ИОГАНН КЕПЛЕР

1571 — 1630

К Л А С С И К И
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ПОД ОБЩЕЙ
РЕДАКЦИЕЙ

И. И. АГОЛА, С. И. ВАВИЛОВА,
М. Я. ВЫГОДСКОГО, Б. М. ГЕССЕНА,
М. Л. ЛЕВИНА, А. А. МАКСИМОВА,
А. А. МИХАЙЛОВА, И. П. РОЦЕНА,
А. Я. ХИНЧИНА

NOVA
STEREOMETRIA
DOLIORVM VINARIORVM, INPRI-
mis Auſtriaci, figuræ omnium
aptiſsimæ;

ET

USUS IN EO VIRGÆ CUBI-
cæ compendioſiſſimus & pla-
ne ſingularis.

Acceſſit

STEREOMETRIÆ ARCHIME-
deæ Supplementum.

Authore
Ioanne Kepplero, Imp. Cæſ Matthiæ I
ejuſq, fidd. Ordd. Auſtriæ ſupra Anaſum
Mathematico.

Cum privilegio Caſæreo ad annos XV.

ANNO  *M. DC. XV.*

LINCII

Excudebat JOANNES PLANCVS, ſumptibus Authoris.

НОВАЯ СТЕРЕОМЕТРИЯ ВИННЫХ БОЧЕК

ПРЕИМУЩЕСТВЕННО АВСТРИЙСКИХ, КАК ИМЕЮЩИХ САМУЮ ВЫГОДНУЮ ФОРМУ И ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО УДОБНОЕ УПОТРЕБЛЕНИЕ ДЛЯ НИХ КУБИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙКИ

С ПРИСОЕДИНЕНИЕМ ДОПОЛНЕНИЯ К АРХИМЕДОВОЙ СТЕРЕОМЕТРИИ

СОЧИНЕНИЕ

ИОГАННА КЕПЛЕРА

МАТЕМАТИКА ИМПЕРАТОРА ЦЕЗАРЯ МАТВЕЯ I И ЕГО ВЕРНЫХ ЧИНОВ ВЕРХНЕЙ АВСТРИИ С ЦЕЗАРСКОЙ ПРИВИЛЕГИЕЙ НА XV ЛЕТ

ПЕРЕВОД И ПРЕДИСЛОВИЕ
Г. Н. СВЕШНИКОВА
ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ
М. Я. ВЫГОДСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА MCMXXXV ЛЕНИНГРАД

Переплет, суперобложка и графическая орнаментация книги
художника А. П. РАДИЩЕВА.

Чертежи М. М. СЫРКИНА.

М. Я. ВЫГОДСКИЙ

ИОГАНН КЕПЛЕР
И ЕГО НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

ИОГАНН КЕПЛЕР

И ЕГО НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Почти шестидесятилетняя жизнь Кеплера протекала в эпоху, когда на смену схоластической науке, находившейся в полном подчинении богословию и теологической философии, возникало и пускало корни научное мировоззрение нового времени, основанное на наблюдении явлений природы, эксперименте и математической обработке полученных отсюда данных.

Это новое мировоззрение было мировоззрением нового общественного класса — буржуазии, ломавшей рамки старого феодального общества и вместе с ними уничтожавшей идеологическую надстройку феодализма — авторитарное мышление, теологические и телеологические спекуляции, вербализм и мистику. Уничтожить эти формы научного, вернее, квази-научного, мышления было совершенно необходимо, ибо в границах этих форм просто невозможны были те успехи науки, без которых не могло существовать буржуазное общество; на первых порах его развития такими науками являлись так называемые неорганические науки: астрономия, механика, оптика, объединявшиеся в то время под общим именем математики, ибо все они требовали количественного учета и строгих математических доказательств.

Новые общественные классы не падают с неба и не возникают из ничего; они зарождаются в недрах старых общественных формаций. Сообразно с этим идеология их не сразу выливается в законченную форму, и история дает нам примеры самых разнообразных и причудливых сочетаний старого и нового мировоззрений, формирующихся в головах различных его представителей. Старое часто, почти всегда, сохраняется в некоторой степени, иногда в большей, иногда в меньшей, наряду с новым. В области физико-математических наук это положение исторически подтверждается столь же ярко, как и в области философии, политики, эстетики и морали.

Казалось бы, нет ничего более чуждого мистики, чем новая астрономия; казалось бы, нет ничего более чуждого телеологии, чем новая механика, и, однако, сплошь и рядом у творцов и основоположников их мы находим и то и другое.

В этом отношении ярким примером соединения несоединимых противоречий является Иоганн Кеплер. Он является ярким представителем своей эпохи, с ее причудливым переплетением социальных интересов, пестрой группировкой политических течений, рискованных компромиссов и ожесточенных войн, религиозных по форме, классовых по содержанию. Основоположник новой астрономии Кеплер ближе, чем кто-либо из его современников, подходит к овладению основными законами движения светил; в области небесной механики он находится, так сказать, в преддверии открытия закона всемирного тяготения. В этом отношении он уходит гораздо дальше, чем, например, Галилей. И в то же время на его научных трудах лежит такой сильный налет мистицизма и телеологии, что тот же Галилей, в полном согласии с духом новой науки, должен был отвергать кеплеровы фантастические построения (правда, вместе с ними он отвергал и некоторые положительные достижения). И это происходило именно потому, что у Кеплера элементы старого и нового были сплетены в грандиозный клубок, и нелегко было современнику этот клубок распутать.

Иоганн Кеплер родился 27 декабря 1571 года в местечке Магсштадт, близ городка Вейля, в герцогстве Вюртемберг. Он происходил из обедневшей дворянской семьи, обедневшей настолько, что средства к жизни родители Кеплера добывали мелкой торговлей. Вюртемберг принадлежал к числу тех германских областей, которые отпали от католичества и где господствовало лютеранство. Кеплер был воспитан в духе протестантизма и в эту эпоху религиозной нетерпимости оставался преданным аугсбургскому исповеданию, хотя переход в католичество неоднократно мог бы способствовать улучшению условий его жизни, далеко не богатой материальными успехами.

Пятнадцати лет Кеплер поступил в духовную семинарию при Маульбрунском монастыре, откуда через три года перешел в духовную академию в Тюбингене. По окончании академии Кеплер должен был стать священником, и, повидимому, эта карьера ему улыбалась. Но Кеплер был слишком религиозным человеком, чтобы духовная карьера оказалась ему по плечу. Не исполнилось еще и ста лет со времени возникновения лютеранства, возникшего под лозунгом борьбы с религиозным догматизмом, как логика развития всякой религии привела лютеранство к созданию своей догмы. Кеплер, настроенный, как мы сказали, очень религиозно, но стремившийся к построению стройной системы взглядов, в которой рассудочные доводы не отвергались бы простым „credo, quia absurdum est“ („верю, потому что это нелепо“), должен был, конечно, столкнуться с церковным догматизмом своих учителей и скоро попал на плохой счет в академии. Когда ему стало ясно, что духовная карьера его не может быть удачной, он решил переменить специальность и вместо богословия избрал специальностью астрономию.

В Тюбингенской академии астрономия изучалась, наряду с другими светскими дисциплинами, как подсобная наука, с основами которой должен быть знаком богослов. Но благодаря тому, что преподаватель этой дисциплины, Местлин, был человеком широкообразованным, Кеплер имел возможность уже в академии заинтересоваться астрономией и математикой и под руководством Местлина сделал в них большие успехи.

В 1593 году Кеплер окончил академию и получил должность „профессора математики и морали“ в городе Граце в Штирии. Вскоре Кеплер получил там же кафедру астрономии.

Штирия была не протестантской, а католической областью, но в эти годы к протестантам там относились терпимо, так что препятствий к допущению Кеплера со стороны властей не было.

Материальные условия в жизни Кеплера в этот период, как, впрочем, и позднее, до самой его смерти, были довольно тяжелы. Занимаемая им должность не могла его прокормить, и он, как и многие другие астрономы того времени, приобретал средства к существованию выпуском календарей, находивших себе распространение главным образом из-за предсказаний всякого рода, дававшихся на каждый день, и составлением гороскопов, т. е. предсказаний судьбы на основании расположения светил на небе. Нужно сейчас же оговориться, что, несмотря на мистические элементы мировоззрения Кеплера, о которых мы уже говорили и о которых мы еще будем говорить подробнее, сам Кеплер не придавал никакого значения этим предсказаниям. Составляя их, он мирился с печальной необходимостью находить себе пропитание этим путем, который представлялся ему менее предосудительным, чем другие виды приобретения денег. „Лучше издавать альманахи с предсказаниями, — пишет Кеплер, — чем просить милостыню“. „Астрология — дочь астрономии, хотя и незаконная, и разве не естественно, чтобы дочь кормила свою мать, которая иначе могла бы умереть с голоду?"

В течение семи лет, проведенных Кеплером в Граце, весь свой досуг Кеплер посвящает углубленному изучению законов природы, особенно законов строения вселенной. Еще в Тюбингене, вероятно, под влиянием Местлина, Кеплер познакомился с книгой Коперника „Об обращениях небесных кругов" и стал сторонником гелиоцентрического учения. Хотя это учение разбивало те представления о мире, которые проповедывала церковь, но в умах творцов его, благодаря тем историческим связям, которые, как выше было отмечено, являют картину сложных и пестрых сочетаний старого и нового, коперниканское учение укладывалось в рамки религиозного сознания. Лишь у немногих людей, как Джордано Бруно, проповедь коперниканства связывалась с протестом, если не против религии вообще (Бруно, конечно, не был атеистом), то против традиционных религиозных установлений. Другие, подобно Галилею, может быть, и чувствовавшие разрыв между религиозно-догматическим и научным мировоззрением, стремились к созданию компромисса, сознательно или бессознательно содействуя сохранению авторитета церкви, как орудия эксплоатации в руках правящих классов*.

У Кеплера же коперниканское учение, ярым приверженцем которого он оставался всю свою жизнь, не

* Об этом подробнее см. мою работу „Галилей и инквизиция", ГТТИ, 1934.

только не вступало в противоречие с его религиозным сознанием, но даже черпало оттуда источник новых построений. Неудача их не нарушала уверенности Кеплера в существовании мудрого божьего промысла; она свидетельствовала для него лишь о том, что его попытка проникнуть в тайны творения пока не увенчалась успехом. Свои гипотезы Кеплер создает, исходя из стремления проникнуть в мудрые промыслы божии; устройство вселенной он хочет разгадать через познание планов творения мира. И если Кеплеру кажется, что данный план наиболее отвечает премудрости создателя, то он кладет его в основу своих построений. Коперникова система представляется Кеплеру именно таким планом.

Наряду с этим Кеплер, в соответствии с духом новой науки, в наблюдении, опыте и их математической обработке видит источник научного знания.

Такое чудовищное для нас сочетание научных и религиозных идей примиряется у Кеплера следующим образом. Мистическими спекуляциями по поводу путей господнего творчества Кеплер оправдывает возникшую у него картину мира. Затем тщательно и пристально, иногда годами, он проверяет следствия своей гипотезы, наблюдением и опытом старается подтвердить ее правильность. И, если она не подтверждается, он отказывается от нее с тем, чтобы ревностно приняться за создание новой картины.

В этой своеобразной мозаике научные и религиозные мотивы переплетены еще теснее, чем это представлено нами схематично, и потому-то даже современникам Кеплера не легко было выделить рациональное зерно из многих его построений, облеченных в одежды мистических формул. Так, например, в противоположность неправильной теории приливов Галилея, Кеплер высказал гениальную мысль о том, что приливы обусловливаются взаимопритяжением Луны и Земли, но форма, в которой это утверждение было высказано, заставила Галилея отбросить самую мысль о возможности воздействия Луны на явления, происходящие на Земле.

Плодом этого экзальтированного творчества явилась работа Кеплера „Prodromos dissertationum cosmographicum seu Mysterium cosmographicum" („Новые космографические исследования или космографическая тайна"), написанная Кеплером во время пребывания его в Граце в 1597 году. В предисловии к этому сочинению Кеплер приходит в восторг при мысли о том, что ему удалось открыть планы творца, проникнуть в его мысли. Эти раскрытые Кеплером планы развивали коперникову теорию и сообщали этой теории в глазах Кеплера непоколебимую достоверность. В чем же состояла открытая Кеплером космографическая тайна?

Изучая взаимные расстояния Солнца и планет, Кеплер искал закона, связывающего эти расстояния. Вот гипотеза, которую он выставил и которая, как ему казалось, вполне соответствовала действительности.

Так как бог творил вселенную мудро, то он должен был использовать наиболее совершенные геометрические образы, а таковыми являются сфера и пять правильных многогранников; с этими телами и должно быть связано устройство мира.

Кеплер мыслит себе это устройство так: в центре вселенной находится Солнце; ближайшая к нему планета — Меркурий. Опишем сферу с центром в Солнце и радиусом, равным расстоянию от Солнца до Меркурия; вокруг этой сферы опишем правильный восьмигранник, а около восьмигранника сферу № 2; тогда радиус этой сферы будет расстоянием от Солнца до следующей планеты — Венеры. Продолжая таким же образом, но пользуясь последовательно правильными 20-, 12-, 4- и 6-гранниками, мы получим расстояния Земли, Марса, Юпитера и Сатурна * как длины радиусов соответствующих многогранников. Для Кеплера это построение полностью подтверждает систему Коперника, ибо только при гелиоцентрической системе этот замечательный закон верен. Если в центре мира поставить Землю, то такой стройной системы, достойной премудрости божией, не получится. Более того, эта система давала Кеплеру ответ на вопрос, почему число планет именно шесть, а не какое-либо другое. Устройство вселенной, таким образом, приобретало необходимый характер, лишаясь элемента случайности. Опытные данные, как казалось Кеплеру, вполне подтверждали установленную закономерность.

---

* Кроме этих планет, другие в то время не были известны.

На этом примере мы можем конкретно видеть, как переплетаются научные и телеологические элементы в мировоззрении Кеплера. Искание закона, установление необходимых связей, математическая формулировка законов, опытная их проверка — все это от науки. Телеологическое обоснование, поиски творческого акта божества, числовые спекуляции пифагорейско-платонического характера* — это от религиозной мистики.

Впоследствии Кеплер убедится в том, что его построения не отвечают действительности, и в позднейших работах дал доказательство гениальной своей способности к научной индукции и проверке гипотез путем наблюдений. Однако и отказавшись от выводов своей первой работы, он не отказался от „методов", которым в ней следовал; напротив, и в дальнейшем он широко ими пользуется.

В 1598 году терпимое отношение к протестантам в Штирии сменилось религиозными притеснениями, завершившимися изгнанием протестантов за пределы области. Кеплеру было предложено сохранить должность при условии перемены им религии, но он с негодованием отверг это предложение. После двухлетних странствований с семьей (Кеплер женился в 1597 году на вдове, имевшей ребенка от первого мужа) Кеплер поступил на службу к Тихо Браге (1546—1601), знаменитому уже в то время астроному, который вы-

---

* См. мою работу „Платон как математик", „Вестник Комакадемии" № 16, 1926.

нужден был оставить свою родину Данию и сделался „императорским астрономом“.

По целому ряду причин, между прочим и благодаря разногласиям по вопросу об учении Коперника, которое, как известно, Браге отвергал, личные отношения Кеплера с Браге были не очень хорошими. Тем не менее Браге очень ценил таланты своего молодого ученика, а Кеплер получил большую пользу, пройдя школу Браге, первого астронома этой эпохи, великого мастера наблюдений и вычислений.

Лишь два года пробыл Кеплер на службе у Браге. В 1601 году последний умер, и Кеплер был назначен на должность императорского астронома, занимавшуюся до того Браге. В руки Кеплера перешли дневники наблюдений Браге. Эти дневники Кеплер подверг тщательному изучению. Они дали ему материал для изучения законов движения планет и на основе этого материала он получил возможность убедиться прежде всего в том, что его догадки о „гармонии мира“ не стояли в соответствии с действительностью. Но они же дали ему возможность установить истинные закономерности в движении планет.

Не легко и не просто было из сырого материала наблюдений построить те законы, которые и поныне известны каждому школьнику под именем законов Кеплера. Восемь лет неустанной работы прошло, пока Кеплер установил первые два свои закона. Они были открыты им на основании данных, относящихся к движению Марса. Эти данные показали Кеплеру прежде всего, что расстояние Марса до Солнца не остается неизменным. Но представление о круговых орбитах планет казалось Кеплеру таким непреложным, что долгое время он старался найти решение задачи, сохраняя круговую форму орбиты, но помещая Солнце вне центра этого круга. Неудачи этих попыток привели его сначала к мысли, что орбита Марса имеет форму яйцеобразного овала, и лишь затем Кеплер пришел к мысли, что орбита Марса — эллипс. Но и здесь ждала его неудача, ибо Кеплер вначале пытался поместить Солнце в центре эллиптической орбиты. Наконец, ему пришла идея, что Солнце расположено не в центре, а в фокусе эллипса, описываемого Марсом, и эта идея подтвердилась данными наблюдения. Так был открыт первый закон Кеплера.

Следующей задачей Кеплера было определить закон движения Марса по его орбите. Здесь долгие искания привели Кеплера к открытию второго закона: площади, описываемые при движении Марса радиусом-вектором, соединяющим Марс и Солнце, пропорциональны времени. Результаты эти и подробное описание хода своих работ Кеплер изложил в своей вышедшей в 1609 году в Праге работе „Astronomia nova“ („Новая астрономия“).

Эта работа Кеплера также не лишена мистического элемента, но мистика своеобразно сочетается у Кеплера с научными построениями: она служит Кеплеру суррогатом физической закономерности там, где данные наблюдения и опыта еще недостаточны для строго научного установления закономерности. Таким образом старая, отжившая форма мышления, ниспровержению которой объективно содействовали работы Кеплера, сочетается у Кеплера с новыми научными методами, одним из основоположников которых он является. Субъективно она дает ему рамки для проявления смелой фантазии, для облечения в художественно-убедительную форму гениальных предчувствований. Эта смелость полета мысли, эта дерзновенность творческого предвидения, вероятно, и была причиной того, что Маркс на вопрос о том, кто его любимые герои, ответил: Спартак и Кеплер.

„Новая астрономия" Кеплера — это поистине гигантское произведение человеческой мысли, являющееся монументальным памятником начала новой эпохи, и если бы вообще возможно было устанавливать фиксированные даты начала новой эпохи, то такой датой с полным правом может считаться выход в свет этой книги.

Здесь мы не будем давать более подробного разбора „Новой астрономии"; в ближайшее время читатель сможет ознакомиться с этим произведением в русском переводе, а вступительная статья к нему должна будет дать и более подробную его оценку.

Астрономические работы стояли всегда в центре внимания Кеплера, и в этом отношении он является выразителем научных интересов эпохи, ибо в начале XVII века астрономические проблемы были центральными научными проблемами, в соответствии с требованиями, предъявлявшимися важнейшей в экономическом отношении техникой — техникой мореплавания. Именно, развитие дальнего мореплавания ставило задачу составления точных карт и определения координат точки земной поверхности, а то и другое опиралось на астрономические расчеты. Вот почему проблемы небесной механики имеют в эту эпоху не меньшую важность, чем проблемы общей механики. Вот почему продолжатель дела Кеплера — Ньютон свои законы механики неразрывно связал с изучением небесной механики.

Итак, астрономические работы Кеплера были главным делом его жизни. Но это не значит, что он замкнулся в узком кругу астрономических проблем. Напротив, именно они заставили его выдвинуть и разрешить ряд вопросов смежных наук; и в этом отношении он является ярким представителем той эпохи, в которую многочисленные проблемы астрономии, механики и математики ставились и разрешались в тесной взаимной связи.

При обработке астрономических наблюдений Браге Кеплер должен был добиваться максимального устранения ошибок наблюдений. Одним из важных источников неточности данных Браге являлось влияние преломления лучей в земной атмосфере, и Кеплер параллельно со своей основной работой занялся изучением оптических явлений. В 1604 году вышла его книга по оптике „Paralipomena ad Vitellionem“ — „Дополнения к Вителлию“. В 1611 году, два года спустя после „Новой астрономии“, Кеплер выпускает „Диоптрику“, посвященную исследованию свойств оптических стекол.

В этом сочинении Кеплер дает теорию зрительной трубы, на изобретение которой претендовал Галилей и которая, во всяком случае, на год раньше Галилея была сконструирована голландским мастером оптических стекол Липпершеем (в 1608 году). „Галилеева труба“ была прототипом нашего бинокля и состояла из комбинации двояковыпуклого и двояковогнутого стекла. В „Диоптрике“ Кеплер описывает также устройство новой изобретенной им трубы, состоящей из двух двояковыпуклых стекол. Эта труба, дающая перевернутое изображение объекта, и поныне именуется трубой Кеплера — один из редких случаев, когда научное открытие связывается с именем его действительного автора. Не нужно распространяться о том, какое огромное значение имела зрительная труба Кеплера — предок современных телескопов — для астрономических измерений и наблюдений.

С астрономическими работами Кеплера тесно связаны и его математические занятия. Кеплер был прекрасным вычислителем и немало способствовал развитию вычислительной техники. Новые наблюдения вносили значительные изменения в старые данные и, кроме того, давали результаты с гораздо большей степенью точности. Так, уже угломерные измерения Браге были произведены с точностью до половины минуты. Естественно, что прекрасные для своего времени таблицы Птоломея, в которых угол измерялся с точностью только до половины или, в лучшем случае, четверти градуса, а также и позднейшие таблицы

Региомонтана, Ретика и других астрономов нового времени, сравнительно немного уточнявших данные Птоломея, нужно было пересоставлять. Тригонометрические таблицы также нужно было перевычислить вследствие необходимости нахождения более точных значений тригонометрических величин. Все это требовало выработки сокращенных вычислительных приемов, с одной стороны, обеспечивающих получение той степени точности, которая обеспечивалась точностью исходных данных, и, с другой стороны, устраняющих ненужные выкладки, не влияющие на достоверные цифры результата. Этими приемами Кеплер мастерски овладел, и выпущенные им в 1627 году „Рудольфовы таблицы" (названные так в честь императора Рудольфа) явились результатом огромной работы, которую он смог проделать в сравнительно короткий срок именно потому, что широко применял эти приемы.

Неудивительно, что Кеплер был одним из первых математиков, оценивших все значение логарифмических таблиц, выпущенных Непером в 1614 году. Кеплер самостоятельно построил теорию логарифмических вычислений (Непер опубликовал ее значительно позднее, в 1619 году) и в 1622 году составил свою логарифмическую таблицу, которая удобнее построена, чем таблица Непера; расположение материала в ней приближается к общепринятому в наше время. Интересно отметить, что целый год понадобился Кеплеру, чтобы получить возможность напечатать эти таблицы, и лишь в 1624 году они появились в свет.

В приближенных вычислениях чрезвычайно большую роль играет умение правильно пренебрегать; нужно знать, какую величину можно, а какую нельзя отбросить в вычислении. Долгое упражнение вырабатывает в вычислителе особое чутье, позволяющее быстро ориентироваться в вопросах этого рода.

Это чутье было в высшей степени развито у Кеплера, и оно сослужило ему большую службу при разработке им новой математической области, в которую он вступил одним из первых и, во всяком случае, в которую он сделал первый крупный новый вклад. Мы говорим о методе бесконечно-малых.

Уже в первых своих астрономических работах Кеплер столкнулся с необходимостью вычисления площадей таких фигур, как овал и эллипс. Вспомним, что второй закон Кеплера имеет дело с площадью эллиптического сектора, имеющего вершину в фокусе эллипса. Такие площади не были известны, и для нахождения их средств элементарной геометрии не было достаточно. Мы пользуемся теперь для решения подобных задач исчислением бесконечно-малых, а ведь в начале XVII века его еще не существовало. Его нужно было создать, ибо не только задача измерения площадей, но и ряд других — например задача об определении центра тяжести, момента инерции, вычисления пути движущегося тела — настоятельно требовали своего решения.

Кеплер берется и за задачи этого рода; он обобщает их, систематизирует, отвлекает от частных особенностей, определяемых сюжетом вопроса, и впервые создает если еще не исчисление, то метод бесконечно-малых *. Рассуждениями, основанными на пользовании бесконечно малыми величинами — мы будем их называть инфинитезимальными, — Кеплер пользуется уже в „Новой астрономии", но систематическое изложение новых своих идей он дает в „Стереометрии австрийских бочек", которая в этой книге и предлагается вниманию читателя. „Стереометрия бочек" написана по случайному поводу, о котором Кеплер рассказывает в предисловии, — по поводу наблюдения, сделанного Кеплером над способами измерения объема бочек на верхнем Рейне; наблюдение это было сделано в связи с закупками вина для угощения гостей, приглашенных Кеплером на торжество бракосочетания со своей второй супругой. Рассказ об этой свадьбе фигурирует во многих историях естествознания (которые обычно охотно украшаются подобными курьезными случаями), и я встречал немало людей, которые склонны были считать этот рассказ басней и выдумкой буржуазных историков. Но бывает, что правда похожа на выдумку, как бывает и выдумка похожа на правду (и в истории естествознания такие случаи не редки).

Нет никаких оснований сомневаться в данном случае, что глубокомысленная работа Кеплера имела поводом легкомысленное происшествие: Кеплер отнюдь

* О различии между этими двумя понятиями будет сказано ниже.

не был черствым сухарем и был достаточно одарен фантазией. Но, разумеется, смешно было бы думать, что работа Кеплера имела обстоятельства его семейной жизни своей причиной. Как мы показали выше, разработка Кеплером метода бесконечно-малых началась значительно раньше и имела своим стимулом гораздо более глубокие причины. И, конечно, если бы не свадьба Кеплера, то результаты, им полученные, были бы изложены им по другому поводу и в другое время.

На исторических предпосылках создания тех методов, основы которых Кеплером заложены в „Стереометрии бочек", на значении этих методов для дальнейшего развития науки и на оценке их современниками мы должны будем остановиться более подробно, но именно поэтому мы сейчас оставим пока эти вопросы в стороне, чтобы вернуться к ним в конце этой статьи. Теперь же мы закончим рассказ о жизненном пути Кеплера.

Должность императорского астронома должна была давать Кеплеру достаточный доход, если бы жалованье, ему назначенное (1500 флоринов в год), выплачивалось ему сколько-нибудь аккуратно. Но скудные средства императорской казны расходовались на статьи, представлявшиеся имперским властям более первоочередными, чем содержание придворного ученого, которому предоставлялась полная возможность питаться, как он умеет. Вот почему тяжелая нужда всегда стучалась в ворота Кеплера. Вот почему он должен был всю свою жизнь составлять гороскопы, календари и альманахи, В 1610 году умерла первая жена Кеплера, от которой Кеплер имел троих детей. Двое из них, трехлетний сын и восьмилетняя дочь, остались на попечении отца; третий, сын, умер незадолго до смерти матери. Чтобы получить более обеспеченный доход, Кеплер оставил резиденцию императора Прагу и переселился в Линц, где он получил место школьного учителя математики. Здесь он вторично женился в 1613 году. „Господь благословил этот брак", и от второй жены Кеплер имел восьмерых детей. Через два года после второй женитьбы Кеплер получил очень неприятные известия от членов своей семьи: мать Кеплера была обвинена в колдовстве и против нее был возбужден процесс, грозивший ей сожжением на костре. Действительно, Екатерина Кеплер — так звали мать великого ученого — была заключена в тюрьму в Леонберге. Через год ее, однако, выпустили, и она переехала в Линц к сыну Иоганну вместе с другим сыном своим Христофором — братом астронома, — оловянных дел мастером.

Легко представить себе, что заботы Кеплера при этом значительно умножались, но еще больше забот принес ему дальнейший ход дела его матери. Несмотря на настойчивые протесты Иоганна, мать его снова посадили в тюрьму, судили и приговорили к смертной казни „без пролития крови", т. е. к сожжению. Процесс тянулся пять лет. Кеплер употреблял все усилия, чтобы спасти мать от смерти. Он засыпал письмами влиятельных лиц, ему покровительствовавших, ездил в Регенсбург хлопотать за мать перед имперскими властями. Наконец, в 1620 году он добился ее освобождения. Возвратившись в Линц, он был встречен крайне недоброжелательно местными заправилами, которые сторонились сына ведьмы и подвергали его всяческим оскорблениям. Это заставило Кеплера покинуть Линц. В продолжение восьми лет он скитается по разным германским городам, ища себе пристанища. Семья его оставалась все это время в Линце. В это время Кеплер получал ряд почетных приглашений — в Англию и в Италию. Однако Кеплер их не принял, надеясь устроиться у себя на родине. Но до самой смерти он не мог создать себе сколько-нибудь прочных и спокойных условий жизни. Германия раздиралась тридцатилетней войной, разорявшей страну и доведшей ее до полного изнеможения. Феодальные князья, никогда не уделявшие науке и ученым серьезного внимания, в этот момент меньше всего склонны были заниматься судьбой какого-то астролога, и Кеплер, достигший в 1621 году пятидесятилетнего возраста, был так же необеспечен, как и в своей молодости, несмотря на свои научные заслуги, несмотря на покрывавшую его имя мировую славу.

Слава эта увенчалась к этому времени новым открытием Кеплера: в 1619 году в книге „Harmonice mundi“ („Мировая гармония“) Кеплер опубликовал третий из законов, носящих и ныне его имя (первые два, как мы помним, были опубликованы в 1609 году в „Новой астрономии“). „Мировая гармония“, как и прежние работы Кеплера, наряду с замечательными мыслями, содержащимися в ней и вошедшими в арсенал новой науки, наполнена мистикой. Безудержная фантазия и стремление к обобщениям, искание божественной гармонии и тайного смысла в числах, характеризующих явления природы, приводят Кеплера к совершенно правильным построениям; руководясь часто поэтическими и эстетическими, а не геометрическими и физическими основаниями, Кеплер наполняет свой труд пророчествами и прорицаниями, далеко выходящими за пределы мира астрономических и физических явлений. Мы упоминаем об этом еще раз для того, чтобы позднее обратить внимание на аналогичные черты его работ чисто математического характера, черты, характерные для индивидуальности Кеплера. Игнорирование этих черт лишило бы нас возможности отделить и в математическом творчестве Кеплера то, что составляет особенность его личности, от того, что характерно для науки новой эпохи.

Несмотря на обрисованные выше тяжелые условия, в которых приходилось работать Кеплеру, удивительная трудоспособность этого гениального человека позволила ему выпустить при жизни 45 печатных трудов. Собрание сочинений Кеплера, опубликованное Фришем в 1858—1871 годах и включающее многие из неизданных при жизни Кеплера трудов, составляет восемь больших томов. Заметим, кстати, что значительная часть рукописей Кеплера принадлежит сейчас Советскому союзу и хранится в Пулковской обсерватории. Они были приобретены Академией наук еще в 1775 году.

После восьмилетних странствований Кеплера в тщетных стараниях найти себе обеспеченный заработок или получить причитавшееся ему жалованье императорского астронома, казалось, он мог считать свое дело устроенным. Валленштейн, организатор и предводитель наемных армий, сражавщихся на полях Германии под знаменем императора и католической церкви, потребовал от императора Фердинанда, чтобы тот сделал его владетельным князем. Император предоставил ему в 1528 году во владение Мекленбургское герцогство, поставив при этом ряд условий, в числе которых новоиспеченному герцогу было вменено в обязанность выплатить из доходов герцогства ряд императорских долгов, в том числе и долг Кеплеру.

Не нужно, однако, забывать, что в это время трудно было ответить на вопрос, кто кому фактически подчинен: Валленштейн императору или император Валленштейну. Всесильного кондотьера поэтому никак нельзя было заставить выполнить предписание императора. Кеплер занимался поэтому и у Валленштейна составлением гороскопов, на этот раз уже для самого Валленштейна. Но кеплеровские гороскопы не пришлись по вкусу его хозяину. Кеплер был отстранен от двора Валленштейна и возвратился в Линц. Отсюда он вновь обращался к имперским властям в Регенсбурге с требованиями об уплате жалованья и несколько раз совершал сам поездки в Регенсбург.

Последнее его путешествие состоялось осенью 1630 года; Кеплеру было уже почти 59 лет; его здоровье, которым он никогда не мог особенно похвалиться, было надломлено долгими годами жизненной неурядицы и путешествий. По дороге в Регенсбург Кеплер заболел и через несколько дней по прибытии в Регенсбург умер. Семья его — жена и четверо малолетних детей не получили и после смерти Кеплера ни гроша из причитавшегося ему жалованья; за всю свою тридцатилетнюю службу Кеплер получил лишь тысячу флоринов, т. е. восьмимесячный оклад.

Памяти Кеплера было оказано так же мало внимания, как и ему самому при жизни. На месте его погребения была положена простая каменная плита, и неизвестно даже, написали ли на ней сочиненную себе самим Кеплером латинскую эпитафию:

Mensus eram coelos; nunc terrae metior umbras;
Mens coelestis erat; corporis umbra jacet.

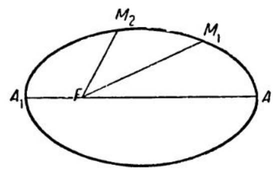
В переводе на русский язык, да простит мне читатель эту поэтическую попытку, эти простые и гордые слова могли бы звучать:

Я небеса измерял; ныне тени земли измеряю.
Дух на небе мой жил; здесь же тень тела лежит.

Иоганн Кеплер, как мы видели, был настоящим сыном своей эпохи. В своей многосторонней деятельности он охватил вопросы, являвшиеся центральными проблемами его века. И эти вопросы не были для него оторваны друг от друга. Так же, как в общей научной проблематике XVII века, и в личном творчестве Кеплера астрономия, механика, оптика и математика были соединены между собой глубокими внутренними связями. Каждый знает Кеплера-астронома (законы Кеплера); многие знают Кеплера-физика (кеплерова труба); гораздо менее известен Кеплер-математик. А между тем и в области математики Кеплер заложил фундаментальные камни здания новой науки. Математические работы Кеплера, как и все математические открытия XVII века, имеют, как мы сейчас увидим, своим источником потребности практики. Это, однако, отнюдь не значит, что математические проблемы не имеют у Кеплера своей внутренней логики, что он не поднимает математику на принципиальную высоту научной дисциплины. Подобное упрощенчество чуждо Кеплеру так же, как и другим деятелям новой науки. Но если на более высоких ступенях развития науки связь между абстрактной математической наукой и конкретными ее источниками проследить труднее и сложнее, то у Кеплера и вообще у авторов XVII века эта связь бросается в глаза очень резко. Мы уже говорили, например, о том, что необходимость производить сложные выкладки при астрономических расчетах заставила Кеплера с большим вниманием отнестись к новому методу логарифмических вычислений. Мы должны теперь подробнее остановиться на другом методе, самым созданием которого наука обязана в значительной степени Кеплеру. Мы говорим о методе бесконечно-малых, ведущем методе новой математики. Всякому, знакомому с элементами современной механики, известно, какую роль в механике, земной и небесной, играет так называемый „математический анализ". Без понятий и методов высшей математики невозможно себе представить изучения сколько-нибудь сложного движения. Мы видели, с другой стороны, что Кеплер изучал, старался открыть и в конце концов открыл законы движения планет вокруг Солнца. Эти законы, как известно, отнюдь не просты, и, преодолевая стоявшие на пути его математические трудности, Кеплер естественно столкнулся с необходимостью создания новых математических средств исследования.

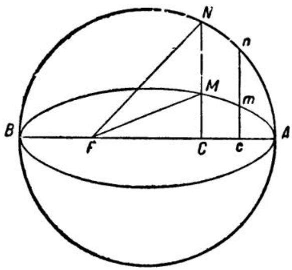
Насколько эти новые средства были действительно необходимы, насколько узки были проторенные пути математики конечных величин, насколько насущна была потребность в привлечении математики бесконечного — покажет, надеемся, следующий пример. Второй открытый Кеплером закон движения планет состоит, как известно, в том, что радиус-вектор планеты (т. е. луч, соединяющий центры планеты и Солнца, находящегося в фокусе эллиптической орбиты) описывает площади, пропорциональные временам.

Для экспериментального установления этого закона нужно было прежде всего обладать умением измерять площадь M_1FM_2, ограниченную двумя произвольными радиусами-векторами и дугой эллипса, или, что то же, площадь M_1FA, заключенную между большой осью эллипса, дугой его AM_1 и подвижным радиусом-вектором FM_1 (фиг. 1). Конечно, кроме этого нужно еще было дойти до мысли искать выражение зависимости между временем и площадью, а не длиной дуги, например. В последнем случае сложность закона зависимости, наверное, оказалась бы непреодолимым препятствием для индуктивного обобщения. Но вопрос о том, как Кеплер пришел к этой мысли, нас может сейчас не занимать, как вопрос иного порядка, чем нас интересующий. Ограничимся только замечанием, что еще тогда, когда Кеплер старался уместить движение Марса в круговую орбиту, сдвинув Солнце из центра этой орбиты, уже тогда явное непостоянство как линейной, так и угловой скорости движения привело его к мысли изучать изменение секториальной площади, образованной движением прямой, соединяющей Солнце и планету. Таким образом идея изучать изменение секториальной площади родилась у Кеплера еще ранее того, чем он открыл свой первый закон. После открытия первого закона эта идея его не оставила; с чисто математической стороны она не должна была претерпеть существенной модификации, ибо, как показывает фиг. 2, секториальная площадь AFM при всех положениях точки M пропорциональна секториальной площади AFN (ANB — окружность, построенная на большой оси эллипса AMB, как на диаметре; MC — перпендикуляр к большой оси; точка N —



Фиг. 1.

пересечение продолженного перпендикуляра с окружностью). В самом деле, площадь AFN представляет сумму площадей треугольника CNF и полусегмента ACN. Площадь треугольника CNF имеет к площади треугольника CMF отношение $NC : MC$. Это отношение для эллипса постоянно (оно равно $a:b$, где a и b — полуоси эллипса). Это же постоянное отношение имеют и площади полусегментов ACN и ACM, ибо они образованы движением ординат nc и mc, сохраняющих постоянное отношение $(a:b)$ своих длин. Последнее обстоятельство в современной символике может быть выражено элементарной формулой

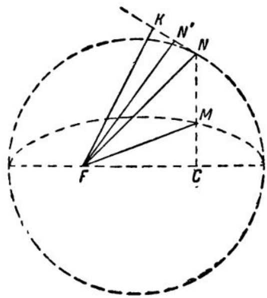


Фиг. 2.

интегрального исчисления $\int\limits_a^b \frac{a}{b}\, y\,dx = \frac{a}{b}\int\limits_a^b y\,dx.$

На языке Кеплера и его эпохи, не знавшей еще этой символики и абстрактного понятия интеграла, оно выражалось своеобразно — пока мы на этом не останавливаемся, заметив только, что самое положение о постоянстве отношения двух площадей, образованных ординатами, сохраняющими постоянное отношение длин, было и для Кеплера достаточно элементарным. Итак, вместо изучения изменения секториальной площади эллипса AFM, Кеплер мог с таким же успехом изучать изменение секториальной площади круга AFN, ей пропорциональной.

Ясно, однако, что, для того чтобы установить закон изменения секториальной площади круга, нужно научиться ее измерять. При этом для поставленной цели нет надобности определить площадь с абсолютной точностью по ее геометрическим элементам. Достаточно, если будет найден метод, которым можно было бы измерить площадь с любой степенью точности или, практически, с достаточно большой степенью точности. Это замечание пусть не покажется слишком тривиальным искушенному в математике читателю, который может здесь усмотреть простую тавтологию: оно, как мы увидим дальше, имеет существенное значение для понимания специфических черт математики бесконечного эпохи Кеплера.



Фиг. 3.

Итак, перед Кеплером стояла задача установить возможно более простой способ измерения площади сектора AFN' (фиг. 3). Ясно, что, разбив эту площадь промежуточными радиусами-векторами в достаточно большом количестве на достаточно узкие элементарные секторы, мы с достаточной точностью (и притом с тем большей, чем тоньше элементарные секторы) можем заменить эти элементарные секторы элементарными прямолинейными треугольниками вида FNN'; при этом при достаточно тонких секторах направление NN' очень мало будет отличаться от направления касательной к окружности в точке N. Площадь сектора AFN поэтому с большой точностью представится полусуммой произведений оснований NN' на высоты FK (FK — перпендикуляр, опущенный из фокуса на касательную в точке N). Если теперь разбивать дугу AN окружности всегда на *равные* части, то при различных положениях точки N площадь сектора AFN будет почти пропорциональна сумме перпендикуляров, опущенных из фокуса на касательные в точках деления окружности на равные части. Если же принять во внимание, что, по свойству эллипса, установленному еще Архимедом, длина этого перпендикуляра равна радиусу-вектору FM соответствующей точки эллипса (т. е. той точки M, в которой ордината окружности NC пересекает эллипс), то ясно, что площадь кругового (а значит, и соответствующего эллиптического сектора) почти пропорциональна сумме радиусов-векторов FM. Пропорциональность площади сектора и суммы радиусов-векторов будет тем точнее, чем меньшими мы возьмем равные дуги по окружности. Только нужно помнить, что точка M должна занимать ряд положений между A и M так, чтобы соответствующая точка N проходила *равные* дуги на окружности. В той формулировке, которую сам Кеплер дает своему второму закону, последнее обстоятельство, правда, не поставлено на вид, но нет никакого сомнения в том, что Кеплеру оно совершенно ясно. В формулировке Кеплера второй закон гласит. время, употребляемое планетой для перемещения от конца большой оси до произвольного ее положения, относится ко времени полного оборота, как сумма радиусов-векторов, проведенных ко всем точкам дуги, к сумме радиусов-векторов всего эллипса.

Здесь мы встречаемся с выражениями, чуждыми уху современного читателя. Прежде всего термин „сумма всех радиусов-векторов“ показался бы, вероятно, читателю совершенно неправомерным, если бы мы не предпослали формулировке Кеплера наброска его построения. Очень возможно также, что читатель не усмотрел бы в законе Кеплера закона *площадей*, ибо у Кеплера речь идет лишь о сумме *отрезков*.

Между тем эта формулировка — не случайная описка и не индивидуально кеплеровский способ выражения. Подобное мы встретим и у других авторов, в том числе у второго основоположника метода бесконечно-малых Кавальери, первая работа которого („Геометрия непрерывных величин, изложенная методом неделимых“) была готова к печати спустя 18 лет после выхода „Новой астрономии“ и спустя 11 лет после выхода кеплеровой „Стереометрии бочек“ (опубликована эта работа Кавальери была лишь через девять лет после ее составления).

Критики Кавальери и Кеплера не раз упрекали их за то, что они, якобы, составляли площадь из линий. Это утверждение можно найти и в современных сочинениях по истории математики. Оно, однако, основано на неумении отличить форму выражения идеи от самой идеи. Что эта форма выражения не обладает большой четкостью — это верно, и несколько позднее Паскаль указал на необходимость ее уточнения и показал, как это сделать.

Для Кеплера, как и для Кавальери, сумма отрезков не равна площади, а лишь пропорциональна ей, как это явствует из его формулировки закона площадей. Более того, ясно, хотя это прямо и не сказано, что эти отрезки (радиусы-векторы) должны браться не как попало, а по определенному закону. Легко видеть, что если, например, радиусы-векторы проводить так, чтобы на равные части делилась дуга эллипса, а не соответствующая дуга окружности, то площади секторов отнюдь не будут даже приблизительно пропорциональны суммам радиусов-векторов.

Несмотря на это, Кеплер, как и Кавальери, как, впрочем, и Паскаль и другие авторы XVII века, говорит о сумме „всех радиусов-векторов“, „всех ординат“ и т. д. Этот термин „сумма всех“ (summa omnium) заменяет у них наш термин „интеграл функции“; его неопределенность того же порядка, как та, которая проистекает от того, что мы не указываем, по какой независимой переменной производится интеграция. Так, „интеграл радиуса-вектора“ — это величина недоопределенная, пока не сказано, что аргументом является дуга окружности s или эллипса σ; в первом случае это интеграл $\int r\,ds$, во втором $\int r\,d\sigma$. Интересно здесь же отметить, что самый знак интеграла (удлиненная буква S) был введен Лейбницем в самом конце XVII века именно как сокращение термина „summa omnium“ и что даже Лейбниц не сразу оценил символически-оперативную необходимость писать обозначения аргумента интеграции и ограничивался первоначально обозначением $\int r$.

Итак, несмотря на явный недостаток терминологии — недостаток весьма существенный не только с точки зрения четкости изложения, но и с точки зрения правильности результатов — основоположники метода бесконечно-малых в XVII веке все же пользовались безоговорочно понятием „суммы всех линий“. Почему так происходило?

Потому, что при отсутствии развитой символики (она была дана впервые Лейбницем и в другой форме Ньютоном), при относительно слабом вообще внедрении приемов буквенного исчисления даже в математику конечных величин всякое нагромождение словесно-алгебраических формулировок явилось бы тяжелым грузом для науки, грузом, который легко транспортируется при усовершенствованных путях ее продвижения, но который парализовал бы первые ее шаги.

В еще большей мере нужно сказать то же и о самом понятии бесконечной совокупности „всех“ элементов некоторой суммы. В рассмотренном выше примере объектами суммирования являлись конечные величины. Суммирование бесконечного их числа дает, очевидно, величину бесконечно большую. Но в других случаях у того же Кеплера и у других авторов мы встретимся и с суммированием бесконечно большого числа бесконечно малых величин: например длина дуги рассматривается как сумма бесконечно малых ее элементов. Как называются эти элементы — это вопрос второстепенный: Кеплер, например, как мы увидим, называет их просто точками и образует из суммы длин „точек“ длину линии. Другие авторы, например Ферма, пользуются термином „малейшая линия“ (minima linea), „неопределенно малая линия“ (indefinite parva linea) и т. п. Важно то, что во всех этих случаях всегда речь идет о *сумме всех* элементов, а не о *пределе* сумм или о пределе отношения сумм.

Второй закон Кеплера был бы „безукоризненно“ сформулирован, если бы мы сказали, что отношение времен пропорционально пределу отношения бесконечно возрастающих сумм длин радиусов-векторов, надлежащим образом проводимых. Казалось бы на первый взгляд, что не так уж трудно было Кеплеру или какому-либо его современнику дать такую формулировку или иную, ей эквивалентную. Однако это не было сделано Кеплером, не было сделано никем из современников; более того, в течение следующего столетия никому не удавалось систематическим образом освободиться от „актуализации“ бесконечных процессов и получать существенно новые результаты, пользуясь концепцией потенциальной бесконечности. Своего рода инфинитезимально-атомистический подход — вот что характерно для математики XVII и XVIII веков. Ниже мы приведем несколько характерных примеров этого математического атомизма у Кеплера. Сейчас же мы поставим вопрос о том, чем объясняется это явление, столь характерное для эпохи великого переворота в методах математики и ее проблематике и столь неожиданное для человека, не занимавшегося вопросами истории математики.

На поставленный нами вопрос напрашивается сам собой такой ответ: математика XVII века не доросла еще до такого уровня, который позволил бы ей поставить со всей необходимой глубиной вопросы обоснования нового метода. Этот ответ, однако, был бы грубо ошибочным, так же как ошибочно было бы думать, что сам Кеплер и его современники не видели того, что атомистические концепции не укладываются без противоречий в рамки математики непрерывных величин. Нет, они это прекрасно видели. Но имели ли они средство для устранения атомистических построений? Да, имели, и при этом средство старое, испытанное. Более того, они умели это средство применять для доказательства полученных ими результатов. Но это средство не годилось для открытий, для нахождения новых результатов. Мы сейчас поясним эти утверждения.

Еще от классической древности, через средневековую традицию, через посредничество арабской науки, наконец, через непосредственное ознакомление с греческими авторами, начавшееся в Западной Европе в конце XV века, унаследовала западноевропейская математика так называемый метод исчерпывания, выполнявший в древнегреческой математике ту же служебную функцию, что наш метод пределов. Хотя о методе исчерпывания написано достаточно и в популярных и в специальных книгах по истории математики, однако мы считаем нелишним здесь остановиться на его характеристике, во-первых, потому, что не всякий читатель с ним знаком по другим источникам; во-вторых, потому, что в оценке этого метода, даваемой нами ниже, мы не во всем солидарны с установившимися оценками.

В качестве примера, на котором удобнее всего будет ознакомиться с методом исчерпывания, мы рассмотрим архимедово доказательство теоремы о площади круга. При этом, так как нас интересует только идея доказательства, мы не будем в точности придерживаться формулировок Архимеда, а передадим точно лишь ход рассуждения Архимеда *.

Архимед хочет доказать, что площадь круга равновелика площади прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен по длине окружности круга, а другой — радиусу его. Так как, сверх того, для отношения окружности к ее диаметру Архимед устанавливает в качестве верхнего и нижнего ограничений отношения $\frac{22}{7}$ и $\frac{223}{71}$ (рассматривая периметры вписан-

* Классические образцы доказательства методом исчерпывания можно найти в IV выпуске вилейтнеровой „Хрестоматии по истории математики“. Русский перевод А. П. Юшкевича, ГТТИ, 1933.

ных и описанных многоугольников), то этим самым устанавливаются границы, внутрь которых падает отношение площади круга к площади квадрата, построенного на диаметре круга.

Итак, Архимед рассматривает круг с центром O и радиусом OP (фиг. 4) и прямоугольный треугольник ABC (катет AB равен радиусу, катет BC — окружности круга). Требуется доказать, что круг O и треугольник ABC имеют равные площади.

Фиг. 4.

Положим, что это не так — рассуждает Архимед, Тогда возможны два случая: 1) круг O имеет большую площадь, 2) круг O имеет меньшую площадь, чем треугольник ABC.

Рассмотрим случай „1“. В этом случае площадь круга превосходит площадь треугольника L на вполне определенную (не равную нулю) величину $D = K - L$. Но Архимед знает (это доказано во 2-м предложении XII книги евклидовых „Начал“)*, что, *какова бы ни была* наперед заданная площадь D, всегда можно в круг вписать многоугольник со столь большим чис-

* Евклидово доказательство см. у Вилейтнера, вып. IV, стр. 15 и сл.

лом сторон, что площадь K будет превосходить площадь многоугольника K_1 на величину, меньшую, чем D:

$$K - K_1 < D.$$

Это предложение, примененное к нашему случаю, когда $D = K - L$, гласит: можно вписать в круг вписанный многоугольник так, чтобы

$$K - K_1 < K - L,$$

откуда следует

$$K_1 > L, \tag{1}$$

т. е. можно вписать в круг многоугольник, имеющий площадь, большую, чем площадь треугольника ABC. Но, с другой стороны, так как периметр вписанного многоугольника меньше длины окружности, т. е. меньше катета AC, а апофема многоугольника меньше катета AB, то площадь многоугольника должна быть меньше площади треугольника ABC:

$$K_1 < L. \tag{2}$$

Неравенства (1) и (2), однако, противоречат друг другу, чем и доказывается несостоятельность первого предложения.

Аналогично доказывается, что несостоятельно предположение (2), т. е. предположение, что $K < L$, ибо тогда можно построить описанный многоугольник, площадь которого K_1 настолько мало разнилась бы от площади K, что и для K_1 было бы справедливо неравенство

$$K_1 < L.$$

Но апофема описанного многоугольника равна радиусу круга, т. е. катету AB, тогда как периметр его *больше* окружности круга, т. е. больше катета AC. Значит,

$$K_1 > L.$$

Снова получаем противоречие.

При невозможности предложений (1) и (2):

$$K > L$$

и

$$K < L$$

остается только одно, именно, что

$$K = L,$$

что и требовалось доказать.

Рассуждение Архимеда отличается от вышеприведенного лишь по форме: отсутствие буквенных обозначений придает ему своеобразный стиль, непривычный читателю, не занимавшемуся специально историей математики. Вот почему мы прибегли к пересказу, сохраняющему, однако, полностью ход мысли величайшего из геометров.

Этот ход мысли обнаруживает умение доказать предложения, которые мы теперь доказываем с помощью метода пределов, вполне строго и во вполне строгих терминах.

Для современного математика один только пункт в рассуждениях Архимеда требует модификации. Для современного математика площадь кривой (круга) не дана *вместе* с площадью многоугольника. Она определяется как *предел* площади многоугольника, и существование этого предела подлежит доказательству. Для античного же математика площадь кривой есть столь же первоначальное понятие, как площадь многоугольника, и доказательству подлежит, что при изменении многоугольника по определенному закону его площадь стремится к пределу, *равному* площади кривой. Термина „предел" у греков не было, но когда Евклид говорит, что разность между площадью круга и вписанного в него многоугольника может быть сделана меньше всякой данной площади, то разве это не адэкватно нашему выражению: площадь круга есть предел площади многоугольника (при неограниченном увеличении его сторон)?*

Итак, доказательство Архимеда столь же строго по существу, как и современные доказательства, выполняемые методом пределов. И не нужно думать, что лищь простенькие предложения вроде только что приведенных древние авторы умели доказывать методом исчерпывания. У того же Архимеда, например, мы

---

* Евклид доказывает во 2-м предложении XII книги, собственно говоря, то, что разность площадей вписанного и описанного многоугольников может быть сделана меньше всякой величины, а отсюда как следствие вытекает, что и подавно разность между площадью круга и площадью вписанного многоугольника может быть как угодно мала. Поэтому даже отмеченная выше разница между современной и античной концепцией площади не играет в доказательстве Архимеда принципиальной роли.

найдем столь же строгие доказательства теорем о площади параболического сектора, объеме эллипсоида вращения. Архимед же находит касательную к „архимедовой“ спирали и вычисляет площадь сектора, образованного ее дугой и двумя ее радиусами-векторами. Целый ряд других теорем был доказан Архимедом, Аполлонием и другими авторами древности методом исчерпывания, и метод этот был хорошо знаком математикам XVII века. Почему же они предпочли „строгому“ методу исчерпывания „нестрогий“ метод математического атомизма? Мы уже дали выше ответ на этот вопрос. Применение метода исчерпывания требует предварительного знания результата для доказательства его справедливости. Если мы знаем, что площадь круга равна площади некоторого треугольника, то мы можем *доказать* это, предполагая, что это не так, и опровергая это предположение построением некоторой фигуры (в данном случае многоугольника), достаточно мало отличающейся от круга по площади и в то же время, вопреки предположению, большей (или, наоборот, меньшей), чем площадь треугольника. Иначе говоря, в методе исчерпывания мы можем доказать справедливость некоторого предельного соотношения, но не *находить* его. Для того чтобы находить *предельное* соотношение, существенно необходимо установить самое понятие предела и, более того, ряд общих правил предельных переходов, другими словами, преобразовать синтетический метод древних в аналитический.

Эта задача отнюдь не так проста, как может показаться человеку, воспитанному на современных математических методах. На пути к решению ее стоят многие трудности, на которых я здесь не буду останавливаться, отсылая читателя к моей книге „Основы исчисления бесконечно-малых"*. Преодолеть эти трудности не могли ни математики XVII века, ни величайшие математики древности.

Возникает вопрос, как же находили в действительности математики древности свои замечательные результаты? Может быть, благодаря одной гениальной интуиции? Нет, это не так. В открытой Гейбергом четверть века назад дотоле неизвестной работе Архимеда („Послание к Эратосфену") ** мы находим и прямой ответ на поставленный только что вопрос. Архимед рассказывает, как он получил те результаты, которые он потом строго доказывал методом исчерпывания. Оказывается, что он пользовался атомистическими концепциями, рассматривая площадь как „сумму" параллельных ординат, объем — как „сумму" площадей поперечных сечений тела. На целом ряде примеров Архимед показывает, как он применял эти соображения, комбинируя их с использованием „механических" приемов. Эти механические приемы представляют собой не что иное, как применение центра тяжести для произ-

---

* Гл. I, § 18; гл. IV, § 18, 3-е изд. ГТТИ, 1933.

** Имеется в русском переводе „Новое сочинение Архимеда", Mathesis, 1909.

водства суммирования элементов площади или объема. Зная положение центра тяжести фигуры или тела из соображений симметрии, Архимед может определить некоторую площадь или объем; наоборот, зная площадь или объем некоторых тел или фигур, он находит центр тяжести других. Примеры архимедова метода можно найти в той же хрестоматии Вилейтнера, и мы их здесь приводить не будем.

Архимед не считает свой „механический“ метод строго геометрическим, но указывает, что, получив результат этим методом, не трудно его доказать строго.

Кроме того, Архимед указывает, что его „механический“ метод является развитием приемов, применявшихся Демокритом. Демокрит жил на два века раньше Архимеда; во время Демокрита греческая математика, повидимому, только начинала ставить задачи инфинитезимального характера, и атомистические концепции в то время господствовали во всей науке. Естественно ожидать, что эпохе Евклида и Архимеда в истории греческой математики предшествовала эпоха, когда атомистические концепции и в математике играли ведущую роль. До нас, к сожалению, не дошла целиком ни одна математическая работа этой эпохи; поэтому историки математики до последнего времени не придавали большого исторического значения греческой атомистической математике. Между тем эта атомистическая концепция, несомненно, играла для позднейшей греческой математики роль, аналогичную роли инфинитезимальных методов XVII века для создания современной математики. Известная ограниченность кругозора буржуазных историков математики, проистекающая из антиисторичности их исторических концепций, мешала им понять то значение, которое *должны* были иметь атомистические методы в греческой математике, а скудость и отрывочность фактических сведений не позволяли им увидеть, что это значение они *фактически* имели. Для автора этих строк никогда не было сомнения в том, что атомистические методы в свое время были господствующими если не во всей греческой математике, то во всяком случае среди определенной школы, именно школы материалистов, возглавлявшейся Демокритом. Появившаяся недавно новая работа советского автора С. Я. Лурье * дает чрезвычайно обстоятельный анализ сохранившихся фрагментарных документальных данных с той же точки зрения. К этой работе, содержащей массу фактического материала, частично впервые публикуемого, мы и отсылаем читателя, интересующегося подробностями. Против некоторых положений автора, может быть, и можно возражать, но основная его мысль доказана, мне кажется, бесспорно: математика древних греков в „доевклидов" период ее развития шла путями атомистических методов, имею-

* Она напечатана в немецком журнале „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik", B. 2, H. 2 (Abt. B), 1932. На русском языке она должна появиться вскоре в расширенном виде под заглавием „Теория бесконечно-малых в учении древних атомистов".

щих глубокое внутреннее родство с методами математиков XVII века. Это родство тем более поразительно, что оно проявляется и во внешней форме выражения мыслей: терминология Кеплера и Кавальери очень близка к терминологии „Послания к Эратосфену“: и там и здесь, например, о площади говорится как о сумме линий (мы уже привели выше в качестве примера кеплерову формулировку его второго закона), хотя и Архимед и основоположники новой математики, конечно, прекрасно понимали, что речь идет не о сумме в обычном смысле этого слова. Сходство терминологии, на которое мы указали, так велико, что невольно напрашивается мысль о том, что Кеплер знал архимедово „Послание“. Мысль эта находит себе, как будто, подтверждение в том, что сам Кеплер утверждает (см. „Стереометрия бочек“, стр. 123), что его доказательства раскрывают подлинный смысл строгих рассуждений Архимеда. По мнению Кеплера, Архимед, высказывая некоторое предложение на строгом языке метода исчерпывания, *хочет* сказать на самом деле именно то, что утверждает он, Кеплер, на своем языке математической атомистики.

Однако отсюда никак нельзя сделать вывода, что Кеплер читал „Послание к Эратосфену“. Он *читает в мыслях* Архимеда и читает правильно, потому что их мысли созвучны, как созвучны их эпохи. Возможность же текстуального знакомства с „Посланием“ совершенно исключена, так как мы достоверно знаем, что „Послание к Эратосфену“ стало известно лишь в XX веке, что европейцы XVII века его не читали. Конечно, не исключена возможность сохранения некоторой традиции, передававшейся в устном преподавании и сохранившей методы „Послания“, но и в этом случае достойно удивления, что Кеплер распознал, что в этой традиции лежит ключ к пониманию великих авторов древности и к продолжению и развитию их математического творчества.

