

Г. Г. СКИЛЛИНГ



ВВЕДЕНИЕ  
В ТЕОРИЮ  
**Э**ЛЕКТРОМАГНИТНЫХ  
ВОЛН



1947

---

СВЯЗЬИЗДАТ

## Таблица I

**Сравнение единиц системы Гаусса или симметричной системы, электростатических единиц, электромагнитных единиц и практических единиц или единиц системы Джорджи**

Электрические единицы	Обозначения
1 единица заряда в системе Гаусса = = 1 C <sub>m</sub> GSE = $\frac{1}{c}$ C <sub>m</sub> GSM = $\frac{10}{c}$ кулон	q
1 единица плотности заряда в системе Гаусса = = 1 C <sub>m</sub> GSE = $\frac{1}{c}$ C <sub>m</sub> GSM	ρ
1 единица тока в системе Гаусса = = 1 C <sub>m</sub> GSE = $\frac{1}{c}$ C <sub>m</sub> GSM = $\frac{10}{c}$ ампер	i
1 единица напряжённости электрического поля в системе Гаусса = = 1 C <sub>m</sub> GSE = c C <sub>m</sub> GSM	E
1 единица плотности электрического потока (диэлектрического смещения) в системе Гаусса = 1 C <sub>m</sub> GSE = c C <sub>m</sub> GSM	D
1 единица потенциала в системе Гаусса = = 1 C <sub>m</sub> GSE = c C <sub>m</sub> GSM = c · 10 <sup>-8</sup> вольт	φ
1 единица ёмкости в системе Гаусса = = 1 C <sub>m</sub> GSE = $\frac{1}{c^2}$ C <sub>m</sub> GSM = $\frac{10^9}{c^2}$ фарад	C
1 единица сопротивления в системе Гаусса = = 1 C <sub>m</sub> GSE = c <sup>2</sup> C <sub>m</sub> GSM = c <sup>2</sup> · 10 <sup>-9</sup> ом	r
1 единица проводимости в системе Гаусса = = 1 C <sub>m</sub> GSE = $\frac{1}{c^2}$ C <sub>m</sub> GSM = $\frac{10^9}{c^2}$ мо на сантиметр	γ

### Магнитные единицы

1 единица магнитной напряжённости в системе Гаусса = = 1 C <sub>m</sub> GSM (эрстед) = $\frac{1}{c}$ C <sub>m</sub> GSE	H
1 единица плотности магнитного потока (магнитной индукции) в системе Гаусса = 1 C <sub>m</sub> GSM (гаусс) = $\frac{1}{c}$ C <sub>m</sub> GSE	B
1 единица магнитного потока в системе Гаусса = = 1 C <sub>m</sub> GSM (максвелл) = $\frac{1}{c}$ C <sub>m</sub> GSE = 10 <sup>-8</sup> вебер	Φ
1 единица магнитодвижущей силы в системе Гаусса = = C <sub>m</sub> GSM (гильберт) = $\frac{1}{c}$ C <sub>m</sub> GSE = $\frac{10}{4\pi}$ ампер-витков	
1 единица индуктивности в системе Гаусса = 1 C <sub>m</sub> GSM (абгенри) = = $\frac{1}{c^2}$ C <sub>m</sub> GSE = 10 <sup>-9</sup> генри	L

Везде в таблице  $c = 3 \cdot 10^{10}$  (или более точно  $c = 2,998 \cdot 10^{10}$ ).

Диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  свободного пространства равна единице в системе единиц Гаусса и в электростатической системе единиц.

Магнитная проницаемость  $\mu$  свободного пространства равна единице в системе единиц Гаусса и в электромагнитной системе единиц.

При использовании систем Гаусса, электростатической и электромагнитной, неэлектрические величины надо выражать в единицах системы сантиметр-грамм-секунда, т. е. время следует выражать в секундах, расстояние в сантиметрах, силу в динах (а не в граммах), работу в эргах. В системе Джорджи (метр-килограмм-секунда), наоборот, расстояние берётся в метрах, сила в джоулях на метр (иногда называют „ньютоном“), работа в джоулях и мощность в ваттах.

Г. Г. СКИЛЛИНГ

---

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО  
*А. А. Колосова и Л. А. Мееровича*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛИТЕРАТУРЫ  
ПО ВОПРОСАМ СВЯЗИ И РАДИО

---

МОСКВА

1947

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Современная радиотехника, практически использующая сверхвысокие частоты, особенно в области радиолокации, радионавигации, телевидения, радиорелейных линий и т. п. и проявляющая определённую тенденцию к ещё более широкому их применению, требует от специалистов ясного понимания принципов и основных методов электродинамики.

Привычные для многих радиоспециалистов квазистационарные представления электротехники оказываются уже непригодным здесь средством. Круг возможностей, даже в чисто практической работе, для лиц, не обладающих достаточной теоретической подготовкой в области электродинамики, становится всё более и более узким. В связи с этим радиоинженеры, а также студенты радиотехнических вузов, проявляют интерес к электродинамике.

Выпускаемая на русском языке книга Г. Г. Скиллинга является элементарным введением в классическую теорию электромагнетизма, созданную Максвеллом.

Книга представляет собой результат изложения в довольно популярной форме основных положений и важнейших для радиотехники приложений теории электромагнетизма, достаточных для того, чтобы, хотя бы в общих чертах, на основе этой теории, понять главное из электродинамических явлений, используемых в практической радиотехнике (излучение антенн, движение энергии в волноводе и др.). В заключение каждой главы читателю предлагается ряд задач, тесно связанных с остальным изложением; решение этих задач составляет органически неотъемлемый элемент процесса изучения предмета.

При редактировании перевода возникли известные трудности в области терминологии в связи с тем, что автором был введён ряд новых терминов, некоторые из которых нам представляются



по меньшей мере сомнительными. Однако, чтобы не нарушать структуру книги, в переводе сохранены почти все введённые автором термины.

Книгу можно рассматривать как элементарное введение к изучению более фундаментальных книг по электродинамике на русском языке, часть из которых указана в списке, помещённом в конце книги.

*А. А. КОЛОСОВ*

*Л. А. МЕЕРОВИЧ*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В настоящие дни широкого использования ультравысокой частоты стало обычным, что инженеры сталкиваются с вопросами о волнах, волноводах, излучении, отражении, поляризации и т. п., которые ещё совсем недавно рассматривались как вопросы в значительной степени академические. Теперь же, отчасти в результате войны, эти понятия понадобились в инженерной практике.

Поскольку знакомство с электромагнитными волнами оказалось необходимым для столь широкого круга лиц, представляется своевременным опубликование материала, который в течение нескольких лет изучался по литографированным конспектам лекций.

Целью настоящей книги, так же как и соответствующего курса лекций, является введение в изучение электромагнитных волн. Как показал опыт, принятый метод изложения основных законов волновых процессов и, в частности, основных идей, заключённых в уравнениях Максвелла, понятен студентам. Кроме того, эти идеи рассматриваются в их применении на простых примерах, пока не оказываются полностью освоенными. Основное внимание уделено физическим представлениям, однако, это делается не в ущерб ни математической строгости, с одной стороны, ни техническим приложениям, с другой. Таким образом, радиоинженеру книга может быть полезна для приобретения знаний, необходимых при рассмотрении антенных устройств, фидеров, волноводов, отражающих зеркал, резонаторов и электромагнитных рупоров; радиоинженер найдёт применение теории волн даже к приёмной антенне или к вертикальному излучателю радиовещательного передатчика. Для физика, который меньше интересуется этими практическими применениями, книга может быть полезна как введение в более серьёзные работы по электромагнитной теории.

Содержание книги излагалось в высших учебных заведениях, а также группе радиоинженеров-практиков на специальных курсах. Книга не требует от читателей обязательного предварительного знакомства с электромагнитной теорией: от читателя требуется только знание общего курса физики и математики в объёме анализа. В книге используется векторный анализ, однако, не предполагается, что читатель должен иметь какое-либо предварительное знакомство с ним.

Первые главы книги относятся к электростатике, использованию векторного анализа и аналогичным вопросам, которые могут охладить нетерпеливого читателя. Эти первые главы покажутся одним очень интересными, другим скучными. Во всяком случае их нельзя избежать. Так же, как нельзя получить волны без электрического и магнитного полей, так нельзя понять и волновой процесс до тех пор, пока не усвоены основные понятия теории поля.

Уравнения Максвелла, приведённые, примерно, в середине книги, даны как логическое завершение предыдущего. С помощью этих уравнений далее легко развиваются вопросы излучения и распространения волн, а эти вопросы приводят к краткому рассмотрению антенн, фидеров и волноводов.

Задачи даны в каждой главе и являются составной частью книги. Большинство этих задач дополняют некоторые идеи, не получившие полного рассмотрения в тексте. Они расположены в том же порядке, что и материал текста: как правило, читателю следует изо дня в день решать по одной—две задачи. Кроме того, надо учесть — и это очень важно, — что многие понятия являются для изучающего книгу новыми, и перестанут быть чуждыми ему лишь после непрерывного и повторяющегося применения.

Общий метод изложения материала в книге заимствован из курса, который раньше вёл доктор М. С. Валларта в Массачусетском технологическом институте. Я надеюсь, что отличительные черты и характер этого курса нашли некоторое отражение в книге.

*Г. Г. СКИЛЛИНГ.*

СТАНФОРДСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, ИЮЛЬ 1942 г.

---

## Глава I

### ОПЫТЫ С ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

**Поля.** Изучение электричества обычно начинают с теории электрических цепей. При этом рассматривается ток, текущий под действием приложенного напряжения в проводе, через сопротивление, индуктивность и ёмкость. Такое рассмотрение является естественным, так как электрические цепи для большинства изучающих сравнительно хорошо знакомы.

Однако, историческое развитие вопроса было прямо противоположным: магнитные и электрические *поля* являлись хорошо изученными до того, как была создана теория электрических цепей и даже до того, как был открыт закон Ома. Как будет видно из дальнейшего, теория электрических цепей может рассматриваться как частный случай общей теории электрических полей.

Существуют различные виды полей. Бывают векторные поля и поля скалярные. Гравитационное поле, например, является векторным полем. Рассмотрим гравитационное поле внутри комнаты. Если тело с единичной массой поместить в какую-нибудь точку пространства внутри комнаты, то на него будет действовать сила. Здесь мы имеем особенно простой пример силового поля, так как во всех точках комнаты сила практически одна и та же; она неизменна по величине и всюду направлена вертикально вниз. Это — *векторное* поле, так как оно не может быть определено полностью до тех пор, пока неизвестна как его величина, так и направление во всех точках. Силовые поля всегда являются векторными полями.

*Скалярное* поле можно иллюстрировать на примере температурного поля. Температурное поле будет определено, если измерена температура каждой точки комнаты с помощью термометра. Каждая точка характеризуется только величиной температуры, так как с температурой здесь не связано какое-нибудь направление. Таким образом, температурное поле является *скалярным* полем.

Электрические и магнитные поля являются векторными полями. Электрическое поле в некоторых отношениях является простейшим и будет рассмотрено в первую очередь.

**Опыт I.** *Электрическое поле.* Экспериментально установлено, что вокруг тела с электрическим зарядом имеется силовое поле.

Это поле сил обнаруживает себя, когда пробная частица, несущая малый электрический заряд, оказывается помещённой в какой-либо точке пространства вблизи заряжённого тела. Если она помещена в точке  $a$  рис. 1, то действующая сила будет  $F_a$ ; в точках  $b$  и  $c$  будут силы  $F_b$  и  $F_c$ . Если изменить заряд пробной частицы, то и силы, действующие на частицу, пропорционально изменятся. Этот опыт, который мы будем называть опытом I, позволяет дать определение электрического поля.

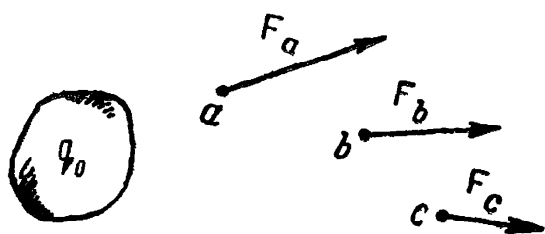


Рис. 1.

Согласно этому определению, *напряжённость электрического поля* в каждой

точке равна по величине и направлению силе, действующей на помещённую в данную точку элементарную частицу, несущую единичный заряд положительного электричества.

Таким образом,

$$F = \alpha q E, \quad (1)$$

где  $F$  и  $E$  — соответственно действующая сила и напряжённость электрического поля, а  $q$  — заряд частицы: Заметим, что это уравнение не относится только к одной какой-либо точке, а применимо ко *всем* точкам. Таким образом, выражение (1) является уравнением *поля*, а так как оно определяет не только величину, но и направление, то это есть уравнение *векторного* поля.

**Единицы.** Величина  $\alpha$  является лишь коэффициентом пропорциональности и её значение определяется выбранной системой единиц. Вопрос о единицах и о размерностях заслуживает особого внимания. Он становится особенно сложным вследствие того, что почти каждый автор вносит в систему единиц те или другие изменения с тем, чтобы приспособить её к своим индивидуальным требованиям.

В этой книге невозможно и нецелесообразно подробное обсуждение данного вопроса, однако, краткое его рассмотрение можно считать полезным<sup>1)</sup>.

Наиболее распространена «практическая» система электрических единиц, в которую входит вольт, ампер и ом. Расширенной является система *MkGS* (*метр-килограмм-секунда*) или система *Джорджи*, в которую включены также магнитные и механические величины; таким образом, появилась обширная система единиц,

<sup>1)</sup> Превосходный обзор дан Е. Weber'ом. См. «Physical Units and Standards» в раздел 3 книги „*Handbook of Engineering Fundamentals*“, John Wiley & Sons, N. Y. 1936.

основанная на практических величинах. Эта система, несмотря на отсутствие единой точки зрения по отдельным вопросам, была одобрена на различных международных конференциях<sup>1)</sup> и обладает рядом замечательных преимуществ. Вероятно, она найдёт широкое применение, особенно среди инженеров-электриков.

«Электромагнитная» и «электростатическая» системы обычно изучаются в курсе физики. Первая из них удобна при рассмотрении вопросов, относящихся к магнетизму, вторая — к электростатике. Обе они используют механические единицы системы *CmGS* (*сантиметр-грамм-секунда*).

Единицы, входящие в электромагнитную систему, называют теми же терминами, которые соответствуют «практическим» единицам, но добавляют приставку *аб*, например, *абвольт* и *абом*, а в названиях единиц электростатической системы добавляют приставку *стат*, например, *статвольт* и *статом*.

Наиболее часто используемые единицы как электромагнитной, так и электростатической системы объединены в гауссовой или «симметричной» системе. Преимуществом этой системы является упрощение электромагнитных уравнений, особенно тех, которые относятся к волнам, поэтому значительная часть литературы по электромагнитной теории использует гауссовы единицы.

Гауссовы единицы электричества идентичны с «электростатическими» единицами (*статвольт*, *статампер*, *статом* и т. д.); гауссовы единицы магнетизма те же, что и «электромагнитные» единицы (*эрстед*, *гаусс*, *максвелл* и *гильберт*). Здесь используются также механические единицы системы *CmGS*. Таким образом, в отношении статического электричества и магнетизма гауссова система аналогична известным «электростатической» и «электромагнитной» системам. Однако, в гауссовой системе ток, как электрическая величина, измеряется в *статамперах*. Когда ток входит в те же уравнения, что и магнитные единицы, оказывается необходимым введение коэффициента пропорциональности *c*. В дальнейшем изложении гауссовы единицы будут использованы и, начиная с гл. VII, многие из уравнений будут содержать константу *c*. Она представляет собой отношение одного *абампера* к одному *статамперу* и численно почти в точности равна  $3 \cdot 10^{10}$ .

В гауссовой системе как магнитная проницаемость, так и диэлектрическая постоянная свободного пространства (вакуума)

---

<sup>1)</sup> «I. E. C. Adopts MKS System of Units», Arthur E. Kennelly, *Trans. AIEE*, vol. 54, 1935, p.p. 1373—1384. «Recent Developments in Electrical Units», Arthur E. Kennelly, *Electrical Engineering*, vol. 58, Febr. 1939, p.p. 78—80. «Revision of Electrical Units», E. G. Crittenden, *Electrical Engineering* vol. 59, Apr. 1940, p.p. 160—163.

равны единице<sup>1)</sup>. В табл. 1 (помещённой на внутренней стороне обложки) гауссовы единицы электричества и магнетизма сопоставляются с электромагнитными и электростатическими единицами  $\text{cmGS}$  ( $\text{emu}$  и  $\text{esu}$ ), а также с практическими единицами системы Джорджи ( $\text{MkGS}$ ).

Помимо рассмотренных находит применение также много других систем единиц, при чём выбор системы зависит от специфики задач, которые приходится решать.

Имеется несколько легко запоминающихся соотношений, которые помогают оценке значения единиц в гауссовой системе. *Статвольт* равен 300 вольтам. *Статфарада* приблизительно равна одной микрофараде. *Статом* имеет величину около миллиона мегом. *Статампер* равен  $1/3000$  микроампера.

Абампер равен 10 амперам, но эта величина не входит в гауссову систему. Гауссова единица *абгенри* представляет собой одну миллионную миллигенри. Из сказанного видно, что в гауссовой системе используются единицы, соответствующие весьма малым токам, чрезвычайно большим сопротивлениям и средним, а иногда и большим напряжениям. Это её существенный недостаток.

В гауссовой системе так же, как в известной электростатической системе, сила выражена в динах,  $\alpha = 1$  и уравнение (1) приобретает вид

$$F = qE. \quad (2)$$

Этим уравнением определяется электрическое поле.

Определив электрическое поле, можно изучить его свойства. Каким образом, например, оно расположено в пространстве?

С этой целью необходимо провести ряд опытов. Мы рассмотрим три опыта с пробной частицей. Эти опыты не предлагаются в качестве практических экспериментов, которые должны быть выполнены в лаборатории; их было бы трудно осуществить. Однако, они являются чрезвычайно полезными для обоснования теории. Для целей нашей дискуссии мы предположим, что эти опыты были осуществлены с результатами, указанными дальше.

<sup>1)</sup> Иногда применяются также «рационализированные системы единиц. „Рационализация“, как указывает Crittenden, „означает определение единиц таким путём, чтобы исключить коэффициент  $4\pi$ , который неизбежно появляется в некоторых уравнениях. Это позволяет сделать последние более логичными и удобными. Когда гауссова система „рационализируется“, она превращается в систему Лоренца, в которой магнитная проницаемость свободного пространства равна  $4\pi$ , а диэлектрическая постоянная  $\frac{1}{4\pi}$ , с соответствующим изменением в остальных единицах“.

В „нерационализированной“ системе  $\text{MkGS}$  магнитная проницаемость свободного пространства равна  $10^7$ , а диэлектрическая постоянная  $\frac{1}{9} \cdot 10^{-9}$ ; „рационализированные“ значения  $\text{MkGS}$  соответственно равны  $4\pi \cdot 10^7$  и  $\frac{1}{36} \pi \cdot 10^{-9}$ .

**Опыт II.** Пробная частица, несущая малый электрический заряд, движется в пространстве, в котором имеется электрическое поле. Если частица движется по замкнутому пути, т. е. возвращается в ту же точку, из которой она начала движение, то никакой работы не производится ни самой частицей, ни над частицей. Такое движение, примерно, показано на рис. 2 пунктирной линией. При удалении частицы от заряжённого тела, создающего электрическое поле (показанное стрелками  $E$ ), электрическое поле совершает работу над частицей. Но когда частица приближается обратно к заряжённому телу, проходя вторую половину пути, она должна совершить такую же работу, двигаясь против силы поля. Следует заметить, что это

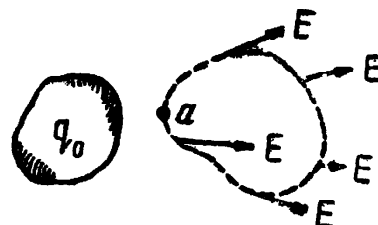


Рис. 2.

заключение находится в соответствии с принципом сохранения энергии. Если бы частица возвращалась к начальной точке с некоторым приращением энергии, то, совершая снова замкнутый путь, и продолжая таким образом обход, она каждый раз выигрывала бы немного в энергии без соответствующих потерь энергии в других частях системы. Это бы означало возможность вечного движения и противоречило принципу сохранения энергии. Точно так же невозможно, чтобы частица могла вернуться в начальную точку с потерей энергии, так как предполагается, что трение отсутствует (полная энергия системы при этом уменьшилась бы).

Результаты опыта II совершенно не зависят от траектории, по которой перемещается пробная частица; она может быть круговая, эллиптическая, квадратная, или изображаться любой замкнутой кривой. Выводы также не зависят от того, каковы источники электрического поля; поле может создаваться одним или несколькими заряжёнными телами, или же пространственным зарядом.

Заряд, создающий электрическое поле, не должен каким-либо образом изменяться, пока пробная частица совершает свой замкнутый путь, поскольку проводится *электростатический* опыт. Поэтому заряд пробной частицы должен быть очень мал, чтобы его присутствие заметно не изменяло распределения основных зарядов.

Так как энергия равна произведению силы на расстояние и полная энергия равна сумме или интегралу элементарных энергий, соответствующих приращениям расстояний вдоль замкнутого пути, то, следовательно,

$$\oint F ds = 0.$$



Поскольку силовое поле и электрическое поле связаны постоянным коэффициентом, то в соответствии с ур-нием (2), получаем

$$\oint E ds = 0. \quad (3)$$

Это выражение представляет собой криволинейный интеграл, при чём  $s$  является расстоянием вдоль пути интегрирования. Маленький кружок, помещённый на знаке интеграла, означает, что интегрирование ведётся по *замкнутому* пути. Это обозначение будет более подробно разъяснено в гл. II.

**Опыт III.** Замкнутая поверхность расположена в пространстве. Она может быть различной формы: эллипсоидальной, кубической или же даже неправильной, но должна быть полностью замкнутой и не может быть, например, сферой с отверстием в ней. Поверхность эта является воображаемой и нужна только для того, чтобы отделить внутреннее пространство от внешнего.

Выберем воображаемую замкнутую поверхность таким образом, чтобы она не проходила через твёрдые или жидкие тела (это ограничение будет в дальнейшем отброшено, но сейчас оно упрощает рассмотрение вопроса). С точки зрения теории предпочтительнее рассматривать случай, когда воображаемая поверхность не проходит через какую-либо материальную субстанцию, включая воздух. Однако, воздух изменяет результаты опыта III меньше, чем на десятую долю процента, что обычно бывает несущественно.

Опытом III можно воспользоваться для измерения напряжённости электрического поля (с помощью пробной частицы) в каждой точке замкнутой поверхности. Для удобства разделим поверхность на большое число малых участков, каждый из которых имеет площадь  $da$ , как показано на рис. 3. Тогда можно будет определить нормальную компоненту электрического поля на малой площадке  $da$ . Если нормальная компонента направлена наружу, то её считают положительной, если же внутрь, то отрицательной. Далее умножим все нормальные компоненты на соответствующие площади и просуммируем результаты [как это сделано в левой части ур-ния (4)]. Если этот опыт повторить для всех возможных

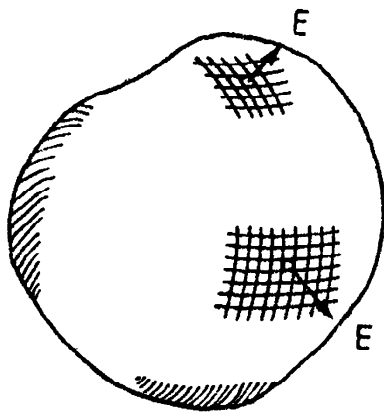


Рис. 3.

поверхностей и для всех условий, которые можно себе представить, то мы придём к заключению, что результаты указанного суммирования пропорциональны сумме электрических зарядов, заключённых внутри той поверхности, для которой

производятся измерения. Если  $h$  — константа, а  $q$  — сумма зарядов внутри поверхности, то

$$\oint E da = hq. \quad (4)$$

Интеграл в этом выражении берётся по поверхности; а соответствует площади. Малый кружок на знаке интеграла означает, что в данном случае интегрирование ведётся по всей *замкнутой* поверхности.

Когда применительно к рис. 3 суммирование нормальных составляющих  $E$  по всей поверхности даёт нуль, то это означает, что внутри поверхности нет электрических зарядов; или же если имеется какой-то положительный заряд, то есть и отрицательные заряды, сумма которых равна положительному заряду.

Но если результат суммирования зарядов внутри поверхности не равен нулю, то результат суммирования напряжённости электрического поля по всей поверхности будет пропорционален сумме этих зарядов [как в ур-нии (4)]. Величина коэффициента пропорциональности  $h$  зависит от выбора единиц, в которых выражены  $E$  и  $q$ ; для гауссовых единиц  $h = 4\pi$  и ур-ние (4) для свободного пространства принимает вид

$$\oint E da = 4\pi q. \quad (5)$$

**Опыт IV.** Повторим теперь опыт III, производя на этот раз измерения напряжённости электростатического поля в точках, лежащих на воображаемой поверхности, находящейся в масле. Как и раньше, напряжённость поля будем измерять путём определения силы, действующей на заряжённую пробную частицу, но в то время как в опыте III заряжённая частица находилась в воздухе (или точнее в вакууме), теперь каждое измерение должно быть сделано с частицей, помещённой в масло. Величина интеграла ур-ния (5), соответствующая определённой сумме электрических зарядов внутри замкнутой поверхности, будет в данном случае отличаться от значения, вычисленного для той же суммы электрических зарядов, находящихся внутри замкнутой поверхности, помещённой в воздушную среду.

Для нефти экспериментально найденное значение интеграла ур-ния (5) будет равно, примерно, половине соответствующего значения в воздухе. Если опыт повторить для других веществ, то будут найдены другие, отличные значения. Чтобы обобщить ур-ние (5), установим для каждого вещества коэффициент пропорциональности, называемый *диэлектрической постоянной*; обозначая этот коэффициент буквой  $\epsilon$ , переписываем ур-ние (5) в общей форме

$$\oint \epsilon E da = 4\pi q. \quad (6)$$

Коэффициент  $\epsilon$  является физической константой вещества, в котором измеряется  $E$ ; его величина несколько зависит от температуры и других физических факторов. Для большинства масел, которые являются производными нефти, значение диэлектрической постоянной лежит между 2 и 2,5. Для хлопкового и оливкового масла она, примерно, равна 3. Для этилового спирта при комнатной температуре величина  $\epsilon$  приблизительно равна 25, а для чистой дистиллированной воды, примерно, 80.

Уравнение (6) часто встречается в другой форме, когда взамен произведения  $\epsilon E$  подставляется величина  $D$

$$\oint D da = 4\pi q. \quad (7)$$

В завершение опыта IV проведём измерения с поверхностями, которые проходят через несколько различных веществ. Результаты экспериментов показывают, что уравнение (6) останется верным, даже если поверхность интегрирования проходит через различные вещества или через вещество с неоднородными свойствами. Так например, поверхность может проходить частично в воздухе, частично в масле и всё же уравнение (6) останется справедливым.

Результатам указанных экспериментов легко придать наглядность, используя понятие потока смещения. Силовые линии дают направление электрического поля. Более того, эти линии прово-

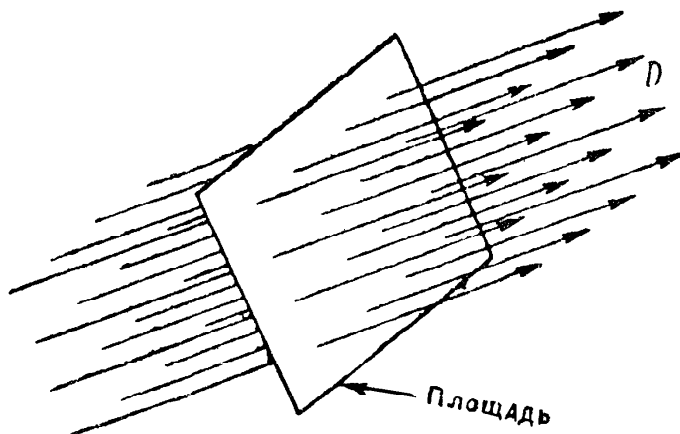


Рис. 4.

дятся таким образом, что каждая из них характеризует величину электрического поля. Если, например, электрическое поле напряжённости  $E$  постоянно на плоской поверхности и перпендикулярно к этой поверхности, как на рис. 4, то число линий поля, проходящих через поверх-

ность, находят, умножая напряжённость поля  $E$  на площадь поверхности и на диэлектрическую постоянную вещества.

Если электрическое поле не направлено нормально к поверхности, то поток равен произведению площади на диэлектрическую постоянную и на *нормальную составляющую* поля. В предельном случае, когда поле параллельно поверхности, нормальная составляющая отсутствует и поток не пересекает поверхность. Общим

выражением, которое охватывает все случаи, и поэтому может быть взято как определение *потока*, будет выражение

$$\text{поток смещения} = \int \epsilon E da. \quad (8)$$

Обозначения, относящиеся к этому выражению, поясняются в следующем параграфе, однако, их смысл ясен из предыдущего обсуждения. Вместо ур-ния (8) можно также написать

$$\text{поток смещения} = \int D da, \quad (9)$$

откуда следует, что векторная величина  $D$ , которую мы первый раз использовали в ур-нии (7), является *плотностью потока смещения*.

Теперь видно, что левая часть ур-ний (6) и (7) представляет поток, проходящий через замкнутую поверхность. Таким образом, эти уравнения дают математическую формулировку следующего положения: поток, проходящий через замкнутую поверхность, пропорционален электрическим зарядам, находящимся внутри поверхности. Если каждая линия поля изображает единичную величину потока, то из каждой единицы положительного электрического заряда будет выходить  $4\pi$  линий и  $4\pi$  линий будет заканчиваться на каждой единице отрицательного заряда. В пространстве, в котором нет электрических зарядов, линии поля должны продолжаться, так как им не на чем закончиться. Линии поля от заряда  $+q$  к заряду  $-q$  показаны на рис. 5. Если пунктирная линия  $a$  будет обозначать замкнутую поверхность вокруг  $+q$ , то, очевидно, что все линии

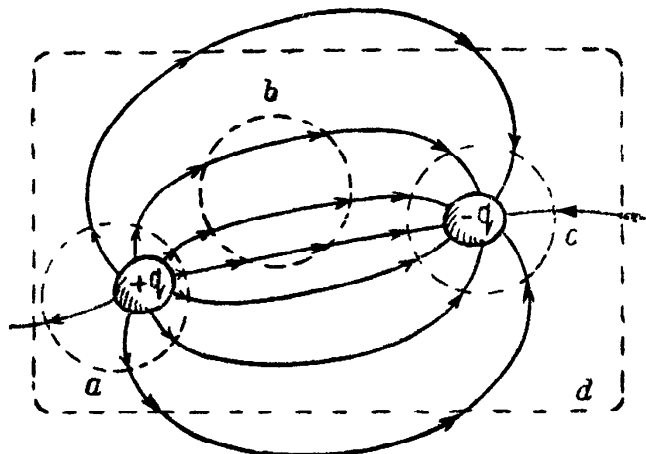


Рис. 5.

поля, выходящие из заряда, будут пересекать **поверхность  $a$** . Следовательно, подсчитав линии поля, которые проходят через поверхность, можно определить, каков заряд, находящийся внутри поверхности. Все линии, пересекающие поверхность  $c$ , направлены внутрь поверхности; таким образом, внутри поверхности заряд является отрицательным. Алгебраическая сумма линий поля через поверхности  $b$  и  $d$  равна нулю.

Существенным является выбор значения  $h$ , так как он определяет величину единицы электрического заряда (отнесённую к  $E$ , которая определяется через величину силы). Придавая  $h$

различные значения, мы получим разные системы единиц, причём в гауссовой системе величина  $h$  равна  $4\pi$ . Это означает, что в свободном пространстве напряжённость электрического поля, равная единице, будет получаться на расстоянии в 1 см от единичного точечного заряда. Этот результат следует из того факта, что площадь сферы единичного радиуса равна  $4\pi$  (см. задачу 1).

Целый ряд сведений, касающихся электростатического поля, может быть получен из ур-ний (2), (3) и (9). Это можно сделать аналитически; наиболее удобным математическим аппаратом, который может быть здесь использован, является векторный анализ. Поэтому целесообразно предпослать дальнейшему изучению электрического поля некоторые основные математические соотношения, относящиеся к векторному анализу.

### ЗАДАЧИ

1. Напряжённость электрического поля измеряется во всех точках уединённой сферической поверхности единичного радиуса. Найдено, что она всюду нормальна к поверхности, равна единице по величине и направлена наружу. Какова величина электрического заряда, заключённого внутри сферической поверхности? [Принять, что величина  $h$  в ур-нии (4) равна  $4\pi$ ].

2. На единичный заряд (1 статкулон), помещённый в электрическое поле, имеющее напряжённость, равную единице (1 статвольт на сантиметр), действует сила в 1 дину. При какой напряжённости поля (выраженной в вольтах на сантиметр) на тот же заряд будет действовать сила в 1 грамм?

---

## Глава II

### ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

**Умножение векторов.** Применение векторов является целесообразным в различных случаях. С помощью вектора можно изобразить силу; можно изобразить также и расстояние. Если в результате действия силы  $F$  на тело, это тело перемещается на расстояние  $s$ , как показано на рис. 6а, то работа, совершённая силой, определяется произведением силы на расстояние. Однако, это не простое алгебраическое произведение, так как существенное значение имеет угол между направлением силы и направлением перемещения. Если силу обозначить через  $F$ , расстояние через  $s$ , а угол между ними через  $\theta$ , то совершённая работа будет равна

$$W = Fs \cos \theta. \quad (10)$$

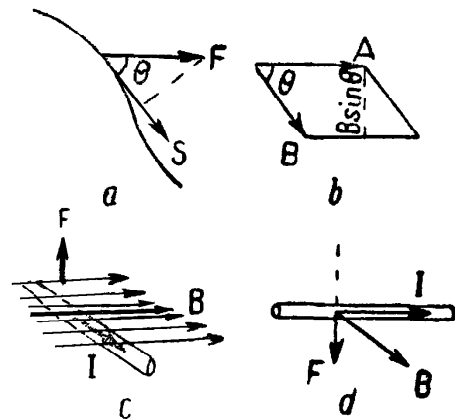


Рис. 6.

Заметим, что векторные величины силы и расстояния обозначаются через  $F$  и  $s$ , а скалярные величины через  $F$  и  $s$ ; эта система обозначений широко распространена и принята также в данной книге. Так как вид умножения, показанный в ур-нии (10), является общим для физических задач, то в векторном анализе введено специальное обозначение: когда два вектора написаны рядом, то это обозначает умножение рассматриваемого вида. Учитывая это, ур-ние (10) можно написать следующим образом

$$W = Fs. \quad (11)$$

В общем случае «скалярное произведение» двух каких-либо векторов определяется выражением

$$AB = AB \cos \theta. \quad (12)$$

Так же, как и в случае определения работы [ур-ние (11)], этот вид произведения всегда представляет собой скалярную величину, в то время как оба сомножителя являются векторами. Именно поэтому его называют *скалярным произведением*.

Имеется также другой вид умножения, часто встречающийся в физических задачах. Простейшим примером такого умножения является вычисление площади для случая, показанного на рис. 6b, где два вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  изображены, как стороны параллелограмма. Площадь параллелограмма равна

$$\text{площадь} = A B \sin \Theta. \quad (13)$$

Такой вид умножения встречается при определении силы, действующей на находящийся в магнитном поле проводник с током. Если магнитное поле (рис. 6c) по величине и направлению определяется вектором  $\mathbf{B}$ , а ток (который предполагается постоянным), вектором  $\mathbf{I}$ , то сила, действующая на единицу длины проводника, будет характеризоваться вектором  $\mathbf{F}$ , который перпендикулярен как к  $\mathbf{B}$ , так и к  $\mathbf{I}$ . Величина вектора находится из выражения

$$F = \frac{1}{c} I B \sin \Theta. \quad (14)$$

Значение коэффициента пропорциональности  $c$  зависит от системы единиц. Сила на рисунке направлена вверх, в соответствии с правилом для силы в магнитном поле.

Так как этот вид умножения находит широкое применение, то ему также присвоено определённое обозначение. Вектора  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{B}$  пишут в прямоугольных скобках и ур-ние (14) принимает вид

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} [\mathbf{I}\mathbf{B}]. \quad (15)$$

Эта форма операции даёт так называемое *векторное произведение*. Последнее название объясняется тем, что результат умножения сам является вектором, как например, сила — в ур-нии (15). С первого взгляда неясно, почему площадь на рис. 6b представляет собой векторную величину. Однако, понятно, что поверхность должна быть ориентирована в пространстве. Поэтому условились представлять площадь вектором, направление которого *нормально* к поверхности, а длина пропорциональна величине площади. Таким образом, площадь на рис. 6b изображается вектором, перпендикулярным к плоскости чертежа.

Естественно возникает вопрос о знаке результирующего вектора, такого, например, как вектор  $\mathbf{F}$  в ур-нии (15). Что в уравнении показывает, направлена ли сила вверх или вниз? Если, например, поменять местами  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{B}$ , как показано на рис. 6d, то величина силы останется неизменной, но знак изменится на обратный, а вектор окажется направленным вниз. С тем, чтобы устранить двусмысленность в математической постановке задачи, условились, что в векторном произведении знак результирующего вектора определяется порядком, в котором записаны векторы, входящие в произведение. Этот способ является достаточно удоб-

ным и определённым для установления направления векторного произведения. Однако, выразить словами соответствующие соотношения несколько затруднительно. Обычно правило знака запоминают, располагая определённым образом пальцы правой руки, или пользуясь вращением так называемого праввинтового винта.

Произведение двух векторов  $[AB]$  само представляет собой вектор величины  $AB \sin \theta$ , имеющий направление, нормальное к плоскости, в которой лежит как  $A$ , так и  $B$ , при чём знак направления таков, что если поворачивать праввинтовый винт (рис. 7) от  $A$  к  $B$  (на угол меньший  $180^\circ$ ), то он будет ввинчиваться по направлению, определяемому направлением вектора произведения.

В соответствии с этим правилом ур-ние (15) даёт направление силы (так же, как на рис. 6с и 6b), при чём вектор  $[AB]$ , характеризующий площадь, изображённую на рис. 6b, направлен за плоскость чертежа. Отметим, что произведение  $[BA]$  соответствует вектору, направленному от плоскости чертежа; сказанное представляет собой только иллюстрацию общего правила, согласно которому

$$[BA] = -[AB]. \quad (16)$$

Отсюда видно, что рассматриваемая операция не подчиняется основному закону коммутативности обычной алгебры, который говорит, что  $ab = ba$ . Естественно спросить, чем здесь определяется отрицание основного закона алгебры и в связи с этим вообще кратко обсудить данный вопрос.

Все алгебраические операции, включая умножение, рассчитаны на действия с числами. Правило умножения особенно просто для целых чисел. Например, 7, умноженное на 5, соответствует пяти семёркам, сложенным вместе (или, в соответствии с законом коммутативности, это также сумма семи пятёрок). Это правило может быть легко распространено на умножение дробей и при дополнительных условиях, учитывающих знак, им можно воспользоваться также и в случае отрицательных чисел. Но оно просто не будет иметь смысла, если воспользоваться им при действиях с векторами.

Однако, имеются определённые операции, которые столь часто применяются к векторам, что желательно дать им название. Две из этих операций были рассмотрены выше, обе называются

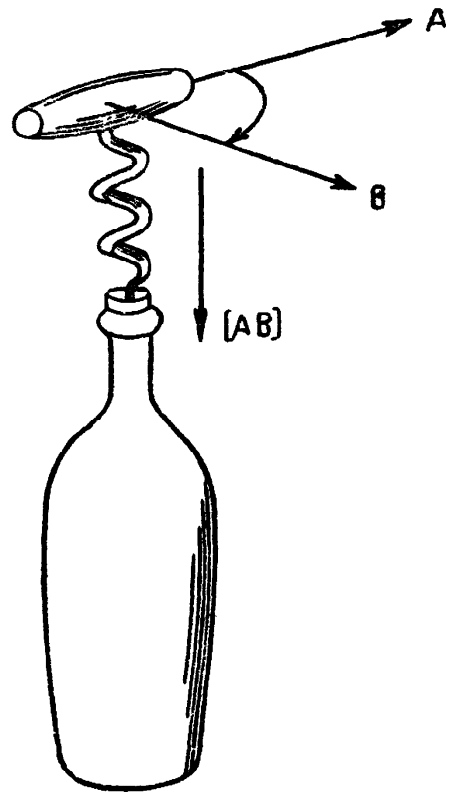


Рис. 7.



умножением и это обстоятельство может привести к недоразумениям. В действительности совершенно неправильно называть эти операции умножением. Сейчас умножением векторов называются действия, относящиеся в одном случае к скалярному произведению, а в другом к векторному произведению. Может быть термин «умножение» следовало сохранить для алгебраического произведения двух скалярных величин, а действиям над векторами присвоить совершенно новые названия.

Но терминология столь прочно установилась, что с ней нельзя не считаться <sup>1)</sup>.

Теперь должно быть очевидным, почему векторное произведение не соответствует алгебраическому умножению: нет оснований ожидать, что, будучи определено совершенно независимым образом, оно станет следовать законам алгебры. Поэтому не приходится удивляться тому обстоятельству, что закон коммутативности не применим к векторному произведению. Скорее заслуживает внимания тот факт, что закон коммутативности распространяется на скалярное произведение, как это следует из ур-ния (12).

**Единичный вектор.** До сих пор ещё не приводилось ни одного выражения, определяющего векторное произведение. Для этой цели можно использовать следующее соотношение, хотя оно и потребует краткого разъяснения

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}] = n AB \sin \Theta. \quad (17)$$

В этом выражении  $A$  и  $B$  представляют собой скалярные величины векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ,  $\Theta$  — угол между векторами, а  $n$  является вектором единичной длины, который нормален как к  $\mathbf{A}$ , так и к  $\mathbf{B}$  и имеет такое направление, что согласно данному выше определению, образует правовинтовую систему с векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

Правая часть ур-ния (17) показывает способ определения вектора. Величина векторного произведения равна  $AB \sin \Theta$ , но это выражение не характеризует ещё направления. Единичный вектор как раз и служит для указания направления нормали к  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , и, таким образом, точно определяет направление векторного произведения. Этот приём использования единичного век-

<sup>1)</sup> Имеется ещё один вид так называемого умножения, который используется при операциях с комплексными величинами. Это соотношение, согласно которому

$$(Ae^{i\alpha})(Be^{i\beta}) = ABe^{i(\alpha+\beta)},$$

знакомо изучающим переменные токи, так как оно весьма широко используется в электротехнике в связи с возможностью представить с помощью комплексных величин действительную часть величины, изменяющейся по синусоидальному закону. Комплексные величины, которые сами по себе являются скаларами, могут быть представлены в виде векторов, вращающихся на комплексной плоскости. Приведённое соотношение можно рассматривать как третий вид умножения векторов, совершенно отличный от каждого из двух других.

тора для определения направления часто является весьма удобным<sup>1)</sup>).

Наиболее обычное применение единичных векторов для указания направления связано с использованием координатных осей. На рис. 8 показаны три оси, обозначенные буквами  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Положение любой точки в пространстве относительно этих осей можно определить, используя декартовы координаты на основании известных методов аналитической геометрии. Длина и направление любого вектора выражается с помощью проекций вектора на три оси. Каждый вектор  $A$  может быть описан как имеющий три взаимно перпендикулярных компоненты, в соответствии с рис. 8:  $A_x$  по направлению  $x$ ,  $A_y$  по направлению  $y$  и  $A_z$  по направлению  $z$ .

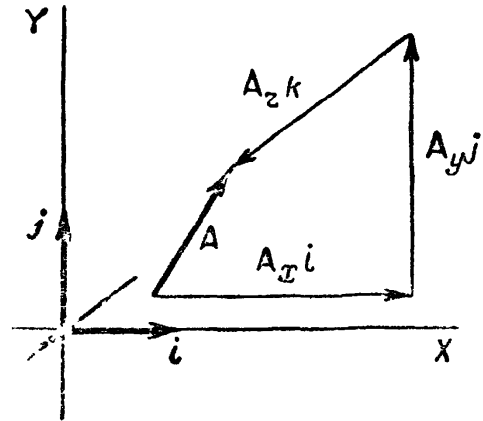


Рис. 8.

В этом случае  $A_x$  является скалярной величиной. Это — *длина* компоненты вектора  $A$  по оси  $x$ .  $A_y$  и  $A_z$  также будут скалярными величинами. Следовательно, было бы неверно сказать, что вектор  $A$  равен сумме  $A_x$ ,  $A_y$  и  $A_z$ . Точно говоря, вектор  $A$  равен сумме вектора длиной  $A_x$ , направленного по  $x$ , вектора длиной  $A_y$ , направленного по  $y$ , и вектора длиной  $A_z$ , направленного по  $z$ .

Подобное установление условий равенства является довольно сложным. Его можно упростить введением единичных векторов. Вектор  $i$  является вектором единичной длины, имеющим направление по оси  $x$ ;  $j$  — вектором единичной длины, направленным по оси  $y$ ; вектор  $k$  — вектором единичной длины, направленным по оси  $z$ . Теперь, если требуется написать что-либо относительно вектора, «направленного по оси  $x$  при длине  $A_x$ », то необходимо просто пометить « $A_x i$ », чем будет выражена та же самая мысль. Таким образом, справедливо соотношение

$$A = A_x i + A_y j + A_z k, \tag{18}$$

которое будет часто применяться в дальнейшем изложении.

<sup>1)</sup> Следует отметить, что никакое равенство не может быть верным, если с обеих его сторон не стоят векторные величины, или же с обеих сторон — скалярные величины. Так равенство (17) будет неверным при отсутствии величины  $n$ , так как без неё выражение в левой части представляет собой вектор, а выражение в правой части — скаляр.

Произведения, в которые входят единичные векторы, встречаются часто и заслуживают специального рассмотрения. Рассмотрим скалярное произведение  $ii$ ; оба множителя имеют длину, равную единице, и угол между ними равен нулю. Таким образом, согласно ур-нию (12), их произведение равно единице, т. е. представляет собой скалярную величину. Теперь рассмотрим произведение  $ij$ ; здесь угол равен  $90^\circ$ ; следовательно, на основании ур-ния (12), произведение равно нулю. Проекция  $i$  на  $i$  даёт единицу, а проекция  $i$  на  $j$  нуль.

Рассмотрим векторное произведение  $[ij]$ ; согласно ур-нию (17) такое произведение представляет собой вектор единичной длины, нормальный как к  $i$ , так и к  $j$  и имеющий направление, определяемое правовинтовым штопором, вращающимся от  $i$  к  $j$ . Как непосредственно видно из рис. 8, это произведение идентично с  $k$ . Таким образом,  $[ij] = k$ . Однако, необходимо заметить, что  $[ji] = -k$ .

Так как угол между двумя одинаковыми единичными векторами равен нулю, то из ур-ния (17) следует, что  $[iii] = 0$ . Это можно пояснить, воспользовавшись рис. 6b, из которого следует, что площадь параллелограмма приближается к нулю, когда две смежные стороны приближаются одна к другой.

Приведём таблицу, содержащую некоторые из произведений единичных векторов:

$$\left. \begin{array}{l} ii = 1 \quad [ii] = 0 \\ ij = 0 \quad [ij] = k \\ ik = 0 \quad [ik] = -j \end{array} \right\} \quad (19)$$

Системы координат имеют существенное значение для векторного анализа, и полезно выразить некоторые наиболее важные векторные операции с помощью компонент декартовой системы координат (используется правая система координат, показанная на рис. 8).

Скалярное произведение каких-либо двух векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{AB} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (20)$$

Для того, чтобы доказать справедливость этого равенства, подставим вместо  $\mathbf{A}$  его выражение из соотношения (18) и аналогичное выражение для  $\mathbf{B}$ , и перемножим почленно

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k})(B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) = A_x B_x \mathbf{ii} + A_y B_y \mathbf{jj} + \\ &+ A_z B_z \mathbf{kk} + A_x B_y \mathbf{ij} + A_x B_z \mathbf{ik} + A_y B_x \mathbf{ji} + A_y B_z \mathbf{jk} + A_z B_x \mathbf{ki} + \\ &+ A_z B_y \mathbf{kj}. \end{aligned} \quad (21)$$

Первые три члена этого выражения дают правую часть ур-ния (20), так как скалярное произведение идентичных векторов равно единице. Что же касается остальных шести членов, то они исчезают ввиду того, что скалярные произведения неодинаковых единичных векторов равны нулю.

В качестве физической иллюстрации соотношения, соответствующего скалярному произведению ур-ния (20), рассмотрим произведение силы  $F$  на расстояние  $s$ , как это показано на рис. 9.

Координатные оси выбраны таким образом, что и сила и расстояние лежат в плоскости  $x$ — $y$ , благодаря чему задача сво-

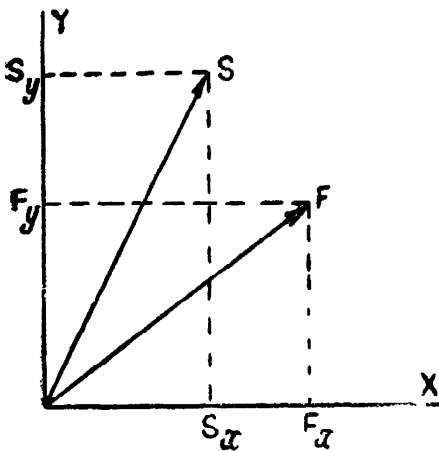


Рис. 9.

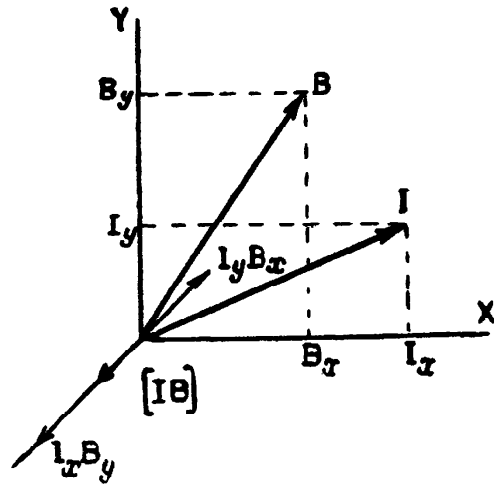


Рис. 10.

дится к случаю двух измерений. Указанные векторы имеют компоненты  $F_x$ ,  $F_y$  и  $s_x$ ,  $s_y$ . Физически очевидно, что на пути  $s_y$  компонента силы  $F_x$  не совершает никакой работы, ввиду того, что сила и путь перпендикулярны. То же самое справедливо и для силы  $F_y$  на пути  $s_x$ . В то же время сила  $F_x$ , действующая на пути  $s_x$ , производит работу, равную  $F_x s_x$ , а другие компоненты дают  $F_y s_y$ . Последние члены, следовательно, сохранятся в скалярном произведении, полная форма которого для случая трёх измерений дана в ур-нии (20), тогда как произведения, содержащие компоненты, расположенные вдоль различных осей [нулевые члены ур-ния (21)], ничего не добавляют к скалярному произведению.

Векторное произведение каких-либо двух векторов может быть представлено аналогичным образом:

$$[\mathbf{AB}] = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}. \quad (22)$$

Доказательство этого уравнения совершенно аналогично доказательству, относящемуся к ур-нию (20).

Для физической интерпретации величин, входящих в ур-ние (22), рассмотрим ток  $\mathbf{I}$  и магнитное поле  $\mathbf{B}$ , а также силу  $\frac{1}{c} [\mathbf{I}\mathbf{B}]$ , которая действует на токонесущий проводник. Выберем расположение осей так, чтобы  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{B}$  лежали в плоскости  $x-y$ , как показано на рис. 10. Компонента тока  $I_x$  и компонента магнитного поля  $B_x$  не взаимодействуют, так как нет силы, действующей на ток в направлении, параллельном магнитному полю. Между тем  $I_x$  и  $B_y$ , образуя между собой прямой угол, дают силу  $\frac{1}{c} I_x B_y$ , направленную по оси  $z$ . Что касается  $I_y$  и  $B_x$ , то они создают силу, имеющую величину  $\frac{1}{c} I_y B_x$ , направленную по оси  $z$  в сторону отрицательных значений. Результирующая сила представляет, таким образом, их алгебраическую сумму или

$$\frac{1}{c} (I_x B_y - I_y B_x).$$

Легко видеть, что это выражение соответствует последнему члену ур-ния (22). Остальные члены ур-ния (22) появляются в том случае, если  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{B}$  имеют компоненты также и по оси  $z$ . Произведения компонент с одинаковыми индексами, такие как  $I_x B_x$ , или  $I_y B_y$  не будут появляться в выражении для векторного произведения.

Соотношения для векторного произведения удобно выразить в виде детерминанта, что делает лёгким его запоминание

$$[\mathbf{AB}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (23)$$

Если развернуть этот детерминант в соответствии с обычными правилами (которые можно найти в книгах по алгебре или же в математических разделах справочников), то он окажется идентичным с ур-нием (22).

**Тройное произведение.** Векторное произведение двух векторов само является вектором, поэтому можно найти его произведение на какой-то другой вектор.

Второе умножение может соответствовать либо скалярному, либо векторному произведению, т. е.

$$[\mathbf{AB}] \mathbf{C} \quad (24)$$

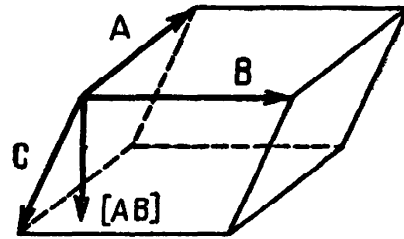
или

$$[[\mathbf{AB}] \mathbf{C}]. \quad (25)$$

Очевидно, что эти произведения различны и должны быть рассмотрены отдельно.

Рассмотрим сначала соотношение (24). Если  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  являются какими-то тремя векторами, как показано на рис. 11, то тройное скалярное произведение [выражение (24)] даёт объём параллелепипеда, в котором  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  образуют рёбра. Это становится очевидным, если учесть, что  $[\mathbf{A}\mathbf{B}]$  есть площадь верхушки параллелепипеда, а  $[\mathbf{A}\mathbf{B}]\mathbf{C}$  является произведением этой площади на нормальную компоненту ребра  $\mathbf{C}$ .

Объём того же самого параллелепипеда можно определить, умножая площадь, ограниченную векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , на нормальную компоненту  $\mathbf{A}$ , так что



$$[\mathbf{A}\mathbf{B}]\mathbf{C} = [\mathbf{B}\mathbf{C}]\mathbf{A} \quad (26)$$

Рис. 11.

и аналогично каждое из произведений равно  $[\mathbf{C}\mathbf{A}]\mathbf{B}$ .

Тройное скалярное произведение часто пишут в виде  $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}$ , при чём это обозначение адекватно указанному выше; несложное рассмотрение показывает, что вектора можно перемножить в любом порядке, если сохраняется циклическая последовательность  $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}$ , но что

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C} = -\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{A}. \quad (27)$$

Тройное векторное произведение [ур-ние (25)] относится к вектору, который лежит в той же плоскости, что и векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Его можно развернуть следующим образом

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}]\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}). \quad (28)$$

Доказательство этого положения не приводится; оно может быть легко выполнено, если выразить обе части ур-ния (28) через компоненты по осям прямоугольных координат.

**Векторные поля.** Векторные и скалярные поля могут быть вычерчены различными способами, при чём изображение этих полей на чертеже помогает понять их математическую сущность.

Контурные карты являются особенно интересными, так как они дают высоту местности, т. е. характеризуют скалярное поле. Например, рис. 12 изображает карту горы. Это совершенно симметричная гора, поднимающаяся к вершине в центре карты. Высота, нанесённая на контурную карту, представляет собой скалярную величину: каждая точка даёт высоту в определённое число метров и когда все точки равной высоты соединены между собой линией, то полностью определяется форма земной поверхности.

Рассмотрим шар, помещённый на горе рис. 12; он будет стремиться скатиться вниз. Так как шар находится на склоне горы, то должна быть приложена известная сила для того, чтобы удержать его. Этим самым определяется векторное поле сил. На рис. 13а, изображающем другую карту горы, нарисованы стрелки, показывающие величину и направление силы, которую следует приложить, чтобы удержать шар в различных точках. Подобные стрелки по существу не отличаются от *штрихового* изображения, которое часто используется в географических картах для обозна-

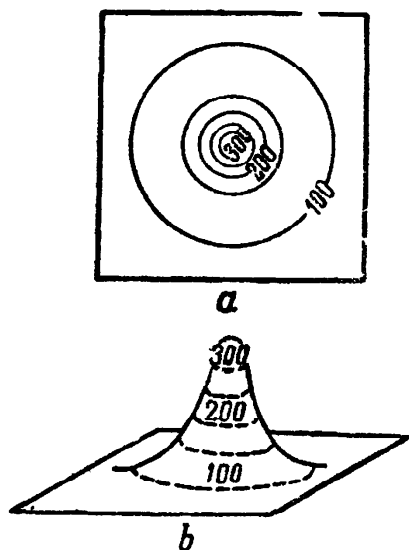


Рис. 12.

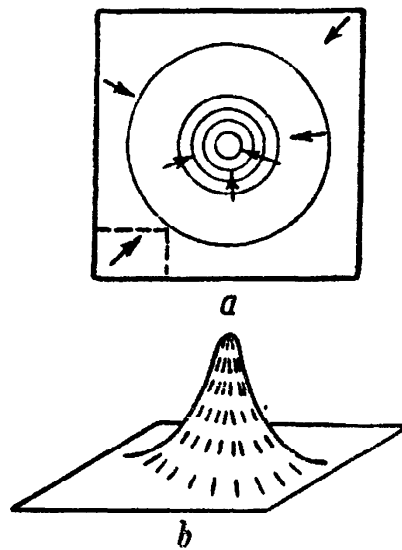


Рис. 13.

чения гор (рис. 13b). Карты со штриховым рисунком можно рассматривать, как простейшее изображение векторного поля.

