ДЖЕМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ

КЛАССИКИ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
ФИЗИКА
АСТРОНОМИЯ

*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА-1952

ДЖЕМС КЛЕРК

МАКСВЕЛЛ

ИЗБРАННЫЕ СОЧИНЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Перевод
З. А. ЦЕЙТЛИНА
под редакцией
П. С. КУДРЯВЦЕВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА - 1952

13-5-4

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория электромагнитного поля—важнейшая глава современной физики, а понятия «поле» и «вещество»—ее фундаментальные понятия, имеющие глубокое мировоззренческое значение. Вместе с тем теория электромагнитного поля является научной основой радио- и электротехники и, таким образом, ее идеи проникают глубоко не только в современную теоретическую физику, но и в современную технику. Теория поля в своем развитии привела к возникновению таких теорий, как теория относительности и теория квант, переживших и переживающих в свою очередь сложную и противоречивую историю. Проблема теории поля имеет также крупнейшее теоретико-познавательное значение, о чем свидетельствуют многочисленные дискуссии на страницах физических, философских и технических журналов. Поэтому ознакомление с трудами одного из основоположников теории поля представляет не только исторический интерес.

Хорошо известно, что теория Максвелла не сразу завоевала признание и оставалась по выражению Больцмана «книгой за семью печатями» для подавляющего большинства физиков 70—80-х годов. Потребовалась длительная и напряженная работа, чтобы новые принципы стали прочным достоянием науки. В этой борьбе важную, можно сказать решающую, роль сыграла русская физика. А. Г. Столетов, Н. А. Умов, Н. Н. Шиллер, П. А. Зилов, Р. А. Колли, И. И. Боргман, П. Н. Лебедев, Д. А. Гольдгаммер, А. А. Эйхенвальд, В. Ф. Миткевич, В. К. Аркадьев, А. А. Глаголева-Аркадьева и многие другие своими исследованиями упрочили, обосновали и развили теорию Максвелла.

Открытие радио А. С. Поповым вывело теорию на путь широких технических приложений и явилось началом новой отрасли науки и техники: радиофизики и радиотехники.

На современном этапе теории поля как в развитии методов и решения частных задач, так и в развитии новых принципов ее фундаментальную роль сыграли работы советских теоретиков: В. А. Фока, И. Е. Тамма, Л. Д. Ландау, Я. И. Френкеля, Д. И. Блохинцева, А. А. Власова, Д. Д. Иваненко, А. А. Соколова, Г. А. Гринберга и др. Глубокие и сложные проблемы современной теории поля активно разрабатываются советскими физиками.

В настоящем издании даны в хронологическом порядке следующие работы Максвелла: 1. «О фарадеевых силовых линиях». 2. «О физических силовых линиях». 3. «Динамическая теория поля». 4. Избранные главы из «Трактата об электричестве и магнетизме».

Некоторые из этих работ в разное время появлялись на русском языке, однако бóльшая часть работ, в том числе и такие фундаментальные вещи, как «О физических силовых линиях» и «Динамическая теория поля», публикуется на русском языке впервые.

Язык Максвелла, как это совершенно справедливо отмечает Больцман (см. стр. 89), представляет огромные трудности для перевода. Максвелл не стремится к законченности и ясности формы изложения своих мыслей; чувствуется, что обилие новых идей препятствует ему достичь такой завершенности. В процессе изложения одного и того же доказательства он нередко использует одни и те же обозначения для различных величин, равно как и не слишком заботится о точности и определенности терминологии. Все это создает большие трудности для переводчика и редактора, которые не всегда, может быть, успешно преодолевались. С другой стороны, если Максвелл с трудом понимался современниками, то сейчас трудности понимания, может быть, даже увеличились. Для разъяснения и развития соответствующих мест подлинника, вероятно, потребовался бы целый том примечаний. Такие комментарии неуместны в сборнике избранных работ, и редакция ограничилась краткими примечаниями историко-методологического характера и разъяснением устаревших терминов и обозначений, которые она не сочла возможным изменить. Пояснения и дополнения в тексте первых трех работ выделены квадратными скобками; в первых двух работах они принадлежат Л. Больцману. Дополнения в тексте избранных глав «Трактата» принадлежат В. Д. Нивену (квадратные скобки) и Дж. Дж. Томсону (фигурные скобки), готовившим соответственно второе и третье английские издания книги.

В настоящем издании использованы некоторые, представляющие наибольший интерес, примечания Л. Больцмана, сделанные им для немецкого издания работ Максвелла «О фарадеевых силовых линиях» и «О физических силовых линиях» («Оствальдовские классики», №№ 69 и 102). Примечания Больцмана напечатаны непосредственно после соответствующих работ. Сноски на примечания Больцмана заключены в квадратные скобки, сноски на примечания редактора и переводчика—в круглые скобки.

П. Кудрявцев

О ФАРАДЕЕВЫХ СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ

ЧАСТЬ I*) (1,2)

СТАТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ И СТАЦИОНАРНЫЙ ТОК

ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние учения об электричестве представляется особенно неблагоприятным для теоретической разработки. Законы распределения электричества на поверхности проводников были аналитически выведены из опытов. В некоторых своих частях математическая теория магнетизма была установлена, между тем как в других—недостает опытных данных. Теория проводимости гальванического тока и взаимодействия проводников представлена математическими формулами, но еще не связана с остальными отделами науки. Современная теория электричества и магнетизма, охватывающая все относящиеся сюда явления, не только должна уяснить связь между покоящимся электричеством и электричеством текущим, но также между притяжениями и индуктивными действиями в обоих состояниях. Такая теория должна полностью удовлетворять законам, математическое выражение которых уже известно, и, кроме того, давать средства для теоретического вычисления случаев, когда известные формулы неприменимы. Чтобы овладеть существую-

---

*) Transactions of the Cambridge Philosophical Society, т. X, 1855—1856 гг.

щими теориями, изучающему приходится освоиться со значительным запасом столь сложных математических формул, что уже трудность удержать их в памяти сама по себе является существенным препятствием к дальнейшему прогрессу. Поэтому для успешного развития теории необходимо прежде всего упростить выводы прежних исследований и привести их к форме, наиболее доступной восприятию. Результаты такого упрощения могут быть представлены или чисто математической формулой или же физической гипотезой. В первом случае мы совершенно теряем из виду объясняемые явления и потому не можем притти к более широкому представлению об их внутренней связи, хотя и можем предвычислять следствия из данных законов ([3]).

С другой стороны, принимая некоторую физическую гипотезу, мы уже смотрим на явления предубежденно и становимся склонными к той слепоте по отношению к фактам и поспешности в допущениях, которым способствуют частные односторонние объяснения. Мы должны поэтому найти такой метод исследования, который на каждом шагу основывался бы на ясных физических представлениях, не связывая нас в то же время какой-нибудь теорией, из которой заимствованы эти представления, благодаря чему мы не будем отвлечены от предмета преследованием аналитических тонкостей и не отклонимся от истины из-за излюбленной гипотезы [[1]].

Для составления физических представлений без принятия специальной физической теории следует освоиться с существованием физических аналогий. Под физической аналогией я разумею то частное сходство между законами двух каких-нибудь областей науки, благодаря которому одна является иллюстрацией для другой. В этом смысле все применения математики в науке основаны на соотношениях между законами, которым подчиняются физические величины, и законами математики, так что цель точных наук состоит в том, чтобы свести проблемы естествознания к определению величин при помощи действий над числами. Переходя от наиболее общей из аналогии к специальной, мы находим сходство в математической форме явлений двух различных областей природы, которое послужило, например, основой физической теории света.

Изменение в направлении лучей света при переходе их из одной среды в другую тождественно с отклонениями материальной частицы от прямолинейного пути при прохождении ее через тонкий слой, в котором действуют силы. На этой аналогии, которая распространяется только на направление, а не на скорость движения, основано одно объяснение преломления света, которое долго признавалось за правильное и которое еще теперь, когда мы уже не рискуем более применять его вне области его пригодности, полезно при решении различных задач как искусственный математический прием. Вторая аналогия между светом и колебаниями упругой среды идет много дальше, и хотя ее значение и плодотворность не могут быть переоценены, мы все-таки должны помнить, что она основана лишь на формальном сходстве между законами световых явлений и законами упругих колебаний. Если мы лишим ее физического облика и сведем к теории «поперечных колебаний», то останется лишь система истин, которая хотя и не внесет ничего гипотетического в наблюдаемые факты, но зато, наверное, будет несостоятельной как в наглядности, так и в плодотворности методов. То, что я сказал об этих много раз обсуждавшихся вопросах оптики, должно служить лишь подготовкой к разбору принимаемой почти всеми теории действия на расстоянии.

Мы все уже свыклись с математическим понятием дальнодействия. Опираясь на него, мы можем делать выводы и выражать формулами соответствующие законы, которые имеют вполне определенное математическое значение и находятся в полном согласии с явлениями природы. Во всей прикладной математике нет ни одной формулы, которая лучше согласовалась бы с опытом, чем закон тяготения, и ни одна теория не пустила более глубоких корней в человеческий разум, чем теория действия тел на расстоянии ([4]). Законы теплопроводности в однородных средах кажутся на первый взгляд в физическом отношении как нельзя более отличными от законов притяжений. Величины, которые мы встречаем в этих новых явлениях, суть *температура*, *поток тепла*, *теплопроводность*. Слово *сила* чуждо этой области науки. Несмотря на это, мы находим, что математические законы стационарного движения тепла в однородных средах тождественны по форме с законами притяжений, будучи обратно пропорциональными квадрату расстояния. Заменяя *центр притяжения источником тепла*, *ускоряющее действие притяжения—тепловым потоком*, *потенциал—температурой*, мы преобразуем решение задач о притяжении в решение соответствующих задач по теплопроводности. Эта аналогия между формулами учений о теплоте и о притяжении была подчеркнута впервые, как мне кажется, проф. Вильямом Томсоном *).

Хотя предполагается, что тепловой поток связан с действием между смежными частями среды, а сила притяжения есть взаимодействие тел на расстоянии, тем не менее математические формулы, выражающие законы той и другой области явлений, совершенно тождественны.

Конечно, обе теории примут совершенно различный вид, если мы включим в круг наших исследований другие соображения и дополнительные факты, но математическое сходство некоторых законов останется в силе и с успехом может быть использовано в полезных математических приемах.

При помощи аналогии такого рода я попытался представить в удобной форме те математические приемы и формулы, которые необходимы для изучения электрических явлений. Мой метод одинаков с тем, которого придерживался Фарадей **) в своих исследованиях и

*) W. Thomson, Cambr. Math. Journal, т. 3, 1842 г.

**) См. Faraday, «Experimental Researches», серия 28 (имеется русский перевод: Фарадей, «Экспериментальные исследования» по электричеству», изд. АНСССР, т. I, 1947 г., т. II, 1951 г.; издание содержит только серии 1—18), а также Phil. Mag., т. 3, 1852 г.

который, хотя ему и дано уже математическое истолкование проф. Томсоном и др., еще довольно часто считают менее определенным и строгим, чем методы, употребляемые математиками-специалистами. Из моего изложения, надеюсь, будет ясно видно, что я не задаюсь целью установить какую-нибудь физическую теорию в той области науки, в которой я не произвел почти ни одного опыта, а имею намерение только показать, каким образом непосредственным применением идей и методов Фарадея лучше всего могут быть выяснены взаимные отношения различных классов открытых им явлений. Поэтому я буду по возможности избегать всего того, что не служит непосредственной иллюстрацией методов Фарадея, или тех математических заключений, которые с ними связаны. При разработке простейших отделов я буду придерживаться не только идей, но и математических методов Фарадея ([5]). Там, где того потребует сложность предмета, я буду пользоваться аналитическими обозначениями, но при этом всегда буду стараться приспособлять их возможно ближе к ходу мысли этого исследователя.

Прежде всего мне следует выяснить и истолковать понятие «силовая линия».

Если какое-нибудь тело наэлектризовано данным образом, то маленькое заряженное положительным электричеством тельце в любом данном положении вблизи первого тела испытывает действие силы, влекущей его по определенному направлению. Если маленькое тельце в такой же степени наэлектризовано отрицательно, то оно будет испытывать действие силы той же величины, но противоположно направленной.

В совершенно той же зависимости находятся намагниченное тело и северный или южный полюсы маленького магнита. Если северный полюс испытывает действие в одну сторону, то южный—в противоположную.

Таким образом, через каждую точку пространства можно провести линию, которая представляет направление электрической или магнитной силы, т. е. той силы, которая действует на помещенную в этой точке положительно наэлектризованную частицу или на точечный северный полюс; та же линия представляет и противоположное направление силы, действующей на отрицательно наэлектризованную частицу или на южный полюс. Так как это справедливо для любой точки пространства, то, исходя из любой точки, можно провести линию таким образом, что ее направление в каждой точке будет совпадать с действующей здесь электрической или магнитной силой; такая кривая в каждой своей точке будет указывать направление этой силы и потому может быть названа *силовой линией*. Совершенно таким же образом могут быть проведены и другие силовые линии до тех пор, пока все пространство не заполнится кривыми, которые своим направлением укажут направление силы в любой точке пространства.

