для любых  $n \geq 0$  справедливо равенство  $\varphi[n] = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n]$ , что и доказывает теорему.

**3. Неоднородные системы линейных разностных уравнений.** Для неоднородных систем разностных уравнений (11) справедлива следующая теорема, аналогичная теореме 5 § 49 о решении неоднородного разностного уравнения.

**Теорема 3.** Общее решение  $x[n]$  линейной неоднородной системы разностных уравнений (11) равно сумме ее частного решения  $\psi[n]$  и общего решения соответствующей системы однородных уравнений (14), т. е.

$$x[n] = \psi[n] + \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n], \quad (21)$$

где  $c_i$  — произвольные постоянные, а  $\xi_i[n]$  — решения системы однородных уравнений, такие, что

$$W[\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]] \neq 0$$

ни при одном значении  $n \geq 0$ .

Доказательство. Подставляя функцию  $x[n]$ , определяемую выражением (21), в систему уравнений (11), можно непосредственно проверить, что эта функция является решением неоднородной системы уравнений (11).

Пусть теперь  $y[n]$  — произвольное решение системы (11); покажем, что его можно представить в виде (21). Прежде всего, решение  $y[n]$  всегда можно представить в виде

$$y[n] = \psi[n] + \varphi[n],$$

где  $\varphi[n]$  — решетчатая функция, которая однозначно определяется для заданных  $y[n]$  и  $\psi[n]$ .

Подставляя  $y[n]$  в уравнение (11), получим

$$\psi[n+1] + \varphi[n+1] = A[n]\psi[n] + A[n]\varphi[n] + f[n],$$

откуда

$$\varphi[n+1] = A[n]\varphi[n].$$

Таким образом, функция  $\varphi[n]$  является решением однородного векторного уравнения (14). Из теоремы 2 следует, что эта функция всегда может быть представлена в виде линейной комбинации линейно-независимых решений  $\xi_1[n], \dots, \xi_k[n]$  уравнения (14), т. е.

$$\varphi[n] = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n].$$

Следовательно, произвольное решение  $y[n]$  неоднородного уравнения (11) всегда можно представить в виде

$$y[n] = \psi[n] + \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n].$$

Теорема доказана.

Заметим, что теоремы 3, 4, 5 § 49, сформулированные для одного разностного уравнения, являются следствием соответствующих теорем 1, 2, 3 для систем разностных уравнений. Разностное уравнение порядка  $k$

$$x[n+k] + b_1[n]x[n+k-1] + \dots + b_k[n]x[n] = f[n]$$

эквивалентно следующей нормальной системе уравнений:

$$\begin{aligned} x_0[n+1] &= x_1[n], \\ x_1[n+1] &= x_2[n], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (22)$$

$$x_{k-1}[n+1] = -b_1[n]x_{k-1}[n] - b_2[n]x_{k-2}[n] - \dots$$

$$\dots - b_{k-1}[n]x_1[n] - b_k[n]x_0[n] + f[n],$$

где  $x_0[n] = x[n]$ ,  $x_1[n] = x[n+1]$ ,  $\dots$ ,  $x_{k-1}[n] = x[n+k-1]$ .

Вводя обозначения

$$x[n] = \begin{bmatrix} x_0[n] \\ x_1[n] \\ \vdots \\ x_{k-1}[n] \end{bmatrix}, \quad f[n] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f[n] \end{bmatrix},$$

$$A[n] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_k[n] & -b_{k-1}[n] & -b_{k-2}[n] & \dots & -b_1[n] \end{bmatrix},$$

рассматриваемое разностное уравнение можно переписать в виде (11). При этом определитель  $W[x_1[n], \dots, x_k[n]]$  для системы разностных уравнений (22)

$$\begin{aligned} W[x_1[n], \dots, x_k[n]] &= \begin{vmatrix} x_{10}[n] & x_{11}[n] & \dots & x_{1k-1}[n] \\ x_{20}[n] & x_{21}[n] & \dots & x_{2k-1}[n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k0}[n] & x_{k1}[n] & \dots & x_{kk-1}[n] \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1[n] & x_1[n+1] & \dots & x_1[n+k-1] \\ x_2[n] & x_2[n+1] & \dots & x_2[n+k-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k[n] & x_k[n+1] & \dots & x_k[n+k-1] \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

что совпадает с определителем (23) § 49, введенным при рассмотрении разностных уравнений. Формула (28) § 49, полученная для определителя (23) § 49, является частным случаем формулы (16), поскольку в рассматриваемом случае  $\det A[n] = -b_k[n]$ .

Рассмотрим теперь решение систем неоднородных разностных уравнений методом вариации произвольных постоянных. Будем предполагать, что матрица  $A[n]$  невырождена при всех значениях  $n \geq 0$ , т. е.  $\det A[n] \neq 0$  ( $n \geq 0$ ). Пусть  $X[n]$  — матрица, столбцы которой образованы векторами фундаментальной системы решений однородной системы разностных уравнений (14). Эта матрица называется *фундаментальной матрицей* системы (14). Будем искать решение неоднородного уравнения (11) в виде

$$x[n] = X[n]z[n],$$

где  $z[n]$  — вектор-столбец, подлежащий определению. Подставляя векторную функцию  $x[n]$  в уравнение (11), получим равенство

$$X[n+1]z[n+1] = A[n]X[n]z[n] + f[n].$$

Добавим к обеим частям этого равенства выражение  $-X[n+1]z[n]$ :

$$\begin{aligned} X[n+1]z[n+1] - X[n+1]z[n] &= \\ = A[n]X[n]z[n] + f[n] - X[n+1]z[n]. \end{aligned}$$

Учитывая, что матрица  $X[n]$  удовлетворяет однородному уравнению (14), найдем

$$X[n+1]\Delta z[n] = f[n].$$

В соответствии с теоремой 1 матрица  $X[n]$  невырождена при всех  $n \geq 0$ , поэтому справедливо равенство

$$\Delta z[n] = X^{-1}[n+1]f[n].$$

Суммируя обе части этого равенства в пределах от 0 до  $n-1$ , получим

$$z[n] = \sum_{k=0}^{n-1} X^{-1}[k+1]f[k] + c \quad (n \geq 1),$$

где  $c$  — постоянный вектор-столбец, причем  $c = z[0]$ .

Теперь решение неоднородного уравнения (11) можно представить в следующем виде:

$$x[n] = X[n]z[n] = X[n]c + X[n] \sum_{k=0}^{n-1} X^{-1}[k+1]f[k]. \quad (23)$$

Введем обозначение

$$K[n, k] = X[n]X^{-1}[k+1], \quad (24)$$

тогда решение (23) можно переписать следующим образом:

$$x[n] = X[n]c + \sum_{k=0}^{n-1} K[n, k]f[k] \quad (n \geq 1). \quad (25)$$

Итак, методом вариации произвольных постоянных найдено общее решение неоднородной системы разностных уравнений, зависящее от произвольных постоянных  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , которые являются компонентами вектора  $c$ . Выбирая те или иные значения этих постоянных, можно получать различные частные решения. Если начальные условия нулевые, т. е.  $x[0] = 0$ , то из условия  $x[0] = X[0]c$  определяется  $c = 0$ . Частное решение уравнения (11) при этом имеет вид

$$x[n] = \sum_{k=0}^{n-1} K[n, k]f[k] \quad (n \geq 1). \quad (26)$$

Рассмотрим теперь случай, когда матрица  $A[n]$  в уравнении (11) постоянна. Если  $X[n]$  — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы разностных уравнений (14), то нетрудно проверить, что и матрица  $X[n-l]$ , где  $l$  — целое число ( $0 \leq l < n$ ), является фундаментальной для системы уравнений (14). С другой стороны, матрица  $X[n]X^{-1}[l]$  также является фундаментальной при фиксированном значении  $l$ . Но две фундаментальные матрицы связаны линейным невырожденным преобразованием, т. е.

$$X[n]X^{-1}[l] = BX[n-l], \quad (27)$$

где  $B$  — невырожденная матрица, состоящая из постоянных элементов. Положим  $n=l$ . Тогда  $BX[0] = E$ . Таким образом,  $B = X^{-1}[0]$ . Если  $X[0] = E$ , то  $B = E$ . При этом предположении

$$K[n, l] = X[n-l-1], \quad c = X[0]^{-1}x[0] = x[0],$$

и формула (25) приобретает следующий вид:

$$x[n] = X[n]x[0] + \sum_{k=0}^{n-1} X[n-k-1]f[k]. \quad (28)$$

Из формул (25) и (28), определяющих решение системы разностных уравнений, могут быть получены формулы (55) и (64) § 49, определяющие решение одного неоднородного разностного уравнения, поскольку разностное уравнение произвольного порядка всегда может быть представлено в виде системы разностных уравнений нормального вида (22).

4. Линейные системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейную систему разностных уравнений

$$x[n+1] = Ax[n] + f[n], \quad (29)$$

где  $A = [a_{ij}]$  ( $i, j = 1, 2, \dots, k$ ) — невырожденная квадратная матрица, составленная из постоянных элементов.

Общее решение неоднородной системы разностных уравнений (29) можно определить по формуле (28), если известна фундаментальная матрица решений соответствующей однородной системы

$$x[n+1] = Ax[n]. \quad (30)$$

Для того чтобы найти общее решение системы (30), применим невырожденное преобразование с матрицей  $B$ , приводящее матрицу  $A$  к жордановой форме (см. § 6). Обозначим  $y[n] = Bx[n]$ . Тогда векторное уравнение (29) примет вид

$$y[n+1] = Jy[n] + g[n], \quad (31)$$

где  $g[n] = Bf[n]$ ;  $J = BAB^{-1}$  — жорданова матрица, на главной диагонали которой расположены клетки Жордана  $K_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ),

$$J = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_l \end{bmatrix}, \quad K_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\lambda_j$  — корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Порядок  $r_j$  клетки Жордана  $K_j$  равен степени элементарного делителя  $(\lambda - \lambda_j)^{r_j}$ , соответствующего корню  $\lambda_j$ . Заметим, что одному и тому же корню  $\lambda_j$  может соответствовать несколько элементарных

делителей. В этом случае матрица  $J$  может иметь несколько клеток Жордана с одним и тем же элементом на главной диагонали. Если, в частности, все корни характеристического уравнения различны, то все элементарные делители имеют первый порядок и матрица  $B$  является диагональной.

Найдем общее решение однородной системы разностных уравнений

$$y[n+1] = Jy[n]. \quad (32)$$

Каждой клетке Жордана с индексом  $j$  соответствует следующая группа разностных уравнений:

$$\begin{aligned} y_{i+1}[n+1] &= \lambda_j y_{i+1}[n] + y_{i+2}[n], \\ y_{i+2}[n+1] &= \lambda_j y_{i+2}[n] + y_{i+3}[n], \\ &\dots \dots \dots \\ y_{i+r_j-1}[n+1] &= \lambda_j y_{i+r_j-1}[n] + y_{i+r_j}[n], \\ y_{i+r_j}[n+1] &= \lambda_j y_{i+r_j}[n]. \end{aligned} \quad (33)$$

Введем новые решетчатые функции  $z_i[n]$ :

$$y_{i+l}[n] = z_{i+l}[n] \lambda_j^n \quad (l = 1, 2, \dots, r_j), \quad (34)$$

тогда система разностных уравнений (33) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta z_{i+1}[n] &= \frac{1}{\lambda_j} z_{i+2}[n], \\ \Delta z_{i+2}[n] &= \frac{1}{\lambda_j} z_{i+3}[n], \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta z_{i+r_j-1}[n] &= \frac{1}{\lambda_j} z_{i+r_j}[n], \\ \Delta z_{i+r_j}[n] &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Из последнего уравнения этой системы следует, что  $z_{i+r_j} = c_0$ , где  $c_0$  — произвольная постоянная. Из предпоследнего уравнения системы найдем  $z_{i+r_j-1}[n]$ . Имеем

$$\Delta z_{i+r_j-1}[n] = \frac{1}{\lambda_j} c_0.$$

Суммируя обе части этого равенства в пределах от 0 до  $n-1$ , получим

$$z_{i+r_j-1}[n] = \frac{c_0}{\lambda_j} n + c_1,$$

где  $c_1$  — произвольная постоянная. Используя полученное выражение, последовательно определим:

$$\begin{aligned} z_{i+r_j-2}[n] &= \frac{c_0}{2\lambda_j^2} n(n-1) + \frac{c_1}{\lambda_j} n + c_2, \\ z_{i+r_j-3}[n] &= \frac{c_0}{3! \lambda_j^3} n(n-1)(n-2) + \frac{c_1}{2\lambda_j^2} n(n-1) + \frac{c_2}{\lambda_j} n + c_3, \\ &\dots \dots \dots \\ z_{i+2} &= \frac{c_0}{(r_j-2)! \lambda_j^{r_j-2}} n^{(r_j-2)} + \frac{c_1}{(r_j-3)! \lambda_j^{r_j-3}} n^{(r_j-3)} + \dots + \frac{c_{r_j-2}}{\lambda_j} n + c_{r_j-2}, \\ z_{i+1} &= \frac{c_0}{(r_j-1)! \lambda_j^{r_j-1}} n^{(r_j-1)} + \frac{c_1}{(r_j-2)! \lambda_j^{r_j-2}} n^{(r_j-2)} + \dots + \frac{c_{r_j-1}}{\lambda_j} n + c_{r_j-1}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к функциям  $y_i[n]$  и вводя обозначение  $\binom{n}{r} = \frac{n^{(r)}}{r!}$ , получим следующее решение системы разностных уравнений (33), соответствующих одной клетке Жордана  $K_j$ :

$$\begin{aligned} y_{i+1}[n] &= c_0 \binom{n}{r_j-1} \lambda_j^{n-r_j+1} + c_1 \binom{n}{r_j-2} \lambda_j^{n-r_j+2} + \dots \\ &\dots + c_{r_j-2} n \lambda_j^{n-1} + c_{r_j-1} \lambda_j^n, \\ &\dots \dots \dots \\ y_{i+r_j-1}[n] &= c_0 \lambda_j^{n-1} n + c_1 \lambda_j^n, \\ y_{i+r_j}[n] &= c_0 \lambda_j^n. \end{aligned} \quad (36)$$

Это решение является общим для системы разностных уравнений (33). Чтобы убедиться в этом, выделим следующие векторы:

$$\xi_{1j} = \begin{bmatrix} \binom{n}{r_j-1} \lambda_j^{1-r_j} \\ \binom{n}{r_j-2} \lambda_j^{2-r_j} \\ \vdots \\ n \lambda_j^{-1} \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_j^n, \quad \xi_{2j} = \begin{bmatrix} \binom{n}{r_j-2} \lambda_j^{2-r_j} \\ \binom{n}{r_j-3} \lambda_j^{3-r_j} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_j^n, \dots, \xi_{r_j j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_j^n.$$

Путем подстановки можно проверить, что каждый из векторов  $\xi_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, r_j$ ) является решением системы разностных уравнений (33).



Покажем, что векторы  $\xi_{i,j}$  линейно-независимы. Для этого составим определитель:

$$W[\xi_{1j}, \xi_{2j}, \dots, \xi_{r_j j}] = \begin{vmatrix} \binom{n}{r_j-1} \lambda_j^{1-r_j} & \binom{n}{r_j-2} \lambda_j^{2-r_j} & \dots & 1 \\ \binom{n}{r_j-2} \lambda_j^{2-r_j} & \binom{n}{r_j-3} \lambda_j^{3-r_j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n \lambda_j^{-1} & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \lambda_j^{r_j n}. \quad (37)$$

Случаю  $\lambda_j = 0$ , как это следует из равенств (33), соответствует тривиальное решение  $y_{i+k}[n] \equiv 0$  ( $k = 1, 2, \dots, r_j$ ). Полагая  $\lambda_j \neq 0$ , найдем, что определитель (37) отличен от нуля при любых значениях аргумента  $n \geq 0$ . Следовательно, векторы  $\xi_{i,j}$  линейно-независимы и образуют фундаментальную систему решений системы разностных уравнений (33). Решение (36) является общим решением системы разностных уравнений (33), так как оно является линейной комбинацией решений  $\xi_{i,j}$ , т. е.

$$y_j = \sum_{i=1}^{r_j} c_{i-1} \xi_{i,j},$$

где  $y_j = [y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_{j+r_j}]^T$ .

Используя  $r_j$  решений  $\xi_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, r_j$ ) системы разностных уравнений (33), можно построить  $r_j$  линейно-независимых решений всей рассматриваемой системы (32), соответствующих элементарному делителю  $(\lambda - \lambda_j)^{r_j}$ . В каждом из таких решений будем считать все компоненты, за исключением  $y_{i+1}, \dots, y_{i+r_j}$  нулевыми. Проводя аналогичные рассуждения по поводу каждого элементарного делителя матрицы  $A$ , найдем фундаментальную систему решений системы разностных уравнений (32). Поскольку вектор-функции  $x[n]$  исходной системы разностных уравнений (30) связаны с функциями  $y[n]$  линейным невырожденным преобразованием  $y[n] = Bx[n]$ , мы можем теперь найти фундаментальную систему решений исходной системы разностных уравнений (30). При этом получим, что каждому элементарному делителю  $(\lambda - \lambda_j)^{r_j}$  матрицы  $A - \lambda E$  соответствует  $r_j$  линейно-независимых решений системы (30) вида

$$x_i[n] = \lambda_j^n P_{i,j}[n] \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (38)$$

где  $P_{i,j}[n]$  — полиномы степени не выше  $r_j - 1$  относительно переменной  $n$ .

Рассмотрим частный случай, когда матрица  $A$  приводится к диагональному виду. В этом случае получим, что

$$J = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k], \quad (39)$$

а система разностных уравнений (32) состоит из уравнений вида

$$y_i[n+1] = y_i[n] \lambda_i. \quad (40)$$

Решением каждого из таких уравнений является функция

$$y_i[n] = c_i \lambda_i^n.$$

Образует векторы  $\xi_i$  размерности  $k$  следующим образом:

$$\xi_i[n] = [0, 0, \dots, 0, \lambda_i^n, 0, \dots, 0] \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Нетрудно видеть, что каждый из векторов  $\xi_i[n]$  является решением системы разностных уравнений (40), причем векторы  $\xi_i[n]$  линейно-независимы, если  $\lambda_i \neq 0$ . Следовательно, они образуют фундаментальную систему решений. Общее решение системы разностных уравнений (40) может быть представлено следующим образом:

$$y[n] = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n]. \quad (41)$$

Переходя с помощью линейного невырожденного преобразования с матрицей  $B$  к функциям  $x[n]$ , найдем общее решение исходной системы разностных уравнений (30). Каждому характеристическому корню  $\lambda_j$  будет при этом соответствовать решение

$$x_i[n] = c_i \lambda_j^n \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (42)$$

Полученные выражения (38), (42) характеризуют структуру общего решения однородной системы разностных уравнений (30). Для того чтобы практически найти это решение, нужно подставлять выражения (38), (42) в систему разностных уравнений (30) и определять неизвестные коэффициенты, приравнивая члены при одинаковых степенях  $n$ . Решение неоднородной системы разностных уравнений (29) можно найти по формуле (28).

Для решения линейных систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами может быть также использовано дискретное преобразование Лапласа (см. § 56).

## § 51. УРАВНЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

**1. Некоторые сведения об импульсных системах.** Системы автоматического регулирования, в которых применяется импульсная модуляция, называются *импульсными системами автоматического регулирования*.

При импульсной модуляции непрерывный сигнал заменяется последовательностью импульсов, изменяющихся в зависимости от модулируемого сигнала. Существуют различные способы импульсной модуляции. Мы ограничимся рассмотрением одного из них, называемого *амплитудно-импульсной модуляцией*. Этот способ модуляции



состоит в том, что непрерывный сигнал  $f(t)$  (рис. 150) заменяется последовательностью импульсов, которые следуют друг за другом с постоянным интервалом времени  $T$  (рис. 151). Амплитуда этих импульсов пропорциональна значениям модулируемого сигнала  $f(t)$

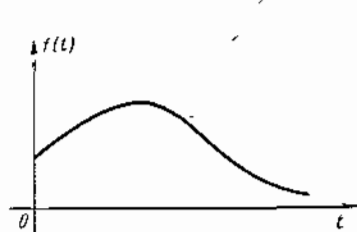


Рис. 150

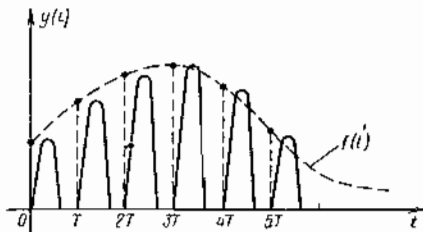


Рис. 151

в дискретные моменты времени  $t = nT$ . Если  $s(t)$  — функция, описывающая форму одиночного импульса (рис. 152), то сигнал  $y(t)$ , получаемый в результате амплитудно-импульсной модуляции сигнала  $f(t)$ , может быть описан следующим выражением:

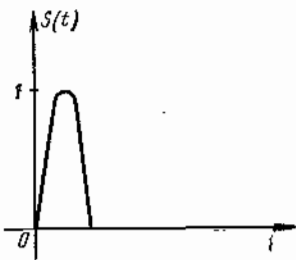


Рис. 152

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s(t - nT) f[nT]. \quad (1)$$

Устройство, в котором осуществляется импульсная модуляция, называется *импульсным элементом*. Импульсные системы автоматического регулирования можно представить как соединение импульсных элементов с элементами непрерывного действия. На рис. 153 и 154 приведены примеры структурных схем импульсных систем с одним импульсным элементом.

Здесь обозначено: И. Э. — импульсный элемент, Н. Ч. — непрерывная часть системы. Импульсная система, изображенная на рис. 154, содержит отрицательную обратную связь, охватывающую импульсный элемент и непрерывную часть системы; такая система

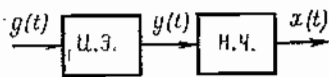


Рис. 153

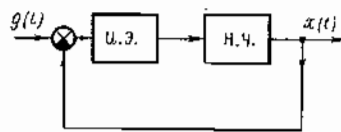


Рис. 154

называется *замкнутой импульсной системой*. Система, изображенная на рис. 153, не содержит обратной связи. Однако в теории автоматического регулирования такие системы рассматривают обычно как составную часть системы регулирования, которая может быть получена размыканием обратной связи. Поэтому импульсная система

ма, структурная схема которой изображена на рис. 153, называется *разомкнутой импульсной системой*.

На рис. 155 и 156 приведены структурные схемы импульсных систем с несколькими импульсными элементами. Импульсная система, изображенная на рис. 156, обладает одной непрерывной частью, имеющей несколько входных каналов и несколько выходов; такие системы называются *многомерными импульсными системами*. В системах с несколькими импульсными элементами в различных импульсных элементах могут вырабатываться импульсы различной формы и с различными периодами повторения. Кроме

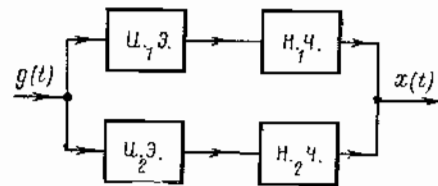


Рис. 155

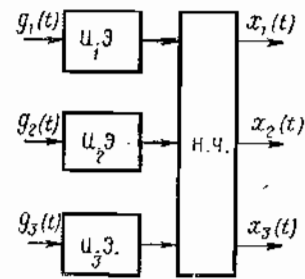


Рис. 156

того, моменты возникновения импульсов в различных импульсных элементах могут не совпадать. Принята следующая классификация импульсных систем с несколькими импульсными элементами. Если периоды повторения во всех импульсных элементах совпадают, то система называется *синхронной*. Если в синхронной импульсной системе совпадают также и моменты возникновения импульсов, то система называется *синфазной*.

Перейдем к вопросу составления уравнений импульсных систем автоматического регулирования. Прежде всего заметим, что при описании непрерывных систем автоматического регулирования (см. гл. V) используются два эквивалентных способа. Один из них состоит в описании системы посредством дифференциальных уравнений. Другой — в описании системы регулирования с помощью интегрального преобразования, связывающего воздействие  $g(t)$ , приложенное ко входу системы, и сигнал  $x(t)$ , получаемый при этом на выходе. Например, для системы регулирования, описываемой линейным дифференциальным уравнением

$$a_0(t) x^{(k)}(t) + a_1(t) x^{(k-1)}(t) + \dots + a_{k-1}(t) x'(t) + a_k(t) x(t) = g(t),$$

это преобразование имеет следующий вид:

$$x(t) = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i(t) + \int_0^t g(\tau) k_n(t, \tau) d\tau. \quad (2)$$

Здесь  $k_n(t, \tau)$  — весовая функция рассматриваемой непрерывной системы регулирования, а функции  $\xi_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) образуют

фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения

$$a_0(t)x^{(k)}(t) + a_1(t)x^{(k-1)}(t) + \dots + a_k(t)x(t) = 0,$$

причем постоянные  $c_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) определяются начальными условиями (см. § 11).

Для описания импульсных систем также применяют два эквивалентных способа. Первый способ состоит в описании системы с помощью разностных уравнений. Второй — в описании импульсной системы с помощью преобразования, содержащего суммы решетчатых функций и аналогичного интегральному преобразованию (2). Это преобразование является решением соответствующего неоднородного разностного уравнения и имеет следующий вид (см. формулу (55) § 49):

$$x[n] = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i[n] + \sum_{m=0}^{n-1} g[m] k[n, m]. \quad (3)$$

Преобразование (3) связывает выходную величину  $x[n]$  и входное воздействие  $g[n]$ , стоящее под знаком суммы. Как правило, уравнения импульсных систем вида (3), содержащие суммы решетчатых функций, могут быть получены из интегральных соотношений, описывающих непрерывную часть импульсной системы.

**2. Уравнения импульсных систем, содержащие суммы решетчатых функций.** Составим уравнение разомкнутой импульсной системы с одним импульсным элементом (см. рис. 153). Будем предполагать, что непрерывная часть системы описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Тогда непрерывная часть описывается интегральным преобразованием

$$x(t) = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i(t) + \int_0^t y(\tau) k_n(t-\tau) d\tau, \quad (4)$$

импульсный элемент описывается соотношением (1)

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s(t-nT) g[nT].$$

Подставляя это выражение в уравнение (4), получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^k c_i \xi_i(t) + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} s(\tau-nT) g[nT] k_n(t-\tau) d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^k c_i \xi_i(t) + \sum_{n=0}^{\infty} g[nT] \int_0^t k_n(t-\tau) s(\tau-nT) d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Выполним в интеграле, стоящем под знаком суммы, замену переменной по формуле  $\tau - nT = \eta$ :

$$\begin{aligned} \int_0^t k_n(t-\tau) s(\tau-nT) d\tau &= \int_{-nT}^{t-nT} k_n(t-\eta-nT) s(\eta) d\eta = \\ &= \int_{-nT}^{\xi} k_n(\xi-\eta) s(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь  $\xi = t - nT$ . Переменная  $n$  принимает только неотрицательные значения  $n=0, 1, 2, \dots$ , а функция  $s(\eta)$  обращается в ноль при  $\eta < 0$ , поэтому интеграл (6) обращается в ноль при  $\eta \leq \xi < 0$ . Для положительных значений  $\xi \geq 0$  получим

$$k(\xi) = \int_{-nT}^{\xi} k_n(\xi-\eta) s(\eta) d\eta = \int_0^{\xi} k_n(\xi-\eta) s(\eta) d\eta. \quad (7)$$

Функция  $s(\eta)$  обращается в ноль также при  $\eta > \gamma T$ , где  $\gamma T$  — ширина импульса, причем  $0 < \gamma \leq 1$ , поэтому при  $\xi \geq 0$  функция  $k(\xi)$  описывается двумя различными выражениями:

$$k(\xi) = \begin{cases} \int_0^{\xi} k_n(\xi-\eta) s(\eta) d\eta & \text{при } 0 \leq \xi < \gamma T, \\ \int_0^{\gamma T} k_n(\xi-\eta) s(\eta) d\eta & \text{при } \xi \geq \gamma T. \end{cases} \quad (8)$$

Используя обозначение (7), уравнение разомкнутой импульсной системы (5) можно записать в окончательном виде:

$$x(t) = \sum_{i=1}^k c_i \xi_i(t) + \sum_{n=0}^{\infty} g[nT] k(t-nT). \quad (9)$$

Функции  $k(t)$  можно придать определенный физический смысл, если ввести понятие о простейшем импульсном элементе. *Простейший импульсный элемент* описывается уравнением

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] \delta(t-nT), \quad (10)$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция (см. § 37). Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение обычного импульсного элемента (1), хотя и не может быть точно воспроизведено никаким реальным устройством. В результате преобразования (10) получаем последовательность дельта-импульсов, площадь которых равна значениям преобразуемого сигнала  $f(t)$  в дискретные моменты времени  $t=nT$  ( $n=0, 1, \dots$ ).

Реальный импульсный элемент, описываемый уравнением (1), можно представить в виде последовательного соединения простей-

шего импульсного элемента и непрерывного устройства с весовой функцией  $s(t)$  (рис. 157). Запишем уравнение такого соединения:

$$y(t) = \int_0^t y_1(\tau) s(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] \delta(\tau - nT) s(t-\tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] s(t-nT),$$

что совпадает с уравнением (1).

Непрерывный элемент с весовой функцией  $s(t)$  называется *формирующим элементом*.

Разомкнутую импульсную систему можно теперь представить в виде последовательного соединения простейшего импульсного эле-

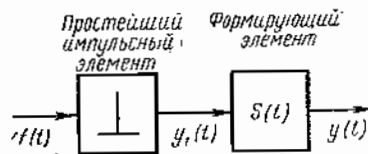


Рис. 157

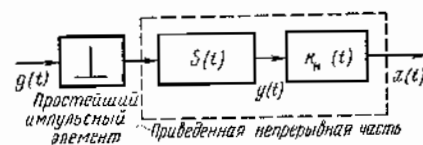


Рис. 158

мента, формирующего элемента и непрерывной части (рис. 158). Непрерывную часть и формирующий элемент обычно объединяют, называя их последовательное соединение *приведенной непрерывной частью импульсной системы*. В соответствии с формулой (7) полученная выше функция  $k(t)$  имеет смысл весовой функции или

импульсной переходной функции (см. § 16) приведенной непрерывной части разомкнутой импульсной системы.

Заметим, что в том случае, когда продолжительность импульса  $s(t)$  модулирующей последовательности мала, весовая функция приведенной непрерывной части  $k(t)$  приближенно может быть заменена весовой функцией непрерывной части  $k_n(\xi - \eta)$ , умноженной на

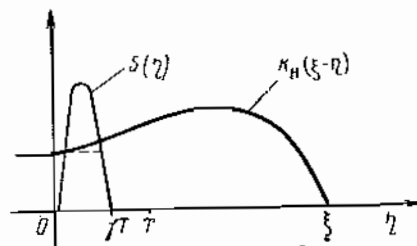


Рис. 159

постоянный коэффициент. Действительно, если величина  $T\gamma$  достаточно мала, то при каждом фиксированном значении  $\xi$  функции  $k_n(\xi - \eta)$  можно приближенно заменить на интервале  $0 \leq \eta \leq T$  постоянной величиной  $k_n(\xi - 0) = k_n(\xi)$  (рис. 159). Тогда из равенства (7) получим

$$k(\xi) \approx \int_0^{T\gamma} k_n(\xi) s(\eta) d\eta = k_n(\xi) k_s, \quad (1)$$

где  $k_s = \int_0^{T\gamma} s(\eta) d\eta$  — постоянный коэффициент, равный площади импульса.

Вернемся к уравнению разомкнутой импульсной системы (9). Ради простоты будем рассматривать его при нулевых начальных условиях; тогда

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g[nT] k(t-nT). \quad (12)$$

Перейдем в этом уравнении к относительному масштабу времени  $\bar{t} = \frac{t}{T}$ . Введем обозначения:

$$x_1(\bar{t}) = x(\bar{t}T), \quad g_1(\bar{t}) = g(\bar{t}T), \quad k_1(\bar{t}) = k(\bar{t}T). \quad (13)$$

С учетом этих обозначений уравнение (12) приобретает вид

$$x_1(\bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_1[n] k_1(\bar{t}-n). \quad (14)$$

Обратим внимание на выражение импульсной переходной функции приведенной непрерывной части в относительном масштабе времени. При  $\bar{t} \geq 0$  получим

$$k_1(\bar{t}) = k(\bar{t}T) = \int_0^{\bar{t}T} k_n(\bar{t}T - \eta) s(\eta) d\eta.$$

Введем новую переменную  $\bar{\eta} = \frac{\eta}{T}$ , тогда

$$k_1(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} k_n(\bar{t} - \bar{\eta}) s(\bar{\eta}T) d(\bar{\eta}T) = T \int_0^{\bar{t}} k_{n1}(\bar{t} - \bar{\eta}) s_1(\bar{\eta}) d\bar{\eta}, \quad (15)$$

где

$$k_{n1}(\bar{t}) = k_n(\bar{t}T), \quad (16)$$

$$s_1(\bar{t}) = s(\bar{t}T). \quad (17)$$

Таким образом, функция  $k_1(\bar{t})$  равна свертке функций  $k_{n1}(\bar{t})$  и  $s_1(\bar{t})$ , умноженной на постоянный коэффициент  $T$ .

Уравнение разомкнутой импульсной системы (14) можно записать с помощью решетчатых функций. Полагая  $\bar{t} = n + \varepsilon$ , получим:

$$x_1[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^{\infty} g_1[m] k_1[n-m, \varepsilon] \quad (n=0, 1, 2, \dots; 0 \leq \varepsilon < 1). \quad (18)$$

Учитывая, что  $k_1(\bar{t}) = 0$  при  $\bar{t} < 0$ , можно заменить бесконечный предел суммы на конечный, равный  $n$ :

$$x_1[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n g_1[m] k_1[n-m, \varepsilon]. \quad (19)$$

В частности, при  $\varepsilon=0$  это уравнение связывает входную  $g_1[m]$  и выходную  $x_1[n]$  величины импульсной системы в дискретные моменты времени, т. е.

$$x_1[n] = \sum_{m=0}^n g_1[m] k_1[n-m]. \quad (20)$$

Итак, мы получили уравнения (9), (19), (20) разомкнутой импульсной системы с постоянными параметрами. Эти уравнения позволяют определить процессы на выходе импульсной системы, если известно входное воздействие  $g(t)$ .

**Пример 1.** Импульсная переходная функция непрерывной части системы (см. рис. 158) задана в виде  $k_n(t) = e^{-\beta t} k_0$  ( $\beta > 0$ ). Импульсный элемент осуществляет модуляцию с помощью последовательности кратковременных импульсов. Будем считать, что выполнено приближенное равенство (11). Определить реакцию системы на типовое воздействие в виде единичной ступенчатой функции  $g(t) = 1(t)$ . Начальные условия нулевые.

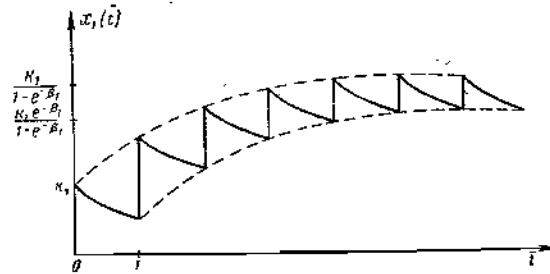


Рис. 160

Из формулы (11) найдем импульсную переходную функцию приведенной непрерывной части в относительном масштабе времени:

$$k_1(\bar{t}) = k_{n1}(\bar{t}) k_s = k_s k_0 e^{-\beta_1 \bar{t} T},$$

здесь  $k_s$  — площадь импульса модулирующей последовательности. Процесс на выходе системы определим по формуле (19)

$$x_1[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n 1[m] k_1 e^{-\beta_1(n-m+\varepsilon)T},$$

где  $k_1 = k_s k_0$ ,  $\beta_1 = \beta T$ .

Производя суммирование, получим выражение, описывающее реакцию системы на рассматриваемое воздействие:

$$\begin{aligned} x_1[n, \varepsilon] &= k_1 e^{-\beta_1(n+\varepsilon)T} \sum_{m=0}^n e^{\beta_1 m T} = k_1 e^{-\beta_1(n+\varepsilon)T} \frac{1 - e^{\beta_1(n+1)T}}{1 - e^{\beta_1 T}} = \\ &= k_1 \frac{e^{-\beta_1 n T} - e^{\beta_1 T}}{1 - e^{\beta_1 T}} e^{-\beta_1 \varepsilon T} = k_1 \frac{1 - e^{-\beta_1(n+1)T}}{1 - e^{-\beta_1 T}} e^{-\beta_1 \varepsilon T}. \end{aligned}$$

Придавая аргументу  $\varepsilon$  всевозможные значения от нуля до единицы, мы получим функцию  $x_1(\bar{t})$ , график которой изображен на рис. 160.

**Пример 2.** Импульсная переходная функция непрерывной части системы (см. рис. 158) равна  $k_n(t) = k_0 e^{-\beta t}$  ( $\beta > 0$ ). Модуляция осуществляется с помощью последовательности прямоугольных импульсов высотой  $k_n$  и шириной  $\gamma T$  ( $\gamma < 1$ ). Определить реакцию системы на единичную ступенчатую функцию  $g(t) = 1(t)$  при нулевых начальных условиях.

В данном случае весовая функция формирующего элемента (рис. 161) имеет вид

$$s_1(\bar{t}) = k_n (1(\bar{t}) - 1(\bar{t} - \gamma)).$$

По формуле (15) найдем импульсную переходную функцию приведенной непрерывной части:

$$k_1(\bar{t}) = T \int_0^{\bar{t}} k_0 e^{-\beta_1(\bar{t}-\bar{\tau})} k_n s_1(\bar{\tau}) d\bar{\tau}.$$

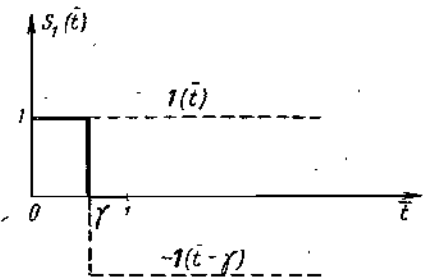


Рис. 161

Здесь следует различать два случая:

а) пусть  $\bar{t} \leq \gamma$ ; тогда  $s_1(\bar{\tau}) = 1(\bar{\tau})$ , и мы получим

$$\begin{aligned} k_1(\bar{t}) &= T \int_0^{\bar{t}} e^{-\beta_1(\bar{t}-\bar{\tau})} k_0 k_n 1(\bar{\tau}) d\bar{\tau} = \\ &= \frac{T k_0 k_n}{\beta_1} e^{-\beta_1 \bar{t}} (e^{\beta_1 \bar{t}} - 1) = k_1 (1 - e^{-\beta_1 \bar{t}}), \end{aligned}$$

где  $k_1 = \frac{T k_0 k_n}{\beta_1}$ ,  $\beta_1 = \beta T$ ;

б) пусть теперь  $\bar{t} > \gamma$ ; поскольку  $s_1(\bar{\tau}) = 0$  при  $\bar{\tau} > \gamma$ , то в этом случае найдем, что

$$k_1(\bar{t}) = T \int_0^{\gamma} k_0 e^{-\beta_1(\bar{t}-\bar{\tau})} k_n d\bar{\tau} = k_1 e^{-\beta_1 \bar{t}} (e^{\beta_1 \gamma} - 1).$$

Таким образом, импульсная переходная функция приведенной непрерывной части  $k_1(\bar{t})$  состоит из двух функций, определенных на различных интервалах

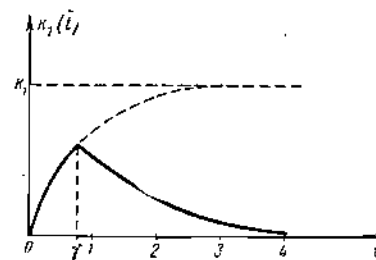


Рис. 162

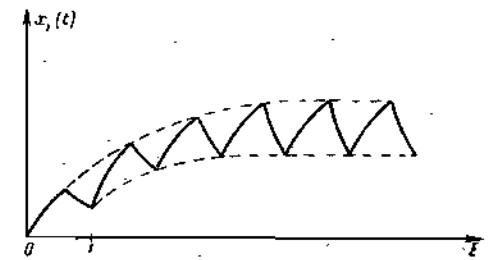


Рис. 163

изменения аргумента  $\bar{t}$  (рис. 162). Реакцию импульсной системы на единичное ступенчатое воздействие найдем по формуле (14), в соответствии с которой искомая функция равна  $x_1(\bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} k_1(\bar{t}-n)$ . Эта функция изображена на рис. 163.

При вычислениях удобно пользоваться формулой (19), с помощью которой в данном случае получим

$$x_1[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n k_1[n-m, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n k_1[m, \varepsilon].$$

Выполняя суммирование, найдем:

а) при  $0 \leq \varepsilon < \gamma$

$$\begin{aligned} x_1[n, \varepsilon] &= k_1(1 - e^{-\beta_1 \varepsilon}) + k_1 e^{-\beta_1(1+\varepsilon)}(e^{\beta_1 \gamma} - 1) + \\ &+ k_1 e^{-\beta_1(2+\varepsilon)}(e^{\beta_1 \gamma} - 1) + \dots + k_1 e^{-\beta_1(n+\varepsilon)}(e^{\beta_1 \gamma} - 1) = \\ &= k_1(1 - e^{-\beta_1 \varepsilon}) + k_1(e^{\beta_1 \gamma} - 1) \frac{1 - e^{-\beta_1 n}}{1 - e^{-\beta_1}} e^{-\beta_1(\varepsilon+1)}, \end{aligned} \quad (22)$$

б) при  $\gamma \leq \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} x_1[n, \varepsilon] &= (e^{\beta_1 \gamma} - 1) k_1 [e^{-\beta_1 \varepsilon} + e^{-\beta_1(1+\varepsilon)} + \dots + e^{-\beta_1(n+\varepsilon)}] = \\ &= (e^{\beta_1 \gamma} - 1) k_1 e^{-\beta_1 \varepsilon} \frac{1 - e^{-\beta_1(n+1)}}{1 - e^{-\beta_1}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Полученные выражения (22), (23) определяют реакцию импульсной системы на единичное ступенчатое воздействие.

**Пример 3.** Для импульсной системы с кратковременными импульсами, рассмотренной в примере 1, найти реакцию на гармоническое воздействие  $g_1(t) = A \cos \bar{\omega} t$ .

Задача упрощается, если найти реакцию  $z_1[n, \varepsilon]$  на воздействие  $f_1(t) = A e^{j\bar{\omega} t}$ , а затем рассмотреть вещественную часть этой функции  $x_1[n, \varepsilon] = \text{Re } z_1[n, \varepsilon]$ . По формуле (19) найдем

$$\begin{aligned} z_1[n, \varepsilon] &= \sum_{m=0}^n A k_1 e^{j\bar{\omega} m} e^{-\beta_1(n-m+\varepsilon)} = \sum_{m=0}^n A k_1 e^{m(\beta_1 + j\bar{\omega})} e^{-\beta_1(n+\varepsilon)} = \\ &= A k_1 e^{-\beta_1(n+\varepsilon)} \frac{1 - e^{(\beta_1 + j\bar{\omega})(n+1)}}{1 - e^{(\beta_1 + j\bar{\omega})}} = A k_1 \frac{e^{-\beta_1 n} - e^{j\bar{\omega}(n+1)} e^{\beta_1}}{1 - e^{\beta_1 + j\bar{\omega}}} e^{-\beta_1 \varepsilon} = \\ &= A k_1 \frac{e^{-\beta_1(n+1)} - e^{j\bar{\omega}(n+1)}}{e^{-\beta_1} - e^{j\bar{\omega}}} e^{-\beta_1 \varepsilon} = A k_1 \frac{e^{j\bar{\omega}(n+1)} - e^{-\beta_1(n+1)}}{e^{j\bar{\omega}} - e^{-\beta_1}} e^{-\beta_1 \varepsilon}. \end{aligned}$$

Искомый процесс получим как вещественную часть этого выражения, т. е.

$$\begin{aligned} x_1[n, \varepsilon] &= \text{Re } z_1[n, \varepsilon] = \\ &= A k_1 \frac{\cos \bar{\omega} n - e^{-\beta_1} \cos \bar{\omega}(n+1) + e^{-\beta_1(n+1)}(e^{-\beta_1} - \cos \bar{\omega})}{1 - 2e^{-\beta_1} \cos \bar{\omega} + e^{-2\beta_1}} e^{-\beta_1 \varepsilon}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\beta_1 > 0$ , то при достаточно больших значениях аргумента  $n$  выражение  $e^{-\beta_1(n+1)}$  можно считать равным нулю. При этом приближенно получим

$$z_1[n, \varepsilon] \approx A k_1 e^{-\beta_1 \varepsilon} \frac{e^{j\bar{\omega}(n+1)}}{e^{j\bar{\omega}} - e^{-\beta_1}}.$$

Введем обозначения:

$$W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = \frac{k_1 e^{j\bar{\omega}} e^{-\beta_1 \varepsilon}}{e^{j\bar{\omega}} - e^{-\beta_1}},$$

$$M(\bar{\omega}, \varepsilon) = |W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)| = \frac{k_1 e^{-\beta_1 \varepsilon}}{\sqrt{1 - 2e^{-\beta_1} \cos \bar{\omega} + e^{-2\beta_1}}},$$

$$\psi(\bar{\omega}) = \arg W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = \bar{\omega} - \arctg \frac{\sin \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} - e^{-\beta_1}}.$$

Тогда выражение для функции  $z_1[n, \varepsilon]$  примет вид

$$z_1[n, \varepsilon] \approx A W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) e^{j\bar{\omega} n} = A M(\bar{\omega}, \varepsilon) e^{j(\bar{\omega} n + \psi(\bar{\omega}))},$$

откуда найдем

$$x_1[n, \varepsilon] = \text{Re } z_1[n, \varepsilon] = A M(\bar{\omega}, \varepsilon) \cos(\bar{\omega} n + \psi(\bar{\omega})). \quad (24)$$

Таким образом, при достаточно больших значениях аргумента  $n$  реакция системы на воздействие вида  $A \cos \bar{\omega} t$  в дискретные моменты времени пред-

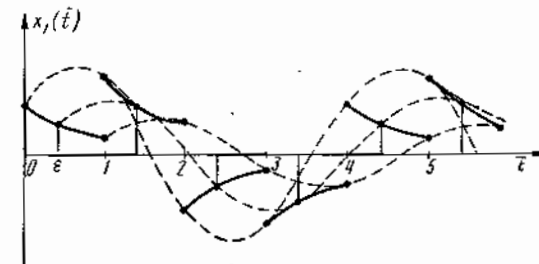


Рис. 164

ставляет собой косинус той же частоты, отличающийся по амплитуде и фазе от исходного. Этот «установившийся» процесс показан на рис. 164. Из рисунка видно, что при любом фиксированном значении  $\varepsilon$  из интервала  $0 \leq \varepsilon < 1$  процесс  $x_1[n, \varepsilon]$  представляет собой решетчатую гармоническую функцию.

Рассмотрим теперь замкнутую импульсную систему, содержащую импульсный элемент в канале ошибки  $e_1(t)$  (рис. 165). Ошибка системы равна

$$e_1(t) = e(tT) = g_1(t) - x_1(t). \quad (25)$$

Функция  $x_1(t)$ , описывающая выходную величину импульсной

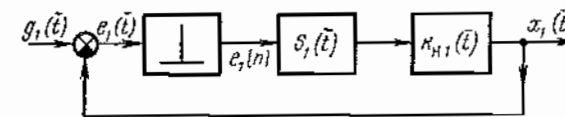


Рис. 165

системы, может иметь разрывы непрерывности в моменты квантования  $t = n$ . Поэтому при определении решетчатой функции

$$e_1[n] = g_1[n] - x_1[n] \quad (26)$$

следует оговорить, рассматривается ли значение  $x_1[n]$  как предел справа или как предел слева, т. е.

$$x_1[n] = \lim_{\bar{t} \rightarrow n+0} x_1(\bar{t}) \quad \text{или} \quad x_1[n] = \lim_{\bar{t} \rightarrow n-0} x_1(\bar{t}).$$

Принято рассматривать в этом случае предел справа, поскольку реальный импульсный элемент фиксирует именно правое значение модулируемого сигнала  $e(t)$  в точке разрыва непрерывности. Под-



Подставляя в эту формулу значение  $y(\bar{t})$  из (33), найдем

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^{\bar{t}} X(\bar{t} - \tau) B \sum_{n=0}^{\infty} S(\tau - n) g[n] d\tau = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\bar{t}} X(\bar{t} - \tau) B S(\tau - n) d\tau g[n]. \end{aligned} \quad (37)$$

Рассмотрим выражение, стоящее под знаком интеграла. Вводя новые переменные  $\bar{t} - n = \bar{\eta}$ ,  $\tau - n = \bar{\xi}$ , получим

$$\int_0^{\bar{t}} X(\bar{t} - \tau) B S(\tau - n) d\tau = \int_{-n}^{\bar{\eta}} X(\bar{\eta} - \bar{\xi}) B S(\bar{\xi}) d\bar{\xi}. \quad (38)$$

Матрица  $S(\bar{\xi})$  обращается в нулевую матрицу при  $\bar{\xi} < 0$ , поэтому этот интеграл можно записать следующим образом:

$$K(\bar{\eta}) = \int_{-n}^{\bar{\eta}} X(\bar{\eta} - \bar{\xi}) B S(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = \begin{cases} 0 & \text{при } \bar{\eta} < 0, \\ \int_0^{\bar{\eta}} X(\bar{\eta} - \bar{\xi}) B S(\bar{\xi}) d\bar{\xi} & \text{при } \bar{\eta} \geq 0. \end{cases} \quad (39)$$

Учитывая обозначение (39), запишем уравнение импульсной многомерной системы при нулевых начальных условиях в виде

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} K(\bar{t} - m) g[m]. \quad (40)$$

Полагая  $\bar{t} = n + \varepsilon$  и учитывая первое из равенств (39), можно записать уравнение (40) в окончательном виде

$$x[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n K[n - m, \varepsilon] g[m]. \quad (41)$$

Предположим теперь, что элементы матриц  $A$  и  $B$  в уравнении непрерывной части являются функциями времени. Обозначим по-прежнему через  $X(\bar{t})$  фундаментальную матрицу соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющую условию  $X(0) = E$ . Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений, описывающих непрерывную часть, найдем по формуле (24) § 11:

$$x(\bar{t}) = X(\bar{t}) x(0) + \int_0^{\bar{t}} X(\bar{t}) X^{-1}(\tau) B(\tau) y(\tau) d\tau. \quad (42)$$

Вводя обозначение  $K_n(\bar{t}, \tau) = X(\bar{t}) X^{-1}(\tau)$  и полагая начальные условия нулевыми, получим следующее уравнение непрерывной части:

$$x(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} K_n(\bar{t}, \tau) B(\tau) y(\tau) d\tau. \quad (43)$$

Подставляя в это уравнение значение  $y(\tau)$  из равенства (33), найдем уравнение рассматриваемой импульсной системы:

$$\begin{aligned} x(\bar{t}) &= \int_0^{\bar{t}} K_n(\bar{t}, \tau) B(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} S(\tau - n) g[n] d\tau = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\bar{t}} K_n(\bar{t}, \tau) B(\tau) S(\tau - n) d\tau g[n]. \end{aligned} \quad (44)$$

Введем обозначение

$$K(\bar{t}, n) = \int_0^{\bar{t}} K_n(\bar{t}, \tau) B(\tau) S(\tau - n) d\tau. \quad (45)$$

Заметим, что

$$K(\bar{t}, n) = 0 \quad \text{при } \bar{t} < n, \quad (46)$$

так как матрица  $S(\tau)$  обращается в нулевую при отрицательных значениях аргумента, т. е.

$$S(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau < 0.$$

При значениях аргумента  $\bar{t} \geq n$  функция  $K(\bar{t}, n)$  описывается выражением

$$K(\bar{t}, n) = \int_n^{\bar{t}} K_n(\bar{t}, \tau) B(\tau) S(\tau - n) d\tau. \quad (47)$$

Учитывая это выражение, получим уравнение многомерной импульсной системы при нулевых начальных условиях в виде

$$x(\bar{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} K(\bar{t}, m) g[m]. \quad (48)$$

Заменяя переменную  $\bar{t}$  по формуле  $\bar{t} = n + \varepsilon$  и принимая во внимание условие (46), получим уравнение многомерной импульсной системы относительно решетчатых функций:

$$x[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n K(n + \varepsilon, m) g[m]. \quad (49)$$

Используя уравнения (48) и (49), можно составлять уравнения более сложных систем. Рассмотрим, например, многомерную систему с обратной связью, изображенную на рис. 167. Эта система описывается уравнением (49):

$$x[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n K(n + \varepsilon, m) e[m], \quad (50)$$

где матрица  $K(\bar{t}, n)$  определяется формулой (47);  $e[m]$  — вектор-столбец размерности  $r$ , определяемый уравнением «замыкания»

$$e[n] = f[n] - C[n] x[n]. \quad (51)$$



Здесь  $C[n]$  — матрица решетчатых функций размерности  $r \times N$ . Подставляя вектор-функцию  $e[n]$  из уравнения (51) в уравнение (50), получим уравнение замкнутой многомерной импульсной системы:

$$x[n, \epsilon] = \sum_{m=0}^n K(n+\epsilon, m) f[n] - \sum_{m=0}^n K(n+\epsilon, m) C[m] x[m]. \quad (52)$$

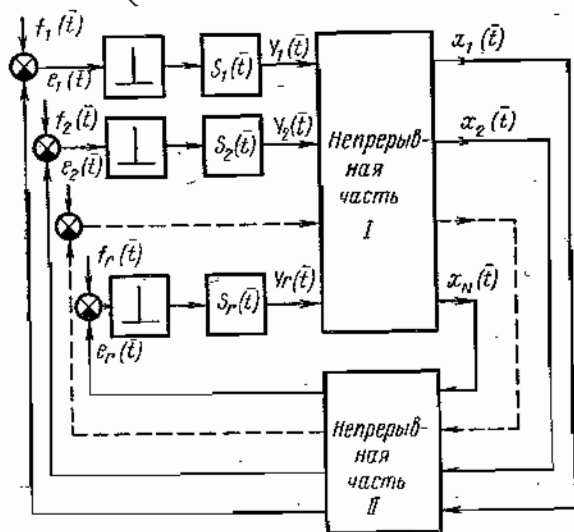


Рис. 167

3. Уравнения импульсных систем в конечных разностях. Составим разностные уравнения импульсных систем, эквивалентные уравнениям, содержащим суммы решетчатых функций (48) или (49). Сначала рассмотрим многомерную импульсную систему (см. рис. 167) непрерывная часть которой описывается системой линейных дифференциальных уравнений (30). Элементы матриц  $A$  и  $B$  могут быть функциями времени. Импульсные элементы, работающие синхронно и синфазно, описываются уравнениями (33).

Выберем начальные условия в момент времени  $t_0 = n$ . Тогда решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (30) удовлетворяющее этим начальным условиям, может быть записано в виде

$$x(\bar{t}) = K_n(\bar{t}, n) x[n] + \int_n^{\bar{t}} K_n(\bar{t}, \tau) B(\tau) y(\tau) d\tau, \quad (53)$$

где  $x[n]$  — вектор начальных условий, а  $K_n(\bar{t}, \tau)$  — матрица Коши связанная с фундаментальной матрицей  $X(\bar{t})$  однородной системы

уравнений (34) соотношением

$$K_n(\bar{t}, \tau) = X(\bar{t}) X^{-1}(\tau). \quad (54)$$

Положим в уравнении непрерывной части (53), что  $\bar{t} = n + \epsilon$ , тогда получим

$$x[n, \epsilon] = K_n(n + \epsilon, n) x[n] + \int_n^{n+\epsilon} K_n(n + \epsilon, \tau) B(\tau) y(\tau) d\tau. \quad (55)$$

Векторное уравнение (33), описывающее импульсные элементы, в интервале  $n \leq \bar{t} \leq n + \epsilon$   $0 \leq \epsilon < 1$  имеет вид

$$y(\bar{t}) = S(\bar{t} - n) g[n]. \quad (56)$$

Подставляя это выражение в уравнение (55) непрерывной части, получим уравнение многомерной импульсной системы

$$x[n, \epsilon] = K_n(n + \epsilon, n) x[n] + \int_n^{n+\epsilon} K_n(n + \epsilon, \tau) B(\tau) S(\tau - n) g[n] d\tau. \quad (57)$$

Используя обозначение (47), мы окончательно получим

$$x[n, \epsilon] = K_n(n + \epsilon, n) x[n] + K(n + \epsilon, n) g[n]. \quad (58)$$

Переходя в обеих частях равенства (58) к пределу при  $\epsilon \rightarrow 1$ , найдем разностное уравнение, описывающее многомерную импульсную систему в дискретные моменты времени  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$x[n + 1] = K_n(n + 1, n) x[n] + K(n + 1, n) g[n]. \quad (59)$$

Заметим, что значения функции  $x[n]$ , стоящей в правой части уравнения (59), определяются как предел справа:  $x[n] = \lim_{\bar{t} \rightarrow n+0} x(\bar{t})$ ,

в то время как функция  $x[n + 1]$  получена в результате предельного перехода слева:  $x[n + 1] = \lim_{\bar{t} \rightarrow n+1-0} x(\bar{t})$ . Для того чтобы уравнение (59) имело место, необходимо дополнительно потребовать, чтобы функция  $x(\bar{t})$  не имела разрывов непрерывности в дискретные моменты времени, т. е. соблюдалось условие  $\lim_{\bar{t} \rightarrow n+0} x(\bar{t}) =$

$\lim_{\bar{t} \rightarrow n+1-0} x(\bar{t})$ . В реальных импульсных системах выходная величина  $x(\bar{t})$  является, как правило, непрерывной функцией и указанное требование выполняется.

Решение  $x[n]$  полученного разностного уравнения определяет процесс в импульсной системе в дискретные моменты времени. Для того чтобы найти процесс в системе в любой момент времени, достаточно подставить решение уравнения (59) в правую часть уравнения (58). Если элементы матриц  $A$  и  $B$  в уравнении (30)

постоянны, то матрица Коши  $K_n(\bar{t}, \bar{\tau})$  зависит только от разности аргументов  $\bar{t}$  и  $\bar{\tau}$ :

$$K_n(\bar{t}, \bar{\tau}) = X(\bar{t}) X^{-1}(\bar{\tau}) = X(\bar{t} - \bar{\tau}), \quad (60)$$

где  $X(\bar{t})$  — фундаментальная матрица однородной системы уравнений (34), удовлетворяющая условию  $X(0) = E$  (см. гл. IV). Нетрудно заметить, что матрица  $K(\bar{t}, n)$ , определяемая равенством (47), в этом случае зависит также только от разности аргументов  $\bar{t}$  и  $n$ .

Таким образом, для импульсной системы с постоянными параметрами получаем уравнение

$$\mathbf{x}[n, \varepsilon] = K_n(\varepsilon) \mathbf{x}[n] + K[\varepsilon] \mathbf{g}[n]. \quad (61)$$

В частности, при  $\varepsilon = 1$

$$\mathbf{x}[n+1] = K_n(1) \mathbf{x}[n] + K(1) \mathbf{g}[n]. \quad (62)$$

В этих уравнениях матрица  $K_n(\bar{\tau})$  совпадает с фундаментальной матрицей решений соответствующей системы однородных дифференциальных уравнений непрерывной части (34), т. е.  $K_n(\bar{\tau}) = X(\bar{\tau})$ . Матрица  $K(1)$  связана с фундаментальной матрицей  $X(\bar{t})$  следующим соотношением, вытекающим из равенства (47):

$$K(1) = \int_n^{n+1} X(n+1-\tau) BS(\tau-n) d\tau = \int_0^1 X(1-\lambda) BS(\lambda) d\lambda. \quad (63)$$

Итак, получены разностные уравнения (59), (62) разомкнутой многомерной импульсной системы. Можно показать, что решения разностных уравнений (59) и (62) при нулевых начальных условиях совпадают с выражениями (49) и (41), полученными выше.

Составим теперь разностное уравнение многомерной импульсной системы с обратной связью (см. рис. 167). Эта система описывается уравнением

$$\mathbf{x}[n, \varepsilon] = K_n(n+\varepsilon, n) \mathbf{x}[n] + K(n+\varepsilon, n) \mathbf{e}[n] \quad (64)$$

и уравнением замыкания (51). Подставляя функцию  $\mathbf{e}[n]$  из уравнения (51) в уравнение (64), получим

$$\mathbf{x}[n, \varepsilon] = K_n(n+\varepsilon, n) \mathbf{x}[n] + K(n+\varepsilon, n) \mathbf{f}[n] - K(n+\varepsilon, n) \times \\ \times C[n] \mathbf{x}[n] = H(n+\varepsilon, n) \mathbf{x}[n] + K(n+\varepsilon, n) \mathbf{f}[n], \quad (65)$$

где

$$H(n+\varepsilon, n) = K_n(n+\varepsilon, n) - K(n+\varepsilon, n) C[n]. \quad (66)$$

Предполагая, что  $\mathbf{x}(\bar{t})$  — непрерывная функция, определим разностное уравнение замкнутой импульсной системы из уравнения (66) при  $\varepsilon = 1$ :

$$\mathbf{x}[n+1] = H(n+1, n) \mathbf{x}[n] + K(n+1, n) \mathbf{f}[n]. \quad (67)$$

Если матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  — постоянны, то уравнение (65) принимает вид

$$\mathbf{x}[n, \varepsilon] = H(\varepsilon) \mathbf{x}[n] + K(\varepsilon) \mathbf{f}[n]. \quad (68)$$

В частности, при  $\varepsilon = 1$  будем иметь

$$\mathbf{x}[n+1] = H(1) \mathbf{x}[n] + K(1) \mathbf{f}[n], \quad (69)$$

где

$$H(1) = K_n(1) - K(1) C = X(1) - \int_0^1 X(1-\lambda) BS(\lambda) d\lambda C, \quad (70)$$

а  $X(\bar{t})$  — фундаментальная матрица однородного дифференциального уравнения (34), описывающего непрерывную часть разомкнутой системы.

Решение векторного разностного уравнения (69) всегда может быть представлено в виде (см. § 50)

$$\mathbf{x}[n] = G[n] \mathbf{x}[0] + \sum_{k=0}^{n-1} G[n-k] K(1) \mathbf{f}[k], \quad (71)$$

где  $G[n]$  — фундаментальная матрица решений однородного разностного уравнения

$$\mathbf{x}[n+1] = H(1) \mathbf{x}[n]. \quad (72)$$

Для того чтобы найти функцию  $\mathbf{x}[n, \varepsilon]$ , описывающую процесс в импульсной системе в любой момент времени, нужно подставить решение (71) разностного уравнения (69) в правую часть уравнения (68):

$$\mathbf{x}[n, \varepsilon] = H(\varepsilon) G[n] \mathbf{x}[0] + \left\{ H[\varepsilon] \sum_{k=0}^{n-1} G[n-k] K(1) + K(\varepsilon) \right\} \mathbf{f}[n]. \quad (73)$$

Решение разностного уравнения (67), описывающего замкнутую импульсную систему с переменными параметрами, может быть последовательно вычислено для любого значения  $n$ . Подставляя это решение в формулу (65), найдем процесс в импульсной системе в любой момент времени.

Перейдем теперь к рассмотрению более простого класса импульсных систем, а именно к системам с одним импульсным элементом, непрерывная часть которых имеет один входной канал и одну выходную величину. Разностные уравнения этих систем можно найти точно так же, как и уравнения многомерных систем.

Рассмотрим разомкнутую импульсную систему с одним импульсным элементом (см. рис. 153). Пусть непрерывная часть этой системы описывается дифференциальным уравнением порядка  $k \geq 1$

$$x^{(k)} + a_1(\bar{t}) x^{(k-1)} + \dots + a_{k-1}(\bar{t}) x' + a_k(\bar{t}) x = y(\bar{t}). \quad (74)$$

Импульсный элемент описывается уравнением

$$y(\bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} s(\bar{t}-n) g[n].$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} x &= x_1, \\ x' &= x_2, \\ &\dots \\ x^{(k-1)} &= x_k, \end{aligned} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A(\bar{t}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_k(\bar{t}) & -a_{k-1}(\bar{t}) & -a_{k-2}(\bar{t}) & \dots & -a_1(\bar{t}) \end{bmatrix},$$

тогда дифференциальное уравнение, описывающее непрерывную часть системы, можно записать в виде линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений нормального вида:

$$\frac{dx}{dt} = A(\bar{t}) x + B_0 y(\bar{t}). \quad (75)$$

Обозначим через  $X(\bar{t})$  фундаментальную матрицу однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей неоднородной системе (75). Будем предполагать, что эта матрица удовлетворяет условию  $X(0) = E$ . Введем матрицу Коши для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений

$$K_n(\bar{t}, \bar{\tau}) = X(\bar{t}) X^{-1}(\bar{\tau}).$$

Задавая начальные условия при  $\bar{t} = n$ , получим решение системы (75) в виде (53). Подставляя в уравнение (53) значение функций  $y(\bar{t})$  из уравнения импульсного элемента, получим уравнение вида (58). Полагая в этом уравнении  $\epsilon = 1$ , мы приходим к уравнению импульсной системы, записанному в векторных обозначениях

$$x[n+1] = K_n(n+1, n) x[n] + K_0(n+1, n) g[n], \quad (76)$$

где

$$K_0(n+1, n) = \int_n^{n+1} K_n(n+1, \bar{\tau}) B_0 s(\bar{\tau}-n) d\bar{\tau}. \quad (77)$$

В отличие от уравнения (59) матрица  $K_0(n+1, n)$  имеет размер

$k \times 1$ , т. е. представляет собой вектор-функцию. Обозначим через  $k_{ij}(n+1, \bar{\tau})$  элементы матрицы  $K_n(n+1, \bar{\tau})$ :

$$K_n(n+1, \bar{\tau}) = \begin{bmatrix} k_{11}(n+1, \bar{\tau}) & k_{12}(n+1, \bar{\tau}) & \dots & k_{1k}(n+1, \bar{\tau}) \\ k_{21}(n+1, \bar{\tau}) & k_{22}(n+1, \bar{\tau}) & \dots & k_{2k}(n+1, \bar{\tau}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{k1}(n+1, \bar{\tau}) & k_{k2}(n+1, \bar{\tau}) & \dots & k_{kk}(n+1, \bar{\tau}) \end{bmatrix}.$$

Тогда выражение, стоящее под знаком интеграла (77), можно записать в виде

$$\begin{aligned} K_n(n+1, \bar{\tau}) B_0 s(\bar{\tau}-n) &= \begin{bmatrix} k_{1k}(n+1, \bar{\tau}) s(\bar{\tau}-n) \\ k_{2k}(n+1, \bar{\tau}) s(\bar{\tau}-n) \\ \dots \\ k_{kk}(n+1, \bar{\tau}) s(\bar{\tau}-n) \end{bmatrix} = \\ &= K_{nk}(n+1, \bar{\tau}) s(\bar{\tau}-n), \end{aligned} \quad (78)$$

$$\text{где } K_{nk}(n+1, \bar{\tau}) = \begin{bmatrix} k_{1k}(n+1, \bar{\tau}) \\ k_{2k}(n+1, \bar{\tau}) \\ \dots \\ k_{kk}(n+1, \bar{\tau}) \end{bmatrix}.$$

Подставляя выражение (78) в правую часть равенства (77), получим:

$$K_0(n+1, n) = \int_n^{n+1} K_{nk}(n+1, \bar{\tau}) s(\bar{\tau}-n) d\bar{\tau}. \quad (79)$$

Итак, мы нашли систему  $k$  разностных уравнений первого порядка (76), описывающих разомкнутую импульсную систему автоматического регулирования.

## ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

## § 52. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

1. **Определение дискретного преобразования Лапласа.** Для исследования импульсных систем автоматического регулирования, а также в других прикладных задачах, связанных с решетчатыми функциями и разностными уравнениями, используется преобразование, определяемое формулой

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n], \quad (1)$$

где  $q = \sigma + j\omega$  — комплексная переменная. Оно называется *дискретным преобразованием Лапласа*, а также  *$\mathcal{D}$ -преобразованием* и сокращенно обозначается  $\mathcal{D}\{f[n]\}$ , т. е.

$$F^*(q) = \mathcal{D}\{f[n]\}.$$

Функция  $F^*(q)$ , определяемая формулой (1), называется *изображением*. Дискретное преобразование Лапласа может быть определено и для смещенных решетчатых функций в соответствии с формулой

$$F^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{f[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n, \varepsilon], \quad (2)$$

где параметр  $\varepsilon$  принимает значения на отрезке  $[0, 1]$ .

Наряду с  $\mathcal{D}$ -преобразованием в теории автоматического регулирования применяется так называемое  *$\mathcal{Z}$ -преобразование*, определяемое формулой (1), в которую вводится новая переменная  $z = e^q$ :

$$F_z^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f[n]; \quad (3)$$

$\mathcal{Z}$ -преобразование принято обозначать так:

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = F_z^*(z).$$

Если известно изображение  $F^*(q)$  некоторой решетчатой функции, то соответствующее изображение  $F_z^*(z)$  может быть найдено с помощью замены комплексной переменной  $q$  по формуле  $q = \ln z$ :

$$F_z^*(z) = F^*(\ln z).$$

Аналогично можно определить изображение  $F^*(q)$  по заданной функции  $F_z^*(z)$ :

$$F^*(q) = F_z^*(e^q).$$

Таким образом, принципиальной разницы между  $\mathcal{D}$ -преобразованием и  $\mathcal{Z}$ -преобразованием не существует. Все основные свойства  $\mathcal{Z}$ -преобразования могут быть получены из соответствующих свойств  $\mathcal{D}$ -преобразования.

Следует заметить, что  $\mathcal{D}$ -преобразование решетчатой функции  $f[n]$  можно рассматривать как обычное преобразование Лапласа функции, состоящей из последовательности смещенных дельта-функций:

$$g(\bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \delta(\bar{t} - n). \quad (4)$$

Применяя к этой функции преобразование Лапласа, на основании фильтрующего свойства дельта-функции (см. § 37) формально можно получить выражение (1). Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(\bar{t})\} &= \int_0^{\infty} g(\bar{t}) e^{-q\bar{t}} d\bar{t} = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \delta(\bar{t} - n) e^{-q\bar{t}} d\bar{t} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \int_0^{\infty} \delta(\bar{t} - n) e^{-q\bar{t}} d\bar{t} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-qn} = \mathcal{D}\{f[n]\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим теперь область сходимости ряда (1). Для этого выполним замену переменной  $q$  по формуле  $\zeta = e^{-q}$ . Тогда ряд (1) примет вид степенного ряда

$$F^*(q) \Big|_{q = -\ln \zeta} = F_z^*(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n f[n], \quad (6)$$

область сходимости которого определяется теоремой Коши — Адамара (см. § 29). Согласно этой теореме ряд (6) сходится абсолютно в каждой точке круга  $|\zeta| < R$ , сходится равномерно в каждом круге  $|\zeta| \leq R_1 < R$  и расходится в области  $|\zeta| > R$ , где  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f[n]|}$ . Переходя к переменной  $q$ , получим, что ряд (1) сходится абсолютно в области  $|e^{-q}| < R$ , что эквивалентно условию  $\operatorname{Re} q > \ln \frac{1}{R}$ . Таким образом, внутренность круга сходимости ряда (6) в плоскости комплексного переменного  $\zeta$  переходит в полуплоскость  $\operatorname{Re} q > \ln \frac{1}{R}$  плоскости комплексного переменного  $q$ . С учетом этого обстоятельства сформулируем для ряда (1) теорему, аналогичную теореме Коши — Адамара.

**Теорема 1.** Ряд (1) сходится абсолютно в каждой точке полуплоскости  $\operatorname{Re} q > \sigma_c$ , сходится равномерно в каждой полуплоскости  $\operatorname{Re} q \geq \sigma_1 > \sigma_c$  и расходится в полуплоскости  $\operatorname{Re} q < \sigma_c$ , где  $\sigma_c = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f[n]|}$ .

Величина  $\sigma_c$  называется *абсциссой абсолютной сходимости*  $\mathcal{D}$ -преобразования (1). Таким образом, область сходимости  $\mathcal{D}$ -преобразования есть полуплоскость, расположенная справа от прямой  $\operatorname{Re} q = \sigma_c$ . Если, в частности  $\sigma_c = -\infty$ , то ряд (1) сходится всюду, если же  $\sigma_c = \infty$ , то  $\mathcal{D}$ -преобразование не существует.

Известно, что сумма степенного ряда (6)  $F^*(\xi)$  в круге сходимости является аналитической функцией (см. § 28). Поскольку функция  $\xi = e^{-q}$  также является аналитической, то и функция  $F^*(q)$  является аналитической в полуплоскости  $\operatorname{Re} q > \sigma_c$ .

**Пример 1.** Найти абсциссу абсолютной сходимости  $\mathcal{D}$ -преобразования решетчатой функции  $f[n] = 1[n]$ .

По формуле (1) имеем

$$F^*(q) = \mathcal{D}\{1[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} 1[n].$$

При условии  $\operatorname{Re} q > 0$  этот ряд сходится, что следует из оценки

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sigma n} = \frac{e^{\sigma}}{e^{\sigma} - 1}, \quad \text{где } \sigma = \operatorname{Re} q > 0.$$

Сумма ряда, т. е. изображение функции  $1[n]$ , равна

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} = \frac{e^q}{e^q - 1}. \quad (7)$$

В точках  $\operatorname{Re} q \leq 0$  рассматриваемый ряд расходится. Таким образом,  $\sigma_c = 0$ .

**Пример 2.** Найти абсциссу абсолютной сходимости  $\mathcal{D}$ -преобразования функции  $f[n] = e^{an}$ , где  $a$  — любое вещественное число.

Имеем

$$\mathcal{D}\{e^{an}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} e^{an} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(q-a)} = \frac{e^q}{e^q - e^a}. \quad (8)$$

Ряд сходится при условии  $\operatorname{Re}(q-a) > 0$ , т. е. при  $\operatorname{Re} q > a$ . В области  $\operatorname{Re} q \leq a$  ряд расходится. Таким образом, абсцисса абсолютной сходимости  $\sigma_c = a$ .

**Пример 3.** Определить абсциссу абсолютной сходимости  $\mathcal{D}$ -преобразования решетчатой функции

$$f[n] = \begin{cases} 0 & \text{при } n=0, \\ \frac{1}{n} & \text{при } n=1, 2, \dots \end{cases}$$

По формуле  $\mathcal{D}$ -преобразования имеем

$$\mathcal{D}\left\{\frac{1}{n}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} \frac{1}{n}.$$

Ряд сходится в области  $\operatorname{Re} q > 0$ , поскольку выполнено условие

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} \frac{1}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sigma n} \frac{1}{n} \quad (\sigma = \operatorname{Re} q > 0).$$

В точке  $q=0$  ряд расходится. Тем более он расходится при  $\operatorname{Re} q < 0$ . Следовательно, абсцисса абсолютной сходимости  $\sigma_c = 0$ . Заметим, что во всех точках мнимой оси  $\operatorname{Re} q = 0$  за исключением точек  $j\omega = 2jk\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-j\omega n} \frac{1}{n} \text{ сходится.}$$

**Пример 4.** Определить абсциссу абсолютной сходимости  $\mathcal{D}$ -преобразования для решетчатой функции

$$f[n] = \begin{cases} 0 & \text{при } n=0, \\ \frac{1}{n^2} & \text{при } n=1, 2, \dots \end{cases}$$

По формуле (1) получим

$$\mathcal{D}\left\{\frac{1}{n^2}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} \frac{1}{n^2}.$$

При условии  $\operatorname{Re} q > 0$  ряд сходится, что следует из оценки

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} \frac{1}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sigma n} \frac{1}{n^2} \quad (\sigma = \operatorname{Re} q > 0),$$

поскольку ряд, стоящий в правой части неравенства, сходится. Ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} \frac{1}{n^2}$  сходится и при условии  $\operatorname{Re} q = 0$ , так как при этом выполнено неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

и ряд, стоящий в правой части неравенства, сходится. При  $\operatorname{Re} q < 0$  ряд, определяющий  $\mathcal{D}$ -преобразование, расходится. Например, в точках  $q = \sigma + 2jk\pi$

( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), где  $\sigma < 0$ , получим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\sigma n}$ . Его расходимость следует из того, что все члены ряда положительны и неограниченно возрастают. Таким образом, абсцисса абсолютной сходимости  $\sigma_c = 0$ .

По аналогии с определением, данным в § 42, будем называть *оригиналом* решетчатую функцию  $f[n]$ , которая равна нулю при  $n < 0$  и удовлетворяет при  $n \geq 0$  условию

$$|f[n]| < M e^{\sigma_0 n}, \quad (9)$$

где  $M > 0$  и  $\sigma_0 \geq 0$  — некоторые постоянные величины. Величина  $\sigma_0$  называется *показателем роста решетчатой функции  $f[n]$* . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Для всякого оригинала  $f[n]$  изображение  $F^*(q)$  определено в полуплоскости  $\operatorname{Re} q > \sigma_0$  и является в этой полуплоскости аналитической функцией\*).

**Доказательство.** С учетом неравенства (9) имеем

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n] \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\operatorname{Re} q n} |f[n]| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\operatorname{Re} q + \sigma_0)n}, \quad (10)$$

\* Заметим, что отсюда следует неравенство  $\sigma_0 \geq \sigma_c$ .

откуда следует, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n]$  сходится абсолютно при  $\operatorname{Re} q > \sigma_0$ . В соответствии с теоремой 1 этот ряд сходится равномерно в любой области  $\operatorname{Re} q \geq \sigma_1 > \sigma_0$ . По теореме Вейерштрасса (см. § 28) сумма ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n] = F^*(q)$  является аналитической функцией в области  $\operatorname{Re} q \geq \sigma_1 > \sigma_0$ , а следовательно и в любой внутренней точке области  $\operatorname{Re} q > \sigma_0$ .

Теорема доказана.