Очевидно, что существует связь между скалярным полем высот и векторным полем сил, действующих на шар. Она очень проста и хорошо известна: сила зависит от крутизны склона, или, другими словами, от степени изменения высоты с расстоянием. Эта величина изменения представляет собой производную, аналогичную по своему существу обычной производной, используемой в дифференциальном исчислении. Правда, усложнение заключается в необходимости определить *направление* крутизны склона, без чего нельзя найти направление, по которому шар будет стремиться скатываться. Наиболее крутой наклон в данной точке называют *градиентом* в этой точке. Градиент является вектором, и, следовательно, создаёт векторное поле.

**Градиент.** В левом нижнем углу рис. 13а часть карты отделена пунктирными линиями. Отмеченный прямоугольный участок в увеличенном виде изображён на рис. 14 и на нём с целью ориентировки нанесены две координатные оси. Градиент в этой малой области поля практически неизменен; он во всех точках один и тот же, как по величине, так и по направлению и обозначен на рисунке в виде вектора. Вектор градиента состоит из двух

компонент, одна из которых представляет собой крутизну по оси  $x$ , равную  $\frac{\partial P}{\partial x}$ , а вторая — крутизну по оси  $y$ , которая равна  $\frac{\partial P}{\partial y}$ . Высота обозначается символом  $P$ <sup>1)</sup> и для поля двух измерений

$$\text{градиент} = \frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{j}. \quad (29)$$

Два обстоятельства, характеризующие градиент, являются столь важными, что о них нужно упомянуть сразу.

Во-первых, вектор градиента всегда перпендикулярен к линиям поля. Это — очевидно, так как градиент является наибольшей крутизной склона. Наибольшую крутизну можно найти, опускаясь на единицу высоты по кратчайшему горизонтальному пути перемещения от одной линии поля к следующей, что соответствует изменению высоты на единицу; а кратчайшее горизонтальное расстояние перпендикулярно к линиям поля.

Во-вторых, чем ближе расположены линии поля, тем круче наклон и тем больше градиент. Если высота в каждой точке известна и может быть представлена аналитически, то, выражая  $P$  через  $x$  и  $y$ , легко воспользоваться ур-нием (29). Рассмотрим простой пример, относящийся к рис. 14: высота в начале координат равна 1000 м и крутизна холма возрастает к северо-востоку. При перемещении к востоку почва поднимается на 4 м на километр, а при перемещении к северу крутизна составляет 3 м на километр. Таким образом (для рассматриваемой ограниченной области), высоту в каждой точке можно найти из условия

$$P = 1000 + 4x + 3y. \quad (30)$$

Подставляя ур-ние (30) в ур-ние (29), получим

$$\text{градиент} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}. \quad (31)$$

Это означает, что крутизна всюду одна и та же по величине [ $x$  и  $y$  не входят в ур-ние (31)] и имеет такое направление, что катящийся шар будет перемещаться на 3 м к югу на каждые 4 м перемещения к западу. Наиболее крутой склон, или градиент, равен корню квадратному из суммы квадратов компонент и соответствует 5 м на километр.

<sup>1)</sup> Символ  $P$  используется потому, что высота является гравитационным потенциалом.

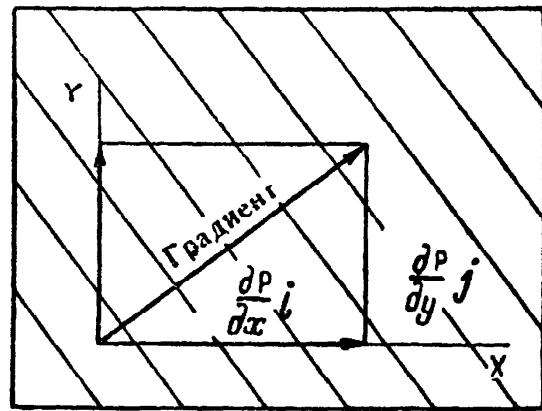


Рис. 14.



Следующий численный пример будет иллюстрировать несколько менее простой случай. Положим, что начало координат находится на вершине холма высотой в 1000 м, имеющего такую форму, что

$$P = 1000 - x^2 - y^2. \quad (32)$$

Уравнение (29) даёт

$$\text{градиент} = -2xi - 2yj. \quad (33)$$

Градиент равен нулю, когда  $x$  и  $y$  равны нулю, что является естественным, так как это соответствует точной вершине холма. Если теперь отклониться в какую-нибудь сторону, то градиент начнёт возрастать. Более того, градиент изменяет направление в различных точках поверхности холма. Полную картину для этого случая можно получить из рассмотрения ур-ния (33).

Преыдущая дискуссия о градиенте относится к полю для поверхности двух измерений. Электрическое поле представляет собой трёхмерное пространственное поле. Течение воды, например, циркуляционные токи в большом резервуаре, можно изобразить с помощью трёхмерного векторного поля, в котором векторы характеризуют скорость течения жидкости. Температуру в большом куске неравномерно нагретого металла характеризует трёхмерное скалярное поле. Течение тепла в подобном куске металла определяется температурным градиентом.

Трёхмерный градиент, такой, например, как градиент температуры, полностью аналогичен рассмотренному двумерному градиенту высоты, и ему можно дать такое же определение.

Если дано трёхмерное скалярное поле  $P$ , то градиент  $P$  представляет собой векторное поле, определяемое уравнением

$$\text{градиент } P = \frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (34)$$

Уравнение (29), в котором  $P$  представляет функцию только  $x$  и  $y$ , является частным случаем этого более общего определения.

**Дивергенция.** Величина, называемая градиентом, показывает степень изменения скалярного поля. Векторное поле также изменяется от точки к точке, но более сложным образом. Нельзя сказать, что это поле имеет градиент, но можно другим путём описать степень изменения векторного поля. Один из наиболее удобных путей состоит в введении понятия *дивергенции*. Дивергенция вектора  $\mathbf{A}$  определяется уравнением

$$\text{дивергенция } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (35)$$

где  $A_x$  есть величина компоненты  $x$  вектора  $\mathbf{A}$  и вследствие того, что  $\mathbf{A}$  характеризует трёхмерное векторное поле,  $A_x$  представляет собой трёхмерное скалярное поле.  $A_x$  может изменяться от точки

к точке и, вообще говоря, является функцией  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Её производная по  $x$  даёт первый член ур-ния (35). Второй и третий члены могут быть найдены аналогичным образом, с помощью  $y$ -вой и  $z$ -вой компонент  $\mathbf{A}$ .

Следует заметить, что дивергенция является весьма удобной величиной. Её применение можно хорошо иллюстрировать на потоке жидкостей. На рис. 15а изображена трубка, по которой течёт вода: Пунктирные линии внутри трубки обозначают воображаемую поверхность; вода проходит через эту поверхность. Поверхность полностью замкнута и вода втекает в неё с одной стороны и вытекает с другой. Вода может течь через поверхность любой неправильной формы,

но в случае несжимаемой жидкости количество воды, которое вытекает, равно тому, которое втекает. Как показано немного ниже, вместо этого можно сказать, что вода, будучи несжимаемой, протекает таким путём, что если скорость течения представить в виде векторного поля  $\mathbf{V}$ , то дивергенция  $\mathbf{V}$  будет

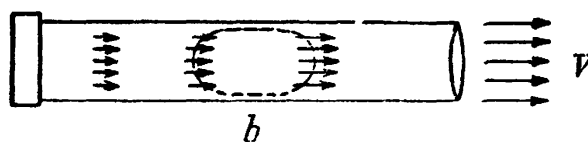
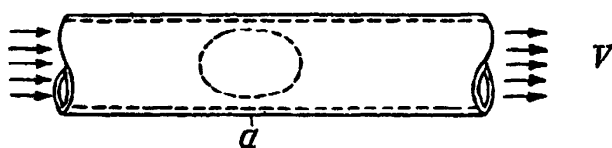


Рис. 15.

всюду равна нулю. Именно отсюда происходит само слово „дивергенция“: вода не может расходиться из какой-либо точки, так как это создало бы вакуум. Вода не может также сходиться в какой-то точке, поскольку она несжимаема.

Однако, с потоком воздуха дело обстоит иначе. Рисунок 15 б изображает трубку со сжатым воздухом, закрытую с одного конца. Крышка с другого конца была снята и воздух устремился наружу. Рассмотрим внутри трубки замкнутую поверхность, обозначенную пунктиром; так как воздух расширяется, то большее количество воздуха выходит наружу с одного конца указанной поверхности, чем входит в поверхность с другого конца. Следовательно, имеет место дивергенция воздуха, т. е. в каждой точке получается расходимость. Когда воздух расширяется, а скорость воздуха выражается векторным полем  $\mathbf{V}$ , дивергенция  $\mathbf{V}$  не равна нулю.

**Ротор.** Другой важный способ описания степени изменения векторного поля носит название *ротора*. Рассмотрим трубу с водой; рис. 16а изображает подобную трубу. Вода в трубе размещена двухлопастным винтом и вектора показывают скорость  $\mathbf{V}$ . Рядом с трубой изображено маленькое гребное колесо. Если это колесо установить на подшипнике без трения и поместить в центре трубы, то оно будет вращаться в направлении, обратном вращению часовой стрелки. Колесо будет поворачиваться водой неза-

висимо от того, в какую точку трубы оно помещено. Однако, если его сместить относительно центра трубы, то окажется, что вода двигается быстрее около одной стороны колеса, чем около другой. Вращение гребного колеса указывает, что вода движется в трубе, при чём векторное поле скорости имеет характер изменения того вида, которое носит название «ротора».

Термин «ротор» вызывает ассоциацию с движением по криволинейным линиям. Это, однако, необязательно, так как движение по прямой также может иметь ротор. Если вода течёт по каналу (рис. 16*b*) с большей скоростью вблизи поверхности, чем около

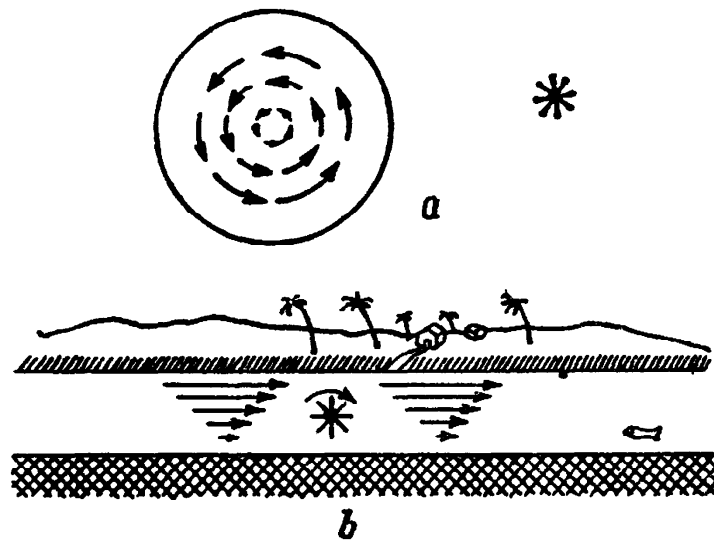


Рис. 16.

дна, то несмотря на то, что каждая частица воды движется по прямой линии, всё же имеется ротор. Это можно установить, воспользовавшись измерительным гребным колесом. Измерительное колесо, как видно из рисунка, будет вращаться по часовой стрелке, так как течение более быстро в верхних слоях, чем в нижних.

На рис. 17 приведена карта другого канала, в котором вода не имеет ротора. В прямолинейной части канала скорость течения всюду одинакова, и очевидно, что водяное колесо в области *a* не будет вращаться. В области *b*, на повороте канала, вода может обогнуть угол, не имея ротора, если она будет течь быстрее вдоль внутреннего края канала. Увеличенное изображение водяного колеса в области *b* показано в левом нижнем углу рисунка; маленькие стрелки характеризуют действие воды на каждую из лопастей колеса (понятно, что измерительное гребное колесо в действительности так мало, что не влияет на движение потока воды). Вследствие кривизны линий потока, более чем на половину лопастей сила действует по часовой стрелке. Однако, скорость воды больше у внутренней стороны; поэтому хотя сила, направленная против часовой стрелки, действует на меньшее число лопастей, но зато к каждой из них прикладывается бóль-

шая сила. Совершенно очевидно, что кривизна и изменение скорости могут находиться в таком соотношении, что колесо останется неподвижным. Таким образом, криволинейные движения могут не иметь ротора. Этот вид течения действительно характерен для жидкости, не имеющей трения. Целью создания удобообтекаемых форм является получение такой поверхности, через которую будет протекать воздух или вода с минимальным ротором, так как движение, обладающее ротором, создаёт вихри, обуславливающие потери энергии.

Дивергенция векторного поля является *скалярной* величиной. Имеется дивергенция от некоторой точки, или к некоторой точке (положительная или отрицательная дивергенция); но никакой идеи направления здесь не содержится. Напротив, ротор векторного поля есть *вектор*. Так как ротор обнаруживает себя в качестве вихря, то очевидно, что этот вихрь должен иметь какую-то ось—может быть вертикальную, может быть ось горизонтальную, а может и идущую под некоторым углом. Направление этой оси, по определению, указывает направление вектора, изображающего ротор. Если воображаемое гребное колесо стоит в положении, в котором его вращение максимально, то это значит, что ось колеса совпадает с направлением вектора ротора. Помещая ось гребного колеса параллельно соответствующей оси координат, можно найти каждую составляющую вектора ротора. Знак вектора ротора определяется направлением вращения гребного колеса: если колесо поворачивается по правовинтовому винту, то оно будет ввинчиваться по направлению вектора ротора, как показано на рис. 18. Математически ротор векторного поля  $\mathbf{A}$  определяется с помощью уравнения

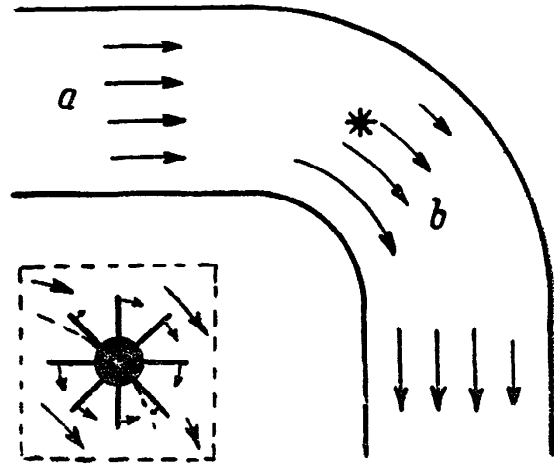


Рис. 17,

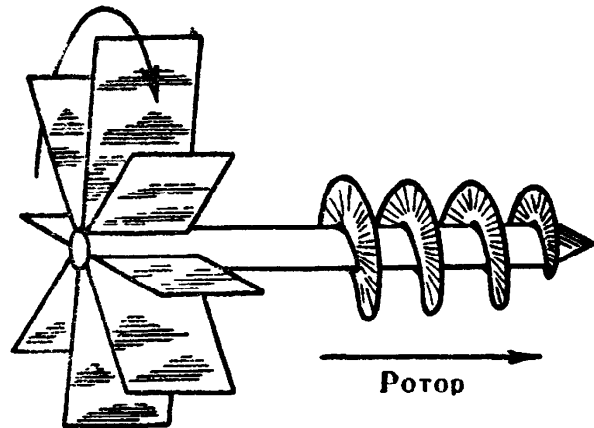


Рис. 18.

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (36)$$

В дальнейшем будет показано, что это соответствует физическому представлению ротора, приведённому в предыдущих параграфах.

**Набла.** Можно выиграть во времени, если записывать уравнения векторного анализа, используя символ «набла», который обозначается как  $\nabla$ <sup>1)</sup>; ещё более важно то обстоятельство, что уравнения в таком виде легче запоминать. Формально величина  $\nabla$  определяется выражением

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (37)$$

Легко видеть, что такое обозначение само по себе не имеет смысла. Оно относится к вектору, для которого компоненты по  $x$ ,  $y$  и  $z$  будут соответственно  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  и  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Но так же, как и  $\frac{\partial}{\partial x}$  *набла* есть *оператор*, поэтому должно быть что-то, над чем ведётся операция. Если *набла* относится к операции над скалярной функцией, то даёт градиент этой функции. Операция над  $P$  даёт значение

$$\nabla P = \frac{\partial}{\partial x} P \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} P \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} P \mathbf{k}, \quad (38)$$

которое, как видно из сравнения его с ур-нием (34), представляет собою градиент  $P$ . Соотношение  $\nabla P$  развёртывается совершенно так же, как если бы оно представляло собой произведение векторной величины  $\nabla$  на скалярную величину  $P$ . В действительности же, это вовсе не является умножением, а представляет собою операцию дифференцирования.

Символ  $\nabla$ , определяемый ур-нием (37), может быть использован в ряде последовательных алгебраических преобразований, как будто он представляет векторную величину; в этом заключается одно из преимуществ его применения. Так например, величина, записанная формально как скалярное произведение  $\nabla$  на векторное поле  $\mathbf{B}$ , даёт дивергенцию этого поля. Применительно к ур-нию (20) можно написать

$$\nabla \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z, \quad (39)$$

что, как видно из сравнения с ур-нием (35), является дивергенцией  $\mathbf{B}$ .

<sup>1)</sup> Этому обозначению часто присваивают название „дель“, однако, его легко смешать с греческой буквой „дельта“, которая в анализе имеет совершенно другой смысл. Поэтому обозначение Гамильтона „набла“ вновь получило общее распространение и, например, рекомендовано Американским институтом электротехников.

Часто „наблу“ называют дифференциальным оператором Гамильтона.

Аналогично величина, записанная в виде векторного произведения  $\nabla$  на векторное поле, даёт ротор этого поля. Для случая ур-ния (22) векторное произведение развёртывается в следующем виде

$$[\nabla \mathbf{B}] = \left( \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial}{\partial z} B_x - \frac{\partial}{\partial x} B_z \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \right) \mathbf{k}. \quad (40)$$

Из сравнения этого выражения с ур-нием (36) видно, что оно представляет ротор  $\mathbf{B}$ .

Уравнение для ротора с формальной точки зрения аналогично уравнению для векторного произведения и также может быть записано в виде детерминанта, который значительно легче запомнить, чем развёрнутое выражение ур-ния (40)

$$[\nabla \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (41)$$

Приведённая ниже таблица содержит данные, относящиеся к дифференциальным операциям над векторными и скалярными полями.

Вид операции	Обозначения	Может быть применена к	Даёт
Градиент $A$ Дивергенция $\mathbf{A}$ Ротор $\mathbf{A}$	$\nabla A$ $\nabla \cdot \mathbf{A}$ $[\nabla \times \mathbf{A}]$	скалярному полю векторному полю векторному полю	векторное поле скалярное поле векторное поле

**Иллюстрирующие примеры.** Чтобы сделать для себя привычными понятия градиента, дивергенции и ротора, следует изучить несколько простых примеров, относящихся к векторным полям. Это будут чисто геометрические поля, в которые сейчас не вложено какого-либо физического смысла. Позднее мы увидим, что некоторые из них важны с точки зрения электромагнетизма.

В этом разделе рассмотрены только двухмерные поля; переход к трём измерениям, после того, как понят случай двух измерений, является простым. В то же время двухмерные случаи являются более прозрачными, так как они менее загромождены математическими выкладками. Более того, во многих весьма важных для практики задачах, трёхмерные случаи могут быть сведены к двум измерениям за счёт такого выбора координатных осей, что рассматриваемые величины становятся функциями только двух переменных.

Для скалярных полей, имеющих одну и ту же величину для всех значений  $z$ , и, таким образом, обладающих производными только по  $x$  и по  $y$ , согласно ур-нию (38) градиент равен

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{j}. \quad (42)$$

Для векторного поля  $\mathbf{A}$  от двух переменных дивергенция будет

$$\nabla \mathbf{P} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}. \quad (43)$$

Если  $A_z = 0$ , то ротор

$$[\nabla \mathbf{A}] = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (44)$$

Уравнения векторного анализа приведены в табл. II для справок (внутренняя задняя сторона обложки).

*Пример 1.* Рассмотрим векторное поле, определяемое уравнениями

$$A_x = 1, \quad A_y = 2.$$

Эти величины, разумеется, являются компонентами векторного поля  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

На рис. 19а изображено такое поле, при чём линии указывают направление векторов; уже отмечалось, что графическое представление векторного поля не является простым и требуется известное усилие для того, чтобы воспринять его. Из определяющих уравнений видно, что интенсивность поля в любой точке (величина  $P$  на рисунке) равна одной единице в направлении  $x$  и двум единицам в направлении  $y$ , как это и указано на рисунке. Это справедливо всюду, так как ни  $A_x$ , ни  $A_y$  не являются функциями  $x$  или  $y$ . Такое поле не имеет ни дивергенции, ни ротора. Тот факт, что оно не имеет дивергенции, можно доказать, подставляя  $A_x$  и  $A_y$  в ур-ние (43); при этом обе частные производные обратятся в нуль. Точно так же оно не имеет ротора, ввиду того, что обе частные производные ур-ния (44) равны нулю.

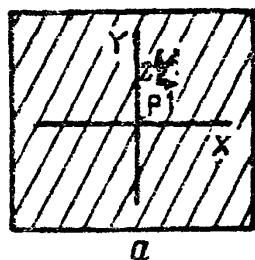
*Пример 2.* Рассмотрим векторное поле, определяемое уравнениями

$$A_x = y + 10 \text{ и } A_y = 0.$$

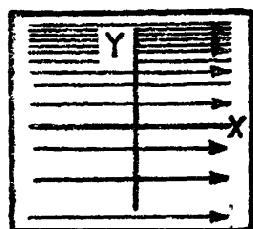
Это поле показано на рис. 19b. Оно полностью направлено по оси  $x$ , так как  $A_y$  всюду равно нулю, и становится более интенсивным к верхней части рисунка ввиду того, что  $A_x$  воз-

растает с увеличением  $y$ . Это показано на рисунке тем, что линии, изображающие направление поля, проходят ближе друг к другу в области большей интенсивности (так же, как это обычно делается с магнитными или электрическими силовыми линиями).

Если  $y$  будет меньше чем  $-10$ , то направление поля изме-



a



b

Рис. 19.

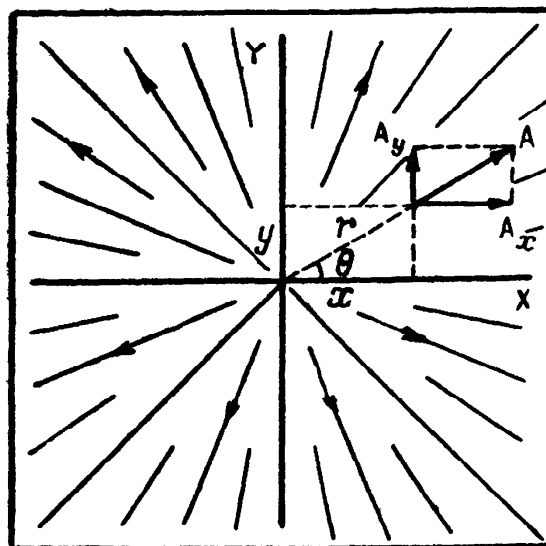


Рис. 20.

нится на обратное. Вдоль линии  $y = -10$  поле равно нулю, однако, рисунок не распространяется на эту область.

Уравнение (43) говорит о том, что данное поле не имеет дивергенции. Применяя ур-ние (44), мы находим, что  $\frac{\partial A_y}{\partial x} = 0$ ,

но  $\frac{\partial A_x}{\partial y} = 1$ . Следовательно, ротор поля всюду равен  $-k$ . (Рассмотрите гребное колесо измерителя ротора рис. 18).

*Пример 3.* Следующее поле, которое будет рассмотрено, имеет во всех точках единичную интенсивность и всюду направлено радиально из начала координат. Такое поле нанесено на рис. 20, при чём при его изображении была сделана попытка сохранять всюду одну и ту же плотность радиальных линий.

Рассмотрим какую-нибудь точку  $p$  с координатами  $x$  и  $y$ ; так как вектор  $A$  направлен по радиусу, то  $A_x$  должно быть равно  $A \cos \theta$  и  $A_y$  соответственно  $A \sin \theta$ . Следовательно, если  $A$  всюду равно единице, то

$$A_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad A_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Эти уравнения определяют поле в любых точках любого



квадранта. Для вычисления дивергенции и ротора необходимо определить четыре частных производных:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Складывая два первых значения производных, получим дивергенцию

$$\nabla \mathbf{A} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{1}{r}. \quad (45)$$

Вычитая из четвёртого значения третье, находим ротор

$$[\nabla \mathbf{A}] = 0. \quad (46)$$

Дивергенция этого поля особенно интересна. Наличие дивергенции вызывает необходимость изображать на рисунке начало новых радиальных линий с тем, чтобы показать постоянную интенсивность поля. Очевидно, что если линии начинаются в какой-то области пространства, то должно быть больше линий, выходящих из неё, чем входящих в неё; в этом случае в области имеется дивергенция. Качественно из рис. 20 видно, что дивергенция больше вблизи начала координат, так как именно здесь линии имеют своё начало; количественно из уравнения (45) следует, что дивергенция обратно пропорциональна радиусу и безгранично возрастает при приближении к началу координат.

Операцию дифференцирования поля можно повторить и получить величину, аналогичную второй производной. В приведённом примере дивергенция  $\mathbf{A}$  представляет сама по себе скалярное поле, для которого может быть определён градиент. Это даст градиент дивергенции  $\mathbf{A}$  [символически  $\nabla(\nabla \mathbf{A})$ ]

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \mathbf{A}) &= \nabla \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1/2} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1/2} \mathbf{j} = \\ &= -\frac{x}{r^3} \mathbf{i} - \frac{y}{r^3} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (47)$$

Приведённый результат определяет векторное поле, которое можно дифференцировать с тем, чтобы найти его ротор или ди-

вергенцию. Для определения ротора требуется найти две частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{y}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -y(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = (-y) \left( -\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}} (2x),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{x}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ -x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = (-x) \left( -\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}} (2y).$$

Вычитание этих частных производных даёт ротор и если они равны, то ротор равен нулю. Другими словами, равен нулю ротор градиента  $\frac{1}{r}$

$$\left[ \nabla \left( \nabla \frac{1}{r} \right) \right] = 0. \quad (48)$$

То обстоятельство, что ротор градиента равен нулю, не является случайностью или же каким-либо особенным свойством рассматриваемого поля. Дальше будет показано, что ротор градиента любого скалярного поля всегда в точности равен нулю.

**Поле, являющееся градиентом какой-либо величины, не имеет ротора**  $[\nabla(\nabla F)] \equiv 0$ . Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим некоторое скалярное поле. Обозначим это поле через  $F$ . Первоначально напишем его градиент, используя ур-ние (38)

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (49)$$

Отметим, что этот градиент представляет собой вектор с компонентами  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}$  и  $\frac{\partial F}{\partial z}$ . Ротор этого вектора можно найти, воспользовавшись ур-нием (40)

$$\begin{aligned} [\nabla(\nabla F)] = & \left( \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \\ & + \left( \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (50)$$

Этим доказывается теорема, так как, поскольку порядок дифференцирования во второй частной производной не имеет значения, каждое из выражений в круглых скобках в точности равно нулю.

Другая аналогичная теорема говорит о том, что для всякого векторного поля  $\mathbf{A}$   $\nabla[\nabla \mathbf{A}] = 0$ . Словами это можно выразить так: *поле, являющееся ротором какой-нибудь величины, не имеет дивергенции*. Настоящее положение иллюстрируется задачами 12 и 13. Общую теорему можно легко доказать (как и в задаче 14) методом, совершенно аналогичным применённому для доказа-

тельности тождества  $[\nabla(\nabla F)] \equiv 0$ . Так же, как и в том случае, раскрытие выражения приводит к равным и противоположным по знаку вторым частным производным.

Имеется также другая операция повторного дифференцирования, имеющая существенную важность в приложениях к физическим задачам, а именно, дивергенция градиента. Дивергенция градиента имеет столь важное значение, что ей дано специальное название, её называют «лапласианом», по имени знаменитого французского математика, жившего полтора столетия назад. Более того, ей дано специальное обозначение. Хотя лапласиан  $F$  нужно, в сущности, писать в виде  $\nabla(\nabla F)$ , его обычно изображают, как  $\nabla^2 F$ , что, естественно, соответствует тому же значению. Лапласиан, будучи дивергенцией, представляет скалярное поле. Выраженный через вторые частные производные он имеет чрезвычайно простой вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 F = \nabla(\nabla F) &= \nabla \left( \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F. \end{aligned} \quad (51)$$

Лапласиан, вообще говоря, не равен нулю (ротор градиента и дивергенция градиента являются единственными операциями двойного дифференцирования, для которых результат всегда равен нулю). Если в физических задачах лапласиан часто равен нулю, то это зависит от характера физических условий. В электростатике, например, лапласиан электрического потенциала равен нулю во всём пространстве, не содержащем электрические заряды; это обстоятельство будет показано в следующей главе.

Уравнение (51) даёт лапласиан скалярного поля  $F$ . Лапласиан векторного поля также является удобным понятием. Лапласиан векторного поля  $\mathbf{A}$  пишется в виде  $\nabla^2 \mathbf{A}$  и обозначает, что

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}). \quad (52)$$

Таким образом, лапласиан векторного поля представляет собой векторную сумму лапласианов трёх скалярных компонент этого векторного поля<sup>1)</sup>. Часто бывает нужно знать, равен ли лапласиан нулю. Ответ заключается в том, что он равен нулю тогда и только тогда, когда лапласианы компонент скалярных полей  $A_x$ ,  $A_y$  и  $A_z$  независимо друг от друга равны нулю.

<sup>1)</sup> Это можно принять как определение векторного поля. Другим определением, которое даёт лапласиану то же значение, но обходит вопрос о компонентах по осям координат, будет

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - [\nabla[\nabla \times \mathbf{A}]].$$

**Полярные координаты.** Следует заметить, что к некоторым примерам и задачам предыдущей части главы естественно применить полярную систему координат. В примере 3 и на рис. 20 имеется симметрия такого характера относительно начала координат, что трудно обойтись без радиального расстояния  $r$  и угла  $\theta$ . Нельзя ли в таком случае использовать для полей с радиальной симметрией полярные координаты взамен декартовых и этим упростить вычисления? Этот вопрос связан с особенностью векторного анализа, имеющей крайне важное значение.

Векторный анализ является полностью независимым от системы координат. Электрическое поле, или поле скоростей, или силовое поле физически существует, независимо от того, поместил или нет в это поле какой-нибудь математик систему координатных осей. Поле имеет дивергенцию, или ротор, или градиент, либо не имеет их, в зависимости от свойств самого поля и вне какой-либо связи с той или другой системой координат. Скалярные произведения, векторные произведения, суммы и разности векторов, криволинейные интегралы и интегралы по поверхности имеют значения вне зависимости от системы координат. Природа не устанавливает систем координат (за исключением специальных случаев, когда свойства вещества оказываются различными в различных направлениях).

Ясно, что математическая система, которая устанавливает общие соотношения вне зависимости от координат, является более простой, чем система, в которой первоначально должны быть введены произвольно выбранные оси в качестве рамки, относительно которой располагается мысленный процесс. Вследствие этого теоремы и обобщения векторного анализа значительно проще для восприятия, чем соответствующие положения, связанные с системами геометрических координат.

К сожалению, для конкретных вычислений обычно приходится использовать координаты. Для расчётов требуется введение осей, ибо как найти поле в каждой точке пространства, если не определить каждую точку с помощью координат? Но общие рассуждения могут вестись на языке векторного анализа, а затем с тем, чтобы облегчить вычисления, можно использовать удобную систему координат. С этой целью операции векторного анализа, после того как они определены через векторы и поля [как в ур-ниях (12) и (17)] выражаются также в зависимости от системы координат [как в ур-ниях (20), (22) и (38), (39) и (40)].

Для специфических расчётов следует предпочесть некоторые определённые системы координат. Как показано в задаче 7, выбор системы координат не вносит изменения в результат. А так как полярные координаты более применимы ко многим задачам, чем прямоугольные координаты, то желательно выразить некоторые векторные операции в полярных координатах.

Рассмотрим двухмерную полярную систему, использующую в качестве координат радиальное расстояние  $r$  и угол  $\theta$ . В пер-

вую очередь, необходимо иметь возможность определить  $r$  и  $\Theta$ , когда  $x$  и  $y$  известны, и наоборот.

Соответствующие формулы хорошо знакомы:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \Theta, & y &= r \sin \Theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \Theta &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Далее следует выразить в полярных координатах вектор, который дан в прямоугольных координатах. Если  $A_x$  и  $A_y$  известны, то можно найти  $A_r$  и  $A_\Theta$  ( $A_r$  определяется как длина составляющей вектора  $\mathbf{A}$  в радиальном направлении,  $A_\Theta$  — длина составляющей вектора  $\mathbf{A}$ , нормальной к  $A_r$ ). Рисунок 21 показывает,

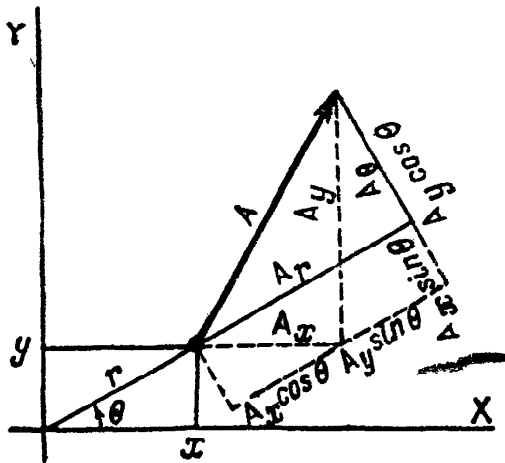


Рис. 21,

что в точке с координатами  $(x, y)$  или  $(r, \Theta)$  имеется вектор  $\mathbf{A}$ . Полярные компоненты  $A_r$  и  $A_\Theta$  показаны на рисунке; точно так же показаны и декартовы компоненты  $A_x$  и  $A_y$ . Начерчено два прямоугольных треугольника;  $A_x$  является гипотенузой одного из них, а  $A_y$  — гипотенузой другого. Один угол каждого треугольника равен  $\Theta$ . Из построения, приведённого на рисунке, видно, что

$$\left. \begin{aligned} A_r &= A_x \cos \Theta + A_y \sin \Theta \\ A_\Theta &= A_y \cos \Theta - A_x \sin \Theta \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Это и есть требуемое соотношение, позволяющее найти полярные компоненты с помощью декартовых компонент. Если, напротив, известны полярные координаты и требуется определить координаты декартовы, то используются приводимые ниже соотношения. Они получаются из ур-ний (54) путём их совместного решения или же из рассмотрения несколько другого построения рис. 21:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= A_r \cos \Theta - A_\Theta \sin \Theta \\ A_y &= A_r \sin \Theta + A_\Theta \cos \Theta \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Теперь можно легко найти градиент в полярных координатах. Для двумерных прямоугольных координат он равен

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{j}.$$

Из ур-ний (53)

$$x = r \cos \Theta \quad \text{и} \quad y = r \sin \Theta.$$

Поэтому согласно правилам дифференцирования сложной функции (см. соответствующие книги по анализу):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial r} \cos \Theta - \frac{\partial P}{\partial \Theta} \cdot \frac{\sin \Theta}{r}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial r} \sin \Theta + \frac{\partial P}{\partial \Theta} \cdot \frac{\cos \Theta}{r}. \quad (57)$$

Градиент представляет собой вектор и из выражения для  $\nabla P$  видно, что его компоненты по  $x$  и по  $y$  определяются соответственно ур-ниями (56) и (57). Однако, недостаточно знать компоненты по осям  $x$  и  $y$ ; необходимо ещё найти компоненты по  $r$  и  $\Theta$ . Это можно сделать с помощью ур-ний (54); подставляя в них ур-ние (56) для компоненты  $x$  и ур-ние (57) для компоненты  $y$ , можно получить в результате следующие выражения для радиальной и угловой компонент:

$$\begin{aligned} (\nabla P)_r = & \left( \frac{\partial P}{\partial r} \cos \Theta - \frac{\partial P}{\partial \Theta} \cdot \frac{\sin \Theta}{r} \right) \cos \Theta + \left( \frac{\partial P}{\partial r} \sin \Theta + \right. \\ & \left. + \frac{\partial P}{\partial \Theta} \cdot \frac{\cos \Theta}{r} \right) \sin \Theta = \frac{\partial P}{\partial r}, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} (\nabla P)_\Theta = & \left( \frac{\partial P}{\partial r} \sin \Theta + \frac{\partial P}{\partial \Theta} \cdot \frac{\cos \Theta}{r} \right) \cos \Theta - \left( \frac{\partial P}{\partial r} \cos \Theta - \right. \\ & \left. - \frac{\partial P}{\partial \Theta} \cdot \frac{\sin \Theta}{r} \right) \sin \Theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \Theta}. \end{aligned} \quad (59)$$

Следовательно, если  $\mathbf{1}_r$  есть единичный радиальный вектор в рассматриваемой точке, а  $\mathbf{1}_\Theta$  — единичный вектор, нормальный к  $\mathbf{1}_r$ , то градиент в системе двухмерных полярных координат будет равен

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial r} \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \Theta} \mathbf{1}_\Theta. \quad (60)$$

Уравнение (32) на стр. 28 характеризовало форму поверхности холма. В полярных координатах высота каждой точки равна <sup>1)</sup>

$$P = 1000 - r^2. \quad (61)$$

Для того, чтобы найти градиент, характеризующий крутизну холма, воспользуемся ур-нием (60); тогда

$$\nabla P = -2r \mathbf{1}_r. \quad (62)$$

<sup>1)</sup> Ур-ние (61) может быть получено из ур-ния (32) с помощью соотношений (53).

Эквивалентно ли это значению градиента, которое даётся ур-нием (33) в декартовых координатах?

Дивергенцию также можно выразить в полярных координатах. Воспользуемся выражением для двух измерений в декартовых координатах

$$\nabla \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}.$$

Подставляя сюда ур-ния (56) и (57), имеем

$$\nabla \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial A_x}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\partial A_y}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial A_y}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{r}. \quad (63)$$

Компоненты  $\mathbf{A}$  в декартовых координатах нужно заменить компонентами в полярных координатах с помощью ур-ний (55)

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{A} = & \\ = & \frac{\partial (A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta)}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial (A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{r} + \\ + & \frac{\partial (A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta)}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial (A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{r}. \quad (64) \end{aligned}$$

Теперь можно развернуть частные производные ур-ния (64), замечая, что  $\theta$  не есть функция  $r$ , но что  $A_r$  и  $A_\theta$  являются функциями как  $r$ , так и  $\theta$ . Если собрать подобные члены, то окончательное выражение для дивергенции будет иметь вид

$$\nabla \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r}. \quad (65)$$

Ротор тоже может быть выражен в полярных координатах, при чём преобразование с использованием соотношений для прямоугольных координат аналогично соответствующему преобразованию для градиента. Окончательно для ротора в случае двух измерений получается выражение

$$[\nabla \mathbf{A}] = \left( \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r} \right) \mathbf{k}. \quad (66)$$

*Пример 4.* Для того, чтобы пояснить применение ур-ний (65) и (66), найдём дивергенцию и ротор векторного поля, которое рассматривалось в примере 3 (стр. 35) и изображение которого дано на рис. 20. Из описания поля ясно, что его полярными компонентами будут:

$$A_r = 1 \text{ и } A_\theta = 0.$$

Согласно ур-нию (65) дивергенция поля равна  $1/r$ . Так как каждый член ур-ния (66) равен нулю, то и ротор равен нулю. Это те же результаты, какие были получены раньше при исполь-

зовании прямоугольных координат [ур-ния (45) и (46)], но вычисления в полярных координатах настолько проще, что преимущества их использования очевидны.

**Таблицы.** Формулы для градиента, дивергенции, ротора и лапласиана в прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах приведены в табл. II, помещённой на внутренней задней стороне обложки.

ЗАДАЧИ

1. Дополните таблицу в ф-лах (19) включением всех возможных скалярных и векторных произведений единичных векторов  $i, j$  и  $k$ .
2. а. Докажите, что ур-ние (22) правильно.  
б. Докажите, что ур-ние (28) правильно.
3. Территория фермы имеет форму параллелограмма; одна граничная линия направлена на восток и равна 7 км, а другая направлена точно на северо-восток и равна 5 км. Используя ур-ние (22), найдите площадь фермы.
4. Капли дождя, сносимые южным ветром, падают под углом в  $30^\circ$  к вертикали со скоростью 20 м в секунду. В каждом кубическом метре воздуха содержится 25 г дождя. Какое количество дождя выпадает на каждом квадратном метре южной стороны строения? На западной стороне? На плоской крыше? Используйте для решения этой задачи ур-ние (20), характеризующее величину площади с помощью векторов.
5. Вычертите контурную карту холма для ур-ния (32) и набросайте его очертания в трёх измерениях. Начертите векторы на контурной карте с тем, чтобы показать градиент в следующих точках: (0,0), (0,1), (0,3), (0, -3), (3,0), (2,2), (2,1), (1,2), (-1, -2), (-2,1), (-1,2).
6. Воспользуйтесь книгой по анализу для того, чтобы доказать справедливость ур-ния (34).
7. Если на рис. 19b координатные оси выбраны под углом  $45^\circ$  к изображённому на рисунке положению, то поле будет определяться вектором

$$A = \frac{y - x + 10\sqrt{2}}{2} (i + j).$$

Найдите ротор и дивергенцию в каждой точке, используя эти, менее удобно выбранные оси координат.

8.  $V_x = \sin y, V_y = 0$ . Нанесите поле (как на рис. 19) и найдите его дивергенцию и ротор.

9.  $V_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, V_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$ . Нанесите поле и найдите его дивергенцию и ротор.

10. Вычертите линии поля постоянной дивергенции для ур-ния (45) и нанесите векторное поле градиента этой дивергенции на основании ур-ния (47).

11. Найдите ротор градиента  $P$  в ур-нии (32).

12. Найдите дивергенцию ротора  $\nabla[\nabla V]$  векторного поля, определённого в задаче 8, используя ур-ние (39).

13.  $V_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, V_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Нанесите поле, определяемое этими уравнениями, и найдите его дивергенцию и ротор, а также дивергенцию ротора.

14. Докажите, что  $\nabla[\nabla V] \equiv 0$ .

15. Найдите лапласиан  $P$  для ур-ния (32).

16. Найдите лапласиан  $P$ , если  $P = -\ln r$  ( $r$  — скалярное расстояние некоторой точки на плоскости от выбранной точки, так что при соответствующем выборе координат  $r^2 = x^2 + y^2$ ).



17. Найдите лапласиан  $P$ , если  $P = \frac{1}{r}$  (где  $r$  — скалярное расстояние от данной точки) для случаев: (а) двухмерного поля и (б) — трёхмерного поля.
18. Докажите с помощью ур-ний (53) и (54), что ур-ние (62) эквивалентно ур-нию (33).
19. Пользуясь ур-нием (44), докажите, что ур-ние (66) справедливо.
20. Выразите поле задачи 9 в полярных координатах и найдите дивергенцию и ротор.
21. Определите, предпочтительно ли пользоваться полярными координатами при решении задачи 13.
-

## НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ПОЛЯМ

**Дивергенция.** Общее представление о дивергенции дано в предыдущей главе. Там было показано, что дивергенция получается в области, в которой линии потока берут своё начало. Для вычисления дивергенции приведено уравнение (39), однако, никак не доказывалось и не пояснялось, что это уравнение соответствует действительной сущности дивергенции. Подобное пояснение будет дано теперь. Не являясь строгим, оно показывает основные этапы строгого доказательства.

Рассмотрим малый параллелепипед с гранями, параллельными трём координатным осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ , как показано на рис. 22 *a*. Разберём предельный случай, когда параллелепипед

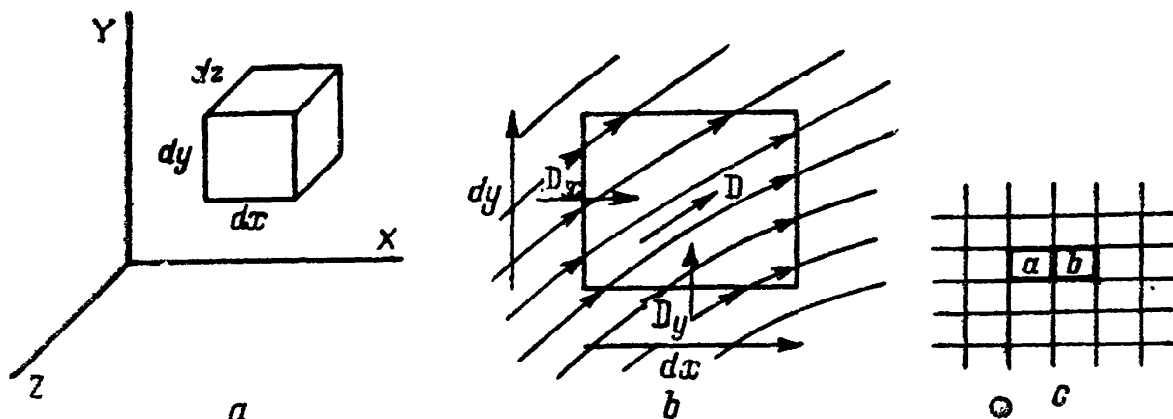


Рис. 22.

так мал, что его грани имеют длину соответственно  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ . Рисунок 22 *b* показывает боковой вид такого параллелепипеда с плоскостью, расположенной параллельно плоскости  $x-y$ . Мы смотрим на сторону, имеющую площадь  $dx \cdot dy$ . Площадь каждой боковой стенки равна  $dy \cdot dz$ , а площадь верхней и нижней стенки  $dx \cdot dz$ . Рассматриваемый малый объём расположен в векторном поле, которое для удобства изложения условимся называть просто  $D$ . Линии потока этого поля проходят через параллелепипед, входя через одну плоскость и выходя через другую. Мы хотим узнать, сколько линий берут своё начало внутри объёма, если, конечно, такие линии имеются.

Из рис. 22*b* следует, что число линий поля, входящих с левой стороны призмы, равно площади этой стороны, умноженной на нормальную компоненту напряжённости поля, которая равна  $D_x dy \cdot dz$ . Если  $D_x$  изменяется на расстоянии  $dx$ , то число линий, выходящих из правой поверхности, будет другим. Когда  $D_x$  при переходе слева направо изменяется на величину  $\frac{\partial D_x}{\partial x}$ ,

изменение на расстоянии  $dx$  равно  $\frac{\partial D_x}{\partial x} dx$ . Следовательно, число линий поля, выходящих через правую плоскость, будет  $(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} dx) dy \cdot dz$ . Вычитая отсюда  $D_x dy \cdot dz$ , находим, что число линий, выходящих с правой стороны, превышает число линий, входящих с левой стороны, на  $\frac{\partial D_x}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz$ . Аналогично, число линий, выходящих через верхнюю плоскость параллелепипеда, превышает число линий, входящих через нижнюю, на  $\frac{\partial D_y}{\partial y} dy \cdot dx \cdot dz$ , а число выходящих через переднюю плоскость больше числа входящих через заднюю на  $\frac{\partial D_z}{\partial z} dz \cdot dx \cdot dy$ .

Складывая эти величины, найдём полное число линий потока, выходящих из объёма, но не входящих в него,

$$\left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz.$$

Но дивергенция определяется как число линий поля, берущих начало в единице объёма. Поэтому, если объём параллелепипеда равен  $d\upsilon$ , то

$$\nabla D = \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{d\upsilon}.$$

Так как объём  $d\upsilon$  равен  $dx \cdot dy \cdot dz$ , то

$$\nabla D = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}, \quad (67)$$

а это и есть ур-ние (39).

**Теорема Гаусса.** Теперь предположим, что пространство разбито на неограниченное число ячеек объёмом  $d\upsilon$ , как в случае, показанном на рис. 22*c*. Число линий поля, выходящих из подобной ячейки, обозначенной на рисунке буквой  $a$ , больше числа линий, входящих в ячейку, на величину  $\nabla(Dd\upsilon)$ . Число линий, берущих начало в соседней ячейке  $b$ , точно так же равно дивергенции поля в данной области, умноженной на объём ячейки. Число линий, исходящих из двух ячеек, вместе взятых,

равно сумме произведений дивергенции на объём. Складывая большое число ячеек, получим, что число линий поля, вышедших из некоторого объёма, больше числа линий, входящих в этот объём, на сумму (или интеграл) всех отдельных произведений дивергенции и объёма. Таким образом, излишек направленного наружу потока равен

$$\int \Delta D dv. \quad (68)$$

В гл. I поток векторного поля  $D$ , проходящего через площадь  $a$ , был определён как

$$\int D da. \quad (9)$$

Отсюда следует, что излишек потока, выходящий наружу через некоторую замкнутую поверхность (превышение выходного потока над входным), находится путём интегрирования по всей замкнутой поверхности <sup>1)</sup>:

$$\oint D da. \quad (69)$$

Теперь видно, что ур-ния (69) и (68) представляют собой различные выражения для одной и той же величины потока и, следовательно, могут быть приравнены одно другому

$$\oint D da = \int \nabla D dv. \quad (70)$$

Эта теорема очень важна. Она связывает интеграл дивергенции по некоторому объёму с интегралом напряжённости поля по поверхности, охватывающей этот объём. Её иногда называют теоремой дивергенции, а иногда (хотя и не совсем правильно) *теоремой Гаусса*.

Некоторые случаи использования этой теоремы были показаны в предыдущей главе, особенно применительно к рис. 15.

**Ротор.** Идея представления ротора в виде воображаемого гребного колеса, находящегося в некотором поле скоростей жидкости, была изложена в гл. II. Гребное колесо вращается, если сумма компонент напряжённости поля тангенциальных к окружности гребного колеса, отлична от нуля. Это иллюстрировалось очень несовершенным примером действия сил на особые лопа-

<sup>1)</sup> Следует сделать два пояснения. Маленький кружок, помещённый на знак интеграла, означает интегрирование по замкнутому пути, т. е. либо по замкнутой линии, либо по замкнутой поверхности, в зависимости от того, ведётся ли интегрирование по пути или по площади, в соответствии с природой дифференциала. Когда  $da$  показывает, что интегрирование ведётся по площади, кружок на интеграле означает, что поверхность, по которой берётся интеграл, должна быть замкнутой поверхностью.

В ур-нии (3) дифференциал  $ds$  ( $s$  — путь) указывает на интеграцию по линии; на то, что это есть замкнутая линия указывает кружок на знаке интеграла.

Площадь  $da$  является векторной величиной, как указывалось в гл. II. Вектор  $da$  нормален к площади и согласно условию *направлен наружу*. Очевидно, что это условие используется только в случае замкнутой поверхности.

сти колеса. Понятие ротора будет выражено значительно лучше, если воспользоваться понятием *циркуляции* векторного поля на периферии гребного колеса. После этого гребное колесо можно полностью устранить из рассмотрения, оставляя ротор определённым через циркуляцию по малому замкнутому пути.

Математическая величина *циркуляции* представляет собой линейный интеграл векторного поля по заданному пути. Если векторное поле равно  $\mathbf{E}$ , то его циркуляция по замкнутому пути будет  $\oint \mathbf{E} ds$ . Этот интеграл даёт математическое выраже-

ние обычного представления о циркуляции, такой, например, как циркуляция воздуха или воды; ясно, что именно циркуляция жидкости по периферии заставляет вращаться гребное колесо.

Ротор это — микроскопическая циркуляция. Поместим испытательное гребное колесо в векторное поле и расположим его таким образом, чтобы скорость вращения была максимальна (это означает такую ориентировку, при которой циркуляция вдоль окружности получается наибольшей). Теперь предположим, что гребное колесо исчезло, но сохранилась его окружность, как круговой путь в пространстве. Циркуляция вектора по этому пути (найденному согласно предыдущему определению) зависит от площади, заключённой внутри. Деление циркуляции на площадь даёт отношение, которое не зависит от величины или формы пути, если путь мал. Отношение это равно

$$\frac{\text{циркуляция по малому замкнутому пути}}{\text{площадь поверхности, ограниченной этим путём}}$$

Предел, к которому приближается полученное отношение, когда путь стягивается в точку, есть *ротор* в данной точке.

Таким образом, *ротор является предельным значением циркуляции, отнесённой к единице площади*. Отсюда следует, что циркуляция векторного поля вдоль замкнутого контура бесконечно малых размеров зависит от ротора в этой точке и от бесконечно малой площади, ограниченной рассматриваемым контуром. Однако, циркуляция по малому замкнутому контуру зависит также и от его расположения. Ротор должен рассматриваться как векторная величина. Направление вектора ротора является нормальным к плоскости, в которой циркуляция максимальна. Циркуляция по бесконечно малому замкнутому контуру, лежащему в этой, или в любой другой, плоскости, равна скалярному произведению ротора на вектор, определяющий площадь,  $[\nabla \mathbf{E}] da$ .

Теперь ротор выражен через циркуляцию. Чтобы найти выражение для ротора через само векторное поле, определяем циркуляцию по малому замкнутому контуру в векторном поле. При этом совершенно необязательно, чтобы контур имел форму ок-

ружности. Представим себе малый замкнутый контур прямоугольной формы, расположенный в плоскости  $x - y$  (рис. 23а). Циркуляцию по этому контуру можно найти (в соответствии с определением циркуляции), умножая длину каждой стороны прямоугольника на составляющую напряжённости поля, параллельную этой стороне. В предельном случае длинами сторон являются  $dx$  и  $dy$ . Рассмотрим основание прямоугольника, начиная с левого нижнего угла рис. 23а; длина равна  $dx$ , она отсчитывается в положительном направлении, а составляющая поля вдоль основания прямоугольника равна  $E_{x \text{ при } y_1}$ . Поэтому основание прямоугольника даёт первый член в приведённом ниже выражении для циркуляции. Другие три члена получаются при обходе других трёх сторон прямоугольника против часовой стрелки. Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{циркуляция} = & E_{x \text{ при } y_1} dx + \\ & + E_{y \text{ при } x_2} dy - E_{x \text{ при } y_2} dx - \\ & - E_{y \text{ при } x_1} dy. \end{aligned} \quad (71)$$

Третий и четвёртый члены отрицательны, так как при обходе прямоугольника против часовой стрелки верхняя и левая стороны проходятся в отрицательном направлении. Расстояние, проходимое вдоль верхней стороны, равно  $-dx$ , а вдоль левой  $-dy$ .

Перегруппировав члены, получаем

$$\text{циркуляция} = (E_{y \text{ при } x_2} - E_{y \text{ при } x_1}) dy - (E_{x \text{ при } y_2} - E_{x \text{ при } y_1}) dx. \quad (72)$$

Выражение в первых скобках определяет величину, на которую возрастает  $E_y$  на длине  $dx$  между  $x_1$  и  $x_2$ ; она равна  $\frac{\partial E_y}{\partial x} dx$ . Аналогичная величина стоит во вторых скобках и она соответствует изменению  $E_x$  на длине от  $y_1$  до  $y_2$ . Тогда уравнение (72) можно написать в виде

$$\text{циркуляция} = \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \right) dy - \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \right) dx.$$

Как было показано выше, циркуляция по бесконечно малому контуру равна  $[\nabla E] da$ , где  $a$  — площадь, ограниченная контуром. Поэтому можно записать

$$[\nabla E] da = \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \cdot dy - \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \cdot dx. \quad (73)$$

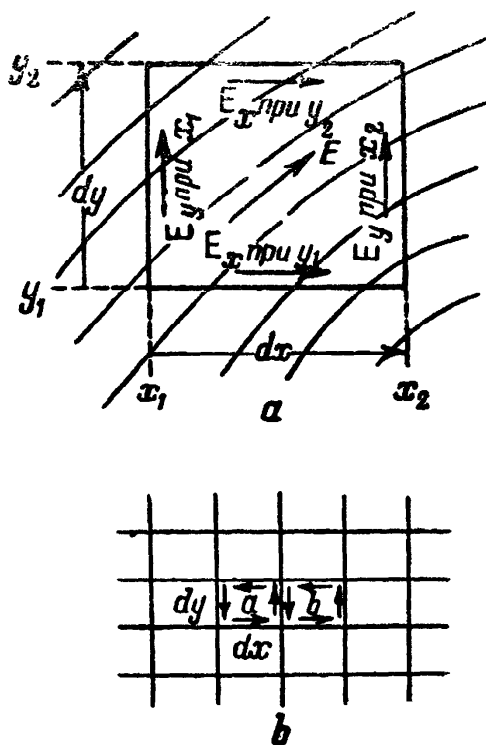


Рис. 23.

Площадь, ограниченная прямоугольным контуром, равна  $dx \cdot dy$  и обе стороны уравнения можно разделить на эту величину. Поскольку  $da$  характеризует площадь в плоскости  $x - y$ , то уравнение (73) даёт составляющую ротора, нормальную к плоскости. В двумерном поле это будет полный ротор и

$$[\nabla E] = \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (74)$$

Полученное уравнение идентично с уравнением (44). В трёхмерном поле это будет только одна составляющая; полное выражение для ротора даётся уравнением (40).

**Теорема Стокса.** Дискуссия предыдущего раздела относилась к ротору в одной точке или к области внутри бесконечно малого прямоугольника. Теперь следует определить интеграл ротора по поверхности конечных размеров. Это можно сделать, находя ротор в каждой точке и производя интегрирование. Однако, имеется очень полезная теорема, созданная Стоксом, которая часто избавляет от значительной части затруднений при вычислениях.

Рассмотрим малый прямоугольник, обозначенный на рис. 23*b* буквой  $a$  и помещённый в векторное поле.

Как показано стрелками, вокруг этого прямоугольника имеется циркуляция, соответствующая ротору векторного поля внутри площади  $a$ . В примыкающем прямоугольнике, обозначенном буквой  $b$ , также имеется циркуляция, соответствующая ротору для площади  $b$ . Но так как у прямоугольников  $a$  и  $b$  одна сторона общая, то это означает определённую циркуляцию в одном прямоугольнике и в точности такую же, но противоположную по направлению, циркуляцию в другом прямоугольнике. Следовательно, сумму роторов в прямоугольниках  $a$  и  $b$  можно найти путём определения циркуляции вдоль внешнего периметра нового прямоугольника, составленного из  $a$  и  $b$ , взятых вместе, без учёта равных и противоположных по направлению составляющих, относящихся к общей стороне. Другие прямоугольники могут быть добавлены к этим двум в любом количестве. Циркуляцию вдоль общих сторон всегда можно исключить, благодаря чему, независимо от величины результирующей площади или от её формы, суммирование ротора во всех точках поверхности даёт циркуляцию по периметру поверхности. Математически линейный интеграл вектора, определяющий циркуляцию, можно приравнять поверхностному интегралу ротора вектора и в результате будет получена теорема Стокса

$$\oint E ds = \int [\nabla E] da. \quad (75)$$

Применение этой теоремы не ограничивается плоскими поверхностями. Предыдущее рассмотрение иллюстрировалось для

случая плоской поверхности (рис. 23), однако, теорема применима и может быть строго доказана и для поверхности любой другой формы. Поверхность, по которой интегрировался ротор в ур-нии (75), может, например, быть выгнута как чашка или котелок. В последнем случае интегрирование ротора по всей поверхности котелка даёт циркуляцию вокруг его края.