Этим путем мы получаем геометрическую модель физических сил, дающую повсюду *направление* силы; но необходимо еще найти метод для выражения *интенсивности* этих сил в каждой точке. Это будет достигнуто, если представлять рассматриваемые кривые не простыми линиями, но трубками с переменным сечением, по которым течет несжимаемая жидкость ([6]). Так как скорость такой жидкости обратно пропорциональна сечению трубки, то, подбирая соответствующим образом сечения, мы можем добиться того, что скорость жидкости будет изменяться по любому заданному закону. Этим приемом мы можем достичь того, что поток жидкости в трубках своей скоростью представит напряженность силы, а своим направлением — ее направление. Метод представления интенсивности силы скоростью воображаемого потока жидкости в трубке применим ко всякой системе сил; но он дает большие упрощения в частном случае сил, обратно пропорциональных квадрату расстояния, что имеет место в электрических или магнитных явлениях. В случае вполне произвольной системы сил будут, вообще говоря, существовать промежутки между трубками, в случае же электрических или магнитных сил эти трубки можно расположить так, чтобы не оставить никаких промежутков. Стенки трубок при этом сводятся к математическим поверхностям, которые определяют направление движения жидкости, непрерывно заполняющей все пространство. До сих пор исследование законов электрических и магнитных сил было принято начинать с допущения, что причиной этих явлений служат притягательные и отталкивательные силы между известными точками. Мы хотим рассмотреть тот же вопрос с другой точки зрения, более подходящей к нашим исследованиям, именно, определяя величину и направление сил, о которых идет речь, при помощи скорости и направления движения несжимаемой жидкости.

Итак, прежде всего я займусь описанием метода, который позволит наглядно представить себе движение подобной жидкости; затем я выведу следствия из некоторых выбранных условий движения, применю их к наименее сложным явлениям электричества, магнетизма и гальванизма и покажу, наконец, как с расширением этого метода и с введением другой идеи, которою мы равным образом обязаны Фарадею, можно наглядно представить законы притяжения и индуктивных действий магнитов и токов; при этом я не буду делать никаких предположений о физической природе электричества, которые выходят за пределы фактов, доказанных на опыте.

Сводя все к чисто геометрической идее движения некоторой воображаемой жидкости, я надеюсь достигнуть общности и точности и избежать тех опасностей, которые возникают при попытках с помощью преждевременной теории объяснить причины явлений. Предлагаемые мною здесь рассуждения выполнят свое назначение, если будут полезны физикам-экспериментаторам при классификации и наглядном истолковании найденных ими результатов.

Зрелая теория, в которой физические факты будут физически объяснены, будет построена теми, кто, вопрошая самое природу, сумеет найти единственно верное решение вопросов, поставленных математической теорией.

I. ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

(1) Субстанции, о которой здесь идет речь, не должно приписывать ни одного свойства действительных жидкостей, кроме способности к движению и сопротивлению сжатию. На эту субстанцию не следует смотреть также, как на гипотетическую жидкость в смысле, который допускался старыми теориями для объяснения явлений. Она представляет собой исключительно совокупность фиктивных свойств, составленную с целью представить некоторые теоремы чистой математики в форме, более наглядной и с большей легкостью применимой к физическим задачам, чем форма, использующая чисто алгебраические символы. Употребление термина «жидкость» не введет нас в заблуждение, если мы будем помнить, что оно означает только воображаемую субстанцию со следующим свойством.

Любая часть жидкости, занимающая в какой-либо момент времени данный объем, в каждый последующий момент будет занимать такой же объем.

Этот закон выражает несжимаемость жидкости и дает нам удобную меру ее количества, а именно—ее объем. Единицей количества жидкости будет, следовательно, единица объема ([7]).

(2) Направление движения жидкости в различных точках заполняемого ею пространства будет, вообще говоря, различно, но так как это направление для каждой точки вполне определенно, мы можем представить себе, что в какой-нибудь точке начинается линия и проводится далее таким образом, что каждый ее элемент своим направлением указывает направление движения жидкости в той точке пространства, через которую она проходит. Эти линии, которые проводятся, следовательно, так, что их направление повсюду указывает направление движения жидкости, называются *линиями тока жидкости*.

Если движение жидкости *стационарно*, т. е. если направление и скорость движения в любой, определенной точке пространства не зависят от времени, эти кривые представят собой пути отдельных частиц жидкости;

если, напротив, движение не стационарно, то, вообще говоря, такое заключение не будет иметь места [2]. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие случаи, когда движение жидкости стационарно.

(3) Если мы на какой-либо поверхности, пересекающей линии тока, начертим замкнутую кривую и проведем исходящие из всех ее точек линии тока, то все они образуют трубкообразную поверхность, которую мы будем называть *трубкой тока жидкости*. Так как эта поверхность образована линиями, имеющими направление движения жидкости, то ни одна частица жидкости не может пройти через нее, так что эта воображаемая поверхность является для жидкости столь же непроницаемой, как действительная трубка.

(4) Количество жидкости, протекающее в единицу времени через какое-либо поперечное сечение трубки, всегда одно и то же, где бы и как бы это сечение в трубке ни было проведено. Так как жидкость несжимаема и никакая часть ее не может пройти через боковую стенку трубки, то само собой понятно, что количество жидкости, вытекающее из любого последующего поперечного сечения, будет равно количеству жидкости, втекающему в какое-либо предыдущее сечение.

Если трубка такова, что в единицу времени через каждое поперечное сечение ее проходит единица объема жидкости, то мы будем называть ее *единичной трубкой тока жидкости*.

(5) Положив в основание какие-либо единицы из числа различных конечных единиц, с которыми мы впоследствии ознакомимся, мы получим также конечное число единичных трубок или поверхностей, представляющих движение жидкости в терминах упомянутых единиц. Но, для того чтобы определить движение жидкости в любой ее точке, следовало бы провести бесконечное число линий на бесконечно малых друг от друга расстояниях. Так как описание такой системы линий повлекло бы за собой беспрестанное обращение к теории пределов, то я предпочитаю эти расстояния

выбирать сначала в соответствии с принятыми единицами *), а затем уже я могу принять самую единицу сколько угодно малой, приравнивая ее малой дроби какой-либо из стандартных единиц.

(6) Чтобы определить движение жидкости при помощи системы единичных трубок, вообразим какую-нибудь неподвижную поверхность, пересекающую все линии тока; проведем на ней одну систему кривых, не пересекающихся между собой, и другую систему кривых, пересекающих кривые первой системы. Расположение этих кривых должно быть таково, чтобы через каждую четырехстороннюю площадку, образованную взаимным пересечением кривых обеих систем, протекала в единицу времени единица жидкости. Через каждую точку кривой первой системы проведем линию тока; эти линии образуют поверхность, через которую жидкость протекать не может. Подобные же непроницаемые поверхности могут быть проведены и через все остальные кривые первой системы. Таким же образом через кривые второй системы может быть проведена вторая система непроницаемых поверхностей, которая своим пересечением с первой системой образует четырехсторонние трубки; согласно предыдущему обозначению это будут трубки тока. Так как через каждую четырехстороннюю площадку той поверхности, которая пересекает наши трубки, в единицу времени протекает единица количества жидкости, то через любое поперечное сечение любой трубки в единицу времени будет протекать равным образом единица количества жидкости. Движение жидкости в любой части заполняемого ею пространства вполне определено этой системой единичных трубок, так как направление движения в каждой точке есть направление проходящей через нее единичной трубки, а скорость обратно пропорциональна площади поперечного сечения единичной трубки в той же точке.

*) Чтобы через каждую трубку протекала в единицу времени единица количества жидкости. (*Прим. перев.*)

(7) Мы получили, следовательно, геометрическое построение, которое вполне определяет движение жидкости, разделяя заполняемое ею пространство на систему единичных трубок. Теперь рассмотрим, какую пользу оно оказывает при изучении различных видов движения жидкости.

Единичная трубка может быть или замкнутой или начинаться и оканчиваться в различных точках. В последнем случае эти точки могут лежать либо на пограничных поверхностях, либо внутри пространства, в котором происходит исследуемое движение. В первом случае в трубке происходит непрерывная циркуляция жидкости, во втором же случае жидкость на одном конце втекает в трубку, а на другом вытекает из нее. Если концы трубок лежат на пограничных поверхностях, то можно предположить, что жидкость на одной стороне постоянно восполняется из неизвестного источника, а на другой втекает в неизвестный резервуар; если же начало или конец трубки находится внутри рассматриваемого пространства, то мы должны представлять себе, что жидкость непрерывно восполняется *источником*, находящимся внутри рассматриваемого пространства, который в состоянии создавать и испускать в единицу времени единицу жидкости, а затем поглощается *стоком*, который может непрерывно принимать и уничтожать то же самое количество жидкости.

В представлении о наличии источников и стоков, в которых жидкость создается или уничтожается, нет никакого противоречия, так как свойства жидкости вполне зависят от нашего произвола. Как ничто не мешает нам представлять ее себе абсолютно несжимаемой, так ничто не мешает нам предположить, что она в известных местах создается из ничего, в других снова сводится к ничему [3]. Места, где жидкость создается, мы будем называть *источниками*, и их интенсивность будет определяться числом единиц количества жидкости, производимой ими в единицу времени. Те же места, где жидкость уничтожается, мы будем называть *стоками*, и их интенсивность будем определять числом единиц количества жидкости, поглощаемой в единицу времени. И те и другие места мы будем иногда равным образом называть *источниками*, причем источник будет стоком, если его знак отрицателен ([8]).

(8) Очевидно, что количество жидкости, протекающей через какую-либо неподвижную поверхность, измеряется числом пересекающих ее единичных трубок, а направление течения жидкости определяется направлением трубок. Если поверхность замкнута, то каждая трубка, оба конца которой лежат на одной и той же стороне этой поверхности, должна пересечь ее столько же раз в одном направлении, сколько и в другом; поэтому она должна столько же жидкости вынести из заключенного внутри замкнутой поверхности пространства, сколько и внести в него. Трубка, которая начинается внутри поверхности и оканчивается вне ее, вынесет в единицу времени единицу количества жидкости; если же она, наоборот, входит в поверхность и заканчивается внутри нее, то она внесет ровно такое же количество жидкости. Таким образом, чтобы подсчитать количество жидкости, вытекающей в единицу времени из заключенного внутри поверхности пространства, мы должны вычесть число трубок, оканчивающихся внутри поверхности, из числа тех, которые там начинаются. Если результат отрицателен, жидкость в целом будет втекать внутрь объема.

Если начало единичной трубки мы будем называть единичным источником, а ее конец единичным стоком, то избыток жидкости, создаваемый внутри поверхности, выразится разностью между числом единичных источников и числом единичных стоков, лежащих внутри поверхности. Это количество в силу несжимаемости жидкости должно вытечь из заключенного внутри поверхности пространства.

Когда мы говорим об единичных трубках, источниках и стоках, то мы всегда должны помнить то, что было установлено в (5) относительно величины единицы и относительно того, каким образом, уменьшая размеры и увеличивая число трубок, мы можем располагать их в соответствии с самым сложным законом распределения скоростей.

(9) Представим себе два различных случая течения жидкости. В каждом из них пусть заданы направление и скорость жидкости для любой точки. Вообразим себе теперь еще третий случай, для которого направление и скорость жидкости представляются в каждой точке равнодействующей скоростей в той же точке в двух предшествующих случаях. Тогда количество жидкости, протекающее через данную поверхность в третьем случае, равно алгебраической сумме обоих количеств жидкости, протекающих через ту же поверхность в обоих предыдущих случаях, так как количество жидкости, протекающее через какой-либо элемент поверхности, пропорционально проекции скорости на нормаль к этому элементу поверхности, а проекция равнодействующей равна сумме проекций слагающих.

Поэтому число единичных трубок, выходящих в третьем случае из поверхности, равно алгебраической сумме числа трубок, выходивших из поверхности в обоих предыдущих случаях. Точно так же и число источников в каком-нибудь замкнутом пространстве в третьем случае будет равно алгебраической сумме их чисел в обоих предыдущих случаях. Так как замкнутое пространство может быть принято сколь угодно малым, то ясно, что распределение источников и стоков жидкости в третьем случае мы получим простым наложением распределений в двух первых случаях.

II. ТЕОРИЯ РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕВЕСОМОЙ, НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

(10) Мы вводим допущение, что жидкость не обладает инерцией и что ее движению противодействует некоторая сила [4], связанная с сопротивлением среды, в которой движется поток жидкости. Сопротивление это зависит от природы среды и, вообще говоря, также от направления движения жидкости и от ее скорости [5].

Прежде всего мы ограничиваемся только случаем изотропной среды, сопротивление которой во всех направлениях одинаково. В этом случае мы примем такой закон.

Каждая часть жидкости, движущаяся в сопротивляющейся среде, подвержена действию замедляющей силы, пропорциональной ее скорости и направленной против движения (9).

Если мы обозначим скорость через v, то сопротивление представит собой силу kv, действующую на единицу объема жидкости в направлении, прямо противоположном направлению движения *). Таким образом, чтобы скорость оставалась постоянной, необходимо, чтобы давление позади каждой части жидкости было больше, чем впереди нее, настолько, чтобы разность давлений противодействовала сопротивлению. Представим себе единичный кубический объем жидкости [который по (5) может быть взят сколь угодно малым], движущийся в направлении, нормальном к двум его граням. Он будет испытывать сопротивление kv, а потому и разность действующих на обе грани давлений будет также kv, так что вдоль каждой линии тока давление будет убывать на протяжении единицы длины на величину kv [6]. На двух концах отрезка линии тока длиной h разность давлений, следовательно, будет равна kvh (10).

(11) Так как мы предполагаем, что давление в жидкости изменяется непрерывно, все точки, в которых оно имеет данное значение p, лежат на определенной поверхности, которую мы назовем *поверхностью* (p) *равного давления*. Если мы построим в жидкости ряд таких поверхностей, которые соответствуют давлениям 0, 1, 2, 3 и т. д., то номер поверхности представит соответствующее ей давление и сами эти поверхности могут быть обозначены, как поверхности 0, 1, 2, 3 и т. д. За единицу давления мы принимаем такое, которое

---

*) k—коэффициент сопротивления рассматриваемой среды. (*Прим. перев.*)

производится единицей силы на единицу поверхности. Поэтому, чтобы уменьшить согласно (5) единицу давления, мы должны соответственно уменьшить единицу силы.