Непосредственно из определения  $\mathcal{D}$ -преобразования по формуле (1) следует, что функция  $F^*(q)$  является периодической вдоль мнимой оси плоскости  $q$  с периодом  $2\pi$ . Действительно,

$$F^*(q + 2\pi jr) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(q+2\pi jr)n} f[n] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n] = F^*(q), \quad (11)$$

где  $r$  — любое целое число. Поэтому достаточно изучить свойства функции  $F^*(q)$  в любой полосе шириной  $2\pi$ :  $\omega_0 < \operatorname{Im} q \leq \omega_0 + 2\pi$ .

Наиболее удобна для этой цели полоса  $-\pi < \operatorname{Im} q \leq \pi$ , симметричная относительно действительной оси плоскости  $q$  (рис. 168, а). Эту полосу будем называть *основной полосой*.

Мы видели, что  $\mathcal{D}$ -преобразование определяет аналитическую функцию  $F^*(q)$  в полуполосе  $\operatorname{Re} q > \sigma_c$  ( $-\pi < \operatorname{Im} q \leq \pi$ ).

Обычно оказывается возможным распространить определение функции  $F^*(q)$  на всю полосу  $-\pi < \operatorname{Im} q \leq \pi$  с сохранением аналитичности этой функции всюду за исключением, может быть, конечного числа точек\*).

С учетом этого замечания можно сказать, что  $\mathcal{D}$ -преобразование определяет аналитическую функцию  $F^*(q)$  в основной полосе за исключением конечного числа особых точек. В задачах, связанных с исследованием линейных систем автоматического регулирования эти точки, как правило, являются полюсами. Если определены особые точки функции  $F^*(q)$  в основной полосе  $q_v = \sigma_v + j\omega_v$  ( $v = 1, 2, \dots, l$ ), то все остальные особые точки определяются из соотношения

$$q_{vr} = \sigma_v + j(\omega_v + 2\pi r), \quad \text{где } r = \pm 1, \pm 2, \dots, v = 1, 2, \dots, l.$$

Рассмотрим, как связаны между собой области определения  $\mathcal{D}$ -преобразования в плоскости комплексного переменного  $q$  и  $\mathcal{Z}$ -преоб-

\* См., например: Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. «Наука», 1965, стр. 92.

разования в плоскости комплексного переменного  $z$ . Преобразование комплексной переменной  $q$  по формуле  $z = e^q$  переводит основную полосу плоскости  $q$  на всю расширенную плоскость комплексной переменной  $z$ . При этом отрезок мнимой оси  $-\pi < \omega \leq \pi$  отображается в окружность единичного радиуса  $z = e^{j\omega}$  ( $-\pi < \omega \leq \pi$ ). Левая полуплоскость  $\operatorname{Re} q < 0$  плоскости  $q$  отображается во внутренность единичного круга  $|z| < 1$  плоскости  $z$ , а правая полуплоскость  $\operatorname{Re} q > 0$  — во внешность этого круга. Функция  $F_z^*(z)$ , определяемая по формуле (3), является аналитической в области  $|z| > e^{\sigma_c}$ , т. е. во внешности круга  $z \leq e^{\sigma_c + j\omega}$  ( $-\pi < \omega \leq \pi$ ) (рис. 168, б), а после построения аналитического продолжения — во всей расширенной плоскости переменного  $z$ , за исключением конечного числа особых точек. Особые точки  $q_v = \sigma_v + j(\omega_v + 2\pi r)$  ( $r = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) изображения  $F^*(q)$  при отображении с помощью функции  $z = e^q$  перейдут в точки  $z_v = e^{\sigma_v + j(\omega_v + 2\pi r)} = e^{\sigma_v + j\omega_v}$  ( $v = 1, 2, \dots, l$ ), лежащие внутри круга  $z \leq e^{\sigma_c + j\omega}$  ( $-\pi < \omega \leq \pi$ ).

**2. Формула обращения.** Перейдем к рассмотрению преобразования, обратного по отношению к дискретному преобразованию Лапласа (1). Это преобразование определяет решетчатую функцию  $f[n]$  по заданному изображению  $F^*(q)$ :

$$f[n] = \mathcal{D}^{-1}\{F^*(q)\} \quad (n \geq 0); \quad (12)$$

$\mathcal{D}^{-1}$ -преобразование определяется формулой

$$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(q) e^{qn} dq \quad (n \geq 0), \quad (13)$$

где  $c > \sigma_c$ , если  $\sigma_c$  — абсцисса абсолютной сходимости.

Покажем справедливость формулы (13). Полагая в выражении (1) прямого  $\mathcal{D}$ -преобразования  $\zeta = e^{-q}$ , получим степенной ряд

$$F^*(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n f[n], \quad (14)$$

где  $F^*(\zeta) = F^*(q)|_{q=-\ln \zeta}$ .

Известно (см. § 29), что разложение аналитической функции в степенной ряд (14) единственно, и коэффициенты ряда определяются для данной функции  $F^*(\zeta)$  однозначно по формуле

$$f[n] = \frac{F_1^{*(n)}(0)}{n!}, \quad (15)$$

где  $F_1^{*(n)}(0)$  — производная порядка  $n$  функции  $F^*(\zeta)$  в точке  $\zeta = 0$ . Функция  $F^*(\zeta)$  является аналитической в круге  $|\zeta| \leq e^{-\sigma_c}$ , поэтому для определения производной функции  $F^*(\zeta)$  в центре круга  $\zeta = 0$



можно воспользоваться интегральной формулой Коши (см. § 27). Согласно этой формуле производная  $F_1^{*(n)}(0)$  равна

$$F_1^{*(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi j} \int_C \frac{F_1^*(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \quad (16)$$

где интеграл берется по окружности  $C$ , определяемой уравнением  $|\zeta| = e^{-c}$  в положительном направлении. Подставляя выражение (16) в равенство (15), найдем:

$$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{F_1^*(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}}. \quad (17)$$

Перейдем к прежней переменной  $q$ , связанной с переменной  $\zeta$  соотношением  $\zeta = e^{-q}$ . Заметим, что при обходе переменной  $\zeta$  окружности  $C$  в положительном направлении переменная  $q$  изменяется от  $c + j\pi$  до  $c - j\pi$ . Получим:

$$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c+j\pi}^{c-j\pi} \frac{F^*(q) e^{-q} d(-q)}{e^{-q(n+1)}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(q) e^{qn} dq, \quad (18)$$

что совпадает с формулой (13). Таким образом, доказана справедливость формулы обратного  $\mathcal{Z}$ -преобразования.

Для смещенных решетчатых функций формула обратного  $\mathcal{Z}$ -преобразования имеет вид

$$f[n, \varepsilon] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(q, \varepsilon) e^{qn} dq. \quad (19)$$

Вычисление оригиналов  $f[n]$  можно производить и по формуле обращения  $\mathcal{Z}$ -преобразования, которая может быть получена из формулы (13) путем замены переменной  $z = e^q$ :

$$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_C F_z^*(z) z^{n-1} dz. \quad (20)$$

Интегрирование производится по окружности  $C$  радиуса  $e^c$ , где  $c > a_c$ , в положительном направлении. Принимая во внимание, что функция  $F_z^*(z) z^{n-1}$  является аналитической вне окружности  $C$  и на самой окружности, можно применить теорему о вычетах (см. § 32), согласно которой получим

$$f[n] = \sum_{v=1}^l \text{Res } F_z^*(z) z^{n-1} |_{z=z_v}, \quad (21)$$

где  $z = z_v$  — полюс функции  $F_z^*(z) z^{n-1}$ , лежащий внутри окружности  $C$ .

Вычет в простом полюсе определяется формулой (6) § 32, в соответствии с которой

$$\text{Res } F_z^*(z) z^{n-1} |_{z=z_v} = \lim_{z \rightarrow z_v} \{F_z^*(z) (z - z_v) z^{n-1}\}. \quad (22)$$

Вычет в полюсе кратности  $r$ , определяется формулой (5) § 32, согласно которой имеем

$$\text{Res } F_z^*(z) z^{n-1} |_{z=z_v} = \frac{1}{(r_v - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_v} \frac{d^{r_v-1}}{dz^{r_v-1}} \{F_z^*(z) (z - z_v)^{r_v} z^{n-1}\}. \quad (23)$$

**Пример 5.** Найти оригинал  $f[n]$ , соответствующий изображению

$$F^*(q) = \frac{e^q}{(e^q - e^{-\beta})^2}.$$

Выполним замену переменной по формуле  $z = e^q$ ; получим

$$F_z^*(z) = \frac{z}{(z - z_1)^2},$$

где  $z_1 = e^{-\beta}$ . Вычет в точке  $z = z_1$  определим по формуле (23):

$$\begin{aligned} \text{Res } F_z^*(z) z^{n-1} |_{z=z_1} &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \frac{z z^{n-1}}{(z - z_1)^2} (z - z_1)^2 = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} n z^{n-1} = n z_1^{n-1} = n e^{-\beta(n-1)}. \end{aligned}$$

По формуле (21) получим

$$f[n] = n e^{-\beta(n-1)}.$$

**Пример 6.** Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F^*(q) = \frac{a_1 e^q + a_2}{(e^q - e^{-\beta})(e^q - e^{-\alpha})}.$$

Для того чтобы воспользоваться формулой (21), предварительно заменим переменную  $q$  по формуле  $z = e^q$ , тогда будем иметь

$$F_z^*(z) = \frac{a_1 z + a_2}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

где  $z_1 = e^{-\beta}$ ,  $z_2 = e^{-\alpha}$ .

Определим вычеты по формуле (22):

$$\begin{aligned} \text{Res } \frac{(a_1 z + a_2) z^{n-1}}{(z - z_1)(z - z_2)} |_{z=z_1} &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left[ \frac{(a_1 z + a_2) z^{n-1}}{z - z_2} \right] = \frac{(a_1 z_1 + a_2) z_1^{n-1}}{z_1 - z_2}, \\ \text{Res } \frac{(a_1 z + a_2) z^{n-1}}{(z - z_1)(z - z_2)} |_{z=z_2} &= \lim_{z \rightarrow z_2} \left[ \frac{(a_1 z + a_2) z^{n-1}}{z - z_1} \right] = \frac{(a_1 z_2 + a_2) z_2^{n-1}}{z_2 - z_1}. \end{aligned}$$

По формуле (21) получим искомый оригинал

$$\begin{aligned} f[n] &= \frac{(a_1 z_1 + a_2) z_1^{n-1}}{z_1 - z_2} + \frac{(a_1 z_2 + a_2) z_2^{n-1}}{z_2 - z_1} = \\ &= \frac{(a_1 e^{-\beta} + a_2) e^{-\beta(n-1)}}{e^{-\beta} - e^{-\alpha}} + \frac{(a_1 e^{-\alpha} + a_2) e^{-\alpha(n-1)}}{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}. \end{aligned}$$

Иногда оказывается более удобным определять вычеты, не переходя к  $\mathcal{Z}$ -преобразованию. Тогда формула (21) принимает вид

$$f[n] = \sum_{v=1}^l \text{Res } F^*(q) e^{qn(n-1)} |_{q=q_v}, \quad (24)$$

где  $q_v = \ln z_v$  ( $v = 1, 2, \dots, l$ ) — полюсы изображения  $F^*(q)$ . Общая формула для определения вычетов в полюсе  $q$ , кратности



$r_v \geq 1$  может быть найдена из формулы (23) путем замены переменной  $z$  в соответствии с равенством  $z = e^q$ :

$$\operatorname{Res} F^*(q) e^{q(n-1)} \Big|_{q=q_v} = \frac{1}{(r_v - 1)} \lim_{q \rightarrow q_v} \frac{d^{r_v-1}}{dq^{r_v-1}} \{F^*(q) (e^q - e^{q_v})^{r_v} e^{q(n-1)}\}. \quad (25)$$

Формулы (24), (25) позволяют определить оригинал  $f[n]$  непосредственно по изображению  $F^*(q)$ .

**3. Дискретное преобразование Фурье.** Рассмотрим преобразование решетчатых функций, которое является частным случаем  $\mathcal{D}$ -преобразования, но тем не менее имеет самостоятельное значение. Это преобразование позволяет распространить частотные методы исследования, разработанные для непрерывных систем автоматического регулирования, на дискретные системы.

Пусть абсцисса абсолютной сходимости  $\mathcal{D}$ -преобразования (1) решетчатой функции  $f[n]$  отрицательна,  $\sigma_c < 0$ . Тогда изображение  $F^*(q)$  существует и является аналитической функцией в правой полуплоскости плоскости  $q$  и на мнимой оси. Полагая в формуле (1)  $q = j\bar{\omega}$ , получим

$$F^*(j\bar{\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\bar{\omega}n} f[n]. \quad (26)$$

В этом случае формула обратного  $\mathcal{D}$ -преобразования (13) справедлива при  $c = 0$ :

$$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{0-j\pi}^{0+j\pi} F^*(j\bar{\omega}) e^{j\bar{\omega}n} d\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^*(j\bar{\omega}) e^{j\bar{\omega}n} d\bar{\omega}. \quad (27)$$

Преобразование, определяемое формулой (26), является аналогом преобразования Фурье обычных функций действительного переменного. Это преобразование будем называть *дискретным преобразованием Фурье* решетчатых функций. Функцию  $F^*(j\bar{\omega})$  можно назвать *спектральной характеристикой решетчатой функции  $f[n]$* . Выражение (27) определяет *обратное дискретное преобразование Фурье*.

Преобразование (26) можно представить следующим образом:

$$F^*(j\bar{\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \cos \bar{\omega}n - j \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \sin \bar{\omega}n. \quad (28)$$

Введем обозначения для вещественной и мнимой частей функции  $F^*(j\bar{\omega})$ . Положим

$$\operatorname{Re} F^*(j\bar{\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \cos \bar{\omega}n = U^*(\bar{\omega}), \quad (29)$$

$$\operatorname{Im} F^*(j\bar{\omega}) = - \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \sin \bar{\omega}n = V^*(\bar{\omega}). \quad (30)$$

Из выражений (29) и (30) видно, что вещественная часть функции  $F^*(j\bar{\omega})$  — четная, а мнимая — нечетная. Поэтому значения функции  $F^*(j\bar{\omega})$ , соответствующие положительным и отрицательным значениям параметра  $\bar{\omega}$ , являются комплексно-сопряженными, т. е.

$$F^*(j\bar{\omega}) = \overline{F^*(-j\bar{\omega})}. \quad (31)$$

Следовательно, функция  $F^*(j\bar{\omega})$  полностью определяется своими значениями на отрезке  $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$ .

Умножая левую и правую части равенства (29) на  $\cos \bar{\omega}m$  и интегрируя это равенство по переменной  $\bar{\omega}$  от 0 до  $\pi$ , получим:

$$f[m] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U^*(\bar{\omega}) \cos \bar{\omega}m d\bar{\omega} \quad (m=0, 1, \dots) \quad (32)$$

Умножая теперь левую и правую части равенства (30) на  $\sin \bar{\omega}m$  и интегрируя в тех же пределах, находим

$$f[m] = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V^*(\bar{\omega}) \sin \bar{\omega}m d\bar{\omega} \quad (m=1, 2, \dots). \quad (33)$$

Формулы (32) и (33) определяют коэффициенты ряда Фурье (§ 34) вещественных периодических функций  $U^*(\bar{\omega})$  и  $V^*(\bar{\omega})$ . Таким образом, значения решетчатой функции  $f[n]$  играют роль коэффициентов ряда Фурье для вещественной или мнимой части функции  $F^*(j\bar{\omega})$ .

#### 4. Дискретный ряд Фурье.

Специального рассмотрения требует разложение периодических решетчатых функций в ряд, аналогичный ряду Фурье. Это разложение используется, например, при изучении периодических процессов в нелинейных импульсных системах автоматического регулирования. Рассмотрим периодическую решетчатую функцию  $f[n]$  с периодом  $M$ , равным целому числу

$$f[n + kM] = f[n], \quad (34)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Пример такой функции с периодом  $M = 6$  приведен на рис. 169. Величина  $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{M}$  называется *частотой периодической решетчатой функции  $f[n]$* . Для периодической решетчатой функции справедливо разложение, аналогичное ряду Фурье:

$$f[n] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\bar{\omega}n + b_k \sin k\bar{\omega}n. \quad (35)$$

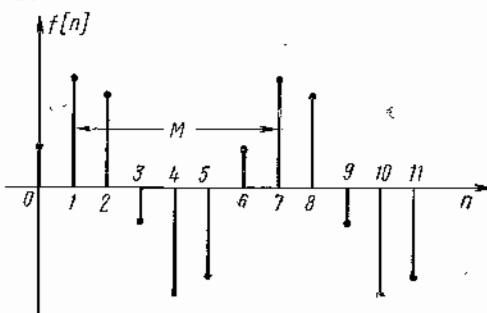


Рис. 169

Особенностью этого разложения является то, что в правой части разложения стоит конечная сумма гармонических решетчатых функций. Число слагаемых  $N$  равно целой части от числа  $\frac{M}{2}$ , т. е.

$$N = \begin{cases} \frac{M}{2}, & \text{если } M \text{ четно,} \\ \frac{M-1}{2}, & \text{если } M \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (36)$$

Равенство (35) можно рассматривать как систему  $M$  алгебраических уравнений при  $n=0, 1, \dots, M-1$  относительно  $2N+1$  неизвестных  $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ . Если  $M$  — нечетно, то по условию (36)  $M=2N+1$  и, следовательно, число уравнений совпадает с числом неизвестных. Если  $M$  — четно, то  $M=2N$  и число уравнений на единицу меньше числа неизвестных. Однако в этом случае

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{M} = \frac{\pi}{N}.$$

Следовательно,  $\sin N\bar{\omega}n = \sin N\frac{\pi}{N}n = 0$  для всех  $n$ , поэтому система уравнений (35) в данном случае не содержит неизвестного  $b_N$ . Таким образом, в обоих случаях число уравнений совпадает с числом неизвестных, которые можно определить, если известны  $M$  последовательных значений решетчатой функции  $f[0], \dots, f[M-1]$ .

Используя формулу (24) § 25, можно записать разложение (35) в виде

$$f[n] = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk\bar{\omega}n}, \quad (37)$$

где  $c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}$  ( $k=1, \dots, N$ ),  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ ,  $c_{-k} = \bar{c}_k$ .

Если  $M$  — четно, то

$$c_N = c_{-N} = \frac{a_N}{2}. \quad (38)$$

Для того чтобы найти коэффициенты разложения  $c_k$ , умножим обе части равенства (37) на функцию  $e^{-jr\bar{\omega}n}$ , где  $r$  — целое число, изменяющееся от  $-N$  до  $N$ , и просуммируем по  $n$  в пределах от  $0$  до  $M-1$ :

$$\sum_{n=0}^{M-1} f[n] e^{-jr\bar{\omega}n} = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{k=-N}^N c_k e^{j(k-r)\bar{\omega}n}.$$

Изменяя порядок суммирования в правой части, будем иметь

$$\sum_{k=-N}^N c_k \sum_{n=0}^{M-1} e^{j(k-r)\bar{\omega}n} = \sum_{k=-N}^N c_k \frac{1 - e^{j(k-r)\bar{\omega}M}}{1 - e^{j(k-r)\bar{\omega}}}.$$

Поскольку  $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{M}$ , то при  $k \neq r$  справедливо равенство

$$\frac{1 - e^{j(k-r)\bar{\omega}M}}{1 - e^{j(k-r)\bar{\omega}}} = 0.$$

Если  $k=r$ , то  $e^{j(k-r)\bar{\omega}n} = 1$  и, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{M-1} e^{j(k-r)\bar{\omega}n} = M.$$

Таким образом,

$$c_r = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} f[n] e^{-jr\bar{\omega}n} \quad (r = -N, -N+1, \dots, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N), \quad (39)$$

где число  $N$  связано с периодом  $M$  соотношением (36).

Совокупность коэффициентов  $c_r$  можно назвать комплексным частотным спектром периодической решетчатой функции  $f[n]$ .

Рассмотрим, какой вид принимает формула (39) для симметричной периодической функции  $f[n]$ , для которой период  $M$  четен и выполняется условие

$$f\left[n + \frac{M}{2}\right] = -f[n] \quad (40)$$

для всех значений  $n$  (см. рис. 169). В этом случае

$$\begin{aligned} c_r &= \frac{1}{M} \left( \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} f[n] e^{-jr\bar{\omega}n} + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} f\left[n + \frac{M}{2}\right] e^{-jr\bar{\omega}\left(n + \frac{M}{2}\right)} \right) = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} (f[n] e^{-jr\bar{\omega}n} - f[n] e^{-jr\bar{\omega}n} e^{-jr\pi}) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} f[n] e^{-jr\bar{\omega}n} (1 - e^{-jr\pi}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что коэффициенты  $c_r$ , соответствующие четным индексам  $r=0, \pm 2, \dots$ , равны нулю, а коэффициенты, соответствующие нечетным индексам, определяются формулой

$$c_r = \frac{2}{M} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-jr\bar{\omega}n} \quad (r = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm N). \quad (41)$$

Коэффициенты  $c_{\pm N}$  равны нулю, если  $N$  четно. Если же  $N$  — нечетно, то из формулы (41) мы, в частности, получим

$$c_{\pm N} = \frac{2}{M} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{\mp j\pi n}. \quad (42)$$

Итак, разложение симметричной функции  $f[n]$  в ряд (37) будет содержать только нечетные гармоники. В этом случае принято обозначать ряд (37) со штрихом у знака суммы:

$$f[n] = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk\omega n}. \quad (43)$$

Для четного  $N$  суммирование производится в пределах от  $-N+1$  до  $N-1$ , поэтому выражение (43) можно записать следующим образом:

$$f[n] = \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_k e^{jk\omega n}, \quad (44)$$

где

$$N_1 = \begin{cases} N-1, & \text{если } N \text{ четно,} \\ N, & \text{если } N \text{ нечетно.} \end{cases}$$

### § 53. СВОЙСТВА ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

**1. Линейность  $\mathcal{D}$ -преобразования.** Дискретное преобразование Лапласа устанавливает соответствие между решетчатыми функциями — оригиналами  $f[n]$  и их изображениями  $F^*(q)$ . Различным операциям, совершаемым над решетчатыми функциями, соответствуют при этом определенные операции, совершаемые над их изображениями. Начнем рассмотрение этого вопроса с теоремы о линейности  $\mathcal{D}$ -преобразования.

**Теорема 1.** Если решетчатые функции  $f_1[n], f_2[n], \dots, f_k[n]$  являются оригиналами и их изображения есть соответственно  $F_1^*(q), F_2^*(q), \dots, F_k^*(q)$ , то справедливо равенство

$$\mathcal{D} \left\{ \sum_{v=1}^k \lambda_v f_v[n] \right\} = \sum_{v=1}^k \lambda_v F_v^*(q), \quad (1)$$

где  $\lambda_v$  — произвольные постоянные.

Это утверждение легко доказать, подставляя выражение  $\sum_{v=1}^k \lambda_v f_v[n]$

в формулу  $\mathcal{D}$ -преобразования (1) § 52.

Рассмотрим пример, в котором используется свойство линейности  $\mathcal{D}$ -преобразования.

**Пример 1.** Найти изображения тригонометрических решетчатых функций  $\sin \bar{\omega}n$  и  $\cos \bar{\omega}n$  ( $n \geq 0$ ).

В соответствии с теоремой 1 имеем

$$\mathcal{D} \{ \sin \bar{\omega}n \} = \frac{1}{2j} \mathcal{D} \{ e^{j\bar{\omega}n} - e^{-j\bar{\omega}n} \} = \frac{1}{2j} [ \mathcal{D} \{ e^{j\bar{\omega}n} \} - \mathcal{D} \{ e^{-j\bar{\omega}n} \} ].$$

Используя формулу (8) § 52, получим окончательный результат

$$\mathcal{D} \{ \sin \bar{\omega}n \} = \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^q}{e^q - e^{j\bar{\omega}}} - \frac{e^q}{e^q - e^{-j\bar{\omega}}} \right] = \frac{e^q \sin \bar{\omega}}{e^{2q} - 2e^q \cos \bar{\omega} + 1}. \quad (2)$$

Аналогично найдем

$$\mathcal{D} \{ \cos \bar{\omega}n \} = \frac{1}{2} [ \mathcal{D} \{ e^{j\bar{\omega}n} \} + \mathcal{D} \{ e^{-j\bar{\omega}n} \} ] = \frac{e^{2q} - e^q \cos \bar{\omega}}{e^{2q} - 2e^q \cos \bar{\omega} + 1}. \quad (3)$$

**2. Смещение в области оригиналов и в области изображений.** Прежде чем формулировать теорему о смещении в области оригиналов, необходимо определить смещенную функцию  $f[n+k]$  так, чтобы она являлась оригиналом, если  $f[n]$  — оригинал. При  $k \leq 0$  это условие, очевидно, выполнено. Однако при  $k > 0$  значения  $f[n+k]$  оказываются отличными от нуля при  $n < 0$ . Условимся в этом случае под смещенными функциями понимать функции, равные  $f[n+k]$  при  $n \geq 0$  и тождественно равные нулю при отрицательных значениях аргумента  $n$ , т. е.

$$f[n+k] \equiv 0 \quad \text{при } n < 0. \quad (4)$$

При этом предположении справедлива следующая теорема о смещении в области оригиналов:

**Теорема 2.** Если функция  $f[n]$  является оригиналом и  $F^*(q)$  — ее изображение, то  $\mathcal{D}$ -преобразование смещенной решетчатой функции  $f[n+k]$  определяется следующими равенствами:

$$\mathcal{D} \{ f[n+k] \} = e^{qk} \{ F^*(q) - \sum_{m=0}^{k-1} f[m] e^{-qm} \} \quad \text{при } k > 0, \quad (5)$$

$$\mathcal{D} \{ f[n+k] \} = e^{qk} F^*(q) \quad \text{при } k < 0. \quad (6)$$

**Доказательство.** Воспользуемся формулой (1) § 52. При условии  $k > 0$  будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \{ f[n+k] \} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n+k] = \sum_{m=k}^{\infty} e^{q(k-m)} f[m] = \\ &= e^{qk} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} e^{-qm} f[m] - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-qm} f[m] \right\} = e^{qk} \left\{ F^*(q) - \sum_{m=0}^{k-1} f[m] e^{-qm} \right\}. \end{aligned}$$

Полученное равенство доказывает справедливость формулы (5).

Положим теперь  $k < 0$ . С учетом условия (4) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \{ f[n+k] \} &= e^{qk} \left\{ \sum_{m=k}^{\infty} e^{-qm} f[m] \right\} = e^{qk} \left\{ \sum_{m=k}^{-1} e^{-qm} f[m] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-qm} f[m] \right\} = e^{qk} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-qm} f[m] = e^{qk} F^*(q). \end{aligned}$$

Таким образом, формула (6) справедлива.

Теорема доказана.

Если, в частности, равны нулю значения решетчатой функции  $f[0], f[1], \dots, f[k-1]$ , то формулы (5) и (6) совпадают. В этом случае мы получим

$$\mathcal{D} \{ f[n+k] \} = e^{qk} \mathcal{D} \{ f[n] \}. \quad (7)$$

**Пример 2.** Определить  $\mathcal{D}$ -преобразование функции  $1[n+k]$ , где  $k$  — целое число.

Если  $k$  отрицательно, то по формуле (6) найдем:

$$\mathcal{D}\{1[n+k]\} = e^{qk} \mathcal{D}\{1[n]\} = e^{qk} \frac{e^q}{e^q - 1} = \frac{e^{q(1+k)}}{e^q - 1}. \quad (8)$$

Если же  $k$  положительно, то следует воспользоваться формулой (5), так как значения рассматриваемой решетчатой функции при  $n=0, 1, \dots, k-1$  не равны нулю; получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{1[n+k]\} &= e^{qk} \left\{ \mathcal{D}\{1[n]\} - \sum_{m=0}^{k-1} 1[m] e^{-qm} \right\} = \\ &= e^{qk} \frac{e^q}{e^q - 1} - e^{qk} \frac{1 - e^{-qk}}{1 - e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - 1}. \end{aligned}$$

Теорема 2 позволяет определить изображение произвольной периодической решетчатой функции. Рассмотрим  $\mathcal{D}$ -преобразование периодической решетчатой функции  $\varphi[n]$  с периодом  $M$ . Функция  $\varphi[n]$  удовлетворяет условию  $\varphi[n] = \varphi[n+kM]$ , где  $k$  — положительное целое число. По формуле (5) найдем:

$$\mathcal{D}\{\varphi[n]\} = \mathcal{D}\{\varphi[n+kM]\} = e^{qkM} \left\{ \Phi^*(q) - \sum_{r=0}^{Mk-1} e^{-qr} \varphi[r] \right\}. \quad (9)$$

где  $\Phi^*(q) = \mathcal{D}\{\varphi[n]\}$ .

Равенство (9) можно переписать следующим образом:

$$\Phi^*(q) (1 - e^{qMk}) = -e^{qMk} \sum_{r=0}^{Mk-1} e^{-qr} \varphi[r]. \quad (10)$$

Положим в этой формуле  $k=1$ , тогда

$$\Phi^*(q) = \frac{e^{qM}}{e^{qM} - 1} \sum_{r=0}^{M-1} e^{-qr} \varphi[r]. \quad (11)$$

Определим теперь функцию  $f[n]$ , совпадающую с функцией  $\varphi[n]$  на протяжении одного периода в точках  $n=0, 1, \dots, M-1$  и равную нулю при всех остальных значениях аргумента  $n$ .

Тогда мы сможем определить изображение периодической функции  $\varphi[n]$  через изображение функции  $f[n]$  по формуле (11), которая примет следующий вид:

$$\Phi^*(q) = \frac{e^{qM}}{e^{qM} - 1} F^*(q), \quad (12)$$

где  $F^*(q) = \mathcal{D}\{f[n]\}$ .

Так, для решетчатой периодической функции, изображенной на рис. 170, имеем  $M=8$ ;

$$f[n] = 1[n] - 2 \cdot 1[n-4] + 1[n-8].$$

Учитывая формулу (8), получим

$$F^*(q) = \frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{2e^{-4q}}{e^q - 1} + \frac{e^{-8q}}{e^q - 1} = \frac{e^q(1 - e^{-4q})^2}{e^q - 1}.$$

По формуле (12) найдем изображение заданной периодической решетчатой функции  $f[n]$ :

$$\Phi^*(q) = \frac{e^{8q}}{e^{8q} - 1} \frac{e^q(1 - e^{-4q})^2}{e^q - 1} = \frac{e^q(e^{4q} - 1)}{(e^q - 1)(1 + e^{4q})}.$$

Перейдем к теореме о смещении в области изображений.

**Теорема 3.** Если решетчатая функция  $f[n]$  является оригиналом и  $F^*(q)$  — ее изображение, то справедливо равенство

$$F^*(q \pm a) = \mathcal{D}\{e^{\mp an} f[n]\}. \quad (13)$$

**Доказательство.** Применяя формулу  $\mathcal{D}$ -преобразования (1) § 52, получим

$$F^*(q \pm a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(q \pm a)n} f[n] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} (e^{\mp an} f[n]) = \mathcal{D}\{e^{\mp an} f[n]\},$$

что и доказывает теорему.

**Пример 3.** Найти изображение решетчатой функции  $f[n] = e^{2n} \cos \bar{\omega} n$ .

По формуле (13) имеем

$$\mathcal{D}\{e^{2n} \cos \bar{\omega} n\} = \frac{e^{2(q-a)} - e^{q-a} \cos \bar{\omega}}{e^{2(q-a)} - 2e^{q-a} \cos \bar{\omega} + 1} = \frac{e^{2q} - e^{q+a} \cos \bar{\omega}}{e^{2q} - 2e^{q+a} \cos \bar{\omega} + e^{2a}}. \quad (14)$$

Аналогично найдем

$$\mathcal{D}\{e^{2n} \sin \bar{\omega} n\} = \frac{e^{q+a} \sin \bar{\omega}}{e^{2q} - 2e^{q+a} \cos \bar{\omega} + e^{2a}}. \quad (15)$$

**3. Изображения конечных разностей и сумм решетчатых функций.** Справедлива следующая теорема об изображении первой разности решетчатой функции:

**Теорема 4.** Если решетчатая функция  $f[n]$  является оригиналом и  $F^*(q)$  — ее изображение, то первая разность  $\Delta f[n]$  функции  $f[n]$  также является оригиналом, причем

$$\mathcal{D}\{\Delta f[n]\} = (e^q - 1) F^*(q) - e^q f[0]. \quad (16)$$

**Доказательство.** Используя теоремы 1 и 2, а также определение первой разности, получим, что  $\Delta f[n]$  — оригинал и

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{\Delta f[n]\} &= \mathcal{D}\{f[n+1] - f[n]\} = e^q \{F^*(q) - f[0]\} - F^*(q) = \\ &= (e^q - 1) F^*(q) - e^q f[0], \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (16).

Теорема доказана.

Если функция  $f[n]$  допускает  $\mathcal{D}$ -преобразование, то ее разность произвольного порядка  $k$  также допускает  $\mathcal{D}$ -преобразование, поскольку разность  $\Delta^k f[n]$  представима в соответствии с формулой (6) § 48 в виде линейной комбинации решетчатых функций

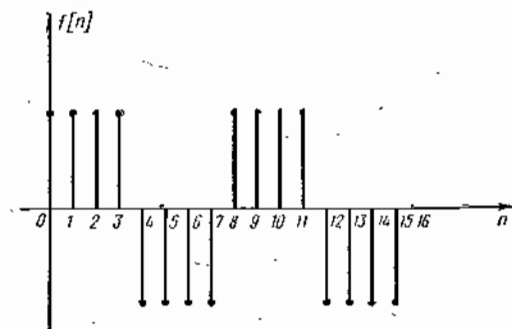


Рис. 170

$f[n], f[n+1], \dots, f[n+k]$ . При этом справедливы следующие формулы, которые могут быть получены путем многократного применения формулы (16):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{\Delta^2 f[n]\} &= (e^q - 1)^2 F(q) - e^q (e^q - 1) f[0] - e^q \Delta f[0], \\ \mathcal{D}\{\Delta^3 f[n]\} &= (e^q - 1)^3 F^*(q) - e^q (e^q - 1)^2 f[0] - \\ &\quad - e^q (e^q - 1) \Delta f[0] - e^q \Delta^2 f[0], \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}\{\Delta^k f[n]\} = (e^q - 1)^k F^*(q) - e^q \sum_{v=0}^{k-1} (e^q - 1)^{k-1-v} \Delta^v f[0]. \quad (17)$$

Заметим, что в том случае, когда решетчатая функция обращается в ноль при  $n=0, 1, \dots, k-1$ , формула (17) упрощается:

$$\mathcal{D}\{\Delta^k f[n]\} = (e^q - 1)^k F^*(q). \quad (18)$$

**Пример 4.** Найти  $\mathcal{D}$ -преобразование первой разности экспоненциальной решетчатой функции  $e^{an}$ .  
По формуле (16) получим

$$\mathcal{D}\{\Delta e^{an}\} = (e^q - 1) \frac{e^q}{e^q - e^a} - e^q = \frac{e^q (e^a - 1)}{e^q - e^a}.$$

Следующая теорема определяет изображение суммы значений решетчатой функции:

**Теорема 5.** Если решетчатая функция  $f[n]$  является оригиналом и  $F^*(q)$  — ее изображение, то сумма  $\sum_{m=0}^{n-1} f[m]$  также является оригиналом, причем справедливо равенство

$$\mathcal{D}\left\{\sum_{m=0}^{n-1} f[m]\right\} = \frac{F^*(q)}{e^q - 1}. \quad (19)$$

**Доказательство.** Воспользуемся следующим равенством (см. § 48)

$$\Delta \sum_{m=0}^{n-1} f[m] = f[n] \quad (n=1, 2, \dots).$$

Применяя к обеим частям этого равенства  $\mathcal{D}$ -преобразование и учитывая теорему 4, получим

$$\mathcal{D}\{f[n]\} = \mathcal{D}\left\{\Delta \sum_{m=0}^{n-1} f[m]\right\} = (e^q - 1) \mathcal{D}\left\{\sum_{m=0}^{n-1} f[m]\right\}.$$

Из найденного выражения следует формула (19). Осталось доказать, что сумма  $\sum_{m=0}^{n-1} f[m]$  является оригиналом. Учитывая, что для решетчатой функции  $f[n]$  выполнено условие (9) § 52:

$$|f[n]| < M e^{\sigma_0 n} \quad (\sigma_0 \geq 0),$$

будем иметь

$$\left| \sum_{m=0}^{n-1} f[m] \right| \leq M \sum_{m=0}^{n-1} e^{\sigma_0 m} = M \frac{e^{\sigma_0 n} - 1}{e^{\sigma_0} - 1} < M_1 e^{\sigma_0 n} \quad \left( M_1 = \frac{1}{e^{\sigma_0} - 1} \right).$$

Таким образом, условие (9) § 52 выполнено и для суммы  $\sum_{m=0}^{n-1} f[m]$ . Следовательно, эта сумма является оригиналом.

Теорема полностью доказана.

Из теоремы 5 следует, что  $k$ -кратному суммированию функции  $f[n]$ , являющейся оригиналом, соответствует деление изображения  $F^*(q) = \mathcal{D}\{f[n]\}$  на  $(e^q - 1)^k$ , т. е.

$$\mathcal{D}\left\{ \sum_{n_k=0}^{n-1} \sum_{n_{k-1}=0}^{n_k-1} \dots \sum_{n_1=0}^{n_2-1} f[n_1] \right\} = \frac{F^*(q)}{(e^q - 1)^k}. \quad (20)$$

**Пример 5.** Найти изображение степенной решетчатой функции  $n^k$ .

При  $k=1$  образуем сумму  $\sum_{m=0}^{n-1} 1[m] = n$ . Применяя равенство (19), определим

$$\mathcal{D}\left\{ \sum_{m=0}^{n-1} 1[m] \right\} = \mathcal{D}\{n\} = \frac{1}{e^q - 1} \mathcal{D}\{1[m]\} = \frac{e^q}{(e^q - 1)^2}. \quad (21)$$

Заметим, что при  $k=2$  справедливо равенство

$$\sum_{m=0}^{n-1} \Delta m^2 = \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)^2 - m^2 = n^2;$$

с другой стороны,

$$\sum_{m=0}^{n-1} (m+1)^2 - m^2 = \sum_{m=0}^{n-1} (2m+1).$$

По формулам (19), (21) получим

$$\mathcal{D}\left\{ \sum_{m=0}^{n-1} (2m+1) \right\} = \frac{2}{e^q - 1} \mathcal{D}\{n\} + \mathcal{D}\{1\} = \frac{2e^q}{(e^q - 1)^2} + \frac{e^q}{(e^q - 1)^2} = \frac{e^q (e^q + 1)}{(e^q - 1)^2}.$$

Итак,

$$\mathcal{D}\{n^2\} = \frac{e^q (e^q + 1)}{(e^q - 1)^2}. \quad (22)$$

Повторяя этот процесс, можно найти изображение степенной функции  $n^k$ , которое имеет следующий вид:

$$\mathcal{D}\{n^k\} = \frac{e^q}{(e^q - 1)^{k+1}} R_{k-1}(e^q), \quad (23)$$

где  $R_{k-1}(e^q)$  — полином относительно  $e^q$  степени  $k-1$ .

**Пример 6.** Найти изображение факториальной функции  $n^{(k)}$ .  
Рассмотрим сначала функцию  $n^{(2)} = n(n-1)$ . Учитывая соотношение

$$\sum_{m=0}^{n-1} \Delta m^{(2)} = \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)^{(2)} - m^{(2)} = n^{(2)}$$

и формулу для разности факториальной функции

$$\Delta m^{(2)} = (m+1)m - m(m-1) = 2m,$$

получим

$$\mathcal{D}\{n^{(2)}\} = \mathcal{D}\left\{2 \sum_{m=0}^{n-1} m\right\} = \frac{2e^q}{(e^q - 1)^2}. \quad (24)$$

Для функции  $n^{(3)} = n(n-1)(n-2)$  аналогично найдем

$$\sum_{m=0}^{n-1} \Delta m^{(3)} = n^{(3)};$$

$$\Delta m^{(3)} = (m+1)m(m-1) - m(m-1)(m-2) = 3m(m-1) = 3m^{(2)}.$$

Используя эти соотношения, определим изображение функции  $n^{(3)}$ :

$$\mathcal{D}\{n^{(3)}\} = \mathcal{D}\left\{\sum_{m=0}^{n-1} \Delta m^{(3)}\right\} = \frac{1}{e^q - 1} \mathcal{D}\{\Delta n^{(3)}\} =$$

$$= \frac{1}{e^q - 1} \mathcal{D}\{3n^{(2)}\} = \frac{6e^q}{(e^q - 1)^3}. \quad (25)$$

Для произвольного  $k \geq 1$  получим

$$\mathcal{D}\{n^{(k)}\} = \frac{k! e^q}{(e^q - 1)^{k+1}}. \quad (26)$$

**4. Умножение изображений и оригиналов.** Определим свертку  $f[n]$  решетчатых функций  $f_1[n]$  и  $f_2[n]$  по формуле

$$f[n] = \sum_{m=0}^n f_1[n-m] f_2[m]. \quad (27)$$

С учетом этого определения сформулируем следующую теорему:

*Теорема 6. Если решетчатые функции  $f_1[n]$  и  $f_2[n]$  являются оригиналами, то свертка этих функций также является оригиналом, причем изображение свертки равно произведению изображений  $F_1^*(q)$  и  $F_2^*(q)$ , т. е.*

$$\mathcal{D}\left\{\sum_{m=0}^n f_1[n-m] f_2[m]\right\} = F_1^*(q) F_2^*(q), \quad (28)$$

где  $F_1^*(q) = \mathcal{D}\{f_1[n]\}$ ,  $F_2^*(q) = \mathcal{D}\{f_2[n]\}$ .

*Доказательство.* Для того чтобы получить соотношение (28) достаточно выполнить умножение изображений

$$F_1^*(q) F_2^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1[n] e^{-qn} \sum_{m=0}^{\infty} f_2[m] e^{-qm}.$$

В результате почленного перемножения двух рядов получим ряд, состоящий из всех попарных произведений

$$f_1[n] e^{-q(n+m)} f_2[m] \quad (n=0, 1, \dots; m=0, 1, \dots).$$

Группируя члены полученного ряда при равных степенях  $e^{-q}$ , получим ряд следующего вида:

$$f_1[0] f_2[0] + e^{-q} (f_1[0] f_2[1] + f_2[0] f_1[1]) + e^{-2q} (f_1[0] f_2[2] +$$

$$+ f_1[1] f_2[1] + f_1[2] f_2[0]) + \dots + e^{-nq} \sum_{m=0}^n f_1[n-m] f_2[m] + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq} \sum_{m=0}^n f_1[n-m] f_2[m] = \mathcal{D}\left\{\sum_{m=0}^n f_1[n-m] f_2[m]\right\},$$

что совпадает с равенством (28).

Остается доказать, что свертка функций, являющихся оригиналами, также является оригиналом. Пусть выполнены условия

$$|f_1[n]| < M_1 e^{\sigma_1 n}, \quad |f_2[n]| < M_2 e^{\sigma_2 n};$$

тогда можно получить следующую оценку для свертки функций  $f_1[n]$  и  $f_2[n]$ :

$$\left| \sum_{m=0}^n f_1[n-m] f_2[m] \right| \leq \sum_{m=0}^n M_1 M_2 e^{\sigma_1(n-m)} e^{\sigma_2 m}.$$

Выберем  $\sigma_0$  — наибольшее из чисел  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , тогда полученное неравенство можно продолжить следующим образом:

$$M_1 M_2 \sum_{m=0}^n e^{\sigma_1(n-m)} e^{\sigma_2 m} \leq M_1 M_2 \sum_{m=0}^n e^{\sigma_0(n-m) + \sigma_0 m} = M_1 M_2 e^{\sigma_0 n} (n+1).$$

Заметим, что при  $n \geq 0$  для любого сколь угодно малого числа  $\epsilon \geq 0$   $n+1 < M_3 e^{\epsilon n}$ . Следовательно, справедливо неравенство

$$e^{\sigma_0 n} (n+1) < M_3 e^{(\sigma_0 + \epsilon)n}.$$

Итак,

$$\left| \sum_{m=0}^n f_1[n-m] f_2[m] \right| < M_1 M_2 M_3 e^{(\sigma_0 + \epsilon)n}.$$

Из этого неравенства следует, что свертка функций  $f_1[n]$  и  $f_2[n]$  является оригиналом; тем самым теорема полностью доказана.

**Пример 7.** Найти  $\mathcal{D}$ -преобразование свертки решетчатых функций  $f_1[n] = 1[n]$  и  $f_2[n] = e^{-an}$ .

По формуле (28) с учетом выражений (7) и (8) § 52 получим

$$\mathcal{D}\left\{\sum_{m=0}^n 1[m] e^{-a(n-m)}\right\} = \frac{e^q}{e^q - 1} \frac{e^q}{e^q - e^{-a}}.$$

**Пример 8.** Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F^*(q) = \frac{e^{2q}}{(e^q - e^{-a})^2}.$$



Представим эту функцию в виде произведения:

$$\frac{e^{2q}}{(e^q - e^{-q})^2} = \frac{e^q}{(e^q - e^{-q})} \cdot \frac{e^q}{(e^q - e^{-q})}.$$

Определяя оригиналы, соответствующие сомножителям по формуле (8) § 52, найдем оригинал, соответствующий их произведению по формуле (28):

$$\mathcal{D}^{-1} \left\{ \frac{e^{2q}}{(e^q - e^{-q})^2} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-am} e^{-a(n-m)} = e^{-an} (n+1).$$

Рассмотрим теперь теорему об умножении оригиналов.

**Теорема 7.** Если решетчатые функции  $f_1[n]$  и  $f_2[n]$  являются оригиналами, то их произведение  $f[n] = f_1[n] f_2[n]$  также является оригиналом и выполняется равенство

$$\mathcal{D} \{f[n]\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F_1^*(s) F_2^*(q-s) ds, \quad (29)$$

где  $F_1^*(q) = \mathcal{D} \{f_1[n]\}$ ,  $F_2^*(q) = \mathcal{D} \{f_2[n]\}$ . При этом  $\operatorname{Re} q - \sigma_2 > c > \sigma_1$ , где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — показатели роста функций  $f_1[n]$  и  $f_2[n]$  соответственно.

**Доказательство.** Поскольку решетчатые функции  $f_1[n]$  и  $f_2[n]$  являются оригиналами, выполняются неравенства

$$|f_1[n]| < M_1 e^{\sigma_1 n}; \quad |f_2[n]| < M_2 e^{\sigma_2 n};$$

тогда

$$|f_1[n] f_2[n]| = |f[n]| < M_1 M_2 e^{(\sigma_1 + \sigma_2)n} = M e^{\sigma n},$$

где  $M = M_1 M_2$ ;  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ . Отсюда следует, что функция  $f[n]$  является оригиналом с показателем роста  $\sigma$ .

Теперь соотношение (29) можно получить непосредственным применением  $\mathcal{D}$ -преобразования к функции  $f[n]$ . Используя формулу прямого  $\mathcal{D}$ -преобразования (1) § 52, а также формулу обращения (13) § 52, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \{f_1[n] f_2[n]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f_1[n] f_2[n] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F_1^*(s) e^{sn} ds f_2[n] = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F_1^*(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(s-q)} f_2[n] ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F_1^*(s) F_2^*(q-s) ds, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (29). Использованная здесь формула обратного  $\mathcal{D}$ -преобразования справедлива при условии  $c > \sigma_1$ . Изменение порядка суммирования и интегрирования, которое мы применили в процессе вывода формулы (29), — законно, если сходится

равномерно ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{n(s-q)} f_2[n]$ . Для этого, очевидно, должно со-

блюдаться условие  $\operatorname{Re}(q-s) > \sigma_2$ , или  $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} q - \sigma_2$ . Учитывая неравенство  $\operatorname{Re} s > c > \sigma_1$ , получим условие  $\operatorname{Re} q - \sigma_2 > c > \sigma_1$ , содержащееся в формулировке теоремы.

Теорема полностью доказана.

Заметим, что в выражении (29) можно выбрать величину  $c$  сколь угодно близкой к  $\sigma_1$ . Поэтому изображение  $F^*(q) = \mathcal{D} \{f_1[n] f_2[n]\}$  определено в области  $\operatorname{Re} q > \sigma$ .

Теорема полностью доказана.

Выражение, стоящее в правой части равенства (29), является сверткой в комплексной области. Таким образом, произведению оригиналов соответствует свертка изображений.

**5. Дифференцирование и интегрирование изображений.** Рассмотрим теорему о дифференцировании изображения  $F^*[q]$  по аргументу  $q$ .

**Теорема 8.** Если решетчатая функция  $f[n]$  является оригиналом и  $F^*(q)$  — ее изображение, то справедливо равенство

$$\frac{dF^*(q)}{dq} = \mathcal{D} \{-nf[n]\}. \quad (30)$$

**Доказательство.** Дифференцируя почленно ряд (1) § 52 по аргументу  $q$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dq} (e^{-qn}) f[n] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-n) f[n] e^{-qn} = \mathcal{D} \{-nf[n]\}, \end{aligned}$$

что совпадает с равенством (30). При выводе равенства (30) мы, однако, изменили порядок операций дифференцирования и суммирования, что должно быть обосновано. Почленное дифференцирование ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n]$  возможно, если ряд, составленный из произ-

водных, сходится равномерно. Для того чтобы убедиться в этом, определим абсциссу абсолютной сходимости  $\mathcal{D}$ -преобразования (30). В соответствии с теоремой 1 § 52 имеем

$$\sigma_c = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |f[n]|}.$$

Рассмотрим предел, стоящий под знаком логарифма:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |f[n]|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{|f[n]|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f[n]|}.$$

Следовательно, абсцисса абсолютной сходимости ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n] n$  совпадает с абсциссой абсолютной сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n]$ , поэтому ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n] n$  сходится равномерно в ло-



бой области  $\operatorname{Re} q \geq \sigma_0 > \sigma_c$ . Таким образом, почленное дифференцирование ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n]$  обосновано.

Теорема доказана.

Обобщением формулы (30) является следующая формула, определяющая производную изображения  $F^*(q)$  порядка  $k \geq 1$ :

$$\frac{d^k F^*(q)}{dq^k} = \mathcal{D} \{(-n)^k f[n]\}. \quad (31)$$

**Пример 9.** Найди с помощью формулы (31)  $\mathcal{D}$ -преобразование степенной функции  $n^k$ .  
Имеем

$$\mathcal{D} \{n^k\} = \mathcal{D} \{n^k 1[n]\} = (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} \mathcal{D} \{1[n]\} = (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} \left( \frac{e^q}{e^q - 1} \right).$$

В частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \{n\} &= -\frac{d}{dq} \left\{ \frac{e^q}{e^q - 1} \right\} = -\frac{e^q(e^q - 1) - e^{2q}}{(e^q - 1)^2} = \frac{e^q}{(e^q - 1)^2}, \\ \mathcal{D} \{n^2\} &= -\frac{d}{dq} \left\{ \frac{e^q}{(e^q - 1)^2} \right\} = -\frac{e^q(e^q - 1)^2 - e^{2q} \cdot 2(e^q - 1)e^q}{(e^q - 1)^4} = \\ &= -\frac{e^q(-e^{2q} + 1)}{(e^q - 1)^4} = \frac{e^q(e^q + 1)}{(e^q - 1)^3}. \end{aligned}$$

**Пример 10.** Найди изображение решетчатой функции  $ne^{an}$ .  
По формуле (30) получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \{ne^{an}\} &= -\frac{d}{dq} \mathcal{D} \{e^{an}\} = -\frac{d}{dq} \cdot \frac{e^q}{e^q - e^a} = \\ &= -\frac{e^q(e^q - e^a) - e^q e^a}{(e^q - e^a)^2} = \frac{e^{a+q}}{(e^q - e^a)^2}. \end{aligned}$$

Наряду с теоремой 8 находит применение теорема о дифференцировании изображения по аргументу  $e^{-q}$ .

**Теорема 9.** Если решетчатая функция  $f[n]$  является оригиналом и  $F^*(q)$  — ее изображение, то справедливо равенство

$$\frac{dF^*(q)}{de^{-q}} = \mathcal{D} \{(n+1)f[n+1]\}. \quad (32)$$

**Доказательство.** Дифференцируя изображение  $F^*(q)$  по аргументу  $e^{-q}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{de^{-q}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n] &= \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-q(n-1)} f[n] = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-q(n-1)} f[n] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)e^{-qm} f[m+1] = \mathcal{D} \{(n+1)f[n+1]\}, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (32). Обоснование допустимости почленного дифференцирования под знаком суммы может быть произведено так же, как в предыдущей теореме.

С учетом этого замечания теорема доказана.

Дифференцируя изображение  $k$  раз по  $e^{-q}$ , получим общую формулу

$$\frac{d^k F^*(q)}{d(e^{-q})^k} = \mathcal{D} \{(n+k)^k f[n+k]\}. \quad (33)$$

Учитывая теорему 2 о смещении в области оригиналов, эту формулу можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{D} \{n^{(k)} f[n]\} = e^{-qk} \frac{d^k F^*(q)}{d(e^{-q})^k}. \quad (34)$$

**Пример 11.** Определить изображение факториальной функции  $f[n] = n^{(k)}$ .  
Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \{n^{(k)}\} &= \mathcal{D} \{n^{(k)} 1[n]\} = e^{-qk} \frac{d^k}{d(e^{-q})^k} \left\{ \frac{e^q}{e^q - 1} \right\} = \\ &= e^{-qk} \frac{d^k}{d(e^{-q})^k} \left\{ \frac{1}{1 - e^{-q}} \right\} = \frac{k! e^{-qk}}{(1 - e^{-q})^{k+1}} = \frac{k! e^{-q}}{(e^q - 1)^{k+1}}, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (26).

**Пример 12.** Определить изображение функции  $f[n] = n^{(k)} e^{an}$ .  
По формуле (34) получим

$$\mathcal{D} \{n^{(k)} e^{an}\} = e^{-qk} \frac{d^k}{d(e^{-q})^k} \left\{ \frac{e^q}{e^q - e^a} \right\} = \frac{k! e^q e^{ka}}{(e^q - e^a)^{k+1}}. \quad (35)$$

Перейдем к вопросу об интегрировании в области изображений.

**Теорема 10.** Если функция  $f[n]$  является оригиналом и обращается в ноль при  $n=0$ , то существует интеграл от изображения  $F^*(q)$  этой функции, определяемый равенством

$$\int_q F^*(q) dq = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} \frac{f[n]}{n}, \quad (36)$$

где, интегрирование осуществляется по любому контуру, соединяющему точку  $q$  с бесконечно удаленной точкой и принадлежащему области, в которой функция  $F^*(q)$  является аналитической.

**Доказательство.** Интегрируя равенство

$$F^*(q) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} f[n]$$

по контуру, соединяющему точку  $q$  с бесконечно удаленной точкой и принадлежащему области  $\operatorname{Re} q > \sigma_c$ , где  $\sigma_c$  — абсцисса абсолютной сходимости, получим

$$\int_q F^*(q) dq = \int_q \sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} f[n] dq = \sum_{n=1}^{\infty} \int_q e^{-qn} f[n] dq = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} \frac{f[n]}{n},$$

что совпадает с равенством (36). Перестановка операций суммирования и интегрирования законна, поскольку при  $n \geq 1$  выполняются неравенства

$$\left| \frac{f[n]}{n} \right| < |f[n]| < M e^{\sigma_c n}$$

и, следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} \frac{f[n]}{n}$  сходится равномерно в любой области  $\text{Re } q \geq \sigma_0 > \sigma_c$ .

Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что правая часть равенства (36) не может быть рассмотрена как  $\mathcal{D}$ -преобразование решетчатой функции  $\frac{f[n]}{n}$  при тех условиях, для которых сформулирована теорема, так как эта функция не определена в точке  $n=0$ . Однако иногда решетчатую функцию  $\frac{f[n]}{n}$  можно доопределить при  $n=0$ , рассматривая предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{f(\bar{t})}{\bar{t}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left. \frac{f[n+\varepsilon]}{n+\varepsilon} \right|_{n=0},$$

где  $f(\bar{t})$  — непрерывная функция, соответствующая решетчатой функции  $f[n]$ . Если этот предел существует, то положим, что

$$\left. \frac{f[n]}{n} \right|_{n=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left. \frac{f[n+\varepsilon]}{n+\varepsilon} \right|_{n=0}. \quad (37)$$

С учетом равенства (37) будем иметь

$$\mathcal{D} \left\{ \frac{f[n]}{n} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \frac{f[n]}{n} = \left. \frac{f[n]}{n} \right|_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} \frac{f[n]}{n}.$$

Прибавляя величину  $\left. \frac{f[n]}{n} \right|_{n=0}$  к обеим частям равенства (36), получим

$$\mathcal{D} \left\{ \frac{f[n]}{n} \right\} = \int_q F^*(q) dq + \left. \frac{f[n]}{n} \right|_{n=0}. \quad (38)$$

Таким образом, мы получаем еще одну формулировку теоремы об интегрировании изображений.

Если изображение  $F^*(q)$  решетчатой функции  $f[n]$  существует, а также существует предел (37), то деление оригинала  $f[n]$  на  $n$  соответствует интегрированию изображения  $F^*(q)$  по контуру, соединяющему точку  $q$  с бесконечно удаленной точкой и принадлежащему области  $\text{Re } q > \sigma_c$  с точностью до постоянного слагаемого.

Если, в частности, предел (37) равен нулю, то формула (38) приобретает следующий вид:

$$\mathcal{D} \left\{ \frac{f[n]}{n} \right\} = \int_q F^*(q) dq. \quad (39)$$

Рассмотрим несколько примеров на применение этой теоремы.

**Пример 13.** Задана функция  $f[n] = \sin \bar{\omega} n$ . Определить  $\mathcal{D} \left\{ \frac{\sin \bar{\omega} n}{n} \right\}$ .

В данном случае существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\sin \bar{\omega} \varepsilon}{\varepsilon} = \bar{\omega},$$

поэтому справедлива формула (38), в соответствии с которой

$$\mathcal{D} \left\{ \frac{\sin \bar{\omega} n}{n} \right\} = \int_q \frac{e^q \sin \bar{\omega}}{e^{2q} - 2e^q \cos \bar{\omega} + 1} dq + \bar{\omega} = \frac{1}{\sin \bar{\omega}} \text{arctg} \frac{\sin \bar{\omega}}{e^q - \cos \bar{\omega}} + \bar{\omega}.$$

**Пример 14.** Определить  $\mathcal{D} \left\{ \frac{f[n]}{n} \right\}$ , если  $f[n] = \cos \bar{\omega} n$ .

В рассматриваемом случае предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\cos \bar{\omega} \varepsilon}{\varepsilon}$  не существует, поэтому формулой (38) пользоваться нельзя. Однако формула (36) остается справедливой, если положить  $f[0] = 0$ ,  $f[n] = \cos \bar{\omega} n$  ( $n \geq 1$ ). Используя эту формулу, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} \frac{\cos \bar{\omega} n}{n} = \int_q \frac{e^q \cos \bar{\omega} - 1}{e^{2q} - 2e^q \cos \bar{\omega} + 1} dq.$$

**Пример 15.** Пусть  $f[n] = 1[n-1]$ . Найти  $\mathcal{D} \left\{ \frac{f[n]}{n} \right\}$ .

Функция  $f[n, \varepsilon] = 1[n-1, \varepsilon]$  тождественно равна нулю при  $n=0$ ;  $0 \leq \varepsilon < 1$ . По формуле (39) получим

$$\mathcal{D} \left\{ \frac{1[n-1]}{n} \right\} = \int_q \frac{1}{e^q - 1} dq = \ln \frac{e^q}{e^q - 1}. \quad (40)$$

Формулу (36) можно обобщить на случай деления оригинала  $f[n]$  на степенную функцию  $n^k$  для произвольного целого числа  $k \geq 1$ . Если функция  $f[n]$  удовлетворяет условию теоремы 10, то справедлива формула

$$\int_q \dots \int_q F^*(q) dq^k = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} \frac{f[n]}{n^k}. \quad (41)$$

Здесь интегрирование происходит по контуру, принадлежащему области определения изображения  $F^*(q)$ .

**6. Теоремы о предельных значениях изображений и оригиналов.** Рассмотрим вначале теорему о предельном значении оригинала.

**Теорема 11.** Если решетчатая функция  $f[n]$  является оригиналом, причем изображение ее первой разности является аналитической функцией в правой полуплоскости и на мнимой оси, то справедливо равенство

$$\lim_{q \rightarrow 0} F^*(q) (e^q - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f[n], \quad (42)$$

где

$$F^*(q) = \mathcal{D} \{ f[n] \}.$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением

$$f[n] = \sum_{m=0}^{n-1} \Delta f[m] + f[0],$$

из которого следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \Delta f[m] + f[0],$$

если ряд, стоящий в правой части равенства, сходится. Рассмотрим теперь изображение первой разности функции  $f[n]$ . По формуле (16) получим

$$\mathcal{D}\{\Delta f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \Delta f[n] = (e^q - 1) F^*(q) - e^q f[0].$$

По условию теоремы это изображение является аналитической функцией в правой полуплоскости и на мнимой оси. Следовательно, оно является непрерывной функцией в указанной области, и предел изображения при  $q \rightarrow 0$  равен сумме соответствующего ряда при  $q=0$ , т. е.

$$\lim_{q \rightarrow 0} \{(e^q - 1) F^*(q) - e^q f[0]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta f[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} f[n] - f[0],$$

откуда следует равенство (42).

Теорема доказана.

Заметим, что требование аналитичности изображения первой разности в правой полуплоскости и на мнимой оси является существенным. Рассмотрим, например, функцию  $f[n] = \sin \bar{\omega} n$ , изображение первой разности которой имеет особые точки на мнимой оси. Имеем:

$$\lim_{q \rightarrow 0} (e^q - 1) F^*(q) = \lim_{q \rightarrow 0} (e^q - 1) \frac{e^q \sin \bar{\omega}}{e^{2q} - 2e^q \cos \bar{\omega} + 1} = 0.$$

Однако предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \bar{\omega} n$  не существует. Следовательно, доказанная теорема в этом случае не верна.

Перейдем к теореме о предельном значении изображения.

**Теорема 12.** Если решетчатая функция  $f[n]$  является оригиналом и имеет изображение  $F^*(q)$ , то начальное значение  $f[0]$  определяется по формуле

$$\lim_{q \rightarrow \infty} F^*(q) = f[0], \quad (43)$$

где предел при  $q \rightarrow \infty$  берется по любой кривой, принадлежащей области определения изображения  $F^*(q)$  и удовлетворяющей условию

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg q < \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число.

**Доказательство.** Представим основное соотношение (1) § 52 в виде

$$F^*(q) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} f[n] + f[0]. \quad (44)$$

Поскольку функция  $f[n]$  является оригиналом, то удовлетворяется условие

$$|f[n]| < M e^{-\sigma_1 n},$$

где  $\sigma_1$  — показатель роста. Тогда сумма, стоящая в правой части равенства (44), допускает следующую оценку:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} f[n] \right| < \sum_{n=1}^{\infty} M e^{(\sigma_1 - \sigma) n} = M \frac{e^{\sigma_1 - \sigma}}{1 - e^{\sigma_1 - \sigma}}. \quad (45)$$

Если теперь точка  $q$  стремится к бесконечности, оставаясь внутри угла  $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg q < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ , то действительная часть  $q$  неограниченно возрастает:  $\operatorname{Re} q = \sigma \rightarrow \infty$ . Правая часть неравенства (45) при этом стремится к нулю, а следовательно, и левая его часть также стремится к нулю. Из равенства (44) при этом получим, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} F^*(q) = f[0].$$

Теорема доказана.

**7. Сумма квадратов значений решетчатых функций.** В задачах автоматического регулирования находит применение следующая теорема:

**Теорема 13.** Если решетчатая функция  $f[n]$  является оригиналом, причем абсцисса абсолютной сходимости  $\sigma_c$   $\mathcal{D}$ -преобразования этой функции отрицательна, то сумма квадратов значений функции  $f[n]$  определяется равенством

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^2[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(s) F^*(-s) ds, \quad (46)$$

где  $F^*(s) = \mathcal{D}\{f[n]\}$ , причем  $c > \sigma_c$ .

**Доказательство.** Справедливость равенства (46) легко установить, используя доказанные выше теоремы. На основании формулы (29) получим

$$\mathcal{D}\{f^2[n]\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(s) F^*(q-s) ds. \quad (47)$$

При этом  $\operatorname{Re} q - \sigma > c > \sigma$ , где  $\sigma$  — показатель роста функции  $f[n]$ . Абсцисса абсолютной сходимости этого  $\mathcal{D}$ -преобразования в соответствии с теоремой 7 удовлетворяет условию  $\sigma_{c1} < 2\sigma$ . Выбирая  $\sigma < 0$ , получим, что  $\sigma_{c1} < 0$ . Следовательно, изображение (47) является аналитической функцией в правой полуплоскости и на мнимой оси.

Из непрерывности изображения в точке  $q=0$  следует, что

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(s) F^*(q-s) ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(s) F^*(-s) ds = \sum_{n=0}^{\infty} f^2[n],$$

что совпадает с равенством (46).

Теорема доказана.

Положим, в частности,  $c=0$  в формуле (46), что возможно благодаря условию  $\sigma_c < 0$ . Будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^n[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} F^*(j\omega) F^*(-j\omega) dj\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F^*(j\omega)|^2 d\omega. \quad (48)$$

Найденное выражение представляет собой аналог равенства Парсеваля, известного из теории преобразования Фурье (см. § 36).

**Пример 16.** Определить сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2an}$ , где  $a > 0$ .

В соответствии с формулой (48) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-an})^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - e^{-a}} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{(e^{j\omega} - e^{-a})(e^{-j\omega} - e^{-a})}.$$

Введем переменную  $z = e^{j\omega}$ . Тогда отрезок интегрирования  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  перейдет в окружность  $S$  единичного радиуса с центром в начале координат, и мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{(e^{j\omega} - e^{-a})(e^{-j\omega} - e^{-a})} &= \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{dz}{jz(z - e^{-a}) \left( \frac{1}{z} - e^{-a} \right)} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{dz}{(z - e^{-a})(e^a - z)e^{-a}}. \end{aligned}$$

Этот интеграл можно найти, используя теорему о вычетах (см. § 32). Внутри единичной окружности подынтегральная функция имеет единственный полюс  $z = e^{-a}$ . Используя формулу (6) § 32, найдем

$$\int_C \frac{dz}{(z - e^{-a})(e^a - z)} = 2\pi j \operatorname{Res} \frac{1}{(z - e^{-a})(e^a - z)} \Big|_{z=e^{-a}} = 2\pi j \frac{1}{e^a - e^{-a}}.$$

Окончательно получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2an} = \frac{1}{2\pi j e^{-a}} \int_C \frac{dz}{(z - e^{-a})(e^a - z)} = \frac{1}{1 - e^{-2a}}.$$

#### § 54. СВЯЗЬ МЕЖДУ $\mathcal{D}$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ЛАПЛАСА; $\mathcal{D}$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

**1. Связь между  $\mathcal{D}$ -преобразованием и преобразованием Лапласа.** Установим связь между преобразованием по Лапласу обычных функций и  $\mathcal{D}$ -преобразованием соответствующих им решетчатых функций.

Прежде всего введем новую независимую переменную  $\bar{t} = \frac{t}{T}$ , где  $T$  — период дискретности рассматриваемых решетчатых функций, и примем обозначение  $f(\bar{t}) = f_1(t) \Big|_{t=\bar{t}T}$ . Преобразование Лапласа

для функций  $f(\bar{t})$  будем записывать следующим образом:

$$F(q) = \int_0^{\infty} f(\bar{t}) e^{-q\bar{t}} d\bar{t}. \quad (1)$$

Установим связь формулы (1) с формулой преобразования Лапласа, приведенной в § 42. Имеем

$$\begin{aligned} F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt = \int_0^{\infty} f_1(\bar{t}T) e^{-s\bar{t}T} T d\bar{t} = \\ &= T \int_0^{\infty} f(\bar{t}) e^{-q\bar{t}} d\bar{t} = TF(q), \end{aligned}$$

где  $q = sT$ . Таким образом,

$$F(q) = \frac{1}{T} F_1(s) \Big|_{s=\frac{q}{T}}. \quad (2)$$

Оригинал  $f(\bar{t})$  определяется по формуле обращения

$$f(\bar{t}) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(q) e^{q\bar{t}} dq \quad (c > \sigma_c), \quad (3)$$

где  $\sigma_c$  — абсцисса абсолютной сходимости для функции  $f(\bar{t})$ .

В § 42 показано, что значение оригинала, получаемое по формуле (3) в точках  $\bar{t}_i$  разрыва непрерывности функции  $f(\bar{t})$  равно  $\frac{f(\bar{t}_i + 0) + f(\bar{t}_i - 0)}{2}$ . Поставим в соответствие функции  $f(\bar{t})$  множество смещенных решетчатых функций  $f[n, \varepsilon]$ , значения которых в точках непрерывности функции  $f(\bar{t})$  совпадают со значениями  $f(\bar{t})$ , а в точках  $\bar{t}_i = n_i + \varepsilon_i$  разрыва непрерывности функции  $f(\bar{t})$  определяются из условия  $f[n_i, \varepsilon_i] = \frac{f(\bar{t}_i + 0) + f(\bar{t}_i - 0)}{2}$ . Функция  $f[n, \varepsilon]$  является оригиналом (см. § 52), если является оригиналом функция  $f(\bar{t})$  (см. § 42). Действительно, в этом случае выполняется условие  $|f(\bar{t})| < Me^{\sigma_0 \bar{t}}$ , где  $\sigma_0 > \sigma_c$  — показатель роста. Полагая  $\bar{t} = n + \varepsilon$ , мы получим  $|f[n, \varepsilon]| < Me^{\sigma_0(n+\varepsilon)}$  при  $n \geq 0$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ;  $f[n, \varepsilon] \equiv 0$  при  $n < 0$ , так как  $f(\bar{t}) \equiv 0$  при  $\bar{t} < 0$ . Таким образом, решетчатая функция  $f[n, \varepsilon]$  является оригиналом.

Обозначим  $F^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{f[n, \varepsilon]\}$ . Тогда справедливы формулы \*)

$$F^*(q, \varepsilon) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(q + 2\pi jr) e^{\varepsilon(q + 2\pi jr)}, \quad (4)$$

$$F(q) = \int_0^1 F^*(q, \varepsilon) e^{-q\varepsilon} d\varepsilon. \quad (5)$$

\*) Если  $f(\bar{t})$  непрерывна при  $\bar{t} > 0$  и  $f[0] = f(+0)$ , то  $F^*(q, 0) = \mathcal{D}\{f[n]\} - \frac{1}{2}f(+0)$ .

Преобразования, определяемые формулами (4) и (5), называют соответственно *прямым* и *обратным*  $\mathcal{D}$ -преобразованием и обозначают так:

$$F^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{F(q)\}; \quad F(q) = \mathcal{D}^{-1}\{F^*(q, \varepsilon)\}.$$

Таким образом,  $\mathcal{D}$ -преобразование позволяет определить изображение  $F^*(q, \varepsilon)$  решетчатой функции  $f[n, \varepsilon]$  по заданному изображению по Лапласу  $F(q)$  функции  $f(t)$ . В теории автоматического регулирования  $\mathcal{D}$ -преобразование позволяет установить связь между свойствами непрерывных и импульсных автоматических систем.

**2. Прямое  $\mathcal{D}$ -преобразование.** Докажем справедливость формулы прямого  $\mathcal{D}$ -преобразования (4). Используя определение  $\mathcal{D}$ -преобразования, а также фильтрующее свойство дельта-функции (см. § 37), получим

$$F^*(q, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n, \varepsilon] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{t} - (n + \varepsilon)) f(\bar{t}) d\bar{t}.$$

Записывая функцию  $f(\bar{t})$  по формуле обращения (3), получим

$$F^*(q, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{t} - (n + \varepsilon)) \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(q_1) e^{q_1 \bar{t}} dq_1 d\bar{t}.$$

Внутренний интеграл по переменному  $q_1$  сходится равномерно относительно параметра  $\bar{t}$  (см. § 42), поэтому порядок интегрирования можно изменить. Будем иметь:

$$\begin{aligned} F^*(q, \varepsilon) &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(q_1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{t} - (n + \varepsilon)) e^{q_1 \bar{t}} d\bar{t} dq_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(q_1) e^{q_1(n + \varepsilon)} dq_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{q_1 \varepsilon} F(q_1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(q - q_1)} dq_1. \end{aligned}$$

Переход от суммы интегралов к интегралу от суммы является законным, если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(q - q_1)}$  сходится равномерно при  $\operatorname{Re} q_1 = c$ .

Для того чтобы удовлетворялось это условие, надо положить  $\operatorname{Re} q > c$ . Предполагая, что это неравенство выполнено, можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{q_1 \varepsilon} F(q_1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(q - q_1)} dq_1 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(q_1) \times \\ &\times \frac{e^{q_1 \varepsilon}}{1 - e^{-(q - q_1)}} dq_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(q_1) \frac{e^{q_1 \varepsilon} e^{-q_1}}{e^{-q_1} - e^{-q}} dq_1. \end{aligned}$$

Разобьем прямую, по которой производится интегрирование, на отрезки длиной  $2\pi$ . Тогда полученный интеграл можно заменить суммой

$$\frac{1}{2\pi j} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{c + (2r-1)\pi j}^{c + (2r+1)\pi j} F(q_1) \frac{e^{q_1 \varepsilon} e^{-q_1}}{e^{-q_1} - e^{-q}} dq_1.$$

Выполним теперь замену переменной по формуле  $z_1 = e^{-q_1}$ . В результате такой замены каждый из отрезков прямой на плоскости  $q$ , по которому производится интегрирование под знаком суммы, отобразится в окружность на плоскости  $z_1$ :

$$z_1 = e^{-c - j\omega}, \quad \pi(2r-1) < \omega \leq \pi(2r+1) \quad (r=0, \pm 1, \pm 2 \dots).$$

Обозначая эту окружность через  $\bar{C}_r$ , можно записать

$$\frac{1}{2\pi j} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{c + (2r-1)\pi j}^{c + (2r+1)\pi j} F(q_1) \frac{e^{q_1 \varepsilon} e^{-q_1}}{e^{-q_1} - e^{-q}} dq_1 = -\frac{1}{2\pi j} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{\bar{C}_r} \frac{F_1(z_1, \varepsilon)}{z_1 - z} dz_1,$$

где  $F_1(z_1, \varepsilon)|_{z_1 = e^{-q_1}} = F(q_1) e^{q_1 \varepsilon}$ ;  $z = e^{-q}$ , причем окружность  $\bar{C}_r$  при изменении  $\omega$  от  $\pi(2r-1)$  до  $\pi(2r+1)$  ( $r=0, \pm 1 \dots$ ) обходится в отрицательном направлении. Изменяя направление обхода, получим

$$F^*(q, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{\bar{C}_r} \frac{F_1(z_1, \varepsilon)}{z_1 - z} dz_1, \quad (6)$$

где  $C_r$  — окружность  $z_1 = e^{-c + j\omega}$ , обходимая в положительном направлении при изменении  $\omega$  от  $\pi(2r-1)$  до  $\pi(2r+1)$  ( $r=0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ).

Заметим теперь, что замена комплексной переменной по формуле  $z_1 = e^{-q_1}$  отображает правую полуплоску в плоскости переменной  $q_1$ :

$$\operatorname{Re} q_1 > c; \quad (2r-1)\pi < \operatorname{Im} q_1 \leq (2r+1)\pi \quad (r=0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

внутри окружности  $C_r$ . Поскольку функция  $F(q_1)$  является аналитической в правой полуплоскости и на прямой, по которой производится интегрирование, т. е. в области  $\operatorname{Re} q_1 \geq c$ , то функция  $F_1(z_1, \varepsilon)$  является аналитической внутри каждой окружности, по которой берется интеграл в формуле (6) и на самой окружности. Подынтегральное выражение в формуле (6) является аналитической функцией внутри окружности  $C_r$  за исключением точки  $z_1 = z$ , которая лежит внутри  $C_r$ , поскольку выполнено неравенство  $\operatorname{Re} q > c$ , из которого следует:

$$|z| = e^{-\operatorname{Re} q} < e^{-c}.$$

По интегральной формуле Коши (см. § 27) можно определить каждый из интегралов, стоящих под знаком суммы в формуле (6). При

$r=0$  получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_0} \frac{F_1(z_1, \varepsilon)}{z_1 - z} dz_1 = F_1(z, \varepsilon),$$

где в соответствии с нашими обозначениями  $C_0$  — окружность, уравнение которой  $z_1 = e^{-c+j\bar{\omega}}$  ( $-\pi < \bar{\omega} \leq \pi$ ). Найдем интеграл по окружности  $C_1$ :  $z_1 = e^{c+j\bar{\omega}}$  ( $\pi < \bar{\omega} \leq 3\pi$ ). Заметим, что подынтегральное выражение является аналитической функцией внутри окружности  $C_1$  за исключением точки  $z_1 = ze^{2\pi j}$ , следовательно,

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} \frac{F_1(z_1, \varepsilon)}{z_1 - z} dz_1 = F_1(ze^{2\pi j}, \varepsilon).$$

Аналогично для любого слагаемого в формуле (6) будем иметь

$$\int_{C_r} \frac{F_1(z_1, \varepsilon)}{z_1 - z} dz_1 = F_1(ze^{2\pi jr}, \varepsilon).$$

Используя это выражение и формулу (6), окончательно можем записать:

$$\begin{aligned} F^*(q, \varepsilon) &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{C_r} \frac{F_1(z_1, \varepsilon)}{z_1 - z} dz_1 = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_1(ze^{2\pi jr}, \varepsilon) = \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_1(e^{-q+2\pi jr}, \varepsilon) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(q + 2\pi jr) e^{(q+2\pi jr)\varepsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость формулы прямого  $\mathcal{D}$ -преобразования доказана.