Но предположим, что котелок имеет крышку; край крышки и край котелка совпадают. Таким образом, результат интегрирования ротора по крышке должен быть равен результатам интегрирования по котелку. Пользуясь более общими выражениями, можно сказать, что интегрирование ротора по поверхности векторного поля, как указывается правой частью ур-ния (75), даёт одинаковый результат для всех поверхностей, имеющих общий периметр, и совершенно не зависит от формы поверхности.

**Сравнение теорем.** Теорема Гаусса и теорема Стокса очень сходны по своей сущности, так как они связывают явления «в большом» с явлениями «в малом» — макроскопическое с микроскопическим.

Если изучать векторное поле в определённой точке, как бы под микроскопом, то можно обнаружить, что оно в этой точке имеет известную дивергенцию. Подобное изучение в действительности производится не с помощью микроскопа, а с использованием частной производной; ур-ние (67) даёт дивергенцию, когда известны частные производные в данной точке. Но дивергенция даёт результат «в большом», который может быть обнаружен без помощи микроскопа или частной производной. Это — поток. Если поток выходит из объёма, то в этом объёме имеется дивергенция и необходимые соотношения даются теоремой Гаусса. Одна сторона соотношения в теореме Гаусса выражена через поле, пронизывающее поверхность; это — поверхность конечных размеров, представляющая собой макроскопическую величину. Другая сторона соотношения выражена через дивергенцию для всего объёма; эта величина должна рассматриваться от точки к точке и представляет собой микроскопическую величину.

Аналогичным образом теорема Стокса устанавливает соотношения между макроскопическим эффектом — циркуляцией вдоль замкнутого контура — и микроскопическим явлением — ротором в каждой точке поверхности, окружённой этим контуром.

Эти теоремы часто используются, когда известна микроскопическая природа поля и требуется знать её макроскопическую природу (т. е. если известны производные и требуется определить поле) и наоборот. Подобные применения поясняются в следующей главе, в которой продолжается изучение электрического поля.

**Скалярный потенциал.** Скалярное поле высоты над уровнем моря представляет собой *потенциальное* поле. Это — поле грави-



тационного потенциала. Его величина в данной точке определяется как работа, необходимая для того, чтобы переместить тело с единичной массой с уровня моря в данную точку, или как величина выигрыша потенциальной энергии при подобном перемещении.

Поверхность уровня или, более точно, поверхность постоянного возвышения над уровнем моря является *экипотенциальной поверхностью* и тело может перемещаться по ней без изменения гравитационного потенциала и без совершения работы. Экипотенциальные поверхности вблизи уровня моря показаны на рис. 24а, а экипотенциальные поверхности на больших расстояниях от земли — на рис. 24б.

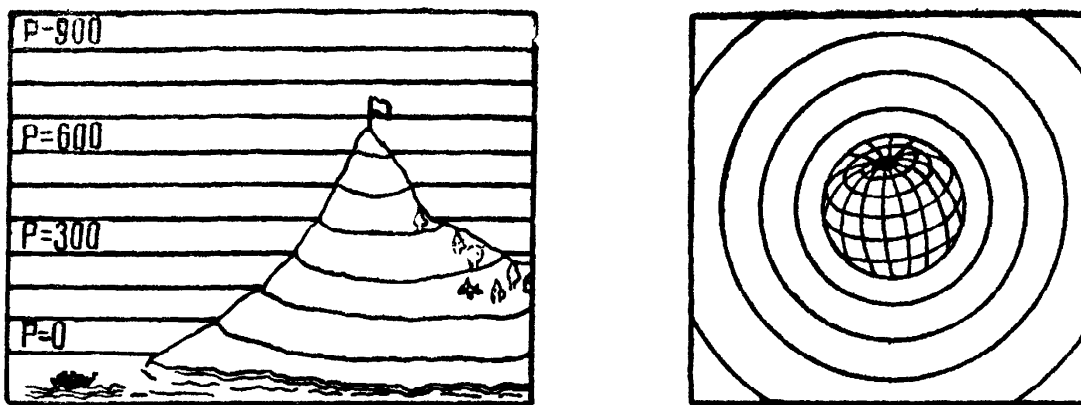


Рис. 24.

*Гравитационное поле* является силовым полем. Таким образом, это — векторное поле. Его величина в каждой точке согласно определению равна силе тяжести тела с единичной массой. Это поле направлено вниз, к центру земли. Гравитационный потенциал определяется через работу, а гравитационное поле через силу, и значит, они связаны простым соотношением. Поле равно отрицательному значению *градиента* потенциала

$$\mathbf{F} = -\nabla P. \quad (76)$$

Уравнение (76), написанное применительно к гравитационному полю, соответствует общему соотношению между потенциалом и силой. Зная потенциальное поле, можно путём дифференцирования найти силовое поле. У каждого потенциального поля есть градиент, и  $\mathbf{F}$  всегда может быть найдено с помощью  $P$ . Но, зная поле сил, не всегда возможно найти потенциальное поле, так как потенциальное поле существует не всегда. К счастью, имеется простой критерий, с помощью которого можно узнать, существует ли потенциальное поле, соответствующее данному силовому полю.

В гл. II было показано, что вектор  $\bar{\nabla}$ , являющийся градиентом некоторого скалярного поля, не имеет ротора. Обращение этой

теоремы приводит нас к желаемому критерию: *вектор, не имеющий ротора, является градиентом некоторого скалара*. Символически,

$$\text{если } [\nabla F] = 0, \quad \text{то } F = -\nabla P. \quad (77)$$

Отсюда видно, что если вектор не имеет ротора, то существует некоторый скалар, градиент которого всегда идентичен с данным вектором: это не говорит о том, как найти поле скалара, но даёт уверенность в его существовании. Когда установлено, что скаларное поле  $P$  существует, его называют *потенциальным* полем.

Электростатическое поле даёт подобный пример. Как будет видно из следующего параграфа, у электростатического поля нет ротора. Поэтому согласно предыдущему существует электростатическое потенциальное поле. В самом деле, хорошо известно, что существуют электростатические потенциалы и что напряжение есть разность электростатических потенциалов.

Статическое магнитное поле не имеет ротора в областях, где не течёт ток. Это обстоятельство будет обсуждаться в гл. VII. Следовательно, если по проводу проходит ток, то вокруг него существует магнитное поле, не имеющее ротора. Для пространства, окружающего провод, может быть найдено скаларное поле магнитного потенциала (для прямолинейного провода эквипотенциальные поверхности поля магнитного скаларного потенциала будут радиальными плоскостями). Но *внутри* провода, по которому течёт ток, существует магнитное поле и для этого поля ротор не равен нулю. Таким образом, внутри провода отсутствует поле магнитного скаларного потенциала<sup>1)</sup>.

Другим примером вектора, не имеющего ротора, является тепловой поток через твёрдое тело. Здесь скаларное потенциальное поле должно существовать. Оно и в самом деле существует; это — температура, а градиент температуры представляет собой вектор, пропорциональный потоку тепла.

Представим себе, что в гравитационном поле одна поверхность содержит все точки на уровне моря (потенциал = 0), другая все точки на 100 м выше уровня моря (потенциал = 100) и т. д. (рис. 24а и б). Эти эквипотенциальные поверхности разделяют всё пространство на тонкие пластинки или слои.

Только векторные поля, не имеющие ротора, обладают свойством разделять пространство на тонкие слои с помощью эквипотенциальных поверхностей. Поэтому, следуя Максвеллу, векторное поле, не имеющее ротора, называют *ламеллярным*<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> С физической точки зрения это значит, что если магнитный полюс поместить внутри проводника (в качестве проводника может быть взята ртуть), то работа, совершаемая при перемещении магнитного полюса из одной точки в другую, будет зависеть от того, по какому пути производится перемещение. Поэтому величину потенциала нельзя определить.

<sup>2)</sup> Lamella — пластинка, тонкий слой.

(потенциальным) полем. Иногда ламеллярное поле называют *безвихревым*, так как у него нет ротора.

**Соленоидальные поля и вектор-потенциал.** В гл. II было также установлено, что если векторное поле является ротором другого векторного поля, то оно не имеет дивергенции, т. е.

$$\text{если } \mathbf{V} = [\nabla \mathbf{A}], \text{ то } \nabla \mathbf{V} = 0. \quad (78)$$

Существует и обратная теорема: *векторное поле, не имеющее дивергенции, является ротором некоторого другого векторного поля.* Математически,

$$\text{если } \nabla \mathbf{V} = 0, \text{ то } \mathbf{V} = [\nabla \mathbf{A}]. \quad (79)$$

Другими словами, если векторное поле  $\mathbf{V}$  не имеет дивергенции (что, верно, например, для поля, изображающего скорость потока несжимаемой жидкости), то может быть найдено некоторое другое векторное поле  $\mathbf{A}$ , у которого ротор  $\mathbf{A}$  во всех точках равен  $\mathbf{V}$ . По крайней мере можно надеяться, что поле  $\mathbf{A}$  удастся найти. Определить это поле бывает трудно, а иногда и невозможно, но если  $\mathbf{A}$  существует, то независимо от возможности его нахождения ему присваивается название *вектор-потенциала*. Вектор-потенциал в некоторых отношениях внешне аналогичен скалярному потенциалу, характеризованному в предыдущем разделе. Несмотря на это, следует особо подчеркнуть, что это совершенно другая величина. У векторного поля, которое не имеет ни ротора, ни дивергенции, имеется как скалярный, так и векторный потенциал и это будут различные величины, очень мало похожие одна на другую.

Векторное поле, не обладающее дивергенцией, называют *соленоидальным*. Это название означает, что все линии потока являются замкнутыми кривыми, не имеющими ни начала, ни конца (обстоятельство, вытекающее из того, что дивергенция отсутствует). У каждого соленоидального поля есть вектор-потенциал. Все магнитные поля соленоидальны и, следовательно, в них всегда имеется магнитный вектор-потенциал.

*Пример.* На рис. 16а (стр. 30) показана циркуляция воды в трубе. Этот рисунок в равной степени можно рассматривать и как изображающий магнитное поле в проводнике круглого сечения. Представим себе систему цилиндрических координат; это — трёхмерная система, в которой  $r$  — радиальное расстояние от оси,  $z$  — расстояние, параллельное оси, а  $\theta$  тот же угол, что и в полярной системе координат [уравнение (53)]. Предположим, что в нашей системе координат ось совпадает с осью вращения рис. 16а; это будет наиболее простая и удобная для применения к задаче данного характера система. (Формулы, выраженные через цилиндрические координаты, приведены в табл. II.)

Поле рис. 16а, которое характеризует скорость воды или напряжённость магнитного поля, описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= 0 \\ H_\theta &= ar \\ H_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

где  $a$  — известная константа. Желательно определить скалярный и векторный потенциалы этого поля.

Чтобы узнать, существует ли скалярный потенциал, найдём ротор заданного поля  $\mathbf{H}$ . Так как  $\mathbf{H}$  по своему существу является двумерным, то, воспользовавшись ур-нием (66) (можно также воспользоваться выражением для ротора в табл. II), получим

$$[\nabla\mathbf{H}] = \left( a \frac{\partial r}{\partial r} - 0 + \frac{ar}{r} \right) \mathbf{k} = 2a\mathbf{k}. \quad (81)$$

Следовательно, ротор не равен нулю, поле не является потенциальным и бесполезно пытаться определять поле скалярного потенциала, так как его не существует.

Чтобы узнать, существует ли векторный потенциал, найдём дивергенцию  $\mathbf{H}$ . Из рассмотрения ур-ния (65), в котором каждый член равен нулю, очевидно, что поле не имеет дивергенции и, значит, можно найти векторный потенциал. Обозначим предполагаемый вектор-потенциал через  $\mathbf{A}$  и попытаемся выяснить, что он собой представляет.

Ротор  $\mathbf{A}$  должен быть равен  $\mathbf{H}$ , поэтому если маленькие гребные колёса — „измерителя ротора“ (рис. 18) поместить так, чтобы их оси оказались направленными вдоль линий  $\mathbf{H}$ , как показано на рис. 25, то поле вектор-потенциала  $\mathbf{A}$  будет их вращать с соответствующей относительной скоростью. (Задачу можно рассмотреть и другим способом: если измерители ротора рис. 25 двигаются со скоростью, определяемой величиной  $\mathbf{H}$  вдоль их осей, то они будут действовать как насосы и, перемешивая воображаемую жидкость, в которую они помещены, сообщат ей скорость, равную той, какая была бы создана полем вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ .)

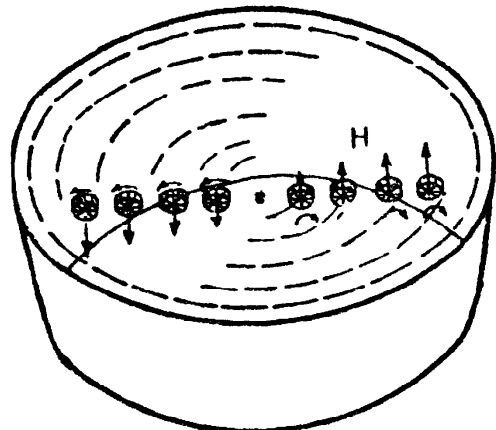


Рис. 25.

Теперь из рассмотрения рис. 25 становится ясным, что единственное возможное решение для вектор-потенциала соответ-

вует полю вертикального направления с нулевой интенсивностью в центре трубы и возрастающей интенсивностью по мере приближения к стенкам. Оно будет вращать все измерители ротора в нужном направлении и вызовет поле вектор-потенциала, параллельное оси  $z$ . Напряжённость поля этого вектор-потенциала изменяется с радиусом. Но так как рассматриваемое поле симметрично, то оно не зависит от  $\theta$  и  $z$ . Характер изменения вектор-потенциала в зависимости от радиуса неизвестен, однако, по видимому его можно выразить с помощью ряда <sup>1)</sup> и написать для вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ :

$$\left. \begin{aligned} A_r &= 0, \\ A_\theta &= 0, \\ A_z &= b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Выражение для  $\mathbf{A}$  верно в том случае, если возможно подобрать такие величины коэффициентов  $b_0, b_1, b_2$  и т. д., чтобы ротор  $\mathbf{A}$  был равен  $\mathbf{H}$ . Используя выражение для ротора в цилиндрических координатах, которое приведено в табл. II, и подставляя в него величины из ур-ния (82), получим

$$[\nabla \mathbf{A}] = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \mathbf{1}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{1}_\theta. \quad (83)$$

Первый член этого выражения равен нулю, так как  $A_z$  не изменяется с  $\theta$  и радиальная составляющая ротора  $\mathbf{A}$  отсутствует

$$[\nabla \mathbf{A}]_r = 0. \quad (84)$$

Второй член ур-ния (83) даёт компоненту  $\theta$  ротора

$$[\nabla \mathbf{A}]_\theta = -(b_1 + 2b_2 r + 3b_3 r^2 + \dots). \quad (85)$$

Осевая компонента ротора  $\mathbf{A}$  равна нулю, так как она содержит только производные от  $A_r$  и  $A_\theta$ , которые обе равны нулю

$$[\nabla \mathbf{A}]_z = 0. \quad (86)$$

<sup>1)</sup> Это поясняет чрезвычайно сильный метод решения дифференциальных уравнений. Когда решение представляет собой неизвестную функцию, очень часто оказывается возможным подставить вместо неё соответствующий ряд (во многих случаях степенной ряд) с неопределёнными коэффициентами. Коэффициенты определяются из дифференциального уравнения и полученный результат представляет собой решение, выраженное через ряды.

Для того, чтобы  $\mathbf{A}$  могло быть векторным потенциалом  $\mathbf{H}$ , три составляющие ротора  $\mathbf{A}$  должны быть равны трём соответствующим составляющим вектора  $\mathbf{H}$ . Радиальные и осевые компоненты соответственно равны, как показывает сравнение ур-ний (84) и (86) с ур-нием (80). Для того, чтобы угловые компоненты находились во взаимном соответствии, необходимо иметь

$$-(b_1 + 2b_2r + 3b_3r^2 + \dots) \equiv ar.$$

Это соотношение написано как тождество, так как оно должно удовлетворяться при всех значениях переменной  $r$ . Оно будет справедливо для всех значений только тогда, когда

$$-2b_2 = a$$

и

$$b_1 = b_3 = b_4 = \dots = 0.$$

Возвращаясь вновь к ур-нию (82), находим полное и точное выражение для вектор-потенциала

$$\left. \begin{aligned} A_r &= 0, \\ A_\theta &= 0, \\ A_z &= b_0 - \frac{a}{2}r^2 \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Таким образом, задача решена. Интересно, что  $b_0$  может иметь некоторое постоянное значение<sup>1)</sup>, независимо от требования, согласно которому ротор  $\mathbf{A}$  должен быть равен  $\mathbf{H}$ . Эта величина по существу является постоянной интегрирования.

### ЗАДАЧИ

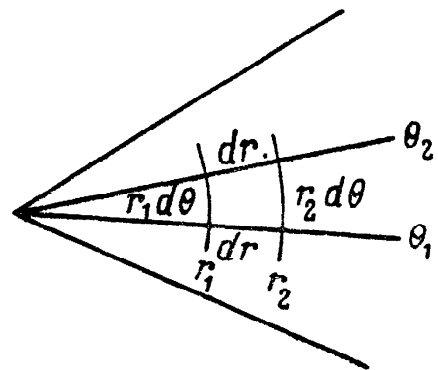
1. Получите выражение для ротора в полярных координатах, соответствующее ур-нию (66). При этом не выводите это выражение из формулы для прямоугольных координат, а начните с суммирования циркуляции вокруг площади, как показано на поясняющем рисунке.

2. Рисунок 19а показывает векторное поле, которое, не имея ротора, должно обладать скалярным потенциалом. Полагая, что потенциал в начале координат равен нулю, найдите потенциал во всех других точках. На рисунке поля изобразите эквипотенциальные кривые, соединяющие точки с равным потенциалом.

3. Изучите рис. 19b с тем, чтобы определить, можно ли изобразить для него эквипотенциальные линии. Имеется ли здесь ротор?

4. Имеет ли векторное поле рис. 20 поле скалярного потенциала? Можете ли вы определить его?

5. Потенциал силы тяжести обратно пропорционален расстоянию от центра земли. Определите, какова природа поля силы тяжести, используя ур-ние (76).



К задаче 1.

<sup>1)</sup> Разумеется к  $\mathbf{A}$  можно добавить любую потенциальную функцию, так как ротор любой потенциальной функции равен нулю.

6. Обозначьте эквипотенциальные поверхности внутри канала рис. 17 (т. е. поверхности, которые определяют скалярный потенциал обозначенного поля скоростей).

7. Векторное поле  $V$  определяется условиями  $V_x = 10; V_y = V_z = 0$ . Найдите поле скалярного потенциала. Найдите поле вектор-потенциала. Как скалярный, так и векторный потенциал положите равными нулю в начале координат.

8. Рассмотрите возможность существования векторного поля, для которого во всех точках и дивергенция и ротор равны нулю. Затем наложите дальнейшее ограничение, заключающееся в том, что напряжённость поля нигде не должна быть бесконечна. Наконец, предположите, что на бесконечном расстоянии напряжённость поля равна нулю во всех направлениях.

---

## Глава IV

### ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

**Общие положения.** В гл. I было описано четыре опыта. Результаты этих опытов выражены в математической форме с помощью ур-ний (2), (3), и (7). Уравнение (2) устанавливает связь между силой, действующей на заряжённую частицу, и напряжённостью электрического поля

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2)$$

Уравнение (3) устанавливает, что линейный интеграл электростатического поля по любому замкнутому пути равен нулю

$$\oint \mathbf{E} \, ds = 0. \quad (3)$$

Уравнение (7) показывает, что полный поток, выходящий из любой замкнутой поверхности, пропорционален избытку положительных зарядов, заключённых внутри поверхности,

$$\oint \mathbf{D} \, da = \oint \epsilon \mathbf{E} \, da = 4\pi q. \quad (7)$$

Было найдено также, что ур-ние (2) справедливо для всех точек, что ур-ние (3) имеет место вдоль любого замкнутого пути интегрирования, а ур-ние (7) остаётся верным для какой угодно замкнутой поверхности интегрирования.

Соотношения (2), (3) и (7) содержат все необходимые для электростатики данные. Для того, чтобы построить учение об электростатике в свободном пространстве или в изотропных материалах, не нужно располагать никакими дополнительными экспериментальными результатами. Основываясь на этих уравнениях, можно аналитически определить любое электростатическое поле, если известны заряды, создающие это поле. Но математический аппарат, который здесь используется, редко бывает простым. В этой главе изложены основные принципы аналитического решения, при чём они сопровождаются некоторыми примерами.

В первую очередь рассмотрим ур-ние (3). Применение теоремы Стокса [ф-ла (75)] даёт

$$\oint \mathbf{E} \, ds = \int [\nabla \mathbf{E}] \, da = 0. \quad (88)$$



На основании этого уравнения можно сделать заключение, что электростатическое поле не имеет ротора. Это заключение не вытекает из какого-нибудь единичного опыта, на основании которого величина линейного интеграла от  $\mathbf{E}$  по замкнутому пути равна нулю. Результат подобного опыта не исключает возможности существования ротора в различных точках поля, даже в том случае, когда интеграл ротора по поверхности интегрирования ур-ния (88) равен нулю. Однако, уже особо отмечалось, что ур-ние (3) применимо ко *всем* замкнутым контурам, а поэтому ур-ние (88) применимо ко *всем* поверхностям; единственное условие для применения ур-ния (88) ко всем поверхностям интегрирования состоит в том, чтобы ротор  $\mathbf{E}$  всюду равнялся нулю.

Следовательно,

$$[\nabla\mathbf{E}] = 0. \quad (89)$$

Из ур-ния (89) следует, что электростатическое поле потенциально и что электростатический потенциал существует. Если обозначить потенциал через  $\varphi$ , то электрическое поле [согласно ур-нию (76)] будет градиентом  $\varphi$  (с отрицательным знаком), так что

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (90)$$

В электростатических задачах величина  $\varphi$  часто может быть найдена. В этом случае легко определить  $\mathbf{E}$ , пользуясь ур-нием (90).

Другое фундаментальное соотношение можно получить с помощью ур-ния (7). Применение теоремы Гаусса к этому уравнению даёт

$$\oint \mathbf{D} \, da = \int (\nabla\mathbf{D}) \, dv = 4\pi q. \quad (91)$$

В любой области, в которой отсутствуют электрические заряды, т. е. где  $q = 0$ , получается  $\int (\nabla\mathbf{D}) \, dv = 0$ , таким образом, дивергенция  $\mathbf{D}$  равна нулю.

Однако, если заряд не равен нулю, то не равна нулю и дивергенция.

Дивергенцию удобно выразить через плотность электрического заряда, т. е. через заряд на единицу объёма. Эту величину можно обозначить через  $\rho$ . Заряд внутри замкнутой поверхности равен интегралу от плотности заряда по всему объёму. Если заряд  $q$  в ур-нии (91) выразить как  $\int \rho \, dv$ , то уравнение даёт

$$\int (\nabla\mathbf{D}) \, dv = 4\pi \int \rho \, dv. \quad (92)$$

Оба интеграла этого уравнения являются объёмными интегралами. Более того, интегралы берутся по одному и тому же объёму, а именно по объёму, который содержится в рассматриваемой замкнутой поверхности. Эта замкнутая поверхность яв-

ляется совершенно произвольной; она может быть какой-угодно замкнутой поверхностью, расположенной каким-угодно образом и имеющей любые размеры и форму. Уравнение (92) будет верным при всех этих условиях только в том случае, если подинтегральное выражение для одной части уравнения равно подинтегральному выражению для другой его части, т. е.

$$\nabla D = 4\pi\rho. \quad (93)$$

Внутри однородного вещества, для которого  $\epsilon$  не изменяется от точки к точке, это условие можно написать в виде

$$\nabla E = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (94)$$

Полученное выражение связывает электрическое поле с плотностью заряда. Возможно также установить соотношения между электрическим потенциалом и плотностью заряда, подставляя уравнение (90) в уравнение (94), что даёт

$$\nabla(\nabla\varphi) = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho$$

или

$$\nabla^2\varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (95)$$

Если раскрыть значение оператора  $\Delta$ , то станет очевидным, что получено уравнение второго порядка в частных производных. Оно имеет столь большую важность, что ему присвоено особое название: это — *уравнение Пуассона*. В особых случаях, относящихся к пространству, не содержащему зарядов, оно вырождается в уравнение

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (96)$$

Это — не менее важное дифференциальное уравнение, которое носит название *уравнения Лапласа*.

Изучение электростатики, в сущности говоря, сводится к решению этих уравнений. Выпишем их ещё раз:

$$E = -\nabla\varphi \quad (90)$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (95)$$

Написанные соотношения полностью определяют электростатическое поле; ниже будет рассмотрено их применение к частным задачам.

**Проводники.** Проводящим называется такое вещество, по которому могут течь электрические заряды. Проводники содержат электричество, которое способно свободно перемещаться, когда на него действует сила электрического поля. Это верно даже в том случае, когда проводники «не заряжены», т. е. в них отсут-

ствуется избыток зарядов того или другого знака. Ввиду того, что заряд может течь внутри проводника, в проводящем веществе не может существовать электростатическое поле. Если бы такое поле имелось, то оно действовало бы на заряд и двигало его до тех пор, пока электрическое поле не упало бы до нуля за счёт перераспределения зарядов. Следовательно, для электростатического случая внутри проводника

$$\begin{aligned} \text{откуда} \quad E &= 0, \\ \varphi &= \text{const.} \end{aligned} \quad (97)$$

Так как  $E$  равно нулю, то  $\nabla E = 0$ , а, следовательно,  $\rho = 0$ . Поэтому ни в какой точке внутри проводника не может существовать электрического заряда. Но  $E$  на поверхности проводящего тела не обязательно должно быть равно нулю, и, таким образом, электрический заряд может быть расположен на поверхности. Отсюда можно заключить, что все заряды проводящего тела перейдут на поверхность и останутся здесь.

Можно сформулировать некоторые общие положения, относящиеся к электростатическому полю вне проводника. Поскольку весь проводник находится под одним и тем же потенциалом [уравнение (97)] его поверхность является эквипотенциальной. Электрическое поле всегда нормально к эквипотенциальным поверхностям; оно представляет *градиент* потенциала, а как указывалось в гл. II, градиент всегда нормален к эквипотенциальным поверхностям своего поля. Следовательно, электростатическое поле на поверхности любого проводника будет нормально к поверхности этого проводника.

Изложенное выше позволяет определить направление поля; можно кое-что сказать и о его величине. Ввиду того, что в заряженном теле заряд распределён вдоль поверхности, удобно говорить о плотности заряда, т. е. заряде на единицу площади. В уравнении (92)  $\rho$  использовалось для обозначения заряда в единице объёма; для обозначения заряда на единицу площади используем теперь  $\sigma$ . Общий заряд будет равен

$$\int \sigma da = q. \quad (98)$$

Если плотность заряда на единицу площади проводящей поверхности равна  $\sigma$ , то должно существовать  $4\pi\sigma$  линий потока, выходящих наружу, нормально к каждой единице поверхности. Это следует из того факта, что  $4\pi$  линий вытекают из каждой единицы положительного заряда. Таким образом, плотность «потока смещения» в пространстве, вблизи заряженной проводящей поверхности равна плотности заряда на поверхности, умноженной на  $4\pi$ , и имеет направление, нормальное к поверхности.  $D$  есть плотность потока; его нормаль-

ная составляющая на поверхности (которую обозначим через  $D_n$ ) равна

$$D_n = \epsilon E_n = 4\pi\sigma. \quad (99)$$

Итак, если известно распределение зарядов на поверхности проводника, то может быть найдено электрическое поле вблизи поверхности проводника. Аналогичным образом, если известно поле, то можно найти распределение зарядов. Однако, обычно ни то, ни другое не бывает известно и обе эти величины приходится находить, исходя из того обстоятельства, что поверхность проводника является эквипотенциальной с известным общим зарядом. При этих условиях решение оказывается более сложным.

**Заряжённый шар.** Рассмотрим изолированный сферический проводник с известным зарядом внутри него. Требуется найти электрическое поле вблизи сферы, в пространстве, наполненном веществом с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . Задачу можно решить, найдя потенциальное поле, удовлетворяющее уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0$$

и одновременно удовлетворяющее граничным условиям, согласно которым: 1) поверхность шара является эквипотенциальной поверхностью и 2) общий заряд на шаре равен  $q$ .

Уравнение Лапласа в прямоугольных координатах выражено  $\varphi$ -лой (51); но чтобы применить это уравнение к задаче, относящейся к шару, гораздо удобнее записать его в сферических координатах. При использовании сферических координат каждая точка пространства определяется радиальным расстоянием  $r$  и двумя углами  $\Theta$  и  $\psi$ , как показано на рис. 26. Вывод для лапласиана в сферических координатах здесь не даётся: его можно найти в книгах по анализу, рассчитанных на подготовленного читателя. Окончательный результат приведён в табл. II (внутренняя сторона задней обложки). Он имеет следующий вид

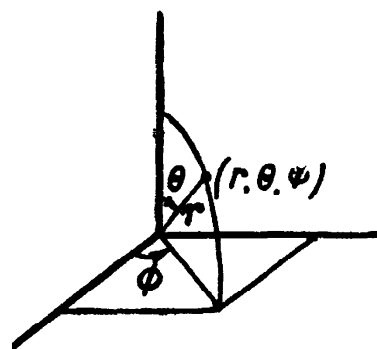


Рис. 26.

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\text{ctg}\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}. \quad (100)$$

Таким образом, решением поставленной задачи является выражение для потенциала, которое обращает в нуль уравнение (100) и в то же время делает поверхность проводящего шара эквипотенциальной поверхностью. К счастью, задачу можно значи-

тельно упростить, учитывая симметрию. Так как рассматриваемый заряженный шар уединён в пространстве, то, чтобы не происходило на его поверхности, или вокруг него, потенциал не будет зависеть от направления. Может иметься зависимость только от радиуса. Никакой другой координаты нельзя установить. Чтобы определить какое-нибудь направление, необходимо иметь в пространстве второе тело для отчёта. Итак, если нельзя отличить различные направления, то электрический потенциал не может быть различным в различных направлениях пространства, окружающего шар. Он должен быть одним и тем же для всех значений  $\Theta$  и  $\psi$  (в предположении, что центр шара на рис. 26 является началом координат). Потенциал будет меняться лишь тогда, когда меняется  $r$ . Так как  $\varphi$  является функцией только  $r$  и не зависит от  $\Theta$  и  $\psi$ , то уравнение Лапласа записывается следующим образом

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0. \quad (101)$$

Теперь это обыкновенное дифференциальное уравнение, которое можно свести к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Его решением является.

$$\varphi = \frac{a}{r} + b, \quad (102)$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые произвольные постоянные.

Чтобы убедиться в справедливости полученного решения, его можно подставить обратно в уравнение (100), которое при этом обращается в тождество.

Постоянные  $a$  и  $b$  определяются из граничных условий. Предположим, что потенциал на очень большом расстоянии от шара не зависит от заряда шара, так что при  $r = \infty$ ,  $\varphi = 0$ . Подстановка этих величин в уравнение (100) даёт  $b = 0$ , и выражение приобретает вид

$$\varphi = \frac{a}{r}. \quad (103)$$

Вторую постоянную  $a$  можно определить через заряд шара. Прежде всего должен быть известен радиус шара; пусть он равен  $r_0$ . Так как общий заряд  $q$  распределён симметрично по всей поверхности шара, то заряд на единицу площади  $\sigma$  равен

$$\sigma = \frac{q}{4\pi r_0^2}.$$

В то же время из ф-лы (99) следует, что напряжённость поля на поверхности шара, направленная по радиусу, будет

$$E = \frac{4\pi}{\epsilon} \cdot \frac{q}{4\pi r_0^2} = \frac{q}{\epsilon r_0^2}. \quad (104)$$

Далее, поскольку потенциал не зависит от  $\Theta$  и  $\psi$ , то градиент потенциала везде направлен по радиусу, и величина напряжённости электрического поля в любой точке находится из условия <sup>1)</sup>

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{a}{r^2}. \quad (105)$$

Это выражение справедливо всюду, поэтому оно, в частности, справедливо и на поверхности шара. Приравнявая между собой ур-ния (105) и (104) и полагая, что  $r = r_0$ , получим

$$\frac{a}{r_0^2} = \frac{1}{\epsilon r_0^2} q,$$

откуда  $a = \frac{q}{\epsilon}$ .

Следовательно, для любой точки вне заряжённого шара

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r} \text{ и } E = \frac{q}{\epsilon r^2}. \quad (106)$$

Полезно напомнить физическое значение этих величин. Электрическое поле является силой; в любой точке оно равно силе, действующей на пробный единичный положительный заряд. Потенциал  $\varphi$  представляет собой работу; потенциал в некоторой точке пространства есть работа, затрачиваемая при перемещении пробной частицы с единичным положительным зарядом из бесконечности в данную точку. Вследствие того, что сила отталкивает положительный пробный заряд, можно считать электрическое поле направленным всюду от положительно заряжённого тела; потенциал возрастает при приближении к положительно заряжённому телу, так как при движении пробного заряда против силы электрического поля должна быть затрачена работа.

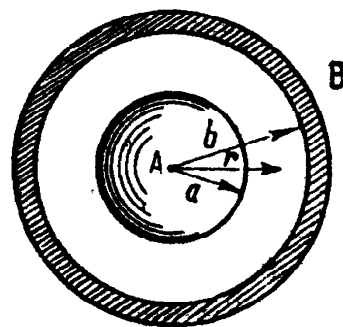


Рис. 27.

**Сферический конденсатор.** Заряжённый проводящий шар  $A$  с радиусом  $a$  концентрически расположен в полости проводящей сфере  $B$  с внутренним радиусом  $b$ , как показано на рис. 27. Электрическое поле в свободном пространстве между  $A$  и  $B$  идентично полю в области, окружающей уединённый шар, аналогичный шару  $A$  и имеющий такой же заряд. Это поле направлено по радиусу и его напряжённость равна

$$E = \frac{q}{r^2}. \quad (107)$$

<sup>1)</sup> См. выражение для градиента в сферических координатах в табл. II.

Внешняя сфера  $B$  обладает электрическим зарядом равным по величине и противоположным по знаку заряду  $A$ ; электрическое поле оканчивается на внутренней поверхности  $B$ . Обе сферы вместе образуют конденсатор; он обладает ёмкостью и между сферами имеется напряжение.

*Напряжение*, которое, в сущности говоря, представляет собой *разность потенциалов* между двумя точками (обычно между двумя металлическими проводниками), определяется следующим образом:

$$u_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} ds. \quad (108)$$

Напряжение между точками  $1$  и  $2$  определяется линейным интегралом электрического поля вдоль произвольного пути от точки  $1$  к точке  $2$ . Это есть величина превышения потенциала в точке  $2$  над потенциалом в точке  $1$ .

Интересно отметить, что разность потенциалов или напряжение между двумя точками является работой, которую совершает электрическая сила при перемещении единичного электрического заряда из одной точки в другую. Подставляя уравнение (2) в выражение (108), имеем

$$u_{12} = \frac{1}{q} \int_1^2 \mathbf{F} ds.$$

Так как интеграл силы по расстоянию даёт работу, то

$$u_{12} = \frac{w_{12}}{q}.$$

Напряжение между сферами сферического конденсатора можно найти, поместив точку  $1$  на поверхность  $A$  и точку  $2$  на поверхность  $B$ . При определении напряжения интегрирование будет наиболее простым, если точки  $1$  и  $2$  находятся на одной и той же линии радиуса, так как тогда путь интегрирования параллелен электрическому полю и все расстояния отсчитываются по радиусу. В этом случае

$$u_{AB} = \int_A^B E dr = \int_a^b \frac{q}{r^2} dr = \frac{q(b-a)}{ab}. \quad (109)$$

Ёмкость конденсатора по определению равна заряду, делённому на напряжение,

$$C = \frac{q}{u}. \quad (110)$$

Ёмкость сферического конденсатора выражается простым соотношением

$$C = \frac{ab}{b-a} \quad (111)$$

и полностью определяется геометрией конденсатора.

Иногда говорят о ёмкости уединённого шара. Её можно рассматривать как предел, к которому приближается ёмкость сферического конденсатора, когда внешняя сфера удалена настолько, что становится бесконечно большой. Полагая, что  $b$  в ф-ле (111) стремится к бесконечности, получаем предельное значение ёмкости

$$C = a.$$

**Закон обратной пропорциональности квадрату расстояния.** Представим себе шар с зарядом  $q_1$ ; вокруг шара имеется электрическое поле, напряжённость которого определяется соотношением (106) в виде

$$E_1 = \frac{q_1}{r^2}. \quad (112)$$

Второй заряжённый шар с зарядом  $q_2$  движется в электрическом поле первого шара. Требуется найти силу, действующую на второй шар за счёт электрического поля первого шара.

Из ур-ния (2) имеем

$$F = q_2 E_1. \quad (113)$$

Если расстояние от центра одной сферы до центра другой равно  $r$ , то ур-ние (112) даёт

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (114)$$

Это — хорошо известный закон Кулона. Касаясь его истории, следует сказать, что этот закон был открыт Кулоном в конце восемнадцатого века путём непосредственных измерений с помощью изобретённых им крутильных весов. Большая часть знаний, относящихся к электростатике, была получена из этого закона. В настоящей работе закон Кулона найден на основании опытов, описанных в гл. I.

В отношении ур-ния (114) следует сделать одну важную оговорку. Это уравнение является точным лишь в том случае, когда два заряжённых шара настолько удалены друг от друга, что отсутствует взаимное влияние на распределение зарядов по их поверхности. В самом деле, если заряд на первом шаре вследствие электростатического притяжения или отталкивания оказался перераспределённым заметным образом, то электрическое поле вокруг шара уже не будет строго радиальным во всех точках. В этом случае идеальной симметрии не будет.



Если же радиус каждого шара мал, по сравнению с расстоянием между шарами, то взаимное влияние заметно не скажется и ур-ние (114) окажется точным. Чтобы быть математически строгим, рассматривают предельный случай: предполагают, что заряды  $q_1$  и  $q_2$  имеют точечный характер, а не распределены по сферам. Однако, такой случай физически невозможен.

**Поле внутри полой заряжённой сферы.** Закон Кулона трудно доказать с достаточной точностью, так как измеряемые силы очень малы. Лучшим подтверждением закона является экспериментальная проверка, которая показывает, что внутри полой заряжённой сферы сила, действующая на пробный заряд, всюду в точности равна нулю. Подобное измерение, выполненное Кевендишем даже раньше непосредственных измерений силы Кулоном и повторенное с большой точностью во второй половине девятнадцатого века Максвеллом, представляет собой экспериментальное доказательство закона обратной пропорциональности квадрату расстояния. Если бы электрическая сила действовала на точечный заряд по какому-либо другому закону, то должна была бы существовать результирующая сила, направленная либо к стенкам полой заряжённой сферы, либо от них. Это можно доказать, определяя путём интегрирования результирующую силу, которая возбуждается в пробном заряде зарядом, равномерно распределённым по поверхности сферы. Однако, на основании рассмотрения, изложенного в предыдущих главах, можно, исходя из уравнения Лапласа, прийти к заключению, что внутри полой проводящей поверхности нет электрического поля.

Возьмём некоторую замкнутую проводящую поверхность, окружающую свободное пространство. Поскольку поверхность является проводящей, то она должна быть эквипотенциальной. Если какие-нибудь линии поля исходят из поверхности во внешнее пространство, то они должны быть нормальны к этой поверхности. Никакие линии поля не могут возникнуть во внешнем пространстве или закончиться там; если бы это могло быть так, то имелась бы дивергенция в пустом пространстве, что не совместимо с уравнением Лапласа: Линии потока не могут начинаться на эквипотенциальной поверхности и возвращаться к этой же самой поверхности; если бы это было так, то существовал бы ротор поля, а это не согласуется с уравнением Лапласа. Поэтому никакие линии потока не могут выходить из проводящей поверхности во внешнее пространство и не может существовать электростатическое поле в полости, которая не содержит зарядов и находится внутри замкнутой проводящей поверхности.

**Электростатическая энергия.** На создание электростатического поля должно расходоваться известное количество энергии. В точности такое же количество энергии отдаётся обратно, когда поле перестаёт существовать. Пока поле существует эта энергия запасена в поле; во всяком случае, такое предположение является

обычным. Возможно даже найти распределение энергии, запасённой в поле. Рассмотрим два проводящих тела произвольной формы таких, как например,  $A$  и  $B$  на рис. 28. Пусть вначале они были незаряжены, а затем положительный заряд стал постепенно отбираться от  $B$  и прибавляться к  $A$ . Вследствие наличия электростатической силы при переносе заряда от одного тела к другому должна быть совершена некоторая работа. Так как энергия

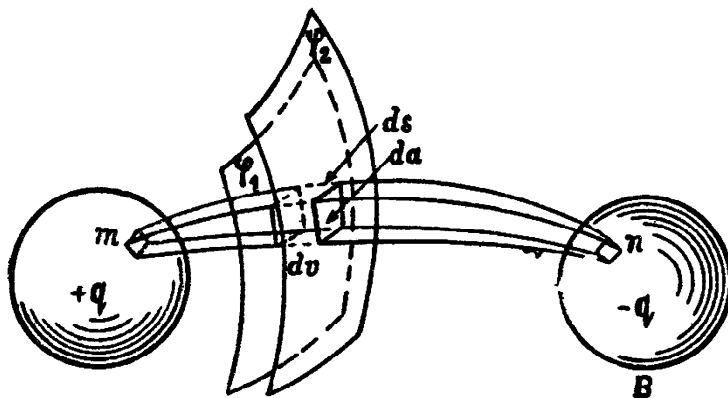


Рис. 28.

является линейным интегралом силы, а потенциал есть линейный интеграл электрического поля, то из ур-ния (2) следует, что бесконечно малое приращение энергии, необходимое для переноса бесконечно малого заряда  $dq$  на пути между телами с разностью потенциалов  $u$ , будет равно

$$\text{прирост энергии} = u dq. \tag{115}$$

Но  $u$  можно выразить через ёмкость тел и через заряд, который имело тело  $A$  до переноса заряда  $dq$ . Это даёт

$$\text{прирост энергии} = \frac{q}{C} dq. \tag{116}$$

Полная энергия, которая должна быть затрачена для того, чтобы перенести полный заряд с одного тела на другое, является суммой тех бесконечно малых количеств энергии, которые требуются для получения малых приращений зарядов. Таким образом,

$$\text{энергия} = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C}. \tag{117}$$

Поскольку согласно определению  $C = \frac{q}{u}$ , то можно написать

$$\text{энергия} = \frac{1}{2} qu. \tag{118}$$

Следовательно, полная энергия системы равна половине произведения *заряда одного из тел на разность потенциалов между телами*. Полную энергию можно разделить на части и это позволит найти её распределение в пространстве.

Во-первых, следует заметить, что в соответствии с ур-нием (118) энергия, соответствующая данной величине заряда, пропорциональна разности потенциалов, против которой движется заряд. Пусть  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  будут потенциалами эквипотенциальных поверхностей, окружающих тело  $A$ . Часть каждой из этих поверхностей показана на рис. 28. Это могут быть тонкие металлические поверхности, не имеющие переменных электрических и магнитных полей. В таком случае заряд  $+q$  может быть перенесён с тела  $A$  на поверхность, имеющую потенциал  $\varphi_1$  (эта поверхность полностью окружает  $A$ ); в результате электрическое поле между  $A$  и  $\varphi_1$  перестанет существовать. В то же время электрическое поле между поверхностью  $\varphi_1$  и телом  $B$  останется неизменным. Поверхность  $\varphi_1$ , как и прежде, будет эквипотенциальной поверхностью; та же величина потока выходит из неё и его распределение остаётся тем же. Пусть теперь заряд переместится к другой эквипотенциальной поверхности  $\varphi_2$ ; поле между  $\varphi_2$  и  $B$  останется неизменным, но поле между  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  исчезнет. Одновременно с этим энергия системы уменьшится с величины  $\frac{1}{2} q\varphi_1$  до  $\frac{1}{2} q\varphi_2$  (где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — потенциалы соответствующих поверхностей относительно  $B$ ). Следовательно, можно сказать, что энергия, запасённая в пространстве между этими поверхностями, была равна

$$\frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (119)$$

Это рассуждение можно продолжить, чтобы показать разделение энергии в оболочках между эквипотенциальными поверхностями для всего электростатического поля.

Во-вторых, заметим, что энергия поля должна быть распределена между линиями потока. Если каждая сотая доля заряда  $A$  отвечает одной сотой доле энергии системы [что находится в соответствии с ур-нием (118)] и если из этой части заряда вытекает одна сотая доля общего потока, то эта часть энергии находится в той части пространства, через которую проходит соответствующий поток силовых линий. Область пространства, имеющая форму трубки между заряжёнными телами, показана на рис. 28, как содержащая поток, проходящий через малую площадку  $m$  на теле  $A$  к малой площадке  $n$  на теле  $B$ . Энергия в пространстве, охваченном трубкой от  $m$  до  $n$ , пропорциональна числу линий поля, проходящих в этой трубке.

Если трубка, идущая от  $m$  к  $n$ , настолько тонка, что площадь её поперечного сечения, пересекающего поверхность  $\varphi_2$ , равна  $da$ , а плотность электрического потока есть  $D$ , то вели-

чина потока в трубке равна  $D da$ . Тогда, на основании соотношения (118) энергия во всей трубке будет

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{D da}{4\pi} u_{AB}. \quad (120)$$

Если эту трубку с бесконечно малой площадью поперечного сечения обрезать с обеих сторон эквипотенциальными поверхностями  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , то энергия в трубке между этими поверхностями согласно ур-ниям (119) и (120) будет равна

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{D da}{4\pi} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Наконец, если промежуток между эквипотенциальными поверхностями уменьшится до бесконечно малого расстояния  $d$ , для которого падение потенциала  $\varphi_1 - \varphi_2 = E ds$ , то в бесконечно малом объёме пространства  $d\nu$  будет заключена энергия

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{D da}{4\pi} E ds = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 d\nu. \quad (121)$$

Энергия в некоторой области пространства определяется интегрированием по всей области

$$\text{энергия} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int E^2 d\nu. \quad (122)$$

Энергию всего электрического поля можно найти путём интегрирования по бесконечному пространству.

Можно доказать непосредственно, что этот интеграл в самом деле равен полной энергии, определяемой ур-нием (118). Однако, не следует упускать из вида, что не существует несомненного доказательства *запасания* энергии в пространстве, как это следует из ур-ния (121). Можно только сказать, что энергия ведёт себя так, как *если бы она была запасена* в пространстве. Это различие понятий имеет фундаментальный характер и относится к знаменитому спору, который бушевал в течение девятнадцатого века между сторонниками «волновой теории» и «теории действия на расстоянии». Об этом споре более подробно сказано в следующих главах.

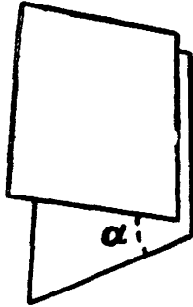
## ЗАДАЧИ

1. Заряд  $q$  помещён на уединённый металлический шар радиуса  $r_0$ . Найдите напряжённость электрического поля и потенциал во всех точках внутри шара.

2. Две параллельные плоские проводящие поверхности образуют конденсатор. Решите уравнение Лапласа для электрического поля между поверх-

ностями, когда они имеют заряд  $\sigma$  и  $-\sigma$  на единицу площади. Найдите ёмкость на единицу площади. (Рассматривайте область, которая настолько далека от граней поверхности, что электрический заряд распределён равномерно.)

3. Найдите электрическое поле между двумя заряженными плоскими поверхностями  $m_1$ , расположенными под углом  $\alpha$ , но не касающимися друг друга



К задаче 2

Найдите распределение зарядов на поверхностях. Рассматривайте, как и в задаче 2, область, настолько удалённую от граней, чтобы на результат не влиял краевой эффект.

4. Найдите электрическое поле вокруг уединённого цилиндрического проводника неограниченной длины с радиусом  $r_0$ , имеющего на единицу длины заряд  $\tau$ . Найдите ротор электрического поля.

5. Найдите разность потенциалов между проводником задачи 4 и любой точкой пространства.

6. Найдите закон (аналогичный закону обратной пропорциональности квадрату расстояния для заряженных шаров), который может быть применён к силе, действующей между заряженными параллельными цилиндрами неограниченной длины.

граничной длины.

7. Найдите, пользуясь ур-нием (118), энергию, необходимую для того, чтобы зарядить единицу площади конденсатора, описанного в задаче 2. Найдите энергию электростатического поля этого конденсатора на единицу объёма, используя ур-ние (122).

8. Воспользовавшись ур-ниями (1) и (4) [вместо того, чтобы пользоваться ур-ниями (2) и (5)], найдите общее выражение для закона Кулона, которое можно использовать при любой системе единиц.

9. Две параллельных металлических пластины сложены вместе, но изолированы друг от друга. Они заряжены, одна положительным, другая отрицательным зарядом, и присоединены гибкими проводами к электроскопу. Затем пластины разъединили, не допуская при этом какого-либо изменения электрического заряда. Поясните, почему электроскоп показывает значительно большее напряжение между пластинами, когда последние разведены. Если начальное расстояние равно 0,1 мм и начальная разность напряжений 100 в, то какое напряжение для случая, когда пластины раздвинуты на 10 см. (Замечание: это поясняет причины образования высоких напряжений, вызывающих молнию).

10. Найдите ёмкость на квадратный сантиметр двух больших параллельных плоскостей, разнесённых на 1 см (в воздухе). Переведите результат в  $\text{мкмкф}$  ( $10^{-12}\text{ф}$ ). Запомните этот результат, так как при определении величины ёмкости им часто приходится пользоваться.

## ДИЭЛЕКТРИКИ

**Общие теории.** Существуют две точки зрения на процессы, происходящие в диэлектриках. Одна из них аналогична обычным представлениям магнетизма и электрического тока; её легко понять и легко применять. Вторая, несмотря на то, что она почти также проста по существу своей идеи, менее известна, но представляет собой лучшее приближение к физической действительности.

С первой точки зрения напряжённость электрического поля  $E$  рассматривается как возбуждающая сила, а плотность электрического потока  $D$  как результат её действия. Иначе говоря, эти величины считаются аналогичными напряжению и току в электрической цепи. Некоторые материалы (с большой диэлектрической постоянной) считают обладающими способностью пропускать больший поток при данной напряжённости электрического поля, что аналогично большей проводимости электрическому току.

$E$  и  $D$  аналогичны также магнитным величинам  $H$  и  $B$  (напряжённости магнитного поля и плотности магнитного потока), а диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  аналогична магнитной проницаемости  $\mu$ ,

Эта точка зрения в большинстве случаев отвечает предъявляемым требованиям и обычно считается наиболее удобной для получения воображаемой картины полей и их распределения. Силовые линии идут от положительного заряда к отрицательному, по возможности стремясь пройти через области с наибольшей диэлектрической постоянной, и, кроме того, они расходятся, согласно Фарадею, как «взаимно отталкивающиеся резиновые ленты». Так как возбуждающей силой для потока является электрическое поле, то для данной величины потока в среде с большей диэлектрической постоянной нужна меньшая напряжённость поля.

**Сила.** Сила, действующая на пробный заряд, согласно уравнению (2) пропорциональна напряжённости электрического поля  $E$ .

Сила взаимодействия двух заряженных тел в диэлектрическом материале меньше, чем в свободном пространстве. Рассмотрим заряженное тело, погружённое в масло с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . Число силовых линий, исходящих из заряженного тела, будет такое же, как и в свободном пространстве (оно равно заряду, умноженному на  $4\pi$ ), и если заполненная маслом область простирается во всех направлениях до бесконечности, то

картина потока будет та же, что и в свободном пространстве, ибо она должна удовлетворять уравнению Лапласа. Следовательно, векторное поле плотности потока  $\mathbf{D}$  будет таким же, как и в свободном пространстве. Но в масле напряжённость электрического поля  $\mathbf{E}$  меньше плотности потока  $\mathbf{D}$  в  $\epsilon$  раз, и поэтому согласно ур-нию (2) сила, действующая на заряжённое тело, будет в то же число раз меньше. (Это положение, само собой разумеется, можно взять вместо опыта IV в качестве экспериментального основания для заключений, касающихся электрического поля в телах, но при этом усложнится математическая сторона теории.)

**Ёмкость.** Ёмкость любого конденсатора увеличивается благодаря введению диэлектрика между его обкладками. Рассмотрим сферический конденсатор, показанный на рис. 27, у которого пространство между сферами  $A$  и  $B$  заполнено серой с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . Конденсатор имеет заряд  $q$  ( $+q$  на внутренней сфере,  $-q$  на внешней), электростатическое поле радиально и согласно ур-нию (106)

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{q}{\epsilon r^2}. \quad (123)$$

Тогда напряжение на конденсаторе в соответствии с ур-нием (109) будет

$$u_{AB} = \int_A^B E dr = \frac{q(b-a)}{\epsilon ab}. \quad (124)$$

Наконец, ёмкость равна

$$C = \frac{q}{u} = \epsilon \frac{ab}{b-a}. \quad (125)$$

Она в  $\epsilon$  раз больше ёмкости того же конденсатора в свободном пространстве. (Этот факт также может быть взят в качестве экспериментального основания при изучении диэлектриков. Действительно, такой метод применялся в классических исследованиях свойств диэлектриков Фарадеем и другими. Он является наиболее удовлетворительным в экспериментальном отношении, но при этом не легко получить общие математические соотношения.)

**Поляризация.** Другая точка зрения на процессы в диэлектриках исходит из предположения о *поляризации* материала. Предполагается, что все непроводящие материалы имеют положительные и отрицательные заряды, связанные между собой. Такие положительные и отрицательные заряды могут являться частями одного и того же атома. Если такого рода материал находится в электрическом поле, то положительные заряды стремятся сместиться в одном направлении, а отрицательные в другом, но так как они связаны, то смещение происходит лишь в той степени, в которой это позволяет упругая природа связи. Таким образом,

структура каждого атома оказывается несколько изменённой силами электрического поля и атом становится положительным с одной стороны и отрицательным с другой.

На рис. 29 изображён кусок диэлектрика, помещённый между двумя заряжёнными металлическими пластинами, одна из которых имеет заряд  $+q$ , другая  $-q$ . В верхней части рисунка материал изображён в таком увеличении, что можно видеть элементарные частицы; они растянуты электрическим полем и каждая частица слева отрицательна, а справа положительна. В результате этого на левой поверхности диэлектрика преобладает отрицательный заряд, а на правой — положительный. Однако, каждый кубический сантиметр материала содержит равное число положительных и отрицательных элементов и является нейтральным.

Следовательно, без какого-либо движения свободных зарядов в материале, просто в результате поляризации, материал как бы приобрёл поверхностный заряд. Силовые линии, согласно этой теории, оканчиваются на поляризованных за-

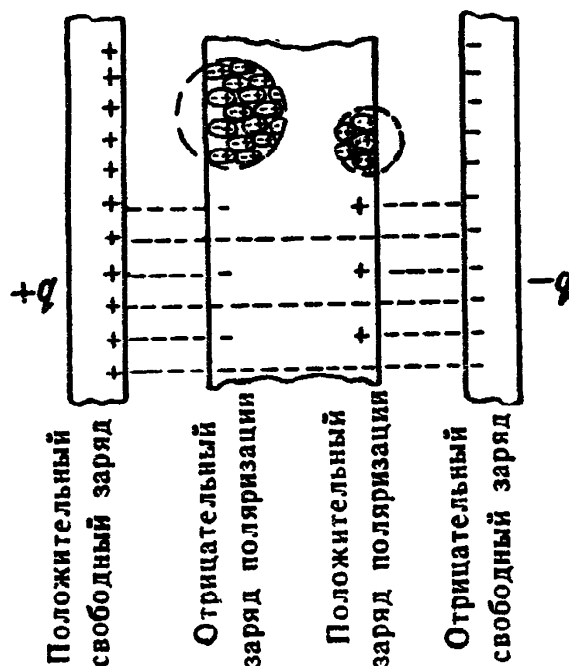


Рис. 29.

рядах на поверхности диэлектрика, как это показано в нижней части рис. 29. Ясно, что в данном случае электрическое поле внутри диэлектрика будет меньше, чем в пространстве вне его.

Степень поляризации диэлектрика пропорциональна напряжённости электрического поля в материале, а поверхностный заряд, отнесённый на единицу площади, получающийся в результате поляризации, пропорционален нормальной составляющей электрического поля на поверхности. Высокая степень восприимчивости к поляризации в этой теории соответствует большой диэлектрической постоянной в другой теории.

В теории поляризации  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  является просто математической фикцией, удобной при вычислениях, но не имеющей физического смысла. «Диэлектрическая постоянная» не участвует в этой теории. Вместо того, чтобы представлять диэлектрик как материал, в котором напряжённость поля может быть малой даже тогда, когда плотность потока велика, считают, что в диэлектрике напряжённость электрического поля мала потому, что плотность потока также мала. Обращаясь вновь к рис. 29, можно сказать, что силовые линии не проникают в диэлектрик вследствие



того, что они захватываются поверхностным зарядом поляризации. Как видно из рис. 29, напряжённость поля в диэлектрике меньше, чем в свободном пространстве, не вследствие некоего неотъемлемого, но необъяснимого свойства материала, а вследствие того, что пространство внутри диэлектрика частично экранировано поверхностными зарядами.

### Резюме

#### Теория диэлектрической постоянной

Отношение  $D$  к  $E$  равно  $\epsilon$ , которая является параметром материала.

Рассматриваются лишь свободные заряды и предполагается, что  $D$  имеет дивергенцию лишь там, где есть свободный заряд.

Поляризация не участвует в этой теории.

Эта точка зрения оказывается более удобной в большей части практических расчётов.