(12) Легко видеть, что рассматриваемые поверхности равного давления должны быть перпендикулярны к линиям тока. В самом деле, если бы жидкость двигалась по любому другому направлению, она испытывала бы сопротивление, которое не могло бы быть уравновешено никакой разностью давлений [7]. (Мы должны помнить, что рассматриваемая здесь жидкость вовсе не обладает инерцией или массой и что она обладает только теми свойствами, которые мы сами ей приписали, так что сопротивления и давления—это ее единственные механические свойства.) Итак, кроме двух систем поверхностей, образующих своим взаимным пересечением систему единичных трубок, мы имеем еще систему поверхностей равного давления, которая пересекает обе предыдущие системы под прямым углом. Пусть h есть расстояние между двумя соседними поверхностями равного давления вдоль линии тока; так как разность давлений равна единице, то

$$kvh = 1,$$

что дает соотношение между v и h, так что одна из этих величин может быть найдена, когда известна другая. Пусть s—площадь поперечного сечения единичной трубки, взятого на какой-нибудь поверхности равного давления; тогда по определению единичной трубки мы имеем:

$$vs = 1$$

и из последнего уравнения находим:

$$s = kh.$$

(13) Поверхности равного давления вырезают из единичных трубок элементы объема длины h и поперечного сечения s. Все эти элементы объема единичных

трубок мы назовем *единичными клетками*. В каждой из них единица объема жидкости переходит в единицу времени от давления p к давлению $p-1$ и потому преодолевает за это время единицу сопротивления. Работа, израсходованная на это жидкостью за единицу времени для каждой единичной клетки, также равна единице.

(14) Если даны поверхности равного давления, то, пользуясь ими, можно определить направление и величину скорости жидкости в каждой точке, а следовательно, можно построить всю систему единичных трубок, отыскать их начало и конец и отметить расположение источников и стоков, т. е. мест порождения и исчезновения жидкости. Но, для того чтобы доказать обратное положение, т. е. показать, что давление в каждой точке вполне определено, если даны положение и интенсивность всех источников, мы должны рассмотреть несколько вспомогательных теорем.

(15) Пусть в двух различных случаях дано давление жидкости для каждой точки пространства и пусть в третьем случае давление в каждой точке равно сумме давлений, имеющих место в первых двух случаях для той же точки; тогда и скорость жидкости в третьем случае для любой точки будет равнодействующей скоростей, имеющих место в первых двух случаях, и распределение источников в третьем случае представится простым наложением распределений источников в двух первых случаях.

В самом деле, слагающая скорости в любом направлении пропорциональна понижению давления, приходящемуся на единицу длины в том же направлении. Поэтому если мы сложим две системы давлений, то понижения давлений в любом направлении будут также просто суммироваться, а отсюда также и компоненты скорости жидкости в каждом направлении. Таким образом, и общая скорость жидкости в третьем случае будет для каждой точки равнодействующей обеих скоростей, которые имеют место в первых двух случаях для той же точки.

Отсюда по (9) следует, что в третьем случае количество жидкости, протекающее через какую-либо неподвижную поверхность, равно сумме количеств жидкости, протекающих через ту же поверхность в двух первых случаях, и что источники обеих первых систем простым наложением дают источники третьей системы.

Само собой понятно, что если давление в третьей системе равно разности соответствующих давлений в первых двух системах, то распределение источников третьей системы найдем, прибавив все источники второй системы с обратными знаками к источникам первой системы ([11]).

(16) Если в каждой точке замкнутой поверхности давление равно одной и той же величине p и если в пространстве, заключенном внутри нее, нет ни источников, ни стоков, то внутри этой поверхности жидкость находится в покое и давление повсюду постоянно и равно p.

В самом деле, если бы в пространстве, ограниченном нашей поверхностью, происходило какое-либо движение жидкости, то там же должны были бы иметься и трубки тока, которые необходимо либо замыкались бы в самих себе, либо оканчивались или внутри пространства, ограниченного поверхностью, или на ней самой. Но так как жидкость течет от мест большего давления к местам меньшего давления, то поток жидкости не может итти по замкнутому пути; так как далее внутри ограниченного поверхностью пространства нет ни источников, ни стоков, то трубки не могут там ни начинаться, ни оканчиваться; наконец, так как давление во всех точках поверхности одно и то же, жидкость никогда не может течь по такой трубке, оба конца которой лежат на поверхности. Так как во всем заключенном внутри поверхности пространстве не происходит никакого движения жидкости, то не может существовать нигде и разности давлений, ибо она сейчас же вызвала бы потоки жидкости. Таким образом, давление должно быть повсюду равно тому давлению p, которое имеет место на самой пограничной поверхности.

(17) Если заданы давление в каждой точке замкнутой поверхности и распределение источников, лежащих в пространстве, заключенном внутри этой поверхности, то в нем может существовать лишь единственное распределение давлений.

В самом деле, если бы были возможны два различных распределения давлений, удовлетворяющих приведенным условиям, то мы могли бы из них вывести третье распределение, в котором давление для любой точки представлялось бы разностью давлений, имеющих место для той же точки в двух предыдущих случаях. Тогда в этом третьем случае по (15) давление на всей пограничной поверхности было бы нулем, и, с другой стороны, внутри заключенного ею пространства не было бы никаких источников.

Отсюда по (16) в третьем случае давление для любой точки рассматриваемого пространства должно быть нулем; но оно представляется разностью давлений в обоих предыдущих случаях, а так как эта разность повсюду равна нулю, то и не может вообще существовать двух различных распределений давлений.

(18) Рассмотрим теперь неограниченную массу жидкости, в которой имеется лишь единственный единичный источник. Предположим, что на бесконечных расстояниях от источника давление повсюду равно нулю, и определим давление в любой точке жидкости.

Из источника жидкость будет истекать симметрично по всем направлениям, и так как через каждую сферическую поверхность, имеющую центр в источнике, в единицу времени протечет единица количества жидкости, то скорость на расстоянии r от источника будет:

$$v = \frac{1}{4\pi r^2}.$$

Понижение давления на единицу длины в направлении прямой r, т. е. взятая с минусом производная от давления по r, как мы видели, равна

$$kv = \frac{k}{4\pi r^2},$$

и так как при $r \to \infty$ $p \to 0$, то

$$p = \frac{k}{4\pi r}$$

представит величину давления в какой угодно точке. Таким образом, давление обратно пропорционально расстоянию от источника.

Само собой понятно, что единичный сток обусловит равное, но противоположно направленное давление.

Источник, который образован совокупностью S единичных источников и который мы в (7) назвали источником интенсивности S, обусловит давление

$$p = \frac{kS}{4\pi r},$$

так что давление на данном расстоянии пропорционально произведению из коэффициента сопротивления k и интенсивности источника S.

(19) Если в жидкости одновременно существует несколько источников и стоков, то для определения результирующего давления нам придется только сложить все давления, вызываемые отдельными источниками и стоками. Действительно, по (15) это представит собой решение нашей задачи, которое по (17) есть единственно возможное. Таким образом, мы можем определить давление, когда дано распределение источников, а указанным в (14) методом мы можем, наоборот, определить распределение источников по данному распределению давлений [8].

(20) Представим себе теперь в пространстве какую-нибудь неподвижную поверхность, пересекающую линии тока, и докажем, что течение жидкости по одну сторону всегда может быть рассматриваемо, как обусловленное источниками, распределенными на самой поверхности, причем движение жидкости по другую сторону поверхности остается без изменения.

В самом деле, если мы построим систему единичных трубок, представляющую рассматриваемое движение, и повсюду, где единичная трубка входит в поверхность, поместим единичный источник, а где выходит — единичный сток, и притом сделаем нашу поверхность непроницаемой для жидкости, то движение жидкости в трубках останется таким же, как и прежде.

(21) Если в какой-либо среде, коэффициент сопротивления которой есть k, известно распределение источников, которое вызывает данную систему давлений, то, чтобы определить источники, которые произвели бы такую же систему давлений в среде, коэффициент сопротивления которой равен единице, нужно помножить только количество жидкости, производимое каждым источником, т. е. его интенсивность, на k. В самом деле, так как давление, вызываемое всяким источником, пропорционально произведению его интенсивности на коэффициент сопротивления, то, для того чтобы давление оставалось неизменным, нужно интенсивность источников увеличить в таком же отношении, в каком уменьшается коэффициент сопротивления ([12]).

(22) *Условия, которые должны быть выполнены для поверхности раздела двух сред с различными коэффициентами сопротивления* (k *и* k'). Эти условия обнаруживаются из тех соображений, что то количество жидкости, которое в какой-нибудь промежуток времени вытекает через элемент поверхности раздела из одной среды, должно в продолжение того же промежутка времени и через тот же элемент поверхности войти в другую среду и что давление на поверхности раздела не должно нигде претерпевать разрыва. Из первого условия следует, что в каждой точке поверхности раздела нормальная к этой поверхности составляющая скорости для обеих сред одна и та же, и потому производные от давления, взятые в направлении нормали к поверхности раздела по обе стороны ее, относятся между собой, как коэффициенты сопротивления. Так как далее изменение давления должно быть непрерывным, то производная от давления, взятая в любом направлении параллельно поверхности раздела, должна иметь одинаковое значение на обеих сторонах этой поверхности. Таким образом,

направление трубок тока и поверхностей равного давления испытывает на поверхности раздела прерывное изменение, определяемое следующими законами: направление каждой преломленной трубки остается в плоскости, содержащей первоначальное направление трубки и нормаль к поверхности раздела, тангенсы же углов падения и преломления относятся, как коэффициенты k и k' [9].

(23) Пусть пространство внутри данной замкнутой поверхности заполнено средой, которая отлична от окружающей среды, и пусть в каждой точке этой сложной системы дано давление, которое вызывается данным распределением источников внутри и вне рассматриваемой поверхности. Будем разыскивать такое распределение источников, которое в каждой точке однородной среды с коэффициентом сопротивления, равным единице, вызвало бы то же распределение давлений.

Построим трубки тока и повсюду, где единичная трубка вступает в ту или другую среду, поместим единичный источник, а где покидает ее—единичный сток. Если мы сделаем затем поверхность раздела непроницаемой для жидкости, весь ход явлений останется прежним.

Пусть коэффициент сопротивления внешней среды есть k, а внутренней k'; умножим интенсивность всех источников, лежащих во внешней среде (включая сюда и лежащие у поверхности раздела в этой среде), на величину k, а коэффициент сопротивления положим равным единице: при этом распределение давлений во внешней среде останется неизменным; то же самое будет справедливо и по отношению к внутренней среде, если положить ее коэффициент сопротивления равным единице, а интенсивность всех лежащих в ней источников, включая и лежащие при поверхности раздела, помножить на k' [10] (13).

Так как давление в каждой точке поверхности раздела по обе ее стороны одинаково, мы можем сделать эту поверхность снова проницаемой для жидкости, не изменяя этим ни потока, ни распределения давлений.

Таким образом, то распределение давлений, которое первоначально имело место в сложной среде, мы воспроизвели в однородной среде путем наложения трех систем источников. Первая из них тождественна с системой источников, лежащих вне поверхности раздела; вторая тождественна с системой источников, лежащих внутри нее, с той лишь разницей, что интенсивность каждого из первых источников оказывается помноженной на k, а каждого из вторых—на k'; третья же система источников есть та, которая лежит на самой поверхности раздела. В первоначально данном случае каждому единичному источнику на внешней стороне поверхности раздела соответствовал единичный сток на ее внутренней стороне. Но так как интенсивность каждого источника множится на k, а интенсивность стока на k', то в результате вместо единичного источника на внешней стороне поверхности раздела получается источник на поверхности раздела интенсивности $k-k'$. При помощи указанных трех систем источников данное первоначально распредел ние давлений может быть воспроизведено в однородно: среде с коэффициентом сопротивления, равным еди иице.

(24) Если внутри замкнутой поверхности помещается среда без сопротивления, т. е. $k'=0$, то давление внутри поверхности, а потому и на ней самой будет постоянным; пусть оно равно p. Если в случае, когда среда внутри замкнутой поверхности такова же, как и вне ее, мы, допуская наряду с данным распределением внешних и внутренних источников еще некоторое распределение пар источников-стоков внутри поверхности, можем показать, что давление на всей пограничной поверхности будет постоянно, то получающееся таким образом распределение давления во внешней среде в соединении с равномерностью давления внутри поверхности является истинным и единственно возможным в рассматриваемом случае распределением давлений [11].

В самом деле, если бы допущением во внутренней среде различных воображаемых пар источников-стоков было бы возможно найти два различных распределения давлений, удовлетворяющих поставленным выше условиям, то, взяв разности этих давлений, мы могли бы получить третье распределение давлений, в котором давление на пограничной поверхности было бы постоянным, а внутри нее было бы столько же единичных источников, сколько и соответствующих им стоков, так что каждому количеству жидкости, притекающему к данному месту поверхности, должно было бы соответствовать равное количество, вытекающее из другого места.

При образовании третьей системы распределения источники во внешней среде взаимно уничтожаются, и мы получаем беспредельную среду без источников, окружающую внутреннюю среду. Давление в бесконечности равно нулю, а на поверхности раздела оно постоянно. Если при этом оно положительно, то движение жидкости из каждой точки поверхности раздела должно направляться во внешнее пространство; если же, напротив, отрицательно, жидкость повсюду будет устремляться внутрь замкнутой поверхности. Но мы доказали, что ни один из этих случаев невозможен, что, напротив, столько же жидкости должно выйти из замкнутой поверхности, сколько и войти в нее; поэтому давление внутри замкнутой поверхности при третьем распределении давлений должно быть нулем.

Таким образом, в третьем случае во всех точках поверхности, ограничивающей внешнюю среду, давление равно нулю, а так как во внешней среде нет совсем источников, то по (16) давление в ней повсюду равно нулю.