То, что видел Кеплер, не видели его критики, стоявшие на позициях „строгой“ математики и с точки зрения застывших методов официальной античной математики критиковавших Кеплера. Ставя превыше всего формальную безупречность доказательств, критики кеплеровых методов не понимали, что их нестрогость является необходимой исторической предпосылкой для дальнейшего развития математики, ибо тяжеловесный синтетический аппарат метода исчерпывания, совершенно не пригодный для раскрытия новых закономерностей, с трудом может служить даже для подтверждения правильности уже полученных результатов и что новые строгие аналитические методы могут вырасти лишь на базе достаточного развития нестрогих методов Кеплера.

Для нас, людей XX века, критика, которую встретили методы Кеплера у современников, отнюдь не потеряла своего интереса: если многие современники Кеплера не видели исторического значения его методов, то многие наши современники не видят огромного *педагогического* значения „нестрогих“ инфинитезимальных построений. Если инфинитезимальные методы XVII века являются давно пройденным историческим этапом развития математики, то *в преподавании* математики они должны и поныне оставаться *исходным пунктом,* ибо в них основные идеи анализа бесконечно-малых выступают хотя и в упрощенной, но именно благодаря своей упрощенности легко доступной форме. Строгое обоснование полученных результатов гораздо плодотворнее усваивается именно после предварительного прохождения первого, нестрогого, этапа развития математической мысли. Этого не видят многие наши современники, в результате чего на алтарь математической строгости приносится в жертву понимание учащимися сути операций и понятий современного анализа*. Вот почему исторический экскурс в область тех споров, которые развертывались триста лет назад вокруг вопроса о допустимости инфинитезимально атомистических приемов математического творчества, далеко не лишен сейчас актуальности.

Прежде чем приводить аргументы противников Кеплера, мы должны будем привести один-два примера

---

* Здесь по необходимости я вынужден ограничиться этими краткими замечаниями. Свои взгляды по этому вопросу я подробно развил еще в своей статье „О принципах преподавания анализа бесконечно-малых“, сборник „На борьбу за материалистическую диалектику в математике“, ГНТИ, 1931, стр. 290—304. Еще более подробно я развил их в своей книге „Основы исчисления бесконечно-малых“, ГНТИ, 1-е изд. 1931 г., 3-е изд. 1933 г.

его приемов рассуждения и получаемых с их помощью результатов. При этом нам нет необходимости приводить здесь Кеплера текстуально, так как примеры эти мы заимствуем из „Стереометрии бочек“, здесь печатаемой. На вопросах же, связанных с характеристикой стиля Кеплера, мы здесь можем не останавливаться, так как об этом речь будет ниже.

В качестве первого примера мы возьмем 2-ю теорему „Стереометрии бочек“. Она устанавливает, что отношение площади круга к площади квадрата, построенного на диаметре его, приближенно равно отношению 11:14. В предыдущей теореме было установлено, что отношение окружности к диаметру приблизительно равно отношению 22:7. Теперь Кеплеру нужно доказать, что площадь круга равна площади треугольника, имеющего основанием длину окружности, а высотою радиус круга. После этого вычисление отношения площади этого треугольника к площади квадрата, построенного на диаметре круга, выполняется совершенно элементарно. Итак, задача сводится к доказательству равновеликости круга и упомянутого треугольника. Мы уже видели, как доказывает это Архимед. Кеплер считает необходимым доказать это и ряд других уже доказанных Архимедом предложений другим, более простым способом, так как считает, что его доказательства воспроизводят идею архимедова доказательства „настолько, насколько этого достаточно для удовлетворения ума, любящего геометрию“.

„Точные же и во всех отношениях совершенные доказательства, — добавляет Кеплер, — может найти в книгах самого Архимеда тот, кто не убоится тернистого пути их чтения“ („Предварительные замечания“, стр. 109 этой книги) *. Идею архимедова доказательства Кеплер в данном случае понимает так: круг разбивается секторами на бесконечно большое число секторов, каждый из которых можно рассматривать как прямоугольный треугольничек. Одновременно основание треугольника, равное, по условию, окружности круга, разбивается на такое же число частей, на какое разбита окружность. Соединяя точки деления с противоположной вершиной треугольника, мы разбиваем треугольник на столько же бесконечно малых треугольников, на сколько секторов был разбит круг. Эти бесконечно малые треугольники и сектора круга попарно равно-велики (так как у них по построению одинаковые основания и, как легко видеть, равные высоты).

Таково доказательство Кеплера. „Это самое,— добавляет Кеплер, — имеет в виду архимедово приведение к нелепости“.

В первой части „Стереометрии“ Кеплер передоказывает аналогичными приемами ряд предложений античной геометрии. Начиная с 18-го предложения, Кеплер применяет эти приемы к раскрытию новых, дотоле неизвестных. В 18-м предложении, например, устанавливается, что объем тора равен объему цилиндра,

* Перевод цитат всюду мой.

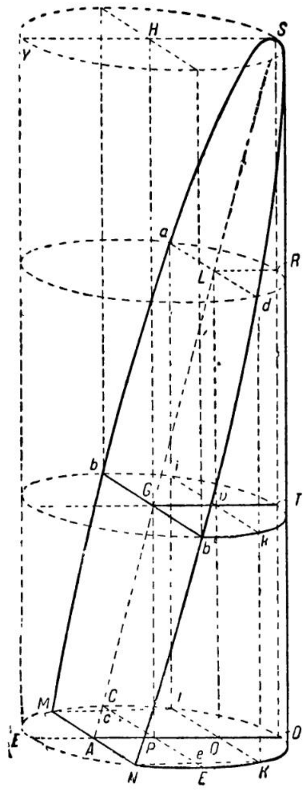
основанием которого служит меридиональное сечение тора, а высотой — длина окружности, описываемой центром образующего тор круга. Кеплер доказывает это так (см. стр. 176 этой книги). Меридиональными сечениями тор разбивается на бесконечно большое число „кружочков“ (orbiculi). Толщина их у внешнего края тора больше, чем у внутреннего, и среднее арифметическое этих толщин равно толщине кружочка в центральной его части. Поэтому Кеплер принимает, что объем такого кружочка равен объему цилиндрического кружочка, имеющего высоту, равную толщине центральной части кружочка. Тогда тор и цилиндр, о котором говорится в условии теоремы, разбиваются на равное число равнообъемных частей; этим теорема 18-я доказана.

Как мы видим здесь, Кеплер получает новый результат весьма простым приемом, по существу не более сложным, чем тот, каким доказано предложение 2-е.

Примером более развитой цепи умозаключений может служить предложение 20-е, формулирующее свойство далеко не очевидное и обнаруживающее ту степень техники инфинитезимальных построений, которой Кеплер владеет. В этом предложении Кеплер устанавливает связь между „поясами“ сферы и „яблока“. Яблоком Кеплер называет тело, произведенное вращением вокруг какой-нибудь хорды большего из стягиваемых ею сегментов (тело, производимое вращением меньшего сегмента, Кеплер называет „лимоном“). Если теперь из яблока вырезать часть его, отсекаемую каким-нибудь цилиндром, ось которого совпадает с осью яблока, то остающееся тело будет „поясом“ яблока. Другими словами, пояс яблока есть тело вращения сегмента круга около хорды, параллельной основанию сегмента. Аналогично определяется и пояс сферы (в этом случае осью вращения является диаметр круга). Теорема 20-я устанавливает, что объем пояса яблока составляется из объемов пояса сферы (образованного вращением того же сегмента, который образует пояс яблока) и цилиндра, следующим образом построенного: основанием этого цилиндра служит тот сегмент, который образует своим вращением пояс яблока (и шара), высотой же цилиндра служит длина окружности, описываемой ординатой основания этого сегмента вокруг оси яблока.

На первый взгляд самое условие теоремы представляется замысловатым и надуманным. Если же мы разберемся в ходе мыслей Кеплера, то мы увидим, насколько естественным его следствием является содержание 20-го предложения „Стереометрии“.

Ход мыслей Кеплера очень прозрачно распознается из приводимого им доказательства. Прежде всего ему приходит в голову мысль „развернуть“ яблоко в цилиндрическое тело, подобно тому как во 2-м предложении круг он развернул в прямолинейную фигуру. Кеплер утверждает, что объем всего яблока можно представить в виде объема „цилиндрического сегмента“, отсеченного от цилиндра *EDSI* (фиг. 5) плоскостью *MNS*. При этом цилиндр *EDS* построен так: основанием его служит сегмент *MIDKN*, образующий своим вращением вокруг оси MN тело яблока; высотой его является линия DS, равная по длине окружности экватора яблока, т. е. окружности радиуса DA.



Фиг. 5.

Плоскость MNS проведена через точку S и ось вращения MN. Итак, объем яблока, утверждает Кеплер, равен объему цилиндрического сегмента ASD. Это следует, говорит он, из того, что яблоко „развертывается" в цилиндрический сегмент: именно, разделим экватор яблока на бесконечно большое число частей; проводя через них меридианы, мы разделим яблоко на бесконечно большое число бесконечно тонких призм. Если теперь отрезок DS (равный экватору яблока) разбить на столько же частей, соответственно равных частям экватора, и точки деления соединить плоскостями с осью MN, то цилиндрический сегмент разобьется на части, которые, по аналогии с предложением 2-м, Кеплер считает равновеликими соответствующим частям яблока. Аналогия — вот что руководит Кеплером в его исканиях. Теперь Кеплер старается найти более убедительные доводы в пользу своего утверждения. С этой целью он разбивает яблоко уже не на радиальные, а на цилиндрические бесконечно тонкие слои, имеющие своей осью ось вращения яблока. Легко видеть, что, „развернув“ эти слои, мы получим те же бесконечно тонкие прямоугольные пластинки, на которые разбивается цилиндрический сегмент параллельными между собой плоскостями, перпендикулярными к основанию цилиндра. Так, например, цилиндрический слой, образованный вращением „линии“ IK (т. е. бесконечно тонкой полоски, вдоль нее идущей), развертывается в пластинку, у которой IK служит основанием, а высотой служит длина окружности радиуса OA. Но из подобия треугольников ALO и ASD следует, что эта длина окружности равна линии OL; таким образом упомянутый слой развертывается в пластинку $IKda$. Отсюда сразу вытекает, что яблоко равновелико цилиндрическому сегменту ASD.

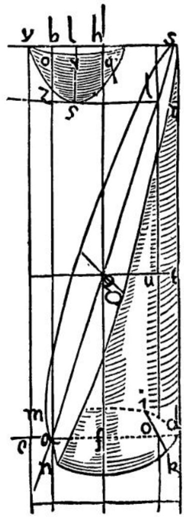


Рисунок из первого издания „Стереометрии бочек“, соответствующий фиг. 5 (в тексте фиг. 13).

Изящное построение, только что приведенное, конечно, можно повторить и для нахождения объема пояса яблока. Если, например, пояс образован сегментом IKD, то он „развертывается" в „часть цилиндра" (вернее, в часть цилиндрического сегмента) $LSDO$. Посмотрим теперь, во что развертывается объем сферического пояса, образованного тем же сегментом. Он развернется тоже в „часть цилиндрического сегмента", построенного на IKD, но „высотой" будет служить длина экватора не яблока, а шара. Нетрудно видеть, что как раз такой частью цилиндрического сегмента будет тело $LSTv$, построенное следующим образом: через точку G, служащую пересечением плоскости MSN с осью цилиндра, проводим сечение, параллельное основанию. Цилиндрический сегмент SGT, возвышающийся над этим сечением, равновелик шару (радиуса $DP = TG$), так как (из подобия треугольников SGT и SAD) отрезок ST равен экватору шара, а часть цилиндрического сегмента, находящаяся над сегментом ikT, проекцией сегмента IKD, равновелика шаровому поясу.

Итак, пояс яблока развертывается в тело $LSDO$, а пояс шара — в тело $LSTv$. Совершенно очевидно, что разность этих тел равна цилиндру (или, по терминологии Кеплера, „прямому" сегменту цилиндра) $vTDO$. Следовательно, объем пояса яблока составляется из объема пояса шара (равного цилиндрическому сегменту $LSTv$) и цилиндра $vTDO$; это и составляет содержание 20-го предложения „Стереометрии бочек". Мы остановились с такой подробностью на доказательстве этого предложения, чтобы не затруднять читателя обращением к тексту Кеплера с его непривычным современному читателю стилем и чтобы иметь, с другой стороны, возможность позднее остановиться на особенностях этого стиля.

Получив из приведенных примеров представление о ходе мыслей Кеплера и о характере его инфинитезимальных доказательств, мы можем теперь обратиться к рассмотрению той критики, которой подвергся Кеплер со стороны современников.

„Стереометрия бочек“ вышла в 1615 году в Линце, а уже в следующем 1616 году появилась в Париже книга ученика Виеты шотландца Александра Андерсона под заголовком „Защита Архимеда“ (Vindiciae Archimedis). Достойна внимания та быстрота, с которой появилась эта критика, быстрота, свидетельствующая о распространении работы Кеплера и вызванном ею интересе. Достойно внимания и заглавие книги, вполне соответствующее ее содержанию. Андерсон с негодованием отвергает кеплерово утверждение, что метод его есть по существу метод Архимеда. Более того, самый метод Кеплера он не ставит ни во что.

„Не подобает, о Кеплер, поносить память досточтимого старца! — патетически восклицает Андерсон по поводу только что приведенного 20-го предложения „Стереометрии“. — Архимед никогда не постулировал возможности развертывать круг в треугольник, а ты присваиваешь себе право делать это, когда развертываешь свои яблоки в цилиндрическое сечение; какой ум может воспринять подобного рода превращения? Да, Архимед постулировал существование прямой линии, равной окружности круга, и в том, что такая линия существует в природе вещей, никто, как говорит Евтокий, не усомнится. Затем уже Архимед доказывает, что прямоугольный треугольник, составленный этой прямой и радиусом круга, равен кругу *.

С таким же правом и ты мог бы постулировать существование цилиндрического сегмента, основание которого равно сегменту круга, вращением которого порождено яблоко, а наибольшая высота равна наибольшей окружности на поверхности яблока, а затем уже, исходя из постулированного допущения, доказать методом Архимеда, что этот цилиндрический сегмент равен твоему яблоку. Что о подобном твоему доказательстве Архимед никогда и не помышлял — этому подтверждением служит то кропотливое вписывание и описывание многоугольников для круга и многогранников для шара, которым он пользуется. По этому многотрудному пути пошел Архимед, пользуясь несравненно более верными началами, чем твое превращение одних фигур в другие. Зачем же понадобилось тебе присваивать Архимеду это преобразование, совершенно ему чуждое?" ** Мы привели этот отрывок из „Защиты Архимеда"

---

* То-есть равновелик.

** Этот отрывок из Андерсона приведен Гульденом, другим критиком Кеплера (о нем дальше) в его „Центробарике". С самым сочинением Андерсона нам не удалось познакомиться. Не видел его также и издатель и комментатор Кеплера Фриш. Нет ссылок на Андерсона и в четырехтомной „Истории математики" Кантора.

для иллюстрации того, насколько малое понимание было проявлено математиками старой школы в оценке новых методов Кеплера. Держась за букву Архимеда, влюбленные в форму его сочинений, бывшую для них идеалом для подражания, они не увидели, что в методах Кеплера оживает дух Архимеда. Усматривая поношение памяти великого геометра в том, что Кеплер объявил себя его продолжателем, они не видели, что истинным наследником сиракузца был именно Кеплер, а не они.

Голос Андерсона был отнюдь не одиноким; к нему присоединился целый хор современников. Главную партию в этом хоре исполнил Павел Гульден (1577—1643), швейцарец родом, француз по происхождению, немец по национальности, протестант по рождению, католик по вероисповеданию. Приняв в 20-летнем возрасте католичество, он вступил в орден иезуитов, был послан в Рим для пополнения своего образования и затем был профессором математики в Вене, а потом в Граце. Гульден знал Кеплера лично и состоял с ним в переписке. При жизни Кеплера Гульден не выступал публично с критикой его работ. В 1635 году, через 5 лет после смерти Кеплера, Гульден выпустил первую книгу своего сочинения „О центре тяжести“ (P. Guldini de centro gravitatis, lib. I, Viennae 1635), известного также под эллинизированным названием „Центробарика“ (Centrobaryca); за ней последовали в 1640 году вторая, а в 1641 году третья и четвертая книги.

В этой работе сформулированы предложения, известные сейчас под именем теорем Гульдена. Об этих предложениях мы скажем более подробно дальше в прямой связи с той полемикой, которая нас здесь интересует.

Методы Кеплера Гульден подвергает критике еще в первых книгах своей „Центробарики"; но специально этому вопросу посвящена четвертая глава четвертой книги, где Гульден подвергает обстоятельному разбору „Стереометрию бочек" Кеплера и „Геометрию неделимых" Кавальери. В оценке Кеплера Гульден проявляет бóльшую сдержанность, чем Андерсон. Вот что, например, говорит он по поводу вышеприведенного высказывания последнего.

„Правда, Андерсон справедливо упрекает Кеплера насчет Архимеда, который свои доказательства никогда не строил таким образом и такими средствами, но сообразовался всегда со строгими законами геометрии, пользуясь доказательствами как прямыми, так и от противного (воздадим что-нибудь и Кеплеру). Однако из этого не следует, что это новое открытие Кеплера (речь идет о 20-м предложении) заслуживает полного пренебрежения и что ни во что не нужно ставить это преобразование фигур.

Не будем отнимать у Кеплера заслуженной им хвалы; ведь при помощи производимого им превращения он не только устанавливает, что некий цилиндрический сегмент может быть равен яблоку, но и показывает, каков именно должен быть этот сегмент. Пусть он не дает такого доказательства, которое всеми тотчас же могло бы быть принятым, однако

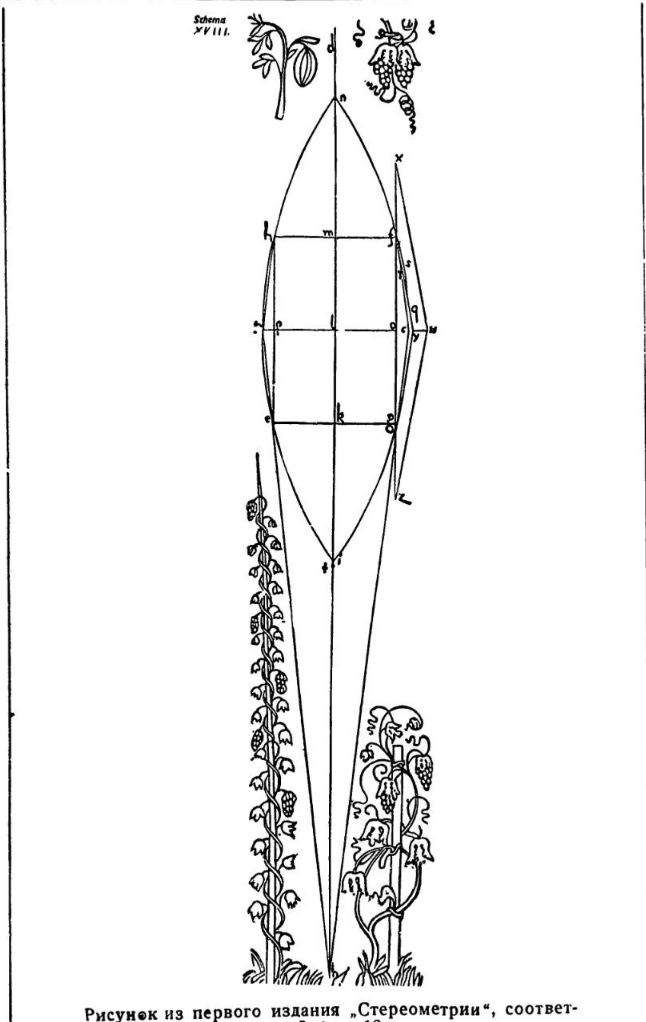


Рисунок из первого издания „Стереометрии“, соответствующий фиг. 16 текста.

отсюда он извлекает способ измерения объема яблока и получает меру, которая, повидимому, не расходится с истиной и при любых числовых данных дает соответствующий результат".

Таким образом практический Гульден не хочет отбрасывать полезных результатов только потому, что они получены подозрительными путями. В противовес ригористу Андерсону Гульден находит, что цель оправдывает средства. Но это не значит, что самые средства он находит правильными.

„Я считаю, — говорит далее Гульден, — что этот кеплеров метод имеет большое значение *для нахождения* геометрических теорем и решения проблем, но я никогда не посоветую применять его *для доказательства*, если существуют другие средства, уже испытанные геометрами. Кто же, особенно, если это человек, привыкший к обычным доказательствам Архимеда и Евклида, сможет воспринять этот метод превращения, особенно, когда речь идет о вещах менее ясных? Я во всяком случае не имею желания ломать себе, как говорится, голову или мозги". Позиция Гульдена в этих словах выражена очень ярко. Отчасти она совпадает с позицией Архимеда в его неизвестном Гульдену „Послании к Эратосфену", но лишь отчасти, потому что Гульден, готовый пользоваться результатами Кеплера, не хочет сам „ломать себе голову" над методом.

Как мы увидим, это ему дорого обошлось. Точка зрения Гульдена, несмотря на стремление его смягчить свое суждение о методах Кеплера, по существу резко отличается от тенденции Кеплера. Кеплер видит в своих методах наметку *доказательства,* хотя еще и не строгую. По его мнению архимедовы доказательства *по идее своей* строятся именно так, как рассуждает он, Кеплер. Непрямую форму архимедова доказательства он рассматривает как подпорку, гарантирующую несокрушимость здания, а не как фундамент, на котором оно строится. И в этом Кеплер прав всецело. Конечно, его методы нуждаются еще в обосновании; конечно, они еще не дают *законченного* доказательства, но они набрасывают его эскиз, и, что важнее всего, они дают *творческий путь* не только к обнаружению закономерности, но и к ее доказательству. Конечно, кеплеровы методы нуждаются еще в установлении общих принципов, их направляющих и гарантирующих от фактических ошибок. Кеплер их еще не имеет. Он идет пока ощупью, руководясь своим чутьем, аналогиями и часто произвольными допущениями; это приводит его порой даже к ошибкам. Но ошибки эти вытекают не из самого метода Кеплера, а либо из *неправильного* его применения, либо чаще всего из совершенно посторонних источников. Мы вскоре познакомим читателя с этими ошибками; пока же обратимся еще к критике Гульдена.

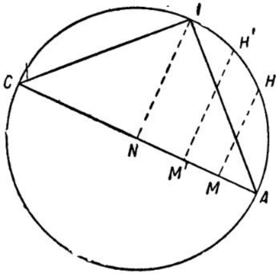
Детальному разбору кеплеровой „Стереометрии“ Гульден предпосылает общие замечания о Кеплере и его методе. Он указывает, что до него с печатной критикой выступал только Андерсон — „благороднейший и остроумнейший геометр". Но в устных беседах ему пришлось слышать различные отзывы многих людей. „Общее мнение, — говорит Гульден, — было таково, что он (Кеплер) очень мало заботится о чистоте и точности геометрии, полагается очень часто на аналогии и догадки, постоянно пользуется ненаучными умозаключениями и сверх того излагает все свои произведения невразумительно". Весь этот букет комплиментов Гульден не сопровождает никакими оговорками по существу. Однако он находит для Кеплера если не оправдание, то смягчающее вину обстоятельство. „Правда, — продолжает он, — человек этот, которого я хорошо знал, заслуживает, по моему мнению, извинения. Это был человек с блестящими дарованиями, направленными притом не на один только предмет, но охватывающими всесторонне очень многое. Он и занимался, действительно, многими вопросами, как это можно видеть из его работ и книг, изданных как на родном его языке, так и на латинском. И по многим причинам он не мог на каждом своем открытии сидеть, как курица на яйце; отсюда и могло получиться, что, стараясь сделать многое, он проявил меньше понимания в отдельных вещах и благодаря этому, кажется мне, он с недостаточной тщательностью относился к различным вещам, и в особенности к силе архимедовых доказательств. И сам он отнюдь не хочет считать свои доказательства за совершенные, ибо он говорит в предисловии к „Стереометрии": „Точные же и во всех отношениях совершенные доказательства может найти в книгах самого Архимеда тот, кто не убоится тернистого пути их чтения".

Снова мы видим, что при всей своей снисходительности критик Кеплера не способен правильно оценить главного, что заслуживает внимания. Верно, что Кеплер часто полагается на аналогии и догадки, но это не значит, что он пользуется ненаучными умозаключениями, ибо свои догадки Кеплер никогда не выдает за доказательство. Однако Кеплер пользуется не только догадками, но и доказательствами, которые не становятся ненаучными только потому, что они не являются полными и совершенными; они представляют собой *первую стадию* в развитии истинно научных методов; они делают первый шаг в направлении замены кустарных при всем своем совершенстве приемов античной математики регулярным *методом* анализа бесконечно-малых.

Упрек Гульдена в невразумительности кеплеровых рассуждений сделан не без оснований. Формулировки, даваемые Кеплером, далеко не всегда отчетливы, а иногда и вовсе неправильны. Взять хотя бы в пример 20-е предложение, выше разобранное. В формулировке его имеется прямая ошибка. Как мы видели из приведенного его доказательства, передающего в общих чертах рассуждение Кеплера, цилиндрический сегмент, представляющий разность поясов сферы и яблока, должен иметь основанием сегмент круга, образующий своим вращением эти пояса. Между тем у Кеплера в условии 20-го предложения сказано, что основанием цилиндрического сегмента служит сегмент, дополняющий до полного круга сегмент, вращением которого произведено яблоко („cuius segmenti basis est segmentum, quod deficit in figura, quae gignit malum“). Быть может, эта ошибочная формулировка, противоречащая данному ниже доказательству, вызвана была тем, что на чертеже оба вышеуказанные сегменты взяты были случайно равными. Во всяком случае, ошибка подобного рода является результатом поспешности, рассеянности, небрежности автора. Читатель „Стереометрии“ должен быть об этом предупрежден, тем более, что как Фриш, издатель полного собрания работ Кеплера, так и проф. Свешников, автор печатаемого здесь перевода, не указывают этих ошибок читателю. Та же недоделанность чувствуется и в построении предложений. Сравнив, например, приведенное выше доказательство теоремы 20-й с подлинным текстом Кеплера, мы увидим, что Кеплер делает совершенно ненужный для развития его мысли шаг, определяя не сразу объем пояса яблока, а предварительно объем „вырезываемого“ из шара цилиндрического тела.

Поспешность и небрежность Кеплера сказывается не только в неправильности формулировок, противоречащих самому ходу его мыслей, — она проявляется и в том, что порой даже правильные высказываемые Кеплером предложения доказываются им неверно, и ошибки носят часто совершенно элементарный характер. Характерным примером могут служить первые предложения второй части „Стереометрии“, представляющие для нас интерес и в других отношениях. Целью их является показать, что из всех цилиндров, вписанных в данный шар, наибольший объем имеет тот, у которого отношение диаметра основания к высоте равно $\sqrt{2}:1$ (предложение 5-е, ч. II).

Первое предложение устанавливает, что из всех упомянутых цилиндров наибольшую площадь осевого сечения имеет тот, у которого диаметр основания равен высоте. Доказательство совершенно элементарно. На фиг. 6 AC — диаметр шара, IC — диаметр основания и AI — высота указанного цилиндра; CH и HA — диаметр основания и высота какого-либо иного вписанного в шар цилиндра. Площади сечений пропорциональны произведениям диаметра AC на отрезки IN, HM и т. д. Очевидно, наибольшей площадь сечения будет тогда, когда высота равна IA. Доказав это, Кеплер замечает: „Не хочу скрывать ошибки, в которую меня первоначально ввергло поверхностное рассмотрение этой теоремы, ибо это напоминание предупредит читателя, чтобы он остерегался в других случаях подобных же ошибок“. Далее Кеплер приводит ошибочное заключение, приведшее его к выводу, что вписанный в сферу цилиндр с наибольшей площадью осевого сечения должен иметь и наибольший объем.



Фиг. 6.

Такая общительность автора, его внимание к читателю, его непосредственность всецело искупают вышеуказанные недостатки кеплерова изложения. Эти черты, как мы указывали, в связи с его астрономическими произведениями, характерны для всех работ Кеплера; в них отражаются обаятельные черты его личного характера, тогда как небрежность и поспешность, о которых мы только что говорили, в значительной степени мы должны отнести за счет внешних условий его жизни, с которыми мы также знакомы. И потому мы не должны считать, что Кеплер не заботится об интересах читателя, когда непосредственно вслед затем, как он предупредил его от возможной ошибки в малоисследованной области учения о наибольших и наименьших значениях величин, тут же он допускает в своем рассуждении элементарную ошибку, которая, правда, не приводит в данном случае к ошибочному результату. В третьем предложении второй части Кеплер дает доказательство того, что цилиндр первой теоремы не имеет наибольшего объема. Для этого он сравнивает объем этого цилиндра с объемом соседнего цилиндра с меньшей высотой HA. Отношение к первому, как нетрудно видеть, равно отношению

$$CI \cdot IN : CH \cdot HM.$$

Чтобы доказать, что второй цилиндр имеет объем, меньший, чем первый, Кеплер должен доказать, что отношение $\frac{CH}{CI}$ больше отношения $\frac{IN}{HM}$. Кеплер берет за исходный пункт положение, им не доказываемое, что *при равных* небольших изменениях отношение синусов вблизи 45° больше, чем вблизи 90°. Как нетрудно видеть, IC является двойным синусом дуги 45°, а HC — дуги немного большей, причем разность этих дуг равна половине дуги HI. Поэтому, согласно исходному положению Кеплера, мы имеем неравенство:

$$\frac{CH}{2} : \frac{CI}{2} > IN : H'M'$$

(точка H' — середина дуги IH).

Отсюда Кеплер заключает, что

$$\frac{CH}{2} - \frac{CI}{2} > IN - H'M';$$

это заключение совершенно неправомерно, так как

$$\frac{CI}{2} < HM'.$$

Допустив в умозаключении такую ошибку, непростительную даже для посредственного математика его эпохи, Кеплер продолжает рассуждение: так как разность $IN - H'M'$ примерно вдвое меньше разности $IN - HM$ (не забудем, что дуга IM предполагается достаточно малой), то из предыдущего неравенства следует

$$CH - CI > IN - HM.$$

Отсюда Кеплер, переходя обратно от разностей к частным, заключает, что

$$\frac{CH}{CI} > \frac{IN}{HM}.$$

Это заключение опять неправомерно, так как

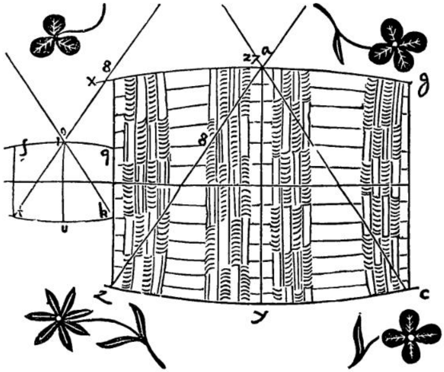
$$CI > HM.$$

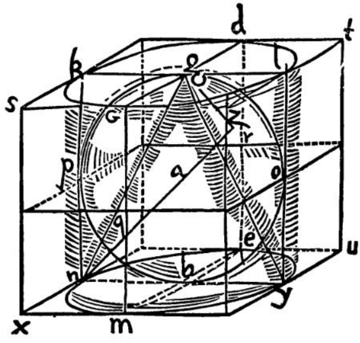
Итак, Кеплер допустил вторую грубую логическую ошибку, но получил нужный ему результат. Этот результат не содержит ошибки лишь потому, что в данном случае при достаточной малости дуги IH разность $IN - HM$ сколь угодно мала по отношению к разности $CH - CI$.

Никак нельзя допустить, что Кеплер мог бы при тщательном просмотре этого доказательства не заметить этих ошибок. Он просто торопится сделать главное, он даже, видимо, доволен „изяществом" рассуждения, ибо по существу он мог бы обойтись без всякого доказательства, поскольку его доказательство опирается на недоказанное утверждение, ничуть не менее очевидное, чем доказываемое.

Ошибки Кеплера происходят не от недостатка предупредительности к читателю, а скорее от избытка ее. В самом деле, дальше, в предложении 5-м, Кеплер докажет, что максимальный объем имеет цилиндр с отношением диаметра основания к высоте $\sqrt{2}:1$; значит, ему вообще незачем доказывать, что цилиндр с квадратным осевым сечением не имеет максимального объема. Он делает это потому, что он развертывает перед читателем картину того, как сам он шел шаг за шагом в развитии своих построений. Он вводит читателя в лабораторию своей творческой мысли. Он подходит к читателю не как неприступный небожитель, а как старший товарищ, как чуткий и внимательный учитель.

С этой же целью он показывает читателю различные пути к решению одной и той же проблемы. Так, только что упомянутое предложение 5-е доказывается двумя способами. В одном из них непосредственно сравнивается объем названного цилиндра с объемами цилиндров, вписанных в ту же сферу, но имеющих несколько большую и несколько меньшую высоту. В другом способе вопрос сводится к нахождению параллелепипеда с квадратным основанием, вписанного в сферу и имеющего наибольший объем. Таким параллелепипедом оказывается куб; это было изящно доказано в предыдущей теореме 4-й непосредственным сравнением объема куба с объемами мало отличающихся от него параллелепипедов. И здесь мы можем отметить тот же откровенный показ Кеплером своих творческих путей. При всем изяществе вышеуказанных доказательств у читателя должно было бы остаться хорошо знакомое каждому, кто хоть немного занимался математикой, чувство неудовлетворения: почему автор пришел к мысли взять именно данный цилиндр, а не какой-либо иной. Но читатель Кеплера получает полный ответ на этот вопрос: при решении вопроса о цилиндре максимального объема (этот вопрос тесно связан с центральной темой сочинения о наивыгоднейшей форме винных бочек) Кеплеру естественно приходит мысль рассмотреть более простую задачу о параллелепипеде, и он легко убеждается в том, что





Рисунки из первого издания „Стереометри“ соответст-вуюшие фиг. 25 (верхний) и фиг. 8 (нижний). Характерна штриховка, подчеркивающая телесность фигур.

вписанный в сферу цилиндр и параллелепипед, вписанный в него (а значит, и в сферу), сохраняя постоянное отношение объемов, одновременно получают максимум объема. Тогда возникает вопрос о максимальном вписанном в сферу параллелепипеде. Догадка, что это должен быть куб, вытекает у Кеплера из соображений, которыми он спешит поделиться с читателем. Это прежде всего аналогия с вписанным в круг прямоугольником — теперь нам понятно, каково значение 1-го предложения 2-й части, которое само по себе совершенно не используется в дальнейшем. Далее, это индуктивные соображения более тонкого характера.

„Из всех плоских фигур, ограниченных равными периметрами, круг, — говорит Кеплер, — самый вместительный, как доказал Папп в 5-й своей книге. Но и из площадей, ограниченных одинаковым числом сторон и обладающих равными периметрами, более вместительны те, которые более схожи с кругом. Кроме того, из обладающих равными периметрами сегментов различных кругов самым вместительным является полукруг. Таким же образом и куб является наиболее вместительным из всех тел, ограниченных равными с ним поверхностями. И из равноповерхностных правильных многогранников вместительнее тот, который более схож со сферой размерами и числом своих граней... Все это есть у Паппа в 5-й его книге. Относительно же равноповерхностных сегментов различных сфер Архимед доказал, что наивместительнейшим из всех является тот, который ограничен полусферой. Этим шар и круг выделяются своими свойствами из числа других фигур, с ними равнопериметренных. Если же мы оставим в стороне равенство поверхностей, а вместо этого зададим одну и ту же для всех многогранников описанную сферу, для некоторых многогранников получается обратное; так, например, додекаэдр оказывается больше, чем икосаэдр, что доказали Аполлоний и Гипсикл в дополнениях своих к Евклиду, но и это происходит вследствие того же свойства шара и вследствие господствующего и здесь сходства фигуры и шара. В самом деле, раньше, когда поверхности были равными, сходство с шаром состояло в множественности граней, теперь же, когда вершины углов в обеих фигурах должны располагаться на равных шарах, этим и определяется расположение углов на шаре, и сходство с шаром состоит теперь в множественности углов, число которых в додекаэдре больше, чем в икосаэдре.

При таком положении дел естественно представляется, что и среди тел, имеющих одно и то же число граней и вписанных в данный шар, более вместительным будет то, которое более схоже с шаром; и здесь сходство состоит в равенстве и подобии граней и в численности углов. А эти свойства присущи кубу в большей степени, чем другим параллелепипедам".

Вот каковы те „аналогии", на которые, как говорит Гульден, Кеплер „слишком часто полагается". Но это не верно. *Полагаться* на аналогии Кеплер не имеет привычки. „Но ты скажешь, — продолжает

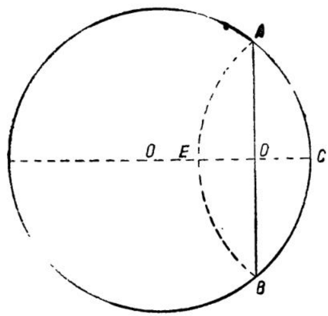
Кеплер, — что все это получено из аналогии. Поэтому я предлагаю и полное доказательство, которое имеет только то неудобство, что на плоском чертеже нужно воображать мелкие телесные сечения". Вслед затем идет строгое доказательство предложения, предвосхищенного вышеприведенной индукцией.

Кроме индукции „по аналогии" Кеплер широко пользуется и индукцией вычислительной. Так, в предыдущем 3-м предложении вычисляются обьемы параллелепипедов, вписанных в сферу, диаметр которой принят за 20 единиц и составляется таблица объемов, соответствующих всем высотам от 1 до 20. Указанная закономерность обнаруживается и на этой таблице.

Чтобы покончить с этой группой предложений, мы должны сделать еще одно важное замечание. Не случайно Кеплер считает наивыгоднейшей формой бочки ту, которая при заданной диагонали поперечного сечения имеет наибольший объем. И не на экономию в материале, не имеющую большого практического значения, направлено его внимание. Нет, он хочет установить теоретически, что австрийские бочки, в отличие от бочек, употребляемых в других местностях, имеют то преимущество, что при их деформации они испытывают наименьшее *изменение объема*, что предохраняет их от ссыхания и порчи. Он прямо указывает (теорема V, добавление II), что свойство незначительно изменяться принадлежит максимальным значениям изменяющейся величины. „Фигуры по обе стороны от их наибольшей вместимости обладают вначале нечувствительным убыванием“. Здесь в достаточно общей форме высказан тот критерий экстремальности, который спустя четверть века Ферма положил в основу своего аналитического способа разыскания максимума и минимума, совпадающего по существу с современным. Кеплер, правда, не пользуется еще этим критерием для *нахождения* экстремальных тел и фигур; здесь он руководствуется, как мы видели, другими соображениями. Но он отчетливо сознает общность того свойства, которое явилось одним из источников развития диференциального исчисления; добавим, что ему же, как мы видели выше, принадлежит та трактовка проблемы нахождения объема и площади, которая положила начало интегральному исчислению. Этим достаточно обрисовывается роль Кеплера в создании новой математики.

Обратимся, однако, снова к методу Кеплера и той критике, которой его подверг Гульден. Наиболее выигрышным моментом в этой критике было, конечно, указание на ряд сделанных Кеплером фактических ошибок. Мы, однако, уже указывали, что такие ошибки проистекали вовсе не из существа применяемых Кеплером методов. Ошибки эти проистекали преимущественно из применения „аналогий“, „заключений по вероятности“, которыми Кеплер широко и, вообще говоря, успешно пользовался, но которым, как мы указывали, он и сам не придавал значения доказательства.

Так, например, уже в первом предложении „Стереометрии“ (в „примечании“ к нему) Кеплер, ссылаясь на свое сочинение о движении Марса, утверждает, что длина эллипса равна (мы пользуемся современной записью) $\pi(a+b)$, где a и b — полуоси эллипса. Этот вывод сделан „по аналогии“ с площадью эллипса, которая есть средняя геометрическая площадей кругов с радиусами a и b. Кеплер полагает поэтому, что длина эллипса должна быть средним арифметическим длин окружностей тех же кругов. Убеждается он в справедливости этого грубым числовым расчетом, не обнаруживающим ошибочности этого положения для эллипса с небольшим эксцентриситетом.



Фиг. 7.

Очень характерным примером ошибочного утверждения является 25-е предложение 1-й части. Оно гласит: „Сегмент шара, повидимому, относится к полулимону, образованному тем же сегментом круга, как радиус основания сегмента к его оси или высоте“.

Напомним, что лимоном Кеплер называет тело, получаемое вращением кругового сегмента ACB вокруг оси AB. Сегмент же шара получается вращением того же сегмента вокруг оси DC (фиг. 7).

Обратим внимание прежде всего на то, что Кеплер в самой формулировке предложения употребляет слово „повидимому“. Этот оборот речи, столь необычный для современной, так же как и для тогдашней математической литературы, подчеркивает, что Кеплер отнюдь не выдает свои рассуждения за доказательство. Более того, он прямо говорит в начале текста предложения: „Законное доказательство (demonstrationem legitimam) пусть ищут другие. Я же, не будучи в состоянии доказать это аподиктически, попытаюсь подтвердить описательно*, пользуясь четырьмя соображениями“.

Эти четыре соображения таковы. Прежде всего Кеплер указывает на то, что предложение верно для двух крайних случаев, именно для случая, когда хорда AB есть диаметр, и для случая „наименьшего сегмента, являющегося как бы последней границей всех сегментов“ (in minimo segmento et veluti in ultimo omnium segmentorum termino). В эту своеобразную для XVII века форму предельного соотношения (вспомним хотя бы „последнее отношение“ Ньютона) Кеплер вкладывает такое конкретное содержание: он отождествляет бесконечно малый шаровой сегмент с конусом, имеющим вершиной C и основанием бесконечно малый круг диаметра AB; бесконечно малый полулимон он отождествляет с конусом, имеющим вершиной A и основанием круг диаметра CE. Для таких конусов отношение объемов действительно равно $AD : DC$. Кеплер утверждает теперь то же и для отношения объемов

* В подлиннике непереводимая игра слов: „quod non possum apodictice, comprobabo dictice“.

шарового сегмента и полулимона на основании своеобразной „интерполяции“, только что приведенной.

Второе соображение, приводимое Кеплером в пользу справедливости его гипотезы, состоит в том, что она справедлива для двух „полусфероидов“, т. е. для половин эллипсоидов вращения с осями AB и CE (причем в одном из эллипсоидов осью вращения служит AB, в другом CE). Привлечение эллипсоидов мотивируется тем, что „удлиненный сфероид можно считать вписанным в сжатый, подобно тому как лимон можно считать вписанным в удвоенный шаровой сегмент“.

Третье соображение сводится к тому, что отличие объемов тел вращения от объемов конусов обусловливается наличием „наклонных сегментов“ CB и CA. Оценивая „на-глаз“ те приращения, которые получают при этом объемы конусов, Кеплер предполагает, что эти приращения должны оказаться пропорциональными самим объемам.

Наконец, четвертым соображением является числовая проверка. Она проводится для того случая, когда отношение $AD:DC$ равно $9:1$, т. е. для случая, близкого к „последней границе“. Поэтому Кеплер (который прежде установил точное выражение для объема лимона, аналогичное выражению объема яблока), принимая радиус шара за 100 000 единиц длины и производя выкладки с точностью до единицы, не находит никакого отклонения вычисленного результата от предполагаемого. Между тем предположение Кеплера, несмотря на обилие аргументов „по аналогии“, оказывается ошибочным, и Гульден в своей критике не без язвительности замечает: „Кеплер советует: „пусть законное доказательство ищут другие“. Но кто же захочет искать то, чего найти нельзя? И так как Кеплер апеллирует к числам, призовем же их на помощь в качестве пробного камня, чтобы они нас наставили, следует ли или не следует искать доказательство“. Гульден делит диаметр на 10 000 000 частей, и тогда обнаруживается несогласие результата с предположением.

Эта и ей подобные ошибки Кеплера служат в руках Гульдена средством доказательства ненадежности метода Кеплера. Но здесь-то и обнаруживается узость и близорукость педантичного защитника традиции. Отказываясь „ломать себе голову“ над доказательствами Кеплера, Гульден закрывал себе и другим дорогу не только к развитию новых методов, но и к доказательству ряда предложений, известных уже античным геометрам. В этом отношении чрезвычайно поучителен один пример, относящийся к деятельности самого Гульдена; он настолько интересен, что я приведу его, несмотря на то, что он не имеет прямого отношения к гульденовской критике Кеплера.

Я имею в виду предложения, известные каждому под именем теорем Гульдена. Одно из них утверждает, что объем тела, образуемого вращением замкнутой фигуры вокруг непересекающей ее оси, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описываемой при вращении центром тяжести фигуры. Другое устанавливает аналогичное свойство для поверхности, полученной вращением какой-либо дуги вокруг непересекающей ее оси.

Благодаря этим предложениям имя Гульдена известно сейчас миллионам людей, большинство которых не подозревает даже о той роли, которую сыграл для современной математики Кеплер. Но мало кто знает также, что полная и точная формулировка „теорем Гульдена" встречается (без доказательства) у древнегреческого математика Паппа. Знал ли об этом Гульден? Я не решаюсь это утверждать безусловно, но считаю очень маловероятным противное утверждение. Как бы то ни было Гульден ни словом не упоминает о Паппе и в своей „Центробарике" дает свое „доказательство" обоих предложений.

Но что это за доказательство? Вот как рассуждает Гульден. Объем „прямой степени" (potestas directa), т. е. параллелепипеда, цилиндра, получается, говорит Гульден, умножением площади, производящей его своим движением, на длину пройденного при движении пути. „Подобным же образом можно рассуждать и о происхождении и составлении круглых степеней (т. е. о нахождении объемов тел вращения. — *М. В.*). Именно, так же как и при составлении прямых степеней, круглую степень нужно разделить на части и, определив их величину, умножить на кратчайшую линию их вращательного движения. Точно так же при составлении прямой степени нужно множить величину, возводимую в высшую степень (т. е. площадь при образовании объема, линию при образовании площади. — *М. В.*), на кратчайшую прямую линию; эта линия единственна или, если хотим, мы можем считать, что их много, но они между собой все равны и перпендикулярны к одной и той же величине. Но какую же из всех линий мы назовем кратчайшей и в то же время единственной при составлении тел вращения (in compostione notunda)? Эта линия круговая, так как необходимо, чтобы движение, т. е. вращение, было круговым. Но таких линий бесконечное число как равных, так и не равных между собой. Части вращающегося количества, чем дальше они отстоят от центра или от оси вращения, тем большие количества или степени описывают, так как делают больший обход, и, напротив, чем ближе части подступают к оси вращения, тем меньший обход они делают и тем меньшее количество производят. Нужно найти нечто среднее, так чтобы части внешние и внутренние, т. е. по ту и по сю сторону описываемые, некиим образом уравнивались.

А это будет в том случае, если за круговую линию, которую надлежит множить на вращающееся количество, будет принята та, которую при вращении описывает центр тяжести вращающейся величины; такая линия имеется одна и единственная".

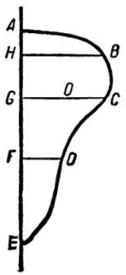
Мы привели полностью рассуждения Гульдена. Они чрезвычайно напоминают кеплеровы суждения „по аналогии". Но Кеплер не считает подобные доводы строгим доказательством. Гульден же, критик Кеплера, вполне удовлетворен своим выводом. Формулировав свое предложение, он заявляет, что оно „не нуждается ни в каком другом доказательстве“. Он говорит, что предложение это подтверждается рассмотрением всех известных частных случаев, и предоставляет „более сведущим геометрам“, если им угодно, высказать свое суждение *.

Этот полуиронический призыв, казалось бы, являлся более чем неуместным именно для Гульдена. Но, повидимому, Гульден немало потрудился сам, чтобы найти более строгое доказательство, и труды его не увенчались успехом. Этого, однако, не случилось бы, если бы Гульден не плевал в колодец Кеплера, который пригодился очень многим математикам XVII века, способным отрешиться от педантизма и почувствовать силу и мощь новых путей, впервые указанных гениальным немцем.

Действительно, история отплатила Гульдену горькой иронией. Шесть лет спустя после выхода четвертой книги „Центробарики“, в которой он наряду со „Стереометрией бочек“ Кеплера подверг такой же „уничтожающей“ критике „Геометрию неделимых“ Кавальери, последний выпустил свое сочинение „Шесть геометрических этюдов“, содержащее подробнейший ответ на все возражения Гульдена. Гульдена уже не было в живых, когда появилась книга Кавальери, и

* P. Guldini, Centrobaryca, Lib.II, cap. VIII, prop. III p. 145.

потому мы не знаем, как реагировал бы он на то, что Кавальери при помощи отвергаемого Гульденом метода мимоходом дает доказательство той теоремы, которую сам Гульден сформулировал, но не мог строго доказать. Вместо длинных и расплывчатых рассуждений Гульдена Кавальери приводит четкое и ясное доказательство, сообщенное ему, по его собственным словам, Антонио Рокка за два года до написания книги.



Фиг. 8.

Вот это доказательство. Пусть фигура $ABCDE$ вращается вокруг оси AE (фиг. 8). Кавальери рассматривает случай, когда ось вращения является частью периметра фигуры и когда ординаты BH, CG,... пересекают периметр фигуры (помимо оси вращения) только один раз; однако его рассуждение нетрудно распространить на совершенно общий случай.

Итак, пусть фигура $ABCDE$ производит тело вращения с осью AE. Объем этого тела вращения пропорционален сумме площадей „всех“ ординат. Но квадрат каждой ординаты пропорционален ее статическому моменту относительно оси вращения. Поэтому объем тела вращения пропорционален сумме моментов „всех ординат“, т. е. моменту центра тяжести, равному произведению площади фигуры на расстояние OG центра ее тяжести O до оси вращения. Объем пропорционален, конечно, и произведению площади фигуры на длину окружности радиуса OG. Что он также и равен этой величине следует из того, что для цилиндра, например, это равенство справедливо *. Таково доказательство Кавальери; небольшой его модификацией мы получаем вполне современное доказательство „теоремы Гульдена".

Мы достаточно подробно разобрали на ряде конкретных примеров метод и стиль „Стереометрии бочек", мы познакомили читателя с критикой, которой подверглись методы и приемы Кеплера. Нам остается теперь подвести итоги и дать общую оценку математическому произведению Кеплера.

Это произведение носит на себе яркую печать своего времени и в то же время ярко отражает индивидуальность его автора.

От эпохи в нем не только проблематика, не только своеобразие методов, но и стиль. Это была эпоха отважных путешественников, жаждой наживы и славы влекомых в дальние страны, самое существование которых часто внушало сомнения; это была эпоха завоевателей, с горсточкой примитивно вооруженных людей покорявших новые земли; это была эпоха алхимиков, изощрявших фантазию в поисках философского камня. Подобно этим героям раннего капитализма Кеплер вторгается в малоизведанную область, вооруженный довольно скромным арсеналом математических знаний; подобно алхимикам он хочет найти

* Cavalieri B., Exercitationes geometricae sex, p. 229.

сокровенную тайну античного метода исчерпывания; подобно смелым завоевателям он пренебрегает стерегущей его на каждом шагу опасностью потерпеть неудачу.

Дух эпохи отражается и на форме произведения Кеплера. Оно предназначено не для узкого круга исследователей, углубившихся в абстрактную трактовку вопросов математики. Поэтому Кеплер не может писать на бесстрастном языке Евклида; поэтому Кеплер не может взять своим образцом даже стиль Архимеда. Он отсылает читателей к самому Архимеду всюду, где в угоду безупречности изложения ему пришлось бы жертвовать доступностью. Он хочет, чтобы книга его была доступна не только представителю школьной учености, но и более широкому кругу полуобразованной публики, мастерам, архитекторам, художникам и другим представителям тогдашней интеллигенции, обслуживавшей потребности господствующих групп. Латинский язык, на котором написал Кеплер „Стереометрию бочек", служил препятствием к распространению книги в этих кругах. Кеплер выпустил ее популярное немецкое издание.

Распространению „Стереометрии" немало содействовали индивидуальные особенности стиля Кеплера, ибо они как нельзя лучше соответствовали вышеуказанным требованиям эпохи. Кеплер, прежде всего, чрезвычайно *живая* личность. Мы видели из биографического очерка, как много Кеплеру приходилось чувствовать жизнь с ее немногими светлыми и многими темными сторонами. Мы видели, как откликался он на разнообразные потребности жизни во всех своих работах. И здесь, в „Стереометрии бочек“, самая тема которой заимствована из жизни, Кеплер многократно перекликается с житейскими темами. Он не упускает случая там, где это уместно, извлечь практические указания из геометрических своих открытий. Он там и сям сообщает, какие наблюдения натолкнули его на абстрактные размышления.

В тесной связи с этой *живостью* личности Кеплера стоит образная форма его мышления, то и дело проявляющаяся в „Стереометрии“. Она проявляется даже в названиях, которые он дает вводимым им геометрическим объектам. Яблоки, груши, сливы, лимоны, айва, земляника, сосновая шишка, турецкая чалма и другие необычные для математического труда предметы украшают страницы сочинения Кеплера. Но более того, образное мышление сказывается и в приемах индукции, которой, как мы видели, широко пользуется Кеплер. Разве не этой образностью проникнуто приведенное выше рассуждение о чертах сходства многогранника с шаром? Наконец, самый факт откровенного применения смелой индукции представляет собой у Кеплера продукт художественной фантазии и также придает его творчеству характер необычайной живости.

Если мы теперь обратимся к характеристике достижений Кеплера, то и здесь мы найдем неслучайное созвучие с эпохой великих открытий. Кеплер впервые в новое время поставил ногу на новый материк, положив основу новому подходу к проблеме квадратуры. Здесь Кеплер является если не основоположником метода интегрального исчисления, то его предтечей. Но Кеплер, как мы видели, с гениальным чутьем предвосхитил и метод диференциального исчисления. Однако здесь его непосредственное влияние на позднейшую науку вряд ли было велико.

Таким образом „Стереометрия бочек“ является интереснейшим документом интереснейшей эпохи; некоторые трудности, неразрывно связанные с чтением страниц, написанных более трех веков назад, с избытком искупаются тем, что они, действительно, воскрешают и оживляют то время, когда закладывались первые камни нового общественного строя и первые камни новой науки. И если Кеплер в своей эпитафии говорит, что дух его при жизни жил на небе, то мы с большим правом можем сказать, что через 300 лет после его смерти дух его еще живет на земле.

Предисловие переводчика

С точки зрения истории анализа бесконечно-малых представляет выдающийся интерес предлагаемое сочинение Кеплера — „Стереометрия бочек" — как первая работа нового времени, вводящая в геометрию явно бесконечно малые величины и принципы интегрального исчисления. Хотя, как говорит сам Кеплер во введении, поводом и целью написания книжки первоначально явился совершенно частный и практический вопрос об измерении объема винных бочек при помощи одного промера их поперечной длины, весь интерес сосредоточивается на общих принципах определения с помощью бесконечно малых величин объемов тел вращения.

В этом отношении самой интересной частью книги является ее второй отдел — Дополнение к Архимеду. В этом же отделе в теореме XXVII мы встречаемся в первый раз в истории математики в сущности с задачей интегрирования диференциального уравнения, разумеется, в геометрической форме — построения конического сечения по данному свойству его касательной. В части, посвященной специально стегеометрии австрийской бочки, Кеплер рассматривает ряд задач на максимум. Хотя строгие доказательства ему удается дать в чисто геометрической форме, но во многих местах он явно рассуждает совсем в духе современного диференциального исчисления, опираясь на свойства непрерывности и обращения в нуль производной при максимальном значении.

Вводя по существу в геометрию новые идеи, Кеплер сохраняет для выражения своих теорем обычные евклидовские формы и совершенно не пользуется услугами нарождающейся в то же время алгебры, а постоянно прибегает к различным свойствам пропорций, от чего изложение во многих местах страдает запутанностью и тяжеловесностью. В переводе сохранена риторическая форма изложения, но в большинстве случаев в примечаниях указаны соответствующие алгебраические формулы. Кроме того, плохой латинский язык оригинала потребовал вставки в русский текст отдельных слов и дополнительных фраз, которые заключены в скобки. Некоторые неправильные выводы Кеплера оставлены и в переводе неисправленными.

Сочинение Кеплера вызвало большой интерес у современных ему математиков Гульдена, Андерсона, Бригга и др., из которых некоторые подвергали критике его методы и выводы, другие — их очень одобряли.

Позднее, в XVIII веке, методы Кеплера были пересмотрены с точки зрения уже развившегося анализа в работах Пфлейдера и Ламберта. Эти работы упомянуты в прекрасном критическом издании трудов Кеплера Фришем в 1863 году, с которого и сделан предлагаемый полный русский перевод. В 1908 году в серии Оствальда появился немецкий перевод этого труда Кеплера, но неполный.

Г. Свешников

НОВАЯ
СТЕРЕОМЕТРИЯ ВИННЫХ БОЧЕК

ПРЕИМУЩЕСТВЕННО АВСТРИЙСКИХ, КАК ИМЕЮЩИХ САМУЮ ВЫГОДНУЮ ФОРМУ И ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО УДОБНОЕ УПОТРЕБЛЕНИЕ ДЛЯ НИХ КУБИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙКИ

С ПРИСОЕДИНЕНИЕМ ДОПОЛНЕНИЯ К АРХИМЕДОВОЙ СТЕРЕОМЕТРИИ

СОЧИНЕНИЕ

ИОГАННА КЕПЛЕРА

МАТЕМАТИКА
ИМПЕРАТОРА ЦЕЗАРЯ МАТВЕЯ I
И ЕГО ВЕРНЫХ ЧИНОВ ВЕРХНЕЙ АВСТРИИ
С ЦЕЗАРСКОЙ ПРИВИЛЕГИЕЙ
НА XV ЛЕТ

СВЕТЛЕЙШЕМУ ГОСПОДИНУ
МАКСИМИЛИАНУ,

ВЛАСТИТЕЛЮ

ЛИХТЕНШТЕЙНА И НИКЕЛЬСБУРГА, ВЛАСТИТЕЛЮ РАБЕНСБУРГА, ГОГЕНАУГЕНА, БУТТАВИЦА, ПОЗЕРИЦА, НЕОГРАДА; СОВЕТНИКУ, КАМЕРАРИЮ И КОНЮШЕМУ СВЯЩЕННОГО ЦЕЗАРСКОГО ВЕЛИЧЕСТВА И Т. Д.,

А ТАКЖЕ И ЗНАТНОМУ И БЛАГОРОДНОМУ ГОСПОДИНУ

ГЕЛЬМГАРДУ ИОРГЕРУ

ГОСПОДИНУ

ТОЛЛЕТА, КЕПБАХА, ГРЕБИНГА, ГЕРНАЛЯ, ШТЕЙЕРЭККА, ЭРЛАХА; ВЛАДЕТЕЛЬНОМУ БАРОНУ КРЕЙСБАХСКОМУ; НАСЛЕДНОМУ ПРОВИНЦИАЛЬНОМУ ДВОРЦОВОМУ МАГИСТРУ ВЕРХНЕАВСТРИЙСКОГО ЭРЦГЕРЦОГСТВА, ПРИДВОРНОМУ СОВЕТНИКУ СВЯЩЕННОГО ЦЕЗАРСКОГО ВЕЛИЧЕСТВА И ТЕПЕРЕШНЕМУ ПРЕДСТАВИТЕЛЮ ОТ БАРОНОВ НАЗВАННОЙ ПРОВИНЦИИ,

ГОСУДАРЯМ МОИМ ВСЕМИЛОСТИВЕЙШИМ

В ноябре прошлого года, светлейший господин и знатный и благородный барон, государи мои милостивые, я ввел в свой дом новую супругу в то время, когда Австрия, закончив обильный сбор благородного винограда, распределяла свои богатства, разослав вверх по Дунаю нагруженные баржи, в нашем Норике и весь берег в Линце был завален винными бочками, продающимися по сходной цене. Согласно обязанностям супруга и доброго отца семейства, мне пришлось позаботиться о необходимом для дома напитке. Потому ко мне на дом было принесено и поставлено несколько бочек, а через четыре дня пришел продавец с измерительной линейкой, с помощью которой и промерил подряд все кадки, без различия, не обращая внимания на форму, без всяких соображений и вычислений. Именно, медный оконечник линейки просовывался через наливное отверстие полной бочки поперек до пятки того и другого деревянного круга, которые мы по-домашнему называем днищами, и после того как в обоих случаях эта длина от верхней точки пуза до нижней того и другого дощатого круга оказывалась равной, продавец объявлял количество амфор, вмещаемых бочкой, заметив число, поставленное на линейке в том месте, на котором оканчивалась названная длина; по этому числу назначалась величина цены.