#### Теория поляризации

$E$  — есть электрическое поле.  
 $D$  — не участвует в теории.

Должны учитываться как свободные заряды, так и заряды поляризации; восприимчивость к поляризации является параметром материала.

Диэлектрическая постоянная не участвует в этой теории.

Эта точка зрения оказывается более удобной для теоретических целей.

### ЗАДАЧИ

1. Найдите в справочниках или других источниках диэлектрическую постоянную материалов, указанных ниже. Если даны различные значения, выберите значения для нормальной температуры и давления.

Твёрдые тела		Жидкости	Газы
Бакелит	Парафин	Спирт метиловый	Воздух
Алмаз	Фарфор	Спирт этиловый	Углекислота
Стекло	Кварц	Масло минеральное	Водяной пар
Лёд	Резина	Вода	
Слюда	Сера		

2. Найдите ёмкость сферического конденсатора, изображённого на рис. 27, если пространство, окружающее внутреннюю сферу  $A$ , заполнено парафином до радиуса  $\frac{1}{2}(a+b)$ . Найдите электрическое поле в парафине и в пустом пространстве, вызванное зарядом конденсатора  $q$ .

3. В задаче 9 гл. IV вначале между пластинами был зазор в  $0,1$  мм, заполненный бумагой, пропитанной парафином, с диэлектрической постоянной 2,3. Найдите напряжение, которое будет на конденсаторе, если его пластины раздвинуты на  $10$  см и между ними остался лишь воздух.

## Глава VI

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

**Общие положения.** В электростатических задачах материалы делятся на две группы: проводники и непроводники. Относительная способность различных проводников проводить заряды не интересует электростатику, ибо там, где есть какое-либо движение зарядов, уже нет электростатики.

Если в проводнике существует электрическое поле, то оно приводит заряды в движение, общее направление которого совпадает с направлением этого поля. Такое движение зарядов называют *электрическим током*. Электрический ток через любую данную поверхность, по определению, равен заряду, проходящему через данную поверхность в единицу времени, т. е.

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (126)$$

где  $q$  — общий заряд, прошедший через поверхность.

Теперь необходим эксперимент, чтобы определить способность различных проводящих материалов пропускать ток. Этот опыт, который мы назовём опытом V, фактически повторяет работу Георга Ома, в результате которой был установлен *закон Ома*.

**Опыт V.** Измеряется ток, текущий в металлическом проводнике при определённой разности потенциалов (напряжений) на концах отрезка проводника (каждый конец этого отрезка является эквипотенциальной поверхностью). При проведении опыта напряжение поддерживается постоянным. Измерения производятся для проводников самых разнообразных размеров и формы и для большого числа различных металлов. Опыт показывает, что ток и напряжение всегда связаны соотношением

$$i = \frac{1}{r} u, \quad (127)$$

где  $r$  — некоторая постоянная, определяемая материалом и размерами проводника и называемая сопротивлением проводника<sup>1)</sup>. Кроме того, из опыта следует, что  $r$  прямо пропорцио-

---

<sup>1)</sup> Температура и другие физические условия в некоторой степени влияют на  $r$ . Существенно, однако, то, что данный образец материала обладает известным сопротивлением, которое является свойством материала и не зависит от протекающего тока или приложенного напряжения.

нально длине проводника с постоянным поперечным сечением и обратно пропорционально поперечному сечению проводника постоянной длины, так что, если  $\gamma$  представляет собой коэффициент, характеризующий материал, то

$$\frac{1}{r} = \gamma \frac{\text{площадь}}{\text{длина}}. \quad (128)$$

Коэффициент  $\gamma$  называется *удельной проводимостью* материала.

Напряжение определяется согласно ур-нию (108) как интеграл напряжённости электрического поля

$$u = \int \mathbf{E} ds. \quad (129)$$

Сейчас желательно ввести новую величину — *плотность тока*  $i$ ; интеграл этой величины по поверхности даёт ток через эту поверхность

$$i = \int i da. \quad (130)$$

Поскольку закон Ома применим к проводникам любой формы и размеров, то он применим и к отрезку бесконечно малых размеров. Рассмотрим отрезок, показанный на рис. 30. Ток, текущий в этом отрезке, равен  $i da$  [из ф-лы (130)], напряжение между концами равно  $E ds$  [из ф-лы (129)], и согласно соотношению (128)

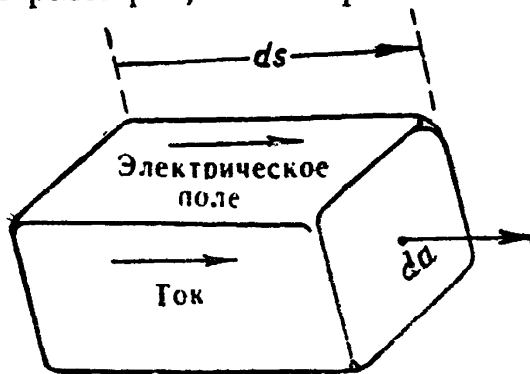


Рис. 30.

$$\frac{1}{r} = \gamma \frac{da}{ds}. \quad (131)$$

Подставляя это в ф-лу (127), выражающую закон Ома, получаем

$$i da = \gamma \frac{da}{ds} \mathbf{E} ds. \quad (132)$$

Так как  $ds$  и  $da$  являются векторами, имеющими то же направление, что и  $\mathbf{E}$  и  $i$ , то плотность тока и напряжённость электрического поля оказываются связанными между собой простым соотношением

$$i = \gamma \mathbf{E}. \quad (133)$$

Это уравнение выражает *дифференциальный закон Ома*. Закон гласит, что плотность тока в любой точке проводника пропорциональна напряжённости электрического поля в этой точке и направлена так же, как и напряжённость. Это справедливо для металлических проводников, к которым относится предыду-

шее рассмотрение. Это справедливо также для электролитических проводников и многих других проводящих материалов. (Но закон не применим к некоторым кристаллическим веществам, таким как карборунд, в которых ток не пропорционален напряжению, и не применим ни к анизотропным материалам, проводимость которых неодинакова для различных направлений, ни к прохождению электричества через газы; закон Ома нельзя применять в этих случаях без специальных оговорок. В дальнейшем случае, в которых не применима ф-ла (133), рассматриваться не будут.

Если электрическое поле не изменяется (как это было в опыте V), то не может быть изменения накопленного заряда, ибо если есть изменения заряда, то будут также изменения электрического поля. Отсюда следует, что любой заряд, который может быть на поверхности проводника, остаётся неизменным, пока ток проходит по проводнику. Другими словами, так как нет изменений электрического поля, то нет и изменений плотности заряда в любой точке. Так как нет изменений плотности заряда в любой точке, то линии тока нигде не заканчиваются. Так как линии тока нигде не заканчиваются, то векторное поле плотности тока не имеет дивергенции, т. е.

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = 0, \quad (134)$$

или, в соответствии с ф-лой (133), в проводнике при стационарном токе и неизменном электрическом поле

$$\nabla (\gamma \mathbf{E}) = (\gamma \nabla) \mathbf{E} = 0. \quad (135)$$

Первый закон Кирхгофа гласит: алгебраическая сумма токов, текущих к точке разветвления электрической схемы, равна нулю. Ясно, что это является частным случаем более общего соотношения, данного в ф-ле (134), т. е. закон Кирхгофа можно рассматривать, как её следствие.

Если в результате прохождения тока заряды накапливаются в какой-либо части контура, то уравнения (134) и (135) не применимы. Рассмотрим, например, конденсатор с плоскопараллельными пластинами (рис. 31). Ток течёт к левой пластине и вытекает из правой. В пространстве между пластинами, конечно, тока нет, но электрическое поле  $\mathbf{E}$  в этой области постоянно возрастает, когда заряд поступает на одну пластину конденсатора и уходит с другой.

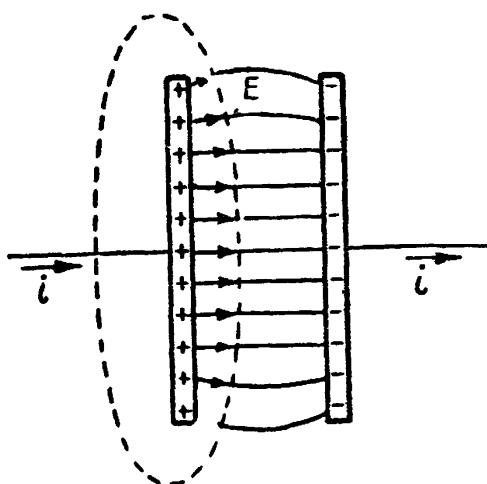


Рис. 31.

Представим себе теперь замкнутую поверхность, окружающую одну из пластин, как это показано пунктиром. Заряд, благодаря току  $i$ , поступает внутрь этой поверхности, но из неё не выходит. Соответственно заряд внутри этой поверхности возрастает и поэтому возрастает величина электрического потока, проходящего через поверхность.

Скорость возрастания заряда внутри поверхности есть  $i$ , ибо согласно ф-ле (126)  $i = \frac{dq}{dt}$ . Так как из каждой единицы заряда исходит  $4\pi$  силовых линий, то скорость возрастания потока, проходящего через поверхность, равна

$$\frac{d}{dt} (\text{потока}) = 4\pi \frac{d}{dt} q = 4\pi i. \quad (136)$$

Известно, что

$$\text{поток} = \int \mathbf{D} da \quad (137)$$

и значит ток, поступающий в любую замкнутую поверхность, связан с потоком, выходящим из этой поверхности, соотношением

$$i = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} \oint \mathbf{D} da = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{D}}{dt} da. \quad (138)$$

Ток, вытекающий из замкнутой поверхности, можно найти интегрированием плотности тока по этой поверхности

$$\oint i da \quad (139)$$

и поскольку ф-ла (138) относится к *входящему* току, то можно приравнять

$$\oint - i da = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{D}}{dt} da. \quad (140)$$

Оба интеграла в ф-ле (140) берутся по одной и той же замкнутой поверхности и, следовательно,

$$\oint \left( i + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) da = 0, \quad (141)$$

откуда, по теореме Гаусса

$$\int \nabla \left( i + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) dv = 0. \quad (142)$$

Так как это справедливо для пространства, ограниченного любой замкнутой поверхностью, как бы она ни была велика или мала, то отсюда следует, что дивергенция величины, стоящей в скобках, везде должна быть равна нулю

$$\nabla \left( i + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) = 0. \quad (143)$$

Выполнив две очевидных подстановки в ф-лу (143), получим

$$\nabla \left( \gamma \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt} \right) = 0. \quad (144)$$

Сравнение ур-ний (143) и (134) оказывается весьма поучительным. Уравнение (134) говорит, что стационарный ток, т. е. ток при постоянной напряжённости поля, не имеет дивергенции. Однако, если электрическое поле меняется, то не может быть тока без дивергенции. Но, как видно из ур-ния (143), если добавить к плотности тока в каждой точке второй член, содержащий скорость изменения электрического поля, то результат будет представлять собой величину, дивергенция которой при всех обстоятельствах равна нулю.

У нас естественно появляется стремление рассматривать эту дополнительную величину  $\frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt}$  как нечто подобное току — может быть даже, как некий вид тока. Она не является *током проводимости*, под которым понимается  $\gamma \mathbf{E}$ , поэтому назовём её *током смещения*. Общий ток, т. е. сумма тока проводимости и тока смещения состоит из двух частей

$$i_o = i_n + i_c = \gamma \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt}. \quad (145)$$

Дивергенция плотности этого *общего* тока всегда равна нулю. Следовательно,  $i_o$  есть вектор *соленоидального* поля.

**Электродвижущая сила.** При прохождении тока по проводникам происходят большие или меньшие потери энергии. Эти потери должны восполняться каким-то источником, использующим химические процессы в батарее, термоэлектрические процессы, магнитные процессы (как будет показано в гл. VII) или какое-либо другое явление. В любом случае источник энергии должен создавать то, что называется *электродвижущей силой*.

Обычно применяемый термин *напряжение* определяет способность создавать ток и по закону Ома

$$u = ir. \quad (146)$$

Напряжение создаётся двумя причинами.

Во-первых, ток может быть вызван электрическим полем между электрически заряжёнными телами. Поле является видом силы, которая создаёт ток в проводнике, соединяющем между собой две заряжённых проводящих поверхности, например, в конденсаторе. Эта составляющая напряжения могла бы быть названа *электростатической возбуждающей силой* (если бы не то обстоятельство, что при наличии тока условия перестают быть электростатическими) и будет обозначаться  $u_c$ .

Во-вторых, ток может появиться благодаря наличию в контуре батареи, термопары или генератора, развивающих электро-

движущую силу, которую мы будем обозначать  $u_g$ . В общем случае, например, в случае контура, содержащего и батарею и конденсатор, имеются обе величины ( $u_c$  и  $u_g$ ) и общее напряжение равно сумме

$$u = u_c + u_g = ir. \quad (147)$$

Это выражение является законом Ома, при чём значение напряжения  $u$  здесь включает и электродвижущую силу.

В любой части контура, в котором не действует электродвижущая сила, существует лишь  $u_c$  и в этом случае, как и в ф-ле (129)

$$u = u_c = \int E_c ds = ir. \quad (148)$$

Если, кроме того, имеется электродвижущая сила, то сюда надо добавить  $u_g$ . Когда электродвижущая сила распределена вдоль провода (как например, в случае электродвижущей силы магнитной индукции), то  $u_g$  определяется линейным интегралом индуцированного электрического поля  $E_g$ , существующего в каждой точке проводника, взятым по проводнику.

Таким образом, в общем случае

$$u = u_c + u_g = \int E_c ds + \int E_g ds = ir, \quad (149)$$

при чём интеграл берётся вдоль контура интегрирования, идущего внутри проводника.

Электрическое поле внутри проводника состоит из двух частей: часть  $E_c$  вызывается электрическими зарядами и соответствует электростатическому полю, а часть  $E_g$  создаётся магнитным (или химическим или термическим) процессом. Общее электрическое поле в проводнике равно их сумме

$$E = E_c + E_g, \quad (150)$$

а плотность тока, определяемая ф-лей (133), равна

$$i = \gamma E = \gamma(E_c + E_g). \quad (151)$$

Если тока в проводнике нет, то либо  $E_c$  и  $E_g$  равны нулю, либо в каждой точке электростатическое поле и индуцированная электродвижущая сила в точности равны друг другу по величине и противоположны по знаку.

Интересным частным случаем является замкнутый контур, содержащий электродвижущую силу. Когда интегрирование в ф-ле (149) ведётся вдоль этого замкнутого контура, то

$$\oint E_c ds + \oint E_g ds = ir. \quad (152)$$

Но интеграл  $E_c$  вдоль замкнутого контура должен быть равен нулю, как и во всех случаях электростатического поля, и, следовательно,

$$ir = \oint E_g ds = \text{электродвижущей силе.} \quad (153)$$

Это соотношение использовано в следующей главе при изучении магнитного поля.

### ЗАДАЧИ

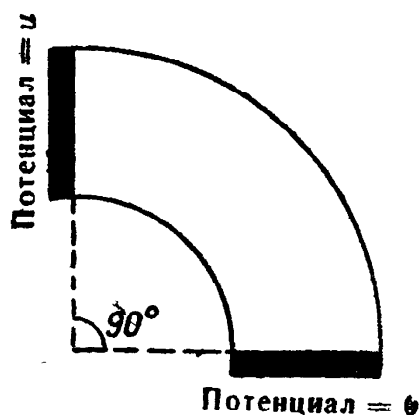
1. Найдите из таблиц или других источников удельную проводимость меди, железа и алюминия. Дайте её значения в электростатических единицах.

2. Выведите первый закон Кирхгофа как указано на стр. 79, из уравнения (134). Второй закон Кирхгофа в сущности говорит, что при отсутствии электродвижущей силы сумма напряжений вдоль любого электрического контура равна нулю; получите этот закон, как частный случай одного из уравнений гл. IV.

3. Плоская металлическая пластина, однородная по толщине, ограничена двумя четвертями окружностей и двумя радиальными линиями, как это показано на поясняющем рисунке. Между краями, ограниченными радиальными линиями, поддерживается неизменная величина напряжения постоянного тока. Найдите распределение плотности тока в пластине.

4. Толщина пластины в задаче 3 составляет 2 мм, внутренняя сторона имеет радиус кривизны 25 мм, а внешняя—50 мм. Общий ток равен 100 а. Найдите максимальную плотность тока в пластине.

5. Пластина в задачах 3 и 4 выполнена из алюминия. Найдите максимальную величину тепла, выделяемого единицей объёма в единицу времени при вышеуказанных условиях.



К задаче 3.



## МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

**Магнитная сила.** Когда по проводнику протекает ток, то при некоторых обстоятельствах может появиться действующая на проводник механическая сила. Она совершенно отлична от электростатической силы и от сил неэлектрического происхождения, так как при прекращении тока сила исчезает. Эта сила появляется, когда проводник находится вблизи другого проводника, по которому также протекает ток, или когда он расположен вблизи магнита. Поэтому её называют магнитной силой.

**Опыт VI.** Этот опыт ставится для изучения магнитной силы. Установка показана на рис. 32. Короткий, прямой отрезок про-

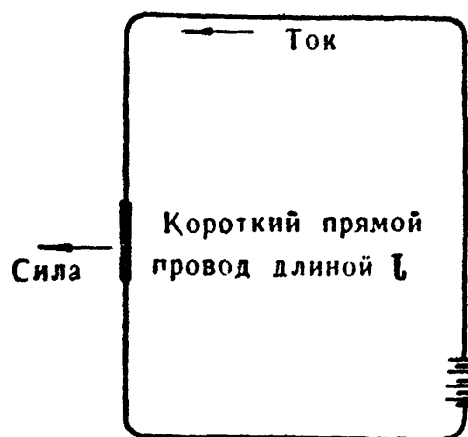


Рис. 32.

вода смонтирован таким образом, что можно измерить силу, действующую на него при наличии в нём тока. Так как короткий отрезок провода должен свободно двигаться, чтобы имелась возможность измерить силу, то подводка тока осуществлена с помощью гибкого соединения. С успехом можно применить для этой цели чашечки с ртутью<sup>1)</sup>.

Опыт показывает, что магнитная сила, действующая на исследуемый проводник, всегда нормальна к нему. Величина силы пропорциональна величине тока, протекающего по

проводу. Сила пропорциональна также длине исследуемого отрезка провода. Все эти зависимости легко понять, так как они определяются исследуемым проводом и током в нём. Но величина и направление магнитной силы зависят также от размещения и ориентирования исследуемого провода в пространстве, в частности относительно магнитов и проводников, по которым протекает электрический ток. Это наводит на мысль, что в

<sup>1)</sup> Касаясь истории, следует указать, что различные формы подобных установок были использованы Ампером в 1821 г. для установления закона сил взаимодействия между проводниками, который известен как «закон Ампера».

пространстве (особенно в пространстве, окружающем магниты и электрические токи) существуют какие-то условия, которые создают магнитную силу. Остаётся предположить возможность существования *магнитного поля*.

Опыт показывает, что в любой точке пространства можно так расположить исследуемый провод, что магнитная сила не будет действовать на него. Если исследуемый провод оставить в той же точке, но, повернув его, по иному расположить, магнитная сила появится; величина силы пропорциональна синусу угла между данным направлением провода и тем направлением его, при котором сила равна нулю. Магнитная сила достигает максимума, когда провод перпендикулярен нулевому направлению. Направление магнитной силы не только нормально к проводу, но нормально также к нулевому направлению.

Из этих результатов опыта видно, что идея о существовании магнитного поля является вполне разумной. Это поле должно быть векторным, поскольку оно характеризуется как величиной, так и направлением. Существует лишь одно, однозначно определяемое, направление, а именно направление исследуемого провода, при котором действующая на него магнитная сила равна нулю. Это направление, по определению, считают *направлением магнитного поля*. *Напряжённость* магнитного поля находят по максимальной магнитной силе, действующей на исследуемый провод, когда он расположен нормально к нулевому положению; напряжённость магнитного поля пропорциональна этой максимальной силе. *Знак* поля также определяется этой максимальной силой, так как предполагается, что связь между положительным направлением тока в исследуемом проводе, положительным направлением магнитного поля и направлением получающейся силы подчиняется правилу «правой руки».

Исходя из этих определений, можно вычислить магнитную силу, действующую на исследуемый провод, с помощью уравнения

$$F = \frac{i |lB|}{c}. \quad (154)$$

Здесь сила обозначена через  $F$ ,  $l$  — длина отрезка исследуемого провода, на который действует сила, и  $i$  — протекающий ток.  $B$  называется *магнитной индукцией* (как будет показано ниже, она является также *плотностью магнитного потока*), а  $c$  является коэффициентом пропорциональности. Величина  $c$  зависит от выбранной системы единиц; в системе Гаусса  $c$  почти точно равно  $3 \cdot 10^{10}$ , в электромагнитной системе единиц  $c$ , по определению, равно единице. Следует отметить, что ток записан как скалярная величина, в то время как  $l$  — длина провода, по которому течёт ток, является вектором, имеющим направление, совпадающее с направлением провода. Положительный знак  $l$  выбран произвольно, а ток, текущий в положительном направле-

нии, считается положительным током [в ур-нии (154) можно записать ток в виде вектора, а длину в виде скалярной величины; но в других случаях часто оказывается невозможным рассматривать ток, как векторную величину и, например, в гл. VI он был определён как скаляр].

Уравнение (154) учитывает все факторы, обнаруженные в опыте VI. Читателю полезно пересмотреть описанные выше результаты опыта и посмотреть, как они охвачены уравнением.

**Магнитный поток.** *Магнитные силовые линии или линии магнитного потока* можно себе представлять так же, как и электрические силовые линии, и дать им аналогичное определение

$$\text{магнитный поток} = \Phi = \int \mathbf{B} da. \quad (155)$$

Величина  $\mathbf{B}$  есть плотность магнитного потока, так как она, будучи умножена на площадь [или, как в ур-нии (155), будучи проинтегрирована по площади], даёт поток.

Единицей потока является *максвелл*, а единица плотности потока, равная одному максвеллу на квадратный сантиметр, называется *гауссом*.

**Опыт VII.** Теперь для изучения связи между магнитным и электрическим полями сделаем другой опыт. В 1831 г. Михаил Фарадей в Англии сделал открытие, заключающееся в том, что электрическое поле может быть создано магнитным полем. Это открытие считается самой значительной из его замечательных экспериментальных работ. Несколько месяцев позднее оно было независимо сделано Иосифом Генри в Соединённых Штатах Америки.

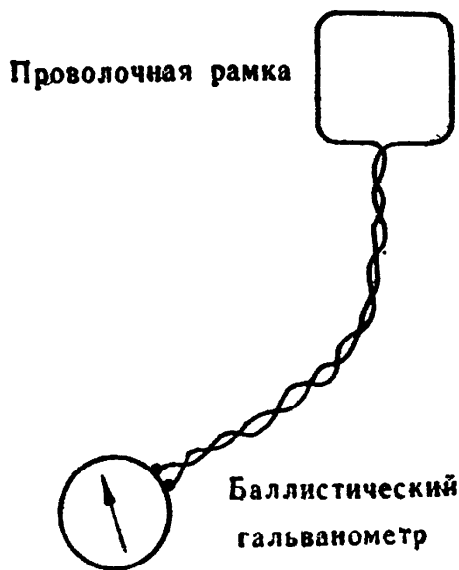


Рис. 33.

Установка для опыта VII состоит из проволочной рамки, соединённой к баллистическому гальванометру. Расположение приборов может быть таким, как изображено на рис. 33, на котором показан витой шнур, соединяющий рамку с гальванометром. Баллистический гальванометр измеряет протекающий через него электрический за-

ряд. Оказывается, что если рамка находится в магнитном поле, то всякий раз, когда напряжённость магнитного поля возрастает или уменьшается, гальванометр показывает, что через него протекает заряд. С помощью метода, использованного в опыте VI, измеряют напряжённость магнитного поля у рамки и находят, что показания баллистического гальванометра пропорциональны изменению потока, проходящего через рамку. Опыт показывает

также, что показания гальванометра обратно пропорциональны общему сопротивлению установки, включая рамку, провода и гальванометр. Так как гальванометр измеряет электрический заряд, то можно записать

$$q = -\frac{\Phi}{cr}. \quad (156)$$

Как и в ур-нии (154),  $c$  является коэффициентом пропорциональности, равным (с большой точностью)  $3 \cdot 10^{10}$ . Отрицательный знак в ур-нии (156) показывает, что если положительное направление движения зарядов в рамке связано с направлением положительного потока «правилом правой руки», то возрастание положительного потока создаёт отрицательный ток.

Из ур-ния (156) нетрудно получить закон индукции Фарадея. Исходное уравнение можно записать в виде

$$rq = -\frac{\Phi}{c} \quad (157)$$

и после дифференцирования

$$r \frac{\partial q}{\partial t} = ri = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (158)$$

В гл. VI было показано, что в замкнутом контуре произведение  $ri$  равно электродвижущей силе в контуре, таким образом из ур-ний (153) и (158), следует, что

$$\text{электродвижущая сила} = \oint \mathbf{E} ds = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (159)$$

Это и есть известный закон Фарадея. Он выражен, конечно, в единицах системы Гаусса.  $\Phi$  — поток, проходящий через поверхность, ограниченную проводником, и соответствует обычному представлению о потокоцеплении (см. стр. 98).

Электродвижущая сила, индуцированная магнитным полем в проволочной рамке, выражена ур-нием (159) и определяется линейным интегралом электрического поля, взятым вдоль проводящей рамки. Обобщим теперь это экспериментальное соотношение: предположим, что изменяющееся магнитное поле индуцирует в соответствии с ур-нием (159) электрическое поле не только в проводниках, но и в непроводниках и даже в свободном пространстве. Такое предположение подтверждается тем, что при замене в опыте VII рамки, сделанной из медного провода, рамкой из такого плохо проводящего материала, как нихром, индуцированное напряжение остаётся в точности таким же. Напряжение индуцируется даже в куске дерева, помещённом в меняющееся магнитное поле, и если протекающий ток очень мал, то причиной этому является просто очень большое удельное сопротивление дерева. Этот факт можно установить экспериментально,

если иметь чувствительные приборы. Нетрудно сделать следующий шаг, предположив, что если описанное явление справедливо для всех материалов, то оно справедливо также для воздуха или даже для свободного пространства. На первый взгляд это кажется софизмом, так как неясно, что означает создание электрического поля там, где нет предметов, на которые оно действует? Однако, несколько позднее будет показано, что эта концепция действительно является крайне важной, и что без электрических и магнитных полей, взаимно создающих друг друга в свободном пространстве, не могло бы быть в вакууме радиопередачи, света или других проявлений электромагнитных волн.

При этом предположении (которое устанавливает, что существует индуцированное электрическое поле, непрерывное в пространстве) можно применить теорему Стокса к интегралу в ур-нии (159). Одновременно подставляя в него выражение (155) вместо потока, получим

$$\int [\nabla \mathbf{E}] d\mathbf{a} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{a}. \quad (160)$$

Оба этих интеграла берутся по поверхности, ограниченной проводником опытной установки, который может иметь любые размеры, форму или расположение. Но при всех обстоятельствах обе части уравнения могут быть равны друг другу лишь в том случае, если

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (161)$$

Это уравнение говорит, что в той области, где магнитное поле изменяется со временем, имеется ротор электрического поля. Следует напомнить, что электростатическое поле, в котором ничего не меняется со временем, не имеет ротора. Большое значение этого уравнения будет видно из гл. IX.

**Напряжение, индуцированное благодаря движению.** При выводе правой части ур-ния (160) из ур-ния (159) предполагалось, что изменения потока, пересекающего рамку, происходили лишь за счёт изменения плотности магнитного потока. Однако, они возможны также за счёт движения рамки в пространстве, как это происходит, например, в электрическом генераторе, ибо движение в магнитном поле может менять величину потока, проходящего через рамку, даже в том случае, когда напряжённость магнитного потока в любой данной точке пространства постоянна. В общем случае, когда среда движется со скоростью  $\mathbf{v}$  в пространстве с магнитным полем  $\mathbf{B}$  в среде в результате движения индуцируется электрическое поле, равное  $[\mathbf{vB}]^1$ . Оно

<sup>1)</sup> Смотри книги по электромагнитной теории более высокого уровня, например: Абрагам и Беккер. *Теория электричества*. ОНТИ, 1936.

является дополнением к любому электрическому полю, полученному в результате изменения напряжённости магнитного поля, и, если учесть это дополнение, то уравнение (161) (пригодное для неподвижной среды) примет следующий вид (для движущейся среды):

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - [\nabla [\mathbf{vB}]] \right\}. \quad (162)$$

**Опыт VIII.** Магнитное поле было характеризовано силой, действующей на провод, по которому протекает ток. Было показано также, что меняющееся магнитное поле индуцирует электрическое поле. Однако, до сих пор не рассматривались ни источник магнитного поля, ни его структура. Для этой цели нужны дополнительные экспериментальные данные, и поэтому сейчас будут описаны два дополнительных опыта. Они вполне аналогичны опытам II и III, проведённым при изучении электрических полей.

Оба этих опыта — VIII и IX, как мы увидим, можно осуществить лишь в магнитном поле, не меняющемся со временем; такое поле по аналогии с электростатическим полем называется *магнитоэлектростатическим*.

Опыт VIII проводится с прибором для измерения плотности магнитного потока. Это может быть провод, обтекаемый током, который применялся в опыте VI, или рамка и баллистический гальванометр опыта VII. Второй из них более практичен. Действительно, обычный лабораторный прибор, называемый «флюксометром», состоит из индукционной катушки (вместо рамки) с большим числом плотно намотанных витков, соединённой гибкими проводами с соответствующим образом градуированным баллистическим гальванометром, имеющим очень большой период собственных колебаний.

Прибором для измерения плотности магнитного потока определяется нормальная составляющая величины  $\mathbf{B}$  во всех точках воображаемой замкнутой поверхности в магнитном поле. Фиктивная замкнутая поверхность может иметь любую форму и размеры. Опыт можно повторить для нескольких таких поверхностей; во всех случаях из экспериментальных данных вытекает, что суммирование магнитного поля по любой замкнутой поверхности даёт нуль, т. е.

$$\oint \mathbf{B} \, da = 0. \quad (163)$$

Применяя теорему Гаусса к этому результату опыта, можно заключить, что магнитное поле в любом случае не имеет дивергенции

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (164)$$

Следовательно, магнитные силовые линии непрерывны, так как из ур-ния (164) видно, что ни одна магнитная силовая линия не имеет ни начала, ни конца. Каждая из них представляет собой замкнутую петлю.

Проводя опыт VIII с материалами любого вида, а также и в свободном пространстве, получают один и тот же результат: дивергенция магнитного поля всегда равна нулю. Исследовать магнитное поле внутри твёрдого тела, например, латуни или железа, измеряя силу, действующую на проводник, очевидно, невозможно; однако, индукционная катушка флюксметра позволяет определить общий магнитный поток внутри куска твёрдого материала и результат всегда будет соответствовать ур-нию (164).

**Опыт IX.** Этот последний из наших опытов может быть проведён с любым из приборов, предложенных для опыта VIII. Тем не менее, индукционная катушка флюксметра, как и раньше, является единственным средством для определения величины магнитного потока внутри твёрдых тел. В опыте IX этим измерительным прибором определяется плотность магнитного потока в каждой точке замкнутого контура, и суммированием тангенциальной составляющей плотности магнитного потока вдоль выбранного контура находится интеграл

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{s}.$$

При этом оказывается, что если контур, по которому ведётся интегрирование, расположен в однородном материале, то величина интеграла пропорциональна величине электрического тока, который охватывается контуром интегрирования. Если сквозь поверхность, ограниченную контуром интегрирования, не протекает ток, то величина интеграла (в однородной среде) равна нулю. Если же ток протекает таким образом, что он сцеплен с контуром интегрирования, то величина интеграла равна

$$\frac{1}{\mu} \oint \mathbf{B} \, d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} i. \quad (165)$$

Здесь  $i$  — ток,  $c$  — коэффициент пропорциональности, который уже встречался раньше, и  $\mu$  — величина, характеризующая материал. Коэффициент  $\mu$  называется *магнитной проницаемостью*; он равен для свободного пространства единице (в системе единиц Гаусса).

Этот опыт можно осуществить, используя железное кольцо, как показано на рис. 34. Чтобы измерять поток в металле, индукционная катушка флюксметра охватывает железо. В центре кольца проходит провод. По проводу пропускается ток, величина которого известна, и наблюдается вызываемое током отклонение стрелки баллистического гальванометра. Опыт повторяется при

различных положениях индукционной катушки на кольце (показания гальванометра во всех положениях будут одинаковыми). Затем железное кольцо снимается и опыт повторяется при индукционной катушке, расположенной в пространстве.

Так как отклонения флюксметра при наличии железного кольца в несколько сот раз больше, чем при отсутствии железа, то отсюда следует, что магнитная проницаемость железа (в условиях данного опыта) равна нескольким сотням.

Опыт показывает, что магнитная проницаемость большинства материалов практически равна единице, т. е. магнитной проницаемости свободного пространства.

Лишь железо, кобальт, никель и некоторые сплавы обладают высокой магнитной проницаемостью, достигающей нескольких тысяч, и так как железо является типичным представителем этой группы материалов, то их называют *ферромагнитными материалами*. Аналитическое изучение этих материалов связано с трудностями, вследствие того, что магнитная проницаемость непостоянна и зависит от плотности магнитного потока (примером тому является предельный случай — магнитное насыщение) и, что хуже всего, — магнитная проницаемость зависит от магнитной предъистории материала (что видно в явлении гистерезиса и постоянного магнетизма). К счастью, не часто приходится рассматривать ферромагнитные материалы в связи с электрическими волнами. В настоящей главе предполагается, что магнитная проницаемость постоянна даже для тех ферромагнитных материалов, у которых она существенно отличается от единицы.

Наконец, если в опыте IX плотность магнитного потока измеряется вдоль пути, часть которого проходит в одном материале, и часть в другом, то необходимо вводить соответствующее значение магнитной проницаемости для каждой части пути. Для пути интегрирования, расположенного в неоднородном материале, ур-ние (165) получает вид

$$\oint \frac{\mathbf{B} ds}{\mu} = \frac{4\pi}{c} i. \quad (166)$$

Вводя новый символ  $\mathbf{H}$ , представляющий векторное поле *магнитной напряжённости*, определяемой равенством  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , можно переписать ур-ние (166) в виде

$$\oint \mathbf{H} ds = \frac{4\pi}{c} i. \quad (167)$$

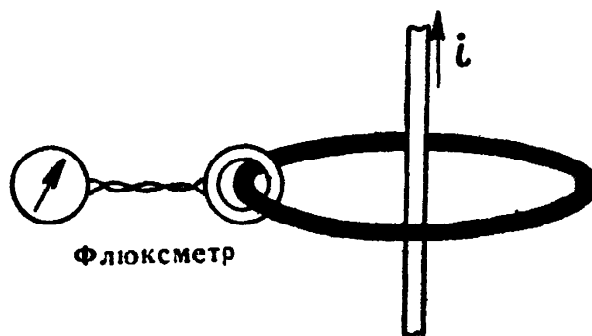


Рис. 34.



Это уравнение справедливо для контура интегрирования любого вида и в нём суммированы результаты, полученные при проведении опыта IX.

Уравнение (167) определяет *магнитодвижущую силу*. Единицей магнитодвижущей силы в системе Гаусса является *гильберт*. [Практическая единица — *ампер-виток* — приблизительно равна гильберту, ибо эти единицы связаны между собой множителем  $\frac{10}{4\pi}$  (см. табл. 1)].

Ток  $i$  может протекать в единственном проводнике (рис. 35a) или в нескольких проводниках (рис. 35b, c или d), или лишь в части проводника (рис. 35e). Ток может быть даже потоком за-

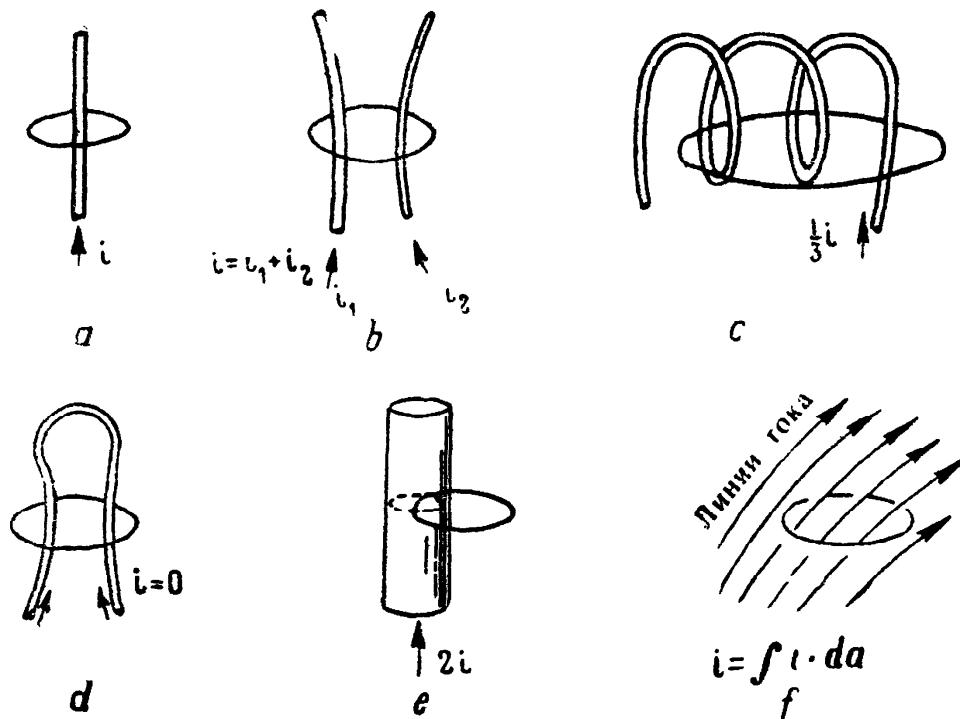


Рис. 35.

рядов в свободном пространстве, как в случае, показанном на рис. 35f. В любых условиях ток можно выразить интегралом плотности тока по поверхности, ограниченной контуром интегрирования,

$$i = \int i \cdot da. \quad (168)$$

Поверхностью интегрирования в ур-нии (168) может быть *любая* поверхность, ограниченная контуром интегрирования, так как (в условиях данного опыта) если линия тока сцеплена с контуром интегрирования, то она проходит через *любую* поверхность, ограниченную этим контуром.

Подставляя выражение (168) в ур-ние (167), получаем

$$\oint \mathbf{H} ds = \frac{4\pi}{c} \int i \cdot da. \quad (169)$$

Применяя теорему Стокса к левой части равенства (169), можно перейти от линейного интеграла по замкнутому контуру к поверхностному интегралу по поверхности, ограниченной этим контуром,

$$\oint \mathbf{H} ds = \int [\nabla \mathbf{H}] da = \frac{4\pi}{c} \int i da. \quad (170)$$

Таким образом, вторая и третья части равенства (170) являются интегралами, взятыми по одной и той же поверхности, которая может быть выбрана произвольно, а следовательно, в любой точке

$$[\nabla \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} i. \quad (171)$$

Это уравнение показывает, что ротор магнитного поля в любой точке пропорционален плотности тока в этой точке. Там, где нет тока, поле не имеет ротора, т. е. является безвихревым (потенциальным). Однако, в пространстве, в котором есть ток, магнитное поле имеет больший или меньший ротор. Так например, *внутри* провода, по которому течёт ток, есть ротор магнитного поля.

**Правило знаков.** Значение алгебраического знака в ур-ниях (165), (166) и (167) до сих пор ещё не было определено. Уравнение (167), например, устанавливает, что ток, протекающий в проводе, создаёт магнитодвижущую силу в контуре, охватывающем этот провод. Возникает вопрос: как направлена эта магнитодвижущая сила? Что понимается под положительным током или положительной магнитодвижущей силой?

Чтобы внести ясность в это положение, надо дать новые определения. Если направление движения по окружности связано с направлением, нормальным к плоскости, в которой расположена окружность, то любое из двух возможных соотношений направлений может быть произвольно принято в качестве положительного.

Обычно принято определять положительное направление следующим образом: если на данной странице нарисована окружность и если направление на окружности против часовой стрелки принято за положительное, то положительная нормаль направлена из страницы на нас. С другой стороны, если за положительное направление по окружности взять направление по часовой стрелке, то положительная нормаль будет направлена в страницу. Чтобы выразить эту связь одним словом, мы введём термин *боральное*<sup>1)</sup>. Это позволяет весьма просто сформулировать пра-

<sup>1)</sup> Слово *боральное* происходит от понятия, относящегося к вращению земли, и означает северное направление по отношению к вращению земли или аналогичную связь между аксиальным направлением и вращением. Оно происходит от того же корня (бора — boreas — северный ветер), что и «аугога borealis» — «северная полярная звезда». Противоположным *боральному* является понятие *австральное*, т. е. южное, как в слове «Австралия».

вило, связывающее между собой направления по окружности и её оси: боральное направление является положительным.

Когда вращают винт с так называемой правой резьбой, то получают поступательное движение, боральное к вращению винта. Большой палец правой руки направлен борально по отношению к другим пальцам, если их держать, как показано на рис. 36с. На этом основывается «правило правой руки», которое



Рис. 36.

действительно является наиболее удобным для определения борального направления в каждом отдельном случае. В ур-нии (167) ток в проводе борален к создаваемой им магнитодвижущей силе; поэтому, если большой палец правой руки направить вдоль провода по направлению тока, то остальные пальцы укажут направление положительной магнитодвижущей силы (см. рис. 36b).

На стр. 87 после ур-ния (156) была рассмотрена связь между направлениями тока, индуцированного в проволочной рамке, и потока, сцепленного с рамкой. Теперь можно дать более короткую и ясную формулировку установленного положения: отрицательный знак в уравнении означает, что скорость изменения потока в рамке направлена *обратно* направлению, боральному по отношению к индуцированному току.

Уравнения (169) и (170) связывают поверхностный интеграл с линейным интегралом, взятым по контуру, ограничивающему поверхность. Здесь вновь требуется правило знаков. Если площадь рассматривать как векторную величину, представляемую вектором, нормальным к поверхности, то надо знать знак вектора. В предыдущей главе уже указывалось, что знак вектора

должен соответствовать внешней нормали к замкнутой поверхности; но в ур-ниях (169) и (170) поверхность не является замкнутой и понятие «внешнее» не имеет смысла. Когда поверхность не замкнута, она имеет границу и достаточно связать направление вектора, представляющего площадь, с направлением обхода ограничивающего контура; согласно принятому условному направлению является положительным. Так в ур-нии (169) линейный интеграл в левой части можно брать в любом направлении, выбираемом произвольно, а выбор направления обхода по контуру определяет также, согласно приведённому условию, положительный знак площади в правой части уравнения. Этим условием исключается всякая двусмысленность.

*Пример.* В качестве примера определения магнитного поля вычислим поле в воздухе вокруг длинного прямого провода круглого сечения, показанного на рис. 35а или 37. По проводу течёт ток  $i$  (в электростатических единицах или единицах Гаусса). Требуется найти три составляющих магнитного поля.

Уравнение (167) даёт интеграл магнитного поля вдоль любого замкнутого пути, окружающего провод. Чтобы применить это уравнение прежде всего выберем в качестве контура интегрирования окружность, concentricкую проводу, как показано на рис. 37. Вдоль рассматриваемого контура  $\mathbf{H}$  постоянно; это определяется симметрией, ибо одну точку окружности, охватывающей цилиндрический проводник, нельзя отличить от любой другой.

Обозначим через  $H_\theta$  составляющую  $\mathbf{H}$ , тангенциальную к контуру интегрирования. Лишь эта составляющая будет определять скалярное произведение в ур-нии (167), так что

$$\oint H_\theta ds = \frac{4\pi}{c} i. \quad (172)$$

Однако, поскольку при любом постоянном радиусе  $r$ ,  $H_\theta$  — постоянно, то

$$H_\theta \oint ds = \frac{4\pi}{c} i. \quad (173)$$

Интеграл от  $ds$  есть просто длина окружности, являющейся контуром интегрирования, и при радиусе  $r$

$$H_\theta 2\pi r = \frac{4\pi}{c} i, \quad (174)$$

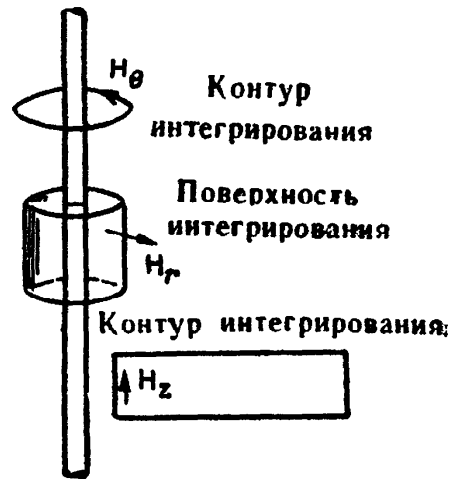


Рис. 37.

откуда

$$H_{\theta} = \frac{1}{c} \cdot \frac{2i}{r}. \quad (175)$$

Обозначим через  $H_z$  составляющую  $\mathbf{H}$ , параллельную оси провода. Если такая составляющая существует, то в силу симметрии она должна быть одинакова во всех точках, находящихся от провода на одинаковом радиальном расстоянии.

Далее обозначим через  $H_r$  составляющую  $\mathbf{H}$ , направленную по радиусу. Рассмотрим поверхность, окружающую проводник и коаксиальную с ним; хотя бы в виде обычной консервной банки. Таким образом, поверхность является замкнутой и составлена из цилиндрической части и двух плоских кругов, как показано на рис. 37. Надо найти  $\int \mathbf{B} da$  по этой поверхности для подстановки в ур-ние (163). Так как  $H_{\theta}$  не пересекает эту поверхность, то оно не играет роли при определении  $\int \mathbf{B} da$ . Аксиальная составляющая  $H_z$  также ничего не даёт при определении  $\int \mathbf{B} da$ , так как, будучи одинаковой на одинаковых радиальных расстояниях от проводника, она добавляет к интегралу на одной плоской поверхности столько же, сколько отнимает от него на другой, а цилиндрическую поверхность она не пересекает. Однако, если существует радиальная составляющая  $H_r$ , то она должна дать отличное от нуля значение интеграла по поверхности. Уравнение (163) говорит, что  $\int \mathbf{B} da$  всегда равен нулю; отсюда следует, что  $H_r$  должно быть везде равно нулю, поскольку рассматриваются все возможные поверхности, подобные консервной банке.

Остаётся найти  $H_z$ . Рассмотрим контур интегрирования, показанный на рис. 37. Он имеет прямоугольную форму. Одна из сторон параллельна оси провода и расположена довольно близко к проводу; другая параллельная сторона расположена неограниченно далеко. При интегрировании  $\mathbf{H} ds$  по этому прямоугольнику  $H_{\theta}$  не влияет, так как она везде нормальна к контуру интегрирования. Как было показано  $H_r = 0$ . Остаётся лишь  $H_z$ , которая (если она существует) даёт значения при интегрировании вдоль коротких сторон контура.

Интеграл по всему контуру равен нулю, ибо контур интегрирования не пересекается током [ур-ние (167)]. Поэтому интеграл от  $H_z$  должен быть равен нулю, но это возможно в том случае, если  $H_z$  имеет одно и то же значение вблизи проводника и на неограниченном расстоянии, или если  $H_z = 0$ . Так как невозможно, чтобы проводник, по которому протекает конечный ток, создавал бы однородное магнитное поле во всём бесконечном пространстве (ибо на это требуется бесконечная энергия), то можно заключить, что  $H_z$ , так же, как и  $H_r$ , равно нулю.

Таким образом, мы установили, что существует лишь  $H_0$  и его величина определяется ур-нием (175). Решение этой простой задачи было проведено очень детально с тем, чтобы иллюстрировать использование специальных контуров интегрирования при рассмотрении магнитных и электрических полей.

**Сила взаимодействия между токами.** Опытом VI было установлено, что на провод с током, расположенный вблизи другого провода с током, действует механическая сила. Действие это должно быть взаимным и каждый ток вызывает силу, действующую на другой ток. Величину этой силы теперь можно определить.

Наиболее простым является определение силы взаимодействия между двумя параллельными проводами, которое будет дано здесь. Тот же метод можно применить, при необходимости, в общем случае произвольных проводников.

На рис. 38 изображено поперечное сечение двух проводников. По проводникам текут токи  $i_1$  и  $i_2$ , направленные из страницы на читателя. Если расстояние между двумя проводниками равно  $d$ , то магнитное поле, создаваемое током  $i_1$  на расстоянии  $d$ , где расположен проводник 2, согласно ур-нию (175) равно

$$B_1 = H_1 = \frac{1}{c} \cdot \frac{2i_1}{d}. \quad (176)$$

Направление этого поля нормально к линии, соединяющей два проводника, как это показано на рисунке. На проводник 2 действует механическая сила, определяемая ф-лой (154), и если выражение (176) подставить в ф-лу (154), то для величины этой силы будет получено уравнение

$$F = \frac{i_2 l_2}{c} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{2i_1}{d} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{2i_1 i_2}{d} l_2. \quad (177)$$

Следовательно, сила, приходящаяся на единицу длины провода 2, равна

$$\frac{F}{l_2} = \frac{2i_1 i_2}{c^2 d}. \quad (178)$$

Это — скалярное выражение. Оно определяет лишь величину силы. Векторное произведение  $[\mathbf{I}\mathbf{B}]$  в ур-нии (154) здесь равно по величине скалярному произведению скалярных величин  $l$  и  $B$ , так как  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{B}$  нормальны друг к другу; направление силы определяется направлением этого векторного произведения и, поскольку на рис. 38  $\mathbf{I}$  направлено на читателя (соответственно направлению тока), а  $\mathbf{B}$  — вверх, то  $\mathbf{F}$ , будучи борально к углу между  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{B}$ , направлено к проводу 1.

Сила в ур-нии (178) выражена в динах, если токи взяты в единицах электростатической системы или системы Гаусса и расстояния в сантиметрах, а  $c$  имеет то же значение, что и в других уравнениях этой главы. Если же токи выражены в электромагнитных единицах, то  $c$  равно единице. Действительно, именно это уравнение определяет электромагнитную систему единиц: электромагнитная единица тока определяется как величина, обращающая в ур-нии (178)  $c$  в единицу.

Очевидно, что ур-ние (178) даёт также величину силы, вызываемой на проводнике 1 током в проводнике 2. Эта сила направлена к проводнику 2. Таким образом, мы приходим к заключению, что два проводника с одинаково направленными токами притягиваются друг к другу с силой, величина которой определяется выражением (178). Это заключение является простейшей формой закона Ампера. Здесь предполагалось, что расстояние между проводниками велико по сравнению с диаметром каждого из проводников и что проводники прямолинейны и параллельны на неограниченной длине.

Если направление одного из токов изменить на обратное, изменится знак  $i$  в ур-нии (154), изменится на обратное направление силы, действующей между проводниками. Провода будут взаимно отталкиваться. Однако, если изменить на обратное направление обоих токов, то они вновь будут притягивать друг друга. Отсюда вытекает легко запоминающееся, но недостаточно точное правило: «одинаковые токи притягиваются, разные токи отталкиваются».

**Сцепление магнитного потока.** Ток, текущий в катушке, намотанной из провода, как показано на рис. 35с, создаёт магнитное поле. Структура поля такова, что силовые линии проходят через катушку вдоль оси и возвращаются, довольно далеко расходясь во внешнем пространстве. Поэтому каждая силовая линия пересекает по меньшей мере один раз, а может пересекать и много раз, поверхность, ограниченную проводником. Такую поверхность на рис. 35с можно вообразить в виде резиновой плёнки, край которой закреплён на проводнике. Когда провод свёртывается в спираль, лента принимает сложную форму, которую гораздо легче вообразить, чем нарисовать или описать.

Пусть замкнутая линия, изображённая на рис. 35с, представляет собой силовую линию; такая линия три раза пересекает поверхность, ограниченную проводником. Легко видеть, что каждое пересечение силовой линией этой поверхности эквивалентно обычному представлению о «потокосцеплении».

**Магнитная энергия.** Для создания магнитного поля требуется энергия. Как показано ниже, энергию даёт электрический ток. Когда в контуре начинает течь ток, он создаёт магнитное поле [ур-ние (166)]. Так как магнитное поле возрастает, оно индуцирует электрическое поле в области магнитного поля и вблизи неё; интеграл этого электрического поля, взятый вдоль контура, даёт

электродвижущую силу [ур-ние (159)]. Увеличивающееся магнитное поле индуцирует в контуре электродвижущую силу, противоположную по направлению возрастающему току<sup>1)</sup>. Эта индуцированная электродвижущая сила должна быть преодолена приложенным напряжением. Легко видеть, что произведение тока, напряжения и времени выражает энергию. Следовательно, при создании магнитного поля энергия берётся из контура. Равное количество энергии возвращается в контур, когда ток прекращается, а магнитное поле ослабевает.

Следует предположить, что энергия, полученная при формировании магнитного поля от электрического контура, запасается этим полем. Если плотность магнитной энергии принять равной  $\frac{\mu H^2}{8\pi}$ , то общая энергия магнитного поля будет

$$\text{магнитная энергия} = \frac{\mu}{8\pi} \int_{\infty} H^2 d\upsilon. \quad (179)$$

Можно показать, что эта величина равна общей энергии, которая требуется для создания магнитного поля; тем самым подтверждается правильность принятого значения плотности энергии.

Из сравнения полученного выражения с ур-нием (122) видно, что выражение для магнитной энергии совершенно аналогично выражению для электростатической энергии.

**Теории.** Существуют две теории магнитных свойств материалов. Они весьма аналогичны двум теориям диэлектрических свойств, рассмотренным в гл. V. Одна теория рассматривает магнитную напряжённость **H**, создаваемую электрическим током или постоянным магнитом, как силу, возбуждающую магнетизм, а **B** как плотность магнитного потока, получающуюся в результате действия этой силы. Тогда магнитная проницаемость является величиной, показывающей, насколько легко создаётся поток в данном материале. В соответствии с этой концепцией линейный интеграл **H** называется магнитодвижущей силой. Магнитодвижущая сила рассматривается как величина, аналогичная электродвижущей силе в электрическом контуре, в котором аналогией **B** является плотность тока, а аналогией потоку — ток. Или в совершенно иной аналогии, **H** можно рассматривать аналогично напряжённости электрического поля **E**, а **B** — аналогично электрическому смещению **D**.

Благодаря аналогии знакомым представлениям, эта теория магнитных свойств очень удобна для наглядного представления магнитных полей и вполне пригодна для расчётов.

Но для теоретических целей и для правильного понимания физических процессов, лежащих в основе магнитных свойств, общепринята совершенно отличная точка зрения.

<sup>1)</sup> Таким образом, закон Ленца вытекает из ур-ний (159) и (166).



В этой другой теории существует лишь **В**. Это — магнитное поле, которое везде совпадает с **H**, если приняты во внимание *все токи*. Сюда входят и токи *внутри* атомов вещества, так же как и обыкновенные токи, создаваемые электронами между атомами проводящего тела. Рассмотрим вначале железо, поскольку оно представляет предельный случай.

Предполагается, что тело состоит из атомов, а каждый атом состоит из ядра и окружающих его электронов. Вследствие кольцевого движения электронов, образующего круговые токи внутри атома, некоторые атомы оказываются эквивалентными токам в маленьких рамках и создают магнитные поля. Это справедливо для парамагнитных материалов и ферромагнитных тел, как крайнего случая.

В обычном железе атомы ориентированы случайно и, несмотря на то, что каждый атом всегда является маленьким контуром с током, кусок железа, состоящий из большого числа атомов, в целом не является магнитом. Однако, если его поместить в постороннее магнитное поле, то на каждый атом подействует сила, стремящаяся ориентировать все атомы одинаковым образом. Тогда, в предельном случае поляризации, все внутриатомные электрические токи будут совместно усиливать магнитное поле, которое вызвало изменение их ориентации.

Это скажется на общем магнитном поле. Оно станет значительно сильнее того поля, которое может создать лишь один электрический ток во внешнем контуре; последний в основном служит лишь для ориентировки атомов железа.

**Диамагнитные материалы.** Несколько слов надо сказать о диамагнитных материалах, несмотря на то, что диамагнетизм представляет собою очень тонкое явление. Согласно предположению он является результатом таких явлений, которые можно рассматривать как токи, индуцированные внутри атомов тела.

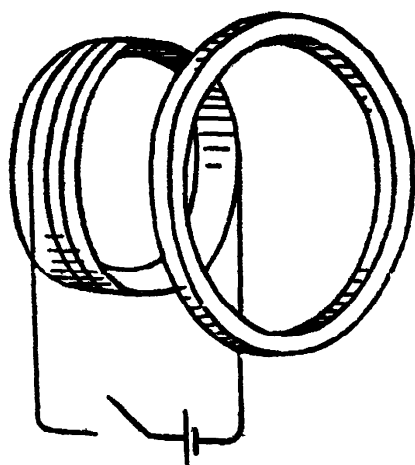


Рис. 39.

На рис. 39 изображена катушка, к которой может быть присоединена батарея, и кольцо из хорошо проводящего материала. Когда к катушке присоединяется батарея, то создается магнитное поле, которое частично пронизывает кольцо. Поле, образовавшееся в кольце, индуцирует в нём электродвижущую силу и ток; индуцированный в кольце ток ослабляет

магнитное поле, созданное катушкой. Ток, индуцированный в кольце, изготовленном из материала с идеальной проводимостью, будет течь столько времени, сколько течёт ток в катушке, и об-

щий магнитный поток всегда будет обладать меньшей напряжённостью, чем он имел бы в отсутствие кольца.

Полагают, что электроны внутри атомов ведут себя подобно кольцу рис. 39. Когда создаётся магнитное поле, их движение изменяется, создавая эквивалент размагничивающего тока. Поэтому магнитное поле в материале становится слабее, чем оно было бы в свободном пространстве. Такой материал является диамагнитным материалом.

Рассмотренное явление совершенно не зависит от ориентировки тех атомов, которые создают парамагнетизм. Можно предположить, что все материалы являются диамагнитными, но некоторые из них обладают также парамагнитными свойствами.

Последнее явление во многих случаях оказывается более заметным, чем первое, вследствие чего материал в целом оказывается парамагнитным или даже ферромагнитным.