Затем, так как на пограничной поверхности внутренней среды давление также равно нулю и внутри нее не существует сопротивления, то и во внутренней среде давление повсюду будет нулем; но давление в третьем случае равно разности давлений в обоих данных случаях, поэтому эти давления равны между собой; следовательно, возможно лишь единственное распределение давлений, а именно то, которое обусловливается воображаемым распределением источников и стоков.

(25) Если сопротивление во внутренней среде бесконечно велико, то жидкость не будет ни втекать в нее, ни вытекать из нее. Поэтому пограничную поверхность можно рассматривать как непроницаемую для жидкости, и трубки тока будут обходить эту поверхность, не пересекая ее.

Распределение давлений во внешней среде найдется тогда следующим образом: положим коэффициент сопротивления внутренней среды равным коэффициенту сопротивления внешней среды и прибавим (что всегда возможно) к данным источникам во внешней среде новые источники во внутренней с таким расчетом, чтобы через поверхность раздела жидкость нигде не протекала. Действительно, в силу этого последнего обстоятельства трубки тока внутри поверхности являются совершенно независимыми от внешних и могут быть изъяты без нарушения внешнего движения.

(26) Если пространство, занимаемое внутренней средой, весьма мало и разность коэффициентов сопротивления обеих сред также мала, то расположение единичных трубок мало отлично от того, которое имело бы место в том случае, если бы внешняя среда заполняла все пространство.

При этом допущении мы легко можем вычислить то изменение, которое вносится небольшим различием между внутренней средой и внешней (мы вычислим сначала поток, который был бы вызван данными источниками, если бы коэффициент сопротивления повсюду был равен k). Там, где какая-либо единичная трубка вступает во внутреннюю среду, мы предполагаем еще один источник интенсивности

$$\frac{k'-k}{k};$$

там же, где подобная трубка выходит из внутренней среды, мы воображаем себе еще один сток той же интенсивности. Если затем мы вычислим распределение давлений таким образом, как если бы коэффициент сопротивления в обеих средах имел одно и то же значение, равное k, то получим с большим приближением к истине распределение давлений; если к вновь полученному потоку мы еще раз приложим тот же прием вычисления, то получим вторую степень приближения, и т. д.

(27) В том случае, когда величина коэффициента сопротивления, вместо того, чтобы изменяться скачком от одной точки к другой, изменяется непрерывно, мы можем оперировать с нашей средой так, как если бы она состояла из тонких слоев, из которых каждый имеет свой постоянный коэффициент сопротивления. Распределяя соответственным образом на поверхности раздела этих слоев источники, мы можем свести настоящую задачу, как и в (23), к тому случаю, когда коэффициент сопротивления повсюду равен единице. Источники распределятся тогда непрерывно по всей среде, и там, где жидкость будет течь от места с меньшим коэффициентом сопротивления к месту с бо́льшим коэффициентом, окажутся источники; стоки же будут там, где имеется течение противоположного направления.

(28) До сих пор мы предполагали, что коэффициент сопротивления в данном месте среды не зависит от направления потока, но мы могли бы вообразить себе и такой случай, когда коэффициент сопротивления в различных направлениях различен. В таких случаях линии тока не будут, вообще говоря, перпендикулярны к поверхностям равного давления. Пусть a, b, c будут слагающие скорости потока в какой-нибудь точке, α, β, γ — составляющие сопротивления в той же точке. Тогда между этими шестью величинами будет существовать следующая система трех линейных уравнений, которые для удобства назовем «*уравнениями проводимости*»:

$$a = P_1\alpha + Q_3\beta + R_2\gamma,$$
$$b = P_2\beta + Q_1\gamma + R_3\alpha,$$
$$c = P_3\gamma + Q_2\alpha + R_1\beta.$$

В эти уравнения входят девять независимых коэффициентов, определяющих проводимость. Для упрощения уравнений положим:

$$Q_1 + R_1 = 2S_1, \quad Q_1 - R_1 = 2lT, \ldots,$$

где

$$4T^2 = (Q_1 - R_1)^2 + (Q_2 - R_2)^2 + (Q_3 - R_3)^2,$$

и l, m, n суть направляющие косинусы какого-либо фиксированного в пространстве направления. Тогда наши уравнения проводимости переходят в такие:

$$a = P_1\alpha + S_3\beta + S_2\gamma + (n\beta - m\gamma)\,T,$$
$$b = P_2\beta + S_1\gamma + S_3\alpha + (l\gamma - n\alpha)\,T,$$
$$c = P_3\gamma + S_2\alpha + S_1\beta + (m\alpha - l\beta)\,T.$$

При помощи известного преобразования координат мы можем исключить коэффициенты S и получим [12]:

$$a = P_1'\alpha + (n'\beta - m'\gamma)\,T,$$
$$b = P_2'\beta + (l'\gamma - n'\alpha)\,T,$$
$$c = P_3'\gamma + (m'\alpha - l'\beta)\,T,$$

где l', m', n' суть направляющие косинусы выбранного фиксированного направления относительно новых осей координат. Если мы положим:

$$\alpha = \frac{dp}{dx}, \quad \beta = \frac{dp}{dy}, \quad \gamma = \frac{dp}{dz} \text{ [13]},$$

то уравнение непрерывности

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0$$

переходит в

$$P_1'\frac{d^2p}{dx^2} + P_2'\frac{d^2p}{dy^2} + P_3'\frac{d^2p}{dz^2} = 0,$$

и если еще положим:

$$x = \xi\sqrt{P_1'}, \quad y = \eta\sqrt{P_2'}, \quad z = \zeta\sqrt{P_3'},$$

то получаем обычное уравнение проводимости:

$$\frac{d^2p}{d\xi^2}+\frac{d^2p}{d\eta^2}+\frac{d^2p}{d\zeta^2}=0.$$

Отсюда ясно, что распределение давления не меняется с введением коэффициента T [14]. Проф. Томсон показал, как следует представлять себе субстанцию, для которой коэффициент T выражает свойство, связанное с некоторой осью, которая в отличие от осей P_1', P_2', P_3' диполярна (т. е. ее отрицательное направление не тождественно положительному направлению).

Ближайшие исследования этих уравнений проводимости можно найти в работе проф. Стокса «О теплопроводности кристаллов» *) и, кроме того, в работе проф. Томсона «О динамической теории теплоты», ч. V**).

Все, что было доказано в (14), (15), (16), (17) относительно наложения различных распределений давлений, а также единственности распределения давлений при заданном распределении источников, очевидно, остается в силе и в том случае, когда сопротивление изменяется непрерывно и различно по разным направлениям. Действительно, более внимательное рассмотрение приведенного доказательства показывает, что сила доказательства нисколько не изменяется от вводимых при этом обобщений.

(29) Мы можем теперь приступить к доказательству некоторых теорем, справедливых для самого общего случая, когда коэффициент сопротивления среды в различных направлениях различен и изменяется от одной точки к другой. Если распределение давлений известно, то при помощи данного в (28) метода мы можем построить поверхности равного давления, трубки тока, источники и стоки. Так как в каждой из клеток, на которые разбиваются единичные трубки поверхностями

---

*) Cambr. and Dubl. Math. Journ., ноябрь 1851 г., а также Math. and Phys. Pap. II.

**) Transactions of Royal Society of Edinbourgh, т. XXI, часть I, см. также Math. and Phys. Pap. I, стр. 274.

равного давления, в единицу времени единица количества жидкости переходит от давления p к давлению $p-1$, то очевидно, что в каждой клетке в единицу времени на преодоление сопротивления тратится единица работы.

Число клеток в каждой единичной трубке определяется числом пересекающих ее поверхностей равного давления. Если давление в начале единичной трубки равно p, а в конце p', то число клеток в ней есть $p-p'$. Таким образом, если бы трубка простиралась от источника до места, где давление равно нулю, то число клеток в этом случае было бы p, если же, наоборот, она простиралась бы от стока (где давление равно $-p'$) до места, где давление равно нулю, то число клеток было бы p', и истинное число клеток выразилось бы разностью $p-p'$.

Если поэтому давление в каком-нибудь источнике интенсивности S, из которого, следовательно, выходит S единичных трубок, равно p, то число клеток, обусловливаемых этим источником, равно Sp. Но если S' единичных трубок оканчивается в стоке, в котором существует давление p', то надо из полученного раньше числа вычесть $S'p'$. Так как теперь всякий сток мы можем рассматривать как отрицательный источник, то условимся характеризовать место возникновения S единичных трубок числом S, а место поглощения S' единичных трубок числом $-S'$, тогда число клеток системы вообще выразится через $\sum Sp$, причем сумма распространяется на все числа, характеризующие все наши источники [15].

(30) К тому же выводу можно притти, принимая во внимание, что в каждой клетке в единицу времени совершается единица работы. Из каждого источника интенсивности S за единицу времени в заполненное жидкостью пространство будет против давления p вгоняться S единиц жидкости, так что работа, совершенная жидкостью для преодоления сопротивления, будет равна Sp. В каждом стоке, где оканчиваются S' единичных трубок, в единицу времени под давлением p',

уничтожается S' единиц жидкости, так что работа, сообщенная давлением жидкости, будет $S'p'$. Таким образом, полная работа, совершенная жидкостью, будет:

$$W = \sum Sp - \sum S'p',$$

или, так как мы условились стоки рассматривать как отрицательные источники [16],

$$W = \sum (Sp).$$

(31) Пусть S есть интенсивность источника, расположенного в какой-нибудь среде, и p — давление, вызываемое этим источником в какой-нибудь точке; если мы наложим на этот источник другой, равный ему, то давление повсюду удвоится, и таким образом мы найдем последовательным наложением, что источник nS обусловливает давление np, или общая величина давления, вызываемого каким-нибудь источником в каком-нибудь месте, пропорциональна интенсивности этого источника. Мы выразим это уравнением

$$p = RS,$$

где R — коэффициент, зависящий от природы среды, от положения как источника, так и той точки, для которой ищется давление. В случае безграничной однородной изотропной среды, коэффициент сопротивления которой есть k, мы имеем:

$$p = \frac{kS}{4\pi r}.$$

Следовательно,

$$R = \frac{k}{4\pi r}.$$

Величина R может быть названа полным коэффициентом сопротивления между источником и данной точкой. В случае произвольного числа источников мы имеем вообще

$$p = \sum RS.$$

(32) Пусть в какой-нибудь однородной изотропной среде давление, вызываемое в какой-либо точке P источником S, есть

$$p = \frac{kS}{4\pi r}.$$

Если в той же точке P находится второй источник S', то

$$S'p = \frac{kSS'}{4\pi r} = Sp',$$

причем p' представляет собой давление, вызываемое источником S' в том месте пространства, где находится S. Таким образом, если имеются две системы источников $\sum S$ и $\sum S'$ и давление, вызываемое первой системой, есть p, а второй p', то

$$\sum (S'p) = \sum (Sp'),$$

так как каждому члену $S'p$ первой суммы соответствует равный член Sp' второй.

(33) Если в однородной изотропной среде поток жидкости повсюду параллелен какой-нибудь неизменной плоскости, то поверхности равного давления будут расположены перпендикулярно к ней. Если мы представим себе две параллельные плоскости на расстоянии k одна от другой, то пространство, заключающееся между ними, можно разделить перпендикулярными к ним цилиндрическими поверхностями на единичные трубки и они вместе с поверхностями равного давления разделят это пространство на единичные клетки, одинаковые в длину и ширину. В самом деле, если h есть расстояние между двумя последовательными поверхностями равного давления и s есть площадь поперечного сечения единичной трубки, то по (12) $s = kh$.

Но s представляет собой произведение ширины на глубину, а последняя есть k, следовательно, первая равна h, т. е. равна длине.

Если две системы плоских кривых взаимно пересекаются под прямым углом, так что разделяют плоскость на малые квадраты, то, воображая себе вторую плоскость на расстоянии k от первой и строя перпендикулярные к ней цилиндрические поверхности, основаниями которых будут наши плоские кривые, мы образуем систему клеток, одинаково удовлетворяющую условиям нашей задачи, будет ли жидкость течь вдоль первой системы пересекающихся плоских кривых или вдоль второй *).

Применение понятия силовых линий

Теперь я должен показать, какие изменения следует внести в описанное выше представление о линиях тока, чтобы применить его к теории статического электричества, постоянного магнетизма, магнитной индукции и стационарного электрического тока; законы электромагнетизма я рассмотрю отдельно.

Я предполагаю, что обычное допущение о взаимодействии двух противоположных электрических субстанций представляет собой описание явлений статического электричества. Если мы назовем одну из этих субстанций положительным, а другую отрицательным электричеством, то каждые две частицы электричества отталкивают друг друга с силой, которая измеряется произведением масс этих частиц, разделенным на квадрат расстояния между ними.

В (18) мы нашли, что скорость нашей воображаемой жидкости, вызываемая источником S на расстоянии r от него, обратно пропорциональна величине r^2. Посмотрим теперь, что произойдет, если мы заменим каждую частицу положительного электричества подобным источником. Скорость, вызываемая каждым источником, будет пропорциональна действию замещенной электрической частицы, и результирующая скорость

*) См. W. Thomson, Cambr. and Dubl. Math. Journ., т. III, стр. 286, май 1843 г. или Math. and Phys. Pap. I, стр. 22.

потока, обусловленная в каком-нибудь месте всеми источниками, будет пропорциональна результирующему действию всех электрических частиц. Далее мы найдем результирующее давление, складывая давления, вызываемые данными источниками; поэтому слагающая результирующей скорости потока по данному направлению пропорциональна отрицательной производной от давления, взятой по этому направлению; та же слагающая пропорциональна слагающей результирующего действия электрических частиц по тому же направлению.