Я удивился, как это поперечная линия, проведенная через объем половины бочки, может служить указателем вместимости, и даже усомнился в правильности такого измерения, так как очень короткая, а потому и мало вместительная бочка, заключенная между кругами, лишь бы они были несколько пошире, может иметь такую же длину от отверстия до нижней точки того и другого круга.

Вспомнилось мне и нудное измерение, применяемое на Рейне, где либо, не боясь скучной потери времени, наполняют бочки, отсчитывая количество амфор, и выжигают на измеренном сосуде его вместимость, либо если и пользуются измерительной линейкой, то вымеряют как можно больше поперечников кругов и длину изогнутых клепок и перемножают их между собой, а кроме того, принимают различные предосторожности, касающиеся неравенства между днищами, величины пуза и кривизны клепок, и все-таки не вполне всех удовлетворяют: так, одни указывают одни ошибки, а другие — другие. Когда же я узнал, что такое употребление поперечной линейки установлено здесь общественными властями и измерители ручаются за его правильность, то я, как новобрачный, счел для себя подходящим взять новый предмет математических занятий и исследовать геометрические законы такого удобного и крайне необходимого в домашнем хозяйстве измерения и выяснить его основания, если таковые имеются. После того как в течение трех дней эти размышления привели к различным удачным выводам, так что можно было высказать кое-что определенное, и я уже очинил перо для отделки и записи доказательства, готового в уме, мне не пришлось долго искать, к кому обратиться в начале книги с посвящением, кто бы ясностью разума был равен ἀκρίβειαν (тщательности) доказательств и с особым интересом проследил бы за их изяществом. Именно таким человеком изобразил мне тебя, светлейший господин Лихтенштейн, твой врач шотландец Иоанн Воддерборний, муж весьма искусный в математических науках, а потому и мой близкий друг, который своим своевременным присутствием напомнил мне о тебе; и таким же на основании долгого знакомства знал я тебя, знатный и благородный владетельный барон Иоргер. В этом отношении ваша известность настолько равна, что я, будучи клиентом обоих, мог бы оказаться несправедливым по отношению к одному из вас, если бы упомянул только другого.

Да и что мешает мне назвать вас здесь коллегами? Ведь это соревнование касается не знатности, не достоинства, не государственных доблестей и даже не какого-нибудь дела, которое обыкновенно рассматривает математик, а только таланта и, если позволительно добавить, покровительства мне. Потому я без всякого колебания решил к наступающим январским календам поднести вашим светлостям новогодний подарок из моих соображений, который побудил бы нас обоюднк благодарности богу за все полученные в прошлом году благодеяния, а вместе с тем и вам, покровители, доставило бы удовольствие посвящение приятной вещи, а я, автор, порадовался бы вместе с читателями и понимающими толк ценителями.

Способ же измерять вино пусть находится под покровительством красы нашей Австрии, главы ее знати, обладателей обширнейших виноградников, которым вина хватает и для щедрой благотворительности.

Будьте здоровы, светлейшие! Утешайте ваши умы самыми прекрасными размышлениями, вашими обычными развлечениями, и проведите наступающий год весело и в полном изобилии всех благ, а меня и впредь, как обычно, не оставьте вашей милостью.

Линц, XVI. Январские календы,

MDCXV года по летосчислению западных христиан.

Ваших светлости и знатности преданнейший математик императора Цезаря Матвея и его верных чинов Верхней Австрии

Иоганн Кеплер

СТЕРЕОМЕТРИЯ БОЧЕК

Предварительные замечания о правилах выбора фигуры винной бочки

Всякое искусное и удобное измерение объема требует известной правильности фигуры, ибо объемы сосудов, не имеющих никакой определенной правильной формы, не поддаются соображению и требуют только рук и подсчета влитой жидкости.

Винным бочкам по требованиям материала, постройки и употребления в удел досталась круглая фигура, родственная конической и цилиндрической. Именно, жидкость, долго содержимая в металлических сосудах, портится от ржавчины; стеклянные и глиняные не достаточны пе размерам и ненадежны; каменные не подходят для употребления из-за веса, — значит, остается наливать и хранить вина в деревянных. Из одного целого ствола опять-таки нельзя легко приготовить сосудов достаточно вместительных и в нужном количестве, да если и можно, то они трескаются. Поэтому бочки следует строить из многих соединенных друг с другом кусков дерева Избегнуть же вытекания жидкости через щели между отдельными кусками нельзя ни при помощи какого-нибудь материала, ни каким-нибудь другим способом, кроме сжимания их связками. Так как эти связки делаются из гибкого материала — березы, дуба и т. п., то под давлением тяжести жидкого вещества, которое ими с силой сжимается, они раздаются по самому вместительному ободу. По этому основному соображению бочары и прибегают к круглым днищам, чтобы, давая на краях иную фигуру, не сделать сосуд перекошенным и непрочным, так как пузо бочки, по сказанному, стремится к круговой форме. Это можно видеть на флягах, в которых через Альпы переносят в Германию итальянские вина По условиям их употребления они имеют сжатую фигуру, чтобы их можно было вешать на бока мулов и безопасно переносить через узкие проходы и чтобы, выдаваясь далеко от бока мула, они согласно закону весов не отяготили бы слишком животное и не делали бы более сильных толчков; и вот с той стороны, где они более плоски, с той они хуже выдерживают напор и легче трескаются.

Круговая или цилиндрическая фигура прибавляет еще то удобство, что при перевозке вин на телегах по земле главный вес приходится на вино и наименьший на дерево. На этом основании, если бы из деревянных дощечек можно было сколотить шар, то шарообразные сосуды были бы самыми желательными. Но так как связками доски в шар сжать нельзя, то его место и заступает цилиндр. Но этот цилиндр не может быть вполне правильным, потому что ослабшие связки тотчас же сделались бы бесполезными и не могли бы быть натянуты сильнее, если бы бочка не имела конической фигуры, несколько суживающейся в обе стороны от пуза ее. Эта фигура удобна и для качения (откуда и название цилиндра) и для перевозки на телегах, и, состоя из двух подобных друг другу половинок на общем основании, является самой выгодной при покачивании и красивой на взгляд.

Поскольку, таким образом, винные бочки связаны с кругом, конусом и цилиндром — фигурами правильными, — тем самым они поддаются геометрическим измерениям, принципы которых стоит привести в начале настоящего исследования, как они установлены Архимедом, конечно, лишь настолько, насколько этого достаточно для удовлетворения ума, любящего геометрию, а полные и во всех частях строгие доказательства следует искать в самих книгах Архимеда, если кто не убоится тернистого пути их чтения. Впрочем, на некоторых местах, которых не затронул Архимед, надо остановиться поподробнее, чтобы и более ученые люди нашли чем воспользоваться и чему порадоваться.

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

СТЕРЕОМЕТРИЯ ПРАВИЛЬНЫХ КРИВЫХ ТЕЛ

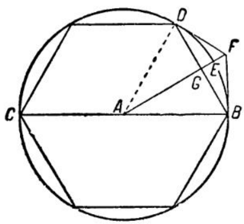
ТЕОРЕМА I

Прежде всего потребовалось знание отношения окружности к диаметру, Архимед показал:

Отношение окружности к диаметру близко к отношению чисел 22 к 7.

Для доказательства этого пользуются фигурами, вписанными в круг и около него описанными. Хотя таких фигур бесчисленное множество — мы для простоты воспользуемся шестиугольником. Пусть в круге CBD есть правильный шестиугольник, углы которого C, D, B, сторона DB, и пусть в (точках) D и B круга касаются две прямые, пересекающиеся в точке F; центр A соединим с F линией AF, которая пусть пересечет прямую DB в G, а дугу DB — в E.

Так как DGB — прямая, т. е. кратчайший путь от D до B, а DEB — дуга, т. е. не самое короткое расстояние от D до B, то DEB длиннее, чем DGB. С другой стороны, так как прямая BF касается круга, и, значит, все части дуги EB лежат внутрь от FB к GB, то если бы EB была прямая, то она была бы, наверное, меньше, чем FB. Именно, углы AEB и FEB равнозначны прямому, в то время как EFB — острый; следовательно, EB как противолежащая меньшему углу EFB меньше, чем FB, так как последняя противолежит большему углу. Рассуждать же о EB как о прямой можно потому, что сущность доказательства состоит в разделении окружности на мельчайшие дуги, которые приравниваются к прямым. Впрочем, утверждение, что дуга DEB, лежащая внутри треугольника DBF, меньше суммы линий DF и FB, можно принимать известным на основании общих положений, так как эта дуга хотя и выгибается в сторону угла DFB, но не имеет ни одной частицы вне линий DF и FB, а объемлющая по общему положению больше объемлемой. Дело обстояло бы иначе, если бы дуга DEB была линией извилистой и неправильной.



Фиг. 1.

Так как DB — сторона вписанного шестиугольника, а DF и FB — половины сторон описанного, то дуга DEB будет шестой частью окружности. Но она оказалась больше, чем DB, и меньше, чем DF и FB; следовательно, шесть линий DB меньше окружности круга, а двенадцать линий DF или FB больше, чем окружность.

Но сторона DB правильного шестиугольника равна самому радиусу AB. Следовательно, шесть радиусов AB, т. е. три диаметра CB, или (разделив диаметр на 7 равных частей) 21 седьмая (часть диаметра), короче окружности. Так как, далее, DG и GB равны, то GB будет половина AB. Но квадрат AB равен сумме квадратов AG и GB и в четыре раза больше квадрата GB; следовательно, (квадрат) AG втрое больше квадрата GB. Поэтому отношение квадратов AB и AG равно $\frac{4}{3}$, а отношение AB к AG есть $\sqrt{\frac{4}{3}}$, т. е. такое же [1], как чисел 100 000 и 86 603. Но как AG (относится) к AB, так и GB (относится) к BF, т. е. и отношение между BF и BG равно $\sqrt{\frac{4}{3}}$, так что, так как GB есть половина AB и потому содержит 50 000 частей, то BF таких частей будет содержать приблизительно 57 737. Потому это число, повторенное двенадцать раз, будет больше окружности. Получается число 477 974, а диаметр таких частей содержит 200 000; каких частей в диаметре 7, таких в двенадцать раз повторенной длине BF будет 24 без одной десятой. Таким образом последнее число больше самой окружности, меньше же ее было число 21. На-глаз видно, что дуга BE ближе к BG, чем к линии BF. Потому окружность ближе к числу 21, чем к 24 без одной десятой; потому принимается, что она отстоит от 21 на 1, а от второго числа на 2 без одной десятой, так что получается около 22.

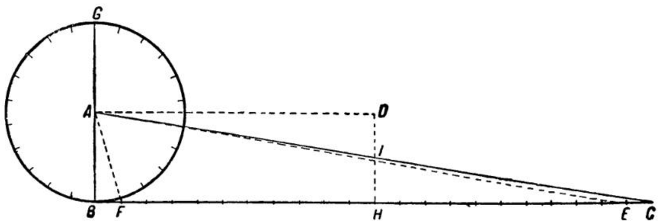
Гораздо тщательнее Архимед это доказывает на фигурах с большим числом сторон, каковы 12-, 24- и 48-угольники; там же оказывается, что у окружности есть небольшой недостаток, отчего она и выходит меньше 22. Тем же способом Адриан Римлянин доказал, что если диаметр круга разделить на 20 000 000 000 000 000 частей, то таких частей в окружности будет почти 62 831 853 071 795 862.

Примечание. Из трех конических сечений, называемых парабола, гипербола и эллипс, эллипс похож на круг, и я показал в сочинении о движении Марса (т. III, стр. 401), что длина эллиптической кривой относится к среднему арифметическому его диаметров, называемых прямой и поперечной осями, тоже почти как 22 к 7.

ТЕОРЕМА II

Площадь круга при сравнении с квадратом диаметра имеет (к нему) отношение почти как 11 к 14.

Архимед пользуется косвенным доказательством, приводящим к невозможности, о чем многие и много писали. Мне же кажется, что смысл этого (доказательства) следующий. Окружность круга *BG* содержит столько же частей, сколько точек, — именно бесконечное число. Каждую из них рассмотрим как основание некоторого равнобедренного треугольника с боковой стороной *AB*, и таким образом в площади круга окажется бесконечное множество треугольников, соединенных вершинами в центре A. Пусть, далее, окружность круга BG вытянута в прямую, и пусть ей равна BC, а AB к ней перпендикулярна (фиг. 2). Тогда основания всех этих бесчисленных треугольников, или секторов, будут представляться расположенными друг за другом по прямой BC; пусть одно из таких оснований будет BF, и какое-нибудь равное ему — CE; наконец, соединим точки F, E, C с A. Таких треугольников ABF, ACE над прямой BC получится столько же, сколько секторов в площади круга, и их основания BF, EC и общая высота AB будут такие же, как у секторов; следовательно, все эти треугольники ABF, ACE и т. д. будут равновелики (друг другу), и каждый из них будет равновелик соответствующему сектору круга. А значит, и все вместе эти треугольники, имеющие основания на линии BC, т. е. треугольник BAC, всеми ими составленный, будет равновелик сумме всех секторов круга, т. е. составленной ими площади круга. Это самое и имеет в виду архимедово приведение к нелепости (2).



Фиг. 2.

Разделив BC пополам в точке H, построим параллелограм $ABHD$, и пусть DH пересекает AC в (точке) I. Тогда этот прямоугольный параллелограм будет равновелик площади круга. Действительно, так же, как вся CB относится к своей половине CH, так и AB, т. е. вся DH, — к половине IH. Следовательно, IH равно ID, а HC равно DA, т. е. HB; затем углы при (точке) I равны, а при (точках) D и H — прямые. Потому треугольник ICH, находящийся вне параллелограма, равен треугольнику IAD, на который параллелограм превышает трапецию $AIHB$.

Если диаметр GB принять за 7 частей, то его квадрат будет равен 49; так как таких частей в окружности, т. е. в BC, 22, то в ее половине BH их будет немного меньше 11, как и раньше. Умножив 11 на длину радиуса AB, т. е. на $3^1/_2$, получим, что прямоугольник AH равен $38^1/_2$.

Таким образом каких частей квадрат диаметра содержит 49, таких площадь вписанного круга имеет $38^1/_2$

удваивая:	98	77
разделив на 7:	14	11

Что и требовалось доказать.

Добавление 1. Площадь кругового сектора (составленного прямыми, проведенными из центра, и стягивающей их дугой) равна прямоугольнику, построенному на радиусе и половине дуги.

Добавление 2. Площадь меньшего сегмента круга (части, отсеченной от круга прямой) меньше площади сектора на треугольник, ограниченный прямыми сектора и сегмента, а площадь большего сегмента на столько же больше площади соответствующего сектора.

В геометрических книгах доказывается, что прямоугольник, построенный на высоте треугольника и линии среднего сечения, равен его площади. Отняв площадь этого треугольника от площади сектора, получим площадь меньшего сегмента, а прибавив — большего. На фиг. 1 *DABE* изображает меньший сектор, *DABCD* — больший; *DGBE* — меньший сегмент, *DGBC* — больший; *DBA* — треугольник, на который отличаются сектор от сегмента. Этот треугольник разбит на две равные и конгруэнтные части *AGB* и *AGD*.

Приложив угол *DAG* к *GBA* и угол *ADG* к *GAB*, получим прямоугольник с высотой *AG* и шириной *GB*. В учении о треугольниках *GB* называется синусом половинной дуги *EB*, а *GA* — синусом ее дополнительной.

Примечание 1. Круг имеет с параболой то общее свойство, что в обеих фигурах части, отсеченные каким-нибудь способом прямой, будут равновелики друг с другом, если у них равны поперечники (Архимед, О коноидах, IV).

Примечание 2. Площадь параболы равна $^4/_3$ площади треугольника с тем же основанием и той же высотой. (Архимед, О квадратуре параболы. Предложения 17 и 24-е).

Примечание 3. Площадь эллипса относится к площади круга, как малый диаметр к большему, и отношение площади эллипса к прямоугольнику, построенному на диаметрах, то же, как отношение круга к квадрату диаметра, т. е. почти как 11 к 14 (Архимед, О сфероидах, 4—7).

ТЕОРЕМА III

Отношение цилиндра к столбовидному прямоугольному параллелепипеду с той же высотой, заключающему тело цилиндра между своими квадратными основаниями и параллельными боковыми сторонами, то же, как отношение круга к описанному квадрату, т. е. как 11 к 14.

Именно, объем цилиндра так относится к объему прямоугольного параллелепипеда, или столба, как круговое основание цилиндра относится к описанному квадрату (Архимед, О сфере и цилиндре).

При этом цилиндр и равновеликий ему стслб являются здесь как бы телесными плоскостями, а потому им и принадлежат те же свойства, как плоскостям [3].

ТЕОРЕМА IV

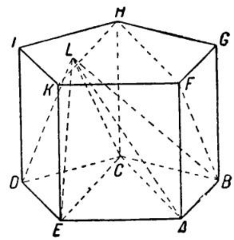
Если прямая призма с параллельными основаниями и пирамида или цилиндр и конус имеют общее основание и одну и ту же высоту, то объем первых тел втрое больше объема вторых.

Всякая призма, как, например, пятиугольная *BI* с параллельными основаниями *ABCDE* и *FGHIK* и прямыми углами *BAF*, *AEK* и т. д., разлагается на пентаэдры, или треугольные призмы. В случае пятиугольной — на три *GHF*, *FHK*, *KHI*, ограниченные каждая тремя параллелограмами и двумя противоположными треугольниками (фиг. 3).

Треугольники:	Первой призмы *GHF*, *BCA*	Второй *FHK*, *ACE*	Третьей *KHI*, *ECD*
Параллелограмы:	*GHCB* *HCAF* *FABG*	*HCAF* *FAEK* *KECH*	*KECH* *HCDI* *IDEK*

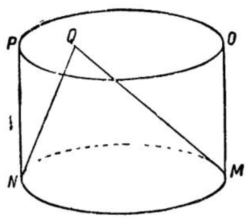
Треугольная же призма разлагается на три тетраэдра, из которых по два, имеющих своими основаниями равные половины одного и того же параллелограма, имеют и равные высоты. Возьмем, например, первую призму, заключенную между треугольниками GHF и BCA. Проведем в параллелограмах $BGFA$ и $AFHC$ диагонали BF и CF из углов B и C треугольника BCA. С их помощью образуется тетраэдр, в котором четыре треугольника: BCA, BFC, BFA, AFC.

Остается еще четырехугольная пирамида с основанием $BGHC$ и вершиной F. Проведя диагональ GC, рассечем ее на два тетраэдра; в одном четыре треугольника BGC, GFB, GFC, CFB, прочие будут: GHC, GFH, HFC, CFG.



Фиг. 3.

Так как параллелограм $GHCB$ рассечен линией GC пополам, т. е. треугольники GCH и GCB равны, и высота GF одна и та же (ибо угол BGF прямой), то тетраэдры $GCBF$ и $GCHF$ будут равновелики. Точно так же параллелограм $GFAB$ рассекается линией BF пополам на равные треугольники FBG и FBA. Плоскость BCA перпендикулярна к плоскости GA, а потому перпендикуляр, опущенный из C на BA, служит высотой для тетраэдров $GBFC$ и $ABFC$, которые, таким образом, равновелики. Но тому же тетраэдру $GBFC$ был равновелик $GCFH$. Следовательно, все три тетраэдра равновелики, и призма HGA содержит три равновеликие тетраэдра. Возьмем теперь на верхнем основании $FGHIK$ точку L и соединим ее с вершинами нижнего основания $ABCDE$, так что получится пятиугольная пирамида. Утверждаю, что она составляет третью часть столба GAD. Действительно, основание $ABCDE$ разделено линиями AC и EC, как и раньше, на три треугольника, на которых поставлены и три пентаэдра и три части пирамиды, именно, $ABCL$, $ACEL$, $ECDL$, а перпендикуляр, опущенный из L на плоскость BD, равняется боковым ребрам KE, FA и прочим. Следовательно, у тетраэдров $ABCF$ и $ABCL$ равные высоты, а значит, они равновелики. Но $ABCF$ есть третья часть призмы $ABCFGH$, а потому и $ABCL$ — ее же треть. Точно так же вторая часть $ACEL$ пирамиды составляет треть второй призмы, и третья часть $ECDL$ — треть третьей призмы. Вся же пирамида составляет треть всего столба, т. е. последний втрое больше первой. Точно так же и цилиндр $MNOP$ с параллельными основаниями MN и OP равновелик трем конусам MNQ, имеющим то же основание MN и вершину Q, достигающим плоскости верхнего основания цилиндра (фиг. 4). Именно, может быть аналогично приложено то же доказательство, если представить себе, что круг, служащий основанием цилиндру и конусу, разделен из центра на бесконечное число треугольников, на которые опираются столько же призм, сходящихся на оси цилиндра, сколько и частей конуса, сходящихся на его оси.

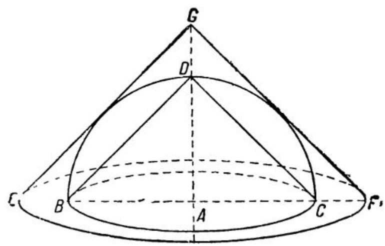


Фиг. 4.

ТЕОРЕМА V

Кривая поверхность прямоугольного конуса, вписанного в полусферу, относится к площади основания, или большого круга сферы, как $\sqrt{2}:1$, и составляет половину поверхности прямоугольного конуса, описанного около сферы.

Пусть сфера BDC пересечена плоскостью через центр A; сечение BC продолжено, и построены два прямоугольные конуса. Один, (лежащий) целиком внутри полусферы BDC, имеет осью прямую AD, перпендикулярную в центре A к диаметру, основание BC и вершину D — общие с полусферой; пусть это будет конус BDC. Другой — весь вне полусферы, касаясь ее серединой образующих своей боковой поверхности, например прямыми EG и FG, параллельными BD и DC, имеющий вершину G на продолжении оси AD первого конуса, а основание EF на плоскости, которой была пересечена сфера (фиг. 5). Так как BA и AD равны между собой, то будут равны радиус EA основания внешнего конуса и его высота AG. Так как угол EGF прямой, то EG будет стороной квадрата, описанного около круга, и потому равняется



Фиг. 5.

диаметру BC. Квадрат EF равен сумме квадратов EG и GF, равных диаметру BC, т. е. квадрат EF вдвое больше квадрата BC, а потому и круг EF вдвое больше круга BC.

Затем я утверждаю, что отношение конических поверхностей друг к другу равно $2:1$, а отношение меньшей конической кривой поверхности к площади круга BC равно $\sqrt{2}:1$. Именно, на основании сказанного в теореме II, прямоугольник, построенный на радиусе AB и всей окружности BC, вдвое больше площади круга BC. И точно так же на основании того же способа доказательства прямоугольник, построенный на всей BD и всей окружности BC, вдвое больше кривой конической поверхности BDC.

Поэтому плоская поверхность круга BC относится к кривой поверхности конуса BDC, как AB к BD (4). Но BD относится к AB, как $\sqrt{2}:1$, потому что отношение квадратов этих линий есть $2:1$. Итак, отношение названных поверхностей (действительно) равно $\sqrt{2}:1$. Так как конусы подобны, то отношение плоской (площади) основания BC к кривой (поверхности) BDC равно отношению плоской (поверхности) EF к кривой EGF или, после перестановки, коническая кривая (поверхность) относится к конической же, как основание к основанию. Но отношение между основаниями равно двум, а потому равно двум и отношение между коническими кривыми (поверхностями).

ТЕОРЕМА VI

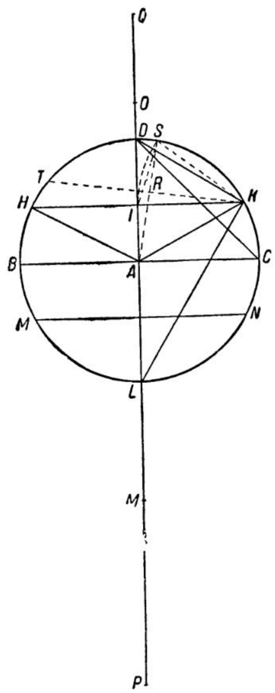
Поверхность сферы вчетверо больше площади наибольшего круга, пересекающего сферу через центр.

Доказательства Архимеда и Паппа в высшей степени остроумны, но их не легко понять; справедливость же самого предложения и первоначальные основания доказательства весьма ясны из предыдущего. Именно, боковая поверхность большего конуса EGF (фиг. 5) больше полусферической поверхности BDC, а поверхность меньшего BDC меньше, так как первая покрывает полусферу, а вторая целиком находится под сферой. Потому весьма правдоподобно, что поверхность полусферы есть среднее пропорциональное между поверхностями обоих конусов. Но меньшая коническая поверхность относится к плоской площади основания, как $\sqrt{2}:1$, а большая — как $2\sqrt{2}:1$; среднее же (геометрическое) между $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$ равно 2. Отсюда и правдоподобно, что поверхность полусферы вдвое, а поверхность всей сферы вчетверо больше площади наибольшего круга BC. Архимед это доказывает со всей строгостью на основании подобных же соображений.

ТЕОРЕМА VII

Поверхность всякого сегмента сферы равна площади круга, радиус которого стягивает ширину сегмента от полюса до основания.

Под сегментом сферы здесь понимается не всякая часть ее, а только те, которые получаются при рассечении полной сферы плоскостью на две части, так что каждая из них имеет свой полюс; при таком сечении оказывается, что основанием этих сегментов служит плоский круг. Пусть центр сферы есть точка A, и $BDCL$ — ее большой круг (фиг. 6). Примем концы диаметра DAL за полюсы D и L будущих сегментов и проведем через точку I и центр A два перпендикуляра HIK и BAC, представляющие круговые сечения, перпендикулярные к плоскости DBL. Тогда вся (линия) DL, стягивающая полуокружность $LCDB$ от полюса D до самой нижней точки L (которая в случае сравнения полной сферы с ее сегментами играет роль основания), будет по теореме VI радиусом плоского круга, равного всей кривой поверхности сферы, а линия DC, стягивающая DKC, т. е. половину дуги сегмента BCD от полюса D до основания C, будет по



Фиг. 6.

теореме V радиусом плоского круга, равного кривой поверхности сегмента *BDC*, т. е. полусферы. И вообще, взяв любой сегмент, например *HKD*, получим, что линия *DK*, стягивающая дугу сегмента от полюса *D* до основания *K*, будет радиусом плоского круга, равного кривой поверхности сегмента *KDH*, а хорда *KL* будет радиусом плоского круга, равного кривой поверхности сегмента *HKL*, полюс которого — точка *L*, а основание — круг *HK* (5).

Доказательство смотри у Архимеда. Первоначальную же уверенность дает аналогия, ибо, если это так в случае сравнения с целой сферой и полусферой, то вероятно, что тот же результат получится и для других сегментов.

Добавление. На основании этих же принципов легко обращаются в плоские (площади) части сегментов, ограниченные с обеих сторон круговыми основаниями. Пусть, например, *BHKC* (фиг. 6) есть часть сегмента *BDC* и круги *HK* и *BC* — ее основания. Сначала найдем круг, равный большему сегменту сферы *BDC*, а затем другой, равный тому, который дополняет до этого сегмента искомую часть. Таким дополнением является меньший сегмент *HKD*, все равно, будет ли его полюс тот же, как и первого сегмента, или другой. Разность плоских кругов *DK* и *DC* и будет равна поверхности слоя *BHKC*.

Для тех же частей сегментов, которые ограничены не полными кругами, а частями их (за исключением случая, когда полюс *D* и ось *DI* всего сегмента *HKD* лежат на пересечении сечений), еще не известен способ вычисления и сравнения.

ТЕОРЕМА VIII

Поверхность сферы и ее ось рассекаются плоскостью, перпендикулярной к оси в одном и том же отношении.

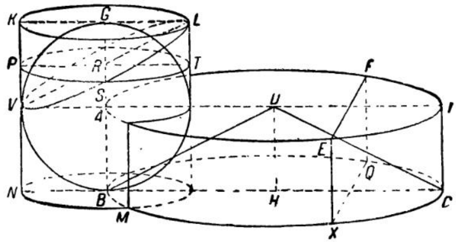
Предыдущая, седьмая, теорема служит для геометрических построений, настоящая же, восьмая, более полезна в арифметических вычислениях, давая очень удобные упрощения. Первая теорема вводит плоские площади, равные кривым поверхностям, настоящая же указывает линии, эквивалентные сегментам. Если на предыдущей фигуре *DI* изображает ось сечения, т. е. если *DI* перпендикулярна плоскости *HK* в центре сечения *I*, то вся поверхность сферы *DKLH* и часть ее *HDK* пропорциональны всей оси *DL* и ее части *DI*, а часть *HLK* пропорциональна части оси *IL*. Именно потому, что (поверхность) *HDK* (относится) к (поверхности) *KLH*, как круг (радиуса) *DK* к кругу (радиуса) *KL* (по VII), т. е. как квадрат *KD* к квадрату *KL*, квадрат же *KD* относится к квадрату *KL*, как отрезок *DI* к отрезку *IL*, то, следовательно, также и поверхность *HDK* относится к поверхности *KLH*, как отрезок *DI* к отрезку *IL*.

Аналогия: подобно тому как линии *BA*, *HI* пропорциональны окружностям кругов *BC*, *HK*, описанным из центров *A* и *I*, так же и поперечные линии *DA*, *DI* пропорциональны площадям *BDC* и *HDK*, ограниченным этими кругами. И подобно тому как *DI* пропорциональна площади *HDK* и *DA* — площади *BDC*, так же и *IA* пропорциональна площади слоя *BHKC*.

ТЕОРЕМА IX

Поверхность прямого цилиндра равновелика поверхности сферы, которую он охватывает.

Цилиндрическая (поверхность) получается умножением всей окружности KL (фиг. 7) на диаметр KN или GB, а от умножения полуокружности KL на полудиаметр AB получится четвертая часть этой поверхности, так как площади подобных фигур пропорциональны квадратам сторон. Но таким же умножением (по теореме II) получается площадь наибольшего круга, которая равна также четверти поверхности сферы (по теореме VI). Следовательно, кривая поверхность цилиндра KML и кривая поверхность шара или сферы с диаметром GB, как обе вчетверо большие площади (круга) KL, равны между собой.



Фиг. 7.

ТЕОРЕМА X

Поверхности шара и цилиндра, охватывающего шар, отсеченные одной и той же плоскостью перпендикулярной оси, равны (между собой)

Пусть GB — шар и LN — цилиндр, охватывающий его посредине в точках G и B, а PST — плоскость, персекающая обе поверхности. Утверждаю, что цилиндрический пояс $KPSTL$ равен кривой поверхности шарового сегмента GR. Это кажется неверным, так как цилиндрическая (поверхность) — раздвинутая, сферическая же кверху суживается. Но надо помнить, что насколько первая более раздвинута, настолько же вторая шире, так как наклонно поднимается до той же высоты.

Доказывается это легко.

Так как пояс $KPSTL$ получается от умножения KP на его окружность KL, а пояс $PSTMN$ — умножением PN или RB на ту же окружность и KP равно GR, то отрезки GR, RB и GB пропорциональны цилиндрическим поверхностям KT, TN и NL. Но эти же отрезки GR, RB и GB пропорциональны сегментам шара GR, RB и всей шаровой поверхности BG (по теореме VIII). Следовательно, цилиндрические поверхности KT, TN и NL пропорциональны сферическим GR, RB и BG. Но вся поверхность цилиндра NL равна всей поверхности сферы GB (по теореме IX). Следовательно, и часть $KLPST$ цилиндрической поверхности будет равна части сферической поверхности в сегменте GR.

ТЕОРЕМА XI

Объем цилиндра относится к объему охватываемой им сферы, как 3 : 2.

По аналогии со сказанным в теореме II, объем сферы как бы содержит в себе неявно бесчисленное множество конусов, сходящихся вершинами в центре, с основаниями, роль которых выполняют точки, опирающиеся на поверхность сферы. Пусть же на фиг. 2 BG изображает сферу, A — ее центр, AB, AG и т. д. — бесконечное множество тончайших конусов, т. е. тех, у которых основаниями служат точки B, G и т. д., а общей вершиной всех их — точка A. Построим новую фигуру, на которой кривая поверхность сферы растянется в площадь круга с диаметром BC, вдвое большим диаметра сферы BG, так как отношение этих кругов равно четырем (по теореме VI); в центре этого круга BC — точке H — восставим к нему перпендикуляр HD, равный радиусу сферы AB. Наконец, образуем конус BDC с основанием BC и вершиной D.

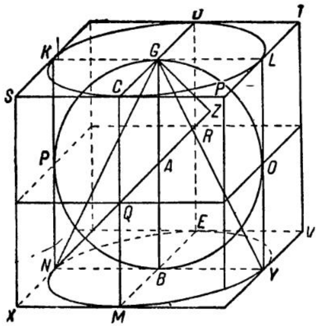
Объем этого конуса будет равен объему сферы BG. Именно, бесконечно малые основания B, G и т. д. бесчисленных конусов AB, AG и т. д., лежащие на сфере, перенесутся вместе со сферической поверхностью на площадь круга BC и расположатся по порядку друг за другом, а из прямых конусов ABB, AGG и т. д., находившихся в сфере, получатся теперь наклонные конусы DCC, DBB и т. д., исключая средний конус DHH, который останется прямым, и все эти конусы будут иметь одну и ту же высоту DH и равные — разумеется, бесконечно малые — основания, а потому все они будут равновелики между собой и с прямыми конусами в сфере; весь же конус BDC, составленный из всех их, будет равновелик всей сфере BG, составленной из всех (ее конусов). Умножая площадь круга BC на радиус HD, получим цилиндр $AICB$, объем которого втрое больше конуса BCD (по теореме IV) и вдвое больше объема цилиндра, сжимающего сферу, потому что площадь основания BC вчетверо больше площади KL, а высота HD составляет половину высоты BG, и, значит, два цилиндра, равных $AICB$, будучи поставлены друг на друга, образовали бы высоту, равную BG — высоте цилиндра KLB, и оказались бы вчетверо больше его, благодаря основанию BC, вчетверо большему основания KL. А значит, один (цилиндр) $AICB$ вдвое больше цилиндра KLB; но он же был втрое больше конуса BDC, т. е. объема сферы BG, равновеликой конусу BDC. Следовательно, разделив цилиндр $AICB$ на 6 (частей), найдем, что половина его, т. е. 3 (части), приходится на цилиндр KLB, треть же от 6, т. е. (2 части), — на сферу GB. Итак, цилиндр KLB относится к своей сфере GB, как 3 : 2, что дает полуторное отношение.

Эту же теорему можно доказать на основании теоремы IX, если представить себе, что цилиндр рассечен на бесконечное число (треугольных) призм, сходящихся по его оси и имеющих вместо четырехугольных призматических граней прямые линии, равные оси, и все эти грани расположены друг за другом по кривой поверхности цилиндра, подобно тому, что мы выше в теореме II представляли себе об окружности круга

Пусть, именно, на фиг. 2 круг BG изображает оба основания цилиндра, окружность BG — кривую цилиндрическую (поверхность), а точка A — ось цилиндра, равную диаметру BG. Пусть затем кривая поверхность цилиндра развернута в плоскость, так что линия BC изображает прямоугольник длины BC и ширины BG. Соединим ось цилиндра AA с параллельной ей прямой CC прямоугольником $AACC$, так что получится призма $AABBCC$, равновеликая объему цилиндра. Действительно, бесконечно узкие прямоугольные основания (т. е. линии) всех бесконечно тонких призм, бывших в цилиндре, расположатся друг за другом по поверхности прямоугольника BC, а сами призмы, бывшие в цилиндре прямыми, скосятся, но так как вершины всех их оснований будут достигать конца AA общей высоты BA, то эти призмы останутся равновеликими между собой и с прямыми призмами в цилиндре. Умножая прямоугольник $BBCC$ на высоту BA, получим объем параллелепипеда, вдвое больший объема призмы $AABBCC$, а следовательно, и вдвое больший объема цилиндра. Но выше площадь круга, равновеликого прямоугольнику $BBCC$, т. е. кривой поверхности цилиндра (по теореме VI вчетверо большей площади большого круга), уже умножалась на высоту, равную полудиаметру BA, и получался объем, втрое больший конуса, равновеликого сфере. Следовательно, утроенный объем сферы и удвоенный объем цилиндра равны между собой, откуда, как и выше, отношение цилиндра к сфере равно $3:2$.

ТЕОРЕМА XII

Объем куба немного меньше удвоенного объема сжимаемой им сферы, и их отношение приблизительно равно 21 : 11.



Фиг. 8

Именно, объем куба $STVX$ (см. фиг. 8) относится к сжимаемому им цилиндру KLN приблизительно как 14 : 11 (по теореме III), т. е. как 42 : 33. Цилиндр же KLN относится к сфере $PGOB$, которую он сжимает вместе с кубом, как 3 : 2 (по теореме XI), т. е. как 33 : 22. Следовательно, куб относится к сфере, как 42 : 22, т. е. как 21 : 11.

ТЕОРЕМА XIII

Объем конуса, высота которого равна диаметру сферы, а основание — ее большому кругу, равен половине объема сферы.

Именно, цилиндр KLN с тем же основанием и той же высотой втрое больше конуса NGY, т. е. их отношение равно 3 : 1. Но тот же цилиндр относится к (вписанной) сфере, как 3 : 2 (по теореме XI). Следовательно, конус относится к сфере, как 1 : 2.

Таблица полученных выводов

	Конус	Сфера	Цилиндр	Куб	
	NGY	*PGOB*	*KLYN*	*STYX*	сжимающий цилиндр по *KN*, *CM*, *LY* и *DE*, и сферу в *G*, *O*, *B*, *P*, *Q*, *R*
Отношение:					
как	11 :	22 :	33 :	42	(немного меньше)
или	1 :	2 :	3 :	4	

Добавление. Отсюда же, далее, выходит, что конус, вписанный в полусферу (на фиг. 5 конус *BDC*), относится к цилиндру, сжимающему сферу, как вписанный в сферу октаэдр к описанному кубу, т. е. составляет шестую часть цилиндра, четвертую — сферы, а следовательно, половину полусферы или половину конуса, рассмотренного в теореме XIII, с которым он имеет равное основание, высоту же вдвое меньшую. Больший же конус *EFG* (фиг. 5), заключающий в себе полусферу, имеет объем несоизмеримый, т. е. не выражающийся (в частях сферы). Именно, подобные конусы *EFG* и *BDC* относятся, как кубы высот *AG* и *AD*. Но *AG* относится к *AD*, как $\sqrt{2} : 1$, следовательно, конусы относятся, как $(\sqrt{2})^3 : 1$, т. е. как $2\sqrt{2} : 1$. Так как в этом отношении один член (т. е. конус *BDC*, равный половине полусферы *BDC*) со сферой соизмерим, то другой может быть выражен только приближенно.

Примечание 1. То же отношение имеет объем тела, образованного эллипсом и называемого сфероидом, к объему конуса с той же высотой (Архимед, Сфероиды. Предложения 29, 30-е).

Примечание 2. Так же как сфероид вдвое больше своего конуса, параболический коноид в полтора раза больше своего конуса (см. в том же сочинении предложения 23, 24-е).

Гиперболический же коноид (фигуру которого приблизительно имеет опухоль, гора или обравненная куча зерен) соответствующее отношение приближает к единице, так как к составляющим полуторное отношение отрезкам, равным утроенному и удвоенному расстоянию от центра гиперболы до вершины, прибавляется ось коноида [6].

ТЕОРЕМА XIV

Сегменту сферы равновелик конус на том же основании с высотой, превосходящей высоту сегмента на отрезок, который относится к радиусу шара, как сама высота сегмента к остальной части диаметра.

Пусть на фиг. 6 CLB изображает сферу, HKD и HKL — два ее сегмента, DI и IL — их оси — части диаметра, проведенного через центр A, которые продолжим за точки D и L до (точек) O и P. Ищется конус, равновеликий меньшему сегменту HKD, ось которого DI, а остаток диаметра IL. Пусть IL относится к LA, как ID к DO; тогда IO будет высота и HK — основание конуса, объем которого равен объему меньшего сегмента HKD. Возьмем затем сегмент HKL, ось которого LI, а остаток диаметра ID. Пусть опять ID относится к DA, как IL к LP; тогда IP будет высота и HK — основание конуса, равновеликого большему сегменту HKL.

Доказательство этого не просто, а потому, кто хочет, пусть возьмет его из книги Архимеда о сфере и цилиндре (II, 2): у меня же нет намерений переписывать здесь всего Архимеда. Справедливость же теоремы в случае полусферического сегмента видна из следующего. Пусть BCD — полусфера, AD — ее ось и AL — остаток диаметра. Если сделаем так, что ось AD относится к DQ, как остаток диаметра AL к радиусу LA, т. е. отложим DQ равным DA, то высота AQ будет вдвое больше высоты сегмента AD. Наша теорема полагает, что конус, имеющий основанием BC, а высотой диаметр DL, равновелик полусфере. Но, как видно из предыдущей теоремы, это действительно верно, так как этот конус равнялся половине сферы (7).

Архимед (II, 8) сравнивает также отношение объемов сегментов с отношением их поверхностей и доказывает, что отношение объемов меньше „двойного" и больше „полуторного" отношения поверхностей. „Двойное" отношение чисел получается при умножении каждого члена отношения на самого себя, а „полуторное" — при умножении каждого члена на квадратный корень из него. Так, если поверхности сегментов относятся между собой, как 4 : 9 (два квадратных числа), то объемы, прикрытые этими поверхностями, будут иметь отношение ближе, чем 16 : 81 (умножая каждый квадрат на самого себя), и дальше, чем 8 : 27 (умножая корни из квадратов — 2 и 3 — на сами квадраты) или чем 16 : 54. Следовательно, если меньший из сегментов весил 16, то больший будет весом между 54 и 81.

Дополнение. Отношение обоих сегментов шара между собой, благодаря указанному измерению объема при любом сечении, выражается через высоты конусов, т. е. IO и IP, так же, как раньше отношение поверхностей сегментов выражалось через ID и IL. Но здесь большая разница в том, что объем всего шара при каждом сечении будет изображаться особой линией OP, в то время как поверхность всего шара всегда будет изображена диаметром DL.

Примечание 1. Многие из этих свойств у шара общие со сфероидом и коноидами. Именно, так же как сечение шара, произведенное плоскостью, всегда круг, так и сечение сфероида, хотя и не всякое, но плоскостью, параллельной оси, дает эллипс, подобный сфероиду. При сечении же сфероида произвольной плоскостью или коноида плоскостью, проходящей через какую-нибудь хорду, получаются эллипсы различного и непохожего один на другой вида или круги (Архимед, Сфероиды, 12—15).

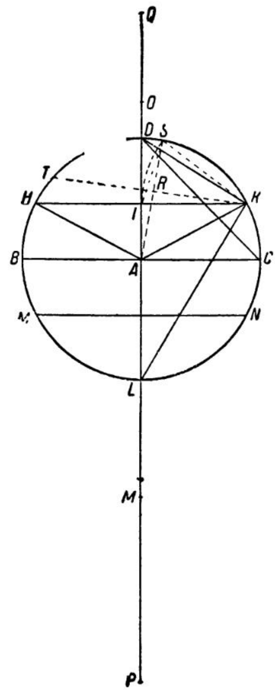
Примечание 2. Если сечение сфероида перпендикулярно к оси, то отношение полученных сегментов такое же, как у сегментов шара; если же сечение наклонно, то вместо полуоси берется половина того диаметра, который соединяет вершины полученных частей (т. е. те точки их, которые наиболее удалены от секущей плоскости). И в самом эллипсе, производящем сфероид, имеется много диаметров различной длины, из которых каждый соединяет по две противоположные вершины и среди которых находится и ось.

ТЕОРЕМА XV

Задача. Так же как теорема VII дала плоские круги, равновеликие кривым поверхностям сегментов, а теорема VIII указала для сравнения друг с другом различных сечений пропорциональные им линии, так и для объемов сегментов можно указать не только равновеликие им конусы (как в теореме XIV), но и пропорциональные им плоские площади, сравнимые друг с другом для различных сечений.

Хотя это доказательство несколько трудновато, я его все же здесь приведу, так как оно не рассматривалось прежними геометрами.

Итак, ищутся три плоские площади, относящиеся друг к другу, как относятся друг к другу и ко всему шару два его сегмента.



Фиг. 6.

Пусть даны сегменты *HKD* и *HKL* (фиг. 6). Из точки *K* или *H* на границе сегмента в плоскости круга *HDK* радиусом *KI* или *HI* опишем дугу круга *IS*, пересекающую сегмент *HDK* в точке *S*; соединим *S* с *A* радиусом *SA* и опустим на него из *K* перпендикуляр *KT*, пересекающий радиус в точке *R*. Сделав это, получим три прямоугольника: первый со сторонами — радиусом *AD* и диаметром или высотой *DL* всего шара. Он представит объем всего шара. Второй со сторонами — радиусом *AD* и высотой *DI* сегмента. Он представит объем сферического сектора

HAKD. Третий со сторонами *RS* и высотой *AI* конуса *HAK*. Он, как я утверждаю, представит в том же отношении объем конуса *HIKA*. Следовательно, разность второго и третьего прямоугольников представит площадь, пропорциональную разности сектора *HAKD* и конуса *HIKA*, т. е. объему сегмента *HIKD*. Точно так же, если речь идет о сегменте, большем полусферы, т. е. о *HKL*, то для построения второго прямоугольника вместо *DI* следует взять *IL*; к этому прямоугольнику надо прибавить прямоугольник со сторонами *AI*, *RS*, и тогда получится площадь, пропорциональная большему сегменту *HIKL*.

Доказательст о. Во-первых, линии *DI*, *IL* и *DL* пропорциональны поверхностям сегментов и всей сферы (по теореме VIII). Следовательно, и между площадями прямоугольников, равными произведениям этих линий на один и тот же радиус, будет то же отношение. Но и объемы секторов *HAKD*, *HAKL* и объем всего шара относятся друг к другу, как поверхности *HDK*, *KLH* и всей (сферы). Следовательно, построенные прямоугольники относятся друг к другу, как секторы *HAKD*, *HAKL*. Затем произведение высоты *AD* на площадь круга радиуса *KD*, равную (по теореме VII) поверхности сегмента *HDK*, дает цилиндр, втрое больший конуса, равновеликого сектору *HDKA*, а произведение высоты *AI* на площадь круга *HK* радиуса *KI* даст цилиндр, втрое больший конуса *HIKA*. Но круг радиуса *KD* относится к кругу радиуса KI или KS, как квадрат KD к квадрату KS, а квадрат KD относится к квадрату KS, как отрезок DI к SR (по VII).

Итак, отношение площадей круговых оснований, описанных радиусами KD и KS, равно отношению отрезков DI и SR. Отношение же объемов конусов равно произведению отношений высот и оснований, как показано у Архимеда в главе XI о сфероидах. Следовательно, отношение сектора $HDKA$ к его конусу $HIKA$ равно произведению отношений AD к AI и DI к SR. Но и отношение прямоугольников равно произведению отношений соответствующих сторон. Потому отношение сектора $HDKA$ к его конусу $HIKA$ то же, как прямоугольника на AD и DI к прямоугольнику на AI и SR. Отсюда эти прямоугольники относятся к их взаимной разности, как сектор $HDKA$ и его конус $HIKA$ относятся к их взаимной разности, т. е. сегменту $HIKD$. Этот способ требует прежде всего рассмотрения конуса $HIKA$, представляющего общую разность между каждым из секторов и его сегментом, почему и важно было найти его объем [8].

Сравнительное примечание. Подобно сказанному, сегменты параболического коноида относятся, как квадраты их осей (Архимед, Сфероиды, 26).

Добавление 1. Объемы частей сегментов сферы подчиняются тем же законам, которые в добавлении к теореме VII были указаны для соответствующих частей поверхностей сегментов.

Добавление 2. Пояс сферы или сфероида, т. е. кольцеобразное тело, ограниченное средней частью поверхности сферы или сфероида, называемой зоной, а изнутри поверхностью цилиндра, исследуется следующим образом. От сферы или сфероида отнимается по два равных сегмента и цилиндр с высотой, равной высоте сферы, и основаниями, равными основаниям отнятых сегментов; тогда и остается объем слоя. Если же пояс берется не из середины сферы или сфероида, но сдвинутый к вершине или полюсу, то для его получения от сферы или сфероида отнимаются два неравных сегмента и усеченный конус так, чтобы остался этот слой. При этом подразумевается такой пояс, ширина которого вокруг одна и та же, так что им прикрывается усеченный конус с параллельными основаниями, размеры которого рассматриваются в следующей теореме.

ТЕОРЕМА XVI

Пусть конус рассекается различными способами. Во-первых, плоскостью, (проходящей) через вершину и (встречающей) площадь основания, или поверхностью другого меньшего конуса с той же вершиной.

В обоих случаях части конуса, имеющие равные высоты, относятся друг к другу, как основания. Ибо в этих случаях конус является как бы телесным кругом, а потому при сечении ведет себя так же, как круг в его основании.

Во-вторых, пусть конус пересечен плоскостью, параллельной образующей, движением которой он образован, или плоскостью, хотя и не параллельной образующей, но встречающей ее выше вершины, вне фигуры (конуса); в обоих случаях получаются неограниченные части, объемы которых до сих пор не исследовались геометрами, оттого, разумеется, что этого не требовалось для практических приложений.

Наконец, пусть конус пересечен плоскостью, встречающей все образующие; получатся две части, верхняя — с вершиной и нижняя — усеченная. Первую — с вершиной — в случае секущей плоскости, наклонной к оси, Архимед предпочел называть частью конуса, считая за целый конус только равнобедренный, Аполлоний же, беря конусы как равнобедренные, так и наклонные (пример какового есть на фиг. 4), эту часть, хотя бы ось была пересечена наклонно, и лишь бы в сечении получился круг, признает тоже за конус. Вообще же, что касается части при вершине, то при ее отсечении получается эллипс, центр которого лежит вне оси в сторону большей образующей. На фиг. 8 осью конуса GYN служит (прямая) GAB, а частью при вершине является GNA, основание которой эллипс, изображаемый прямой NZ, центр или середина которого, где он всего шире, ниже точки A, места встречи с осью, по направлению к N.

Объем этой части всегда больше прямого объема, отсеченного плоскостью, параллельной основанию NY, через точку встречи эллипса с осью, т. е. через точку A, ибо секущая плоскость, проходящая через A и наклоненная к оси GA, захватывает от объема конуса часть AN бóльшую, чем утерянная AZ. Будет ли этой части GNA равновелик конус, основание которого проходит через центр эллипса ниже точки A параллельно основанию NY? Это вопрос, заслуживающий рассмотрения: мне он еще не совсем ясен, но уже и не чужд; кое-что об этом смотри ниже в следующей теореме. Вообще же для всякой части при вершине справедлива теорема II в сфероидах Архимеда, по которой *отношение этой части при вершине к конусу равно произведению взаимных отношений оснований и высот*. Следовательно, первым множителем в отношении объемов GNA и GNY будет отношение площади эллипса NR к площади круга NY. Отношение же этих площадей (по примечанию 2 к теореме II) находится, как отношение прямоугольника из диаметров эллипса и квадрата на NY, считаемых за известные. Вторым множителем в отношении объемов является отношение GZ — высоты части GNA над плоскостью NR к GB — высоте конуса NGY над плоскостью NY. Перемножив между собой предыдущие члены в отношениях GZ к GB и прямоугольника на диаметрах эллипса NR к квадрату на NY, а последующие между собой, получим, что объем GNA относится к конусу NGY, как первое произведение ко второму. Можно также и отдельно для определения объема GNA заметить, что, умножая высоту GZ на площадь эллипса NA, получим объем, втрое больший этого объема GNA.

Если в частном случае секущая плоскость окажется параллельной основанию NY, то *отношение объемов отсеченной части и всего конуса будет равно кубу отношения высот или радиусов оснований и произведению отношения площадей оснований на корень квадратный из него*. Так как в этом случае часть при вершине и весь конус окажутся телами подобными, то, разумеется, возводя по отдельности в куб высоты или радиусы оснований, мы и получим, что большее из кубических чисел будет относиться к меньшему, как весь конус — к отсеченной части. Если бы были известны только площади оснований, то надо найти их квадратные корни и на них эти площади помножить.

Что касается *усеченных частей*, то на основании сказанного получается легкий способ для их определения. Именно, одним из указанных способов вычисляется как объем всего конуса, так и недостающей отсеченной от вершины части по данной высоте и радиусу основания. Так как для этого нужна неизвестная высота недостающей части, то она находится из сравнения оснований усеченной части с ее высотой, ибо разность радиусов оснований относится к высоте (в случае сечения, перпендикулярного к оси), как радиус меньшего основания к высоте недостающей отсеченной части. Наконец, отняв от всего конуса недостающую отсеченную часть, и получим в остатке требуемый объем усеченной.

Для тех же усеченных частей, заключенных между параллельными основаниями, годится и другой более короткий способ, как и выше. Так как основания здесь могут считаться известными, то стоит только возвести каждый из диаметров по отдельности в куб, и тогда весь конус будет относиться к усеченной части, как куб большего диаметра к разности между ним и кубом меньшего.

Клавий (Практическая геометрия, кн. V, 3) указывает другой способ, пожалуй, более остроумный, но, как мне кажется, и более трудный. Так же как и выше, надо вычислить площадь каждого основания, но, кроме того, приходится определять площадь среднюю пропорциональную между обоими основаниями. Последнее выполняется помощью перемножения и деления надлежащих чисел, либо путем извлечения двух квадратных корней и их перемножения. Затем все три площади надо сложить и их сумму помножить на треть высоты усеченной части. По радиусам же кругов, необходимым для вычисления площадей, все, что требуется, можно определить гораздо более простыми приемами.

Так как вследствие формы бочек для нашей цели необходимо многократно прибегать к усеченным конусам, получающимся от плоскости, перпендикулярной оси, то приведем здесь же одну прекрасную теорему и очень удобное правило, доказательство которого по причине его связи (с дальнейшим) приведем ниже в дополнении к архимедовой стереометрии в теореме XXII. Именно, усеченный конус разбивается на средний цилиндр и окружающий его конический пояс, который является частью конуса, не похожей на вышерассмотренные, так как она отсечена цилиндрической поверхностью. *Если теперь по одной прямой отложить друг за другом три диаметра, — два диаметра меньшего основания и один большего, — то объемы пояса и цилиндров на большем* *или меньшем основании будут пропорциональны площади прямоугольника, построенного на всем отложенном отрезке и разности между диаметрами большего и меньшего оснований, и утроенным квадратам этих диаметров.* Таким образом для пояса, удвоив длину меньшего диаметра, ее надо прибавить к длине большего и умножить на разность между большим и меньшим; затем для вписанного цилиндра надо возвести в квадрат меньший диаметр и утроить результат и, наконец, для объема всего усеченного конуса надо взять сумму того и другого. Так, если диаметры оснований 3 и 5 и их разность 2, то, прибавляя 5 к произведению $3 \cdot 2$, получим 11, умножая на 2, найдем для пояса 22; квадрат от 3 будет 9; его утроенная величина даст для цилиндра 27, а следовательно, для усеченного конуса 49 при всяком отношении высот. На основании следующих теоремы и ее добавления эти правила можно сделать удобнее.

ТЕОРЕМА XVII

Прямые части цилиндра, отсеченные плоскостями, параллельными оси, относятся друг к другу, как части основания.

Именно, цилиндр здесь является как бы телесным кругом или эллипсом, а потому при сечении с ним происходит то же, что с площадью основания. На фиг. 7 плоскость $EFQX$ параллельна оси DH. Следовательно, как часть круга EFI или XQC относится к части EFA или XQB, так же и часть цилиндра $EFICQX$ относится к части $EFABQX$. См. дополнение к теореме II.

При сечении же плоскостью, встречающей ось, но не пересекающей ни одно из оснований, полученные части относятся друг к другу, как отрезки оси.

Именно, прямой цилиндр — в случае сечения плоскостью, перпендикулярной оси, — является как бы телесной линией, заполняющей цилиндрический объем, а потому с последним при сечении и происходит то же, что и с линией. При сечении же наклонно к оси получаются части, равновеликие цилиндрам с осями той же длины, потому что сколько отсеченной части с одного бока нехватает до прямого цилиндра, столько же с другого у нее излишка, чего не бывает при сечении конуса вследствие неодинаковой всюду его ширины. На фиг. 7 плоскости PST и LSV пересекают ось GB перпендикулярно и наклонно в одной и той же точке R, и как GR относится к RB, так же относятся не только прямые части KT и TN но и наклонные LVK и VNL, и действительно, сколько части LVK со стороны L нехватает — именно LRT, — столько же со стороны V у нее излишка — именно VRP, что равно LRT — до прямого цилиндра.

Возьмем теперь *часть цилиндрического объема*, обозначенную на фиг. 13 буквами GST, т. е. ограниченную тремя поверхностями: плоскостями полукруга GT и полуэллипса GS и кривой цилиндрической поверхностью $bSTb'$, так что линия пересечения двух первых плоскостей пересекает ось HG перпендикулярно к ней в точке G.

Эта часть, как я утверждаю, относится к целому цилиндру TY с той же высотой приблизительно как 7 : 33 или 14 : 66, а оставшаяся от полуцилиндра $HGTS$, отсеченного плоскостью, проведенной через ось HG, часть HGS относится к этому полуцилиндру, как 14 : 19 (приблизительно) [10]. Это будет ниже в дополнении к Архимеду в теоремах XIX, XX, XXI доказано для частного вида цилиндра, в котором высота равняется окружности основания. Там же методом разгибания круглых тел в прямые показывается, что не только целый шар равновелик полуцилиндру, а целое суженное кольцо — части, отсеченной от цилиндра эллипсом, вершины которого находятся на основаниях цилиндра, но и части шара и суженного кольца, образованные вращением некоторой части окружности и этой части пропорциональные, равны частям названных полуцилиндра и цилиндра, отсеченным на той же части высоты. Отсюда следует, что части цилиндра, имеющие основанием полукруг, пропорциональны своим высотам, и потому при любой высоте сохраняют то же отношение к объему цилиндра равной высоты, какое было у первоначальной части ко всему цилиндру, т. е. 7:33. Та же пропорциональность высотам имеет место и для частей, основанием которых служит круг, потому что часть с таким основанием, высокая или низкая, равновелика половине соответствующего цилиндра с равной высотой. Если же основанием части служит не круг или полукруг, а иной сегмент круга, то различные основания и обусловливают различные отношения. Таким образом для рассмотренных частей цилиндра, так же как для конусов и пирамид, имеет место положение, что *части, опирающиеся на равные сегменты круга, относятся, как высоты, и в частности имеющие общее основание — как соответствующие отрезки одной и той же высоты.* Наконец, если цилиндр рассечен новой цилиндрической поверхностью с той же осью, то внешнее цилиндрическое кольцо делится конической поверхностью, нижним основанием которой служит бóльшая окружность, а верхним — меньшая, на две круговые части нового вида; внутреннюю по примеру предыдущей теоремы назовем „поясом", именно внутреннего цилиндра. Отношение этих частей цилиндрического кольца равно отношению двух средних арифметических, вставленных между меньшим и большим диаметрами кольца. Именно, если разделить длину большего диаметра на две части — длину меньшего и остаток — и возвести длины обоих диаметров в квадрат, то квадрат большей будет состоять из четырех частей: 1) квадрата меньшей, 2) квадрата разности и 3—4) двух прямоугольников из меньшей и разности. Утраивая квадраты, получим, что утроенный квадрат большей длины состоит из трех квадратов меньшей, трех квадратов разности и шести прямоугольников, т. е. разность утроенных квадратов длин диаметров равна трем квадратам разности и шести прямоугольникам.