Размагничивающий круговой ток диамагнетизма всегда настолько мал, что изменяет магнитное поле лишь на несколько миллионных.

### ЗАДАЧИ

1. Нет ли возможности *определить* напряжённость магнитного поля, как вектор, *параллельный* магнитной силе, действующей на исследуемый провод рис. 32?

2. Каково направление магнитного поля на рис. 32, если ток в исследуемом проводе течёт сверху вниз? Проверьте по ур-нию (154).

3. Если магнитный поток пронизывает катушку, имеющую несколько витков, то напряжение, индуцированное в катушке благодаря изменению потока, пропорционально числу витков. Как это отображается в ур-нии (159)? Что в данном случае является поверхностью интегрирования в этом уравнении?

4. На деревянном каркасе намотано десять витков провода в один слой; по проводу протекает ток в 5 а. Затем на первый слой намотано дополнительно ещё десять витков, при чём ток, протекающий по всем виткам, имеет прежнее направление. После увеличения числа витков ток уменьшился до 4 а.

Применив ур-ние (169) и взяв путь интегрирования так, чтобы он проходил по оси каркаса, найдите, как изменяется магнитное поле вблизи центра катушки. Начертите эскиз с указанием направления тока, направления потока и пути интегрирования в ур-нии (169).

5. Покажите, что магнитное поле внутри медного проводника с током  $i$  в точке с радиусом  $r$  равно  $\frac{2ir}{cr_0^2}$ . Радиус цилиндрического проводника равен  $r_0$ , который конечно больше  $r$ . Ток равномерно распределён по поперечному сечению проводника. Рассмотрите вопрос о единицах.

6. Найдите ротор магнитного поля задачи 5. Соответствует ли он ур-нию (171)?

7. Найдите и изобразите графически зависимость изменения магнитного вектор-потенциала вдоль радиуса, проходящего через центр проводника задачи 5. Покажите на одной кривой величину вектор-потенциала внутри и вне проводника.

8. Как связан ток намагничивания трансформатора с числом витков первичной обмотки при неизменных его размерах и неизменной величине приложенного напряжения переменного тока? Из каких уравнений вы получили этот результат?

## ПРИМЕРЫ И ПОЯСНЕНИЯ

Большинство физических соотношений, рассмотренных в предыдущих главах, нам хорошо знакомы. Всё это — простые законы электростатики, магнитного потока, стационарного тока и индуцированного напряжения. Если эти законы и выглядели необычно, то это объясняется тем, что они были даны в обобщённой

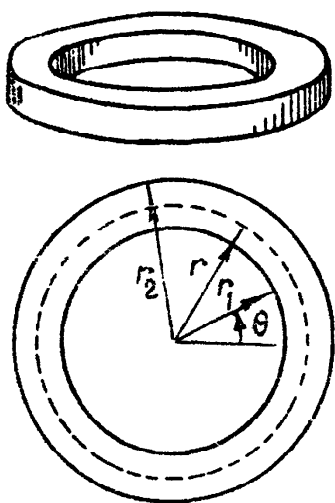


Рис. 40.

форме с тем, чтобы их можно было применять к возможно более широкому кругу условий. Обобщённые соотношения имеют весьма абстрактный характер и их значение большинству из нас не видно до тех пор, пока они не применяются к конкретным случаям. Непривычные обозначения векторного анализа не облегчают это положение, хотя они в большой мере и избавляют нас от блуждания в лабиринте дифференциальных уравнений.

Целью настоящей главы является изложение нескольких конкретных примеров. Никаких новых экспериментальных положений здесь приведено не будет.

*Пример 1.* На деревянном сердечнике, форма которого показана на рис. 40, намотана катушка, состоящая из большого числа витков тонкой проволоки. Сердечник представляет собой кольцо с прямоугольным поперечным сечением. На нём намотано  $w$  витков провода, по которому течёт ток  $i$ . Надо найти созданный ток магнитный поток и индуктивность катушки.

Для решения лучше всего применить цилиндрические координаты с осью  $z$ , направленной по оси кольца. Радиус внутренней поверхности кольца равен  $r_1$  и внешней поверхности  $r_2$ .

Вследствие симметрии тока и по самой природе магнитного поля магнитные силовые линии в этом случае будут окружностями. Будет существовать  $H_\theta$ , а  $H_r$  и  $H_z$  будут равны нулю<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Если на сердечник намотан только один слой витков провода, так что ток один раз проходит спиралью вдоль сердечника, то будет небольшая составляющая поля  $H_z$ , проходящая вертикально через пространство внутри сердечника. При использовании двухслойной намотки она может быть полностью устранена и в любой катушке ею можно обычно пренебречь.

Это положение, конечно, можно доказать, но из соображений экономии времени мы примем его без доказательства.

Чтобы найти напряжённость поля, возьмём в качестве контура интегрирования окружность радиуса  $r$ , показанную пунктиром на рис. 40.

Тогда

$$\oint \mathbf{H} ds = \frac{4\pi}{c} \int i da. \quad (169)$$

Если линейный интеграл левой части этого равенства взять по окружности радиуса  $r$ , то правая часть даёт общий ток, пронизывающий пространство внутри этой окружности. Если  $r$  меньше  $r_1$  и лежит внутри кольца, или если  $r$  больше  $r_2$ , т. е. если путь интегрирования лежит вне кольца или внутри его, то ток, проходящий внутри окружности, равен нулю. При этих условиях  $\mathbf{H}$  равно нулю и, следовательно, в рассматриваемой области нет магнитного поля.

Однако, если окружность лежит внутри катушки, как показано на рисунке, ток  $i$  проходит  $\omega$  раз через любую поверхность, ограниченную этой окружностью и, следовательно,

$$\oint \mathbf{H} ds = \frac{4\pi}{c} \omega i. \quad (180)$$

Благодаря симметрии значение  $\mathbf{H}$  постоянно вдоль всякой окружности, подобной рассмотренной, т. е. концентрической кольцу, и так как лишь  $H_\theta$  отлично от нуля, то

$$H_\theta \oint ds = 2\pi r H_\theta = \frac{4\pi \omega i}{c}, \quad (181)$$

откуда

$$H_\theta = \frac{2\omega i}{cr}. \quad (182)$$

Согласно этому уравнению магнитное поле внутри сердечника катушки неоднородно. Напряжённость поля, будучи обратно пропорциональна радиусу, имеет большее значение вблизи внутренней поверхности.

Следует отметить, что  $\int \mathbf{H} ds$  является *магнитной разностью потенциалов* (магнитный скалярный потенциал), аналогичной электрической разности потенциалов или напряжению. Магнитную разность потенциалов вдоль замкнутого контура как в уравнении (180), обычно называют *магнитодвижущей силой* (см. стр. 92).

Вычислим величину потока внутри катушки. Чтобы найти общий поток, проинтегрируем  $\mathbf{B}$  по поперечному сечению сердечника. Так как катушка намотана на деревянном сердечнике, то  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$  и искомое значение равно

$$\oint = \int \mathbf{B} da = \int H_\theta da. \quad (183)$$

Обозначив толщину сердечника (размер вдоль оси  $z$ ) через  $z_1$ , имеем

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{2\omega i}{cr} z_1 dr = \frac{2z_1\omega i}{c} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (184)$$

Теперь можно определить индуктивность катушки. По определению *индуктивность* равна

$$L = \frac{c\omega \Phi}{i}. \quad (185)$$

Множитель  $c$  появляется, когда выражение записывается в гауссовой системе единиц, как это сделано в данном случае.  $\Phi$  — это поток, пронизывающий отдельный виток провода и, следовательно, это поток в сердечнике. Подставляя выражение (184) в ф-лу (185), получаем для тороидальной катушки

$$L = \frac{c\omega \Phi}{i} = 2\omega^2 z_1 \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (186)$$

Индуктивность дана в единицах системы Гаусса, абгенри или миллимикрогенри. Символ  $\ln$  обозначает натуральный логарифм.

**Граничные поверхности.** Если электрическое или магнитное поле переходит из одной среды в другую, что имеет место, когда магнитное поле проникает в кусок железа или электрическое поле из воздуха переходит в масло, то на поверхности, разделяющей одну среду от другой, должен быть выполнен ряд специфических условий.

Рассмотрим в качестве примера электрическое поле, частично расположенное в воздухе, частично в масле, как это показано

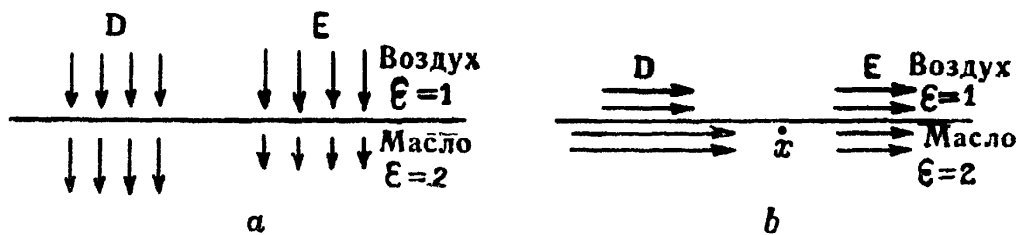


Рис. 41.

на рис. 41 (на этом рисунке напряжённость поля изображается длиной векторов  $E$  и  $D$ , а не густотой их расположения, как это обычно делается). На рис. 41а электрическое поле нормально к поверхности, разделяющей воздух ( $\epsilon = 1$ ) и масло ( $\epsilon = 2$ ).

Векторы  $D$  изображены слева. Так как опыт IV показал, что дивергенция  $D$  везде равна нулю, то величина  $D$  должна быть одной и той же непосредственно у поверхности в масле и над этой поверхностью в воздухе. Справа показаны векторы  $E$ . В масле они вдвое меньше, чем в воздухе, так как они равны  $\frac{D}{\epsilon}$ .

На рис. 41b показана та же граничная поверхность для электрического поля, параллельного поверхности. В данном случае  $E$ , как показано справа, должно быть одинаковым в масле и в воздухе. Это необходимо для того, чтобы ротор  $E$  был равен нулю на поверхности. Поэтому  $D$  в масле вдвое больше, чем в воздухе.

Необходимость равенства нулю ротора  $E$  на поверхности следует из опыта II, но её можно доказать особо для нашего частного случая. Рассмотрим малую заряжённую частицу, расположенную в масле вблизи поверхности, в точке, отмеченной буквой  $x$  на рис. 41b. Частица перемещается направо на расстояние в 1 см, оставаясь всё время у поверхности. Затем она поднимается в воздух и перемещается над поверхностью, оставаясь вблизи неё до тех пор, пока не окажется непосредственно над точкой  $x$ . Далее частица опускается в прежнее положение. При движении частицы в масле направо, работу совершает электрическое поле. При обратном перемещении частицы влево в воздухе должна быть затрачена посторонняя энергия. При поднятии частицы из масла или опускании в него, работа электрических сил равна нулю, так как в обоих случаях это движение нормально к электрическим силам и, кроме того, путь может быть сколь угодно малым. Чтобы удовлетворяться закон сохранения энергии, энергия, полученная при движении слева направо, должна быть равна энергии, затраченной при движении справа налево, а поэтому сила, действующая на частицу в масле, должна быть равна силе в воздухе. Если бы это было не так, то можно было бы придумать машину непрерывного движения (*perpetum mobile*). Но если силы равны, то согласно ур-нию (2) напряжённости электрического поля  $E$  над поверхностью раздела и под ней должны быть также равными.

Следует отметить, что ротор  $D$  не равен нулю на такой поверхности раздела. Ясно, что он равен бесконечности.

В предыдущих параграфах рассматривались электрические поля, нормальные и тангенциальные по отношению к граничной поверхности. Так как каждое поле можно разложить на составляющие нормальную и тангенциальную к граничной поверхности, то свойства любого поля можно установить, исходя из доказанных общих положений: *на граничной поверхности между двумя средами с различной диэлектрической постоянной: 1) нормальная составляющая  $D$  непрерывна, и 2) тангенциальная составляющая  $E$  непрерывна.*

Это легко объяснить с точки зрения теории поляризации диэлектриков, так как нормальная составляющая  $E$  исходит из поляризационных зарядов на поверхности масла. (В соответствии с этой теорией  $D$  является математической фикцией, которая определяется как  $D = \epsilon E$ , с тем, чтобы получить поле, которое по определению непрерывно на граничной поверхности двух сред.) Поверхностные поляризационные заряды не могут влиять на тангенциальную составляющую электрического поля, и соот-

ветственно этому тангенциальная составляющая непрерывна на поверхности раздела.

Аналогично можно показать, что нормальная составляющая плотности магнитного потока  $\mathbf{B}$  непрерывна на граничной поверхности, расположенной между материалами с различной магнитной проницаемостью, так как её дивергенция в любой точке должна быть равна нулю. Тангенциальная составляющая  $\mathbf{H}$  непрерывна на такой поверхности, если нет тока, текущего по граничной поверхности, так как при отсутствии тока ротор  $\mathbf{H}$  должен быть равен нулю.

Если ток течёт по проводнику, то ротор магнитного поля, окружающего проводник, равен нулю. Однако, внутри проводника магнитное поле имеет ротор, ибо, как было показано в предыдущей главе, ротор пропорционален плотности тока. Никогда и нигде не может быть *разрыва непрерывности* напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$  — не может быть, например, изменения скачком от конечной величины до нуля, — так как разрыв непрерывности даёт бесконечный ротор, и может иметь место лишь на поверхности с *бесконечной* плотностью тока. В предыдущей главе предполагалось, что плотность тока бесконечна в идеально проводящем материале; это является результатом идеализации, к которой можно приближаться, но которую никогда нельзя достигнуть, поскольку в природе нет идеально проводящих материалов.

Другие важные граничные условия имеются на граничной поверхности между непроводящей средой, например, воздухом и проводником, например, медным. Внутри проводника электрическое поле должно быть пропорциональным плотности тока и иметь направление, совпадающее с направлением тока. Составляющая  $\mathbf{E}$ , тангенциальная к поверхности, будет отлична от нуля внутри проводника, если по нему протекает ток. Следовательно, вне проводника, непосредственно у его поверхности, должна быть такая же тангенциальная составляющая  $\mathbf{E}$ ; если бы это было не так, то электрическое поле имело бы на этой поверхности разрыв непрерывности и бесконечную величину ротора, что невозможно.

Таким образом, мы приходим к заключению: *на граничной поверхности между двумя средами с различной проводимостью тангенциальная составляющая  $\mathbf{E}$  непрерывна.*

*Пример 2.* На рис. 42 показана угольная нить осветительной лампы устаревшей конструкции. Толщина нити показана в увеличенном масштабе с тем, чтобы можно было начертить стрелки, изображающие электрическое поле внутри проводника. По нити протекает стационарный ток. Надо найти электрическое поле.

Внутри нити плотность тока одинакова и ток везде течёт параллельно проводящей поверхности. Так как напряжённость поля пропорциональна плотности тока [ур-ние (133)] то электрическое поле направлено вдоль нити и однородно по величине.

Если нить имеет длину  $10\text{ см}$ , а приложенное напряжение равно  $110\text{ в}$ , то напряжённость электрического поля внутри нити везде будет составлять  $11\text{ в/см}$ . Это поле ни в какой степени не зависит от витков и изгибов нити. То же поле будет в любом проводе однородного поперечного сечения при стационарном токе. В проводнике, по которому не протекает ток, нет электрического поля.

Последнее утверждение может показаться противоречащим тому факту, что электрическое поле может индуцироваться в проводящем стержне, который не является частью контура и поэтому по нему не может течь стационарный ток. Но предположим, что медный стержень, показанный на рис. 43, находится в меняю-

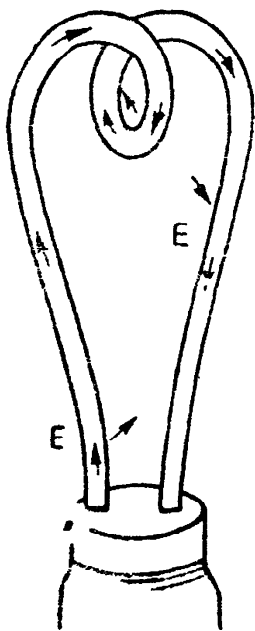


Рис. 42.

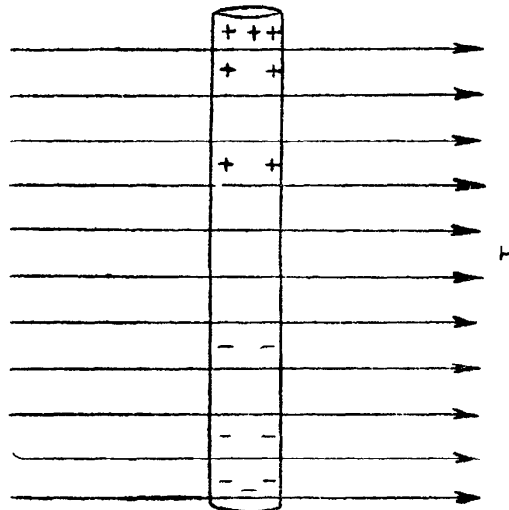


Рис. 43.

щемся магнитном поле, которое индуцирует электродвижущую силу, направленную вверх по стержню. В момент, когда магнитное поле начинает индуцировать электродвижущую силу, в меди существует электрическое поле и в течение некоторого мгновения будет течь ток.

Однако, как только на вершине стержня накопится положительный заряд, и в основании его отрицательный заряд, достаточные для создания поля, равного и противоположного индуцированному полю, и распределённые в точности так, чтобы результирующее электрическое поле было равно нулю, тотчас прекратится ток. В этом случае внутри стержня поля нет, но это не значит, что электрическое поле везде равно нулю. Конечно, будет существовать электрический поток, исходящий из вершины стержня и возвращающийся в его основание. и вольтметр (если



его провода не находятся в меняющемся магнитном поле) покажет величину индуцированной электродвижущей силы.

Вернёмся к рассмотрению нити электролампы. Электрическое поле существует также в пространстве вокруг нити. Между двумя концами нити действует разность потенциалов в 110 в, следовательно, в пространстве между ними должно быть электрическое поле. Оно исходит из заряда, расположенного на поверхности нити; этот заряд приведён в движение составляющей поля внутри нити, нормальной к её поверхности, в момент, когда к нити было приложено напряжение. Когда заряд достигнет должного стационарного распределения, нормальная составляющая поля *внутри* нити уменьшится до нуля и после этого поверхностный заряд остаётся уже постоянным.

Электрическое поле в пространстве вокруг нити достаточно сложное. Оно имеет составляющую, нормальную к поверхности, обусловленную поверхностным зарядом. Оно имеет составляющую, тангенциальную к поверхности, равную полю внутри нити, ибо, как было показано, тангенциальная составляющая электрического поля непрерывна у поверхности. Геометрия нити не проста и мы не будем пытаться получить количественное решение этой задачи; отметим просто, что линейный интеграл  $E ds$ , взятый от любой точки на нити до другой точки на нити, по любому пути, должен быть равен разности потенциалов между этими двумя точками, а напряжённость электрического поля распределяется так, чтобы это условие выполнялось. Электрическое поле в пространстве вблизи поверхности нити, в частности у концов нити, может иметь напряжённость, измеряемую тысячами вольт на сантиметр.

*Пример 3.* Когда меняется ток в тороидальной катушке примера 1, пропорционально изменяется магнитное поле, а изменяющееся магнитное поле индуцирует внутри и вокруг тороида электрическое поле. Уравнение (161) говорит, что ротор индуцированного электрического поля внутри сердечника тороида равен

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (187)$$

Интегрируя обе части этого равенства по поперечному сечению катушки и, применяя к левой части теорему Стокса, получим

$$\int [\nabla \mathbf{E}] da = \oint \mathbf{E} ds = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} da. \quad (188)$$

Второе выражение в этом уравнении является линейным интегралом электрического поля. Для наших целей выберем контур интегрирования так, чтобы он охватывал сердечник соленоида; практически он может совпадать с одним из витков обмотки, сделанной на сердечнике. Интеграл индуцированного электрического поля, взятый вдоль такого контура, равен электродвижу-

щей силе, индуцированной в одном витке катушки [как в ур-нии (159)]. Всего же мы имеем  $w$  витков. Поверхностный интеграл в правой части ур-ния (188), как следует из ур-ния (155), равен магнитному потоку в сердечнике. Таким образом, общая электродвижущая сила, индуцированная во всех  $w$  витках, равна

$$\text{электродвижущая сила} = -\frac{w}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (189)$$

Это выражение хорошо знакомо. Другая знакомая формула получается, если подставить выражение (185), являющееся определением индуктивности, в ур-ние (189),

$$\text{электродвижущая сила} = -\frac{L}{c^2} \cdot \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (190)$$

Величина  $c^2$  появилась в этом уравнении вследствие того, что в системе единиц Гаусса электродвижущая сила измеряется в статвольтах,  $i$  — в статамперах, в то время, как  $L$  — в абгенри (сантиметрах).

Отрицательный знак указывает, что когда ток увеличивается, т. е. скорость изменения тока положительна, индуцированная электродвижущая сила отрицательна и противоположна направлению тока.

*Пример 4.* Как было показано в гл. VII, изменяющееся магнитное поле индуцирует электрическое поле даже в пустоте. Это индуцированное электрическое поле способно создавать силу, действующую на любые заряженные частицы, находящиеся в области, где изменяется магнитное поле. Это свойство используется в «индукционном ускорителе»<sup>1)</sup>, в котором осуществляется разгон электронов с целью «расщепления атома».

Рассмотрим узкое эвакуированное пространство между тяжёлыми, круглыми, плоскими наконечниками железных магнитных полюсов. Эвакуированное пространство, подобно тонкому диску, имеет малый размер от основания до крышки, но велико в диаметре. Сильное магнитное поле пронизывает его от верхнего наконечника магнитного полюса к наконечнику магнитного полюса, расположенного снизу. Магнитное поле создаётся током, протекающим по большому числу витков вокруг железного ярма (рис. 44).

Допустим теперь, что ток в обмотке может увеличиться от нуля до некоторого данного значения в небольшую долю секунды ( $\frac{1}{600}$  сек); магнитное поле в эвакуированном пространстве будет увеличиваться с той же скоростью.

<sup>1)</sup> „Acceleration of Electrons by Magnetic Induction“. D. W. Kerst, *Physical Review*, v. 60, 1941, стр. 47—53.

Вследствие этого в пространстве индуцируется электрическое поле и электроны или другие заряженные частицы, попавшие в вакуированное пространство, окажутся под действием ускоряющей силы и будут двигаться по спирали с возрастающей скоростью.

В качестве первого приближения будем считать, что магнитное поле непосредственно между полюсными наконечниками однородно и падает сразу до нуля вне области, заключённой между железными пластинами. Это не вполне правильно, так как невозможно получить изменение скачком при переходе из области, где есть магнитное поле, в область, где магнитного поля нет; изменение скачком напряжённости магнитного поля подразумевает бесконечную величину ротора магнитного поля (смот-

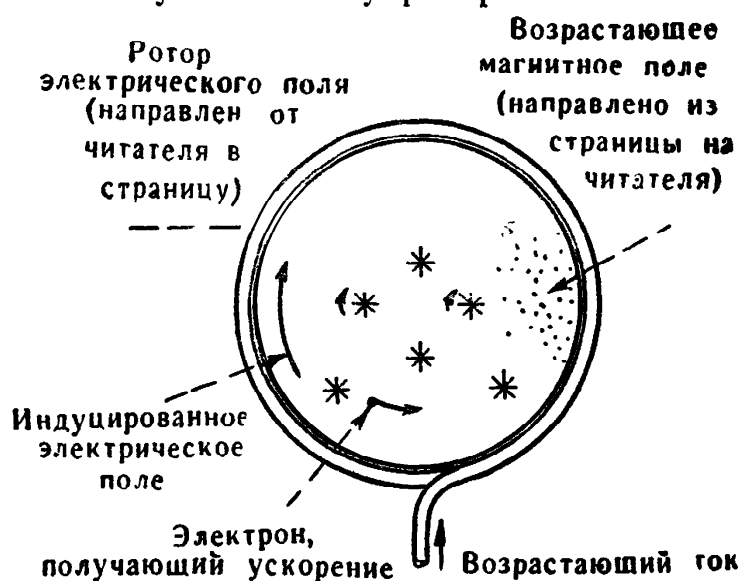


Рис. 44.

ри «измеритель ротора» гл. II). В реальном случае рассматриваемого магнитного поля между полюсными наконечниками будет происходить хорошо знакомое «выпучивание» силовых линий, соответствующее плавному уменьшению напряжённости поля до нуля при роторе, равном нулю.

Там, где магнитное поле меняется со временем, ротор электрического поля отличается от нуля [ур-ние (161)]. Следующим шагом в решении задачи будет отыскание этого электрического поля. Когда ток в витках изменяется, изменяется и магнитное поле в пространстве между полюсными наконечниками и, так как интенсивность поля возрастает, а направление не изменяется, то скорость изменения будет иметь то же направление, что и само поле. Поэтому согласно ур-нию (161) ротор  $E$  также везде одинаков и противоположно направлен. Задача заключается в отыскании электрического поля, которое создаёт такой ротор в области между магнитами и ротор, равный нулю везде за пределами этой области.

Представьте себе несколько «измерителей ротора» в виде гребных колёс, показанных на рис. 44 и вращающихся с одинаковой скоростью в одном и том же направлении. Ясно, что их вращение может быть вызвано электрическим полем, напоминающим водоворот с наибольшей интенсивностью на периферии. Определим его по направлению.

Если увеличивающееся магнитное поле создаётся током, текущим в обмотке против часовой стрелки, как показано на рисунке, то согласно правилу правой руки магнитное поле (боральное к току) будет направлено из страницы на нас. Вследствие наличия отрицательного знака в ур-нии (161) ротор электрического поля будет направлен внутрь страницы, а циркуляция электрического поля (боральная ротору), направление которой определяется правилом правой руки по направлению ротора, будет направлена по часовой стрелке. Заметим, что это то же самое направленное по часовой стрелке поле, которое индуцируется в проводе обмотки согласно закону Ленца.

В цилиндрических координатах, у которых ось  $z$  совпадает с осью магнитных полюсов, электрическое поле направлено по отрицательному направлению  $\theta$ . Предположим, что оно пропорционально  $r$

$$E_{\theta} = -Ar. \quad (191)$$

Следует найти значение  $A$ , но оно не является функцией  $r$ ,  $\theta$  или  $z$ .

Из табл. II берём ротор электрического поля

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\left(A + \frac{Ar}{r}\right)\mathbf{k} = -2A\mathbf{k} \quad (192)$$

и из ур-ния (161)

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 2A\mathbf{k} \quad \text{или} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 2A. \quad (193)$$

Определяя отсюда  $A$  и подставляя его значение в выражение (191), получаем для области между магнитными полюсами значение

$$E_{\theta} = -\frac{r}{2c} \cdot \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (194)$$

В соотношении (191) мы просто предположили, что напряжённость поля пропорциональна радиусу; справедливость этого предположения оказывается доказанной тем, что ур-ние (161) удовлетворяется, если подставить в него электрическое поле [ф-ла (194)] и заданное однородное магнитное поле.

Индукцированное электрическое поле имеет максимальное значение при радиусе  $r_0$ , равном внешнему радиусу магнитного поля. Электрическое поле не падает скачком до нуля, а по-

степенно убывает при радиусах, больших  $r_0$ , таким образом, что его ротор равен нулю. Тот же результат в несколько ином виде даёт рассмотрение краевого эффекта (магнитного поля). Чтобы определить электрическое поле во внешнем пространстве вне магнитного поля, необходимо найти поле, которое, во-первых, не имеет ротора, во-вторых, непрерывно переходит при радиусе  $r_0$  в поле, определяемое ур-нием (94), и, в третьих, равно нулю при бесконечном радиусе.

Первое и второе условия удовлетворяются при

$$E_{\theta} = -\frac{A'}{r}. \quad (195)$$

При радиусе  $r_0$  это должно быть равно выражению (194), так что

$$\frac{A'}{r_0} = \frac{r_0}{2c} \cdot \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Отсюда можно определить значение  $A'$  и тогда для внешней области получаем

$$E_{\theta} = -\frac{r_0^2}{2cr} \cdot \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (196)$$

Уравнение (196) основано на предположении о неограниченном свободном пространстве. В действительности же, конечно, магнитное ярмо и другие части установки нарушают эти идеализированные условия. Поэтому выражение (196) является более или менее точным приближением для электрического поля при радиусах, больших  $r_0$ .

Очень интересно сравнить электрические поля разобранного примера, обусловленные изменяющимся магнитным полем, с магнитными полями, рассмотренными в гл. VII и обусловленными током в длинном прямом проводе. Распределение поля внутри и вокруг проводника в точности аналогично полю, определяемому соответственно выражениями (194) и (196) <sup>1)</sup>.

Выражения (194) и (196) не являются единственно возможными решениями ур-ния (161) в рассматриваемых областях. В самом деле, к этим решениям можно добавить любое электрическое поле, не имеющее ротора, а сумма будет оставаться решением уравнения. (Безвихревое поле в данном случае аналогично постоянной интегрирования.) Но не может быть поля, которое не имеет ротора, не имеет дивергенции, равно нулю на бесконечном расстоянии и нигде не имеет бесконечной напряжённости. При этих очевидных физических ограничениях полученные решения являются единственными решениями, которые одновременно удовлетворяют уравнениям электромагнетизма и граничным условиям.

<sup>1)</sup> Аналогия объясняется тем, что эти два случая распределения поля являются аналогичными решениями уравнений Максвелла.

Одним фактором, мы, впрочем, пренебрегли. Это можно было сделать потому, что количественное значение его не существенно. Однако, в других задачах он может быть единственной важной частью решения. Речь идёт об *излучении*.

Когда меняющееся магнитное поле создаёт электрическое поле, волна электромагнитной энергии распространяется от аппаратуры во все стороны. Она уносит в пространство из «индукционного ускорителя» настоящего примера настолько малую часть общей энергии, что ею можно пренебречь.

Но не всегда можно пренебрегать излучением; в радиосвязи оно является практически важным *обязательным условием*. Теория электромагнетизма, развитая в предыдущих главах, не учитывает излучения. Она имеет дело с электрическими полями, которые являются полями *квазистационарными*, т. е. изменяющимися настолько медленно, что в любой момент времени их можно рассматривать как электростатические.

Мы продвинулись дальше в магнетизме, ибо установили, что скорость изменения магнитного поля играет существенную роль. Изменяющееся магнитное поле способно создавать электрическое поле. Максвелл подал идею, что изменяющееся электрическое поле способно аналогичным образом создавать магнитное поле. При рассмотрении этой дополнительной гипотезы мы переходим от квазистационарного случая к случаю *электродинамики*.

### ЗАДАЧИ

1. На длинном деревянном цилиндре намотана катушка из большого числа витков тонкой проволоки. На сантиметр длины приходится  $w$  витков. По каждому витку катушки протекает ток  $i$ . Радиус катушки  $r$ . Покажите, что индуктивность на единицу длины катушки равна  $39,5 r^2 w^2$  абгенри на сантиметр. (Замечание: это справедливо для бесконечно длинной катушки, но даёт погрешность меньшую 10%, если длина катушки превышает её диаметр более, чем в четыре раза).

2. Катушка намотана на сердечнике как в примере 1 на стр. 102, но сердечник представляет собой квадратную раму, а не кольцо. Кроме того, сердечник железный, а не деревянный. Ответьте точно, можно или нельзя полностью заключить магнитный поток в железо или он будет «срезать углы» в воздухе.

3. Повторите пример 1 стр. 102 для катушки, намотанной на тороидальном сердечнике с круглым поперечным сечением. Найдите магнитный поток в сердечнике и индуктивность. Сравните вычисленную индуктивность со значением, взятым из справочника.

4. Электрическое поле проникает из воздуха в масло ( $\epsilon = 2$ ). Поле в воздухе наклонено под углом  $45^\circ$  к поверхности масла. Каков угол между поверхностью и полем в масле? Найдите угол как для  $D$ , так и для  $E$ .

5. Докажите, что поле, определяемое выражением (195), не имеет ротора (как это утверждается на стр. 112).

6. Между двумя большими параллельными медными листами, находящимися на расстоянии 10 см друг от друга, действует разность потенциалов 120 в. Кроме того, в каждом листе течёт ток: он течёт направо в нижнем листе и влево в верхнем. Падение напряжения  $ir$  (точнее говоря, отношение плотности тока к проводимости) везде равно 3 в/см. Найдите электрическое поле для трёх областей: 1) над обеими пластинами, 2) под обеими пластинами и 3) между пластинами.

7. Каждая пластина задачи 6 имеет толщину 0,01 мм. Найдите магнитное поле в тех же трёх областях.

## ГИПОТЕЗА МАКСВЕЛЛА

Теперь мы располагаем экспериментальными данными девяти опытов, описанных в предыдущих главах, которые дают полное представление об электрическом и магнитном полях. Ниже приведена сводка результатов этих опытов, к которой добавлены два предположения, являющиеся, в сущности, определениями:

Опыт I показал, что существует электрическое поле. При описании опыта дано определение этому полю.

Опыт II показал, что электрическое поле потенциально (ротор равен нулю).

Опыт III показал, что дивергенция электрического поля пропорциональна плотности заряда.

Опыт IV выявил влияние диэлектрической среды.

Опытом V установлен закон Ома.

Опыт VI показал, что существует магнитное поле. Дано определение этому полю.

Опыт VII показал, что изменение магнитного поля индуцирует электрическое поле.

Опыт VIII показал, что магнитоэлектрическое поле соленоидально (дивергенция равна нулю).

Опыт IX показал, что ротор магнитоэлектрического поля пропорционален плотности тока.

Предполагается, что дивергенция динамического электрического поля пропорциональна плотности заряда (это доказано в опыте III лишь для *статического* электрического поля).

Предполагается, что дивергенция динамического магнитного поля равна нулю (это доказано опытом VIII лишь для *статического* магнитного поля).

Данные, полученные из описанных опытов, являются исходными для дальнейшего рассмотрения электромагнетизма. Каждый из этих опытов, или какой-либо другой опыт, дающий аналогичные результаты, необходим для любого развития электромагнитной теории.

Сведения, касающиеся электрического и магнитного полей, получены учёными приблизительно в середине девятнадцатого века. Эти сведения не были облечены в математическую форму, в которой они приведены здесь, и само собой разумеется, что весьма общие соображения об электрическом и магнитном поле, выдвигаемые новой идеей Фарадея, принимались в то время большинством учёных с сомнениями. В связи с этим разгорелась

большая дискуссия между сторонниками «действия на расстоянии» и теми, кто обратился к вновь предложенной «теории поля». В течение большей части века электрическое и магнитное поля вычислялись и изображались графически. Фарадей был первым (согласно Максвеллу), кто действительно убедился в существовании электромагнитного поля. До Фарадея поля рассматривались, как удобное средство наглядного представления распределения сил, являющихся результатом электрического и магнитного действия. Но Фарадей, как и мы, полагал магнитное поле фактически существующим и вызывающим действие магнитных сил.

Со времени работ Ампера (1820—1825 гг.) считалось, что провод, обтекаемый током, возбуждает силу в другом проводе, несущем ток, и при этом не принималось во внимание наличие какой-либо промежуточной среды и не учитывалась её роль в передаче силы. Это была теория дальнего действия, логически следовавшая из известного закона притяжения Ньютона, который был веком старше и являлся общепризнанным. Закон Ньютона предполагал действие на расстоянии и не нуждался в рассмотрении какой-либо среды, передающей силу тяготения. Поэтому было вполне естественным, что учёные-электрики начала 19-го века последовали этому знаменитому примеру.

Фарадей, однако, постиг физическую реальность электрического и магнитного полей, а Максвелл облёк её в форму математических соотношений. Именно Максвелл указал на то, что «ток смещения» [как в нашем ур-нии (145)] упрощает и совершенствует математическую систему. Далее, Максвелл сделал следующее в высшей степени замечательное предположение. Известно из опыта, что ток *проводимости* создаёт магнитное поле; математически *общий* ток удобнее всего выражать в виде суммы тока проводимости и тока смещения, поэтому возникает вопрос: не создает ли также и ток *смещения*, подобно току проводимости, магнитное поле. Во времена Максвелла экспериментальная техника не давала возможности с помощью непосредственного исследования подтвердить или опровергнуть это положение, так как подлежащие исследованию величины очень малы. Но эта гипотеза привела к фундаментально важному заключению, ибо Максвелл показал, что если она справедлива, то энергия должна передаваться в виде электромагнитных волн.

Теория дальнего действия предполагала, что электрическое действие мгновенно появляется во всех точках, как бы они ни были удалены. Теория Максвелла, наоборот, требует, чтобы энергия передавалась с помощью волн, распространяющихся с конечной скоростью. Эту скорость распространения волн можно вычислить. Возможно, что некоторое экспериментальное подтверждение теории можно было бы получить, изучая скорость распространения электромагнитных возмущений. Прежде чем рассмотреть экспе-



риментальные основания мы последуем за рассуждениями Максвелла, которые приводят к электромагнитным волнам.

Согласно гипотезе Максвелла (в общей формулировке) при изменении электрического поля создаётся магнитное поле, вызванное током проводимости и током смещения. В ур-нии (171), которое гласит

$$[\nabla \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \iota, \quad (171)$$

под плотностью тока, согласно Максвеллу, следует понимать плотность общего тока, и если выражение (145) подставить в ур-ние (171), то получим, что

$$[\nabla \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \left( \gamma \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c} \left( 4\pi \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (197)$$

Это одно из так называемых *уравнений Максвелла*. Вторым уравнением является выражение (161) гл. VII

$$[\nabla \mathbf{E}] = - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (161)$$

Остальные два фундаментальные уравнения поля имеют следующий вид:

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad (164)$$

$$\nabla \mathbf{D} = 4\pi \rho. \quad (93)$$

Все эти уравнения являются основными уравнениями электромагнитной теории. Они приведены для облегчения справок в табл. III (внутренняя сторона обложки).

Следует отметить, что уравнения Максвелла приобретают великолепную простоту и симметрию для случая свободного пространства, в котором отсутствуют заряды, нет проводников и нет диэлектрических и магнитных материалов.

В свободном пространстве:

$$[\nabla \mathbf{H}] = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (198)$$

$$[\nabla \mathbf{E}] = - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (199)$$

$$\nabla \mathbf{H} = 0, \quad (200)$$

$$\nabla \mathbf{E} = 0. \quad (201)$$

Рассмотрим ещё раз физический смысл этих уравнений. Уравнение (198) говорит, что изменяющееся электрическое поле создаёт магнитное поле, а ур-ние (199) показывает, что изменяющееся магнитное поле создаёт электрическое поле. Последнее

из этих соотношений характеризует знакомый принцип, используемый в трансформаторе. Первое соотношение является гипотезой Максвелла, которая говорит, что ток смещения, так же, как и ток проводимости, способен создавать магнитное поле. Уравнение (198) не содержит член, учитывающий магнитное поле, создаваемое реальным током проводимости, так как оно записано в упрощённом виде, справедливом лишь для свободного пространства, где не может быть токов проводимости; уравнение (197) является полным уравнением и такой член содержит.

Интересно, в частности, применить уравнения (198) и (199) для рассмотрения распространения электромагнитных волн. Легко видеть прежде всего, что поскольку изменяющееся электрическое поле создаёт изменяющееся магнитное поле, которое вновь создаёт электрическое поле, создающее в свою очередь опять магнитное поле и т. д., то, следовательно, при любом электрическом или магнитном возмущении начинается какой-то ряд энергетических превращений. Энергия переходит из электрического поля в магнитное и обратно в электрическое и так до бесконечности. Если (как это действительно имеет место) магнитная энергия появляется не только в том самом месте пространства, где была электрическая энергия, из которой она произошла, но и несколько впереди этого места, и электрическая энергия, получившаяся из этой магнитной энергии, опять-таки несколько опережает её в пространстве и т. д., так что энергия, переходя из одной формы в другую, кроме того, распространяется в пространстве, то естественно предполагать, что в результате получится бегущая волна электромагнитной энергии.

Рассмотрим процесс, до некоторой степени аналогичный этому. Пусть каким-то способом, искусственно, вызвано вертикальное колебательное движение небольшого количества воды в середине озера. Такое движение можно создать, выплеснув в озеро ведро воды. Какой бы ни был характер возмущения, подъём и опускание поверхности воды в середине озера будет иметь колебательный характер. Однако, невозможно, чтобы вода, вылитая из ведра, колебалась независимо от окружающей её воды. Периодически появляющиеся избыточное и недостаточное давления передаются окружающей воде, которая вследствие этого получает энергию и постепенно приходит в движение. Придя в волнообразное движение, она также передаёт энергию следующим областям. Благодаря такому процессу волна распространяется по поверхности озера.

Основная причина существования водяных волн заключается в следующем: движение и давление данного объёма воды зависят от движения и давления воды, окружающей этот объём, и поэтому, когда произведено возмущение в данном объёме воды, энергия передаётся окружающей воде.

Основная причина существования электрических волн весьма аналогична этому. Изменяющееся магнитное поле индуцирует

электрическое поле как в той области, где изменяется магнитное поле, так и в окружающем пространстве; подобно этому изменяющееся электрическое поле создаёт магнитное поле в той области, где происходит его изменение, а также в окружающем пространстве<sup>1)</sup>. Соответственно этому, когда происходит возмущение электрического или магнитного состояния в данной области пространства, возмущение не может ограничиться этим пространством. Изменяющиеся поля внутри этой области будут индуцировать поля также в окружающих областях, а те в свою очередь, в следующих областях окружающего пространства, и, таким образом, энергия будет распространяться во все стороны. Поскольку этот процесс продолжается, образуются волны, передающие электромагнитную энергию.

Если имеется избыток электромагнитной энергии в неограниченном пространстве, то он не может находиться в покое, совершенно так же, как и не может быть в неподвижном состоянии холмик воды на поверхности озера. Он не может просто исчезнуть. Он может лишь вызвать волну, бегущую до тех пор, пока не будет потеряна её энергия.

Чтобы показать, что это является процессом, вытекающим из уравнений Максвелла, выведем из них так называемые *волновые уравнения*. Мы исходим из двух уравнений, каждое из которых содержит как  $E$ , так и  $H$ , и первый наш шаг при совместном решении этих уравнений должен заключаться в том, чтобы исключить одну из переменных и оставить другую. Исключим  $H$  и тем самым получим уравнение, в котором переменными будут лишь  $E$  и время. Такое уравнение легче анализировать.

Прежде чем идти дальше, следует заметить, что уравнения Максвелла являются уравнениями в частных производных. Например, ур-ние (199) представляет собой равенство пространственной производной электрического поля (ротора) и производной по времени магнитного поля. Поэтому нельзя ожидать получения какого-либо единственного и простого решения, вообще не свойственного системе дифференциальных уравнений в частных производных. Как во всех задачах с такими уравнениями, существенную роль играют граничные условия.

Выше указывалось, что согласно ур-нию (198) изменяющееся электрическое поле создаёт магнитное поле. Строго говоря, из уравнения следует, что изменяющееся электрическое поле создаёт пространственную производную (ротор) магнитного поля.

---

<sup>1)</sup> Может быть будет полезным представить себе это следующим образом: ток, текущий в проводе, создаёт магнитное поле в проводе, но он также создаёт магнитное поле в пространстве, окружающем провод, в пространстве, где никакого тока нет.

Аналогично ток смещения (являющийся результатом изменяющегося электрического поля) создаёт магнитное поле в области, где существует ток смещения (где изменяется электрическое поле), а также в окружающем пространстве.

Очевидно, однако, что если магнитное поле имеет ротор, отличный от нуля, и, следовательно, магнитная напряжённость меняется в пространстве от точки к точке, то он не может быть везде равным нулю. Так как ротор  $\mathbf{H}$  не может быть отличным от нуля, если  $\mathbf{H}$  равно нулю, то можно уверенно утверждать, что изменяющееся электрическое поле создаёт магнитное поле.

Теперь можно легко продолжить совместное решение ур-ний (198) и (199). Прежде всего, беря ротор от обеих частей равенства (199), получим

$$\left[ \nabla [\nabla \mathbf{E}] \right] = -\frac{1}{c} \left[ \nabla \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right]. \quad (202)$$

Требуется подчеркнуть, что в правой части этого уравнения ротор, являющийся частной производной по расстоянию, берётся от частной производной по времени.

Из математики хорошо известно, что очерёдность выполнения операций частной производной не играет роли, и поэтому

$$\left[ \nabla [\nabla \mathbf{E}] \right] = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \mathbf{H}]. \quad (203)$$

(Если это не ясно, то найдите ротор в декартовых координатах.)

Но ротор  $\mathbf{H}$  известен из ур-ния (198) и его можно подставить в ур-ние (203). Тогда получим

$$\left[ \nabla [\nabla \mathbf{E}] \right] = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (204)$$

Как и требовалось, это уравнение содержит лишь  $\mathbf{E}$ , но его можно ещё упростить.

Левая часть ур-ния (204) есть ротор от ротора вектора. Можно показать, что ротор от ротора любого вектора равен градиенту дивергенции этого вектора минус лапласиан. Это является общим математическим соотношением. В самом деле, оно аналогично ур-нию (28) на стр. 25. Записывая его символически, имеем

$$\left[ \nabla [\nabla \mathbf{A}] \right] = \nabla (\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (205)$$

Если эту теорему применить к ур-нию (204) для магнитного поля, оно упростится благодаря тому, что дивергенция электрического поля в свободном пространстве везде равна нулю, и первый член выражения выпадает. Мы получим просто

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (206)$$

Некоторые читатели в ур-нии (206) узнают знакомую форму волнового уравнения. Остальным природа этого уравнения ста-

нет яснее, если векторные величины записать в декартовых координатах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

Если взять простой частный случай, когда  $E_x$  и  $E_z$  равны нулю, а  $E_y$  является лишь функцией  $x$  и не зависит от  $y$  и  $z$ , то ур-ние (207) примет вид

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0, & E_z &= 0 \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

Каждое из ограничений, приведших к ур-нию (208), имеет физический смысл, который будет рассмотрен в следующей главе.

Уравнение (208) является простейшей формой дифференциального уравнения бегущей волны. Его решение имеет вид

$$E_y = f(x - ct), \quad (209)$$

где  $f(x - ct)$  — произвольная функции величины  $(x - ct)$ . [У ур-ния (208) есть также другие решения, одним из которых является  $f_2(x + ct)$ . Этими решениями мы не будем сейчас интересоваться]. Чтобы убедиться, что выражение (209) представляет решение ур-ния (208), его надо подставить в это уравнение и выполнить указанные операции дифференцирования (см. задачу 5).

Теперь необходимо показать, что ур-ние (209) описывает поперечную волну постоянной величины и формы, бегущую в положительном направлении вдоль оси  $x$  со скоростью  $c$ . Читателю, не знакомому с этим, полезно задаться определёнными функциями  $(x - ct)$  и начертить  $f(x)$  для ряда последовательных значений времени.

Рассмотрим, например, следующий частный случай ур-ния (209), в котором функция принята синусоидальной,

$$E_y = \sin(x - ct).$$

На рис. 45 изображён один цикл этой волны, построенный в виде функции от  $x$  для нескольких различных значений вре-

мени. Другими словами, если бы волна при своём распространении в пространстве была видна, то рис. 45 представлял бы собой серию последовательных моментальных снимков её, сделанных в моменты, когда  $ct$  равно  $0$ ,  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  и  $\frac{\pi}{2}$ . Из уравнения явствуется, что все кривые должны быть синусоидальными, одинаковой формы и амплитуды. Но кривая, для которой  $ct = \frac{\pi}{6}$  должна быть смещена по отношению к кривой для  $ct = 0$ , и все соответственные величины на этой кривой будут появляться при значениях  $x$ , больших на величину  $\frac{\pi}{6}$ . Иначе говоря, чтобы сохранить неизменной величину, стоящую в круглых скобках.

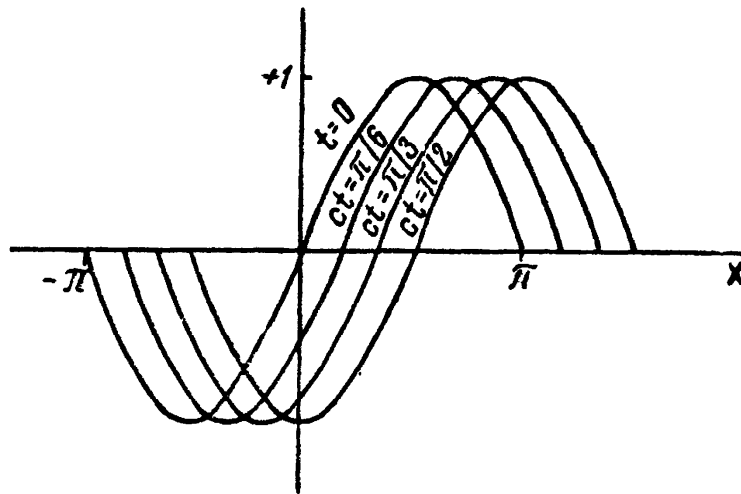


Рис. 45.

написанного уравнения, и иметь прежнее значение  $E_y$ , надо увеличивать  $x$  с увеличением времени. В результате получается волна, движущаяся с течением времени слева направо. Время и расстояние связаны между собой величиной  $c$ , играющей роль скорости. (Тем не менее необходимо отметить, что электрическое поле не движется со скоростью  $c$ , оно просто изменяется таким образом, что если бы было видимым, то мы наблюдали бы волны, движущиеся с этой скоростью.)

Волна, определяемая ур-нием (209), является *поперечной*, потому что электрическое поле  $E_y$  направлено по оси  $y$  и волна распространяется в направлении оси  $x$ .

Уравнение (206) получено путём исключения  $\mathbf{H}$  и сохранения  $\mathbf{E}$  в ур-ниях (198) и (199). Если поступить обратно, т. е. исключить  $\mathbf{E}$  и оставить  $\mathbf{H}$ , мы получим аналогичное волновое уравнение для магнитного вектора в свободном пространстве

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (210)$$

Решением этого уравнения является бегущая волна  $\mathbf{H}$ .

Ясно, что невозможно получить электрическое возмущение, не получая также и магнитного, и наоборот. Таким образом, всякая электромагнитная волна имеет электрическую часть и магнитную часть, распространяющиеся совместно. Существование одной части без другой было бы аналогично водяной волне, в которой движение происходило бы без смещения или смещение без движения. Несмотря на то, что можно записать отдельные волновые уравнения относительно  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , они представляют собой физически неразделимые величины.

Учёт того обстоятельства, что решением электромагнитных уравнений является бегущая волна, привёл Максвелла к очень интересному предположению. Прежде всего, если можно показать, что электромагнитные волны существуют, то тем самым будет доказана гипотеза Максвелла о способности тока смещения создавать магнитное поле, так как без этой гипотезы не может быть получено волновое решение. Это было бы аналогично озеру, в котором вода имеет вес, но не имеет массы; в этом случае волны не могли бы существовать.

Если электромагнитные волны существуют, то они должны распространяться в свободном пространстве со скоростью  $c$ , что видно из ур-ния (209). Но  $c$  является известной величиной — постоянной, определяющей размерности. Она равна отношению электромагнитной единицы тока к электростатической единице тока. Тщательным измерением тока и напряжения в лаборатории, с помощью уравнивания электростатических и магнитных сил Максвелл (примерно в 1865 г.) нашёл, что численное значение  $c$  в метрической системе составляет несколько меньше, чем  $3 \cdot 10^{10}$ . Таким образом было установлено, что если электромагнитные волны существуют, то они должны распространяться со скоростью около 300 000 км в секунду.

Что собой представляет среда, в которой существуют электрические волны? Во времена Максвелла было общепринятым мнение, согласно которому обычный видимый свет является волновым движением в световом эфире, эфире, который заполняет собой всё пространство и все тела, не имеет веса, но обладает замечательным свойством эластичности, позволяющим поперечным волнам распространяться в нём. Волновые уравнения Максвелла показывают, что электромагнитные возмущения распространяются в виде поперечных волн в некоторой подобной среде. Не является ли свет просто формой электрических волн?

Фарадей за несколько лет до этого предполагал эту возможность и указывал, что если один бесконечный и всепроникающий невесомый эфир требует сильного напряжения нашего воображения, то представление о двух одновременно существующих бесконечных, всепроникающих и невесомых эфирах, одного для света, а другого для электричества, выходит за пределы всякого легковерия. Основываясь только на этом, он подозревал, что свет является электрическим явлением.

Максвелл имел более существенные основания, чтобы прийти к тому же заключению, так как он, собрав все лучшие измерения скорости света в вакууме, нашёл, что среднее из всех этих значений, имеющих в его распоряжении, было изумительно близким к 300 000 км в секунду, что равно скорости электрических волн, предсказанной лабораторными измерениями электрических единиц.

Это доказывало справедливость гипотезы Максвелла, и по меньшей мере делало весьма вероятным предположение, что свет действительно является электрической волной.

Хотя Максвелл и пришёл к этим заключениям, многие учёные с ним не соглашались, пока Герц, приблизительно 25 лет спустя, не доказал физическое существование электромагнитных волн. Он завершил своё доказательство, продемонстрировав интерференцию, отражение и рефракцию электромагнитных волн. После этого уже нельзя было больше сомневаться в том, что электромагнитная энергия распространяется в виде волнового движения.

### ЗАДАЧИ

1. Запишите уравнения Максвелла (198) и (199) в прямоугольных координатах. Приравняв подобные члены, получите три скалярных уравнения [аналогично уравнениям (321) стр. 184].

2. Докажите справедливость равенства (205), записав его в декартовых координатах.

3. Найдите лапласиан  $\nabla^2$ , аналогичный уравнению (206), но применимый к области, где  $\epsilon$  и  $\mu$  больше единицы. Какова скорость электромагнитной волны в такой среде? Проводимость считайте равной нулю.

4. Распространите задачу 3 на случай проводящей среды.

5. Докажите, что уравнение (209) является решением волнового уравнения (208). Сложная функция  $f(x-ct)$  дифференцируется согласно методам, описанным в книгах по анализу.



## Глава X

### ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

**Общие положения.** Свет, создаваемый какой-либо точкой на солнце, излучается во всех направлениях и распространяется в виде сферической волны. Эта волна в конечном счёте достигает земли, где, в наших лабораториях, можно её наблюдать и измерять. Достигшая нас часть волны проявляет себя как плоская волна.

Это — неточность, обусловленная ограниченностью размеров лаборатории (или в лучшем случае размеров земли) и тем, что мы можем наблюдать лишь очень малую часть всей сферической волны. Так же как океан кажется плоским человеку, который может видеть лишь на несколько миль вокруг себя, так и волна кажется плоской наблюдателю, исследующему лишь малую её часть.

То же самое можно сказать применительно к радиоволнам. С точки зрения передающей антенны волна излучается во всех направлениях. Само собой разумеется при решении практических задач важно учесть диаграмму направленности. Но с точки зрения приёмной антенны любая волна, пришедшая от станции, расположенной на расстоянии в несколько километров, практи-

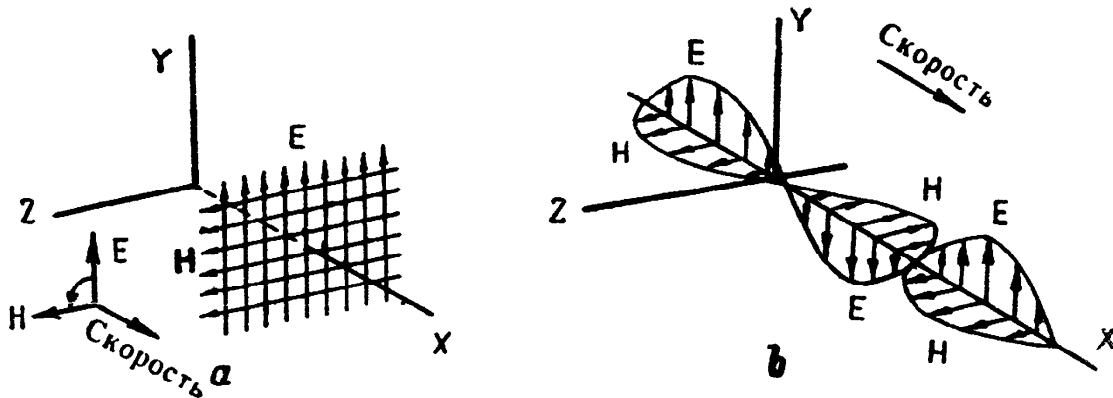


Рис. 46.

чески является плоской волной. (При этом утверждении не учитываются некоторые явления, которые могут усложнить картину, как например, влияние земли или отражение от ионосферы.)

Рассмотрим простой пример плоской волны. На рис. 46а показано поперечное сечение плоской волны. Электрические и магнитные векторы изображены в плоскости, параллельной плоско-

сти  $y - z$ . Волна распространяется слева направо вдоль оси  $x$ ; она заполняет всю область, изображённую на рисунке; но на рисунке изображено лишь одно её сечение. Электрическое поле вертикально, оно однородно во всей плоскости по направлению и по величине.

**Электрическое поле.** Мы должны математически описать плоскую волну. Она, как все электромагнитные волны, прежде всего должна удовлетворять волновому уравнению

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (206)$$

Далее, поскольку электрическое поле направлено параллельно оси  $y$ , то

$$E_x = 0 \quad \text{и} \quad E_z = 0. \quad (211)$$

Наконец, предположим, что напряжённость электрического поля не меняется от точки к точке в плоскости волны, при изменении  $y$  или  $z$ . Таким образом,

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial E}{\partial z} = 0. \quad (212)$$

Уравнение (206) можно разложить на три уравнения в декартовых координатах, аналогично уравнениям (207) на стр. 120. Если выполнить это и ввести упрощающие условия (211) и (212), то волновое уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (213)$$

Решение этого уравнения <sup>1)</sup> и будет математическим выражением; описывающим нашу волну.

Полное волновое решение уравнения (213) будет

$$E_y = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (214)$$

Первая часть этого решения была исследована в гл. IX и представляет собой бегущую волну, распространяющуюся в направлении оси  $x$ , как показано на рис. 45. Функция  $f_1$  может быть любой функцией и зависит от типа возмущения, вызвавшего волну. Большинство радиоволн меняется приблизительно по синусоидальному закону и для них  $f_1$  является синусоидальной или косинусоидальной функцией от  $(x - ct)$ .