**3. Обратное  $\mathcal{D}$ -преобразование.** Докажем теперь, что справедлива формула (5) обратного  $\mathcal{D}$ -преобразования. Воспользуемся определением преобразования Лапласа и запишем его следующим образом:

$$F(q) = \int_0^{\infty} e^{-q\bar{t}} f(\bar{t}) d\bar{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-q\bar{t}} f(\bar{t}) d\bar{t};$$

переходя к новым переменным по формуле  $\bar{t} = n + \varepsilon$ , найдем

$$\begin{aligned} F(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 e^{-q(n+\varepsilon)} f(n+\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^1 e^{-q\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n, \varepsilon] d\varepsilon = \\ &= \int_0^1 e^{-q\varepsilon} F^*(q, \varepsilon) d\varepsilon, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (5). Перестановка операций суммирования и интегрирования в данном случае оправдана тем, что ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n, \varepsilon]$  сходится равномерно при  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , если  $\text{Re } q > \sigma_c$ , где  $\sigma_c$  — абсцисса абсолютной сходимости, для функции  $f[n, \varepsilon]$ . Таким образом, формула обратного  $\mathcal{D}$ -преобразования справедлива.

**4. Связь между преобразованием Фурье непрерывных и решетчатых функций.** Предполагая, что абсцисса абсолютной сходимости  $\sigma_c$  преобразования Лапласа функции  $f(t)$  отрицательна, можно положить в формуле (4) прямого  $\mathcal{D}$ -преобразования  $q = j\bar{\omega}$  ( $-\pi < \bar{\omega} \leq \pi$ ), тогда

$$F^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(j(\bar{\omega} + 2\pi r)) e^{\varepsilon j(\bar{\omega} + 2\pi r)}. \quad (7)$$

В частности, при  $\varepsilon = 0$  формула (7) принимает вид

$$F^*(j\bar{\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(j(\bar{\omega} + 2\pi r)). \quad (8)$$

Выражение (7) связывает преобразование Фурье  $F(j\bar{\omega})$  функции  $f(t)$  и дискретное преобразование Фурье  $F^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)$  соответствующей решетчатой функции  $f[n, \varepsilon]$ . Полагая в формуле (7)  $\bar{\omega} = \omega T$  и учитывая соотношение (2), которое принимает вид

$$F(j\bar{\omega}) = \frac{1}{T} F_1(j\omega) \Big|_{\omega = \frac{\bar{\omega}}{T}},$$

формулу (7) можно записать следующим образом:

$$F^*(j\omega T, \varepsilon) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_1(j(\omega + r\omega_0)) e^{\varepsilon T j(\omega + r\omega_0)}, \quad (9)$$

где  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ .

С помощью формулы (7) или (9) можно доказать следующую теорему, устанавливающую связь между непрерывными и решетчатыми функциями.

**Теорема (Котельникова).** Пусть непрерывная функция  $f_1(t)$  преобразуема по Фурье, причем модуль ее спектральной характеристики  $F_1(j\omega)$  тождественно равен нулю, начиная с некоторой частоты  $\omega_c$ , т. е.

$$|F_1(j\omega)| \equiv 0 \text{ при } |\omega| > \omega_c; \quad (10)$$

тогда функция  $f_1(t)$  может быть восстановлена по своим дискретным значениям  $f_1[nT]^*$ , отсчитанным с периодом повторения

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_c} \quad (11)$$

(или с частотой повторения  $\omega_0 \geq 2\omega_c$ ).

\* Если  $f_1(0) \neq 0$ , то  $f_1[0] = \frac{1}{2} f_1(0)$ .

Доказательство. Рассмотрим формулу (9) при  $\epsilon = 0$ :

$$F^*(j\omega T) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_1(j(\omega + r\omega_0)). \quad (12)$$

Если выполнены условия (10) и (11), то из этой формулы следует, что

$$F^*(j\omega T) = \frac{1}{T} F_1(j\omega) \text{ при } |\omega| \leq \omega_c. \quad (13)$$

Поскольку функция  $F_1(j\omega)$  определяется преобразованием Фурье непрерывной функции  $f_1(t)$ , а  $F^*(j\omega T)$  определяется дискретным преобразованием Фурье соответствующей решетчатой функции  $f_1[nT]$ , получим

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} TF^*(j\omega T) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \sum_{n=0}^{\infty} f_1[nT] e^{-j\omega T n} e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_1[nT] \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-nT)} d\omega = \\ &= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_1[nT]}{(t-nT)j} [e^{j\omega_c(t-nT)} - e^{-j\omega_c(t-nT)}]. \end{aligned}$$

Почленное интегрирование ряда, которое было использовано при выводе этой формулы, оправдано тем, что ряд, стоящий под знаком интеграла, сходится равномерно при  $|\omega| \leq \omega_c$ . Из последнего равенства имеем

$$f_1(t) = \frac{T}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_1[nT] \frac{\sin \omega_c(t-nT)}{t-nT}. \quad (14)$$

Полученная формула определяет непрерывную функцию  $f_1(t)$  по ее дискретным значениям  $f_1[nT]$ , что и доказывает теорему.

Теорема Котельникова находит применение в теории автоматического регулирования. Она содержит условия, при которых непрерывный сигнал может быть восстановлен по своим значениям, измеренным в дискретные моменты времени.

## § 55. СВОЙСТВА $\mathcal{D}$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

### 1. Линейность $\mathcal{D}$ -преобразования.

Теорема 1.  $\mathcal{D}$ -преобразование линейной комбинации изображений по Лапласу  $F_*(q)$  равно линейной комбинации изображений  $F^*(q)$ , т. е.

$$\mathcal{D} \left\{ \sum_{v=1}^k a_v F_v(q) \right\} = \sum_{v=1}^k a_v F_v^*(q, \epsilon), \quad (1)$$

где  $F^*(q, \epsilon) = \mathcal{D} \{F_*(q)\}$ ,  $a_v$  — постоянные коэффициенты.

Равенство (1) следует из определения прямого  $\mathcal{D}$ -преобразования (4) § 54.

Пример 1. Определить  $\mathcal{D}$ -преобразование дробно-рациональной функции

$$F(q) = \frac{k}{(\beta_1 + q)(\beta_2 + q)}.$$

В соответствии с теоремой 1 получим

$$\mathcal{D} \left\{ \frac{k}{(\beta_1 + q)(\beta_2 + q)} \right\} = \mathcal{D} \left\{ \frac{k_1}{\beta_1 + q} + \frac{k_2}{\beta_2 + q} \right\} = \mathcal{D} \left\{ \frac{k_1}{\beta_1 + q} \right\} + \mathcal{D} \left\{ \frac{k_2}{\beta_2 + q} \right\},$$

где  $k_1 = \frac{k}{\beta_2 - \beta_1}$ ,  $k_2 = \frac{k}{\beta_1 - \beta_2}$ . Замечая, что

$$\mathcal{D} \left\{ \frac{k}{\beta + q} \right\} = \mathcal{D} \{k e^{-\beta(n+1)}\} = k \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \epsilon}, \quad (2)$$

найдем искомое изображение

$$\mathcal{D} \left\{ \frac{k}{(\beta_1 + q)(\beta_2 + q)} \right\} = k_1 \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta_1}} e^{-\beta_1 \epsilon} + k_2 \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta_2}} e^{-\beta_2 \epsilon} (\epsilon > 0).$$

2. Смещение аргументов изображений. Рассмотрим  $\mathcal{D}$ -преобразование функции  $e^{-\gamma q} F(q)$ , где  $\gamma$  — любое действительное число. Представим параметр  $\gamma$  как сумму целой и дробной части:  $\gamma = k + \lambda$ , причем целая часть  $k$  параметра  $\gamma$  может принимать и положительные и отрицательные значения, в то время как дробная часть  $\lambda$  принимает лишь положительные значения,  $0 \leq \lambda < 1$ . Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Умножение изображения по Лапласу  $F(q)$  на экспоненциальную функцию  $e^{-\gamma q}$  соответствует смещению аргумента  $\epsilon$  изображения  $F^*(q, \epsilon)$  и умножению последнего на экспоненциальную функцию в соответствии с равенствами

$$\mathcal{D} \{e^{-\gamma q} F(q)\} = \begin{cases} e^{-kq} F^*(q, \epsilon - \lambda) & \text{при } \lambda < \epsilon, \\ e^{-(k+1)q} F^*(q, \epsilon - \lambda + 1) & \text{при } \lambda \geq \epsilon, \end{cases} \quad (3)$$

где  $F^*(q, \epsilon) = \mathcal{D} \{F(q)\}$ .

Доказательство. Воспользуемся определением прямого  $\mathcal{D}$ -преобразования (4) § 54. Сначала предположим, что  $\lambda < \epsilon$ , тогда получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \{e^{-\gamma q} F(q)\} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi jr)\epsilon} e^{-(q+2\pi jr)(k+\lambda)} F(q+2\pi jr) = \\ &= e^{-qk} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi jr)(\epsilon-\lambda)} F(q+2\pi jr) = e^{-qk} F^*(q, \epsilon - \lambda). \end{aligned}$$

Если теперь положить  $\lambda \geq \epsilon$ , то выражение, стоящее под знаком суммы в последнем равенстве, следует умножить и разделить на  $e^q = e^{q+2\pi jr}$ . При этом будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \{e^{-\gamma q} F(q)\} &= e^{-qk} e^{-q} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi jr)(\epsilon-\lambda+1)} F(q+2\pi jr) = \\ &= e^{-q(k+1)} F^*(q, \epsilon - \lambda + 1). \end{aligned}$$

Теорема доказана.



Заметим, что в частном случае, когда  $\gamma = k$  — целое число, формула (3) упрощается и принимает следующий вид:

$$\mathcal{D}\{e^{-kq}F(q)\} = e^{-kq}F^*(q, \varepsilon). \quad (4)$$

Формула (4) следует из общего выражения (3) при  $\gamma = k$ , т. е. при  $\lambda = 0$ .

**Пример 2.** Определить  $\mathcal{D}\left\{\frac{e^{-\gamma q}}{\beta + q}\right\}$ , где  $\gamma < 1$ .

По формуле (3) получим

$$\mathcal{D}\left\{\frac{e^{-\gamma q}}{\beta + q}\right\} = \begin{cases} \frac{e^{\beta}}{e^{\beta} - e^{-\beta}} e^{-\beta(\varepsilon - \gamma)} & \text{при } \gamma < \varepsilon, \\ \frac{e^{-\beta(\varepsilon - \gamma + 1)}}{e^{\beta} - e^{-\beta}} & \text{при } \gamma \geq \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Докажем теперь теорему о смещении комплексного аргумента  $q$  изображения по Лапласу  $F(q)$ .

**Теорема 3.** Смещение аргумента  $q$  изображения по Лапласу  $F(q)$  на произвольную комплексную величину  $\lambda$  соответствует смещению на ту же величину аргумента  $q$  изображения  $F^*(q, \varepsilon)$  и умножению последнего на экспоненциальную функцию в соответствии с равенством

$$\mathcal{D}\{F(q \pm \lambda)\} = e^{\mp \lambda \varepsilon} F^*(q \pm \lambda, \varepsilon), \quad (5)$$

где  $F^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{F(q)\}$ .

**Доказательство.** Определим  $\mathcal{D}$ -преобразование функции  $F(q \pm \lambda)$  по формуле (4) § 54:

$$\mathcal{D}\{F(q \pm \lambda)\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi jr)\varepsilon} F(q \pm \lambda + 2\pi jr).$$

Умножив и разделив правую часть этого равенства на  $e^{\pm \lambda \varepsilon}$ , получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{F(q \pm \lambda)\} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi jr \pm \lambda)\varepsilon} F(q \pm \lambda + 2\pi jr) e^{\mp \lambda \varepsilon} = \\ &= F^*(q \pm \lambda, \varepsilon) e^{\mp \lambda \varepsilon}, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (5).

Теорема доказана.

**3. Умножение изображений.** Рассмотрим теорему об умножении изображения по Лапласу на изображение в смысле дискретного преобразования Лапласа.

**Теорема 4.** Умножение изображения по Лапласу  $F_1(q)$  на изображение  $F_2^*(q, \varepsilon)$  соответствует умножению изображений  $F_1^*(q, \varepsilon)$  и  $F_2^*(q, \varepsilon)$ , т. е.

$$\mathcal{D}\{F_1(q)F_2^*(q, \varepsilon)\} = F_1^*(q, \varepsilon)F_2^*(q, \varepsilon), \quad (6)$$

где  $F_1^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{F_1(q)\}$ .

**Доказательство.** По формуле прямого  $\mathcal{D}$ -преобразования (4) § 54 получим:

$$\mathcal{D}\{F_1(q)F_2^*(q, \varepsilon)\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_1(q + 2\pi jr) F_2^*(q + 2\pi jr, \varepsilon) e^{(q+2\pi jr)\varepsilon}.$$

Функция  $F_2^*(q, \varepsilon)$  является периодической относительно аргумента  $q$ , т. е.  $F_2^*(q + 2\pi jr, \varepsilon) = F_2^*(q, \varepsilon)$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{F_1(q)F_2^*(q, \varepsilon)\} &= F_2^*(q, \varepsilon) \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_1(q + 2\pi jr) e^{(q+2\pi jr)\varepsilon} = \\ &= F_2^*(q, \varepsilon) F_1^*(q, \varepsilon). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Перейдем к теореме об умножении изображений по Лапласу.

**Теорема 5.** Умножение изображений по Лапласу  $F_1(q)$  и  $F_2(q)$  соответствует свертке изображений  $F_1^*(q, \varepsilon)$  и  $F_2^*(q, \varepsilon)$  относительно параметра  $\varepsilon$ , т. е.

$$\mathcal{D}\{F_1(q)F_2(q)\} = \int_0^1 F_1^*(q, \varepsilon - \lambda) F_2^*(q, \lambda) d\lambda, \quad (7)$$

где  $F_1^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{F_1(q)\}$ ,  $F_2^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{F_2(q)\}$ .

**Доказательство.** Воспользуемся основным соотношением (4) § 54:

$$\mathcal{D}\{F_1(q)F_2(q)\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi jr)\varepsilon} F_1(q + 2\pi jr) F_2(q + 2\pi jr).$$

Теперь выразим функцию  $F_2(q)$  через соответствующее изображение  $F_2^*(q, \varepsilon)$  по формуле обратного  $\mathcal{D}$ -преобразования (5) § 54. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{F_1(q)F_2(q)\} &= \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi jr)\varepsilon} F_1(q + 2\pi jr) \int_0^1 F_2^*(q + 2\pi jr, \lambda) e^{-(q+2\pi jr)\lambda} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_2^*(q + 2\pi jr, \lambda) e^{(q+2\pi jr)(\varepsilon - \lambda)} F_1(q + 2\pi jr) d\lambda. \end{aligned}$$

Используя периодичность функции  $F_2^*(q, \varepsilon)$ , получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{F_1(q)F_2(q)\} &= \int_0^1 F_2^*(q, \lambda) \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi jr)(\varepsilon - \lambda)} F_1(q + 2\pi jr) d\lambda = \\ &= \int_0^1 F_2^*(q, \lambda) F_1^*(q, \varepsilon - \lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Таким образом, установлена справедливость формулы (7).

Теорема доказана.

С помощью доказанной теоремы легко установить справедливость следующих теорем, которые по существу являются следствиями теоремы 5.

**Теорема 6.**  $\mathcal{D}$ -преобразование функции  $\frac{F(q)}{q}$  определяется равенством

$$\mathcal{D}\left\{\frac{F(q)}{q}\right\} = \int_0^\varepsilon F^*(q, \lambda) d\lambda + \frac{1}{e^q - 1} \int_0^1 F^*(q, \lambda) d\lambda, \quad (8)$$

где  $F^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{F(q)\}$ .

**Доказательство.** Воспользуемся теоремой 5. В качестве функции  $F_2^*(q, \varepsilon)$  выберем функцию  $F_2^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{F(q)\}$ . В качестве  $F_1^*(q, \varepsilon)$  возьмем

$$F_1^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\left\{\frac{1}{q}\right\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(q+2\pi jr)\varepsilon}}{q+2\pi jr}.$$

Эта сумма не зависит от  $\varepsilon$  и равна

$$\mathcal{D}\left\{\frac{1}{q}\right\} = \mathcal{D}\{1[n]\} = \frac{e^q}{e^q - 1} \quad (9)$$

для любого  $0 < \varepsilon \leq 1$ . В соответствии с формулой (7) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left\{\frac{F(q)}{q}\right\} &= \int_0^\varepsilon F^*(q, \lambda) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(q+2\pi jr)(\varepsilon-\lambda)}}{q+2\pi jr} d\lambda = \\ &= \int_0^\varepsilon F^*(q, \lambda) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(q+2\pi jr)(\varepsilon-\lambda)}}{q+2\pi jr} d\lambda + \int_0^1 F^*(q, \lambda) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(q+2\pi jr)(\varepsilon-\lambda)}}{q+2\pi jr} d\lambda. \end{aligned}$$

В последнем слагаемом  $\lambda \geq \varepsilon$  и, следовательно, разность  $\varepsilon - \lambda \leq 0$ . Для того чтобы иметь возможность применить в этом случае формулу (9), умножим и разделим подынтегральное выражение во втором слагаемом на  $e^q$ :

$$\begin{aligned} &\int_0^\varepsilon F^*(q, \lambda) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(q+2\pi jr)(\varepsilon-\lambda)}}{q+2\pi jr} d\lambda + \int_0^1 e^{-q} F^*(q, \lambda) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(q+2\pi jr)(1+\varepsilon-\lambda)}}{q+2\pi jr} d\lambda = \\ &= \int_0^\varepsilon F^*(q, \lambda) \frac{e^q}{e^q - 1} d\lambda + \int_0^1 F^*(q, \lambda) \frac{1}{e^q - 1} d\lambda = \\ &= \int_0^\varepsilon F^*(q, \lambda) \frac{e^q - 1 + 1}{e^q - 1} d\lambda + \int_0^1 F^*(q, \lambda) \frac{1}{e^q - 1} d\lambda = \\ &= \int_0^\varepsilon F^*(q, \lambda) d\lambda + \int_0^\varepsilon F^*(q, \lambda) \frac{1}{e^q - 1} d\lambda + \int_0^1 F^*(q, \lambda) \frac{1}{e^q - 1} d\lambda = \\ &= \int_0^\varepsilon F^*(q, \lambda) d\lambda + \int_0^1 F^*(q, \lambda) \frac{1}{e^q - 1} d\lambda. \end{aligned}$$

Итак,

$$\mathcal{D}\left\{\frac{F(q)}{q}\right\} = \int_0^\varepsilon F^*(q, \lambda) d\lambda + \int_0^1 F^*(q, \lambda) \frac{1}{e^q - 1} d\lambda.$$

Теорема доказана.

В частности, при  $\varepsilon = 0$  первое слагаемое обращается в ноль, т. е. в этом случае будет справедливо равенство

$$\mathcal{D}\left\{\frac{F(q)}{q}\right\}_{\varepsilon=0} = \int_0^1 F^*(q, \lambda) \frac{1}{e^q - 1} d\lambda. \quad (10)$$

**Пример 3.** Определить  $\mathcal{D}$ -преобразование

$$\mathcal{D}\left\{\frac{1-e^{-q}}{q} \cdot \frac{1}{\beta+q}\right\}.$$

Согласно теоремам 1 и 2 получим:

$$\mathcal{D}\left\{\frac{1-e^{-q}}{q} \cdot \frac{1}{\beta+q}\right\} = (1-e^{-q}) \mathcal{D}\left\{\frac{1}{(\beta+q)q}\right\}.$$

Далее по теореме 6 найдем:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left\{\frac{1}{q(\beta+q)}\right\} &= \int_0^\varepsilon \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta\lambda} d\lambda + \int_0^1 \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta}} \frac{e^{-\beta\lambda}}{e^q - 1} d\lambda = \\ &= \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta}} \left(-\frac{1}{\beta}\right) (e^{-\beta\varepsilon} - 1) + \frac{e^q}{(e^q - e^{-\beta})(e^q - 1)} \left(-\frac{1}{\beta}\right) (e^{-\beta} - 1) = \\ &= \frac{1}{\beta} \cdot \frac{e^q [e^{-\beta\varepsilon+q} - e^q - e^{-\beta\varepsilon} + 1 + e^{-\beta} - 1]}{(e^q - e^{-\beta})(e^q - 1)} = \frac{e^q [e^q - e^{-\beta} - e^{-\beta\varepsilon} (e^q - 1)]}{\beta (e^q - e^{-\beta})(e^q - 1)}. \end{aligned}$$

Умножая найденное выражение на  $1 - e^{-q} = \frac{e^q - 1}{e^q}$ , получим окончательно:

$$\mathcal{D}\left\{\frac{1-e^{-q}}{q} \cdot \frac{1}{\beta+q}\right\} = \frac{1}{\beta} \left[1 - \frac{e^q - 1}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta\varepsilon}\right] (\varepsilon > 0).$$

Рассмотрим теперь теорему о дифференцировании изображения по переменной  $\varepsilon$ .

**Теорема 7.** Если изображение  $F^*(q, \varepsilon)$  дифференцируемо по переменной  $\varepsilon$ , то умножение изображения  $F(q)$  на  $q$  соответствует дифференцированию изображения  $F^*(q, \varepsilon)$  по  $\varepsilon$ , т. е.

$$\mathcal{D}\{qF(q)\} = \frac{\partial F^*(q, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \quad (11)$$

где  $F^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{F(q)\}$ .

**Доказательство.** Эту теорему, как и предыдущую, можно доказать с помощью формулы (7), однако значительно проще доказать ее, дифференцируя по переменной  $\varepsilon$  основное соотношение (4).

§ 54. Производя дифференцирование, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*(q, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} e^{(q+2\pi jr)\varepsilon} F(q+2\pi jr) = \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} (q+2\pi jr) e^{(q+2\pi jr)\varepsilon} F(q+2\pi jr) = \mathcal{D}\{qF(q)\}. \end{aligned}$$

Полученное равенство совпадает с равенством (11).

Теорема доказана.

4. Дифференцирование изображений по Лапласу. Рассмотрим следующую теорему:

**Теорема 8.**  $\mathcal{D}$ -преобразование функции  $\frac{dF(q)}{dq}$  определяется равенством

$$\mathcal{D}\left\{\frac{dF(q)}{dq}\right\} = \frac{dF^*(q, \varepsilon)}{dq} + \varepsilon F^*(q, \varepsilon), \quad (12)$$

где  $F^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{F(q)\}$ .

**Доказательство.** Справедливость равенства (12) можно доказать посредством дифференцирования по переменной  $q$  соотношения (4) § 54, определяющего прямое  $\mathcal{D}$ -преобразование. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dF^*(q, \varepsilon)}{dq} &= \frac{d}{dq} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(q+2\pi jr) e^{(q+2\pi jr)\varepsilon} = \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dF(q+2\pi jr)}{dq} e^{(q+2\pi jr)\varepsilon} + F(q+2\pi jr) \varepsilon e^{(q+2\pi jr)\varepsilon} \right\} = \\ &= \mathcal{D}\left\{\frac{dF(q)}{dq}\right\} + \varepsilon F^*(q, \varepsilon); \end{aligned}$$

полученное равенство совпадает с равенством (12).

Теорема доказана.

5. Начальные значения изображений. Приведем два соотношения, которые следуют непосредственно из формул (4) и (5) § 54, определяющих прямое и обратное  $\mathcal{D}$ -преобразования.

Значение изображения  $F^*(q, \varepsilon)$  при  $q=0$  определяется формулой

$$F^*(0, \varepsilon) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{2\pi jr\varepsilon} F(2\pi jr). \quad (13)$$

Значение изображения по Лапласу  $F(q)$  при  $q=0$  связано со значением изображения  $F^*(q, \varepsilon)$  при том же значении  $q$  формулой

$$F(0) = \int_0^1 F^*(0, \varepsilon) d\varepsilon. \quad (14)$$

## § 56. ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. Уравнения импульсных систем в области изображений. Использование дискретного преобразования Лапласа позволяет существенно упростить решение многих задач, связанных с исследованием и проектированием линейных импульсных систем с постоянными параметрами. Описание импульсных систем с помощью  $\mathcal{D}$ -преобразования начнем с наиболее простого случая — рассмотрим разомкнутую импульсную систему с одним импульсным элементом (см. рис. 158). Уравнение этой системы во временной области было получено выше в § 51. При нулевых начальных условиях оно принимает следующий вид (см. (18) § 51):

$$x_1[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^{\infty} g_1[m] k_1[n-m, \varepsilon], \quad (1)$$

где  $k_1[n, \varepsilon]$  — импульсная переходная функция приведенной непрерывной части, определяемая формулой (15) § 51;  $g_1[n]$  — воздействие, приложенное ко входу системы и измеренное в дискретные моменты времени;  $x_1[n, \varepsilon]$  — величина на выходе системы.

Применим к обеим частям равенства (1)  $\mathcal{D}$ -преобразование. С учетом теоремы 6 § 53 будем иметь

$$X^*(q, \varepsilon) = G^*(q) W^*(q, \varepsilon), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} X^*(q, \varepsilon) &= \mathcal{D}\{x_1[n, \varepsilon]\}, \quad G^*(q) = \mathcal{D}\{g_1[n]\}, \\ W^*(q, \varepsilon) &= \mathcal{D}\{k_1[n, \varepsilon]\}. \end{aligned}$$

Получено уравнение разомкнутой импульсной системы, связывающее изображения входного воздействия  $G^*(q)$  и выходной величины  $X^*(q, \varepsilon)$ .

Отношение изображений выходной величины  $X^*(q, \varepsilon)$  к изображению внешнего воздействия  $G^*(q)$  при нулевых начальных условиях называется *передаточной функцией импульсной системы*. В данном случае имеем

$$\frac{X^*(q, \varepsilon)}{G^*(q)} = W^*(q, \varepsilon). \quad (3)$$

Передаточную функцию разомкнутой импульсной системы  $W(q, \varepsilon)$  можно определить с помощью  $\mathcal{D}$ -преобразования импульсной переходной функции приведенной непрерывной части:

$$W^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{k_1[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} k_1[n, \varepsilon]. \quad (4)$$

Кроме того, функцию  $W^*(q, \varepsilon)$  можно определить как  $\mathcal{D}$ -преобразование передаточной функции приведенной непрерывной части

$W(q)$ , определяемой из условия

$$W(q) = \int_0^{\infty} e^{-qt} k_1(\bar{t}) d\bar{t}. \quad (5)$$

Имеем

$$W^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{W(q)\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(q + 2\pi jr) e^{\varepsilon(q+2\pi jr)}. \quad (6)$$

Передаточная функция приведенной непрерывной части может быть определена как изображение по Лапласу импульсной переходной функции приведенной непрерывной части  $k(t) = k_1\left(\frac{t}{T}\right)$ , т. е. в виде

$$W_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} k(t) dt, \text{ где } s = \frac{q}{T}. \quad (7)$$

Связь функций  $W_1(s)$  и  $W(q)$  устанавливается формулой (2) § 54, в соответствии с которой

$$W(q) = \frac{1}{T} W_1(s) \Big|_{s=\frac{q}{T}}. \quad (8)$$

Если  $W_{\Phi}(s)$  и  $W_{\Psi}(s)$  — передаточные функции формирующего устройства и непрерывной части соответственно, то по формуле (8) получим

$$W(q) = \frac{1}{T} W_{\Psi}(s) W_{\Phi}(s) \Big|_{s=\frac{q}{T}}. \quad (9)$$

Зная передаточную функцию приведенной непрерывной части  $W(q)$ , можно установить связь между изображением по Лапласу выходной величины  $X(q)$  и изображением в смысле  $\mathcal{D}$ -преобразования входного воздействия  $G^*(q)$ . Для этого запишем уравнение (1) рассматриваемой импульсной системы во временной области в виде

$$x_1(\bar{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} g_1[m] k_1(\bar{t} - m). \quad (10)$$

Применяя преобразование Лапласа по переменной  $\bar{t}$  к обеим частям равенства (10), получим

$$X(q) = \sum_{m=0}^{\infty} g_1[m] W(q) e^{-qm} = G^*(q) W(q). \quad (11)$$

Полученное уравнение устанавливает указанную выше связь. Применяя к обеим частям уравнения (11)  $\mathcal{D}$ -преобразование и используя теорему 4 § 55, снова получим уравнение (2).

Найдем теперь уравнение замкнутой импульсной системы (см. рис. 165) в области изображений и определим ее передаточную функцию.

Уравнение этой системы получено в § 51 в виде

$$x_1[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^{\infty} g_1[m] k_1[n-m, \varepsilon] - \sum_{m=0}^{\infty} x_1[m] k_1[n-m, \varepsilon]. \quad (12)$$

Применим к обеим частям уравнения (12)  $\mathcal{D}$ -преобразование. Учитывая теорему 6 § 53, будем иметь

$$X^*(q, \varepsilon) = G^*(q) W^*(q, \varepsilon) - X^*(q) W^*(q, \varepsilon). \quad (13)$$

Изображение  $X^*(q)$ , стоящее в правой части равенства (13), определим из этого же равенства, положив в нем  $\varepsilon = 0$ ; получим

$$X^*(q) = G^*(q) W^*(q) - X^*(q) W^*(q),$$

или

$$X^*(q) = \frac{G^*(q) W^*(q)}{1 + W^*(q)}. \quad (14)$$

Подставляя выражение (14) в уравнение (13), найдем

$$\begin{aligned} X^*(q, \varepsilon) &= G^*(q) W^*(q, \varepsilon) - \frac{G^*(q) W^*(q)}{1 + W^*(q)} W^*(q, \varepsilon) = \\ &= W^*(q, \varepsilon) \frac{G^*(q)}{1 + W^*(q)}. \end{aligned} \quad (15)$$

В соответствии с определением передаточная функция замкнутой импульсной системы равна

$$\Phi^*(q, \varepsilon) = \frac{X^*(q, \varepsilon)}{G^*(q)} = \frac{W^*(q, \varepsilon)}{1 + W^*(q)}. \quad (16)$$

Таким образом, с помощью  $\mathcal{D}$ -преобразования найдена связь между изображением выходной величины  $X^*(q, \varepsilon)$  и изображением входного воздействия  $G^*(q)$ . Применяя обратное  $\mathcal{D}$ -преобразование к обеим частям равенства

$$X^*(q, \varepsilon) = \Phi^*(q, \varepsilon) G^*(q), \quad (17)$$

можно определить зависимость между входной и выходной величинами системы во временной области. С учетом теоремы 6 § 53 получим

$$x_1[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n g_1[m] k_1[n-m, \varepsilon], \quad (18)$$

где весовая функция замкнутой импульсной системы  $k_1[n, \varepsilon]$  определяется как обратное дискретное преобразование Лапласа передаточной функции замкнутой импульсной системы:

$$k_1[n, \varepsilon] = \mathcal{D}^{-1}\{\Phi^*(q, \varepsilon)\}. \quad (19)$$

Рассмотрим примеры на определение передаточных функций импульсных систем.

**Пример 1.** В разомкнутой импульсной системе (см. рис. 158) передаточная функция непрерывной части равна

$$W_{\text{нп}}(s) = \frac{1}{T_1 s + 1},$$

а импульсный элемент осуществляет модуляцию с помощью последовательности кратковременных импульсов, причем выполняется условие (11) § 51. Определить передаточную функцию импульсной системы.

В рассматриваемом случае импульсная переходная функция непрерывной приведенной части определяется формулой

$$k(\bar{t}) = k_{н1}(\bar{t}) k_s,$$

где  $k_s$  — постоянный коэффициент;  $k_{н1}(\bar{t})$  — импульсная переходная функция непрерывной части. Следовательно, передаточная функция приведенной непрерывной части будет равна

$$W(q) = W_n(q) k_s,$$

где 
$$W_n(q) = \int_0^{\infty} e^{-qt} k_{н1}(\bar{t}) d\bar{t}, \quad W(q) = \int_0^{\infty} e^{-qt} k(\bar{t}) d\bar{t}.$$

В соответствии с формулой (2) § 54 получим

$$W_n(q) = \frac{1}{T} W_{н1}(s) \Big|_{s=\frac{q}{T}} = \frac{1}{T} \frac{1}{\left(\frac{T_1}{T}q + 1\right)} = \frac{1}{T} \frac{\beta}{q + \beta}, \quad \text{где } \beta = \frac{T}{T_1},$$

$$W(q) = \frac{k_s \beta}{T} \frac{1}{q + \beta}.$$

Теперь определим передаточную функцию импульсной системы по формуле (6) с учетом формулы (2) § 55:

$$W^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{W(q)\} = \frac{k_s \beta}{T} \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon}. \quad (20)$$

**Пример 2.** Определить передаточную функцию разомкнутой импульсной системы (см. рис. 158), имеющей ту же непрерывную часть, что и в предыдущем примере. Импульсный элемент осуществляет амплитудно-импульсную модуляцию с помощью последовательности прямоугольных импульсов высотой  $k_n$  и шириной  $\gamma T$  ( $\gamma \leq 1$ ) (см. пример 2 § 51).

Весовая функция импульсного элемента (см. рис. 161) определяется формулой

$$s(t) = k_n (1(t) - 1(t - \gamma T)).$$

Преобразуя по Лапласу обе части этого равенства, получим

$$W_\Phi(s) = k_n \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-\gamma Ts}}{s} \right) = k_n \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s}. \quad (21)$$

По формуле (9) определим передаточную функцию приведенной непрерывной части:

$$W(q) = \frac{1}{T} W_\Phi(s) W_n(s) \Big|_{s=\frac{q}{T}} = k_n \frac{1 - e^{-\gamma q}}{q} \cdot \frac{\beta}{\beta + q}.$$

Теперь найдем передаточную функцию импульсной системы. По формуле (6) с учетом теоремы 1 § 55 имеем

$$W^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{W(q)\} = \mathcal{D}\left\{ k_n \frac{1 - e^{-\gamma q}}{q} \cdot \frac{\beta}{\beta + q} \right\} = k_n \mathcal{D}\left\{ \frac{\beta}{q(\beta + q)} \right\} - k_n \mathcal{D}\left\{ \frac{\beta}{q(\beta + q)} e^{-\gamma q} \right\}. \quad (22)$$

Сначала найдем  $\mathcal{D}$ -преобразование для функции  $\frac{\beta}{q(\beta + q)}$ . Используя формулы (2) и (9) § 55, получим

$$\mathcal{D}\left\{ \frac{\beta}{q(\beta + q)} \right\} = \mathcal{D}\left\{ \frac{1}{q} - \frac{1}{\beta + q} \right\} = \mathcal{D}\left\{ \frac{1}{q} \right\} - \mathcal{D}\left\{ \frac{1}{\beta + q} \right\} = \frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon}$$

Для того чтобы определить второе слагаемое в выражении (22), воспользуемся теоремой 2 § 55. В соответствии с формулой (3) § 55 имеем

$$\mathcal{D}\left\{ \frac{e^{-\gamma q}}{q(\beta + q)} \right\} = \begin{cases} \frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta(\varepsilon - \gamma)}, & \text{при } \varepsilon > \gamma, \\ \frac{1}{e^q - 1} - \frac{1}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta(\varepsilon + \gamma)}, & \text{при } \varepsilon \leq \gamma. \end{cases}$$

Суммируя найденные изображения в соответствии с выражением (22), получим передаточную функцию импульсной системы с прямоугольными импульсами. Эта передаточная функция описывается двумя различными выражениями в зависимости от параметра  $\varepsilon$ :

$$W^*(q, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{k_n e^q}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon} (e^{\beta \gamma} - 1) & \text{при } \gamma \leq \varepsilon \leq 1, \\ k_n \left( 1 - \frac{e^q - e^{-\beta(\varepsilon + \gamma)}}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon} \right) & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \gamma. \end{cases} \quad (23)$$

В частности, если ширина импульсов совпадает с периодом квантования, т. е.  $\gamma = 1$ , найдем по второй из формул (23), что

$$W^*(q, \varepsilon) = k_n \left( 1 - \frac{e^q - 1}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon} \right). \quad (24)$$

**Пример 3.** Найти передаточную функцию замкнутой импульсной системы с прямоугольными импульсами шириной  $\gamma T$  ( $\gamma \leq 1$ ), если передаточная функция этой системы в разомкнутом состоянии описывается равенствами (23).

Для определения искомой передаточной функции  $\Phi^*(q, \varepsilon)$  воспользуемся формулой (16), связывающей передаточные функции замкнутой и разомкнутой систем. Подставляя в эту формулу передаточную функцию разомкнутой импульсной системы (23), будем иметь

$$\Phi^*(q, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{k_n e^q e^{-\beta \varepsilon} (e^{\beta \gamma} - 1)}{e^q - e^{-\beta} [1 - k_n (e^{\beta \gamma} - 1)]} & \text{при } \gamma \leq \varepsilon \leq 1, \\ \frac{k_n [e^{-\beta \varepsilon} (e^{-\beta(\varepsilon + \gamma)} - e^q) + e^q - e^{-\beta}]}{e^q - e^{-\beta} [1 - k_n (e^{\beta \gamma} - 1)]} & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \gamma. \end{cases} \quad (25)$$

Из рассмотренных примеров видно, что передаточная функция импульсной системы является дробно-рациональной функцией от переменного  $e^q$ . Числитель передаточной функции в общем случае зависит от параметра  $\varepsilon$ . Таким образом, передаточная функция может быть записана в виде

$$\Phi^*(q, \varepsilon) = \frac{P^*(q, \varepsilon)}{Q^*(q)}, \quad (26)$$

где  $P^*(q, \varepsilon)$  и  $Q^*(q)$  многочлены относительно  $e^q$ ;

$$P^*(q, \varepsilon) = a_0(\varepsilon) e^{lq} + a_1(\varepsilon) e^{(l-1)q} + \dots + a_{l-1}(\varepsilon) e^q + a_l(\varepsilon);$$

$$Q^*(q) = b_0 e^{kq} + b_1 e^{(k-1)q} + \dots + b_{k-1} e^q + b_k.$$

При этом всегда соблюдается условие  $l \leq k$ .

Передаточные функции импульсных систем удобно записывать с использованием  $\mathbb{Z}$ -преобразования. Для этого необходимо выполнить замену переменной в выражении передаточной функции по формуле  $z = e^q$ . В результате такой замены передаточная функция

импульсной системы становится дробно-рациональной функцией переменного  $z$  вида

$$\Phi_1^*(z, \varepsilon) = \frac{P_1^*(z, \varepsilon)}{Q_1^*(z)},$$

где  $P_1^*(z, \varepsilon)$  и  $Q_1^*(z)$  — многочлены относительно переменного  $z$ :

$$P_1^*(z, \varepsilon) = a_0(\varepsilon)z^l + a_1(\varepsilon)z^{l-1} + \dots + a_{l-1}(\varepsilon)z + a_l(\varepsilon),$$

$$Q_1^*(z) = b_0z^k + b_1z^{k-1} + \dots + b_{k-1}z + b_k.$$

Таким образом, вид передаточной функции упрощается, что в некоторых случаях облегчает ее использование при анализе и синтезе импульсных систем автоматического регулирования. Дискретное преобразование Лапласа применяется также и для описания многомерных импульсных систем.

Рассмотрим, например, синхронную и синфазную многомерную импульсную систему (см. рис. 166), непрерывная часть которой описывается системой дифференциальных уравнений (30) § 51. Импульсные элементы, осуществляющие модуляцию входных сигналов, описываются уравнениями (31) § 51. Уравнение такой импульсной системы при нулевых начальных условиях (см. уравнение (41) § 51) имеет вид

$$x[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n K[n-m, \varepsilon] g[m], \quad (27)$$

где  $x[n, \varepsilon]$  и  $g[n]$  — векторы, характеризующие соответственно входные и выходные величины системы, а матрица  $K[n, \varepsilon]$  определяется из соотношения (39) § 51. В скалярных обозначениях уравнение (27) можно записать как систему уравнений следующего вида:

$$x_i[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n \sum_{j=1}^r k_{ij}[n-m, \varepsilon] g_j[m] \quad (i=1, \dots, N), \quad (28)$$

где  $k_{ij}[n, \varepsilon]$  — элементы матрицы  $K[n, \varepsilon]$ .

Применим  $\mathcal{D}$ -преобразование к обеим частям каждого из уравнений этой системы, тогда получим систему уравнений относительно изображений:

$$X_i^*(q, \varepsilon) = \sum_{j=1}^r K_{ij}^*(q, \varepsilon) G_j^*(q) \quad (i=1, \dots, N), \quad (29)$$

где  $K_{ij}^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{k_{ij}[n, \varepsilon]\}$ ;

$$X_i^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{x_i[n, \varepsilon]\}; \quad G_j^*(q) = \mathcal{D}\{g_j[n]\}$$

$$(i=1, \dots, N; \quad j=1, \dots, r).$$

Полученную систему уравнений удобно вновь записать в векторном обозначении. Обозначим через  $X^*(q, \varepsilon)$  вектор с координатами  $X_i^*(q, \varepsilon)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ );  $G^*(q)$  вектор с координатами  $G_j^*(q)$  ( $j=1, 2, \dots, r$ );  $K^*(q, \varepsilon)$  — прямоугольную матрицу, образованную элементами  $K_{ij}^*(q, \varepsilon)$  ( $i=1, 2, \dots, N; \quad j=1, 2, \dots, r$ ). С учетом этого

обозначений система уравнений (29) может быть записана как одно матричное уравнение

$$X^*(q, \varepsilon) = K^*(q, \varepsilon) G^*(q). \quad (30)$$

Матрица  $K^*(q, \varepsilon)$  называется *передаточной матрицей системы* \*).

**2. Использование дискретного преобразования Лапласа для решения разностных уравнений.** Дискретное преобразование Лапласа применяется для решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Применение  $\mathcal{D}$ -преобразования к разностным уравнениям позволяет свести разностные уравнения к алгебраическим и разрешить их относительно изображения неизвестной функции. После этого решение разностного уравнения во временной области определяется с помощью обратного  $\mathcal{D}$ -преобразования. Как было показано в § 51, импульсные системы автоматического регулирования описываются разностными уравнениями. Решая эти уравнения с помощью дискретного преобразования Лапласа, можно определить процессы, протекающие в импульсных системах.

Рассмотрим линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами порядка  $k$  вида

$$b_0x[n+k] + b_1x[n+k-1] + \dots + b_{k-1}x[n+1] + b_kx[n] =$$

$$= a_0g[n+l] + a_1g[n+l-1] + \dots + a_{l-1}g[n+1] + a_lg[n] \quad (31)$$

с начальными условиями  $x[0] = x_0, x[1] = x_1, \dots, x[k-1] = x_{k-1}$ . Применяя  $\mathcal{D}$ -преобразование к обеим частям уравнения (31) и полагая, что  $g[0] = g[1] = \dots = g[l-1] = 0$ , найдем с учетом формулы (5) § 53 следующее уравнение относительно изображений:

$$b_0(X^*(q)e^{kq} - e^{kq}x_0 - \dots - e^q x_{k-1}) + b_1(X^*(q)e^{(k-1)q} -$$

$$- e^{(k-1)q}x_0 - \dots - e^q x_{k-2}) + \dots + b_{k-1}(X^*(q)e^q - e^q x_0) +$$

$$+ b_k X^*(q) = \sum_{i=0}^l G^*(q) e^{iq} a_{l-i}, \quad (32)$$

где

$$X^*(q) = \mathcal{D}\{x[n]\}, \quad G^*(q) = \mathcal{D}\{g[n]\}.$$

Введем обозначения:

$$P^*(q) = \sum_{i=0}^l e^{iq} a_{l-i}, \quad Q^*(q) = b_0 e^{kq} + b_1 e^{(k-1)q} + \dots + b_{k-1} e^q + b_k,$$

$$Q_i^*(q) = b_0 e^{(k-i)q} + b_1 e^{(k-i-1)q} + \dots + b_{k-i-1} e^q \quad (i=0, 1, 2, \dots, k-1),$$

с учетом которых уравнение (32) примет вид

$$X^*(q) Q^*(q) - \sum_{i=0}^{k-1} x_i Q_i^*(q) = G^*(q) P^*(q), \quad (33)$$

\* См.: Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. Многомерные дискретные системы. «Наука», 1966, стр. 38.



откуда следует, что изображение решения равно

$$X^*(q) = \frac{P^*(q)}{Q^*(q)} G^*(q) + \sum_{i=0}^{k-1} x_i \frac{Q_i^*(q)}{Q^*(q)}. \quad (34)$$

Если разностное уравнение (31) описывает некоторую импульсную систему во временной области, то (34) является уравнением этой системы в области изображений для случая, когда начальные условия отличны от нуля. В частности, при нулевых начальных условиях и при  $\varepsilon=0$  уравнение (34) совпадает с уравнением (2), причем выражение  $\frac{P^*(q)}{Q^*(q)}$  является передаточной функцией системы. Применяя обратное  $\mathcal{D}$ -преобразование к обеим частям равенства (34) и обозначая

$$k[n] = \mathcal{D}^{-1} \left\{ \frac{P^*(q)}{Q^*(q)} \right\}, \quad k_i[n] = \mathcal{D}^{-1} \left\{ \frac{Q_i^*(q)}{Q^*(q)} \right\} \quad (i=0, 1, \dots, k-1),$$

получим с учетом теоремы 6 § 53 решение разностного уравнения (31) при заданных начальных условиях:

$$x[n] = \sum_{m=0}^n g[m] k[n-m] + \sum_{i=0}^{k-1} k_i[n] x_i. \quad (35)$$

При определении  $\mathcal{D}^{-1}$ -преобразования от дробно-рациональных функций переменного  $e^q$

$$\frac{P^*(q)}{Q^*(q)}, \frac{Q_0^*(q)}{Q^*(q)}, \dots, \frac{Q_{k-1}^*(q)}{Q^*(q)}$$

следует пользоваться формулами (24) или (21) § 52.

**Пример 4.** Определить решение разностного уравнения

$$x[n+2] + 6x[n+1] + 5x[n] = 2g[n+1] + g[n]. \quad (36)$$

Начальные условия нулевые:  $x[0]=0$ ,  $x[1]=0$ . Известно также, что  $g[0]=0$ . Применяя  $\mathcal{D}$ -преобразование к обеим частям уравнения (37), получим

$$X^*(q) (e^{2q} + 6e^q + 5) = (2e^q + 1) G^*(q),$$

откуда следует, что

$$X^*(q) = G^*(q) \frac{2e^q + 1}{e^{2q} + 6e^q + 5}. \quad (37)$$

Найдем  $\mathcal{D}^{-1}$ -преобразование функции  $\frac{2e^q + 1}{e^{2q} + 6e^q + 5}$  по формуле (21) § 52. Заменяя переменную по формуле  $z = e^q$ , получим

$$\mathcal{D}^{-1} \left\{ \frac{2z + 1}{z^2 + 6z + 5} \right\} = \mathcal{D}^{-1} \left\{ \frac{2z + 1}{(z+5)(z+1)} \right\} = \text{Res} \frac{(2z+1)z^{n-1}}{(z+5)(z+1)} \Big|_{z=-1} + \\ + \text{Res} \frac{(2z+1)z^{n-1}}{(z+5)(z+1)} \Big|_{z=-5} = \frac{1-9 \cdot 5^{n-1}}{4} (-1)^n.$$

Решение неоднородного разностного уравнения (37) определяется формулой (35), из которой при нулевых начальных условиях получим

$$x[n] = \sum_{m=0}^n g[m] (-1)^{n-m} \frac{1-9 \cdot 5^{n-m-1}}{4}. \quad (38)$$

Перейдем к решению с помощью  $\mathcal{D}$ -преобразования систем разностных уравнений. Рассмотрим следующую систему разностных уравнений с постоянными коэффициентами порядка  $kv$ :

$$\sum_{j=1}^v b_{ij}^0 x_j[n+k] + b_{ij}^1 x_j[n+k-1] + \dots + b_{ij}^k x_j[n] = \\ = \sum_{j=1}^v a_{ij}^0 g_j[n+l] + a_{ij}^1 g_j[n+l-1] + \dots + a_{ij}^l g_j[n] \\ (i=1, 2, \dots, v; k \geq l). \quad (39)$$

Начальные условия задаются матрицей

$$X^0 = [x_{ji}] \quad (j=1, 2, \dots, v; i=0, 1, \dots, k-1), \quad \text{где } x_{ji} = x_j[i].$$

Сначала предположим, что матрица начальных условий нулевая. Будем также предполагать, что выполнено условие

$$g_j[i] = 0 \quad (i=0, 1, \dots, l-1, j=1, 2, \dots, v).$$

Применяя  $\mathcal{D}$ -преобразование к обеим частям каждого из равенств (39), получим следующую систему уравнений относительно изображений:

$$\sum_{j=1}^v (b_{ij}^0 e^{kq} + b_{ij}^1 e^{(k-1)q} + \dots + b_{ij}^k) X_j^*(q) = \\ = \sum_{j=1}^v (a_{ij}^0 e^{lq} + a_{ij}^1 e^{(l-1)q} + \dots + a_{ij}^l) G_j^*(q) \quad (i=1, 2, \dots, v), \quad (40)$$

где  $X_j^*(q) = \mathcal{D} \{x_j[n]\}$ ;  $G_j^*(q) = \mathcal{D} \{g_j[n]\}$ .

Введем обозначения:

$$b_{ij}^0 e^{kq} + b_{ij}^1 e^{(k-1)q} + \dots + b_{ij}^k = Q_{ij}^*(q), \\ a_{ij}^0 e^{lq} + a_{ij}^1 e^{(l-1)q} + \dots + a_{ij}^l = P_{ij}^*(q),$$

тогда полученную систему уравнений можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^v Q_{ij}^*(q) X_j^*(q) = \sum_{j=1}^v P_{ij}^*(q) G_j^*(q) \quad (i=1, 2, \dots, v), \quad (41)$$

Обозначим  $X^*(q)$  и  $G^*(q)$  — векторы-столбцы с компонентами  $X_j^*(q)$  и  $G_j^*(q)$  ( $j=1, 2, \dots, v$ ) соответственно. Введем в рассмотрение матрицы

$$Q^*(q) = [Q_{ij}^*(q)], \quad P^*(q) = [P_{ij}^*(q)] \quad (i=1, 2, \dots, v; j=1, 2, \dots, v).$$

С учетом этих обозначений систему уравнений (41) можно записать в векторном виде:

$$Q^*(q) X^*(q) = P^*(q) G^*(q). \quad (42)$$

Из найденного векторного уравнения определим изображение решения:

$$X^*(q) = Q^{*-1}(q) P^*(q) G^*(q). \quad (43)$$



Обозначая  $K^*(q) = Q^{*-1}(q) P^*(q)$ , получим

$$X^*(q) = K^*(q) G^*(q). \quad (44)$$

Если система разностных уравнений (39) описывает некоторую многомерную импульсную систему автоматического регулирования с  $v$  входными величинами  $g_i[n]$  и  $v$  выходными величинами  $x_i[n]$ , то уравнение (44) является уравнением этой системы в изображениях. Уравнение (44) имеет тот же вид, что и уравнение (30), полученное выше для многомерной импульсной системы, причем матрица  $K^*(q)$  является передаточной матрицей рассматриваемой импульсной системы. Заметим, что матрица  $K^*(q)$  определена лишь при тех значениях переменной  $q$ , при которых невырождена матрица  $Q^*(q)$ , т. е.

$$\det Q^*(q) \neq 0.$$

Это неравенство выполняется для всех значений переменной  $q$ , за исключением тех значений, которые являются корнями характеристического уравнения системы разностных уравнений (39), имеющего вид

$$\det Q_i^*(\lambda) = 0,$$

где  $Q_i^*(\lambda) |_{\lambda=e^q} = Q^*(q)$ .

Уравнение (43) эквивалентно системе уравнений

$$X_i^*(q) = \sum_{j=1}^v K_{ij}^*(q) G_j^*(q) \quad (i=1, \dots, v), \quad (45)$$

где  $K_{ij}^*(q)$  — элементы матрицы  $K^*(q)$ .

Выполняя обратное дискретное преобразование Лапласа над каждым из этих уравнений, найдем решение системы (39):

$$x_i[n] = \sum_{j=1}^v \sum_{m=0}^n k_{ij}[n-m] g_j[m] \quad (i=1, \dots, v), \quad (46)$$

где  $k_{ij}[n] = \mathcal{D}^{-1}\{K_{ij}^*(q)\}$ . Или в векторных обозначениях

$$x[n] = \sum_{m=0}^n K[n-m] g[m], \quad (47)$$

где  $K[n] = [k_{ij}[n]]$  — матрица, играющая роль весовой функции импульсной системы.

Заметим, что использование  $\mathcal{D}$ -преобразования для решения систем разностных уравнений не встречает принципиальных трудностей по сравнению с применением этого преобразования для решения отдельных уравнений. По-прежнему задача сводится к определению  $\mathcal{D}^{-1}$ -преобразования от дробно-рациональных функций переменной  $e^q$ , являющихся элементами матрицы  $K^*(q)$ .

В том случае когда начальные условия не предполагаются нулевыми,  $\mathcal{D}$ -преобразование разностных уравнений системы (39) приво-

дит к следующим уравнениям относительно изображений:

$$\sum_{j=1}^v \left\{ Q_{ij}^*(q) X_j^*(q) + \sum_{s=0}^{k-1} Q_{ij}^{s*}(q) x_{js} \right\} = \sum_{j=1}^v P_{ij}^*(q) G_j^*(q) \quad (i=1, \dots, v), \quad (48)$$

где

$$Q_{ij}^{s*}(q) = b_{ij}^0 e^{(k-s)q} + b_{ij}^1 e^{(k-s-1)q} + \dots + b_{ij}^{k-s-1} e^q \quad (s=0, 1, \dots, k-1).$$

В векторных обозначениях мы можем записать систему (48) в виде

$$Q^*(q) X^*(q) + \sum_{s=0}^{k-1} Q_s^*(q) x_s^0 = P^*(q) G^*(q), \quad (49)$$

где  $Q_s^*(q) = [Q_{ij}^{s*}(q)]$ ;  $x_s^0$  — вектор-столбец с компонентами  $x_{js}$ . Из уравнения (49) найдем

$$X^*(q) = Q^{*-1}(q) P^*(q) G^*(q) - \sum_{s=0}^{k-1} Q^{*-1}(q) Q_s^*(q) x_s^0. \quad (50)$$

Переходя к оригиналам по формулам  $\mathcal{D}^{-1}$ -преобразования, получим решение системы (39) при произвольных начальных условиях.

**3. Применение дискретного преобразования Лапласа для определения процессов в импульсных системах при типовых воздействиях.** При исследовании импульсных систем автоматического регулирования обычно интересуются процессами, возникающими на выходе системы при некоторых типовых воздействиях, приложенных к ее входу. Такими воздействиями являются, например, единичное ступенчатое и гармоническое воздействия. Применим  $\mathcal{D}$ -преобразование для определения реакции импульсной системы на указанные воздействия при нулевых начальных условиях. Будем рассматривать импульсную систему с одним импульсным элементом, которая при нулевых начальных условиях описывается уравнением (17), причем передаточная функция системы  $\Phi^*(q, \varepsilon)$  и изображение входной величины  $G^*(q)$  — известны. В этом случае процесс на выходе системы можно определить по формуле

$$x[n, \varepsilon] = \mathcal{D}^{-1}\{\Phi^*(q, \varepsilon) G^*(q)\}.$$

Воспользуемся этой формулой для определения реакции импульсной системы на единичное ступенчатое воздействие  $g(t) = 1(t)$ . Учитывая формулу (7) § 52, получим

$$x[n, \varepsilon] = \mathcal{D}^{-1}\left\{\Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^q}{e^q - 1}\right\}. \quad (51)$$

Для вычисления обратного дискретного преобразования Лапласа воспользуемся формулой обращения (24) § 52. Имеем

$$x[n, \varepsilon] = \sum_{v=0}^k \text{Res } \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^q e^{q(n-1)}}{e^q - 1} \Big|_{q=q_v}, \quad (52)$$

где вычеты берутся в полюсе  $q_0=0$  и в полюсах  $q=q_v$  ( $v=1, 2, \dots, k$ ) передаточной функции  $\Phi^*(q, \varepsilon)$ . Будем предполагать, что все полюсы  $q=q_v$  ненулевые. Найдем вычет в точке  $q_0=0$  по формуле (25) § 52:

$$\text{Res } \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^{qn}}{e^q - 1} \Big|_{q=0} = \lim_{q \rightarrow 0} \Phi^*(q, \varepsilon) e^{qn} = \Phi^*(0, \varepsilon). \quad (53)$$

Определим теперь вычеты в полюсах передаточной функции  $\Phi^*(q, \varepsilon)$ . Для простых полюсов получим

$$\text{Res } \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^{qn}}{e^q - 1} \Big|_{q=q_v} = \lim_{q \rightarrow q_v} \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^{qn} (e^q - e^{q_v})}{e^q - 1}. \quad (54)$$

Учитывая, что функция  $\Phi^*(q, \varepsilon)$  является дробно-рациональной по отношению к переменной  $e^q$ , и обозначая

$$\Phi^*(q, \varepsilon) = \frac{P^*(q, \varepsilon)}{Q^*(q)},$$

где  $P^*(q, \varepsilon)$ ,  $Q^*(q)$  — полиномы относительно переменной  $e^q$ , найдем, что

$$\begin{aligned} \text{Res } \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^{qn}}{e^q - 1} \Big|_{q=q_v} &= \lim_{q \rightarrow q_v} \frac{P^*(q, \varepsilon)}{Q^*(q)} \cdot \frac{e^{qn} (e^q - e^{q_v})}{e^q - 1} = \\ &= \frac{P^*(q_v, \varepsilon)}{Q^*(q_v) (e^{q_v} - 1)} e^{q_v n}. \end{aligned} \quad (55)$$

Если  $q_v$  — полюс кратности  $r_v$ , то соответствующий вычет по формуле (25) § 52 равен

$$\begin{aligned} \text{Res } \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^{qn}}{e^q - 1} \Big|_{q=q_v} &= \frac{1}{(r_v - 1)!} \lim_{q \rightarrow q_v} \frac{d^{r_v-1}}{de^{q(r_v-1)}} \times \\ &\times \left[ \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^{qn} (e^q - e^{q_v})^{r_v}}{e^q - 1} \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Выполним дифференцирование функции, стоящей в скобках, рассматривая ее как произведение функции  $e^{qn}$  и функции

$$H^*(q, \varepsilon) = \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{(e^q - e^{q_v})^{r_v}}{e^q - 1}.$$

При этом последовательно определим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{de^q} (e^{qn} H^*(q, \varepsilon)) &= e^{qn} \frac{dH^*(q, \varepsilon)}{de^q} + n e^{q(n-1)} H^*(q, \varepsilon), \\ \frac{d^2}{de^{2q}} (e^{qn} H^*(q, \varepsilon)) &= e^{qn} \frac{d^2 H^*(q, \varepsilon)}{de^{2q}} + 2n e^{q(n-1)} \frac{dH^*(q, \varepsilon)}{de^q} + \\ &+ H^*(q, \varepsilon) n(n-1) e^{q(n-2)}, \\ &\dots \\ \frac{d^{r_v-1}}{de^{(r_v-1)q}} (e^{qn} H^*(q, \varepsilon)) &= \sum_{j=0}^{r_v-1} \frac{d^{r_v-1-j} H^*(q, \varepsilon)}{de^{(r_v-1-j)q}} n^{(j)} e^{q(n-j)} \binom{r_v-1}{j}, \end{aligned} \quad (57)$$

где  $\binom{r_v-1}{j} = \frac{(r_v-1)!}{j!(r_v-1-j)!}$  — биномиальный коэффициент, а  $n^{(j)} = n(n-1)\dots(n-j+1)$  — факториальная функция;  $n^{(0)} = 1$ . Обозначим

$$C_j^v(\varepsilon) = \frac{d^j H^*(q, \varepsilon)}{de^{jq}} \Big|_{q=q_v}, \quad (58)$$

тогда выражение для вычета при  $q=q_v$  примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{Res } \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^{qn}}{e^q - 1} \Big|_{q=q_v} &= \frac{1}{(r_v-1)!} \sum_{j=0}^{r_v-1} C_{r_v-1-j}^v(\varepsilon) \binom{r_v-1}{j} n^{(j)} e^{q_v(n-j)} = \\ &= \sum_{j=0}^{r_v-1} C_{r_v-1-j}^v(\varepsilon) \frac{n^{(j)} e^{q_v(n-j)}}{j!(r_v-1-j)!}. \end{aligned} \quad (59)$$

Если каждый из полюсов  $q_v$  ( $v=1, \dots, r$ ) передаточной функции  $\Phi^*(q, \varepsilon)$  имеет кратность  $r_v$ , то в соответствии с формулами (52), (53), (59) получим:

$$x[n, \varepsilon] = \Phi^*(0, \varepsilon) + \sum_{v=1}^k \sum_{j=0}^{r_v-1} C_{r_v-1-j}^v(\varepsilon) \frac{n^{(j)} e^{q_v(n-j)}}{j!(r_v-1-j)!}. \quad (60)$$

В частности, если все полюсы простые, то формула (60) упрощается и принимает вид

$$x[n, \varepsilon] = \Phi^*(0, \varepsilon) + \sum_{v=1}^k C_0^v(\varepsilon) e^{q_v n}, \quad (61)$$

где

$$C_0^v(\varepsilon) = \frac{P^*(q_v, \varepsilon)}{Q^*(q_v) (e^{q_v} - 1)}. \quad (62)$$

Выражение (60) характеризует реакцию импульсной системы на единичное ступенчатое воздействие. Первое слагаемое, стоящее в правой части, описывает установившийся процесс в системе, а второе — переходный процесс. Из равенства (60) следует, что в том случае, когда все полюсы имеют отрицательные вещественные части  $\text{Re } q_v < 0$  ( $v=1, \dots, k$ ), второе слагаемое в правой части равенства будет в течение времени стремиться к нулю. При этом получим выражение для установившегося процесса в системе

$$x_y[n, \varepsilon] = \lim_{n \rightarrow \infty} x[n, \varepsilon] = \Phi^*(0, \varepsilon). \quad (63)$$

Таким образом, установившийся процесс в импульсной системе можно определить непосредственно по ее передаточной функции. Установившийся процесс можно определить и с помощью весовой функции  $k[n, \varepsilon] = \mathcal{Z}^{-1}\{\Phi^*(q, \varepsilon)\}$ :

$$x_y[n, \varepsilon] = \Phi^*(0, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} k[n, \varepsilon]. \quad (64)$$

**Пример 5.** Рассмотрим разомкнутую импульсную систему (см. рис. 158). Предположим, что импульсная переходная функция непрерывной части системы  $k_n(t) = k_0 e^{-\beta t}$  ( $\beta \geq 0$ ). Модуляция осуществляется с помощью последовательности прямоугольных импульсов шириной  $\gamma T$  ( $\gamma < 1$ ). Требуется определить с помощью  $\mathcal{D}$ -преобразования реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие  $g(t) = 1(t)$  при нулевых начальных условиях.

Передаточная функция  $W^*(q, \varepsilon)$  рассматриваемой импульсной системы получена в примере 2 (см. формулу (23)). Эта передаточная функция имеет один простой полюс  $q_0 = -\beta$ . Используя формулу (61), получим следующее выражение для процесса на выходе системы:

$$x[n, \varepsilon] = W^*(0, \varepsilon) + C_0(\varepsilon) e^{q_0 n}. \quad (65)$$

Используя для определения коэффициента  $C_0(\varepsilon)$  формулу (62), найдем с учетом формулы (23) реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие. Имеем:

а) при  $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$

$$x[n, \varepsilon] = k_n \left( 1 - \frac{1 - e^{-\beta(\varepsilon - \gamma)}}{1 - e^{-\beta \varepsilon}} e^{-\beta \varepsilon} \right) - k_n \frac{e^{-\beta} - e^{-\beta(\varepsilon - \gamma)}}{e^{-\beta} - 1} e^{-\beta(n + \varepsilon)}; \quad (66)$$

б) при  $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$

$$x[n, \varepsilon] = \frac{k_n}{1 - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon} (e^{\beta \gamma} - 1) + \frac{k_n e^{-\beta} e^{-\beta \varepsilon} (e^{\beta \gamma} - 1)}{e^{-\beta} - 1} e^{-\beta n}; \quad (67)$$

С помощью элементарных преобразований выражения (66) и (67) можно привести к выражениям (22), (23) § 51 соответственно, полученным другим способом в примере 2 § 51.

Применим теперь  $\mathcal{D}$ -преобразование для того, чтобы определить реакцию импульсной системы с передаточной функцией  $\Phi^*(q, \varepsilon)$  на гармоническое воздействие  $g[n] = A_1 \cos(\omega_1 n + \varphi)$ . Сначала найдем реакцию системы  $z[n, \varepsilon]$  на воздействие  $f[n] = A_1 e^{j(\omega_1 n + \varphi)}$ , а затем рассмотрим вещественную часть  $x[n, \varepsilon] = \operatorname{Re} z[n, \varepsilon]$  полученного выражения, которая и определяет реакцию системы на воздействие  $g[n] = \operatorname{Re} f[n]$ . Изображение входного воздействия определим по формуле (8) § 52:

$$F^*(q) = \mathcal{D} \{ A_1 e^{j(\omega_1 n + \varphi)} \} = A_1 e^{j\varphi} \frac{e^q}{e^q - e^{j\omega_1}}. \quad (68)$$

В соответствии с формулой (24) § 52 получим:

$$z[n, \varepsilon] = \mathcal{D}^{-1} \left\{ \Phi^*(q, \varepsilon) A_1 e^{j\varphi} \frac{e^q}{e^q - e^{j\omega_1}} \right\} = A_1 e^{j\varphi} \sum_{v=0}^k \operatorname{Res} \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^q e^{q(n-1)}}{e^q - e^{j\omega_1}} \Big|_{q=q_v} \quad (69)$$

Здесь вычеты берутся в полюсах  $q_1, \dots, q_k$  передаточной функции импульсной системы  $\Phi^*(q, \varepsilon)$  и в точке  $q_0 = j\omega_1$ . Будем предполагать, что функция  $\Phi^*(q, \varepsilon)$  не имеет полюсов на мнимой оси плоскости комплексного переменного  $q$ . Тогда вычет в точке  $q_0 = j\omega_1$

равен

$$\operatorname{Res} \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^{qn}}{e^q - e^{j\omega_1}} \Big|_{q=j\omega_1} = \lim_{q \rightarrow j\omega_1} \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^{qn} (e^q - e^{j\omega_1})}{e^q - e^{j\omega_1}} = \Phi^*(j\omega_1, \varepsilon) e^{j\omega_1 n}. \quad (70)$$

Вычет в простом полюсе  $q_v$  функции  $\Phi^*(q, \varepsilon)$  определяется по формуле (25) § 52:

$$\operatorname{Res} \Phi(q, \varepsilon) \frac{e^{qn}}{e^q - e^{j\omega_1}} \Big|_{q=q_v} = \lim_{q \rightarrow q_v} \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^{qn} (e^q - e^{q_v})}{e^q - e^{j\omega_1}} = \frac{P^*(q_v, \varepsilon)}{\dot{Q}^*(q_v) (e^{q_v} - e^{j\omega_1})} e^{q_v n}. \quad (71)$$

Вычеты в полюсах кратности  $r_v$  также определяются формулой (25) § 52, т. е.

$$\operatorname{Res} \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^{qn}}{e^q - e^{j\omega_1}} \Big|_{q=q_v} = \frac{1}{(r_v - 1)!} \lim_{q \rightarrow q_v} \frac{d^{(r_v - 1)}}{dq^{(r_v - 1)}} \left[ \Phi^*(q, \varepsilon) (e^q - e^{q_v})^{r_v} \frac{e^{qn}}{e^q - e^{j\omega_1}} \right]. \quad (72)$$

Вводя обозначения

$$H^*(q, \omega_1, \varepsilon) = \frac{\Phi^*(q, \varepsilon) (e^q - e^{q_v})^{r_v}}{e^q - e^{j\omega_1}}, \quad (73)$$

$$C_v^*(\omega_1, \varepsilon) = \frac{d^{(r_v - 1)} H^*(q, \omega_1, \varepsilon)}{dq^{(r_v - 1)}} \Big|_{q=q_v}, \quad (74)$$

и проводя те же рассуждения, что и при выводе равенства (59), получим:

$$\operatorname{Res} \Phi^*(q, \varepsilon) \frac{e^{qn}}{e^q - e^{j\omega_1}} \Big|_{q=q_v} = \sum_{i=0}^{r_v - 1} C_{r_v - 1 - i}^*(\omega_1, \varepsilon) \frac{n^{(i)} e^{q_v n (n - i)}}{i! (r_v - 1 - i)!}. \quad (75)$$

В частности, для простого полюса  $q_v$

$$C_0^*(\omega_1, \varepsilon) = \frac{P^*(q_v, \varepsilon)}{\dot{Q}^*(q_v) (e^{q_v} - e^{j\omega_1})}. \quad (76)$$

Предполагая, что полюс  $q_v$  функции  $\Phi^*(q, \varepsilon)$  имеет кратность  $r_v$  ( $v = 1, \dots, k$ ), можно записать выражение, определяющее реакцию импульсной системы на воздействие  $f[n]$ , следующим образом:

$$z[n, \varepsilon] = A_1 e^{j(\varphi + \omega_1 n)} \Phi^*(j\omega_1, \varepsilon) + A_1 e^{j\varphi} \sum_{v=1}^k \sum_{i=0}^{r_v - 1} C_{r_v - 1 - i}^*(\omega_1, \varepsilon) \frac{n^{(i)} e^{q_v n (n - i)}}{i! (r_v - 1 - i)!}. \quad (77)$$

В частности, если все полюсы функции  $\Phi^*(q, \varepsilon)$  простые, то

$$z[n, \varepsilon] = A_1 e^{j(\varphi + \bar{\omega}_1 n)} \Phi^*(j\bar{\omega}_1, \varepsilon) + A_1 e^{j\varphi} \sum_{\nu=1}^k C_\nu(\bar{\omega}_1, \varepsilon) e^{q_\nu n}. \quad (78)$$

Если действительные части всех полюсов  $q$ , отрицательны, то второе слагаемое в выражении (77) будет стремиться к нулю с течением времени, а первое слагаемое будет характеризовать установившийся процесс в системе

$$z_y[n, \varepsilon] = \lim_{n \rightarrow \infty} z[n, \varepsilon] = A_1 e^{j(\varphi + \bar{\omega}_1 n)} \Phi^*(j\bar{\omega}_1, \varepsilon). \quad (79)$$

Рассматривая действительную часть комплексной решетчатой функции  $z[n, \varepsilon]$ , определим реакцию импульсной системы  $x[n, \varepsilon]$  на заданное гармоническое воздействие. В частности, установившийся процесс в импульсной системе определяется выражением

$$x_y[n, \varepsilon] = \operatorname{Re} z_y[n, \varepsilon] = A_1 |\Phi^*(j\bar{\omega}_1, \varepsilon)| \cos(\bar{\omega}_1 n + \varphi + \arg \Phi^*(j\bar{\omega}_1, \varepsilon)). \quad (80)$$

Функция  $\Phi^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)$ , получающаяся из передаточной функции  $\Phi^*(q, \varepsilon)$  при  $q = j\bar{\omega}$ , называется *амплитудно-фазовой частотной характеристикой импульсной системы*. Физический смысл амплитудно-фазовой частотной характеристики виден из формулы (80). Модуль этой характеристики определяет изменение амплитуды гармонического воздействия  $g[n] = A_1 \cos(\bar{\omega}_1 n + \varphi)$  при прохождении через импульсную систему, а ее аргумент определяет изменение фазы приложенного гармонического воздействия. Таким образом, амплитудно-фазовая частотная характеристика импульсной системы сохраняет тот же физический смысл, что и амплитудно-фазовая частотная характеристика непрерывной системы (§ 39). В отличие от частотных характеристик непрерывных систем частотные характеристики импульсных систем являются периодическими функциями с периодом  $2\pi$ , что следует из периодичности изображений:

$$\Phi^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = \Phi^*(j(\bar{\omega} + 2\pi r), \varepsilon) \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (81)$$

Поэтому частотная характеристика  $\Phi^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)$  полностью определяется своими значениями в интервале шириной  $2\pi$ . Будем, как и выше, рассматривать интервал, лежащий в основной полосе  $-\pi < \bar{\omega} \leq \pi$ . Импульсная система, в отличие от непрерывной, описывается семейством частотных характеристик  $\Phi^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)$  при  $0 \leq \varepsilon < 1$ , а не одной частотной характеристикой. Однако, при исследовании импульсных систем, в ряде случаев оказывается достаточным знать частотную характеристику только при одном значении  $\varepsilon = 0$ .

При исследовании импульсных систем применяются годографы частотных характеристик  $\Phi^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)$  (см. § 58).

**Пример 6.** Построить годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой импульсной системы (см. рис. 158). В системе осуществляется модуляция входного сигнала с помощью последовательности кратковременных импульсов, причем выполняется условие (1) § 51. Непрерывная

часть системы представляет собой аperiodическое звено с передаточной функцией

$$W_{\text{н}}(s) = \frac{1}{T_1 s + 1}.$$

Передаточная функция рассматриваемой импульсной системы, полученная в примере 1, равна

$$W^*(q, \varepsilon) = k \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon},$$

где  $k$  — постоянный коэффициент;  $\beta = \frac{T}{T_1}$ . Полагая  $q = j\bar{\omega}$ , определим амплитудно-фазовую частотную характеристику импульсной системы

$$W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = k \frac{e^{j\bar{\omega}\varepsilon}}{e^{j\bar{\omega}\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon}} e^{-\beta\varepsilon}.$$

Построим годограф полученной частотной характеристики при  $\varepsilon = 0$ . Выражение

$$W^*(j\bar{\omega}) = \frac{k e^{j\bar{\omega}}}{e^{j\bar{\omega}} - e^{-\beta}}$$

определяет отображение единичной окружности

$$z = e^{j\bar{\omega}} \quad (-\pi < \bar{\omega} \leq \pi)$$

с помощью дробно-рациональной функции

$$W_1^*(z) = \frac{kz}{z - e^{-\beta}}.$$

Известно (см. § 25), что дробно-рациональная функция отображает окружность либо в окружность, либо в прямую. Прямая получается в том случае, когда полюс  $z = e^{-\beta}$  функции  $W_1^*(z)$  лежит на отображаемой окружности, или, что то же самое, точка  $q = -\beta$  лежит на мнимой оси. Поскольку  $\beta$  — положительное вещественное число, то функция  $W_1^*(z)$  отображает окружность в окружность. По формуле (31) § 52 имеем

$$W^*(j\bar{\omega}) = \overline{W^*(-j\bar{\omega})}.$$

Из этого равенства следует, что при изменении знака у аргумента  $\bar{\omega}$  действительная часть функции  $W^*(j\bar{\omega})$  остается без изменения, а мнимая часть меняет знак, т. е. годограф функции  $W^*(j\bar{\omega})$  симметричен относительно вещественной оси. Поэтому обычно строят только половину этого годографа при  $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$ . При  $\bar{\omega} = 0$  и  $\bar{\omega} = \pi$  частотная характеристика  $W^*(j\bar{\omega})$  всегда принимает действительные значения, что следует из формулы прямого  $\mathcal{Z}$ -преобразования (1) § 52. В рассматриваемом примере

$$W^*(j0) = \frac{k}{1 - e^{-\beta}}, \quad W^*(j\pi) = \frac{-k}{-1 - e^{-\beta}} = \frac{k}{1 + e^{-\beta}}.$$

Таким образом, годограф  $W^*(j\bar{\omega})$  является окружностью (рис. 171) с центром, расположенным на вещественной оси в точке

$$c = \frac{W^*(j0) + W^*(j\pi)}{2} = \frac{k}{1 - e^{-2\beta}}.$$

При построении годографов амплитудно-фазовых частотных характеристик разомкнутых импульсных систем можно воспользоваться

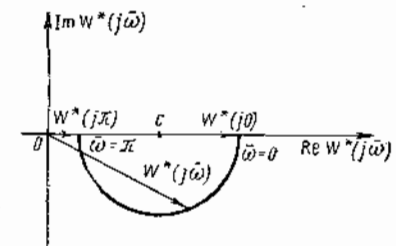


Рис. 171

соответствием между амплитудно-фазовыми частотными характеристиками импульсной системы и приведенной непрерывной части. Это соответствие задается формулой прямого  $\mathcal{F}$ -преобразования при  $q = j\omega$  (см. формулу (7) § 54):

$$W^*(j\omega, \varepsilon) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(j(\omega + 2\pi r)) e^{\varepsilon j(\omega + 2\pi r)}. \quad (82)$$

Можно также использовать формулу (9) § 54, в которую войдет амплитудно-фазовая частотная характеристика приведенной непрерывной части в обычном масштабе частоты  $\omega$ :

$$W^*(j\omega T, \varepsilon) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W_1(j(\omega + r\omega_0)) e^{\varepsilon T j(\omega + r\omega_0)}. \quad (83)$$

Если известны действительная и мнимая части частотной характеристики приведенной непрерывной части, то можно воспользоваться следующими формулами, которые вытекают из равенства (83):

$$\operatorname{Re} W^*(j\omega T, \varepsilon) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} W_1(j(\omega + r\omega_0)) e^{\varepsilon T j(\omega + r\omega_0)}, \quad (84)$$

$$\operatorname{Im} W^*(j\omega T, \varepsilon) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} W_1(j(\omega + r\omega_0)) e^{\varepsilon T j(\omega + r\omega_0)}. \quad (85)$$

В частности, при  $\varepsilon = 0$  получим \*)

$$\operatorname{Re} W^*(j\omega T) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} W_1(j(\omega + r\omega_0)), \quad (86)$$

$$\operatorname{Im} W^*(j\omega T) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} W_1(j(\omega + r\omega_0)). \quad (87)$$

Таким образом, для определения частотных характеристик импульсной системы  $\operatorname{Re} W^*(j\omega T)$  и  $\operatorname{Im} W^*(j\omega T)$  достаточно просуммировать соответствующие частотные характеристики приведенной непрерывной части  $\operatorname{Re} W_1(j\omega)$  и  $\operatorname{Im} W_1(j\omega)$ , смещенные на  $r\omega_0$  ( $r = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ). На рис. 172, а изображены частотные характеристики  $\operatorname{Re} W^*(j\omega T)$  и  $\operatorname{Im} W^*(j\omega T)$  импульсной системы, построенные в соответствии с формулами (86) и (87) по частотным характеристикам приведенной непрерывной части  $\operatorname{Re} W_1(j\omega)$  и  $\operatorname{Im} W_1(j\omega)$ , изображенным на рис. 172, б.