Отношение же (утроенных) квадратов (диаметров) к площадям соответствующих кругов или объемам цилиндров равно отношению их разности к объему цилиндрического кольца. По предыдущей же теореме для внутренней части кольца, названной там поясом, мы должны разность (диаметров) умножить на больший и удвоенный меньший, т. е. на самое себя и на утроенный меньший.

Следовательно, после вычитания из трех квадратов и шести прямоугольников одного квадрата разности и трех прямоугольников для остальной части кольца получатся два квадрата разности и три прямоугольника.

Но отношение суммы трех прямоугольников и одного квадрата к сумме трех прямоугольников и двух квадратов равно отношению суммы утроенного меньшего (диаметра) и разности (между большим и меньшим) к сумме утроенного меньшего и удвоенной разности, т. е. то же самое, как отношение суммы меньшего диаметра с третьей частью разности к сумме меньшего с двумя третями разности. Но, прибавляя к меньшему диаметру сначала одну, а потом две трети от разности диаметров, мы и вставим между меньшим и большим диаметрами два средних арифметических, а это самое мы и хотели получить (11).

Добавление 1 и расчет. Отсюда легко находится отношение усеченного конуса к вписанному и описанному около него цилиндрам. Между диаметрами оснований надо вставить два средних арифметических и разность диаметров умножить на меньшее из них; это для пояса, который надо одеть на вписанный цилиндр, и, следовательно, для усеченного конуса сумму этого произведения надо прибавить к квадрату диаметра.

Вот пример. Пусть диаметры 3 и 5; разность между ними 2; она не делится на 3; потому, утраивая, заменяем диаметры на 9 и 15, и разность на 6, отчего отношение остается прежним.

Получаем:

Меньший диаметр	Два средн. арифметич.		Больший диаметр	
9	11	13	15	Меньший цилиндр 81 Пояс 66
9	Разн. 6	6	15	
81	66	78	225	Усеченный конус 147 Остаток кольца 78
Для вписанного цилиндра	Для пояса	Для остатка кольца	Для описанного цилиндра	Больший цилиндр 225

Пример 2

Диаметры

5	7	9	11
5	6		

Цилиндр 25 Пояс 42 Усеч. конус 67

Пример 3

Диаметры

19	20	21	22
19	3		

Цилиндр 361 Пояс 60 Усеч. конус 421

Иначе то же можно получить следующим образом: надо перемножить диаметры между собой, а их разность — на ее третью часть и произведения сложить, — получится усеченный конус в таких единицах, в каких квадрат диаметра выражает соответствующий цилиндр.

Вот три предыдущих примера:

9 6 9	5 6 5	19 3 19
15 2 9	11 2 5	22 1 19
135 12 81 Цилиндр меньший	55 12 25 Цилиндр меньший	418 3 361 Цилиндр меньший
12	12	3
147 Усеч. конус	67 Усеч. конус	421 Усеч. конус

Добавление 2. Части цилиндрического кольца между меньшим и большим цилиндрами, образованные коническими поверхностями, опирающимися на одно и то же основание, пропорциональны, так же как и сами цилиндры, своим высотам, а потому им же пропорциональны и усеченные конусы, заключенные между теми же параллельными кругами. И если бы даже верхнее основание было бы не параллельно нижнему и не круг, а эллипс, наклонный к оси, то тем не менее внешние и внутренние части цилиндрического кольца будут пропорциональны высоте, на которой находится центр эллипса и его малая ось, равная диаметру прямого цилиндра.

Потому не зря в предыдущей теореме я искал для измерения частей конуса, отсеченных плоскостью, наклонной к оси, способа, основанного на рассмотрении малой оси эллипса. Впрочем, поверхность, рассекающая такое цилиндрическое кольцо непостоянной высоты, не является прямым конусом с той же осью, как и цилиндры, но конусом наклонным.

ОБРАЩЕНИЕ К ПАТРОНАМ

Рукопись этой книжки пролежала шестнадцать месяцев у аугсбургского книготорговца, и хотя была ему рекомендована лучшим украшением нашей Германии и при жизни моим преданнейшим другом Марком Вельзером, все же вопреки данному мне обещанию не была напечатана.

Наконец, уже после того как Вельзер отошел от человеческих дел (он умер 23/VI 1614 г.), я вытребовал снова в свое распоряжение мою книжку от задержавшего ее издателя. С этого времени у меня явилось намерение напечатать эту книжку самому, несмотря на большой недостаток средств. При этом мне представилась возможность не только исправить ее, но и продвинуть в отношении объема сравнительно с первоначально написанной. Не скрою, что на эти размышления было затрачено некоторое время, уделенное от прочих занятий, но я не жалею об этой потере, так как никоим образом невозможно, чтобы пожал плод бессмертия труд, не посеявший некоторого времени.

Слышанные тобой, славный и благородный владетельный барон Иоргер, беглые замечания о фигурах.

не затронутых Архимедом; но теснейшим образом связанных со свойствами бочек, ты счел нужным никоим образом не опускать, а лучше присоединить в виде приложения к этому сочинению. Существеннейшую часть этих замечаний я обработал так, что они вполне годны для приложений, а до полного совершенства доказательств остается немного, и весь материал вставил в самую книгу на надлежащее место и так увязал с прочими отделами, что он может показаться не добавлением, привешенным в виде хвоста, но головой и сердцем всего рассуждения, как это и есть на самом деле. Полагаю, что когда выберется время познакомиться с этими вещами, то такого же мнения окажешься и ты, владетельный барон Иоргер, и еще в большей степени ты, славнейший властитель Лихтенштейнский, чьи постоянные занятия этими отделами философии и отличные способности к правильному суждению я с тех пор, как впервые обращался к тебе в предисловии к этой книге, в настоящее время узнал и оценил много ближе и лучше.

Будьте здоровы и благополучны.

Иды и ля 1615 го а.

ДОПОЛНЕНИЕ К АРХИМЕДУ

О стереометрии фигур, близко подходящих к коноидам и сфероидам

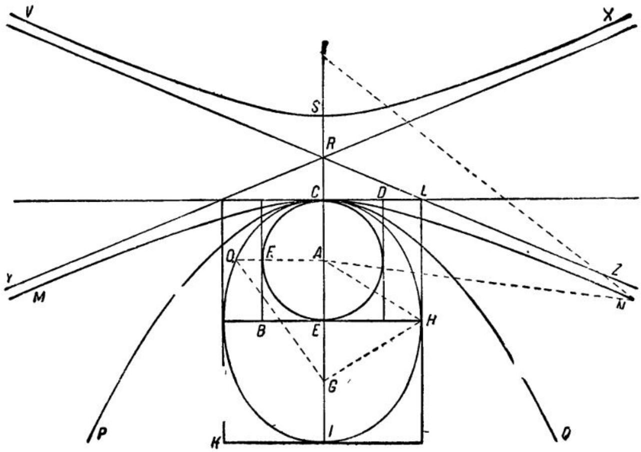
До предыдущих результатов дошли Архимед и древние геометры, исследуя природу и размеры определенных прямолинейных и криволинейных фигур и тел, образованных простейшим способом с их помощью.

Но так как фигура бочки отступает несколько далее от правильных тел, то я счел, что сделаю полезное дело, если сопоставлю для обозрения как бы на одной таблице способ образования этой фигуры и ей родственных, а также и степень их родства с правильными телами как для большей ясности дальнейших доказательств, так и для того, чтобы возбудить творчество геометров настоящего времени, и, распахнув ворота в обширнейшее поле геометрии, как глашатай, возвещу, что́ там остается доделать и что́ вновь открыть.

О сечениях конуса, служащих для образования тел

Криволинейных сечений кривой конической поверхности, служащих для образования подлежащих нашему рассмотрению тел, существует четыре вида, которые и прилагаются для сравнения друг с другом на фиг. 9. Именно, всякое сечение этого вида будет или круг CFE, или парабола PCQ, или гипербола MCN, или эллипс CNI.

Начиная с простейшей, эти фигуры располагаются в следующем порядке: во-первых, круг, за



Фиг. 9.

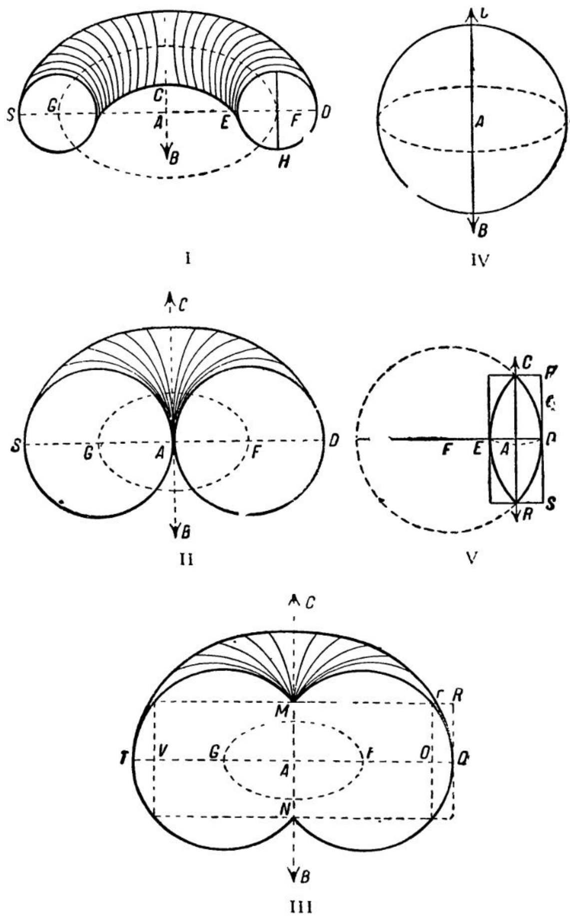
ним следует эллипс, потом парабола и на последнем месте — гипербола.

Две первые из этих фигур — круг и эллипс — замыкаются сами собой; две же последние — парабола и гипербола — устроены так, что при безграничном продолжении расходятся, все более и более приближаясь к прямолинейной форме, но никогда не достигая ее вполне, и притом с тем различием, что ветви параболы CP и CQ становятся все более и более параллельными одной и той же прямой CI, а следовательно, и друг другу, хотя в то же время удаляются друг от друга на неограниченное расстояние; ветви же гиперболы CM и CN следуют за направлением двух прямых RY и RZ, пересекающихся в точке R и безгранично расходящихся друг с другом. Эти прямые RY и RZ все более и более приближаются к ветвям гиперболы, но никогда с ними не сходятся, и от этого свойства называются *асимптотами*. С другой стороны, в каждой паре есть по кривой, которая уже одна представляет весь соответствующий вид, именно среди конечных — круг, среди бесконечных — парабола. Эллипсы бывают стольких форм, сколько может быть видов прямоугольных параллелограмов LK, а гипербола — стольких, сколько существует углов YRZ, образованных двумя прямыми RY и RZ. Конечно, это происходит от того, что как круг CE ведет себя по отношению к описанному квадрату DB определенной формы и парабола PCQ по отношению к единственной оси прямой CI, так же ведут себя эллипсы CH относительно прямоугольников LK и гиперболы MCN относительно бесконечного множества форм, составленных пересекающимися прямыми YR, RZ. Для черчения этих фигур следует отметить, что как в круге равны между собой все отрезки AC, AF, AE, так и в эллипсе сумма двух расстояний AO, OG, измеренных не от центра E, а от двух фокусов A и G, всегда одна и та же для любой пары AH, GH, или AC, CG, или AI, IG. В параболе с фокусом A, опустив какой-нибудь перпендикуляр KI на ось CI, получим, что сумма отрезков AC и CI равна расстоянию PA. В гиперболе, один фокус которой A лежит внутри, а другой T — вне и вокруг него идет подобная же фигура YSX, расстояния любой точки N до фокусов A и T всегда имеют одну и ту же разность CS, равную отрезку между вершинами C и S. Дальнейшие свойства смотри немного ниже в отделе о числе фигур тел.

О способах образования (тел)

При круговом перемещении этих четырех плоских фигур (о других формах мы здесь не говорим) получается бесконечное число форм тел, поверхность которых не является в определенном направлении прямолинейной, как у конуса и цилиндра, но всюду и притом более или менее искривлена. Самих же перемещений вообще существует пять видов, которые позднее, когда дойдем до более сложных фигур, мы подразделим на более мелкие. На приложенных фигурах 10 изображены эти виды.

I. Именно (фиг. 10^{I}), или ось CB, около которой вращается фигура, отстоит от центра F этой фигуры ED столь далеко, что с ней не встречается. Тогда фигура DE, обведенная по кругу FCG так, что площадь ее остается перпендикулярной плоскости круга, образует *кольцо*, внутри которого остается пустое пространство с центром в точке A.



Фиг. 10.

II. Ось вращения CB (фиг. 10^{II}) касается вращающейся фигуры AD. Тогда при вращении точка прикосновения A остается неподвижной, весь круг вращается около CB, и образуется фигура, которую можно назвать *суженным кольцом*.

III. Ось вращения (фиг. 10^{III}) пересекает вращающуюся фигуру за центром, так что вращается больший сегмент MDN около хорды MN, и центр F проходит через положение G. Получается фигура, в двух противоположных местах, именно около M и N, впалая и имеющая форму *яблока*.

IV. Если же ось вращения проходит через самый центр фигуры, так что приходится вращать полукруг CDB около неподвижного диаметра CAB, то получается полная *сфера* или *шар*.

V. Если же, наконец, ось вращения пересекает вращающуюся фигуру перед центром, так что вращается меньший круговой сегмент CDB около своей хорды CAB, то получается фигура, заостренная на двух противоположных концах, которую можно назвать по ее виду *лимоном*.

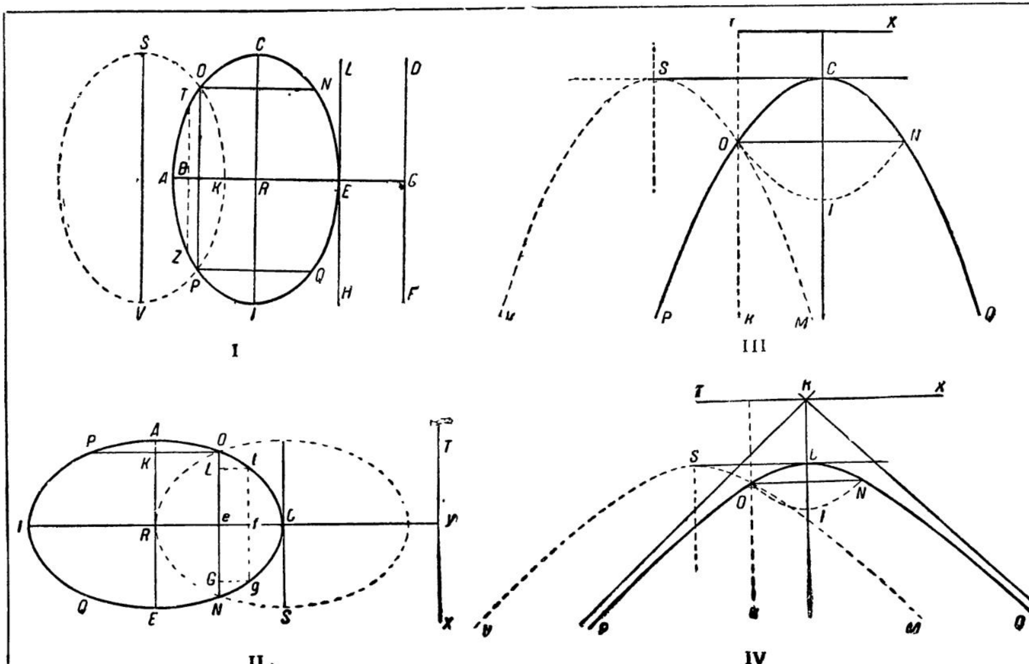
О числе и особенностях фигур

Если бы три остальные фигуры, полученные от сечения конуса, были так же просты, как круг, о котором до сих пор шла речь, то тел, образованных пятью предыдущими способами, всего оказалось бы 20, потому что каждая фигура, как перед этим круг, соответственно пяти способам вращения дала бы пять тел. Но благодаря неоднородной природе остальных фигур это число тел увеличивается с 20 до 90.

Именно, так как три собственно так называемых конических сечения не во всех своих частях одинаковы, то отсюда происходит, что если для круга все направления линии, принимаемой за ось вращения, одинаковы, то для этих фигур они будут иметь различные свойства; также и все точки круга равноправны, а точки остальных фигур отличны друг от друга. В круге название вершины имеет только один смысл, и всякая точка окружности может быть взята за вершину, в прочих фигурах вершиной первоначально является только оконечность некоторой определенной прямой, называемой осью и на двух следующих фигурах (фиг. 11) изображенной линией CI с концом в точке C.

В более же широком смысле слова вершин будет столько, сколько на фигуре берем линий за ось вращения или ей параллельных; те вершины, которые при вертикальном положении оси вращения занимают наивысшую точку фигуры, можно назвать вершинами по положению. Так, на дальнейшей фиг. 12, выбирая за ось вращения диаметр OS, найдем, что вершиной по положению будет точка A. Если же за ось вращения примем касательную EF, то вершины либо не получим совсем — именно при некотором положении тупоугольной гиперболы, — либо она окажется совсем не в точке A, а где-нибудь около точки O. В круге центр совпадает с фокусом, именно на предыдущей фиг. 9 в точке A. У параболы фокус только один — A, центра же нет вовсе, если не считать, что он отстоит от вершины C по линии CI на бесконечное расстояние, а второй фокус на еще вдвое большее. У эллипса есть и центр E и два фокуса A и G, и все они лежат внутри фигуры. У гиперболы тоже есть центр и два фокуса, но центр R лежит вне фигуры, а из фокусов один — A — внутри, другой — T — вне и внутри противоположной ветви VSX. В круге все диаметры являются осью, в остальных же фигурах часто диаметр — это одно, а ось — другое, как вообще отличны друг от друга вид и род. Затем у параболы все диаметры, как, например, CI, OS (фиг. 12), удалены друг от друга на постоянную величину, а у гиперболы и эллипса все проходят через центр R, лежащий в случае гиперболы вне, а в случае эллипса — внутри фигуры по ее середине.

В круге все диаметры между собой равны; в эллипсе они отличаются длиной, как, например, CI и OS; в параболе и гиперболе диаметры конечной длины не имеют. В круге и эллипсе для любой касательной есть диаметр, отстоящий от нее на постоянное расстояние; в параболе и гиперболе прямая, равноудаленная от какой-нибудь касательной, например LK от FE, диаметром быть не может. И вот, благодаря таким различным свойствам точек и линий эти плоские фигуры при вращении образуют виды тел всегда по существу различных, а часто отличающихся друг от друга и по внешней форме, которые стоит отметить по отдельности, не повторяя пять видов, полученных



Фиг. 11.

из кругового сечения конуса, каждый из которых является как бы родоначальником целой семьи различных, а иногда и сходных друг с другом членов.

Начнем с тех, на которых останавливается Архимед. Пусть на приложенной фиг. 11 CI есть ось, около которой фигура PCQ вращается так, что при неподвижной CI точка N проходит через точку O, а точка Q — через точку P. При этом образуются два конусовидных тела — (*1*) — параболическое и (*2*) — гиперболическое — и удлиненный сфероид (*3*), имеющий форму яйца с вершинами в точках C и I и с наибольшим круговым сечением ERA; эти тела разобраны Архимедом в книге о коноидах и сфероидах. Способ образования их тот же, как на фиг. 10$^{\mathrm{IV}}$ для шара. Видов тел три, по числу (вращающихся) линий. Пусть, далее, ось вращения уже не сама ось фигуры CI, но ей параллельная. Она может проходить вне вращающейся фигуры, как DF, либо быть касательной, как LH в точке E. Оба эти случая имеют место только для эллипса, ибо для прочих фигур всякая линия в той же плоскости, параллельная оси, при продолжении пересекает самое фигуру. В случае же эллипса при неподвижной оси DF, перенося всю фигуру $NOPQ$ вращением центра по кругу радиуса RG, образуем вид кольца, которое можно назвать крутым (*4*), оно похоже на венок сельских девушек; посредине у него — пустое пространство. Точно так же при неподвижной оси LH и точке прикосновения E вращение фигуры $NOPQ$

образует тело того же вида, но без пустоты посредине. Это будет суженное кольцо (*5*).

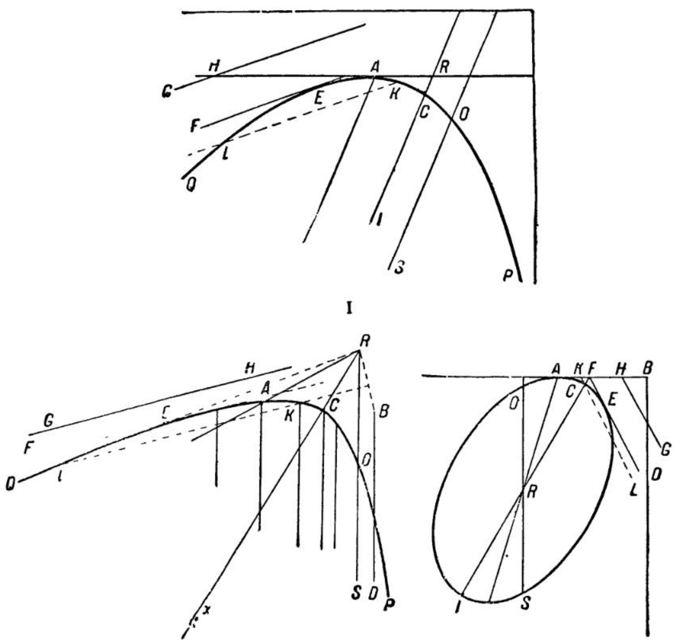
Оба вида легко представить себе на фиг. 10^{I} и 10^{II}, но только в сечении вместо круга должны получаться эллипсы в вертикальном положении. Пусть ось вращения OP находится внутри фигуры и притом так, что ось CI с большей частью фигуры OCQ вращается около OP, и вершина C проходит через точку S, а I — через V. Тогда парабола и гипербола, особенно последняя, образуют тело $QCOSV$, похожее на гору Этну, благодаря углублению на ее вершине, которое греки называют кратером (*6*, *7*). Эллипс же при этом условии образует тело, похожее на айву — (*8*), которое легко представить на фиг. 10^{III}, но вместо круговых сечений опять надо вообразить, что нанизаны эллипсы в вертикальном положении. Пусть теперь названная ось вращения OP расположена за параллельной ей осью CI так, что вращается меньшая часть фигуры OP, не содержащая оси CI. Тогда от параболы и гиперболы получается вид прямых рогов MOP (*9*, *10*), острых или тупых, подобных прорезающимся рогам животных. Эллипс же дает тело OP, похожее на оливку или сливу (*11*), подобное фиг. 10^{V}.

Оставив теперь ось CI, возьмем за ось вращения перпендикулярную ей прямую в плоскости же фигуры, и пусть сначала она проходит вне фигуры, как, например, TX. Тогда наши фигуры, вращаемые около TX, образуют кольцеобразные тела, и притом парабола и гипербола дают бесконечные поверхности, так как вращаются ветви *CP* и *CQ*, отверстые наружу (*12*, *13*). Эллипс же, перемещаемый около подобной внешней оси *TX*, перпендикулярной его оси *CR*, вращением центра по кругу радиуса *RY* при неподвижной точке *Y* дает низкое кольцо, подобное сплющенному кружку, подкладываемому на голову носильщиками, переносящими сосуды (*14*). Эту форму опять легко представить на фиг. 10^{I}, но вместо кругов в сечении надо взять эллипсы в лежачем положении, повернутые друг к другу вершинами. Пусть, далее, эта перпендикулярная ось касается фигуры в вершине *C*, как прямая *CS*. Тогда при вращении фигур около нее образуются три вида суженных колец, два, как и выше, бесконечных наружу — (*15*, *16*), а одно из эллипса *CI* при неподвижной точке *C* конечное (*17*), которое, как и перед этим, будет опять низкое или сплющенное; его легко представить на фиг. 10^{II}, если вместо кругов взять в сечении эллипсы, касающиеся друг друга вершинами. Пусть, наконец, этот перпендикуляр к оси *CI* пересекает фигуру, как, например, *ON*; тогда он разделит площадь фигуры на две части, в случае параболы и гиперболы всегда не равные, потому что одна из них — *POCNQ* — окажется бесконечной, другая — *OCN* — конечной, так что на самой линии конического сечения образуются три части — две бесконечные, одна конечная; в эллипсе же, хотя обе части конечные, но вообще одна — *ONI* — большая, другая — *OCN* — меньшая. При вращении шести этих сегментов около *ON* получается столько же новых видов тел. Два из них, именно образованные вращением около ON бесконечных частей $PONQ$, простираются в бесконечность и около обоих концов оси (т. е. около точек O и N) имеют впалую форму (*18*, *19*). Тело, происходящее от вращения большего сегмента эллипса, имеет чечевицеобразную форму, сверху и снизу похожую на пупок (*20*). Такой формы бывают маленькие приземистые дыни, которые едят целиком, а также и шляпки некоторых грибов. Этот вид легко представить на фиг. 10^III яблока, только вместо нанизанных на ось круговых сечений надо вообразить эллипсы. Наконец, от трех меньших частей ONC получаются три остальных тела, по внешнему виду похожие друг на друга, но по существу различные. Для отличия эллиптическое тело $OCNR$ можно назвать сливой (*21*), а параболическое и гиперболическое — $OCNI$ — веретенами (*22*, *23*). Два последние, и главным образом порожденное весьма тупоугольной гиперболой, особенно замечательны. Получаются фигуры с вершинами и заметно округленным круговым пузом, а остальное тело их по направлению к обеим вершинам приближается к конической прямизне.

Среди них нам и придется, отсекая вершины O и N, подыскивать фигуру, подходящую к форме бочки.

Как сказано, при этом выборе сечения части эллипса не всегда будут неравны. Если перпендикуляр к оси проходит через центр R, то он называется прямым диаметром или малой осью эллипса, и тогда половина последнего, вращаясь около оси ERA так, что при неподвижной точке E вершина C проходит через точку I, образует второй вид сфероида — сплющенный (*24*), с вершинами в E и A и наибольшим кругом CRI; о нем есть опять у Архимеда.

Этого перечисления и различения фигур тел было бы достаточно для изучения *винных бочек*. Но так как я уже сказал, что в этом отделе заглядываю несколько далее рамок всей книжки, то прибавлю и остальные родственные виды тел. Возьмем на фиг. 12 вместо оси CI какой-нибудь другой диаметр OS и примем его за ось вращения. При этом эллипс делится проходящей через центр R прямой на две похожие друг на друга половинки, каждая из которых при вращении около неподвижной оси OR образует форму груши (*25*), которую по ее близкому родству и требуется присоединить к яблокам, айвам и сливам, чтобы уже получился полный набор этих лакомств. Две же другие фигуры делятся на части, друг на друга не похожие, обе бесконечные. В случае тупоугольной гиперболы здесь бывают два случая: именно, тупой угол между асимптотами либо делится взятым диаметром на две острые части, либо же одна часть острая, а другая — тупая или прямая. При вращении частей фигур около этой оси, за исключением последнего случая, образуются тела (*26*, *27*, *28*, *29*), по внешнему виду ничем не отличающиеся от кратеров и роговидных, отмеченных под номерами *6*, *7*, *9*, *10*, но по сути дела отличные от них благодаря тому, что здесь ось CI описывает коническую поверхность, а там — цилиндрическую, да и вся вращающаяся часть расположена тут косо относительно оси. При отсечении же от тупого угла (между асимптотами) гипер-



Фиг. 12.

болы тупой части большая половина гиперболы при вращении около такой оси добавляет еще один вид, хотя это скорее уже не вид (*30*). Именно он простирается бесконечно и вниз вдоль оси и в сторону от нее (если не ограничить его, как во всех подобных случаях, конической или цилиндрической поверхностью, получаемой вращением прямой) и не имеет вершины, но вместо того к середине понижается в виде пупка, а при удалении от оси медленно и неограниченно повышается (*30*). Возьмем вместо диаметра OS параллельную ему BD, которую в случае эллипса можно не рассматривать отдельно от параллели и касательной, потому что всякому диаметру соответствует своя параллельная касательная.

Следовательно, эту параллель диаметру остается разобрать только на двух остальных фигурах, будет ли она вне или внутри фигуры. Ни на параболе, ни на гиперболе она не может проходить вне фигуры, потому что все параллели к диаметру входят в эти линии при их продолжении. Итак, проведем на этих двух фигурах какую-нибудь параллель диаметру OS. Но на параболе всякая прямая, параллельная диаметру, сама опять является диаметром, и нового здесь ничего не получается.

Поэтому этот случай требует отдельного рассмотрения только на гиперболе. Так как последнюю уже диаметр OS рассекает на две не похожие друг на друга части, то и эта параллель к OS может быть проведена либо по меньшей, либо по большей части. Пусть эта параллель BD проведена на меньшей части; она рассечет фигуру на части, еще более не похожие друг на друга, из которых большая при вращении образует некоторый кратер (*31*), подобный виду (*7*), или фигуру (*32*), похожую на бесконечное тело (*30*), а меньшая даст роговидный объем (*33*), похожий на вид (*10*). Пусть, далее, на большей части OQ проведена какая-нибудь параллель диаметру OS, при этом в остроугольных гиперболах может быть пять случаев. Именно, эта параллель может быть проведена между взятым диаметром и первоначальной вершиной, т. е. между O и C или через самое первоначальную вершину C, или между двумя вершинами — первоначальной C и вершиной по положению A, или за этой вершиной по положению A. В случае же гиперболы тупоугольной вершины по положению не существует. Во всех этих случаях сама фигура делится на две не похожие друг на друга части. Поэтому при вращении образуется 13 видов, из которых четыре (*34—37*) похожи на кратеры вида (*7*), три (*38—40*) — на полую фигуру (*30*), четыре (*41—44*) — на острые роговидные тела (*10*) и, наконец, две остальные (*45*, *46*) закруглены на вершине и похожи на гиперболический коноид (*2*) и притом тот, который образуется большей половиной гиперболы, остроугольной всегда, тупоугольной же при надлежащем выборе диаметра OS [именно он должен делить тупой угол (между асимптотами) гиперболы на две острые части], похож на тупоугольный коноид, а вид, образованный меньшей частью, — на коноид остроугольный. Пусть, далее, ось вращения касается конического сечения, но не в первоначальной вершине C, как, например, EF. При вращении около такой касательной параболы и гиперболы образуются два вида бесконечных тел — (*47*, *48*), —

похожих на виды (*15*) и (*16*), но не столь симметричных, потому что они уходят от оси в бесконечность наклонно. Эллипс же при вращении около этой касательной EF образует суженное замкнутое кольцо (*49*), родственное виду (*17*), которое легко представить себе на фиг. 10^{II}, изображающей пять способов образования тел, если вместо круговых сечений вообразить эллипсы, одинаково наклоненные к общей касательной. К касательным можно бы причислить и асимптоты, ибо они как бы касаются конического сечения в бесконечно удаленной точке, и отсюда возникает новый вид (*50*), занимающий некоторым образом среднее место между отверстыми и суженными кольцами.

Пусть вместо касательной взята прямая, ей параллельная, проведенная вне фигуры, и пусть последняя вращается около этой прямой, как около оси. Получаются четыре вида кольцеобразных тел. Парабола и гипербола дают тела, простирающиеся от оси в бесконечность, причем вид (*51*), образованный параболой, всегда имеет круговой выступающий хребет, а виды (*52*, *53*), происшедшие от гиперболы, одни имеют такой же выступ, другие же по мере удаления от самого узкого места становятся все выше и по внешнему виду немного отличаются от вида (*13*). При вращении же около оси GH эллипса получается замкнутое конечное кольцо (*54*), более широкое с одного края, по форме близкое к тиаре или турецкой чалме, если отнять у нее верхушку. И эту форму легко представить по первому способу образования (фиг. 10[I]), если только вместо круговых сечений вообразить эллипсы, равно наклоненные друг к другу. Если же параллель к касательной проведена по самой фигуре, как LK, разделяя ее на две части, то получается много видов, так как здесь может представиться много различных случаев. Именно эта прямая LK или не пересекает оси на фигуре, или пересекает. Если пересекает, то или проходит через первоначальную вершину C, или не задевает ни этой вершины, ни вершины по положению около O, которая получается при вертикальном положении касательной EF, если таковая вершина по положению вообще существует, так как в тупоугольной гиперболе при тупом угле, образованном EF или LK с противоположной асимптотой RB, вершины по положению не будет; или проходит через эту вершину по положению, или же, наконец, оставляет и ее в отсеченной части. Итак, мы насчитали пять случаев и все они возможны на всех трех фигурах; следовательно, получается 15 сечений и при каждом на всех фигурах по две части. На гиперболе в трех первых случаях бо́льшие части могут иметь две различные формы, так как могут простираться в бесконечность либо вниз, как всегда у параболы, либо вверх. Значит, поверхностей тел здесь получится 33 вида, из которых 13 простираются в бесконечность, из них 9 имеют около оси углубление, и 6 — из последних *(55 — 60)* обладают круговым выступом, как кратер вида *(7)*, но с той разницей, что они уподобляются горе, выдолбленной снизу; три же из этих видов (*61 — 63*) не имеют кругового выступа — это те, высота которых бесконечна, — и они похожи на вид (*19*); затем два вида (*64, 65*) заостренные, роговидные, как вид (*10*), и, наконец, два с закругленными вершинами (*66, 67*) — коноидальные, как вид (*2*), — это именно тогда, когда линия, около которой вращается фигура, проходит через вершину по положению, если таковая существует. Из этих 13 видов 5 параболических, 8 гиперболических.

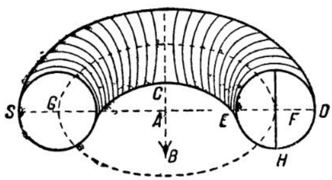
Остальные 20 — конечных размеров и притом с одного конца толще, с другого тоньше. Из них 15 видов (по 5 от каждой фигуры) оканчиваются остриями и притом девять (*68 — 76*) (по три от каждой фигуры) с обеих сторон, их мы назовем ядрами; три же (*77 — 79*) (по одному от каждой фигуры) с широкого конца закруглены, а потому родственны сфероиду; их можно сравнить с земляникой или сосновой шишкой. Наконец, три вида (*80 — 82*) (по одному от каждой фигуры) на широком конце вогнуты, а на узком заострены на манер мешочка из пузыря, который германцы называют иудейской вишней, втайне подразумевая головку полового члена с крайней плотью. Пять последних видов, опять по одному от каждой фигуры — (*83 — 87*) — имеют форму груш; они получаются от вращения большей части эллипса, образованной пятью указанными способами сечения; они все вогнуты и притом три с обоих концов, а два только с одного (широкого), а тонкий в одном случае закруглен и похож на сфероидальный, в другом же, заострен и почти совпадает с пузырем, полученным от меньшей части эллипса. Итого получилось 87 видов, прибавив к которым 5, образованных кругом, которые являются как бы главами семейств, составим всего 92 формы тел.

Вот, значит, сколько родов тел получаются от вращения по кругу конических сечений, не считая отдельно частей этих тел и фигур, ими составленных. Так, к примеру, оловянная миска обыкновенно состоит из трех поверхностей: на дне — сферический сегмент, вокруг — параболический кратер, край же — из очень тупого конуса или даже наклонного пояса шара. Хотя ремесленные измерения большинства из этих тел сводятся к одному и тому же, тем не менее геометру не должны оставаться неизвестными столь многочисленные различия в их образовании, чтобы при общем рассмотрении некоторых частных случаев по неосторожности не впасть в необъяснимые трудности. Пусть же на этих отдельных случаях изощряются геометры по примеру Архимеда, который рассмотрел только четыре вида и пятым — самое сферу не потому, что они самые важные или распространенные (какое, например, преимущество, имеет параболический коноид перед кольцом, яблоком, грушей, сливой, ядром?), но потому, что они самые простые, всего ближе к шару и легко поддаются исследованию. Мы здесь рассмотрим только те, от которых открывается доступ к гиперболическим веретенам, ибо их отрезки и образуют интересующие нас бочки. Итак, привожу о них следующие теоремы.

ТЕОРЕМА XVIII

Всякое кольцо кругового или эллиптического сечения равновелико цилиндру с высотой, равной длине окружности, которую описывает центр вращающейся фигуры, и с основанием, равным сечению кольца.

Под сечением я понимаю то, которое получается на плоскости, проведенной через центр кругового отверстия перпендикулярно к поверхности кольца. Доказательство этой теоремы уясняется отчасти из теоремы XVI и может быть установлено на тех же основаниях, на которых Архимед изложил начала стереометрии.



Фиг. 10.

Именно, если все кольцо GCD (фиг. 10[I]) рассечем из центра A отверстия на бесконечное множество тончайших кружочков, то каждый из последних по направлению к центру будет во столько раз тоньше, во сколько эта часть E ближе к центру A, чем F, и проведенная через нее прямая, перпендикулярная к ED, по направлению к внешней части D — в соответственное число раз толще, так что, сложив названные толщины в крайних точках E и D, получим удвоенную толщину в центре кружочков. Это соображение не имело бы места, если бы части кружочков ED, находящиеся внутри и вне окружности FG, т. е. по ту и по другую стороны прямых, проведенных перпендикулярно к ней через точки F и G, не были равны и одинаково расположены [12]

Добавление. Этот способ измерения объема годится как для круговой формы сечения кольца, так и для эллиптической, высокой или низкой, как для кольца отверстого, так и для суженного и даже для всех колец, какова бы ни была вместо круговой ED форма их прямого сечения, лишь бы части сечения в плоскости, проходящей через AD перпендикулярно к кольцу, получались по ту и другую стороны от точки F равные, одинаково расположенные. Поясним это на фигуре с квадратным сечением. Пусть на взятом квадратном кольце ED изображает квадрат. Объем такого кольца можно измерить еще и иначе. Именно, оно является внешней частью цилиндра с радиусом основания AD и высотой ED, из которого согласно теореме XVI надо вынуть внутренность, т. е. цилиндр с радиусом основания AE и (той же) высотой ED. Следовательно, объем кольца, образованного площадью квадрата, равен произведению ED на разность площадей кругов (радиуса) AD и AE. Отношение же объема, равного произведению ED на разность квадратов радиусов AD и AE, к четверти объема полученного кольца будет то же, как отношение (описанного) квадрата к кругу, т. е. 14 : 11. Пусть AE равно 2, AD равно 4, квадраты их будут 16 и 4, разность их 12; умножая на высоту 2, получим для объема 24 (единицы), учетверив которые найдем 96; 14 относится к 11, как 96 к $75^3/_7$, т. е. к объему квадратного кольца. Так выходит по способу теоремы XVI. По теперешнему же способу для длины окружности FG, принимаемой за высоту цилиндра, получим 19 без $^1/_7$, потому что AF равно 3, FG — 6, а как 7 относится к 22, так 6 — к 19 без $^1/_7$. А так как ED равно 2, квадрат ее 4, то, умножив это основание цилиндра 4 на 19 без $^1/_7$, опять получим 76 без $^4/_7$, что и подтверждает правильность теоремы.

ТЕОРЕМА XIX и АНАЛОГИЯ

Суженное кольцо равновелико цилиндру, который имеет основанием круг, получающийся в сечении кольца, а высоту, равную длине этого круга.

Именно предыдущий способ годится при всяком отношении AE к AF, и потому остается справедливым и для суженного кольца, когда центр F вращающегося круга ED описывает круг FG, равный ему самому. Такое суженное кольцо рассекается через A на кружочки, толщина которых в точке A равна нулю, а в точке D вдвое больше, чем в точке F, соответственно тому, что окружность, проходящая через точку D, вдвое больше проходящей через точку F.

Добавление. Цилиндровидный объем, образуемый на фиг. 10^{III} вращением криволинейного четырехугольника $MIKN$, на основании того же доказательства равновелик столбу, имеющему основанием этот самый четырехугольник, а высотой — длину круга FG. Внешний же пояс IKD, охватывающий этот цилиндровидный объем извне, как деревянный обруч бочку, к этой теореме, разумеется, не относится, и его объем надо определять на других основаниях.

Аналогия. Этот способ годится для любых цилиндровидных частей яблока (а также и айвы) все более и более тонких, пока, наконец, IK не совпадает с MN, что и имеет место при образовании шара (фиг. 10^{IV}), где вместо двух (линий) MN и IK получается одна (линия) BC; потому-то в случае сферического тела и прекращается применение доказанной теоремы об объеме [13].

Добавление. Объем шара относится к объему суженного кольца, образованного тем же кругом, как 7 к 33.

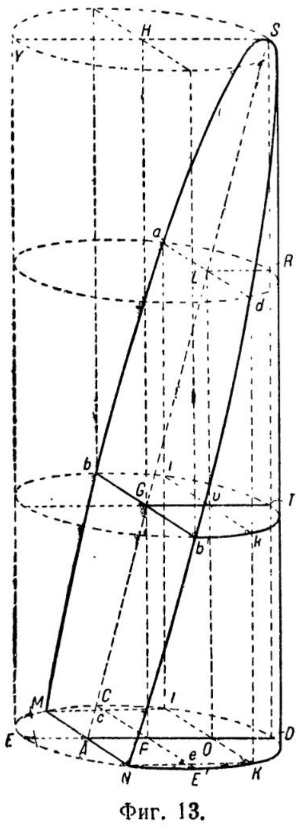
Именно, произведение трети радиуса на учетверенную площадь большого круга или двух третей диаметра на площадь большого круга дает цилиндр, равновеликий кубу (шару). Цилиндр же, равновеликий суженному кольцу, имеет то же основание, высотой же — (длину) окружности. Следовательно, как окружность относится к двум третям диаметра, т. е. как 33 к 7, так и суженное кольцо — к шару.

ТЕОРЕМА XX.

Пояс яблока составляется из пояса сферы и прямой части цилиндра, основанием которой служит сегмент, недостающий (до полного круга) на вращающейся фигуре, образующей яблоко, а высотой — длина окружности, описанной центром большого сегмента.

Доказательство. Развернем объем яблока в часть цилиндра по тем же законам, по которым Архимед в теореме II развернул площадь круга в прямоугольный треугольник. Пусть FD (AD) есть радиус наибольшего круга в теле яблока (а FD — радиус вращающегося круга), к плоскости которого в точке D восставим перпендикуляр, отложим на нем выпрямленную длину DS наибольшего круга и вообразим цилиндрическую поверхность (для которой эта DS будет образующей). Линия MN служит как бы общим острием, на котором оканчиваются все круговые объемные части. Вытянув окружность наибольшего круга в прямую DS, мы вытянем вместе с тем и эти круговые объемы и сделаем их, кроме первого MDN, эллиптическими, как MSN (фиг. 13) (14).

Смысл этого преобразования станет яснее из следующих (рассуждений). Рассечем площадь MDN линиями, параллельными MN, на части одинаковой крайне малой ширины, как бы линейные; соединим точки A и S; из точек, получившихся на диаметре AD от деления на части площади (MDN), восставим к ней перпендикуляры FG, OL до линии AS. Пусть перпендикуляр из центра F вращающегося круга пересекает AS в точке G, через которую проведем GT параллельно FD. Наконец, пусть O есть середина одного из сечений IK, и восставленный в ней перпендикуляр OL пусть пересекает AS в точке L, через которую проведем LR параллельно OD. При вращении фигуры MDN около MN площадочка MN



Фиг. 13.

не образует почти никакого объема, потому что перемещается крайне незначительно; но параллельная ей полоска, проходящая через F, уже движется по кругу длины FG; полоска, проходящая через O, — по кругу длины OL и так все (остальные). Слои же цилиндрического объема, обозначенные через FG, OL, равновелики цилиндрическим поясам в яблоке, образованным полосками фигуры MDN при ее вращении около MN, согласно теореме XVII (XIX). Следовательно, вся фигура, т. е. призматическая часть $MNDS$ цилиндра, как составленная объемами всех поясов яблока, вытянутых в прямую, равновелика объему всего яблока, состоящему из всех тех же поясов [15]. Далее, часть цилиндра на основании $IMNK$ до точки S, (остающаяся) после пересечения его плоскостью, проходящей через линии IK и OL, будет равновелика цилиндровидной части яблока, от которого отнят внешний пояс. Следовательно, часть цилиндра, отсеченная этой плоскостью, т. е. $LSDO$, равновелика этому самому поясу яблока. Так как GT равно FD и служит радиусом того шара, для которого $MIKN$ является большим кругом, а TS равно длине этого большого круга (потому что как AD относится к DS, так GT — к TS), то призматическая часть цилиндра над GT до S равновелика призматической части шара FD, описанной линией IK, перпендикулярной к FO. Следовательно, остальная частица цилиндра $LSTV$ равновелика поясу того же шара, образованному сегментом KDI. Но вся часть цилиндра $ODSL$ состоит из $LSTV$ и (прямой) цилиндрической части $ODTV$, основанием которой служит сегмент IKD (равный MEN), а высотой — FG, равная окружности, которую описывает центр F большего сегмента $MIKN$ при его вращении около MN, а потому и равновеликий этому (объему $ODSL$) пояс яблока составляется из шарового пояса, описанного тем же сегментом, и из названной цилиндрической части [16].

Добавление и стереометрический расчет. Желая измерить объем яблока, будем поступать следующим образом. Должна быть дана длина MN хорды в точке A недостающего сегмента в частях диаметра или радиуса FD, по которой находится сектор MFN или IFK согласно добавлению к теореме II. Именно, если половину KI, т. е. IO, выразить числом таких частей, каких в FD содержится 100 000, то IO будет синус дуги DI; зная его, найдем и OF как синус дополнительной дуги, и высоту OD недостающего сегмента как стрелу или синус-верзус по таблице синусов. Умножив FO на IO, получим площадь треугольника IFK, отняв которую от сектора IFK найдем сегмент IKD, площадь которого согласно настоящей теореме умножим на длину окружности радиуса AF и получим объем части цилиндра с основанием — сегментом круга и высотой FG; этот объем и будет одна из частей яблока, именно часть внешнего пояса. Отняв от площади круга удвоенную площадь недостающего сегмента, получим часть площади круга между IK и MN; умножив ее на ту же окружность радиуса AF, получим цилиндровидную сердцевину яблока, которая представит вторую часть (искомого объема). Так как IK известно, то известно и IM. По теореме XIV найдем объем сферического сегмента, диаметром основания которого служит IM; умножив же площадь этого основания на высоту MN, согласно теореме III найдем объем цилиндра, опирающегося на этот сферический сегмент; прибавив к этому цилиндру два найденные сферические сегмента, составим цилиндровидную часть шара, заключенную между *IK* и *NM*; вычитая ее из объема шара, определенного по теореме XIII, получим в остатке шаровой пояс сечения *KDI*, который и будет третьей частью в яблоке, именно второй частью пояса яблока. Сложив все три части, получим весь объем яблока (17).

Добавление 2. Точно так же поясы айвы и приземистой тыквы составляются из поясов — первый удлиненного сфероида, второй — сжатого и из частей сжатого или эллиптического цилиндра, основаниями которых являются сегменты, недостающие (до полного эллипса) на фигурах, образующих при вращении айву и приземистую тыкву, а высоты равны выпрямленным окружностям, описанным при вращении центрами фигур.

ТЕОРЕМА XXI

Объем лимона равен разности между поясом шара и названной частью цилиндра.

Доказательство. Так же как раньше на фиг. 10^{V} *CDB* вращалось около *CAB*, пусть на фиг. 13 *IDK* вращается около *IOK*. Полоска площадки, примыкающая к самой оси, не образует почти никакого объема, потому что она почти не перемещается; более же удаленные части перемещаются на длину соответствующих окружностей, так что последняя — *D* или соответствующая ей *R* передвигается на длину *RS*, равную окружности наибольшего круга в теле лимона. На этих основаниях выходит, что объем лимона (*CDBE* на фиг. 10^{V}) на фиг. 13 равновелик части цилиндра *LRS*. Так как *AO* вдвое больше *FO*, т. е. *Gv*, то и *OL* вдвое больше *vL*, а потому прямой объем *ODRL* вдвое больше объема *vTRL*, а значит, часть $ODTv$ равна части $vTRL$. Но RLS есть разность между $LSTv$ и $LRTv$, из которых первая равновелика поясу шара, а вторая — части цилиндра $ODTv$. Следовательно, предложение доказано.

Добавление и расчет. Должны быть даны длины оси лимона и диаметра наибольшего круга посредине объема. Умножив ось на саму себя и разделив произведение на диаметр этого наибольшего в объеме лимона круга, получим величину, которую надо прибавить к диаметру лимона; как эта сумма относится к диаметру круга, принятому за 200 000, так и ось лимона относится к синусу (половины дуги) сегмента, образовавшего лимон, и так же относится диаметр лимона к синусу-верзусу (той же дуги).

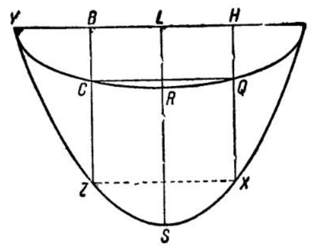
По этим данным расчет производится подобно (как в предыдущей теореме), но на одну операцию короче. Именно, нам не нужна цилиндровидная часть яблока, но, найдя сначала часть $vTDO$ (фиг. 13), а затем шаровой пояс $LSTv$, вычтем из последнего первый и получим объем LSR, равновеликий лимону [18].

Добавление 2. Точно так же объемы оливки и эллиптической сливы равны разности между поясом сфероидов — первый удлиненного, второй сжатого и названной части эллиптического цилиндра.

ТЕОРЕМА XXII

Пояс лимона, усеченного с обоих концов равными кругами, составляется из объема меньшего лимона, образованного тем же сегментом круга, как и рассматриваемый пояс, и из части цилиндра, основанием которой служит тот же меньший сегмент круга, а высота равна окружности усекающего круга.

Возьмем снова фиг. 13, и пусть опять на ней часть цилиндра LSR равновелика большому лимону. Разберем эту часть отдельно и рассмотрим ее основание на фиг. 14. Это основание является сегментом круговой площади, который и образовал больший, т. е. усекаемый лимон. Пусть этот круговой сегмент ограничен на фиг. 14 прямой $YBLH$ и дугой $YCRQ$. Пусть затем этот лимон с обеих сторон усечен (на фиг. 16 такой усеченный лимон обозначен через $EAHFSQCG$), так что рассматриваемый объем образован не всем сегментом круга, но его внутренней частью $BCRQH$ при вращении дуги CRQ около оси BH. Следовательно, прямые BC и HQ представят радиусы усекающих кругов. Само же основание рассечется на четыре части:



Фиг. 14.

1) BCY с одного бока — треугольная с криволинейной стороной;

2) с другого бока за линией HQ — подобная первой;

3) прямоугольный параллелограм $BHQC$ — посредине;

4) меньший сегмент круга, ограниченный прямой CQ и дугой CRQ.

Составляя (на фиг. 14) объем ($aLdRS$ из фиг. 13), равновеликий всему большему лимону, проведем высоту этого объема RS, равную окружности круга, проходящего через середину тела лимона.

Так как тогда на плоскости YSH будут оканчиваться гипотенузы прямоугольных треугольников BCZ и LRS, то как LR относится к RS, так BC будет относиться к CZ.

Но LR относится к RS, как радиус круга к его окружности, значит, таково же отношение BC к CZ, а потому BC представляет радиус, а CZ — окружность усекающего круга.

Соответственно четырем частям основания получим столько же тел.

1. Над основанием BCY стоит пирамидальное тело $BYCZ$, ограниченное плоскими и кривыми поверхностями и линиями.

2. Подобное же ему — за гранью HQX. Два эти тела равновелики отсеченным верхушкам лимона (на фиг. 16 эти верхушки обозначены через GEJ и FNH).

3. Над $BHQC$ расположена пятигранная призма $BCZXQH$, ограниченная тремя четырехугольниками $BCQH$, $CQXZ$, $XZBH$ и двумя треугольниками CZB, QXH; высотой ее служит отрезок CZ между параллелями CQ и ZX. Ее объем равновелик среднему цилиндру в теле усеченного лимона, имеющему основаниями усекающие круги (этот цилиндр на фиг. 16 обозначен буквами $EHFG$ и целиком прикрыт поясом FCG, HAE).

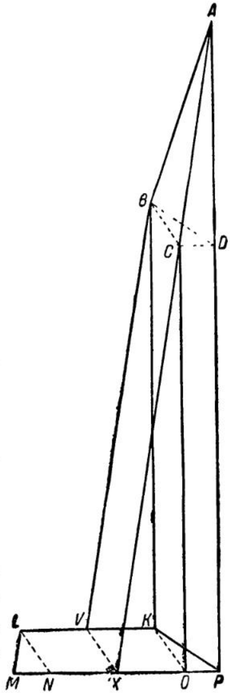
4. Наконец, над меньшим сегментом CRQ расположено тело $SRQCZSX$, подобное тому, в которое

был вытянут (на фиг. 13) пояс яблока. Так как весь объем $HYSR$ равновелик всему объему лимона, и рассмотренные три первые его части равновелики трем соответственным частям лимона, то и оставшаяся (четвертая часть) этой цилиндрической части должна быть равновелика остающейся части лимона, т. е. только что указанному поясу, охватывающему цилиндр в теле усеченного лимона. Так как эта (четвертая) часть (построенного) объема подобна прежнему телу, равновеликому поясу яблока, то и она содержит две части, ясно разграниченные друг от друга. Одна из них — прямая часть цилиндра, ограниченная четырьмя поверхностями: плоским параллелограмом $CQXZ$, цилиндрической поверхностью $XZCRQ$ и двумя малыми сегментами круга, из которых один QCR, а другой с хордой ZX не изображен на фиг. 14. Высота этой части CZ, как уже было сказано, равна окружности усекающего круга. Вторая часть этого пояса, т. е. призма ZSX, расположена над тем же малым сегментом с хордой ZX. Так как по сказанному LR относится к RS и BC к CZ, как радиус к окружности, то такое же отношение будет и у разности LR и BC к разности RS и CZ, т. е. к высоте рассматриваемой второй части объема пояса (призме над ZX). Но разность между LR и BC есть ширина или синус-верзус сегмента CQR (на фиг. 16 — это отрезок AP, т. е. радиус меньшего лимона, образованного вращением дуги HAE около оси HE). Следовательно, и разность между RS и CZ, т. е. высота рассматриваемой призматической части, равняется окружности круга, проходящего через середину тела меньшего лимона. Поэтому на основании сказанного в предыдущей теореме эта призматическая часть цилиндра ZSX равновелика меньшему лимону, образованному малым сегментом CRQ (на фиг. 16 — сегментом HAE). Вот мы и нашли в объеме пояса усеченного лимона две части, указанные в настоящей теореме, так что объем всего усеченного лимона составляется в общем из трех элементов: объема меньшего лимона, (среднего) цилиндра и прямой части (другого) цилиндра.

Добавление и расчет. Для измерения объема усеченного с обеих сторон лимона будем поступать следующим образом. Должны быть даны длины диаметров как наибольшего круга посредине объема, так и усекающих кругов, и расстояние между ними — все в одной и той же мере. Из диаметра наибольшего круга надо вычесть диаметр усекающего, на разность разделить квадрат расстояния между усекающими кругами и к частному прибавить делитель. Тогда отношение этой суммы к делителю равно отношению 200 000 — обыкновенной меры для диаметра в таблице синусов — к синусу-верзусу сегмента образующего: 1) меньший лимон, 2) пояс большего лимона, 3) пояс шара, 4) пояс яблока, получающегося от вращения большего сегмента того же круга, как и меньший лимон. Таково же и отношение числа 200 000 к диаметрам и расстоянию между усекающими кругами при той же единице меры. Теперь согласно добавлению к теореме XXI найдем объем меньшего лимона через пояс яблока и пояс сферы. Этот объем будет первой частью усеченного лимона. Затем по известному уже диаметру усекающего круга найдем в тех же мерах длину его окружности и умножим ее на найденную площадь сегмента; получим вторую часть усеченного лимона, прибавив которую к первой найдем объем его по са. В-третьих, умножая площадь усекающего круга на известную длину расстояния между этими усекающими (плоскостями), определим третью часть усеченного лимона. Сложив вместе все эти части, и получим объем усеченного лимона (19).

Добавление 2. Подобным же образом (объем) пояса усеченной оливки и эллиптической сливы составляется из объема меньшей оливки или сливы, образованной (вращением) того же сегмента эллипса, и из части сжатого цилиндра, опирающегося на этот же сегмент и имеющего высотой длину окружности круга, усекающего оливку или сливу.

Примечание. Сюда же я отнес доказательство теоремы XVI о поясе усеченного конуса, охватывающем цилиндр, так как оно родственно доказательству настоящей теоремы. Пусть $KLMP$ представляет сечение прямого усеченного конуса через его ось VX, PM — диаметр основания, KL — диаметр усекающего круга; KO и LN — перпендикуляры к этому диаметру, так что KL и ON равны между собой, и фигура KOP подобна фигуре LMN, четырехугольник $KVXO$ подобен четырехугольнику $LVXN$. Развернем по пря ой объем усеченного конуса по тому же закону по какому до сих пор мы развертывали различного рода фигуры, ограниченные поверхностями, кривыми во всех направлениях.



Фиг. 15.

Так как линия PK на конической поверхности прямая, то и развернутая поверхность окажется плоской. Пусть это будет $ABKP$, и пусть PA равняется длине окружности основания PM; KB — длине окружности усекающего круга LK; тогда и OC будет равно KB; наконец, отложим PD тоже равным OC и соединим точки B, C и D так, что образуется треугольник BCD, равный треугольнику KOP и имеющий с ним параллельные стороны и плоскости. Поэтому две пятигранные призмы $CBVXOK$ и $KOPDCB$, как заключенные между двумя параллельными плоскостями, имеют равные высоты. Разница между этими призмами в том, что первая, $CBVXOK$, составляет половину параллелепипеда с основанием $KOXV$ и высотой OC, а вторая имеет основание KOP и ту же высоту OC и измеряется непосредственно, будучи втрое больше пирамиды $DOPK$ с той же высотой. Наконец, над основанием DCB расположена пирамида $ABCD$ с высотой DA, равной разности окружностей PM и KL и с основанием DCB, равным основанию пирамиды $DOPK$. Так как пирамиды на равных основаниях относятся как их высоты, то третья пирамида с основанием POK и высотой PA, составленной из PD и DA (и равной окружности PM), будет равновелика сумме пирамид $DOPK$ и $ABCD$. Призма же с теми же основаниями (POK) и высотой (PA) будет втрое больше этой пирамиды, а с высотой, равной трети PA, будет равновелика двум последним пирамидам. Остающаяся часть от более низкой призмы $KOPDCB$, т. е. $DOKBC$, содержит две трети призмы. Следовательно, объем этого остатка равен произведению двух третей высоты OC (т. е. окружности круга KL или ON) на площадь основания POK. Из этих частей и составляется объем, который мы назвали поясом усеченного конуса. Остающаяся же от него часть, т. е. внутренний цилиндр, равновелик призме $CBVXOK$, которая является как бы пространственным треугольником COX со всюду одинаковой толщиной OK, XV. CB, и, так же как при вычислении площади треугольников, от умножения основания $KOXV$ на половину высоты OC (т. е. половину длины окружности KL или ON) получается объем этого цилиндра. Это относится к происхождению (объема). Остальное, на чем основано наше краткое правило (в теореме XVI), для краткости и наглядности поместим в табличку.