Так как слагающая силы по какому-нибудь направлению в электрической задаче пропорциональна отрицательной производной от давления по этому направлению в нашей воображаемой задаче и значения постоянных в воображаемой задаче могут быть выбраны произвольно, то может быть достигнуто числовое равенство слагающей силы по какому угодно направлению и отрицательной производной от давления, взятой по тому же направлению, или

$$X = -\frac{dp}{dx}.$$

Отсюда, если V есть электрический потенциал, то

$$dV = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -dp,$$

а так как при бесконечном удалении $V = p = 0$, то $V = -p$.

В электрической задаче (если мы обозначим через dm одну из действующих электрических масс) мы имеем:

$$V = -\sum\left(\frac{dm}{r}\right),$$

в нашей жидкости

$$p = \sum\frac{kS}{4\pi r},$$

следовательно,

$$S = \frac{4\pi}{k}\,dm.$$

Если мы предположим, что k очень велико, то количество жидкости, которое должно быть доставляемо каждым источником для поддержания давления, очень мало.

Потенциал действия какой-либо системы электрических масс на самое себя представляется в виде

$$\sum p\,dm = \frac{k}{4\pi}\sum pS = \frac{k}{4\pi}W.$$

Если $\sum dm$ и $\sum dm'$ — две системы электрических масс, а p и p' — соответствующие им потенциалы, то по (32)

$$\sum (p\,dm') = \frac{k}{4\pi}\sum (pS') = \frac{k}{4\pi}\sum (p'S) = \sum (p'dm),$$

т. е. потенциал первой системы на вторую равен потенциалу второй на первую. Таким образом, аналогия между задачами электростатики и течения жидкостей может быть выражена следующими уравнениями:

$$V = -p,$$
$$X = -\frac{dp}{dx} = ku,$$
$$dm = \frac{k}{4\pi}S.$$

Полный электрический потенциал есть

$$-\sum V\,dm = \frac{kW}{4\pi},$$

где W есть работа, совершаемая жидкостью при преодолении сопротивления.

Силовые линии суть единичные трубки потока жидкости, и они могут быть численно определены при помощи этих трубок [17].

Теория диэлектриков

Электрическое влияние, действующее на какой-нибудь отдаленный проводник, зависит не только от распределения электричества на оказывающих влияние телах и от формы и положения подверженного влиянию проводника, но и от природы промежуточной среды, или диэлектрика. В одиннадцатой серии своих «Экспериментальных исследований» Фарадей отмечает это обстоятельство, говоря, что различные вещества обладают *различной индуктивной способностью* или что они проводят линии электрического влияния в различной степени. В принятой нами аналогии с жидкостью, движущейся в среде, которая оказывает этому движению в различных местах различное сопротивление, мы имеем образ диэлектрика, который тем лучше проводит фарадеевские силовые линии (линии индукции), а следовательно, имеет тем большую диэлектрическую постоянную, чем меньше оказываемое сопротивление.

Из (23) ясно, что в этом случае на поверхности диэлектрика всегда будет существовать некоторое кажущееся распределение электричества, а именно, отрицательного там, где силовые линии входят, и положительного, где они выходят. В случае движения жидкости мы не имеем на поверхности действительных источников, но мы их вводим только как вспомогательное средство для вычисления. Поверхность диэлектрика в действительности, быть может, также не заряжена свободным электричеством, и только прерывность свойств среды на границе выражается кажущимся присутствием такого заряда.

Если бы диэлектрик проводил силовые линии хуже, чем окружающая его среда, то мы получили бы прямо противоположный эффект, именно: положительное электричество там, где входят силовые линии, а отрицательное там, где они выходят.

Если проводимость диэлектрика совершенная или для малых количеств электричества, с которыми нам приходится иметь дело, почти совершенная, то мы имеем случай, рассмотренный в (24). В этом случае диэлектрик можно рассматривать как проводник, его поверхность как эквипотенциальную поверхность, а результирующую электрическую силу непосредственно у этой поверхности нормальной к ней [18].

Теория постоянных магнитов

Можно представить себе, что каждый магнит состоит из большого числа элементарных намагниченных частиц, из которых каждая имеет свой собственный северный и южный полюсы. Взаимодействие двух полюсов магнита должно происходить по тем же законам, как и взаимодействие двух частиц электричества. Поэтому представление о силовых линиях может быть применено также и к магнетизму, и его теория точно так же, как электростатика, может быть иллюстрирована при помощи движущейся жидкости. Здесь, однако, исследованию предстоит решение вопроса, каким образом единичные клетки в движении жидкости могут представить полярность элементарных магнитов. Единица количества жидкости втекает через одну сторону каждой клетки и вытекает через противоположную; таким образом, относительно всей остальной массы жидкости первая сторона клетки представляет собой сток единицы жидкости, вторая—источник. Итак, каждая клетка соответствует элементарному магниту, стороны которого покрыты соответственно равными количествами северного и южного магнетизма. Если каждая клетка представляет собой часть непрерывной системы клеток, то жидкость, вытекающая из одной клетки, будет втекать в последующую и т. д., так что наши источники можно будет переместить с концов клеток на концы единичных трубок.

Если все единичные трубки начинаются и оканчиваются на поверхности системы клеток, то источники будут лежать только на этой поверхности; поэтому для магнита, в котором распределение магнетизма есть так называемое соленоидальное, или трубчатое [19], весь свободный магнетизм лежит на поверхности *).

*) См. «Математическую теорию магнетизма» проф. В. Томсона, гл. III и V, Phil. Trans. (1851). См. также Royal Soc. Proc., 20 июня 1850 г. и Pap. on Electric. and Magn., 1, стр. 378.

Теория парамагнитной и диамагнитной индукции

Фарадей*) показал, что поведение парамагнитных и диамагнитных тел в магнитном поле можно объяснить, принимая, что парамагнитные тела проводят силовые линии [линии индукции] лучше, а диамагнитные хуже, чем окружающая среда. Применяя указанные в (23) и (26) положения, мы будем допускать, что источники представляют собой северный магнетизм, а стоки—южный. В таком случае, если парамагнитное тело находится вблизи северного полюса, то силовые линии в местах входа их внутрь этого тела произведут кажущееся накопление южного магнетизма, а в местах выхода из него—такое же накопление северного магнетизма. Так как количества противоположных магнетизмов равны, но южный магнетизм расположен к северному полюсу ближе, чем магнетизм северный, то результирующей силой будет притяжение. Если, наоборот, тело диамагнитно, т. е. проводит силовые линии хуже, чем окружающая среда, то северный магнетизм нужно считать там, где силовые линии входят в более плохой проводник, а южный там, где они выходят, так что в результате произойдет отталкивание.

Мы можем получить более общий закон, принимая во внимание, что потенциал всей системы пропорционален работе, совершаемой жидкостью при преодолении сопротивления. Введение второй среды увеличивает или уменьшает совершаемую работу, смотря по тому, оказывает ли она большее или меньшее сопротивление сравнительно с первой средой. Это увеличение или уменьшение пропорционально квадрату скорости потока жидкости.

Но по теории потенциала движущая сила, действующая в каком-либо направлении, пропорциональна отрицательной производной потенциала системы по этому направлению. Если поэтому сопротивление k' во второй среде больше сопротивления k в окружающей

*) «Exp. Res.» (3292).

среде, то действует сила, направленная от мест большей результирующей силы v [напряженности поля] к местам меньшей силы, так что диамагнитные тела движутся от мест большей результирующей магнитной силы к местам меньшей *).

В парамагнитных телах $k < k'$, поэтому сила направлена от мест меньшей результирующей магнитной силы [напряженности поля] к местам большей. Так как эти результаты зависят только от отношения величин k и k', то ясно, что изменением окружающей среды можно по произволу парамагнитное тело обратить в диамагнитное.

Ясно, что мы пришли бы к тем же результатам путем вычисления, если бы предположили, что магнитная сила обладает способностью возбуждать в телах магнитную поляризацию, направление которой в парамагнитных телах *совпадает* с направлением магнитной силы, а в диамагнитных ей противоположно **). В действительности мы еще нигде не наталкивались на такие факты, которые были бы решающими для исключительного утверждения одной из трех теорий: теории силовых линий, фиктивной магнитной субстанции и индуцированной полярности. Так как теория силовых линий исходит из наиболее точных чисто теоретических положений и притом в наименьшем числе, то в последующем мы будем ее придерживаться.

Теория магнитно-кристаллической индукции

Мы переходим к развитию фарадеевской теории поведения кристаллов в магнитном поле ***). Некоторые кристаллы и вещества проводят не одинаково

---

*) Faraday, «Exp. Res.», (2797), (2798). См. также Thomson, Cambr. and Dubl. Math. Journ., т. II, стр. 320, май 1847 г., Pap. I, стр. 80.

**) Faraday, «Exp. Res.» (2429), (3320) См. также Weber, Pogg. Ann., т. 87, стр. 145 (1852); Tyndall, Phil. Trans., стр. 237 (1856); Phil. Mag., 4, 12, стр. 161 (1856).

***) Faraday, «Exp. Res.» (2836) и т. д.

хорошо силовые линии в различных направлениях. Поэтому такие тела, помещенные в постоянное магнитное поле, поворачиваются или стремятся повернуться в такое положение, чтобы силовые линии проходили через него с наименьшим сопротивлением. Пользуясь принципами, изложенными в (28), нетрудно вывести законы этих действий и даже, пользуясь формулами, найти в известных случаях их численную величину. Принципы индуктивной полярности и магнитных жидкостей в данном случае не так легко приводят к цели, между тем как теория силовых линий необыкновенно легко применяется к этому классу явлений.

Теория проводимости электрического тока

Развитая нами теория движения жидкости непосредственно применяется к нахождению законов стационарного электрического тока. Кроме исследования Ома сюда относятся исследования Кирхгофа *) и Квинке **) о проводимости электричества в пластинках ([14]). Здесь в согласии с обычным воззрением мы имеем дело с стационарными течениями электрической жидкости по проводящим путям, представляющим ей сопротивление, преодолеваемое электродвижущими силами, приложенными в определенных местах этих путей. Благодаря этому сопротивлению давление в различных местах пути различно. Это давление, обыкновенно называемое электрическим напряжением, оказалось физически тождественным с *потенциалом* статического электричества, чем и устанавливается связующее звено между этими двумя областями явлений. Если бы удалось произвести точное электростатическое измерение количества электричества, протекающего в том токе,

*) Kirchhoff, Pogg. Ann., т. 64, стр. 497; т. 67, стр. 344 (1845). В тексте Максвелла указаны Ann. de Chimie, XLI, 496.

**) Quincke, Pogg. Ann., т. 97, стр. 382 (1856). В тексте Максвелла указаны Ann. de Chimie, XLVII, 203.

который мы принимаем за единичный ток (измеренный электромагнитным или химическим путем), то отыскание связи между статическим и текущим электричеством было бы завершено *). До сих пор это измерение удавалось выполнить лишь приблизительно, но тем не менее мы можем утверждать, что проводимости различных веществ лишь количественно различны и что стекло и металл качественно относятся к электричеству совершенно одинаково и несходство их вытекает лишь из чрезвычайного различия их проводимостей ([15]). Таким образом, аналогия между статическим электричеством и движением жидкости выступает еще яснее, так как электрическая индукция в диэлектрике точно так же, как и в проводнике, связана с электрическим током, но в первом случае ток этот незаметен вследствие громадного сопротивления диэлектрика **).

Об электродвижущих силах

Когда стационарный ток течет по замкнутой цепи, то ясно, что кроме давления должны действовать еще какие-нибудь иные силы. В самом деле, если бы этот ток вызывался разностью давлений, то он должен был бы течь от точки наибольшего давления в обе стороны к точке наименьшего давления, между тем как на самом деле он постоянно течет в одном и том же направлении. Поэтому мы должны допустить присутствие некоторых сил, которые способны поддерживать постоянный ток в замкнутой цепи. Главнейшая из них вызывается химическим действием. Гальванический элемент или лучше поверхность раздела жидкости и цинка представляет собой место действия электродвижущей силы, которая в состоянии поддерживать ток, несмотря на сопротивление цепи. Говоря языком обыкновенной теории электричества, мы скажем, что

*) Faraday, «Exp. Res.», (371),
**) Faraday, «Exp. Res», т. III.

положительный ток течет из жидкости элемента через платину, через цепь, замыкающую элемент, через цинк и затем опять возвращается в жидкость. Если электродвижущая сила действует только у поверхности раздела между жидкостью и цинком, то напряжение электричества в жидкости должно превышать напряжение в цинке на величину, которая зависит от природы и длины цепи и от силы тока в проводнике.

Чтобы поддержать разность давлений, должна действовать электродвижущая сила, величина которой измеряется этой разностью. Если F означает электродвижущую силу, I—количество [силу] тока, или доставляемое в единицу времени количество электрических единиц, и K—величину, зависящую от длины и удельного сопротивления цепи, то

$$F = IK = p - p',$$

где p есть электрическое напряжение в жидкости, а p'—в цинке [20].

Если разомкнуть цепь в каком-либо месте, то часть ее, которая находится в соприкосновении с платиной, сохранит напряжение p, а другая—напряжение p', потому что теперь нет больше никакого тока. Таким образом, $p - p'$, или F, дает меру для напряженности тока [электродвижущей силы]. Подобное различие между количеством и напряженностью (интенсивностью) очень полезно *) и при правильном его понимании надо разуметь следующее: количество [сила] электрического тока есть то количество электричества, которое проходит в единицу времени через каждое поперечное сечение цепи; измеряется оно числом I единичных трубок, содержащихся в этом сечении. Напряженность тока [электрическая сила во всей цепи] есть его способность преодолевать сопротивление; она измеряется через F или IK, где K—полное сопротивление цепи.

*) Faraday, «Exp. Res.», т. III.