Зная вещественную и мнимую части функции  $W^*(j\omega, \varepsilon)$ , можно построить годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики.

\*) См. замечание на стр. 611.

а также амплитудно-частотную  $|W^*(j\omega, \varepsilon)|$  и фазо-частотную  $\arg W^*(j\omega, \varepsilon)$  характеристики импульсной системы.

Заметим, что при увеличении частоты повторения  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  частотные характеристики разомкнутой импульсной системы в интер-

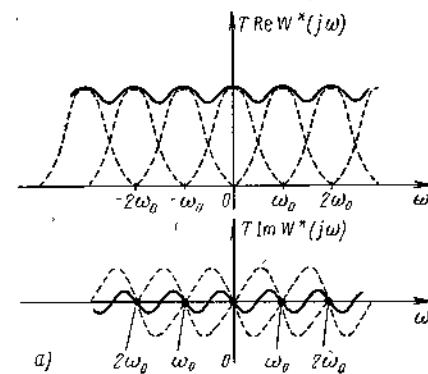


Рис. 172

вале частот  $-\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2}$  приближаются к частотным характеристикам приведенной непрерывной части. Предположим, что с достаточной для практики точностью можно считать, что частотная характеристика приведенной непрерывной ча-

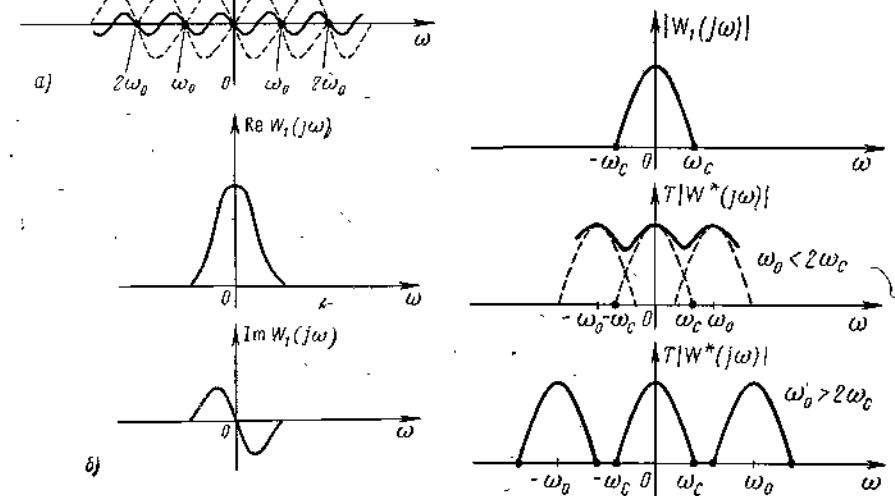


Рис. 173

сти обращается в ноль, начиная с некоторой частоты  $\omega_c$ , т. е.

$$|W_1(j\omega)| \equiv 0 \quad \text{при} \quad |\omega| > \omega_c. \quad (88)$$

Выберем частоту повторения  $\omega_0$  из условия  $\omega_0 \geq 2\omega_c$ . На рис. 173 показано, что в этом случае частотные характеристики разомкнутой импульсной системы совпадают на интервале частот  $|\omega| < \omega_0 - \omega_c$  с частотными характеристиками приведенной непрерывной части с точностью до постоянного коэффициента  $\frac{1}{T}$ .

**УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ  
УРАВНЕНИЙ. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ  
ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
РЕГУЛИРОВАНИЯ**

## § 57. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Основные теоремы об устойчивости решений систем линейных разностных уравнений. Понятие устойчивости по Ляпунову решений разностных уравнений вводится по аналогии с понятием устойчивости решений дифференциальных уравнений. Для разностных уравнений можно доказать те же основные теоремы об устойчивости, которые справедливы для дифференциальных уравнений. Методы исследования устойчивости, которые были рассмотрены в гл. VI при изучении дифференциальных уравнений, в большинстве случаев могут быть использованы и в случае разностных уравнений.

Будем предполагать, что система разностных уравнений может быть записана в нормальном виде

$$x_i[n+1] = F_i[n, x_1[n], \dots, x_k[n]] \quad (i=1, 2, \dots, k), \quad (1)$$

причем функции  $F_i[n, x_1, \dots, x_k]$  определены при всех значениях своих аргументов  $n, x_1, \dots, x_k$ , ограничены и однозначны. В этом случае решение системы разностных уравнений (1), определяемое начальными условиями при  $n=n_0, x_i[n_0]=x_{i0}$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ), существует и единственно.

Запишем систему (1) в векторном виде:

$$x[n+1] = F[n, x[n]], \quad (2)$$

где  $x[n+1]$  — вектор-столбец с компонентами  $x_i[n+1]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ), а  $F[n, x[n]]$  — вектор-столбец, составленный из функций  $F_i[n, x_1[n], \dots, x_k[n]]$ . Введем норму вектора  $x[n]$  по формуле

$$\|x[n]\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2[n]}. \quad (3)$$

Теперь можно определить устойчивость по Ляпунову произвольного решения  $\xi[n]$  векторного уравнения (2) с начальными условиями  $\xi[n_0]$ .

Решение  $\xi[n]$  уравнения (2) называется *устойчивым*, если для любого  $\epsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , зависящее от  $\epsilon$  и от  $n_0$ , что любое решение  $\varphi[n]$ , для которого при  $n=n_0$  справедливо неравенство

$$\|\varphi[n_0] - \xi[n_0]\| < \delta, \quad (4)$$

удовлетворяет при всех значениях дискретного аргумента  $n \geq n_0$  условию

$$\|\varphi[n] - \xi[n]\| < \epsilon. \quad (5)$$

Решение  $\xi[n]$  разностного векторного уравнения (2) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво, и, кроме того, существует такое число  $H > 0$ , что из условия  $\|\varphi[n_0] - \xi[n_0]\| < H$  следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi[n] - \xi[n]\| = 0. \quad (6)$$

В этом параграфе рассмотрим только линейные системы разностных уравнений, имеющие вид

$$x_i[n+1] = \sum_{j=1}^k a_{ij}[n] x_j[n] + f_i[n] \quad (i=1, 2, \dots, k), \quad (7)$$

или в векторной форме

$$x[n+1] = A[n] x[n] + f[n], \quad (8)$$

где  $A[n]$  — матрица с элементами  $a_{ij}[n]$  ( $i=1, \dots, k; j=1, \dots, k$ );  $f[n]$  — вектор-столбец с элементами  $f_i[n]$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ).

Система линейных разностных уравнений (8) называется *устойчивой*, если устойчивы все решения системы. Условие, при котором система (8) является устойчивой, определяется следующей теоремой:

*Теорема 1. Линейная система разностных уравнений (8) устойчива тогда и только тогда, когда устойчиво тривиальное решение соответствующей однородной системы*

$$x[n+1] = A[n] x[n]. \quad (9)$$

*Доказательство.* Докажем сначала достаточность условия теоремы. Пусть тривиальное решение  $x[n] \equiv 0$  однородной системы (9) устойчиво. Тогда для любого  $\epsilon > 0$  существует  $\delta(\epsilon, n_0) > 0$  такое, что для произвольного решения  $\xi[n]$  системы (9), удовлетворяющего условию  $\|\xi[n_0]\| < \delta$ , имеет место неравенство  $\|\xi[n]\| < \epsilon$  при всех значениях  $n \geq n_0$ .

Иследуем устойчивость произвольного решения  $\varphi[n]$  неоднородной системы (8). Выберем решение  $\psi[n]$  системы (8) из условия  $\|\psi[n_0] - \varphi[n_0]\| < \delta$  и оценим норму разности  $\|\psi[n] - \varphi[n]\|$ . Нетрудно проверить, что разность  $\psi[n] - \varphi[n]$  является решением однородной системы (9). Поэтому из предыдущего получим, что  $\|\psi[n] - \varphi[n]\| < \epsilon$  при  $n \geq n_0$ . Следовательно, решение  $\varphi[n]$  — устойчиво.

Теперь докажем необходимость условия теоремы. Пусть устойчиво произвольное решение  $\varphi[n]$  системы (8). Тогда для любого  $\epsilon > 0$  существует такое число  $\delta(\epsilon, n_0)$ , что для произвольного решения  $\psi[n]$  системы (8), удовлетворяющего условию  $\|\psi[n_0] - \varphi[n_0]\| < \delta$ , справедливо неравенство  $\|\psi[n] - \varphi[n]\| < \epsilon$ . Поскольку функция



$\xi[n] = \psi[n] - \varphi[n]$  является решением однородной системы (9), то получаем отсюда условие устойчивости тривиального решения системы (9): для любого  $\epsilon > 0$  существует такое  $\delta(\epsilon, n_0)$ , что из условия  $\|\xi[n_0]\| < \delta$  следует, что  $\|\xi[n]\| < \epsilon$ .

Теорема доказана полностью.

Аналогично может быть доказана теорема об асимптотической устойчивости.

**Теорема 2.** *Линейная система разностных уравнений (8) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда асимптотически устойчиво тривиальное решение однородной системы (9).*

Доказанная выше теорема 1 сводит задачу об исследовании устойчивости неоднородной системы разностных уравнений к исследованию устойчивости соответствующей однородной системы, которая, в свою очередь, определяется устойчивостью тривиального решения.

Как и в случае линейных систем дифференциальных уравнений, для систем линейных однородных разностных уравнений существует определенная связь между ограниченностью решений и их устойчивостью. Эта связь определяется следующей теоремой, аналогичной теореме 2 § 18.

**Теорема 3.** *Линейная однородная система разностных уравнений (9) устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения ограничены.*

Доказательство этой теоремы, а также последующей теоремы 4 принципиально ничем не отличается от доказательства аналогичных теорем для системы дифференциальных уравнений. Примем теорему 3 без доказательства.

Теорема 3 позволяет существенно упростить исследование устойчивости линейных систем разностных уравнений, так как ограниченность решений этих систем можно установить непосредственно по виду общего решения.

Асимптотическая устойчивость однородной системы разностных уравнений определяется следующей теоремой:

**Теорема 4.** *Линейная однородная система разностных уравнений (9) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .*

Эту теорему также примем без доказательства.

**2. Устойчивость систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.** Для систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами всегда можно найти общее решение однородной системы. Используя теоремы 1, 2 и 3, можно сделать вывод об устойчивости системы по виду общего решения. Рассмотрим однородную систему разностных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x[n+1] = Ax[n], \quad (10)$$

где  $A = [a_{ij}]$  ( $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k$ ) — матрица постоянных коэффициентов. Условия, при которых система (10) устойчива, определяются следующей теоремой:

**Теорема 5.** *Для устойчивости линейной однородной системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами (10) необходимо и достаточно соблюдение следующих двух условий:*

1) все характеристические числа  $\lambda_i$  матрицы  $A$  по модулю не должны превосходить единицу, т. е.  $|\lambda_i| \leq 1$ ;

2) характеристическим числам, модули которых равны единице, должны соответствовать простые элементарные делители матрицы  $A$ .

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, преобразуем систему уравнений (10). Выполним замену векторной переменной  $x[n]$  в этой системе по формуле

$$y[n] = Bx[n], \quad (11)$$

где  $B$  — матрица невырожденного преобразования, приводящего матрицу  $A$  к жордановой форме

$$J = BAB^{-1}. \quad (12)$$

Получим новую систему разностных уравнений с жордановой матрицей  $J$ :

$$y[n+1] = Jy[n]. \quad (13)$$

На главной диагонали матрицы  $J$  расположены корни  $\lambda_i$  характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (14)$$

Решение системы (13) определено выше в § 50, где было показано, что элементарному делителю  $(\lambda - \lambda_j)^{r_j}$  матрицы  $A$  соответствуют компоненты решения  $y_{i+1}[n], \dots, y_{i+r_j}[n]$ , определяемые формулами (36) § 50. Заметим, что каждая из компонент  $y_{i+l}[n]$  ( $l = 1, \dots, r_j$ ) может быть записана в виде

$$y_{i+l}[n] = P_{r_j-l}[n] \lambda_j^n \quad (l = 1, 2, \dots, r_j), \quad (15)$$

где  $P_{r_j-l}[n]$  — многочлен степени  $r_j - l$  относительно переменной  $n$ .

При этом простому элементарному делителю  $(\lambda - \lambda_s)$  соответствует компонента решения

$$y_s[n] = c_s \lambda_s^n, \quad (16)$$

где  $c_s$  — постоянная величина.

Решение  $x[n]$  исходной системы разностных уравнений (10) устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво решение системы (13). Это легко проверить, используя определение устойчивости по Ляпунову и невырожденность матрицы  $B$ . Поэтому доказательство теоремы 5 можно провести для системы разностных уравнений (13).

Доказательство теоремы 5. Докажем сначала достаточность условий теоремы. Пусть выполнены условия 1 и 2, тогда компоненты  $y_{i+l}[n]$  ( $l = 1, \dots, r_j$ ) решения системы (13), соответствующие корням характеристического уравнения (14) с модулем  $|\lambda_j| < 1$ , могут быть представлены в виде (15). Компоненты



решения  $y_s[n]$ , соответствующие корням, модули которых  $|\lambda_s| = 1$ , могут быть представлены только в виде (16), поскольку этим корням соответствуют по условию простые элементарные делители  $(\lambda - \lambda_s)$  матрицы  $A$ . Функции  $y_{i+l}[n]$  ( $l = 1, 2, \dots, r_j$ ) стремятся к нулю по модулю при бесконечном увеличении аргумента  $n$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{i+l}[n]| = \lim_{n \rightarrow \infty} |P_{r_j-l}[n]| |\lambda_j|^n = 0. \quad (17)$$

Функции  $y_s[n]$ , соответствующие характеристическим корням, равным по модулю единице, ограничены. Действительно, из формулы (16) получим

$$|y_s[n]| = |c_s \lambda_s^n| = |c_s| < \infty. \quad (18)$$

Из условий (17) и (18) следует, что каждое решение  $y[n]$  системы (13) ограничено по норме

$$\|y[n]\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k y_i^2[n]} < \infty. \quad (19)$$

Учитывая теорему 3, получим отсюда, что система (13) устойчива.

Теперь докажем необходимость условий теоремы. Пусть устойчива линейная однородная система разностных уравнений (13), но тем не менее не выполняется условие 1, т. е. существует характеристический корень  $\lambda_p$ , больший по модулю, чем единица:  $|\lambda_p| > 1$ . Тогда любая из компонент (15) решения, соответствующая этому корню, неограниченно возрастает при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{i+l}[n]| = \lim_{n \rightarrow \infty} |P_{r_p-l}[n] \lambda_p^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |P_{r_p-l}[n]| |\lambda_p|^n = \infty.$$

Таким образом, приходим к противоречию с предположением об устойчивости системы (13).

Предположим теперь, что не выполняется условие 2, т. е. существует характеристический корень  $\lambda_j$  с модулем, равным единице  $|\lambda_j| = 1$ , которому соответствует элементарный делитель  $(\lambda - \lambda_j)^{r_j}$  кратности  $r_j > 1$ . Тогда корню  $\lambda_j$  будут соответствовать компоненты решения  $y[n]$  системы (13), определяемые формулами (15). Из этих компонент только одна остается ограниченной при бесконечном увеличении аргумента  $n$ :

$$|y_{i+r_j}[n]| = |c_0 \lambda_j^n| = |c_0| < \infty,$$

где  $c_0$  — постоянная величина. Остальные компоненты решения  $y[n]$  неограниченно возрастают:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |y_{i+l}[n]| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |P_{r_j-l}[n] \lambda_j^n| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |P_{r_j-l}[n]| |\lambda_j|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |P_{r_j-l}[n]| = \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, приходим к противоречию с условием устойчивости системы разностных уравнений (13).

Этим доказана необходимость условий 1 и 2.

Теорема доказана полностью.

Выясним теперь, при каких условиях линейная система разностных уравнений с постоянными коэффициентами устойчива асимптотически.

*Теорема 6. Линейная однородная система разностных уравнений с постоянными коэффициентами (10) устойчива асимптотически тогда и только тогда, когда все характеристические числа по модулю строго меньше единицы:  $|\lambda_i| < 1$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).*

Доказательство. Достаточность условий теоремы следует из рассмотрения общего решения системы (13), которая является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда асимптотически устойчива система разностных уравнений (10). При выполнении для всех характеристических чисел  $\lambda_i$  условия  $|\lambda_i| < 1$  все компоненты (15) решения  $y[n]$  системы (13) стремятся к нулю. Следовательно, для любого решения выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y[n]\| = 0.$$

Отсюда с учетом теоремы 4 и следует, что система (13) асимптотически устойчива.

Докажем необходимость условий теоремы. Пусть система (13) асимптотически устойчива. Тогда она устойчива по Ляпунову и, следовательно, по теореме 5 все характеристические числа удовлетворяют неравенству  $|\lambda_i| \leq 1$ . Допустим, что найдется характеристическое число  $\lambda_s$ , модуль которого равен единице ( $|\lambda_s| = 1$ ). Тогда среди компонент решения (15), соответствующих этому числу, найдется решение  $y_{i+r_s}[n] = c_0 \lambda_s^n$ , где  $c_0 = \text{const}$ . Модуль этого решения остается постоянным при  $n \rightarrow \infty$ :

$$|y_{i+r_s}[n]| = |c_0|.$$

Следовательно, функция  $y_{i+r_s}[n]$  не стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому и решение  $y[n]$  системы (13) не стремится к нулю. Полученное противоречие доказывает, что для характеристических чисел  $\lambda_i$  выполняется строгое неравенство  $|\lambda_i| < 1$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Теорема доказана полностью.

Все теоремы об устойчивости, сформулированные для линейных систем разностных уравнений, справедливы и для одного разностного уравнения порядка  $k$ , которое может быть сведено к-нормальной системе  $k$  уравнений первого порядка вида (22) — § 50.

Устойчивость однородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

$$b_0 x[n+k] + b_1 x[n+k-1] + \dots + b_{k-1} x[n+1] + b_k x[n] = 0 \quad (20)$$

в соответствии с теоремами 5 и 6 определяется корнями характеристического уравнения, которое в этом случае имеет вид

$$b_0 \lambda^k + b_1 \lambda^{k-1} + \dots + b_{k-1} \lambda + b_k = 0. \quad (21)$$

§ 58. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ  
ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. **Постановка задачи об исследовании устойчивости импульсных систем.** В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением линейных импульсных систем с постоянными параметрами. Такие системы автоматического регулирования можно описать посредством системы линейных разностных уравнений

$$x[n+1] = Ax[n] + Bg[n], \quad (1)$$

где  $x[n]$  и  $g[n]$  — вектор-столбцы выходных и входных координат системы соответственно;  $A$  и  $B$  — постоянные матрицы (см. § 51).

Импульсная система автоматического регулирования называется *устойчивой*, если соответствующая система разностных уравнений (1) устойчива.

Для системы разностных уравнений (1) справедлива теорема 1 предыдущего параграфа, в силу которой устойчивость системы (1) определяется устойчивостью тривиального решения однородной системы

$$x[n+1] = Ax[n]. \quad (2)$$

Устойчивость однородной системы (2) разностных уравнений в соответствии с теоремой 5 § 57 определяется характеристическими числами  $\lambda_i$  матрицы  $A$ , удовлетворяющими уравнению

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (3)$$

Задача об исследовании устойчивости импульсной системы, таким образом, сводится к исследованию корней характеристического уравнения (3). Вычисление корней этого уравнения связано, как правило, с большим объемом вычислительной работы. Поэтому для исследования устойчивости импульсных систем применяются методы, позволяющие установить, удовлетворяют ли корни характеристического уравнения условиям теорем 5 и 6 § 57, не вычисляя самих корней. Эти методы рассматриваются ниже.

2. **Алгебраический критерий устойчивости.** Рассмотрим способ применения критерия Гурвица (см. § 18) для исследования корней характеристического уравнения (3). Предварительно запишем характеристический многочлен системы разностных уравнений (2) в виде

$$\det(A - \lambda E) = D(\lambda) = b_0 \lambda^k + b_1 \lambda^{k-1} + \dots + b_{k-1} \lambda + b_k. \quad (4)$$

Критерий Гурвица позволяет оценивать расположение корней характеристического многочлена  $D(\lambda)$  относительно мнимой оси плоскости комплексного переменного  $\lambda$ . Однако для исследования устойчивости разностных уравнений требуется определять расположение корней характеристического многочлена относительно окружности

единичного радиуса в плоскости комплексного переменного  $\lambda$ . Отсюда следует, что критерий Гурвица можно применить в интересующем нас случае, если выполнить конформное отображение плоскости комплексного переменного  $\lambda$  на плоскость комплексного переменного  $w$  таким образом, чтобы единичная окружность  $|\lambda| = 1$  перешла в мнимую ось на плоскости переменного  $w$ , а внутренность единичного круга  $|\lambda| < 1$  отобразилась на левую полуплоскость  $\operatorname{Re} w < 0$  (рис. 174). Такое отображение выполняется с помощью дробно-линейного преобразования

$$\lambda = \frac{1+w}{1-w}. \quad (5)$$

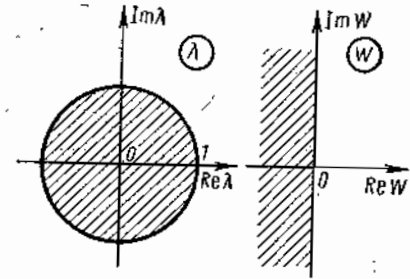


Рис. 174

Выполняя замену переменной по формуле (5) в многочлене  $D(\lambda)$ , получим

$$b_0 \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^k + \dots + b_{k-1} \left(\frac{1+w}{1-w}\right) + b_k = \frac{D_1(w)}{(1-w)^k}, \quad (6)$$

где  $D_1(w)$  — многочлен степени  $k$  от новой переменной  $w$ :

$$D_1(w) = a_0 w^k + a_1 w^{k-1} + \dots + a_{k-1} w + a_k. \quad (7)$$

Например, при  $k=2$  из соотношения

$$D_1(w) = b_0 (1+w)^2 + b_1 (1+w)(1-w) + b_2 (1-w)^2 = a_0 w^2 + a_1 w + a_2$$

найдем

$$\begin{aligned} a_0 &= b_2 - b_1 + b_0, \\ a_1 &= -2b_2 + 2b_0, \\ a_2 &= b_2 + b_1 + b_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что нули  $\lambda_i$  многочлена  $D(\lambda)$  отображаются в нули  $w_i$  многочлена  $D_1(w)$  в соответствии с формулой  $w_i = \frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i + 1}$ . Таким образом, нули многочлена  $D(\lambda)$ , лежащие внутри единичной окружности на плоскости  $\lambda$ , отображаются в нули многочлена  $D_1(w)$ , лежащие в левой полуплоскости переменного  $w$ .

Исследование расположения нулей многочлена  $D_1(w)$  можно производить с помощью критерия Гурвица. Составим совокупность определителей Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Без ограничения общности можно считать, что  $a_0 > 0$  и  $a_k \neq 0$ . Тогда согласно теореме Гурвица, для того чтобы все корни многочлена  $D_1(\omega)$  имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица были положительны:

$$\Delta_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, k). \quad (10)$$

При этом, как показано выше, все корни  $\lambda_j$  характеристического многочлена  $D(\lambda)$  лежат строго внутри круга единичного радиуса:  $|\lambda_j| < 1$  ( $j=1, \dots, k$ ).

**Пример 1.** Проверить, лежат ли все корни многочлена  $D(\lambda) = 1 + 3\lambda + 10\lambda^2$  внутри единичного круга  $|\lambda| \leq 1$ .

Перейдем к переменной  $\omega$  в соответствии с формулой (5):

$$D_1(\omega) = a_0\omega^2 + a_1\omega + a_2.$$

Коэффициенты  $a_0, a_1, a_2$  найдем по формулам (8):

$$a_0 = b_0 + b_1 + b_2 = 14,$$

$$a_1 = 2b_0 - 2b_2 = 18,$$

$$a_2 = b_2 - b_1 + b_0 = 8;$$

тогда  $D_1(\omega) = 8 + 18\omega + 14\omega^2$ .

Теперь можно составить определители Гурвица и проверить, выполняется ли условие теоремы Гурвица. Имеем:

$$\Delta_0 > 0, \Delta_1 = a_1 = 18 > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 14 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} > 0.$$

Таким образом, условие теоремы Гурвица выполняется. Следовательно, все корни многочлена  $D(\lambda)$  лежат внутри единичного круга.

**Пример 2.** Исследовать расположение корней многочлена  $D(\lambda) = 1 + 6\lambda + 5\lambda^2 + 3\lambda^3$  относительно единичной окружности  $|\lambda| = 1$ .

Для того чтобы применить теорему Гурвица, выполним замену переменной (5) и определим коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, a_3$  многочлена  $D_1(\omega)$ . Получим:

$$D_1(\omega) = a_0\omega^3 + a_1\omega^2 + a_2\omega + a_3,$$

где

$$a_0 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 15,$$

$$a_1 = 3b_0 + b_1 - b_2 - 3b_3 = 5,$$

$$a_2 = 3b_0 - b_1 - b_2 + 3b_3 = 1,$$

$$a_3 = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = 3.$$

Найдем значения определителей Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1 = 5 > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -40 < 0.$$

Определитель третьего порядка можно не исследовать, так как условия теоремы Гурвица уже не выполнены:  $\Delta_2 < 0$ . Следовательно, по крайней мере один из корней многочлена  $D(\lambda)$  лежит вне единичной окружности.

Рассмотренный алгебраический метод позволяет определить, является ли система разностных уравнений асимптотически устойчивой, однако он не дает возможности исследовать устойчивость в тех случаях, когда корни многочлена  $D(\lambda)$  лежат на самой еди-

ничной окружности  $|\lambda| = 1$ . Недостатком этого метода является значительная трудоемкость вычислений, которая быстро возрастает по мере увеличения порядка характеристического многочлена. Применение алгебраических методов в практике автоматического регулирования ограничивается также и тем, что эти методы оказываются весьма громоздкими при синтезе систем автоматического регулирования. Значительно более удобными в последнем случае являются частотные методы, которые рассмотрены ниже.

**3. Исследование устойчивости с помощью принципа аргумента.** Согласно принципу аргумента (см. § 33) число  $N$  корней многочлена  $D(\lambda)$ , лежащих внутри единичной окружности, равно числу полных оборотов вектора  $D(\lambda)$  вокруг начала координат при однократном обходе точкой  $\lambda$  единичной окружности  $|\lambda| = 1$  в положительном направлении, т. е.

$$\Delta \arg D(\lambda) = 2\pi N \quad (-\pi < \arg \lambda \leq \pi; |\lambda| = 1). \quad (11)$$

При этом предполагается, что корни многочлена  $D(\lambda)$  на самой единичной окружности отсутствуют. Если число полных оборотов вектора  $D(\lambda)$  равно  $k$ , где  $k$  — порядок многочлена, то в соответствии с принципом аргумента все корни  $\lambda_i$  многочлена  $D(\lambda)$  лежат строго внутри единичной окружности, т. е.  $|\lambda_i| < 1$  ( $i=1, \dots, k$ ).

Для того чтобы воспользоваться принципом аргумента, положим  $\lambda = e^{j\bar{\omega}}$ . При изменении  $\bar{\omega}$  в пределах  $-\pi < \bar{\omega} \leq \pi$  мы получим окружность единичного радиуса в плоскости комплексного переменного  $\lambda$ . Заменяя переменную в характеристическом многочлене (4) по формуле  $\lambda = e^{j\bar{\omega}}$ , будем иметь

$$D(e^{j\bar{\omega}}) = b_0 e^{kj\bar{\omega}} + b_1 e^{(k-1)j\bar{\omega}} + \dots + b_{k-1} e^{j\bar{\omega}} + b_k. \quad (12)$$

Теперь можно построить годограф вектора  $D(e^{j\bar{\omega}})$  и применить условие (11). Поскольку справедливо равенство  $D(e^{-j\bar{\omega}}) = \overline{D(e^{j\bar{\omega}})}$ , годограф вектора  $D(e^{j\bar{\omega}})$  при значениях  $-\pi < \bar{\omega} \leq \pi$  симметричен относительно вещественной оси. Поэтому достаточно построить только половину годографа при значениях аргумента  $\bar{\omega}$ , изменяющихся от 0 до  $\pi$ . Заметим, что годограф  $D(e^{j\bar{\omega}})$  принимает вещественные значения при  $\bar{\omega} = 0$  и при  $\bar{\omega} = \pi$ :

$$D(e^{j\bar{\omega}}) \Big|_{\bar{\omega}=0} = \sum_{i=0}^k b_i; \quad D(e^{j\bar{\omega}}) \Big|_{\bar{\omega}=\pi} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} b_i.$$

Принцип аргумента в этом случае более удобно сформулировать следующим образом: число  $N$  корней многочлена  $D(\lambda)$ , лежащих внутри единичной окружности, равно  $\frac{r}{2}$ , где  $r$  — число квадрантов, обходимых последовательно в положительном направлении годографом  $D(e^{j\bar{\omega}})$  при изменении переменной  $\bar{\omega}$  от 0 до  $\pi$ :

$$\Delta \arg D(e^{j\bar{\omega}}) = \pi N = \frac{r}{2} \pi \quad (0 \leq \bar{\omega} \leq \pi). \quad (13)$$

Для того чтобы многочлен  $D(\lambda)$  степени  $k$  имел все корни строго внутри единичного круга, надо потребовать, чтобы годограф  $D(e^{j\bar{\omega}})$  при изменении  $\bar{\omega}$  от 0 до  $\pi$  обходил последовательно в положительном направлении  $2k$  квадрантов, т. е.

$$\Delta \arg D(e^{j\bar{\omega}}) = \pi k = 2k \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq \bar{\omega} \leq \pi).$$

Примеры годографов, удовлетворяющих этому условию при  $k=1, 2, 3$ , показаны на рис. 175, а. На рис. 175, б изображен годограф, который при  $k=3$  названному условию не удовлетворяет. Многочлен, соответствующий этому годографу, имеет один корень, лежащий вне окружности  $|\lambda|=1$ , поскольку

$$\Delta \arg D(e^{j\bar{\omega}}) = 4 \frac{\pi}{2} = 2\pi \quad (0 \leq \bar{\omega} \leq \pi),$$

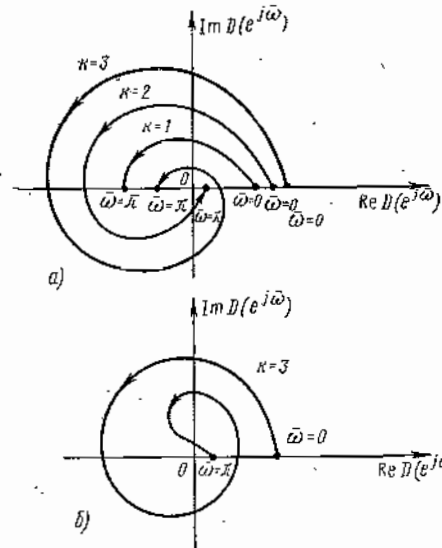


Рис. 175

и, следовательно, число корней, лежащих внутри единичного круга, равно  $N=2$ .

Прежде чем приступить к построению годографов  $D(e^{j\bar{\omega}})$ , целесообразно проверить необходимые условия, при которых все корни характеристического многочлена лежат внутри единичного круга. Эти условия следуют из принципа аргумента и имеют следующий вид:

$$D(e^{j\bar{\omega}})|_{\bar{\omega}=0} \times D(e^{j\bar{\omega}})|_{\bar{\omega}=\pi} < 0 \quad (14)$$

— для нечетного  $k$ ;

$$D(e^{j\bar{\omega}})|_{\bar{\omega}=0} \times D(e^{j\bar{\omega}})|_{\bar{\omega}=\pi} > 0$$

— для четного  $k$ .

Если условия (14) не выполнены, то многочлен  $D(\lambda)$  заведомо имеет по крайней мере один корень вне единичной окружности. Если же условия (14) соблюдаются, то следует воспользоваться необходимым и достаточным условием (13).

Рассмотренный критерий устойчивости импульсных систем автоматического регулирования аналогичен критерию Михайлова в теории непрерывных систем автоматического регулирования (см. § 40).

**4. Критерий Найквиста.** Рассмотрим замкнутую импульсную систему (см. рис. 165), содержащую импульсный элемент в цепи ошибки. Обозначим передаточную функцию разомкнутой импульсной

системы через  $W^*(q, \varepsilon)$ . Передаточная функция замкнутой системы определяется формулой (16) § 56:

$$\Phi^*(q, \varepsilon) = \frac{W^*(q, \varepsilon)}{1 + W^*(q, \varepsilon)}. \quad (15)$$

Положим

$$W^*(q, \varepsilon) = \frac{P^*(q, \varepsilon)}{Q^*(q)}, \quad (16)$$

где  $P^*(q, \varepsilon)$  и  $Q^*(q)$  — многочлены от  $e^q$  степени  $l$  и  $k$  соответственно ( $k \geq l$ ), тогда получим

$$\Phi^*(q, \varepsilon) = \frac{P^*(q, \varepsilon)}{D^*(q)}, \quad (17)$$

где  $D^*(q) = Q^*(q) + P^*(q, 0)$ . Функция  $D^*(q)$  является многочленом относительно переменной  $e^q$ . Вводя обозначение  $\lambda = e^q$ , можно записать:

$$D^*(q)|_{\lambda=e^q} = D_1^*(\lambda) = b_0 \lambda^k + b_1 \lambda^{k-1} + \dots + b_{k-1} \lambda + b_k. \quad (18)$$

Многочлен  $D_1^*(\lambda)$  является характеристическим многочленом для разностного уравнения порядка  $k$ , описывающего импульсную систему.

Рассмотрим критерий устойчивости импульсных систем, аналогичный критерию Найквиста в теории непрерывных систем автоматического регулирования (см. § 40). Этот критерий позволяет судить об устойчивости замкнутой импульсной системы по годографу амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы. Положим в выражении передаточной функции разомкнутой импульсной системы  $\lambda = e^q$ ,  $\varepsilon = 0$  и введем обозначение

$$W_1^*(\lambda) = \frac{P_1^*(\lambda)}{Q_1^*(\lambda)}, \quad (19)$$

где  $P_1^*(\lambda) = P^*(q, 0)|_{\lambda=e^q}$ ,  $Q_1^*(\lambda) = Q^*(q)|_{\lambda=e^q}$ .

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$W_1^*(\lambda) = \frac{P_1^*(\lambda) + Q_1^*(\lambda) - Q_1^*(\lambda)}{Q_1^*(\lambda)} = \frac{D_1^*(\lambda)}{Q_1^*(\lambda)} - 1. \quad (20)$$

Воспользуемся теперь принципом аргумента. Найдем приращение аргумента вектора  $1 + W_1^*(\lambda)$ , когда переменная  $\lambda$  совершает однократный обход единичной окружности  $|\lambda|=1$  в положительном направлении:

$$\Delta \arg(1 + W_1^*(\lambda)) = \Delta \arg D_1^*(\lambda) - \Delta \arg Q_1^*(\lambda) \quad (21)$$

$$(|\lambda|=1, -\pi < \arg \lambda \leq \pi).$$

Пусть передаточная функция разомкнутой импульсной системы  $W^*(q)$  имеет  $m$  полюсов в правой полуплоскости. Тогда функция  $W_1^*(\lambda)$  имеет  $m$  полюсов вне единичного круга. Согласно принципу аргумента, получим

$$\Delta \arg Q_1^*(\lambda) = 2\pi(k - m) \quad (|\lambda|=1, -\pi < \arg \lambda \leq \pi). \quad (22)$$

Пусть замкнутая система устойчива. Тогда все корни характеристического многочлена  $D_1^*(\lambda)$  лежат внутри единичного круга. Учитывая, что порядок многочлена  $D_1^*(\lambda)$  совпадает с порядком многочлена  $Q_1^*(\lambda)$ , будем иметь

$$\Delta \arg D_1^*(\lambda) = 2\pi k \quad (|\lambda| = 1, -\pi < \arg \lambda \leq \pi). \quad (23)$$

Подставляя (22) и (23) в уравнение (21), найдем:

$$\Delta \arg (1 + W_1^*(\lambda)) = 2\pi k - 2\pi(k - m) = 2\pi m \quad (|\lambda| = 1, -\pi < \arg \lambda \leq \pi). \quad (24)$$

Получено условие устойчивости замкнутой импульсной системы. Полагая  $\lambda = e^{j\bar{\omega}}$ , перепишем последнее условие в окончательном виде:

$$\Delta \arg (1 + W^*(j\bar{\omega})) = 2\pi m \quad (-\pi < \bar{\omega} \leq \pi). \quad (25)$$

Поскольку справедливо условие  $W^*(-j\bar{\omega}) = \overline{W^*(j\bar{\omega})}$ , то годограф вектора  $W^*(j\bar{\omega})$  симметричен относительно вещественной оси. Таким образом, достаточно построить только половину этого годографа и применить полученное условие устойчивости при  $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$ , которое в этом случае примет вид

$$\Delta \arg (1 + W^*(j\bar{\omega})) = \pi m \quad (0 \leq \bar{\omega} \leq \pi). \quad (26)$$

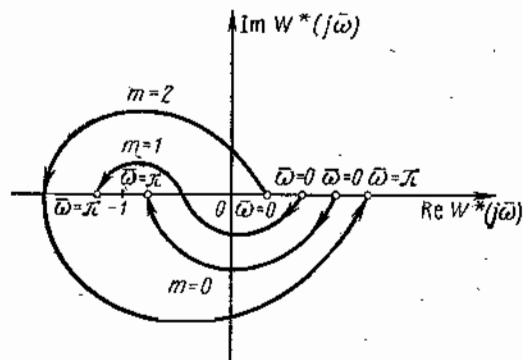


Рис. 176

Переходя от вспомогательной функции  $1 + W^*(j\bar{\omega})$  к годографу амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой импульсной системы  $W^*(j\bar{\omega})$ , можно сформулировать условие устойчивости (26) следующим образом: для того чтобы замкнутая импульсная система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф  $W^*(j\bar{\omega})$  при изменении переменной  $\bar{\omega}$  в пределах от 0 до  $\pi$  обходил точку  $(-1, j0)$  последовательно в положительном направлении  $\frac{m}{2}$  раз, где  $m$  — число полюсов передаточной функции

разомкнутой системы  $W^*(q)$ , расположенных в правой полуплоскости ( $\operatorname{Re} q > 0, -\pi < \operatorname{Im} q \leq \pi$ ).

Если, в частности, разомкнутая система устойчива, то  $m = 0$ . В этом случае замкнутая система устойчива, если годограф  $W^*(j\bar{\omega})$  не охватывает точку  $(-1; j0)$  при изменении  $\bar{\omega}$  от 0 до  $\pi$ . Примеры годографов  $W^*(j\bar{\omega})$  устойчивых систем при различных значениях числа  $m$  приведены на рис. 176.

**Пример 3.** Найти условие устойчивости замкнутой импульсной системы (см. рис. 165). Модуляция осуществляется с помощью последовательности прямоугольных импульсов шириной  $\gamma T$  ( $\gamma < 1$ ). Передаточная функция непрерывной части равна

$$W_{\text{нп}}(s) = \frac{1}{T_1 s + 1}.$$

Передаточная функция разомкнутой импульсной системы описывается формулами (23) § 56. В частности, при  $\epsilon = 0$

$$W^*(q) = k_n \left( 1 - \frac{e^q - e^{-\beta(1-\gamma)}}{e^q - e^{-\beta}} \right) = k_n \frac{e^{-\beta}(e^{\beta\gamma} - 1)}{e^q - e^{-\beta}},$$

где  $\beta = \frac{T}{T_1}$ .

Построим годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики

$$W^*(j\bar{\omega}) = k_n e^{-\beta} \frac{1}{e^{j\bar{\omega}} - e^{-\beta}} \quad (0 \leq \bar{\omega} \leq \pi). \quad (27)$$

Это полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости (рис. 177). При  $\bar{\omega} = 0$  и  $\bar{\omega} = \pi$  мы получаем:

$$W^*(0) = \frac{k_n e^{-\beta} (e^{\beta\gamma} - 1)}{1 - e^{-\beta}},$$

$$W^*(j\pi) = -\frac{k_n e^{-\beta} (e^{\beta\gamma} - 1)}{1 + e^{-\beta}}.$$

Параметры  $\beta$  и  $\gamma$  положительны, поэтому и значение  $W^*(0)$  положительно, а значение  $W^*(j\pi)$  отрицательно при любом  $\beta > 0$ . Учитывая, что функция  $W^*(q)$  не имеет полюсов в правой полуплоскости, для устойчивости замкнутой системы надо потребовать, чтобы годограф  $W^*(j\bar{\omega})$  не охватывал точку  $(-1, j0)$ . Если выполняется условие

$$\frac{k_n e^{-\beta} (e^{\beta\gamma} - 1)}{1 + e^{-\beta}} < 1, \quad (28)$$

то получим годограф (а) (рис. 177), соответствующий устойчивой системе. Если условие (28) не выполнено, то годограф (б) будет охватывать точку  $(-1, j0)$ . Замкнутая система при этом станет неустойчивой.

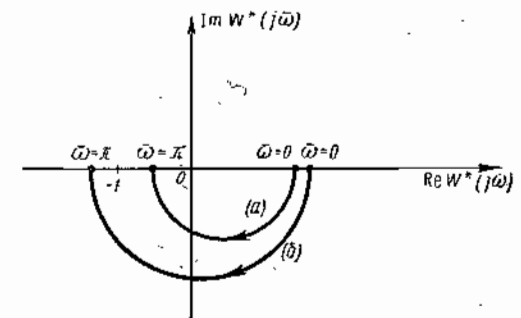


Рис. 177

С помощью рассматриваемого критерия устойчивости можно исследовать устойчивость и в тех случаях, когда среди полюсов передаточной функции  $W^*(q)$  имеются чисто мнимые полюсы. В этом случае много-



член  $Q^*(\lambda)$  имеет полюсы на единичной окружности. Для того чтобы воспользоваться принципом аргумента, следует видоизменить контур обхода особых точек. Рассмотрим случай, когда имеется только один полюс, расположенный на мнимой оси плоскости  $q$ , а именно полюс  $q=0$  кратности  $\nu \geq 1$ . Представим передаточную функцию  $W^*(q)$  в виде

$$W^*(q) = \frac{W_0^*(q)}{(e^q - 1)^\nu}, \quad (29)$$

где  $W_0^*(q)$  уже не имеет полюса в начале координат. Заменим переменную  $q$  по формуле  $\lambda = e^q$ :

$$W_1^*(\lambda) = \frac{W_0^*(\lambda)}{(\lambda - 1)^\nu}. \quad (30)$$

Выберем в качестве контура обхода в плоскости комплексного переменного  $\lambda$  контур (рис. 178), состоящий из единичной полуокружности  $\lambda = e^{j\bar{\omega}}$  ( $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$ ) и окружности бесконечно малого

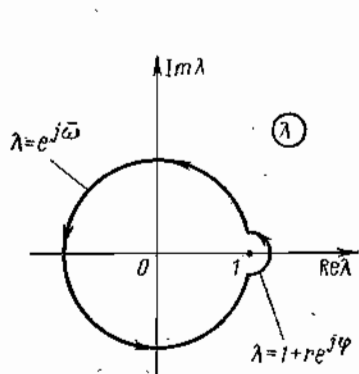


Рис. 178

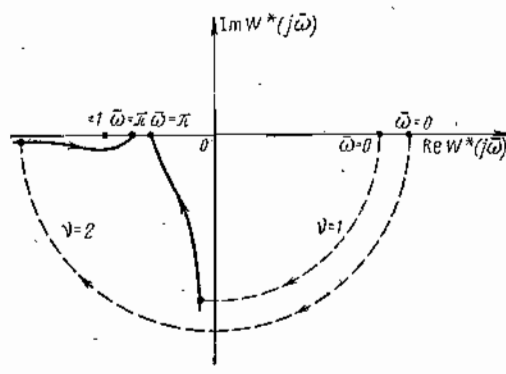


Рис. 179

радиуса, охватывающей особую точку  $\lambda = 1$ , соответствующую нулевому полюсу  $q = 0$ :

$$\lambda = 1 + re^{j\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

На окружности  $\lambda = 1 + re^{j\varphi}$  функция  $W_1^*(\lambda)$  принимает следующий вид:

$$W_1^*(1 + re^{j\varphi}) = \frac{W_0^*(1 + re^{j\varphi})}{r^\nu e^{j\nu\varphi}}. \quad (31)$$

Полагая, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} W_0^*(1 + re^{j\varphi}) = k,$$

где  $k$  — постоянное число, и обозначая  $R = \frac{k}{r^\nu}$ , получим

$$\lim_{r \rightarrow 0} W_1^*(1 + re^{j\varphi}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{k}{r^\nu e^{j\nu\varphi}} = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{-j\nu\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}),$$

что соответствует окружности бесконечно большого радиуса, дополняющей годограф  $W^*(j\bar{\omega})$  при малых значениях  $\bar{\omega}$ . Примеры таких годографов для значений  $\nu=1$  и  $\nu=2$  приведены на рис. 179. Критерий устойчивости замкнутой системы следует применять к этим годографам с учетом того, что полюс  $\lambda=1$  лежит внутри контура обхода в плоскости комплексного переменного  $\lambda$ . Если, в частности, передаточная функция  $W^*(q)$  не имеет полюсов в правой полуплоскости, то замкнутая импульсная система устойчива, если годограф  $W^*(j\bar{\omega})$ , дополненный окружностью бесконечно большого радиуса, ни разу не охватывает точку  $(-1, j0)$ . При этом предположении годографы, изображенные на рис. 179, соответствуют устойчивой импульсной системе.

Во многих случаях задача об исследовании устойчивости замкнутых импульсных систем с помощью критерия Найквиста существенно упрощается, если использовать дробно-линейное преобразование комплексной переменной (5). Выполним в выражении (19) для передаточной функции  $W_1^*(\lambda)$  разомкнутой импульсной системы замену переменной  $\lambda$  по формуле  $\lambda = \frac{1+w}{1-w}$ . Введем обозначение

$$W_2^*(w) = W_1^*(\lambda) \Big|_{\lambda = \frac{1+w}{1-w}}$$

Обход единичной окружности  $\lambda = e^{j\bar{\omega}}$  в плоскости комплексной переменной  $\lambda$  в положительном направлении соответствует в плоскости комплексного переменного  $w$  движению по мнимой оси от  $-\infty$  до  $\infty$ . Введем обозначение  $w = \sigma^* + j\omega^*$ . Подставляя  $w = j\omega^*$  в выражение передаточной функции  $W_2^*(w)$ , получим амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой импульсной системы:

$$W_2^*(j\omega^*) = W_2^*(w) \Big|_{w = j\omega^*}.$$

Теперь можно применить критерий Найквиста для исследования устойчивости замкнутой импульсной системы в том же виде, в каком он используется при исследовании непрерывных систем автоматического регулирования (см. § 40). При этом оказывается возможным построение логарифмических частотных характеристик импульсных систем\*, что существенно упрощает задачу исследования устойчивости импульсных систем автоматического регулирования по критерию Найквиста. Логарифмические частотные характеристики импульсных систем находят также широкое применение при синтезе импульсных систем автоматического регулирования.

\* Л. Т. Кузин. Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, 1962, стр. 250.

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

## Глава XIX

### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

#### § 59. СОБЫТИЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ СОБЫТИЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

**1. Основные понятия.** При изучении физических, химических, биологических, общественных или каких-либо иных явлений приходится сталкиваться с выполнением тех или иных наблюдений или экспериментов; например, определением числа распавшихся атомов радиоактивного элемента за единицу времени, числа бракованных деталей в партии, числа отказов системы автоматического регулирования; числа заявлений, которые будут поданы в институт в данном учебном году, подсчетом числа вызовов на телефонной станции за один час и т. д.

Результат опыта или наблюдений называется *событием*. Так, например, событиями являются выпадение герба при бросании монеты, серия из трех попаданий при пяти выстрелах по мишени, отсутствие бракованных деталей в партии, выход из строя прибора, выигрыш на лотерейный билет при розыгрыше и т. д.

Если событие при эксперименте обязательно должно произойти, то оно называется *достоверным*. Достоверным событием будет, например, выбор годной детали из партии, в которой все детали доброкачественные.

Если известно, что в результате опыта событие не произойдет, то оно называется *невозможным*. Невозможным событием будет, например, наличие четырех бракованных деталей в партии из трех деталей.

Промежуточное положение между достоверным и невозможным событиями занимает *случайное событие*. Случайным событием называется такое событие, которое в результате опыта может произойти, а может и не произойти, например попадание в цель при одном выстреле.

Следует заметить, что всякий раз необходимо оговаривать условия, при которых производится эксперимент. Так, при бросании монеты мы уславливаемся, что она обязательно упадет вверх гербом, или решеткой, а на ребро упасть не может, результат падения монеты мы можем наблюдать. Мы всегда будем говорить о комплексе условий, при которых проводится опыт. Для краткости этот комплекс будем обозначать буквой  $S$ .

Рассмотрим совокупность всех взаимно исключающих друг друга событий, которые могут произойти в результате опыта. Каждый исход одного опыта назовем *элементарным событием*. При одном выстреле по цели элементарными событиями будут промах и попадание (при этом мы считаем, что комплекс условий  $S$  исключает появление осечки). Всякое событие можно разложить на совокупность элементарных событий и, наоборот, всякое событие есть совокупность (множество) элементарных событий. Например, событие, заключающееся в том, что при двух выстрелах по мишени будет одно попадание, подразделяется на два элементарных события. Попадание при первом и промах при втором, промах при первом и попадание при втором выстреле.

В результате опыта может произойти одно и только одно элементарное событие.

Совокупность (множество) всех элементарных событий  $\Omega$  называется *пространством элементарных событий*, а сами элементарные события  $\omega$  — точками этого пространства. В дальнейшем для краткости события будем обозначать прописными буквами латинского алфавита  $A, B, C$  и т. д.

Два события  $A$  и  $B$  при заданном комплексе условий  $S$  называются *несовместимыми* (несовместными) событиями, если при данном комплексе условий появление одного из них исключает появление другого. Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  таковы, что одно из этих событий при опыте обязательно должно произойти, то говорят, что события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  составляют *полную группу* событий.

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих понятие пространства элементарных событий.

1. При однократном бросании монеты пространство элементарных событий состоит из двух точек:  $\omega_1$  — выпадение герба и  $\omega_2$  — выпадение цифры. При трехкратном бросании монеты пространство элементарных событий состоит из восьми точек:  $\omega_1$  (ггг),  $\omega_2$  (ггц),  $\omega_3$  (гцг),  $\omega_4$  (цгг),  $\omega_5$  (ццг),  $\omega_6$  (цгц),  $\omega_7$  (гцц),  $\omega_8$  (ццц) (г — означает выпадение герба, ц — выпадение цифры).

2. Пусть имеется партия из 100 деталей, из которых возможны бракованные. Элементарными событиями в этом случае будут 0, 1, 2, ..., 100 бракованных деталей в партии, и пространство элементарных событий состоит из 101 точек  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{100}$  (элементарное событие  $\omega_i$  означает, что в партии имеется  $i$  бракованных деталей).

3. Производится бросание монеты до выпадения герба. При этом возможны следующие элементарные события:  $\omega_1$  (г),  $\omega_2$  (цг),  $\omega_3$  (ццг), ...,



$\omega_n$  (или ...  $\omega_n$ ) ...  $(n-1)$  раз ... Пространство элементарных событий состоит из бесконечного числа точек. Здесь каждому элементарному событию можно поставить в соответствие некоторое натуральное число; в этом случае число элементарных событий счетно.

4. При производстве конденсаторов из-за неодинаковых условий технологического процесса действительное значение емкости отличается от его номинального значения и представляет собой случайное событие. Пространство элементарных событий состоит в этом случае из бесконечного несчетного\*) числа точек некоторого отрезка числовой оси, соответствующих действительным значениям емкости.

Из приведенных примеров видно, что пространство элементарных событий может состоять из конечного числа точек (примеры 1, 2) или из бесконечного счетного (пример 3), или бесконечного несчетного числа точек (пример 4). В этих случаях пространство элементарных событий соответственно называется *конечным, счетным* или *непрерывным (несчетным)* пространством.

2. Алгебра событий. В пункте 1 было отмечено, что событие  $A$  представляет совокупность (множество) элементарных событий. Иначе, событие  $A$  представляет собой множество точек пространства элементарных событий. Если считать, что в примере 1 событие  $A$  означает выпадение одного герба при трехкратном бросании монеты, то это событие включает в себя три элементарных события  $\omega_6, \omega_6, \omega_7$  (событие  $A$  состоит из трех точек  $\omega_6, \omega_6, \omega_7$ ). Символически утверждение, состоящее в том, что элементарное событие  $\omega$  входит в событие  $A$ , записывают в виде  $\omega \in A$ . Если элементарное событие  $\omega$  не принадлежит событию  $A$ , то записывают  $\omega \notin A$ .

Введем некоторые понятия.

Событие  $A$  влечет за собой событие  $B$ , если при наличии события  $A$  обязательно произойдет событие  $B$ . Сокращенно фразу: событие  $A$  влечет за собой событие  $B$  записывают следующим образом:

$$A \subset B.$$

Если событие  $A$  влечет за собой событие  $B$ , и событие  $B$  влечет за собой событие  $A$  (т. е. если  $A \subset B$ , а  $B \subset A$ ), то события  $A$  и  $B$  называются *эквивалентными*. В этом случае пишут

$$A = B.$$

Объединением (или суммой) двух событий  $A$  и  $B$  называется такое событие  $C$ , которое состоит или в осуществлении события  $A$ ,

\*) Если число элементов какого-либо множества конечно, то такое множество называется конечным; если все элементы множества, состоящего из бесконечного числа элементов, можно занумеровать натуральными числами, то такое множество называется счетным; множество, состоящее из бесконечного числа элементов, которые нельзя пронумеровать, называется несчетным (например, несчетно множество всех точек отрезка).

или события  $B$ , или событий  $A$  и  $B$  вместе. Операцию объединения условно записывают так:

$$C = A + B \text{ или } C = A \cup B.$$

Событие  $C$ , эквивалентное объединению  $n$  событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , будем записывать в виде

$$C = \sum_{i=1}^n A_i \text{ или } C = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Пересечением (или произведением) двух событий  $A$  и  $B$  называется событие  $C$ , которое состоит в осуществлении и события  $A$ , и события  $B$ . Операция пересечения событий условно записывается в виде

$$C = AB \text{ или } C = A \cap B.$$

Событие  $C$ , эквивалентное пересечению  $n$  событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , записывается в виде

$$C = \prod_{i=1}^n A_i, \text{ или } C = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Событие  $\bar{A}$ , которое заключается в том, что событие  $A$  не произойдет, называется событием, *противоположным* событию  $A$ .

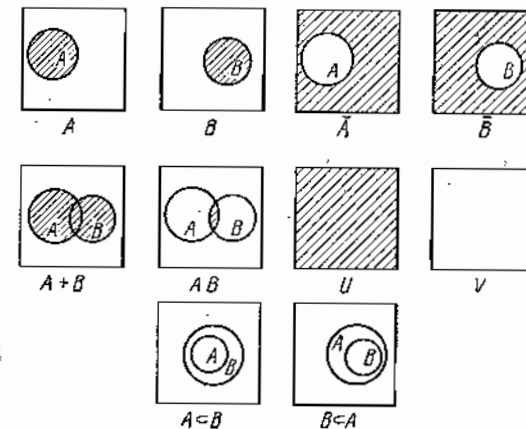


Рис. 180

Введенное выше достоверное событие будем обозначать  $U$ , а невозможное событие условимся обозначать  $V$ , тогда, если события  $A$  и  $B$  несовместны, можно записать  $AB = V$ .

Для противоположных событий  $A$  и  $\bar{A}$  справедливы соотношения

$$A\bar{A} = V, A + \bar{A} = U.$$

Пусть комплекс условий  $S$  состоит в том, что из квадрата наудачу выбирается точка (рис. 180), не принадлежащая изображенному на этом квадрате окружностям. Пусть событие  $A$  заклю-

чается в том, что точка выбрана из одного круга, а событие  $B$  — точка выбрана из другого круга. Тогда попадание точки в заштрихованные области соответствует событиям

$$A, B, \bar{A}, \bar{B}, A+B, AB, U, V, A \subset B, B \subset A.$$

Введенные операции над событиями подчинены простым правилам, которые напоминают правила сложения и умножения обычной алгебры чисел, однако следует отметить, что в ряде случаев эти операции существенно отличаются друг от друга.

Приведем правила выполнения операций над событиями:

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| 1. $A + A = A.$                 | 10. $A + V = A.$                         |
| 2. $AA = A.$                    | 11. $AU = A.$                            |
| 3. $A + B = B + A.$             | 12. $AV = V.$                            |
| 4. $AB = BA.$                   | 13. $\bar{\bar{A}} = A.$                 |
| 5. $A + (B + C) = (A + B) + C.$ | 14. $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$  |
| 6. $A(BC) = (AB)C.$             | 15. $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}.$ |
| 7. $A(B + C) = AB + AC.$        | 16. $\bar{U} = V.$                       |
| 8. $A + (BC) = (A + B)(A + C).$ | 17. $A + \bar{A} = U.$                   |
| 9. $A + U = U.$                 | 18. $A\bar{A} = V.$                      |

Все эти правила непосредственно вытекают из определений объединения, пересечения событий, достоверного, невозможного и противоположного событий. В качестве примеров покажем справедливость некоторых из приведенных правил.

**Пример 1.** Доказать, что справедливо соотношение

$$A + (BC) = (A + B)(A + C).$$

Действительно, если элементарное событие  $\omega \in A + BC$ , то или  $\omega \in A$ , но в этом случае  $\omega \in (A + B)(A + C)$ ; или  $\omega \in BC$ , а это значит также, что  $\omega \in (A + B)(A + C)$ . В силу произвольности выбора  $\omega$  имеем  $A + (BC) \subset (A + B)(A + C)$ .

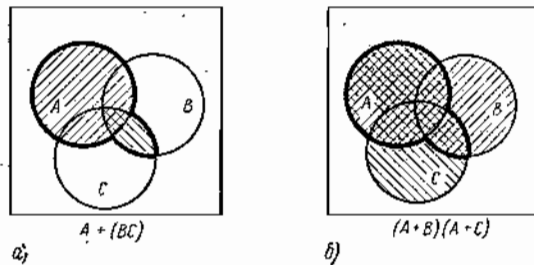


Рис. 181

С другой стороны, пусть  $\omega \in (A + B)(A + C)$ , тогда элементарное событие  $\omega$  принадлежит событиям  $A + B$  и  $A + C$ , а отсюда следует, что  $\omega$  входит или в событие  $A$ , или в события  $B$  и  $C$  вместе. Отсюда получим, что  $(A + B)(A + C) \subset A + BC$ . Из определения эквивалентности событий имеем  $A + (BC) = (A + B)(A + C)$ .

Справедливость соотношения  $A + (BC) = (A + B)(A + C)$  можно пояснить также с помощью диаграмм, аналогичных диаграммам, приведенным на рис. 180.

На рис. 181, а множество точек, соответствующих событию  $A$ , обозначено штриховкой в одном направлении, а множество точек, соответствующих событию  $BC$ , обозначено штриховкой в другом направлении. Тогда из определения объединения событий следует, что множество точек, соответствующих событию  $A + (BC)$ , соответствует множеству точек, обозначенных штриховкой или в одном, или в другом направлении. Это множество обведено жирной линией.

На рис. 181, б множество точек, соответствующих событию  $A + B$ , обозначено штриховкой в одном направлении, а событию  $A + C$  — штриховкой в другом направлении. Из определения пересечения событий следует, что событию  $(A + B)(A + C)$  соответствует множество точек, где есть штриховка и в одном, и в другом направлении. Это множество точек обведено жирной линией. Из сравнения рис. 181, а и 181, б следует, что события  $A + (BC)$  и  $(A + B)(A + C)$  эквивалентны.

**Пример 2.** Доказать, что справедливо соотношение

$$\bar{A} + \bar{B} = \overline{AB}.$$

Действительно, если произойдет или событие  $\bar{A}$ , или событие  $\bar{B}$ , то не могут произойти вместе события  $A$  и  $B$ , т. е.  $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{AB}$ . С другой стороны, если не произойдут вместе события  $A$  и  $B$ , то или не произойдет событие  $A$ , или не произойдет событие  $B$ , поэтому  $\overline{AB} \subset \bar{A} + \bar{B}$ . Следовательно,  $\bar{A} + \bar{B} = \overline{AB}$ .

**Пример 3.** Упростить выражение  $(AB) + (\bar{A}\bar{B}) + (\bar{A}B)$ .

На основании правил действий над событиями 7, 17, 11, 8 получим:

$$\begin{aligned} (AB) + (\bar{A}\bar{B}) + (\bar{A}B) &= A(B + \bar{B}) + (\bar{A}\bar{B}) = AU + \bar{A}\bar{B} = A + \bar{A}\bar{B} = \\ &= (A + \bar{A})(A + \bar{B}) = U(A + \bar{B}) = A + \bar{B}. \end{aligned}$$

**Пример 4.** Рабочий производит за смену  $n$  деталей. Пусть событие  $A_i$

означает, что  $i$  — деталь бракованная. Описать события:  $\prod_{i=1}^n A_i$ ;  $\sum_{i=1}^n A_i$ .

Согласно определению пересечения событий и правилу 15, имеем, что

$\prod_{i=1}^n \bar{A}_i = \sum_{i=1}^n A_i$  — событие, заключающееся в том, что среди выпущенных деталей все пригодные, а согласно определению объединения событий  $\sum_{i=1}^n A_i$  — со-

бытие, заключающееся в том, что среди выпущенных деталей хотя бы одна бракованная.

**Пример 5.** На рис. 182 показана электрическая цепь. Обозначим через  $A_1, A_2, A_3$  — события, заключающиеся в том, что произошел обрыв в цепи сопротивлений  $R_1, R_2$  или  $R_3$  соответственно. Выразить через события  $A_1, A_2$  и  $A_3$  событие  $B$ , заключающееся в том, что за время работы  $T$  в цепи между точками  $C$  и  $D$  произойдет обрыв.

Цепь будет нарушена, если выйдут из строя или сопротивление  $R_1$ , или сопротивления  $R_2$  и  $R_3$  вместе, поэтому событие  $B$  эквивалентно объединению события  $A_1$  с пересечением событий  $A_2, A_3$ , т. е.  $B = A_1 + A_2A_3$ .

**3. Вероятность события.** Для практических целей недостаточно знать только то, что исследуемое событие случайно. Так, например, выпуск бракованной детали является случайным событием, но нам



Рис. 182

совершенно не безразлично, будет ли среди выпущенных деталей 10 или 0,1% бракованных. Введем какую-то количественную меру объективной возможности осуществления случайного события. Целесообразно эту меру ввести на основе интуитивных представлений человека о характере случайных событий.

Пусть производится  $n$  одинаковых опытов и пусть в  $m$  случаях при этом произошло событие  $A$ . Вычислим отношение числа исходов опыта  $m$ , при которых произошло событие  $A$ , к числу всех опытов  $n$ . Это отношение называется *статистической вероятностью* (или *частотой*) события  $A$  и обозначается  $P^*(A)$ . Таким образом,

$$P^*(A) = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

В каждой отдельной серии из  $n$  опытов статистическая вероятность события может принимать различные значения, однако многочисленные экспериментальные данные показывают, что при достаточно большом числе опытов значения статистической вероятности, определенные в результате выполнения каждой серии опытов, группируются около некоторой средней величины. Таким образом, при большом числе опытов частота события может служить количественной мерой возможности его осуществления.

Предположим теперь, что в результате  $n$  опытов событие  $A$  произошло  $k$  раз, событие  $B$  —  $m$  раз, а событие  $A$  совместно с событием  $B$  (событие  $AB$ ) —  $r$  раз. Пусть требуется вычислить статистическую вероятность события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ . Эта статистическая вероятность называется *условной статистической вероятностью* события  $A$  при наличии события  $B$  и обозначается  $P^*(A|B)$ . Из определения статистической вероятности следует, что условная статистическая вероятность события  $A$  при наличии события  $B$  равна отношению числа  $r$  опытов, при которых произошло событие  $AB$ , к числу  $m$  опытов, при которых произошло событие  $B$ , т. е.

$$P^*(A|B) = \frac{r}{m}. \quad (2)$$

Свойства статистической вероятности

*Свойство 1. Статистическая вероятность есть неотрицательное число, т. е.*

$$P^*(A) \geq 0. \quad (3)$$

Действительно, так как число исходов опыта  $m$ , при которых происходит событие  $A$ , неотрицательно, а число всех опытов  $n$  положительно, то

$$P^*(A) = \frac{m}{n} \geq 0.$$

*Свойство 2. Статистическая вероятность достоверного события равна единице,*

$$P^*(U) = 1. \quad (4)$$

Так как событие  $U$  достоверно, то оно происходит при каждом опыте, поэтому число исходов опыта, при которых произошло событие  $U$ , равно числу всех опытов, т. е.  $m = n$ , откуда следует, что

$$P^*(U) = \frac{n}{n} = 1.$$

*Свойство 3. Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то статистическая вероятность события  $A + B$  равна сумме статистических вероятностей событий  $A$  и  $B$ , т. е.*

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B). \quad (5)$$

В самом деле, пусть производится  $n$  опытов, причем в  $k$  опытах произошло событие  $A$  и в  $m$  опытах событие  $B$ . Так как события  $A$  и  $B$  несовместны, то если произошло событие  $A$ , то не произошло событие  $B$ , и, наоборот, если произошло событие  $B$ , то не произошло событие  $A$ . Поэтому общее число исходов опыта, при которых произошло или событие  $A$ , или событие  $B$ , равно  $k + m$ . Из определения статистической вероятности (1) следует, что

$$P^*(A + B) = \frac{k + m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} = P^*(A) + P^*(B).$$

Свойства 1, 2 и 3 распространяются и на условную статистическую вероятность  $P^*(A|B)$ .

Условную статистическую вероятность события  $A$  относительно события  $B$  можно вычислить как частное от деления статистической вероятности появления события  $A$  совместно с событием  $B$  на статистическую вероятность события  $B$ , т. е.

$$P^*(A|B) = \frac{P^*(AB)}{P^*(B)}. \quad (6)$$

Действительно, из равенств (2) и (1) следует, что

$$P^*(A|B) = \frac{r}{m} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P^*(AB)}{P^*(B)}.$$

Статистическую вероятность события можно вычислить только после производства опыта, однако в ряде случаев производить эксперимент для определения вероятности или невозможно, или нецелесообразно. Остановимся еще на одном определении вероятности, называемом классическим.

Классическое определение вероятности основано на интуитивном понятии равновозможности событий. Несколько событий в данном опыте называются равновозможными, если по условиям симметрии есть основание считать, что ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другое. Например, равновозможными событиями являются выпадение герба и выпадение цифры при однократном бросании монеты.

Пусть исход опыта можно представить в виде полной группы событий, которые попарно несовместны и равновозможны. Вероятностью события  $A$  называется отношение числа  $m$  благоприятствующих этому событию исходов опыта к общему числу  $n$  всех равновозможных исходов опыта. Вероятность события  $A$  будем обозначать  $P(A)$ , тогда

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (7)$$

**Пример 6.** В урне три синих шара, восемь красных и девять белых. Все шары одного размера и веса. Наудачу из урны вынимается один шар. Найти вероятности того, что этот шар синего, красного или белого цвета.

Обозначим события, означающие выход синего, красного или белого шара, соответственно  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Всего число равновозможных случаев  $n = 20$ . Число случаев, благоприятствующих выходу синего шара,  $m_1 = 3$ , красного шара  $m_2 = 8$  и белого шара  $m_3 = 9$ , откуда имеем

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{3}{20}, \quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{8}{20}, \quad P(C) = \frac{m_3}{n} = \frac{9}{20}.$$

**Пример 7.** В партии из  $n$  изделий  $k$  изделий являются бракованными. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки  $m$  изделий точно  $l$  изделий окажутся бракованными.

Число равновозможных способов взять из  $n$  изделий  $m$  штук равно числу сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ , т. е.  $C_n^m$ . Из выбранных  $m$  деталей по условию задачи  $l$  должно быть бракованных, всего таких изделий можно выбрать  $C_k^l$  способами. Остальные  $m-l$  деталей в выбранной партии должны быть пригодные, их можно выбрать  $C_{n-k}^{m-l}$  способами. Таким образом, число исходов опыта, благоприятствующих наличию в проверяемой партии точно  $l$  бракованных деталей, равно  $C_k^l C_{n-k}^{m-l}$ , и вероятность искомого события выражается формулой

$$P(A) = \frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m} = \frac{k! (n-k)!}{n!} \frac{(n-k)! (m-l)!}{(k-l)! (n-k-m+l)!} \frac{n!}{m! (n-m)!}. \quad (8)$$

Вероятность события  $A$ , вычисленная при условии, что имело место событие  $B$ , называется *условной вероятностью* события  $A$  при наличии события  $B$  и обозначается  $P(A|B)$ .

Условная вероятность события  $A$  при наличии события  $B$ , согласно равенству (6), вычисляется как отношение числа  $r$  опытов, благоприятствующих осуществлению события  $A$  и события  $B$  вместе, к числу  $m$  — всех равновозможных исходов опыта, при которых осуществляется событие  $B$ , т. е.

$$P(A|B) = \frac{r}{m}.$$

**Пример 8.** В урне находится 7 белых и 3 черных шара. Из урны наудачу вынимают один шар, он оказался белым, после этого шар в урну не возвращают. Определить вероятность того, что вынутый наудачу следующий шар тоже будет белым.

Обозначим через  $B$  событие, состоящее в том, что первый вынутый шар белый,  $A$  — событие, состоящее в том, что второй шар, вынутый из урны, — белый. По условию задачи требуется найти условную вероятность  $P(A|B)$ .

Число равновозможных исходов опыта, благоприятствующих событию  $B$ , равно девяти,  $m = 9$  (бб, бб, бб, бб, бб, бб, бч, бч, бч). Из них число исходов, благоприятствующих событиям  $A$  и  $B$ , вместе равно шести,  $r = 6$ , поэтому, согласно равенству (7), имеем

$$P(A|B) = \frac{6}{9}.$$

Эту же задачу можно решить другим способом. После того как из урны вынут белый шар, в ней осталось девять шаров. Таким образом, остается девять равновозможных исходов опыта, причем шесть из них благоприятствует появлению белого шара. Поэтому при наличии события  $B$  искомая условная вероятность равна

$$P(A|B) = \frac{6}{9}.$$

### Свойства классической вероятности

*Свойство 1. Вероятность есть неотрицательное число:*

$$P(A) \geq 0. \quad (9)$$

*Свойство 2. Вероятность достоверного события  $U$  равна единице:*

$$P(U) = 1. \quad (10)$$

*Свойство 3. Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то вероятность события  $A+B$  равна сумме вероятностей событий  $A$  и  $B$ , т. е.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \quad (11)$$

Свойства вероятности 1, 2, 3 справедливы и для условной вероятности  $P(A|B)$ . Условная вероятность события  $A$  при наличии события  $B$  равна частному от деления вероятности появления события  $A$  совместно с событием  $B$  на вероятность события  $B$ , т. е.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (12)$$

Доказательства справедливости указанных свойств вероятности аналогичны приведенным выше доказательствам соответствующих свойств статистической вероятности.

Не всякая система случайных событий может быть рассмотрена исходя из статистического или классического определения вероятностей. Однако указанные свойства вероятностей оказываются справедливыми и для других вероятностных ситуаций, не приводимых к рассмотренным выше моделям. Примем свойства 1, 2, 3 вероятности в качестве аксиом для вероятности любой системы случайных событий. На основе этих аксиом строится математическая теория, описывающая закономерности, присущие случайным событиям. Изложим кратко идею построения этой теории.

Рассматривается пространство элементарных событий  $\{\omega_i\} = \Omega$ , т. е. множество возможных взаимно исключающих друг друга исхо-

дов опыта, один из которых обязательно должен произойти при осуществлении комплекса условий  $S$ . Из множества  $\Omega$  составляются всевозможные его подмножества, называемые событиями.

Множество всех событий при добавлении невозможного события  $V$  называется полем событий  $F$ . В поле событий  $F$  обязательно входит достоверное событие  $U$ . Действительно, одним из событий из всего множества  $F$  является событие, заключающееся в том, что произойдет одно из элементарных событий. Это событие эквивалентно объединению элементарных событий  $\sum_{i=1}^n \omega_i$ . Так как одно из

элементарных событий обязательно должно произойти, то  $\sum_{i=1}^n \omega_i$  есть достоверное событие, но событие  $\sum_{i=1}^n \omega_i$  совпадает с пространством элементарных событий, поэтому  $\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i = U$ .

Для пояснения построения поля событий рассмотрим следующий комплекс условий  $S$ . На четырех карточках написаны четыре буквы  $a, b, c$  и  $d$ . Карточки тщательно перемешиваются и наудачу вытаскивается одна из них. Тогда пространство элементарных событий состоит из четырех точек  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  и  $\omega_d$ , где  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  и  $\omega_d$  — элементарные события, заключающиеся в том, что на вынутой карточке написаны буквы  $a, b, c$  и  $d$  соответственно. В этом случае пространство элементарных событий  $\Omega$  состоит из четырех элементов  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  и  $\omega_d$ . Составим множество подмножеств элементарных событий, т. е. поле событий  $F$ . Это поле состоит из следующих подмножеств (событий):

$$\begin{aligned} &\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d, \omega_a + \omega_b, \omega_a + \omega_c, \omega_a + \omega_d, \omega_b + \omega_c, \omega_b + \omega_d, \omega_c + \omega_d, \\ &\omega_a + \omega_b + \omega_c, \omega_a + \omega_b + \omega_d, \omega_a + \omega_c + \omega_d, \omega_b + \omega_c + \omega_d, \\ &\omega_a + \omega_b + \omega_c + \omega_d, V. \end{aligned}$$

Достоверное событие  $U$  в данном опыте состоит в том, что произойдет или событие  $\omega_a$ , или  $\omega_b$ , или  $\omega_c$ , или  $\omega_d$ , т. е.  $U = \omega_a + \omega_b + \omega_c + \omega_d$ , таким образом достоверное событие совпадает с пространством элементарных событий.

Вероятностью события  $A$  называется мера объективной возможности этого события. На поле событий  $F$  вероятность вводится с помощью названных выше свойств (9), (10) и (11), принимаемых в дальнейшем в качестве аксиом теории вероятностей.

Аксиому (11) по индукции можно распространить на  $n$  попарно непересекающихся событий, тогда получим

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (13)$$

Равенство (13) называется *принципом сложения вероятностей*.

Задачей теории вероятностей является вычисление вероятности сложных событий, определенным образом связанных с некоторой совокупностью простых событий, вероятности которых заданы. Для теории вероятностей несущественно, как именно определяются вероятности исходной совокупности случайных событий (вычисление этих вероятностей является предметом специальных наук), важно лишь то, что если при достаточно большом числе испытаний статистические вероятности исходных событий будут близки к их вероятностям, это же будет верно для частоты интересующего нас сложного события, вероятность которого рассчитана согласно правил и теорем теории вероятностей.

4. Следствия из аксиом теории вероятностей. Рассмотрим ряд свойств вероятности, вытекающих из аксиом теории вероятностей.

1. Вероятность события  $\bar{A}$ , противоположного событию  $A$ , отличается от единицы на величину вероятности события  $A$ , т. е.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (14)$$

В самом деле, события  $A$  и  $\bar{A}$  противоположны, если  $A\bar{A} = V$ , а  $A + \bar{A} = U$ , поэтому из аксиом (10) и (11) получим, что

$$P(U) = P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

откуда имеем

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е.

$$P(V) = 0. \quad (15)$$

Действительно, так как  $\bar{U} = V$ , то из равенства (14) следует

$$P(V) = 1 - P(U) = 1 - 1 = 0. \quad (15')$$

3. Если событие  $A$  влечет за собой событие  $B$ , то вероятность события  $A$  меньше или равна вероятности события  $B$ , т. е.

$$P(A) \leq P(B), \text{ если } A \subset B. \quad (16)$$

Так как из условия  $A \subset B$  следует, что  $B = A + (AB)$ , где  $A(AB) = V$ , то согласно аксиоме (11) получим, что

$$P(B) = P(A) + P(AB),$$

но из аксиомы (9) имеем  $P(AB) \geq 0$ , откуда

$$P(A) \leq P(B).$$

4. Вероятность есть число, заключенное между нулем и единицей, т. е.

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (17)$$

Действительно, из соотношения  $A \subset U$  и свойства (9) следует, что

$$0 \leq P(A) \text{ и } P(A) \leq P(U) = 1,$$

следовательно,

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

5. Если  $A$  и  $B$  — два произвольные события, которые, вообще говоря, могут и пересекаться, то справедливо соотношение

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (18)$$

Действительно, представим объединение событий  $A$  и  $B$  в виде

$$A + B = A + \bar{A}B,$$

где  $A(\bar{A}B) = V$ , т. е. события  $A$  и  $\bar{A}B$  несовместны. С другой стороны, можно записать  $B = (AB) + (\bar{A}B)$ ; где  $(AB)(\bar{A}B) = V$ . Используя аксиому (11), имеем

$$P(A + B) = P(A) + P(\bar{A}B) \quad (19)$$

и

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B). \quad (20)$$

Окончательно из равенств (19) и (20) получаем

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

**5. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Бейеса.** При исследовании свойств статистической вероятности, а также в случае вычисления вероятности для схемы равновероятных случаев было введено понятие условной вероятности события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ . Понятие условной вероятности обобщается на любые системы случайных событий.

Условной вероятностью события  $A$  при наличии события  $B$  по аналогии с равенствами (5) и (10) называется вероятность, задаваемая формулой

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad (21)$$

причем предполагается, что  $P(B) \neq 0$ .