На основании доказанного

Для пояса:	Для цилиндра:
Площадь KOP, или по пропорциональности половина PO, или сама PO умножается	Площадь $KOXV$, или OX, или вдвое большая ON умножается
на треть PA и две трети OC, или по пропорциональности на треть PM и две трети ON, или по пропорциональности на PM и удвоенную ON	на половину OC, или на половину ON, т. е. на OX, или по пропорциональности на утроенную OX, т. е. на ON и NX

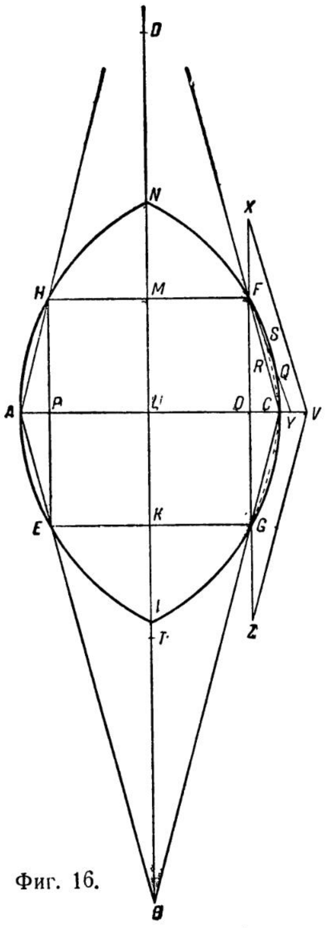
Другими словами, надо умножить:

PO или вдвое большую ее сумму PO и NM, т. е. разность диаметров KL и PM	Сумму ON и NX или ее же утроенную, т. е. утроенную длину ON меньшего диаметра
на PM и удвоенную ON	на меньший диаметр ON

Таким образом требуемое доказано. Краткое правило, вытекающее из этого доказательства, уже дано в теоремах XVI и XVII; его должно включить в настоящее дополнение, как особое украшение [20].

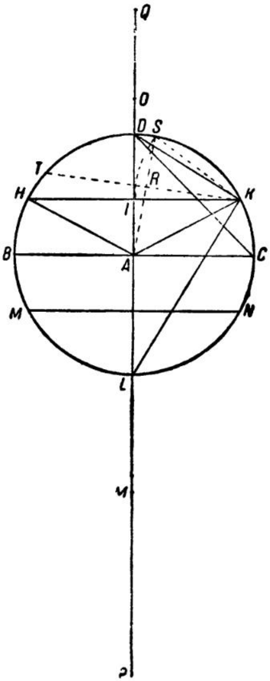
Пример на некоторые из предыдущих правил

Пусть на фиг. 16 $HAEGCF$ изображает тело усеченного лимона; диаметр наибольшего круга в нем AC пусть равен 22, (диаметры) усеченных кругов EG, HF пусть равны 19, расстояние между ними HE, или MK, или FG пусть равно 27. Половины этих длин, т. е. LA, KE и KL, будут относиться друг к другу тоже как 22 : 19 : 27. Разность между AL и LP (равной EK) будет 3. Во-первых, надо найти, какую часть окружности составляет дуга HAE. Так как AP — часть от



Фиг. 16.

диаметра этой окружности, а EP — перпендикуляр к ней, то как AP относится к PE, так и PE — к остальной части диаметра. Так как PE равно 27, то квадрат ее будет 729; разделив его на AP, т. е. на 3, получим остаток диаметра 243, придав к которому AP—3 получим, что диаметр равен 246, а радиус равен 123. Чтобы можно было воспользоваться таблицей синусов, все линии надо выразить числами, употребляемыми в этих таблицах, так что 123 придется заменить через 100 000, а для AP вместо 3 взять 2439, что и будет синусом-верзусом искомой дуги AE. Потому согласно правилу употребления таблиц синусов, вычитая его из радиуса, равного 100 000, получим 97 561 как синус дополнительной дуги, которая будет равна 77°19′9″. Следовательно, дуга AE равна 12°40′51″, и ее синус PE по таблице будет 21 951. Ту же (величину 21 951) получим, если найдем число, относящееся к 27 — значению PE в прежних мерах, — как 100 000 относится к 123. Итак, вся дуга EAH равна 25°21′42″. Так как по теореме XXII нам нужно знать площадь сегмента *EHA*, то будем искать ее согласно 2-му дополнению к теореме II следующим образом. Площадь всего круга содержит 31 415 926 536 таких частей, каких в квадрате диаметра 40 000 000 000, именно квадратиков, длина и ширина которых равняются одной такой части, каких в диаметре 200 000. Потому часть площади круга, ограниченная дугой *EH* и линиями, соединяющими концы ее *E* и *H* с центром, т. е. сектор с дугой *EH* (величина которого пропорциональна дуге), будет равна 2 213 222 936. От этой площади сектора надо отнять треугольник, вершина которого — в центре, а основание — прямая *EH*. Так как от *A* до центра 100 000, а от *A* до *P* 2439, то от *P* до центра, т. е. длина высоты треугольника, будет, как и раньше, 97 561. Умножив эту высоту на *PE*, т. е. половину основания, которая оказалась равной 21 951, получим для площади треугольника 2 141 561 511; вычтя ее из площади сектора, найдем для площади сегмента *EHA* величину 71 661 425. С помощью этой площади нам сделается известной прямая часть цилиндра, основанием которой служит эта самая площадь, и, разумеется, меньшая часть пояса того яблока, которое образуется вращением около оси *HE* большего сегмента, остающегося после отнятия от круга сегмента *EAH*. Именно, согласно теореме XX эту площадь надо умножить на окружность, которую описывает центр этого большего сегмента. Длина же этой окружности находится так. Высота треугольника равна расстоянию центра до средней точки *P* на оси *EH*, т. е. 97 561, а это и есть радиус искомого круга. Так как отношение окружности к своему радиусу у всех кругов по теореме I одно и то же, то как радиус круга *EAH*, равный 100 000, относится к его окружности 623 318$^1/_2$, так радиус, равный 97 561, относится к своей окружности, (которая будет равна) 612 994. Умножив ее на площадь сегмента, получим 43 928 023 556 450. Итак, в той части пояса яблока, которая равновелика прямой части цилиндра, построенной в теореме XX, содержится написанное число кубиков, длина, ширина и высота которых равна стотысячной части диаметра круга *EAH* и которых в кубе, описанном около шара, образованного этим кругом, будет 8 000 000 000 000 000, а в объеме шара 4 188 790 204 786 301. Другая часть этого пояса яблока равновелика по теореме XX шаровому поясу *EAH*, описанному тем же сегментом *EPHA* вокруг остальной части объема шара. Следовательно, надо отыскать пояс шара, для оторого *EAH* является большим кругом.



Фиг. 17.

Рассмотрим фиг. 17, и пусть на ней *KCN* — та дуга, о которой до сих пор шла речь, так что ищется пояс шара *CDBL*, проходящий через *KCN* и *HBM*. Согласно теореме XV, добавлению 2 надо определить объем шарового сегмента *KHD*. Так как *NK* равна 25°21′42″, а *CK* — 12°40′51″, то *KD* равна 77°19′9″; а ее синус — *KI* — равен 97 561. Круг, описанный на *KIH* как диаметре, служит основанием сегмента *KHD*. Площадь этого круга легко определяется, так как квадрат радиуса *CA* — 10 000 000 000 — относится к площади своего круга, как квадрат *KI* — 9 518 148 721 — к площади круга *KIH*, (которая поэтому равняется) 29 902 146 098. Умножая ее на треть высоты конуса *IO*, получим объем сегмента *HKD*. Высоту же *IO* определим по правилу теоремы XIV. Так как известны дуга *KC* и ее синус *IA*, равный, как и выше, 21 951, то *ID* равна 78 049 и IL — 121 951. Но IL относится к LA, как ID к DO. Приписав к ID — 78 049 — пять нулей и разделив на IL — 121 951, — получим, что DO равна 64 000. Следовательно, вся высота IO будет 142 049, а третья часть ее — 47 350. Умножив ее на основание KIH, получим для объема сегмента HKD или равного ему нижнего MLN 1 415 866 617 740 300. Так как объем всего шара по теореме XII есть 4188 790 204 786 391, то, отняв оба сегмента, получим для объема слоя $HKMN$ 1 357 056 969 305 791. К тому же можно притти на основании добавления к теореме XIV и без знания площади основания. Именно IL есть высота большего сегмента сферы, а ID — остаток от диаметра, и как ID относится к радиусу DA, так IL — высота большего сегмента — к LP. Отсюда получается отрезок IP, пропорциональный большему сегменту, а так как IO была пропорциональна меньшему, то сумма OP пропорциональна всей сфере, и отсюда для сегмента HKD получается та же величина, что и раньше Далее, от слоя $HKMN$ надо откинуть срединный цилиндр, основание которого то же, как у сегмента, т. е. HIK, а высота KN, т. е. удвоенная IA. Так как IA равна 21 951, то вся высота бупет 43 902; умножив ее на площадь круга HIK, получим объем цилиндра, опоясанного искомым поясом, равным 1 312 764 017 994 396. Отняв его от объема слоя $HKMN$, получим для объема пояса $KCNHBM$ (величину) 44 292 951 311 395.

На фиг. 16 высота последнего цилиндра изображена отрезком EH, и шаровой пояс образован тем же сегментом EHA, который лежит в (основании) прямой части первого цилиндра. Из этих двух частей, т. е. из шарового пояса и прямой части цилиндра, и составляется объем пояса яблока. Отсюда по теореме XXI уже легко получается объем лимона, образованного тем же сегментом EHA в виде разности между объемом шарового пояса — 4429. . . — и объемом той же части цилиндра — 4392. . . Именно, получается 364 927 754 945 для объема меньшего лимона, образованного вращением сегмента EHA около оси EH; этот объем понадобится для дальнейшего

Наконец, перейдем к большему лимону $IANC$ и его среднему слою $HAEGCF$. И этот слой состоит из цилиндра $FGEH$ и облекающего его слоя, образованного вращением сегмента $HAEPH$ около оси MLK так, что точка H проходит через F, A — через C, P — через O и E — через G. Цилиндр $FGEH$ вычисляется следующим образом. Каких частей в AL содержится 22, таких же в PL или HM было 19, а в AP — 3. Но при употреблении таблицы синусов для AP вместо 3 надо взять 2439 частей и именно таких, каких в радиусе круга EAH содержится 100 000. Так как 3 относится к 2439 или (как и выше) 123 к 100 000, как 19 к 15 447, то последнее число и представит радиус HM круга HF, площадь которого и надо найти. Как квадрат радиуса 10 000, т. е. 10 000 000 000, относится к площади круга 31 415 926 536, так и квадрат радиуса 15 447, т. е. 238 609 809 — к площади его круга 749 614 823, которая, т. е. HF или EG, и служит основанием цилиндра. Высота же его уже известна из предыдущего и равна (как и для цилиндра в шаре) 43 902. Умножив эту высоту на только что найденную площадь основания, получим для объема цилиндра $FHEG$ величину 32 909 589 959 346. Остается определить пояс большего лимона. По теореме XXII этот пояс большего лимона $NAIC$, т. е. его усеченной части $HAEGCF$, составляется из найденного объема меньшего лимона, образованного сегментом HAE, и из части цилиндра, опирающегося на этот сегмент EHA и имеющего высотой длину окружности усекающего круга HF. Опять находим, что как радиус 100 000 относится к окружности 628 318, так радиус HM – к окружности HF, (равной отсюда) 97 056. Умножив ее на площадь кругового сегмента $EPHA$, ранее найденную равной 71 661 425, получим объем прямой части цилиндра — 6 955 171 264 800, — составляющий первую часть в объеме пояса усеченного лимона. Прибавляя к ней найденный объем меньшего лимона — 364 927 754 945, — получим для всего объема пояса усеченного лимона 7 320 099 019 745.

Прибавив, наконец, объем цилиндра, скрытого под этим поясом, равный 32 909 589 959 346, получим весь объем усеченного цилиндра 40 229 688 979 091, из которого внутрь пояса набито больше одной шестой, но меньше одной пятой. Для сравнения стоит еще вычислить объем не лимона, но тела, составленного из двух усеченных конусов $ACFH$ и $ACGE$, так что линии AH, AE, CF, CG надо брать прямыми. Для этого по теореме XVII надо вычислить объем конуса GBE и конуса CBA. Возьмем конус GBE, основание которого – площадь круга GE — уже раньше было найдено равным 749 614 823. Высота же KB получается следующим образом. Как AP — 3 — относится к PE — 27, — т. е. как 1 относится к 9, так и EK — 15 447 — к KB; но так как по теореме IV для нахождения объема конуса площадь основания надо умножить только на треть высоты, т. е. на утроенную EK — 46 341, — то для объема конуса GBE получим 34 737 900 512 643. Перейдем к другому конусу, площадь основания которого — AC — еще не известна, но легко находится из площади круга EG. Именно, EK или PL относятся к LA, как 19 к 22, а потому их квадраты относятся друг к другу, как 361 к 484, и так же, как эти квадраты, относятся площади кругов. Потому площадь круга AC, служащего основанием конусу ABC, равна 1 005 023 661. Затем опять, как AP — 3 — относится к PE — 27, — т. е. как 1 к 9, так AL — 17 886 — (составленная из ранее найденных AP и PL или HM) относится к LB — высоте конуса. Поэтому, умножив треть удевятеренной AL, т. е. утроенную AL — 53 658 — на найденную площадь, получим объем конуса ABC — 53 927 559 601 938. Отняв отсюда конус GBE, получим объем усеченного конуса $ACGE$ или равного ему $ACFH$ — 19 189 659 089 295. Поэтому весь объем тела, составленного из двух усеченных конусов, будет 38 379 318 178 590. Таким образом получаем меньше, чем раньше, на 1 850 370 800 501; эта величина и содержится в двух наклонных поясах, изображенных дугами *HA*, *AE* и прямыми *HA*, *AE*; это составляет немного меньше одной двадцать восьмой части двойного усеченного конуса. Пользуясь другим более кратким способом, как при подобных конусах, найдем число, которое относится к объему большего конуса 53 927 559 601 938 (или меньшего, если сначала вычислим его), как разность 3789 (куб в 22 и 19) относится к 10 648 (куб 22) или к 6859 (куб 19); это число и будет выражать объем того же усеченного конуса, как и выше. Согласно же теореме XVII и приведенному в последнем примечании ее доказательству можно поступать так. Сначала находим цилиндр *FHEG*, равный 32 909 589 959 346, откуда его половина будет 16 454 794 979 673. Затем берем известные в первоначальных мерах *AC* — 22, *PO* или *HF* — 19, а удвоенная — 38, — и составляем сумму — 60 и разность — 3 диаметров оснований. Отсюда, умножая 3 на 60, получаем прямоугольник 180, пропорциональный поясу усеченного конуса, в то время как утроенный квадрат меньше диаметра *HF*, т. е. 1083 пропорционален цилиндру, вписанному в усеченный конус. Следовательно, как 1083 относится к 180, так цилиндр 16 454 794 979 673 — к поясу усеченного конуса. Еще короче, по правилу дополнения к теореме XVII вычисляем так:

Диаметры 19, 20, 21, 22	Или так: 19; 3
19, 3	22; 3
361, 60	418; 9
421	3
	421

Следовательно, как 361 относится к 421, так найденный цилиндр 16 454 794 979 673 относится к 2 734 868 971 691 (объему пояса усеченного конуса). Отняв же от найденного выше объема усеченного конуса цилиндр, получили бы 2 734 864 109 622; незначительную разницу дают не совсем точные значения синусов, какими мы пользовались,

О веретенах

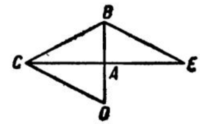
До сих пор для нахождения правил измерения яблок, лимонов, айвы, приземистых дынь, оливок и эллиптических слив нам на помощь приходили цилиндр и шар или вместо него сфероид, преобразованные в части соответствующего цилиндра. Именно, не находя на самих фигурах законов для (измерения) целых тел, мы отыскали меры для их частей в частях цилиндров. Но так как некоторые части цилиндра, хотя и вполне определенные, или еще вовсе не имеют законов для непосредственного измерения их объемов или, если и имеют, но не вполне ясные, то нам и помогали шар и цилиндр, которые, имея уже известные правила измерения объема, будучи преобразованы в такую часть цилиндра, внесли и в нее те же законы для объемных вычислений. Теперь остается более трудное исследование о параболических и гиперболических веретенах, при котором до сих пор употреблявшийся способ доказательства опять оказывается недостаточным. Именно, если мы и преобразуем веретено тем же способом, как лимон, оливку и сливу, в призмовидный столб, сохраняющий вдоль всех образующих кривизну конического сечения (фиг. 9) OCH, PCQ или MCN, мы сможем доказать про объем полученной фигуры нисколько не больше, чем о самом веретене. Во-первых, именно здесь нет целого объема, с которым можно бы было сравнить призмовидный, ибо столб, как и само сечение, не ограничен в направлении PQ или MN, затем, ни шар, ни сфероид своим наибольшим кругом не совпадают с этим столбом над коническим сечением, так как круг либо касается конической линии в одной точке, если описан из фокуса A через вершину C, либо если через точку C проведен круг побольше, то он, конечно, касается фигуры в точке C извне, но затем пересекает ее еще в двух точках около C, а далее уже совсем отступает от кривой конического сечения. Потому, подобно тому как в телах, образованных сегментом круга, мы прибегали к шару, а в эллиптических — к сфероиду, так в образованных параболой и гиперболой нам остается обратиться к родственным коноидам; если эта попытка целиком не удастся, то в остальном призовем на помощь геометров (21).

ТЕОРЕМА XXIII

Два конуса, образованные вращением прямоугольного треугольника, как около оси, один раз около меньшей, другой — около большей из сторон, заключающих прямой угол, пропорциональны сторонам, описывающим основания.

Пусть ABC — прямоугольный треугольник, в котором меньшая из сторон, заключающих прямой угол, BA, принята за ось, так что гипотенуза BC при вращении фигуры образует коническую поверхность CBE с вершиной B и основанием CE. Затем пусть за ось принята большая сторона AC, и пусть фигура при вращении около нее образует конус BCD с вершиной C и кругом BD в основании. Утверждается, что как CA относится к BA, так и тело, ограниченное кругом CE и конической поверхностью CEB, относится к объему конуса BDC.

Доказательство. По ссылке, сделанной в теореме XVI, отношение конуса EBC к конусу BCD равно произведению отношений круга EC к кругу BD и высоты AB к высоте AC, отношение же круга EC к кругу BD равно квадрату отношения радиуса AC к радиусу AB. Поэтому отношение конусов EBC к BCD равно произведению отношений AC к AB, опять AC к AB и AB к AC. Но произведение отношений AC к AB и AB к AC дает самое простое отношение — отношение равных, т. е. единицу, которую можно откинуть из (общего произведения) остальных отношений, не меняя его величины. Следовательно, из трех множителей, составляющих отношение конусов, два последних взаимно сокращаются, остается только один первый, и конус EBC относится к конусу BCD, как AC — радиус круга EC — к AB, радиусу круга BD.

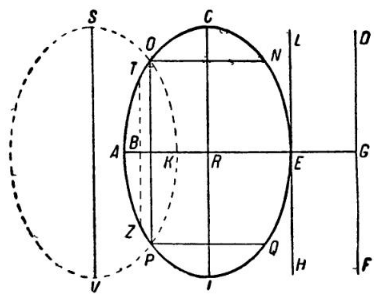


Фиг. 18.

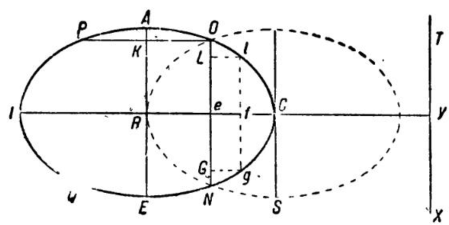
ТЕОРЕМА XXIV

Удлиненный сфероид, вписанный в сплющенный, имеющий с ним одни и те же диаметры, но переставленные оси (вращения), относится к сплющенному, как меньший диаметр к большему

Пусть на фиг. 19 CEI — удлиненный сфероид с вершинами C, I, а на фиг. 20 ACE — сплющенный с вершинами A,E, и пусть ось первого CI равна диаметру второго, CI, а диаметр первого AE — оси



Фиг. 19



Фиг. 20.

второго, AE. Утверждается, что удлиненный эллипсоид или яйцо относится к сплющенному или чечевице, как меньший диаметр AE — к большему CI. Построим конусы в половине яйца ACE с вершиной в C и с основанием — кругом AE, и в половине чечевицы CAI

с вершиной в A и с основанием — кругом IC. По предыдущей теореме как радиус AR круга EA относится к радиусу RC круга CI, так и конус ACE — к конусу IAC. Но половина сфероида всегда вдвое больше вписанного в него конуса с той же вершиной и с тем же круговым основанием. Следовательно, половины сфероидов, а значит, и целые сфероиды, пропорциональны AR и RC, т. е. и вдвое большим AE и CI [22].

ТЕОРЕМА XXV

Сегмент шара, повидимому, относится к полулимону, образованному тем же сегментом круга, как радиус основания сегмента — к его оси или высоте.

Законное доказательство пусть отыщут другие. Я же, чего не могу доказать бесспорно, постараюсь подтвердить, опираясь на четыре соображения.

Во-первых, по аналогии. Именно, что́ справедливо в случае полушара как наибольшего сегмента, начала всех остальных, а также и в полусфероиде, и в случае наименьшего, как бы последнего из всех сегментов, то, повидимому, будет иметь место и для промежуточных сегментов. В случае полушара дело обстоит следующим образом. Отношение сторон квадранта, заключающих прямой угол, равно единице, и соответственно этому объем, получающийся от вращения квадранта около высоты, равен объему, образованному вращением его же около основания. Подобным же образом эта пропорциональность имеет место и для самых маленьких сегмента шара и соответствующего ему лимона, потому что чем они меньше, тем меньше отличаются от них вписанные в них конусы, которые по теореме XXII имеют названное отношение, а значит, оно же будет и у описанных тел. Хотя я признаю, что переход от абсолютно наименьшего к нему весьма близкому не всегда надежен.

Во-вторых, названная пропорциональность по предыдущей теореме имеет место для полусфероида, хотя там отношение диаметров не равно единице, как в шаре, но соответственно бесконечному разнообразию сфероидов имеет бесконечное множество значений. Подобно тому как удлиненный сфероид можно считать вписанным в сжатый, так и лимон оказывается вписанным в удвоенный шаровой сегмент, и в обоих случаях способ образования тел один и тот же. Следовательно, поскольку названная пропорциональность имеет место для удлиненного и сжатого сфероидов, она, повидимому, будет иметь место и для лимона и удвоенного сегмента полушара.

В-третьих, роль полного доказательства заменяет то соображение, что на фиг. 16 наклоненный сегмент круга, ограниченный дугой AE и хордой AE и образующий избыток как шарового сегмента, так и половины лимона над (вписанными) в них конусами, имеет одинаковую ширину в верхней части около A и в нижней около E, а потому части A при вращении вокруг PE и части E при вращении около PA образуют объемы, пропорциональные PA и PE. Следовательно, объемы наклонных поясов при приближении к вписанным конусам возрастают в том же отношении, в каком находятся сами конусы.

В-четвертых, с этим согласуется свидетельство чисел и вычисление, которое, будучи произведено самым тщательным и точным способом при помощи деления радиуса на 100 000 частей, все же не опровергает этой пропорциональности.

В прежнем примере PE было в девять раз больше PA, а потому и шаровой сегмент HEA должен бы быть в девять раз больше половины лимона, описанного вращением AEP около PE. Надо найти величину сегмента HEA. Было дано AL — 22, LK или PE — 27; квадраты их будут 484 и 729. Так как площади кругов относятся между собой, как квадраты радиусов, и круг с диаметром AC, как было показано выше, имеет площадь 1 005 023 661, то в площади HPE — основании рассматриваемого сегмента — будет 1 513 764 977. Затем PA было равно 3, дополнение его до диаметра — 243, радиус — 123; отсюда, как 243 относится к 100 000 (вместо 123), так 3 относится к избытку высоты конуса, равновеликого сегменту, над высотой сегмента, т. е. этот избыток равен $1234^1/_2$ в единицах, употребляемых в таблицах синусов. Высота PA сегмента в тех же единицах есть 2439; следовательно, высота конуса $3673^1/_2$, и треть ее — $1224^1/_2$, будучи умножена на найденную выше площадь основания, даст объем сегмента равным 1 852 848 331 848, девятая часть чего будет 205 872 036 872. Раньше же мы нашли, что объем всего лимона равен 364 927 754 945, половина его — 182 463 877 472, что, разумеется, меньше девятой и даже десятой части объема сегмента, но это происходит от небольшой неточности в значении чисел. Именно речь идет об объеме тела, которое меньше одной двадцатитысячной шара, и вся наша разность в этом объемчике (и даже большая ее) возникает от одной стотысячной части радиуса, так как синус дуги *AE*, т. е. *PE*, был принят равным 21 951, а он несколько больше, но меньше, чем 21 952. Если же взять его равным 21 952 и повторить те же вычисления, то объем лимона выйдет равным 424 732 062 579, половина чего будет уже больше дев той части сегмента, как и должно быть, потому что 21 952 больше истинной величины. Таким образом эти числа не могут служить опровержением теоремы об отношении половины лимона к соответствующему сегменту шара (23).

ТЕОРЕМА XXVI

Пусть дано коническое сечение и сегмент образованного им, вращением около оси, сфероида или коноида и некоторая прямая, пересекающая ось и касающаяся сечения и сегмента в точке окружности основания и потому образующая при вращении около той же оси конус; пусть, далее, это коническое сечение и его касательная вращаются около диаметра основания сегмента и образуют тела: кривая — сливу, оливку или веретено, а касательная — конус; тогда отношение половины сливы или оливки к сегменту сфероида, веретена же к соответствующему сегменту коноида будет приблизительно равно отношению второго конуса к первому.

Пусть на фиг. 11 *OCN* есть коническое сечение (11^{II} — эллипс, 11^{III} — парабола, 11^{IV} — гипербола), ось которого *CI*, и пусть при вращении половины его дуги CN около неподвижной ON, так что точка C проходит через I (в случае эллипса — через R), получается половина объема сливы, оливки или веретена $OCNI$, а при вращении той же половины дуги CN около неподвижной CI, так что точка N проходит через O, получается сегмент сфероида или коноида OCN с вершиной C и кругом ON в основании. Утверждается, что если какая-нибудь прямая касается конического сечения в крайних точках N или O, то при тех же вращениях она образует два конуса, отношение которых приблизительно равно отношению половины объема сливы, оливки или веретена CIN к сегменту сфероида или коноида OCN. Для пояснения теоремы нам была нужна фиг. 11; для дальнейшего же возьмем фиг. 16. Эта теорема о сегменте сфероида и двух коноидах, параболическом и гиперболическом, состоит собственно из трех частей. Первая и вторая, состоящие в том, что находятся отношения большее и меньшее, чем отношение рассматриваемых объемов, доказываются строго; третья же, т. е. что действительно имеет место равенство отношений, рассматриваемых в этой теореме, вполне строго еще не доказана. Так как все рассуждения нагляднее в случае гиперболы, то пусть на фиг. 16 линия FCG, начерченная пунктиром, изображает коническое сечение, называемое гиперболой; (сплошная) же линия FCO есть дуга круга, которую гипербола пересекает в точке F, а затем проходит через точку R, все время оставаясь внутри круга, идущего к точке S, пока, наконец, не коснется его изнутри в вершине C, как это доказано в „Конических сечениях“ Аполлония, кн. IV, предложения 25, 26. От гиперболы FCG образуется коноид с вершиной C, осью VCO и кругом FG радиуса FO в основании. Пусть V — центр гиперболы, VX и VZ — ее асимптоты, пересекающие продолжение FG в точках X и Z. Пусть, далее, прямая FY касается гиперболы в точке F на окружности основания и пересекает ось в точке Y между центром V и вершиной C. Впишем еще в нашу фигуру треугольник FCG с тем же основанием FG. Подобно тому как раньше (высказывалось), что отношение половины объема лимона, образованного вращением дуги круга FSC около неподвижной FO, к объему сферического сегмента FCG, образованного вращением той же дуги, но около неподвижной CO, равно отношению CO к OF, так и эта теорема о половине веретена, образованной вращением половины дуги гиперболы FRC около неподвижной FO, и о коноиде, образованном той же дугой FRC при вращении около неподвижной CO, утверждает, что между ними существует то же отношение, как между YO и OF, ибо последнее равно отношению конуса, образованного вращением касательной FY около FO, к конусу, образованному вращением той же касательной FY около YO. Очевидно, что отношение YO к OF больше, чем отношение CO к OF, а так как VX и YF пересекаются за точкой X, то и отношение VO к OX больше отношения YO и OF. И точно так же, как отношение YO к OF по своей величине заключено между отношениями CO к OF и VO к OX, и отношение половины объема веретена к объему коноида, как можно доказать, заключено между теми же отношениями CO к OF и VO к OX. Докажем сначала для отношения CO к OF; это доказательство годится и для параболического коноида. Очевидно, веретено, (образованное) дугой FRC, меньше лимона, (соответствующего) дуге FSC; так же и коноид $FRCG$ меньше сферического сегмента $FSCG$. Плоская фигура, ограниченная дугой круга FSC и гиперболой FRC, неодинаковой ширины в частях около F и C, именно шире около F, где линии взаимно пересекаются, и уже около C, где они касаются. Потому пояс, который сегмент шара накидывает вокруг коноида, толще к основанию FG и тоньше к вершине C. Наоборот, пояс, который лимон накидывает вокруг веретена, тоньше к основанию C, чем к вершине F. От этого (при переходе от шарового сегмента) к коноиду и (от лимона) к веретену теряются непропорциональные части, но для коноида большая, чем для веретена. Именно, хотя для коноида теряется меньше около вершины C, чем для веретена около вершины F, но полной компенсации не получается, потому что части вращающейся площади около вершины описывают небольшие пути, а части около основания перемещаются на большее расстояние. Следовательно, отношение веретена к коноиду больше отношения лимона к сегменту сферы, т. е. (по предыдущей теореме) отношения CO к OF, так же как и отношение OY к OF, больше, чем CO к OF. Мы воспользовались здесь предыдущей теоремой, которая еще не имеет строгого доказательства, но этот же способ рассуждения можно применить, заменяя сегмент $FSCG$ и лимон конусами FCG. Именно, конус, образованный вращением прямой CF около FO, относится к конусу, образованному той же прямой при вращении около OC, как CO к OF. Плоская же фигура, ограниченная гиперболой FRC и прямой FC и образующая своими вращениями избытки коноида и веретена над этими конусами, шире около C, так как там гипербола искривлена сильнее, и у́же около F, где гипербола более распрямляется. Потому к этим конусам опять прибавляются непропорциональные (части), но относительно большая часть добавляется к конусу веретена, чтобы получить веретено, чем к конусу коноида, чтобы получить коноид. Следовательно, объем веретена по сравнению с коноидом больше, чем CO по сравнению с OF, и отношение объема веретена к объему коноида больше и ближе к единице. Затем надо еще доказать, что отношение VO к OX больше отношения половины веретена к коноиду. Это доказательство годится исключительно для гиперболы, потому что у параболы нет асимптот. Как и выше, опять фигура, ограниченная тремя прямыми FX, XV, VC и гиперболой CRF, шире около V, чем около X. Потому объем, которым, как оболочкой, прикрыт коноид, толще около вершины V, чем около основания ZX; объем же, прикрывающий веретено, тоньше около вершин F и X, чем около основания VC, т. е. (для получения веретена) от конуса с осью OX надо отнять относительно большую часть, чем от конуса с осью OV (для получения коноида). Следовательно, отношение половины веретена к первому конусу меньше, чем отношение коноида ко второму, а значит, отношение половины веретена к коноиду меньше отношения VO к OX. Но так как между отношениями CO к OF и VO к OX заключено бесконечное множество промежуточных значений, а не только то, которое имеет отношение YO к OF, то заключение, выраженное в третьей части нашего предложения, не является необходимым, но оно во всяком случае правдоподобно и высказано на основании частных случаев.

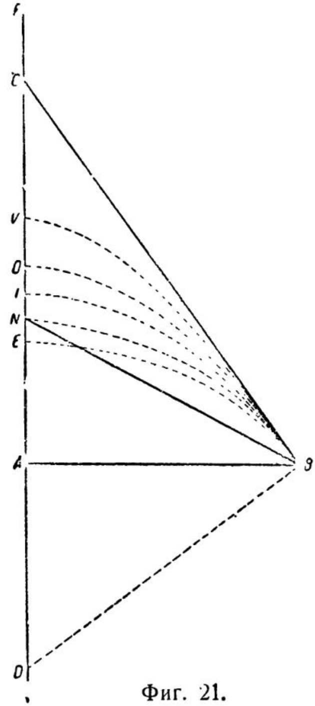
Аналогичные соображения. Есть основание думать, что в случае шарового сегмента и лимона требуемое отношение будет существовать между вписанными конусами; в случае же сфероидов конусы, пропорциональные соответствующим телам (именно сливе и сегменту сжатого сфероида или оливе и сегменту удлиненного), выносят — один вершину, другой край основания за вершину эллипса, но ближе (пересечения) касательной (с осью); в параболическом коноиде сама эта касательная образует конусы требуемого отношения, так что высота одного из них будет как раз вдвое больше высоты коноида; и, наконец, в гиперболическом коноиде вершина и основание конусов заходят за касательную по направлению к центру гиперболы. Эти соображения очень вески и почти служат доказательством. Однако даже и доказать это было бы недостаточно, а следовало бы еще совершенно точно указать самые точки между касательной и вершиной эллипса или центром гиперболы.

ТЕОРЕМА XXVII

Пусть одна из сторон (прямоугольного) треугольника, заключающих прямой угол, разделена пополам и на части, пропорциональные двум другим, а в противоположном ей угле пусть сходятся различные конические сечения, касающиеся друг друга и стороны, противолежащей прямому углу, и имеющие вершину на разделенной стороне; тогда те из них, (которые пересекают эту сторону) между острым углом и серединой, все будут гиперболы, проходящее через середину — парабола, следующие — до точки, делящей сторону на части, пропорциональные двум другим, — вертикальные эллипсы (с большой осью вдоль разделенного катета), проходящее через эту точку деления — круг и, наконец, остальные до самого прямого угла — перевернутые эллипсы (с малой осью вдоль разделенной стороны), вершиной которых называется условно конец меньшей оси.

Пусть BAC — прямоугольный треугольник, сторона которого AC разделена в точке O пополам, и линия BN проведена в угле CBA так, что AB относится к BC, как AN к NC, вследствие чего AN

будет короче AO. Между C и O возьмем точку V, между O и N — точку I, между N и A — точку E, и пусть в точке B касаются друг друга и прямой BC



Фиг. 21.

различные конические сечения, вершины которых по порядку суть V, O, I, N, E.

Утверждается, что BV — гипербола; BO — парабола, BI — вертикальный эллипс (с большой осью вдоль AC), BN — круг, BE — перевернутый эллипс (с малой осью вдоль AC).

Во-первых, (возьмем) BO. В этом коническом сечении BO с осью или диаметром CA и вершиной O прямая BC, касательная в B, пересекается с осью в точке C, и из точки прикосновения B на ось CA опущена перпендикулярная аппликата BA, и так как CO равно OA, то BO будет парабола по обратной теореме 37 из I книги Аполлония (24).

Во-вторых, возьмем BV. При сохранении прочих условий теперь V — вершина, и CV меньше половины CA. Потому от CA отнимем удвоенную CV и найдем (вне AC точку F) так, чтобы полученный остаток относился к CV, как CV к CF. Следовательно, произведение названного остатка на CF равно квадрату CV. Прибавляя к обеим частям этого равенства квадрат CF и удвоенное произведение VC на CF, получим, с одной стороны, квадрат FV, а с другой — произведение CF на FA. Так как они оказываются равными, то по той же теореме Аполлония BV будет гиперболой с центром в F (25).

В-третьих, возьмем BI, BN и BE. Так как здесь при соблюдении прочих условий I, N, E — вершины и IA, NA, EA меньше половины AC, то отнимем от CA удвоенные отрезки IA и т. д. и от точки A в сторону вогнутости линий отложим AD так, чтобы полученные остатки относились к IA и т. д., как IA и т. д. к AD. Затем тем же способом, как выше, докажется, что квадраты ID и т. д. равны произведению AD на CD, а отсюда на основании той же теоремы Аполлония конические сечения BI, BN, BE будут замкнутые с центром в точке D, т. е. это будут эллипсы или круги [26].

Рассмотрим, *в-четвертых*, BN, принимая во внимание уже доказанные сейчас свойства ее. Так как здесь, кроме того, AN относится к NC, как AB — к BC, и последнее отношение имеет вполне определенную величину, зависящую только от данного треугольника, а гипербола и эллипсы дают различные величины отношений, парабола же, хотя и дает определенную величину, но не ту, а равную единице, то BN не может быть ни одним из этих конических сечений, кроме круга. И, действительно, в круге дело обстоит именно так. Именно, пусть BN — круг и D — его центр, который соединим с точкой касания B, так что угол CBD — прямой. Но и CAB тоже прямой; следовательно, как DC относится к DB, так DB, т. е. DN — к DA, откуда DN относится к DA, как CB — к BA и CN к NA. Итак, дуга круга пересекает сторону треугольника, на продолжении которой лежит центр, в отношении сторон AB и BC [27].

Добавление 1 и аналогия. Гипербол в этом треугольнике может быть бесконечное множество, и из них, продолжая говорить по аналогии, самой тупой будет BC, у которой вершина V и центр F совпадают с вершиной C угла асимптот, а сама она как коническое сечение вырождается в пару прямых (т. е. конус пересекается через вершину), и аналогично самой острой из гипербол в этом треугольнике будет сама парабола, вершина которой — в средней точке O, а центр — на бесконечном расстоянии. Далее, если CV будет треть от CA, то CF и CV будут равны, если CV меньше трети от CA, то она будет больше CF, если же CV больше (трети от CA), то она будет меньше CF.

Точно так же и эллипсов BI (с большей осью по AC) между O и N проходит бесконечно много, и из них, аналогично, самым острым при вершине будет опять парабола, вершина которой — в O, а центр D — на бесконечном расстоянии, а самым тупым в вершине из этих эллипсов будет круг BN, после чего начинается бесконечное множество перевернутых эллипсов (с малой осью вдоль AC), из которых самым острым при вершине (в конце малой оси) будет сам круг BN, а следующие — BE — будут делаться все тупее, пока, наконец, не сольются просто в прямую BA, у которой вершина малой оси E и центр D совпадают с A, а вершина большой оси — с точкой B. И опять, если AE будет треть от CA, то EA и AD равны; если EA будет меньшей частью, то она будет больше AD, а если большей, то меньше.

Добавление 2. Отсюда на основании расположения касательных легко судить о виде усеченного объема. Именно, если две касательные к усеченному объему, проведенные в точках усекающей окружности (на фиг. 16 в точках G и F прямые FY и GY), пересекаются в точке Y так, что YC равно CO — половине разности диаметров среднего и усекающего кругов, то это объем усеченного параболического веретена; если CY меньше, чем CO, то это усеченная часть гиперболического веретена, если больше, то — сначала сливы, потом лимона (если YF относится к FO, как YC к CO) и, наконец, оливки эллиптического вида, если, например, CY вдвое больше CO.

ТЕОРЕМА XXVIII

Если (дуги) четырех видов конических сечений — круга, эллипса, параболы и гиперболы — взаимно касаются в общей вершине и, кроме того, оканчиваются в двух общих точках, равно удаленных от вершины, то все они в этих точках пересекают друг друга, дуга круга находится вне дуг эллипсов, эти охватывают параболу, а внутри нее расположены гиперболы, и из них более внутренние, более тупые и тем самым более близкие к своим асимптотам.

Так как эти сечения предполагаются разного вида и даже одного вида между собой не подобные, то они не могут иметь общих частей, но или касаются друг друга в одной точке или взаимно пересекаются, а дуги, заключенные между этими точками, на всем протяжении будут отстоять одна от другой на некоторое расстояние, согласно Аполлонию (IV кн., 24). Так как, далее, предполагается, что все они взаимно касаются на конусе в вершине и, кроме того, проходят через две данные точки, то ни одно из них с любым из остальных других общих точек иметь не будет, даже и при бесконечном продолжении параболы и гиперболы (Аполлоний, IV кн., 26). Так как, наконец, предполагается, что они имеют три общие точки, то в двух из них касаться не могут, потому что, касаясь в двух точках, в третьей они уже не встретились бы (Аполлоний, IV кн., 27). Стсюда выходит, что две данные точки, (кроме вершины), суть точки пересечений, потому что во всякой точке встречи происходит или касание или пересечение; в точках же пересечения меняется порядок, т. е. дуги переходят друг через друга с одной стороны на другую. Так как на окружности круга даны три точки, то через них по доказанному в III кн. Евклида проходит единственный круг. Так же и парабола будет единственная. Действительно, допустим, что их несколько. Так как предполагается, что в вершине они касаются, то, если их несколько, они в двух других точках пересекутся и будут там иметь различные касательные, а отсюда тем же способом, которым пользуется Аполлоний в IV кн., 28, доказывая, что две параболы не могут касаться более чем в одной точке, легко притти к противоречию, состоящему в равенстве целого своей части, и, следовательно, через три точки проходит не несколько, а только одна парабола (28). Так как очевидно, что более тупая гипербола за точками пересечения расходится сильнее более острой, то до точек пересечения первая должна проходить внутри второй. Так как среди подобных гипербол, т. е. с одинаковыми углами между асимптотами, большей считается та, у которой больше ось, то в этом смысле в нашем случае более тупые гиперболы будут меньше более острых, а потому внутренняя гипербола будет ближе к своим асимптотам в двух смыслах: и потому, что она меньше, и потому, что она тупее. И, подобно тому как было показано в предыдущей теореме, чем гиперболы тупее, тем более и более они приближаются к своим асимптотам и, наконец, совпадают с ними. Кроме того, в предыдущей теореме было показано, что у некоторой части более тупых гипербол центр к касательной ближе, чем последняя к вершине, а у другой — более острых — наоборот, дальше. Касательная же к внутренней гиперболе сама проходит под касательной к вершине. Это же можно доказать и непосредственно по Аполлонию (I кн., 37). Так как затем гиперболы в конце концов охватят параболу извне, то до точек пересечения парабола в свою очередь охватывает их. По той же причине парабола, охватывающая после точек пересечения эллипсы, до пересечения в свою очередь охватывается ими. Так как, наконец, круг, касающийся эллипсов в вершине, предполагается пересекающим их в двух точках, то он отсечет эллиптические луночки, расположенные вне круга, а потому до точек пересечения дуги эллипсов будут проходить внутри дуги круга.

ТЕОРЕМА XXIX

Если усеченные лимон, слива, параболическое веретено и двойной конус имеют общие круги, как усекающие, так и посредине тела, то объем лимона будет наибольший, а остальные по величине будут расположены в том же порядке, в котором перечислены.

Доказывается это легко на основании предыдущего. Именно, лимон образуется сегментом круга, сливы — вертикальными сегментами эллипсов, (перпендикулярными большей оси), веретена — такими же сегментами параболы и гипербол, двойной конус — равнобедренным треугольником. Так как все эти тела предполагаются имеющими одни и те же усекающие круги, то дуги всех образующих линий взаимно пересекаются в двух данных точках, через которые проходят усекающие круги. А так как у всех тел один и тот же наибольший круг посредине тела, то все образующие линии взаимно касаются в общей вершине, которая при вращении фигуры и образует этот наибольший средний круг. Так как конические сечения взаимно охватывают друг друга в установленном здесь порядке, то сегменты объемов будут по величине итти, убывая в том же порядке. Итак, самым маленьким будет двойной усеченный конус (на фиг. 16 ограниченный прямыми HAE, GCF); его сперва окружат поясами отдельные гиперболы, так что получатся усеченные гиперболические веретена; сверх них накинет еще один пояс парабола, образуя параболическое веретено; затем отдельные эллипсы прибавят новые пояса, и получатся эллиптические сливы; наконец, круг дугой $FSQCG$ наденет последний пояс и образует усеченный лимон.

ТЕОРЕМА XXX

Задача, предлагаемая геометрам. ***Найти величину частей лимона, оливки, сливы или веретена, отсеченных плоскостью, параллельной оси.***

Как за эту теорему приняться — дело ясное, но результат неизвестен. При вытягивании тела лимона в часть цилиндрической призмы рассматриваемой части лимона будет соответствовать часть призмы, ограниченная поверхностью, похожей на цилиндрическую или скорее на свернутый каким-то образом лист бумаги, так как в одном направлении она имеет прямолинейные образующие, параллельные прямой на основании цилиндрической призмы, кверху же (в перпендикулярном направлении) она искривлена, но наверное не по кругу и, насколько мне известно, не по коническому сечению, хотя из последних оказывается сходной с эллипсом, ибо с удалением от основания искривляется сильнее. Но если бы и была известна кривизна этой линии, то отсюда с помощью до сих пор доказанного все же не нашелся бы объем подобной части.

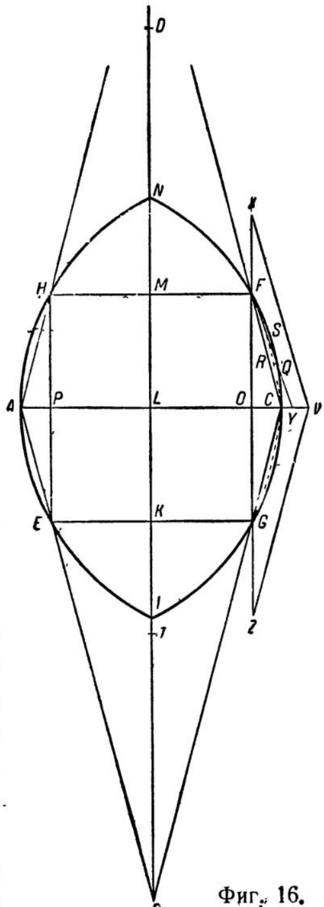
Заключение этого дополнения

Представь же нам, Снеллий, гордость геометров нашего века, строгое решение этой и прочих задач, которые тут желательны. Если не ошибаюсь, это открытие прибрегается для тебя, чтобы явился какой-нибудь Меценат, который, оценив блеск твоей удачи и побуждаемый признательностью, вознаградил бы тебя достойно такому искусству, значительно увеличив твои средства, и воздал бы тебе за вычисленный лимон золотое яблоко.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

СПЕЦИАЛЬНАЯ СТЕРЕОМЕТРИЯ АВСТРИЙСКОЙ БОЧКИ

К какому роду предыдущих фигур принадлежит форма австрийской бочки? Предпослав общие теоремы из стереометрии правильных тел как по Архимеду, так и из собственных открытий, полезные для понимания дальнейших доказательств, приступаю ближе к поставленной (задаче) и присоединяю к изложенному дополнению к Архимеду под названием *Стереометрии австрийской бочки* многое, опять-таки Архимедом не затронутое — о телах, (вписанных) в одну и ту же сферу, о параллелепипедах и соответствующих им цилиндрах и конусах — относящееся специально к форме австрийской бочки. Именно, бочка имеет форму пузатого цилиндра, или, говоря точнее, бочка представляется как бы разделенной на два усеченных конуса, вершины которых, направленные в противоположные стороны, отсечены деревянными днищами бочки, а основание общее, разделяющее конусы и образующее наибольший круг, опоясывающий бочку. На приложенной здесь фиг. 16 *HEFG* представляет цилиндр; *ABC* — один конус, другой, ему равный, идет от *AC* в направлении *ND*; отсеченные от вершины части — *EBG* и равная ей от *HF* в направлении *ND*; усеченные конусы *AEGC* и *AHFC* с общим основанием *AC*. То, что справедливо о цилиндрах и усеченных конусах, может быть приложено и к фигуре бочки, конечно, такой, которая немного отступает от цилиндра и еще меньше от усеченного конуса благодаря некоторому выпячиванию наружу и искривлению клепок, представленных здесь прямой *CRF*.



Фиг. 16.

Всего точнее фигура всякой бочки представляет собой средний слой либо лимона, образованного сегментом круга, либо сливы, образованной вертикальной частью эллипса, либо параболического веретена — всего же чаще гиперболического, — остающийся после отсечения равных частей с обеих вершин. Гиперболическое веретено я беру на том основании, что бочки выпячиваются главным образом посредине, и по направлению к краям и днищам с обеих сторон более подходят к конической прямизне, чтобы легче можно было набивать и натягивая сжимать деревянные обручи. И то же самое делает гипербола и образованные ею коноид и веретено, потому что ее ветви от среднего изгиба постепенно приближаются к прямым асимптотам. То же делает отчасти и параболическое веретено и эллиптическая слива, но всего яснее гиперболическое веретено, эллиптическая слива все менее и менее, и притом не всякая, но только тонкая, образованная таким эллиптическим сегментом, ось которого не доходит до фокуса, каковое ограничение имеет место и для параболического веретена. Оливка же, образованная сегментом, лежащим между вершинами (большой оси) эллипса, поступает наоборот, искривляясь сильнее к концам, чем посредине, что противоречит фигуре бочки. Хотя я не отрицаю, что вследствие незначительной разницы в этих фигурах иногда бочка получает фигуру усеченной оливки, но это случается не по желанию ремесленника, а благодаря ошибке рук. Но я думаю, что никогда бочка не представляет собой фигуры слоя архимедова сфероида, которую (когда еще не были известны другие, указанные выше как подходящую к действительности предложил Клавий (Практическая геометрия, V, 10), *готовый, однако* (слова Клавия), *охотно и с благодарностью прин ть другую, если кто-нибудь найдет более точную.* Именно, удлиненный сфероид, у которого посредине имеется надлежащая и подходящая к бочкам выпуклость, по направлению к отсеченным вершинам имеет чересчур сильную кривизну, так что на нем никакие обручи не смогут долго удержаться. Если же взять средний слой очень тонкого сфероида, то, конечно, уменьшится неудобство от излишней кривизны концов бочки, но вместе с тем у нее пропадет всякая пузатость, и она окажется просто цилиндром. Потому на этой фиг. 16 дуги круга HAE и FGC с диаметром, равным отрезку BT, описывают усеченный лимон, отсеченные вершины которого суть HNF и EIG. Линия же, изображенная пунктиром между прямой FRC и дугой FSC, обозначает гиперболическое веретено, вершина гиперболы которого в точке C, центр — V, асимптоты — VX, VZ. Вдоль них в направлении к F гипербола CF все более и более выпрямляется и около (точки F) с трудом может быть отличена от своей касательной FQY, пересекающей дугу FSC в точке Q.

Какими соображениями может быть обнаружена ошибочность измерительной линейки и каким способом устанавливается ее правильность?

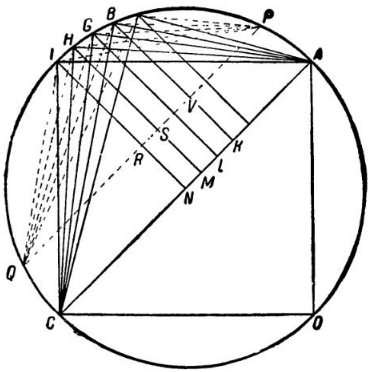
Возвращаясь к предисловию этого исследования, напомню, что мое первое обличение измерительной линейки состояло в том, что ее длина AF дает одно и то же для бочек различных фигур, объемы которых, однако, равны не будут. Чтобы это обстоятельство разъяснить, оказывается удобным вместо объема цилиндра рассмотреть параллелограм, получающийся от осевого сечения цилиндра. Именно, то, что справедливо для цилиндра, можно приложить и к усеченному конусу $AHFC$ и трапеции, служащей его осевым сечением F, т. е. к плоской (фигуре) $AHFC$, на которую и падает измерительная линейка AF, так как, повидимому, эта площадь одновременно с объемом цилиндра и возрастает и убывает. Итак, вот об этих вещах.

ТЕОРЕМА I

Осевые сечения прямых цилиндров, имеющие равные диагонали, имеют неравные площади, за исключением того случая, когда у них одинаковые или обратные отношения диаметра основания к высоте; наибольшая площадь среди них у того, который получается от сечения цилиндра с высотой, равной диаметру основания.

Пусть CI на фиг. 22 представляет диаметр основания цилиндра, изображающего половину бочки, IA — его высоту, равную диаметру основания, $AICO$ — прямоугольное сечение цилиндра, которое в этом случае будет квадратом, AC — диагональ, соответствующую измерительной линейке, проходящей наискось от наливного отверстия A до края C деревянного обруча IC. Так как цилиндр предполагается прямым, то угол CIA будет прямой. Разделим AC в точке N пополам и из N как из центра радиусом A опишем полукруг AIC, который пройдет через точку I, так как угол AIC прямой. Так как AI и IC равны между собой, то дуги AI и IC будут квадрантами окружности, и, соединив точки N и I, получим, что углы INA и INC — прямые и IN перпендикулярно к AC.

Возьмем на одном из квадрантов какие-нибудь точки, пусть, например, это будет H, B, и соединим их



Фиг. 22.

с концами диаметра A и C линиями HA, HC, BA, BC, так что, оставляя одну и ту же диагональ AC, изменим квадрант $AICO$ и его половину, т. е. треугольник AIC, в новые фигуры AHC, AB , причем угол I заменится опять-таки прямыми углами H и B, потому что они вписаны в тот же полукруг, и AHC, ABC опять будут представлять половины сечений прямых цилиндров с диаметрами оснований CH, CB и высотами HA, AB.

Я утверждаю, что площадь AIC — наибольшая, AHC — поменьше, ABC (если точка B еще более удалена от оконечности I квадранта) — еще меньше. Опустим, именно, из точек H, B перпендикуляры HM, BK на диаметр AC. По доказанному Евклидом площадь каждого треугольника равновелика прямоугольнику, построенному на половине основания AC и на высоте треугольников, т. е. на NI, MH, KB. Следовательно, как IN относится к HM и к BK, так же и площадь AIC — к площади AHC и к площади ABC. Но в квадранте AI все прямые, параллельные радиусу IN, как HM, BK, меньше его, и более удаленная от него BK меньше более близкой HM. Следовательно, площадь AHC меньше, чем AIC, и ABC в свою очередь меньше, чем AHC, а потому и прямоугольники, вдвое большие этих треугольников, идут по величине в том же порядке.

Затем я утверждаю, что у цилиндров, у которых отношения высоты к диаметру основания имеют обратные значения, осевые сечения будут равны. Пусть, именно, AB будет диаметр основания и BC – высота цилиндра; ясно, что треугольник ABC, представляющий половину осевого сечения цилиндра, остается тем же, как и раньше, когда BC было диаметром основания и AB—высотой, но отношение этих линий оборачивается.

Не хочу скрывать ошибки, в которую меня первоначально ввергло поверхностное рассмотрение этой теоремы, ибо это напоминание предупредит читателя, чтобы он остерегался подобных же (заблуждений). Именно, я ошибочно рассуждал следующим образом.

Так как отношение подобных площадей равно квадрату отношения сторон, а отношение подобных объемов — кубу его, то и в неподобных, но имеющих общую диагональ AC телах отношение объемов всегда будет аналогично отношению площадей и линий. Но это-то и неверно, и если бы я посоветовал бочарам всегда делать диаметр днища в полдлины клепок (что, обеспечивая надежность измеряемой площади, будто бы обеспечило бы и надежность измеряемого объема), то я сильно бы повредил их искусству и далеко отклонил бы их от цели. Именно, где получается наибольшая площадь на плоскости, пересекающей цилиндр, там нет наибольшего объема цилиндра. Это будет ясно далее, а сейчас перенесем сказанное о прямом цилиндре на усеченный конус.

ТЕОРЕМА II

Все предыдущее имеет место и для усеченных конусов, за исключением того, что в конусах, близких к тому, у которого образующая равна диаметру основания, отношение площадей меняется быстрее, чем тогда, когда вместо конусов были бы цилиндры, а в более удаленных — медленнее.

Так как угол, заключенный между образующей усеченного конуса и диаметром меньшего основания, больше прямого, то он вписан не в полукруг, а в дугу, меньшую половины окружности. Потому проведем PQ параллельно AC; пусть она пересекает круг в точках P и Q, а перпендикуляры IN, HM, BK — в точках

R, S, V, и соединим точки I, H, B с точками P, Q. Тогда PQ опять изобразит измерительную линейку; QI, QH, QB — диаметры основания усеченного конуса, IP, HP, BP — образующие его, равные половине длины клепок бочки. Тупые углы QIP, QHP, QBP равны между собой как вписанные в один и тот же сегмент PQI и (положением своих вершин) во всех фигурах обусловливают то изменение (площадей), которое мы здесь хотим разъяснить. Снова площадь PIQ относится к площади PHQ и к PBQ, как IR — к HS и к BV. Так как от неравных (отрезков) IN, HM отняты равные RN, SM, то отношение остатков IR и HS будет больше (отношения уменьшаемых), а потому различие площадей PIQ и PHQ будет чувствительнее различия площадей AIC и AHC. С другой стороны, убывание перпендикуляров всего больше около точки A, а потому около P это убывание меньше (чем около A). В точке P исчезают перпендикуляры для усеченных конусов, а в точке A – для цилиндров; потому площади IBQ, близкие к P, убывают в меньшем отношении, чем площади ABC, близкие к A. Раньше же из более близких к началу квадранта I в большем отношении убывала PHQ, чем AHC (29). Эта теорема особенно замечательна по причине другого более упорного заблуждения, относящегося к сравнению друг с другом усеченных конусов, о котором упомянем ниже.

Опровержение же названной выше ошибки содержит следующая теорема.

ТЕ РЕМА III

Отношения объемов прямых цилиндров, осевые сечения которых имеют одну и ту же диагональ, не аналогичны отношениям площадей осевых сечений, и при наибольшей площади сечения объем не наибольший.

Пусть на предыдущей фигуре AIC представляет половину площади IO осевого сечения, IC — диаметр основания. Умножив эту площадь $AICO$ на диаметр IC основания, получим (объем) прямоугольного параллелепипеда, сжимающего цилиндр; потому объем этого параллелепипеда относится к объему цилиндра, как 14 к 11 по теореме III из предшествующей стереометрии правильных (тел). Следовательно, в какой из тех фигур, которые имеют общую диагональ AC, будет наибольшим этот параллелепипед, в той же будет наибольшим и цилиндр. Но в фигуре, половиной сечения которой служит AIC, этот параллелепипед не оказывается наибольшим, хотя площадь сечения $AICO$ и наибольшая. Доказывается это так. Возьмем на квадранте IA точку H около точки I в направлении к концу (A). Получим вместо AIC новую фигуру AHC с той же диагональю AC, и площади AIC и AHC будут относиться друг к другу, как их высоты IN и HИ, а потому их отношение будет наименьшим, и они будут всего ближе друг к другу в конце квадранта, потому что там и линии IN, HИ, удаленные одна от другой на данное расстояние, находятся в наименьшем отношении, которое с перемещением их к началу квадранта A при сохранении взаимного расстояния все время увеличивается. Для нахождения объема линии CI, CH надо умножить на площади AIC, AHC, а потому объемы параллелепипедов с сечениями $AICI$ и $AHCH$ будут по пропорциональности относиться, как прямоугольник на NI и IC к прямоугольнику на MH и HC. Но отношение HC к CI больше, чем отношение IN к HM. Именно, CI стягивает дугу квадранта, а CH — немного большую, а потому половины их равны перпендикулярам, (опущенным на диаметр) из концов дуг, равных половине квадранта и немного большей. Отношение же этих перпендикуляров при данном расстоянии между ними не будет наименьшим, потому что в середине квадранта оно больше, чем около конца, т. е. перпендикуляры около конца квадранта I, удаленные друг от друга на половину дуги HI, будут в меньшем отношении, чем перпендикуляры, равные половинам CI и CH, проведенные около середины квадрата (на том же взаимном угловом расстоянии друг от друга). А если разность половины CH и CI будет больше разности перпендикуляров около точки I, удаленных друг от друга на половину дуги IH, то разность самих CH и CI, вдвое большая предыдущей, будет превосходить разность перпендикуляров IN и HM, удаленных друг от друга на целую дугу HI. Таким образом и выходит, что разность между CH и CI больше, чем между IN и HM. Итак, хотя HM на второй фигуре немного меньше, чем IN на первой, но зато CH на второй фигуре много больше, чем CI на первой, а потому и прямоугольник на MH и HC больше прямоугольника на IN и IC, и потому цилиндр с сечением $AHCH$ больше цилиндра (с сечением) $AICI$, хотя площадь AHC осевого сечения первого меньше соответствующей площади AIC второго. Следовательно, отношение объемов цилиндров не аналогично отношению площадей AIC и AHC, и в то время как площадь AIC наибольшая при данной диагонали, объем $AICI$ не наибольший, но объем $AHCH$ больше него [30].