Ту же мысль о количестве и напряженности можно приложить и к случаю магнетизма*). Количество намагничения в каком-либо поперечном сечении магнита [сумма произведений всех элементов поверхности сечения на перпендикулярную к ним магнитную индукцию] измеряется числом проходящих через него силовых линий; напряженность же намагничения в том же поперечном сечении зависит как от силы сопротивления в этом сечении, так и от числа проходящих через него силовых линий. Если k—сопротивление вещества, S—площадь поперечного сечения и I—число проходящих через него силовых линий, то полная напряженность проходящего через поперечное сечение намагничения есть

$$F = I\frac{k}{S}.$$

Если намагничение вызвано только влиянием других магнитов, то, обозначив через p магнитное напряжение в какой-нибудь точке [магнитный потенциал], мы получим для всего магнитного соленоида [21]

$$F = I\int \frac{k}{S}\,dx = IK = p - p'.$$

Если соленоидально намагниченный круг замкнут, то намагничение не может быть вызвано только разностью магнитных напряжений, но должна существовать еще иная намагничивающая сила напряженности F.

Если i есть количество намагничения в какой-нибудь точке [магнитный момент единицы объема, магнитная индукция], т. е. число силовых линий, проходящих через единицу площади какого-либо проведенного через эту точку поперечного сечения соленоида, то полное количество намагничения магнитной цепи, т. е. число силовых линий, проходящих через какое-либо поперечное сечение, будет:

$$I = \sum i\,dy\,dz,$$

*) Faraday, «Exp. Res.», (2870), (3293).

где $dy\,dz$ представляет элемент поперечного сечения, и суммирование распространяется на все элементы сечения.

Напряженность намагничения в какой-нибудь точке или сила, потребная для поддержания этого намагничения [сила, действующая на единицу количества магнетизма], измеряется произведением $ki = f$, и общая напряженность намагничения магнитной цепи измеряется суммой напряженностей всех линейных элементов вдоль цепи; она равна, следовательно:

$$F = \sum (f\,dx),$$

где dx представляет линейный элемент цепи, и суммирование распространяется вдоль всей цепи.

В той же цепи мы имеем всегда $F = IK$, где K представляет собой общее сопротивление цепи, зависящее как от формы ее, так и от вещества. [При этом надо или отвлечься от рассеяния силовых линий или же включить окружающий воздух в магнитную цепь.] [22] ([16]).

О действии замкнутых токов на расстоянии

Математические законы притяжения и отталкивания проводников были развиты Ампером в высшей степени искусными приемами, и его выводы оправдались всеми последующими опытами.

Исходя из единственного допущения, что действие элемента одного тока на элемент другого направлено по линии их соединения и что в этом случае справедлив закон равенства действия противодействию, он вывел из простейших опытов математическое выражение рассматриваемого взаимодействия и придал ему различные крайне изящные и полезные формы. Однако следует помнить, что мы не имеем возможности производить опыты над отдельными элементами тока, а производим их всегда только с замкнутыми токами в твердых или в жидких проводниках; следовательно, из таких опытов мы можем выводить законы взаимодействий лишь замкнутых токов. Из того факта, что формула Ампера в применении к замкнутым токам дает правильные результаты, ее пригодность для *элементов* тока может быть доказана лишь в том случае, если мы примем, что взаимодействие двух таких элементов происходит по линии их соединения. Хотя это допущение при современном состоянии науки весьма правдоподобно и теоретически обосновано, но, оберегая свободу исследования, мы постараемся обойтись без него и примем за исходную точку закон взаимодействия замкнутых токов как первоначально данный опытный факт.

Ампер показал, что если сложить элементы тока по правилу параллелограмма сил, то сила, исходящая от результирующего элемента тока, будет равнодействующей сил, исходящих от ее компонент, и что равные и противоположные токи производят равные и противоположные силы, так что два равных и противоположных тока взаимно нейтрализуются по своим действиям.

Он показал далее, что замкнутый ток какой угодно формы не имеет стремления поворачивать подвижный проводник, имеющий форму дуги круга, около оси, проходящей через центр этого круга и перпендикулярной к ее плоскости. Отсюда следует, что для сил, обусловливаемых замкнутой цепью, выражение $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ есть полный дифференциал.

Наконец, Ампер показал еще, что в подобных и подобно расположенных системах, обтекаемых электрическими токами одинаковой силы, результирующая сила не зависит от абсолютных размеров системы. Это доказывает, что при прочих равных условиях силы обратно пропорциональны квадрату расстояния.

Все эти выводы приводят к заключению, что взаимодействие двух замкнутых токов, из которых каждый обтекает очень малую площадку, будет таким же, как и взаимодействие двух элементарных магнитов, намагниченных перпендикулярно к плоскостям этих токов, Направление намагничения этих эквивалентных магнитов определяется тем правилом, что ток, который должен быть эквивалентен действительному намагничению Земли, должен течь с востока на запад в направлении кажущегося движения Солнца и в обратном направлении, чтобы быть эквивалентным помещенной на Земле, свободно движущейся магнитной стрелке [течет с запада над верхней стороной стрелки к востоку].

Если некоторое число замкнутых единичных токов лежит на поверхности настолько близко друг к другу, что не остается ни одного элемента поверхности, который не обтекался бы одним из этих единичных токов, то на поверхности каждые два равных и противоположно направленных элементарных тока взаимно нейтрализуются; токи же, лежащие на границе поверхности, слагаются в один ток, обтекающий поверхность. Получается, таким образом, результат, что один замкнутый единичный ток эквивалентен покрытой маленькими замкнутыми единичными токами поверхности, ограниченной длинным контуром тока.

Отсюда следует, что действие листка, равномерно намагниченного в направлении, перпендикулярном к его поверхности, в точках, вне его лежащих, будет таким же, как и действие тока, обтекающего контур этого листка, так как каждый из элементарных токов в рассмотренном выше случае оказывает то же действие, как и ограниченный им элемент магнитного листка.

Если мы будем исследовать силовые линии [линии индукции], порождаемые замкнутым током, то найдем, что они имеют форму замкнутых кривых, которые *охватывают* ток [как одно звено цепи другое], и что полная напряженность намагничивающей силы вдоль каждой замкнутой силовой линии [ср. примечание 21] зависит только от количества электрического тока [общей силы тока, пронизывающего контур силовой линии]. Число единичных линий *) магнитной силы, порождаемых

*) Faraday, «Exp. Res.», (3122); см. также параграф 6 этой работы

замкнутым током, зависит как от формы, так и от количества тока; число же единичных клеток [ср. (13)] в каждой замкнутой силовой линии дается числом единичных токов, которые она охватывает. В этом случае единичные клетки суть части пространства, в которых единица магнитного количества [общий магнитный момент] производится единицей намагничивающей силы. Таким образом, длина клетки обратно пропорциональна напряженности намагничивающей силы, а поперечное сечение ее обратно пропорционально количеству магнитной индукции в данной точке [магнитному моменту единицы объема] [23].

Полное число производимых данным током клеток пропорционально произведению напряженности тока на число пронизывающих его силовых линий. Если каким-нибудь изменением формы проводника число клеток может быть увеличено, то появится сила, стремящаяся произвести это изменение формы. Поэтому всегда действует сила, влекущая проводник в направлении, нормальном к силовым линиям, вследствие чего должно возрасти число силовых линий, пронизывающих контур замкнутой цепи, часть которой составляет рассматриваемый проводник.

Число клеток, производимых двумя данными токами, получается помножением числа линий магнитной индукции [24], пронизывающих каждый из контуров тока, на количество [силу] соответствующего тока. Но по (9) число линий, пронизывающих контур первого тока, представляется суммой линий, порождаемых им самим, и тех, которые пронизывали бы его контур под влиянием второго, если бы второй один был в действии. Следовательно, общее число клеток увеличивается всяким движением, увеличивающим число силовых линий, пронизывающих контур тока; сообщать же такое движение стремятся электродинамические силы. Работа сил при этом движении измеряется числом вновь возникших клеток. Из этого принципа могут быть выведены все взаимодействия замкнутых токов [25].

Электрические токи, вызываемые действием индукции

Фарадей показал *), что если проводник перемещается перпендикулярно к магнитным силовым линиям, то в нем возникает электродвижущая сила, стремящаяся возбудить электрический ток. Смотря по тому, замкнут ли проводник или разомкнут, образуется или непрерывный ток, или только напряжение. Если замкнутый проводник перемещается перпендикулярно к линиям магнитной индукции, то до тех пор, пока число силовых линий, пронизывающих контур проводника, при этом перемещении не изменяется, электродвижущие силы находятся в равновесии, и тока нет.

Таким образом, электродвижущие силы зависят от силовых линий, пересекаемых проводником при своем перемещении. Если при этом перемещении число силовых линий, пронизывающих контур проводника, возрастает, то появляется электродвижущая сила, пропорциональная этому приросту и возбуждающая ток, направленный противоположно тому току, который произвел бы эти прибавившиеся силовые линии. Если число линий магнитной индукции, пронизывающих контур проводника, при рассматриваемом перемещении возрастает, оно понижается наведенным током; если же это число при перемещении убывает, то наведенный ток его увеличивает.

Это правило вполне и точно выражает закон индукции токов: это вытекает из того обстоятельства, что электродвижущий эффект остается одинаковым, каковы бы ни были причины возрастания числа линий магнитной индукции, пронизывающих контур тока: движение ли самого проводника, других токов или каких-нибудь магнитов, или изменение силы других токов, намагничение или размагничение тел, расположенных вблизи и способных к намагничению, или, наконец, изменение силы самого тока.

*) Faraday, «Exp. Res», (3077).

Во всех этих случаях электродвижущая сила зависит только от изменения числа линий индукции, пронизывающих контур тока *).

Напрашивается допущение, что подобная сила, зависящая от изменения числа силовых линий, обусловливается изменением некоторого состояния, которое измеряется этим числом. Можно принять, что расположенный в магнитном поле замкнутый проводник находится в известном состоянии, зависящем от действия магнитных сил. Пока состояние это остается неизменным, не происходит никакого индуктивного действия. Но как только это состояние изменяется, возникает

*) Электромагнитные силы, производящие перемещение проводника, следует строго отличать от электродвижущих сил, стремящихся вызвать электрические токи. Допустим, что в металлической массе произвольной формы течет ток, причем плотность тока внутри металла определяется законами электропроводности. Другой постоянный ток течет через второй вблизи расположенный проводник. Если оба тока одинаково направлены, то оба проводника притягиваются и приближаются один к другому, если тому не препятствуют внешние силы. Несмотря на то, что вещество проводников и притягивается, токи, течение которых внутри металла может совершаться по любому направлению, не перемещаются внутри металла, напротив того, их распределение в металлической массе остается неизменным, и ни один из проводников не возбуждает в другом электродвижущих сил, которые изменяли бы в них распределение токов.

В этом случае мы имеем дело с электромагнитными силами, действующими на массу проводников; электродвижущие же силы, которые могли бы вызвать изменение текущих в них токов, отсутствуют.

Как второй пример рассмотрим линейный проводник, который не образует замкнутой цепи, и заставим его пересекать магнитные силовые линии, или перемещая его, или изменяя магнитное поле. В этом случае в направлении проводника разовьется электродвижущая сила, которая, так как цепь не замкнута, вызовет только напряжение на ее концах, но не электрический ток. Поэтому не будет существовать никакого электромагнитного действия на массу проводника, так как такое действие без существования тока в проводнике невозможно, а возникновению тока препятствует разомкнутость цепи. Здесь мы имеем противоположный случай электродвижущей силы, действующей на электричество проводника и не сопровождаемой силой, действующей на его массу [26].

электродвижущая сила, величина и направление которой зависят только от изменения рассматриваемого состояния. В пояснение этой мысли всего лучше дословно цитировать одно место, взятое из первой серии «Экспериментальных исследований» Фарадея (параграф 60). Оно гласит: «Пока провод подвержен действию вольта-электрической или магнитно-электрической индукции, он, повидимому, находится в каком-то особом состоянии, так как сопротивляется возникновению в нем электрического тока, между тем как такой ток должен бы возникнуть, если бы проводник находился в своем обычном состоянии. С прекращением влияния провод приобретает способность порождать ток, которой при обыкновенных условиях он не обладает. Такое электрическое состояние вещества до сих пор не обращало на себя внимания, но, вероятно, оно имеет очень важное влияние на многие, чтобы не сказать на бо́льшую часть явлений, вызываемых электрическими токами. По причинам, которые скоро выяснятся, я позволил себе, посоветовавшись с различными учеными друзьями, назвать это состояние *электротоническим*».

Во второй серии своих «Экспериментальных исследований» Фарадей отверг эту идею как ненужную, находя, что все явления можно объяснить иначе, не вводя такого состояния вещества; но в своих последних исследованиях (3172, 3269) он, повидимому, все еще склоняется к тому, что в его догадке об этом новом состоянии тел кроется некоторая физическая истина.

Такая догадка ученого, столь глубоко освоившегося с природой, может иногда иметь больше значения, чем наилучшим образом обоснованный экспериментальный закон, и хотя существование рассматриваемого состояния мы не можем принимать за точно установленную физическую истину, тем не менее мы должны высоко ценить значение этой новой идеи Фарадея, способной иллюстрировать наши математические понятия.

В этом очерке я имею в виду представить фарадеевскую теорию электричества с математической точки зрения и ограничиваю свою задачу развитием тех методов, при помощи которых, по моему мнению, всего лучше можно охватить электрические явления и сделать их доступными подсчету. Я старался ввиду этого представить математические идеи в наглядной форме, пользуясь системами линий или поверхностей, а не употребляя только символы, которые и не особенно пригодны для изложения взглядов Фарадея и не вполне соответствуют природе объясняемых явлений. До сих пор мне не удалось еще разработать идею об электротоническом состоянии настолько, чтобы можно было ясно представить его природу и свойства, не прибегая к символам; поэтому в дальнейшем изложении я буду широко пользоваться алгебраическими символами и общеизвестными математическими действиями ([17]). Но я сохраняю надежду при внимательном изучении свойств упругих тел и движения вязких жидкостей найти такой метод, который позволил бы дать и для электротонического состояния некоторый механический образ, способный вести к общим заключениям *) [[27]].