Очевидно, что условная вероятность события  $B$  относительно события  $A$  равна

$$P(B | A) = \frac{P(BA)}{P(A)}. \quad (22)$$

Преобразуя равенство (21) и (22), получаем

$$P(AB) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B). \quad (23)$$

Выражение (23) называется *принципом умножения вероятностей*. Согласно этому принципу, вероятность пересечения событий  $A$  и  $B$  равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого события при предположении, что первое событие произошло.

По индукции принцип умножения вероятностей можно распространить на вероятность пересечения событий  $A_1A_2 \dots A_n$ :

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1A_2) \dots P(A_n | A_1A_2 \dots A_{n-1}). \quad (24)$$

**Пример 9.** На рис. 183 показана электрическая цепь, ток в которой может прерываться при выходе из строя элемента  $a$ , и элемента  $b$ . Пусть событие  $A$  — выход из строя элемента  $a$ , а  $B$  — выход из строя элемента  $b$ . Известно, что вероятности событий  $A$  и  $B$  равны:  $P(A) = 0,01$ ;  $P(B) = 0,02$ . При выходе из строя элемента  $a$  условия работы элемента  $b$  более тяжелые и поэтому  $P(B | A) = 0,1$ . Найти вероятность  $P(A | B)$  выхода из строя элемента  $a$  при условии, что элемент  $b$  неисправен.

Из принципа умножения вероятностей имеем

$$P(AB) = P(A)P(B | A), \text{ т. е.}$$

$$P(AB) = 0,01 \cdot 0,1 = 0,001.$$

Из равенства (21) следует, что условная вероятность события  $A | B$  равна

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,001}{0,02} = 0,05.$$

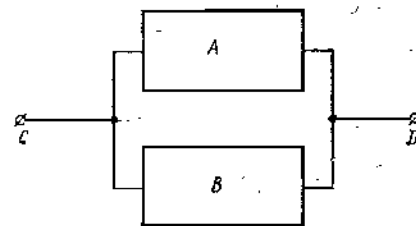


Рис. 183

Используя понятие условной вероятности, можно получить ряд формул, полезных для вычисления вероятности событий. Пусть все пространство элементарных событий можно представить в виде объединения  $n$  попарно несовместных событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$  (рис. 184), т. е.

$$\Omega = \sum_{i=1}^n H_i, \text{ причем } H_i H_j = V \text{ при } i \neq j.$$

Рассмотрим событие  $A$ , принадлежащее пространству элементарных событий. Учитывая правила сложения событий, можно записать:

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n. \quad (25)$$

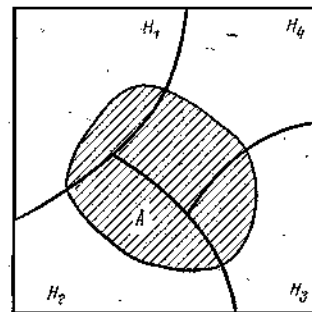


Рис. 184

Так как события  $H_1, H_2, \dots, H_n$  попарно несовместны, то и события  $AH_i$  и  $AH_j$  при  $i \neq j$  также несовместны, поэтому, пользуясь аксиомой (11), получим

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n) = \sum_{i=1}^n P(AH_i), \quad (26)$$

Согласно принципу умножения вероятностей (23), имеем  $P(AH_i) = P(H_i)P(A | H_i)$ , поэтому равенство (26) можно переписать в виде

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A | H_i). \quad (27)$$

Равенство (25) называется *формулой полной вероятности*.

**Пример 10.** Имеется 10 одинаковых урн, из них три урны с номером один, в которых находится 7 белых и 3 красных шара, одна урна с номером два с 1 белым и 9 красными шарами и шесть урн с номером три с 9 белыми и 1 красным шаром. Из произвольной урны наудачу вытаскивается один шар, определить вероятность того, что он белый.



Обозначим через  $H_i$  — событие, заключающееся в том, что наудачу выбран шар из урны с номером  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $A$  — событие, заключающееся в появлении белого шара. Из условия задачи следует, что вероятности того, что выбрана урна с номером 1, 2, и 3, соответственно равны  $P(H_1) = \frac{3}{10}$ ,  $P(H_2) = \frac{1}{10}$ ,

$P(H_3) = \frac{6}{10}$ , причем события  $H_1, H_2, H_3$  попарно несовместны и составляют полную группу событий. Условные вероятности появления белого шара из урн с соответствующими номерами равны:

$$P(A|H_1) = \frac{7}{10}, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{10}, \quad P(A|H_3) = \frac{9}{10}.$$

По формуле полной вероятности получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) P(A|H_i) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{9}{10} = 0,76.$$

Рассмотрим аналогичную задачу, но теперь будем предполагать, что в результате опыта осуществляется событие  $A$ , которое может произойти вместе с одним из попарно непересекающихся событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , составляющих полную группу событий (обычно такие события называют гипотезами, см. рис. 184).

Пусть известны вероятности событий  $H_i$  до выполнения опыта (априорные вероятности гипотез  $H_i$ ) и условные вероятности события  $A$  относительно событий  $H_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Необходимо вычислить вероятность того, что осуществилось событие  $H_i$ , если в результате опыта произошло событие  $A$ , т. е. найти апостериорную вероятность гипотезы  $H_i$  в результате осуществления события  $A$ . Для решения этой задачи воспользуемся принципом умножения вероятностей. Из равенства (23) имеем

$$P(AH_i) = P(H_i) P(A|H_i) = P(A) P(H_i|A), \quad (28)$$

откуда

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{P(A)}. \quad (29)$$

Окончательно из равенств (29) и (27) находим:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^n P(H_j) P(A|H_j)}. \quad (30)$$

Полученное выражение носит название *формулы Байеса*.

**Пример 11.** Из партии в пять деталей наудачу взята одна деталь, оказавшаяся бракованной. Количество бракованных деталей в партии равномерно от 0 до 5. Какова вероятность, что в партии 0, 1, 2, 3, 4 или все 5 деталей бракованные?

Может быть выдвинуто 6 гипотез о количестве бракованных деталей:  $H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$ , где  $H_i$  — событие, состоящее в том, что в партии  $i$  бракованных деталей. Пусть  $A$  — событие, заключающееся в появлении бракованной детали. Тогда вероятности гипотез равны

$$P(H_0) = P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = P(H_5) = \frac{1}{6},$$

а условные вероятности равны

$$P(A|H_0) = 0, \quad P(A|H_1) = \frac{1}{5}, \quad P(A|H_2) = \frac{2}{5}, \quad P(A|H_3) = \frac{3}{5}, \\ P(A|H_4) = \frac{4}{5}, \quad P(A|H_5) = 1.$$

По формуле Байеса имеем

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^5 P(H_j) P(A|H_j)}.$$

Подставляя в выражение формулы Байеса значения соответствующих вероятностей, получим

$$P(H_0|A) = 0, \quad P(H_1|A) = \frac{1}{15}, \quad P(H_2|A) = \frac{2}{15}, \\ P(H_3|A) = \frac{3}{15}, \quad P(H_4|A) = \frac{4}{15}, \quad P(H_5|A) = \frac{5}{15}.$$

Таким образом, наиболее вероятно, что в партии все пять деталей бракованные.

**Пример 12.** Система обнаружения самолета противника из-за наличия помех может давать ложные показания о наличии цели с вероятностью 0,05, а при наличии цели система обнаруживает ее с вероятностью 0,9. Вероятность появления самолета противника в зоне работы системы равна 0,25. Поступил сигнал о наличии цели. Определить вероятность ложной тревоги.

Обозначим через  $H_1$  гипотезу о действительном наличии противника,  $H_2$  — гипотезу об отсутствии противника,  $A$  — событие, заключающееся в получении сигнала о наличии цели. По условию задачи имеем:

$$P(H_1) = 0,25; \quad P(H_2) = 0,75; \quad P(A|H_1) = 0,90; \quad P(A|H_2) = 0,05.$$

По формуле Байеса вычислим вероятность ложной тревоги:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) P(A|H_2)}{P(H_1) P(A|H_1) + P(H_2) P(A|H_2)} = \frac{0,75 \cdot 0,05}{0,25 \cdot 0,9 + 0,75 \cdot 0,05} = \frac{1}{7}.$$

**6. Зависимые и независимые события.** Рассмотрим два события  $A$  и  $B$ , причем  $P(A) \neq 0$ ,  $P(B) \neq 0$ . Событие  $A$  не зависит от события  $B$ , если

$$P(A|B) = P(A). \quad (31)$$

Пусть событие  $A$  не зависит от  $B$ , тогда из равенств (31) и (21) получим

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A) P(B)}{P(A)} = P(B). \quad (32)$$

Поэтому, если событие  $A$  не зависит от события  $B$ , то и событие  $B$  не зависит от события  $A$ .

События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если  $P(A|B) = P(A)$  или  $P(B|A) = P(B)$ . В противном случае события  $A$  и  $B$  называются *зависимыми*.

Для независимых событий, как это следует из равенств (31) и (32), принцип умножения вероятностей принимает вид

$$P(AB) = P(A) P(B). \quad (33)$$

**Пример 13.** События  $A$  и  $B$  — противоположные, причем  $P(A) \neq 0$  и  $P(B) \neq 0$ . Определить, являются ли эти события зависимыми.



Так как события  $A$  и  $B$  противоположны, то их пересечение есть невозможное событие  $V$ , поэтому  $P(AB) = P(V) = 0$ . Тогда условная вероятность  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0$ . Поэтому из неравенства  $P(A) \neq P(A|B) = 0$  следует зависимость противоположных событий  $A$  и  $B$ .

Обобщим понятие независимости событий на случай нескольких событий. События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются *независимыми в совокупности*, если для любой их комбинации  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$  ( $k \leq n$ ) выполнено соотношение

$$P\left(\prod_{r=1}^k A_{i_r}\right) = \prod_{r=1}^k P(A_{i_r}). \quad (34)$$

Покажем на примере, что для независимости событий в совокупности недостаточно, чтобы каждые два события были независимы. Пусть, например, имеются четыре детали, на одной из них имеется забоина (событие  $A$ ), на другой побита окраска (событие  $B$ ), на третьей не выдержаны размеры (событие  $C$ ), а четвертая имеет все три дефекта одновременно (событие  $ABC$ ). Наудачу выбирается одна из деталей, требуется определить, зависимы ли события  $AB$  и  $C$  в совокупности. Учитывая условия задачи, получим, что соответствующие вероятности равны:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \quad P(ABC) = \frac{1}{4}, \\ P(A|B) = P(A|C) = P(B|C) = P(B|A) = P(C|A) = \\ = P(C|B) = \frac{1}{2}.$$

Так как  $P(A|B) = P(A)$ ,  $P(A|C) = P(A)$ ,  $P(B|C) = P(B)$ , то события  $A, B$  и  $C$  попарно независимы, но события  $AB$  и  $C$  не являются независимыми в совокупности, потому что для них  $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$ , т. е. не выполнено условие (34).

**7. Последовательность независимых испытаний.** Рассмотрим применение принципов умножения и сложения вероятностей для весьма важного случая. Пусть производится серия из повторных независимых испытаний (опытов), причем в каждом из этих испытаний возможны только два исхода и вероятности этих исходов остаются неизменными для всех испытаний. Такие повторные испытания называются испытаниями Бернулли. Исходы опыта в испытаниях Бернулли принято называть «успехом»  $\omega_y$  и «неудачей»  $\omega_n$ .

Пространство элементарных событий для каждого отдельного опыта состоит из двух точек  $\omega_y$  и  $\omega_n$ , а для  $n$  независимых испытаний пространство элементарных событий состоит из  $2^n$  точек, каждая из которых представляет некоторую последовательность из элементарных событий  $\omega_y$  и  $\omega_n$  (так как после каждого опыта число возможных исходов в серии из  $k$  опытов удваивается по сравнению с предыдущей серией из  $k-1$  опытов).

Вероятности «успеха» и «неудачи» принято обозначать соответственно  $p$  и  $q$ . Так как события  $\omega_y$  и  $\omega_n$  составляют полную группу, то

$$p + q = 1. \quad (35)$$

Примерами испытаний Бернулли могут быть последовательные бросания монеты с вероятностями событий  $\omega_y$  — выпадение герба и  $\omega_n$  — выпадение цифры  $p = q = \frac{1}{2}$ ; производство серни выстрелов по мишени в одинаковых условиях опыта с вероятностью попадания  $p$  и промаха  $q$  и т. д.

Вычислим вероятность события, заключающегося в том, что при  $n$  испытаниях Бернулли точно  $k$  раз осуществится событие  $\omega_y$ ,  $(n-k)$  раз событие  $\omega_n$ , если известны вероятности этих событий при производстве одного испытания

$$P(\omega_y) = p \text{ и } P(\omega_n) = q. \quad (36)$$

Так как испытания Бернулли предполагаются независимыми в совокупности, то согласно принципу умножения вероятностей для независимых событий вероятность события  $A$ , состоящего в том, что осуществится комбинация из  $k$  успехов и  $(n-k)$  неудач в  $n$  испытаниях, равна

$$P(A) = [P(\omega_y)]^k [P(\omega_n)]^{n-k} = p^k q^{n-k}. \quad (37)$$

Число комбинаций результатов, полученных в  $n$  опытах, в которых событие  $\omega_y$  происходит  $k$  раз, равно числу сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ . Очевидно, что каждая комбинация является несовместной с любой другой, поэтому согласно принципу сложения вероятностей несовместных событий, вероятность  $P_{n,k}$   $k$  успехов при  $n$  опытах равна

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (38)$$

**Пример 14.** Производится четыре выстрела по мишени, причем известно, что вероятность попадания при одном выстреле  $p = 0,3$ . Определить вероятность того, что в результате стрельбы будет два попадания.

Вероятность промаха при одном выстреле равна  $q = 1 - p = 0,7$ . Отсюда, согласно равенству (38), имеем

$$P_{4,2} = C_4^2 0,3^2 0,7^2 = \frac{4!}{2!2!} 0,09 \cdot 0,49 = 0,2646.$$

## § 60. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

**1. Определения.** Величина, которая в каждом отдельном случае в зависимости от результатов опыта может принять то или иное числовое значение, называется *случайной величиной*. Например, случайными величинами являются число попаданий в мишень при  $n$  выстрелах, размеры детали, обработанной на токарном станке, ошибка системы автоматического регулирования, число отказов прибора за определенное время работы и т. д.

Конкретное значение, которое может принять случайная величина, называется *возможным ее значением*. Как видно из приведенных примеров, значение, принятое случайной величиной, зависит от исхода опыта, который мы назвали элементарным событием  $\omega$ . Поэтому случайную величину можно определить как функцию, заданную на пространстве элементарных событий  $\Omega$ .

Случайные величины обозначают большими буквами латинского алфавита  $X, Y, Z, \dots$ , а возможные их значения — соответствующими малыми буквами  $x, y, z, \dots$ .

Случайная величина зависит от элементарного события  $\omega$ . Этот факт обозначается следующим образом:  $X = X(\omega)$ . В дальнейшем для краткости записи аргумент случайной величины  $\omega$  будем опускать.

Случайная величина, множество возможных значений которой конечно или счетно, называется *дискретной случайной величиной*.

Чтобы задать случайную величину, необходимо указать все возможные ее значения и поставить им в соответствие вероятности, с которыми случайная величина принимает эти значения.

Если случайная величина  $X$  дискретна, то ее можно задать таблицей, в одной строке которой записаны возможные значения  $x_k$ , принимаемые случайной величиной  $X$ , а в другой — соответствующие им вероятности  $p_k$ :

Таблица 3

$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$

Эта таблица называется *распределением вероятностей* случайной величины  $X$ .

Так как объединение всех возможных событий  $\omega_k$ , заключающихся в том, что случайная величина  $X$  примет значения, равные  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), есть событие достоверное, то имеем

$$\sum_{k=1}^n p_k = P(U) = 1. \quad (1)$$

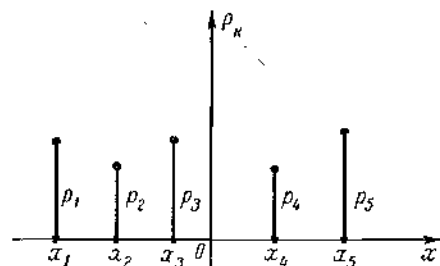


Рис. 185

Иногда распределение случайной величины  $X$  изображают в виде графика, по оси абсцисс которого откладывают возможные значения  $x_k$ , а по оси ординат — вероятности  $p_k$  (рис. 185).

**2. Функция распределения вероятностей.** Если дискретную случайную величину можно задать ее распределением, записанным в виде таблицы, то для случайной величины, принимающей несчетное количество значений, задать распределение таким образом невозможно;

поэтому вводится новая характеристика случайной величины; называется функцией распределения вероятностей.

*Функцией распределения вероятностей, или просто функцией распределения, случайной величины  $X$  называется функция  $F(x)$ , равная вероятности события, состоящего в том, что эта случайная величина примет значение, меньшее, чем  $x$ , т. е.*

$$F(x) = P(X < x), \quad (2)$$

где переменное  $x$  принимает все значения на числовой оси.

Свойства функции распределения вероятностей  
*Свойство 1. Функция распределения принимает значения, заключенные между нулем и единицей, т. е.*

$$0 \leq F(x) \leq 1. \quad (3)$$

Справедливость этого свойства следует из равенства (17) § 59, так как функция  $F(x)$  является вероятностью.

*Свойство 2. Вероятность того, что случайная величина примет значение на полуинтервале  $[a, b)$  (где  $a < b$ ), равна разности значений функции распределения на концах этого полуинтервала, т. е.*

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad (4)$$

В самом деле, рассмотрим случайное событие  $A = (X < b)$ , заключающееся в том, что случайная величина  $X$  примет значение меньше, чем  $b$ . Очевидно, что это событие представимо как объединение двух непересекающихся событий  $X < a$  и  $a \leq X < b$ , т. е.

$$(X < b) = (X < a) + (a \leq X < b).$$

Тогда, на основании принципа сложения вероятностей, имеем

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \leq X < b),$$

откуда, учитывая выражение (2), получаем равенство (4).

*Свойство 3. Если случайная величина  $X_k$  принимает возможное значение  $x_k$  с вероятностью  $p_k$ , то ее функция распределения  $F(x)$  имеет при  $x = x_k$  разрыв непрерывности первого рода, причем в точке разрыва непрерывности функция  $F(x)$  непрерывна слева. График функции  $F(x)$  имеет при  $x = x_k$  скачок, равный  $p_k$ .*

Действительно, если значение функции распределения  $F(x)$  в точке  $x_k$  равно вероятности  $P(X < x_k)$ , то значение функции  $F(x_k + 0)$  будет

$$\begin{aligned} P(X < x_k + 0) &= P(X < x_k) + P(X = x_k) = \\ &= P(X < x_k) + p_k = F(x_k) + p_k. \end{aligned}$$

Следовательно, значение функции распределения в точке разрыва непрерывности  $x_k$  равно ее значению слева от этой точки, а справа от этой точки функция распределения изменяется скачком, т. е. она является функцией, непрерывной слева.

**Свойство 4.** Функция распределения является неубывающей функцией, т. е.

$$F(x_2) \geq F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1. \quad (5)$$

Действительно, из свойства 2 следует, что

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2);$$

но так как вероятность есть неотрицательная величина, то

$$F(x_2) \geq F(x_1).$$

**Свойство 5.** Функция распределения  $F(x)$  стремится к нулю при неограниченном уменьшении  $x$  и стремится к единице при неограниченном возрастании  $x$ , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1. \quad (7)$$

В самом деле, при  $x \rightarrow -\infty$  случайное событие  $X < -\infty$  становится невозможным, так как случайная величина не может принять значений меньше, чем  $-\infty$ , поэтому

$$F(-\infty) = P(X < -\infty) = P(V) = 0.$$

С другой стороны, случайное событие  $X < +\infty$  является достоверным, поэтому

$$F(+\infty) = P(X < +\infty) = P(U) = 1.$$

Рассмотрим, какие особенности имеют функции распределения дискретных случайных величин. Пусть  $X$  — дискретная случайная

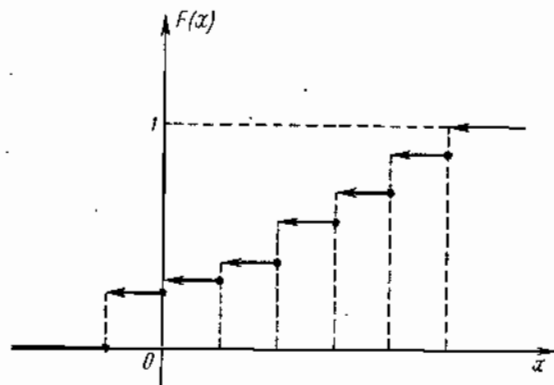


Рис. 186

величина, принимающая возможные значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Функция распределения вероятностей этой случайной величины  $X$  равна

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_k < x} p_k, \quad (8)$$

где производится суммирование вероятностей всех возможных значений случайной величины  $X$ , меньших, чем  $x$ .

Из равенства (8) следует, что при изменении  $x$  внутри полуинтервала  $(x_k, x_{k+1}]$  между соседними возможными значениями дискретной случайной величины  $X$  значение функции распределения  $F(x)$  этой случайной величины не изменяется, а в точках  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) функция распределения, согласно свойству 3, имеет разрыв непрерывности первого рода, причем величина скачка в точке разрыва равна вероятности  $p_k$ , с которой случайная величина  $X$  принимает значение  $x_k$  (рис. 186).

Если функция распределения вероятностей  $F(x)$  случайной величины  $X$  есть непрерывная функция, (рис. 187), то случайную величину  $X$  называют непрерывной.

Найдем вероятность того, что непрерывная случайная величина  $X$  примет заданное значение  $\alpha$ . Из свойства 2 функции распределения, учитывая, что для непрерывной случайной величины функция  $F(x)$  непрерывна, следует, что

$$P(X = \alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (P(\alpha \leq X < \alpha + \epsilon)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [F(\alpha + \epsilon) - F(\alpha)] = 0.$$

Таким образом, вероятность того, что непрерывная случайная величина примет заданное значение, равна нулю. Мы видим, что нулю

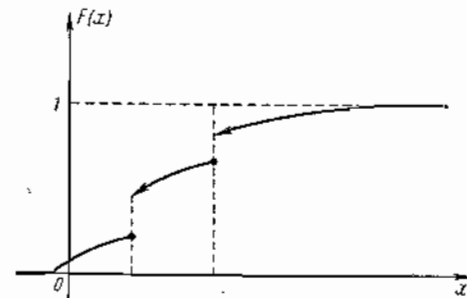


Рис. 188

может быть равна не только вероятности невозможного события. Из того, что вероятность события  $X = \alpha$  равна нулю, не следует, что это событие невозможно, а только то, что при неограниченном увеличении числа опытов это событие будет появляться сколь угодно редко.

Существуют случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый интервал, но функция распределения этих случайных величин не везде является непрерывной, а в отдельных точках терпит разрывы (рис. 188). Случайные величины с такими функциями распределения называются **смешанными**.

Смешанная случайная величина принимает значения с вероятностью поль в точках, где ее функция распределения непрерывна, кроме того, она может принимать ряд значений с ненулевой вероят-

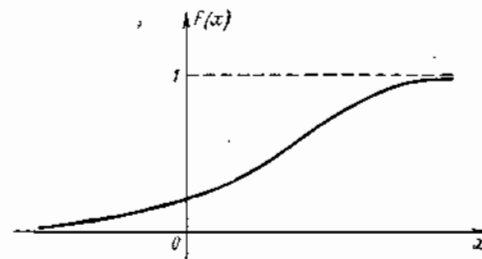


Рис. 187

ностью в точках, где функция распределения имеет разрывы непрерывности.

Функция распределения вероятностей является исчерпывающей характеристикой случайной величины, поэтому две случайные величины с одинаковыми функциями распределения называются *эквивалентными*.

**3. Плотность распределения вероятностей.** Если функция распределения  $F(x)$  случайной величины  $X$  дифференцируема, то ее всегда можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

где

Производная от функции распределения случайной величины  $f(x)$ , если она существует, называется *плотностью распределения вероятностей* этой случайной величины.

Выясним вероятностный смысл плотности распределения вероятностей. Имеем

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \quad (10)$$

Из выражения (10) следует, что плотность распределения вероятностей есть предел отношения вероятности того, что случайная величина примет значение внутри интервала  $(x, x + \Delta x)$  к длине этого интервала.

**Свойства плотности распределения вероятностей  $f(x)$ .**

**Свойство 1.** Плотность распределения вероятностей является неотрицательной функцией, т. е.

$$f(x) \geq 0. \quad (11)$$

Это свойство справедливо, так как  $F(x)$  есть неубывающая функция.

**Свойство 2.** Вероятность события, состоящего в том, что случайная величина  $X$  примет значение, заключенное в полуинтервале  $[a, b)$ , равна определенному интегралу от плотности распределения вероятностей на этом полуинтервале:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx, \quad (12)$$

т. е. вероятность того, что случайная величина примет значения внутри полуинтервала  $[a, b)$ , равна площади криволинейной тра-

пеции с основанием  $[a, b)$  под графиком функции плотности распределения вероятностей (рис. 189).

Действительно, согласно выражениям (4) и (9) имеем

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b \frac{dF(x)}{dx} dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Свойство 3.** Функция распределения случайной величины  $X$  равна определенному интегралу от плотности распределения вероятностей в пределах  $(-\infty, x)$ ,

т. е.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (13)$$

В самом деле, имеем

$$\int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{dF(x)}{dx} dx = F(x) - F(-\infty) = F(x).$$

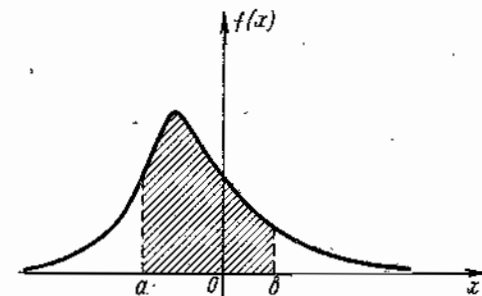


Рис. 189

**Свойство 4.** Интеграл от плотности распределения вероятностей, взятый по всей числовой оси, равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (14)$$

Утверждение справедливо, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Если функцию распределения дискретной или смешанной случайной величины  $X$  представить как сумму непрерывной функции и ступенчатой функции, то, используя дельта-функции (см. § 37), можно ввести понятие плотности распределения вероятностей для недифференцируемых в обычном смысле функций распределения. Для этого надо представить функцию распределения в виде суммы

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

где  $F_1(x)$  непрерывная функция, а  $F_2(x) = \sum_{k=1}^n \Delta F_2(x_k) 1(x - x_k)$  — ступенчатая функция (рис. 190), причем  $\Delta F_2(x_k)$  есть величина скачка функции  $F_2(x)$  в точке  $x_k$ , равная вероятности  $p_k$  того, что случайная величина  $X$  примет значение  $x_k$ .

Учитывая, что производная от единичной ступенчатой функции есть дельта-функция, получим

$$f(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} + \sum_{k=1}^n \Delta F_2(x_k) \delta(x - x_k) = f_1(x) + \sum_{k=1}^n p_k \delta(x - x_k). \quad (15)$$

Если случайная величина дискретна, то  $F_1(x) = 0$ , и ее плотность распределения вероятностей представляет собой сумму дельта-функций

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \Delta F_2(x_k) \delta(x - x_k) = \sum_{k=1}^n p_k \delta(x - x_k). \quad (16)$$

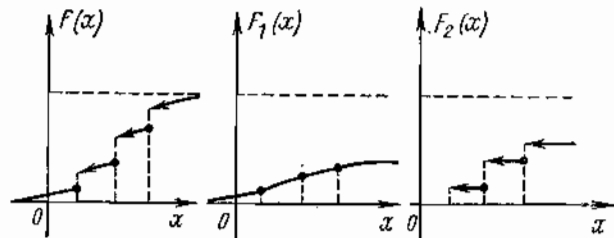


Рис. 190

**4. Законы распределения некоторых случайных величин.** Рассмотрим функции распределения и плотности распределения вероятностей для некоторых встречающихся на практике случайных величин.

**1. Биномиальный закон распределения.** Пусть имеем дискретную случайную величину  $X$ , которая равна числу успехов в  $n$  испытаниях Бернулли. Как следует из равенства (38) § 59, вероятность того, что в  $n$  испытаниях Бернулли будет  $k$  успехов, равна

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n). \quad (17)$$

Функция распределения для случайной величины  $X$  имеет вид ступенчатой линии с разрывами в точках  $x = k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Рассматриваемая дискретная случайная величина называется *распределенной по биномиальному закону*.

**Пример 1.** Производится серия из трех выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле  $p = 0,4$ , вероятность промаха  $q = 1 - p = 0,6$ . Пусть случайная величина  $X$  равна числу попаданий в мишень. Найти плотность распределения вероятностей этой случайной величины.

Очевидно, что возможные значения случайной величины  $X$   $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ . Из равенства (17) следует, что

$$P(X = k) = \frac{3!}{k!(3-k)!} 0,4^k 0,6^{3-k},$$

поэтому

$$P(X = 0) = 0,216, \quad P(X = 1) = 0,432, \quad P(X = 2) = 0,288, \quad P(X = 3) = 0,064.$$

Графики функций распределения и плотности распределения вероятностей показаны на рис. 191, где стрелки на графике плотности распределения вероятностей условно обозначают дельта-функции.

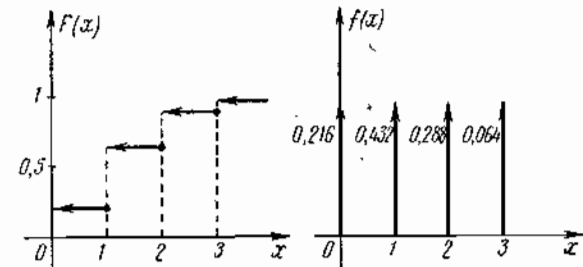


Рис. 191

**2. Закон распределения Пуассона.** Случайная величина  $X$  называется *распределенной по закону Пуассона*, если она принимает дискретные значения из ряда чисел  $0, 1, 2, \dots$  с вероятностями

$$p_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad (18)$$

где  $a$  — параметр распределения.

Рассмотрим последовательность из  $n$  испытаний Бернулли. Пусть  $X_n$  — случайная величина, равная числу успехов в этих  $n$  испытаниях,  $p_n$  — вероятность успеха. Покажем, что при большом числе испытаний распределение случайной величины  $X_n$  стремится к закону Пуассона. Для этого рассмотрим вероятность  $k$  успехов в  $n$  испытаниях Бернулли. Обозначив  $a = np_n$ , согласно равенству (17) получим

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{a^k}{n^k} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{a^k}{k!} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{\left(1 - \frac{a}{n}\right)^k n^k} = \\ &= \frac{a^k}{k!} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{a}{n}\right)^k}. \end{aligned}$$

В этом выражении зафиксируем число  $k$ , а величину  $n$  устремим в бесконечности, тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) &= \\ &= \frac{a^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{a}{n}\right)^k} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \end{aligned}$$

Таким образом, при большом числе испытаний биномиальное распределение приближается к распределению Пуассона.

3. Закон равной вероятности. Случайная величина  $X$  называется *распределенной по закону равной вероятности*, если ее плотность распределения вероятностей есть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x < a \text{ и } x > b. \end{cases} \quad (19)$$

Функция распределения случайной величины в этом случае равна

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (20)$$

Графики функций  $f(x)$  и  $F(x)$  для равномерно распределенной случайной величины приведены на рис. 192.

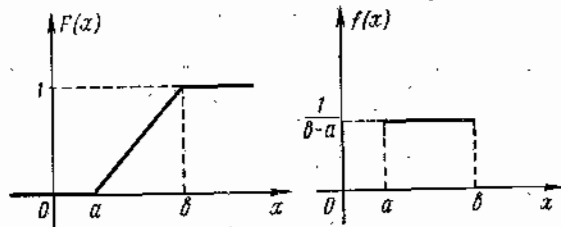


Рис. 192

4. Нормальное распределение (распределение Гаусса). Случайная величина  $X$  называется *распределенной по нормальному закону*, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (21)$$

Из равенства (21) следует, что плотность распределения вероятностей для нормально распределенной случайной величины определяется двумя параметрами  $m$  и  $\sigma$ . Вероятностный смысл этих параметров выясним ниже. Функция распределения нормально распределенной величины имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (22)$$

Графики функций  $f(x)$  и  $F(x)$  для нормального распределения приведены на рис. 193. Как видно из этого рисунка, кривая плотности распределения вероятностей для случайной величины, распределенной по нормальному закону, симметрична относительно значения  $x = m$ , называемого центром распределения. При больших

значениях  $\sigma$  кривая  $f(x)$  более пологая. Таким образом, параметр  $m$  определяет центр, около которого группируются возможные значения  $x$ , принимаемые случайной величиной  $X$ , а параметр  $\sigma$  является мерой величины рассеяния значений случайной величины около значения  $m$ .

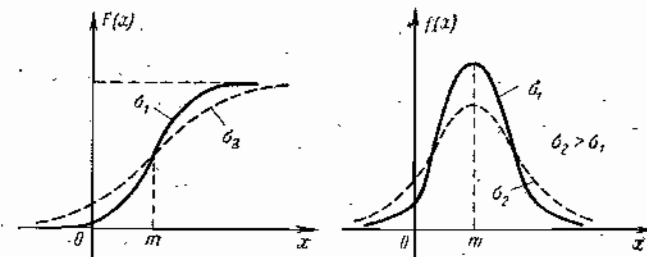


Рис. 193

Часто ставится задача — определить вероятность того, что нормально распределенная случайная величина примет значение на полуинтервале  $[a, b)$ . Из формулы (12) имеем:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Введем новую переменную интегрирования  $u = \frac{x-m}{\sigma}$ , тогда

$$P(a \leq X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (23)$$

Этот интеграл не выражается через элементарные функции, для его вычисления введем новую функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad (24)$$

для которой составлены подробные таблицы.

Функция  $\Phi(z)$  называется *функцией Лапласа*. Функция Лапласа  $\Phi(z)$  является функцией нечетной. Действительно,

$$\Phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-z} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Заменяв переменную интегрирования  $u = -v$ , получим

$$\Phi(-z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}} dv = -\Phi(z).$$

С учетом введенных обозначений равенство (23) можно переписать в виде

$$P(a \leq X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_0^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \int_0^{\frac{a-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right] = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \quad (25)$$

Если полуинтервал  $[a, b)$  симметричен относительно центра группирования возможных значений случайной величины  $X$ , т. е.

$$a = m - c, \quad b = m + c, \quad \text{то}$$

$$P(m - c \leq X < m + c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_0^{\frac{c}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \int_0^{\frac{c}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right] = \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right).$$

Из полученного равенства следует:

$$P(|X - m| < c) = 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right). \quad (26)$$

Формулы (24) и (26) позволяют вычислять вероятность нахождения значения нормально распределенной случайной величины в любом заранее заданном отрезке числовой оси с помощью таблицы значений функции  $\Phi(z)$ .

**Пример 2.** Найти вероятность того, что емкость конденсатора будет находиться в пределах  $(0,2 \pm 0,02)$  мкф, если случайная величина — значение емкости распределена по нормальному закону с центром распределения  $m = 0,2$  мкф, а  $\sigma = 0,01$  мкф.

Из равенства (25), воспользовавшись таблицей значений функции Лапласа, имеем

$$P(|X - 0,2| < 0,02) = 2\Phi\left(\frac{0,02}{0,01}\right) = 2\Phi(2) = 0,9544.$$

Случайные величины, распределенные по нормальному закону, часто встречаются в практических задачах. По нормальному закону распределены те случайные величины, значения которых определяются многими независимыми причинами, причем каждая из этих причин влияет на случайную величину незначительно. Например, по нормальному закону распределены значения параметров элементов электронных схем, размеры деталей, значения отклонений рядов от цели и т. д.

5. Экспоненциальное распределение. Случайная величина  $X$  называется *распределенной по экспоненциальному закону*, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (27)$$

Функция распределения в этом случае будет

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (28)$$

Экспоненциальное распределение встречается в теории надежности. Например, по этому закону распределена такая случайная величина, как время работы прибора до первого отказа.

5. **Функции случайных величин.** В ряде задач рассматривают случайные величины, связанные некоторой неслучайной зависимостью, например сигнал на выходе автоматической системы как функцию от случайного значения какого-либо параметра этой системы. Рассмотрим способы определения статистических характеристик случайной величины  $Y$  как функции случайного аргумента  $X$ , если статистические характеристики аргумента  $X$  заданы.

Пусть две случайные величины  $X$  и  $Y$  связаны между собой функциональной зависимостью

$$Y = \varphi(X) \quad (29)$$

и задана функция распределения вероятностей  $F_1(x)$  случайной величины  $X$ . Согласно определению функции распределения

$$F_1(x) = P(X < x). \quad (30)$$

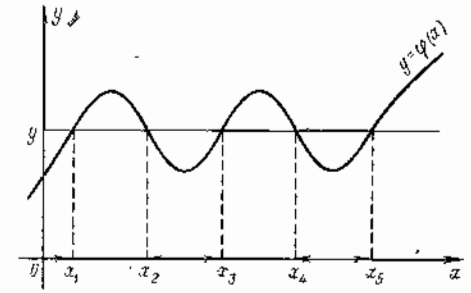


Рис. 194.

Пусть функциональная зависимость  $Y = \varphi(X)$  задана графиком, показанным на рис. 194. Тогда вероятность  $P(Y < y)$  равна вероятности того, что случайная величина  $X$  примет значения на непересекающихся интервалах, для которых справедливо неравенство  $\varphi(X) < y$ , поэтому согласно равенству (4) и принципу сложения вероятностей имеем

$$F_2(y) = P(Y = \varphi(X) < y) = \sum_{k=1}^n [F_1(x_{2k-1}) - F_1(x_{2k})], \quad (31)$$

где  $x_k$  — границы интервалов оси  $Ox$ , на которых выполнено условие  $\varphi(X) < y$ ;  $F_2(y)$  — функция распределения случайной величины  $Y$ .

Если существует плотность распределения вероятностей  $f_1(x)$  случайной величины  $X$ , то согласно равенству (12) имеем

$$F_2(y) = P(\varphi(X) < y) = \int_{\varphi(X) < y} f_1(x) dx, \quad (32)$$

где интеграл берется по всем интервалам оси  $x$ , для которых выполняется неравенство  $\varphi(X) < y$ .

Если функция  $\varphi(X)$  монотонная (рис. 195), то для нее существует обратная функция  $X = \varphi^{-1}(Y)$ , а интервал оси  $Ox$ , на кото-



ром выполняется неравенство  $\varphi(X) < y$ , является единственным. В этом случае, учитывая равенство (12), получим для монотонно возрастающей функции (см. рис. 195, а)

$$F_2(y) = P(-\infty < Y < y) = P(-\infty < X < x) = \varphi^{-1}(y) = F_1(\varphi^{-1}(y)), \quad (33)$$

а для монотонно убывающей функции  $\varphi$  имеем (см. рис. 195, б)

$$F_2(y) = P(-\infty < Y < y) = P(x + 0 \leq x < \infty) = 1 - F_1(\varphi^{-1}(y + 0)). \quad (34)$$

Если функция  $F_1(x)$  дифференцируема, то из равенств (33) и (34) получаем

$$f_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy} = \frac{dF_1(\varphi^{-1}(y))}{d\varphi^{-1}(y)} \left| \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} \right| = f_1(\varphi^{-1}(y)) \left| \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} \right|. \quad (35)$$

Знак модуля в равенстве (35) введен для того, чтобы объединить значения производных, вычисленных от выражений (33) и (34), в одной формуле.

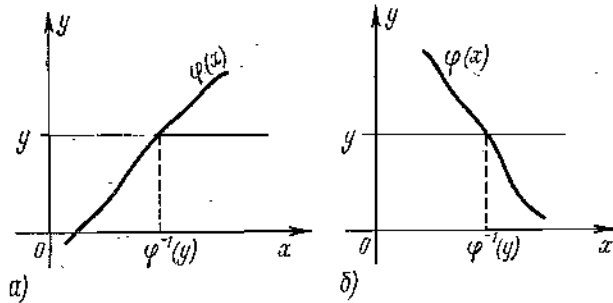


Рис. 195

Формулы (31)–(35) позволяют по заданным законам распределения случайного аргумента определять законы распределения функции  $Y = \varphi(X)$ .

**Пример 3.** Найти функцию распределения случайной величины  $Y$ , если она связана со случайной величиной  $X$  линейной зависимостью  $Y = aX + b$ , где  $a$  и  $b$  — известные неслучайные постоянные. Функция распределения  $F_1(x)$  (или плотность распределения  $f_1(x)$ ) аргумента  $X$  задана.

Функция, обратная функции  $\varphi(X)$ , имеет вид  $\varphi^{-1}(Y) = \frac{Y-b}{a}$ .

Из равенств (33) и (35) получим

$$F_2(y) = F_1\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad f_2(y) = \frac{1}{a} f_1\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

**Пример 4.** Найти функцию распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y$ , если случайная величина  $X$  распределена по нормальному закону (см. равенство (21)) при  $m=0$ , а  $Y = \varphi(X) = X^2$ .

По условию задачи имеем

$$F_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Из формулы (31) получим, учитывая, что  $\varphi^{-1}(Y) = \sqrt{Y}$ ,

$$F_2(y) = \begin{cases} F_1(\sqrt{y}) - F_1(-\sqrt{y}) & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\frac{y}{\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y$  найдем, дифференцируя функцию распределения вероятностей  $F_2(y)$  по  $y$ :

$$f_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

## § 61. ВЕКТОРНЫЕ (МНОГОМЕРНЫЕ) СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

**1. Основные определения.** Кроме одномерных случайных величин, можно рассматривать многомерные случайные величины — векторы, координаты которых являются одномерными случайными величинами. Такие случайные величины встречаются во многих техни-

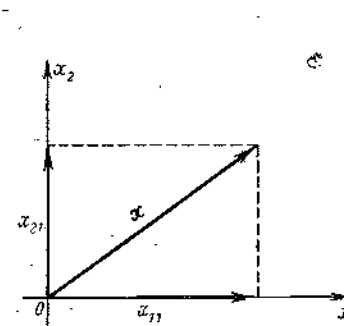


Рис. 196

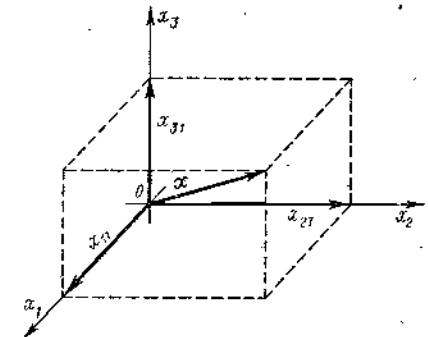


Рис. 197

ческих задачах. Рассмотрим несколько примеров векторных случайных величин.

1. Отклонение точки падения снаряда от цели является случайной двумерной величиной (рис. 196)  $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ .

2. Случайное положение центра тяжести самолета в пространстве является трехмерной случайной величиной (рис. 197)

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}.$$

3. Случайные сигналы  $G$  и  $X$  на входе и выходе системы автоматического регулирования (САР) с  $n$  входами и  $m$  выходами можно рассматривать как  $n$ - и  $m$ -мерные случайные векторы (рис. 198)

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}.$$

Случайные векторные величины будем обозначать жирными прописными буквами латинского алфавита  $X, Y, Z, \dots$ . Рассмотрим способы задания вероятности и соотношения между вероятностями для векторных случайных величин.

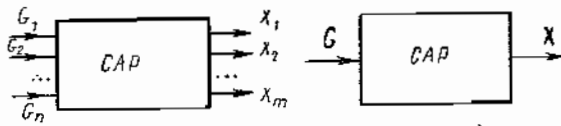


Рис. 198

Рассмотрим совокупность  $n$  случайных величин  $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ , заданных на пространстве элементарных событий  $\Omega$ . Эти величины можно интерпретировать как одну векторную случайную величину

$$X(\omega) = \begin{bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Случайная векторная величина принимает каждый раз значения, зависящие от элементарного события  $\omega$ . Таким образом, многомерная случайная величина есть вектор-функция, заданная на пространстве элементарных событий, и каждое ее возможное значение есть вектор. В дальнейшем аргумент  $\omega$  случайной функции для краткости записи будем опускать.

Рассмотрим сначала двумерные случайные величины вида

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

Если двумерная случайная величина принимает конечное число значений, то ее можно задать таблицей, определяющей соответствие между возможными значениями случайного вектора и соответствующими им вероятностями  $p_{ij} = P(X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2j})$ . Эти вероятности могут быть заданы в виде таблицы:

$x_2 \backslash x_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1n}$
$x_{21}$	$p_{11}$	$p_{21}$	...	$p_{n1}$
$x_{22}$	$p_{12}$	$p_{22}$	...	$p_{n2}$
...	...	...	...	...
$x_{2m}$	$p_{1m}$	$p_{2m}$	...	$p_{nm}$

Эта таблица называется *распределением вероятностей* векторной дискретной случайной величины  $X$ . Чтобы определить вероятность того, что случайный вектор  $X$  примет значения, принадлежащие множеству  $A$ , нужно просуммировать вероятности  $p_{ij}$ , соответствующие возможным значениям случайного вектора, принадлежащим множеству  $A$ , т. е.

$$P(X \in A) = \sum_{(x_{1i}, x_{2j}) \in A} p_{ij}. \quad (2)$$

В общем случае, когда число возможных значений случайного вектора несчетно, принципиально невозможно задать распределение вероятностей в виде таблицы, поэтому по аналогии с одномерными случайными величинами для задания случайного вектора вводятся функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей.

2. **Функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей случайного вектора.** В общем случае характеристикой двумерного случайного вектора является функция распределения вероятностей  $F(x_1, x_2)$ , которая равна вероятности совместного выполнения неравенств  $X_1 < x_1, X_2 < x_2$ , где  $X_1, X_2$  — координаты случайного вектора, а  $x_1$  и  $x_2$  возможные их значения, т. е.

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2). \quad (3)$$

Свойства функции распределения двумерной случайной величины

*Свойство 1. Функция распределения вероятностей принимает значения, заключенные между нулем и единицей, т. е.*

$$0 \leq F(x_1, x_2) \leq 1. \quad (4)$$

Неравенство (4) справедливо, так как функция  $F(x)$  есть вероятность, значения которой, как показано в § 59, заключены между нулем и единицей.

*Свойство 2. Функция распределения есть функция неубывающая по каждому из своих аргументов, т. е. при  $\Delta x_1 > 0$  и  $\Delta x_2 > 0$  имеем*

$$F(x_1 + \Delta x_1, x_2) \geq F(x_1, x_2), \quad (5)$$

$$F(x_1, x_2 + \Delta x_2) \geq F(x_1, x_2). \quad (6)$$

В самом деле, учитывая принцип сложения вероятностей для несовместных событий, имеем

$$F(x_1 + \Delta x_1, x_2) = P(X_1 < x_1 + \Delta x_1, X_2 < x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) + P(x_1 \leq X_1 < x_1 + \Delta x_1, X_2 < x_2) \geq P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = F(x_1, x_2).$$

Аналогично доказывается неравенство (6).

*Свойство 3. Если оба аргумента функции распределения равны  $+\infty$ , то она равна единице, т. е.*

$$F(+\infty, +\infty) = 1. \quad (7)$$

Действительно, имеем

$$F(+\infty, +\infty) = P(X_1 < +\infty, X_2 < +\infty).$$

Правая часть этого равенства есть вероятность достоверного события, которая равна единице.

*Свойство 4. Если хотя бы один из аргументов функции распределения равен  $-\infty$ , то она равна нулю, т. е.*

$$F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0. \quad (8)$$

В самом деле, из определения функции распределения имеем

$$F(-\infty, x_2) = P(X_1 < -\infty, X_1 < x_2),$$

но событие  $X_1 < -\infty$  невозможно, поэтому его вероятность равна нулю.

*Свойство 5. Если один из аргументов функции распределения положить равным  $+\infty$ , то получится одномерная функция распределения*

$$F(x_1, +\infty) = F_1(x_1), \quad (9)$$

$$F(+\infty, x_2) = F_2(x_2). \quad (10)$$

Действительно, справедливо равенство

$$F(x_1, \infty) = P(X_1 < x_1, X_2 < +\infty) = P(X_1 < x_1) = F(x_1),$$

так как событие  $X_2 < +\infty$  достоверное.

Аналогично получаем равенство (10).

*Свойство 6. Вероятность того, что двумерная векторная случайная величина примет значения внутри прямоугольника  $a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2$ , определяется равенством*

$$P(a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2). \quad (11)$$

Действительно, если обозначить события

$$A = (X_1 < b_1, X_2 < b_2), \quad A_1 = (X_1 < a_1, X_2 < b_2),$$

$$A_2 = (X_1 < b_1, X_2 < a_2), \quad B = (a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2),$$

то, как видно из рис. 199, можно записать:

$$A = B + (A_1 + A_2).$$

Из равенства (18) § 59, определяющего вероятность объединения совместных событий, имеем

$$P(A) = P(B) + P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2).$$

Учитывая введенные обозначения, получим

$$P(X_1 < b_1, X_2 < b_2) = P(a_1 \leq X_1 < b_1,$$

$$a_2 \leq X_2 < b_2) + P(X_1 < a_1,$$

$$X_2 < b_2) + P(X_1 < b_1,$$

$$X_2 < a_2) - P(X_1 < a_1, X_2 < a_2),$$

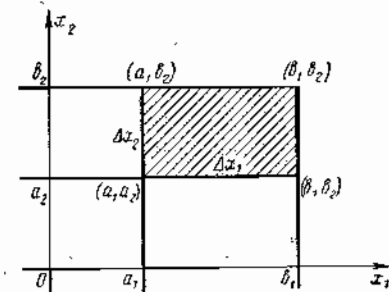


Рис. 199

или

$$F(b_1, b_2) = P(a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2) + F(a_1, b_2) + F(b_1, a_2) - F(a_1, a_2),$$

откуда следует равенство (11).

Рассмотрим вероятность

$$P(x_1 \leq X_1 < x_1 + \Delta x_1, x_2 \leq X_2 < x_2 + \Delta x_2) = F(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - F(x_1 + \Delta x_1, x_2) - F(x_1, x_2 + \Delta x_2) + F(x_1, x_2).$$

Найдем отношение этой вероятности к площади прямоугольника со сторонами  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  (см. рис. 199):

$$\frac{P(x_1 \leq X_1 < x_1 + \Delta x_1, x_2 \leq X_2 < x_2 + \Delta x_2)}{\Delta x_1 \Delta x_2} = \frac{[F(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - F(x_1, x_2 + \Delta x_2)] - [F(x_1 + \Delta x_1, x_2) - F(x_1, x_2)]}{\Delta x_1 \Delta x_2}$$

В пределе при  $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0$  получим

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0}} \frac{P(x_1 \leq X_1 < x_1 + \Delta x_1, x_2 \leq X_2 < x_2 + \Delta x_2)}{\Delta x_1 \Delta x_2} = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f(x_1, x_2). \quad (12)$$

Функция  $f(x_1, x_2)$ , равная второй смешанной производной функции распределения случайного двумерного вектора по обоим аргументам, называется *функцией плотности распределения вероятностей* этого случайного вектора. Как следует из равенства (12), двумерная

плотность распределения вероятностей  $f(x_1, x_2)$  равна отношению вероятности того, что случайный вектор  $X$  примет значение, принадлежащее прямоугольнику  $(x_1, x_1 + \Delta x_1)$ ,  $(x_2, x_2 + \Delta x_2)$ , к его площади, если длины сторон этого прямоугольника стремятся к нулю.

Свойства плотности распределения вероятностей случайного вектора

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

*Свойство 1.* Вероятность того, что случайный вектор  $X$  примет значение из области  $A$ , равна определенному двумерному интегралу от функции плотности распределения вероятности, взятому по этой области, т. е.

$$P(X \in A) = \iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (13)$$

В самом деле, вероятность того, что случайная векторная величина примет значение в элементарной области  $dx_1 dx_2$ , согласно равенству (12), равна  $f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ , а общая вероятность вычисляется как предел суммы элементарных вероятностей для возможных значений случайного вектора по всей области  $A$ , т. е. равна интегралу (13).

*Свойство 2.* Плотность распределения вероятностей есть неотрицательная функция, т. е.

$$f(x_1, x_2) \geq 0. \quad (14)$$

Свойство справедливо, так как функция  $f(x_1, x_2)$  есть производная от неубывающей функции по обоим аргументам.

*Свойство 3.* Интеграл от плотности распределения вероятностей, взятый в бесконечных пределах по обоим аргументам, равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1. \quad (15)$$

Действительно, рассматриваемый интеграл, как это следует из равенства (13), равен вероятности события, состоящего в том, что случайный вектор  $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$  примет значение, соответствующее произвольной точке плоскости  $x_1 O x_2$ , а это событие есть событие достоверное.

*Свойство 4.* Для того чтобы по известной плотности распределения вероятностей случайного вектора  $X$  получить одномерную плотность распределения одной из его координат, нужно проинтегрировать в бесконечных пределах двумерную плотность рас-

пределения  $f(x_1, x_2)$  этого случайного вектора по переменной, соответствующей другой координате, т. е.

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2, \quad (16)$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1, \quad (17)$$

где  $f_1(x_1)$ ,  $f_2(x_2)$  — плотности распределения вероятностей случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  соответственно.

Из равенства (13) имеем

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Если положить, что  $x_2 = +\infty$ , то из выражения (9) найдем

$$F(x_1, +\infty) = F_1(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

а так как плотность распределения вероятностей случайной величины есть производная от функции распределения этой случайной величины, то получим, что

$$f_1(x_1) = \frac{\partial F(x_1, +\infty)}{\partial x_1} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2.$$

Таким же образом можно доказать справедливость равенства (17).

По аналогии с функцией распределения двумерного случайного вектора вводится функция распределения  $n$ -мерного случайного вектора

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}.$$

Функцией распределения вектора  $X$  называется вероятность того, что случайные величины — координаты этого вектора примут значения меньшие, чем заданные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , т. е.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \quad (18)$$

Функцией плотности распределения вероятностей  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$ -мерного случайного вектора называется частная производная  $n$ -го порядка от функции распределения этого вектора, взятая по всем аргументам, т. е.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (19)$$

Свойства функций распределения и функции плотности распределения вероятностей  $n$ -мерного случайного вектора

Эти свойства аналогичны соответствующим свойствам для функции распределения и плотности распределения вероятностей для двумерного вектора. Приведем их без доказательства.

1. Функция распределения  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  принимает значения, заключенные между нулем и единицей, т. е.

$$0 \leq F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1. \quad (20)$$

2. Функция распределения  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть функция неубывающая по каждому из своих аргументов, т. е.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \geq F(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (21)$$

при  $\Delta x_k > 0$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ).

3. Если все аргументы функции распределения равны  $+\infty$ , то она равна единице, т. е.

$$F(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1. \quad (22)$$

4. Если хотя бы один из аргументов функции распределения равен  $-\infty$ , то она равна нулю, т. е.

$$F(x_1, x_2, \dots, -\infty, \dots, x_n) = 0. \quad (23)$$

5. Если  $k$  аргументов функции распределения положить равными  $+\infty$ , то получим функцию распределения для  $(n-k)$ -мерного случайного вектора, координатами которого являются координаты, соответствующие оставшимся переменным, т. е.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{n-k}, +\infty, \dots, +\infty) = F_{n-k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k}). \quad (24)$$

6. Вероятность того, что  $n$ -мерный случайный вектор  $X$  примет возможные значения, принадлежащие области  $A$ , равна  $n$ -мерному интегралу от функции плотности распределения вероятностей  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  этого случайного вектора, взятому по области  $A$ , т. е.

$$P(X \in A) = \iiint_A \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (25)$$

7. Плотность распределения вероятностей  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$ -мерного случайного вектора есть неотрицательная функция, т. е.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0. \quad (26)$$

8. Интеграл от  $n$ -мерной плотности распределения вероятностей, взятый по всем аргументам в бесконечных пределах, равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1. \quad (27)$$

9. Для того чтобы по известной  $n$ -мерной плотности распределения случайного вектора вычислить  $(n-k)$ -мерную плотность распределения, нужно проинтегрировать  $n$ -мерную плотность  $k$  раз в бесконечных пределах, в результате получится плотность распределения вероятностей для  $(n-k)$ -мерного вектора с координатами, соответствующими оставшимся переменным, т. е.

$$f_{n-k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{n-k+1} \dots dx_n. \quad (28)$$

10. Функция распределения  $n$ -мерного вектора связана с его плотностью распределения вероятностей соотношением

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (29)$$

3. Независимые и зависимые случайные величины. Условные функции распределения. Случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  называются независимыми, если функция распределения случайного вектора  $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$  может быть представлена в виде произведения двух функций от одного аргумента; т. е.

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) F_2(x_2), \quad (30)$$

где  $F(x_1, x_2)$  — двумерная функция распределения случайного вектора  $X$ , а  $F_1(x_1)$  и  $F_2(x_2)$  — одномерные функции распределения случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ .

Докажем две теоремы, определяющие свойства независимых случайных величин.

Теорема 1. Для того чтобы случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  были независимы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$P(a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2) = P(a_1 \leq X_1 < b_1) P(a_2 \leq X_2 < b_2). \quad (31)$$

Доказательство. Пусть выполнено равенство (31), тогда при значениях  $a_1 = -\infty$ ,  $a_2 = -\infty$ ,  $b_1 = x_1$ ,  $b_2 = x_2$  получим  $F(x_1, x_2) = F_1(x_1) F_2(x_2)$ , т. е. согласно равенству (30), случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы. Обратное, если случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы, то, согласно выражениям (11) и (30), справедливо равенство

$$\begin{aligned} & P(a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2) = \\ & = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = F_1(b_1) F_2(b_2) - \\ & - F_1(a_1) F_2(b_2) - F_1(b_1) F_2(a_2) + F_1(a_1) F_2(a_2) = \\ & = [F_1(b_1) - F_1(a_1)] [F_2(b_2) - F_2(a_2)] = \\ & = P(a_1 \leq X_1 < b_1) P(a_2 \leq X_2 < b_2). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Если двумерная плотность распределения вероятностей  $f(x_1, x_2)$  случайного вектора  $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$  существует, то для того, чтобы случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  были независимы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ , где  $f_1(x_1)$  и  $f_2(x_2)$  — одномерные плотности распределения вероятностей случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ .

**Доказательство.** Сначала докажем достаточность условий теоремы; для этого рассмотрим двумерную функцию распределения  $F(x_1, x_2)$ . Если  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ , то

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} f_1(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{x_2} f_2(x_2) dx_2 = F_1(x_1) F_2(x_2), \end{aligned}$$

т. е. случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  с плотностями распределения вероятностей  $f_1(x_1)$  и  $f_2(x_2)$  при выполнении условий теоремы независимы.

Докажем теперь необходимость условий теоремы. Пусть случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  — независимы, т. е.  $F(x_1, x_2) = F_1(x_1) F_2(x_2)$ . В этом случае имеем

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 (F_1(x_1) F_2(x_2))}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{dF_1(x_1)}{dx_1} \frac{dF_2(x_2)}{dx_2} = \\ &= f_1(x_1) f_2(x_2). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пусть имеем набор случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ; эти случайные величины называются *независимыми в совокупности*, если для любых индексов  $i_1, i_2, \dots, i_k$  ( $k \leq n$ ) справедливо равенство

$$F(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = \prod_{m=1}^k F_{i_m}(x_{i_m}). \quad (31)$$

Пусть теперь случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  не являются независимыми. Рассмотрим две случайные величины  $X_1$  и  $X_2$ . Пусть заданы функции распределения этих случайных величин  $F_1(x_1)$  и  $F_2(x_2)$ . Найдем условную вероятность события  $X_1 < x_1$  при условии, что выполнено соотношение  $a_2 \leq X_2 < b_2$ . По определению условной вероятности, учитывая равенство (11), имеем

$$\begin{aligned} P(X_1 < x_1 | a_2 \leq X_2 < b_2) &= \frac{P(X_1 < x_1, a_2 \leq X_2 < b_2)}{P(a_2 \leq X_2 < b_2)} = \\ &= \frac{F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)}{F_2(b_2) - F_2(a_2)}, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $F(x_1, x_2)$  — двумерная функция распределения случайного вектора  $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ . Если положить  $a_2 = x_2$ ,  $b_2 = x_2 + \Delta x_2$  и устремить  $\Delta x_2$

к нулю, то получим

$$\lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{F(x_1, x_2 + \Delta x_2) - F(x_1, x_2)}{F_2(x_2 + \Delta x_2) - F_2(x_2)} = F_1(x_1 | x_2). \quad (33)$$

Предел выражения (33) называется *условной функцией распределения* вероятностей случайной величины  $X_1$  при условии, что случайная величина  $X_2$  приняла значение  $x_2$ .

Если функция распределения  $F(x_1, x_2)$  дифференцируема по аргументам  $x_1$  и  $x_2$ , то, воспользовавшись формулой конечных приращений Лагранжа<sup>\*</sup>, получим

$$F_1(x_1 | x_2) = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial F(x_1, x_2 + \theta_1 \Delta x_2)}{\partial x_2} \Delta x_2}{\frac{\partial F_2(x_2 + \theta_2 \Delta x_2)}{\partial x_2} \Delta x_2} = \frac{\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2}}{f_2(x_2)},$$

где

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Дифференцируя правую и левую части полученного выражения по  $x_1$  и пользуясь зависимостью между плотностью распределения вероятностей и функцией распределения, получим

$$\frac{\partial F_1(x_1 | x_2)}{\partial x_1} = f_1(x_1 | x_2) = \frac{\frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}}{f_2(x_2)} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_2)}, \quad (34)$$

где  $f(x_1, x_2)$  — двумерная плотность распределения вероятностей случайного вектора  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ,  $f_2(x_2)$  — плотность распределения вероятностей случайной величины  $X_2$ .

Функция  $f_1(x_1 | x_2)$  называется *условной плотностью распределения вероятностей* случайной величины  $X_1$  при условии, что случайная величина  $X_2$  приняла значение, равное  $x_2$ .

Рассмотрим функцию распределения случайной величины  $X_1$ ; по формуле полной вероятности имеем

$$F(x_1) = P(X_1 < x_1) = \sum_{i=1}^n P(X_1 < x_1 | B_i) P(B_i),$$

где  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — полная группа непересекающихся событий.

Пусть событие  $B_i$  заключается в том, что случайная величина  $X_2$  примет значение на отрезке  $[x_{2i} \leq X_2 < x_{2i+1})$ , т. е.  $B_i = (x_{2i} \leq X_2 < x_{2i+1})$ , тогда

$$\begin{aligned} F_1(x_1) &= \sum_{i=1}^n P(X_1 < x_1 | x_{2i} \leq X_2 < x_{2i+1}) P(x_{2i} \leq X_2 < x_{2i+1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(X_1 < x_1 | x_{2i} \leq X_2 < x_{2i+1}) [F_2(x_{2i+1}) - F_2(x_{2i})]. \end{aligned}$$

<sup>\*</sup> См., например: Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. I. «Наука», 1968, стр. 180.

Устремив  $n$  к бесконечности, полагая, что максимальная длина отрезка  $x_{2i+1} - x_{2i} = \Delta x_{2i}$  стремится к нулю, и учитывая, что  $F_2(x_2 + \Delta x_2) - F_2(x_2) \rightarrow f_2(x_2) dx_2$  при  $\max \Delta x_{2i} \rightarrow 0$ , получим

$$F_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x_1 | x_2) f_2(x_2) dx_2. \quad (35)$$

Дифференцируя равенство (35) по  $x_1$ , получим:

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1 | x_2) f_2(x_2) dx_2. \quad (36)$$

Выражения (35) и (36) носят название формул полной вероятности. Из равенства (34) следует, что

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1 | x_2) f_2(x_2). \quad (37)$$

Совершенно аналогично можно показать, что существует симметричное равенство

$$f(x_1, x_2) = f_2(x_2 | x_1) f_1(x_1). \quad (38)$$

Приравнявая выражения (37) и (38), найдем

$$f_2(x_2 | x_1) = \frac{f_1(x_1 | x_2) f_2(x_2)}{f_1(x_1)}. \quad (39)$$

Учитывая соотношение (36), получим формулу Байеса для плотности распределения вероятностей случайных величин:

$$f_2(x_2 | x_1) = \frac{f_1(x_1 | x_2) f_2(x_2)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1 | x_2) f_2(x_2) dx_2}. \quad (40)$$

**Пример 1.** Двумерная плотность распределения вероятностей случайного вектора  $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$  имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & \text{при } x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, \\ 0 & \text{при } x_1^2 + x_2^2 > R^2. \end{cases}$$

Определить плотности распределения вероятностей  $f_1(x_1)$  и  $f_2(x_2)$ , а также условную плотность распределения вероятностей  $f_1(x_1 | x_2)$ .

Вычислим одномерную плотность распределения вероятностей:

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} \int_{-\sqrt{R^2 - x_2^2}}^{\sqrt{R^2 - x_2^2}} dx_1 = \frac{2\sqrt{R^2 - x_2^2}}{\pi R^2} & \text{при } |x_2| \leq R \\ 0 & \text{при } |x_2| > R. \end{cases}$$

Согласно выражению (39), получим

$$f_1(x_1 | x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x_2^2}} & \text{при } |x_1| \leq \sqrt{R^2 - x_2^2}, \\ 0 & \text{при } |x_1| > \sqrt{R^2 - x_2^2}. \end{cases}$$

Плотность распределения вероятностей  $f_1(x_1)$  найдем по формуле полной вероятности (36):

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1 | x_2) f_2(x_2) dx_2 = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} \int_{-\sqrt{R^2 - x_1^2}}^{\sqrt{R^2 - x_1^2}} dx_2 = \frac{2\sqrt{R^2 - x_1^2}}{\pi R^2} & \text{при } |x_1| \leq R, \\ 0 & \text{при } |x_1| > R. \end{cases}$$

Случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  зависимы, так как

$$f(x_1, x_2) \neq f_1(x_1) f_2(x_2).$$

Условную плотность распределения вероятностей  $f_2(x_2 | x_1)$  найдем по формуле Байеса (40):

$$f_2(x_2 | x_1) = \frac{f_1(x_1 | x_2) f_2(x_2)}{f_1(x_1)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x_1^2}} & \text{при } |x_2| \leq \sqrt{R^2 - x_1^2}, \\ 0 & \text{при } |x_2| > \sqrt{R^2 - x_1^2}. \end{cases}$$

**4. Неслучайные функции нескольких случайных аргументов.** Рассмотрим функцию нескольких переменных:

$$Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (41)$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — случайные величины;  $\varphi$  — известная неслучайная функция.

Пусть функция распределения случайного вектора  $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$  за-

дана и равна  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Требуется найти функцию распределения случайной величины  $Y$

$$F_Y(y) = P(Y < y). \quad (42)$$

Для решения этой задачи необходимо найти вероятность того, что случайный вектор  $X$  примет значение, принадлежащее  $n$ -мерной области, для которой выполнено условие  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) < y$ . Решение этой задачи поясним на ряде примеров.

**Пример 2.** Найти функцию распределения суммы двух случайных величин  $F_Y(y)$ , где  $Y = X_1 + X_2$ , если двумерная плотность распределения вероятностей  $f(x_1, x_2)$  случайного вектора  $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$  задана.

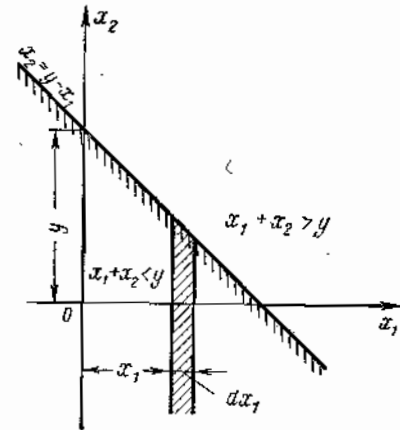


Рис. 200

Найдем вероятность  $P(X_1 + X_2 < y)$ . Все двумерное пространство на плоскости  $x_1 O x_2$  прямой  $x_1 + x_2 = y$  делится на две области  $x_1 + x_2 < y$  и  $x_1 + x_2 > y$  (рис. 200). Вероятность попадания случайной величины  $Y$  в область



$x_1 + x_2 < y$  равна

$$P(X_1 + X_2 < y) = P(Y < y) = F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y-x_1} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \quad (43)$$

или

$$P(Y < y) = F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y-x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (44)$$

Продифференцируем равенства (43) и (44) по  $y$ :

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y-x_2, x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y-x_1) dx_1. \quad (45)$$

В случае если  $X_1$  и  $X_2$  независимые случайные величины, двумерная плотность распределения вероятностей равна  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ . Тогда, учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{y-x_1} f_2(x_2) dx_2 = F_2(y-x_1) \quad \text{и}$$

$$\int_{-\infty}^{y-x_2} f_1(x_1) dx_1 = F_1(y-x_2),$$

получим

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) F_2(y-x_1) dx_1, \quad (46)$$

или

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2) F_1(y-x_2) dx_2. \quad (47)$$

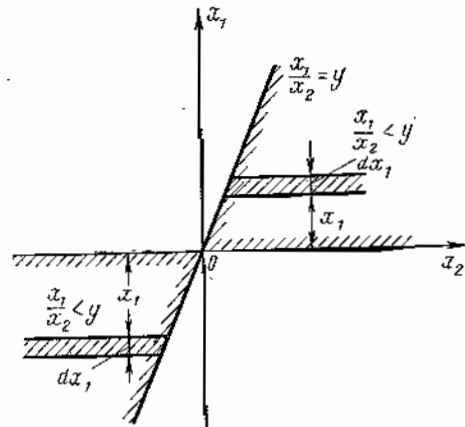


Рис. 201

Дифференцируя равенства (46) и (47) по  $y$ , получим

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(y-x_1) dx_1 \quad (48)$$

и

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y-x_2) f_2(x_2) dx_2. \quad (49)$$

**Пример 3.** Найти функцию распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = \frac{X_1}{X_2}$ , если задана двумерная плотность распределения вероятностей случайного вектора  $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ .

Из определения функции распределения вероятностей имеем

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P\left(\frac{X_1}{X_2} < y\right). \quad (50)$$

Прямая  $\frac{x_1}{x_2} = y$  делит плоскость  $x_1 O x_2$  на две области, в одной из которых  $\frac{x_1}{x_2} < y$ , а в другой  $\frac{x_1}{x_2} > y$  (рис. 201). Вероятность попадания случайной вели-

чины  $Y = \frac{X_1}{X_2}$  в область  $\frac{x_1}{x_2} < y$  равна

$$P(Y < y) = F_Y(y) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{y}} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 + \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{y}} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1. \quad (51)$$

Если случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы, то получим

$$F_Y(y) = \int_0^{\infty} f_1(x_1) \left[ \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{y}} f_2(x_2) dx_2 \right] dx_1 + \int_{-\infty}^0 f_1(x_1) \left[ \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{y}} f_2(x_2) dx_2 \right] dx_1 = \\ = \int_0^{\infty} f_1(x_1) \left[ 1 - F_2\left(\frac{x_1}{y}\right) \right] dx_1 + \int_{-\infty}^0 f_1(x_1) F_2\left(\frac{x_1}{y}\right) dx_1. \quad (52)$$

Продифференцировав это равенство по  $y$ , получим

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \int_0^{\infty} \frac{x_1}{y^2} f_1(x_1) f_2\left(\frac{x_1}{y}\right) dx_1 - \int_{-\infty}^0 \frac{x_1}{y^2} f_1(x_1) f_2\left(\frac{x_1}{y}\right) dx_1. \quad (53)$$

Выполнив замену переменной по формуле  $\frac{x_1}{y} = x_2$ , найдем

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} x_2 f_1(x_2 y) f_2(x_2) dx_2 - \int_{-\infty}^0 x_2 f_1(x_2 y) f_2(x_2) dx_2. \quad (54)$$

В частности, если случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы и распределены по нормальному закону с плотностями распределения вероятностей, равными

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

то получим

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} x_2 e^{-\frac{x_2^2 y^2}{2}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} dx_2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 x_2 e^{-\frac{x_2^2 y^2}{2}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} dx_2 = \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+y^2} \left( \int_0^{\infty} e^{-u} du - \int_{-\infty}^0 e^{-u} du \right) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad (55)$$

где введена замена переменной  $u = \frac{1+y^2}{2} x_2^2$ .

Случайная величина с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

называется *случайной величиной, распределенной по закону Коши*.

**Пример 4.** По известной совместной плотности распределения вероятностей  $f(x_1, x_2)$  случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  найти плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = X_1 X_2$ .

Функцию распределения вероятностей случайной величины  $Y$  вычислим согласно равенству (42), интегрируя плотность распределения вероятностей  $f(x_1, x_2)$  по области  $D$ , где выполнено неравенство  $x_1 x_2 < y$  (рис. 202):

$$F_Y(y) = \iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^0 dx_1 \int_{y/x_1}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 + \int_0^{\infty} dx_1 \int_0^{y/x_1} f(x_1, x_2) dx_2. \quad (56)$$

Дифференцируя это равенство по  $y$ , найдем плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y$ :

$$f_Y(y) = - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x_1} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) dx_1 + \int_0^{\infty} \frac{1}{x_1} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) dx_1. \quad (57)$$

После замены в первом слагаемом последнего равенства  $x_1$  на  $-x_1$ , получим

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x_1} \left[ f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) + f\left(-x_1, -\frac{y}{x_1}\right) \right] dx_1. \quad (58)$$

Пусть, в частности, случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  имеют равномерное распределение с плотностями распределения вероятностей (рис. 203)

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

и являются независимыми (рис. 203)

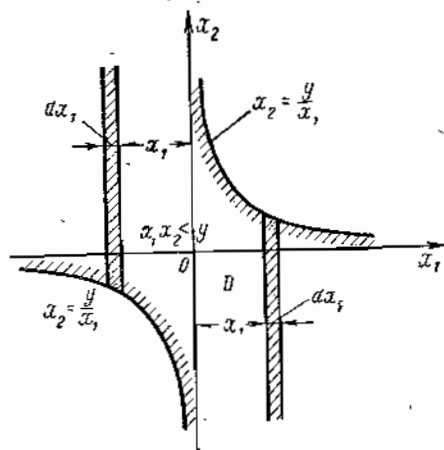


Рис. 202

В этом случае двумерная плотность распределения вероятностей  $f(x_1, x_2)$  равна произведению одномерных плотностей вероятности, т. е.  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ . Функция  $f_2\left(\frac{y}{x_1}\right)$  (см. рис. 204) равна

$$f_2\left(\frac{y}{x_1}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x_1| < y, \\ \frac{1}{2} & \text{при } |x_1| \geq y. \end{cases}$$

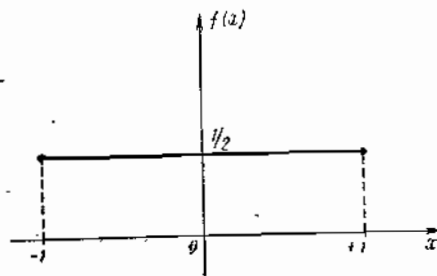


Рис. 203

Учитывая четность плотности распределения вероятностей в данном примере, на основании выражения (58) получим (рис. 205)

$$f_Y(y) = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{x_1} f_1(x_1) f_2\left(\frac{y}{x_1}\right) dx_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } |y| > 1, \\ 2 \int_y^{\infty} \frac{dx_1}{4x_1} = -\frac{1}{2} \ln |y| & \text{при } |y| < 1. \end{cases} \quad (59)$$

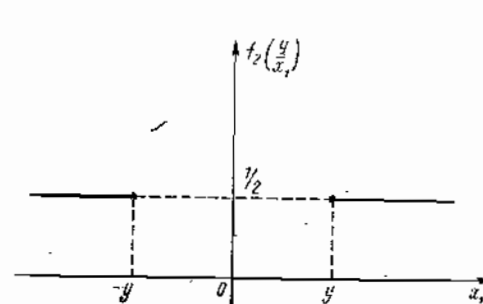


Рис. 204

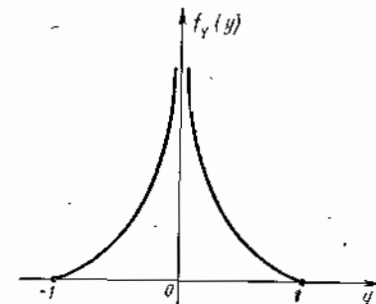


Рис. 205

## § 62. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ (МОМЕНТЫ) СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

**1. Основные определения.** Полными характеристиками случайных величин являются их функции распределения или плотности распределения вероятностей. Заметим, что при расчетах не всегда удобно пользоваться этими характеристиками, так как обычно их точные выражения неизвестны. Кроме того, расчеты с использованием функции распределения (или плотности распределения) вероятностей часто оказываются весьма сложными или громоздкими. Однако многие задачи теории вероятностей можно решать, не используя функции распределения (плотности распределения) вероятностей. Оказывается, что статистические свойства случайных величин могут быть описаны на основе числовых характеристик распределения этих случайных величин, называемых моментами случайных величин. Одной из наиболее важных числовых характеристик случайной величины является ее среднее значение, называемое также *математическим ожиданием*.

*Математическим ожиданием*  $M[X]$  случайной величины  $X$  называется число, определяемое интегралом вида

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (1)$$

где  $f(x)$  — плотность распределения вероятностей случайной величины  $X$ ;  $x$  — возможные ее значения.

Для дискретной случайной величины  $X$ , плотность распределения вероятностей которой есть сумма дельта-функций (см. § 60), получим

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{k=1}^n p_k \delta(x - x_k) dx = \sum_{k=1}^n x_k p_k, \quad (2)$$

здесь  $x_k$  — возможные значения случайной величины;  $p_k$  — вероятности того, что случайная величина примет значение  $x_k$ .

Из равенства (2) следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины  $X$  равно сумме произведений возможных значений, принимаемых случайной величиной, на соответствующие им вероятности. Отсюда вытекает вероятностный смысл математического ожидания — оно определяет координату центра группирования значений, принимаемых случайной величиной; следовательно, математическое ожидание является средним значением случайной величины. Для непрерывной случайной величины каждому ее возможному значению  $x$  соответствует элементарная вероятность  $f(x) dx$ ; в пределе при вычислении математического ожидания для непрерывных случайных величин сумма (2) переходит в определенный интеграл (1).