Вторая часть решения также выражает бегущую волну, но она представляет собой волну, распространяющуюся в обратном направлении. Следовательно, полное решение описывает две бе-

<sup>1)</sup> Следует отметить, что это уравнение идентично уравнению (208), которое получено при математических предположениях, аналогичных условиям (211) и (212), но тогда мы не давали ему физической интерпретации.

гущие волны, одновременно<sup>1)</sup> распространяющиеся в разных направлениях в каждой области пространства. Уравнение показывает, что эти волны распространяются независимо друг от друга. Сейчас для удобства мы положим  $f_2 = 0$ . Тогда останется лишь чисто бегущая волна. До тех пор, пока мы не рассматриваем отражение волн, нам не нужно обращаться ко второй части решения.

**Магнитное поле.** До сих пор мы анализировали лишь электрическую часть волны. Её должна сопровождать магнитная часть, которую можно определить из электрической с помощью уравнений Максвелла. Общий метод заключается в следующем. Одно из уравнений Максвелла (табл. III) гласит

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c[\nabla \mathbf{E}]. \quad (215)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  известно, и его ротор может быть найден. Этим определится производная по времени от  $\mathbf{H}$ . Тогда интегрирование по времени даёт  $\mathbf{H}$ .

Такое решение для магнитного поля может привести в общем случае к довольно громоздким выражениям. Более наглядным оно получается при рассмотрении частного вида волны. Уже отмечалось, что обычно встречающиеся в практике волны приблизительно синусоидальны. Поэтому рассмотрим волну, электрическое поле которой описывается следующими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= e_m \sin \alpha(x - ct) \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

Легко видеть, что это согласуется с уравнением (214), если задать в нём вертикальную составляющую электрического поля в виде функции от  $(x - ct)$ . Таким образом, эта функция является решением волнового уравнения. Коэффициенты  $e_m$  и  $\alpha$  могут иметь любые значения. С математической точки зрения это просто произвольные постоянные. Физически первый из них определяет амплитуду волны и последний (называемый *постоянной сдвига фазы*) определяет частоту синусоидальных изменений волны. Такая синусоидальная волна показана на рис. 46 *b*.

Первый шаг при определении магнитного поля сводится к отысканию ротора электрического поля. Это просто сделать в част-

<sup>1)</sup> Можно прибавить в уравнение (214), являющееся решением уравнения (213), ещё другие члены. Можно прибавить постоянный член и члены, содержащие либо  $x$ , либо  $t$  в первой степени, так как производные второго порядка всех этих членов равны нулю. Однако, эти члены не соответствуют волновым процессам и их можно здесь не рассматривать.

ном случае рассматриваемой волны. В общем случае ротор равен

$$[\nabla\mathbf{E}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Однако, если учесть условия (211) и (212), то выражение для ротора получается в следующем простом виде

$$[\nabla\mathbf{E}] = \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{k}. \quad (217)$$

Для случая же, когда электрическое поле определяется ур-нием (216),

$$[\nabla\mathbf{E}] = e_m \alpha \cos \alpha(x - ct) \mathbf{k}. \quad (218)$$

Подставляя эту величину ротора в ур-ние (215), получим

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c e_m \alpha \cos \alpha(x - ct) \mathbf{k} \quad (219)$$

и, интегрируя, находим для магнитного поля

$$\mathbf{H} = e_m \sin \alpha(x - ct) \mathbf{k}. \quad (220)$$

Следовательно, магнитное поле направлено по оси  $z$  и равно

$$H_z = e_m \sin \alpha(x - ct). \quad (221)$$

Сравним теперь электрическую и магнитную составляющие волны, выражаемые ур-ниями (216) и (221). Они идентичны по форме и в Гауссовой системе единиц равны по величине, но взаимно перпендикулярны по направлению. Как изображено на рис. 46а и б электрические и магнитные поля взаимно перпендикулярны и оба перпендикулярны к направлению распространения волны.

На рис. 46а показаны электрические и магнитные силовые линии. Во всей плоскости, изображённой на рисунке, как  $\mathbf{E}$ , так  $\mathbf{H}$  однородны. Если плоскость, изображённую на рисунке, представить себе неподвижной в пространстве, то  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в этой плоскости будут меняться со временем. Если, с другой стороны, представить себе, что плоскость движется вдоль оси  $z$  со скоростью света, то  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в этой плоскости будут неизменными. Именно это обстоятельство является отличительным и определяющим свойством *плоской волны*.

На рис. 46б дано графическое представление синусоидальной волны. Она распространяется в положительном направлении вдоль оси  $x$ . Показаны векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , при чём каждая стрелка выражает электрическую и магнитную напряжённость по всей плоскости, в которой расположена данная стрелка. Длина каждого вектора показывает силу поля. Поля меняются синусои-

дально вдоль оси  $x$ , и если вспомнить, что вся совокупность волн двигается вдоль оси  $x$ , то станет ясно, что электрическая и магнитная напряжённости в любой фиксированной точке изменяются синусоидально со временем.

Ни рис. 46а, ни рис. 46б не дают полного представления о волне. Чтобы показать волну в трёхмерном пространстве, потребовалась бы комбинация этих диаграмм, показывающих распределение электрического и магнитного полей во многих плоскостях. Даже это дало бы лишь картину волны для данного мгновения и не отражало бы её движение. Поэтому надо призвать на помощь воображение, чтобы составить себе полное представление о картине, которую нельзя изобразить на бумаге.

**Поляризация.** Рассматриваемая волна является плоской волной. Она является также поляризованной волной. Если при прохождении волны электрический вектор осциллирует, но сохраняет неизменное направление, то такую волну называют поляризованной. Математически ур-ние (211) указывает, что волна — поляризованная, а ур-ния (211) и (212), вместе взятые, определяют волну как плоскую и поляризованную. В общем случае, когда проходит неполяризованная волна, электрический и магнитный векторы изменяют как своё направление, так и величину. (В известном примере поперечных волн, распространяющихся вдоль натянутой верёвки, волна является поляризованной, если колебания верёвки происходят в одной плоскости.)

Обычно радиоволны, приходящие к приёмной антенне, так поляризованы, что электрический вектор вертикален. Это объясняется тем, что электрическое поле, создаваемое обычной радиоантенной, вертикально (во всяком случае вблизи поверхности земли). Напротив, свет обычно не поляризован; но если он проходит через некоторые вещества, которые отражают, преломляют или поглощают одну составляющую колебаний, но не препятствуют прохождению другой, то свет оказывается поляризованным<sup>1)</sup>.

**Мощность и вектор Пойнтинга.** Мы рассмотрели электрическое и магнитное поля волны. Другим важным вопросом, связанным с распространением волн, является вопрос о движении энергии в пространстве. Очевидно, что бегущая волна несёт с собой энергию, и, в частности, радиоволна несёт энергию от передатчика к приёмнику.

Когда волна проходит через воображаемую в пространстве плоскость, её энергия проходит через эту поверхность и в любой

<sup>1)</sup> В оптике плоскостью поляризации называют плоскость, параллельную направлению распространения, в которой лежит *магнитный* вектор. Такое определение произвольно и принято до того, как была обнаружена электромагнитная природа света. Наоборот, в радиотехнике обычно определяют поляризацию волны по направлению *электрического* вектора. Чтобы избежать путаницы, вследствие этой несогласованности, надёжнее всего определять поляризацию, указывая данный вектор, как это было сделано здесь.

момент на каждый квадратный сантиметр поверхности будет приходиться некоторый поток мощности. Эту величину мощности на единицу площади, выражаемую в системе единиц Гаусса в эргах в секунду на квадратный сантиметр, обозначим буквой  $S$ . Произведение  $Sa$  выражает мощность, проходящую в данный момент через площадь  $a$ .  $S$  является векторной величиной и называется вектором Пойнтинга, по имени математика девятнадцатого века. Если нарисовать линии векторного поля  $S$ , то они будут показывать течение электромагнитной энергии. Поле вектора Пойнтинга оказывается в высшей степени полезным в электродинамике, а математическая запись вектора Пойнтинга значительно проще, чем это можно предполагать.

Рассмотрим некоторую область пространства, заключённую внутри воображаемой поверхности. Скорость, с которой вытекает электромагнитная энергия из этой области, определяется интегрированием  $S$  по ограничивающей поверхности. Таким образом

$$\text{выходящий поток мощности} = \oint S \cdot da. \quad (222)$$

Но если энергия вытекает из области, то должно происходить соответствующее уменьшение электромагнитной энергии, запасённой внутри этой области. Электромагнитная энергия представляет собой сумму электрической и магнитной энергии:

$$\text{электрическая энергия} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int E^2 dv, \quad (223)$$

$$\text{магнитная энергия} = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 dv, \quad (224)$$

$$\text{общая энергия} = \frac{1}{8\pi} \int (\mu H^2 + \varepsilon E^2) dv. \quad (225)$$

Скорость уменьшения запасённой энергии находится дифференцированием:

$$\begin{aligned} \text{скорость уменьшения запасённой энергии} &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{8\pi} \int (\mu H^2 + \varepsilon E^2) dv. \end{aligned} \quad (226)$$

Если предположить, что энергия не расходуется на тепло, выделяемое токами внутри рассматриваемой области, т. е. сделать предположение, справедливое для случаев, когда проводимость внутри области равна нулю (как например, для свободного пространства или идеального диэлектрика), то уменьшение запаса энергии может происходить только при условии, если имеется равный исходящий поток мощности. Приравняем соотношения (222) и (226)

$$\oint S \cdot da = -\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{8\pi} \int (\mu H^2 + \varepsilon E^2) dv. \quad (227)$$

Если выполнить указанное дифференцирование, то правая часть примет вид

$$-\frac{1}{4\pi} \int \left( \mu H \frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon E \frac{\partial E}{\partial t} \right) d\nu. \quad (228)$$

Так как производные представляют собой скалярные скорости изменения  $H$  и  $E$ , то выражение (228) можно записать в виде

$$-\frac{1}{4\pi} \int \left( \mu \mathbf{H} \frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{E} \frac{\partial E}{\partial t} \right) d\nu. \quad (229)$$

Воспользовавшись уравнениями Максвелла, находим производные по времени

$$+\frac{c}{4\pi} \int \{ \mathbf{H}[\nabla \mathbf{E}] - \mathbf{E}[\nabla \mathbf{H}] \} d\nu. \quad (230)$$

Можно доказать, в качестве математической теоремы, справедливой для любого векторного поля, что

$$\nabla [MN] = N[\nabla M] - M[\nabla N]. \quad (231)$$

Правая часть этого уравнения в точности соответствует величине, стоящей в фигурных скобках в выражении (230). Подстановка её в выражение (230) даёт

$$\frac{c}{4\pi} \int \nabla [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\nu. \quad (232)$$

Здесь дивергенция интегрируется по объёму. По теореме Гаусса можно заменить это интегрированием по поверхности, ограничивающей объём. Выполнив указанную замену и подставив результат в правую часть уравнения (227), получим

$$\oint \mathbf{S} da = \frac{c}{4\pi} \mathcal{U}[\mathbf{E}\mathbf{H}] da. \quad (233)$$

Как левая, так и правая части уравнения (233) являются поверхностными интегралами, взятыми по одной и той же поверхности, ограничивающей произвольную область пространства. Уравнение (233), очевидно, удовлетворяется, если вектор Пойнтинга равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (234)$$

Тем самым найден поток мощности <sup>1)</sup> в волновом движении.

При изложенном выводе вектора Пойнтинга рассматривалась область без проводимости, чем исключались потери энергии на тепло Джауля. Это было сделано лишь для простоты, и, если

<sup>1)</sup> Уравнение (233) удовлетворяется так же хорошо, если добавить к выражению (234) любую функцию, интеграл которой по любой замкнутой поверхности равен нулю, т. е. функцию, дивергенция которой равна нулю.

Поэтому, хотя обычно интегралом от  $\mathbf{S}$  по поверхности можно представить поток мощности, эта идея иногда может приводить к абсурдной трактовке (например, когда электростатическое поле и поле постоянного магнита существуют в общей области). Однако, интеграл от  $\mathbf{S}$  по замкнутой поверхности всегда точно определяет исходящий поток мощности.

учитывать проводимость, получится тот же результат. Уравнение (234) выражает поток электромагнитной энергии в любой как проводящей, так и непроводящей области.

В качестве простого примера поля вектора Пойнтинга рассмотрим длинный цилиндрический проводник, обтекаемый током. На рис. 47 стационарный ток течёт вверх в цилиндрическом проводнике, передняя часть которого на чертеже срезана. Электрическое поле внутри проводника однородно и напряжённость его направлена вверх. Напряжённость электрического поля вне проводника значительно больше и имеет тангенциальную составляющую, равную напряжённости поля внутри проводника. Магнитное поле внутри проводника имеет структуру концентрических окружностей, а его напряжённость пропорциональна радиусу. Поле вектора Пойнтинга внутри проводника, равное  $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ , направлено по радиусам внутрь и ослабевает по мере проникновения в проводник.

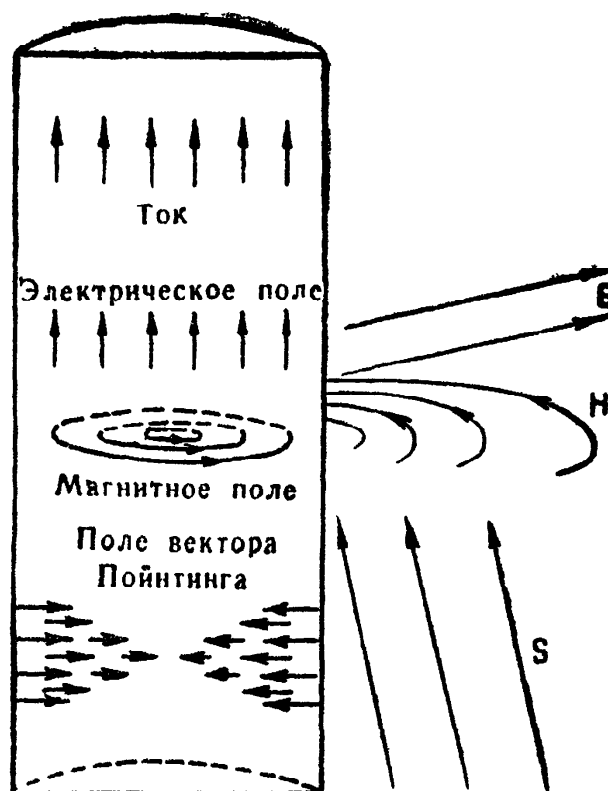


Рис. 47.

Постепенное убывание поля вектора Пойнтинга указывает на расход энергии. Энергия проходит через поверхность проводника и течёт по направлению к его центру; она должна покрыть Джоулевы потери в проводнике и, когда достигает центра проводника, внутренний поток энергии падает до нуля. Источником этой энергии является внешнее электромагнитное поле. Поле вектора Пойнтинга вне проводника в основном направлено параллельно проводнику, показывая тем самым, что энергия переносится по направлению проводника (назначение проводников и сводится, конечно, к тому, чтобы служить направляющими для энергии). Но у внешнего поля есть существенная радиальная составляющая, соответствующая энергии, втекающей в проводник и обеспечивающей компенсацию потерь в проводнике. Лишь вокруг проводника с идеальной проводимостью поле вектора Пойнтинга было бы в точности параллельно проводнику.

Количественно электрическое поле в таком проводнике, ка-



кой показан на рис. 47, равно

$$E = \frac{i}{\gamma}. \quad (235)$$

Отсюда, если радиус проводника равен  $r_0$ , а общий ток —  $i$ ,

$$E_z = \frac{i}{\pi r_0^2 \gamma}. \quad (236)$$

Магнитное поле на поверхности проводника, как следует из выражения (175), равно

$$H_\theta = \frac{2i}{cr_0}. \quad (237)$$

Следовательно, вектор Пойнтинга непосредственно на поверхности проводника равен

$$S_r = -\frac{c}{4\pi} \frac{2i^2}{\pi r_0^3 \gamma}. \quad (238)$$

Знак минус указывает, что  $S$  направлен радиально внутрь. Общая мощность, входящая на протяжении длины  $l$  проводника, находится умножением  $S_r$  на площадь поверхности  $2\pi r_0 l$ :

$$\text{входящая мощность} = \frac{i^2 l}{\pi r_0^2 \gamma}. \quad (239)$$

Но сопротивление  $r$  проводника равно [согласно выражению (128)]

$$r = \frac{l}{\pi r_0^2 \gamma}. \quad (240)$$

Подставив это значение в ур-ние (239), найдём, что энергия, доставляемая полем вектора Пойнтинга, равна

$$\text{входящая мощность} = i^2 r. \quad (241)$$

Этот результат соответствует хорошо известному выражению для мощности, расходуемой в сопротивлении. Он здесь получен с помощью интегрирования вектора Пойнтинга, дающего поток энергии, проникающей в проводник. Такой вывод иллюстрирует способ вычисления мощности, и используется в следующей главе, где мощность, излучаемая радиоантенной, находится интегрированием вектора Пойнтинга по поверхности, охватывающей полностью антенну.

Легко определить поле вектора Пойнтинга плоской волны, показанной на рис. 46. Из ур-ний (216) и (221)

$$S = \frac{c}{4\pi} [EH] = \frac{c}{4\pi} e_m^2 \sin^2 \alpha (x - ct) i. \quad (242)$$

Вектор Пойнтинга везде направлен параллельно оси  $x$ , что соответствует очевидному направлению движения энергии. Он максимален там, где  $E$  и  $H$  имеют наибольшие положительные

или отрицательные значения, и равен нулю, где  $E$  и  $H$  равны нулю.

Заметим, что вектор Пойнтинга, а поэтому и направление распространения волны борально к углу, отсчитываемому от  $E$  к  $H$ . Если средний и указательный пальцы правой руки направить по направлению от  $E$  к  $H$ , то большой палец укажет направление распространения волны. Это очень важное правило легко запомнить, если в памяти твёрдо запечатлено векторное произведение  $[EH]$ . Очевидно, что если перепутать порядок расположения этих векторов, то будет получен неправильный результат. Однако, порядок легко запомнить, если заметить, что  $E$  предшествует  $H$  и в алфавите.

**Отражение.** Когда электрическая волна распространяется в свободном пространстве, половина её энергии переносится электрическим полем и другая половина магнитным. При проникновении волны в другие среды распределение энергии становится иным. Когда волна достигает поверхности новой среды, происходит перераспределение энергии, независимо от того, является ли эта среда диэлектриком, магнитным материалом, проводником или ионизированной областью, содержащей свободные заряды. Энергия не может добавляться к энергии волны, когда волна проходит через граничную поверхность, поэтому установление нового соотношения энергий может происходить только в результате отражения части приходящей энергии. Это и получается в действительности, а отражённая энергия образует отражённую волну. Отражённая волна обуславливает наблюдаемое отражение света от проводящей металлической поверхности или диэлектрической поверхности стекла. Конечно, когда свет падает на фарфор, дерево или золото, волна быстро поглощается и теряется; однако, если фарфор, дерево или золото достаточно тонки, то часть света пройдёт через них.

Наиболее простым для анализа будет случай отражения плоской волны, падающей на идеально проводящую плоскую поверхность. Этот случай является предельным; в идеально проводящем материале напряжённость электрического поля везде равна нулю, и, как будет показано, волна, падающая на такую поверхность, полностью отражается.

На рис. 48 система координат расположена так, что ось  $z$  направлена вниз. Идеально проводящая поверхность совпадает с плоскостью  $x-y$ , т. е. расположена горизонтально. Плоская поляризованная электромагнитная волна, падающая на эту поверхность сверху, может быть записана в виде

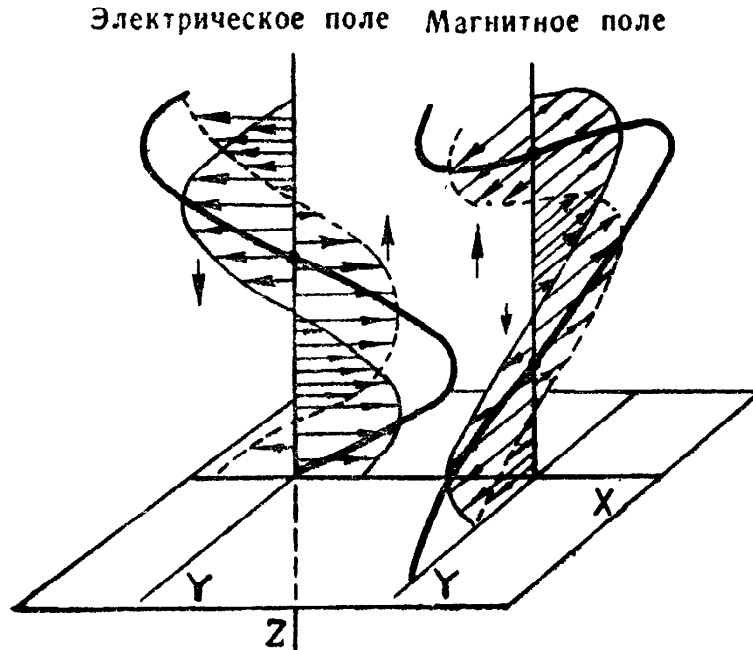
$$E_{x_1} = m \sin \alpha (z - ct). \quad (243)$$

Коэффициент  $m$  является просто постоянной величиной,  $\alpha$  — постоянная сдвига фазы, равная  $\frac{\omega}{c}$ , где  $\omega$  равна частоте, умноженной на  $2\pi$ .

Но выражение (243) даёт лишь падающую волну, и если имеется отражённая волна, то надо применить полное решение волнового уравнения. При условиях, оговоренных в предыдущем параграфе, полное решение может быть записано в виде

$$E_x = m \sin \alpha(z - ct) + f_2(z + ct). \quad (244)$$

Функция, обозначенная через  $f_2$ , должна быть определена из граничных условий.



Заданные граничные условия сводятся к тому, что поверхность является идеально проводящей и поэтому при  $z = 0$ ,  $E_x = 0$ . Если подставить это в выражение (244), то получим

$$E_x = m \sin \alpha(-ct) + f_2(ct) = 0, \quad (245)$$

откуда

$$f_2(ct) = -m \sin \alpha(-ct) = m \sin \alpha(ct). \quad (246)$$

Тогда полное выражение для электрического поля, определяемое выражением (244), примет вид

$$E_x = m \sin \alpha(z - ct) + m \sin \alpha(z + ct). \quad (247)$$

Это показывает, что существует отражённая волна, обладающая той же амплитудой, что и падающая волна, а следовательно, и той же энергией.

Магнитные составляющие обеих волн легко найти из уравнений Максвелла, как это было сделано для простой волны в выражении (221). В результате будет получено выражение

$$v = m \sin \alpha (z - ct) - m \sin \alpha (z + ct). \quad (248)$$

Обе составляющие, электрическая и магнитная, показаны на рис. 48; каждая стрелка указывает напряжённость поля во всей соответствующей горизонтальной плоскости, так что электрический и магнитный векторы, построенные на одной и той же высоте над отражающей плоскостью, в действительности соответствуют друг другу. Отметим, в частности, что электрическая волна отражается с переменной знака; поэтому электрическое поле на отражающей поверхности всегда равно нулю, а магнитное поле отражается с неизменным знаком и, таким образом, удваивается у отражающей плоскости. Отражение бегущих волн в длинной линии<sup>1)</sup> является примером рассмотренного здесь типа отражения.

Волна, распространяющаяся вдоль длинной линии, действительно является плоской электромагнитной волной.

Рассмотрим условия в проводящей плоскости, чтобы убедиться, что они согласуются с принципами электродинамики. Электрическое поле в отражающей плоскости должно быть равно нулю. Когда приходит падающая волна, в плоскости текут токи. В плоскости может существовать неограниченный ток при нулевом напряжении; плотность тока равна бесконечности, но глубина его проникновения в плоскость равна нулю. Магнитная напряжённость непосредственно над поверхностью конечна; непосредственно под поверхностью она равна нулю. Изменение напряжённости происходит на расстоянии, равном нулю, точно говоря, оно происходит на самой поверхности и, соответственно этому, ротор магнитного поля *на поверхности* равен бесконечности. Это не только возможно, но и необходимо, если плотность тока на поверхности равна бесконечности. Из рис. 48 видно, что направления тока, ротора и магнитного поля находятся в соответствии с уравнениями Максвелла.

Жирными линиями на рис. 48 показана сумма двух бегущих волн. Результирующее поле периодически меняется, но не является бегущей волной. Оно осциллирует по величине, но неподвижно в пространстве: это — «стоячая волна». Полная электрическая напряжённость всегда равна нулю у отражающей поверхности, на расстоянии половины длины волны от отражающей поверхности, и на расстоянии, кратном половине длины волны. Эти точки являются узлами. Существуют также узлы магнитного поля, расположенные на расстоянии одной четверти длины волны, трёх четвертей длины волны и т. д.

<sup>1)</sup>См., напр., Б. П. Асеев, *Основы радиотехники*. Связьиздат, 1947.

Герц, обнаружив такие узлы перед отражающим листом цинка, доказал существование электромагнитных волн. Он исследовал поле проволочной рамкой диаметром около 30 см, концы которой находились на очень малом расстоянии друг от друга; электрические искры в этом малом промежутке указывали величину индуцированной в рамке электродвижущей силы, а отсутствие искр указывало, что рамка расположена в узле. Так как узлы возможны лишь в том случае, когда есть волны, то тем самым была доказана правильность теории Максвелла.

Стоячую волну легко выразить в математической форме путём тригонометрического преобразования выражения (247). Пользуясь таблицей тригонометрических формул, его можно записать в виде

$$E_x = 2m (\sin \alpha z) (\cos \omega t), \quad (249)$$

а результирующее магнитное поле может быть выражено в виде

$$H_y = 2m (\cos \alpha z) (\sin \omega t). \quad (250)$$

Эти уравнения описывают волны, синусоидально изменяющиеся вдоль оси  $z$ , осциллирующие со временем, но с неподвижными узлами в точках, где  $\sin \alpha z$  (или, в последнем случае  $\cos \alpha z$ ) равен нулю.

В плоскости, ограничивающей материал конечной проводимости, как например, медь, условия очень близки к рассмотренным. Лишь незначительная часть энергии переносится слабой волной, проникающей на небольшое расстояние в медь, но большая часть энергии отражается.

Ионосфера представляет собой область, расположенную над поверхностью земли и содержащую свободные заряды в виде электронов при значительной плотности этих зарядов. В качестве первого приближения её можно рассматривать, как проводящую среду, и отражению радиоволн от неё (а именно длинных волн) можно дать приемлемое объяснение, рассматривая его как отражение от проводящей поверхности. В действительности же электроны приводятся в движение падающей волной и довольно сложным образом вновь излучают энергию.

### ЗАДАЧИ

1. Какова будет длина волны и частота, если в выражении (216)  $\alpha = 1$ .
2. Направление распространения плоской волны нормально к оси  $z$  и составляет угол  $45^\circ$  с осями  $x$  и  $y$ . Волна поляризована так, что электрический вектор параллелен плоскости  $x-y$ . Напишите выражения, необходимые для определения волны [аналогичные выражениям (211) и (212)] и подставьте их в волновое уравнение. Найдите решения для составляющих  $E$  и  $H$ , как это сделано в выражении (214).
3. Докажите для волны, определяемой уравнением (216), что  $E$  и  $H$  взаимно перпендикулярны, идентичны по форме и равны по величине, не только для синусоидальной, но при любой зависимости от  $(x - ct)$ .

4. Докажите справедливость ур-ния (231). Объясните, почему соотношение

$$\nabla [BC] = C [\nabla B] - B [\nabla C]$$

не аналогично соотношению

$$A [BC] = C [AB] = -B [AC].$$

5. Какова единица измерения потока мощности в выражении (234) в системе единиц Гаусса? На какой коэффициент надо умножить правую часть выражения (234), чтобы получить микроватты на квадратный метр, если  $E$  и  $H$  останутся выраженными в системе единиц Гаусса? Чему равно  $N$  в выражении  $S = N [EH]$ , если  $S$  выражено в микроваттах на квадратный метр,  $E$  в микровольтах на метр и  $H$  в маквеллах на квадратный метр (см. табл. I)?

6. Покажите, что в волне, заданной ур-ниями (216) и (221), в свободном пространстве половина энергии является электрической и половина магнитной. Определите электрическое и магнитное поля плоской синусоидальной волны, распространяющейся в среде, где  $\epsilon = 4$  и  $\mu = 1$ . Какая часть общей энергии заключена в электрическом поле?

7. Провод свёрнут в виде рамки и его концы присоединены к клеммам. Между клеммами приложено постоянное напряжение и по проводу течёт ток. Нарисуйте поле вектора Пойнтинга вокруг проволочной рамки.

8. Если идеально проводящая поверхность рис. 48 заменена поверхностью непроводящей среды с диэлектрической постоянной, равной 4 (пространство над поверхностью является вакуумом), то какому граничному условию должна удовлетворять на поверхности волна, определяемая выражением (244).

9. Найдите функцию  $f_2$  [в выражении (244)], которая удовлетворяет граничному условию задачи 8. Какова волна, проникающая в эту среду? В какой связи это находится с отражением света от стекла? Отражаются ли хотя бы частично радиоволны от стекла?

## Глава XI

### ИЗЛУЧЕНИЕ

**Электростатический потенциал.** В предыдущих главах мы ввели электростатический потенциал, понимая под ним скалярную величину, градиент которой, взятый с обратным знаком, является электрическим полем

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (90)$$

Таким образом, электрическое поле может быть найдено путём дифференцирования потенциала.

В пространстве, диэлектрическая постоянная которого равна единице, электрическое поле связано с плотностью электростатического заряда следующим соотношением

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (251)$$

Следовательно, дифференцирование электрической напряжённости даёт плотность заряда.

Комбинируя написанные уравнения, можно связать с помощью лапласиана, который является дифференциальным оператором второго порядка, плотность заряда непосредственно с электростатическим потенциалом

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \varphi. \quad (252)$$

Это уравнение Пуассона позволяет просто найти плотность заряда по известному потенциалу.

Часто, однако, по известной плотности заряда требуется найти электрическое поле. Одно из ценных свойств электростатического потенциала заключается в том, что его можно вычислить по известному распределению заряда сравнительно простым интегрированием. Далее можно найти электрическое поле как градиент потенциала. Это позволяет вычислить электрическое поле из распределения заряда, чего непосредственно сделать нельзя.

Аналогично нельзя непосредственно вычислить магнитное поле из известного распределения тока, однако, как будет показано, путём интегрирования можно найти магнитный вектор-по-

тенциал и затем найти магнитное поле как ротор поля вектор-потенциала.

В гл. IV показано, что электростатический потенциал в данной точке, находящейся на расстоянии  $r_1$  единиц от центра проводящего шара, несущего заряд  $q_1$ , равномерно распределённый по поверхности, равен

$$\varphi = \frac{q_1}{r_1}. \quad (253)$$

Если вблизи расположена вторая заряжённая сфера, то потенциал в рассматриваемой точке определится выражением

$$\varphi = \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}. \quad (254)$$

Если имеется много заряжённых тел, то потенциал в любой точке будет равен сумме потенциалов каждого из них

$$\varphi = \sum \frac{q}{r}. \quad (255)$$

Наконец, если заряд распределён в пространстве и плотность заряда (заряд на единицу объёма) обозначена через  $\rho$ , то величина заряда в бесконечно малом объёме  $d\nu$  будет  $\rho d\nu$  и потенциал выразится в виде интеграла, суммирующего приращения потенциала, даваемые каждым бесконечно малым зарядом,

$$\varphi = \int \frac{\rho d\nu}{r}. \quad (256)$$

Таким образом, потенциал выражается объёмным интегралом, который должен быть взят по всей области, содержащей заряды. Это может свестись к интегрированию вдоль линии или по поверхности, если заряд сосредоточен на такой линии или поверхности. Из вывода ясно, что  $r$  представляет собой расстояние от каждого элемента заряда до точки, в которой определяется потенциал, и является переменной величиной, зависящей от рассматриваемого элемента заряда. Обычно  $r$  выражается через координаты элемента заряда и координаты точки, в которой определяется заряд; далее, если последние координаты рассматриваются как переменные, то результат интегрирования в выражении (256) даст потенциал в любой точке (уже не потенциал в какой-то единственной точке), и явится поэтому выражением для поля потенциала. Следовательно, уравнение (256) даёт искомого решение для поля потенциала, выраженное через распределение заряда.

**Магнитный вектор-потенциал.** Идея векторного потенциала была введена в гл. III. Магнитный вектор-потенциал представ-



ляет вектор  $\bar{H}$ , ротором которого является магнитное поле. Таким образом,

$$\mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}]. \quad (257)$$

Магнитное поле связано с плотностью тока в магнито-статическом случае известным уравнением (17.1)

$$\iota = \frac{c}{4\pi} [\nabla \mathbf{H}]. \quad (258)$$

Комбинируя эти уравнения, получаем

$$\iota = \frac{c}{4\pi} [\nabla [\nabla \mathbf{A}] = ] \frac{c}{4\pi} \left\{ \nabla (\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \right\} \quad (259)$$

Здесь речь идёт о магнито-статическом случае, так как дивергенция  $\mathbf{A}$  равна нулю. Уравнение (257) это допускает: оно определяет лишь ротор  $\mathbf{A}$ , а векторное поле не определяется одним ротором. Должна быть известна ещё дивергенция<sup>1)</sup>. Поэтому можно произвольно условиться, что дивергенция равна нулю, и тогда получим

$$\iota = -\frac{c}{4\pi} \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (260)$$

Легко заметить сходство уравнения (260) с уравнением (252) для плотности заряда, выраженной через электростатический потенциал. Оно становится ещё более очевидным, если записать уравнение (260) отдельно для каждой из трёх составляющих:

$$\left. \begin{aligned} \iota_x &= -\frac{c}{4\pi} \nabla^2 A_x \\ \iota_y &= -\frac{c}{4\pi} \nabla^2 A_y \\ \iota_z &= -\frac{c}{4\pi} \nabla^2 A_z \end{aligned} \right\} \quad (261)$$

Решение каждого из этих уравнений не отличается по форме от решения уравнения (252). Решением уравнения (252) является выражение (256), а аналогичным решением уравнения (261) для  $A_x$  будет

$$A_x = \frac{1}{c} \int \frac{\iota_x d\tau}{r}. \quad (262)$$

<sup>1)</sup> Чтобы полностью определить поле, нужно, чтобы помимо дивергенции и ротора были известны граничные условия. В данном случае достаточно знать, что векторный потенциал равен нулю в бесконечности. Существует теорема, называемая теоремой единственности, которая гласит: «Векторное поле однозначно определено, если задана дивергенция и ротор, и известна нормальная составляющая вектора на замкнутой поверхности, или известно, что поле убывает (по крайней мере как  $\frac{1}{r^2}$ ) при удалении в бесконечность.»

Поскольку две другие компоненты  $A$  имеют ту же форму решения, то все три решения можно объединить в одном векторном равенстве

$$A = \frac{1}{c} \int \frac{i}{r} dv. \quad (263)$$

Смысл данного выражения аналогичен смыслу ур-ния (256). Векторный потенциал найден с помощью интегрирования по всему пространству, содержащему токи,  $r$  является расстоянием от каждого элемента тока до точки, в которой определяется вектор-потенциал. Если ток течёт по контуру, то интегрирование следует выполнить по этому контуру; во всех остальных точках, где плотность тока равна нулю, подинтегральное выражение обращается в нуль. В результате интегрирования получается поле векторного потенциала. Очевидно, что ток, текущий по направлению оси  $x$ , создаёт лишь  $x$ -овую компоненту векторного потенциала. Вообще говоря, направление вектор-потенциала совпадает с направлением элемента тока, который его создаёт. Поле вектор-потенциала сильнее вблизи тока, создающего это поле, и постепенно убывает с увеличением расстояния.

**Электродинамические потенциалы.** Поле электростатического скалярного потенциала, которое может быть вычислено из распределения заряда, и из которого можно легко определить электрическое поле, представляет большие удобства. Аналогичные удобства представляет поле магнитостатического векторного потенциала, которое можно найти из распределения тока и которое даёт магнитное поле. Но эти потенциалы имеют смысл лишь в статических условиях. Уравнение (90) перестаёт быть справедливым, когда изменяется магнитное поле, а ур-ние (258) не справедливо, если изменяется электрическое поле. Поэтому важно исследовать, нет ли возможности найти для общего динамического случая какие-то аналогичные потенциалы, не связанные ограничениями.

Динамические потенциалы действительно можно найти. Одним из них является *скалярный* потенциал, определяемый аналогично электростатическому потенциалу из распределения зарядов. Так как при неподвижных зарядах скалярный потенциал обращается в электростатический потенциал, то его можно рассматривать как обобщение электростатического потенциала. Другой — *вектор-потенциал* является обобщением магнитостатического векторного потенциала и, подобно ему, определяется распределением плотности тока.

Метод определения электродинамических потенциалов похож на использованный для определения статических потенциалов. Главное отличие заключается в том, что ур-ния (90) и (258), которые действительны лишь для статических полей, заменяются динамическими соотношениями, получаемыми из уравнений Максвелла. Можно показать, что для удовлетворения динами-

ческих условий. следует также предположить равенство нулю дивергенции  $\mathbf{A}$ .

Прежде всего ротор вектор-потенциала должен быть равен магнитной напряжённости.

$$\mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}]. \quad (264)$$

Это определяет ротор вектор-потенциала, но не его дивергенцию, которую мы попрежнему можем произвольно задать любым желательным нам образом.

Введём вектор-потенциал в уравнение Максвелла

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \left[ \nabla \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]. \quad (265)$$

Ясно, что это соотношение удовлетворяется при

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (266)$$

Но, кроме того, оно удовлетворяется при

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad (267)$$

В том, что выражение (267) удовлетворяет уравнению (265), можно убедиться, взяв ротор от обеих частей равенства; выражение (267) даёт необходимый результат, так как ротор градиента любого скалара  $\varphi$  тождественно равен нулю. Уравнение (267) является более общей формой уравнения (90), применимой как к переменным, так и к статическим полям.

Вместо уравнения (90) подставим в выражение (251) уравнение (267); это даёт

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \varphi \right). \quad (268)$$

Полученное уравнение не может быть решено, так как оно содержит оба потенциала  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ . Но  $\mathbf{A}$  входит лишь в виде дивергенции, и мы попрежнему свободны как угодно задать дивергенцию  $\mathbf{A}$ . Воспользуемся этим, чтобы выразить  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  через  $\varphi$ , и положим

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (269)$$

Это соотношение является произвольным предположением, но оно оказывается исключительно полезным. Благодаря ему теперь можно переписать уравнение (268) в виде

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left( \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right). \quad (270)$$

Аналогия этого уравнения с электростатическим уравнением (252) очевидна, и его можно рассматривать как динамическую форму уравнения Пуассона (для  $\epsilon = 1$ ).

Для определения динамического векторного потенциала уравнение (258) недостаточно, но из уравнений Максвелла получается следующая, более общая формула (для  $\mu = 1$ )

$$\iota = \frac{c}{4\pi} \left\{ [\nabla \mathbf{H}] - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\}. \quad (271)$$

Так как  $\mathbf{H}$  представляет ротор векторного потенциала, и так как  $\mathbf{E}$  может быть выражено через векторный и скалярный потенциалы с помощью уравнения (267), то

$$\iota = \frac{c}{4\pi} \left\{ [\nabla [\nabla \mathbf{A}]] + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\}. \quad (272)$$

Теперь стало полностью очевидным значение предположения, сделанного в уравнении (269). Оно не только позволяет исключить  $\mathbf{A}$  из уравнения (270), но и даёт возможность исключить  $\varphi$  из уравнения (272). Если это выполнить и развернуть ротор ротора  $\mathbf{A}$ , согласно уравнению (205), то будет получена динамическая форма уравнения (260)

$$\begin{aligned} \iota &= \frac{c}{4\pi} \left\{ \nabla (\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla (\nabla \mathbf{A}) \right\} = \\ &= -\frac{c}{4\pi} \left( \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (273)$$

Решения для статических потенциалов были получены в интегральной форме. Уравнения (270) и (273) для динамических потенциалов аналогичны уравнениям (252) и (260) для статики, за исключением того, что в каждом из них содержится производная по времени. Решения этих динамических уравнений также можно выразить в виде интегралов:

$$\varphi = \int \frac{\rho \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\sigma, \quad (274)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\iota \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\sigma. \quad (275)$$

Доказательство того, что выражение (274) действительно даёт динамический скалярный потенциал, можно получить, подставляя его в уравнение (270), которое при этом превращается

в тождество<sup>1)</sup>. Но, если выражение (274) является решением ур-ния (270), то аналогичное выражение (275) является решением ур-ния (273).

Смысл ур-ния (274) заключается в следующем: элемент заряда  $\rho d\nu$  создаёт скалярный потенциал в любой точке пространства, действуя с запаздыванием. Плотность заряда в любой данной точке является функцией времени  $\rho(t)$ . Влияние этого заряда на потенциал в некоторой другой точке определяется этой же функцией от меньшего времени, а именно  $\rho\left(t - \frac{r}{c}\right)$  — функцией от значения времени меньшего  $t$  на величину  $\frac{r}{c}$ . Другими словами, влияние, которое оказывает заряд  $\rho d\nu$  на потенциал в некоторой точке в момент  $t$ , определяется не значением  $\rho d\nu$  в момент  $t$ , а значением  $\rho d\nu$  в предшествующий момент времени  $t - \frac{r}{c}$ . Так как  $r$  представляет расстояние от заряда, создающего потенциал, до точки, где этот потенциал измеряется, то ясно, что  $c$  выражает скорость. Это есть скорость, с которой распространяется изменение потенциала в пространстве. Она равна скорости света.

Совершенно также можно истолковать ур-ние (275). Векторный потенциал в какой-либо точке определяется током, который протекал в некоторой другой точке *в несколько более раннее*

<sup>1)</sup> Подстановку выражения (274) для  $\varphi$  в ур-ние (270) нельзя выполнить непосредственно. Непосредственная подстановка выражения (274) в ур-ние (270) приводит к трудностям при определении лапласиана от  $\frac{\rho}{r}$  в точке, где  $r$  обращается в нуль. Так как  $r$  является расстоянием от элемента заряда до точки, в которой определяется потенциал, то  $r$  может быть равно нулю лишь в том случае, если потенциал определяется для точки, в которой расположен заряд. Чтобы обойти эту трудность, пространство делится на две области: одна из них окружает точку, в которой должен быть определён потенциал, и настолько мала, что применимы условия квазистационарности, поэтому  $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ ; другая включает всё остальное пространство. Для второй области функция  $\frac{\rho}{r}$  регулярна, лапласиан от  $\varphi$  легко раскрыть в сферических координатах и тем самым получить значение

$$\int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho\left(t - \frac{r}{c}\right) d\nu.$$

Так как обе области создают потенциал в исследуемой точке, то полное выражение, которое следует подставить в ур-ние (270) вместо лапласиана, имеет вид

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho + \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho\left(t - \frac{r}{c}\right) d\nu.$$

Дальнейшее решение не представляет затруднений и ур-ние (270) приводится к тождеству (см. например, Абрагам и Беммер: „Теория электричества“ ОНТИ, 1936).

время. Поскольку потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  наблюдаются в пространстве в более поздние моменты времени, чем токи и заряды, которые их создают, их называют *запаздывающими потенциалами*.

Если изменения электрического и магнитного полей происходят медленно, то запаздывающие потенциалы не отличаются от электростатического скалярного потенциала и магнитоэстетического векторного потенциала. Это справедливо и в том случае, когда исследуются поля в точках, близких к источнику возмущения, для которых запаздывание пренебрегаемо мало. Математически это означает, что если  $r$  мало по сравнению с  $ct$ , то функция аргумента  $(t - \frac{r}{c})$  мало отличается от функции от  $t$ . Когда интервалы времени велики, а расстояния малы, уравнения статического поля можно применять с полным успехом, даже если поля медленно меняются; это — *квазистационарный случай*. Все задачи сильноточной техники являются квазистационарными, за исключением задач, относящихся к длинным линиям передачи. Очевидно, например, что запаздывание при распространении магнитного поля внутри генератора пренебрегаемо мало.

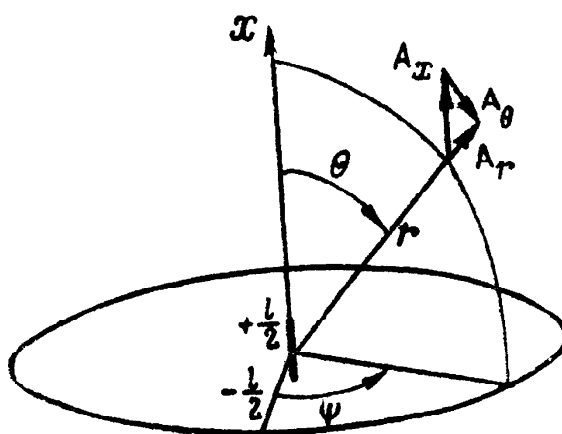


Рис. 49.

**Излучение.** Задача об излучении антенной электромагнитных волн является по своему существу динамической. При рассмотрении антенны с точки зрения квазистационарной теории не будет и намёка на излучение энергии, так как в квазистационарном решении излучение не учитывается. Таким образом, чтобы определить излучение антенны, нужно обратиться к решению, данному в ур-нии (275) для динамического вектор-потенциала. Это и является целью, ради которой была введена концепция векторного потенциала и запаздывающего потенциала.

Рассмотрим короткий провод, по которому течёт переменный ток

$$i = i_m \sin \omega t. \tag{276}$$

Провод уединён в пространстве (по близости нет поверхности земли). Его длина равна  $l$ . Систему сферических координат разместим так, чтобы проводник располагался вдоль полярной оси от  $-\frac{l}{2}$  до  $\frac{l}{2}$  (рис. 49). С помощью ур-ния (275) легко записать вектор-потенциал для области, окружающей этот короткий провод; интегрирование должно быть выполнено вдоль про-

вода в направлении, которое обозначим  $x$ , от одного конца провода до другого

$$A_x = \frac{1}{c} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{i_m \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} dx. \quad (277)$$

Так как ток течёт лишь в направлении  $x$ , то существует лишь  $x$ -ая компонента вектор-потенциала.

Если длина провода мала по сравнению с расстоянием до точки, где измеряется  $A$ , то в процессе интегрирования знаменатель подинтегрального выражения остаётся практически постоянным. Если длина мала по сравнению с длиной волны излучаемого сигнала, то числитель также практически постоянен; это означает, что в любой точке пространства фаза сигнала от одного из концов излучающего провода пренебрегаемо мало отличается от фазы сигнала, приходящего в эту же точку от другого конца провода. При этих предположениях подинтегральное выражение в ф-ле (277) является просто постоянной величиной и

$$A_x = \frac{il}{cr} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (278)$$

Так просто можно найти вектор-потенциал поля, созданного известным током.

Чтобы найти магнитное поле, окружающее короткую антенну, надо определить ротор вектор-потенциала. Это лучше всего сделать в сферической системе координат с помощью формул табл. II. Вектор-потенциал легко преобразовать в сферические координаты (рис. 49), что даст:

$$\left. \begin{aligned} A_r &= \frac{il}{cr} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \cos \Theta \\ A_\Theta &= -\frac{il}{cr} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \Theta \\ A_\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (279)$$

Беря ротор, получаем в соответствии с ур-нием (257) магнитное поле:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= 0 \\ H_\Theta &= 0 \\ H_\psi &= \frac{il}{cr} \sin \Theta \left\{ \frac{\omega}{c} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (280)$$

Электрическое поле можно найти из магнитного поля, воспользовавшись уравнением Максвелла (271) или из вектор-потенциала с помощью выражения (267). Чтобы пояснить последний метод следует прежде всего найти скалярный потенциал  $\varphi$  из уравнения (269)

$$\varphi = -c\gamma \int \mathbf{A} dt. \quad (281)$$

Если это значение <sup>1)</sup> подставить в уравнение (267), то получим выражение, содержащее лишь  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + c\gamma \nabla \int \mathbf{A} dt. \quad (282)$$

Этот несколько необычный ряд символов подразумевает операции, которые легко выполнить. В результате будет получено:

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \frac{2il}{\omega r} \cos \Theta \left\{ \frac{\omega}{cr} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{r^2} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \\ E_\Theta &= \frac{il}{\omega r} \sin \Theta \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega}{rc} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \\ E_\psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (283)$$

Чтобы легче раскрыть физический смысл выражений (280) и (283), надо выразить их через длину волны  $\lambda$  и частоту  $f$ , используя известное соотношение

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (284)$$

Тогда эти уравнения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= 0 \\ H_\Theta &= 0 \\ H_\psi &= \frac{\omega il \sin \Theta}{rc^2} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{r} \sin \left( 2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) + \cos \left( 2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (285)$$

<sup>1)</sup> Уравнение (281) можно записать в виде  $\varphi = -\nabla Z$ , где

$$Z = c \int \mathbf{A} dt.$$

$Z$  обозначает *вектор Герца*. Вектор Герца, в частности, представляет интерес потому, что он сам по себе полностью описывает электромагнитный процесс: когда известен вектор Герца, можно вычислить  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ .  $\rho$  и  $i$ . Другими словами, каждое электрическое и магнитное явление можно рассматривать, как изменение вектора Герца. Это исключает двойственность электрического и магнитного полей, и заменяет её концепцией единого поля вектора Герца, охватывающей все электромагнитные процессы.



$$\begin{aligned}
 E_r &= -\frac{2\omega l \cos \theta}{rc^2} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\lambda^2}{r^2} \cos \left( 2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{r} \sin \left( 2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) \right\} \\
 E_\theta &= \frac{\omega l \sin \theta}{rc^2} \left\{ -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\lambda^2}{r^2} \cos \left( 2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{r} \sin \left( 2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) + \cos \left( 2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) \right\} \\
 E_\phi &= 0.
 \end{aligned} \tag{286}$$

Рассмотрим эти уравнения применительно к двум областям: во-первых, вблизи излучающего провода, в области, где  $r$  мало по сравнению с длиной волны  $\lambda$  и, во-вторых, на расстоянии, составляющем много длин волн, где  $r$  велико по сравнению с  $\lambda$ . В ближней к антенне области преобладают члены, содержащие  $\frac{\lambda}{r}$  в высокой степени. В непосредственной близости к антенне можно пренебречь всеми членами, кроме первого в каждой из скобок уравнений (285) и (286), а если это сделано, то уравнения приводятся к квазистационарным уравнениям осциллирующего диполя<sup>1)</sup>. Хорошей физической реализацией осциллирующего диполя является короткий провод, вдоль которого течёт переменный ток. Такой диполь лучше всего можно представить, полагая, что короткий провод соединяет между собой два металлических шара; шары действуют, как конденсатор, и ток, текущий по проводу, попеременно заряжает и разряжает его ёмкость. Электрическое поле между шарами и магнитное поле вокруг провода описывается (в соответствующей области) первыми членами ф-л (285) и (286). Эти формулы справедливы, если наблюдатель находится настолько далеко от антенны, что может её рассматривать как диполь; кроме того, это расстояние должно быть мало по сравнению с длиной волны.

С другой стороны, если поле изучается на расстояниях от источника, равных большому числу длин волн, так что  $\frac{\lambda}{r}$  мало, то можно сделать другие интересные и важные упрощения. В этом случае члены, содержащие  $\frac{\lambda}{r}$  и  $\frac{\lambda^2}{r^2}$  настолько малы, что ими можно пренебречь. В выражении для  $E_\theta$  необходимо оставить лишь последний член; всё выражение для  $E_r$  пренебрегаемо

<sup>1)</sup> Диполь состоит из двух частиц положительно и отрицательно заряженных равными зарядами, расположенных очень близко друг к другу (по сравнению с расстоянием до точки наблюдения). Осциллирующим диполем является диполь, у которого заряды каждой из частиц изменяются синусоидально со временем.

мало по сравнению с  $E_\theta$ . Аналогично в выражении для  $H_\phi$  имеет значение лишь последний член. При этих приближениях, справедливых для расстояний от источника в несколько длин волн, уравнения волны получают вид:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 0 \\ E_\theta &= \frac{\omega il \sin \theta}{rc^2} \cos\left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t\right) \\ E_\phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (287)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= 0 \\ H_\theta &= 0 \\ H_\phi &= \frac{\omega il \sin \theta}{rc^2} \cos\left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t\right) \end{aligned} \right\} \quad (288)$$

Уравнения (287) и (288) описывают в высшей степени простое электромагнитное поле. Оно представляет собой волну, распространяющуюся наружу по радиусам. Электрическая и магнитная компоненты равны по величине и по форме и взаимно перпендикулярны. Электрическая и магнитная составляющие убывают при распространении, ибо обе обратно пропорциональны радиусу. Вектор Пойнтинга, определяющий поток энергии, направлен по радиусу наружу и обратно пропорционален квадрату радиуса; это показывает, что тут нет потерь энергии, а происходит простое уменьшение плотности энергии за счёт рассеяния волны.

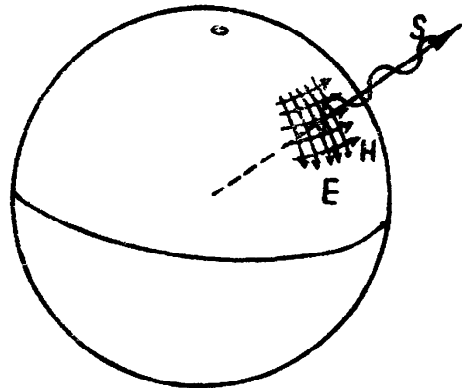


Рис. 50.

На рис. 50 показана часть сферической волны. Линии магнитного поля параллельны широтам сферы, а линии электрического поля расположены вдоль меридианов. Оба поля имеют наибольшую напряжённость у экватора и исчезают на полюсах. Поля в любой данной точке пространства, конечно, синусоидально осциллируют.

Любую небольшую часть сферической волны нельзя отличить от плоской волны. Сходство между рис. 50 и рис. 46а очевидно. В уравнениях (287) и (288) член  $\cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda} - \omega t\right)$  можно рассматривать, как определяющий плоскую волну, а коэффициент при этом члене трактовать как интенсивность волны в различных частях

пространства. Это является приближением, основанном на том, что при рассмотрении малой части волны ни  $\sin \theta$  в числителе, ни  $r$  в знаменателе коэффициента не могут существенно изменяться в рассматриваемой малой области. Поэтому производные коэффициента исчезающе малы и радиоволна в точке приёма обычно рассматривается как плоская.

В ур-ниях (285) и (286), являющихся полными выражениями для сферической волны, содержится ещё много нерассмотренных сведений. Ниже описываются некоторые из наиболее очевидных свойств.

Вблизи источника волн электрическое и магнитное поля не совпадают между собой по фазе. Магнитное поле вблизи антенны находится в фазе с током антенны, в то время как электрическое поле находится в фазе с зарядами на концах антенны. Эти составляющие поля, преобладающие вблизи антенны, называются *индукционными* составляющими. Индукционные составляющие электрического и магнитного полей содержат относительно большой запас энергии, которая вблизи проводов при всех обстоятельствах переходит попеременно из электрического поля в магнитное и обратно. Например, магнитное поле трансформатора или генератора является почти целиком индукционным полем.

Однако, индукционная составляющая ничтожно мала на расстояниях от источника в несколько длин волн, так как она убывает обратно пропорционально квадрату или кубу радиуса, тогда как другая составляющая, которая убывает обратно пропорционально лишь первой степени радиуса, становится здесь преобладающей. Эту последнюю составляющую называют составляющей *излучения*. Составляющая излучения представляет собой энергию, распространяющуюся во вне, в пространство, которая никогда не вернётся в излучающую систему. Эта составляющая входит лишь в полные электродинамические уравнения и исключена из квазистационарных выражений для полей. Составляющие излучения электрического и магнитного полей находятся в фазе друг с другом. Составляющие индукции и излучения электрического поля в области, где они обе существуют, находятся в противофазе, а составляющие магнитного поля находятся в квадратуре. Этот неожиданный результат можно объяснить тем, что составляющая излучения возникает не непосредственно благодаря току и заряду антенны, а скорее вследствие изменений индукционных полей, окружающих антенну.

Члены индукции и излучения как электрического, так и магнитного полей равны по величине при  $\frac{\lambda}{r} = 2\pi$ , т. е. на расстоянии от источника приблизительно равном одной шестой длины волны. При больших расстояниях начинает преобладать составляющая излучения. Отсюда можно сделать заключение, что при короткой антенне на расстояниях меньших одной шестой длины волны явления имеют преимущественно индукционный харак-

тер, а на больших расстояниях представляют собой преимущественно результат излучения.

Члены индукции и излучения в ур-ниях (285) и (286) имеют математическое различие: члены, содержащие  $r$  в определённой степени, являются индукционными, члены же другой степени  $r$  отображают излучение. Однако, как показано ниже, существует другое различие, более доступное для физической трактовки.

В квазистационарном состоянии электрические и магнитные поля изменяются медленно. По конфигурации они в любой момент времени не отличаются от электростатического и магнито-статического полей, так как скорость их изменения настолько мала, что отсутствует явление взаимного влияния полей. Квазистационарное электрическое поле создаётся расположенными вблизи зарядами, а квазистационарное магнитное поле окружает электрический ток. Это — *индукционные* поля; здесь нет излучения.

Динамический процесс отличается от квазистационарного случая тем, что здесь учитывается способность изменяющегося электрического поля индуцировать магнитное поле и способность изменяющегося магнитного поля индуцировать электрическое поле. Результатом этого является излучение. Составляющие излучения электрического и магнитного полей не так тесно связаны с зарядом и током, как индукционные поля. Они потеряли связь с источником. Электрические поля волны возникают не в результате действия вблизи расположенных зарядов, а вследствие изменения магнитной составляющей волны; магнитное поле создаётся не электрическим током, а изменением электрического поля. Конечно, поля не могли бы возникнуть, если бы где то не было заряда и тока, но взаимно создавая друг друга, они могут распространяться неограниченно долго на любое расстояние. Так например, световые волны, приходящие из скоплений галактики, достигают нас спустя миллионы лет после того как вспышка, которая их создала, закончилась и звезда угасла.

### ЗАДАЧИ

1. В коротком прямом куске провода длиной  $l$  течёт ток  $i = i_m \sin \omega t$ . С помощью выражения (262) покажите, что магнитный вектор-потенциал, созданный током в этом куске провода, на большом по сравнению с длиной провода расстоянии равен  $\frac{il \sin \omega t}{cr}$ . Изобразите графически поле вектор потенциала.