---

*) Ср. проф. Вильям Томсон, «О механическом представлении электрических, магнитных и гальванических сил», Cambr. and Dubl. Math. Journ., январь 1847 г., а также Math. and Phys. Pap I, стр. 76.

ЧАСТЬ II

О ФАРАДЕЕВОМ «ЭЛЕКТРОТОНИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ»

Когда проводник перемещается вблизи электрического тока или магнита или когда электрический ток или магнит перемещаются вблизи проводника, или изменяют свою напряженность, то в проводнике возбуждается (наводится, индуцируется) электродвижущая сила, вызывающая электрическое напряжение, или ток, смотря по тому, разомкнут проводник или же замкнут. Подобный ток возникает только при *изменении* электрического или магнитного состояния тел, окружающих проводник, и никогда не наблюдается, пока это состояние остается неизменным. Проводник, когда вблизи него течет электрический ток или помещен магнит, должен находиться в ином состоянии, чем в том случае, когда он лежит вне области их воздействия; это заключение вытекает из того обстоятельства, что удаление или полное устранение тока или магнита вызывает наведенный ток, который не возник бы, если бы магнит или ток не находился ранее вблизи проводника.

Подобные соображения привели профессора Фарадея при открытии им индукционных токов к допущению некоторого состояния, в которое приходят все тела под влиянием находящихся вблизи них магнитов или электрических токов. Еще не известно ни одного явления, которым обнаруживалось бы это состояние, пока оно остается неизменным; но всякое его изменение сопровождается появлением электрического тока или стремлением к его образованию. Это состояние Фарадей назвал «электротоническим». Несмотря на то, что позднее ему и удалось объяснить относящиеся сюда явления менее гипотетическими предположениями, он указывает в различных случаях на вероятность открытия таких явлений, которые оправдали бы допущение электротонического состояния. Эти догадки, к которым пришел Фарадей при изучении законов, открытых им же, и которые были им отброшены лишь за недостатком непосредственных экспериментальных доказательств существования этого неизвестного состояния, до сих пор никогда еще, как мне кажется, не были предметом математических исследований. Может быть, полагали, что количественное определение относящихся сюда явлений еще недостаточно для того, чтобы служить основанием математической теории; но Фарадей не ограничивался только рассмотрением качественной стороны этих явлений; своими опытами он утвердил вполне точно и их количественные законы. Где только он ни подмечал какой-нибудь закон, он тотчас выражал его в определенной и ясной форме, насколько это возможно, пользуясь чисто математическими приемами. Если математик примет такую формулировку закона за физическую истину и будет выводить из него другие законы, допускающие экспериментальную проверку, то этим он только поможет физику систематизировать его собственные идеи, что, понятно, представляет необходимый шаг в научном развитии.

В последующем исследовании законы, установленные Фарадеем, будут рассматриваться как истинные и будет показано, что, развивая далее его соображения, можно вывести новые и еще более общие законы. Если при этом окажется, что рассматриваемые законы, найденные первоначально для определенного ряда явлений, могут быть обобщены настолько, что охватят новый класс явлений, то полученные математические соотношения доставят физикам возможность открыть соотношения физические. Таким образом, отвлеченные рассуждения приобретают важное значение для опытной науки.

О количестве и интенсивности как свойствах электрического тока

Известно, что некоторые действия электрического тока совершенно одинаковы во всех частях замкнутой цепи. Количество воды или какого-нибудь иного электролита, разложенное между двумя поперечными сечениями одного и того же тока, остается одним и тем же или эквивалентным, как бы ни были различны вещество и форма обоих сечений цепи. Магнитное действие обтекаемого током провода также не зависит от его формы [поперечного сечения] и вещества, пока дело идет об одной и той же цепи. Таким образом, существует электрическое действие, которое в каждом сечении цепи остается одним и тем же. Если мы будем рассматривать проводник как канал, по которому прогоняется жидкость, то количество жидкости, протекающее в определенный промежуток времени через каждое поперечное сечение, будет одинаковым, и мы могли бы определить *количество* электрического тока [полную силу тока] как количество электричества, проходящего в единицу времени через какое-нибудь поперечное сечение цепи. Пока мы будем измерять количество электричества количеством воды, которое оно в состоянии разложить в единицу времени.

Чтобы математически точно определить электрический ток в каком-либо проводнике, мы должны установить определение не только полного электрического тока через все поперечное сечение, но и определение тока для какой-нибудь заданной точки в данном направлении.

Определение. При равномерном распределении тока количество тока в данной точке и в данном направлении [слагающая плотности тока в соответственном направлении] измеряется количеством электричества, протекающим в единицу времени через плоский поверхностный элемент, площадь которого равна единице и который построен в данной точке перпендикулярно к данному направлению; если, напротив того, распределение тока неравномерно, то количество тока измеряется тем количеством электричества, которое потекло бы через такую же площадку, если бы распределение тока было равномерным и повсюду именно таким, как в рассматриваемой точке.

В последующем мы будем обозначать через a_2, b_2, c_2 количества электрического тока в точке (x, y, z), определяемые для направлений трех осей координат [слагающие плотности тока].

Количество электричества, протекающее в единицу времени через элемент поверхности dS, есть:

$$dS\,(la_2 + mb_2 + nc_2),$$

где l, m, n суть направляющие косинусы нормали к dS.

Этот электрический ток вызывается электродвижущими силами, действующими в данной точке. Они могут быть или внешними или внутренними.

Внешние электродвижущие силы возникают или вследствие относительного перемещения магнитов или других токов, или же вследствие изменения их интенсивностей, или, наконец, вследствие других действующих на расстоянии причин.

Внутренние электродвижущие силы возникают главным образом вследствие разницы электрического напряжения в местах проводника, непосредственно смежных с рассматриваемой точкой. Кроме того, они могут зависеть от разницы температуры или химического состава в непосредственной близости от рассматриваемой точки.

Пусть p_2 есть электрическое напряжение в какой-нибудь точке, а X_2, Y_2, Z_2 — суммы компонентов в направлении осей координат всех электродвижущих сил, вызываемых иными причинами [в дальнейшем будем называть их «сообщенными»*)]; тогда слагающие дей-

*) В русской литературе употребляется термин «сторонние». (*Прим. ред.*)

ствующей электродвижущей силы будут:

$$\alpha_2 = X_2 - \frac{dp_2}{dx}, \quad \beta_2 = Y_2 - \frac{dp_2}{dy}, \quad \gamma_2 = Z_2 - \frac{dp_2}{dz}. \qquad \text{(A)}$$

Но количество тока [плотность тока с компонентами a_2, b_2, c_2] зависит от электродвижущей силы и сопротивления среды. Если [удельное] сопротивление среды по всем направлениям одно и то же и равно k_2, то

$$\alpha_2 = k_2 a_2, \quad \beta_2 = k_2 b_2, \quad \gamma_2 = k_2 c_2. \qquad \text{(B)}$$

Если же сопротивление по разным направлениям различно, то зависимость будет более сложной.

Три величины α_2, β_2, γ_2 могут быть рассматриваемы как характеризующие силу электрического действия по направлению осей координат.

Сила, действующая в направлении элемента $d\sigma$ некоторой кривой, представится в виде [28]

$$\varepsilon = l\alpha + m\beta + n\gamma,$$

где l, m, n суть направляющие косинусы касательной к кривой в элементе $d\sigma$.

Интеграл $\int \varepsilon \, d\sigma$, распространенный на конечный отрезок кривой, дает полную силу вдоль этого отрезка [линейный интеграл электродвижущей силы]. Если кривая замкнута, он выражает полную электродвижущую силу, действующую на протяжении этой замкнутой кривой.

Подставляя значение величин α, β, γ из уравнений (A), имеем:

$$\int \varepsilon \, d\sigma = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) - p + C.$$

Отсюда, если $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ есть полный дифференциал, то $\int \varepsilon \, d\sigma$ для замкнутой кривой обращается в нуль. Во всех других случаях для замкнутой кривой:

$$\int \varepsilon\, d\sigma = \int (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz),$$

причем интеграция распространяется на всю замкнутую кривую; таким образом, полная действующая электродвижущая сила [линейный интеграл] равна полной сообщенной электродвижущей силе.

Полное *количество* тока через какую-нибудь поверхность [полное количество электричества, проходящее в единицу времени через данную поверхность] должно определяться интегралом $\int e\, dS$, где

$$e = la + mb + nc,$$

dS есть. элемент поверхности, а l, m, n суть направляющие косинусы нормали; поэтому

$$\int e\, dS = \int a\, dy\, dz + \int b\, dx\, dz + \int c\, dx\, dy,$$

где интеграция распространяется на всю данную поверхность. Если поверхность замкнутая, то, интегрируя по частям, получаем:

$$\int e\, dS = \iiint \left(\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz}\right) dx\, dy\, dz,$$

или, полагая

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 4\pi\rho, \qquad \text{(C)}$$

получим:

$$\int e\, dS = 4\pi \iiint \rho\, dx\, dy\, dz,$$

где интеграция в правой части распространяется на все пространство, заключенное внутри поверхности. Для обширного класса явлений, к которому принадлежит случай стационарного тока, ρ равно нулю.

Количество магнетизма и магнитная интенсивность

Изучая магнитные силовые линии (линии индукции), Фарадей пришел к заключению *), что в трубкообразных поверхностях, образуемых системой таких линий, количество магнитной индукции через какое-нибудь поперечное сечение трубки постоянно и что изменение характера этих линий при переходе от одного вещества к другому может быть объяснено различием в особом свойстве обоих тел—*индуктивной емкости*, которая играет совершенно такую же роль, как и проводимость в теории стационарного электрического тока [29].

В дальнейших изысканиях мы будем рассматривать количество магнетизма и магнитную напряженность одновременно с соответственными электрическими величинами. В таких случаях величины, относящиеся к магнетизму, мы будем отмечать индексом 1, а относящиеся к электричеству—индексом 2. Уравнения, связывающие a, b, c, k, α, β, γ, p и ρ в теории магнетизма, по форме соответствуют выведенным выше; a, b, c суть составляющие количества магнитной индукции [магнитного момента единицы объема]; k—сопротивление индукции, которое также может быть в разных направлениях различно; α, β, γ суть действующие намагничивающие силы, которые связаны с величинами a, b, c уравнениями (B); p есть магнитное напряжение или магнитный потенциал, о котором речь будет позднее; ρ—плотность *реальной магнитной* субстанции, выражающаяся по уравнению (C) через a, b, c. Так как все подробности вычисления величин, определяющих магнетизм, будут понятнее после выяснения связи между магнетизмом и электричеством, то здесь мы ограничиваемся только замечанием, что все определения полного количества, отнесенного к не-

---

*) Faraday, «Exp. Res.», (3271), определение «сфондилоида».

которой поверхности, и полной интенсивности, отнесенной к некоторой кривой, остаются в силе как в случае магнетизма, так и в случае электричества.

Электромагнетизм

Ампер доказал следующие законы взаимного притяжения и отталкивания электрических токов.

I. Равные и противоположно направленные токи порождают равные и противоположно направленные силы.

II. Изогнутый ток эквивалентен прямому при условии, что оба тока на всем своем протяжении почти совпадают.

III. Равные токи, текущие вдоль подобных и подобно расположенных замкнутых кривых, действуют с одинаковыми силами независимо от абсолютных размеров цепей.

IV. Замкнутый ток никогда не порождает силы, которая стремилась бы повернуть круговой проводник вокруг его центра.

Следует заметить, что токи, с которыми экспериментировал Ампер, были постоянные и поэтому замкнутые. Вследствие этого все его результаты выведены из опытов над замкнутыми токами, и его формула взаимодействия элементов тока может быть доказана только при допущении, что это действие происходит в направлении прямой линии, соединяющей эти элементы. Все исследователи согласны в том, что такое допущение несомненно справедливо, если объяснять силы притяжения взаимным действием частиц, но здесь мы исходим из иного принципа, так как ищем причину явления не только в самих токах, но и в окружающей их среде.

Первые два закона показывают, что токи можно складывать, как скорости и силы, и разлагать на составляющие.

Третий закон выражает общее свойство притягательных сил, которые зависят от обратной величины квадрата расстояния от неизменной системы точек; четвертый закон указывает на то, что электромагнитные силы всегда могут быть сведены к притяжению и отталкиванию некоторого соответственно распределенного фиктивного вещества.

В самом деле, действие очень малой электрической цепи в некоторой точке окружающей среды тождественно с действием элементарного магнита в некоторой лежащей вне его точке. Если мы разобьем какую-нибудь данную часть поверхности на элементы и представим себе, что они обтекаются одинаковыми токами по одному и тому же направлению, то действие на каждую точку, не расположенную на самой поверхности, будет то же, что действие совпадающего с поверхностью равномерно намагниченного в направлении нормалей слоя. Но по первому закону действия всех малых токов, покрывающих поверхность, взаимно уничтожаются, за исключением тех, которые текут по элементам контура поверхности. Таким образом, остается только единственный ток, обтекающий поверхность, и магнитная сила равномерно намагниченного слоя соответствует силе обтекающего его тока. Если направление тока совпадает с видимым движением солнца, то направление воображаемого намагничения слоя должно быть такое же, как направление действительного намагничения земли *).

Полная интенсивность магнитной силы [линейный интеграл магнитной силы, т. е. интеграл $\int f_x dx$ в примечании 21] вдоль замкнутой кривой, охватывающей ток, как одно кольцо цепи охватывает другое, постоянно [для всякой формы пути тока при постоянной его силе] и потому может служить мерою количества [силы] тока. Так как это напряжение не зависит от формы пути тока, а зависит только от количества тока [полной силы тока], текущего по этому пути, то прежде всего мы рассмотрим простейший случай тока, протекающего через элемент $dy\ dz$ плоскости yz.