При этом условии получим:

Высота	Диаметр основания	Объем столба
1	20 —	399
2	20 —	792
3	20 —	1173
4	20 —	1536
5	19 +	1875
6	19 +	2184
7	19 —	2457
8	18 +	2688
9	18 —	2871
10	17 +	3000
11	17 —	3069
Высота < Диаметр: $\sqrt{2}$ 3080		
12	16	3072
13	15 +	3003
14	14 +	2856
	равны	2328
15	13 +	2625
16	12	2364
17	11	1887
18	8 +	1363
19	6 +	741
20	0	0

Расчет и вывод из него

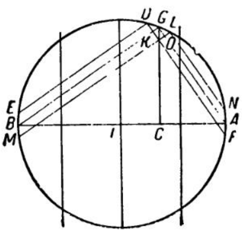
Так как объемы, начиная от точки I, по направлению к H возрастают, то я разыскал путем вычисления, где будет наибольший, ибо величина объема не возрастает непрерывно вплоть до точки A, но вблизи последней снова уменьшается и, наконец, в самой точке A вместе с площадью ABC сводится на-нет, когда высота цилиндра, выражаясь аналогично, обращается в точку A, а диаметр основания AC совпадает с диагональю. Ход вычислений был следующий: синусы дуг AH, AB умножались на синусы половин дуг HC, BC последовательно через каждый градус квадранта. Но так как умножение синусов утомительно, то можно взять более короткий способ. Пусть диагональ равна 20, ее квадрат — 400. Возьмем высоту AG, равную единице; ее квадрат 1. Вычитая его из 400, получим для квадрата GC 399. Умножив на высоту, получим для объема соответствующего столба 399 Но уже при первом способе вычисления я заметил, с какого места останавливается приращение объемов тел и с этого места снова начинается убывание, и отметил синусы соответствующих дуг. Когда по прошествии одной ночи я их снова рассмотрел, то оказалось, что точка окружности G, которой оканчивается наибольший объем, будучи соединена с AC, дает хорду GA, равную ребру куба, вписанного в сферу AIC, а GC — диагональ его грани или ребро тетраэдра, вписанного в ту же сферу [31]. Это будет доказано в следующих теоремах. Заметим, что этими теоремами обосновывается

выбор отношений, употребляемых при производстве австрийских бочек.

ТЕОРЕМА IV

Из всех прямоугольных параллелепипедов или столбов с противоположными квадратными основаниями, вписанных в одну и ту же сферу, куб имеет наибольший объем.

Эта теорема до сих пор составляла предмет пожеланий, хотя содержание ее очевидно по аналогии. Из всех плоских (фигур), ограниченных равными периметрами, круг самый вместительный, как доказал Папп в V книге. И из площадей, ограниченных одинаковым числом сторон с равным периметром, более похожие на круг и более вместительны, а также из равнопериметренных сегментов различных кругов самым вместительным будет полукруг. Подобным же образом и куб из всех параллелепипедов, ограниченных равновеликими поверхностями, самый вместительный. И из равноповерхностных правильных полиэдров вместительнее тот, который больше похож на сферу по размерам и числу граней, и поэтому самый вместительный — икосаэдр, как ограниченный наибольшим числом граней, подобно тому как круг как бы ограничен бесконечным числом сторон. Все это есть у Паппа в V книге. И о равноповерхностных сегментах различных шаров Архимед доказал, что самым вместительным будет полусфера. Этим выделяется природа круга и шара из прочих фигур, с ними равнопериметренных. Если же отказаться от равенства поверхности, а вместо этого задать для полиэдров одну и ту же описанную сферу, то для некоторых получается наоборот, так что додекаэдр больше икосаэдра, как доказали Аполлоний и Гипсикл в своем дополнении к Евклиду, но и это происходит благодаря природе шара и по причине и тут имеющего значение сходства фигуры с шаром. Именно, раньше при равных поверхностях сходство со сферой состояло в множестве граней, теперь же, когда для различных фигур предполагается один и тот же шар и определенное расположение на нем углов, то сходство со сферой состоит в их количестве, которых больше у додекаэдра, чем у икосаэдра, Если это так, то естественно кажется, что и среди тел, ограниченных одинаковым числом граней и вписанных в шар, вместительнее будет то, которое более похоже на шар, причем сходство здесь состоит в равновеликости и подобии граней и равенстве углов. Но эти свойства среди прочих параллелепипедов, вписанных в шар, принадлежат кубу, почему он и



Фиг. 23.

самый вместительный. Но можно сказать, что все это только аналогия; потому я привожу и полное доказательство, которое представляет некоторые трудности от того, что приходится представлять на плоской фигуре мелкие сечения объема.

Пусть на приложенной фиг. 23 AGB изображает большой круг сферы, AB — его диаметр и ось сферы, AG — ребро вписанного куба, GB - диагональ одной из квадратных граней куба. Столбы с квадратными основаниями, вписанные в эту же сферу, будут либо выше куба и будут иметь основания меньше кубического, либо будут ниже куба, но с более широкими квадратными основаниями. Возьмем сначала столб выше куба. Для этого проведем в круге параллель к высоте куба GA, более длинную, чем последняя, — пусть это будет DF и пусть она пересекает GB в точке K. Затем из точки D — конца высоты столба — проведем параллель к GB — диагонали квадрата куба; пусть это будет DE — диагональ квадрата столба.

Утверждается, что объем столба FDE меньше объема куба AGB. Именно, DK относится к FK, как GK к KF, и отсюда FK относится к KB, как GK — к KD. Но AG меньше, чем FK, и GB больше, чем BK. Потому отношение AG к GB меньше отношения FK к BK, а потому то же отношение AG к GB меньше отношения GK к KD. Но отношение AG к GB равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$, потому отношение GK к KD больше, чем $\frac{\sqrt{2}}{2}$, и GK или больше половины KD или равна всему KD, или даже больше его. К высоте кубического объема с обеих сторон при переходе к столбу делается прибавление, по объему равное произведению квадратного основания столба на частицу высоты DK. Наоборот, толщина кубического объема убавляется, во-первых, со всех четырех сторон вокруг столба на объемы, равные произведению четырех равных квадратов столба на отрезок, равный разности половины стороны основания куба и половины стороны основания столба; этот отрезочек относится к GK — уменьшению половины диагонали основания куба, — как AG к GB, т. е. как $\sqrt{2}:2$. Но этим еще не исчерпано все уменьшение (объема), потому что к этим четырем кирпичикам квадратной формы, меньшей квадрата грани куба, присоединяются еще окружающие их двенадцать столбиков, которые тоже отнимаются от толщины куба. Если поэтому окажется, что четыре кирпичика вокруг колонны, отнимаемые от объема куба, больше двух кирпичиков, прибавляемых сверху и снизу, то тем более общее уменьшение объема куба превзойдет прибавление, происшедшее от увеличения высоты. Докажем же следующим образом, что четыре боковых кирпичика больше двух кирпичиков сверху и снизу. Именно, любой из боковых кирпичиков относится к верхнему кирпичику, как уменьшение ребра куба к увеличению его высоты, половина которого есть KD. Но отношение уменьшения ребра куба к увеличению высоты равно произведению отношений AG к GB и GK к KD. Именно, половина уменьшения стороны относится к половине уменьшения диагонали GK, как AG к GB — это и есть первый множитель, второй же есть отношение GK к KD. Произведение же этих отношений дает несколько больше $\frac{1}{2}$, потому что отношение AG к GB равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и GK к KD больше, чем $\frac{\sqrt{2}}{2}$, и произведение корня квадратного на число, меньшее его, даст меньше подкоренной величины. Но если отношение бокового кирпичика к верхнему больше $\frac{1}{2}$, то верхний кирпичик не вдвое больше бокового, т. е. не равновелик двум боковым, а меньше их, а поэтому верхний и нижний вместе меньше четырех боковых, и, значит, прибавление, сделанное по высоте, меньше убавления по бокам [32]. Итак, столб, вписанный в сферу и более высокий, чем куб, по объему меньше куба. Возьмем, во-вторых, столб ниже куба, для чего проведем в круге параллель высоте куба CA, меньшую ее, — LN, которую возьмем за высоту столба, а через точку L проведем параллельно диагонали основания куба — GB — диагональ LM квадратного основания столба, большего основания куба, и пусть она пересекает GA в точке O. Опять, как и раньше, получим, что MO относится к OA, как GO — уменьшение высоты куба с одного конца — к OL — половине увеличения диагонали. Но BG меньше, чем MO, и GA больше, чем OA; следовательно, отношение BG к GA, равное для куба $\sqrt{2}$, меньше отношения GO к OL, т. е. это отношение GO к OL больше $\sqrt{2}$. Но отношение половины увеличения диагонали LO к половине увеличения стороны квадрата равно $\sqrt{2}$. Отсюда, умножая $\sqrt{2}$ на величину, большую его, получим, что отношение GO — половины уменьшения высоты — к половине увеличения стороны основания будет больше, чем 2.

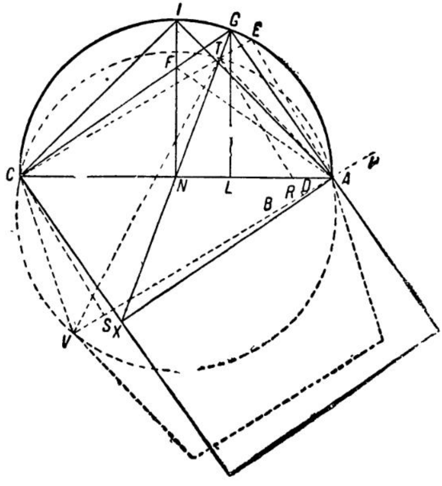
Произведение площади квадратной грани куба на GO даст объемы двух кирпичиков, на которые уменьшается куб по высоте. Произведение же площадей квадратных граней куба на половину увеличения сторон основания даст объемы четырех кирпичиков, которые больше прибавления, происходящего от обложения вокруг объема куба. Именно, хотя после приложения этих четырех кирпичиков столб еще зияет, так как нехватает еще четырех столбиков, вдоль четырех вертикальных ребер, но зато эти кирпичики выдаются за высоту столба восемью столбиками, равной длины с недостающими, но более толстыми, чем последние. Именно, толщина первых равна GO, а толщина последних относится к OL, как AG к GB, т. е. она меньше OL, а потому и подавно меньше, чем GO. Значит, восемь толстых выступающих столбиков по трем причинам больше четырех тонких недостающих, и четыре названные кирпичика больше добавления, сделанного к объему куба. Если бы половина увеличения стороны основания была в точности равна половине GO, то удвоенное произведение GO на площади квадратной грани куба было бы равно учетверенному произведению половины увеличения стороны на площадь того же квадрата. Но, как было сказано, половина увеличения стороны основания меньше половины GO, почему и четыре боковых квадратных кирпичика меньше двух кирпичиков сверху и снизу, а значит, прибавление, сделанное по бокам куба, и подавно меньше уменьшения его объема по высоте (33). Итак, столб, вписанный в сферу и более низкий, чем куб, вписанный в ту же сферу, по объему меньше куба. Но раньше мы видели, что и столб, более высокий, чем куб, меньше его. Следовательно, никакой столб, с квадратными основаниями и прямоугольными боками, вписанный в сферу, не достигает по объему куба, вписанного в ту же сферу, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА V

Из всех цилиндров, имеющих одну и ту же диагональ, самым большим и вместительным будет тот, в котором отношение диаметра основа-

ния к высоте равно $\sqrt{2}$, т. е. равно отношению ребра тетраэдра или диагонали грани куба, вписанных в одну и ту же сферу, к ребру куба.

Возьмем фигуру первой теоремы и пусть на ней AC представляет диагональ прямоугольного осевого



Фиг. 24.

сечения цилиндра, изображающую измерительную линейку. Построим на AC полукруг AGC, разделим AC на три равные части, одна из которых AL, две (остальные) CL, восставим в точке L перпендикуляр LG, пересекающий окружность в точке G, и соединим G с A и с C. Так как CL вдвое больше LA, то CA будет втрое больше LA, и как GA относится к AO, так AG к LA. Если три величины составляют непрерывную пропорцию, то первая относится к третьей, как квадрат первой к квадрату второй, и так как первая — CA — втрое больше третьей — LA, — то и квадрат диаметра CA будет втрое больше квадрата второй — AG. Так как квадрат AC равновелик сумме квадратов AG и GC, из которых первый составляет треть (всей суммы), то второй будет составлять две трети, т. е. квадрат GC будет вдвое больше квадрата AG. Следовательно, AG есть ребро куба, вписанного в сферу AGC, и GC — диагональ его грани, или ребро тетраэдра, вписанного в ту же сферу. Утверждается, что цилиндр, у которого диаметром основания служит GC, а высотой GA, будет из всех цилиндров с диагональю AC самым вместительным, т. е. с наибольшим объемом. Именно, так как G и C суть точки на поверхности сферы, и линия GC — диаметр одного из оснований цилиндра, то и вся окружность этого основания будет лежать на поверхности сферы, так же как и (окружность) противоположного основания, одна из точек которой будет A. Но если AG — ребро куба и GC — диагональ его грани, то эта квадратная грань с двумя противоположными углами G и C необходимо будет вписана в круг GC, а значит, и в сферу, так же как и противоположная грань, проведенная через точку A. Итак, в определенный нами цилиндр оказывается вписанным куб с той же высотой, все вершины которого лежат на поверхности сферы. Таким же образом в любом другом круге сферы, диаметр которого пусть, например, будет IC, можно представить вписанное квадратное основание столба высоты IA, у которого два противоположные угла I и C, а углы второго квадрата A и X, и, следовательно, в цилиндр AIC вписан столб равной с ним высоты. Но отношение всех столбов с квадратным основанием, вписанных в цилиндры той же высоты, одно и то же. Но куб — наибольший из всех столбов, вписанных в сферу, а потому и цилиндр AGC, описанный около вписанного в сферу куба, наибольший среди всех остальных цилиндров, как, например, AIC, вписанных в ту же сферу.

То же самое можно доказать и на фиг. 22 следующим образом. Пусть три цилиндра, имеющие одну и ту же диагональ CA, оканчиваются в точках H, G, B и имеют основаниями CH, CG, CB, а высотами HA, GA, BA. Пусть при этом квадрат CG вдвое больше квадрата GA, HC короче, а CB длиннее, чем CG. Опустим на CA перпендикуляры HM, GL, BK. Так как угол CGA — прямой, то отрезок CL относится к отрезку LA, как квадрат CG к квадрату GA, т. е. CL вдвое больше LA, CM относится к MA, как квадрат CH к квадрату HA, а CK — к KA, как квадрат CB к квадрату HA, а CK — к KA, как квадрат CB к квадрату BA. Но квадраты CH, CG, CB относятся друг к другу, как площади круговых оснований цилиндров. Потому эти основания цилиндров относятся друг к другу, как CM к CL и к CK. Отношение же цилиндров равно произведению отношений оснований и высот. Следовательно, отношение цилиндров равно отношению прямоугольников с основаниями CM, CL, CK и высотами HA, GA, BA. Квадраты же высот AH, AG, AB относятся друг к другу, как AM к AL и к AK. (Длины CM и AM) получаются из CL и AL вычитанием из первой (CL) и прибавлением ко второй (AL) одной и той же величины LM, и точно так же (CK) получается из CL прибавлением LK, а (AK) из AL — вычитанием той же величины LK. Так как CL вдвое больше LA, то отношение меньшей длины CM к большей CL будет меньше, чем корень квадратный из отношения меньшей AL к большей AM. Так, например, если CL будет 20, LA — 10, CM — 19, MA — 11, то отношение 19 к 20 будет меньше корня квадратного из отношения 10 к 11 или 20 к 22, потому что последнее можно составить как произведение двух отношений 20 к 21 и 21 к 22, из которых каждое больше отношения 19 к 20. Следовательно, отношение AM к AL, а вместе с ним отношение квадрата HA к квадрату GA будет меньше квадрата отношения CL к CM, но отношение самих прямых HA и GA равно корню квадратному из отношения их квадратов, а корень из отношения квадратов равен отношению самих линий. Итак, отношение высоты AH к высоте GA меньше обратного отношения оснований, пропорциональных CM и CL. Следовательно, прямоугольник на HA и CM, пропорциональный цилиндру CHA, будет меньше прямоугольника на GA и CL, пропорционального цилиндру CGA (4).

Это же доказательство с надлежащими изменениями прилагается и к цилиндру CBA. Именно, отношение большей длины CK к меньшей CL будет меньше корня квадратного из отношения большей AL к меньшей AK. Так, например, если CL будет 20, LA — 10, CK — 21, KA — 9, то (последовательно получим), что отношение 21 к 20 меньше отношения 20 к 19 и 19 к 18, так что это отношение 21 к 20 меньше корня квадратного из отношения 20 к 18, т. е. 10 к 9. Потому отношение AL к AK, т. е. квадрата AG к квадрату AB, будет больше квадрата отношения CK к CL, а отношение самих линий AG к AB будет больше отношения CK к CL, т. е. AB не во столько же раз короче AG, во сколько CK длиннее CL, и прямоугольник на BA и CK меньше прямоугольника на GA и CL. Потому и цилиндр CBA меньше цилиндра CGA, который и является наибольшим из всех [35].

Добавление 1 Непузатые цилиндрические бочки и более удлиненной и более укороченной фигуры, чем австрийские, вместительны менее последних.

Добавление 2. Отсюда ясно, что австрийские бочары как бы по здравому и геометрическому смыслу при построении бочки соблюдают правило, чтобы за радиус днища брать треть длины клепок. Именно, при таком устройстве цилиндр, мысленно построенный между двумя днищами, будет иметь две половины, весьма близко подходящие к условиям теоремы V, и потому будет самым вместительным, хотя бы при постройке бочки от точных правил несколько и отступили, потому что фигуры, оканчивающиеся вблизи точки G по ту и по другую стороны, очень мало изменяют свою вместимость, так как объем фигуры AGC наибольший, а по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно. На фиг. 24 CG относится к GA, как 100 000 к 70 711 (т. е. $\sqrt{2}:1 = 1:0{,}70711$). Удвоенная длина BA по этому правилу должна бы равняться 141 422. Бочары за длину клепки берут 150 000, т. е. полуторную величину диаметра основания, что несколько превосходит 141 422. Но это-то самое и дает более точное приближение к наивместительнейшей фигуре, потому что клепки и изгибаются и с обеих сторон выходят за обручи, которыми охватывают и сжимают днища, так что излишек в длине против полуторного диаметра основания и приходится на эти выступающие оконечности, которые не принимались во внимание при разборе фигуры по правилу теоремы V.

Как же отрицать, что *природа по одному инстинкту, без всякого рассуждения учит геометрии,* когда наши бочары, руководимые только глазом и красотой формы, научились половиной бочки изображать самую вместительную фигуру? Пусть же придет геометр и научит более легкому способу построения бочки, которая своей половиной подходила бы к наивместительнейшему цилиндру еще ближе, чем та с полуторным отношением, которой держатся исстари австрийские бочары, и еще пусть укажет геометр форму, более подходящую к удобному измерению, чем та, которую строят в Австрии. Я бы мог думать, что в Австрии когда-то существовал некий превосходный геометр, научивший этому бочаров, если бы меня не удерживало то обстоятельство, что в книгах геометров нигде нет следов такого прекрасного доказательства, а также и то, что этот способ устройства бочки, насколько я знаю, не употребляется на Рейне и других путях сообщения, где производят гораздо более удлиненные бочки. А как же считать правдоподобным, чтобы непринятое повсюду было заимствовано только одной нацией из книг и наставлений геометров?

Воспоминание

Кто, избавившись от заблуждения приписывать наибольший объем тому из цилиндров с данной диагональю, у которого площадь осевого сечения наибольшая, и узнав, что самым вместительным будет по теореме V цилиндр, в котором отношение диаметра основания к высоте равно $\sqrt{2}$, а в случае равенства этих линий по теореме I будет наибольшая площадь осевого сечения, и что то же самое относится по теореме II к площадям сечения усеченных конусов, оказался бы столь проницательным и осторожным, чтобы тотчас же не предположить того же самого и об объеме усеченного конуса, как про объем цилиндра, именно, что наибольший объем будет у того усеченного конуса, в котором диаметр меньшего основания вдвое больше боковой стороны? Я же это подумал и держался такого мнения последние полтора года и даже дошел до того, что, опираясь на это основание, считал все рейнские бочки, без различия их пузатости, в отношении емкости ниже австрийских, в чем хотя и не сделал им никакой несправедливости, но, однако, не с одинаковым правом. Поэтому я отношу к пользе, полученной от настоящего печатания, что при подготовке издания геометрия потребила меня за ухо и внушила мне как бы в расширение дополнения к Архимеду следующие теоремы, из которых выясняется новое и гораздо более удивительное, чем предыдущее, свойство австрийской бочки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Цилиндр и усеченный конус называются сопряженными, когда у их осевых сечений диагонали общие или равны и отношение диаметра основания цилиндра к его высоте равно отношению диаметра меньшего основания конуса к его боковой стороне (36)**.**

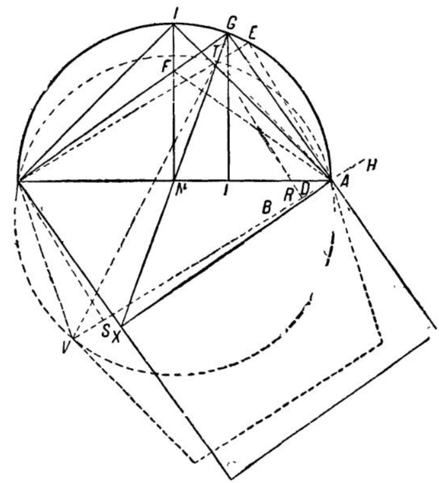
ТЕОРЕМА VI

Задача

Даны цилиндр и боковая сторона или диаметр меньшего основания сопряженного усеченного конуса; найти остальные линии сопряженного усеченного конуса. При этом отношение боковой стороны или диаметра основания цилиндра к данной боковой стороне или диаметру усеченного конуса должно быть меньше отношения суммы диаметра основания цилиндра и его высоты к диагонали.

Пусть дан цилиндр $AGCX$ с диаметром основания CG, высотой AG и диагональю AC и дан диаметр основания усеченного конуса CT и отношение CG к CT меньше отношения суммы CG и GA к CA. Требуется найти боковую сторону усеченного конуса и диаметр большего основания. Найдем линию AT так, чтобы она относилась к CT, как GA к CG, и построим на CA треугольник со сторонами CT и TA. Так как отношение суммы CG и GA к CA больше отношения CG к CT, то оно будет больше и отношения GA к TA, откуда отношение суммы CG и GA

к CA будет больше отношения той же суммы CG и GA к сумме CT и TA, а потому сумма CT и TA будет больше CA, и, значит, треугольник со сторонами CA, CT и TA построить можно [37]. Опишем круг через точки C, T, A, из точки C проведем в круге хорду CV, равную AT, и соединим точки



Фиг 24.

A и V. Утверждается, что TA и CV будут боковые стороны сопряженного усеченного конуса и AV — диаметр большего основания. Именно, соединив точки T и V, вследствие равенства TA и CV получим, что дуги AC и TV будут равны, как получающиеся от прибавления к общей дуге TC дуг TA и CV, а потому будут равны хорды AC и TV и углы ATC и VCT. Следовательно, четырехугольник $ATCV$, симметричный и вписанный в круг, и имеет общую диагональ AC с прямоугольником $AGCX$, и отношение CT к TA то же, как CG к GA. Значит, усеченный конус с осевым сечением $ATCV$ и цилиндр с сечением $AGCX$ сопряжены.

ТЕОРЕМА VII

Если цилиндр и усеченный конус сопряжены, и разность диаметров оснований усеченного конуса разделена на части, пропорциональные квадратам диаметра основания и высоты цилиндра, то квадрат этого диаметра равновелик прямоугольнику, построенному на меньшем диаметре усеченного конуса и на сумме его с отрезком, соответствующим диаметру цилиндра.

Пусть $AGCX$ — осевое сечение цилиндра и AC — его диагональ, и пусть перпендикуляр из точки G делит ее на части CL и LA так, что CL соответствует CG. Построим по предыдущей теореме VI осевое сечение усеченного конуса $ATCV$ над той же диагональю AC, диаметры которого: больший — AV, меньший — CT, и разность, получающаяся от вычитания из AV отрезка VB, равного CT, пусть будет BA.

Так как $ATCV$ — вписанный четырехугольник, то квадрат AC будет равен сумме двух прямоугольников на TC и AV и на TA и CV, т. е. квадрата TA или CV. Следовательно, отняв от квадрата AC квадрат AT, получим в остатке прямоугольник на TC

и AV, т. е. на BV и AV. Но и при вычитании из квадрата AC квадрата AG, большего, чем квадрат AT, остается прямоугольник на GC и AX, т. е. квадрат GC, который поэтому будет меньше прямоугольника на BV и VA. Следовательно, этот квадрат равен прямоугольнику, меньшему, чем построенный на BV и VA. Пусть это будет прямоугольник на BV и VD, и потому разность этих прямоугольников, т. е. прямоугольник на VB и DA, будет равна избытку прямоугольника на VB и VA над квадратом GC, а последний избыток равен избытку квадрата AC над квадратом AT. Так как прямоугольник на BV и VD был положен равным квадрату GC, а прямоугольник на DB и BV равен избытку прямоугольника на BV и VD над квадратом BV или TC, то и разность квадратов GC и CT равна прямоугольнику на DB и BV. Так как квадрат AG относится к квадрату GC, как квадрат AT к квадрату TC, то по производной пропорции и квадрат AG будет относиться к квадрату GC, т. е. AL к LC, как разность квадрата AG и квадрата AT, т. е. прямоугольник на BV и AD относится к разности квадрата GC и квадрата TC, т. е. к прямоугольнику на DB и BV. Итак, AL относится к LC, как прямоугольник на BV и AD к прямоугольнику на BD и BV, и так как у этих прямоугольников общая высота BV, то AL относится к LC, как основания AD к BD.

А значит, и обратно, если разделить AB в точке D так чтобы BD относилось к DA, как LC к LA, т. е. как квадрат GC к квадрату GA, то квадрат на GC будет равновелик прямоугольнику, построенному на VB и VD, что и требовалось доказать [38].

Добавление 1 и расчет. Если даны квадраты высоты и диаметра цилиндра и диаметр меньшего основания усеченного конуса, то квадрат диаметра цилиндра надо разделить на данный диаметр основания усеченного конуса, из частного вычесть делитель, остаток умножить на сумму данных квадратов, произведение разделить на квадрат диаметра основания цилиндра — получится разность диаметров оснований конуса, прибавив которую к данному меньшему, получим диаметр большего основания усеченного конуса [39].

Пример. Пусть квадрат AG равен 20 000, квадрат GC тоже 20 000 и TC равно 120.

20 000	Частное . . .	167
120	Делитель . . .	120
AB	Разность . . .	47

Сумма квадратов . . . 40 000	Частное AB . .	93 +
Произведение . . . 1 866 667	TC . .	120
20 000	Сумма AV .	213 +

Добавление 2. Если же даны только отношение квадрата высоты цилиндра к квадрату диаметра его основания и диаметры обоих оснований усеченного конуса, то диаметр цилиндра находится так: надо сложить числа, пропорциональные данным квадратам, разность диаметров оснований усеченного конуса умножить на число, соответствующее квадрату диаметра цилиндра, произведение разделить на сумму обоих чисел, частное умножить на меньший диаметр усеченного конуса, к сумме прибавить квадрат этого же диаметра — получится квадрат диаметра основания цилиндра [40].

Пусть CG относится к GA, как 3 к 2.
Квадраты — как 9 к 4; сумма — 13.
Пусть CT—130; VA—156. Разность 26. Произведение 234

Произведение 234
Сумма 13

Частное 18
CT 130
Произведение 2 340
Квадрат CT 16 900

Сумма — квадрат GC — 19 240

Или, что то же самое, число, соответствующее большему квадрату, надо помножить на меньший диаметр и найти число, относящееся к произведению, как разность диаметров оснований конуса относится к сумме квадратов; это и будет квадрат CG.

Добавление 3. Если квадрат AG относится к квадрату GC, как 1 к 2, то VD будет большей из двух средних арифметических между TC и AV, и расчет в этом случае проще. Пусть TC — 19, AV — 22. Тогда:

$$\begin{array}{r} 19,\ 20,\ 21,\ 22 \\ 19 \\ \hline 399 - \text{квадрат } GC. \end{array}$$

Добавление 4. Диаметр меньшего основания усеченного конуса относится к отрезку VD, как меньшее основание конуса к основанию цилиндра, т. е. как квадрат боковой стороны усеченного конуса к квадрату высоты цилиндра.

ТЕОРЕМА VIII

В сопряженных цилиндре и усеченном конусе отношение высот равно произведению отношений диаметра основания цилиндра к диаметру меньшего основания конуса и боковой стороны конуса к его высоте.

Пусть на фиг. 24 *CGAX* и *CTAV* изображают сопряженные фигуры, на которых диаметры оснований цилиндра *CG* и *XA*, диаметр меньшего основания усеченного конуса — *CT*, большего — *VA*, высота конуса — *TR*, боковая сторона — *TA*. Утверждается, что отношение высоты цилиндра *GA* к высоте конуса *TR* равно произведению отношений *GC* к *CT* и *AT* к *TR*. Доказательство самой теоремы очень легко, но тем не менее ее надо выделить самостоятельно из-за ее приложений и примечательных соотношений. Именно, так как *CG* относится к *GA*, как *CT* к *TA*, то, переставив члены, и *GC* — к *CT*, как *GA* к *AT*. Но отношение *GA* к *TR* равно произведению отношений *GA* к *AT* и *AT* к *TR*, а потому оно равно и произведению отношений *GC* к *CT* и *AT* к *TR*.

Добавление и вычисление искомой высоты. Если даны *CT* и *VA*, то по предыдущему дан и квадрат *GC* и по данному отношению этого квадрата *GC* к квадрату *GA* найдутся квадрат *GA* и квадрат *TA*. Далее известна разность *VA* и *CT*, т. е. *BA*, а квадрат *TA* больше квадрата *TR* на четвертую часть квадрата *BA* при всяком сопряжении (т. е. при любом отношении квадратов *GC* и GA) Действительно, углы при точках C и T равны, а также равны и параллельны по условию CT и VB; следовательно, соединив B и T, получим, что BT равно CV, а последняя равна TA; значит, треугольник BTA равнобедренный, и TR — его высота, а потому BR равно RA и квадрат BA вчетверо больше квадрата RA. Итак, вычитая из квадрата TA четвертую часть квадрата BA, получим квадрат высоты TR усеченного конуса, сравнивая который с квадратом GA и найдем требуемое отношение высот.

Примеры

Пусть TC — 19 AV — 22. Если квадрат GC вдвое больше квадрата GA, то, как и раньше, квадрат GC будет 399. Следовательно, квадрат GA будет $\frac{399}{2}$ или $\frac{798}{4}$, откуда, так как квадрат 19 равен 361, TA равняется $\frac{361}{2}$ или $\frac{722}{4}$. Наконец, так как разность между VA и CT, т. е. между 22 и 19, есть 3, то квадрат ее будет 9, а его четвертая часть $\frac{9}{4}$. Отнимая ее от $\frac{722}{4}$, получим для квадрата TR: $\frac{713}{4}$. Итак, квадрат GA относится к квадрату TR, как 798 к 713.

Пусть дано другое сопряжение, именно такое, что квадраты AG и GC равны, а потому (равны) и квадраты AT и TC, и пусть попрежнему CT — 19, VA — 22. Квадрат AT будет $\frac{1444}{4}$, а квадрат TP — $\frac{1435}{4}$, и отношение квадрата GA к квадрату TR то же, как 1596 к 1435, или, по сокращении, 228 к 205.

Еще пример. Пусть TC — 19, VA — 20, или, что то же самое, (чтобы для дальнейшего иметь числа, кратные 3) TC — 57, AV — 60. Пусть, далее, квадрат GC не вдвое больше квадрата GA, но их отношение меньше, чем 2 к 1, или 8 к 4, а, например, пусть оно равно отношению 7 к 4. Так как по предыдущему разность, которая в настоящем случае равна 3, надо делить в отношении 7 к 4, так что всего (частей) будет 11, то и сами диаметры надо выразить числами, кратными 11, так что они будут 627 и 660, их разность 33, и квадрату GC будет соответствовать часть, равная 21. Следовательно, вся (длина) VD будет 648 умножив ее на меньший диаметр 627, получим 406 296 — квадрат GC, который по условию относится к квадрату GA, как 7 к 4. Следовательно, квадрат GA будет: 232 169$^1/_7$ или (почти) $\frac{928677}{4}$. Квадрат же меньшего диаметра TC равен 393 129, и он относится к квадрату TA, как 7 к 4, т к что последний будет 224 645$^1/_7$ или $\frac{898581}{4}$. Разность диаметров 33, ее квадрат — 1089, его четверть — $\frac{1089}{4}$. Вычитая это из квадрата TA, получим $\frac{897492}{4}$. Следовательно, здесь квадрат GA относится к квадрату TR, как $\frac{928677}{4}$ к $\frac{897492}{4}$, или как 3 714 708 к 3 589 968, или, сократив, как 464 338 к 448 746. Пусть, далее, отношение квадратов не 7 к 4, а 9 к 4, так что отношение самой линии GC к CT равно отношению 3 к 2, и пусть VC — 19, AV — 20. Значит, разность — 1 — надо делить в отношении 9 к 4. Всего частей будет 13, или, для кратности с 3, 39. Следовательно, за величины (диаметров) надо взять 780 для AV и 741 для TC. Отсюда квадрат TC будет 549 081. Так как он относится к квадрату TA, как 9 к 4, то последний равен 244 036. Вычитая из него четверть квадрата от 39, т. е. $\frac{1\,21}{4}$, получим для (квадрата) TR — $\frac{974623}{4}$. Часть разности, входящая в состав квадрата GC, равна 27; линия VD, следовательно, 768, умножив которую на диаметр 741, получим для квадрата GC — 569 088, откуда для квадрата GA получается 252 928 или $\frac{1011712}{4}$, потому что 9 относится к 4, как 569 088 к 252 928. Итак, квадрат GA относится к квадрату TR, как 011 712 к 974 623.

Добавление 2 и аналогичные соотношения. В сопряжении, при котором квадраты диаметра и высоты цилиндра равны, существует красивый ряд отношений между квадратами высот. Именно такой:

Если TC относится к AV, как	то квадрат TR относится к квадрату GA, как	Если TC относится к AV, как	то квадрат TR относится к квадрату GA, как
1: 2	1: 2	6: 7	11:12
2: 3	3: 4	7: 8	13:14
3: 4	5: 6	8: 9	15:16
4: 5	7: 8	9:10	17:18
5: 6	9:10		

В сопряжении же, при котором квадрат диаметра цилиндра вдвое больше квадрата его высоты, такой:

TC к AV, как	Квадрат TR к квадрату GA, как	Разность	Приращения квадрата GA	
			первое	второе
1: 2	3: 10	7		
			22	
2: 3	21: 32	11		12
			34	
3: 4	51: 66	15		12
			46	
4: 5	93:112	19		12
			58	
5: 6	147:170	23		12
			70	
6: 7	213:240	27		12
			82	
7: 8	291:322	31		12
			94	
8: 9	381:416	35		12
			106	
9:10	483:522	39		

(Отношения квадратов увеличиваются), потому что точки D и R сближаются. Подобное будет при всяком сопряжении.

ТЕОРЕМА IX

Если разность диаметров усеченного конуса разделена в отношении (квадратов диаметра ос-

нования и высоты) сопряженного цилиндра, часть, соответствующая диаметру, сложена с меньшим диаметром конуса и построены прямоугольники 1) на меньшем и большем диаметрах и 2) на меньшем диаметре и составленной сумме, то произведение отношений первого прямоугольника, увеличенного на третью часть квадрата разности диаметров, ко второму и высоты усеченного конуса к высоте цилиндра равно отношению объема усеченного конуса к объему сопряженного цилиндра.

Пусть на фиг. 24 при сохранении прочих условий предыдущей теоремы разность BA разделена в точке D так, что AD относится к DB, как квадрат AG к квадрату GC. Утверждается, что произведение отношений прямоугольника на CT и AV вместе с третьей частью квадрата BA к прямоугольнику на CT и VD и TR к GA дает отношение объема усеченного конуса к объему сопряженного цилиндра. Именно, по теореме XVII первой части прямоугольник на CT и VA вместе с третьей частью квадрата BA относится к квадрату CT, как объем усеченного конуса $CTAV$ к объему цилиндра с той же высотой, построенного на основании CT. Но квадрат CT относится к квадрату CG, как объем цилиндра на основании CT к объему цилиндра той же высоты на основании CG, согласно сказанному в теоремах III и XVI первой части. Следовательно, прямоугольник на CT и VA вместе с третьей частью квадрата BA относится к квадрату CG, т. е. по предыдущей теореме VI — к прямоугольнику на CT и VD, равновеликому этому квадрату CG, как объем усеченного конуса с основаниями CT и AV к объему цилиндра той же высоты.

Значит, если бы усеченный конус имел высоту сопряженного цилиндра, т. е. GA, то уже одно названное отношение (и давало бы отношение объемов). Но высота усеченного конуса RT относится к высоте сопряженного цилиндра GA, как цилиндр с высотой усеченного конуса к сопряженному цилиндру при равных основаниях, согласно теореме XVII первой части, и так же относится сопряженный усеченный конус с высотой TR к усеченному конусу с теми же основаниями и высотой GA. Следовательно, это последнее отношение TR к GA и представляет второй множитель в отношении объемов [41].

Добавление 1 и расчеты. Пусть дано отношение усеченного конуса к цилиндру той же высоты с основанием GC, и по предыдущему найдено отношение квадрата GA высоты цилиндра к квадрату TR высоты усеченного конуса.

Так как квадратные корни из пропорциональных чисел сами пропорциональны, но их отношение равно корню из отношения квадратов, то возведем член отношения, соответствующий объему усеченного конуса, в квадрат и найдем число, относящееся к квадрату этого члена, как квадрат GA относится к квадрату TR. Тогда корень квадратный из этого числа и даст число, соответствующее объему искомого, т. е. сопряженного усеченного конуса в пропорции, в которой объему сопряженного цилиндра соответствует квадрат GC. Пусть, например, квадрат GC относится к квадрату GA, как 7 к 4, и пусть CT — 19, AV — 20, или, как в примере к теореме VIII, CT — 627, AV — 660, разность их 33. Умножив меньшую среднюю арифметическую 638 на 627 и прибавив квадрат 627 или умножив 660 на 627 и прибавив произведение 33 на 11 (треть квадрата разности), получим число 414 183, соответствующее объему усеченного конуса. Но выше было найдено, что квадрат высоты сопряженного цилиндра относится к квадрату высоты конуса, как 464 338 к 448 746. Следовательно, определив число, относящееся к квадрату найденного члена для объема усеченного конуса, как 464 338 к 448 746, получим 165 773 240 994, корень из которого, т. е. 407 153, будет соответствовать сопряженному усеченному конусу в пропорции, в которой цилиндру соответствует 406 296 — найденный выше квадрат GC. Следовательно, усеченный конус превосходит цилиндр больше чем на пятисотую часть, в то время как при том же отношении диаметров, но при сопряжении, в котором квадрат диаметра основания цилиндра вдвое больше его высоты, усеченный конус оказался бы меньше цилиндра на часть, несколько меньшую одной трехтысячной.

Испытаем еще сопряжение, в котором квадрат диаметра цилиндра превосходит квадрат его высоты больше чем вдвое. Пусть TC — 19, AV — 20 и квадрат GC относится к квадрату GA, как 9 к 4. Выше, в теореме VIII, мы видели, что если положить TC — 741, AV — 780, то квадрат GC будет 569 088, и квадрат GA относится к квадрату TR, как 10 117 112 к 974 623. Умножив 741 на 780, разность их 39 на третью часть ее — 13 — и сложив произведения, получим член, соответствующий усеченному конусу 587 487. Наконец, умножив квадрат его на 974 623 и разделив произведение на 10 117 112, получим 322 399 007 006. Корень отсюда — 567 802 — будет соответствовать сопряженному усеченному конусу, в то время как 569 088 соответствует цилиндру. Следовательно, здесь усеченный конус меньше цилиндра на часть, большую одной шестисотой. В сопряжении же, в котором квадрат диаметра цилиндра вдвое больше квадрата высоты, конус был меньше цилиндра на часть, меньшую одной трехтысячной.

Добавление 2. В сопряжении, в котором квадрат диаметра основания цилиндра вдвое больше квадрата высоты обе из средних арифметических между диаметрами оснований конуса служат для вычисления, меньшая — для объема пояса (часть первая, теорема XVII), большая — для квадрата *GC* и объема сопряженного цилиндра.

Пример

Диаметры

Разность	3	19	20	21	22
	3	19	3	19	
	9	361	60	399	
	4	2	361	2	
		722	421	798	
		9	421		
		713	177 241		

Умножив 177 241 на 713, разделив на 793 и извлекши из частного 158 863 корень, получим 398 с лишним для объема усеченного конуса, если объем сопряженного цилиндра принять равным 399. Таким образом в этом сопряжении получаются для различных отношений диаметров следующие значения (см. табл.).

Отношение диаметров	Цилиндр	Усеченный конус
1: 2	15	11 +
2: 3	48	46 +
3: 4	99	97½
4: 5	168	167 —
5: 6	255	254 —
6 7	360	359 —
7: 8	483	482 —
8: 9	624	623 +
9:10	783	782 +
. . .	. . .	. . . .
. . .	. . .	. . . .
19:20	3363	3362 +

Добавление 3. Если же дано сопряжение, в котором диаметр основания цилиндра равен его высоте, то из двух средних арифметических меньшая полезна для вычисления объема пояса, а среднее арифметическое для вычисления диаметра *GC*.

Пример

Диаметры

Разность	3	19	20	$20\frac{1}{2}$	21	22
или	6	38	40	41	42	44
	6	38	6	38		
	36	1444	240	1558		
	4	9	1444			
	9	1435	1684			
Сократив на 41:		35		38		

Здесь 240 дает пояс, 1444 — вписанный в усеченный конус цилиндр, а потому 1684 — сам усеченный конус. Умножив квадрат последнего числа 2 835 856 на 35 и разделив на 38, получим 2 611 972, откуда корень квадратный будет 1616 с лишним, что и представит объем усеченного конуса, если объем сопряженного цилиндра взять за 1558. Таким образом здесь получаются соотношения (см. табл.).

Отношение диаметров	Цилиндр	Усеченный конус
1: 2	54	60
2: 3	180	197 +
3: 4	378	405 +
4: 5	648	685 —
5: 6	990	1036 —
6: 7	1404	1456 +
7: 8	1890	1846 —
8: 9	2448	2521
9:10	3078	3160 +
. . .	. . .	. . . .
. . .	. . .	. . . .
19:20	13328	13468 +

причем в избытке меньше одной сто второй части.

Разбор соотношений. До сих пор шли теоремы, на которых основывается вычисление искомого отношения между усеченным конусом и его сопряженным цилиндром, а из этих вычислений получается многое, достойное самого тщательного разбора. Во-первых, из 2 и 3-го добавлений и сравнения между собой различных расчетов видно, что в данном сопряжении отношение усеченного конуса к цилиндру не всегда одно и то же, но изменяется при изменении отношения диаметров оснований конуса. И притом во 2-м добавлении оказывается, что при данном объеме цилиндра объем усеченного конуса уменьшается, а в 3-м — увеличивается. Именно в последней строчке предыдущей таблицы объем конуса превосходит цилиндр меньше чем на сотую часть, затем в предыдущих строчках — на одну тридцать восьмую, одну тридцать третью и так далее на все большую, и, наконец, в первой строчке — на целую десятую. Если бы вычисление продолжить, то необходимо случилось бы, что усеченный конус снова сделается меньше цилиндра. Потому спрашивается, какой усеченный конус в данном сопряжении наибольший и еще какой равновелик сопряженному цилиндру?

Во-вторых, из трех добавлений и приведенных вычислений выявилась некая взаимность между сопряжениями, в которых отношение квадрата диаметра цилиндра к квадрату его высоты больше чем 2, и теми, в которых это отношение меньше 2. Именно, в том сопряжении, где это соотношение равно 2, повидимому, всякий усеченный конус меньше цилиндра, хотя бы и на крайне незначительную часть, так что сам цилиндр, как бы первый из всех усеченных конусов, т. е. тот, у которого диаметры равны, наибольший и равный сопряженному цилиндру, т. е. самому себе. В сопряжении же, в котором это отношение больше 2, все усеченные конусы, даже самые близкие к цилиндру, заметно меньше сопряженного цилиндра. В том же сопряжении, где отношение меньше 2, сначала усеченные конусы не оказываются ли больше цилиндра до некоторого места, затем снова убывают, наконец, делаются равными цилиндру, потом меньше его, пока, наконец, совсем не исчезают, в то время как сопряженный цилиндр остается тем же?

В-третьих, так как во всех прочих сопряжениях цилиндры меньше, чем цилиндр того сопряжения, в котором квадрат диаметра основания вдвое больше квадрата высоты, а в некоторых сопряжениях усеченные конусы превосходят свои сопряженные цилиндры, то спрашивается, достигнет ли или даже превзойдет при этом возрастании объем усеченного конуса цилиндр, наибольший для всех сопряжений, и если это так, то каково отношение диаметров, при котором усеченный конус делается равновеликим наибольшему цилиндру? Это-то и надлежит нам разобрать в следующих теоремах, насколько, конечно, это возможно выполнить при моих знаниях; для оценки же и сравнения бочек это в высшей степени необходимо.

ТЕОРЕМА X

Во всяком сопряжении усеченные конусы при возрастании отношения меньшего диаметра *к большему делаются в конце концов по объему меньше всякой данной величины.*

Пусть дано какое-нибудь сопряжение, определяемое отношением GC к GA (фиг. 24). Утверждается, что существует усеченный конус CTA того же сопряжения, т. е. такой, что CT относится к TA, как CG к GA, по объему меньший любой заданной величины. Доказать это легко. Именно, стороны CT и TA, сохраняя между ними то же отношение, которое существует между GC и GA, можно уменьшать до тех пор, пока их сумма не сделается равной диагонали CA, и сумма трех сторон — VC, CT, TA — сделается равной четвертой VA, причем отношение диаметров CT и VA будет иметь наименьшее значение, возможное в данном сопряжении. Но в этом случае весь усеченный конус осядет на свое основание, т. е. на площадь круга VA, а всякая площадь меньше величины любого объема.

ТЕОРЕМА XI

Цилиндр, равновеликий усеченному конусу с той же высотой, имеет основанием треть суммы оснований конуса и их среднего пропорционального.

Именно, прямоугольник, построенный на диаметрах усеченного конуса, равновелик квадрату на среднем пропорциональном между ними (Евклид, VI, 17), а два таких прямоугольника вместе с квадратом на разности составят два квадрата на диаметрах, на которых построены прямоугольники (Евклид, II, 7).

Напр.	3,5	15	дважды	30
	3,5	Разность	2 2	4
	9,25 — 34			34

Следовательно, три прямоугольника вместе с квадратом на разности равновелики трем квадратам — на двух диаметрах оснований и на их среднем пропорциональном, а один прямоугольник с третью квадрата на разности равновелик третьей части суммы этих квадратов. Но названный прямоугольник с третью квадрата относятся к квадратам диаметров оснований усеченного конуса, как объем его к объемам цилиндров с той же высотой, построенных на основаниях конуса согласно теореме XVII первой части. Потому и треть названной суммы относится к квадратам диаметров оснований, как объем усеченного конуса (а также и объем равновеликого цилиндра) к объему цилиндров той же высоты на основаниях усеченного конуса. А так как основания таких цилиндров сами относятся, как объемы, то основание цилиндра, равновеликого усеченному конусу, и будет равно трети суммы двух оснований конуса и их среднего пропорционального [42].

Клавий в V книге Практической геометрии в гл. 3 пользуется этой теоремой в несколько преобразованном виде, о чем я упоминал и выше, но прибегает к более трудным способам доказательства, не связанным, очевидно, с моими, почему я для ясности и предпочел воспользоваться моими приемами.

Пример. Пусть диаметры 19 и 22; умножая каждый на самого себя и друг на друга, получим квадраты 361 и 484 и среднее пропорциональное 418. Сумма всех их будет 1263, третья часть ее 421 и придется на объем усеченного конуса, если на объем меньшего цилиндра положить 361.

ТЕОРЕМА XII

У цилиндра, имеющего общие высоту и диагональ (осевого сечения) с прямым усеченным конусом, диаметр основания равен среднему арифметическому диаметров оснований усеченного конуса.

Пусть на фиг. 24 $CEAS$ изображает цилиндр с диагональю CA, а $CTAV$ — прямой усеченный конус, высота которого TR равняется высоте цилиндра EA или CS. Утверждается, что диаметр цилиндра CE равен среднему арифметическому между CT и AV — диаметрами оснований усеченного конуса. Так как именно усеченный конус предполагается прямым, то (в осевом сечении) боковые стороны CV и TA равны, а потому равны EA и CS и углы S и E — прямые, откуда равны VS и TE — стороны треугольников VSC и TEA. Далее, CE равно SA, а потому насколько CE превосходит CT, т. е. на величину TE, на столько же AV превосходит AS или CE, т. е. на равную величину VS. Значит, CE есть среднее арифметическое между CT и VA, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА XIII.

Избыток усеченного конуса (над цилиндром), имеющим общие с ним диагональ (осевого сечения) и высоту, относится к этому цилиндру, как двенадцатая часть квадрата разности (диаметров оснований конуса) к квадрату диаметра основания цилиндра.

Представим себе цилиндр на основании CT с той же высотой TR, как усеченный конус $CTAV$. Этот цилиндр будет относиться к цилиндру на основании CE с той же высотой, как квадрат $C\Gamma$ к квадрату CE, а эти квадраты будут относиться к их разности, как цилиндры на основаниях CT и CE к кольцу, которым больший цилиндр окружает меньший. Но разность квадратов состоит из двух прямоугольников со сторонами CT и TE и квадрата со стороной TE, которая равна полуразности AV и CT, т. е. половине AB или AR. С другой стороны, усеченный конус $CTAV$ накидывает на цилиндр с основанием CT пояс, отношение которого к этому цилиндру то же, как отношение прямоугольника со сторонами AB и BV (или CT) вместе с третью квадрата на AB к квадрату на CT. Но прямоугольник со сторонами AB и CT равновелик двум прямоугольникам со сторонами CT и TE, потому что AB вдвое больше, чем TE. Таким образом в разности квадратов на CE и CT (к прямоугольнику на CT и AB) прибавляется квадрат AR, т. е. четверть квадрата на AB, а в числителе последнего отношения к тому же (прямоугольнику) прибавляется треть квадрата на AB. Но треть превосходит четверть на одну двенадцатую. Следовательно, в первом случае прибавляется на одну двенадцатую часть квадрата AB больше, чем во втором, и на столько же больше пояс усеченного конуса, чем кольцо цилиндра с основанием CE.

А разность пояса и кольца и представляет избыток усеченного конуса $CTAV$ над цилиндром $CEAS$, и, значит, этот избыток имеет к цилиндру названное отношение [43].

Пример. Пусть диаметры усеченного конуса CT 19 и AV 22. По ранее сказанному цилиндру $CTRS$, вписанному в усеченный конус, будет соответствовать 361 — квадрат от 19. От усеченного конуса $CTAV$ прибавляется пояс TRA, CSV (60) р зность AB (3) умножается на CT (19) и на свою треть (т. е. всего на 20), и для объема усеченного конуса $CTAV$ получается 421. Среднее же арифметическое между 19 и 22 будет $20^1/_2$ и его квадрат $420^1/_4$ придется на объем цилиндра $CEAS$. Или, иначе, произведение половины разности AB (3), т. е. TE ($1^1/_2$) на меньший диаметр TC (19) дает 57, квадрат половины разности TE дает $2^1/_4$, а сумма $59^1/_4$ приходится на кольцо, образуемое цилиндром TE около цилиндра TC, прибавив которое к последнему и найдем опять $420^1/_4$. Следовательно, на избыток усеченного конуса $CTAV$ над цилиндром $CEAS$ приходится $^3/_4$, что и составляет двенадцатую часть от 9 — квадрата всей разности AB, равной 3.

Добавление и аналогия. С увеличением разности диаметров усеченного конуса при постоянных высоте и равновысотном цилиндре с той же диагональю увеличивается и избыток усеченного конуса. Разность же AB может увеличиваться до тех пор, пока не сделается равной среднему арифметическому между диаметрами, т. е. пока CT не обратится в точку, а VA окажется вдвое больше диаметра CE основания цилиндра, и тогда мы дойдем до границы всех усеченных конусов, т. е. до полного конуса, диагональ которого совпадает с боковой стороной, т. е. его образующей. Отношение такого конуса, одинаковой высоты с цилиндром CE и с диаметром основания, вдвое большим диаметра цилиндра, к этому цилиндру равно $\frac{4}{3}$. Именно, раз диаметр основания конуса вдвое больше диаметра основания цилиндра, то площадь первого круга вчетверо больше площади второго, а потому и объем цилиндра той же высоты на основании конуса вчетверо больше объема данного (по теоремам III и XVII первой части), а по теореме IV объем конуса составляет треть объема цилиндра с теми же основанием и высотой.

Итак, вот граница, которой не достигает ни один усеченный конус: именно ни один не превосходит цилиндра с той же высотой и диаметром основания, равным среднему арифметическому диаметров оснований конуса, на третью часть объема.

ТЕОРЕМА XIV

Цилиндр, равновеликий усеченному конусу и имеющий равную с ним высоту, имеет диагональ большую, чем конус.

Именно, по предыдущему цилиндр, имеющий с усеченным конусом общую или равную диагональ, по объему меньше конуса, если их высоты равны. Следовательно, больший цилиндр, т. е. равновеликий усеченному конусу, будет иметь и большую диагональ.

ТЕОРЕМА XV

Все отношения диаметров усеченного конуса, возможные в сопряжении с заданным отношением (боковой стороны к меньшему диаметру), возможны и в сопряжении с большим отношением.

Именно, во всяком сопряжении CT и TA могут уменьшаться до тех пор, пока в сумме не окажутся равными CA, а AV в свою очередь может увеличиваться до тех пор, пока не сравняется с суммой AC и CV, или AT, TC и CV. Следовательно, в тех сопряжениях, при которых отношение AT к TC больше, отношение CT к AV может изменяться в более широких границах [44].

Итак, всякое значение отношения CT к AV, возможное при относительно малом AT, возможно и при большем AT, но при большем AT возможно большее число значений (этого отношения). Благодаря такому совместному существованию различных сопряжений при одном и том же отношении диаметров имеет место следующее сопоставление.

ТЕОРЕМА XVI

Для всякого цилиндра с высотой, большей, чем высота наибольшего цилиндра при той же диагонали, существует соответственный равновеликий цилиндр, называемый противопоставленным, с высотой, меньшей высоты наибольшего.

Именно, равновеликие цилиндры получаются благодаря тому, что отношения оснований и высот изменяются в противоположных смыслах. Рассмотрим снова фиг. 22, на которой CGA пусть будет наибольший цилиндр с основанием CG и высотой GA. Возьмем другой цилиндр CHA с большей высотой. Утверждается, что можно найти цилиндр с меньшей высотой — CBA, высота которого BA относится к высоте первого HA, как квадрат CH к квадрату CB. Дело в том, что если существуют величины большая и меньшая данной, то существует и равная ей. Но квадрат диаметра CH непрерывно возрастает вместе с линиями CQ, CI, CH, CG, CB, CP, проходя через все значения от нулевого до квадрата диаметра круга CA. Высота же цилиндра в свою очередь, начиная с длины CA, убывает вместе с линиями AQ, AI, AH, AG, AB, AP, проходя через все значения, так что отношение (AH к AB при приближении точки B к A), где высота обращается в точку, возрастает до бесконечности, а отношение квадрата (диаметра) CB (к квадрату CH) при том же перемещении точки B возрастает все медленнее. Следовательно, переходя от точки H, соответствующей цилиндру CHA с высотой, большей высоты цилиндра CGA, через точку G в точку B, мы получим, что отношение AH к AB, которое сначала было меньше отношения квадрата CB к квадрату CH, потому что объем цилиндра CHA по условию меньше объема цилиндра CGA, сделается в конце концов больше его как быстрее растущее, и, значит, найдется такая точка B, в которой два эти отношения — AH к AB и квадрата CB к квадрату CH — сделаются равными [45].

Примеры этого даны в вычислениях, произведенных в теореме V.

ТЕОРЕМА XVII

При всяком сопряжении, в котором квадрат диаметра основания цилиндра меньше чем вдвое превосходит квадрат его высоты, все усеченные конусы, начиная с самых близких к цилиндру, делаются постепенно по объему больше сопряженного цилиндра, несмотря на убывание их высоты, а затем снова уменьшаются, оставаясь все же больше сопряженного цилиндра, до тех пор, пока их высота остается больше высоты цилиндра, противопоставленного сопряженному.

Представим себе на фиг. 22 сопряжение, в котором квадрат диаметра HC меньше чем вдвое превосходит квадрат HA, и пусть соответствующий этому сопряжению цилиндр есть CHA, а противопоставленный ему, т. е. с равным объемом, но соответствующий другому сопряжению, пусть будет CBA с основанием CB и высотой BA. Утверждается, что все усеченные конусы, сопряженные цилиндру CHA, высота которых заключается между HA и BA, будут по объему больше цилиндра CHA или CBA. Именно, между равновеликими противопоставленными цилиндрами CHA и CBA находится наибольший цилиндр CGA, в котором квадрат CG вдвое больше квадрата GA. Следовательно, все цилиндры CGA, заключенные между CHA и CBA, по теореме V этой части, больше крайних, соответствующих точкам H и B, и высоты этих цилиндров заключены между HA и BA, так же как и высоты рассматриваемых усеченных конусов. По теореме же XIII усеченные конусы больше цилиндров с той же высотой и той же диагональю CA, а потому и подавно больше меньших крайних, соответствующих точкам H и B.

ТЕОРЕМА XVIII

При сопряжении, в котором квадрат диаметра основания цилиндра меньше чем вдвое превосходит квадрат его высоты, усеченный конус, равновеликий сопряженному цилиндру, имеет высоту, меньшую высоты цилиндра, противопоставленного сопряженному, ему равновеликого, но соответствующего другому сопряжению.

Именно по теореме XIII усеченный конус с той же высотой, как противопоставленный цилиндр, равновеликий сопряженному, больше этого цилиндра. Но он больше и сопряженного с ним цилиндра. Следовательно, усеченный конус, равновеликий своему сопряженному цилиндру, имеет не одинаковую с ним высоту, но большую или меньшую. Но по предыдущей теореме XVII бо̀льшую высоту он иметь не может. Значит, имеет высоту меньшую. При дальнейшем же уменьшении высоты по теореме X усеченные конусы становятся меньше сопряженного цилиндра и, наконец, по объему исчезают.

Добавление. Предполагая, что бочки представляют собой просто удвоенные усеченные конусы, заключаем, что продолговатые умеренно пузатые будут вместительнее цилиндри еских того же поперечного размера, и никогда не делают бочек столь чудовищно пузатых, чтобы они оказались снова менее вместительны, чем цилиндрические того же продольного размера.