2. Найдите магнитное поле вокруг короткого куска провода задачи 1, определив ротор вектор-потенциала. Покажите, что оно определяется квазистационарным членом в ур-нии (280).

3. Покажите, что квазистационарные члены в ур-нии (283) можно получить, вычислив электрический потенциал вокруг осциллирующего диполя для той области, где применимо ур-ние (254). (Замечание: вычисление можно значительно упростить, если использовать тот факт, что длина диполя, ко-

торую можно назвать  $l$ , мала по сравнению с расстоянием  $r$  от середины диполя до точки, в которой вычисляется потенциал и электрическое поле. При этом  $r^2 - l^2$  приблизительно равно  $r^2$ . Таким же образом можно положить  $r_1 = r - \frac{l}{2} \cos \theta$  и  $r_2 = r + \frac{l}{2} \cos \theta$ .

4. Покажите, что уравнение (270) имеет решение в виде опережающего

потенциала  $\varphi = \int \frac{\rho \left( t + \frac{r}{c} \right)}{r} d\nu$  наряду с решением в виде запаздывающего

потенциала в уравнении (274). Каков физический смысл этого „опережающего потенциала“?

5. Сферический конденсатор, состоящий из металлического шара, окруженного концентрическим металлическим экраном, разряжается благодаря соединению между внутренней и внешней сферами. Разряд колебательный. Объясните, будет ли излучение?

---

## Глава XII

### АНТЕННЫ

**Короткие антенны.** Излучение короткой вертикальной антенны, расположенной над хорошо проводящей поверхностью земли, в сущности, происходит в соответствии с уравнениями гл. XI. Антенна должна быть короткой по сравнению с излучаемой длиной волны, ибо таково условие, принятое при интегрировании (277).

Влияние поверхности земли можно учесть обычным искусственным приёмом, согласно которому проводящая поверхность рассматривается как зеркало, отражающее электрические волны. Рассмотрим вначале вертикальный провод, удалённый от земли или других предметов. По проводу протекает осциллирующий ток, заряжающий ёмкость между верхним и нижним концами. Образующиеся электрическое и магнитное поля симметричны относительно горизонтальной плоскости, проходящей через середину провода. (Антенна не обязательно должна состоять из одиночного прямого провода; она может иметь любую форму, но необходимо, чтобы эта форма была симметрична относительно горизонтальной плоскости. Тогда будет симметрия электрического и магнитного полей.) Предположим теперь, что воображаемая разделяющая плоскость выполнена из очень тонкого идеально проводящего материала. При этом ничего не изменится. Разделяющая плоскость везде перпендикулярна к электрическому полю и не искажает его. В плоскости протекают токи, но лишь для того, чтобы поддерживать поля в их первоначальной конфигурации, а так как плоскость предполагается идеально проводящей, то потери энергии не происходит.

При наличии такой проводящей плоскости электрическое и магнитное поля, создаваемые верхней и нижней частями провода, будут совершенно независимы друг от друга. В самом деле, нижнюю половину провода и её поле — всё, находящееся снизу от плоскости симметрии, — можно полностью удалить, а электрическое и магнитное поля и картина излучения над плоскостью останутся неизменными. Обратный процесс даёт путь решения, который можно применить к антенне, расположенной на идеальной земле: реальная антенна и проводящая плоскость могут быть

заменены уединённой антенной двойной длины; при этом электромагнитное поле не изменится.

С учётом высказанных соображений о симметрии можно дать следующую общую формулировку, применимую, конечно, не только к короткой вертикальной антенне. Действие антенны и проводящей плоскости (над плоскостью) не отличается от действия антенны и её зеркального изображения относительно плоскости (сама плоскость при этом удалена), если токи и заряды в зеркальном изображении равны и противоположны токам и зарядам в антенне.

Если антенна представляет собой одиночный вертикальный провод, расположенный над землёй, то, очевидно, ток в верхнем её конце равен нулю. Ток максимален в основании и в короткой антенне почти линейно уменьшается с высотой до нуля в вершине. Вертикальный провод представляет обычный тип практически применяемых антенн. Другим обычным типом антенны является вертикальный провод, присоединённый сверху к системе горизонтальных проводов. В этом случае горизонтальные провода создают достаточную ёмкость относительно земли и ток в вертикальном проводе распределяется, по существу, равномерно от его основания до вершины. Следовательно, излучение вертикального провода может быть найдено с помощью уравнений предыдущей главы, которые выведены для провода с равномерным распределением тока. Основное назначение горизонтальных проводов такой «антенны с горизонтальной частью» сводится к созданию ёмкости, к увеличению тока в вертикальном проводе и получающемуся благодаря этому увеличению излучения. Некоторое излучение создаётся также и горизонтальными проводами, но оно является случайным и обычно им можно пренебречь. В нашем рассмотрении предполагалось, что все размеры антенны малы по сравнению с излучаемой длиной волны; поэтому ур-ния (287) и (288) непосредственно применимы к вертикальной антенне с большой ёмкостью в вершине, если вместо  $l$  в этих уравнениях брать двойную высоту.

Когда антенна представляет собой одиночный вертикальный провод с током, изменяющимся от максимума в основании до нуля в вершине, действующая высота будет меньше геометрической высоты. Если антенна очень коротка, то действующая высота равна половине геометрической высоты, так как излучение пропорционально среднему току, который равен половине тока в основании. Если антенна по высоте приближается к четверти длины волны, то распределение тока уже нельзя рассматривать как линейное, и действующая высота оказывается несколько большей, чем половина геометрической высоты. Строго говоря, выводы гл. XI не относятся к антеннам такой длины. Однако, как будет показано, ошибка результата не превышает нескольких процентов, если пользоваться правильной эквивалентной высо-

той, а ур-ния (287) и (288) могут быть применены к простым вертикальным антеннам, если вместо  $l$  брать двойную геометрическую высоту над землёй, умноженную на соответствующий коэффициент, который изменяется в пределах от 0,5 для коротких антенн до 0,6 (более точно  $\frac{2}{\pi}$ ) для четвертьволновой антенны.

**Излучаемая мощность.** Часто представляет интерес общая мощность, излучаемая антенной. Если рассматривать лишь поле излучения, то вектор Пойнтинга оказывается направленным радиально от антенны в окружающее пространство, так как он направлен так же, как и  $[\mathbf{EH}]$ . Общую энергию, переносимую бегущей волной излучения, можно найти интегрированием вектора Пойнтинга по воображаемой сферической поверхности, с центром в начале координат. Вследствие симметрии сферической волны, рассмотренной в гл. XI, интегрирование осуществляется легко и даёт

$$\begin{aligned} \int S da &= \int \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] da = \int \frac{c}{4\pi} \left\{ \frac{\omega i l}{r c^2} \sin \Theta \cdot \cos \left( 2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) \right\}^2 (2\pi r^2 \sin \Theta) d\Theta = \\ &= \frac{\omega^2 i^2 l^2 \cos^2 \left( 2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right)}{2c^3} \int_0^\pi \sin^3 \Theta d\Theta = \frac{2\omega^2 i^2 l^2}{3c^3} \cos^2 \left( 2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right). \end{aligned} \quad (289)$$

Вектор Пойнтинга является функцией времени, и изменяется как квадрат косинуса. В большинстве случаев требуется средняя мощность излучаемой волны, и, поскольку среднее значение квадрата косинуса равно  $1/2$ , то средняя мощность, излучаемая короткой антенной с равномерным распределением тока, равна

$$\text{средняя мощность} = \frac{\omega^2 i^2 l^2}{3c^3}. \quad (290)$$

**Сопротивление излучения.** Излучаемая мощность, делённая на квадрат эффективного значения тока питания антенны, даёт величину, которая называется *сопротивлением излучения*. В ур-нии (290)  $i$  — максимальное значение тока; квадрат эффективного тока равен  $1/2 i^2$ , и сопротивление излучения короткой антенны равно

$$\frac{2}{3} \frac{\omega^2 l^2}{c^3}. \quad (291)$$

Выражение (291) дано в статоммах — единицах системы Гаусса. Так как согласно табл. I 1 статом =  $c^2 \cdot 10^{-9}$  ом, или около 30 с ом, то выражение для сопротивления излучения можно записать в виде

$$20 \frac{\omega^2 l^2}{c^2} \text{ ом}. \quad (292)$$



Эта формула применима к уединённому проводу длиной  $l$  с равномерным распределением тока. Положив  $l$  равной двойной действующей высоте антенны, можно найти сопротивление излучения короткой антенны, расположенной над землёй. Затем полученное значение сопротивления излучения следует разделить пополам, так как излучение происходит лишь в половину пространства и, следовательно, лишь половина мощности представлена сопротивлением излучения антенны, расположенной над землёй. Таким образом, для заземлённой антенны с действующей высотой  $h_e$

$$\text{сопротивление излучения} = 40 \frac{\omega^2 h_e^2}{c^2} = 1600 \frac{h_e^2}{\lambda^2}. \quad (293)$$

Это выражение справедливо для антенны, короткой по сравнению с излучаемой длиной волны, но фактически, если пользоваться правильной действующей высотой, оно даёт хорошее приближение для антенн, у которых высота не превышает четверти длины волны.

**Другие выражения для излучения.** Формулы для поля излучения (287) и (288) выражены через ток антенны. Во многих случаях удобнее иметь формулы, в которых поле выражено через напряжение антенны и ёмкость. Если  $i_m$  — амплитуда тока,  $u_m$  — амплитуда напряжения и  $C$  — ёмкость между концами уединённой антенны, так что  $i_m = \omega C u_m$ , то компоненты, определяющие поле излучения, будут

$$E_\theta = \frac{\omega^2 u_m C l \sin \theta}{rc^2} \cos \left( 2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right), \quad (294)$$

$$H_\psi = \frac{\omega^2 u_m C l \sin \theta}{rc^2} \cos \left( 2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right). \quad (295)$$

Применяя эти выражения к заземлённой антенне, нужно под  $u_m$  понимать двойное напряжение по отношению к земле, под  $C$  — половину ёмкости по отношению к земле и под  $l$  двойную действующую высоту антенны. Из ур-ний (294) и (295) следует, что увеличение силы сигнала можно получить, увеличивая или высоту антенны или её ёмкость или приложенное к ней напряжение, или частоту колебаний. В свободном пространстве напряжённость поля, создаваемого при постоянном напряжении антенны, пропорциональна квадрату частоты. Поэтому излучаемая мощность увеличивается пропорционально четвёртой степени частоты.

Часто бывает необходимым выразить поле излучения и, в частности, его электрическую компоненту в практических еди-

ницах. Сделав необходимый переход от единиц Гаусса в ур-нии (287), получаем

$$E_{\theta} = \frac{\pi f l i_m}{5r} \sin \Theta \cdot \cos \left( \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \text{ микровольт на метр} \quad (296)$$

Это выражение даёт электрическую напряжённость поля на расстоянии  $r$  метров от уединённой короткой антенны длины  $l$ , вдоль которой течёт ток  $i_m$  ампер. В нём  $t$  — время в секундах,  $f$  — частота тока в герцах,  $\lambda$  — излучаемая длина волны в метрах,  $\Theta$  — угол, составляемый радиусом, проведённым из антенны в точку наблюдения, с вертикалью.

Уравнение можно применять для простой антенны, расположенной *над землёй*, если считать, что  $l$  — двойная действующая высота антенны и  $i_m$  — ток в основании антенны.

Обычно бывает достаточным знать только эффективное или среднеквадратичное значение электрической напряжённости поля. Для этой цели требуется лишь коэффициент выражения (296), и если  $i_m$  — эффективное или среднеквадратичное значение тока в антенне, то

$$E_{\theta} = \frac{\pi f l i_m}{5r} \sin \Theta \text{ эфф. микровольт на метр.} \quad (297)$$

**Диаграмма направленности.** «Диаграмму направленности» антенны принято изображать, откладывая из некоторой точки радиус-векторы, длина которых пропорциональна напряжённости поля на заданном расстоянии в направлении, указанном данным радиус-вектором. Если, например, напряжённость поля в северном направлении больше, чем в южном, то вектор, направленный на север, должен быть длиннее. Кривая, соединяющая концы векторов, и есть диаграмма направленности. Чаще всего напряжённость поля откладывают в микровольтах на метр на расстоянии в 1 км.

Диаграмма направленности в горизонтальной плоскости для короткой вертикальной антенны изображена на рис. 51а. Поскольку излучение одинаково во всех направлениях, все радиус-векторы равны между собой и диаграмма представляет собой окружность.

Диаграмма направленности в вертикальной плоскости для короткой вертикальной антенны показана на рис. 51б. Максимум излучения направлен горизонтально, а вертикальное излучение равно нулю. Излучение в любом другом

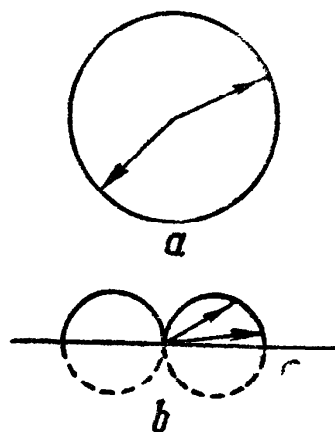


Рис. 51.

направлении согласно ур-нию (296) пропорционально синусу угла между данным направлением и вертикалью, и диаграмма оказывается составленной из двух окружностей.

**Длинные антенны.** Антенну, длина которой сравнима с длиной волны, уже нельзя считать короткой антенной (при 10 см длины волны 15-сантиметровая антенна становится «длинной»). Её следует рассматривать как ряд коротких отрезков. Каждый элементарный отрезок антенны излучает сферическую волну, а суммарный эффект всей антенны получается интегрированием с учётом различия амплитуд и фаз токов в различных элементах.

Этот метод лучше всего поясняется на примере. Рассмотрим простую вертикальную антенну, выполненную из одного идеального проводника. Он расположен вертикально над идеально проводящей поверхностью земли и питается в основании синусоидальным напряжением такой частоты, что высота антенны составляет четверть длины волны.

Прежде чем приступить к анализу, надо рассмотреть две особенности. Во-первых, идеально проводящая плоскость земли действует как зеркало и наблюдатель, расположенный где-либо над поверхностью земли, принимает от антенны длиной  $l$  такой же сигнал, какой давала бы антенна длиной  $2l$ , уединённая в пространстве и питаемая в середине. Это позволяет систему, состоящую из антенны и плоской земли, в которой распределение токов и зарядов очень сложное, заменить относительно простой комбинацией, состоящей из антенны и её зеркального изображения. Таким образом, мы будем рассматривать антенну, возбуждаемую в середине, каждая половина которой имеет длину, равную четверти длины волны. Общая мощность, излучаемая такой антенной, равна удвоенному значению мощности, излучаемой реальной четвертьволновой антенной, а распределение энергии в верхней полусфере над землёй остаётся тем же самым. Естественно, что в случае реальной антенны и земли не будет энергии в полусфере, расположенной ниже поверхности земли.

Во-вторых, строгое решение задачи о распределении тока в простой вертикальной антенне оказывается чрезвычайно трудным. В конце антенны тока не может быть, в то время как в основании ток имеет определённую величину. Обычно предполагают, что ток в антенне распределяется пропорционально синусу расстояния от конца, подобно току в длинной линии с разомкнутым концом. Следовательно, у четвертьволновой антенны максимум тока находится в основании и если его обозначить  $I_0$ , ток на высоте  $x$  будет

$$i = I_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t. \quad (298)$$

Длина волны излучаемого сигнала равна  $\lambda$ .

Метод решения заключается в определении электрического поля, создаваемого каждым элементарным участком антенны, и

комбинировании его (путём интегрирования) в общее поле. По ф-ле (298) определяется ток в коротком отрезке антенны элементарной длины  $dx$ , расположенном на высоте  $x$ , а создаваемое им поле излучения находится по ф-ле (287). Комбинируя эти выражения и интегрируя по  $x$  в пределах от  $-\frac{\lambda}{4}$  до  $\frac{\lambda}{4}$  (включая как антенну, так и её изображение), получаем выражение для электрического поля, создаваемого четвертьволновой антенной,

$$E_{\theta} = \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \frac{\omega I_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sin \theta}{r_e c^2} \cos \omega \left( t - \frac{r_e}{c} \right) dx. \quad (299)$$

В ф-ле (299)  $r_e$  выражает расстояние от токонесущего элемента до точки, в которой определяется напряжённость поля. Эту величину надо отличать от величины  $r$ , которая является расстоянием от начала координат, помещённого нами в основании антенны. Так как мы интересуемся электрическим полем на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от антенны, то разность между  $r_e$  и  $r$  в знаменателе подинтегрального выражения пренебрегаемо мала. Однако, в аргументе косинуса разность между  $r_e$  и  $r$  существенна, так как именно эта разность определяет соотношение фаз полей излучения, создаваемых различными частями антенны. Вполне допустимо подставить  $r$  вместо  $r_e$  в знаменателе, но при определении фазовых соотношений необходимо исходить из такого приближения, которое не может дать ошибки, сравнимой с длиной волны. Положим здесь

$$r_e = r - x \cos \theta. \quad (300)$$

Аналогично угол между  $r_e$  и вертикальной антенной практически равен  $\theta$ . С учётом этого имеем

$$E_{\theta} = \frac{\omega I_0 \sin \theta}{rc^2} \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} + \frac{x \cos \theta}{c} \right) dx. \quad (301)$$

Выполнение интегрирования, хотя и связано с громоздкими вычислениями, но, по существу, несложно. В результате вычислений получаем

$$E_{\theta} = \frac{2I_0}{rc} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta}. \quad (302)$$

Другие составляющие электрического поля, конечно, равны нулю, как и у короткой антенны. Магнитное поле перпендикулярно электрическому (как это имеет место для каждого элементарного участка антенны) и в системе единиц Гаусса численно равно ему. Поэтому

$$H_{\phi} = \frac{2I_0}{rc} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta}. \quad (303)$$

Другие составляющие магнитного поля равны нулю.

Интересно сравнить формулы, выражающие диаграмму направленности четвертьволновой антенны, с ф-лами (287) и (288) для излучения короткой антенны. Эти формулы оказываются весьма аналогичными. И те и другие содержат косинусоидальную функцию времени, хотя и записанную в несколько различной форме. Своеобразная тригонометрическая функция в числителе ф-л (302) и (303), косинус от косинуса угла, численно близка к квадрату синуса этого угла; поэтому частное от деления этой функции на  $\sin \theta$  не сильно отличается от  $\sin \theta$ , который является соответствующим множителем в ф-лах (287) и (288). Отсюда следует, что при одинаковой мощности излучения диаграмма направленности четвертьволновой антенны над идеальной землёй мало отличается от диаграммы направленности короткой антенны. (Горизонтальное излучение четвертьволновой антенны, примерно на шесть процентов больше, чем короткой антенны, а излучение в направлении, близком к вертикальному, настолько же меньше.) Диаграмма направленности рис. 51 почти в такой же мере применима к четвертьволновой антенне над землёй (или уединённой полуволновой антенне), как и для очень короткого излучателя.

Однако, если длина антенны, расположенной над землёй, значительно превышает четверть длины волны, то диаграмма направленности изменяется коренным образом. При увеличении длины антенны, примерно, до шести десятых длины волны увеличивается горизонтальное излучение, и диаграмма направленности становится больше похожей на вытянутую, узкую петлю, чем на полуокружность. Ещё более длинные антенны излучают под углом вверх и дают относительно слабую земную волну. Поэтому при проектировании антенн очень важен правильный выбор их высоты (с учётом экономических соображений).

**Приёмные антенны.** Когда электромагнитная волна распространяется в пространстве, меняющееся магнитное поле непрерывно создаёт электрическое поле; образовавшееся электрическое поле в свою очередь воспроизводит магнитное поле. Когда волна проходит через данную точку пространства, меняющееся магнитное поле индуцирует в ней электрическое поле, и если волна пересекает провод, то она индуцирует электрическое поле в этом проводе.

Существует два пути для рассмотрения действия проводника в качестве приёмной антенны. Наиболее прямой путь заключается в учёте возмущения проходящей волны, производимого проводником; её электрические и магнитные поля ослабляются, так как внутри идеального проводника не может быть поля. По проводнику будет протекать ток, определяя соответствующие граничные условия для электрических и магнитных полей волны. С этой точки зрения вопрос о приёмной антенне сводится к задаче с заданными граничными условиями.

Другой метод является косвенным, но он более удобен для практических расчётов. Согласно этому методу предполагается, что магнитное поле *невозмущённой* проходящей волны индуцирует в антенне электродвижущую силу. Эта электродвижущая сила вызывает ток, действующий в антенне так же, как если бы она была передающей антенной, и создаёт новое электромагнитное поле, накладывающееся на невозмущённую волну. Ток в данном случае ограничен распределёнными ёмкостями и индуктивностями проводника, а также его сопротивлением (сопротивлением потерь) и «сопротивлением излучения». Таким образом, задача сводится к значительно более лёгкой задаче электрического контура.

Для нашего рассмотрения разделим приёмные антенны на три класса, хотя любая подобная классификация совершенно произвольна. Во-первых, рассмотрим прямой провод, удалённый от земли. Ток, текущий в таком проводе, будет током заряда, который протекает от одного конца провода к другому и ограничен ёмкостью одного конца провода по отношению к другому концу. Примером является проводник, показанный на рис. 43 стр. 107. В переменном магнитном поле волны вдоль всей антенны будет течь переменный ток с частотой, равной частоте проходящей волны.

Общая электродвижущая сила, индуцированная в прямом проводе, длина которого мала по сравнению с длиной волны, равна произведению из длины провода, напряжённости электрического поля волны и косинуса угла между проводом и электрическим вектором. (В более длинном проводе необходимо учитывать разность фаз.) Однако, *действующая* электродвижущая сила меньше этой величины, так как лишь бесконечно малая часть тока антенны протекает вдоль всего провода. Действующая электродвижущая сила зависит от распределения ёмкости и может быть увеличена путём увеличения ёмкости у концов антенны.

При использовании уединённого прямого провода в качестве антенны радиоприёмник располагается в его середине. Приёмник извлекает из колебательного тока антенны максимум энергии. Чтобы увеличить антенный ток, можно включить в виде детали приёмника индуктивность, которая обеспечит резонанс с распределённой ёмкостью антенны. Ток, текущий в такой «настроенной» антенне, ограничен лишь потерями энергии в сопро-

тивлении и энергией, излучаемой антенной, так как индуктивность и ёмкость взаимно компенсируются. Настройка обеспечивает оптимальные условия работы антенны. Настроенную антенну можно рассматривать как резонансный контур; напряжение между её концами может во много раз превышать электродвижущую силу, индуцированную проходящей волной, поскольку индуцированная электродвижущая сила должна лишь поддерживать собственные колебания антенны. Антенна длиной в половину длины волны оказывается настроенной без добавления индуктивности, так как распределённая индуктивность провода как раз компенсирует его распределённую ёмкость.

Для практических расчётов можно придумать эквивалентный контур, в котором эквивалентное сосредоточенное напряжение (соответствующее действующей электродвижущей силе антенны) вызывает ток через эквивалентное сосредоточенное комплексное сопротивление антенны, последовательно включённое с комплексным сопротивлением приёмника<sup>1)</sup>). Расчёт антенны основывается на эквивалентной схеме этого вида.

Далее мы рассмотрим антенну в виде вертикального прямого провода, один конец которого соединён с землёй. Радиоприёмник включён между антенной и землёй. Это — наиболее распространённый тип приёмной антенны. Она принимает лишь составляющую проходящей волны с вертикально поляризованным электрическим полем, но такая поляризация волны является обычной для типовой передающей антенны. Она не обладает направленностью в горизонтальной плоскости, так как диаграмма направленности приёмной антенны не отличается от диаграммы направленности такой же антенны, используемой для передачи.

Работа заземлённой антенны незначительно отличается от работы уединённой антенны двойной длины. Ток ограничен ёмкостью антенны по отношению к земле и большая ёмкость заземлённой антенны компенсирует меньшую электродвижущую силу, индуцированную в её более короткой длине. Если сравнительно большая часть ёмкости по отношению к земле сосредоточена у вершины антенны, то индуцированная действующая электродвижущая сила увеличивается, а комплексное сопротивление между зажимом антенны и землёй уменьшается. Для обеспечения такой ёмкости к вершине вертикального проводника часто присоединяют горизонтальные провода.

Третьим видом антенны, который здесь рассматривается, является рамочная антенна. Её действие не имеет существенных особенностей, за исключением того, что ток в рамке ограничен не ёмкостью, а индуктивностью, последовательно включённой с приёмником. В рамке так же, как и в любом другом провод-

---

<sup>1)</sup> Этот и другие вопросы технического применения рассмотрены в книге „*Radio Engineering*“, F. E. Terman, McGraw-Hill Book Co., New York, 1937. См. также А. А. Пистолькорс. *Антенны*. Связьиздат, 1947.

нике, индуцируется электродвижущая сила. Она индуцируется переменным магнитным полем и равна интегралу индуцированной электрической напряжённости, взятому вдоль рамки<sup>1)</sup>.

Рассмотрим для простоты прямоугольную рамку с вертикальными сторонами и горизонтальными вершиной и основанием. Пусть проходящая волна имеет вертикально поляризованный электрический вектор. Такая волна будет индуцировать электродвижущую силу в вертикальных частях рамки, но не будет её создавать в горизонтальных частях. Если напряжения, индуцированные в двух вертикальных частях, одинаковы, то в рамке не будет тока. Такие условия создаются, когда плоскость рамки параллельна плоскости фронта волны. Однако, если рамку повернуть на  $90^\circ$  так, чтобы её плоскость стала перпендикулярна плоскости фронта волны и параллельна направлению распространения, то в двух вертикальных частях возникнут напряжения, несколько отличающиеся друг от друга по фазе. Приходящая волна будет достигать одной стороны рамки раньше, чем достигнет другой стороны. Общая электродвижущая сила в рамке определится разностью двух индуцированных напряжений и будет отлична от нуля. Если рамка мала по сравнению с длиной волны принимаемого сигнала, то электродвижущая сила, индуцируемая

---

<sup>1)</sup> Очень часто в отношении приёмных антенн возникает следующий вопрос: чем создаётся напряжение антенны: электрическим полем проходящей волны, или магнитным полем, или тем и другим? Ответ на этот естественный вопрос становится ясным, если учесть, что *везде в пространстве* электрическое поле распространяющейся волны является результатом изменения магнитного поля. Электрическое поле, индуцированное в антенне, также создаётся переменным магнитным полем и не имеет значения рассматривается ли электродвижущая сила, как интеграл электрического поля волны в пространстве (что правильно) или как результат изменений магнитного поля (что также правильно). Аналогично этому можно спросить, почему пробка поднимается на гребень водяной волны — вследствие увеличивающегося давления или благодаря более высокому уровню воды; при движении воды одно не может быть без другого.

Если, однако, приёмная антенна близка к источнику электрического возбуждения того или иного типа, то условия будут совсем иные. Вблизи источника возбуждения преобладает индукционное поле, а поле излучения исчезающе мало. Электрическое индукционное поле создаётся расположенными вблизи зарядами, в отличие от поля излучения, которое создаётся переменным магнитным полем. Электрический экран защищает рамочную антенну от *индукционного поля* близко расположенных источников возбуждения, так как индукционное поле, подобно электростатическому полю, не проникает через замкнутую металлическую поверхность. Но экран (обычно он выполняется в виде трубы, внутри которой расположены провода рамки) не может заметно уменьшить величину магнитного потока, пронизывающего рамку и получающего сцепление с ней при прохождении волны. Если бы экран действовал как короткозамкнутый виток, он уменьшал бы магнитное поле, сцеплённое с рамкой; экран рамочной антенны снабжён изолирующей секцией и по нему вокруг рамки не могут протекать токи. Поэтому антенна, находящаяся внутри экрана, принимает радиосигналы, в то время как значительная часть помех, вызванных индукцией вблизи расположенных источников, отсеивается. Антенны, отличные от рамок, не могут быть экранированы, поскольку их работа зависит от ёмкости по отношению к земле, которую экран устранил.



в каждой вертикальной части, пропорциональна высоте рамки; разность фаз между напряжениями в вертикальных частях пропорциональна ширине рамки; электродвижущая сила, создаваемая во всей рамке, пропорциональна произведению высоты на ширину и, следовательно, площади рамки.

К такому же заключению можно прийти, рассматривая явления с несколько отличной точки зрения, использующей по существу тот же принцип. Электродвижущую силу, индуцированную в рамке, можно считать пропорциональной скорости изменения магнитного потока, пронизывающего рамку [ур-ние (159)]. Тогда сразу станет очевидным, что площадь рамки является определяющим фактором и что рамка принимает максимальный сигнал, когда её плоскость нормальна к магнитному полю волны.

Рамочные антенны обычно имеют больше одного витка и напряжение в антенне пропорционально числу витков. Напряжение на зажимах рамочной антенны при отсутствии тока можно вычислить очень просто. Но когда по рамке течёт ток, существенную роль играет распределённая индуктивность; кроме того, следует учесть сопротивление провода и обратное излучение рамки, а также и комплексное сопротивление приёмника. Поэтому вычисление тока и напряжения при приёме на рамку не менее сложно, чем для других антенн.

Очевидной является возможность использования рамочной антенны для определения направления, по которому приходит сигнал и, значит, направления на передающую станцию. Для определения направления (пеленгации) можно использовать и другие типы направленных антенн, но обычно для этой цели используется рамка.

**Сложные антенны.** При рассмотрении сложных передающих антенн часто оказывается весьма удобным применять принцип наложения полей отдельных излучающих элементов. Так например, две вертикальные антенны, возбуждаемые в квадратуре и расположенные на расстоянии в четверть длины волны друг от друга, как это показано на рис. 52, будут излучать в направлении, идущем от опережающей антенны к отстающей, и не будут излучать в обратном направлении. Причина этого заключается в том, что волна, распространяющаяся от опережающей антенны к отстающей, усиливается последней, так как опережение первой антенны по фазе на четверть периода компенсирует отставание на четверть периода, обусловленное расположением второй антенны в пространстве, в то время как волна, распространяющаяся от отстающей к опережающей антенне, окажется в противофазе с волной, идущей от опережающей антенны, и поэтому результирующая напряжённость поля (на значительном расстоянии) в этом направлении будет равна нулю. Это лишь одна из многих сложных антенн, имеющих большое

практическое значение для создания требуемых диаграмм направленности<sup>1)</sup>.

В частности, представляет практический интерес диаграмма направленности, имеющая вид концентрированного луча, анало-

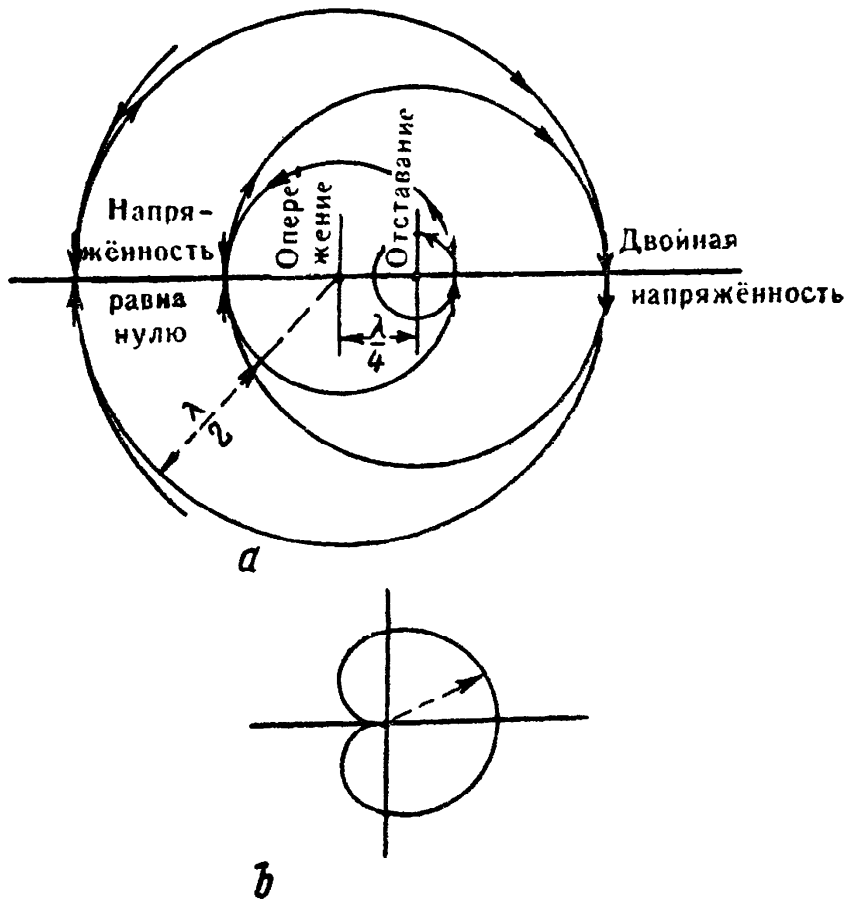


Диаграмма направленности

Рис. 52.

гичного лучу прожектора, с малым рассеянием энергии в других направлениях. Узкий луч можно получить, используя очень большое число излучающих элементов. Если излучающих элементов очень много и они расположены так близко друг к другу, что сливаются в общую проводящую поверхность, то получается эквивалент зеркала. Действительно, излучатель, помещённый в фокусе реального зеркала, может быть использован для увеличения направленности на коротких радиоволнах точно так же, как и для более коротких, световых волн.

Другое средство увеличения направленности заключается в направлении волны вдоль проводящей поверхности. Сферические волны не связаны с граничными условиями: волны, опреде-

<sup>1)</sup> Рассмотрение радиоантенн, для которого данная глава даёт теоретические исходные положения, может быть найдено в гл. XV книги *„Radio Engineering“* Terman'a, а также в указанной выше книге А. А. Пистолькорса *„Антенны.“*

лённые ф-лами (287) и (288), заполняют всё пространство и везде удовлетворяют уравнениям Максвелла (при отсутствии каких-либо неоднородностей). Плоские волны, напротив, должны быть связаны с граничными условиями, так как практически они не могут простираются в бесконечность без уменьшения интенсивности. Один из способов определения граничных условий для плоской волны состоит в том, что электрическое поле волны заканчивается на проводе; тогда волна, начавшая двигаться вдоль провода, должна будет продолжать своё движение вдоль провода до конца. Это имеет место в действительности и позволяет использовать провода в электрических контурах. Провод является не чем иным, как волноводом. Хотя эта концепция не приводит к удобному анализу контуров, она лучшим образом поясняет явление на основе электрических полей.

### ЗАДАЧИ

1. Сравните формулы этой главы с выражениями для напряжённости поля излучения в другой книге, как например, ф-лой.

2. Выведите из ф-лы (297) выражение для электрического поля излучения короткой антенны над идеальной поверхностью земли, устанавливающие зависимость от геометрической высоты антенны и тока в основании антенны (используются практические единицы).

3. Преобразуйте ф-лу (294), чтобы выразить  $E_{\theta}$  в микровольтах на метр для простой короткой вертикальной антенны, расположенной над идеальной поверхностью земли, через высоту, длину волны и расстояние в метрах, напряжение антенны в вольтах и частоту в герцах. Исключите  $\omega$ ,  $l$  и  $c$ .

4. Найдите сопротивление излучения простой вертикальной антенны, высота которой над землёй равна четверти длины волны. Возьмите действующую высоту, равную 0,6 от геометрической высоты. Найдите сопротивление излучения аналогичной антенны, если излучаемая длина волны в 5,6 раза больше высоты. Возьмите действующую высоту, равную 0,55 от геометрической высоты (см. статью С. Балантайна. О сопротивлении излучения простой вертикальной антенны. Сборник «Электрические колебания и волны». Связьиздат, 1941).

5. Покажите, что ф-лы (287) и (288) дают то же значение, что и точные ф-лы (302) и (303) для горизонтального излучения простой вертикальной антенны высотой  $\frac{\lambda}{4}$ , расположенной над идеальной поверхностью земли, если действующая высота антенны взята равной геометрической высоте, умноженной на  $\frac{2}{\pi}$ . Покажите, что при подсчёте общей мощности излучения действующая

высота, равная 0,6 от геометрической высоты (как в задаче 4), является лучшим значением для четвертьволновой антенны и сопротивление излучения равно 36,6 ом. Объясните различие в значении действующей высоты при использовании этого понятия для различных целей.

6. Рамочная антенна, площадью в 1 кв. м, имеющая десять витков провода используется для приёма радиосигналов. Сигнал передаётся вертикальной антенной, высотой в 5 м над землёй. Длина волны 50 м. Приёмная антенна находится на расстоянии 10 км от передающей и ориентирована так, что приём максимален; она расположена высоко над поверхностью земли. Найдите силу сигнала у приёмника в микровольтах на метр и напряжение холостого хода в микровольтах.

(III. 3. 4.) книги А. А. Пистолькорса „Антенны“.

## Глава XIII

### ВОЛНОВОДЫ

**Канализуемые волны** <sup>1)</sup>. Электромагнитная волна, излучаемая в открытое пространство, является сферической волной и распространяется с одинаковой скоростью во всех направлениях. В этом случае нет препятствий и волна может свободно распространяться от источника по всем направлениям. Однако, наличие препятствий будет влиять на её распространение.

Подобно тому, как твёрдая поверхность изменяет направление распространения звуковой волны, поверхность, на которой меняются электрические свойства, изменяет направление распространения электрической волны. Это явление наблюдается, в частности, при встрече электрической волны с хорошо проводящей поверхностью, так как внутри проводящего тела не может существовать электрическая волна. Способность проводящего материала служить границей электрической волны используется в различного рода волноводах для получения направленного распространения электрических волн, так же как твёрдые стенки разговорной трубы, предотвращающие рассеяние звуковых волн в пространстве, используются для канализации звука. Линия электропередачи, как и телефонная линия, является волноводом. Поверхность медного провода такой линии служит границей, на которой заканчивается электрическое поле волны, и волна распространяется как плоская волна, следуя вдоль проводника от одного его конца к другому. Благодаря проводникам передаваемая волна не рассеивается в виде сферической волны, и оказывается способной распространяться в виде плоской волны, а вся её энергия направляется вдоль линии передачи.

Чтобы показать необходимость в граничной поверхности, рассмотрим плоскую волну рис. 46, стр. 124. Эта волна была описана в гл. X, при чём предполагалось, что она не ограничена в плоскости, нормальной к направлению распространения. Подобная неограниченная волна хороша с математической точки

---

<sup>1)</sup> Прим. переводчиков. Мы вынуждены были ввести термин „канализуемые волны“ (guided waves) для обозначения волн, распространяющихся вдоль поверхности проводников или диэлектриков. Введённый термин, возможно, далёк от совершенства, но необходим для правильного обозначения физически и практически важного понятия.

зрения, но, конечно, физическая волна не может охватывать бесконечное пространство. Реальная плоская волна должна укладываться внутри конечных пределов.

В область, в которой распространяется волна, можно внести тонкий лист идеально проводящего материала, не повлияв на волну. Для этого необходимо, чтобы лист везде был нормален к электрическому полю. Если проводящий лист поместить параллельно или наклонно к электрическому полю, в нём появится ток, искажающий поле; проводящая поверхность, нормальная к полю (рис. 53), его не искажает.

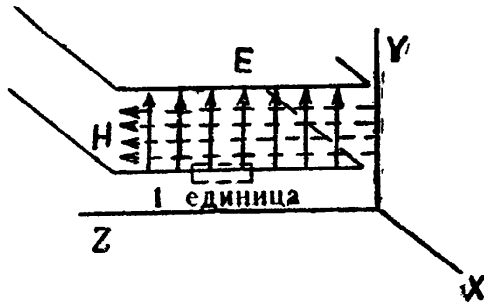


Рис. 53.

Когда в поле имеются проводящие поверхности, электрические силовые линии оканчиваются на зарядах на поверхностях, плоская волна распространяется между поверхностями и ограничена пространством между ними. Нет необходимости в том, чтобы волна существовала за такими поверхностями.

Рассмотрим нижнюю поверхность рис. 53. Если волна, как показано на рисунке, существует над поверхностью, но отсутствует под ней, то на поверхности оканчиваются электрическое и магнитное поля. Электрическое поле может оканчиваться только на электрических зарядах (так как при отсутствии зарядов дивергенция электрического поля равна нулю), и поэтому должно существовать соответствующее распределение зарядов на поверхности. Магнитное поле может скачком падать до нуля лишь на поверхности, обтекаемой током (так как при отсутствии тока его ротор равен нулю), следовательно, по поверхности рис. 53 должен течь ток. Эти два требования взаимозависимы, ибо когда меняется заряд на поверхности, следуя бегущей волне, то его движение создаёт ток. Это не означает, что заряды двигаются со скоростью бегущей волны. (Молекулы воздуха, переносящего звуковую волну, также не двигаются со скоростью звука.) Это означает лишь, что ток течёт из областей, где плотность зарядов уменьшается, в области, где плотность зарядов растёт.

Если плоская волна двигается между проводящими поверхностями нормально к ним и без искажений, то токи, текущие по поверхностям, должны удовлетворять двум требованиям: они должны создавать необходимый ротор, чтобы действовать в качестве граничной поверхности для магнитного поля и одновременно создавать правильное распределение зарядов, чтобы всё время на этих зарядах оканчивалось электрическое поле. Посмотрим, возможно ли это.

*Во-первых*, существует определённая связь между электрическим полем и магнитным полем волны, определяемая уравне-

ниями Максвелла. Волна в свободном пространстве не может существовать, если не выполнено равенство

$$[\nabla \mathbf{H}] = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (198)$$

Чтобы применить это уравнение к плоской волне рис. 53, его надо записать в прямоугольных координатах. Так как  $H_x$  и  $H_y$  равны нулю, а  $H_z$  не должно меняться с изменением  $y$ , то уравнение (198) записывается в прямоугольных координатах следующим образом

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (304)$$

Волна на рис. 53 может меняться по любой функции времени, но электрическая и магнитная составляющие всегда остаются связанными уравнением (304).

*Во-вторых*, распределение зарядов на граничной поверхности связано с напряжённостью электрического поля у этой поверхности. Если обозначить через  $\sigma$  заряд на единицу площади, то заряд на нижней проводящей поверхности рис. 53 должен быть равен

$$\sigma = \frac{E_y}{4\pi}. \quad (305)$$

Так как  $E$  изменяется со временем, то будет изменяться и плотность заряда. Рассмотрим некоторую точку на проводящей поверхности, в которой плотность заряда увеличивается; заряд в данной точке пополняется током, текущим параллельно оси  $x$ . Если ток, приносящий этот заряд, течёт в положительном направлении оси  $x$ , является положительным током и приносит положительные заряды, он станет несколько меньше после того, как пройдёт через рассматриваемую точку и потеряет там часть своего положительного заряда. Количественно уменьшение тока с изменением расстояния равно увеличению заряда со временем. Если буквой  $i_x$  обозначить ток в направлении  $x$  в полоске проводящей поверхности, имеющей ширину, равную единице, то

$$-\frac{\partial i_x}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (306)$$

Комбинируя уравнение (306)<sup>1)</sup> с уравнением (305), получим иско-

<sup>1)</sup> Уравнение (306) является частным видом „уравнения непрерывности“, которое можно вывести следующим образом. Из уравнений Максвелла следует, что

$$[\nabla \mathbf{H}] = \frac{1}{c} \left( 4\pi i + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right).$$

Найдём дивергенцию обеих частей этого равенства. Слева дивергенция ротора тождественно равна нулю; справа дивергенция даёт член с дивергенцией  $\mathbf{D}$ . Вместо дивергенции  $\mathbf{D}$  подставляем  $\nabla \mathbf{D} = 4\pi \rho$ .

Тогда

$$4\pi \nabla i + \frac{\partial}{\partial t} (4\pi \rho) = 0,$$

откуда

$$\nabla i = - \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

мую связь между меняющимся электрическим полем и током

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -4\pi \frac{\partial i_x}{\partial x}. \quad (307)$$

Это выражение определяет величину тока, необходимого для того, чтобы на поверхности оканчивалось данное электрическое поле.

*В-третьих*, ток в проводящей поверхности рис. 53 должен быть связан с напряжённостью магнитного поля, параллельной этой поверхности. Можно считать, что изменяющееся магнитное поле волны индуцирует ток в проводящей поверхности. Лучшее представление получается при рассмотрении тока, как границы магнитного поля. Опыт IX показал, что

$$\oint H ds = \frac{4\pi}{c} i, \quad (167)$$

т. е. что интеграл магнитного поля по замкнутому пути связан с током, который охватывается этим контуром интегрирования. Если ур-ние (167) применить к прямоугольному контуру интегрирования, как показано пунктиром на рис. 53, при чём стороны контура, параллельные проводящим поверхностям, взять единичной длины и поместить верхнюю сторону в магнитное поле, а нижнюю в пространстве, где поля нет, то это уравнение примет вид

$$H_z = \frac{4\pi}{c} i_x. \quad (308)$$

Полученное выражение определяет ток в проводящей поверхности, необходимый для создания граничной поверхности для магнитного поля. Здесь  $H$  направлено по положительному направлению оси  $z$ , а  $i$  в положительном направлении оси  $x$ .

Чтобы сравнить это значение с током, который необходим для создания соответствующего электрического поля, продифференцируем ур-ние (308)

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\partial i_x}{\partial x}. \quad (309)$$

Из сравнения ур-ний (309) и (307) видно, что один и тот же ток обеспечивает ограничение электрического и магнитного полей, если только электрическое и магнитное поля связаны между собой соотношением

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (310)$$

Но электрическое и магнитное поля всегда так связаны между собой, ибо эта связь идентична ур-нию (304), полученному из

уравнения Максвелла. Таким образом, мы приходим к заключению, что волна *может* быть ограничена в пространстве между двумя идеально проводящими плоскими параллельными поверхностями, поскольку ток, текущий в этих поверхностях, обеспечивает соответствующие граничные условия как для электрического, так и для магнитного поля волны.

Чтобы избежать необходимости в повторении этого доказательства для каждой проводящей поверхности, действующей в качестве волновода, можно показать, что это справедливо вообще для всех волн, у которых электрический вектор нормален к идеально проводящей поверхности. Доказательство этого представляет собой обобщение доказательства, которое было дано для плоской волны. Оно приводит к заключению, что для электрического и магнитного полей, связанных между собой уравнениями Максвелла, соответствующие этим полям граничные условия всегда создаются током, который течёт в идеально проводящей поверхности, нормальной к электрическому полю. Детали этого доказательства мы не приводим, но результат можно применять в дальнейшем рассмотрении волноводов.

Бегущая волна может распространяться между криволинейными проводящими поверхностями, и таким образом, преодолевать повороты. Радиус кривизны должен быть велик по сравнению с длиной волны, так как процесс поворота состоит из искажений и отражений, в процессе которых электрическое поле само себя восстанавливает, оставаясь нормальным к проводящим поверхностям.

**Влияние потерь.** В идеально проводящем материале, из которого были по предположению выполнены граничные поверхности, ток течёт по поверхности. Ток не проникает в такой материал. Как электрическое, так и магнитное поля оканчиваются у поверхности, где скачком происходит разрыв непрерывности. В реальных проводниках, например медных, ток течёт по всему проводнику, но стремится концентрироваться (особенно при высоких частотах) в области, *прилегающей* к поверхности. Как электрическое, так и магнитное поля проникают, хотя и не глубоко, в медь, и изменяющееся магнитное поле внутри меди является причиной тока. Глубина проникновения тока зависит от скорости изменения напряжённости поля; следовательно, при синусоидальной волне она зависит от частоты. Этот эффект называется «скин-эффектом» и проявляется в том, что на низкой частоте ток распределяется практически равномерно по толщине проводящего материала, в то время как при высокой частоте он течёт очень близко к поверхности.

Так как при прохождении тока по меди, или по другому реальному проводнику, происходят некоторые потери энергии, то в реальном волноводе бегущая волна теряет энергию. Её интенсивность постепенно уменьшается. Кроме того, вследствие ко-



нечного сопротивления проводящего материала ток никогда не достигает той величины, которую он должен был бы иметь, и соответственно этому волна несколько изгибается назад у краёв, а скорость распространения уменьшается. Для волны поле вектора Пойнтинга направлено так, что оно имеет небольшую составляющую, направленную в медь. Скорость канализуемой волны несколько меньше, чем скорость света в свободном пространстве.

Если волна распространяется вдоль поверхности, которая не является идеально проводящей (как например, в случае волны, бегущей внутри волновода вдоль металлической поверхности, или волны излучения, распространяющейся над землёй), то электрическое поле не точно нормально к поверхности. Электрическое поле наклонено вперёд, как будто бы оно «волочится», проходя над неидеальным проводником. Поэтому вектор Пойнтинга наклонён к поверхности, указывая, что электрическая волна является источником энергии, расходуемой током в проводнике.

Это позволяет осуществить практически важный метод измерения удельного сопротивления почвы при радиочастоте. Количество энергии, теряемой в поверхности земли при прохождении волны над ней, зависит от проводимости земли; следовательно, угол наклона электрического вектора является мерой проводимости. Используя направленную приёмную антенну для определения угла наклона электрического вектора такой волны, можно определить эффективное удельное сопротивление земли.

**Ограниченные волны.** Несмотря на то, что волна рис. 53 ограничена в одном измерении, в другом она по-прежнему простирается в бесконечность. А в таком виде волна физически не осуществима. Однако, подобное рассмотрение приводит к двум практически применяемым типам волноводов.

Представим себе, что нижняя проводящая поверхность рис. 53 изогнута вниз и свёрнута в цилиндр, а верхняя проводящая поверхность изогнута вверх и также свёрнута в цилиндр. В результате мы получим параллельные проводящие цилиндры, изображённые на рис. 54 и являющиеся волноводом для плоской волны. Электрические силовые линии оказываются изогнутыми и вытянутыми в дуги окружностей, а магнитные силовые линии окружают цилиндрические проводники ортогональным семейством окружностей.

Чтобы убедиться, что эти проводники, составляющие двухпроводную, длинную линию, будут вести себя как волновод, необходимо лишь показать, что уравнения Максвелла удовлетворяются в пространстве между проводниками и вокруг них. Это доказательство, хотя и несколько громоздко, но не трудно. Для более простых полей концентрической линии доказательство можно получить без труда (см. задачу 1, стр. 188).

Волна, канализуемая параллельными проводниками, заполняет бесконечное пространство; но её напряжённость уменьшается во всех направлениях, а энергия конечна. Поэтому такая волна физически осуществима. Однако, физическая волна между параллельными проводниками отличается от математической волны: она должна генерироваться в одном месте и заканчиваться на нагрузке в другом, а вблизи концов линии волна не будет плоской.

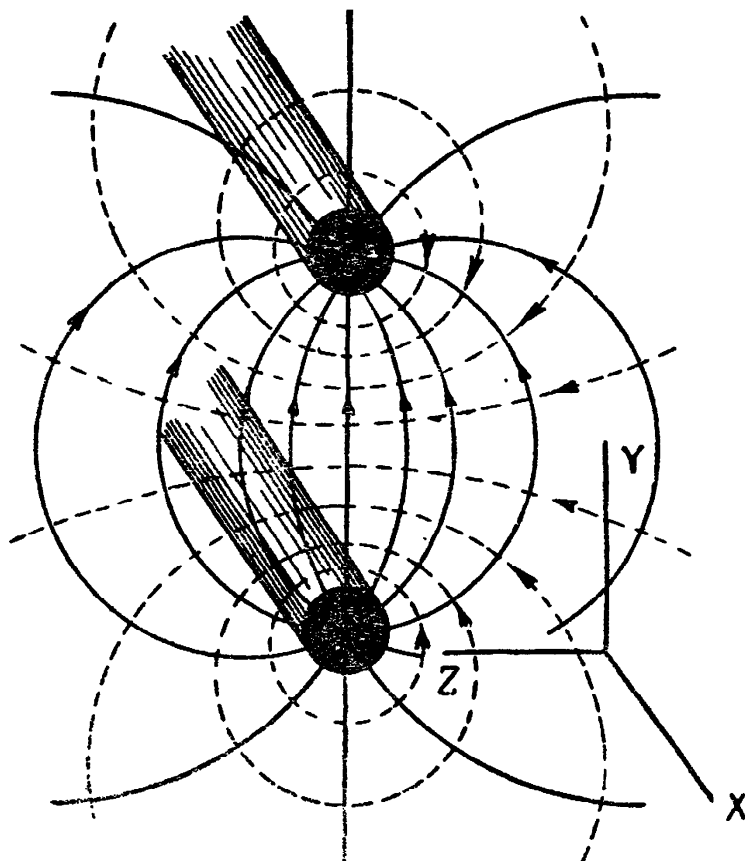


Рис. 54.

Здесь она совершает некоторый переход от квазисферической волны к квазиплоской. Аналогичное возмущение имеет место там, где меняется направление линии, или изменяется диаметр проводников, или расстояние между ними. Если волна не является строго плоской, то часть энергии излучается линией, и вместо того, чтобы следовать вдоль проводников, уходит вообще в пространство. Эти потери на излучение ничтожны на промышленной частоте, но при радиочастоте они могут быть очень существенны.

В случае использования цилиндрических проводников, не обладающих идеальной проводимостью, влияние потерь будет почти таким же, как и при применении плоских проводников. Ток в какой то мере проникает в проводники; понятно, что при низкой частоте ток протекает по всему проводнику. Скорость распространения несколько меньше скорости света. Волна, строго гово-

ря, не является плоской и изгибается назад вблизи провода. Уравнения длинной линии следует рассматривать лишь как хорошее приближение, за исключением случая линий без потерь, где они точно описывают процесс. (Это справедливо даже тогда, когда сопротивление и утечка линии учтены в уравнениях.)

Большая часть выводов уравнений длинной линии основывается на предположении, что ёмкость и индуктивность каждого короткого участка линии могут рассматриваться независимо от остальных частей линии. Это предположение требует подтверждения, так как не очевидно, что между различными участками линии нет электрического или магнитного влияния. Подтверждение можно найти в приведённом выше доказательстве: предположенные электрическое и магнитное поля удовлетворяют уравнениям Максвелла; следовательно, предположение справедливо. Однако, это подтверждение получено лишь для идеальных проводников. Если имеются потери, то уравнения длинной линии, полученные этим методом, дают хорошее и полезное приближение, но, строго говоря, не точны.

**Полые волноводы.** Рассмотрение параллельных плоскостей рис. 53 наводит на мысль о другом типе волновода. Волна между двумя плоскостями ограничена по вертикали, но не по горизонтали. Применим две другие проводящие плоскости в качестве боковых стенок прямоугольного волновода (рис. 55).

Немедленно при этом мы сталкиваемся с затруднением. На поверхности добавочных плоскостей тангенциальная составляющая электрического поля должна быть равна нулю, так как они являются проводящими. Поэтому следует рассмотреть волну, электрическая напряжённость которой, будучи везде вертикальной, уменьшается до нуля у боковых поверхностей волновода. Это обозначено на диаграмме уменьшающейся плотностью электрического потока.

Такое электрическое поле, вследствие меняющейся напряжённости, имеет составляющую ротора, направленную по оси  $x$ , и поэтому требует наличия составляющих магнитного поля как по оси  $x$ , так и по оси  $z$ . Результирующее магнитное поле будет поперечным в середине волновода, но искривляется и становится аксиальным по сторонам, как это указано пунктиром на рис. 55. Магнитные силовые линии образуют замкнутые петли и значит магнитное поле не имеет дивергенции, что действительно и должно быть.

Структура электрического и магнитного полей, показанная на рис. 55, не может быть создана одной плоской волной того типа, который рассматривался в настоящей и предыдущей главах, но, как это не удивительно, её можно создать двумя плоскими волнами, одновременно распространяющимися внутри волновода. Ни одна из этих волн не движется вдоль волновода по его оси; обе следуют по зигзагообразному пути с многократными

отражениями от стенок волновода, как показано на рис. 56а. Через волновод без искажений проходит только синусоидальная волна. Предположим поэтому, что волны I и II на рис. 56а являются синусоидальными волнами. Угол, под которым они падают, зависит от длины волны и размера волновода.



Рис. 55.

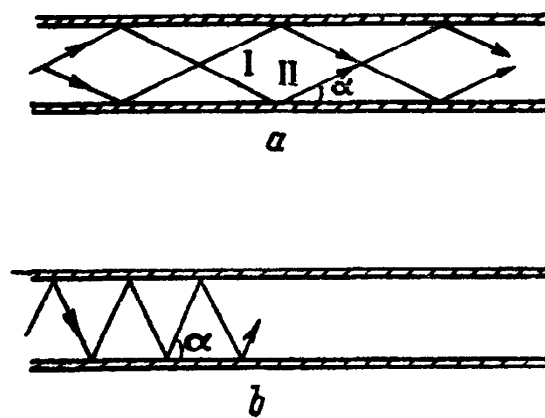


Рис. 56.

Отметим следующее существенное обстоятельство: две синусоидальные плоские волны с одинаковой амплитудой и частотой, двигающиеся под углом друг к другу, дают нуль при наложении вдоль определённых поверхностей.

Рассмотрим рис. 57. На нём показаны две волны: одна заштрихована чёрным, другая белая. Они распространяются в несколько различных направлениях, как указано стрелками: белая волна почти прямо от читателя, а чёрная волна — направо. Вол-

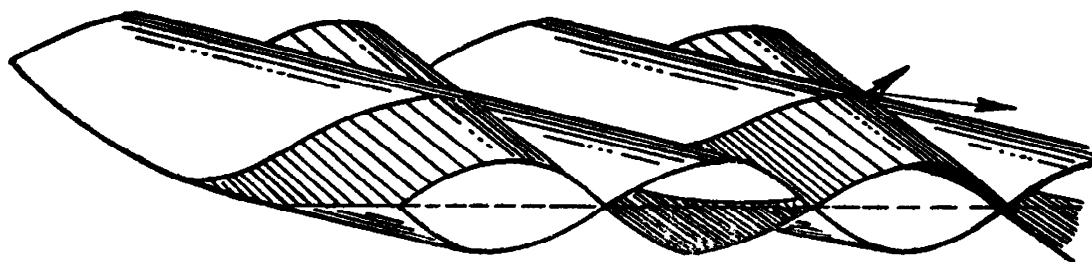


Рис. 57.

ны обрезаны спереди вертикальной плоскостью, проходящей через пунктирную прямую, направление которой является средним между направлениями распространения двух волн. Сечение волн этой вертикальной плоскостью даёт пару синусоидальных кривых, которые на рисунке видны в виде краёв волн.