Если задана случайная величина  $Y$ , которая является неслучайной функцией  $Y = \varphi(X)$  случайного дискретного аргумента  $X$ , то  $Y$  принимает возможные значения  $y_k = \varphi(x_k)$  с вероятностями  $p_k$ ; поэтому математическое ожидание случайной величины  $Y = \varphi(X)$  аналогично равенству (2) определяется выражением

$$M[\varphi(X)] = \sum_{k=1}^n \varphi(x_k) p_k. \quad (3)$$

Если  $X$  — непрерывная случайная величина, то функция от этой величины  $Y = \varphi(X)$  принимает возможные значения  $\varphi(x)$  с вероятностями  $f(x) dx$ . В этом случае сумма (3) после предельного перехода равна соответствующему интегралу, т. е.

$$M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx. \quad (4)$$

Полагая в формуле (4)  $\varphi(x) = x^r$ , получим выражения для моментов случайной величины  $X$ .

Начальным моментом (или просто моментом) случайной величины  $X$  называется математическое ожидание ее  $r$ -й степени. Этот момент обозначается  $\alpha_r$ , т. е.

$$\alpha_r = M[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx. \quad (5)$$

Очевидно, математическое ожидание есть начальный момент первого порядка.

Моменты всех порядков являются числовыми характеристиками случайной величины.

Одно математическое ожидание не может дать полное представление о случайной величине, так как характеризует только ее среднее значение.

На рис. 206 крестиками показаны значения, которые приняли две случайные величины  $X_1$  и  $X_2$ . Эти случайные величины имеют одинаковые математические ожидания  $M[X_1] = M[X_2] = m$ , но разброс значений, которые имеет случайная величина  $X_2$  около своего

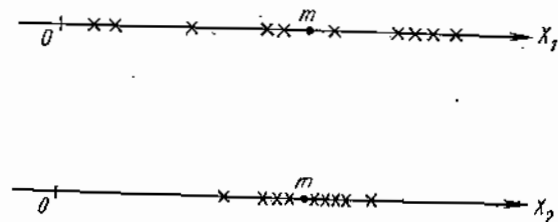


Рис. 206

математического ожидания, больше, чем разброс значений у случайной величины  $X_1$ .

Для характеристики величины разброса значений случайной величины около математического ожидания вводится еще одна числовая характеристика случайной величины, равная сумме произведений квадратов отклонений возможных значений случайной величины от математического ожидания на соответствующие этим возможным значениям вероятности. Такая числовая характеристика называется *дисперсией* случайной величины  $X$  и обозначается  $D[X]$ . Для дисперсии случайной величины  $X$  имеем:

$$D[X] = \sum_{k=1}^n (x_k - M[X])^2 p_k. \quad (6)$$

Очевидно, что чем больше разброс возможных значений случайной величины от математического ожидания, тем больше дисперсия этой случайной величины. Из выражения (6) следует, что дисперсия есть математическое ожидание квадрата разности случайной величины и ее математического ожидания.

Для непрерывной случайной величины  $X$  формула (6) после предельного перехода принимает вид

$$D[X] = M[(X - M[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx. \quad (7)$$

Разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием называется *центрированной случайной величиной*  $X^\circ$ ,

$$X^\circ = X - M[X]. \quad (8)$$

Кроме дисперсии вводятся и другие числовые характеристики центрированной случайной величины  $X^\circ$ , называемые *центральными моментами*.

Центральным моментом  $r$ -го порядка  $\mu_r$  случайной величины  $X$  называется математическое ожидание  $r$ -й степени центрированной случайной величины  $X^0$ , т. е.

$$\mu_r = M[(X^0)^r] = M[(X - M[X])^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^r f(x) dx. \quad (9)$$

Из формул (7) и (8) следует, что дисперсия является центральным моментом второго порядка случайной величины.

Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата этой случайной величины, однако удобнее пользоваться мерой разброса случайной величины, имеющей ту же размерность, что и сама случайная величина. За эту меру принимают положительное значение квадратного корня из дисперсии и называют ее *средним квадратическим отклонением*.

Среднее квадратическое отклонение обозначается  $\sigma_x$ , т. е.

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\mu_2}. \quad (10)$$

Аналогично вместо начального момента второго порядка  $\alpha_2$ , характеризующего среднее значение квадрата случайной величины, иногда рассматривают числовую характеристику  $\eta = \sqrt{\alpha_2}$ , называемую *средним квадратическим значением* случайной величины.

Нетрудно получить зависимость между начальными и центральными моментами. Например, для центрального момента второго порядка имеем

$$\begin{aligned} \mu_2 &= M[(X - M[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - M[X])^2 f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2M[X] \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + (M[X])^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \\ &= \alpha_2 - 2\alpha_1^2 + \alpha_1^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2. \end{aligned} \quad (11)$$

В теории вероятностей наиболее часто применяются моменты первого и второго порядков — математическое ожидание и дисперсия.

**2. Свойства математического ожидания и дисперсии.** Из определения математического ожидания вытекает ряд его свойств.

#### Свойства математического ожидания случайной величины

*Свойство 1. Математическое ожидание неслучайной величины равно самой этой величине, т. е.*

$$M[c] = c. \quad (12)$$

Действительно, константу можно рассматривать как случайную величину с плотностью распределения вероятностей  $f(x) = \delta(x - c)$ , так как она принимает единственное значение  $x = c$  с вероятностью,

равной единице; поэтому

$$M[c] = \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x - c) dx = c.$$

*Свойство 2. Неслучайный множитель  $c$  можно выносить за знак математического ожидания, т. е.*

$$M[cX] = cM[X]. \quad (13)$$

В самом деле имеем:

$$M[cX] = \int_{-\infty}^{\infty} cx f(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = cM[X].$$

*Свойство 3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих случайных величин, т. е.*

$$M[X_1 + X_2] = M[X_1] + M[X_2]. \quad (14)$$

Действительно, введем новую случайную величину  $Y = X_1 + X_2$ , ее математическое ожидание равно

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy,$$

где  $f_Y(y)$  — плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y$ . Согласно равенству (45) § 61 плотность распределения вероятностей суммы случайных величин равна

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y - x_1) dx_1,$$

где  $f(x_1, x_2)$  — плотность распределения вероятностей случайного вектора  $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ; поэтому получим

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x_1, y - x_1) dx_1 dy.$$

Введем новую переменную  $x_2 = y - x_1$ , тогда

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 + x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Учитывая соотношения между одномерной и двумерной плотностями распределения вероятностей (16) и (17) § 60, окончательно имеем

$$\begin{aligned} M[X_1 + X_2] &= M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1) dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_2) dx_2 = \\ &= M[X_1] + M[X_2], \end{aligned}$$

где  $f_1(x_1)$  и  $f_2(x_2)$  — плотности распределения вероятностей случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  соответственно.

Если процесс вычисления математического ожидания рассматривать как оператор, примененный к случайной величине  $X$  и ставящий ей в соответствие число  $m_X$ , определяемое равенством (1), т. е.

$$m_X = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx, \quad (15)$$

то свойства 2 и 3 устанавливают, что этот оператор линейный.

*Свойство 4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  равно произведению математических ожиданий этих случайных величин, т. е.*

$$M[X_1 X_2] = M[X_1] M[X_2], \quad (16)$$

если  $X_1$  и  $X_2$  независимы.

В самом деле, пусть  $Y = X_1 X_2$ , тогда  $M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y) dy$ , где  $f_Y(y)$  — плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y$ . На основании равенства (57) § 61, определяющего плотность распределения вероятностей произведения случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  с плотностями распределения вероятностей  $f_1(x_1)$  и  $f_2(x_2)$  соответственно, имеем

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{x_1} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) dx_1 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \frac{y}{x_1} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) dx_1 dy, \quad (17)$$

где  $f(x_1, x_2)$  — плотность распределения вероятностей случайного вектора  $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ .

Введем новые переменные  $x_1 = u$ ,  $\frac{y}{x_1} = v$ . Якобиан преобразования равен

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

и его модуль  $|J| = |u|$ . Интегрируя выражение (17) по новым переменным, получим

$$M[X_1 X_2] = M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 v f(u, v) |u| du dv = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 v(u, v) |u| du dv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} uv f(u, v) du dv. \quad (18)$$

Выражение (18) позволяет найти математическое ожидание произведения случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ .

Если случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы, то на основании теоремы 2 § 61 для независимых случайных величин получим

$$M[X_1 X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} uv f_1(u) f_2(v) du dv = \int_{-\infty}^{\infty} u f_1(u) du \int_{-\infty}^{\infty} v f_2(v) dv = M[X_1] M[X_2]. \quad (19)$$

Свойства дисперсии случайной величины

*Свойство 1. Дисперсия неслучайной величины с равна нулю, т. е.*

$$D[c] = 0. \quad (20)$$

Действительно, ранее было показано, что  $M[c] = c$ , поэтому

$$D[c] = M[(c - M[c])^2] = M[(c - c)^2] = M[0] = 0.$$

*Свойство 2. Дисперсия произведения неслучайного множителя на случайную величину равна произведению квадрата неслучайного множителя на дисперсию этой случайной величины, т. е.*

$$D[cX] = c^2 D[X]. \quad (21)$$

В самом деле, так как постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, то имеем

$$D[cX] = M[(cX - M[cX])^2] = M[c^2 (X - M[X])^2] = c^2 M[(X - M[X])^2] = c^2 D[X].$$

*Свойство 3. Дисперсия суммы независимых случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  равна сумме дисперсий слагаемых, т. е.*

$$D[X_1 + X_2] = D[X_1] + D[X_2] \quad (X_1 \text{ и } X_2 \text{ независимы}). \quad (22)$$

Из определения дисперсии, используя полученные выше свойства математического ожидания, имеем

$$D[X_1 + X_2] = M[(X_1 + X_2 - M[X_1 + X_2])^2] = M[((X_1 - M[X_1]) + (X_2 - M[X_2]))^2] = M[(X_1 - M[X_1])^2] + 2M[(X_1 - M[X_1])(X_2 - M[X_2])] + M[(X_2 - M[X_2])^2].$$

По условию случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы, поэтому согласно равенству (16) получим

$$M[(X_1 - M[X_1])(X_2 - M[X_2])] = M[X_1 - M[X_1]] M[X_2 - M[X_2]] = 0$$

и окончательно

$$D[X_1 + X_2] = M[(X_1 - M[X_1])^2] + M[(X_2 - M[X_2])^2] = D[X_1] + D[X_2].$$

3. Моменты многомерных случайных величин. Как и для одномерных случайных величин, для случайных векторов вводятся понятия начального и центрального моментов. Рассмотрим случайный  $n$ -мерный вектор-столбец  $X$  с координатами  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Смешанным начальным моментом порядка  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  называется математическое ожидание произведения  $X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}$ , т. е.

$$a_{k_1, k_2, \dots, k_n} = M[X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}]. \quad (23)$$

Смешанным центральным моментом порядка  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  называется математическое ожидание произведения соответствующих центрированных случайных величин  $(X_1^0)^{k_1} (X_2^0)^{k_2} \dots (X_n^0)^{k_n}$ , т. е.

$$\mu_{k_1, k_2, \dots, k_n} = M[(X_1^0)^{k_1} (X_2^0)^{k_2} \dots (X_n^0)^{k_n}]. \quad (24)$$

Наибольшее применение нашли моменты случайного вектора первого и второго порядка. Рассмотрим свойства этих моментов.

Вычислим момент первого порядка для координат вектора  $X$ :

$$a_{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0} = M[(X_1)^0 (X_2)^0 \dots X_i (X_{i+1})^0 \dots (X_n)^0] = M[X_i]. \quad (25)$$

Отсюда следует, что начальные моменты первого порядка для системы  $n$  случайных величин есть математические ожидания этих случайных величин.

Математическим ожиданием случайного вектора  $X$  называется вектор, координатами которого являются математические ожидания соответствующих координат случайного вектора  $X$ , т. е.

$$M[X] = \begin{bmatrix} M[X_1] \\ \vdots \\ M[X_n] \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Можно показать, что свойства математического ожидания случайного вектора аналогичны свойствам математического ожидания одномерной случайной величины.

#### Свойства математического ожидания случайного вектора

1. Математическое ожидание неслучайного вектора равно этому вектору, т. е.

$$M[c] = c, \quad (27)$$

где  $c$  — неслучайный вектор.

2. Неслучайную матрицу можно выносить за знак операции определения математического ожидания, т. е.

$$M[AX] = AM[X], \quad (28)$$

где  $A$  — матрица с неслучайными элементами.

3. Математическое ожидание суммы случайных векторов равно сумме математических ожиданий этих векторов, т. е.

$$M[X_1 + X_2] = M[X_1] + M[X_2], \quad (29)$$

где  $X_1$  и  $X_2$  — случайные векторы одинакового размера.

Теперь рассмотрим моменты второго порядка. Пусть имеем две случайные величины  $X_i$  и  $X_j$ . Вычислим смешанный центральный момент второго порядка для этих случайных величин. Согласно равенству (24) имеем

$$\mu_{1,1} = M[X_i^0 X_j^0]. \quad (30)$$

Смешанный центральный момент второго порядка случайных величин  $X_i$  и  $X_j$  называется корреляционным моментом. Корреляционный момент для случайных величин  $X_i$  и  $X_j$  обозначают  $K_{ij}$  и вычисляют по формуле

$$\begin{aligned} \mu_{1,1} = K_{ij} &= M[X_i^0 X_j^0] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - M[X_i]) (x_j - M[X_j]) f(x_i, x_j) dx_i dx_j, \end{aligned} \quad (31)$$

где  $f(x_i, x_j)$  — двумерная плотность распределения вероятностей случайного вектора  $X = \begin{bmatrix} X_i \\ X_j \end{bmatrix}$ .

#### Свойства корреляционного момента

Свойство 1. Корреляционный момент для одной и той же случайной величины равен дисперсии этой случайной величины, т. е.

$$K_{ii} = D[X_i]. \quad (32)$$

Действительно,

$$K_{ii} = M[(X_i - M[X_i]) (X_i - M[X_i])] = M[(X_i^0)^2] = D[X_i].$$

Свойство 2. Корреляционный момент двух случайных величин  $X_i$  и  $X_j$  не зависит от того, в каком порядке берутся эти случайные величины, т. е.

$$K_{ij} = K_{ji}. \quad (33)$$

Действительно, имеем

$$K_{ij} = M[X_i^0 X_j^0] = M[X_j^0 X_i^0] = K_{ji}.$$

Свойство 3. Корреляционный момент для двух независимых случайных величин  $X_i$  и  $X_j$  равен нулю:

$$K_{ij} = 0, \quad (34)$$

если  $X_i$  и  $X_j$  независимы.

Действительно, в этом случае имеем

$$f_{ij}(x_i, x_j) = f_i(x_i) f_j(x_j),$$

где  $f_{ij}(x_i, x_j)$  — двумерная плотность распределения вероятностей случайного вектора  $X = \begin{bmatrix} X_i \\ X_j \end{bmatrix}$ ;  $f_i(x_i)$  и  $f_j(x_j)$  — одномерные плотности распределения вероятностей случайных величин  $X_i$  и  $X_j$ . В результате получим

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - M[X_i])(x_j - M[X_j]) f_{ij}(x_i, x_j) dx_i dx_j = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - M[X_i]) f_i(x_i) dx_i \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - M[X_j]) f_j(x_j) dx_j; \end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} (x_i - M[X_i]) f_i(x_i) dx_i = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i(x_i) dx_i - M[X_i] \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x_i) dx_i = M[X_i] - M[X_i] = 0, \end{aligned}$$

т. е. равенство (34) справедливо.

Из этого свойства следует, что корреляционный момент характеризует связь между случайными величинами. Однако в общем случае было бы неверно утверждать, что если корреляционный момент случайных величин  $X_i$  и  $X_j$  равен нулю, то они независимы.

Случайные величины, корреляционный момент которых равен нулю, называют *некоррелированными*, в противном случае эти величины называются *коррелированными*.

*Свойство 4.* Для корреляционного момента справедливо равенство

$$|K_{ij}| \leq \sqrt{D[X_i] D[X_j]}. \quad (35)$$

В самом деле, пусть  $\lambda$  — произвольное неслучайное число. Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} M[(X_i^2 - \lambda X_j^2)^2] &= M[(X_i^2)^2 - 2\lambda X_i^2 X_j^2 + \lambda^2 (X_j^2)^2] = \\ &= M[(X_i^2)^2] - 2\lambda M[X_i^2 X_j^2] + \lambda^2 M[(X_j^2)^2] = \\ &= D[X_i] - 2\lambda K_{ij} + \lambda^2 D[X_j]. \end{aligned} \quad (36)$$

Выражение, стоящее в левой части этого равенства, неотрицательно при любом  $\lambda$  как математическое ожидание квадрата случайной величины. При  $K_{ij} = 0$  неравенство (35) справедливо.

Предположим теперь, что  $K_{ij} \neq 0$ . Можно принять  $\lambda = \frac{D[X_i]}{K_{ij}}$ , в результате имеем

$$D[X_i] - \frac{2D[X_i] K_{ij}}{K_{ij}} + \frac{(D[X_i])^2 D[X_j]}{K_{ij}^2} \geq 0. \quad (37)$$

Умножая выражение (37) на  $\frac{K_{ij}^2}{D[X_i]}$ , получим

$$-K_{ij}^2 + D[X_i] D[X_j] \geq 0, \quad (38)$$

откуда следует справедливость равенства (35).

Кроме корреляционного момента двух случайных величин, для характеристики связи случайных величин  $X_i$  и  $X_j$  введем безразмерный коэффициент  $r_{ij}$ , равный отношению корреляционного момента случайных величин  $X_i$  и  $X_j$  к положительному значению квадратного корня из произведения дисперсий этих случайных величин. Этот коэффициент называется *коэффициентом корреляции* случайных величин  $X_i$  и  $X_j$ , т. е.

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{D[X_i] D[X_j]}} = \frac{K_{ij}}{\alpha_i \alpha_j}, \quad (39)$$

где  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  — средние квадратические отклонения случайных величин  $X_i$  и  $X_j$ .

Из свойств корреляционного момента непосредственно вытекают следующие свойства коэффициента корреляции:

$$r_{ii} = 1, \quad (40)$$

$$r_{ij} = r_{ji}, \quad (41)$$

$$|r_{ij}| \leq 1, \quad (42)$$

$$r_{ij} = 0, \quad (43)$$

если  $X_i$  и  $X_j$  — независимые случайные величины.

Между корреляционным моментом и начальным моментом второго порядка справедливо соотношение

$$\begin{aligned} K_{ij} &= M[X_i^2 X_j^2] = M[(X_i - M[X_i])(X_j - M[X_j])] = \\ &= M[X_i X_j] - M[X_i] M[X_j] - M[X_i] M[X_j] + \\ &\quad + M[X_i] M[X_j] = \alpha_i \alpha_j. \end{aligned} \quad (44)$$

Рассмотрим случайный вектор  $X$  с координатами  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Матрица  $K$ , составленная из корреляционных моментов для всех координат этого случайного вектора

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} = M[X^{\circ} (X^{\circ})^T] = [M[X_i^2 X_j^2]], \quad (45)$$

называется *корреляционной матрицей случайного вектора X*. Из равенства (33) следует, что  $K_{ij} = K_{ji}$ , т. е. матрица  $K$  является симметричной:

$$K' = K. \quad (46)$$

Пусть выполняется линейное преобразование случайного вектора  $X$ , задаваемое в некотором базисе матрицей  $B$ , т. е.

$$Y = BX. \quad (47)$$



Выясним, как изменяется корреляционная матрица  $K_X$  случайного вектора  $X$  при этом преобразовании. Имеем

$$K_X = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} = [K_{ij}] = [M[X_i^o X_j^o]]. \quad (48)$$

Вычислим корреляционную матрицу случайного вектора  $Y = BX$ . Воспользовавшись правилом умножения матриц (см. § 1), получим

$$\begin{aligned} K_Y &= [M[Y_i^o Y_j^o]] = \left[ M \left[ \sum_{m=1}^n b_{im} X_m^o \sum_{l=1}^n b_{jl} X_l^o \right] \right] = \\ &= \left[ M \left[ \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n b_{im} b_{jl} X_m^o X_l^o \right] \right] = \left[ \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n b_{im} b_{jl} M[X_m^o X_l^o] \right] = \\ &= \left[ \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n b_{im} b_{jl} K_{ml} \right] = BK_X B', \end{aligned}$$

где  $b_{ij}$  — элементы матрицы  $B$ .

Таким образом, при линейном преобразовании (47) случайного вектора  $X$  корреляционная матрица его образа  $Y$  равна

$$K_Y = BK_X B'. \quad (49)$$

**4. Комплексные случайные величины.** Случайная величина вида

$$Z = X + jY, \quad (50)$$

где  $X$  и  $Y$  — одномерные действительные случайные величины, называется *комплексной случайной величиной*.

Чтобы полностью охарактеризовать комплексную случайную величину, необходимо задать двумерную функцию распределения ее действительной и мнимой частей

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \quad (51)$$

Математическим ожиданием комплексной случайной величины называется выражение

$$M[Z] = M[X] + jM[Y]. \quad (52)$$

Для математического ожидания комплексной случайной величины справедливы все ранее доказанные свойства (12), (13), (14) и (16) математического ожидания действительной случайной величины.

Центрированной комплексной случайной величиной является случайная величина

$$Z^o = X^o + jY^o. \quad (53)$$

Дисперсией комплексной случайной величины  $Z$  называется математическое ожидание квадрата модуля ее центрированного значе-

ния, т. е.

$$D[Z] = M[|Z^o|^2] = M[Z^o Z^{\circ o}], \quad (54)$$

где  $Z^o$  означает комплексно-сопряженную случайную величину. Выразим дисперсию комплексной случайной величины через дисперсии ее действительной и мнимой частей:

$$D[Z] = M[|Z^o|^2] = M[(X^o)^2 + (Y^o)^2] = D[X] + D[Y]. \quad (55)$$

Из равенства (55) следует, что дисперсия комплексной случайной величины есть действительное число, равное сумме дисперсий действительной и мнимой частей комплексной случайной величины.

Корреляционным моментом комплексных случайных величин  $Z_1$  и  $Z_2$  называется математическое ожидание произведения центрированных случайных величин  $Z_1^o$  и  $Z_2^o$ , т. е.

$$K_{Z_1 Z_2} = M[Z_1^o Z_2^o]. \quad (56)$$

Понятие корреляционного момента комплексной случайной величины (56) является обобщением понятия корреляционного момента действительной случайной величины. В самом деле, если  $Z_2$  — действительная случайная величина, то  $Z_2^o = Z_2^o$ , тогда имеем  $K_{Z_1 Z_2} = M[Z_1^o Z_2^o]$ , что совпадает с выражением (31) для корреляционного момента действительной случайной величины.

Корреляционный момент для комплексных случайных величин определяется как математическое ожидание произведения одной центрированной случайной величины на комплексно-сопряженное центрированное значение другой случайной величины, поэтому, распространяя свойство 1 корреляционного момента (32) для действительных случайных величин на комплексные случайные величины, получим

$$D[Z] = K_{ZZ} = M[Z^o Z^{\circ o}],$$

т. е. мера рассеяния (дисперсия) возможных значений комплексной случайной величины есть действительное число. Именно по этой причине в выражении для корреляционного момента комплексной случайной величины (56) вторая случайная величина берется комплексно-сопряженной.

Свойства корреляционного момента комплексной случайной величины

*Свойство 1.* Корреляционный момент комплексной случайной величины с самой собой равен дисперсии этой случайной величины, т. е.

$$K_{ZZ} = M[Z^o Z^{\circ o}]. \quad (57)$$

*Свойство 2.* При перемене порядка индексов корреляционный момент изменяется на комплексно-сопряженный, т. е.

$$K_{Z_1 Z_2} = \bar{K}_{Z_2 Z_1}. \quad (58)$$

**Свойство 3.** Модуль корреляционного момента двух комплексных случайных величин меньше или равен положительному значению квадратного корня от произведения дисперсий этих случайных величин, т. е.

$$|K_{Z_1 Z_2}| \leq \sqrt{D[Z_1] D[Z_2]}. \quad (59)$$

**Свойство 4.** Дисперсия произведения случайной величины на неслучайный комплексный множитель  $\lambda$  равна произведению квадрата модуля неслучайного множителя на дисперсию этой случайной величины, т. е.

$$D[\lambda Z] = |\lambda|^2 D[Z]. \quad (60)$$

Доказательства справедливости свойств корреляционного момента комплексной случайной величины аналогичны доказательству этих свойств для корреляционного момента действительной случайной величины.

### § 63. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

**1. Характеристические функции одномерных случайных величин.** Характеристической функцией  $g(t)$  действительной случайной величины  $X$  с плотностью распределения вероятностей  $f(x)$  называется математическое ожидание функции  $e^{jtx}$ , где  $t$  параметр, т. е.

$$g(t) = M[e^{jtx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} f(x) dx. \quad (1)$$

Для дискретной случайной величины плотность распределения вероятностей есть линейная комбинация дельта-функций (16) § 60 и для нее формула (1) принимает вид

$$g(t) = g_1(-t) = M[e^{jtx}] = \sum_{k=1}^n e^{jtx_k} p_k. \quad (2)$$

Сравнивая равенство (1) с преобразованием Фурье (см. § 36), видим, что характеристическая функция есть преобразование по Фурье функции плотности распределения вероятностей, т. е.

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j(-t)x} dx. \quad (3)$$

Следовательно, функция плотности распределения вероятностей есть обратное преобразование по Фурье характеристической функции, т. е.

$$f(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{jt(-x)} dt. \quad (4)$$

Понятие характеристической функции, как показано ниже, весьма полезно при решении целого ряда теоретических и практических задач теории вероятностей.

### Свойства характеристической функции

**Свойство 1.** Значение характеристической функции при  $t=0$  равно единице, т. е.

$$g(0) = 1. \quad (5)$$

Действительно,

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j0x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

**Свойство 2.** Значение модуля характеристической функции не превышает единицы, т. е.

$$|g(t)| \leq 1. \quad (6)$$

Учитывая свойства 1 и 4 плотности распределения вероятностей, имеем

$$|g(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{jtx}| |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

**Свойство 3.** Характеристическая функция  $g_Y(t)$  суммы двух независимых случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  равна произведению характеристических функций  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  этих случайных величин, т. е.

$$g_Y(t) = g_1(t) g_2(t). \quad (7)$$

Действительно, так как для независимых случайных величин двумерная функция плотности распределения вероятностей равна произведению одномерных функций плотности распределения вероятностей, то получим

$$\begin{aligned} g_Y(t) &= M[e^{jtY}] = M[e^{j(tX_1 + X_2)}] = M[e^{jtx_1} e^{jtx_2}] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx_1} e^{jtx_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx_1} f_1(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx_2} f_2(x_2) dx_2 = g_1(x_1) g_2(x_2). \end{aligned}$$

**Свойство 4.** Характеристическая функция  $g_Y(t)$  случайной величины  $Y = aX + b$ , где  $a$  и  $b$  неслучайные числа, равна

$$g_Y(t) = e^{jbt} g(at). \quad (8)$$

где  $g(t)$  — характеристическая функция случайной величины  $X$ . Действительно, имеем

$$\begin{aligned} g_Y(t) &= M[e^{jtY}] = M[e^{j(aX + b)t}] = M[e^{jbt} e^{j(at)X}] = \\ &= e^{jbt} M[e^{j(at)X}] = e^{jbt} g(at). \end{aligned}$$

**Свойство 5.** Если существует начальный момент  $n$ -го порядка  $M[X^n]$  случайной величины  $X$ , то при всех  $k \leq n$  значение производной порядка  $k$  от характеристической функции  $g(t)$  этой случайной

величины при  $t=0$  равно начальному моменту  $k$ -го порядка случайной величины  $X$ , умноженному на  $j^k$ , т. е.

$$g^{(k)}(0) = j^k M[X^k] = j^k \alpha_k. \quad (9)$$

В самом деле, дифференцируя выражение для характеристической функции (1)  $k$  раз по  $t$ , получим

$$g^{(k)}(t) = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{jtx} f(x) dx.$$

Полагая  $t=0$ , найдем

$$g^{(k)}(0) = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \stackrel{\Delta}{=} j^k M[X^k] = j^k \alpha_k. \quad (10)$$

Из выражения (10), как частные случаи, могут быть получены следующие равенства:

$$M[X] = \alpha_1 = -jg'(0), \quad (11)$$

$$\alpha_2 = M[X^2] = -g''(0), \quad (12)$$

$$D[X] = \alpha_2 - \alpha_1^2 = -g''(0) + (g'(0))^2. \quad (13)$$

**2. Характеристические функции и числовые характеристики некоторых случайных величин.** Числовые характеристики (моменты) случайных величин, вообще говоря, могут быть вычислены непосредственно с помощью формул (5), (9) § 62. Однако эти моменты удобнее вычислять, используя свойство 5 характеристических функций. Так, математическое ожидание и дисперсию можно определить с помощью формул (11) и (13).

Вычисление математических ожиданий и дисперсий рассмотрим на примерах некоторых распределений случайных величин.

**1. Биномиальный закон распределения.** При биномиальном законе распределения (см. равенство (17) § 60) случайная величина  $X$  принимает значения  $0, 1, 2, \dots, n$  с вероятностями  $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ . Поэтому из равенства (2), используя формулу бинома Ньютона, имеем

$$g(t) = \sum_{k=0}^n e^{jtk} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{jt} p)^k q^{n-k} = (e^{jt} p + q)^n. \quad (14)$$

Вычислим производные от характеристической функции:

$$g'(t) = j n p e^{jt} (e^{jt} p + q)^{n-1},$$

$$g''(t) = -n p e^{jt} [p(n-1)(e^{jt} p + q)^{n-2} + (e^{jt} p + q)^{n-1}].$$

Учитывая, что  $p + q = 1$ , имеем

$$g'(0) = j n p, \quad g''(0) = -p^2 n^2 + p^2 n - p n = -p^2 n^2 - p n (1 - p).$$

Из формул (11) и (13) следует, что для случайной величины, распределенной по биномиальному закону, математическое ожидание

и дисперсия определяются равенствами

$$M[X] = -jg'(0) = n p, \quad (15)$$

$$D[X] = -g''(0) + (g'(0))^2 = p^2 n^2 + p n (1 - p) - p^2 n^2 = n p (1 - p) = n p q. \quad (16)$$

**2. Закон Пуассона.** Случайная величина, распределенная по закону Пуассона, принимает значения  $0, 1, 2, \dots, n, \dots$  с вероятностями  $p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$  (см. равенство (18) § 60). Из формулы (2) следует, что характеристическая функция этой случайной величины есть

$$g(t) = M[e^{jtx}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{jtk} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ae^{jt})^k}{k!} e^{-a} = e^{a(e^{jt} - 1)}. \quad (17)$$

Вычислим производные от характеристической функции (17):

$$g'(t) = a j e^{jt} e^{a(e^{jt} - 1)},$$

$$g''(t) = -a^2 e^{2jt} e^{a(e^{jt} - 1)} - a e^{jt} e^{a(e^{jt} - 1)}.$$

Полагая в полученных равенствах  $t=0$ , имеем

$$g'(0) = ja, \quad g''(0) = -a^2 - a.$$

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по закону Пуассона, вычислим, воспользовавшись равенствами (11) и (13):

$$M[X] = -jg'(0) = a, \quad (18)$$

$$D[X] = -g''(0) + (g'(0))^2 = a^2 + a - a^2 = a. \quad (19)$$

Таким образом, математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равны одному и тому же числу.

**3. Закон равной вероятности.** Согласно равенству (19) § 60 плотность распределения вероятностей случайной величины, распределенной по закону равной вероятности, имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \quad x > b, \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Характеристическую функцию этой случайной величины вычислим по формуле (1):

$$g(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{jtx} dx = \frac{1}{jt(b-a)} (e^{jtb} - e^{jta}). \quad (20)$$

Разложим характеристическую функцию  $g(t)$  в ряд Маклорена:

$$g(t) = \frac{1}{jt(b-a)} \left( jtb - jta - \frac{b^2 t^2}{2} + \frac{a^2 t^2}{2} - \frac{jb^3 t^3}{6} + \frac{ja^3 t^3}{6} + o(t^3) \right) = 1 + \frac{jt(b+a)}{2} - \frac{t^2(b^2 - a^2)}{6(b-a)} + o(t^2).$$

Вычислим производные от характеристической функции:

$$g'(t) = \frac{j(b-a)}{2} - \frac{t(b^2 + ab + a^2)}{3} + o(t),$$

$$g''(t) = -\frac{b^2 + ab + a^2}{3} + o(1),$$

откуда

$$g'(0) = \frac{j(b+a)}{2}, \quad g''(0) = -\frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

Определим математическое ожидание и дисперсию равномерно распределенной случайной величины. Воспользовавшись формулами (11) и (13), найдем

$$M[X] = -jg'(0) = \frac{b+a}{2}, \quad (21)$$

$$D[X] = -g''(0) + (g'(0))^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (22)$$

4. Нормальное распределение. Плотность распределения вероятностей случайной величины, распределенной по нормальному закону, равна  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$  (см. равенство (21) § 60). Согласно выражению (1), характеристическая функция случайной величины  $X$  равна

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{x^2}{2\sigma^2} - \left(jt + \frac{m}{\sigma^2}\right)x + \frac{m^2}{2\sigma^2}\right]} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 - 2(jt\sigma^2 + m)x + m^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{jmt - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[x - (jt\sigma^2 + m)]^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (23)$$

Полученный интеграл есть интеграл Эйлера—Пуассона. Известно<sup>\*</sup>, что

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[x - (jt\sigma^2 + m)]^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1,$$

поэтому для нормального распределения характеристическая функция имеет вид

$$g(t) = e^{jmt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \quad (24)$$

Запишем разложение характеристической функции в ряд Маклорена

$$g(t) = 1 + jmt - \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{m^2 t^2}{2} + o(t^2).$$

<sup>\*</sup> См., например: Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. II. «Наука», 1968, стр. 164.

Производные от характеристической функции равны

$$g'(t) = jm - t(\sigma^2 + m^2) + o(t), \quad g''(t) = -(\sigma^2 + m^2) + o(1),$$

откуда найдем

$$g'(0) = jm, \quad g''(0) = \sigma^2 + m^2.$$

Математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины вычислим по формулам (11) и (13):

$$M[X] = -jg'(0) = m, \quad (25)$$

$$D[X] = -g''(0) + (g'(0))^2 = \sigma^2 + m^2 - m^2 = \sigma^2. \quad (26)$$

Таким образом, два параметра  $m$  — математическое ожидание и  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонение полностью определяют случайную величину, распределенную по нормальному закону.

5. Экспоненциальное распределение. Функция плотности распределения вероятностей случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону, согласно равенству (27) § 60 имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \lambda > 0. \end{cases}$$

Характеристическую функцию этой случайной величины вычислим, учитывая равенство (1):

$$g(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{jtx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - jt)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - jt}. \quad (27)$$

Разложим характеристическую функцию в ряд Маклорена:

$$g(t) = \frac{1}{1 - j\frac{t}{\lambda}} = 1 + j\frac{t}{\lambda} - \frac{t^2}{\lambda^2} + o(t^2).$$

Вычислив производные от характеристической функции, получим

$$g'(t) = \frac{j}{\lambda} - \frac{2t}{\lambda^2} + o(t), \quad g''(t) = -\frac{2}{\lambda^2} + o(1),$$

откуда

$$g'(0) = \frac{j}{\lambda}, \quad g''(0) = -\frac{2}{\lambda^2}.$$

Определим математическое ожидание и дисперсию экспоненциально распределенной случайной величины:

$$M[X] = -jg'(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad (28)$$

$$D[X] = -g''(0) + (g'(0))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (29)$$

3. Характеристические функции векторных случайных величин. По аналогии с характеристической функцией одномерной случайной

величины введем характеристическую функцию векторной случайной величины. Характеристической функцией  $n$ -мерного случайного вектора  $X$  называется математическое ожидание случайной величины  $e^{j(t, X)}$ , т. е.

$$g(t) = g(t_1, t_2, \dots, t_n) = M[e^{j(t, X)}], \quad (30)$$

где

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix},$$

$(t, X)$  — скалярное произведение векторов  $t$  и  $X$ , заданных в некотором ортонормированном базисе.

В соответствии с определением математического ожидания имеем

$$g(t) = g(t_1, t_2, \dots, t_n) = M[e^{j(t, X)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} \times \\ \times f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (31)$$

где  $f(x_1, \dots, x_n)$   $n$ -мерная функция плотности распределения вероятностей случайного вектора  $X$ .

Основные свойства характеристической функции случайного вектора\*)

**Свойство 1.** Значение характеристической функции случайного вектора  $X$  при  $t=0$  равно единице, т. е.

$$g(0) = 1. \quad (32)$$

**Свойство 2.** Значение модуля характеристической функции не превышает единицы, т. е.

$$|g(t)| \leq 1. \quad (33)$$

**Свойство 3.** Для того чтобы из характеристической функции  $n$ -мерного случайного вектора получить характеристическую функцию  $k$ -мерного случайного вектора, составленного из произвольных  $k$  координат исходного вектора, надо положить  $(n-k)$  координат вектора  $t$  равными нулю. Полученная функция будет характеристической функцией случайного вектора, составленного из оставшихся  $k$  координат, т. е.

$$g_k(t_1, t_2, \dots, t_k) = g(t_1, t_2, \dots, t_k, 0, \dots, 0). \quad (34)$$

\*: Справедливость свойств характеристической функции случайного вектора примем без доказательства; доказательство см., например: Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. «Наука», 1969, стр. 248.

**Свойство 4.** Характеристическая функция  $g_Y(t)$   $n$ -мерного случайного вектора  $Y = a + BX$ , где  $a$  — неслучайный вектор;  $B$  — неслучайная матрица:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix},$$

равна

$$g_Y(t) = e^{j(t, a)} g(B^* t), \quad (35)$$

где  $g(t)$  — характеристическая функция случайного вектора  $X$ , а  $B^*$  — матрица, сопряженная с матрицей  $B$ .

**Свойство 5.** Смешанный начальный момент  $a_{k_1, k_2, \dots, k_n}$  порядка  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$   $n$ -мерного случайного вектора  $X$  равен

$$a_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{1}{j^{k_1 + k_2 + \dots + k_n}} \left[ \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \dots + k_n} g(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \dots \partial t_n^{k_n}} \right]_0, \quad (36)$$

где индекс ноль означает, что после дифференцирования нужно положить  $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$ .

**4. Многомерное нормальное распределение и его числовые характеристики.** Случайный вектор  $X$  с координатами  $X_1, X_2, \dots, X_n$  называется *распределенным по нормальному закону*, если его плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det K)^{1/2}} e^{-\frac{((x-m), K^{-1}(x-m))}{2}}, \quad (37)$$

где  $m = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}$  — неслучайный вектор-столбец;  $K = [K_{ij}]$  — положительно определенная симметричная неслучайная числовая матрица;  $((x-m), K^{-1}(x-m))$  — квадратичная форма, выраженная через скалярное произведение векторов  $(x-m)$  и  $K^{-1}(x-m)$ .

В частности, для двумерного случайного вектора  $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$  имеем:

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \quad K^{-1} = \frac{1}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} \begin{bmatrix} K_{22} & -K_{12} \\ -K_{21} & K_{11} \end{bmatrix},$$

поэтому плотность распределения вероятностей  $f(x_1, x_2)$  двумерного нормально распределенного вектора равна

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}} e^{-\frac{K_{22}(x_1 - m_1)^2 - 2K_{12}(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) + K_{11}(x_2 - m_2)^2}{2(K_{11}K_{22} - K_{12}^2)}}. \quad (38)$$

Вычислим характеристическую функцию случайного вектора  $X$ , распределенного по нормальному закону. Из определения характе-

ристической функции (30) имеем

$$g(t) = M[e^{jtX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(t, x)} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det K)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m, K^{-1}(x-m))} dx. \quad (39)$$

Введем новую переменную  $y = C(x-m)$ , тогда получим  $x-m = C^{-1}y$ , и равенство (39) примет вид

$$g(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det K)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(t, C^{-1}y+m)} e^{-\frac{1}{2}(C^{-1}y, K^{-1}C^{-1}y)} |\det C^{-1}|^{-1} dy. \quad (40)$$

Из свойств скалярного произведения (см. равенства (47), (48), (52) и (53) § 7) следует, что для действительной матрицы  $C$  справедливо соотношение

$$(t, C^{-1}y) = ((C^{-1})'t, y) \quad \text{и} \quad (C^{-1}y, K^{-1}C^{-1}y) = (y, (C^{-1})'K^{-1}C^{-1}y).$$

Из теории квадратичных форм известно (см. § 8), что всегда существует такая ортогональная матрица  $C$  (для нее  $C^{-1} = C'$ ), для которой произведение  $CKC' = D$  является диагональной матрицей. В этом случае обратная матрица  $D^{-1} = CK^{-1}C'$ , поэтому из равенства (40) получим

$$g(t) = \frac{|\det C|^{-1} e^{j(t, m)}}{(2\pi)^{n/2} (\det K)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(Ct, y)} e^{-\frac{1}{2}(y, D^{-1}y)} dy. \quad (41)$$

Из теоремы об определителе произведения матриц (см. § 2) имеем  $(\det D)^{1/2} = (\det K)^{1/2} |\det C|$ , откуда получим

$$g(t) = \frac{e^{j(t, m)}}{(2\pi)^{n/2} (\det D)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(Ct, y) - \frac{1}{2}(y, D^{-1}y)} dy. \quad (42)$$

Так как матрица  $D$  имеет диагональный вид

$$D = \text{diag}[d_1 d_2 \dots d_n], \quad \text{то} \quad D^{-1} = \text{diag}\left[\frac{1}{d_1} \frac{1}{d_2} \dots \frac{1}{d_n}\right], \quad \det D = d_1 d_2 \dots d_n,$$

и подынтегральное выражение в равенстве (42) представляет произведение функций от одной переменной, то  $n$ -мерный интеграл можно представить в виде произведения  $n$  одномерных интегралов. Полагая  $\tau = Ct$ , получим

$$g(t) = e^{j(t, m)} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2} d_k^{1/2}} e^{j\tau_k y_k - \frac{y_k^2}{2d_k}} dy_k. \quad (43)$$

Из равенств (23) и (24) следует, что интеграл в выражении (43) равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} d_k^{1/2}} e^{j\tau_k y_k - \frac{y_k^2}{2d_k}} dy_k = e^{-\frac{d_k \tau_k^2}{2}}, \quad (44)$$

поэтому характеристическая функция равна

$$g(t) = e^{j(t, m)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n d_k \tau_k^2} = e^{j(t, m)} e^{-\frac{1}{2}(t, D t)} \quad (45)$$

Выражая  $\tau$  через  $t$  и учитывая, что  $C'DC = K$ , найдем окончательно характеристическую функцию многомерной нормально распределенной случайной величины:

$$g(t) = e^{j(t, m) - \frac{1}{2}(t, D C t)} = e^{j(t, m) - \frac{1}{2}(t, C' D C t)} = e^{j(t, m) - \frac{1}{2}(t, K t)} \quad (46)$$

Используя свойство 3 характеристической функции, найдем характеристическую функцию случайной величины  $X_i$  и двумерного случайного вектора  $\begin{bmatrix} X_i \\ X_l \end{bmatrix}$ :

$$g_1(t_i) = e^{j t_i m_i - \frac{1}{2} K_{ii} t_i^2}, \quad (47)$$

$$g_2(t_i, t_l) = e^{j(t_i m_i + t_l m_l) - \frac{1}{2}(K_{ii} t_i^2 + 2K_{il} t_i t_l + K_{ll} t_l^2)}. \quad (48)$$

Вычислим значения производных характеристической функции при  $t_i = t_l = 0$ :

$$\left. \frac{\partial g_1(t_i)}{\partial t_i} \right|_{t_i=0} = j m_i, \quad (49)$$

$$\left. \frac{\partial^2 g_2(t_i, t_l)}{\partial t_i \partial t_l} \right|_{t_i=t_l=0} = -K_{il} - m_i m_l. \quad (50)$$

Учитывая равенства (11), (13) и (36), получим

$$\begin{aligned} M[X_i] &= m_i, \quad \alpha_{il} = M[X_i X_l] = K_{il} + m_i m_l, \\ M[X_i^2 X_l^2] &= \alpha_{il} - m_i m_l = K_{il}. \end{aligned} \quad (51)$$

Таким образом, параметры — вектор  $m$  и матрица  $K$  — в выражении для плотности распределения вероятностей есть соответственно вектор математического ожидания и корреляционная матрица нормально распределенного случайного вектора  $X$ .

Для двух нормально распределенных случайных величин  $X_i$  и  $X_l$  справедливо следующее свойство: Если случайные величины  $X_i$  и  $X_l$  распределены по нормальному закону и некоррелированы, то они независимы.

В самом деле, для некоррелированных случайных величин  $K_{il} = 0$ , поэтому в выражении (38) для плотности распределения вероятностей двумерного случайного вектора получим

$$\begin{aligned} j(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{K_{11} K_{22}}} e^{-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2K_{11}} - \frac{(x_2 - m_2)^2}{2K_{22}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} K_{11}} e^{-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2K_{11}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} K_{22}} e^{-\frac{(x_2 - m_2)^2}{2K_{22}}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Из выражения (52) следует, что в рассматриваемом случае двумерная функция плотности распределения вероятностей представима в виде произведения одномерных плотностей, поэтому согласно теореме 2 § 61 эти случайные величины независимы.

Получим необходимую в дальнейшем формулу для смешанного центрального момента четвертого порядка для координат нормально распределенного случайного вектора  $X$ .

Из равенств (46) и (35) следует, что характеристическая функция  $g_0(t)$  центрированного случайного вектора  $X - M[X] = X - m = X^0$  имеет вид

$$g_0(t) = e^{-j(t, m)} g(t) = e^{-j(t, m)} e^{j(t, m) - \frac{1}{2}(t, Kt)} = e^{-\frac{1}{2}(t, Kt)} \quad (53)$$

Согласно выражению (36) для определения любого центрального момента необходимо найти соответствующую производную от характеристической функции центрированного случайного вектора. Характеристическую функцию центрированного нормально распределенного четырехмерного вектора получим из формулы (53). Согласно равенству (34), полагая  $t_5 = t_6 = \dots = t_n = 0$ , имеем

$$g_0(t_1, t_2, t_3, t_4) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,l=0}^4 K_{il} t_i t_l} \quad (54)$$

где  $K_{il}$  — корреляционный момент случайных величин  $X_i$  и  $X_l$ . Дифференцируя это выражение поочередно по переменным  $t_1, t_2, t_3$  и  $t_4$  и полагая затем  $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$ , получим на основании выражения (36):

$$\mu_{1,1,1,1} = M[X_1^0 X_2^0 X_3^0 X_4^0] = K_{12} K_{34} + K_{13} K_{24} + K_{14} K_{23} \quad (55)$$

#### § 64. ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

**1. Неравенство Чебышева.** С помощью неравенства Чебышева можно оценить вероятность того, что значение, принятое случайной величиной  $X$ , будет отличаться от математического ожидания этой случайной величины  $M[X] = m_X$  больше, чем на заданную положительную величину  $\varepsilon$ . Неравенство Чебышева имеет вид

$$P(|X - m_X| > \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2} \quad (1)$$

где  $D[X]$  — дисперсия случайной величины  $X$ .

Докажем это неравенство, для чего запишем вероятность события, состоящего в том, что случайная величина  $X$ , имеющая плотность распределения вероятностей  $f(x)$ , примет значение, отличающееся от своего математического ожидания больше, чем на  $\varepsilon$ . Эта вероятность равна

$$P(|X - m_X| > \varepsilon) = \int_{|x - m_X| > \varepsilon} f(x) dx \quad (2)$$

причем интегрирование производится по интервалу оси  $Ox$ , где выполнено неравенство  $|x - m_X| > \varepsilon$ . Так как в выбранном интервале интегрирования  $(x - m_X)^2 > \varepsilon^2$ , то в данном случае можно записать

$$\frac{(x - m_X)^2}{\varepsilon^2} > 1 \quad (3)$$

Умножая полученное неравенство на неотрицательную функцию  $f(x)$ , имеем

$$f(x) \leq \frac{(x - m_X)^2}{\varepsilon^2} f(x) \quad (4)$$

Подставив выражение (4) в равенство (2), получим

$$P(|X - m_X| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x - m_X| > \varepsilon} (x - m_X)^2 f(x) dx \quad (5)$$

Заметим, что для неотрицательной подынтегральной функции в правой части выражения (5) справедливо неравенство

$$\int_{|x - m_X| > \varepsilon} (x - m_X)^2 f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx = D[X],$$

откуда имеем

$$P(|X - m_X| > \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2} \quad (6)$$

что и доказывает справедливость неравенства Чебышева.

**2. Теорема Чебышева.** Рассмотрим последовательность независимых случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ . Пусть заданы математические ожидания и дисперсии элементов этой последовательности

$$M[X_n] = m_n, \quad D[X_n] = d_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Образует новую случайную величину  $Y_n$  как среднее арифметическое первых  $n$  членов указанной последовательности:

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (7)$$

По правилу определения математического ожидания и дисперсии суммы независимых случайных величин имеем:

$$M[Y_n] = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n} = a_n, \quad (8)$$

$$D[Y_n] = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} = \frac{1}{n} b_n, \quad (9)$$

где  $b = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$ .



В отношении названной последовательности случайных величин справедлива следующая теорема:

**Теорема 1.** Если последовательность случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  состоит из независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями, то вероятность того, что случайная величина

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (10)$$

примет значение, отличающееся от ее математического ожидания на заданную величину  $\varepsilon > 0$ , при достаточно большом числе  $n$  меньше любого положительного числа  $\delta$ , т. е.

$$P(|Y_n - M[Y_n]| > \varepsilon) < \delta.$$

**Доказательство.** По условию теоремы дисперсии случайных величин  $X_n$  ограничены, поэтому существует положительное число  $Q$  такое, что  $d_i < Q$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Тогда из равенства (9) следует, что

$$D[Y_n] = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} < \frac{Q}{n}. \quad (11)$$

Из неравенства Чебышева найдем, что

$$P(|Y_n - M[Y_n]| > \varepsilon) \leq \frac{D[Y_n]}{\varepsilon^2} < \frac{Q}{n\varepsilon^2}.$$

Выберем теперь число членов последовательности  $n > \frac{\varepsilon^2 Q}{\delta}$ , получим

$$P(|Y_n - M[Y_n]| > \varepsilon) < \delta = \frac{Q}{n\varepsilon^2}. \quad (12)$$

Теорема доказана.

Если случайные величины последовательности имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии, т. е.

$$M[X_k] = m, \quad D[X_k] = d \quad (k = 1, 2, \dots),$$

то

$$M[Y_n] = M\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] = m,$$

и из неравенства (12) следует, что

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) < \frac{d}{n\varepsilon^2} = \delta. \quad (13)$$

Выражение (13) показывает, что вероятность того, что случайная величина  $Y_n$ , равная среднему арифметическому  $n$  случайных величин, имеющих одинаковые математические ожидания и ограниченные дисперсии, примет значение, отличающееся от математического ожидания элементов последовательности на величину большую чем  $\varepsilon$ , может быть сделана сколь угодно малой при увеличении числа  $n$ .

Этим обстоятельством пользуются при оценке математического ожидания случайных величин.

**3. Теорема Я. Бернулли.** Пусть выполняется серия из  $n$  испытаний Бернулли с вероятностями успеха и неудачи соответственно  $p$  и  $q = 1 - p$ , и случайная величина  $X_n$  равна числу успехов в  $n$  испытаниях.

**Теорема 2.** При достаточно большом числе независимых испытаний вероятность того, что частота успеха, которая равна отношению числа успехов  $X_n$  в  $n$  испытаниях к числу испытаний, отличается от вероятности больше чем на любое число  $\varepsilon > 0$ , может быть сделана сколь угодно малой, т. е.

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) < \delta. \quad (14)$$

**Доказательство.** Введем случайную величину  $Y_k$ , которая равна единице, если при  $k$ -м испытании имеется успех и равна нулю в противном случае. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $Y_k$  равны:

$$M[Y_k] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p, \quad D[Y_k] = (1 - p)^2 p + (0 - p)^2 (1 - p) = p(1 - p). \quad (15)$$

В этом случае случайную величину  $X_n$  можно представить в виде

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n. \quad (16)$$

Частота (статистическая вероятность) числа успехов в  $n$  испытаниях равна

$$P_n^* = \frac{X_n}{n} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}. \quad (17)$$

Нетрудно проверить, что все условия теоремы Чебышева для случайных величин  $Y_n$  выполнены, поэтому из равенства (13) получим

$$P(|P_n^* - p| > \varepsilon) = P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) < \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2} = \delta. \quad (18)$$

Теорема доказана.

**4. Виды сходимости случайных последовательностей.** Говорят, что последовательность случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  стремится к случайной величине  $X$  почти наверно (п. н.) или с вероятностью единица, если вероятность того, что существует предел последовательности  $X_1, X_2, \dots, X_n$  равный  $X$ , есть единица, т. е.

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1. \quad (19)$$

В этом случае записывают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \text{ (п. н.)}, \text{ или } X_n \xrightarrow{п. н.} X. \quad (20)$$

Заметим, что из теоремы Бернулли не следует, что частота случайной величины  $X_n$  стремится к ее вероятности, так как эта тео-

рема утверждает, что

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) < \delta \quad \text{при } n > N$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

что не эквивалентно условию (19). В теории вероятностей вводится еще один вид сходимости — сходимость по вероятности.

Последовательность случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  сходится к случайной величине  $X$  по вероятности, если для любых положительных чисел  $\varepsilon$  и  $\delta$  существует число  $N$ , зависящее от  $\varepsilon$  и  $\delta$ , такое, что при  $n > N$  справедливо неравенство

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) < \delta \quad (21)$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1. \quad (22)$$

Условно сходимость по вероятности записывают в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \stackrel{P}{=} X, \quad (23)$$

или

$$X_n \stackrel{P}{\rightarrow} X. \quad (24)$$

Наконец, в ряде случаев целесообразно ввести еще один вид сходимости — сходимость в среднем квадратическом.

Последовательность случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  сходится к случайной величине  $X$  в среднем квадратическом, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[|X_n - X|^2] = 0, \quad (25)$$

т. е. для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется число  $N$ , зависящее от  $\varepsilon$ , такое, что при  $n > N$  выполняется неравенство

$$M[|X_n - X|^2] < \varepsilon. \quad (26)$$

Условно такую сходимость записывают в виде

$$X = \text{l.i.m. } X_n^* \quad (27)$$

Приведем без доказательства критерий сходимости последовательности  $X_n$  к  $X$  в среднем квадратическом. Для того чтобы существовал предел в среднем квадратическом (27), необходимо и достаточно, чтобы существовало число  $N > 0$  такое, что для любых  $n > N$  и  $m > N$  выполнялось неравенство

$$M[|X_n - X_m|^2] < \varepsilon. \quad (28)$$

\*1) Обозначение л. и. м. составлено из первых букв слов *limes in medio*, что в переводе означает «предела в среднем».

Можно показать, что сходимость почти наверно и сходимость в среднем квадратическом влекут за собой и сходимость по вероятности.

**5. Теорема Муавра—Лапласа.** В § 60 была введена случайная величина  $X_n$ , равная числу успехов при  $n$  испытаниях Бернулли с вероятностями успеха  $p$  и неудачи  $q$ . Эта случайная величина названа распределенной по биномиальному закону. Характеристическая функция такой случайной величины вычислена выше в § 63 и имеет вид

$$g(t) = (pe^{it} + q)^n. \quad (29)$$

Рассмотрим случайную величину  $P_n^* = \frac{X_n}{n}$ . Эта случайная величина есть частота (статистическая вероятность) успеха, вероятность которого равна  $p$ . Введем новую случайную величину  $Y_n$ :

$$Y_n = \frac{P_n^* - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{X_n - pn}{\sqrt{npq}} \quad (30)$$

и назовем ее *нормированной частотой*.

Вычислим характеристическую функцию случайной величины  $Y_n$ . Из свойства 4 характеристической функции имеем

$$g_{Y_n}(t) = e^{-j \frac{p \sqrt{nt}}{\sqrt{pq}}} \left( pe^{j \frac{t}{\sqrt{npq}}} + q \right)^n = \left[ e^{j \frac{pt}{\sqrt{npq}}} \left( pe^{j \frac{t}{\sqrt{npq}}} + 1 - p \right) \right]^n. \quad (31)$$

Изучим свойства случайной величины  $Y_n$  в предельном случае, когда число испытаний  $n$  неограниченно возрастает.

**Теорема 3.** При неограниченном увеличении числа независимых испытаний с одинаковой вероятностью успеха предельным распределением нормированной частоты

$$Y_n = \frac{X_n - pn}{\sqrt{npq}}$$

является нормальное распределение.

**Доказательство.** Вычислим характеристическую функцию случайной величины  $Y_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для этого разложим в ряд Тейлора в окрестности нуля экспоненциальные функции в выражении (31):

$$\begin{aligned} g_{Y_n}(t) &= \left[ \left( 1 - \frac{jpt}{\sqrt{npq}} - \frac{pt^2}{2nq} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left( 1 + \frac{jpt}{\sqrt{npq}} - \frac{t^2}{2nq} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right]^n = \\ &= \left( 1 + \frac{pt^2}{nq} - \frac{pt^2}{2nq} - \frac{t^2}{2nq} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = \left( 1 - \frac{t^2(1-p)}{2nq} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = \\ &= \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n. \end{aligned}$$

В полученном равенстве перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{Y_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Сравнивая найденный результат с выражением (24) § 63, видим, что характеристическая функция случайной величины  $Y_n$  при  $n \rightarrow \infty$  совпадает с характеристической функцией нормально распределенной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Теорема доказана.

Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины — частоты успеха  $P_n^* = \frac{X_n}{n}$  в  $n$  испытаниях Бернулли. Воспользовавшись соотношениями (15) и (16) § 63, получим

$$M(X_n) = -jg'(0) = np, \quad D[X_n] = -g''(0) + (g'(0))^2 = npq.$$

Отсюда, используя свойства 2 § 62 математического ожидания и дисперсии и учитывая, что  $P_n^* = \frac{X_n}{n}$ , найдем:

$$M[P_n^*] = \frac{M[X_n]}{n} = p, \quad D[P_n^*] = \frac{D[X_n]}{n^2} = \frac{pq}{n}.$$

Из этих равенств и теоремы Муавра—Лапласа следует, что частота успеха при неограниченном числе независимых испытаний стремится к нормально распределенной случайной величине с математическим ожиданием  $p$  и дисперсией  $\frac{pq}{n}$ . Этот результат имеет важное практическое значение, так как позволяет оценить надежность оценки вероятности, получаемой экспериментально. Поясним это на примере.

**Пример 1.** Производится 100 бросаний монеты, требуется определить интервал значений частоты выпадений герба, возможных с вероятностью 0,95.

Согласно теореме Муавра—Лапласа приближенно частоту выпадений герба можно считать нормально распределенной случайной величиной с дисперсией

$$D = \frac{pq}{n} = \frac{0,5 \cdot 0,5}{100} = 0,0025.$$

Искомую вероятность вычислим с помощью функции Лапласа (26) § 60:

$$P(|P_n^* - p| < \epsilon) = 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{0,05}\right) = 0,95.$$

По таблице функции Лапласа имеем

$$\frac{\epsilon}{0,05} = 1,96, \text{ откуда } \epsilon = 0,098 \approx 0,1.$$

Таким образом, искомая частота выпадений герба с вероятностью 95% будет принимать значения в интервале 0,4—0,6.

§ 65. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

**1. Понятие случайной функции.** При изучении ряда явлений природы приходится наблюдать процессы, характеризуемые функциями, которые в зависимости от исхода опыта принимают различный вид. Этими функциями могут быть, например, траектории частиц в броуновском движении, профиль дороги, сигнал на выходе радиоприемника под воздействием помех и т. д. Такие функции называют случайными. В задачах теории автоматического регулирования случайными функциями являются, например, функции, характеризующие воздействие порывов ветра на летательный аппарат, влияние колебаний корпуса корабля на стабилизированную антенну радиолокатора, помехи в радиотехнических устройствах и т. п.

Указать заранее на то, какой вид примет случайная функция в данном опыте, невозможно, однако закономерности, присущие множеству значений, принимаемых случайной функцией, как закономерности массового явления можно изучить.

Случайная функция, как и случайная величина, принимает различные значения в зависимости от исхода опыта  $\omega$ -элементарного события, кроме того, случайная функция зависит от некоторого неслучайного параметра  $t$ , например времени.

Таким образом, *случайной функцией* называется случайная величина, зависящая от параметра  $t$ , т. е.  $X(t, \omega)$ .

Если параметр  $t$  — время, то случайную функцию называют случайным процессом. Если зафиксировать элементарное событие  $\omega = \omega_0$ , то  $X(t, \omega_0)$  будет неслучайной функцией аргумента  $t$ . Конкретный вид случайной функции при фиксированном  $\omega$ , т. е. в данном опыте, называется *реализацией* случайной функции. На рис. 207 показаны реализации случайной функции  $X(t, \omega)$  при  $\omega = \omega_1, \omega = \omega_2, \dots, \omega = \omega_n$ . Если зафиксировать параметр случайной функции  $t$ , т. е. рассмотреть сечение этой случайной функции при  $t = t_k$ , то она будет зависеть только от элементарного события  $\omega$ , следовательно, станет случайной величиной  $X(t_k, \omega)$ .

Рассмотрим  $k$  сечений случайной функции  $X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_k, \omega)$ , в результате получим  $k$ -мерную случайную величину, которая соответствует случайной функции  $X(t, \omega)$ .

Случайную функцию можно рассматривать как многомерную случайную величину. Многомерная случайная величина характеризуется многомерной функцией распределения вероятностей, поэтому и случайная функция  $X(t, \omega)$  будет характеризоваться многомерной функцией распределения вероятностей.

При дальнейшем изложении аргумент случайной функции  $\omega$  для краткости будем опускать.

2. Основные характеристики случайной функции. Для того чтобы полностью задать случайную функцию  $X(t)$ , необходимо знать все  $n$ -мерные функции распределения:

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n),$$

которые зависят от  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $n$  значений параметра  $t_1, t_2, \dots, t_n$  или плотности распределения вероятностей

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n).$$

По известной  $n$ -мерной функции распределения вероятностей всегда можно найти функции распределения меньшей размерности. Однако на практике обычно не известны функции распределения

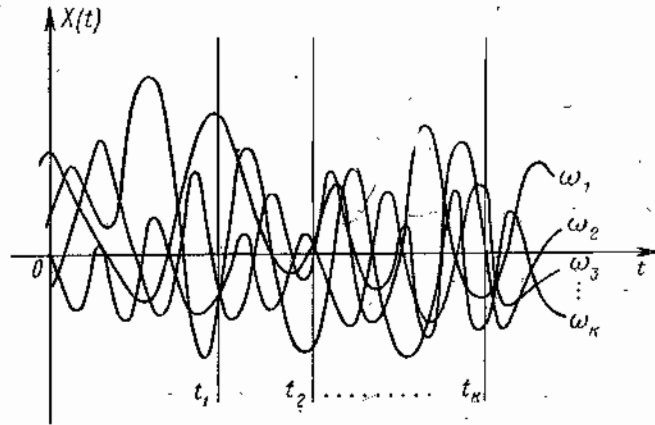


Рис. 207

высокой размерности, поэтому в ряде случаев ограничиваются заданием только двумерных функций распределения (плотностей распределения) вероятностей.

Важными характеристиками случайных величин являются моменты. Естественно применить понятие моментов и для описания случайных функций. Если известна двумерная функция распределения или плотность распределения вероятностей случайной функции, то всегда можно вычислить моменты случайной функции до второго порядка включительно. Такими моментами являются математическое ожидание

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx = m_X(t), \quad (1)$$

дисперсия

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_X(t)]^2 f_1(x, t) dx = D_X(t) \quad (2)$$

и корреляционный момент

$$K_X(t_1, t_2) = M[X^\circ(t_1) X^\circ(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_X(t_1)) (x_2 - m_X(t_2)) f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (3)$$

где

$$X^\circ(t) = X(t) - M[X(t)] \quad (4)$$

— центрированная случайная функция.

Если параметру  $t$  придавать все возможные значения, то математическое ожидание (1) и дисперсия (2) случайной функции будут функциями одной переменной  $t$ , а корреляционный момент (3) — функцией двух переменных  $t_1$  и  $t_2$ . Корреляционный момент  $K_X(t_1, t_2)$  называется корреляционной функцией случайной функции  $X(t)$ .

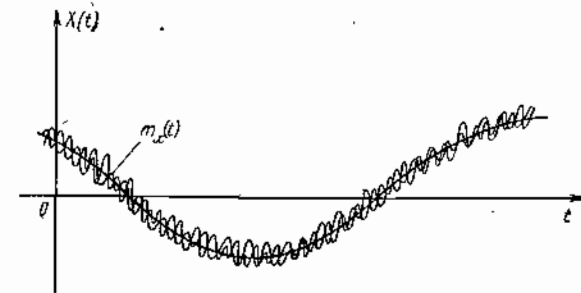


Рис. 208

Математическое ожидание представляет собой среднее значение случайной функции  $X(t)$  (рис. 208), а дисперсия характеризует отклонение значений, принимаемых случайной функцией, от ее математического ожидания. Корреляционная функция характеризует зависимость между случайными величинами  $X(t_1)$  и  $X(t_2)$  — сечениями случайной функции при  $t=t_1$  и  $t=t_2$ . Чем меньше связь между случайными величинами  $X(t_1)$  и  $X(t_2)$ , тем меньше значение корреляционной функции  $K(t_1, t_2)$ . Но чем меньше эта связь, тем быстрее изменяются значения, принимаемые случайной функцией. На рис. 209 изображены реализации двух случайных функций с одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями, но в случае а) случайная функция изменяется быстрее, связь между сечениями этой функции мала, а в случае б) зависимость между этими же сечениями случайной функции больше. Поэтому в случае а) корреляционная функция при увеличении разности между аргументами  $t_2 - t_1$  затухает быстрее, чем в случае б).

Теория, изучающая случайные функции на основе знания первых двух моментов случайных функций, называется *корреляционной теорией*.

Если известны математическое ожидание  $m(t)$  и корреляционная функция  $K(t_1, t_2)$  случайной функции  $X(t)$ , то всегда можно построить  $n$ -мерный вектор математического ожидания многомерной случайной величины  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  для фиксированных значений  $t_1, t_2, \dots, t_n$

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

и корреляционную матрицу этой случайной многомерной величины

$$K = \begin{bmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \dots & K(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \dots & K(t_n, t_n) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Если случайная функция  $X(t)$  нормально распределена, т. е. все ее  $n$ -мерные функции распределения есть функции распределения

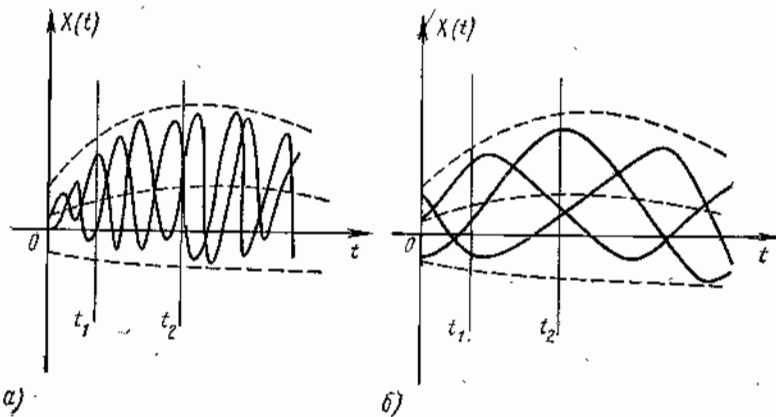


Рис. 209

$n$ -мерной случайной величины, распределенной по нормальному закону, то по математическому ожиданию  $m(t)$  и корреляционной функции  $K(t_1, t_2)$  можно вычислить все  $n$ -мерные распределения (см. § 61).

Таким образом, математическое ожидание и корреляционная функция полностью задают случайную функцию, распределенную по нормальному закону.

**3. Комплексные случайные функции.** Случайная функция вида

$$Z(t) = X(t) + jY(t), \quad (7)$$

где  $X(t)$  и  $Y(t)$  — процессы с действительными значениями, называется комплексной случайной функцией.

Математическое ожидание комплексной случайной функции  $Z(t)$  равно

$$M[Z(t)] = M[X(t)] + jM[Y(t)]. \quad (8)$$

Вычитая из выражения (8) равенство (7), получим

$$Z^\circ(t) = Z(t) - M[Z(t)] = X^\circ(t) + jY^\circ(t), \quad (9)$$

здесь  $Z^\circ(t)$  — центрированная случайная функция.

Дисперсией случайной функции  $Z(t)$  называется математическое ожидание квадрата модуля ее центрированного значения, т. е.

$$D[Z(t)] = M[|Z^\circ(t)|^2] = M[Z^\circ(t) \overline{Z^\circ(t)}]. \quad (10)$$

Корреляционной функцией случайной функции  $Z(t)$  называется математическое ожидание произведения центрированного значения этой функции в сечении  $t_1$  на комплексно-сопряженное центрированное значение случайной функции в сечении  $t_2$ , т. е.

$$K_Z(t_1, t_2) = M[Z^\circ(t_1) \overline{Z^\circ(t_2)}]. \quad (11)$$

Другими словами, корреляционная функция есть смешанный центральный момент второго порядка.

Кроме корреляционной функции, вводится смешанный начальный момент второго порядка

$$\Gamma_Z(t_1, t_2) = M[Z(t_1) \overline{Z(t_2)}]. \quad (12)$$

Выясним связь между корреляционной функцией и начальным моментом второго порядка. Имеем:

$$\begin{aligned} K_Z(t_1, t_2) &= M[(Z(t_1) - m_Z(t_1)) \overline{(Z(t_2) - m_Z(t_2))}] = M[Z(t_1) \overline{Z(t_2)} - \\ &- m_Z(t_1) \overline{M[Z(t_2)]} - \overline{m_Z(t_2)} M[Z(t_1)] + m_Z(t_1) \overline{m_Z(t_2)}] = \\ &= \Gamma_Z(t_1, t_2) - m_Z(t_1) \overline{m_Z(t_2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Некоторые свойства корреляционной функции

**Свойство 1.** Корреляционная функция при одинаковых значениях аргументов равна дисперсии случайной функции, т. е.

$$K(t, t) = D(t). \quad (14)$$

Действительно,

$$K(t, t) = M[Z^\circ(t) \overline{Z^\circ(t)}] = D(t).$$

**Свойство 2.** При перемене местами аргументов корреляционная функция меняется на комплексно-сопряженную, т. е.

$$K(t_2, t_1) = \overline{K(t_1, t_2)}. \quad (15)$$

Покажем справедливость этого утверждения. В самом деле,

$$K(t_2, t_1) = M[Z^\circ(t_2) \overline{Z^\circ(t_1)}] = \overline{M[Z^\circ(t_1) \overline{Z^\circ(t_2)}]} = \overline{K(t_1, t_2)}.$$

В частном случае для действительной корреляционной функции получим

$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1). \quad (16)$$

*Свойство 3.* Если к случайной функции прибавить неслучайную функцию  $\varphi(t)$ , то корреляционная функция не изменится.

Действительно, пусть случайная функция  $Z_1(t)$  равна

$$Z_1(t) = Z(t) + \varphi(t); \quad (17)$$

$$M[Z_1(t)] = M[Z(t)] + \varphi(t). \quad (18)$$

Вычитая равенство (18) из равенства (17), получим

$$Z_1^\circ(t) = Z^\circ(t).$$

Таким образом,

$$K_{Z_1}(t_1, t_2) = M[Z_1^\circ(t_1) \overline{Z_1^\circ(t_2)}] = M[Z^\circ(t_1) \overline{Z^\circ(t_2)}] = K_Z(t_1, t_2). \quad (19)$$

*Свойство 4.* Для всякой корреляционной функции справедливо неравенство

$$|K(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D(t_1) D(t_2)}. \quad (20)$$

Доказательство справедливости этого неравенства совпадает с доказательством аналогичного свойства для корреляционного момента (см. § 62).

*Свойство 5.* Корреляционная функция является положительно определенной функцией\*).

Покажем справедливость этого свойства. Учитывая определение корреляционной функции и линейность операции определения математического ожидания, вычислим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K(t_i, t_j) \lambda_i \bar{\lambda}_j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M[Z^\circ(t_i) \overline{Z^\circ(t_j)}] \lambda_i \bar{\lambda}_j = \\ &= M \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Z^\circ(t_i) \overline{Z^\circ(t_j)} \lambda_i \bar{\lambda}_j \right] = M \left[ \left( \sum_{i=1}^n Z^\circ(t_i) \lambda_i \right) \overline{\left( \sum_{j=1}^n Z^\circ(t_j) \lambda_j \right)} \right] = \\ &= M \left[ \left| \sum_{i=1}^n Z^\circ(t_i) \lambda_i \right|^2 \right] \geq 0, \end{aligned}$$

так как математическое ожидание квадрата модуля не может быть отрицательным.

Таким образом, свойство 5 установлено.

Один из возможных видов корреляционной функции приведен на рис. 210.

\*: Функция  $f(x)$  называется положительно определенной, если для любых комплексных чисел  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$  справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(t_i, t_j) \lambda_i \bar{\lambda}_j \geq 0.$$

Вместо корреляционной функции может быть рассмотрена безразмерная нормированная корреляционная функция  $R(t_1, t_2)$ , определяемая равенством

$$R(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sqrt{D(t_1) D(t_2)}}. \quad (21)$$

Из определения и свойств корреляционной функции легко показать, что для нормированной корреляционной функции справедливы соотношения

$$R(t, t) = 1, \quad (22)$$

$$R(t_2, t_1) = \overline{R(t_1, t_2)}, \quad (23)$$

$$|R(t_1, t_2)| \leq 1. \quad (24)$$

В теории случайных функций большую роль играет один из видов случайной функции, математическое ожидание которой равно нулю,

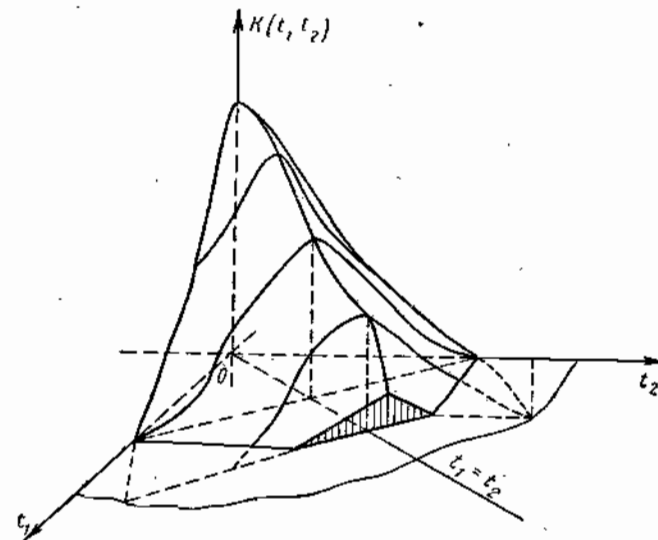


Рис. 210

а корреляционная функция равна дельта-функции. Такую случайную функцию называют *белым шумом*. Для белого шума, как это следует из определения, справедливы равенства

$$M[X(t)] = 0, \quad (25)$$

$$K(t_1, t_2) = G(t) \delta(t_1 - t_2). \quad (26)$$

Функция  $G(t)$  называется интенсивностью белого шума. Дельта-функция при значении аргумента, отличном от нуля, равна нулю, поэтому для белого шума случайные величины, соответствующие двум сколь угодно близким сечениям, являются некоррелированными.

Рассмотрим систему из  $n$  случайных функций

$$X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t). \quad (27)$$

Каждая из функций этой системы характеризуется математическим ожиданием и корреляционной функцией. Однако необходимо ввести еще характеристику связи между отдельными случайными функциями системы (27). Такой характеристикой является взаимная корреляционная функция двух случайных функций  $X_i(t)$  и  $X_j(t)$ , определяемая равенством

$$K_{X_i X_j}(t_1, t_2) = M[X_i^2(t) \overline{X_j^2(t_2)}]. \quad (28)$$

Для того чтобы отличать взаимную корреляционную функцию от корреляционной функции, последнюю называют также *автокорреляционной функцией*.

Для взаимной корреляционной функции случайных функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  справедливы свойства

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \overline{K_{YX}(t_2, t_1)}. \quad (29)$$

$$|K_{XY}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_X(t_1) D_Y(t_2)}. \quad (30)$$

Справедливость выражений (29) и (30) доказывается аналогично тому, как и при доказательстве соответствующих свойств корреляционной функции.

Две случайные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$  называются *некоррелированными*, если их взаимная корреляционная функция тождественно равна нулю, т. е.

$$K_{XY}(t_1, t_2) \equiv 0. \quad (31)$$

В ряде случаев удобно ввести безразмерную характеристику связи между случайными функциями — *нормированную взаимную корреляционную функцию*

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \frac{K_{XY}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_X(t_1) D_Y(t_2)}}. \quad (32)$$

Взаимная корреляционная функция является центральным моментом второго порядка; в теории случайных функций рассматривается также *взаимный начальный момент второго порядка*:

$$\Gamma_{XY}(t_1, t_2) = M[X(t_1) \overline{Y(t_2)}]. \quad (33)$$

Справедлива следующая зависимость между взаимной корреляционной функцией  $K_{XY}(t_1, t_2)$  и взаимным начальным моментом  $\Gamma_{XY}(t_1, t_2)$ :

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \Gamma_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1) \overline{m_Y(t_2)}. \quad (34)$$

**4. Непрерывность случайной функции в среднем квадратическом.** В корреляционной теории, использующей моменты случайных функций, при предельных переходах пользуются понятием сходимости в среднем квадратическом.