ТЕОРЕМА XIX

При всех сопряжениях цилиндра с усеченными конусами, у которых отношение диаметра меньшего основания к боковой стороне меньше, чем $\sqrt{2}$, существуют два значения отношения диаметров (оснований) конуса, при которых усеченный конус оказывается равновеликим цилиндру, наибольшему при любом сопряжении.

Пусть на фиг. 24 для этой теоремы отношение диаметра основания цилиндра CG к его высоте GA меньше, чем $\sqrt{2}$. Утверждается, что при этом сопряжении встречаются два значения отношения диаметров CT и AV, на которых можно построить усеченный конус, равновеликий наибольшему цилиндру, у которого отношение диаметра основания к высоте равно $\sqrt{2}$. Именно, если отношение GC к GA меньше $\sqrt{2}$, то отношение GA к AC будет больше $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а потому можно найти отрезок AT, меньший GA, и по данному отношению AG к GC — пропорциональный ему TC так, чтобы перпендикуляр TR относился к AC, как 1 к $\sqrt{3}$. Тогда соответствующий усеченный конус $CTAV$ будет иметь ту же высоту, как наибольший цилиндр, у которого отношение диаметра основания к высоте равно $\sqrt{2}$.

Следовательно, по теореме XIII настоящей части такой усеченный конус будет больше этого наибольшего цилиндра. По теореме же XIV равновеликий этому конусу цилиндр при равной высоте имеет диагональ большую, чем конус. Потому цилиндр с меньшей диагональю, именно с той, которую имеет усеченный конус, должен иметь высоту большую, чем высота конуса, чтобы возместить потерю от укорачивания диагонали приращением объема от удлинения высоты. Значит, искомый усеченный конус, равновеликий наибольшему цилиндру, должен быть меньше построенного на той же диагонали и с высотой, равной высоте наибольшего цилиндра. А это может осуществиться двумя способами.

Именно, так как при любом сопряжении цилиндр является началом ряда усеченных конусов, а в рассматриваемых здесь сопряжениях цилиндр имеет высоту большую, чем высота наибольшего цилиндра, то и усеченные конусы, близкие к своему сопряженному цилиндру, будут меньше наибольшего цилиндра и иметь высоту большую, чем он. Затем при увеличении разности AB между диаметрами AV и CT конусы будут увеличиваться и сделаются по объему больше наибольшего цилиндра, как уже доказано. При таком увеличении разности AB, пока TR остается меньше высоты GA сопряженного цилиндра, но больше высоты наибольшего цилиндра, случится однажды, что усеченный конус окажется равновеликим наибольшему цилиндру. Но при данном сопряжении объемы усеченны конусов при возрастании AB не возрастают бесконечно, но согласно теоремам X и XVIII снова убывают, и при этом убывании окажется вторично, что усеченный конус сделается равновеликим наибольшему цилиндру. Именно, так как усеченный конус с той же высотой, как наибольший цилиндр (когда TR относится к AC, как 1 к $\sqrt{3}$), больше этого цилиндра, то при дальнейшем уменьшении высоты он снова и сделается равновеликим цилиндру. Значит, находится значение, до которого надо уменьшить еще раз TA. Но с уменьшением TA и пропорционально ей TC уменьшается и квадрат TA, а так как квадрат CA остается неизменным, то оставшийся прямоугольник на TC и AV увеличивается, а значит, вследствие уменьшения ширины TC увеличивается, и по двум причинам, длина AV. На этом основании и находится определенное отношение TC к AV, при котором получается второй раз усеченный конус, равновеликий наибольшему цилиндру, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА XX

При различных сопряжениях усеченные конусы с одним и тем же отношением диаметров оснований будут по объему тем больше, чем ближе по высоте к наибольшему цилиндру с той же диагональю, а чем выше его, тем меньше.

Это довольно неожиданно. Кто бы не сказал, что усеченный конус с высотой IA (фиг. 24) больше усеченного конуса с высотой GA, если у обоих одна и та же диагональ и одно и то же отношение диаметров большего и меньшего оснований? На самом же деле справедливо обратное. Пусть же CG будет диаметр основания наибольшего цилиндра и GA его высота, так что по теореме V отношение CG к GA равно $\sqrt{2}$, и возьмем усеченный конус, диаметр меньшего основания которого направлен по линии CG, а диаметр большего — по продолженной линии AX, отношение этих диаметров пусть имеет любое значение, а среднее арифметическое их по теореме XII будет CG. Так как отношение диаметров оснований для различных усеченных конусов предполагается одним и тем же, то и отношение их разности к их среднему арифметическому тоже для всех будет одинаково. А так как по теореме XIII избыток любого такого усеченного конуса над цилиндром с той же высотой относится к объему цилиндра, как двенадцатая часть квадрата на разности диаметров оснований конуса к квадрату на их среднем арифметическом, то больший избыток будет у того конуса, где больший цилиндр. Но цилиндр CGA — наибольший из всех с данной диагональю. Следовательно, и избыток соответствующего усеченного конуса, т. е. названная двенадцатая часть, будет больше избытка всех остальных усеченных конусов с тем же отношением диаметров оснований, а потому, хотя бы высота усеченного конуса была больше, чем GA, он все же будет меньше усеченного конуса с высотой GA, потому что ему соответствует меньший цилиндр.

Для примера возьмем крайнее значение, именно бесконечное, отношения диаметров усеченного конуса, т. е. вместо усеченного возьмем полный конус как предел всех усеченных. Пусть высота этого конуса IA, и пусть ее квадрат равен половине квадрата AC; пусть диаметр основания цилиндра CIA с той же высотой есть линия CI, равная высоте IA. Так как CI равно среднему арифметическому между диаметрами усеченного конуса, из которых один равен 0, то другой, т. е. диаметр основания конуса, будет вдвое больше IC. Значит, для вычисления объема этого конуса придется умножить треть AI на квадрат удвоенной IC, который равен учетверенному квадрату IC, т. е. удвоенному квадрату CA.

Другой же конус (опять взятый вместо усеченного при том же отношении диаметров оснований), имеющий высотой GA, квадрат которой составляет треть квадрата CA, будет иметь диаметр основания вдвое больший GC, а квадрат этого диаметра будет вчетверо больше квадрата GC. Но квадрат GC составляет две трети от квадрата AC, а вчетверо больший даст восемь третей квадрата AC, что превосходит удвоенный квадрат AC, соответствующий первому конусу, на две трети квадрата AC, в то время как квадрат высоты первого конуса, равный половине квадрата CA, превосходит квадрат высоты второго, равный трети квадрата CA, только на одну шестую последнего квадрата. Но этим еще не исчерпывается вся потеря в объеме, потому что приходится умножать на площади основания не квадраты высот, а сами высоты, и даже не их самих, а только их трети. Значит, выигрыш в объеме конуса благодаря удлинению основания CG больше проигрыша из-за укорачивания высоты GA.

ТЕОРЕМА XXI

Из всех усеченных конусов при данном сопряжении наибольшим будет тот, который имеет ту же высоту, как и наибольший цилиндр, т. е. относящуюся к диагонали, как 1 к $\sqrt{3}$. Все же прочие, как более высокие, так и более низкие, по объему, сравнительно с этим значением, снова убывают.

Строгое доказательство или опровержение, если нужно, пусть дадут бельгийские Аполлонии — Снеллий или Адриан Римлянин. Здесь же эта (теорема) излишня, поскольку дело касается цели книжки, и приведена только по ее сродству с предыдущей, каковое сходство и дало мне основание считать ее верной, хотя в предыдущей теореме усеченные конусы не принадлежали к одному и тому же сопряжению в том смысле, как мы это название употребляли до сих пор, но все же они были построены на одной и той же диагонали и имели одно и то же отношение между диаметрами оснований, подобно тому как у сопряженных одно и то же отношение меньшего диаметра основания к боковой стороне.

Еще надо сказать, что по другому свойству наибольшего цилиндра, доказанному в предыдущих теоремах, существует некоторая высота сопряженного усеченного конуса, бо̀льшая высоты наибольшего цилиндра и некоторая меньшая ее, так что при обеих этих высотах усеченные конусы равновелики наибольшему цилиндру, а тот усеченный конус, высота которого равна высоте наибольшего цилиндра, по объему этот цилиндр превосходит, и в обоих направлениях от этой высоты, как к высоте сопряженного цилиндра, так и в сторону самых низких усеченных конусов, объемы их уменьшаются. Поэтому не видно никакой причины, почему граница увеличения объема пришлась бы при какой-нибудь другой высоте, чем при этой самой.

Прибавим еще и указания вычислений. Возьмем сопряжение, в котором диаметр цилиндра CI равен высоте IA, и пусть в этом сопряжении усеченный конус имеет ту же высоту, как наибольший цилиндр CGA, т. е. тот, у которого отношение диаметра основания CG к высоте GA равно $\sqrt{2}$. Следовательно, диаметр меньшего основания усеченного конуса пойдет по (линии) CG и будет равен боковой стороне, потому что предполагается, что их отношение такое же, как CI к IA. Пусть этот меньший диаметр будет CF и пусть он пересекает в точке F перпендикуляр IN, проходящий через центр N, а боковая сторона пусть будет FA. Как CL относится к CG, так CN — к CF. Но CL составляет две трети от CA, и квадрат CL — четыре девятых от квадрата CA, а квадрат CN составляет четверть квадрата CA, и, наконец, квадрат CG равен двум третям от квадрата CA. Следовательно, из предыдущей пропорции между CL, CG, CN и CF получим, что квадрат CF составляет $\frac{3}{8}$ от квадрата CA, и тому же равен квадрат боковой стороны FA. Отнимая этот квадрат AF от квадрата AC, получим для прямоугольника, построенного на меньшем диаметре основания CF и противоположном большем диаметре, служащем продолжением AX, $\frac{5}{8}$ от квадрата CA. Так как этот прямоугольник на диаметрах и квадрат на CF имеют общее основание CF, то их высоты относятся, как площади, т. е. как 5 к 3. Следовательно, тому же равно при взятом сопряжении отношение диаметров усеченного конуса той же высоты, как наибольший цилиндр. Следовательно, по теореме XIII этой части объем наибольшего цилиндра CGA относится к избытку над ним равновысотного усеченного конуса CFA, как квадрат среднего арифметического диаметров — 4, т. е. 16, к двенадцатой части квадрата разности диаметров — 2, т. е. как 4 к 12. Значит, усеченный конус превосходит наибольший цилиндр на $^1/_{48}$ часть объема последнего. Отыщем, далее, отношение наибольшего цилиндра CGA к сопряженному цилиндру CIA. Квадрат диаметра основания CI равен половине квадрата CA, а квадрат CG двум третям квадрата CA; потому отношение оснований CI и CG равно $\frac{3}{4}$. В свою очередь квадрат высоты IA равен половине, а квадрат высоты GA — одной трети квадрата CA; следовательно, отношение квадратов IA и GA равно $\frac{3}{2}$ или $\frac{9}{6}$, а отношение самих линий IA и GA равняется корню квадратному отсюда, т. е. равно отношению

30 000 к 24 495, или отношению 24 495 к 20 000. Отношение же объемов равно произведению отношений оснований и высот. Потому, перемножив найденные отношения, найдем, что цилиндр *CIA* относится к цилиндру *CGA*, как 9000 к 9798. Выше, в теореме III, мы видели, что отношение объемов столбов при таком сопряжении было то же, как 2828 к 3080. Если примем объем цилиндра *CGA* за 48, то на объем цилиндра *CIA* придется 44. Следовательно, цилиндр *CIA* относится к сопряженному усеченному конусу *CFA*, как 44 к 49, и усеченный конус превосходит цилиндр немного больше чем на девятую часть. Но это и согласно с настоящей теорией и добавлением 3 к теореме IX настоящей части. Именно там при отношении диаметров, как 2 к 3, т. е. 20 к 30, усеченный конус, возрастая, превосходил цилиндр несколько больше чем на одиннадцатую часть, и таким образом его объем увеличивался до тех пор, пока отношение диаметров не сделалось равным 3 к 5, т. е. 18 к 30, и тогда избыток достиг с лишком девятой части, как это здесь и показано; при дальнейшем же изменении отношения, когда оно сделалось равным 1 к 2, т. е. 15 к 30, усеченный конус снова начал убывать, и избыток достиг только девятой части. А если при одном сопряжении оказывается, что усеченный конус той же высоты, как наибольший цилиндр, всего более превосходит сопряженный ему цилиндр, то есть основание думать, что так будет и при всяком другом.

ТЕОРЕМА XXII

При сопряжениях, в которых квадрат диаметра основания цилиндра равен или больше удвоенного квадрата высоты, все усеченные конусы меньше наибольшего, т. е. сопряженного цилиндра, и это тем более, чем сильнее отступаем от отношения, равного двум.

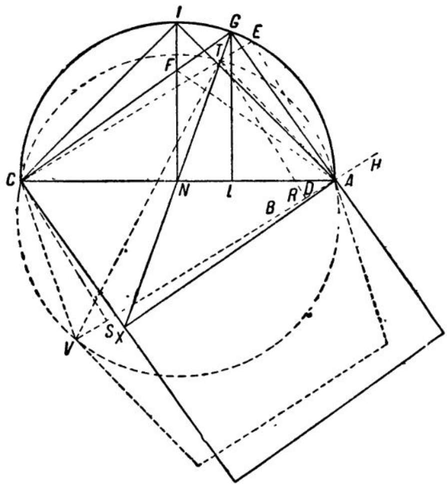
Пусть на фиг. 22 CGA изображает цилиндр того сопряжения, при котором квадрат CG равен удвоенному квадрату GA, а CHA — цилиндр сопряжения с меньшим отношением и с противопоставленным цилиндром CBA. Следовательно, все цилиндры между H и B, а потому и все усеченные конусы с теми же высотами больше цилиндров, оканчивающихся в H или B, а, начиная с точки B по направлению к A, усеченные конусы меньше, чем цилиндр H или B по теоремам XV и XVI. Чем точка H ближе к G, тем ближе к G и точка B, и дуга HB, в которую (упираются) большие усеченные конусы, становится все меньше. Наконец, цилиндр CGA является сам себе противопоставленным, так как он как бы опирается и на точку H и на точку B. И подобно тому, как все цилиндры после B меньше цилиндра, упирающегося в H, а все усеченные конусы делаются меньше его несколько после точки B, то и все цилиндры после G и усеченные конусы с теми же высотами окажутся меньше сопряженного им цилиндра CGA.

усеченные конусы начинают делаться меньше не в самой точке B, а несколько после нее по той причине, что в точке B существует усеченный конус с той же высотой, как цилиндр, принадлежащий к сопряжению CHA. Но в самой точке G нет усеченного конуса равной высоты с цилиндром сопряжения CGA, и уже первые соседние с цилиндром CGA усеченные конусы имеют высоту меньшую, чем GA, и по высоте теряют больше, чем выигрывают от приращения (площадей основания).

Эти же сопоставления по аналогии делаются ясными еще и следующим образом. Все усеченные конусы этого сопряжения, начиная с цилиндра, являющегося как бы главой сопряжения, имеют высоту меньшую, чем он. Так как сам цилиндр имеет наибольшую величину, то и все сопряженные ему усеченные конусы по теореме XXI будут убывать в том же порядке, в каком они удаляются по высоте от этого цилиндра, а потому самым большим из них и будет цилиндр, так как один он среди них имеет высоту, равную (высоте наибольшего цилиндра), т. е. самой себе.

Эти неопровержимые соображения основаны на аналогии; но так как геометры мало привычны к подобным рассуждениям, то я попытаюсь дать хотя и более сложное, но чисто геометрическое доказательство. Возьмем снова фиг. 24, на которой $CTAV$ изображает усеченный конус, сопряженный с цилиндром CGA. Продолжим CT до пересечения с кругом в точке E и соединим E и A. По теореме V цилиндр

CEA будет меньше цилиндра CGA. Усеченный конус $CTAV$ имеет ту же высоту, (как цилиндр CEA), потому что по построению EA и TR равны. По теореме XIII избыток усеченного конуса над цилиндром CEA выражается через треть квадрата AR. Надо



Фиг. 24.

доказать, что отношение GA к EA больше, чем отношение суммы квадрата CE с третью квадрата AR или ET к квадрату CG, так что цилиндр CEA теряет вследствие уменьшения EA больше, чем выигрывает от приращения на треть квадрата ET.

Во-первых, квадрат RT или AE меньше квадрата TA на целый квадрат AR, а квадрат CE меньше суммы квадрата же CE с третью квадрата AR на эту самую треть квадрата AR. Следовательно, разность в первом случае втрое больше, чем во втором, и, кроме того, уменьшаемое и вычитаемое во втором случае более, чем вдвое превосходит соответствующие члены в первом.

Именно, так как квадрат CG вдвое больше квадрата AG, то и квадрат CE больше квадрата CG, а квадрат AE меньше квадрата AG. Но если между двумя числами (например 25 и 26) имеется некоторая разность (во взятом примере 1), а между двумя другими, из которых каждое или меньше половины взятых чисел, или по крайней мере большее из последних составляет половину большего из первых, имеется разность втрое большая (например 10 и 13), то отношение меньших чисел больше, чем шестая степень отношения больших.

Так, отношение чисел 10 и 13 или 20 и 26 больше шестой степени отношения 25 и 26, и первое отношение еще более увеличилось бы, если бы второе уменьшаемое (13) было меньше половины первого уменьшаемого (26), так как при равной разности отношение увеличивается с уменьшением его членов. Таким образом отношение квадрата AT к квадрату TR или EA больше шестой степени отношения суммы квадрата EC с третью квадрата AR к квадрату EC. Потому отношение отрезков TA и TR или EA больше третьей степени отношения квадрата CE, увеличенного на треть квадрата AR, к квадрату CE (46).

Затем мы можем доказать, что отношение CE и CG меньше отношения отрезков GA и AT. Квадрат

CG равен прямоугольнику на BV и VD, если BA в точке D разделено так, что AD составляет половину BD, соответственно тому, что квадрат AG составляет половину квадрата CG, согласно теореме VII этой части. Но по теореме XII этой части CE есть среднее арифметическое между VB и VA. Потому квадрат CE равновелик прямоугольнику на BV и VA, увеличенному на квадрат на AR, половине AB. Следовательно, если на BV или CT построить прямоугольник, равновеликий квадрату AR, то к VA прибавится ширина этого прямоугольника, которая пусть равна AH. Тогда квадрат CE равновелик прямоугольнику на BV и VH. Но квадрат CG был равновелик прямоугольнику на BV и VD, следовательно, HV относится к VD, как квадрат EC к квадрату CG. Утверждается, что отношение HV к VD меньше, чем отношение DV к VB.

Отрезок BD вдвое больше DA, и BA вдвое больше AR; потому и AD вдвое больше DR. Если бы AH было равно AD и HD равнялось DB, то и тогда отношение HV к VD было бы меньше отношения к DV и VB. Но AH меньше, чем AD, а потому и меньше DR. Именно, по теореме X этой части квадрат CT или VB больше удвоенного квадрата BA, так как если бы этот квадрат CT равнялся удвоенному квадрату BA, то и высота и объем усеченного конуса были бы равны нулю. Потому квадрат VB больше увосьмеренного квадрата AR. Так как, далее, величины VB, AR, AH образуют непрерывную пропорцию, то отрезок VB будет больше увосьмеренного отрезка AH, и AR будет средним пропорциональным между AH, которое примем за единицу, и BV, которое будет 8. Тогда и AR, как корень из 8, будет выражено в частях AH. Но этот корень из 8 заключен между 2 и 3, если высота и объем усеченного конуса равны нулю, а даже при очень малой высоте из 8 быстро получается 9, корень из чего есть 3, а при больших высотах (AR) увеличится еще значительнее. Потому отрезок AH даже при своем наибольшем значении заключен между половиной и третью AR, а при увеличении высоты сопряженного конуса он становится меньше некоторой части AR, так что в конце концов при исчезновении AB, т. е. когда усеченный конус обращается в цилиндр, AH становится бесконечно малой частью от AR.

Если бы AH совсем откинуть, то отношение AV к VD было бы меньше, чем корень квадратный из отношения DV к VB, потому что AD есть половина от DB. Так как DV относится к VB, как квадрат GC к квадрату CT или как квадрат GA к квадрату AT, то при откладывании AH отношение AV к VD, а вместе с тем и отношение квадрата EC к квадрату CG оказывается меньше отношения отрезков GA к AT (47).

Так как для различных усеченных конусов между AR и AH получаются всевозможные отношения, то где-нибудь, именно при усеченных конусах, весьма близких по высоте к цилиндру, случится, что AH прибавляет к VA не так много, чтобы отношение HV к VA оказалось равным отношению GA к AT.

Тогда высказанное предложение заведомо справедливо, потому что оба множителя, на которые разбивается отношение GA к AE, т. е. отношения AT к AE или TR и GA к AT, по отдельности больше множителей, на которые разбито отношение суммы квадрата CE с третью квадрата AR к квадрату GC.

Таким образом в усеченных конусах, близких к сопряженному цилиндру, высота убывает быстрее, чем увеличиваются основания цилиндра, равновеликого с усеченным конусом. Но это и нужно было, главным образом, доказать, потому что если усеченные конусы уже с самого начала оказываются меньше цилиндра, то далее их объемы постоянно убывают, пока не дойдут до нуля.

Для следующих случаев доказательство можно представить в еще более ясной форме. При более низких усеченных конусах, во-первых, отношение HV к VD становится равным отношению GA к AT, а потому в рассматриваемых отношениях вторые множители делаются равными, но первые все же остаются неравными, и отношение избытка AT над TR к TR больше чем втрое превосходит отношение трети квадрата AR к квадрату CE, и притом без возмещения. Потому и все отношение высот опять-таки больше отношения оснований.

Во-вторых, отношение HV к VB превосходит, наконец, отношение GA к AT, что случается при усеченных конусах с еще меньшей высотой, когда CE оказывается велико, а TR (напротив) мало. Тогда квадрат AR все более и более приближается к квадрату TR и, наконец, превосходит его, причем отношение TA к TR достигает большой величины. Это отношение, бесспорно, с самого начала постоянно больше куба отношения суммы квадрата CE с третью квадрата AR к одному квадрату CE, так как треть квадрата AR увеличивает относительно немного квадрат CE, ибо он сам возрастает. Так как первый множитель отношения высот, т. е. отношение AT к TR, быстро становится больше корня кубичного из отношения GA к AT, то всегда окажется, что этот множитель в отношении высот при своем возрастании не только возместит второй множитель, представляющий отношение площадей оснований, но даже и превзойдет его. Именно, в первом случае отношение меньших и убывающих величин увеличивает весь возрастающий квадрат AR, а во втором — отношение больших и возрастающих величин увеличивает только треть той же возрастающей величины. Таким образом корень кубичный из первого отношения дает больше, чем все второе.

Предыдущее доказательсто относится к сопряжению, в котором квадрат CG вдвое больше квадрата GA. Если же квадрат CG превосходит квадрат GA больше чем вдвое, то доказанное остается в силе тем более. Именно, что касается аналогий, то равновысокие с такими усеченными конусами цилиндры CBA противопоставлены равновеликим, но более высоким цилиндрам CHA, а в теореме XVIII было доказано, что, начиная с них, усеченные конусы становятся все меньше и меньше даже и тогда, когда они сопряжены высокому цилиндру CHA, и тем более, когда они принадлежат тому же сопряжению, как эти противопоставленные цилиндры CBA, и когда они здесь с самого начала ниже сопряженного цилиндра CBA.

Что касается остальной части доказательства, то вследствие того, что на фиг. 24 сами цилиндры, главы сопряжений, предполагаются ниже цилиндра CGA, отрезки CG будут возрастать, но с убывающими приращениями, а отрезки GA — убывать, но с возрастающими уменьшениями. Если GA и соответственно ей и TA убывает, то разность AB диаметров, хотя бы последние и увеличивались, будет согласно теореме X этой части возрастать, но с убывающими приращениями. Потому уменьшение объема сопряженного цилиндра при убывании TR будет значительно как вследствие большего основания CG, так и благодаря тем большей разности между TR и AG; присоединяемое же к объему сопряженного цилиндра увеличение, зависящее от трети квадрата AR, и увеличение квадрата CE будут малы и не имеют большого значения. Кто хочет, пусть приложит и к этому случаю все основные приемы предыдущего доказательства, и тогда справедливость рассматриваемого предложения станет не менее ясной, чем она наметилась выше в теореме IX настоящей части при помощи вычисления.

Добавление. Если предположить, что винные бочки состоят из двух правильных усеченных конусов, то в тех из них, которые коротки, пузо во всяком случае будет уменьшать емкость; в австрийских бочках это действительно большей частью и случается, все равно — имеют ли они пузо или более приближаются к цилиндрической форме, так как никогда не бывает, чтобы пузо оказалось столь велико, что глубина в отверстии достигает удвоенного диаметра днища; в этом случае согласно добавлению к теореме IX потерялось бы больше четверти объема. Глубина в отверстии никогда не достигает и до полутора диаметра днища, в каковом случае благодаря пузу потерялось бы около $\frac{1}{300}$ объема. Если же отношение достигает необычайно большого значения — $\frac{4}{3}$, то потеря уменьшается до семидесятой части.

Это и есть второе и еще более замечательное свойство австрийской бочки. Именно, подобно тому как по теореме V небольшое изменение формы, допущенное мастером по ошибке, не может оказать вреда, потому что бочар по правилам и по привычке старался достигнуть формы с наибольшим объемом и при небольших отклонениях получает фигуры, стоящие близко к наиболее емкой, при которых по круговому закону (48) ошибки вначале незаметны, так и здесь в этих бочках широкое или узкое пузо почти ничего не меняет в объеме, — обстоятельство, в высшей степени ценное для бондаря, так как пузу дать по желанию ту или другую ширину не так легко, как выбрать отношение длины клепок к диаметру днища, а потому и нечего заботиться о том, какой ширины пузо выйдет, а если бы законом была предписана определенная ширина, то (мастер) оказался бы в затруднении. Вследствие этого такой обременительный закон и не нужен, и этим мы обязаны особенно удобному отношению длины клепок к диаметру днища, употребляемому в Австрии.

ТЕОРЕМА XXIII

Задача, предлагаемая геометрам. *Дано отношение диаметров оснований усеченного конуса; найти сопряжение, в котором такой усеченный конус равновелик цилиндру наибольшего сопряжения.*

При сопряжении, к которому принадлежит наибольший цилиндр, всякий усеченный конус, а стало быть, и тот, для которого дано отношение диаметров, согласно теореме XXI настоящей части, меньше наибольшего цилиндра. Потому искомое сопряжение располагается по ту сторону от точки G, соответствующей сопряжению наибольшего цилиндра, по какую находится сопряжение усеченного конуса с заданным отношением диаметров и высотой, равной высоте наибольшего цилиндра. Пусть, например (на фиг. 24), CFA изображает усеченный конус с той же высотой, как наибольший цилиндр CGA, а CIA — сопряженный этому конусу цилиндр; в сопряжении CGA находится усеченный конус CTA, и CF относится к противоположному ему диаметру, идущему по AX, как CT к AV; тогда усеченный конус CTA, принадлежащий сопряжению G, будет меньше наибольшего цилиндра CGA. Потому искомое сопряжение располагается за точкой G в направлении к точке I, и высота искомого усеченного конуса будет больше, чем GA. Диаметр же основания цилиндра той же высоты, равный среднему арифметическому из диаметров обоих оснований искомого усеченного конуса, будет меньше, чем CG. Утверждается, что искомое сопряжение располагается даже за точкой I, и высота искомого усеченного конуса будет больше AI, что является удивительным. Именно, раз дано отношение диаметров усеченного конуса, то дано и их отношение к их среднему арифметическому. Как CF относится к CG, так же относится и меньший диаметр искомого усеченного конуса к диаметру основания цилиндра той же высоты. Но этот последний диаметр меньше, чем CG, и более удален от A, а потому и тот диаметр меньше, чем CF, и более удален от A, а, значит, отношение CF к FA или CI к IA меньше отношения диаметра искомого усеченного конуса к его боковой стороне, т. е. диаметра сопряженного цилиндра к его высоте. Потому высота в искомом сопряжении больше, чем AI, а диаметр меньше, чем IC. Мое доказательство доходит только до сказанного, остальное я предоставляю выполнить Адриану Римлянину или вообще тому, кто занимается искусством Гебера [49].

Так как всякий усеченный конус больше цилиндра той же высоты, и именно в отношении одной двенадцатой квадрата разности диаметров оснований к квадрату диаметра основания цилиндра той же высоты, то квадрат CA надо разделить так, чтобы одна часть, увеличенная на отношение, даваемое разностью диаметров, и умноженная на сторону второй части, равнялась произведению квадрата CG на отрезок GA.

Если обратиться за советом к Геберу, то в его коссе получим указание, что дело сводится к нахождению такой высоты, чтобы, построив за ней три средние пропорциональные в том же отношении, в каком она сама находится к CA, получить равенство некоторого кратного первой пропорциональной сумме данного числа и некоторого кратного третьей. Косситы ищут геометрическое толкование подобного уравнения, но, по моему мнению, никогда его не найдут.

ТЕОРЕМА XXIV

Задача, предлагаемая геометрам. *Дано сопряжение, при котором квадрат диаметра основания цилиндра меньше удвоенного квадрата высоты; требуется найти те два отношения диаметров оснований усеченного конуса того же сопряжения, при которых он равновелик наибольшему цилиндру.*

Пусть дано сопряжение CIA, при котором квадрат CI меньше удвоенного квадрата IA. Требуется найти диаметры оснований тех сопряженных усеченных конусов, которые равновелики наибольшему цилиндру CGA.

По теореме XXI этой части высота одного из усеченных конусов должна быть больше, а другого меньше высоты GA наибольшего цилиндра. Следовательно, у первого усеченного конуса отношение диаметров оснований будет меньше отношения диаметров оснований (усеченного конуса) той же высоты, как наибольший цилиндр, а у второго — больше; у каждого из обоих усеченных конусов будут свои равновысокие цилиндры, которые сами не будут противопоставленными, но будут расположены весьма близко к ним, так как, если бы они были противопоставленными, то по теореме XVI этой части они были бы равновелики. Так как принадлежащие этим цилиндрам усеченные конусы имеют неравные отношения диаметров оснований, и к тому же они в одном и том же сопряжении имеют разные высоты, то по теореме XIII этой части в избытках усеченных конусов появились бы неравные двенадцатые части квадратов, а потому и сами усеченные конусы были бы неравновелики. Мы же ищем равновеликие (усеченные конусы), из которых каждый должен быть равновелик цилиндру CGA.

Мое доказательство доходит только до сих пор; остальное пусть восполняют косситы. Если искомое CF известно, то по данному сопряжению известны и FA, и его квадрат, и прямоугольник, построенный на диаметрах оснований. Разделив (площадь) этого прямоугольника на меньший диаметр CF, получим диаметр большего основания, а отсюда узнаем разность диаметров и четверть и двенадцатую ее квадрата. Вычтя эту четверть из квадрата AF, получим квадрат высоты, который при сравнении с квадратом GA даст первый множитель в отношении объемов.

Если известны диаметры обоих оснований, то по теореме XII этой части определяется диаметр основания цилиндра, имеющего ту же высоту, как усеченный конус CFA. Квадрат этого диаметра в сумме с ранее найденной двенадцатой частью при сравнении с квадратом CG даст второй множитель в отношении объемов. Эти множители должны иметь обратные величины, чтобы при перемножении для отношения получилось значение, равное единице.

Подымите, косситы, этот крест, поставленный для вашего остроумия, и следуйте за мной; если на меня не кинула враждебного взгляда Минерва, то вы найдете, что первая, вторая и пятая из нескольких непрерывно пропорциональных величин равняется сумме некоторого числа и умноженных на известные числа третьей и четвертой пропорциональных. Потому такое уравнение не геометрическое, но, как называет Раймер Урс, стохастическое, или, как говорит Юст Бюрги, механическое, а сама задача не принадлежит к тем, которые Папп по примеру древних геометров рассматривал как плоские, т. е. чисто геометрические, но к пространственным и условно геометрическим, так как даются две средние геометрические пропорциональные, что не допускает геометрического толкования. Кроме того, это уравнение имеет не единственное решение, так как доказано, что существуют два усеченных конуса такого рода.

ТЕОРЕМА XXV

Если усеченные конусы различных сопряжений имеют одно и то же отношение диаметров оснований и одну и ту же диагональ, то отношение их объемов равняется произведению трех *отношений, именно, отношения соответствующих цилиндров сопряжений и отношений каждого цилиндра и сопряженного с ним усеченного конуса, причем первый цилиндр является последующим членом отношения, а второй — предыдущим.*

Пусть (фиг. 24) на одной и той же диагонали CA построены усеченный конус CFA при сопряжении CIA и усеченный конус CTA при сопряжении CGA. Далее, пусть CF относится к диаметру большего основания, лежащему на продолженном AX, как CT к AV. Утверждается, что отношение объема CFA к объему CTA равно произведению трех отношений: 1) CIA к CGA; 2) CFA к CIA; 3) CGA к CTA.

Доказательство легко сводится к весьма известному предложению, а именно: если четыре величины расположены одна за другой, то отношение первой к четвертой равно произведению отношений соседних величин. Только при расположении наших величин в ряд надо наблюдать некоторую осторожность. Именно, так как нам приходится иметь дело с отношением усеченных конусов, то один из них должен быть поставлен на четвертое место, другой — на первое, а цилиндры — посредине и притом каждый рядом со своим сопряженным конусом. Отношение цилиндров CIA и CGA находится по добавлению к теореме III первой части, а обратное отношение CIA и CFA, т. е. отношение CFA к CIA, и прямое отношение CGA к CTA дается теоремой IX настоящей части.

Добавление 1 и расчет. Расположив в нужном порядке члены, из которых составляются три отношения, перемножим три предыдущие, сначала два между собой, а их произведение на третий, и так же поступим с тремя последующими; тогда из полученных (произведений) и составится искомое отношение.

Пусть *CIA* (принадлежит) сопряжению, в котором равны диаметр основания и высота, а *CGA* — сопряжению, в котором отношение (этих) линий равно $\sqrt{2}$, а их квадратов равно 2. По добавлению к теореме III отношение *CIA* к *CGA* то же, как 2828 к 3080 или 101 к 110. По добавлению же 1-му к теореме IX при отношении диаметров, равном 1 к 2, усеченный конус относится к первому из цилиндров *CIA*, как 60 к 54, т. е. как 10 к 9. По другому же добавлению при том же отношении диаметров, равном 1 к 2, второй цилиндр *CFA* относится к усеченному конусу, как 15 к 11.

Итак:

Усеченный конус	Цилиндры	Усеченный конус
10	$^{9}/_{15}$	11
101		110

Предыдущие члены: 10, 101, 15. Произведение 15 150. Усеченный конус *CFA*.

Последующие члены: 9, 110, 11. Произведение 10 890. Усеченный конус *CTA*.

После сокращения 505 относится к 363, как усеченный конус *CFA* к усеченному конусу *CTA*.

Добавление 2. Для сопряжений, в одном из которых диаметр основания и высота цилиндра равны, а в другом квадрат диаметра вдвое больше квадрата высоты, т. е. диаметр относится к высоте, как $\sqrt{2}$, отношение объемов для различных значений отношения диаметра оснований имеет следующую величину.

Отношение диаметров	Усеченный конус первого сопряжения
1 : 2	превосходит второй конус больше чем на $^1/_3$
2 : 3	„ „ „ на $^1/_{19}$
3 : 4	равновелик второму
4 : 5	меньше второго конуса на $^1/_{42}$
5 : 6	„ „ „ „ $^1/_{26}$
6 : 7	„ „ „ „ $^1/_{23}$
7 : 8	„ „ „ „ $^1/_{[illegible]0}$
8 : 9	„ „ „ „ $^1/_{18}$
9 : 10	„ „ „ „ $^1/_{17}$

И далее недостаток становится все больше, пока, наконец, цилиндр, начало всех конусов, не даст недостатка в одиннадцатую часть.

Добавление 3. Если две бочки, при условии, что они образованы каждая двумя усеченными конусами, имеют одно и то же отношение диаметров оснований, то бочка австрийской формы, в которой диаметр днища относится к половине длины клепок, как 2 к 3, по большей части окажется вместительнее рейнской, у которой обе эти величины равны. Очень редко, и, пожалуй, даже никогда, они окажутся равновеликими, ибо вряд ли когда отношение глубины в пузе к диаметру днища достигает значения $\frac{4}{3}$.

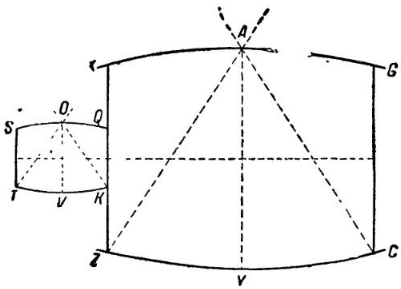
До сих пор речь шла о фигуре австрийской бочки, теперь пойдет

О кубической линейке и ее точности

ТЕОРЕМА XXVI

Отношение емкости бочек, имеющих подобные между собой фигуры, равно кубу отношения расстояний от верхнего отверстия до наинизшей точки любого из днищ.

Пусть даны бочки $SQKT$ и $XGCZ$ различной величины, но одной и той же формы, O и A — их



Фиг. 2

отверстия; QK, ST и GC, XZ — диаметры днищ, T, K и Z, C — их наинизшие точки; OK, OT и AC, AZ — соответственно равные друг другу расстояния. Утверждается, что отношение емкости бочек равно кубу отношения длин OK и AC. Проведем через O и A плоскости OV и AY параллельно днищам, и пусть SV, VQ и XY, YG представляют подобные усеченные конусы. То, что справедливо об отношении половин бочек, будет справедливо и для удвоенных объемов. Потому рассмотрим фигуры $OVKQ$, $AYCG$ —

усеченные конусы с боковыми сторонами OQ, VK и AG, YC, диаметрами меньших оснований QK, GC и бо́льших OV и AY. В то же время эти $OQKV$ и $AGCY$ представляют подобные между собой фигуры осевых сечений этих тел с диагоналями OK и AC. Так как объемы подобных фигур относятся друг к другу, как кубы сходственных сторон, то куб отношения боковой стороны AG к боковой стороне OQ или диаметра GC к диаметру QK будет равен отношению объема GY к объему QV. Но в подобных плоских треугольных фигурах AGC и OQK отношение сходственных сторон GC к QK или AC к OQ равно отношению диагонали AC к сходственной диагонали OK. Потому куб отношения длины AC к длине OK равен отношению объема GY к объему QV, а также и всей бочки GZ ко всей бочке QT.

Добавление 1 и устройство линейки. Отсюда ясно, что если измерительную линейку разделить на равные части так, чтобы первая и самая нижняя из них равнялась длине OK боченка, вмещающего одну амфору, то на конце каждой из равных частей надо поставить число, равное кубу номера этой части, т. е. на конце первой части — 1, на конце второй — 8, третьей — 27, четвертой — 64, пятой — 125 и так далее, остальные же числа, приходящиеся между этими кубами, надо расставить между точками деления так, что вторая часть разделится на 7 новых частиц, не равных, но соответствующих (своими концами кубичным корням из чисел) 2, 3, 4, 5, 6, 7, заключающихся между 1 и 8, которые и ставятся на новых точках деления, и так же поступаем с прочими частями. Тогда линейка, вставленная в бочку так, что нижний конец ее упирается в точку C или Z, числом, которое придется около внутренней поверхности клепки у отверстия A, и покажет, сколько амфор вмещает эта бочка, потому что это число и дает отношение объема измеряемой бочки GZ к боченку QT, вмещающему одну амфору.

Добавление 2. Так же обстоит дело, если в треугольнике AGC вместо стороны AC измерить сумму сторон AG и GC при помощи кожаного ободка с надписанными по прежнему закону числами амфор, укрепив начало этого ободка в точке C и протянув его через точку G до отверстия A. Тогда число амфор узнается по числу, пришедшемуся около точки A. При этом предполагается, что выступающая около G длина и толщина деревянных обручей, перевитых прутьями, а также и толщина клепок и днища, которую захватывают при натягивании ободка, пропорциональны размерам бочек.

ТЕОРЕМА XXVII

Если даже две половины австрийской бочки будут не вполне одинаковы, но одно из днищ будет несколько меньше и уже другого, разница в емкости половин будет очень незначительна, лишь бы при измерении линейкой получилась одинаковая длина.

Именно, в добавлении к теореме V второй части было сказано, что австрийская бочка подходит к самой емкой фигуре, удаляясь от которой в обе стороны, т. е. беря бочки как длиннее, так и короче австрийской, будем получать менее емкие, чем она. Но в том месте, где происходит как бы по круговому закону переход сначала от меньших значений к наи большему, а затем снова к меньшим, на некотором промежутке изменение становится незаметным. А что справедливо для целых бочек, имеющих одну и ту же диагональ, то будет справедливо и для каждого из двух усеченных конусов одной и той же бочки, как, например, AYX и AYG, так что если даже один из кругов — GC — будет меньше другого — XZ — и лишь бы AC равнялось AZ, емкости обеих половин будут различаться совершенно нечувствительно.

ТЕОРЕМА XXVIII

Если же длины линейки для каждого из усеченных конусов бочки окажутся неравными, что обыкновенно и случается, то без ошибки емкость будет указана средним арифметическим между числами, отмеченными той и другой половиной.

Именно, меньшая длина дает надписанным над ней числом удвоенную емкость соответствующей половины бочки, а большая — удвоенную емкость второй половины. Следовательно, сумма этих чисел показывает удвоенную емкость всей бочки, а значит, среднее арифметическое между числами обеих длин, соответствующее среднему пропорциональному между линиями, укажет объем всей бочки.

ТЕОРЕМА XXIX

Кривизна клепок, т. е. выпячивание их между средним отверстием и обоими днищами в австрийской бочке, не изменяет показания *линейки; в удлиненных бочках емкость (при прочих равных условиях) больше показываемой линейкой, в укороченных — меньше.*

Именно, хотя по теореме XXIX первой части бочка в форме лимона, сливы, оливки, усеченных параболического или гиперболического веретен по емкости и превосходит в том же порядке, в каком они перечислены, бочку цилиндрическую или имеющую фигуру двойного усеченного конуса, но этот избыток и сам по себе, как видно из теоремы XXII первой части, очень незначительный, уже включен в показаниях линейки. Во-первых, и бочка, вместимость которой по указанию линейки считается равной одной амфоре, подобно остальным, обладает кривизной, а потому линейка годится для всех бочек подобной же кривизны, которая хотя не у всех австрийских бочек одинакова, но все же у каждой имеется, а потому происходящая отсюда ошибка невелика. Но если бочка будет длиннее австрийской, то изгиб ее клепок от отверстия до днища происходит на большем протяжении, а потому, даже при одинаковом искривлении, в этом изгибе будет больший объем; подобным же образом, если бочка будет короче австрийской, то и изгиб ее будет короче. Но линейка учитывает только изгиб небольшого протяжения, какой имеется в австрийской бочке, а потому (при равных прочих условиях) в длинных бочках линейка недодает избытка объема от изгиба, а в коротких — показывает слишком много.

ТРЕТЬЯ ЧАСТЬ

УПОТРЕБЛЕНИЕ ВСЕЙ КНИГИ О БОЧКАХ

Сравнение бочек, исследуемых при помощи поперечной линейки. Если бочка австрийского размера, то линейке следует доверять, не обращая внимания на пузатость и на выпячивание между днищами, т. е. на изгиб между наливным отверстием и дном; и такую бочку надо предпочитать всем прочим, за исключением тех рейнских, в которых глубина в отверстии превосходит $^4/_3$ диаметра днища, если последнее имеется. Из остальных надо выбирать продолговатые с значительной пузатостью, какими бывают некоторые из рейнских же; вытянутость их объема возмещается величиной среднего обруча и длиной выпяченной части клепок. Невысоко следует ценить длинные непузатые цилиндрические бочки; ниже их надо ставить короткие, мало или вовсе не отличающиеся от цилиндра, какие иногда приходят из Венгрии. И всеми способами надо избегать коротких пузатых, ибо они обладают тремя признаками тесноты: первый — по теореме V —

величина отношения диаметра днищ к полудлине клепок; второй — по теореме XXII — величина пуза; третий—по теореме XXIX — короткость выпяченных частей.

II. *Разбор способа измерения поперечной кубической линейкой.* Из всех предыдущих рассмотрений получается, что среди способов измерения бочек нет ни одного более удобного и осмотрительного, чем применение поперечной линейки с кубическими делениями для австрийских бочек. Именно, этот способ заключает в себе все предосторожности измерения. Во-первых, линейка, просунутая внутрь, исключает толщину клепок, обручей, скрепляющих их прутьев, которыми связаны сами обручи, а также и выступы краев, между которыми зажаты днища или деревянные круги. Все это за раз не может дать никакой другой способ измерения, не требующий промеров около отверстия A, где открывается внутренняя поверхность клепок. Потому некоторые измерители помнят и употребляют для оценки этой скрытой толщины клепок и днищ несколько правил, но благодаря неточности их для различных образцов пропадает вся тщательность остального измерения. Во-вторых, этот способ предостерегает от неравенства оснований или днищ, и все это — без скучных многочисленных и повторных измерений, за раз, как сказано в теореме XXVI этой части.

Измеряющие же по другому способу терпят то неудобство, что им приходится сравнивать друг с другом днища бочек и их средние пропорциональные и, наконец, отыскивать конический объем, промежуточный между емкостями, соединяя употребление планиметрической линейки с утомительнейшими вычислениями, как, например в совсем недавней книге Иоанна Гартмана Байера, франкфуртского медика, о стереометрии пустых объемов. В-третьих, даже несходство в формах бочек (поскольку оно проявляется даже в австрийских, если бочары грубо пользуются своим правилом или чинят старые бочки, обрезая концы) не сильно уменьшает надежность этого измерения, как было сказано в добавлении 1 к теореме V и XXII этой части. В-четвертых, здесь не только не пренебрегается, но даже кладется в основу всего способа пузатость бочки, т. е. ее наибольший обхват AY, так как измерение производится от его наивысшей точки A до наинизшей точки C на дне. Это обстоятельство основано на теореме XXII этой части. В-пятых, по теореме XXIX здесь нисколько не вредит и выпячивание усеченного коноида. Именно, искривление всех клепок почти одно и то же и вообще незначительно, согласно соображениям, лежащим в основе всего устройства и требующим и не просто прямизны, как в конусе, и не особенно большой пузатости, но все же скорее первой, чем последней. А об этой-то пузатости большинство измерителей очень и беспокоилось, так что Клавий, как было сказано выше, прибегал к эллипсам и коноидам. И, однако, никто из них до сих пор не исследовал при помощи расчетов подходящих для этого фигур бочек, которые я здесь впервые и предложил для изучения с весьма трудными доказательствами и после кропотливейших вычислений пояснил числами. Но что касается нашей австрийской бочки, то все эти ухищрения более остроумны, чем необходимы, разве только для того, чтобы из сравнения вычислений с употреблением австрийской линейки еще более выявилось удобство последнего способа измерения и чтобы прочие тщательные вычислители призадумались о том, сколь напрасно ломают себе голову над труднейшими расчетами, отцеживая комара — мельчайшие дроби — и проглатывая целого верблюда ошибок, счастливые только тем, опять-таки им не известным обстоятельством, что почти никакого значения не имеют ни большинство подобных точностей, ни ошибки в них. Потому для безопасности частных лиц и избежания обманов в высшей степени важно, чтобы власти тщательно следили за исполнением правила устройства бочки, по которому диаметр днища должен составлять третью часть длины клепок, и нарушение его наказывалось бы запрещением сосудов, не имеющих требуемой формы, или же во всяком случае при измерении таких неправильных бочек открыто признавалась бы неправильность показаний измерительной линейки.

III. *О том, что употребление поперечной линейки с надписями кубических делений всего более свойственно Австрии.* Отсюда также ясно, почему употребление поперечной линейки гораздо более распространено в Австрии, чем у других народов, именно потому, что здесь принята такая форма бочки, приспособляясь к которой бочары весьма мало вредят емкости из-за неловкости рук. У других же народов употребляются и иные формы бочек, при которых изменение размеров дна и длины клепок тотчас же наносит ощутительный вред. И хотя согласно теореме XXVI этой части употребление поперечной линейки одинаково во всех подобных между собой бочках, но никакой закон, никакое постановление не заставит ремесленников всегда точно соблюдать одно и то же отношение клепок и еще того менее глубины посредине бочки к диаметрам ее дна, ибо при этом главную роль играют случайные обстоятельства и меньшую — намерение строителя. И так как неловкости рук не приходит, как в Австрии, на помощь свойство установленной формы, по которому и не совсем похожие друг на друга фигуры равноценны подобным, то у постоянно встречающихся бочек неподобных форм и емкость различная, а значит, и столь широкое употребление кубической поперечной линейки у других народов не может не сопровождаться риском ошибки.

IV. *Соображение для измерения любой бочки с круглыми днищами без линейки с кубическими делениями.* Но так как в этой книге предложены общие соображения, то надо распространить правила расчета и на все прочие фигуры бочек как для того, чтобы и другие народы попользовались некоторыми плодами этой стереометрии, так и для того, чтобы наши австрийцы узнали больше о чужих бочках (которые привозятся в Австрию вверх и вниз по Дунаю либо полные заграничного вина, либо при вывозе австрийского) и, употребляя линейку, не нанесли другим и не потерпели б сами ущерба. Ведь даже и изображение справедливости рисуется с весами как символом всех точных мер, и забота о точности измерения относится к соблюдению этой добродетели воздающей каждому свое. А так как она хранит и украшает государства и сама прекраснее всякого солнца, то пусть же от ее дружественного и ясного взора рассеются и отойдут как можно дальше все облачка ошибок. Итак, пусть изготовлена линейка, разделенная на равные возможно мелкие части. Погрузив ее в отверстие бочки, во-первых, надо измерить глубину ее пуза посредине, а затем поперечные длины от наливного отверстия до наинизших точек на обоих днищах. В-третьих, вынутую линейку надо установить вне бочки на крайних точках днищ, если можно, вставляя конец внутрь обруча, и измерить по отдельности вертикальный диаметр каждого днища, считая, что все прочие поперечники его будут равны тому же самому благодаря способу устройства бочки, так как здесь не идет речь о флягах. Если же, однако, окажется заметное различие среди диаметров одного и того же дна, происходящее либо от ошибки ремесленника, либо от природы дерева, по которой длина всех волокон получается одинаковая, но ширина ствола подвержена влияниям ветра, то надо измерить и поперечные диаметры днищ. А так как иногда случается, что и сама фигура среднего обода не устраивается по точному кругу, то аккуратный измеритель (который намерен для удовлетворения любознательности использовать все инструменты и все возможные способы) должен попытать другой путь для изучения площади, по которой рассекается посредине бочка. Возможен следующий: окружим бочку посредине пуза поясом из кожи или другого гибкого, но нерастяжимого подобно нити материала и измерим, сколько частей линейки будет содержать такой ободок. Предполагая, что бочка посредине с внешней стороны точно круговая, по числу этих частей согласно теореме I легко узнать, каков диаметр этого круга, например, если в обхвате окажется $6283^1/_5$ части, то диаметр должен иметь 2000 частей. Внутренний же диаметр, т. е. глубина пуза, уже определен. Вычтем теперь из вычисленного диаметра толщину клепки, которую можно измерить в отверстии, и еще столько же отнимем для клепки внизу; если тогда окажется, что вычисленный таким путем при помощи измерения обода и уменьшения на толщину клепок внутренний диаметр равен диаметру глубины, то пузо бочки может считаться точно круговым, потому что нет оснований, по каким наклонные диаметры окажутся скорее неравными между собой, чем вертикальный и горизонтальный (хотя вообще это и может случиться). Полной же точности в этом вопросе (если измеряемое вещество дороже золота равного веса) можно достигнуть с помощью параллельных брусьев, наглухо скрепленных друг с другом на расстоянии, требуемом бочкой, которые и позволят проверить кругом все диаметры, укрепляя бочку на двух балках. Если же вертикальный и горизонтальный диаметры или какой-нибудь другой окажутся неравными, то фигура будет эллипс. Поэтому согласно примечанию к теореме I первой части вычисленный диаметр будет средним арифметическим между вертикальным и горизонтальным, и, следовательно, на сколько вычисленный и уменьшенный диаметр длиннее глубины, на столько же последняя в свою очередь длиннее поперечного диаметра. Узнав диаметр или диаметры каждого круга или эллипса, площадь как днища, так и воображаемого сечения через середину бочки, согласно теореме II и примечанию 3 первой части, найдем следующим образом. Умножим вертикальный и горизонтальный диаметры, все равно равные или неравные, друг на друга, и тогда произведение будет относиться к числу маленьких квадратиков со стороной, равной величине одного деления линейки, содержащихся в площади днища, почти как 14 к 11; точнее (это пропущено в названной теореме и здесь добавляется), как число, изображаемое через 4 с шестнадцатью нулями, к половине числа, выражающего по теореме I длину окружности. Мимоходом выскажу одно обстоятельство, до сих пор никем не доказанное, и не знаю, подмеченное ли кем-нибудь, именно, что во всех фигурах, описанных около круга, и в самом круге как фигуре с бесконечным числом углов периметр при диаметре, равном 2, выражается числом, вдвое большим числа, выражающего площадь фигуры. Затем необходимо знание длины бочки, которую не так-то легко измерить снаружи или изнутри линейкой, так как клепки искривлены и выдаются за обручи и днища, толщина которых тоже неизвестна. Потому истинную длину узнаем следующим образом. Надо возвести в квадрат поперечную длину и из этого квадрата вычесть произведение диаметра днища на диаметр пуза (если не все диаметры равны между собой, то возьмем среднее арифметическое); разность запомним; затем вычтем диаметр днища из диаметра пуза, остаток возведем в квадрат и четвертую часть этого квадрата вычтем из заполненной ранее разности; квадратный корень из полученного числа и даст длину той половины бочки, чье днище было взято; технически эта длина называется высотой усеченного конуса. Если бочка правильная, то удвоенная величина и будет длиной всей бочки; но лучше поступить осторожнее, повторив тот же прием с другой поперечной длиной и другим днищем, откуда и получится длина второй половины, т. е. высота второго усеченного конуса.

Пример. Пусть на фиг. 25 оказалось, что поперечная длина AZ содержит немного более $24^1/_2$ равных частей линейки, так что квадрат ее $602^1/_2$, и пусть диаметры AY и XZ оказались соответственно равными 22 и 19 частям. Перемножая их, получим 418, вычтя это из $602^1/_2$, найдем в остатке $184^1/_2$. Разность диаметров равна 3, квадрат ее 9, его четверть $2^1/_4$; вычтя ее из $184^1/_2$, получим $182^1/_4$, корень из чего — $13^1/_2$ — и будет внутренняя длина половины бочки, так что вся длина GX равна 27. Квадраты диаметров 22 и 19, т. е. 484 и 361, относятся к площадям кругов AY и XZ, как 40 000 к 31 416, откуда эти площади будут 380 и $283^1/_3$

После того как найдены площади кругов и длины обеих половин, могут представиться три возможности: или обе половины бочки принимаются за усеченные конусы или за усеченные лимоны, или за промежуточные фигуры, т. е. за усеченные сливы, оливки, параболические или гиперболические веретена; другими словами, за форму клепок от наливного отверстия до края принимается или просто прямая, или точный круг, или составленная из того и другого фигура. При первом предположении в результате получится всегда несколько меньше истинного значения, при втором вообще или больше или точно; при третьем получилось бы всегда точно, если бы здесь можно было поступать так же просто, как при двух первых.

1. При первом предположении каждый усеченный конус подразделяется на правильный цилиндр, как бы поставленный на днище, как на основание, и на окружающее его цилиндро-коническое кольцо, которое мы назвали поясом. Объем цилиндра по теореме III первой части вычисляется умножением высоты половины бочки на найденное выше основание — площадь днища; полученное произведение даст число кубиков с длиной, шириной и высотой, равными величине одного деления линейки, содержащихся в рассматриваемом цилиндре. Отношение же усеченного конуса, составляющего половину бочки, к цилиндру на днище как на основании получается по добавлению к теореме XVII первой части. Именно, диаметр днища надо помножить на самого себя и на диаметр или глубину

пуза; затем разность этих диаметров надо помножить на ее треть. Умножив число кубиков, содержащихся в рассмотренном цилиндре, на сумму двух последних произведений и разделив результаты на квадрат диаметра днища, получим число кубиков в половине бочки. Таким же способом поступим и со второй половиной, если она не равна и не схожа с первой. Сколько же такого рода кубиков составляют единицу меры, можно узнать не иначе, как сделав из железной пластинки продолговатый, точно цилиндрический, равномерно закругленный сосудик с хорошо выравненным дном, влив затем в сухой такой сосудик единицу меры жидкости и измерив нашей линейкой высоту, которую отметила на сосуде жидкость до погружения линейки; также следует измерить величину окружности вверху, которая должна быть равна окружности внизу; по этой окружности найдем площадь названного круга, а по последней и высоте — объем или число кубиков в единице меры. Если на это число разделим число кубиков в каком-нибудь объеме, то частное и даст число мер, заключающихся во взятом теле — бочке или чаше. Так поступаем при первом предположении, при котором, как сказано, получается меньше истинного значения. Пример находится после теоремы XXII первой части.

Продолжим ранее начатый пример. Умножим $13^1/_2$ на $283^1/_2$ — меньшее основание, т. е. днище XZ, — получим цилиндр 3827. Затем при данном отношении диаметров цилиндр относится к усеченному конусу, как 361 к 421. Следовательно, если на 361 приходится 3827, то на 421 сколько придется? Выходит 4298; столько кубиков в половине бочки; следовательно, в целой 8596. Если 30 таких кубиков заполняют единицу меры, то, разделив 8596 на 30, получим, что вся бочка вмещает 286 мер. (В подлинном тексте вместо 3827,25 ошибочно стоит $3685^1/_2 = 283^1/_2 \cdot 13$.)

2. Второй метод, по которому бочка рассматривается как усеченный с обеих сторон лимон и который часто дает верный результат, но столь же часто и больший истинного, уже был со всей полнотой и тщательностью разобран в примерах к теореме XXII и XXV первой части и повторять его нет нужды, разве только напомним, что там бочка называлась усеченным лимоном, пузо бочки — наибольшим кругом посредине объема лимона, а днища — усекающими кругами. Затем еще следует добавить, что если днища будут неравные, то придется оперировать дважды сначала с меньшим днищем, как будто бы и второе было такое же, затем с большим, считая и второе за такое же; полуразность результата последнего вычисления и первого надо прибавить к первому или вычесть из последнего, и тогда получится (как и при правильной фигуре лимона) истинная величина объема.