Волнистые поверхности на рисунке представляют электрическую напряжённость двух электромагнитных волн. Пусть расстояние изображённых поверхностей по вертикали от нейтральной плоскости, измеренное вверх или вниз от неё, определяет

электрическую напряжённость. Если электрическая напряжённость одной волны равна, но противоположна по знаку электрической напряжённости другой, то результирующая напряжённость равна нулю. Это получается во всех точках, расположенных на пунктирной прямой, так как там, где чёрная волна расположена над пунктирной прямой, белая находится под ней на том же расстоянии, и наоборот.

То же самое имеет место и на другой плоскости, параллельной пунктирной прямой, которая перерезает волну с противоположной стороны. На обеих этих плоскостях суммы двух волн везде в точности равны нулю. В промежуточных точках сумма двух волн не равна нулю и общая результирующая волна имеет форму, показанную на рис. 58. Максимальное значение этой ре-

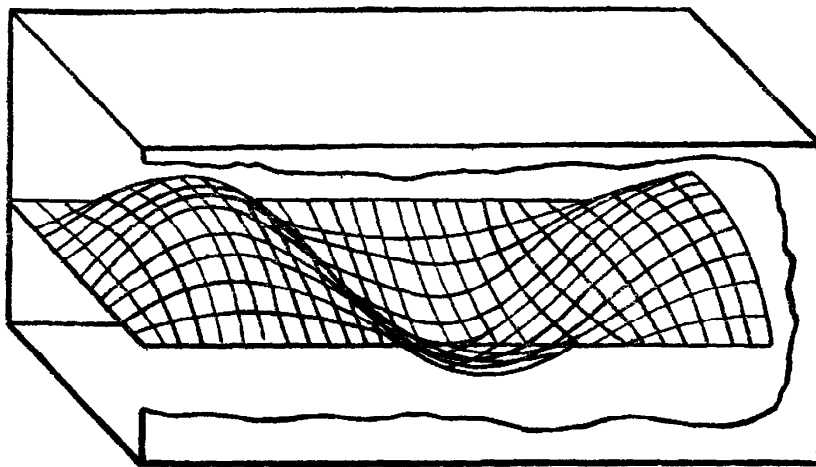


Рис. 58.

зультирующей волны (расположенное там, где гребни чёрной и белой волн рис. 57 совпадают) равно двойному значению амплитуды каждой из составляющих волн.

Так как результирующая напряжённость электрического поля на указанных граничных поверхностях везде равна нулю, то две электромагнитные волны, представленные на диаграмме, могут существовать внутри прямоугольного волновода соответствующих размеров. Они удовлетворяют требованию отсутствия тангенциальной составляющей электрического поля на проводящей поверхности: везде на верхней и нижней стенках волновода электрическое поле нормально к поверхности, а на боковых стенках оно равно нулю. Обе волны следуют зигзагообразным путём внутри волновода, как показано на рис. 56, и отражаются то от одной, то от другой стенки. В действительности, имеется лишь одна волна, так как каждая из волн является отражением другой.

Общий результат сводится к движению вдоль волновода серии электромагнитных пульсаций, как изображено на рис. 58.

Этот рисунок поясняет природу электрической составляющей волны, но не изображает магнитного поля. Распределение как электрической, так и магнитной составляющих при этом типе волны, распространяющейся в волноводе (известном под названием волны  $TE_{0,1}$ ), показано на рис. 59.

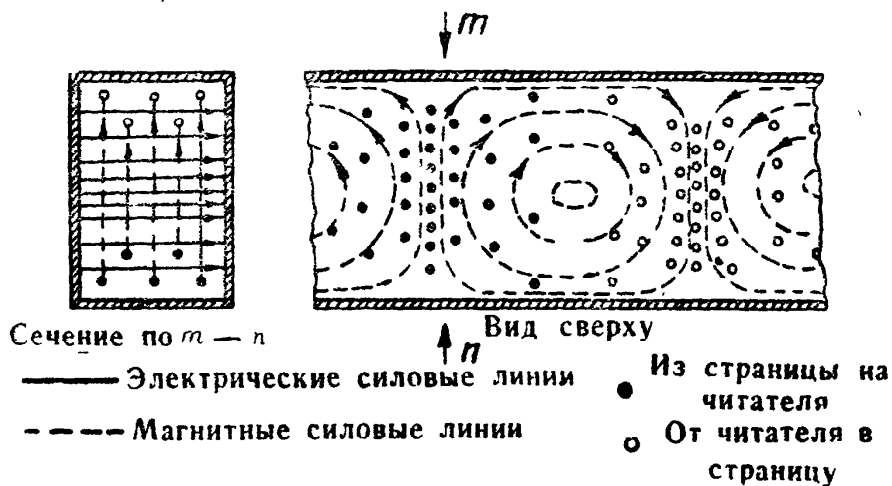


Рис. 59.

**Групповая скорость.** Волны в волноводах обладают рядом специфических свойств и ограничений. Одно из них заключается в том, что передача радиосигнала вдоль трубы происходит со скоростью несколько меньшей скорости света. Это легко объяснить, если учесть зигзагообразный путь, показанный на рис. 56, по которому следуют обе составляющие. Каждая составляющая плоская волна бежит со скоростью света вдоль зигзагообразного пути, однако, скорость движения сигнала *вдоль волновода* получается несколько меньше, так как зигзагообразный путь больше, чем длина оси волновода. Если можно было бы наблюдать телеграфную точку или тире или огибающую телефонной модуляции, то они были бы видныдвигающимися вдоль волновода со скоростью несколько меньшей, чем скорость света. Эту скорость называют *групповой скоростью*  $v_g$ .

Групповая скорость волны в волноводе зависит от её частоты. Рассмотрим пересекающиеся волны, показанные на рис. 60, и распространяющиеся вдоль прямоугольного волновода. (Заметьте, что линии на рис. 60 обозначают гребни волн, а не направление их распространения. Направление распространения нормально к этим гребням. Диаграмма похожа на рис. 56, но смысл пересекающихся линий диаметрально противоположен.)

Для данной ширины волновода угол, который составляют волны между собой, определяется их длиной волны. Волны должны пересекаться под таким углом, чтобы поперёк волновода, как показано на рис. 60, укладывалась длина волны с тем, чтобы электрическое поле было равно нулю на обеих проводящих поверхностях. Чем больше длина элементарной волны, тем боль-

ше угол. Для низкочастотной волны зигзагообразный путь окажется сжат (рис. 56*b*), и групповая скорость будет относительно мала. Наконец, если половина длины волны становится равной ширине волновода, то две составляющих волны будут отражаться взад и вперед поперёк волновода, образуя стоячую волну, но в этом случае не будет никакого движения вперед по волноводу.

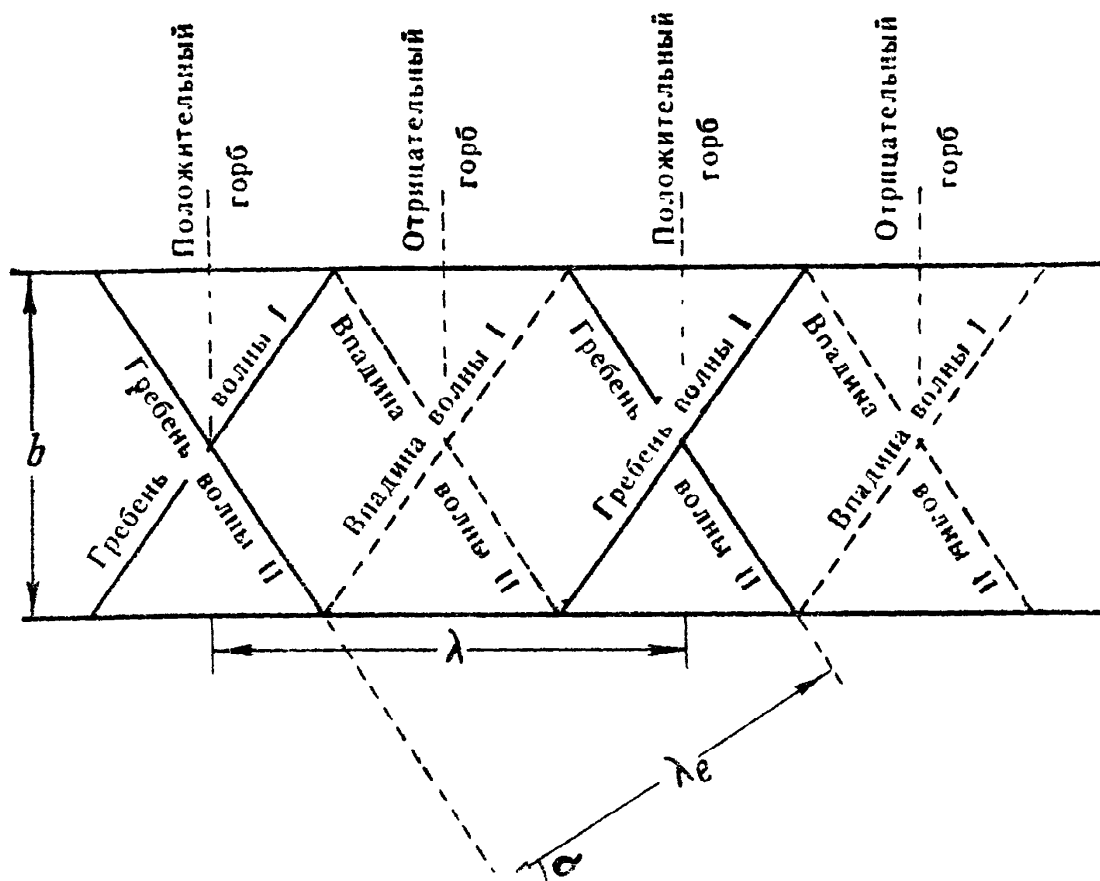


Рис. 60.

Это — критическая частота волновода; волна меньшей частоты не может передаваться, поскольку никакая волна более низкой частоты не может иметь электрическое поле, равное нулю на обеих боковых стенках волновода.

Наиболее длинная волна, которая ещё может передаваться вдоль прямоугольного волновода с размерами  $a$  и  $b$  (рис. 55), следовательно, равна

$$\lambda_0 = 2b \quad (311)$$

и критическая частота

$$f_0 = \frac{c}{2b}. \quad (312)$$

(Это основано на хорошо известной связи между длиной волны  $\lambda$ , скоростью распространения  $c$  и частотой  $f$ , или угловой частотой  $\omega$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}. \quad (313)$$

Заметим, что в ур-нии (311)  $\lambda_0$  — критическая длина волны элементарной волны, или длина волны в свободном пространстве при критической частоте, а в ур-нии (312)  $c$  — соответственно обозначает скорость распространения в свободном пространстве.)

Групповая скорость волны  $TE_{0,1}$  равна

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_e}{2b}\right)^2}. \quad (314)$$

Она зависит от  $\lambda_e$  — длины волны элементарной волны. Легко видеть, что она стремится к нулю, когда  $\lambda_e$  приближается к  $2b$  и стремится к скорости света при очень коротких волнах.

**Фазовая скорость.** Теперь обратимся к длине волны электромагнитного поля в волноводе. Длина волны представляет расстояние между гребнями на рис. 58, или расстояние между точками пересечения гребней составляющих волн на рис. 57 и 60. Гребни волн указаны на рис. 60; на этом рисунке расстояние  $\lambda_e$  — длина элементарной волны и  $\lambda$  — кажущаяся длина волны или расстояние между гребнями суммарной волны. Кажущаяся длина волны больше, чем длина элементарной волны.

В соответствии с этой кажущейся длиной волны кажущаяся скорость получается больше скорости света. Рассмотрим пересекающиеся гребни двух элементарных волн, показанных на рис. 61. Сплошными линиями показано положение гребней в данный момент; пунктирные линии изображают то положение, которое было на единицу времени раньше. Расстояние, на которое волна продвинется вперед в течение этого интервала времени, характеризует скорость. В точке пересечения гребней элементарных волн расположен гребень результирующей, т. е. наблюдаемой волны. Эта точка пересечения продвигается быстрее, чем отдельные волны. В результате, если картина волны рис. 58 была бы видна, мы наблюдали бы распространение вдоль волновода со скоростью, большей скорости света. Кажущаяся скорость называется *фазовой скоростью*, так как она является скоростью движения данной фазы результирующей волны.

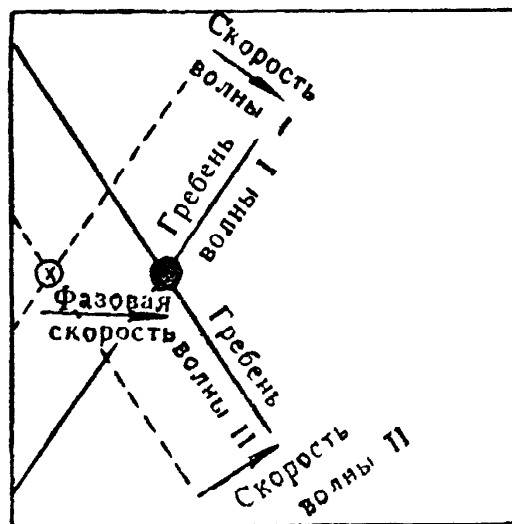


Рис. 61.

Кажется парадоксальным, что наблюдаемая скорость волн, бегущих в волноводе, оказывается больше скорости света, в то



время как переносимый этими волнами сигнал движется с групповой скоростью, меньшей скорости света. Тем не менее это так. Рассмотрим рис. 62, на котором показана «несущая» волна, укладывающаяся внутри модулированной огибающей<sup>1)</sup>. Если бы несущая волна была видна в волноводе, то мы бы наблюдали её движение с фазовой скоростью, в то время как картина модуляции двигалась бы с меньшей — групповой скоростью<sup>2)</sup>. Следовательно, несущая волна как бы проскальзывает вперёд в модулированной огибающей, и каждый отдельный гребень несущей волны меняет свою амплитуду, проходя неровности огибающей до тех пор, пока он вовсе не исчезнет, достигнув самой передней точки огибающей.

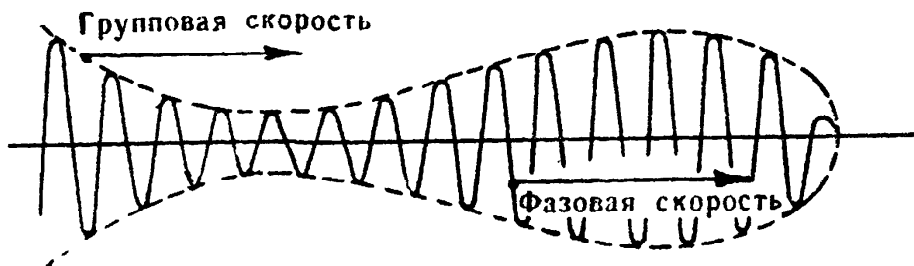


Рис. 62.

Рисунок 61 поясняет, почему наблюдаемая волна может прекратить своё существование. Гребни волны сходят на нет в правой части рисунка. Этот конец гребня можно рассматривать как самую дальнюю точку, до которой дошёл сигнал. Наблюдаемая волна является результирующей двух элементарных волн и имеет горб в точке пересечения элементарных волн; горб движется быстро слева направо до тех пор, пока гребни элементарных волн не пройдут друг друга и не будут больше пересекаться, и после этого просто исчезнет. Представим себе две волны, движущиеся под углом друг к другу на поверхности воды. В этом случае можно легко представить исчезновение двойного гребня в точке их пересечения.

Часто океанская волна или большая волна в озере достигает подпорной стены, построенной вдоль берега, под небольшим углом. Вместо того, чтобы перекинуться прямо через берег и по всей своей длине в одно и то же мгновение сломаться, столкнувшись со стеной, волна достигает одного конца стены несколько раньше, чем другого. Проследить за такой волной можно по появлению пены и брызг и подъёму воды в той точке, где волна разбивается о стену. Подъём воды начинается с приходом волны

<sup>1)</sup> Рассмотрим также в качестве совсем не математического примера быстро идущий гусеничный трактор. Небольшие волны (поперечные или волны давления, в зависимости от типа трактора) пробегают по нему от хвоста до головы. Эти волны продвигаются с фазовой скоростью, тогда как сам трактор движется с групповой скоростью.

<sup>2)</sup> См. «Замечание о групповой и фазовой скорости» на стр. 189.

у одного конца стены и далее, когда постепенно место излома волны передвигается от одного конца стены к другому, подъём воды (который отмечает гребень волны) кажется бегущим с большой скоростью вдоль стены. Эта скорость может быть во много раз большей действительной скорости движения волны вперёд, и оказывается тем большей, чем меньше угол между волной и стеной. Кажущаяся скорость вдоль стены является фазовой скоростью, в точности аналогичной фазовой скорости в волноводе.

Фазовая скорость волны  $TE_{0,1}$  равна

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_e}{2b}\right)^2}}. \quad (315)$$

Отсюда видно, что фазовая скорость больше скорости света во столько же раз, во сколько групповая скорость меньше её. Для очень коротких волн фазовая скорость, как и групповая скорость, приближается к скорости света, но на частотах, близких к критической частоте, фазовая скорость стремится к бесконечности.

Следует заметить, в частности, что сигнал не может двигаться с фазовой скоростью. Он движется всегда с групповой скоростью.

**Искажения.** До сих пор мы ограничивались рассмотрением распространения в волноводах синусоидальной волны данной частоты. (Модулированные волны требуют наличия нескольких частот — боковых полос и несущей, но сделанные заключения не меняются существенно, если полоса передаваемых частот узкая.) При передаче по волноводу несинусоидального сигнала он при распространении искажается. Причина этого заключается в том, что основная составляющая и различные гармоники (имеющие различные частоты), на которые может быть разложена любая волна, распространяются вдоль волновода с различными скоростями. Следовательно, основная составляющая и гармоники в точке приёма не будут иметь такого соотношения фаз, какое они имеют у передающего конца. Поэтому суммарная волна будет иметь другую форму. Общая тенденция при этом заключается в округлении углов и в других характерных признаках размазывания формы волны. Однако, практически это не существенно, так как, учитывая порядок величин частот, пригодных для передачи в полом волноводе, можно видеть, что для любой цели, мыслимой в настоящее время, распространяющаяся волна может являться несущей.

**Вывод формул.** Очевидно, что независимо от того, рассматриваются ли явления в волноводе с точки зрения одной волны или двух зигзагообразных волн, электрическое и магнитное поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла. Общее решение волновых уравнений Максвелла показывает, что внутри волновода заданной формы могут распространяться волны различной струк-

туры; но мы ограничимся волнами того типа, который изображён на рис. 55.

Так как электрическое поле волны параллельно оси  $y$ , то составляющие по оси  $x$  и  $z$  сразу можно приравнять нулю, как это сделано ниже в ур-нии (317).

Предполагается, что зависимость от времени синусоидальна, и поскольку волна распространяется вдоль оси  $x$ , то она описывается синусоидальной функцией от  $(x - v_\psi t)$ , где  $v_\psi$  — фазовая скорость. Если частота равна  $f$  и  $\omega = 2\pi f$ , то электрическое поле можно записать в виде следующей функции времени

$$\sin \frac{\omega}{v_\psi} (x - v_\psi t) = \sin(\alpha x - \omega t), \quad (316)$$

где

$$\alpha = \frac{\omega}{v_\psi}.$$

Электрическое поле должно быть равно нулю при  $z=0$  и  $z=b$ . Это условие удовлетворяется только в том случае, если напряжённость электрического поля меняется вдоль оси по синусоиде, имея в начале значение нуль, возрастает до максимального значения при  $\frac{b}{2}$ , и вновь падает до нуля на стенке волновода при  $z = b$ . При синусоидальном пространственном распределении с максимальной напряжённостью поля, равной  $A$ , напряжённость при любом значении  $z$  будет  $A \sin \frac{z}{b} \pi$ .

Объединяя зависимости от времени и от поперечной координаты точки в одном уравнении, получим

$$E_y = A \sin\left(\frac{z}{b} \pi\right) \cdot \sin(\alpha x - \omega t) \quad (317)$$

и, кроме того,

$$E_x = 0 \quad \text{и} \quad E_z = 0.$$

Волна, определяемая ур-нием (317), удовлетворяет граничным условиям в прямоугольном волноводе, так как уравнение было написано с учётом этих условий. Однако, физически возможна лишь та электромагнитная волна, которая является решением волнового уравнения.

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (206)$$

и удовлетворяет уравнению

$$\nabla \mathbf{E} = 0. \quad (201)$$

То обстоятельство, что последнее условие удовлетворяется, является очевидным. Если волновое уравнение записать в пря-

моугольных координатах, положив  $E_x = 0$  и  $E_z = 0$ , мы получим [см. ур-ние (207)]

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (318)$$

Дифференцируя  $E_y$  в ур-нии (317) и подставляя полученное значение в ур-ние (318), после упрощения получаем

$$\frac{\pi^2}{b^2} + \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (319)$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что волна, представленная ур-нием (317), соответствует решению, удовлетворяющему волновому уравнению, *если* выполняется соотношение (319). Учитывая, что  $\alpha = \frac{\omega}{v_\psi}$ , можно удовлетворить ур-ние (319) волной, фазовая скорость которой равна

$$v_\psi^2 = \frac{\omega^2}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}. \quad (320)$$

Это означает, что рассматриваемая волна может существовать лишь при условии, что она распространяется с фазовой скоростью, зависящей от частоты волны и размеров волновода. Если частота настолько мала, что  $\frac{\omega}{c}$  меньше, чем  $\frac{\pi}{b}$ , то для фазовой скорости нет вещественных решений, следовательно, нельзя удовлетворить волновое уравнение и волна не может существовать. Это определяет критическую частоту, которая, как легко видеть, совпадает с определяемой выражением (312). Уравнение (320), дающее фазовую скорость, можно преобразовать к виду ур-ния (315).

Теперь мы знаем, что электрическая волна может распространяться в волноводе. Она может иметь произвольную амплитуду  $A$  [ур-ние (317)], но её частота должна быть больше известного минимума, а фазовая скорость определяется частотой колебаний и размером волновода. Все эти сведения получены из волнового уравнения.

Чтобы определить магнитное поле волны, воспользуемся уравнением Максвелла

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (199)$$

Для наших целей, как и в большинстве расчётов, удобнее записать его в развёрнутой форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (321)$$

В рассматриваемой волне отлично от нуля лишь  $E_y$ . Определяя частные производные  $E_y$  из уравнения (317) и подставляя их в уравнение (321), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial t} = \alpha A \sin\left(\frac{z}{b} \pi\right) \cdot \cos(\alpha x - \omega t) - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \\ &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\pi}{b} A \cos\left(\frac{z}{b} \pi\right) \cdot \sin(\alpha x - \omega t) \end{aligned} \quad (322)$$

Составляющие магнитного поля определяются интегрированием по времени средних и правых частей этого уравнения. Таким образом,

$$H_z = -c \int \alpha A \sin\left(\frac{z}{b} \pi\right) \cdot \cos(\alpha x - \omega t) dt;$$

это даёт

$$\left. \begin{aligned} H_z &= \frac{c}{\omega b} A \sin\left(\frac{z}{b} \pi\right) \cdot \sin(\alpha x - \omega t). \\ \text{Аналогично} \\ H_z &= \frac{c\pi}{\omega b} A \cos\left(\frac{z}{b} \pi\right) \cdot \cos(\alpha x - \omega t) \\ \text{и} \\ H_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (323)$$

Теперь известны все составляющие электрического и магнитного полей волны в волноводе, а рассмотрение соотношений (317) и (323) подтверждает, что рис. 59 даёт правильное изображение волны. Прямая  $m-n$  на этом рисунке проходит через сечение волны, для которого  $(\alpha x - \omega t)$  несколько меньше, чем  $\frac{\pi}{2}$ .

**Влияние потерь.** Поскольку предполагалось, что волновод выполнен из идеально проводящего материала, в нём не могло быть потерь энергии, и волна при распространении не затухала. В действительности это невозможно и все волны в большей или меньшей степени затухают.

Если частота лишь немного превышает критическую, то затухание происходит очень быстро, так как элементарные волны многократно отражаются от металлических стенок, а при каж-

дом отражении происходят потери энергии. На частоте, в два-три раза большей критической, находится оптимальная рабочая точка, где затухание минимально. При более высоких частотах потери опять возрастают, но возрастают очень медленно. Рост потерь является следствием токов, текущих в стенках волновода, на которых заканчиваются электрические силовые линии. В стенках волновода должны быть заряды, из которых исходят электрические силовые линии, а так как поле меняется при прохождении волны, то течёт ток. Увеличение затухания на высоких частотах объясняется «скин-эффектом», несколько увеличивающим потери.

Электрические силовые линии не исходят из двух стенок волновода. Эти стенки необходимы для того, чтобы протекающий в них ток создавал соответствующие граничные условия для магнитного поля. В них течёт поперечный ток, не имеющий составляющей, параллельной оси волновода, поскольку у данной поверхности лишь  $H_x$  отличается от нуля. В случае идеально проводящего материала магнитный поток не проникает в эти стенки и магнитное поле скачком падает до нуля у её поверхности. Однако, в реальном случае в стенку проникает как раз такой магнитный поток, который необходим для индуцирования электродвижущей силы, обуславливающей ток, необходимый для создания граничных условий для магнитного поля. Ток, протекая в материале, не обладающем идеальной проводимостью, вызывает потери мощности. Эти потери непрерывно уменьшаются с увеличением частоты главным образом потому, что  $H_x$  [согласно ур-нию (323)] уменьшается на высоких частотах.

**Структура поля волны.** Предыдущее рассмотрение касалось одного типа волны (волны типа  $TE_{0,1}$ ) в прямоугольном волноводе. В волноводах как круглых, так и прямоугольных, возможно бесчисленное количество электрических и магнитных полей различной структуры. Мы опишем несколько типов волн, имеющих наибольшее практическое значение.<sup>1)</sup>

Одной из самых замечательных волн является волна типа  $TE_{0,1}$  в круглом волноводе. При этой волне, показанной на рис. 63, все электрические и магнитные силовые линии представляют собой замкнутые петли. Ни одна из электрических силовых линий не заканчивается на зарядах стенок волновода. Соответственно этому в металлической трубе течёт меньший ток, чем при волнах других типов и получаются меньшие потери. Вследствие того, что нет электрических силовых линий, заканчивающихся на стенках волновода, рассмотренная выше составляющая потеря, которая возрастает с частотой, полностью отсутствует и

---

<sup>1)</sup> Детальное рассмотрение волнопроводов смотри в книге: Введенский Б. А. и Аренберг А. Г. *Радиоволноводы*, Гостехиздат, 1946 г. В книге приведена подробная библиография.

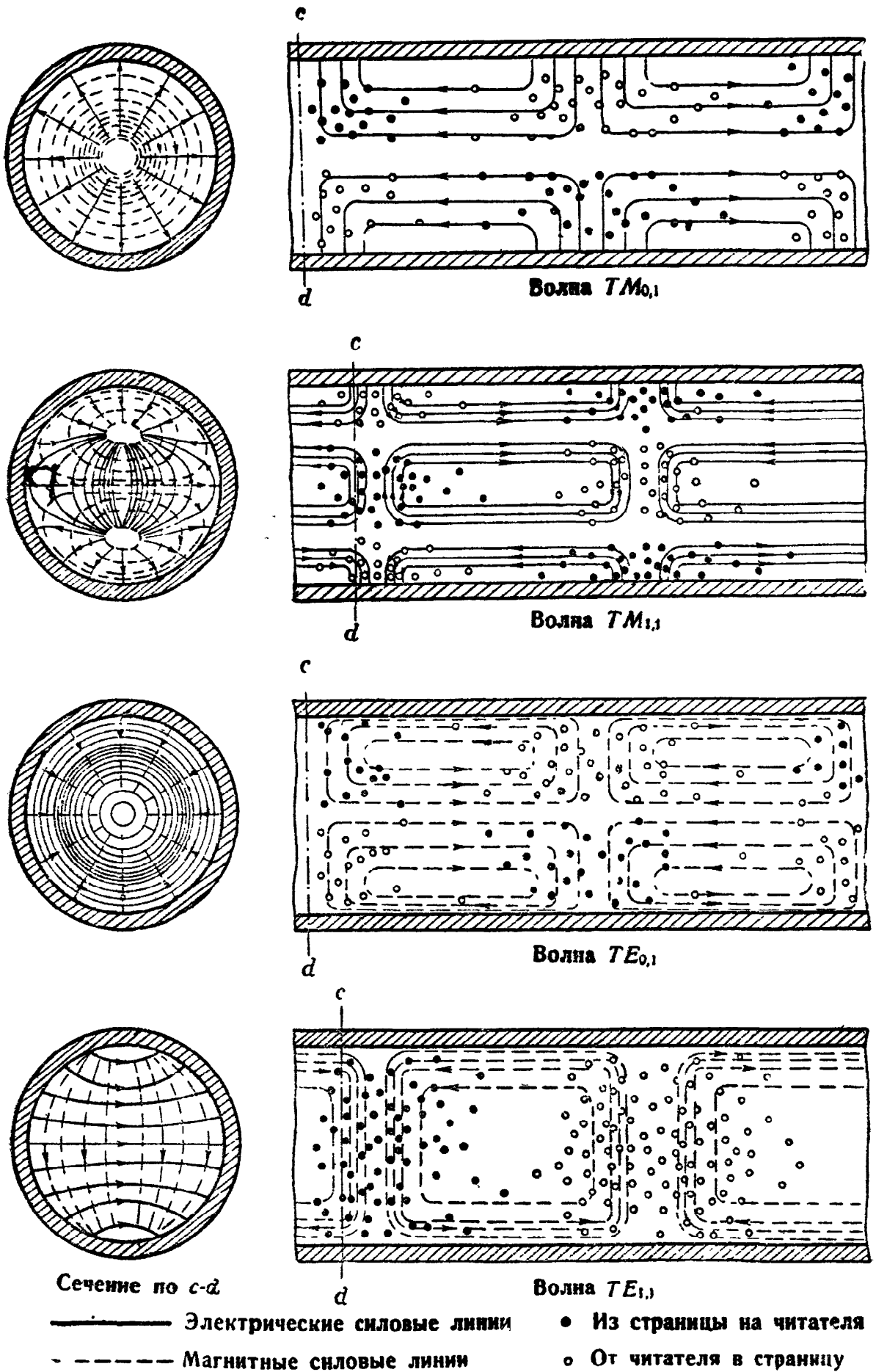


Рис. 63.

волна  $TE_{0,1}$  обладает замечательной и ценной особенностью: её затухание уменьшается при увеличении частоты. (Неприятность заключается в том, что при наличии этих теоретических преимуществ волна, как показывает эксперимент, оказывается нестабильной).

Ток в цилиндрическом волноводе при волне типа  $TE_{0,1}$  течёт вокруг волновода. Осевая составляющая тока, направленная вдоль волновода, отсутствует. Читателю, привыкшему рассматривать длинную линию, как средство передачи тока, это кажется странным, но если рассматривать длинную линию как волновод и учесть, что ток течёт в линии лишь для того, чтобы обеспечить граничные условия для электрического и магнитного полей, то новая концепция приводит к необходимому результату.

С этой точки зрения двухпроводная воздушная линия и полый волновод отличаются тем, что в первом случае существует внешнее поле, окружающее линию, в то время как во втором случае поля находятся внутри проводящей поверхности. Концентрическая линия представляет собой промежуточный случай. Проводники всех волноводов и длинных линий служат для переноса зарядов и токов, на которых заканчиваются поля и которые обеспечивают существование канализуемых волн, не рассеивающих бесполезно энергию в пространство.

Хотя проводящую поверхность следует считать лучшим волноводом, однако, она не является единственно возможным типом его. Диэлектрическая поверхность также может служить границей для определённых типов волн. Разрыв непрерывности на границе между материалом с высокой и с низкой диэлектрической постоянной позволяет ограничить волну в материале с высокой диэлектрической постоянной. Практическое использование диэлектрических волноводов затрудняется тем, что потери во всех известных диэлектриках слишком велики и поэтому такие волноводы не могут обеспечить удовлетворительные условия для распространения волны.

Тип волновода, наиболее пригодного в каждом частном случае, определяется условиями и, в частности, частотой. При промышленной частоте лучшим волноводом будет воздушная линия. При радиочастотах более пригодной является концентрическая линия, поскольку несмотря на большую сложность изготовления, она обладает ничтожно малыми потерями на излучение. Полые волноводы обладают ещё другими очень важными качествами. Секцию волновода можно закрыть на концах и тогда она будет действовать как электромагнитный резонатор. Волновод может быть расширен в рупор, который излучает волны сверхвысоких частот при очень острой диаграмме направленности. Нет сомнений в том, что и впредь будут применяться все три типа волноводов.



## ЗАДАЧИ

1. Волна, распространяющаяся в концентрической линии, у которой один из проводников представляет собой сплошной цилиндр, а другой—коаксиальный полый цилиндр, может быть описана во всём пространстве между проводниками следующими выражениями:

$$E_r = \frac{E_0}{r} \sin \frac{\omega}{v} (z - vt)$$

$$E_\theta = E_z = 0;$$

а) эта волна может существовать, если электрическое поле не имеет дивергенции, и когда она представляет собой решение волнового уравнения [ур-ние (206)]. Проверьте, удовлетворяются ли эти условия;

б) из уравнений Максвелла определите магнитное поле этой волны;

в) найдите ток во внутреннем проводнике, полагая проводимость идеальной. Покажите, что этот ток обеспечивает соответствующие граничные условия как для электрического, так и для магнитного полей;

г) найдите поле вектора Пойнтинга;

д) найдите скорость волны, если пространство между проводниками заполнено маслом (как это делается в силовых кабелях) с диэлектрической постоянной 2,17.

2. Найдите зависимость групповой скорости волны в полном прямоугольном волноводе от угла между направлением распространения элементарных составляющих волны и осью волновода. Обозначьте этот угол через  $\alpha$ .

3. Выразите угол  $\alpha$  задачи 2 через длины элементарной составляющей волны и размер  $b$  волновода (рис. 60). Отсюда выведите ур-ние (314).

4. Найдите из рис. 61 фазовую скорость и покажите, что она может быть выражена ур-нием (315).

5. Напряжённость поля волны, поступающей в волновод, имеет форму  $E = E_m (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t)$ . Нарисуйте форму напряжённости поля на входе и различных точках, взятых вдоль волновода. Критическая частота волновода равна половине частоты основной составляющей этой напряжённости. Затуханием пренебрегите.

6. Покажите, что дивергенция электрического поля, описанного ур-нием (317), равна нулю в пространстве внутри волновода.

7. а) Покажите, что дивергенция магнитного поля, определяемого ур-нием (323), равна нулю;

б) докажите, что дивергенция *любого* магнитного поля, данного уравнением Максвелла [ур-ние (199)], должна быть равна нулю.

8. Если на передающем конце волновода возбуждаются колебания с частотой, меньшей критической частоты волновода, то внутри волновода не может быть распространяющейся волны. Что же будет происходить? Считайте, что стенки волновода идеально проводящие.

## ЗАМЕЧАНИЕ О ГРУППОВОЙ И ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ

Различие между групповой и фазовой скоростью в волноводе можно объяснить, рассматривая непрерывно отражающиеся элементарные волны. Однако, волновод является лишь частным случаем. Обычно же не представляется возможным применить разложение на составляющие волны для объяснения групповой и фазовой скорости. Общее условие заключается в следующем: если скорость распространения волн зависит от длины волны, то групповая скорость отличается от фазовой.

Волны, расходящиеся по поверхности воды, представляют наиболее знакомый пример. Если на поверхность воды в пруде падает камень, то во все стороны от точки возмущения расходится группа волн в виде концентрических окружностей. В группе, как показано на рис. 64, имеется ряд волн: волны вблизи середины группы имеют наибольшую амплитуду, а внутренние и внешние волны исчезающе малы. Внимательно наблюдая, можно заметить, что отдельные волны движутся быстрее, чем группа в целом. Волна, появляющаяся у внутренней границы группы, увеличивает свою амплитуду, двигаясь от центра; следующие волны появляются одна за другой сзади неё. После того, как волна прошла середину группы волн, амплитуда её уменьшается до тех пор, пока волна не окажется внешней волной и, наконец, исчезнет. Отдельные волны движутся с фазовой скоростью, группа волн с групповой скоростью.

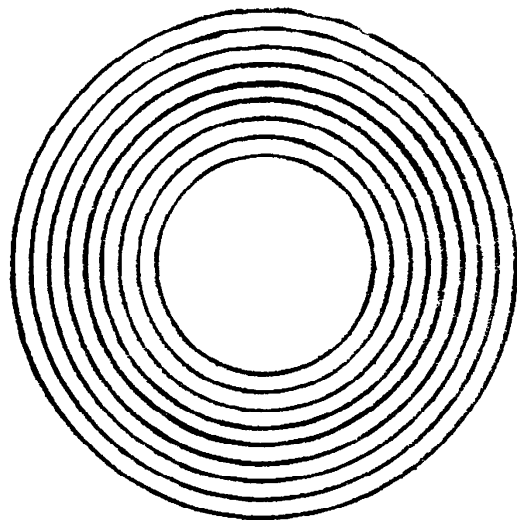


Рис. 64.

На рис. 65 дано поперечное сечение группы волн. Рисунок показывает, что группу можно рассматривать как сумму двух волн с одинаковыми амплитудами, но несколько различными частотами. (Это, очевидно, аналогично разложению модулированной радиоволны на несущую и боковые частоты.) Два гребня волны с более короткой длиной волны отмечены цифрами 1 и 2;

два гребня волны с большей длиной волны отмечены буквами  $a$  и  $b$ . В момент, показанный на рисунке, гребни  $1$  и  $a$  совпадают (совмещаются), поэтому они суммируются, давая наибольший из гребней результирующей волны, отмеченный  $I$ . Положение группы волны (т. е. положение пунктирной огибающей) определяется положением максимального гребня.

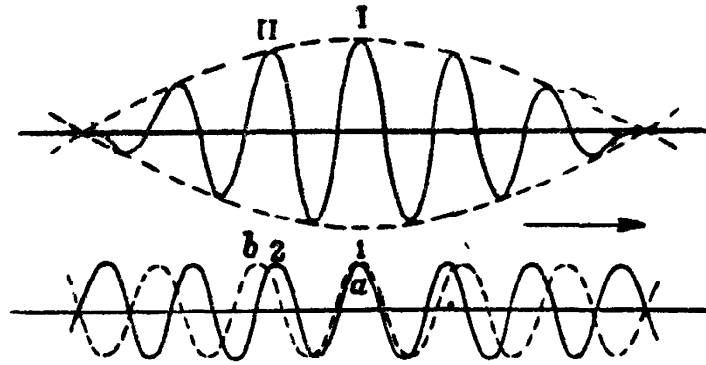


Рис. 65.

Предположим теперь, что волна рис. 65 бежит слева направо, и что природа среды такова, что длинные волны распространяются несколько медленнее (фазовая скорость меньше), чем короткие волны. В несколько более поздний момент времени гребень  $b$  перекроет гребень  $2$ . Когда это случится, гребень  $a$  продвинется вперёд по отношению к гребню  $1$ . Соответственно в более поздний момент времени (к этому моменту все волны продвинутся на заметное расстояние вправо), гребень, отмеченный римской цифрой  $II$ , станет максимальным и центральным гребнем результирующей группы. Следовательно, центр волн продвинется вправо на меньшее расстояние (меньшее на одну длину волны), чем составляющие волны рис. 65. Скорость группы волн, названная групповой скоростью, поэтому меньше (в данном случае), чем фазовая скорость.

Математически, фазовая скорость волны, как и в ур-нии (316), равна

$$v_{\psi} = \frac{\omega}{\alpha}. \quad (324)$$

Легко доказать, что групповая скорость равна

$$v_g = \frac{d\omega}{d\alpha}. \quad (325)$$

Если постоянную сдвига фазы  $\alpha$  выразить в виде функции частоты и продифференцировать её, то можно получить групповую скорость. Таким образом, из ур-ния (315) или (320) для фазовой скорости можно получить выражение (314) для групповой скорости в волноводе.

Применение этой формулы к волнам на воде показывает, что фазовая скорость вдвое больше групповой скорости (если только волны достаточно велики, чтобы не было влияния поверхностного натяжения).

Фазовая скорость волн на воде равна

$$v_{\psi} = \frac{g}{2\pi f} = \frac{g}{\omega}, \quad (326)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести, а  $f$  — частота волны. Очевидно, что высокочастотные волны распространяются медленнее. Из уравнения (324).

$$\alpha = \frac{\omega}{v_{\psi}} = \frac{\omega^2}{g}. \quad (327)$$

После дифференцирования имеем

$$\frac{dx}{d\omega} = \frac{2\omega}{g},$$

откуда

$$v_g = \frac{d\omega}{dx} = \frac{g}{2\omega} = \frac{1}{2} v_{\psi}, \quad (328)$$

что и указывалось выше.

Необходимо понять, что когда волновое движение имеет синусоидальный и стационарный характер, понятие групповой скорости теряет смысл. В этом случае нет групп; можно наблюдать лишь отдельные волны, а они распространяются с фазовой скоростью. При наличии двух частот, как в случае, показанном на рис. 65, или трёх частот, например, в виде несущей и двух боковых частот стационарного модулированного колебания, картина в высшей степени проста. Однако, при нестационарных процессах, как например, в случае кольцевых волн, вызванных падением камня в воду, или в случае короткой посылки радиоволны в виде телеграфной точки или тире, присутствуют все частоты. В данных условиях анализ результата оказывается очень сложным<sup>1)</sup>, несмотря на то, что качественно он аналогичен простейшему случаю.

Инженеру-электрику наиболее знакомо изменение скорости с частотой в линии, обладающей потерями. Если сопротивление и утечка не связаны условием «отсутствия искажений», то фазовая скорость волн будет меньше, чем в такой же линии без потерь. Фазовая скорость волны при низкой частоте меньше, чем фазовая скорость при высокой частоте. Групповую скорость можно вычислить по фазовой скорости. На обычной длинной линии групповая скорость всегда *больше* фазовой скорости<sup>1)</sup>.

Фазовая скорость радиоволн в ионосфере зависит от частоты. Это объясняется колебательным движением электронов в ионизи-

<sup>1)</sup> Смотри, например, E. A. Guillemin „Communication Networks“ II, John Wiley and Sons, New York, 1935.

рованном слое и вторичным излучением энергии, происходящим с несколько отличной фазой. В результате фазовая скорость оказывается большей, чем скорость света, а групповая скорость меньше скорости света. Групповая скорость может быть очень мала. Некоторые авторы придают этому обстоятельству большое значение в связи с тем, что иногда наблюдаются сигналы, достигающие радиоприёмной станции на несколько секунд позже, чем они должны были бы прийти, если бы распространялись со скоростью света в свободном пространстве.

Другим примером зависимости фазовой скорости от частоты является распространение света в прозрачном материале. В стекле, например, высокие частоты (синий свет) распространяются медленнее, чем низкие частоты (красный свет). Одним из следствий этого является хорошо известное явление дисперсии в призмах. Как фазовая, так и групповая скорости меньше скорости света в свободном пространстве и за исключением особых случаев групповая скорость меньше фазовой скорости.

---

## ЛИТЕРАТУРА <sup>1)</sup>

### Книги на русском языке

- Н. Н. Лузин. Дифференциальное исчисление, «Советская наука», 1946.
- Н. Н. Лузин. Интегральное исчисление, «Советская наука», 1946.
- Г. Пиаджо. Интегрирование дифференциальных уравнений. ГТТИ, 1933.
- Н. Е. Кочин. Векторное исчисление, ГОНТИ, 1938.
- Р. В. Поль. Введение в учение об электричестве, ГТТИ, 1933.
- М. Абрагам и Р. Беккер. Теория электричества, ОНТИ, 1936.
- И. Е. Тамм. Основы теории электричества. ГТТИ, 1946.
- К. Шефер. Теоретическая физика. Том III, ч. I. Электродинамика, ОНТИ, 1937.
- Б. П. Асеев. Основы радиотехники, Связьиздат, 1947.

<sup>1)</sup> Список литературы дан в сокращённом и изменённом виде. Часть рекомендованных автором книг заменена равноценными или лучшими книгами на русском языке.

- В. В. Татаринов. Коротковолновые направленные антенны, Связьтехиздат, 1934.
- А. А. Пистолькорс. Антенны, Связьиздат, 1947.
- Электрические колебания и волны. Сборник под ред. В. К. Лебединского и М. В. Шудейкина, Связьиздат, 1941.
- Б. А. Введенский и А. Г. Аренберг. Радиоволноводы, ГТТИ, 1946.
- А. И. Бачинский, В. В. Путилов и Н. П. Суворов. Справочник по физике, Учпедгиз, 1941.

### Книги на английском языке

- Guillemin, E. A. Communication Networks, vol. II John Wiley and Sons, New York. 1935.
- Everitt, W. L. Communication Engineering. Mc Graw-Hill Book Co, New York. 1937.
- Terman, F. E. Radio Engineering. Mc Graw-Hill Book Co, New York. 1937.
- Pierce G. W. Electric Oscillations and Electric Waves. Mc Graw-Hill Book Co, New York. 1920.

## ПРЕДМЕТНЫЙ И ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А.

Абрагам М. 88, 144, 193  
 Австральное направление 93  
 Ампер А. 115  
 Ампер-виток (единица) 92  
 Ампера закон 98  
 Антенна, действующая высота её  
 154, 156  
 Антенны длинные 158  
   » короткие 153  
   » приёмные 160  
   » рамочные 162  
   » сложные 164  
   » экранированные 163  
 Аренберг А. Г. 185, 193  
 Асеев Б. П. 135, 193

### Б.

Баллантайн, С. 166  
 Безвихревое поле 54  
 Беккер Р. 88, 144, 193  
 Боральное направление вектора Пойн-  
 тинга 133  
 Боральное направление векторного  
 произведения 19  
 Боральное направление магнитной ин-  
 дукции 87  
 Боральное направление магнитного  
 поля 93  
 Боральное направление магнитной си-  
 лы 85  
 Боральное направление, правило пра-  
 вой руки для его определения 94

### В.

Введенский Б. А. 185, 193  
 Вебер Э. 8  
 Вектор Герца 147  
 Вектор Пойнтинга 128, 155  
 Векторное поле 25  
 Векторное произведение 18, 23  
   »                   »                   тройное 24  
 Векторный анализ 17  
 Векторный потенциал 54, 139  
 Векторов умножение 17

Волна, её распространение 117  
   » уравнения её 119, 121, 125,  
   183  
 Волноводы 166, 167  
   » диэлектрические 187  
   » полые 174  
   » структура поля в них 185  
 Волновое уравнение 118, 125  
 Волны канализуемые 167  
   » плоские 124  
   » стоячие 135  
   » сферические 149

### Г.

Гальванометр баллистический 86  
 Гаусс (единица) 86  
 Гаусса система единиц 9, 85, 98  
 Гаусса теорема 46  
 Генри И. 86  
 Герц Г. 123, 136  
 Герца вектор 147  
 Гильберт (единица) 92  
 Градиент 26, 32  
   » потенциала 52  
   » ротор его 37  
 Граничные поверхности 104  
 Групповая скорость 177, 189  
 Гюллемин Е. А. 191, 193

### Д.

Движение, индуцированное благодаря  
 ему напряжение 88  
 Дель 32  
 Декартовы координаты 21, 22  
 Джорджи система единиц 8  
 Диаграмма направленности 157, 160,  
 165  
 Диамагнитные материалы 100  
 Дивергенция 28, 32, 45  
   » ротора 37  
 Динамическое электромагнитное поле  
 114  
 Диэлектрики 73, 105  
 Диэлектрическая постоянная 13, 73  
 Диполь осциллирующий 148  
 Длинные линии 172, 187, 191

Е.

Единиц «практическая система» 8  
 » «симметричная» система 9  
 » система Гаусса 9, 85, 98  
 » система Джорджи 8  
 » система Лоренца 10  
 » система CmGS 9  
 » система MkGS 8  
 » система электромагнитная 9, 98  
 Единиц система электростатическая 9  
 Единичный вектор 20  
 Единицы 8, внутренняя сторона обложки  
 Единственности теорема 140  
 Ёмкость 66, 74

З.

Заряд электрический 12  
 Заряда плотность 60, 62

И.

Излучение 113, 145, 150  
 » его составляющая поля 150  
 » напряжённость его поля 149, 154, 156, 159  
 Излучения сопротивление 155  
 Индуктивность 104  
 Индукционная составляющая поля 150  
 «Индукционный ускоритель» 109  
 Индукция магнитная 85  
 Ионосфера 136, 191

К.

Катушка тороидальная 102  
 Квазистационарный случай 113, 145  
 Кевендиш Г. 68  
 Кеннели А. Е. 9  
 Керст Д. В. 109  
 Кирхгофа закон 79, 83  
 Конденсатор с параллельными пластинами 79  
 Конденсатор сферический 65, 74  
 Координаты 39  
 » декартовы 21, 22  
 » полярные 39  
 » сферические 63  
 » цилиндрические 54  
 Кочин Н. Н. 193  
 Критенден Е. К. 9, 10  
 Критическая частота 178  
 Кулона закон 67

Л.

Лапласа уравнение 61  
 Лапласиан 38

Лебедянский В. К. 193  
 Ленца закон 99, 111  
 Лоренца система единиц 10  
 Лузин Н. Н. 193

М.

Магнитная индукция 85  
 Магнитная напряжённость 91  
 Магнитная проницаемость 73, 90  
 Магнитная сила 84  
 Магнитная энергия 98  
 Магнитное поле 84  
 » » вокруг провода 95  
 Магнитный поток 86  
 » » плотность его 85  
 » » сцепление его 98  
 Магнитодвижущая сила 92, 103  
 Максвелл Д. К. 53, 68, 113 115, 122  
 Максвелл (единица) 86  
 Максвелла уравнение 112, 116  
 Мощность излучаемая 155

Н.

Набла 32  
 Направленности диаграмма 157, 160, 165  
 Напряжение 66, 74, 81, 88

О.

Обозначения 17  
 Объём 25  
 Ома закон 77  
 Опыт I 7  
 Опыт II 11  
 Опыт III 12  
 Опыт IV 13  
 Опыт V 77  
 Опыт VI 84  
 Опыт VII 86  
 Опыт VIII 89  
 Опыт IX 90  
 Опыты, сводка их 114  
 Отражение 133  
 Осциллирующий диполь 148

П.

Парамагнитные материалы 100  
 Пиаджио Г. 193  
 Пистолькорс А. А. 162, 165, 166, 193  
 Плотность тока 78  
 Площадь 18  
 » положительная 94  
 Поверхности граничные 104  
 Пойнтинга вектор 128, 155  
 Поле излучения, его напряжённость 149, 154, 156, 159



- Поль Р. В. 193  
 Поля 7, 114  
   » безвихревые 54  
   » векторные 25  
   » вокруг провода 95  
   » магнитные 84  
   » скалярные 25  
   » соленоидальные 54  
   » электрические 10, 65  
 Поляризация диэлектрика 74  
   » поперечных волн 128  
 Полярные координаты 39  
 Постоянная диэлектрическая 13, 73  
 Постоянная сдвига фазы 125  
 Потенциал векторный 54, 139  
   » градиент его 52  
   » динамический 141  
   » запаздывающий 145  
   » магнитный скалярный 103  
   » скалярный 51, 139  
   » электрический 60, 65  
 Потери в полых волноводах 184  
   » в длинных линиях 173  
 Поток электрический 14  
   » магнитный 86  
 Потока магнитного плотность 85  
   » электрического плотность 62  
   » сцепление 98  
 Правило правой руки для борального направления 94  
 Правило правой руки для векторного произведения 19  
 Правило правой руки для магнитного поля 94  
 Правило правой руки для магнитной индукции, 87  
 Правило правой руки для магнитной силы 85  
 Правило правой руки для направления распространения волны 133  
 «Практическая» система единиц 8  
 Проводимость удельная 78  
 Проводники 61, 77  
   » электрическое поле в них 106  
 Проницаемость магнитная 73, 90  
 Пауссона уравнение 61  
 Путилов В. В. 193
- Р.**
- Распространение воли 117  
 Резонатор электромагнитный 187  
 Ротор 29, 33, 47  
   » градиента 37  
   » дивергенция его 37  
 Рупор электромагнитный 187
- С.**
- Свет 122, 124, 192  
 Сила 18  
   » взаимодействия между токами 97  
 Сила магнитная 84  
   » электростатическая 73  
 «Симметричная» система единиц 9  
 Система единиц Гаусса 9, 85, 98  
   »   » Джорджи 8  
   »   » Лоренца 10  
   »   » МкGS 8  
   »   » «практическая» 8  
   »   » СмGS 9  
   »   » электромагнитная 9, 98  
   »   » электростатическая 9  
 Скалярное поле 25  
   » произведение 17, 22  
 Скорость групповая 177, 189  
   » распространения волн 120, 122, 144  
 Скорость фазовая 179, 183, 189  
 Сложные антенны 164  
 Смещения ток 81, 115  
 Соленоидальное поле 54  
 Сопротивление 77  
   » излучения 155  
   » почвы, его измерение 172  
 Стокса теорема 50  
 Суворов Н. П. 193  
 Сферические координаты 63  
 Сферический конденсатор 65, 74  
 Сцепление магнитное потока 98
- Т.**
- Тамм И. Е. 193  
 Татаринов В. В. 193  
 Температура 7, 53  
 Теоремы, табл. III внутренняя сторона обложки  
 Термен Ф. Е. 162, 165, 193  
 Ток, плотность его 78  
   » проводимости 81, 115  
   » смещения 81, 115  
 Тройное произведение 24
- У**
- Удельная прозодимость 78  
 Умножение векторов 17  
   » векторное произведение 18, 23  
 Умножение скалярное произведение 17, 22  
 Умножение тройное произведение 24
- Ф.**
- Фазовая скорость 179, 183, 189  
 Фарадей М. 73, 86, 114, 122

- Фарадея закон индукции 87  
 Ферромагнитные материалы 91, 100  
 Флюксметр 89
- Ц.
- Цилиндрические координаты 54  
 Циркуляция 48
- Ч.
- Частота критическая 178
- Ш.
- Шар заряженный 63  
 Шефер К. 193  
 Шулейкин М. В. 193
- Э.
- Эверитт В. Л. 193  
 Эквипотенциальная поверхность 52  
 Электрический поток 14  
 Электродвижущая сила 81, 83  
 Электромагнитные единицы 9, 98  
 Электростатическая сила 73  
 Электростатическая энергия 68  
 Электростатические единицы 9  
 Энергия магнитная 98  
 » электромагнитная 129  
 » электростатическая 68
-

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие к русскому изданию . . . . .	3
Предисловие автора . . . . .	5
Глава I. Опыты с электростатическим полем . . . . .	7
Глава II. Векторный анализ . . . . .	17
Глава III. Некоторые теоремы, относящиеся к полям . . . . .	45
Глава IV. Электростатическое поле . . . . .	59
Глава V. Диэлектрики . . . . .	73
Глава VI. Электрический ток . . . . .	77
Глава VII. Магнитное поле . . . . .	84
Глава VIII. Примеры и пояснения . . . . .	102
Глава IX. Гипотеза Максвелла . . . . .	114
Глава X. Плоские волны . . . . .	124
Глава XI. Излучение . . . . .	138
Глава XII. Антенны . . . . .	153
Глава XIII. Волноводы . . . . .	167
Замечание о групповой и фазовой скорости . . . . .	189
Литература . . . . .	193
Предметный и именной указатель . . . . .	194
Таблица I. Сравнение единиц . . . . .	} внутр. сторо- на обл.
Таблица II. Формулы и теоремы векторного анализа . . . . .	
Таблица III. Основные теоремы электромагнетизма . . . . .	

---

В книге Г. Г. Скиллинга „Введение в теорию электромагнитных волн“ замечены следующие опечатки, допущенные по вине типографии Связь-издата

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
8	2 сн	в раздел 3 . . . . .	в разделе 3 . . . . .
24	17 сн	Соотношения . . . . .	Соотношения . . . . .
47	ф-ла (68)	$\int \Delta D d\upsilon$	$\int \nabla D d\upsilon$
61	21 сн	. . . . . оператора $\Delta$ ,	. . . . . оператора $\nabla$ ,
72	подпись под рисунком	К задаче 2	К задаче 3
80	ф-ла (140)	$\oint \dots da = \dots$	$-\oint \dots da = \dots$
128	15 сн	. . . вектор Пойнтинга.	. . . вектор Пойнтинга.
130	ф-ла (233)	$\oint S da = \frac{c}{4\pi} U [EH] da$	$\oint S da = \frac{c}{4\pi} \oint [EH] da$
135	ф-ла (248)	$H_y = \dots$	$H_y = \dots$
140	ф-ла (259)	$\dots = \frac{c}{4\pi} [\nabla [\nabla A] = ] \frac{c}{4\pi} \dots$	$\dots = \frac{c}{4\pi} [\nabla [\nabla A]] = \frac{c}{4\pi} \dots$
147	13 сн	$E_y = \dots$	$E_r = \dots$
162	2 сн	. . . McGraw-Hill . . . . .	. . . Mc Graw-Hill . . . . .
166	17 сн	. . . как например, ф-лой	. . . как например, ф-лой (III. 3. 4) книги А. А. Пистолькорса „Антенны“
166	1 сн	Вся строка напечатана ошибочно	
172	6 сн	проводную, длинную . . .	проводную длинную . . .
175	Рис. 57	Рисунок следует повернуть на 15° против часовой стрелки . . . . .	
первая внутренняя сторона обложки	15 сн	. . . . . -- c CGSM	. . . = c cmGSM
последняя внутренняя сторона обложки	18 сн	Лапласиан $\nabla^2 F = \dots$	Лапласиан $\nabla^2 F = \dots$

Редактор *В. С. Григорьев.*  
Техн. ред. *Л. В. Вейнтрауб.*

---

Л112399. Сд. в набор 4/VI 1947 г.  
Подп. в печать 9/IX 1947 г.  
12<sup>1</sup>/<sub>2</sub> п. л., 12,72 уч.-изд. л.,  
12,64 авт. л. Тираж 10,000.  
Знаков в печ. листе 46208.  
Зак. изд-ва 3095. Зак. тип. 251.  
Цена в пер. 10 руб.

---

Типография Связьиздата.  
Москва, ул. Кирова, 40.

ЦЕНА 10 РУБ.