Случайная функция  $X^\circ(t)$  называется *непрерывной в среднем квадратическом*, если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \text{l.i.m. } X^\circ(t) = X^\circ(t_0). \quad (35)$$

Это условие можно записать иначе:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M[|X^\circ(t) - X^\circ(t_0)|^2] = 0. \quad (36)$$

Докажем две вспомогательные леммы. Доказательство произведем для случая действительных случайных величин, однако все выводы будут справедливы и для комплексных случайных величин.

**Лемма 1.** Если последовательности случайных величин  $X_t$  и  $Y_{t'}$  с ограниченными дисперсиями и нулевыми математическими ожиданиями при  $t \rightarrow t_0$  и  $t' \rightarrow t'_0$  сходятся в среднем квадратическом соответственно к  $X_{t_0}$  и  $Y_{t'_0}$ , т. е.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \text{l.i.m. } X_t = X_{t_0} \quad \text{и} \quad \lim_{t' \rightarrow t'_0} \text{l.i.m. } Y_{t'} = Y_{t'_0}, \quad (37)$$

то справедливо равенство

$$M[\text{l.i.m. } X_t Y_{t'}] = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t' \rightarrow t'_0}} M[X_t Y_{t'}]. \quad (38)$$

Доказательство. Запишем очевидное неравенство

$$\begin{aligned} & |M[X_t Y_{t'}] - M[X_{t_0} Y_{t'_0}]| = |M[X_t Y_{t'} - X_{t_0} Y_{t'_0}]| = \\ & = |M[X_t Y_{t'} - X_t Y_{t'_0} + X_t Y_{t'_0} - X_{t_0} Y_{t'_0}]| = |M[X_t (Y_{t'} - Y_{t'_0})] - \\ & - M[(X_t - X_{t_0}) Y_{t'_0}]| \leq |M[X_t (Y_{t'} - Y_{t'_0})]| + |M[(X_t - X_{t_0}) Y_{t'_0}]|. \end{aligned} \quad (39)$$

На основании неравенства (35) § 62 можно написать:

$$\begin{aligned} & |M[X_t (Y_{t'} - Y_{t'_0})]| + |M[(X_t - X_{t_0}) Y_{t'_0}]| \leq \\ & \leq \sqrt{M[(X_t)^2] M[(Y_{t'} - Y_{t'_0})^2]} + \sqrt{M[(X_t - X_{t_0})^2] M[(Y_{t'_0})^2]}. \end{aligned} \quad (40)$$

Но из условия ограниченности дисперсий случайных величин  $X$  и  $Y_{t'}$  следует, что

$$M[(X_t)^2] < N \quad \text{и} \quad M[(Y_{t'_0})^2] < N,$$

где  $N$  — конечное число, а из условия сходимости случайных последовательностей имеем:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M[(X_t - X_{t_0})^2] = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t' \rightarrow t'_0} M[(Y_{t'} - Y_{t'_0})^2] = 0.$$

Исходя из изложенного, переходя в равенстве (39) к пределу и учитывая выражение (40), получим:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t' \rightarrow t'_0}} |M[X_t Y_{t'}] - M[X_{t_0} Y_{t'_0}]| = 0, \quad (41)$$



откуда следует, что

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t' \rightarrow t'_0}} M[X_t Y_{t'}] = M[X_{t_0} Y_{t'_0}] = M[\text{l. i. m. } X(t) Y(t')].$$

Лемма доказана.

Если в равенстве (38) принять за случайную последовательность  $Y_{t'}$  последовательность единиц 1, 1, ..., 1, ..., то получим

$$M[\text{l. i. m. } X_t] = \lim_{t \rightarrow t_0} M[X_t], \quad (42)$$

т. е. операции определения математического ожидания и предельного перехода перестановочны.

*Лемма 2.* Для того чтобы последовательность случайных величин  $X_t$  с ограниченными дисперсиями и нулевыми математическими ожиданиями при  $t \rightarrow t_0$  в среднем квадратическом сходилась к случайной величине  $X_{t_0}$ , необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t' \rightarrow t'_0}} M[X_t X_{t'}] = a(t_0), \quad (43)$$

где  $a(t_0) < \infty$ , при независимом стремлении  $t$  к  $t_0$  и  $t'$  к  $t'_0$ .

*Доказательство.* Пусть дано, что

$$\text{l. i. m. } X_t = X_{t_0}.$$

Тогда, положив в условиях предыдущей леммы,

$$Y_{t'} = X_{t'}, \quad t'_0 = t_0,$$

получим

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t' \rightarrow t'_0}} M[X_t X_{t'}] = M[\text{l. i. m. } X_t X_{t'}] = M[X_{t_0} X_{t_0}] = D[X_{t_0}] = a(t_0) < \infty.$$

Отсюда следует справедливость необходимости условий леммы.

*Докажем достаточность* этих условий. Имеем

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t' \rightarrow t'_0}} M[X_t X_{t'}] = a(t_0),$$

откуда

$$M[(X_t - X_{t'})^2] = M[X_t X_t - X_t X_{t'} - X_{t'} X_t + X_{t'} X_{t'}] = \\ = M[X_t X_t] - 2M[X_t X_{t'}] + M[X_{t'} X_{t'}].$$

Перейдем к пределу при  $t \rightarrow t_0$ ,  $t' \rightarrow t_0$ , тогда получим

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t' \rightarrow t'_0}} M[(X_t - X_{t'})^2] = \lim_{t \rightarrow t_0} M[X_t X_t] + \lim_{t' \rightarrow t_0} M[X_{t'} X_{t'}] - 2 \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t' \rightarrow t'_0}} M[X_t X_{t'}] = \\ = a(t_0) + a(t_0) - 2a(t_0) = 0.$$

Таким образом, существует предел

$$\text{l. i. m. } X_t = X_{t_0}.$$

Лемма доказана полностью.

Воспользовавшись доказанными леммами, получим критерий непрерывности случайной функции в среднем квадратическом. Этот критерий устанавливается следующей теоремой:

*Теорема 1.* Для того чтобы случайная функция  $X^\circ(t)$  с ограниченной дисперсией была непрерывна в среднем квадратическом, необходимо и достаточно, чтобы корреляционная функция  $K(t_1, t_2)$  этой случайной функции при  $t_1 = t_2$  была непрерывной, причем из непрерывности функции  $K(t_1, t_2)$  при  $t_1 = t_2$  следует ее непрерывность при любых  $t_1$  и  $t_2$ .

*Доказательство.* Пусть корреляционная функция случайной функции  $X^\circ(t)$  непрерывна при  $t_1 = t_2$ . Запишем очевидное равенство

$$M[(X^\circ(t_1) - X^\circ(t_{10}))^2] = M[(X^\circ(t_1))^2] + M[(X^\circ(t_{10}))^2] - \\ - 2M[X^\circ(t_1) X^\circ(t_{10})] = K(t_1, t_1) + K(t_{10}, t_{10}) - 2K(t_1, t_{10}). \quad (44)$$

Перейдем к пределу при  $t_1 \rightarrow t_{10}$ . Используя условие непрерывности корреляционной функции, получим:

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_{10}} M[(X^\circ(t_1) - X^\circ(t_{10}))^2] = \lim_{t_1 \rightarrow t_{10}} K(t_1, t_1) + \lim_{t_1 \rightarrow t_{10}} K(t_{10}, t_{10}) - \\ - 2 \lim_{t_1 \rightarrow t_{10}} K(t_1, t_{10}) = K(t_{10}, t_{10}) + K(t_{10}, t_{10}) - 2K(t_{10}, t_{10}) = 0. \quad (45)$$

Достаточность условий теоремы доказана.

*Докажем необходимость.* Пусть  $X^\circ(t)$  — непрерывная в среднем квадратическом случайная функция, т. е.

$$\text{l. i. m. } X^\circ(t_1) = X^\circ(t_{10}) \quad \text{и} \quad \text{l. i. m. } X^\circ(t_2) = X^\circ(t_{20}).$$

Используя лемму 1 и условия непрерывности случайной функции, можно записать:

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow t_{10} \\ t_2 \rightarrow t_{20}}} K(t_1, t_2) = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow t_{10} \\ t_2 \rightarrow t_{20}}} M[X^\circ(t_1) X^\circ(t_2)] = M[\text{l. i. m. } X^\circ(t_1) X^\circ(t_2)] = \\ = M[X^\circ(t_{10}) X^\circ(t_{20})] = K(t_{10}, t_{20}).$$

Полученное равенство доказывает непрерывность корреляционной функции  $K(t_1, t_2)$  для непрерывной в среднем квадратическом случайной функции  $X(t)$  при любых  $t_1$  и  $t_2$ , а значит, и при  $t_1 = t_2$ .

Теорема доказана полностью.

**5. Линейные операции над случайными функциями.** Выясним, как преобразуются математические ожидания и корреляционные функции случайных функций при осуществлении над ними линейных операций.

1. Сложение случайных функций. Возьмем две случайные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$ . Пусть известны моменты этих функций до второго порядка включительно:

$$M[X(t)], M[Y(t)], K_X(t_1, t_2), K_Y(t_1, t_2), K_{XY}(t_1, t_2).$$

Найдем математическое ожидание случайной функции

$$Z(t) = X(t) + Y(t). \quad (46)$$

В силу линейности операции определения математического ожидания имеем

$$M[Z(t)] = M[X(t)] + M[Y(t)], \quad (47)$$

т. е. математическое ожидание суммы случайных функций равно сумме математических ожиданий этих случайных функций. Вычитая из равенства (46) равенство (47), получим центрированную случайную функцию

$$Z^\circ(t) = X^\circ(t) + Y^\circ(t). \quad (48)$$

Вычислим корреляционную функцию суммы случайных функций  $X(t) + Y(t)$ . По определению корреляционной функции имеем

$$\begin{aligned} K_Z(t_1, t_2) &= M[Z^\circ(t_1) \overline{Z^\circ(t_2)}] = M[(X^\circ(t_1) + Y^\circ(t_1)) \times \\ &\times (\overline{X^\circ(t_2)} + \overline{Y^\circ(t_2)})] = M[X^\circ(t_1) \overline{X^\circ(t_2)}] + M[X^\circ(t_1) \overline{Y^\circ(t_2)}] + \\ &+ M[Y^\circ(t_1) \overline{X^\circ(t_2)}] + M[Y^\circ(t_1) \overline{Y^\circ(t_2)}] = K_X(t_1, t_2) + \\ &+ K_{XY}(t_1, t_2) + K_{YX}(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (49)$$

Таким образом, корреляционная функция суммы двух случайных функций равна сумме всех корреляционных и взаимно-корреляционных функций этих случайных функций. По индукции можно показать, что для линейной комбинации  $Y(t)$  случайных функций  $X_k(t)$

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n a_k X_k(t), \quad (50)$$

где  $a_k$  — неслучайные числа, справедливы равенства

$$M[Y(t)] = \sum_{k=1}^n a_k M[X_k(t)], \quad (51)$$

$$Y^\circ(t) = \sum_{k=1}^n a_k X_k^\circ(t), \quad (52)$$

и

$$K_Y(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_k a_l K_{X_k X_l}(t_1, t_2). \quad (53)$$

В частном случае для некоррелированных случайных функций

$$X_k(t) \text{ и } X_l(t) \quad (k, l = 1, 2, \dots, n)$$

получим

$$K_Y(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^n a_k K_{X_k}(t_1, t_2). \quad (54)$$

2. Дифференцирование случайных функций. Случайная функция  $Y^\circ(t)$  называется *производной в среднем квадратическом* от случайной функции  $X^\circ(t)$  по аргументу  $t$ , если существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} M \left[ \left| \frac{X^\circ(t+h) - X^\circ(t)}{h} - Y^\circ(t) \right|^2 \right] = 0, \quad (55)$$

т. е.

$$Y^\circ(t) = \frac{dX^\circ(t)}{dt} = \text{l. i. m.}_{h \rightarrow 0} \frac{X^\circ(t+h) - X^\circ(t)}{h}. \quad (56)$$

Случайную функцию, для которой существует производная в среднем квадратическом, будем называть *дифференцируемой*.

Выясним, каким условиям должна удовлетворять корреляционная функция случайной функции  $X^\circ(t)$  для того, чтобы существовала ее производная (56).

*Теорема 2.* Для того чтобы случайная функция  $X^\circ(t)$  была дифференцируемой в среднем квадратическом, необходимо и достаточно, чтобы при  $t_1 = t_2$  существовала вторая смешанная производная корреляционной функции

$$\left. \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1 = t_2}, \quad (57)$$

причем, если эта производная существует при  $t_1 = t_2$ , то она существует при всех  $t_1$  и  $t_2$ . В случае если выполнено условие дифференцируемости, корреляционная функция производной  $\frac{dX^\circ(t)}{dt} = Y^\circ(t)$  равна

$$K_Y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}, \quad (58)$$

а взаимная корреляционная функция процесса  $X^\circ(t)$  и его производной  $\frac{dX^\circ(t)}{dt} = Y^\circ(t)$  равна

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_2}. \quad (59)$$

*Доказательство.* Для того чтобы существовал предел

$$\text{l. i. m.}_{h \rightarrow 0} \frac{X^\circ(t+h) - X^\circ(t)}{h} = \frac{dX^\circ(t)}{dt} = Y^\circ(t),$$

в силу леммы 2 необходимо и достаточно, чтобы при независимом стремлении  $h \rightarrow 0$  и  $h' \rightarrow 0$  существовал предел

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} M \left[ \left( \frac{X^\circ(t+h) - X^\circ(t)}{h} \right) \left( \frac{X^\circ(t+h') - X^\circ(t)}{h'} \right) \right] &= \\ = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \frac{M[X^\circ(t+h)X^\circ(t+h')] - M[X^\circ(t+h)X^\circ(t)] - \\ - M[X^\circ(t)X^\circ(t+h')] + M[(X^\circ(t))^2]}{hh'} &= \\ = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \frac{K(t+h, t+h') - K(t+h, t) - K(t, t+h') + K(t, t)}{hh'} &= \\ = \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=t} \end{aligned}$$

Необходимость и достаточность условия (57) доказана.

Пусть это условие выполнено. Найдем корреляционную функцию производной случайной функции  $X^\circ(t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= M \left[ \frac{dX^\circ(t_1)}{dt_1} \frac{dX^\circ(t_2)}{dt_2} \right] = \\ = M \left[ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \left( \frac{X^\circ(t_1+h) - X^\circ(t_1)}{h} \right) \left( \frac{X^\circ(t_2+h') - X^\circ(t_2)}{h'} \right) \right]. \end{aligned}$$

На основании леммы 1 можно изменить порядок операций предельного перехода и определения математического ожидания, в результате получим

$$\begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \frac{K_X(t_1+h, t_2+h') - K_X(t_1+h, t_2) - K_X(t_1, t_2+h') + K_X(t_1, t_2)}{hh'} = \\ = \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}, \end{aligned}$$

причем эта производная существует при всех  $t_1$  и  $t_2$ . Аналогично имеем:

$$\begin{aligned} K_{XY}(t_1, t_2) &= M \left[ X^\circ(t_1) \frac{\partial X^\circ(t_2)}{\partial t_2} \right] = \\ = M \left[ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \left( X^\circ(t_1) \frac{X^\circ(t_2+h') - X^\circ(t_2)}{h'} \right) \right] &= \\ = \lim_{h' \rightarrow 0} M \left[ \frac{X^\circ(t_1) X^\circ(t_2+h') - X^\circ(t_1) X^\circ(t_2)}{h'} \right] &= \\ = \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{K_X(t_1, t_2+h') - K_X(t_1, t_2)}{h'} = \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пусть производная случайной функции в среднем квадратическом существует:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \text{l. i. m.}_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h}. \quad (60)$$

К выражению (60) применим операцию определения математического ожидания. Используя равенство (40), получим

$$\begin{aligned} M \left[ \frac{dX(t)}{dt} \right] &= M \left[ \text{l. i. m.}_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} M \left[ \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \right] = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M[X(t+h)] - M[X(t)]}{h} &= \frac{d}{dt} M[X(t)] = \frac{dm_X(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (61)$$

где  $m_X(t) = M[X(t)]$ .

Таким образом, если выполнены условия теоремы 2, то математическое ожидание производной случайной функции равно производной от математического ожидания этой функции. Вычитая почленно равенство (61) из равенства (60), получим

$$\frac{dX^\circ(t)}{dt} = \text{l. i. m.}_{h \rightarrow 0} \frac{X^\circ(t+h) - X^\circ(t)}{h}. \quad (62)$$

Корреляционная функция производной случайной функции и взаимная корреляционная функция между случайной функцией и ее производной вычисляются по формулам (58) и (59). Из этих равенств по индукции можно показать справедливость соотношения

$$K_{X^{(n)} X^{(m)}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{n+m} K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^m}, \quad (63)$$

где  $X^{(n)}(t)$  и  $X^{(m)}(t)$  — соответственно  $n$ -я и  $m$ -я производные в среднем квадратическом случайной функции  $X(t)$ . Согласно теореме 2, существование производных является условием дифференцируемости случайной функции  $X(t)$ .

3. Интегрирование случайной функции. Пусть заданы случайная функция  $X(\tau)$  и неслучайная функция  $g(t, \tau)$ , где параметр  $\tau$  изменяется в интервале  $(a, b)$ . Разобьем интервал  $(a, b)$  точками  $\tau_0 = a, \tau_1, \dots, \tau_n = b$  на  $n$  частей и составим сумму

$$\sum_{i=1}^n X^\circ(\tilde{\tau}_i) g(t, \tilde{\tau}_i) (\tau_i - \tau_{i-1}); \quad (64)$$

значение  $\tilde{\tau}_i$  выбрано произвольно в промежутке  $\tau_{i-1} \leq \tilde{\tau}_i \leq \tau_i$ . Предел в среднем квадратическом суммы (64) при  $n \rightarrow \infty$  и  $\max |\tau_i - \tau_{i-1}| \rightarrow 0$  равен

$$\text{l. i. m.}_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \max \Delta \tau_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n X^\circ(\tilde{\tau}_i) g(t, \tilde{\tau}_i) (\tau_i - \tau_{i-1}).$$

Если этот предел существует, то он называется *интегралом от случайной функции  $X^\circ(t)$  в среднем квадратическом с весом  $g(t, \tau)$*  и обозначается

$$Y = \int_a^b X^\circ(\tau) g(t, \tau) d\tau = \text{l. i. m.}_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \max \Delta \tau_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n X^\circ(\tilde{\tau}_i) g(t, \tilde{\tau}_i) \Delta \tau_i. \quad (65)$$

**Теорема 3.** Для того чтобы случайная функция  $X(t, \tau)$  была интегрируемой в среднем квадратическом, необходимо и достаточно, чтобы существовал интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K(\tau, \nu) g(t, \tau) g(t, \nu) d\tau d\nu. \quad (66)$$

**Доказательство.** Рассмотрим случайные величины  $Y_N^\circ$  и  $Y_M^\circ$  вида

$$Y_N^\circ = \sum_{k=1}^N X^\circ(\tilde{\tau}_k) g(t, \tilde{\tau}_k) (\tau_k - \tau_{k-1})$$

и

$$Y_M^\circ = \sum_{l=1}^M X^\circ(\tilde{\nu}_l) g(t, \tilde{\nu}_l) (\nu_l - \nu_{l-1}).$$

Согласно лемме 2, для того чтобы случайная последовательность  $Y_N$  имела предел при  $N \rightarrow \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} M[Y_N^\circ Y_M^\circ] = a < \infty.$$

Найдем этот предел:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} M \left[ \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M X^\circ(\tilde{\tau}_k) X^\circ(\tilde{\nu}_l) g(t, \tilde{\tau}_k) g(t, \tilde{\nu}_l) (\tau_k - \tau_{k-1}) (\nu_l - \nu_{l-1}) \right] = \\ & = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M M[X^\circ(\tilde{\tau}_k) X^\circ(\tilde{\nu}_l)] g(t, \tilde{\tau}_k) g(t, \tilde{\nu}_l) (\tau_k - \tau_{k-1}) (\nu_l - \nu_{l-1}) = \\ & = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M K(\tilde{\tau}_k, \tilde{\nu}_l) g(t, \tilde{\tau}_k) g(t, \tilde{\nu}_l) (\tau_k - \tau_{k-1}) (\nu_l - \nu_{l-1}) = \\ & = \int_a^b \int_a^b K(\tau, \nu) g(t, \tau) g(t, \nu) d\tau d\nu. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Если в интеграле (65) верхний предел переменный, то в результате интегрирования получается не случайная величина, а случайная функция

$$Y^\circ(t) = \int_{t_0}^t X^\circ(\tau) g(t, \tau) d\tau. \quad (67)$$

Очевидно, что все выводы предыдущей теоремы справедливы и для случайной функции  $Y^\circ(t)$ , т. е. для того, чтобы существовал интеграл, необходимо и достаточно существование выражения

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t K(\tau, \nu) g(t_1, \tau) g(t_2, \nu) d\tau d\nu. \quad (68)$$

Найдем корреляционную функцию случайной функции  $Y^\circ(t)$ . По определению корреляционной функции имеем

$$\begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= M[Y^\circ(t_1) Y^\circ(t_2)] = M \left[ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} X^\circ(\tau) X^\circ(\nu) g(t_1, \tau) g(t_2, \nu) d\tau d\nu \right] = \\ &= M \left[ \text{l. i. m.} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M X^\circ(\tilde{\tau}_k) X^\circ(\tilde{\nu}_l) g(t_1, \tilde{\tau}_k) g(t_2, \tilde{\nu}_l) \Delta\tau_k \Delta\nu_l \right]. \quad (69) \end{aligned}$$

На основании леммы 1 изменим порядок операций предельного перехода и определения математического ожидания. Пользуясь линейностью операции определения математического ожидания, получим

$$\begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M M[X^\circ(\tilde{\tau}_k) X^\circ(\tilde{\nu}_l)] g(t_1, \tilde{\tau}_k) g(t_2, \tilde{\nu}_l) \Delta\tau_k \Delta\nu_l = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} K_X(\tau, \nu) g(t_1, \tau) g(t_2, \nu) d\tau d\nu. \quad (70) \end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно показать, что взаимная корреляционная функция двух случайных функций

$$Z^\circ(t) = \int_{t_0}^{t_1} X^\circ(\tau) g(t_1, \tau) d\tau \quad (71)$$

и

$$W^\circ(t) = \int_{t_0}^{t_2} Y^\circ(\nu) f(t_2, \nu) d\nu \quad (72)$$

равна

$$K_{WZ}(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} K_{XY}(\tau, \nu) g(t_1, \tau) f(t_2, \nu) d\tau d\nu. \quad (73)$$

Рассмотрим теперь случайную функцию  $Y(t)$ , равную интегралу от случайной функции  $X(t)$ :

$$Y(t) = \int_{t_0}^t X(\tau) g(t, \tau) d\tau. \quad (74)$$

Найдем математическое ожидание случайной функции  $Y(t)$ . Согласно определению интеграла от случайной функции и равенству (40), получим

$$\begin{aligned} M[Y(t)] &= M \left[ \int_{t_0}^t X(\tau) g(t, \tau) d\tau \right] = M \left[ \text{l. i. m.} \sum_{k=1}^n X(\tilde{\tau}_k) g(t, \tilde{\tau}_k) \Delta\tau_k \right] = \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta\tau_k \rightarrow 0}} M \left[ \sum_{k=1}^n X(\tilde{\tau}_k) g(t, \tilde{\tau}_k) \Delta\tau_k \right] = \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta\tau_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n M[X(\tilde{\tau}_k)] g(t, \tilde{\tau}_k) \Delta\tau_k. \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$M[Y(t)] = \int_{t_0}^t m_X(\tau) g(t, \tau) d\tau, \quad (75)$$

где

$$m_X(t) = M[X(t)].$$

Из неравенства (75) следует, что если существует интеграл (68), то математическое ожидание интеграла от случайной функции  $X(t)$  равно интегралу от математического ожидания этой случайной функции. Вычитая почленно из равенства (74) равенство (75), получим

$$Y^0(t) = \int_{t_0}^t X^0(\tau) g(t, \tau) d\tau. \quad (76)$$

Используя равенство (70), запишем выражение для корреляционной функции интеграла от случайной функции

$$K_Y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} K_X(\tau, \nu) g(t_1, \tau) g(t_2, \nu) d\tau d\nu. \quad (77)$$

Согласно теореме 3, существование интеграла (77) является необходимым и достаточным условием интегрируемости случайной функции  $X(t)$ . Дисперсия случайной функции  $X(t)$  равна

$$D_Y(t) = K_Y(t, t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t K_X(\tau, \nu) g(t, \tau) g(t, \nu) d\tau d\nu. \quad (78)$$

**Пример 1.** Корреляционная функция случайной функции  $X(t)$  равна

$$K_X(t_1, t_2) = D e^{-\alpha(t_1 - t_2)^2}.$$

Выяснить, дифференцируема ли случайная функция  $X(t)$ , и найти корреляционную функцию ее производной.

Вычислим частную производную  $\frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$  корреляционной функции  $K_X(t_1, t_2)$ . Для этого сначала вычислим производную по переменной  $t_2$ :

$$\frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2} (D e^{-\alpha(t_1 - t_2)^2}) = 2\alpha D (t_1 - t_2) e^{-\alpha(t_1 - t_2)^2}.$$

Дифференцируя второй раз по переменной  $t_1$ , получим

$$\frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1} [2\alpha D (t_1 - t_2) e^{-\alpha(t_1 - t_2)^2}] = 2\alpha D [1 + 2\alpha(t_1 - t_2)^2] e^{-\alpha(t_1 - t_2)^2}.$$

Так как вторая смешанная производная существует, то случайная функция  $X(t)$  дифференцируема и, согласно равенству (58), корреляционная функция ее производной равна

$$2\alpha D [1 + 2\alpha(t_1 - t_2)^2] e^{-\alpha(t_1 - t_2)^2},$$

а согласно равенству (59) взаимная корреляционная функция имеет вид

$$K_{XY}(t_1, t_2) = 2\alpha D (t_1 - t_2) e^{-\alpha(t_1 - t_2)^2}.$$

**Пример 2.** Корреляционная функция случайной функции  $X(t)$  равна  $K_X(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2)$  (рис. 211). Найти корреляционную функцию случайной функции  $Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$ .

Вычислим интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} K_X(\tau, \nu) d\tau d\nu = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \min(\tau, \nu) d\tau d\nu.$$

Рассмотрим два случая (рис. 212):

а) Пусть  $t_1 > t_2$ , тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \min(\tau, \nu) d\tau d\nu &= \int_0^{t_2} \int_0^{\nu} \tau d\tau d\nu + \\ &+ \int_0^{t_2} \int_{t_2}^{t_1} \nu d\nu d\tau + \int_{t_2}^{t_1} \int_0^{t_2} \nu d\nu d\tau = \frac{t_2^3}{3} + \frac{t_1 t_2^2}{2} - \\ &- \frac{t_2^3}{2} = \frac{3t_1 t_2^2 - t_2^3}{6}. \end{aligned}$$

б) Пусть теперь  $t_2 > t_1$ , в этом случае

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \min(\tau, \nu) d\tau d\nu &= \int_0^{t_1} \int_0^{\nu} \tau d\tau d\nu + \int_0^{t_1} \int_{t_1}^{t_2} \nu d\nu d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{t_1} \tau d\tau d\nu = \frac{t_1^3}{3} + \frac{t_1^2 t_2}{2} - \\ &- \frac{t_1^3}{2} = \frac{3t_1^2 t_2 - t_1^3}{6}. \end{aligned}$$

Интеграл  $\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \min(\tau, \nu) d\tau d\nu$  существует, поэтому в соответствии с теоремой 3 случайная функция  $X(t)$  интегрируема и корреляционная функция ин-

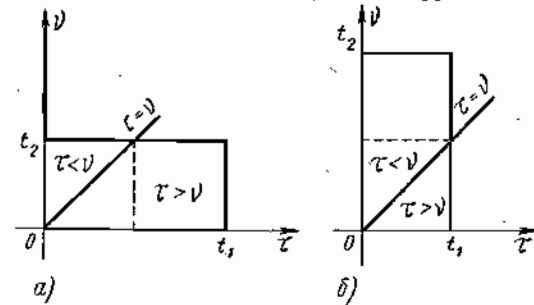


Рис. 212

теграла от этой случайной функции, согласно равенству (64), равна

$$K_Y(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{3t_1^2 t_2 - t_1^3}{6} & \text{при } t_1 < t_2, \\ \frac{3t_1 t_2^2 - t_2^3}{6} & \text{при } t_1 > t_2, \end{cases}$$

а дисперсия

$$D_Y(t) = K_Y(t, t) = \frac{t^3}{3}.$$

\*) Случайная функция с такой корреляционной функцией и нулевым математическим ожиданием, распределенная по нормальному закону, называется процессом Винера.

## § 66. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

**1. Определение стационарных случайных функций.** Существуют случайные функции, не изменяющие свои характеристики с течением времени. Такие случайные функции называют *стационарными*. Случайная функция, для которой все  $n$ -мерные функции распределения вероятностей не изменяются с изменением начала отсчета времени, называется *стационарной в узком смысле*.

Таким образом, для функций распределения вероятностей стационарных случайных функций должно выполняться равенство

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h), \quad (1)$$

или для плотностей распределения вероятностей должно быть справедливо равенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h). \quad (2)$$

В корреляционной теории рассматриваются моменты случайных функций только до второго порядка, поэтому естественно ввести еще одно понятие стационарной случайной функции.

Случайная функция с постоянным математическим ожиданием и корреляционной функцией, зависящей только от разности аргументов, называется *стационарной в широком смысле (смысле Хинчина)*.

Для стационарной случайной функции выполнены условия

$$m(t) = M[X(t)] = \text{const}, \quad (3)$$

$$K(t_1, t_2) = K(t_1 - t_2). \quad (4)$$

Для нормально распределенной случайной функции все  $n$ -мерные функции распределения вероятностей полностью определяются вектором математического ожидания

$$m(t) = \begin{bmatrix} m(t_1) \\ m(t_2) \\ \vdots \\ m(t_n) \end{bmatrix}$$

и корреляционной матрицей

$$[K(t_i, t_j)] = \begin{bmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{bmatrix}.$$

В этом случае  $n$ -мерная плотность распределения вероятностей  $n$ -мерного вектора, соответствующего  $n$  сечениям случайной функции  $X(t)$ , равна

$$f(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det K^{1/2})} e^{-\frac{1}{2}(x-m), K^{-1}(x-m)}.$$

Из выражения для функции плотности распределения вероятностей следует, что если случайная функция нормально распределена и стационарна в широком смысле, т. е. ее математическое ожидание и корреляционная матрица равны соответственно

$$m = \begin{bmatrix} m \\ m \\ \vdots \\ m \end{bmatrix} \text{ и } [K(t_i, t_j)] = \begin{bmatrix} K(t_1 - t_1) & \dots & K(t_1 - t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ K(t_n - t_1) & \dots & K(t_n - t_n) \end{bmatrix},$$

то она стационарна и в узком смысле, так как для такой случайной функции при изменении начала отсчета аргумента  $t$  вектор математического ожидания и корреляционная матрица, а следовательно, и все  $n$ -мерные функции плотности распределения вероятностей не изменятся. В дальнейшем под стационарными случайными функциями будем понимать случайные функции, стационарные в широком смысле.

**2. Свойства корреляционной функции стационарной случайной функции. Стационарно связанные случайные функции.** Корреляционная функция стационарной случайной функции зависит от одной переменной  $t_1 - t_2 = \tau$ . Если в равенствах (14)–(20) § 65, определяющих свойства корреляционной функции случайной функции, положить  $t_1 - t_2 = \tau$ , то получим следующие свойства для корреляционной функции стационарной случайной функции.

Свойства корреляционной функции стационарных случайных функций

*Свойство 1. Дисперсия равна значению корреляционной функции при  $\tau = 0$ , т. е.*

$$D[X(t)] = K_X(t - t) = K_X(0) = D = \text{const}. \quad (5)$$

*Свойство 2. Если изменить знак аргумента, то корреляционная функция изменится на комплексно-сопряженную, т. е.*

$$K(\tau) = \overline{K(-\tau)}. \quad (6)$$

В частном случае для действительных стационарных случайных функций имеем

$$K(\tau) = K(-\tau). \quad (7)$$

*Свойство 3. Модуль корреляционной функции при произвольных  $\tau$  не превышает ее значения при  $\tau = 0$ , т. е.*

$$|K(\tau)| \leq D = K(0). \quad (8)$$

Нормированная корреляционная функция стационарной случайной функции равна

$$R(t_1, t_2) = \frac{K(t_1 - t_2)}{D} = \frac{K(\tau)}{D} = \frac{K(\tau)}{K(0)}. \quad (9)$$

Две стационарных случайных функции  $X(t_1)$  и  $Y(t_2)$  называются *стационарно связанными*, если их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов, т. е.

$$K_{XY}(t_1, t_2) = K_{XY}(t_1 - t_2) = K_{XY}(\tau) \quad (\tau = t_1 - t_2). \quad (10)$$

Очевидно, что для взаимной корреляционной функции стационарно связанных случайных функций справедливы равенства

$$K_{xy}(\tau) = \overline{K_{yx}(-\tau)}, \quad (11)$$

$$|K_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{D_X D_Y} = \sqrt{K_X(0) K_Y(0)}. \quad (12)$$

Из равенств (11) и (44) § 62, связывающих начальные и центральные моменты, получим, что для стационарных случайных функций начальные моменты второго порядка равны

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = K_X(t_1 - t_2) + |m_X|^2 = \Gamma_X(t_1 - t_2), \quad (13)$$

$$\Gamma_{XY}(t_1, t_2) = K_{XY}(t_1 - t_2) + m_X m_Y = \Gamma_{XY}(t_1 - t_2). \quad (14)$$

Таким образом, начальные моменты для стационарных и стационарно связанных случайных функций зависят только от разности аргументов.

Найдем выражение для корреляционной функции производной стационарной случайной функции  $X(t)$ . Полагая  $t_1 - t_2 = \tau$  и учитывая, что

$$\frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 K(t_1 - t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 K(\tau)}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} \frac{\partial \tau}{\partial t_2},$$

из равенства (58) § 66 получим, что корреляционная функция производной случайной функции  $\dot{X}(t)$  равна

$$K_{\dot{X}}(\tau) = -\frac{d^2 K_X(\tau)}{d\tau^2}, \quad (15)$$

где  $X(t)$  — стационарная случайная функция, а  $\dot{X}(t)$  — ее производная в среднем квадратическом.

**3. Примеры стационарных случайных функций.** Рассмотрим несколько примеров стационарных случайных функций.

1. Пусть случайная функция  $X(t)$  принимает значения  $+a$  и  $-a$ , причем моменты времени изменения знака распределены по закону Пуассона. Такой случайный процесс называют «телеграфным сигналом». На рис. 213 приведена одна из реализаций «телеграфного сигнала». Для распределения Пуассона вероятность того, что за отрезок времени  $t_1 - t_2$  произойдет  $k$  изменений знака телеграфного сигнала, согласно равенству (18) § 60, равна

$$P(|t_1 - t_2|, k) = \frac{(\lambda |t_1 - t_2|)^k}{k!} e^{-\lambda |t_1 - t_2|}, \quad (16)$$

где  $\lambda$  — среднее число изменений знака за единицу времени. Математическое ожидание телеграфного сигнала равно нулю, так как его значения  $+a$  и  $-a$  равновероятны.

Вычислим корреляционную функцию этой случайной функции. Произведение  $X(t_1) X(t_2)$  может принимать лишь два значения:  $+a^2$  при четном числе переключений между моментами  $t_1$  и  $t_2$  и  $-a^2$

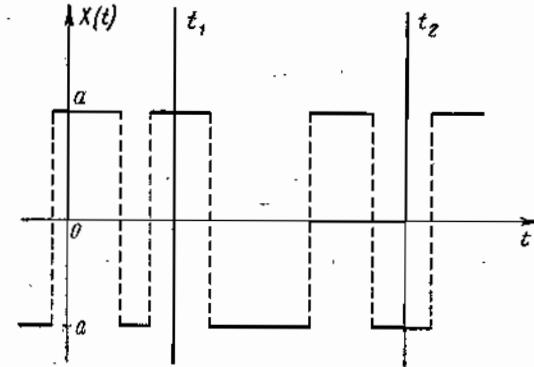


Рис. 213

при нечетном числе переключений. Получим выражение для математического ожидания «телеграфного сигнала»

$$M[X(t_1) X(t_2)] = a^2 p_{\text{ч}} + (-a)^2 p_{\text{н}}, \quad (17)$$

где  $p_{\text{ч}}$  — вероятность четного числа переключений;  $p_{\text{н}}$  — вероятность нечетного числа переключений на отрезке  $t_1 - t_2$ .

Из равенства (16) имеем

$$p_{\text{ч}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda |t_1 - t_2|)^{2m}}{(2m)!} e^{-\lambda |t_1 - t_2|}, \quad (18)$$

$$p_{\text{н}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda |t_1 - t_2|)^{2m+1}}{(2m+1)!} e^{-\lambda |t_1 - t_2|}. \quad (19)$$

Подставляя значения  $p_{\text{ч}}$  и  $p_{\text{н}}$  из равенств (18) и (19) в выражение (17), получим выражение для корреляционной функции «телеграфного сигнала»

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M[X(t_1) X(t_2)] = a^2 e^{-\lambda |t_1 - t_2|} \times \\ &\times \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda |t_1 - t_2|)^{2m}}{(2m)!} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda |t_1 - t_2|^{2m+1}}{(2m+1)!} \right] = a^2 e^{-\lambda |t_1 - t_2|} \times \\ &\times \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda |t_1 - t_2|)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda |t_1 - t_2|)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right] = \\ &= a^2 e^{-\lambda |t_1 - t_2|} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda |t_1 - t_2|)^m}{m!} = a^2 e^{-2\lambda |t_1 - t_2|}. \end{aligned}$$



Из полученного равенства следует, что корреляционная функция случайного «телеграфного сигнала»

$$K_X(t_1 - t_2) = a^2 e^{-2\lambda |t_1 - t_2|} = a^2 e^{-2\lambda |\tau|} \quad (20)$$

зависит только от разности аргументов  $t_1 - t_2 = \tau$ , т. е. эта случайная функция стационарна в широком смысле. Корреляционная функция «телеграфного сигнала» показана на рис. 214. Дисперсия «телеграфного сигнала» равна

$$D_X = K_X(0) = a^2.$$

2. Пусть случайная функция  $X(t)$  есть сумма двух гармоник, сдвинутых по фазе на  $90^\circ$ , со случайными амплитудами

$$X(t) = V_1 \sin \omega t + V_2 \cos \omega t, \quad (21)$$

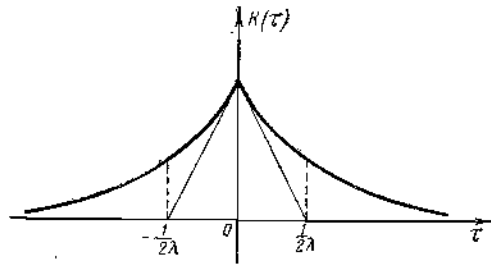


Рис. 214

здесь  $V_1$  и  $V_2$  — две некоррелированные случайные величины с одинаковыми дисперсиями и нулевыми математическими ожиданиями

$$D[V_1] = D[V_2] = d, \quad K_{V_1 V_2} = 0, \quad M[V_1] = M[V_2] = 0. \quad (22)$$

Найдем математическое ожидание случайной функции  $X(t)$ :

$$M[X(t)] = M[V_1 \sin \omega t + V_2 \cos \omega t] = 0. \quad (23)$$

Вычислим теперь корреляционную функцию случайной функции: учитывая, что  $K_{V_1 V_2} = 0$ , получим

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M[X(t_1) X(t_2)] = M[(V_1 \sin \omega t_1 + V_2 \cos \omega t_1) \times \\ &\times (V_1 \sin \omega t_2 + V_2 \cos \omega t_2)] = M[V_1 V_1] \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 + M[V_1 V_2] \times \\ &\times \sin \omega t_1 \cos \omega t_2 + M[V_2 V_1] \cos \omega t_1 \sin \omega t_2 + M[V_2 V_2] \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 = \\ &= d (\cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + \sin \omega t_1 \sin \omega t_2) = d \cos \omega (t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Из выражения (24) следует, что случайная функция, характеризуемая равенством (21), является стационарной в широком смысле.

3. Пусть теперь случайная функция  $X(t)$  имеет вид

$$X(t) = \sum_{k=1}^n [V_k \sin \omega_k t + W_k \cos \omega_k t], \quad (25)$$

где  $V_k$  и  $W_k$  — центрированные случайные некоррелированные величины, т. е.

$$M[V_k] = M[W_k] = 0, \quad M[V_k V_l] = M[V_k W_l] = M[W_k V_l] = \\ = M[W_k W_l] = 0 \quad (k \neq l),$$

$$M[V_k V_k] = M[W_k W_k] = d_k \quad (k, l = 1, 2, \dots, n).$$

Эта случайная функция  $X(t)$  представляет собой сумму гармонических колебаний со случайными амплитудами и фазовыми сдвигами.

Очевидно, что

$$M[X(t)] = M\left[\sum_{k=1}^n (V_k \sin \omega_k t + W_k \cos \omega_k t)\right] = 0. \quad (26)$$

Вычислим корреляционную функцию случайной функции  $X(t)$ :

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M\left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (V_k \sin \omega_k t_1 + W_k \cos \omega_k t_1) \times \right. \\ &\times (V_l \sin \omega_l t_2 + W_l \cos \omega_l t_2)] = \sum_{k=1}^n d_k (\sin \omega_k t_1 \sin \omega_k t_2 + \\ &+ \cos \omega_k t_1 \cos \omega_k t_2) = \sum_{k=1}^n d_k \cos \omega_k (t_1 - t_2), \end{aligned} \quad (27)$$

т. е. случайная функция  $X(t)$  является стационарной в широком смысле.

4. Рассмотрим сумму неслучайных функций  $e^{j\omega_k t}$  со случайными некоррелированными коэффициентами  $V_k$ :

$$X(t) = \sum_{k=-n}^n V_k e^{j\omega_k t}, \quad (28)$$

где положим, что  $\omega_{-k} = -\omega_k$ ,  $M[V_k] = 0$ ,  $d_k = d_{-k}$ ,

$$M[V_k \bar{V}_l] = \begin{cases} d_k & \text{при } k=l, \\ 0 & \text{при } k \neq l (k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases} \quad (29)$$

Выражения для математического ожидания и корреляционной функции случайной функции  $X(t)$  соответственно равны:

$$M[X(t)] = M\left[\sum_{k=-n}^n V_k e^{j\omega_k t}\right] = 0, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M[X(t_1) \bar{X}(t_2)] = M\left[\sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n V_k \bar{V}_l e^{j\omega_k t_1} e^{-j\omega_l t_2}\right] = \\ &= \sum_{k=-n}^n d_k e^{j\omega_k (t_1 - t_2)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Равенства (30) и (31) показывают, что случайная функция  $X(t)$  стационарна в широком смысле.

Коэффициенты  $d_k$  случайной функции  $X(t)$ , определяемой равенством (28), есть средние значения квадратов случайных амплитуд гармоник, из которых составлен этот процесс. Если случайный процесс  $X(t)$  описывает флуктуации напряжения или тока, то числа  $d_k$  пропорциональны мощности, приходящейся в среднем на гармоническое колебание с частотой  $\omega_k$  и со случайной амплитудой  $V_k$ . Это следует из того, что мощность электрического тока пропорциональна квадрату напряжения или силы тока. Поэтому

даже в случаях, когда  $X(t)$  не есть напряжение или ток, совокупность чисел  $d_k$  называют обычно *спектром мощности случайной функции*  $X(t)$ .

Дисперсию случайной функции  $X(t)$  можно вычислить, полагая в равенстве (31)  $t_1 = t_2 = t$ :

$$D_X(t) = K_X(t, t) = \sum_{k=-n}^n d_k. \quad (32)$$

#### 4. Спектральное представление стационарных случайных функций.

В примерах 2, 3, 4 предыдущего параграфа рассматривались стационарные случайные функции, представляющие собой гармонические колебания со случайными некоррелированными амплитудами. Естественно предположить, что всякую стационарную случайную функцию  $X(t)$  с той или иной степенью точности можно представить в виде суммы

$$X(t) \approx \sum_{k=-n}^n V_k e^{j\omega_k t} + m_X, \quad (33)$$

где  $\omega_{-k} = -\omega_k$ ,  $m_X = \text{const}$ ,

$$M[V_k] = 0, \quad M[V_k \bar{V}_l] = \begin{cases} d_k & \text{при } k=l, \\ 0 & \text{при } k \neq l \quad (d_{-k} = d_k), \end{cases} \quad (34)$$

причем с увеличением числа  $n$  приближение будет более точным. Для случайной функции  $X(t)$  вида (33) имеем

$$X^\circ(t) \approx \sum_{k=-n}^n V_k e^{j\omega_k t}. \quad (35)$$

Представление случайных функций в виде суммы (33) неслучайных функций со случайными коэффициентами широко применяется в теории стационарных случайных функций. Это представление справедливо для тех стационарных случайных функций, для которых можно так выбрать сумму  $\sum_{k=-n}^n V_k e^{j\omega_k t}$ , что математическое ожидание квадрата разности

$$M \left[ \left| X^\circ(t) - \sum_{k=-n}^n V_k e^{j\omega_k t} \right|^2 \right] \quad (36)$$

будет сколь угодно малым на любом заранее выбранном интервале времени при достаточно большом  $n$ . В этом случае справедливо равенство (в смысле сходимости ряда в среднем квадратическом)

$$X^\circ(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k e^{j\omega_k t}, \quad (37)$$

причем нецентрированная случайная функция  $X(t)$  равна

$$X(t) = X^\circ(t) + m_X = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k e^{j\omega_k t} + m_X. \quad (38)$$

Вычислим корреляционную функцию случайной функции вида (38). Согласно равенству (34) получим

$$K_X(t_1 - t_2) = M \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} V_k \bar{V}_l e^{j\omega_k t_1} e^{-j\omega_l t_2} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{j\omega_k (t_1 - t_2)}. \quad (39)$$

В равенстве (37) перейдем от суммы бесконечного счетного числа гармоник к сумме несчетного числа гармоник с бесконечно малыми случайными некоррелированными амплитудами. Для этого составим интегральную сумму и перейдем к пределу в среднем квадратическом:

$$X(t) = \text{l. i. m.}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta \omega_k \rightarrow 0}} \sum_{k=-n}^n e^{j\omega_k t} V_k \Delta \omega_k + m_X = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{j\omega t} d\omega + m_X, \quad (40)$$

здесь  $V(\omega) d\omega$  — случайная бесконечно малая амплитуда гармоники с частотой  $\omega$ , а интеграл понимается в среднем квадратическом смысле.

Можно показать<sup>\*</sup>, что условия некоррелированности, которые для конечной суммы имели вид (34), в данном случае можно записать в виде

$$M[V(\omega)] = 0, \quad M[V(\omega) \bar{V}(\lambda)] = \frac{S(\omega)}{2\pi} \delta(\omega - \lambda). \quad (41)$$

Таким образом, случайная функция  $V(\omega)$  параметра  $\omega$  является белым шумом с интенсивностью  $\frac{S(\omega)}{2\pi}$  (см. равенства (25) и (26) § 65), а значит случайные величины  $V(\omega)$  и  $V(\lambda)$  некоррелированы при любых фиксированных  $\omega \neq \lambda$ . Функцию  $S(\omega)$  по аналогии с коэффициентом  $d_k$  в равенствах (28), (29), (30), (31) называют спектральной плотностью мощности случайной функции  $X(t)$ , или просто спектральной плотностью. Представление случайной стационарной функции  $X(t)$  в виде интеграла (40) называется *спектральным представлением* этой функции.

Вычислим корреляционную функцию случайной функции  $X(t)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M[X^\circ(t_1) \bar{X}^\circ(t_2)] = M \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) \bar{V}(\lambda) e^{j\omega t_1} \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{-j\lambda t_2} d\omega d\lambda \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M[V(\omega) \bar{V}(\lambda)] e^{j\omega t_1} e^{-j\lambda t_2} d\omega d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j(\omega t_1 - \lambda t_2)} \delta(\omega - \lambda) d\omega d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega(t_1 - t_2)} d\omega = K_X(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (42)$$

<sup>\*</sup> Строгое обоснование возможности представления всякой стационарной случайной функции  $X(t)$  в виде (40) см., например, в работе: Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. Физматгиз, 1963, стр. 42.

Полагая в равенстве (42)  $t_1 - t_2 = \tau$ , получим

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (43)$$

т. е. корреляционная функция является обратным преобразованием Фурье от спектральной плотности  $S(\omega)$ . Следовательно, спектральная плотность есть преобразование Фурье от корреляционной функции, т. е.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (44)$$

### Свойства спектральной плотности

**Свойство 1.** Спектральная плотность стационарной случайной функции с действительной корреляционной функцией является четной действительной функцией аргумента  $\omega$ , т. е.

$$S(\omega) = S(-\omega), \quad (45)$$

$$\text{Im } S(\omega) = 0. \quad (46)$$

Действительно, из равенства (12) имеем

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) (\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \sin \omega\tau d\tau. \end{aligned}$$

Из четности корреляционной функции следует, что подынтегральная функция в первом слагаемом четная, а во втором — нечетная функция аргумента  $\tau$ , поэтому  $\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \sin \omega\tau d\tau = 0$  как интеграл от нечетной функции при симметричных пределах интегрирования. В результате можно записать, что

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (47)$$

В силу четности функции  $\cos \omega\tau$  имеем  $S(\omega) = S(-\omega)$ . Кроме того, спектральная плотность  $S(\omega)$  выражается в равенстве (47) как интеграл от действительной функции, т. е. является действительной функцией.

**Свойство 2.** Дисперсия действительной стационарной случайной функции равна интегралу от спектральной плотности этой функции в бесконечных пределах, деленному на  $2\pi$ , т. е.

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (48)$$

В самом деле, из равенств (5) § 66 и (43) следует, что

$$D_X = K_X(0) = \left. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega.$$

В силу четности спектральной плотности также имеем

$$D_X = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_X(\omega) d\omega.$$

В случае когда случайная функция  $X(t)$  есть флуктуации электрического тока или напряжения, то дисперсия случайного процесса  $X(t)$  как среднее значение квадрата тока или напряжения пропорциональна средней мощности этого процесса, поэтому из равенства (48) получим, что спектральная плотность  $S(\omega)$  в этом случае характеризует плотность мощности, приходящуюся на единицу частоты  $\omega$ . Если случайная функция  $X(t)$  описывает изменение напряжения, измеряемого в вольтах, а  $\omega$  есть круговая частота, измеряемая в  $\frac{1}{\text{сек}}$ , то размерность спектральной плотности, как следует из равенства (48), есть  $\text{в}^2/\text{сек}$ .

**Свойство 3.** Спектральная плотность стационарной случайной функции есть функция неотрицательная, т. е.

$$S(\omega) \geq 0. \quad (49)$$

Действительно, из равенства (43) имеем

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Напишем очевидное равенство

$$S(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dv \quad (T > 0).$$

Производя замену переменных  $\tau = t_1 - t_2$ ,  $v = t_2$ , получим

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{\infty} K(t_1 - t_2) e^{-j\omega t_1} e^{j\omega t_2} dt_1 dt_2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} M[X^\circ(t_1) \overline{X^\circ(t_2)}] e^{-j\omega t_1} e^{j\omega t_2} dt_1 dt_2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} M \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X^\circ(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \overline{\int_{-T/2}^{T/2} X^\circ(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2} \right] = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M \left[ \left| \int_{-T/2}^{T/2} X^\circ(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \right|^2 \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Свойство доказано.

Из равенства (50) следует, что спектральная плотность  $S(\omega)$  стационарной случайной функции  $X(t)$  есть среднее значение математического ожидания квадрата модуля преобразования Фурье центрированной случайной функции  $X^0(t)$ .

**Пример 1.** Вычислить спектральную плотность белого шума с постоянной интенсивностью, равной  $c^2$ .

Согласно выражению (26) § 65 корреляционная функция рассматриваемого белого шума есть

$$K(\tau) = c^2 \delta(\tau).$$

Из равенства (44) следует, что спектральная плотность белого шума равна

$$S(\omega) = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = c^2.$$

Таким образом, белый шум с интенсивностью, равной  $c^2$ , можно определить как случайную функцию с постоянной на всех частотах спектральной плотностью  $S(\omega)$ . Средняя энергия белого шума, которую можно вычислить по формуле (48), равна бесконечности, поэтому белый шум есть идеализированная случайная функция, реализовать которую невозможно.

**Пример 2.** Вычислить спектральную плотность «телеграфного сигнала» с корреляционной функцией  $K(\tau) = a^2 e^{-2\lambda|\tau|}$ .

Вычислим спектральную плотность как преобразование Фурье от корреляционной функции. Имеем по формуле (44)

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 e^{-2\lambda|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{4a^2}{\omega^2 + 4\lambda^2}.$$

По аналогии со спектральной плотностью случайной стационарной функции вводится понятие взаимной спектральной плотности двух стационарно связанных случайных функций.

Взаимной спектральной плотностью  $S_{XY}(\omega)$  двух стационарно связанных случайных функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  называется преобразование Фурье их взаимной корреляционной функции, т. е.

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (51)$$

$$K_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (52)$$

Покажем, что справедливо равенство

$$S_{XY}(\omega) = \overline{S_{YX}(\omega)}. \quad (53)$$

Действительно, из выражения (51), учитывая, что  $K_{XY}(\tau) = \overline{K_{YX}(-\tau)}$ , получим

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K_{YX}(-\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K_{YX}(\nu)} e^{j\omega\nu} d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K_{YX}(\nu)} e^{-j\omega\nu} d\nu = \overline{S_{YX}(\omega)}. \end{aligned}$$

**1. Оценка математического ожидания.** В корреляционной теории случайная функция характеризуется моментами первого и второго порядков: математическим ожиданием и корреляционной функцией. Математическое ожидание является средним значением по множеству реализаций случайной функции и определяется по формуле

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t) dx = m_X(t). \quad (1)$$

Чтобы оценить математическое ожидание какой-либо случайной функции, необходимо выполнить большое число экспериментов, записать в каждом из них реализации случайной функции, а затем определить в каждом сечении  $t$  среднее значение случайной функции. Если рассматривать это среднее значение как функцию  $t$ , то при числе реализаций  $n \rightarrow \infty$  оно будет по вероятности сходиться к математическому ожиданию  $M[X(t)] = m_X(t)$  случайной функции  $X(t)$ . Действительно, пусть случайная функция  $Y(t)$  определяется равенством

$$Y(t) = \frac{X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_n(t)}{n}, \quad (2)$$

где независимые функции  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  имеют одинаковые математические ожидания  $m(t)$  и дисперсии  $d(t)$ . При этом условии, учитывая равенства (51) и (54) § 65, получим:

$$M[Y(t)] = \frac{M[X_1(t)] + M[X_2(t)] + \dots + M[X_n(t)]}{n} = \frac{nm(t)}{n} = m(t), \quad (3)$$

$$D[Y(t)] = \frac{D[X_1(t)] + D[X_2(t)] + \dots + D[X_n(t)]}{n^2} = \frac{nd(t)}{n^2} = \frac{d(t)}{n}. \quad (4)$$

На основании формулы Чебышева имеем

$$P(|Y(t) - m(t)| > \epsilon) < \frac{D[Y(t)]}{\epsilon^2} = \frac{d(t)}{n\epsilon^2},$$

поэтому при увеличении числа  $n$  случайная функция  $Y(t)$  стремится по вероятности к математическому ожиданию  $m(t)$ , т. е.

$$Y(t) \xrightarrow{P} m(t) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Обозначим  $Y(t)$  случайную функцию, равную экспериментально определенному по множеству реализаций среднему значению  $\tilde{m}_n(t)$ , т. е.  $Y(t) = \tilde{m}_n(t)$ , тогда, согласно выражению (5), имеем  $\tilde{m}_n(t) \xrightarrow{P} m(t)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Желательно определить статистические характеристики случайного процесса в результате не многих, а одного опыта. В большом числе практических случаев это оказывается возможным.

Найдем среднее значение по времени  $m^*$  одной из реализаций случайной функции  $X(t)$  на отрезке  $[0, t]$  оси  $Ot$ :

$$m^* = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt. \quad (6)$$

Величину  $m^*$  называют оценкой математического ожидания  $m$  стационарной случайной функции  $X(t)$ .

Оценка математического ожидания, которая является случайной величиной, должна быть достаточно близкой к самому математическому ожиданию. Желательно, чтобы математическое ожидание оценки совпадало с оцениваемой величиной, а разброс ее значений от среднего был бы мал, т. е. оценка  $m^*$  должна иметь малую дисперсию. Если математическое ожидание оценки совпадает со значением оцениваемой величины, то такую оценку называют *несмещенной*. Если дисперсия оценки стремится к нулю, то оценку называют *состоятельной*.

Вычислим математическое ожидание и дисперсию оценки математического ожидания (6):

$$M[m^*] = M\left[\frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt\right] = \frac{1}{T} \int_0^T M[X(t)] dt = M[X(t)] = m. \quad (7)$$

Таким образом, оценка  $m^*$  является несмещенной оценкой математического ожидания  $m$  стационарного случайного процесса  $X(t)$ .

Найдем дисперсию оценки  $m^*$ . Принимая во внимание формулу (7), получим:

$$D[m^*] = M[(m^* - m)^2] = M\left[\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T (X(t_1) - m)(X(t_2) - m) dt_1 dt_2\right] = \\ = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T M[X^\circ(t_1) X^\circ(t_2)] dt_1 dt_2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K(t_1 - t_2) dt_1 dt_2. \quad (8)$$

Введем новые переменные  $\tau = t_1 - t_2$ ,  $\nu = t_2$ , при этом якобиан преобразования равен

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial \tau} & \frac{\partial t_2}{\partial \tau} \\ \frac{\partial t_1}{\partial \nu} & \frac{\partial t_2}{\partial \nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Области интегрирования по переменным  $t_1$ ,  $t_2$  и  $\tau$ ,  $\nu$  показаны на рис. 215. Учитывая четность корреляционной функции, можно записать

$$D[m^*] = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \frac{2}{T^2} \int_0^T K(\tau) \int_0^{T-\tau} d\nu d\tau = \\ = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Если дисперсия оценки математического ожидания при  $T \rightarrow \infty$  стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K(\tau) d\tau = 0, \quad (10)$$

то согласно равенству (9) имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D[m^*] = 0,$$

т. е. оценка математического ожидания стационарной случайной функции  $X(t)$  вида (6) будет состоятельной.

Стационарные случайные функции, для которых при  $T \rightarrow \infty$  среднее по времени (6) совпадает со средним значением случайной функции по множеству (1), называются *эргодическими* по отношению к математическому ожиданию. Соотношение

(10) является необходимым и достаточным условием эргодичности случайной функции. Выполнение условия эргодичности (10) не всегда легко проверить.

Получим более простое достаточное (но не необходимое) условие эргодичности.

*Теорема 1.* Для того чтобы стационарная случайная функция была эргодической, достаточно, чтобы ее корреляционная функция стремилась к нулю при неограниченном возрастании  $\tau$ , т. е. должно выполняться равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0. \quad (11)$$

*Доказательство.* Из условия теоремы следует, что найдется такое значение  $\tau = T_0$ , что при  $\tau > T_0$  модуль корреляционной функции сколь угодно мал, т. е.  $K(\tau) < \epsilon$ , где  $\epsilon$  — произвольное положительное число. Оценим величину модуля интеграла

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K(\tau) d\tau \right|. \text{ Пусть } T > T_0, \text{ тогда можно записать, что} \\ \frac{1}{T} \left| \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^{T_0} \left|1 - \frac{\tau}{T}\right| |K(\tau)| d\tau + \\ + \frac{1}{T} \int_{T_0}^T \left|1 - \frac{\tau}{T}\right| |K(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{T} \int_0^{T_0} K(0) d\tau + \frac{\epsilon}{T} \int_{T_0}^T d\tau = \frac{K_0 T_0}{T} + \frac{\epsilon(T - T_0)}{T}. \quad (12)$$

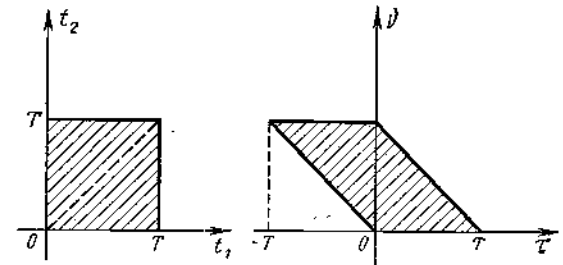


Рис. 215

В силу произвольности выбора числа  $\epsilon$  из равенств (12) и (10) следует, что если

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0,$$

то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D[m^*] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K(\tau) d\tau = 0,$$

т. е. случайная функция  $X(t)$  эргодична.

Теорема доказана.

**2. Оценка корреляционной функции.** Естественно предположить, что в ряде случаев и момент второго порядка — корреляционную функцию стационарной случайной функции можно определить не как среднее по множеству, а оценить эту функцию как среднее по времени произведения значений реализации случайной функции  $X(t)$  в сечениях  $t$  и  $t - \tau$ , т. е.

$$K^*(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T X^\circ(t) X^\circ(t - \tau) dt. \quad (13)$$

Здесь через  $K^*(\tau)$  обозначена оценка корреляционной функции  $K(\tau)$ . Оценка  $K^*(\tau)$  является несмещенной. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} M[K^*(\tau)] &= M \left[ \frac{1}{T} \int_0^T X^\circ(t) X^\circ(t - \tau) dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T M[X^\circ(t) X^\circ(t - \tau)] d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T K_X(\tau) d\tau = K_X(\tau). \end{aligned} \quad (14)$$

Для того чтобы проверить состоятельность оценки корреляционной функции вида (13), вычислим ее дисперсию. Учитывая равенство

$$D[X] = \alpha_2 - m_X^2,$$

получим:

$$D[K^*(\tau)] = M \left[ \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T X^\circ(t_1) X^\circ(t_1 - \tau) X^\circ(t_2) X^\circ(t_2 - \tau) dt_1 dt_2 \right] - K^2(\tau).$$

Изменяя порядок операций определения математического ожидания и интегрирования, будем иметь

$$D[K^*(\tau)] = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T M[X^\circ(t_1) X^\circ(t_1 - \tau) X^\circ(t_2) X^\circ(t_2 - \tau)] dt_1 dt_2 - K^2(\tau). \quad (15)$$

Для вычисления интеграла (15) необходимо знать момент четвертого порядка случайного процесса  $X(t)$ . В общем случае по известным моментам второго порядка невозможно вычислить момент чет-

вертого порядка. В дальнейшем будем предполагать, что случайная функция  $X(t)$  нормально распределена, тогда, используя соотношение (55) § 63, можно записать

$$\begin{aligned} M[X^\circ(t_1) X^\circ(t_1 - \tau) X^\circ(t_2) X^\circ(t_2 - \tau)] &= \\ &= K^2(\tau) + K^2(t_1 - t_2) + K_1(t_1 - t_2 + \tau) K(t_1 - t_2 - \tau). \end{aligned} \quad (16)$$

Из равенств (15) и (16) имеем

$$D[K^*(\tau)] = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [K^2(t_1 - t_2) + K(t_1 - t_2 - \tau) K(t_1 - t_2 + \tau)] dt_1 dt_2. \quad (17)$$

Введем новые переменные  $u = t_1 - t_2$ ,  $v = t_2$ , аналогично случаю замены переменных в равенстве (8):

$$D[K^*(\tau)] = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) [K^2(u) + K(u - \tau) K(u + \tau)] du. \quad (18)$$

Случайная функция  $X(t)$ , для которой справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D[K^*(\tau)] = 0, \quad (19)$$

называется *эргодической по отношению к корреляционной функции*. Очевидно, что необходимым и достаточным условием эргодичности стационарной случайной функции по отношению к корреляционной функции, будет соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) [K^2(u) + K(u - \tau) K(u + \tau)] du = 0. \quad (20)$$

Можно показать, что достаточным условием эргодичности стационарной случайной функции по отношению к корреляционной функции этой случайной функции является выполнение равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0. \quad (21)$$

Таким образом, для эргодической стационарной случайной функции ее математическое ожидание и корреляционная функция могут быть оценены по одной реализации как среднее по времени. Для эргодической по отношению к математическому ожиданию случайной функции оценка математического ожидания равна

$$m^* = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt. \quad (22)$$

Для эргодической по отношению к корреляционной функции случайной функции оценка корреляционной функции  $K^*(\tau)$  равна

$$K^*(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T X^\circ(t) X^\circ(t - \tau) dt. \quad (23)$$

Эти оценки при выполнении условий (10) и (19) являются несмещенными и состоятельными. Вычисление оценок можно выполнить путем интегрирования реализаций случайной функции, учитывая соотношения (22) и (23). Для ускорения расчетов в настоящее время создано большое количество приборов (корреляторов, коррелометров), автоматизирующих вычисление этих выражений.

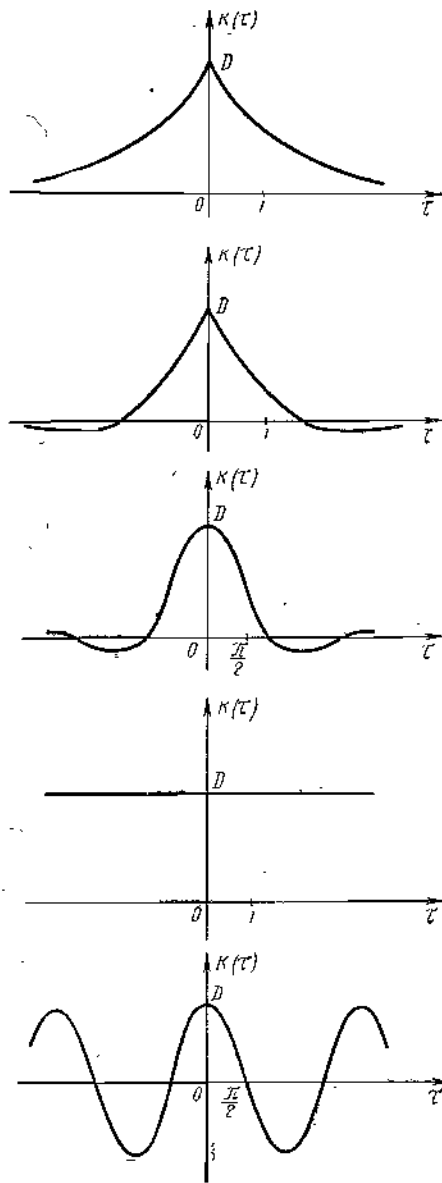


Рис. 216

**Пример 1.** Определить, являются ли случайные функции с приведенными ниже корреляционными функциями (рис. 216) эргодическими:

- а)  $K(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|}$ ,
- б)  $K(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$ ,
- в)  $K(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} (\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau|)$ ,
- г)  $K(\tau) = D$ ,
- д)  $K(\tau) = D \cos \tau$ .

Случайные функции с корреляционными функциями а), б), в) являются эргодическими, так как для них выполнено достаточное условие эргодичности

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0.$$

Случайная функция с корреляционной функцией вида г) не является эргодической, так как для нее не выполнено необходимое условие эргодичности, т. е.

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) D d\tau &= \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{DT}{2T} &= \frac{D}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Для случайной функции с корреляционной функцией типа д) достаточное условие эргодичности не выполнено. Проверим, выполняется ли необходимое условие эргодичности. Необходимое условие эргодичности по отношению к математическому ожиданию для случая д) имеет вид

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) D \cos \beta\tau d\tau &= \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{D}{\beta T} \left( -\frac{1}{\beta T} \cos \beta T - \frac{1}{\beta T} + 1 \right) \right] &= \\ = 0, \end{aligned}$$

т. е. необходимое условие эргодичности по отношению к математическому ожиданию выполнено. Проверим выполнение необходимого условия эргодичности по отношению к корреляционной функции. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) [\cos^2 u + \cos(u - \tau) \cos(u + \tau)] du &= \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) (2 \cos^2 u - \sin^2 \tau) du &= \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} D \left(1 - \sin^2 \tau + \frac{\sin^2 T}{T^2}\right) &= D(1 - \sin^2 \tau) \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, случайная функция  $X(t)$  с корреляционной функцией  $K(\tau) = D \cos \tau$  является эргодической по отношению к математическому ожиданию и не является эргодической по отношению к корреляционной функции.

## § 68. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

**1. Основные понятия и определения.** Выше рассматривались случайные функции  $X(t)$ , которые определялись при всех действительных значениях аргумента  $t$ . На практике, например, при исследовании импульсных автоматических систем приходится встречаться со случайными функциями, определенными лишь при дискретных значениях аргумента  $t = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ . Такие случайные функции называются *дискретными случайными функциями*, или *случайными последовательностями*. За аргумент дискретной случайной функции можно принять индекс при  $t_n$  и писать

$$X(t_n) = X[n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Если число точек, в которых задана дискретная случайная функция, конечно, то эта случайная функция может рассматриваться как  $n$ -мерный случайный вектор. Если же число таких точек бесконечно, то дискретная случайная функция является бесконечной последовательностью случайных чисел. Будем считать, что значения аргумента этой последовательности бесконечно продолжены в обе стороны числовой оси, т. е.  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Для того чтобы задать дискретную случайную функцию, необходимо задать все  $n$ -мерные ее функции распределения вероятностей или  $n$ -мерные плотности распределения вероятностей. Однако как и для случайных процессов с непрерывными значениями аргумента  $t$ , для случайных последовательностей широко применяется корреляционная теория случайных функций, основанная на знании первых двух моментов — математического ожидания и корреляционной функции.

*Математическим ожиданием случайной функции  $X[n]$*  называется такая неслучайная числовая последовательность  $m_X[n]$ , значения



которой при каждом фиксированном  $n$  равны математическому ожиданию случайной величины  $X[n]$ , т. е.

$$m_X[n] = M[X[n]] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, n) dx, \quad (1)$$

где  $f_1(x, n)$  — одномерная плотность распределения вероятностей случайной последовательности  $X[n]$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Функция

$$X^\circ[n] = X[n] - m_X[n] \quad (2)$$

называется *центрированной дискретной случайной функцией*.

Корреляционной функцией дискретной случайной функции называется дискретная функция двух переменных  $K_X[n, l]$ , значения которой равны корреляционным моментам случайных величин  $X[n]$  и  $X[l]$  при всех значениях  $n$  и  $l$ , т. е.

$$K_X[n, l] = M[X^\circ[n] \overline{X^\circ[l]}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X[n]) \overline{(x' - m_X[l])} \times \\ \times f_2(x, x'; n, l) dx dx', \quad (3)$$

где  $f_2(x, x'; n, l)$  — двумерная плотность распределения вероятностей случайной последовательности  $X[n]$  ( $n, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Начальный момент второго порядка  $\Gamma_X[n, l]$  для дискретной случайной функции определяется выражением

$$\Gamma_X[n, l] = M[X[n] \overline{X[l]}]. \quad (4)$$

Для двух дискретных случайных функций  $X[n]$  и  $Y[n]$  их взаимная корреляционная функция  $K_{XY}[n, l]$  и взаимный начальный момент второго порядка  $\Gamma_{XY}[n, l]$  определяются равенствами

$$K_{XY}[n, l] = M[X^\circ[n] \overline{Y^\circ[l]}], \quad (5)$$

$$\Gamma_{XY}[n, l] = M[X[n] \overline{Y[l]}]. \quad (6)$$

Все основные свойства математического ожидания, корреляционной функции и моментов второго порядка, полученные в § 65 для случайной функции с непрерывными значениями аргумента, справедливы и для дискретных случайных функций.

**2. Линейные операции над дискретными случайными функциями.** Аналогом операции дифференцирования случайных функций с непрерывными значениями аргумента  $t$  для дискретных случайных функций является операция взятия конечных разностей. Первой разностью  $\Delta X[n]$  дискретной случайной функции  $X[n]$  называется дискретная случайная функция вида

$$\Delta X[n] = X[n+1] - X[n]. \quad (7)$$

Разность порядка  $k$  дискретной случайной функции вычисляется по формуле

$$\Delta^k X[n] = \Delta^{k-1} X[n+1] - \Delta^{k-1} X[n]. \quad (8)$$

Определим статистические характеристики конечных разностей дискретных случайных функций. Имеем

$$M[\Delta X[n]] = M[X[n+1] - X[n]] = m_X[n+1] - m_X[n] = \Delta m_X[n], \quad (9)$$

т. е. математическое ожидание первой разности дискретной случайной функции равно первой разности математического ожидания этой случайной функции. Это свойство справедливо и для разностей любого порядка, т. е.

$$M[\Delta^k X[n]] = \Delta^k m_X[n]. \quad (10)$$

Корреляционная функция первой разности  $\Delta X[n]$  равна

$$K_{\Delta X}[n, l] = M[(\Delta_n X[n] - m_{\Delta X}[n]) (\Delta_l X[l] - m_{\Delta X}[l])] = \\ = M[\Delta_n (X[n] - m_X[n]) \Delta_l (X[l] - m_X[l])] = \Delta_n \Delta_l K_X[n, l], \quad (11)$$

здесь символы  $\Delta_n$  и  $\Delta_l$  обозначают взятие первой разности по индексам  $n$  и  $l$  соответственно.

Аналогично можно получить взаимную корреляционную функцию случайной функции  $X[n]$  и ее первой разности  $\Delta X[n]$ , имеем

$$K_{X \Delta X}[n, l] = \Delta_l K_X[n, l]. \quad (12)$$

Аналогом интегрирования для дискретных случайных функций, как и для неслучайных решетчатых функций, является операция суммирования. Вычислим статистические характеристики конечных сумм дискретных случайных функций с весом  $g[n, l]$ . Пусть дискретная случайная функция  $Y[n]$  равна

$$Y[n] = \sum_{l=0}^n X[l] g[n, l], \quad (13)$$

где  $g[n, l]$  — неслучайная решетчатая функция двух переменных, а  $X[l]$  — дискретная случайная функция. Определим математическое ожидание случайной функции  $Y[n]$ . Из свойства линейности операции определения математического ожидания следует, что

$$M[Y[n]] = \sum_{l=0}^n m_X[l] g[n, l] = m_Y[n]. \quad (14)$$

Вычислим теперь корреляционную функцию случайной функции  $Y[n]$ ; имеем:

$$K_Y[n, l] = M \left[ \left( \sum_{r=0}^n X[r] g[n, r] - m_Y[n] \right) \times \right. \\ \times \left. \left( \sum_{s=0}^l X[s] g[l, s] - m_Y[s] \right) \right] = M \left[ \left( \sum_{r=0}^n (X[r] - m_X[r]) g[n, r] \right) \times \right. \\ \times \left. \left( \sum_{s=0}^l (X[s] - m_X[s]) g[l, s] \right) \right] = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^l K_X[r, s] g[n, r] g[l, s], \quad (15)$$

Заметим, что конечная сумма (14) является линейной комбинацией конечного числа случайных величин  $X[n]$ , поэтому написанные выше статистические характеристики можно рассматривать как характеристики линейной комбинации случайных величин  $X[n]$ . Когда верхний предел суммирования в сумме вида (13) бесконечен, то значение этой суммы будем понимать в среднем квадратическом смысле, т. е. будем называть случайную функцию  $Y[n]$  суммой вида

$$Y[n] = \sum_{l=0}^{\infty} X[l]g[n, l], \text{ если справедливо равенство} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} M \left[ \left| \sum_{l=0}^N X[l]g[n, l] - Y[n] \right|^2 \right] = 0. \quad (16)$$

Этот предел, так же как и в § 64, будем записывать в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} X[l]g[n, l] = 1. \text{ i. m. } \sum_{l=0}^N X[l]g[n, l]. \quad (17)$$

**3. Стационарные дискретные случайные функции.** Определение стационарных дискретных случайных функций, как в узком, так и в широком смысле, ничем не отличается от соответствующих определений, введенных в § 66 для случайных функций с непрерывными значениями аргумента  $t$ . Дискретная случайная функция называется *стационарной в широком смысле*, если ее математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов, т. е.

$$m_X[n] = \text{const}, \quad (18)$$

$$K_X[n, l] = K_X[n-l] = K_X[r], \quad (19)$$

где  $r = n-l$  принимает любые целочисленные значения  $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Две дискретные случайные функции  $X[n]$  и  $Y[n]$  называются *стационарно-связанными*, если их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов, т. е.

$$K_{XY}[n, l] = K_{XY}[n-l] = K_{XY}[r]. \quad (20)$$

Все свойства математического ожидания и корреляционной функции стационарных случайных функций с непрерывными значениями аргумента, полученные в § 66, справедливы и для дискретных стационарных случайных функций.

Рассмотрим стационарную случайную функцию  $X(t)$  с непрерывными значениями аргумента  $t$  и поставим ей в соответствие решетчатую случайную функцию  $X[nT]$ , полученную из  $X(t)$  заменой  $t = nT$ . Очевидно, что дискретная случайная функция  $X[nT]$  тоже является стационарной. Пусть задана спектральная плотность  $S_X(\omega)$  случайной функции  $X(t)$ . Корреляционная функция  $K_X(t)$  найдется как обратное преобразование Фурье от спектральной плотности для всех значений  $\tau$ , в частности и для целочисленных значений  $\tau = rT$ .

Имеем

$$K_X[rT] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{j\omega rT} d\omega. \quad (21)$$

Разобьем ось  $\omega$  на отрезки длиной  $\frac{2\pi}{T}$  и представим интеграл (21) в виде суммы

$$K_X[rT] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\frac{\pi}{T}}^{(2k+1)\frac{\pi}{T}} S_X(\omega) e^{j\omega rT} d\omega. \quad (22)$$

Вводя новую переменную  $\omega_1 = \omega - \frac{2k\pi}{T}$ , учитывая, что  $e^{j2\pi k} = 1$ , и изменяя порядок интегрирования и суммирования, получим:

$$K_X[rT] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} S_X\left(\omega_1 + \frac{2k\pi}{T}\right) e^{j\omega_1 rT} e^{j2\pi k r} d\omega_1 = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_X\left(\omega_1 + \frac{2k\pi}{T}\right) \right] e^{j\omega_1 rT} d\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} S_X^*(\omega_1) e^{j\omega_1 rT} d\omega_1, \quad (23)$$

где

$$S_X^*(\omega_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_X\left(\omega_1 + \frac{2k\pi}{T}\right). \quad (24)$$

Функция  $S_X^*(\omega)$  называется *спектральной плотностью мощности* или просто *спектральной плотностью дискретной случайной функции*  $X[n, T]$ .