3. Если же и такая точность недостаточна, так как клепки не всегда изогнуты вполне по кругу, и если, как это свойственно искусным геометрам, надо рассуждать и вычислять не над чуждой и придуманной, а над действительной собственной фигурой каждой бочки, то прежде всего и надо исследовать, какова форма искривления клепок. Иногда ее можно узнать

простым рассматриванием, для распознавания же других потребуются инструменты и ловкость рук и, кроме того, большой и тщательнейший навык, а некоторые и даже большинство никакими приспособлениями не удастся отличить от точного круга, благодаря грубому прилаживанию клепок, препятствию обручей и прутьев, неровной толщине и сходству самих фигур между собой. Если в глаза и кидается различие кривизны клепок около середины пуза от их кривизны у краев, то бочка будет представлять собой гиперболическое усеченное веретено, и чем теснее эта кривизна будет сосредоточиваться около пуза, тем больше будет часть гиперболы и тем ближе вместимость бочки будет подходить к вместимости усеченного конуса. Дальнейшее можно определить с помощью следующего инструмента. Возьмем железную или бронзовую прямоугольную хорошо выглаженную линейку длины, равной длине бочки, не прогибающуюся от своего веса, на ней должны иметься тонкие и острые, как гвозди, железные стерженьки, передвигаемые по длине линейки так, чтобы их можно было закрепить без покачивания в любом месте, но чтобы винтами их можно было вывертывать от линейки и ввертывать к ней; число их должно быть самое меньшее пять, а лучше, если семь: средний достаточно наглухо укрепить посредине линейки и взять его длину большей толщины любого обруча бочки. Этот неподвижный стерженек устанавливается посредине бочки в одной из щелей, по которой сходятся две клепки, а остальные передвижные устанавливаются попарно или по три по направлению к краям бочки на небольших и равных с обеих сторон расстояниях и винтами ввинчиваются так, чтобы все они коснулись той же щели, крайние — на равных расстояниях от среднего, прочие — в соседних точках, просовываясь между двумя днищами на предоставленном им промежутке. Отмеченные таким способом концами стерженьков пять или семь точек фигуры вместе с линейкой переносятся на поверхность хорошо выравненной доски, так что на фиг. 16 F и G пусть представляют крайние точки, C — среднюю, Q и S — промежуточные, и соответственно этому с другой стороны. Чтобы не оставалось никакой погрешности, надо еще измерить толщину клепок как в наливном отверстии, так и на краях, и на равном ей расстоянии по направлению внутрь, как бы к центру кривизны, отметить новые точки, а старые отбросить, так что получим на плоскости внутреннюю кривизну бочки, отмеченную пятью или семью точками. Затем соединим точки F и G прямой FG, построим равные отрезки CG и CF, опустим из C на FG перпендикуляр CO, который несколько продолжим наружу; через две крайние точки F, S и соответствующие им с другой стороны проведем прямые и продолжим их до пересечения с продолжением перпендикуляра CO. Если остальные точки не окажутся все между этими прямыми, либо хотя бы более крайние на этой самой линии, или эти линии пересекутся где-нибудь не на продолжении перпендикуляра CO, то дело проиграно и очевидно, что либо фигура бочки, либо инструмент, либо наши руки не подходят ко всем этим тонкостям. Вообще же этими линиями, хотя, строго говоря, они пересекают гиперболу каждая в двух точках, можно пользоваться вместо касательных, по крайней мере в тех бочках, какие мне приходилось видеть. Потому согласно теореме XXVII первой части надо аккуратно измерить, каково будет отношение CO (полуразности диаметров пуза и днища) к CY.

Если прямая, делящая пополам угол OGY, пройдет через точку C, то фигура будет кругом и собственно будет относиться ко второму случаю. Общее с остальными случаями здесь будет состоять в определении шарового сегмента FGC, а затем по теореме XXV первой части число, выражающее половину объема меньшего лимона, будет относиться к величине объема шарового сегмента, как OC и OG, отношение же объема этого лимона к п ясу вокруг цилиндра $HFGE$ указано в примере к теореме XXI.

Если же OC и CY окажутся равными, то фигура будет параболой. Потому согласно примечанию 2-му к теореме XIII объем параболического коноида находится при помощи конуса с той же высотой. Именно, площадь круга с диаметром FG, умноженная на треть высоты OC, дает величину объема конуса, а коноид равен трем вторым конуса; следовательно, объем коноида получается от умножения площади FG на половину OC. Затем по коноиду находится малое веретено согласно аналогии в теореме XXVII первой части, именно, как GO относится к YO — удвоенному CO, — так найденный коноид к половине объема этого веретена. Найдя объем малого веретена, дальше поступаем так же, как с усеченным лимоном. Именно, пояс вокруг цилиндра состоит из двух частей, одна из которых — уже найденное малое веретено, а другая, и притом бо́льшая, получается от умножения длины окружности днища на площадь плоской фигуры FGC, называемой параболой и находимой по примечанию 2 к теореме II, именно, умножив половину, т. е. три шестых OC на FG, получим площадь треугольника FGC, четыре трети которого и равны площади параболы, так что последняя получается умножением FC на четыре шестых, т. е. две трети OC.

Если CO окажется больше, чем CY, то фигура будет гиперболой и бочка будет ближе подходить к удвоенному конусу, и это тем более, чем больше CO сравнительно с CY. Отношение гиперболического коноида к объему половины вписанного веретена будет несколько меньше отношения GO к OY, но больше, чем GO к OV, если V будет центр фигуры. Только это в случае гиперболы и приобретем из подобных тонких изысканий, а что касается дальнейшего, то так как не определен еще нужный четвертый член пропорции, т. е. линия, заключенная по длине между OY и OV, я еще до сих пор и не размышлял о квадратуре гиперболы, знание чего, кроме того, нужно для вычисления пояса гиперболического веретена. Помогайте Аполлонии!

Если, наоборот, CO окажется меньше CY, но отношение ее к CY больше отношения OG к GY (а кто это сумеет аккуратно различить?), то фигура вертикальный эллипс (с большой осью, перпендикулярной к FG) и его сегменты относятся к сегментам (концентрического) круга (радиуса, равного большой полуоси) с той же хордой, как малая ось к большой, согласно тому, чем пользуется Архимед для доказательства примечания 3 к теореме II, и тому, что сказано мной в Комментариях о движении Марса и что следовало бы прибавить к названной теореме II. Но так как отрезок между OC и OY, нужный для нахождения отношения сегмента сжатого сфероида к эллиптической сливе, еще не определен, то и здесь, как и выше в случае гиперболы, я не могу указать остроумным Аполлониям никакого выхода, который пусть они, подстрекаемые теоремой XXVI, найдут и откроют сами с помощью своего искусного таланта, для более же скромных умов здесь не сокрыто полезного и удобного сокровища.

Наконец, если отношение CO к CY окажется меньше отношения OG к GY, то фигура будет перевернутый эллипс (с большой осью, параллельной FG), и отношение сегмента сфероида к оливке будет больше, чем GO к OC, но нужная линия опять-таки неизвестна. Но эти обстоятельства должны считаться тем меньше затруднениями, чем меньше правдоподобно, чтобы форма бочки походила скорее на сфероид, чем на гиперболическую или круговую фигуру.

V. Какими соображениями можно искусно найти отношение пустой части к остатку жидкости при лежащей бочке и вертикальных диаметрах пуза и днищ.

Насколько я знаю, эта часть теории до сих пор составляет предмет пожеланий, хотя она полезна хозяевам для обнаруживания и избежания покраж, если только Вакх поместил свои дары подальше от царства Тетиды и запретил ей доступ в свои владения, потому что эта богиня обыкновенно прикрывает проделки домочадца тем, что, доливаясь вместо похищенной им части, портит и оставшуюся. Способ Куаньета и других, насколько он надежен, применяется в тесных границах, и нельзя придумать, как его распространить на бочки всех видов без ошибок и нелепостей, в чем легко признаются и авторы. Все же начнем с него. Если бочка имеет форму цилиндра или отступает от него неощутительно, и плоская поверхность жидкости, разумеется, рассекает днища и площадь пуза на два круговые сегмента, то по теореме XVII первой части и сегменты всей цилиндрической бочки, пустой и полной, будут пропорциональны плоским сегментам оснований. Но бочка состоит как бы из двух усеченных конусов, технической высотой которых считается расстояние от круга по пузу до днища, а каждый усеченный конус состоит из внутреннего цилиндра на меньшем основании конуса и накинутого на него пояса (так я называю половину выступа пуза над поверхностью внутреннего цилиндра; выше, при рассмотрении фигуры целой бочки, мы поясом называли весь выступ пуза, состоящий из двух рассматриваемых сейчас поясков). Потому надо принять во внимание, что сначала понижается уровень в этом поясе, прежде чем начнет убывать содержимое внутреннего цилиндра, находящегося между днищами. Затем, когда начнет уменьшаться цилиндр, то опорожненным останется только один пояс, и, наконец, когда весь цилиндр исчерпан, то в крае пояса еще остаются подонки. Как при такой неправильности ждать помощи от науки? И действительно, много теорем потребовалось бы для того, чтобы дать строгую теорию опоражнивания бочки фигуры двойного усеченного конуса. Выше, в теореме XVI первой части, было сказано, что геометры еще не произвели исследования объемов некоторых частей конуса, среди которых находятся и части усеченных конусов или бочки, отсеченные поверхностью вытекающей жидкости, параллельной оси усеченных конусов и перпендикулярной к общему их основанию, т. е. кругу пуза бочки. Поэтому стоит в настоящем месте кое-что высказать о таких частях конуса для того, чтобы побудить геометров, — считавших до сих пор не заслуживающим внимания заниматься этими вопросами, как не требуемыми практикой, о чем выше и было сказано, — проснуться и приняться за определение нужных объемов, после того как ясно показано их практическое применение. Во-первых, я посмотрел, не будет ли отношение части конуса, отсеченной плоскостью, параллельной оси и потому дающей в сечении гиперболу, ко всему конусу равно произведению отношений соответствующего сегмента основания ко всей площади основания конуса и высоты сечения к высоте конуса Это предположение, конечно, правдоподобно, но тем не менее ложно, потому что таково будет отношение к данному конусу части более низкого наклонного конуса, рассеченного через вершину, и часть этого последнего конуса меньше рассматриваемой части данного, опирающейся на то же основание, потому что часть наклонного конуса сходится к острию, а рассматриваемая поднимается вверх по гиперболическому широкому закруглению, и, кроме того, первая ограничена поверхностью меньшего конуса и площадью треугольника, а вторая — поверхностью большего конуса и площадью гиперболы. Во-вторых, я посмотрел, не будет ли рассматриваемая часть конуса равновелика сходной части прямого цилиндрического сегмента, имеющей то же основание и ту же высоту, т. е. той цилиндрической части, про которую шла речь в теореме XVII и отчасти XXII первой части, и не будут ли обе эти части — цилиндрическая и коническая, опирающиеся на один и тот же круговой сегмент и ограниченные плоскими сегментами, — одна эллиптическим, другая — гиперболическим — составлять треть прямого цилиндрического сегмента с тем же основанием, отсеченного плоскостью, параллельной оси. Но и это не вполне соответствует действительности, хотя подходит к ней весьма близко. Именно, если бы это было вообще верно, то не было бы ложно и для полуцилиндра, который отсекается плоскостью, проходящей через ось и вершину вписанного конуса. Но разделив этот полуцилиндр на 33 части, найдем по теореме IV, что в полуконусе, отсеченном той же плоскостью, таких частей будет 11, а сходная с конусом часть полуцилиндра по теореме XVII этих же частей содержит 14. Двойной же объемчик, ограниченный изнутри конической поверхностью, а снаружи плоской и кусочками цилиндрической, содержит таких частей 8. И хотя здесь полуконус в точности равен трети полуцилиндра, но в других случаях этого уже не будет как раз вследствие того, что конус уже не будет рассекаться через вершину, и его отсеченная часть окажется больше трети прямого цилиндрического сегмента той же высоты. Эти части (конуса и цилиндра), повидимому, стремятся все ближе к равенству, а промежуточный между ними объемчик все уменьшается, по мере того как убывает сама прямая часть цилиндра. В-третьих, повидимому, требуется отыскать площадь сегмента гиперболы, который определяет часть конуса; найдя эту площадь, легко построить треугольник с основанием, равным основанию сегмента гиперболы и ему равновеликий. И тогда отношение рассматриваемой части конуса к объему всего конуса, повидимому, будет равно произведению отношений площадей оснований и высот этих равновеликих гиперболическим сегментам треугольников. Мы же, до тех пор, пока эту добычу принесут со своей охоты Аполлонии, придерживаясь хотя и недоказанных, но приближающихся к истине правил, будем умножать площадь круговых сегментов, служащих основанием рассматриваемым частям конуса, не на их высоты, так как при этом получили бы меньше истинного значения, а на более длинные линии, именно на величины высот, продолженных до встречи с дугой круга, проведенного через вершины конусов и отверстие бочки. Таким образом на фиг. 16 надо провести круг через точки B, C и D так, что CL будет стрелкой и LB — синусом дуги, определяющей наши линии; этому кругу дадим особое имя — назовем его *метатор*. Ясно, что такая дуга не будет касаться бочки в точке G на днище, и потому техническая высота OG конического сегмента COG при продолжении до этой дуги увеличится и будет, например, OZ. Следовательно, для нахождения объема рассматриваемой части конуса надо умножить площадь сегмента среднего круга CA с высотой CO на треть линии OZ. Если возникает опасение, что OZ слишком велико, то надо принять во внимание, что рассматриваемые нами здесь части не вполне конические, но несколько больше их, принадлежащие лимону или веретену. Таким образом получается следующий прием. Прежде всего должна быть по предыдущим правилам определена глубина пуза CA и диаметр днища GE вместе с их полуразностью CO, а с помощью поперечника CE и техническая высота усеченного конуса OG. Высота LB полного конуса относится к CL, как OG к OC. Отсюда находятся площади кругов CA и GE, которые следует умножить на треть соответствующих высот *LB* и *KB*, и от объема конуса *CAB* надо отнять объем недостающего конуса *GEB*, чтобы получить объем усеченного конуса *CAEG*, выраженный в подходящих для настоящего расчета числах. Для нахождения линии *OZ* нужен уже диаметр метатора; для этого квадрат *LB* надо разделить на *CL*, и тогда частное даст недостающую (к *CL*) часть этого диаметра, прибавив которую к *CL* и найдем нужный диаметр. Если задана высота *CO* опорожненной части, то по ней на основании прежних правил нужно определить площадь сегмента пуза и линию, идущую из *O* перпендикулярно (к *OC*) вдоль поверхности вытекающей жидкости, до встречи с метатором. Именно, *CO* надо вычесть из диаметра метатора, остаток умножить на вычитаемое (*CO*), и тогда корень из произведения даст искомую линию, на третью часть которой следует умножить площадь сегмента пуза для получения объема части конуса. Если высота *CO* не превосходит полуразность диаметров *CA* и *GE*, то этим дело и оканчивается; если же превосходит, то труд удваивается. Именно, тогда часть конуса заходит за усеченный конус *CGE* в недостающий до полного конус *GBE*; следовательно, надо определить часть, находящуюся в этом недостающем конусе, и вычесть ее из найденного объема. Для этого из расстояния от отверстия до поверхности жидкости надо вычесть полуразность диаметров пуза и днища, по остатку как по синусу-верзусу определить площадь сегмента днища, выступающую из жидкости, и притом выразить ее в тех же мерах, как сегмент круга пуза. Затем площадь этого меньшего сегмента надо помножить на треть такой части OZ, которая относится ко всей OZ, как избыток расстояния от отверстия до поверхности жидкости над полуразностью диаметров пуза и днища к самому этому расстоянию; это произведение и даст объем, находящийся в недостающем конусе. Вычтя его изо всей отсеченной части полного конуса, найдем опорожненную часть усеченного конуса. Наконец, если известно число мер, вмещаемых целой бочкой, то его надо умножить на величину опорожненной части усеченного конуса, найденную одним или двумя вычислениями, произведение разделить на объем всего усеченного конуса, и тогда частное даст число вытекших мер. Так как здесь и выше часто приходится определять сегмент круга по синусу-верзусу половины его дуги, что часто довольно затруднительно, то, чтобы отчасти облегчить эту трудность, я составил приложенную табличку (стр. 331), которая дает для каждой сотой части синуса-верзуса или стрелы, отсчитываемой от вершины к центру, величину сегмента в таких единицах, при которых площадь всего круга оказывается равной 15 710; это число оказалось для меня самым удобным при пользовании легким и быстрым способом вычисления, а заменить его каким-нибудь более круглым мне сейчас некогда.

Употребление таблицы. Стрелу, или синус-верзус сегмента, или то, что его заменяет (т. е. в пузе глубину пустой части, в днище — высоту выступающей из жидкости части), умноженную на 100, надо разде-

—	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0	0	294	818	1478	2237	3072	3964	4900	5868	6856	7855
1	10	339	879	1550	2318	3159	4056	4996	5966	6956	
2	27	386	941	1623	2399	3246	4148	5092	6065	7056	
3	49	434	1004	1697	2481	3334	4241	5188	6163	7155	
4	76	484	1069	1772	2563	3423	4334	5284	6262	7255	
5	105	536	1134	1847	2646	3512	4428	5381	6360	7355	
6	138	589	1201	1923	2730	3601	4521	5478	6459	7455	
7	173	644	1269	2001	2815	3691	4616	5575	6558	7555	
8	211	401	1337	2079	2900	3782	4710	5673	6658	7655	
9	252	759	1407	2158	2985	3873	4805	5770	6757	7755	

лить на радиус круга, сегмент которого ищется; десятки частного надо отыскать вверху таблицы, единицы — сбоку; искомая площадь найдется на пересечении (столбца и строки, содержащих эти десятки и единицы) и будет выражена в тех единицах, в каких площадь всего круга равняется 15 710. Если последняя выражается другим числом, то соответственно придется перевести и число, выражающее площадь сегмента.

Пример на этот способ. Пусть глубина пуза бочки CA будет 22, диаметр днища GE — 19, так что полуразность CO — $1^1/_2$, и OG — $13^1/_2$. Как CO — $1^1/_2$ — относится к OG — $13^1/_2$, т. е как 3 к 27 или 1 к 9, так CL — 11 — к LB — 99; следовательно, KB будет $85^1/_2$. Положим, что площадь конуса

CA, как в таблице, содержит 15 710 единиц. Следовательно, как квадрат CA 22 — 484 — относится к квадрату GE 19 — — 361, — так площадь круга CA — 15 710 — к площади круга CA, которая будет содержать 11 718 единиц. Умножив 15 710 на треть от 99, получим для объема CBA 518 430 единиц; умножив 11 718 на треть от $85^1/_2$, получим 333 963 для объема GBE, вычтя который из CBA, получим для усеченного конуса $CGEA$ 184 467 единиц. Для нахождения диаметра метатора квадрат LB 99 — 9801 — разделим на CL — 11 — и к частному — 891 — прибавим CL — 11; получим, что диаметр метатора — 902. Пусть сначала глубина пустой части меньше CO, именно пусть она равна 1. Чтобы найти соответствующий ей сегмент по таблице, будем поступать так: CL — 11 — содержит 100 единиц; сколько придется на 1? Выходит $9^1/_{17}$, чему на таблице соответствует сегмент пуза, почти равный 256. Затем от диаметра метатора — 902 — вычитаем CO — 1; остаток — 901 — умножаем на 1; получаем 901, корень откуда 30; треть его — 10 — умножаем на 256 и получаем объем части (конуса) — 2560. Так как высота пустой части меньше CO, то это и есть весь искомый объем. Число единиц меры в утекшей жидкости будет относиться к 2560, как число мер во всей бочке к 184 467. Заметим, что если бы мы оперировали просто с высотой отсеченной части, которая равна 11, то получили бы немного меньше трети нашего результата, что наверное недостаточно. Во-вторых, пусть высота пустой части более CO, именно, пусть равна 6. Как 11 относится к 100, так 6 к $54^6/_{11}$. Следовательно, в нашей таблице сверху надо взять 50, сбоку 4 с лишним, и тогда для величины сегмента получим 3468. Затем вычтем 6 из 902, остаток — 896 — помножим на 6, из произведения 5376 — найдем корень — почти 74; произведение трети его на площадь сегмента даст объем части конуса — 85 351, выходящей за усеченный конус, потому что 5 превосходит CO. Потому из 6 надо вычесть CO — $1^1/_2$, останется — $4^1/_2$; по этому значению и надо искать сегмент днища. Если его радиус — $9^1/_2$ — содержит 100 частей, то $4^1/_2$ будет содержать их почти $47^1/_3$, и потому из таблицы получается, что сегмент содержит 2843 таких единиц которых в площади днища, меньшей площади пуза, содержится 15 710. Потому 2843 надо умножить на 361 — квадрат 19 — и произведение разделить на 484 — квадрат 22, — получится $2120^1/_3$. Так как за высоту всей части конуса, основание которой соответствовало числу 6, принималось 74, то за высоту (недостающей) части, основание которой соответствует $4^1/_2$, надо взять $55^1/_2$; треть ее, помноженная на $2120^1/_3$, даст для объема верхушки конической части, выходящей за усеченный конус, $39\,229^1/_4$. Вычитая его из объема всей части, получим величину передней части усеченного конуса—$46\,121^3/_4$. И опять число вычерпанных единиц меры относится к $46\,121^3/_4$, как число мер в полной бочке к 184 467. Если бы действовали прямо с высотной отсеченной части, т. е. вместо 74 взяли 54, то весь ее объем был бы 62 424, объем недостающей верхушки — 38 169 и объем опорожненной части усеченного конуса — 24 255, что, наверное, меньше истинного значения. Потому мы примем за верное значение найденную нами большую величину. (В подлинном тексте ошибки в вычислениях: вместо $46\,121^3/_4$ стоит $81\,429^3/_4$.)

Аполлонии, конечно, возразят, что даже и допуская такое вычисление объема конических сегментов, все же не удовлетворим различию в фигуре бочек, потому что, вычисляя при помощи определенной формы метатора, мы и результат найдем годный только для одной фигуры. Я это, разумеется, знаю, а потому, чтобы удовлетворить и их, я отсылаю их к теореме XXX первой части; там Аполлонии, если поищут, то найдут, как восполнить недостающие этому приему научные доказательства.

Заключение книги

Мы ставили своей задачей открыть ошибки, допускаемые при измерении как целых бочек, так и опорожненной части, и показать в теоремах этой книги основания к опровержениям заблуждений. А так как сама истина, даже молча, способна противостоять шуму всех заблуждений, и наша книга, вначале едва состоявшая из десятка теорем, против ожидания разрослась, то оставим их ошибки тем, кому они нравятся, а сами будем пользоваться нашими удобствами и пожелаем, чтобы хватало в достаточном количестве чем повеселиться без вреда для души и тела.

И, тысячу отмерив чаш,
Счет спутаем весь наш.

Примечания

1. Никаких алгебраических формул Кеплер в настоящем сочинении не употребляет, и все соотношения между линиями и площадями описывает словами, хотя отступает иногда от чисто геометрического способа выражения и говорит, например, не о прямоугольнике, построенном на двух данных линиях, но просто об их произведении В современных обозначениях получим:

$$AB^2 = AG^2 + GB^2$$

$$AB^2 = 4GB^2$$

$$AG^2 = 3GB^2$$

$$AB^2 \cdot AG^2 = 4:3$$

$$AB:AG = 2:\sqrt{3} = 1:0{,}86603 = 100\,000:86\,603,$$

потому что десятичных дробей Кеплер тоже не употребляет, а полагает радиус круга AB равным 100 000. Отсюда и для BF получается величина $BF = 57\,737$.

2. Это явное оперирование с бесконечно малыми элементами и является характерной чертой настоящего геометрического сочинения Кеплер совершенно правильно усматривает в подобного рода рассуждениях основы того анализа, который приводил Архимеда к его открытиям, изложенным затем синтетически и часто доказываемым способом от противного. Но современники Кеплера и в том числе знаменитый Гульден, признавая остроумие кеплеровских способов,

отрицали их связь с архимедовскими и даже находили, что Кеплер благодаря разностороиности своих интересов недостаточно глубоко проник в сущность доказательств Архимеда.

3. Этого предложения у Архимеда нет, и здесь Кеплер доказывает его, опять рассматривая объемы цилиндра и параллелепипеды как суммы бесконечных множеств бесконечно малых слагаемых — площадей кругов и квадратов.

4. Площадь кр. $BC = \frac{\text{окр. } BC \cdot AB}{2}$.

Пов. кон. $BDC = \frac{\text{окр. } BC \cdot BD}{2}$.

Следовательно:

площадь кр. BC: пов. кон. $BDC = AB : BD = 1 : \sqrt{2}$.

5. Пов. сегм. $HDK = 2\pi\, AD \cdot DI = \pi\, DL \cdot DI = \pi \cdot DK^2$.

6. Объем гиперболического коноида, образованного вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ около оси X, отсеченный перпендикулярно оси плоскостью, проходящей через точку с абсциссой $a + h$, т. е. имеющей высоту h, равен $\frac{\pi b^2 h^2}{3a^2}(3a + h)$, а объем конуса с теми же основанием и высотой равен $\frac{\pi b^2 h^2}{3a^2}(2a + h)$, т. е. отношение этих объемов есть: $\frac{3a + h}{2a + h}$.

7. Если обозначить радиус шара через R, радиус основания сегмента через r, а его высоту через h, то объем сегмента будет:

$$V = \frac{\pi (r^2 + h^2) R}{3} - \frac{\pi r^2 \,(R - h)}{3} = \frac{\pi r^2}{3}\left(h + \frac{Rh^2}{r^2}\right).$$

Следовательно, высота конуса, равновеликого сегменту и имеющего общее с ним основание, превышает высоту сегмента на величину $DO = \frac{Rh^2}{r^2} = \frac{Rh^2}{(2R-h)h}$, откуда

$$DO:R = h:(2R-h).$$

8. Обозначив объемы всей сферы, сектора $HAKD$ и конуса $HIKA$ соответственно через V_1, V_2. V_3, будем иметь:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi AD^2 = \frac{\pi}{3} AD \cdot DL \cdot DL,$$

$$V_2 = \frac{r}{3}\pi AD \cdot DI \cdot AD = \frac{\pi}{3} AD \cdot DI \cdot DL,$$

$$V_3 = \frac{\pi}{3} IK^2 \cdot AI = \frac{\pi}{3} KS^2 \cdot AI = \frac{\pi}{3} AI \cdot RS \cdot DL,$$

откуда

$$V_1 : V_2 : V_3 = AD \cdot AL : AD \cdot DI = AI \cdot RS.$$

9. Обозначив радиусы оснований усеченного конуса через R, r, высоту его через h и объемы пояса меньшего и большего цилиндра соответственно через T, c и C, получим:

$$T = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) - \pi r^2 h = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr - 2r^2) =$$

$$= \frac{\pi h}{3}(R + 2r)(R - r);$$

$$c = \pi h r^2; \quad C = \pi h R^2,$$

откуда

$$T:c:C = (R+2r)(R-r):3r^2:3R^2.$$

10. Если обозначим радиус GT через R, высоту TS через h и примем на фиг. 13 прямую GT за ось X, то площадь сечения рассматриваемой части $bSTb'$ плоскостью, перпендикулярной оси X, на расстоянии x от начала G будет: $2\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{xh}{R}$. Следовательно, объем этой части будет:

$$\frac{2h}{R}\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, x\, dx = \frac{2hR^2}{3},$$

а так как объем всего цилиндра TY равен $\pi R^2 h$, то об. TY:об. $bSTb' = \pi : \frac{2}{3} = \frac{22}{7} : \frac{2}{3} = 66:14$.

11. Обозначая объем большего цилиндра через C, радиус его основания через R, диаметр через D, соответственные величины для меньшего через c, r, d, объем всего цилиндрического кольца через L, объем конического пояса около меньшего цилиндра через T, а объем остальной части цилиндрического кольца через E, будем иметь:

$$E = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi h}{3}(R - r)(r + 2R),$$

$$T = \frac{\pi h}{3}(R + 2r)(R - r), \text{ (по примечанию 9),}$$

откуда

$$E:T = (2R + r):(2r + R) = (2D + d):(2d + D) =$$

$$= \left[d + \frac{2}{3}(D - d)\right] : \left[d + \frac{1}{3}(D - d)\right].$$

Соотношения, указываемые Кеплером, в современных обозначениях сводятся к следующим преобразованиям:

$$D = d + (D - d),$$

$$D^2 = d^2 + (D - d)^2 + 2d(D - d),$$

$$3D^2 = 3d^2 + 3(D - d)^2 + 6d(D - d),$$

$$3D^2 - 3d^2 = 3(D - d)^2 + 6d(D - d).$$

Так как

$$\frac{3D^2}{C} = \frac{3d^2}{c} \text{ и } L = C - c,$$

то

$$\frac{3D^2}{C} = \frac{3(D - d)^2 + 6d(D - d)}{L},$$

а так как

$$\frac{3D^2}{C}=\frac{(D+2d)(D-d)}{T}=\frac{(D-d)^2+3d(D-d)}{T},$$

то

$$\frac{3(D-d)^2+6d(D-d)}{L}=\frac{(D-d)^2+3d(D-d)}{T}.$$

Так как

$$E=L-T,$$

то

$$\frac{(D-d)^2+3d(D-d)^2}{T}=\frac{2(D-d)^2+3d(D-d)}{E},$$

откуда

$$E:T=\frac{2(D-d)+3d}{(D-d)+3d}=$$
$$=\left[d+\frac{2}{3}(D-d)\right]:\left[d+\frac{1}{3}(D-d)\right].$$

12. Обозначим расстояние от оси вращения через R, и на плоскости вращающейся фигуры примем ее центр F за начало координат, а прямую AF — за ось X. По основному предположению ординаты точек с абсциссами x и $-x$ одинаковы. Следовательно, бесконечно малые объемы, описанные при повороте на угол $d\varphi$ бесконечно тонкими полосами высоты y и ширины dx, будут соответственно равны

$$(R-x)\,d\varphi y\,dx \quad \text{и} \quad (R+x)\,d\varphi y\,dx.$$

Сумма этих элементарных объемов будет: $Rd\varphi\,2y\,dx$, и весь объем кольца

$$2\pi R^2\int_0^a y\,dx=2\pi R\int_{-a}^{a} y\,dx,$$

где $2a$ — диаметр вращающейся фигуры. Так как $\int_{-a}^{a} y\,dx$

равен площади S вращающейся фигуры, то для объема и получается формула Кеплера:

$$V = 2\pi R \cdot S.$$

Гульден выражал сомнение в том, что рассуждения Кеплера непосредственно вытекают из методов Архимеда, и указывал на их тесную связь с его теоремой о центре тяжести, которая, впрочем, имеется уже у Паппа, хотя Гульден нигде об этом не упоминает.

13. В этом добавлении Кеплер, во-первых, хочет сказать, что в случае яблока вся трудность определения объема сведется к вычислению величины пояса, образованного вращением сегмента IKD, который в случае сферы играет роль всей вращающейся фигуры. Во-вторых, применимость этого способа ко все более тонким цилиндровидным объемам в следующей теореме Кеплер понимает в том смысле, что бесконечно малый объем, образованный вращением бесконечно узкого прямоугольника с площадью $y\,dx$, где x — расстояние ординаты y от оси вращения, может считаться равным произведению длины окружности радиуса x на площадь вращающейся полоски, т. е. равным $2\pi x\,y\,dx$.

14. Эта теорема является одной из самых остроумных во всем настоящем сочинении. Ее формулировка дает возможность выразить объем пояса, окружающего цилиндровидную сердцевину яблока, через объемы более простых тел, но интерес, разумеется, представляет не сам этот результат, а те рассуждения, которые делает Кеплер и которые являются в сущности преобразованиями одного интеграла в другой. Первое утверждение Кеплера, что всякая бесконечно тонкая долька яблока, содержащаяся между двумя положениями вращающегося около MN круга, равновелика, после вытягивания окружности наибольшего круга

яблока в прямую, дольке цилиндра, заключенной между двумя бесконечно близкими эллипсами, пересекающимися по той же прямой MN, в современных обозначениях может быть показано следующим образом. Примем диаметр вращающегося круга AD за ось X, обозначим AD через a и перпендикулярную к оси X хорду через y. Тогда на основании конца последнего примечания 13 для объема дольки, получающейся при повороте на угол $d\varphi$, будем иметь:

$$d\varphi \cdot \int_0^a y\,dx. \tag{1}$$

Пусть плоскость меридиана этой дольки составляет с плоскостью первого меридиана, совпадающей с плоскостью основания цилиндра ES на фиг. 13, угол φ. При вытягивании окружности наибольшего круга яблока в прямую этот меридиан вытянется в эллипс, а длина $AD = a$ вытянется в длину $a' = \frac{a}{\cos\varphi}$. Плоскость этого эллипса пересекает образующую DS на высоте, равной $a\varphi$, а плоскость второго меридиана, ограничивающего рассматриваемую дольку, после вытягивания пересечет ту же образующую на высоте $a(\varphi + d\varphi)$. Если на плоскости эллипса примем новое положение линии AD за ось X', то объем элементарного параллелепипеда с основанием $y'\,dx'$ и высотой $z' = \frac{x' a \cos\varphi}{a'} d\varphi$, заключенного между двумя бесконечно близкими эллипсами, будет: $\frac{x' a \cos\varphi}{a'} d\varphi\, y\, dx'$, и, следовательно, весь объем клинообразного тела между этими эллипсами равен:

$$\frac{d\varphi\, a \cos\varphi}{a'} \int_0^{a'} y x' dx'. \tag{2}$$

23 Стереометрия бочек.

Делая в этом интеграле подстановку $x' = \frac{x}{\cos \varphi}$, получим для его значения величину:

$$\frac{d\varphi \, a \cos \varphi}{a'} \int_0^a y \frac{x}{\cos \varphi} \frac{dx}{\cos \varphi} = d\varphi \int_0^a yx \, dx,$$

т. е. величину (1), что и доказывает утверждение Кеплера.

15. Второе утверждение Кеплера сводится к тому, что объем яблока, рассматриваемый как сумма объемов бесконечно тонких цилиндрических колец, т. е. как интеграл $2\pi \int_0^a xy \, dx$, равновелик части цилиндра $MSDN$, рассматриваемой как сумма бесконечно тонких параллелепипедов шириной dx, с основаниями, представляющими прямоугольные сечения этого объема плоскостями, перпендикулярными оси X. Так как высота такого прямоугольника, например $IadK$, находится из пропорции: $\frac{x}{a} = \frac{h}{2\pi a}$, т. е. $h = 2\pi x$, а основание его попрежнему y, то объем выражается тем же интегралом $2\pi \int_0^a xy \, dx$.

16. Среди современников Кеплера, знатоков античной геометрии, как, например, Андерсон (шотландский геометр, живший в начале XVII в. в Париже), этот метод вызывал возражения, как в корне расходящийся с примерами Архимеда, и ссылка Кеплера на то, что он поступает по примеру Архимеда, рассматривалась как „оскорбление священной тени великого старца".

Другие, как Гульден, признавая, что результаты Кеплера желательно бы доказать чисто геометрическими рассуждениями, тем не менее отдавали должное самому аналитическому методу, как быстро ведущему к нахождению новых теорем.

17. Обозначим на фиг. 13 попрежнему радиус вращающегося круга $FD = R$, радиус основания сегмента $Ic = r$, $MN = 2b$; тогда высота сегмента MCI будет $h = R - b$ и $r^2 = R^2 - b^2$. Следовательно, для объема сферического сегмента по формуле примечания 7 получим:

$$\frac{\pi r^2}{3} h + \frac{2\pi R h^2}{3}.$$

Объем цилиндра с основанием MI и высотой MN будет: $2\pi r^2 b$. Следовательно, для объема сферического пояса, образуемого вращением сегмента IDK около CE', получим:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{2\pi}{3} r^2 (R - b) - \frac{2\pi R}{3} (R - b)^2 - \pi r^2 b =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{\pi (R - b)}{3} (4R^2 + 4Rb + 4b^2) = \frac{4\pi b^3}{3}.$$

Отсюда для объема пояса яблока получим:

$$\frac{4\pi b^3}{3} + \text{пл. } IDK \cdot 2\pi r,$$

а так как объем цилиндровидной сердцевины яблока по теореме XIX (добавление) равен пл. $MCIKE'N \cdot 2\pi r$, то объем всего яблока будет:

$$V = \frac{4\pi b^3}{3} + \text{пл. } MDN \cdot 2\pi r.$$

То же самое получится при непосредственном вычислении объема $MSDN$ при помощи интеграла. Уравнение круга при начале в точке A будет: $(x-r)^2+y^2=R^2$, следовательно, этот объем есть:

$$4\pi\int_0^{R+r}\sqrt{R^2-(x-r)^2}\,x\,dx=$$

$$=4\pi\int_0^{R+r}\sqrt{R^2-(x-r)^2}\,(x-r)\,dx+$$

$$+4\pi r\int_0^{R+r}\sqrt{R^2-(x-y)^2}\,dx=\frac{4\pi b^3}{3}+\text{пл. }MDN\cdot 2r.$$

18. Пусть на фиг. 13 даны ось лимона $IK=2b$ и диаметр его наибольшего круга $2DO=2h$. Диаметр ED найдется из соотношений: $EO=\frac{IO^2}{OD}$; $2EO=\frac{4b^2}{2h}$; $2ED=2h+\frac{2b^2}{h}$. Затем из пропорции: $\frac{ED}{200\,000}=\frac{2b}{\sin\smile ID}=$ $=\frac{2h}{\sin\text{ver}\cdot\smile ID}$ по тогдашним таблицам, в которых синусы выражались целыми числами, так как радиус тригонометрического круга принимался не за 1, а за 100 000, Кеплер предлагает отыскать $\smile ID$, а значит, и площадь сегмента IDK. Затем по предыдущему примечанию для объема шарового пояса, полученного вращением сегмента IDK около оси CE', будем иметь: $\frac{4}{3}\pi b^3$. Для объема же части цилиндра $VTDO$ получим:

$$\text{пл. }IDK\cdot OV=\text{пл. }IDK\cdot 2\pi FD=\text{пл. }IDK\cdot\pi(2FD-OD)=$$
$$=\text{пл. }IDK\cdot\pi\left(\frac{b^2}{h}-h\right).$$

Следовательно, окончательно объем лимона будет:

$$\frac{4}{3}\pi b^3-\pi\left(\frac{b^2}{h}-h\right)\cdot\text{пл. }IDK.$$

19. Так как все дело сводится к определению объема лимона, образованного вращением (фиг. 14) сегмента CRQ около хорды CQ, то по предыдущей теореме должны быть даны его ось CQ, т. е. расстояние между плоскостями усекающих кругов, и диаметр его наибольшего круга, т. е. стрелка дуги CQ, равная разности $(LR - BC)$ радиусов наибольшего круга в данном лимоне и усекающих кругов. Для нахождения самой дуги CQ по тогдашним таблицам синусов опять предлагается пропорция:

$$\frac{CQ^2 + 2(LR - BC)}{2(LR - BC)} = \frac{200\,000}{\sin\operatorname{ver} \smile CR}.$$

20. Объем конического пояса, окружающего цилиндр на меньшем основании усеченного конуса, обозначенный в примечании 11 через T, на фиг. 15 равновелик сумме объемов призмы $KOPBCD$ и пирамиды $ABCD$, т. е., обозначая радиусы оснований через R и r, высоту OK через h, получим:

$$T = \text{пл. } KOP \cdot OC + \text{пл. } KOP \cdot \frac{AP - OC}{3} =$$

$$= \frac{R - r}{2} h \left(\frac{2\pi R}{3} + \frac{4\pi r}{4}\right) = \frac{\pi h (R - r)}{3} (R + 2r).$$

Для объема же цилиндра — c — получаем „пространственный треугольник“ COX, т. е. объем призмы $COXVKB$, который равен:

$$\text{пл. } KOVX \cdot \frac{OC}{2} = \pi r^2 h.$$

Отсюда получается прежнее отношение:

$$T : c = (R - r)(R + 2r) : 3r^2.$$

21. Затруднения, о которых здесь говорит Кеплер, показывают, что для него целью всех рассуждений, так же как и для древних геометров, является сравнение различных частей одного и того же тела друг с другом или с частями других более простых тел, но связанных с рас-

сматриваемыми какими-нибудь чисто геометрическими соотношениями, а не чисто аналитическая задача — нахождение величины данного объема в произвольных единицах.

22. Объем сфероида на фиг. 19 будет:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi AR^2 \cdot RC,$$

а объем сфероида на фиг. 20:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi RC^2 \cdot AR,$$

откуда

$$V_1 : V_2 = AR : RC.$$

23. Неправильность этого предположения Кеплера доказал уже Гульден прямым вычислением. С помощью формул для объема лимона (предложение 18) и объема сегмента сферы (предложение 7) это легко проводить, например, для сегмента IDK, дуга которого $\smile IDK$ составляет четверть окружности.

24. Именно, у параболы подкасательная делится вершиной пополам.

25. Точка F находится из пропорции:

$$\frac{CA - 2CV}{CV} = \frac{CV}{CF},$$

откуда

$$CA \cdot CF = CV^2 + 2CV \cdot CF,$$

или

$$CA \cdot CF + CF^2 = (CV + CF)^2,$$

или

$$CF \cdot AF = FV^2.$$

Примем F за центр гиперболы с осью $VF = a$, и пусть эта гипербола проходит через точку $B(x, y)$ и имеет уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если BC будет касательная, то

$$FC = x - \frac{y}{y'} = x - \frac{a^2y^2}{d^2x}.$$

Так как

$$AF = x,$$

то

$$CF \cdot AF = x^2 - \frac{a^2y^2}{b^2} = a^2 = FV^2,$$

т. е. оправдывается указанное соотношение.

26. Если принять за начало координат точку D, прямую DC за ось X и рассмотреть эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, проходящий через точку B, то, принимая во внимание, что y' в точке B отрицательно, получим: $CD = x - \frac{y}{y'}$, $AD = x$, откуда опять

$$AD \cdot CD = x^2 + \frac{a^2y^2}{b^2} = a^2 = ID^2.$$

Далее:

$$AI = x;\ IC = -\frac{y}{y'} = (a - x) = \frac{a\,(a - x)}{x},$$

откуда

$$AI : IC = \frac{x}{a}.$$

Но

$$\frac{AB}{BC} = -\frac{yy'}{y\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{b^2x}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}.$$

Следовательно, если $\frac{AI}{IC} > \frac{AB}{BC}$, то $\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2} > a^2b^4$, или $a^4y^2 + a^2b^4 - a^2b^2y^2 > a^2b^4$, т. е. $a > b$.

Если $\frac{AI}{IC} < \frac{AB}{BC}$, то $a < b$.

27. В случае круга $DB = DN$, а потому:

$$\frac{DC}{DB} = \frac{DN}{AD} = \frac{BC}{AB}, \quad \text{или} \quad \frac{DC - DN}{DN - AD} = \frac{BC}{AB},$$

т. е.

$$\frac{NC}{AN} = \frac{BC}{AB}.$$

28. Именно, подкасательные обеих парабол должны разделиться вершиной пополам, т. е. должны равняться одна другой, потому что абсциссы точек касания одни и те же.

29. Обозначим на фиг. 22 угол HNA через α, угол PNA через φ, радиус круга через r, площадь треугольника HCA через S, треугольника HQP через S'. Тогда относительные убывания этих площадей при убывании угла α на величину $d\alpha$ будут:

$$\frac{dS}{S} = \frac{r\cos\alpha}{r\sin\alpha}\,d\alpha \quad \text{и} \quad \frac{dS'}{S'} = \frac{r\cos\alpha}{r\sin\alpha - r\sin\varphi}\,d\alpha.$$

Следовательно, при α, близком к $\frac{\pi}{2}$, будем иметь по абсолютной величине $\frac{dS'}{S'} > \frac{dS}{S}$. С другой стороны, для площади S', близкой к P, будем иметь:

$$\frac{dS'}{S'} = \frac{\cos(\varphi + \Delta\varphi)}{\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi}\,d\alpha,$$

а для площади S, столь же близкой к A:

$$\frac{dS}{S} = \frac{\cos\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi}\,d\alpha.$$

Так как

$$\frac{\cos\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} - \frac{\cos(\varphi + \Delta\varphi)}{\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{2\cos\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} > 0,$$

то это и показывает, что площади S около A убывают быстрее, чем площади S' около P.

30. Отношение объемов цилиндров с диагональными сечениями AIC и AHC будет:

$$\frac{\text{об.}\,AIC}{\text{об.}\,AHC}=\frac{IN}{HM}\cdot\frac{IC}{HC}.$$

Так как $\frac{IC}{2}=\sin 45^\circ$, $\frac{HC}{2}=\sin\left(45^\circ+\frac{\smile IH}{2}\right)$, а $IN=$ $=\sin 90^\circ$; $HM=\sin(90^\circ-\smile IH)$, то при весьма малой $\smile IH$ будем иметь:

$$\frac{HC}{2}-\frac{IC}{2}>IN-HM.$$

С другой стороны, $HM>\frac{IC}{2}$, и, следовательно,

$$\frac{HC}{IC}>\frac{IN}{HM},$$

т. е.

$$HM\cdot HC>IC\cdot IN,$$

а потому

$$\text{об}\ AIC<\text{об.}\ AHC.$$

31. В приведенной таблице знаки + и — обозначают, что соответствующее значение диаметра основания немного больше или меньше приведенного целого числа. Объем 3080 соответствует высоте, равной $11^1/_2$, при которой диаметр основания получается $\sqrt{400-\frac{529}{4}}=16{,}36$, откуда

$$GA:GC=1:1{,}42<1:\sqrt{2}.$$

32. Так как $BK\cdot KG=FK\cdot KD$, и $AG<FK$, $BG>BK$, то $BG\cdot KG>AG\cdot KD$, или $\frac{BG}{AG}\cdot KG>KD$, т. е. $\sqrt{2}\,KG>KD$. Объем прибавленных сверху и снизу кирпичиков равен: $2\frac{DE^2}{2}\cdot KD=DE^2\cdot KD$, потому что KD есть диагональ их квадратного основания. У отнятых кирпичиков основания

имеют ту же площадь — $\frac{1}{2} DE^2$, а высота их равн $KG \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$; следовательно, объем четырех отнятых кирпичиков будет: $DE^2 \cdot KG \sqrt{2}$, т. е. больше объема двух прибавленных в силу неравенства $KG \sqrt{2} > KD$.

33. Так как $MO \cdot OL = GO \cdot OA$, и $BG \cdot OL < GO \cdot OA$, то $BG \cdot OL < GO \cdot GA$ или $\sqrt{2} \cdot OL < GO$.

Объем двух отнятых сверху и снизу кирпичиков равен: $2 \frac{1}{2} \cdot LM^2 \cdot GO$. Четыре прибавленные кирпичика с квадратными основаниями дают в сумме больше, чем приращение объема куба, которые, следовательно, меньше, чем $4 \frac{1}{2} \cdot LM^2 \cdot OL \frac{\sqrt{2}}{2} = NM^2 \cdot \sqrt{2} \cdot OL$, т. е. меньше отнятого объема.

34. Отношение объемов цилиндров AHC и AGC равно

$$\frac{HC^2 \cdot AH}{GC^2 \cdot AG} = \frac{CM \cdot AH}{CL \cdot AG} = \frac{CM \cdot \sqrt{AM}}{CL \cdot \sqrt{AL}},$$

$$\frac{AM}{AL} = \frac{2AM}{2AL} = \frac{2AM}{2AM - LM} \cdot \frac{2AM - LM}{2AL}.$$

Но

$$\frac{2AM - LM}{2AL} < \frac{2AM - 2LM}{2AL - LM} = \frac{CL}{CM},$$

потому что $CL = 2AL$;

$$\frac{2AM}{2AM - LM} < \frac{2AM - LM}{2AM - 2LM} = \frac{2AM - LM}{2AL} < \frac{CL}{CM}.$$

Следовательно, $\frac{AM}{AL} < \left(\frac{CL}{CM}\right)^2$, или $\sqrt{\frac{AM}{AL}} < \frac{CL}{CM}$,

откуда $\frac{\text{об. } AHC}{\text{об. } AOC} < 1$.

35. Для цилиндров ABC и AGC получаем:

$$\frac{\text{об.}\,ABC}{\text{об.}\,AGC}=\frac{BC^2\cdot AB}{GC^2\cdot AG}=\frac{CK\cdot\sqrt{AK}}{CL\cdot\sqrt{AL}};$$

$$\frac{CK}{CL}<\frac{CK-LK}{CL-LK}=\frac{2AL}{CL-LK}=\frac{CL}{CL-LK}<\frac{CL-LK}{2AL-LK}=\frac{CL-LK}{2AK},$$

т. е.

$$\frac{CK}{CL}<\frac{2AL}{CL-LK} \quad\text{и}\quad \frac{CK}{CL}<\frac{CL-LK}{2AK},$$

откуда

$$\left(\frac{CK}{CL}\right)^2<\frac{2AL}{2AK};\quad \frac{CK\sqrt{AK}}{CL\cdot\sqrt{AL}}<1.$$

36. В дальнейшем под заданным сопряжением понимается заданное отношение диаметра основания цилиндра к его высоте.

37. По определению сопряжения $\frac{CG}{GA}=\frac{CT}{TA}$, или $\frac{CG}{CT}=\frac{GA}{TA}$. Так как по условию $\frac{CG}{CT}<\frac{CG+GA}{CA}$, то и $\frac{GA}{TA}<\frac{CG+GA}{CA}$, откуда $\frac{CG+GA}{CT+TA}<\frac{CG+GA}{CA}$, или $CA<CT+TA$.

38. Описываемые в этой теореме соотношения выражаются следующими формулами:

$$VB=CT;\ AV-CT=AB;$$

$$AC^2=TC\cdot AV+TA^2;\ AC^2-AT^2=TC\cdot AV=BV\cdot AV;\quad (1)$$

$$AC^2-AG^2=GC^2;\ AG>AT;$$

$$GC^2<BV\cdot AV.$$

Следовательно, существует такой отрезок $VD<VA$, что

$$GC^2=VB\cdot VD=AC^2-AG^2.\quad (2)$$

Вычитая из (1) равенство (2), получаем:

$$AG^2 - AT^2 = VB\cdot(VA - AD) = VB\cdot DA. \qquad (3)$$

Затем

$$GC^2 - CT^2 = VB\cdot VD - VB^2 = VB\cdot BD. \qquad (4)$$

Так как из пропорции $\frac{AG^2}{GC^2} = \frac{AT^2}{CT^2} = \frac{AL}{LC}$ следует производная $\frac{AG^2 - AT^2}{GC^2 - CT^2} = \frac{AL}{LC}$, то, деля (3) на (4), получим:

$$\frac{VB\cdot DA}{VB\cdot BD} = \frac{AL}{LC}, \text{ или } \frac{DA}{BD} = \frac{AL}{LC} = \frac{AG^2}{GC^2}.$$

39. Из пропорции $\frac{BD}{DA} = \frac{GC^2}{AG^2}$ следует:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{GC^2 + AG^2}{GC^2},$$

откуда

$$AB = \frac{GC^2 + AG^2}{GC^2}\cdot BD.$$

Но $BD = VD - VB = \frac{GC^2}{VB} - VB = \frac{GC^2}{CT} - CT$, потому что $GC^2 = VB\cdot VD$ и $VB = CT$.

Следовательно,

$$AB = \left(\frac{GC^2}{CT} - CT\right)\frac{GC^2 + AG^2}{GC^2}.$$

40. Пусть

$$\frac{GC^2}{GA^2} = \frac{m}{n}; \quad VA = a; \quad CT = b; \quad AB = a - b.$$

Отсюда

$$\frac{GC^2 + GA^2}{GC^2} = \frac{m+n}{m} = \frac{AB}{BD}$$

по предыдущему примечанию. Следовательно,

$$BD = \frac{(a-b)\,m}{m+n}.$$

Так как

$$GC^2 = VB \cdot VD = VB \cdot (VB + BD) = VB^2 + VB \cdot BD,$$

то

$$GC^2 = l^2 + \frac{(a-b)\,mb}{m+n}.$$

41. Без рассмотрения промежуточных цилиндров искомая пропорция доказывается прямо из равенств:

$$\text{об. } ATCV = \frac{\pi\ TR}{4}\left(CT \cdot AV + \frac{AB^2}{3}\right),$$

$$\text{об. } CGAX = \frac{\pi \cdot CG^2}{4} \cdot AG = \frac{\pi}{4} \cdot VB \cdot BD \cdot AG,$$

откуда

$$\frac{\text{об. } ATCV}{\text{об. } CGAX} = \frac{CT \cdot AV + \frac{AB^2}{3}}{VB \cdot BD} \cdot \frac{TR}{AG}.$$

42. Дело сводится к следующим преобразованиям. Если диаметры оснований обозначим через D и d, то имеем:

$$2Dd + (D-d)^2 = D^2 + d^2,$$

$$3Dd + (D-d)^2 = D^2 + d^2 + (\sqrt{Dd})^2,$$

$$Dd + \frac{(D-d)^2}{3} = \frac{D^2 + d^2 + (\sqrt{Dd})^2}{3}.$$

Но объем усеченного конуса — T — относится к объему C цилиндра той же высоты, построенного на большем основании, как $\left(Dd + \frac{(D-d)^2}{3}\right) : D^2$.

Следовательно,

$$T : C = \frac{D^2 + d^2 + (\sqrt{Dd})^2}{3} : D^2.$$

43. Обозначим объем усеченного конуса $CTAV$ через T, объем цилиндра $CEAS$ через C, а цилиндра $CTRS$ через c. Тогда получим:

$$\frac{C}{c}=\frac{CE^2}{CT^2};\quad \frac{C-c}{c}=\frac{CE^2-CT^2}{CT^2};$$

$$CE^2-CT^2=2CT\cdot TE+TE^2=CT\cdot AB+\frac{AB^2}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{C-c}{c}=\frac{CT\cdot AB+\frac{AB^2}{4}}{CT^2}. \tag{1}$$

Затем

$$\frac{T}{c}=\frac{CT\cdot AV+\frac{AB^2}{3}}{CT^2},$$

откуда

$$\frac{T-c}{c}=\frac{CT\cdot AB+\frac{AB^2}{3}}{CT^2}, \tag{2}$$

потому что

$$CT\cdot AV-CT^2=CT\cdot(AV-CT)=CT\cdot AB.$$

Вычитая из (2) равенство (1), получим:

$$\frac{T-C}{c}=\frac{\frac{AB^2}{12}}{CT^2},$$

и, следовательно,

$$\frac{T-C}{C}=\frac{\frac{AB^2}{12}}{CE^2},$$

что и утверждается.

44. Так как $AC\leqslant CT+AT$ и $AV\leqslant AC+CV\leqslant CT+$ $+AT+CV=CT+2AT$, то $1\leqslant\frac{AV}{CT}\leqslant 1+2\,\frac{AT}{CT}$, т. е.

чем больше отношение $\frac{AT}{CT}$, тем в больших границах меняется отношение диаметров $\frac{AV}{CT}$.

45. Рассмотрим изменение отношений $\frac{CB^2}{CH^2}$ и $\frac{AH}{AB}$ при неподвижной точке H и при перемещении точки B от G до A. Первое возрастает от значения $\frac{CG^2}{CH^2}$ до $\frac{CA^2}{CH^2}$ — величины конечной, а второе тоже возрастает от значения $\frac{AH}{AG}$ до бесконечности. Но так как цилиндр CGA наибольший, то $CG^2 \cdot AG > CH^2 \cdot AH$, или $\frac{CG^2}{CH^2} > \frac{AH}{AG}$. Следовательно, сначала отношение $\frac{CB^2}{CH^2}$ больше отношения $\frac{AH}{AB}$, а потом меньше. Значит, найдется такое положение точки B, при котором эти отношения равны, т. е. $CB^2 \cdot AB = CH^2 \cdot AH$, что и дает равновеликость цилиндров CHA и CBA.

46. Обозначим на фиг. 24 для краткости: $AV = e$; $CT = c$; $AT = d$; $TR = h$; $CG = a$; $AG = b$; тогда

$$CE = \frac{e+c}{2}; \qquad AB = e - c; \quad AR = \frac{e-c}{2},$$

поэтому будем иметь:

$$\frac{\text{об}\cdot AVCT}{\text{об}\cdot AXCG} = \frac{ce + \left(\frac{e-c}{3}\right)^2}{a^2} \cdot \frac{h}{b} =$$

$$= \frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2}{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2}{a^2} \cdot \frac{h}{b}.$$

Кеплер, во-первых, доказывает, что

$$\frac{d}{h} > \frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2}{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2}.$$

Для этого рассматриваем разности:

$$d^2 - h^2 = \left(\frac{e-c}{2}\right)^2;$$

$$\left[\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{e+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right).$$

В них

$$h^2 < d^2 = \frac{1}{2}c^2 < \frac{1}{2}\left(\frac{e+c}{2}\right)^2; \quad d^2 < \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2\right].$$

Потому к этим разностям можно применить следующую лемму: Если положительные числа x, y, x', y', z удовлетворяют условиям: $x - y = z$; $x' - y' = 3z$; $2x' \leqslant x$; $2y' < y$, то $\frac{x'}{y'} > \left(\frac{x}{y}\right)^6$. Действительно:

$$\left(\frac{y'}{x'}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(1 - \frac{3z}{x'}\right)^{\frac{1}{6}} < 1 - \frac{z}{2x'} \leqslant \frac{y}{x},$$

т. е.

$$\frac{y'}{x'} < \left(\frac{y}{x}\right)^6, \quad \text{или} \quad \frac{x'}{y'} > \left(\frac{x}{y}\right)^6.$$

Эта лемма в нашем случае дает:

$$\frac{d^2}{h^2} > \left\{\frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2}{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2}\right\}^6,$$

откуда

$$\frac{d}{h} > \left\{\frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2}{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2}\right\}^3 > \frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2}{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2},$$

что и требовалось доказать.

47. Во-вторых, надо доказать, что $\frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2}{a^2} < \frac{b}{d}$. Для этого Кеплер вводит величину AH по условию: $\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 = ce + \left(\frac{e-c}{2}\right)^2 = c(e+AH)$, так что $c \cdot AH = \left(\frac{e-c}{2}\right)^2$. Но если обозначим $BD = y$, так что $AD = \frac{y}{2}$ согласно тому, что $a^2 = 2b^2$, то по теореме VII имеем: $a^2 = c(c+y)$.

Следовательно,

$$\frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2}{a^2} = \frac{e+AH}{c+y}.$$

Так как $\frac{b^2}{d^2} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{c+y}{c}$, то остается только доказать, что $\frac{c+AH}{c+y} < \sqrt{\frac{c+y}{c}}$. Это неравенство справедливо при $AH \leqslant 0$ на основании леммы: Если $m > p > q$ и $m - p = \frac{p-q}{2}$, то $\frac{m}{p} < \sqrt{\frac{p}{q}}$. Действительно, положив $m = p + z$; $p = q + 2z$, получим:

$$\frac{q}{p} = 1 - \frac{2z}{p}; \; \sqrt{\frac{q}{p}} < 1 - \frac{z}{p} < 1 - \frac{z}{m} = \frac{p}{m},$$

или

$$\frac{m}{p} < \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Так как $e - (c+y) = AD = \frac{y}{2}$; $(c+y) - c = y$, то по приведенной лемме и имеем:

$$\frac{e}{c+y} < \sqrt{\frac{c+y}{c}}.$$

48. Под круговым законом Кеплер подразумевает такое изменение величины, при котором она проходит через наибольщее или наименьшее значение, т. е., по-современному, рассматривается обращение в нуль производной. Эти первые начатки диференциального исчисления вскоре после работ Кеплера были развиты исследованиями Ферма.

49. Кеплер понимал, что эта задача алгебраически приводит к уравнению выше второй степени. Но так как с тогдашней алгеброй Кеплер был знаком мало и пользоваться ею не любил, то относительно настоящей и следующей задач он ограничивается мало понятными замечаниями о составлении соответствующих уравнений. Гебер, на которого здесь ссылается Кеплер, вероятно, арабский математик XI столетия Джабер-ибн-Афли. Коссой и косситами назывались в то время алгебра и занимающиеся ею математики. Это название является искажением итальянского arte della cosa, введенного в свою очередь благодаря буквальному переводу образных арабских названий для различных членов уравнений.

50. Заключительные стихи представляют перефразировку стихов Катулла из его знаменитой оды к Лесбии.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редакция *С. А. Каменецкого*. Оформление *В. Ф. Зазульской*.
Корректура *А. Х. Артюховой*. Выпускающая *Т. С. Малышева*.
Сдано в производство 29/VI 1934 г. Подписано к печати 31/VII 1934 г.
Индекс Т 12-5-4. Печатных листов $11\frac{1}{4}$. Тираж 4000.
Формат 72×105 Печ. зн. в л. 46400.
Заказ № 3131 ГТТИ № 109. Уполномоченный Главлита № В-100854

1-я Образцовая тип. Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига",
Москва, Валовая, 23

Отпечатано с матриц в 1-й Журн. тип. ОНТИ Москва, Денисовский, 30

ИОГАНН КЕПЛЕР

СТЕРЕОМЕТРИЯ ВИННЫХ БОЧЕК

ИОГАНН КЕПЛЕР