Спектральная плотность решетчатой случайной функции есть периодическая функция с периодом  $\frac{2\pi}{T}$ . В самом деле,

$$S_X^*\left(\omega + \frac{2\pi m}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_X\left(\omega + \frac{2\pi(k+m)}{T}\right) = \\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} S_X\left(\omega + \frac{2\pi l}{T}\right) = S_X^*(\omega), \quad (25)$$

где  $l = k + m$ .

Периодическая функция  $S_X^*(\omega)$  может быть разложена в ряд Фурье, т. е.

$$S_X^*(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_r e^{-jT\omega r}, \quad (26)$$

где

$$C_r = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} S_X^*(\omega) e^{jT r \omega} d\omega. \quad (27)$$

Сравнивая равенства (23) и (27), имеем

$$C_r = T K_X[rT]. \quad (28)$$

Окончательно получим

$$S_X^*(\omega) = T \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_X[rT] e^{-j\omega r T}, \quad (29)$$

$$K_X[rT] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} S_X^*(\omega) e^{j\omega r T} d\omega. \quad (30)$$

Равенства (29) и (30) выражают зависимость между корреляционной функцией и спектральной плотностью дискретной случайной функции  $X[nT]$ . Значение корреляционной функции стационарной случайной функции при равном нулю аргументе равно дисперсии случайной функции:

$$K_X[0] = D[X[nT]],$$

поэтому из равенства (30) имеем

$$D[X[nT]] = K_X[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} S_X^*(\omega) d\omega. \quad (31)$$

Если период дискретности  $T=1$ , то равенства (24) и (29) — (31) принимают соответственно вид

$$S_X^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_X(\omega + 2\pi k), \quad (32)$$

$$S_X^*(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_X[r] e^{-j\omega r}, \quad (33)$$

$$K_X[r] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_X^*(\omega) e^{j\omega r} d\omega, \quad (34)$$

$$D[X[nT]] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_X^*(\omega) d\omega. \quad (35)$$

Взаимной спектральной плотностью  $S_{XY}^*(\omega)$  двух стационарно связанных дискретных случайных функций  $X[nT]$  и  $Y[mT]$  называется выражение вида

$$S_{XY}^*(\omega) = T \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_{XY}[rT] e^{-j\omega r T}. \quad (36)$$

Взаимная корреляционная функция  $K_{XY}[rT]$  может быть вычислена как значения коэффициентов ряда Фурье:

$$\begin{aligned} K_{XY}[rT] &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} S_{XY}^*(\omega) e^{j\omega r T} d\omega. \end{aligned} \quad (37)$$

При  $T=1$  равенства (36) и (37) имеют вид

$$S_{XY}^*(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_{XY}[r] e^{-j\omega r}, \quad (38)$$

$$K_{XY}[r] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XY}^*(\omega) e^{j\omega r} d\omega. \quad (39)$$

Из равенства (24) следует, что спектральная плотность  $S_X^*(\omega)$  дискретного случайного процесса  $X[nT]$ , соответствующего непрерывному случайному стационарному процессу  $X(t)$  при  $t=nT$  равна сумме функций, полученных из спектральной плотности  $S_X(\omega)$  случай-

ного процесса  $X(t)$  сдвигом на величину  $\frac{2\pi}{T}k$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (рис. 217). Отсюда следует, что если случайная функция  $X(t)$  с непрерывными значениями аргумента  $t$  имеет спектральную плотность  $S_X(\omega)$ , отличную от нуля только на интервале  $(-\omega_c, \omega_c)$ , причем  $|\omega_c| < \frac{\pi}{T}$  (рис. 217, а), то спектральная плотность этого случайного процесса может быть восстановлена полностью по спектральной плотности  $S_X^*(\omega)$  дискретного случайного процесса  $X[nT] = X(t)|_{t=nT}$ . Действительно, при этих условиях спектральная плотность решетчатой случайной функции получается суммированием смещенных непрерывающих друг друга графиков спектральной плотности  $S_X(\omega)$  случайной функции  $X(t)$  (рис. 217, б) и поэтому спектральная плотность  $S_X(\omega)$  может быть восстановлена из спектральной

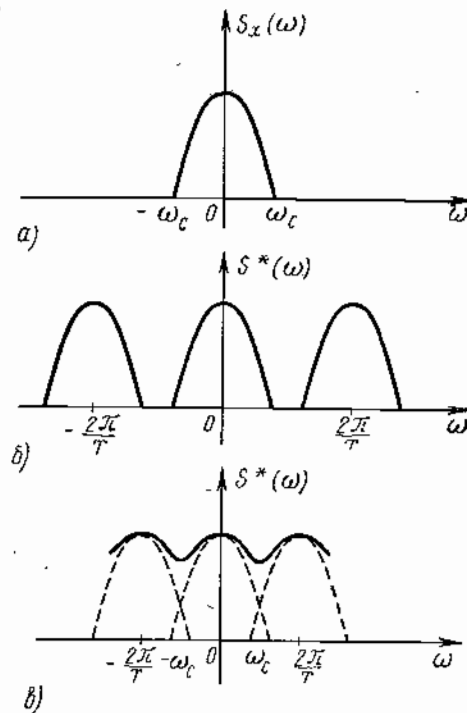


Рис. 217

плотности решетчатой случайной функции  $S_X^*(\omega)$  с помощью равенства

$$S_X^*(\omega) = \begin{cases} S_X^*(\omega) & \text{при } |\omega| < \frac{\pi}{T}, \\ 0 & \text{при } |\omega| \geq \frac{\pi}{T}. \end{cases} \quad (40)$$

В общем случае восановить спектральную плотность случайного процесса с непрерывными значениями параметра  $t$  по известной спектральной плотности соответствующего ему дискретного процесса, как видно из рис. 217, в, невозможно.

Представим стационарную случайную функцию  $X(t)$  в виде (40) § 66. При  $t = nT$  имеем

$$X[nT] = m_X + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{j\omega nT} d\omega, \quad (41)$$

где

$$M[V(\omega)] = 0, \quad M[V(\omega) \overline{V(\lambda)}] = \frac{S(\omega)}{2\pi} \delta(\omega - \lambda) = K_V(\omega, \lambda). \quad (42)$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям в равенствах (21)–(24), получим

$$\begin{aligned} X[nT] &= m_X + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\frac{\pi}{T}}^{(2k+1)\frac{\pi}{T}} V(\omega) e^{j\omega nT} d\omega = \\ &= m_X + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} V\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right) e^{j\omega nT} d\omega = m_X + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} V^*(\omega) e^{j\omega nT} d\omega, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$V^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right). \quad (44)$$

В выражении (43) интервал интегрирования есть  $\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$ , поэтому случайный процесс  $V^*(\omega)$  достаточно определить на этом интервале. Случайный процесс  $V(\omega)$  в равенствах (41) и (44) является белым шумом; при суммировании в равенстве (44) мы сдвигаем этот белый шум всякий раз на  $2\pi \frac{k}{T}$ , откуда следует, что при  $-\frac{\pi}{T} < \omega < \frac{\pi}{T}$  слагаемые в сумме (44) некоррелированы. В этом случае корреляционная функция суммы равна сумме корреляционных функций

слагаемых. Из соотношений (44) и (42) имеем

$$K_{V^*}(\omega, \lambda) = \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{S\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right)}{2\pi} \right] \delta(\omega - \lambda). \quad (45)$$

Объединяя равенства (43) и (24), получим

$$K_{V^*}(\omega, \lambda) = \frac{S^*(\omega)}{2\pi} \delta(\omega - \lambda), \quad (46)$$

т. е.  $V^*(\omega)$  на интервале  $\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$  есть белый шум с интенсивностью  $\frac{S^*(\omega)}{2\pi}$ .

Итак, показано, что стационарная дискретная случайная функция может быть представлена как предел суммы бесконечного числа неслучайных гармоник  $e^{j\omega nT}$  со случайной бесконечно малой амплитудой  $V^*(\omega) d\omega$ , т. е.

$$X[nT] = m_X + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} V^*(\omega) e^{j\omega nT} d\omega, \quad (47)$$

где  $V^*(\omega)$  — белый шум, определенный в интервале  $\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$ , причем  $M[V^*(\omega)] = 0$ ,  $M[V^*(\omega) \overline{V^*(\lambda)}] = \frac{S^*(\omega)}{2\pi} \delta(\omega - \lambda)$ ;  $S^*(\omega)$  — спектральная плотность дискретной случайной функции  $X[nT]$ . Интегрирование в равенствах (41), (43), (47) понимается в среднем квадратическом смысле.

В теории автоматического регулирования часто рассматривают дискретную случайную функцию, представляющую последовательность независимых случайных величин  $X[n]$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) с математическим ожиданием, равным нулю. Корреляционная функция такого случайного процесса имеет вид

$$K_X[nT, mT] = M[X[nT] \overline{X[mT]}] = d[n] \delta_{n,m} = \begin{cases} d[nT] & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases} \quad (48)$$

где  $\delta_{n,m}$  — символ Кронеккера;  $d[n] = K_X[nT, nT] = D[X[n]]$ . В случае, когда дисперсия не зависит от номера члена последовательности, т. е.  $d[n] = d = \text{const}$ , дискретная случайная функция  $X[n]$  будет стационарной с корреляционной функцией вида

$$K_X[rT] = \begin{cases} d & \text{при } r = 0, \\ 0 & \text{при } r \neq 0 \quad (r = n - m). \end{cases} \quad (49)$$

Иногда по аналогии с непрерывным белым шумом случайный стационарный дискретный процесс с независимыми значениями при различных значениях аргумента и нулевым математическим ожиданием называют *дискретным белым шумом*.

Вычислим спектральную плотность дискретного белого шума. Из равенств (49) и (29) имеем

$$S_X^*(\omega) = T \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_X[rT] e^{-j\omega r T} = dT. \quad (50)$$

**4. Эргодические дискретные случайные функции.** Понятие эргодичности, которое рассматривалось для случайной функции  $X(t)$ , определенной для всех действительных значений аргумента, может быть распространено и на дискретную случайную функцию  $X[n]$ .

Случайная дискретная функция  $X[n]$  называется *эргодической по отношению к математическому ожиданию*, если среднее ее значение по аргументу  $n$  (оценка математического ожидания), равное

$$m^* = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N X[n] \quad (51)$$

при  $N \rightarrow \infty$  совпадает с ее математическим ожиданием.

Оценка корреляционной функции для дискретной случайной функции  $X[n]$  может быть найдена как среднее значение по аргументу  $n$  по формуле

$$K_X^*[r] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X^\circ[n] X^\circ[n-r]. \quad (52)$$

Дискретная случайная функция  $X[n]$  называется *эргодической по отношению к корреляционной функции*, если при  $N \rightarrow \infty$  оценка (52) совпадает с корреляционной функцией. Как и для случайной функции с непрерывными значениями аргумента (§ 67), для дискретной случайной функции оценки (51) и (52) являются несмещенными, а достаточным условием эргодичности дискретной и стационарной случайной функции как по отношению к математическому ожиданию, так и по отношению к корреляционной функции является выполнение равенства

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K[r] = 0. \quad (53)$$

В этом случае оценки математического ожидания и корреляционной функции дискретной случайной функции  $X[nT]$  могут быть найдены по одной реализации по формулам (51) и (52).

#### § 69. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**1. Прохождение случайного сигнала через линейную непрерывную систему.** При изучении характеристик, описывающих линейные звенья систем автоматического регулирования, в § 16 было показано, что исчерпывающей характеристикой стационарного линейного звена с постоянными параметрами является весовая функция  $k(t-\tau)$ .

Весовая функция определяет значение сигнала на выходе системы в любой момент времени  $t$ , если на ее входе в момент времени  $t=\tau$  приложен единичный импульс, характеризуемый дельта-функцией. Сигнал на выходе линейного звена  $x(t)$  выражается через сигнал на его входе  $g(t)$  и весовую функцию при нулевых начальных условиях с помощью интеграла свертки вида

$$x(t) = \int_{t_0}^t g(\tau) k(t-\tau) d\tau, \quad (1)$$


Рис. 218

где  $t_0$  — момент подачи на вход системы сигнала  $g(t)$ .

Пусть ко входу системы приложено случайное воздействие  $G(t)$ , тогда реакция системы на ее выходе будет описываться случайной функцией  $X(t)$  (рис. 218), причем

$$X(t) = \int_{t_0}^t G(\tau) k(t-\tau) d\tau. \quad (2)$$

Здесь интеграл понимается в среднем квадратическом смысле.

Применив к равенству (2) операцию определения математического ожидания, получим математическое ожидание сигнала на выходе системы:

$$M[X(t)] = M \left[ \int_{t_0}^t G(\tau) k(t-\tau) d\tau \right] = \int_{t_0}^t M[G(\tau)] k(t-\tau) d\tau. \quad (3)$$

Вычитая равенство (3) из выражения (2), получим

$$X^\circ(t) = \int_{t_0}^t G^\circ(\tau) k(t-\tau) d\tau. \quad (4)$$

Предположим, что задано математическое ожидание и корреляционная функция сигнала на входе системы  $M[G(t)] = m_G(t)$  и  $K_G(t_1, t_2)$ . Вычислим корреляционную функцию сигнала на выходе системы  $K_X(t_1, t_2)$ , а также взаимные корреляционные функции между входными и выходными сигналами  $K_{GX}(t_1, t_2)$  и  $K_{XG}(t_1, t_2)$ . Заменяя в равенстве (4)  $t$  на  $t_2$ ,  $\tau$  на  $\nu$ , получим

$$X^\circ(t_2) = \int_{t_0}^{t_2} G^\circ(\nu) k(t_2-\nu) d\nu. \quad (5)$$

По определению корреляционной функции имеем

$$K_X(t_1, t_2) = M[X^\circ(t_1) \overline{X^\circ(t_2)}].$$

Изменяя порядок операций интегрирования и определения математического ожидания, получим

$$K_X(t_1, t_2) = M \left[ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} G^\circ(\tau) \overline{G^\circ(\nu)} k(t_1 - \tau) k(t_2 - \nu) d\tau d\nu \right] = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} K_G(\tau, \nu) k(t_1 - \tau) k(t_2 - \nu) d\tau d\nu. \quad (6)$$

Аналогично найдем выражения для взаимных корреляционных функций:

$$K_{GX}(t_1, t_2) = M [G^\circ(t_1) \overline{X^\circ(t_2)}] = M \left[ G^\circ(t_1) \int_{t_0}^{t_2} G^\circ(\nu) k(t_2 - \nu) d\nu \right] = \int_{t_0}^{t_2} K_G(t_1, \nu) k(t_2 - \nu) d\nu, \quad (7)$$

$$K_{XG}(t_1, t_2) = M [X^\circ(t_1) \overline{G^\circ(t_2)}] = M \left[ \int_{t_0}^{t_1} G^\circ(\tau) k(t_1 - \tau) d\tau \overline{G^\circ(t_2)} \right] = \int_{t_0}^{t_1} K_G(\tau, t_2) k(t_1 - \tau) d\tau. \quad (8)$$

Выражения (3), (6), (7), (8) позволяют определить статистические характеристики сигнала на выходе линейной системы по статистическим характеристикам входного сигнала.

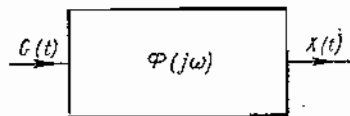


Рис. 219

Используя спектральное представление стационарной случайной функции (40) § 66, можно получить простые выражения для вычисления спектральной плотности случайного сигнала на выходе стационарной случайной системы (рис. 219) в установившемся режиме, когда к ее входу приложено воздействие, описываемое стационарной случайной функцией  $G(t)$ .

Спектральное представление случайной функции  $G^\circ(t)$  имеет вид

$$G^\circ(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V_G(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (9)$$

где

$$M[V_G(\omega)] = 0, \quad M[V_G(\omega) \overline{V_G(\lambda)}] = \frac{S_G(\omega)}{2\pi} \delta(\omega - \lambda). \quad (10)$$

В равенстве (9) случайная функция  $G^\circ(t)$  представлена в виде предела суммы комплексных гармоник  $e^{j\omega t}$  со случайными амплитудами  $V_G(\omega) d\omega$ .

Рассмотрим сначала, как преобразуется линейной системой гармоника  $e^{j\omega t}$ . В § 39 было показано, что для того, чтобы опреде-

лить сигнал на выходе устойчивой линейной системы в установившемся режиме в случае, когда к ее входу приложена комплексная гармоника  $e^{j\omega t}$ , нужно умножить эту гармонику на амплитудно-фазовую частотную характеристику системы  $\Phi(j\omega)$ . Таким образом на выходе системы будем иметь сигнал  $\Phi(j\omega) e^{j\omega t}$ . Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции; суммируя результаты воздействия каждой гармоники и переходя к пределу, получим выражение спектрального представления случайного сигнала  $X^\circ(t)$  на выходе системы:

$$X^\circ(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V_G(\omega) \Phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (11)$$

В силу равенства (11) случайный сигнал  $X^\circ(t)$  является стационарным.

Вычислим корреляционную функцию случайного сигнала  $X(t)$  на выходе системы. Имеем

$$K_X(t_1, t_2) = M[X^\circ(t_1) \overline{X^\circ(t_2)}] = M \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) \overline{\Phi(j\lambda)} V_G(\omega) \overline{V_G(\lambda)} e^{j\omega t_1 - j\lambda t_2} d\omega d\lambda \right]. \quad (12)$$

Изменяя порядок интегрирования и операции определения математического ожидания и воспользовавшись условием (10), получим

$$K_X(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega t_1 - \lambda t_2)} \Phi(j\omega) \overline{\Phi(j\lambda)} S_G(\omega) \delta(\omega - \lambda) d\omega d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t_1 - t_2)} |\Phi(j\omega)|^2 S_G(\omega) d\omega. \quad (13)$$

Сравнивая равенство (13) с выражением (43) § 66 для корреляционной функции случайной функции через спектральную плотность, найдем, что

$$S_X(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_G(\omega). \quad (14)$$

Таким образом, в установившемся режиме спектральная плотность сигнала на выходе стационарной устойчивой системы с амплитудно-фазовой частотной характеристикой  $\Phi(j\omega)$  равна спектральной плотности стационарного случайного сигнала на входе системы, умноженной на квадрат модуля амплитудно-фазовой частотной характеристики.

Найдем взаимную спектральную плотность случайных функций, представляющих сигналы на входе и на выходе линейной системы с амплитудно-фазовой частотной характеристикой  $\Phi(j\omega)$  (см. рис. 219).

Из равенств (14) и (9) получим

$$K_{GX}(t_1, t_2) = M[G^\circ(t_1) X^\circ(t_2)] = M \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_G(\omega) \overline{V_G(\lambda)} \times \right. \\ \left. \times \overline{\Phi(j\lambda)} e^{j\omega t_1} e^{-j\lambda t_2} d\omega d\lambda \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_G(\omega) \overline{\Phi(j\lambda)} \delta(\omega - \lambda) \times \\ \times e^{j\omega t_1 - j\lambda t_2} d\omega d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_G(\omega) \overline{\Phi(j\omega)} e^{j\omega(t_1 - t_2)} d\omega. \quad (15)$$

Сравнивая равенства (15) и (52) § 66, будем иметь:

$$S_{GX}(\omega) = S_G(\omega) \overline{\Phi(j\omega)}. \quad (16)$$

**Пример 1.** На вход системы с весовой функцией

$$k(t - \tau) = \begin{cases} e^{-(t-\tau)} & \text{при } \tau \leq t, \\ 0 & \text{при } \tau > t \end{cases}$$

в момент времени  $t=0$  применен случайный сигнал  $G(t)$  с корреляционной функцией  $K_G(t_1 - t_2) = e^{-|t_1 - t_2|}$  и математическим ожиданием  $m_G = 1$ . Найти статистические характеристики сигнала  $X(t)$  на выходе системы.

Из равенств (3), (6), (7) и (8) имеем:

$$m_X(t) = \int_0^t m_G(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau = \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-t}, \\ K_X(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-|\tau-\nu|} e^{-(t_1-\tau)} e^{-(t_2-\nu)} d\tau d\nu = \\ = e^{-(t_1+t_2)} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-|\tau-\nu|} e^{\tau+\nu} d\tau d\nu.$$

Введем новые переменные  $u = \tau - \nu$ ,  $v = \nu$ . В этом случае якобиан преобразования  $|J| = 1$ . Тогда при  $t_2 > t_1$  получим (рис. 220, а)

$$K_X(t_1, t_2) = e^{-(t_1+t_2)} \left[ \int_{t_2-t_1}^{t_1-t_2} \int_{-u}^{t_2} e^u e^{u+2v} dv du + \int_{t_1-t_2}^0 \int_{-u}^{t_1-u} e^u e^{u+2v} dv du + \right. \\ \left. + \int_0^{t_1} \int_0^{t_1-u} e^{-u} e^{u+2v} dv du \right] = \\ = [1 + (t_2 - t_1)] \frac{e^{-(t_2-t_1)}}{2} - [1 - (t_2 + t_1)] \frac{e^{-(t_2+t_1)}}{2};$$

при  $t_2 < t_1$  (рис. 220, б) аналогично найдем

$$K_X(t_1, t_2) = [1 + (t_1 - t_2)] \frac{e^{-(t_1-t_2)}}{2} - [1 - (t_1 + t_2)] \frac{e^{-(t_1+t_2)}}{2}.$$

Объединяя оба случая, можно записать

$$K_X(t_1, t_2) = \frac{1}{2} [1 + |t_1 - t_2|] e^{-|t_1 - t_2|} - \frac{1}{2} [1 - (t_1 + t_2)] e^{-(t_1+t_2)}.$$

Дисперсия процесса  $X(t)$  будет

$$D_X = K_X(t, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (2t - 1) e^{-2t}.$$

Взаимная корреляционная функция между сигналом на входе и выходе системы есть

$$K_{GX}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} e^{-|t_1-\nu|} e^{-(t_2-\nu)} d\nu.$$

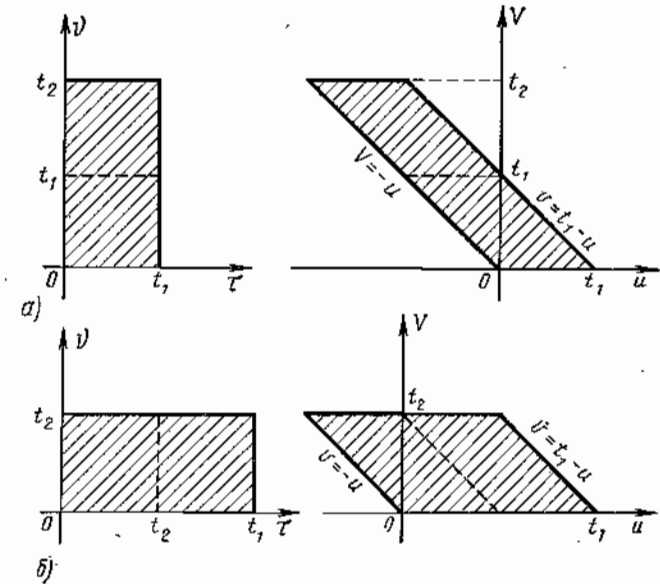


Рис. 220

Выполняя интегрирование, получим при  $t_1 < t_2$

$$K_{GX}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} e^{-(t_1-\nu)} e^{-(t_2-\nu)} d\nu + \int_{t_1}^{t_2} e^{(t_1-\nu)} e^{-(t_2-\nu)} d\nu = \\ = e^{-(t_2-t_1)} \left( \frac{1}{2} + t_2 - t_1 \right) - \frac{1}{2} e^{-(t_1+t_2)};$$

при  $t_1 > t_2$

$$K_{GX}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} e^{-(t_1-\nu)} e^{-(t_2-\nu)} d\nu = \frac{e^{-(t_1-t_2)}}{2} - \frac{e^{-(t_1+t_2)}}{2}.$$

Из условия симметрии взаимной корреляционной функции имеем

$$K_{XG}(t_1, t_2) = K_{GX}(t_2, t_1) = \begin{cases} \left( \frac{1}{2} + t_1 - t_2 \right) e^{-(t_1-t_2)} - \frac{1}{2} e^{-(t_1+t_2)} & \text{при } t_2 < t_1, \\ \frac{1}{2} \left( e^{-(t_2-t_1)} - e^{-(t_1+t_2)} \right) & \text{при } t_2 > t_1. \end{cases}$$



В установившемся режиме при  $t_1 \rightarrow \infty$  и  $t_2 \rightarrow \infty$  получим предельные значения статистических характеристик сигнала на выходе системы

$$K_{GX}(\tau) = \begin{cases} \frac{e^{-\tau}}{2} & \text{при } \tau > 0, \\ \frac{e^{\tau}}{2} (1 - 2\tau) & \text{при } \tau < 0, \end{cases} \quad K_{XG}(\tau) = \begin{cases} \frac{e^{\tau}}{2} & \text{при } \tau < 0, \\ \frac{e^{-\tau}}{2} (1 + 2\tau) & \text{при } \tau > 0, \end{cases}$$

$$m_X(t) = 1, \quad K_X(\tau) = (1 + |\tau|) \frac{e^{-|\tau|}}{2}, \quad D_X = \frac{1}{2},$$

где  $\tau = t_2 - t_1$ .

**Пример 2.** К системе автоматического регулирования (см. § 15) с передаточной функцией

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{200(s+1)}{0,002s^5 + 0,1224s^4 + 5,146s^3 + 41,32s^2 + 201s + 200}$$

приложена помеха — белый шум с корреляционной функцией  $K_Q(\tau) = 0,25 \cdot 10^{-6} \delta(\tau)$ . Определить спектральную плотность и дисперсию сигнала на выходе системы в установившемся режиме.

Корни характеристического уравнения системы имеют отрицательные действительные части (см. пример 2 § 16), поэтому система асимптотически устойчива и согласно равенству (14) спектральная плотность сигнала на выходе системы имеет вид

$$S_X(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_Q(\omega),$$

где

$$S_Q(\omega) = 0,25 \cdot 10^{-6} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 0,25 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2/\text{сек}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика системы описывается выражением

$$\Phi(j\omega) = \frac{200(j\omega + 1)}{0,002(j\omega)^5 + 0,1224(j\omega)^4 + 5,146(j\omega)^3 + 41,32(j\omega)^2 + 201(j\omega) + 200}.$$

Спектральная плотность сигнала  $X(t)$  на выходе равна

$$S_X(\omega) = \frac{0,25 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^4 (1 + j\omega)(1 - j\omega)}{|0,002(j\omega)^5 + 0,1224(j\omega)^4 + 5,146(j\omega)^3 + 41,32(j\omega)^2 + 201(j\omega) + 200|^2} = \frac{10^{-3} (+\omega^2 + 1)}{|0,002(j\omega)^5 + 0,1224(j\omega)^4 + 5,146(j\omega)^3 + 41,32(j\omega)^2 + 201(j\omega) + 200|^2}.$$

Дисперсию сигнала на выходе системы определим, воспользовавшись выражением (48) § 66. Имеем

$$D_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega = \frac{10^{-3}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(+\omega^2 + 1) d\omega}{|0,002(j\omega)^5 + 0,1224(j\omega)^4 + 5,146(j\omega)^3 + 41,32(j\omega)^2 + 201(j\omega) + 200|^2}.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулами (18), (33), полученными в § 32, тогда

$$D_X = 10^{-3} J_5 = \frac{10^{-3} N_5}{2a_0 D_5},$$

где

$$g_5(j\omega) = 0(j\omega)^5 + 0(j\omega)^4 + 0(j\omega)^3 - 1(j\omega)^2 + 1, \\ h_5(j\omega) = 0,002(j\omega)^5 + 0,1224(j\omega)^4 + 5,146(j\omega)^3 + 41,32(j\omega)^2 + 201(j\omega) + 200,$$

откуда

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -1, \quad b_4 = 1, \\ a_0 = 0,002, \quad a_1 = 0,1224, \quad a_2 = 5,146, \quad a_3 = 41,32, \quad a_4 = 201, \quad a_5 = 200,$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix} = a_5 \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \\ = a_5 \left( a_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} - a_5 \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_2 \end{vmatrix} \right) = a_5 \{ a_4 [a_3 (a_2 a_1 - a_3 a_0) - \\ - a_5 (a_1 a_4 - a_0 a_5)] - a_5 [a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_0 (a_1 a_4 - a_0 a_5)] \} = \\ = a_5 [(a_3 a_4 - a_5 a_5) (a_1 a_2 - a_0 a_3) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2] = 200 \cdot 3271;$$

$$N_5 = \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ b_2 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ -1 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix} = 0,002 \cdot 119;$$

$$D_X = \frac{10^{-3} \cdot 0,002 \cdot 119}{2 \cdot 0,002 \cdot 200 \cdot 3271} = 0,91 \cdot 10^{-8} \text{ рад}^2.$$

**2. Прохождение случайного сигнала через линейную импульсную систему.** Рассмотрим линейную импульсную стационарную систему, ко входу которой применен дискретный случайный сигнал  $G[n]$ . Сигнал на выходе этой системы  $X[n, \varepsilon]$  при нулевых начальных условиях определяется равенством (см. § 51),

$$X[n, \varepsilon] = \sum_{l=0}^n G[l] k[n-l, \varepsilon], \quad (17)$$

где  $k[n-l, \varepsilon]$  — весовая функция импульсной системы.

Статистические характеристики случайного процесса  $X[n, \varepsilon]$  на выходе системы определяются при любом  $\varepsilon$  по формулам, полученным в § 68. Математическое ожидание случайной функции (17) при любом  $0 \leq \varepsilon < 1$  равно

$$M[X[n, \varepsilon]] = \sum_{l=0}^n m_G[l] k[n-l, \varepsilon] = m_X[n, \varepsilon]. \quad (18)$$

Вычитая равенство (18) из равенства (17), получим

$$X^{\circ}[n, \varepsilon] = \sum_{l=0}^n G^{\circ}[l] k[n-l, \varepsilon]. \quad (19)$$

Корреляционная функция случайного сигнала на выходе импульсной системы имеет вид

$$\begin{aligned} K_X[n, l, \varepsilon] &= M[X^{\circ}[n, \varepsilon] \overline{X^{\circ}[l, \varepsilon]}] = \\ &= M \left[ \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^l G^{\circ}[r] \overline{G^{\circ}[s]} k[n-r, \varepsilon] k[l-s, \varepsilon] \right] = \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^l K_G[r, s] k[n-r, \varepsilon] k[l-s, \varepsilon]. \end{aligned} \quad (20)$$

Если, в частности, случайная функция, описывающая сигнал на входе системы  $G[n]$ , — стационарна, то математическое ожидание и корреляционная функция сигнала  $X[n, \varepsilon]$  на выходе системы определяются по формулам

$$M[X[n, \varepsilon]] = m_X \sum_{l=0}^n k[n-l, \varepsilon], \quad (21)$$

$$K_X[n, l, \varepsilon] = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^l K_G[r-s] k[n-r, \varepsilon] k[l-s, \varepsilon]. \quad (22)$$

Введем новые переменные:  $p = n - r$ ,  $q = l - s$ . После подстановки этих переменных в выражение (20) получим

$$K_X[n, l, \varepsilon] = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^l K_G[n-p-l+q] k[p, \varepsilon] k[q, \varepsilon]. \quad (23)$$

Устремим переменные  $n$  и  $l$  к бесконечности таким образом, чтобы разность  $n - l$  оставалась конечной. В пределе получим

$$K_X[n, l, \varepsilon] = K_X[n-l, \varepsilon] = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} K_G[n-l-p+q] k[p, \varepsilon] k[q, \varepsilon],$$

или

$$K_X[r, \varepsilon] = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} K_G[r-p+q] k[p, \varepsilon] k[q, \varepsilon], \quad (24)$$

где  $r = n - l$ . Из равенства (24) следует, что в установившемся режиме корреляционная функция случайной функции  $X[n, \varepsilon]$  зависит только от разности аргументов, т. е. случайный сигнал на выходе системы  $X[n, \varepsilon]$  стационарен относительно аргумента  $n$ .

Вычислим взаимную корреляционную функцию между случайными функциями на входе и выходе импульсной системы. Имеем

$$\begin{aligned} K_{GX}[n, l, \varepsilon] &= M[G^{\circ}[n] \overline{X^{\circ}[l, \varepsilon]}] = \\ &= M \left[ G^{\circ}[n] \sum_{s=0}^l G^{\circ}[s] k[l-s, \varepsilon] \right] = \sum_{s=0}^l K_G[n, s] k[l-s, \varepsilon]. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогично получим

$$K_{XG}[n, l, \varepsilon] = \sum_{s=0}^l K_G[s, n] k[l-s, \varepsilon]. \quad (26)$$

Если случайная функция  $G[n]$  стационарна, то взаимные корреляционные функции, как и корреляционная функция для установившегося режима, будут зависеть только от разности аргументов. Действительно, для случая, если случайный сигнал на входе системы стационарен, равенство (26) принимает вид

$$K_{GX}[n, l, \varepsilon] = \sum_{s=0}^l K_G[n-s] k[l-s, \varepsilon]. \quad (27)$$

Выполним замену переменной  $p = l - s$ , в результате получим

$$K_{GX}[n, l, \varepsilon] = \sum_{p=0}^l K_G[n-l+p] k[p, \varepsilon]. \quad (28)$$

Устремив в этом выражении  $n$  и  $l$  к бесконечности так, чтобы разность  $n - l$  оставалась конечной, получим

$$K_{GX}[n-l, \varepsilon] = \sum_{p=0}^{\infty} K_G[n-l+p] k[p, \varepsilon]. \quad (29)$$

Обозначая  $r = n - l$ , имеем

$$K_{GX}[r, \varepsilon] = \sum_{p=0}^{\infty} K_G[r+p] k[p, \varepsilon]. \quad (30)$$

Аналогично для взаимной корреляционной функции  $K_{XG}[r, \varepsilon]$  найдем

$$K_{XG}[r, \varepsilon] = \sum_{p=0}^{\infty} K_G[r-p] k[p, \varepsilon]. \quad (31)$$

Таким образом, если к импульсной системе приложена стационарная функция  $G[n]$ , то в установившемся режиме сигналы на входе и выходе системы при значении параметра  $\varepsilon = 0$  стационарно связаны, так как из равенства (29) следует, что их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов.

Обозначим через  $\Phi^*(j\omega, \varepsilon)$  амплитудно-фазовую частотную характеристику импульсной системы, тогда

$$\Phi^*(j\omega, \varepsilon) = \mathcal{D}\{k[n, \varepsilon]\} = \sum_{p=0}^{\infty} k[p, \varepsilon] e^{-j\omega p}, \quad (32)$$

где символ  $\mathcal{D}$  означает операцию дискретного преобразования Лапласа.

Определим связь между спектральными плотностями сигналов на входе и выходе устойчивой импульсной системы в установившемся режиме. Умножая обе части равенства (24) на  $e^{-j\omega r}$  и выполнив суммирование по индексу  $r$  в бесконечных пределах с учетом

равенства (32) § 68, получим

$$S_X^*(\bar{\omega}, \varepsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} S_G^*(\bar{\omega}) e^{-i p \bar{\omega} + i q \bar{\omega}} k[p, \varepsilon] k[q, \varepsilon] = \\ = S_G^*(\bar{\omega}) \Phi^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) \Phi^*(-j\bar{\omega}, \varepsilon) = S_G^*(\bar{\omega}) |\Phi^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2. \quad (33)$$

Дисперсия  $D[X[n, \varepsilon]]$  случайного сигнала  $X[n, \varepsilon]$  в установившемся режиме может быть определена по спектральной плотности этого сигнала  $S_X^*(\bar{\omega}, \varepsilon)$ . Для этого воспользуемся формулой (35) § 68. При  $r=0$  получим

$$D[X[n, \varepsilon]] = K_X[0, \varepsilon] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_X^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_G^*(\bar{\omega}) |\Phi^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 d\bar{\omega}. \quad (34)$$

Умножая обе части равенств (30) и (31) на  $e^{-j\bar{\omega}r}$  и выполнив суммирование по индексу  $r$  в бесконечных пределах, учитывая равенство (38) § 68 найдем выражения для взаимных спектральных плотностей случайных сигналов на входе и выходе импульсной системы:

$$S_{GX}^*(\bar{\omega}, \varepsilon) = S_G^*(\bar{\omega}) \Phi^*(-j\bar{\omega}, \varepsilon), \quad (35)$$

$$S_{XG}^*(\bar{\omega}, \varepsilon) = S_G^*(\bar{\omega}) \Phi^*(j\bar{\omega}, \varepsilon). \quad (36)$$

**Пример 3.** Рассмотрим импульсную систему с мгновенными импульсами, непрерывная часть которой является апериодическим звеном (см. пример 1 § 56, рис. 162). Пусть ко входу системы приложен стационарный случайный сигнал с корреляционной функцией

$$K_G(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \quad (\alpha > 0).$$

Требуется определить спектральную плотность и дисперсию случайного сигнала  $X[n, \varepsilon]$  на выходе системы, а также взаимные спектральные плотности сигналов на входе и выходе этой системы.

Передаточная функция этой импульсной системы (см. § 56) равна

$$\Phi^*(q, \varepsilon) = \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta\varepsilon}, \quad \beta > 0.$$

Определим спектральную плотность случайного сигнала на входе системы. Используя равенство 32 § 68, получим

$$S_G^*(\bar{\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_G[r] e^{-j\bar{\omega}r} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|r|} e^{-j\bar{\omega}r} = \frac{1 - e^{-2\alpha}}{1 - 2e^{-\alpha} \cos \bar{\omega} + e^{-2\alpha}}.$$

По формулам (33), (35) и (36) найдем

$$S_X^*(\bar{\omega}, \varepsilon) = S_G^*(\bar{\omega}, \varepsilon) |\Phi^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|^2 = \frac{1 - e^{-2\alpha}}{1 - 2e^{-\alpha} \cos \bar{\omega} + e^{-2\alpha}} \frac{e^{-2\beta\varepsilon}}{1 - e^{-\beta} \cos \bar{\omega} + e^{-2\beta}},$$

$$S_{GX}^*(\bar{\omega}, \varepsilon) = S_G^*(\bar{\omega}, \varepsilon) \Phi^*(-j\bar{\omega}, \varepsilon) = \frac{1 - e^{-2\alpha}}{1 - 2e^{-\alpha} \cos \bar{\omega} + e^{-2\alpha}} \frac{e^{-j\bar{\omega}\varepsilon} e^{-\beta\varepsilon}}{e^{-j\bar{\omega}} - e^{-\beta}},$$

$$S_{XG}^*(\bar{\omega}, \varepsilon) = S_G^*(\bar{\omega}, \varepsilon) \Phi^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = \frac{1 - e^{-2\alpha}}{1 - 2e^{-\alpha} \cos \bar{\omega} + e^{-2\alpha}} \frac{e^{j\bar{\omega}\varepsilon} e^{-\beta\varepsilon}}{e^{j\bar{\omega}} - e^{-\beta}}.$$

Из равенства (34) имеем

$$D_X(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - e^{-2\alpha}) e^{-2\beta\varepsilon} d\bar{\omega}}{(1 - 2e^{-\alpha} \cos \bar{\omega} + e^{-2\alpha})(1 - 2e^{-\beta} \cos \bar{\omega} + e^{-2\beta})}.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся методами теории вычетов. Заметим, что выражение для дисперсии может быть переписано в виде

$$D_X(\varepsilon) = \frac{(1 - e^{-2\alpha}) e^{-2\beta\varepsilon}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\bar{\omega}}{(e^{j\bar{\omega}} - e^{-\alpha})(e^{-j\bar{\omega}} - e^{-\alpha})(e^{j\bar{\omega}} - e^{-\beta})(e^{-j\bar{\omega}} - e^{-\beta})}.$$

Положим  $z = e^{j\bar{\omega}}$ , тогда  $d\bar{\omega} = \frac{dz}{jz}$ . При такой замене переменных интегрирование по отрезку действительной оси  $[-\pi, \pi]$  на плоскости  $q$  перейдет в интегрирование по окружностям единичного радиуса на плоскости  $z$ . Имеем:

$$D_X(\varepsilon) = \frac{(1 - e^{-2\alpha}) e^{-2\beta\varepsilon}}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{dz}{jz(z - e^{-\alpha})(z^{-1} - e^{-\alpha})(z - e^{-\beta})(z^{-1} - e^{-\beta})} = \\ = \frac{(1 - e^{-2\alpha}) e^{-2\beta\varepsilon}}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{ze^{\alpha+\beta} dz}{j(z - e^{-\alpha})(z - e^{\alpha})(z - e^{-\beta})(z - e^{\beta})}.$$

Внутри контура интегрирования подынтегральная функция имеет полюсы  $z_1 = e^{-\alpha}$  и  $z_2 = e^{-\beta}$ , поэтому, согласно теореме о вычетах, получим

$$D_X(\varepsilon) = (1 - e^{-2\alpha}) e^{\alpha+\beta} e^{-2\beta\varepsilon} \left[ \frac{e^{-\alpha}}{(e^{-\alpha} - e^{-\beta})(e^{-\alpha} - e^{\beta})(e^{-\alpha} - e^{\beta})} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\beta}}{(e^{-\beta} - e^{-\alpha})(e^{-\beta} - e^{\alpha})(e^{-\beta} - e^{\alpha})} \right] = \frac{e^{\beta} (e^{-\alpha} + e^{\beta}) e^{-2\beta\varepsilon}}{(e^{\beta} - e^{-\beta})(e^{\beta} - e^{-\alpha})}.$$

**3. Прохождение случайного сигнала через нелинейное безынерционное звено. Понятие о методе статистической линеаризации.** Простейшими нелинейными звеньями, встречающимися в системах автоматического регулирования, являются безынерционные нелинейные звенья. Такие звенья описываются неслучайной функцией

$$X = \varphi(Y),$$

где  $Y(t)$  — случайный сигнал на входе. Если сигнал  $Y(t)$  является случайным, будет случайным и  $X(t)$  — сигнал на выходе звена.

При анализе автоматических систем возникает задача: определить неизвестные статистические характеристики сигнала  $X(t)$ , если известны статистические характеристики сигнала  $Y(t)$ . По известной функции распределения  $F_Y(y)$  или плотности распределения вероятностей  $f_Y(y)$  случайного сигнала  $Y(t)$  одномерная функция распределения сигнала  $X(t)$  на выходе звена может быть найдена по формуле (см. (32) § 60)

$$F_X(x) = \int_{\varphi(y) < x} f_Y(y) dy, \quad (37)$$

где интегрирование производится по всем отрезкам оси  $Oy$ , для которых выполнено неравенство  $\varphi(y) < x$ . Если функция  $\varphi$  монотонна, то из равенства (35) § 60 получим выражение для плотности рас-

пределения вероятностей случайного сигнала на выходе звена в виде

$$f_X(x) = f_Y(\varphi^{-1}(x)) \left| \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} \right|. \quad (38)$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной функции  $X(t)$  в этом случае могут быть вычислены по формулам

$$M[X(t)] = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(\varphi^{-1}(x)) \left| \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} \right| dx, \quad (39)$$

$$D[X(t)] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_Y(\varphi^{-1}(x)) \left| \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} \right| dx. \quad (40)$$

Вводя в равенствах (39) и (40) новую переменную  $y = \varphi^{-1}(x)$ , получим

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) f_Y(y) dy, \quad (41)$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(y) - m_X)^2 f_Y(y) dy. \quad (42)$$

Формулы (41) и (42) являются расчетными для определения математического ожидания и дисперсии сигнала  $X(t)$  на выходе нелинейного безынерционного звена, описываемого монотонной функцией  $X = \varphi(Y)$  по известной одномерной плотности распределения вероятностей  $f_Y(y)$  случайного сигнала на входе звена.

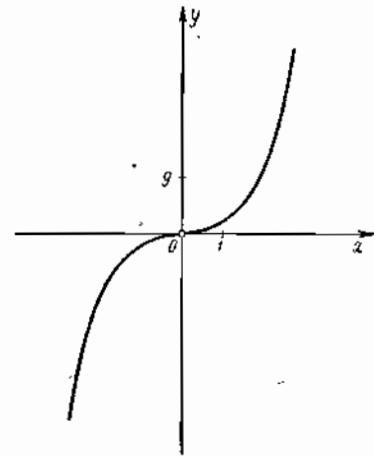


Рис. 221

**Пример 4.** Случайный сигнал  $Y(t)$  на входе нелинейного звена системы автоматического регулирования имеет нормальное одномерное распределение с математическим ожиданием  $m_Y$  и дисперсией  $\sigma_Y^2$ . Найти математическое ожидание и дисперсию случайного сигнала на выходе звена, если это звено описывается функцией (рис. 221)

$$X(t) = \varphi(Y(t)) = (Y(t))^3.$$

Используя равенство (41), найдем математическое ожидание случайного сигнала  $X(t)$  на выходе звена:

$$m_X = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^3 e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_Y u + m_Y)^3 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sigma_Y^3 J_3 + 3\sigma_Y^2 m_Y J_2 + 3\sigma_Y m_Y^2 J_1 + m_Y^3 J_0,$$

$$u = \frac{y - m_Y}{\sigma_Y}, \quad J_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^k e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Вычислим интегралы вида  $J_k$ . Очевидно, что  $J_{2k-1} = 0$  как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах. Вычислим интеграл  $J_{2k}$ . Интегрируя по частям, имеем

$$J_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2k} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2k-1} \left( u e^{-\frac{u^2}{2}} \right) du = \frac{2k-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2(k-1)} e^{-\frac{u^2}{2}} du = (2k-1) J_{2(k-1)}.$$

Получили рекуррентное соотношение

$$J_{2k} = (2k-1) J_{2(k-1)}.$$

Интеграл

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$$

как интеграл Эйлера—Пуассона. Отсюда имеем

$$J_{2k} = \prod_{m=1}^k (2m-1), \text{ т. е. } J_0 = 1, J_2 = 1, J_4 = 3, J_6 = 15$$

и

$$m_X = 3\sigma_Y^2 m_Y + m_Y^3.$$

Вычислим дисперсию сигнала на выходе звена; согласно равенству (41) имеем

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y^3 - 3\sigma_Y^2 m_Y y - m_Y^3)^2 e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_Y^3 u^3 + 3\sigma_Y^2 m_Y u^2 + 3\sigma_Y m_Y^2 u - 3\sigma_Y^2 m_Y^2 u^2 - 6\sigma_Y m_Y^3 u + 18\sigma_Y^2 m_Y^3 u - 18\sigma_Y m_Y^3 u^2 - 18\sigma_Y m_Y^3 u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sigma_Y^6 J_6 + 9\sigma_Y^5 m_Y^2 J_5 + 9\sigma_Y^4 m_Y^3 J_4 + 9\sigma_Y^3 m_Y^4 J_3 + 6\sigma_Y^2 m_Y^5 J_2 + 6\sigma_Y m_Y^6 J_1 - 6\sigma_Y^5 m_Y J_3 + 18\sigma_Y^4 m_Y^2 J_2 - 18\sigma_Y^3 m_Y^3 J_1 = 15\sigma_Y^6 + 36\sigma_Y^5 m_Y^2 + 9\sigma_Y^4 m_Y^4.$$

**Пример 5.** Случайная функция  $Y(t)$  имеет нормальное одномерное распределение с математическим ожиданием  $m_Y$  и дисперсией  $\sigma_Y^2$ . Найти математическое ожидание и дисперсию случайной функции (рис. 222):

$$X(t) = \varphi(Y(t)) = a \operatorname{sign} Y(t)^*.$$

Математическое ожидание  $m_X$  и дисперсию  $\sigma_X^2$  вычислим, воспользовавшись

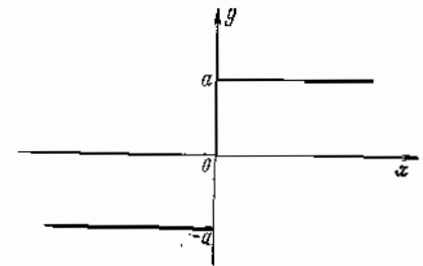


Рис. 222

\* Звено с характеристикой  $X = \operatorname{sign} Y$  называется релейным звеном.

равенствами (40) и (41). Имеем

$$m_X = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign} y e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} dy = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\sigma_Y u + m_Y) e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

где  $u = \frac{y-m_Y}{\sigma_Y}$ .

Функция  $\text{sign}(\sigma_Y u + m_Y)$  положительна при  $u > -\frac{m_Y}{\sigma_Y}$  и отрицательна при

$u < -\frac{m_Y}{\sigma_Y}$ , поэтому, воспользовавшись функцией Лапласа  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{u^2}{2}} du$ ,

получим

$$m_X = a \left[ - \int_{-\infty}^{-\frac{m_Y}{\sigma_Y}} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \int_{-\frac{m_Y}{\sigma_Y}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right] = 2a\Phi\left(\frac{m_Y}{\sigma_Y}\right).$$

Вычислим начальный момент второго порядка случайной функции  $X(t)$ :

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [a \text{sign} y]^2 e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} dy = \frac{a^2}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} dy = a^2,$$

тогда

$$D[X(t)] = \sigma_X^2 = \alpha_2 - m_X^2 = a^2 \left[ 1 - 4\Phi^2\left(\frac{m_Y}{\sigma_Y}\right) \right].$$

При приближенных расчетах в теории автоматического регулирования нелинейное звено с нечетной характеристикой  $\varphi(X)$  заменяют эквивалентным линейным звеном, преобразующим случайный сигнал на входе  $Y(t) = m_Y + Y^\circ(t)$  в случайный сигнал на выходе  $X_1(t)$  по формуле

$$X_1(t) = k_1 Y^\circ(t) + k_0 m_Y(t) \quad (43)$$

таким образом, чтобы случайный сигнал  $X_1(t)$  был в некотором смысле близким к случайной функции  $X(t) = \varphi(Y(t))$  на выходе нелинейного звена. Коэффициент  $k_0$  называется *статистическим коэффициентом усиления нелинейного звена по математическому ожиданию*, а  $k_1$  — *статистическим коэффициентом усиления нелинейного звена по случайной составляющей*. Метод приближенной замены нелинейных характеристик эквивалентными в вероятностном смысле линейными зависимостями называется *методом статистической линеаризации*.

Для того чтобы вычислить коэффициенты  $k_0$  и  $k_1$ , нужно ввести критерий близости эквивалентного звена и линеаризуемого нелинейного звена. Если для эквивалентного линейного звена потребовать,

чтобы математическое ожидание и дисперсия сигнала на его выходе были равны математическому ожиданию и дисперсии на выходе нелинейного звена, т. е.

$$M[X_1(t)] = M[X(t)], \quad (44)$$

$$D[X_1(t)] = D[X(t)], \quad (45)$$

то, учитывая, что математические ожидания и дисперсии сигналов на выходе нелинейного и эквивалентного нелинейного звеньев определяются по формулам

$$M[X_1(t)] = M[k_0 m_Y(t) + k_1 Y^\circ(t)] = k_0 m_Y(t), \quad (46)$$

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) f_Y(y, t) dy, \quad (47)$$

$$D[X_1(t)] = M[k_1 Y^\circ(t)]^2 = k_1^2 \sigma_Y^2(t), \quad (48)$$

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(y) - m_X(t))^2 f_Y(y, t) dy, \quad (49)$$

из равенств (43) и (44) получим:

$$k_0 = \frac{m_X(t)}{m_Y(t)}, \quad (50)$$

$$(k_1^{(2)})^2 = \frac{D[X(t)]}{D[Y(t)]} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}. \quad (51)$$

Коэффициенты  $k_0$  и  $k_1$  можно выбрать также из другого условия эквивалентности звеньев — минимума дисперсии разности между процессами  $X_1(t)$  и  $X(t)$ , т. е. из условия

$$M[(X(t) - X_1(t))^2] = \min. \quad (52)$$

В этом случае имеем

$$\begin{aligned} M[(X(t) - X_1(t))^2] &= M[(X(t) - k_0 m_Y(t) - k_1 Y^\circ(t))^2] = \\ &= M[(X(t))^2] + k_0^2 m_Y^2(t) + k_1^2 M[(Y^\circ(t))^2] - 2k_0 m_Y(t) M[X(t)] - \\ &\quad - 2k_1 M[X(t) Y^\circ(t)] + 2k_0 k_1 m_Y(t) M[Y^\circ(t)] = \\ &= M[(X(t))^2] + k_0^2 m_Y^2(t) + k_1^2 \sigma_Y^2(t) - 2k_0 m_Y(t) m_X(t) - 2k_1 M[X(t) Y^\circ(t)]. \end{aligned} \quad (53)$$

Значения коэффициентов  $k_0$  и  $k_1$  найдем из условия (52), дифференцируя выражение (53) по  $k_0$  и  $k_1$  и приравнявая производные нулю:

$$2k_0 m_Y(t) - 2m_Y(t) m_X(t) = 0, \quad (54)$$

$$2k_1 \sigma_Y^2(t) - 2M[X(t) Y^\circ(t)] = 0. \quad (55)$$

Окончательно имеем:

$$k_0 = \frac{m_X(t)}{m_Y(t)}, \quad (56)$$

$$k_1^{(2)} = \frac{M[X(t) Y^\circ(t)]}{\sigma_Y^2(t)} = \frac{M[X(t) Y^\circ(t)]}{D[Y(t)]}. \quad (57)$$

Таким образом, статистические коэффициенты нелинейного звена при статистической линеаризации можно вычислить по формулам (50), (51) или (56), (57).

**Пример 6.** Вычислить коэффициенты  $k_0$ ,  $k_1^{(1)}$  и  $k_1^{(2)}$  для звена автоматической системы с нелинейностью вида  $X = Y^3$ , если на вход этого звена подан случайный нормально распределенный сигнал с математическим ожиданием  $m_Y$  и дисперсией  $\sigma_Y^2$ .

Воспользовавшись результатами примера 4, из равенств (50) и (51) получим

$$k_0 = \frac{m_X}{m_Y} = \frac{m_Y(3\sigma_Y^2 + m_Y^2)}{m_Y} = 3\sigma_Y^2 + m_Y^2,$$

$$(k_1^{(1)})^2 = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = \frac{3\sigma_Y^2(5\sigma_Y^2 + 12\sigma_Y^2 m_Y^2 + 3m_Y^4)}{\sigma_Y^2} = 3(5\sigma_Y^2 + 12\sigma_Y^2 m_Y^2 + 3m_Y^4).$$

Взаимный момент второго порядка случайных процессов  $X(t)$  и  $Y^*(t)$  вычислим по формуле

$$M[X(t)Y^*(t)] = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^3 (y - m_Y) e^{-\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} dy =$$

$$= \frac{\sigma_Y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_Y u + m_Y)^3 u e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

где  $u = \frac{y - m_Y}{\sigma_Y}$ . Далее получим

$$M[XY^*] = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_Y u + m_Y)^3 u e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sigma_Y^4 J_3 + 3\sigma_Y^2 m_Y J_3 +$$

$$+ 3\sigma_Y^2 m_Y^2 J_2 + \sigma_Y m_Y^3 J_1 = 3\sigma_Y^2 + 3\sigma_Y^2 m_Y^2.$$

Окончательно из равенства (57) имеем:

$$k_1^{(2)} = \frac{M[X(t)Y^*(t)]}{\sigma_Y^2} = 3(\sigma_Y^2 + m_Y^2).$$

**Пример 7.** Вычислить коэффициенты  $k_0$ ,  $k_1^{(1)}$ ,  $k_1^{(2)}$  для звена системы регулирования с нелинейностью вида  $X = a \operatorname{sign} Y$ , если на вход этого звена действует нормально распределенный случайный сигнал  $Y(t)$  с математическим ожиданием  $m_Y$  и дисперсией  $\sigma_Y^2$ .

Воспользовавшись результатами примера 5, из равенств (50) и (51) получим:

$$k_0 = \frac{m_X}{m_Y} = \frac{2a\Phi\left(\frac{m_Y}{\sigma_Y}\right)}{m_Y},$$

$$(k_1^{(1)})^2 = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = \frac{a^2 \left[1 - 4\Phi^2\left(\frac{m_Y}{\sigma_Y}\right)\right]}{\sigma_Y^2}.$$

Смешанный момент второго порядка  $M[XY^*]$  вычислим по формуле

$$M[XY^*] = \frac{a}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} y (y - m_Y) e^{-\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} dy =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\sigma_Y u + m_Y) \sigma_Y u e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{2a\sigma_Y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_Y^2}{2\sigma_Y^2}}.$$

Коэффициент  $k_1^{(2)}$  найдем из равенства (57):

$$k_1^{(2)} = \frac{M[X(t)Y^*(t)]}{\sigma_Y^2} = \frac{2}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_Y}{\sigma_Y}\right)^2}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

### К первой части

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. «Наука», 1968.
2. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. «Просвещение», 1966.
3. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. Гостехиздат, 1956.
4. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. «Наука», 1966.
5. Рублев А. Н. Высшая алгебра. М., «Высшая школа», 1968.

### Ко второй части

1. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. «Наука», 1964.
2. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. «Наука», 1965.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Физматгиз, 1959.
4. Коддингтон Э. А. и Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, 1958.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, 1961.
6. Солодовников В. В. (редактор). Техническая кибернетика, книги I и II. «Машиностроение», 1967.
7. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. «Наука», 1967.
8. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. ИЛ, 1954.
9. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. «Наука», 1966.
10. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. «Наука», 1965.
11. Лефшец С., Ла-Салль Ж. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. «Мир», 1964.
12. Лефшец С. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. «Мир», 1967.

### К третьей части

1. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Физматгиз, 1960.
2. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. «Наука», 1966.
3. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. «Наука», 1965.
4. Фукс Б. А. и Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Физматгиз, 1964.
5. Свешников А. Г. и Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. «Наука», 1967.

### К четвертой части

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Физматгиз, 1962.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II. ГИТТЛ 1952.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. т. II. «Наука», 1964.
4. Толстов Г. П. Ряды Фурье. Физматгиз, 1960.
5. Харкевич А. А. Спектры и анализ. ГИТТЛ, 1957.
6. Солодовников В. В. (редактор). Техническая кибернетика, кн. I. «Машиностроение», 1967.
7. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1954.
- Пугачев В. С. (редактор). Основы автоматического управления. Физматгиз, 1963.

### К пятой части

1. Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л. Переходные процессы в линейных системах. Физматгиз, 1961.
2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1960.
3. Лурье А. М. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Гостехиздат, 1950.
4. Левинштейн М. Л. Операционное исчисление и его приложения к задачам электротехники. «Энергия», 1964.
5. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. «Высшая школа», 1966.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. Госэнергоиздат, 1954.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. «Наука», 1965.
8. Солодовников В. В. (редактор). Техническая кибернетика, кн. I. «Машиностроение», 1967.

### К шестой части

1. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. «Наука», 1967.
2. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. «Наука», 1966.
3. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. Многомерные дискретные системы. «Наука», 1966.
4. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
5. Бромберг П. В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. «Наука», 1967.
6. Кузин Л. Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, 1962.

### К седьмой части

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. «Наука», 1969.
2. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1963.
3. Вейтцель Е. С. Теория вероятностей. «Наука», 1964.
4. Яглом А. М. Введение в теорию случайных функций. Успехи математических наук, т. VII, вып. 5 (51), 1952.
5. Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей. «Наука», 1968.
6. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. «Наука», 1968.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	Стр. 3
-------------------	--------

### Часть первая

#### ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

##### Глава I

###### Матрицы и линейные уравнения

§ 1. Числовые матрицы и действия над ними .....	7
1. Основные понятия и определения (7). 2. Свойства матриц (10).	
§ 2. Определители и их свойства .....	13
1. Инверсия и перестановки (13). 2. Определители $n$ -го порядка (14). 3. Свойства определителей (16). 4. Миноры и алгебраические дополнения (19). 5. Вычисление некоторых определителей (22). 6. Ранг матрицы. Обратная матрица и ее свойства (25).	
§ 3. Понятия о функциональных матрицах .....	30
1. Функциональные матрицы. Векторная запись дифференциальных уравнений (30). 2. Примеры векторной записи дифференциальных уравнений автоматических систем (34).	
§ 4. Системы линейных уравнений .....	39
1. Основные понятия и определения (39). 2. Метод Гаусса (40). 3. Система $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными (45). 4. Правило Крамера (46).	

##### Глава II

###### Линейные пространства. Линейные преобразования

§ 5. Линейные пространства .....	50
1. Определение и основные свойства линейного пространства (50). 2. Линейно-независимые векторы. Размерность линейного пространства (51). 3. Базис линейного пространства (53). 4. Подпространство и его свойства. Линейное многообразие (59).	
§ 6. Системы линейных преобразований линейных пространств .....	60
1. Определение и основные свойства линейного преобразования (60). 2. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования (67). 3. Приведение матриц к диагональному виду (70). 4. Понятие о канонической форме Жордана (77).	

## Глава III

### Евклидовы пространства и квадратичные формы

§ 7. Евклидовы и унитарные пространства .....	79
1. Определение и свойства унитарного пространства (79). 2. Длина вектора, ортогональность векторов (80). 3. Норма матрицы. Экспоненциальная матрица (84). 4. Неравенство Коши — Буняковского (86). 5. Симметричные и ортогональные преобразования (88).	
§ 8. Квадратичные формы .....	92
1. Определение и основные свойства квадратичной формы (92). 2. Канонический вид квадратичной формы (95). 3. Положительно определенные квадратичные формы (98).	

### Часть вторая

#### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

##### Глава IV

###### Элементы теории дифференциальных уравнений

§ 9. Общие сведения о дифференциальных уравнениях .....	100
1. Дифференциальные уравнения. Геометрическая интерпретация решения (100). 2. Нормальная система дифференциальных уравнений (102).	
§ 10. Теорема существования и единственности .....	105
1. Теорема существования и единственности решения для одного уравнения (105). 2. Теорема существования и единственности решения для нормальной системы уравнений (111). 3. Ломаная Эйлера и $\varepsilon$ -приближенное решение (113). 4. Непрерывная зависимость решений от начальных условий и параметров (117).	
§ 11. Линейные дифференциальные уравнения .....	119
1. Нормальная линейная система дифференциальных уравнений (119). 2. Общее решение линейной однородной системы (120). 3. Определитель Вронского. Формула Лиувилля (122). 4. Линейная неоднородная система. Метод вариации произвольных постоянных (125). 5. Формула Коши (128). 6. Линейное уравнение $n$ -го порядка (130). 7. Понижение порядка линейной однородной системы дифференциальных уравнений (135).	
§ 12. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами .....	138
1. Нормальная линейная однородная система уравнений с постоянными коэффициентами (138). 2. Фундаментальная матрица однородной системы (143). 3. Нормальная линейная неоднородная система уравнений с постоянными коэффициентами (144). 4. Линейное уравнение $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами (151). 5. Линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (156).	
§ 13. Некоторые методы решения нелинейных дифференциальных уравнений .....	162
1. Метод последовательных приближений (162). 2. Метод ломаных Эйлера (164). 3. Решение уравнений с помощью степенных рядов (165). 4. Метод фазовой плоскости (167). 5. Метод гармонической линеаризации (167).	
§ 14. Фазовые траектории автономных систем .....	167
1. Фазовое пространство автономных систем (167). 2. Фазовые траектории автономных систем второго порядка (172).	

##### Глава V

###### Дифференциальные уравнения систем автоматического регулирования

§ 15. Методика составления дифференциальных уравнений систем автоматического регулирования .....	187
1. Общие замечания (187). 2. Составление и линеаризация дифференциальных уравнений элементов систем (187). 3. Операторы элементов систем автоматического	

регулирования Передаточные функции (202). 4. Классификация звеньев (204).  
5. Составление дифференциальных уравнений систем автоматического регули-  
рования (207).

- § 16. Процессы в системах автоматического регулирования . . . . . 212  
1. Дифференциальные уравнения систем автоматического регулирования (213).  
2. Процессы в линейных системах (215). 3. Линейные дифференциальные уравне-  
ния, правая часть которых содержит производные от разрывной функции (222).  
4. Импульсная переходная функция (225). 5. Особенности процессов в нелиней-  
ных системах (230).

## Глава VI

### Устойчивость систем автоматического регулирования

- § 17. Понятие устойчивости движения . . . . . 237  
1. Устойчивость в смысле Ляпунова (237). 2. Устойчивость тривиального реше-  
ния (239).  
§ 18. Устойчивость линейных систем . . . . . 240  
1. Устойчивость однородной системы (240). 2. Устойчивость неоднородной системы  
(242). 3. Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами (243).  
4. Критерий Гурвица (245).  
§ 19. Второй метод Ляпунова . . . . . 251  
1. Знакоопределенные и знакопостоянные функции (251). 2. Теорема Ляпунова  
об устойчивости (253). 3. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости  
(254). 4. Теорема Ляпунова о неустойчивости (256).  
§ 20. Исследование устойчивости по уравнениям первого приближения . . . . 257  
1. Уравнения первого приближения (257). 2. Теоремы Ляпунова об устойчивости  
по первому приближению (258).  
§ 21. Исследование устойчивости нелинейных систем автоматического регули-  
рования с помощью второго метода Ляпунова . . . . . 261  
1. Уравнения нелинейных систем. Состояния равновесия (261). 2. Приведение  
уравнений движения к канонической форме (264). 3. Достаточные условия устой-  
чивости состояния равновесия (266).

## Часть третья

### ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## Глава VII

### Функции комплексного переменного

- § 22. Комплексные числа и действия над ними . . . . . 273  
1. Комплексные числа; их геометрическая интерпретация (273). 2. Модуль и аргу-  
мент комплексного числа (274). 3. Сложение, вычитание, умножение и деление  
(274). 4. Возведение в степень и извлечение корня (276).  
§ 23. Понятие о функции комплексного переменного . . . . . 279  
1. Последовательность комплексных чисел. Бесконечно удаленная точка (279).  
2. Множество точек на плоскости (280). 3. Функции комплексного переменного (281).  
§ 24. Дифференцирование функций комплексного переменного . . . . . 285  
1. Производная функции комплексного переменного (285). 2. Условия Коши — Ри-  
мана (286). 3. Гармонические функции (288). 4. Геометрический смысл аргумента  
и модуля производной (290).  
§ 25. Элементарные функции комплексного переменного . . . . . 292  
1. Линейная и дробно-линейная функции (292). 2. Показательная и логарифмиче-  
ская функции (298). 3. Степенная функция (301). 4. Тригонометрические функ-  
ции (308).

## Глава VIII

### Интегрирование функций комплексного переменного

- § 26. Интеграл функции комплексного переменного . . . . . 305  
1. Понятие об интеграле функции комплексного переменного (305). 2. Интеграль-  
ная теорема Коши (307).  
§ 27. Формула Коши . . . . . 311  
1. Формула Коши. Теорема о среднем (311). 2. Интегралы, зависящие от пара-  
метра (313). 3. Производные высших порядков (314). 4. Теорема Морера (316).

## Глава IX

### Функциональные ряды

- § 28. Числовые и функциональные ряды . . . . . 317  
1. Числовые комплексные ряды (317). 2. Функциональные ряды (318). 3. Теорема  
Вейерштрасса (319).  
§ 29. Степенные ряды . . . . . 320  
1. Теорема Коши — Адамара (320). 2. Теорема Абеля (322). 3. Ряды Тейлора (322).  
§ 30. Ряды Лорана . . . . . 325  
§ 31. Особые точки . . . . . 328  
1. Классификация особых точек (328). 2. Разложение в ряд Лорана в окрестности  
особых точек (329).

## Глава X

### Теория вычетов

- § 32. Теорема о вычетах . . . . . 335  
1. Понятие о вычете. Общая формула определения вычета относительно по-  
люса (335). 2. Теорема о вычетах (337). 3. Применение вычетов для вычисления  
несобственных интегралов (338).  
§ 33. Принцип приращения аргумента . . . . . 348  
1. Логарифмический вычет (348). 2. Принцип приращения аргумента (350)

## Часть четвертая

### СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

## Глава XI

### Ряды и интеграл Фурье

- § 34. Ряды Фурье . . . . . 351  
1. Гармонический анализ (351). 2. Сходимость ряда Фурье (363). 3. Разложение  
в интервале  $(0, 2\pi)$  (370). 4. Функции с периодом  $T$  (372). 5. Комплексная форма ряда  
Фурье (375). 6. Понятие о спектрах (377).  
§ 35. Интеграл Фурье . . . . . 381  
1. Предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье (381). 2. Комплексная  
форма интеграла Фурье (385).

## Глава XII

### Преобразование Фурье

- § 36. Свойства преобразования Фурье . . . . . 393  
1. Прямое и обратное преобразование (393). 2. Спектральные характеристики  
суммы, производной и интеграла (396). 3. Спектральная характеристика смещен-  
ной функции. Смещение спектральной характеристики: Сжатие и растяжение  
функции (399). 4. Теорема Парсеваля (402). 5. Умножение спектральных характе-  
ристик. Спектральная характеристика произведений двух функций (405).

§ 37. Спектральные характеристики некоторых функций . . . . .	409
1. Единичная ступенчатая функция. Дельта-функция (409) 2. Гармонические колебания (416).	
§ 38. Спектральные характеристики, зависящие от времени . . . . .	419

### Глава XIII

#### Применение методов спектрального анализа при решении задач теории автоматического регулирования

§ 39. Спектры сигналов в автоматических системах. Частотные характеристики . . . . .	424
1. Преобразование линейной системой гармонического входного сигнала. Определение процесса регулирования (424). 2. Связь между частотными и временными характеристиками линейной системы (431).	
§ 40. Частотные методы исследования устойчивости линейных автоматических систем . . . . .	435
1. Критерий Михайлова (435). 2. Критерий Найквиста (439).	
§ 41. Приближенные исследования периодических режимов в нелинейных автоматических системах . . . . .	444
1. Гармоническая линеаризация нелинейностей (444). 2. Определение параметров предельных циклов (453). 3. Устойчивость предельных циклов (456).	

### Часть пятая

#### ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### Глава XIV

#### Операционное исчисление

§ 42. Преобразование Лапласа . . . . .	461
1. Основные понятия (461). Интеграл Лапласа. Аналитичность изображения (462). 3. Формула обращения (468). 4. Связь преобразований Фурье и Лапласа (471).	
§ 43. Свойства преобразования Лапласа . . . . .	473
1. Линейность преобразования (473). 2. Дифференцирование и интегрирование оригинала (474). 3. Смещение в области оригиналов и в области изображений. Изменение масштаба (477). 4. Умножение в комплексной и действительной областях (481). 5. Дифференцирование и интегрирование изображений (484). 6. Начальное и предельное значения оригинала (487). 7. Вторая независимая переменная (488).	
§ 44. Определение оригинала по изображению . . . . .	492
§ 45. Решение линейных дифференциальных уравнений . . . . .	498
1. Уравнения с постоянными коэффициентами (498). 2. Уравнения с переменными коэффициентами (502).	

### Глава XV

#### Применение преобразования Лапласа для анализа непрерывных автоматических систем

§ 46. Передаточные функции и частотные характеристики системы . . . . .	505
§ 47. Определение процесса регулирования . . . . .	513

### Часть шестая

#### РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### Глава XVI

#### Разностные уравнения и их использование для описания импульсных систем автоматического регулирования

§ 48. Решетчатые функции . . . . .	518
1. Определение решетчатой функции (518). 2. Конечные разности решетчатых функций (519). 3. Суммирование решетчатых функций (523).	
§ 49. Разностные уравнения . . . . .	526
1. Основные понятия и определения (526). 2. Линейные разностные уравнения. Однородные уравнения (529). 3. Линейные неоднородные разностные уравнения (536). 4. Разностные уравнения с постоянными коэффициентами (543).	
§ 50. Системы разностных уравнений . . . . .	546
1. Основные определения (546). 2. Однородные системы линейных разностных уравнений (549). 3. Неоднородные системы линейных разностных уравнений (553). 4. Линейные системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами (557).	
§ 51. Уравнения импульсных систем автоматического регулирования . . . . .	561
1. Некоторые сведения об импульсных системах (561). 2. Уравнения импульсных систем, содержащие суммы решетчатых функций (564). 3. Уравнения импульсных систем в конечных разностях (576).	

### Глава XVII

#### Дискретное преобразование Лапласа

§ 52. Определение дискретного преобразования Лапласа и его основные свойства . . . . .	582
1. Определение дискретного преобразования Лапласа (582). 2. Формула обращения (587). 3. Дискретное преобразование Фурье (590). 4. Дискретный ряд Фурье (591).	
§ 53. Свойства дискретного преобразования Лапласа . . . . .	594
1. Линейность $\mathcal{D}$ -преобразования (594). 2. Смещение в области оригиналов и в области изображений (595). 3. Изображения конечных разностей и суммы решетчатых функций (597). 4. Умножение изображений и оригиналов (600). 5. Дифференцирование и интегрирование изображений (603). 6. Теоремы о предельных значениях изображений и оригиналов (607). 7. Сумма квадратов значений решетчатых функций (608).	
§ 54. Связь между $\mathcal{D}$ -преобразованием и преобразованием Лапласа; $\mathcal{D}$ -преобразование . . . . .	610
1. Связь между $\mathcal{D}$ -преобразованием и преобразованием Лапласа (610). 2. Прямое $\mathcal{D}$ -преобразование (612). 3. Обратное $\mathcal{D}$ -преобразование (614). 4. Связь между преобразованием Фурье непрерывных и решетчатых функций (615).	
§ 55. Свойства $\mathcal{D}$ -преобразования . . . . .	616
1. Линейность $\mathcal{D}$ -преобразования (616). 2. Смещение аргументов изображений (617). 3. Умножение изображений (618). 4. Дифференцирование изображений по Лапласу (622). 5. Начальные значения изображений (622).	
§ 56. Применение дискретного преобразования Лапласа для исследования импульсных систем автоматического регулирования . . . . .	623
1. Уравнения импульсных систем в области изображений (623). 2. Использование дискретного преобразования Лапласа для решения разностных уравнений (629). 3. Применение дискретного преобразования Лапласа для определения процессов в импульсных системах при типовых воздействиях (633).	

Глава XVIII

Устойчивость решений линейных разностных уравнений.  
Анализ устойчивости импульсных систем автоматического регулирования

- § 57. Устойчивость решений разностных уравнений . . . . . 642
  1. Основные теоремы об устойчивости решений систем линейных разностных уравнений (642).
  2. Устойчивость систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами (644).
- § 58. Методы исследования устойчивости импульсных систем автоматического регулирования . . . . . 648
  1. Постановка задачи об исследовании устойчивости импульсных систем (648).
  2. Алгебраический критерий устойчивости (648).
  3. Исследование устойчивости с помощью принципа аргумента (651).
  4. Критерий Найквиста (652).

Часть седьмая

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ  
ДЛЯ АНАЛИЗА АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Глава XIX

Основные сведения из теории вероятностей

- § 59. Событие. Классификация событий. Вероятность события . . . . . 658
  1. Основные понятия (658).
  2. Алгебра событий (660).
  3. Вероятность события (663).
  4. Следствия из аксиом теории вероятностей (669).
  5. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса (670).
  6. Зависимые и независимые события (673).
  7. Последовательность независимых испытаний (674).
- § 60. Случайные величины . . . . . 675
  1. Определения (675).
  2. Функция распределения вероятностей (676).
  3. Плотность распределения вероятностей (680).
  4. Законы распределения некоторых случайных величин (682).
  5. Функции случайных величин (687).
- MI § 61. Векторные (многомерные) случайные величины . . . . . 689
  1. Основные определения (689).
  2. Функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей случайного вектора (691).
  3. Независимые и зависимые случайные величины. Условные функции распределения (694).
  4. Неслучайные функции нескольких случайных аргументов (701).
- § 62. Числовые характеристики (моменты) случайных величин . . . . . 705
  1. Основные определения (705).
  2. Свойства математического ожидания и дисперсии (708).
  3. Моменты многомерных случайных величин (712).
  4. Комплексные случайные величины (716).
- § 63. Характеристические функции . . . . . 718
  1. Характеристические функции одномерных случайных величин (718).
  2. Характеристические функции и числовые характеристики некоторых случайных величин (720).
  3. Характеристические функции векторных случайных величин (720).
  4. Многомерное нормальное распределение и его числовые характеристики (722).
- § 64. Простейшие предельные теоремы . . . . . 728
  1. Неравенство Чебышева (728).
  2. Теорема Чебышева (729).
  3. Теорема Янулли (731).
  4. Виды сходимости случайных последовательностей (731).
  5. Теорема Муавра — Лапласа (733).

Глава XX

Элементы теории случайных функций

- MI § 65. Корреляционная теория случайных функций . . . . . 735
  1. Понятие случайной функции (735).
  2. Основные характеристики случайной функции (736).
  3. Комплексные случайные функции (738).
  4. Непрерывность случайной функции в среднем квадратическом (742).
  5. Линейные операции над случайными функциями (745).

- 754  
V N3 § 66. Стационарные случайные функции . . . . . 754
  1. Определение стационарных случайных функций (754).
  2. Свойства корреляционной функции стационарной случайной функции. Стационарно связанные случайные функции (755).
  3. Примеры стационарных случайных функций (756).
  4. Спектральное представление стационарных случайных функций (760).
- § 67. Эргодические случайные функции . . . . . 765
  1. Оценка математического ожидания (765).
  2. Оценка корреляционной функции (768).
- § 68. Дискретные случайные функции . . . . . 771
  1. Основные понятия и определения (771).
  2. Линейные операции над дискретными случайными функциями (772).
  3. Стационарные дискретные случайные функции (774).
  4. Эргодические дискретные случайные функции (780).
- § 69. Примеры применения теории случайных функций для анализа автоматических систем . . . . . 780
  1. Прохождение случайного сигнала через линейную непрерывную систему (780).
  2. Прохождение случайного сигнала через линейную импульсную систему (787).
  3. Прохождение случайного сигнала через нелинейное безынерционное звено (791).
  - Понятие о методе статистической линеаризации (791).
- Литература . . . . . 798