*) См. Faraday, «Exp. Res.», (3265), где автор указывает соотношения между электрическими и магнитными цепями, рассматривая их как взаимно охватывающие кривые.

Пусть ось x направлена к западу, ось z—к югу, а ось y вверх [30] и пусть x, y, z—координаты центра элемента площади. Тогда полная магнитная интенсивность [линейный интеграл магнитной силы], измеренное вдоль четырех сторон плоскостного элемента, будет:

$$+\left(\beta_1+\frac{d\beta_1}{dz}\frac{dz}{2}\right)dy,$$

$$-\left(\gamma_1+\frac{d\gamma_1}{dy}\frac{dy}{2}\right)dz,$$

$$-\left(\beta_1-\frac{d\beta_1}{dz}\frac{dz}{2}\right)dy,$$

$$+\left(\gamma_1-\frac{d\gamma_1}{dy}\frac{dy}{2}\right)dz,$$

и в сумме $=\left(\frac{d\beta_1}{dz}-\frac{d\gamma_1}{dy}\right)dy\,dz.$

Но полное количество электричества, протекающее в единицу времени через $dy\,dz$, есть $a_2\,dy\,dz$. Поэтому, если мы будем измерять электрический ток такими единицами, чтобы он сделался равным полной интенсивности магнитной силы, определенной для охватывающей его кривой [31], то получим:

$$a_2=\frac{d\beta_1}{dz}-\frac{d\gamma_1}{dy}, \quad b_2=\frac{d\gamma_1}{dx}-\frac{d\alpha_1}{dz}, \quad c_2=\frac{d\alpha_1}{dy}-\frac{d\beta_1}{dx}.$$

При помощи этих уравнений мы можем найти распределение электрических токов, когда нам даны значения интенсивности α_1, β_1, γ_1 магнитных сил (18). Если α_1, β_1, γ_1 суть частные производные одной и той же функции соответственно по x, y и z, то a_2, b_2 и c_2 обращаются в нуль, откуда мы видим, что магнетизм вызывается не электрическими токами, протекающими через рассматриваемую нами часть поля. Он возникает или от находящегося в поле постоянного магнетизма или от намагничивающих сил, обусловленных внешними причинами.

Дифференцируя предыдущие уравнения, получаем выражение

$$\frac{da_2}{dx}+\frac{db_2}{dy}+\frac{dc_2}{dz}=0,$$

представляющее уравнение непрерывности для замкнутых токов. Поэтому наше исследование ограничивается пока замкнутыми токами, и мы мало знаем о намагничивающем действии незамкнутых токов.

Прежде чем перейти к вычислению электрического и магнитного состояния в рассматриваемом случае, мы считаем необходимым установить несколько общих теорем, правильность которых докажем аналитически.

Теорема I. Уравнение

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho=0$$

(где V и ρ суть функции x, y, z, нигде не обращающиеся в бесконечность, а в бесконечности обращающиеся в нуль) всегда может быть удовлетворено одной и только одной функцией V [см. (17), стр. 28].

Теорема II. Значение V, удовлетворяющее предыдущим условиям, дается интегралом

$$\iiint\frac{\rho\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}},$$

причем интеграция распространяется на все точки пространства, в которых ρ конечно и отлично от нуля.

Аналитические доказательства этих теорем можно найти во всех сочинениях по теории потенциала или электростатике, например, в трактате Грина (Green) «Essay on Application of Mathematics to Electricity» [см. § 18 и 19 этого сочинения] *) или в трактате Гаусса о силах, обратно пропорциональных квадрату расстояния [ср. примечание 8] **).

*) Ostwald's Klassiker, № 61.
**) Ostwald's Klassiker, № 2.

Теорема III. Пусть U и V суть две функции от x, y, z, тогда

$$\iiint U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz=$$
$$=-\iiint\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right)dx\,dy\,dz=$$
$$=\iiint V\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz,$$

где интегралы распространяются на все точки пространства, в которых U и V отличны от нуля (см. Green, стр. 10) ([19]).

Эта теорема показывает, что если в некотором пространстве одновременно имеются две притягивающие системы, то действие первой из них на вторую равно и противоположно действию второй на первую [[32]]. Положив $U=V$, мы найдем, что потенциал системы самой на себя пропорционален интегралу квадрата результирующей силы в каждой точке, распространенному на все пространство ([20]). Этот вывод можно было бы получить и из (30), так как объем каждой клетки по (12) и (13) обратно пропорционален квадрату скорости, и поэтому число клеток в данном пространстве прямо пропорционально квадрату существующей в нем скорости.

Теорема IV. Пусть α, β, γ, ρ — величины, имеющие в данном пространстве конечные значения, а вне его обращающиеся в нуль, и пусть k — данная для всех точек этого пространства непрерывная или прерывная функция от x, y, z; тогда уравнение для p

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{k}\left(\alpha-\frac{dp}{dx}\right)\right]+\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{k}\left(\beta-\frac{dp}{dy}\right)\right]+$$
$$+\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{k}\left(\gamma-\frac{dp}{dz}\right)\right]+4\pi\rho=0$$

допускает одно и только одно решение, если мы добавим требование, чтобы p было всюду конечно и в бесконечности обращалось в нуль. Доказательство этой теоремы было дано профессором В. Томсоном *).

Если α, β, γ — электродвижущие силы, p — электрическое напряжение [потенциал] и k — коэффициент сопротивления, то предыдущее уравнение тождественно с уравнением непрерывности

$$\frac{da_2}{dx}+\frac{db_2}{dy}+\frac{dc_2}{dz}+4\pi\rho=0,$$

и теорема показывает, что если даны электродвижущие силы и количество электричества, порождаемое в каждой точке пространства, то этим определяется и электрическое напряжение [потенциал] в каждой точке.

Так как математические законы магнетизма, насколько мы их здесь рассматриваем, тождественны с законами электричества, то мы можем рассматривать величины α, β, γ как составляющие магнитной силы, p — как *магнитное напряжение* [потенциал] и ρ — как *реальную магнитную плотность*, причем k будет тогда коэффициентом сопротивления против магнитной индукции.

Доказательство этой теоремы основывается на определении минимального значения величины:

$$Q=\iiint\frac{1}{k}\left[\left(\alpha-\frac{dp}{dx}-k\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\beta-\frac{dp}{dy}-k\frac{dV}{dy}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\gamma-\frac{dp}{dz}-k\frac{dV}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz,$$

где V представляет собой решение уравнения

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho=0,$$

а p требуется определить [по отношению к этому доказательству могут быть выставлены те же возраже-

*) Cambr. and Dubl. Math. Journ., т. III, стр. 84, февраль 1848 г., Pap. on Electric. and Magn., XIII, 206, стр. 139; Math. a. Phys. Pap., стр. 93, § XXXVI.

ния, как и против аналогичного доказательства принципа Дирихле].

Смысл этого интеграла в учении об электричестве может быть обнаружен следующим образом. Если бы присутствие сред, в которых k имеет различные значения, не влияло на распределение сил, то «величина» в направлении оси абсцисс была бы просто $\frac{dV}{dx}$, а напряженность $k\frac{dV}{dx}$. В действительности же эти две величины имеют значение $\frac{1}{k}\left(\alpha - \frac{dp}{dx}\right)$ и $\alpha - \frac{dp}{dx}$. Поэтому те части обеих величин, которые обусловливаются только различием сред, суть:

$$\frac{1}{k}\left(\alpha - \frac{dp}{dx}\right) - \frac{dV}{dx} \quad \text{и} \quad \alpha - \frac{dp}{dx} - k\frac{dV}{dx}.$$

Произведение этих двух величин представляет работу, которую нужно совершить при данном распределении источников и обусловленную наличием данного распределения сред в пространстве. Если мы прибавим сюда еще члены, относящиеся к осям y и z, то получим величину Q, дающую выражение полной работы, которая совершается благодаря не только самому присутствию источников, но также и распределению проводящих сред [33].

Это выражение имеет минимум при одном и только одном значении p, а именно при том, которое является решением наших начальных уравнений.

Теорема V. Если a, b, c суть три данные функции x, y, z, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0,$$

то всегда можно найти три функции α, β, γ переменных x, y, z, удовлетворяющие уравнениям (21):

$$\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} = a, \quad \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz} = b, \quad \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = c.$$

Пусть $A = \int c\,dy$, где величину c интегрируем по y, причем x и z рассматриваются как постоянные. Далее, пусть

$$B = \int a\,dz, \quad C = \int b\,dx, \quad A' = \int b\,dz,$$
$$B' = \int c\,dx, \quad C' = \int a\,dy.$$

Все эти интеграции нужно понимать в указанном смысле. Тогда три величины:

$$\alpha = A - A' + \frac{d\psi}{dx}, \quad \beta = B - B' + \frac{d\psi}{dy}, \quad \gamma = C - C' + \frac{d\psi}{dz},$$

будут удовлетворять данным уравнениям, так как

$$\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} = \int \frac{da}{dz}dz - \int \frac{dc}{dz}dx - \int \frac{db}{dy}dx + \int \frac{da}{dy}dy,$$
$$0 = \int \frac{da}{dx}dx + \int \frac{db}{dy}dx + \int \frac{dc}{dz}dx,$$

и поэтому

$$\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} = \int \frac{da}{dx}dx + \int \frac{da}{dy}dy + \int \frac{da}{dz}dz = a.$$

Таким же точно образом можно показать, что эти значения α, β, γ удовлетворяют и остальным уравнениям. Функция ψ в рассматриваемом случае остается совершенно неопределенной. Этот метод заимствован из трактата профессора В. Томсона по магнетизму *).

Так как требуемые интеграции невозможно выполнить, если a, b и c суть прерывные функции от x, y, z, то следующий вполне общий, но, без сомнения, несколько более сложный метод еще яснее обнаружит справедливость рассматриваемой теоремы.

---

*) Phil. Trans., стр. 283 (1851). Pap. on Electric. and Magn., V, стр. 402.

Пусть A, B, C суть величины, определяемые методами I и II теорем из уравнений:

$$\frac{d^2A}{dx^2}+\frac{d^2A}{dy^2}+\frac{d^2A}{dz^2}+a=0,$$

$$\frac{d^2B}{dx^2}+\frac{d^2B}{dy^2}+\frac{d^2B}{dz^2}+b=0,$$

$$\frac{d^2C}{dx^2}+\frac{d^2C}{dy^2}+\frac{d^2C}{dz^2}+c=0,$$

так что A, B, C никогда не обращаются в бесконечность и при x, y или z бесконечных обращаются в нуль. Далее, пусть

$$\alpha=\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}+\frac{d\psi}{dx},$$

$$\beta=\frac{dC}{dx}-\frac{dA}{dz}+\frac{d\psi}{dy},$$

$$\gamma=\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}+\frac{d\psi}{dz}.$$

Тогда

$$\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)-\left(\frac{d^2A}{dx^2}+\frac{d^2A}{dy^2}+\frac{d^2A}{dz^2}\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)+a.$$

Если мы продифференцируем это уравнение по x, а другие два аналогичные, относящиеся к координатам y и z, продифференцируем соответственно по y и по z, затем сложим три полученных выражения, то, принимая во внимание уравнение

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0,$$

найдем:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)=0.$$

Так как A, B, C повсюду конечны и в бесконечности обращаются в нуль, то единственное возможное решение этого уравнения есть:

$$\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}=0,$$

и мы получаем, наконец,

$$\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}=a$$

и два аналогичных уравнения; эти три уравнения доказывают, что α, β, γ определены правильно.

Функция ψ должна быть определена из условия

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\psi;$$

если левая часть уравнения всегда равна нулю, то ψ также равно нулю.

Теорема VI. Пусть a, b, c—какие-нибудь данные функции от x, y, z. Всегда можно образовать такие три функции α, β, γ и четвертую V от этих величин, чтобы

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0$$

и

$$a=\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}+\frac{dV}{dx},$$

$$b=\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz}+\frac{dV}{dy},$$

$$c=\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}+\frac{dV}{dz}.$$

Пусть

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=-4\pi\rho,$$

а V находится из уравнения

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-4\pi\rho;$$

тогда величины

$$a' = a - \frac{dV}{dx}, \qquad b' = b - \frac{dV}{dy}, \qquad c' = c - \frac{dV}{dz}$$

удовлетворяют условию

$$\frac{da'}{dx} + \frac{db'}{dy} + \frac{dc'}{dz} = 0,$$

и потому мы можем определить три функции A, B, C, а по ним α, β, γ так, чтобы они удовлетворяли данным уравнениям [a', b', c' играют тогда роль величин a, b, c теоремы V] ([22]).

Теорема VII. Интеграл

$$Q = \int\int\int (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1)\, dx\, dy\, dz,$$

где a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 — какие-нибудь произвольные функции, распространенный на все безграничное пространство, может быть преобразован в

$$Q = \int\int\int [4\pi p\rho_1 + (\alpha_0 a_2 + \beta_0 b_2 + \gamma_0 c_2)]\, dx\, dy\, dz.$$

Входящие в последний интеграл величины определяются уравнениями

$$\frac{da_1}{dx} + \frac{db_1}{dy} + \frac{dc_1}{dz} + 4\pi\rho = 0,$$

$$\frac{d\alpha_1}{dx} + \frac{d\beta_1}{dy} + \frac{d\gamma_1}{dz} + 4\pi\rho' = 0;$$

α_0, β_0, γ_0, V определяются из a_1, b_1, c_1 по предыдущей теореме, так что [34]

$$a_1 = \frac{d\beta_0}{dz} - \frac{d\gamma_0}{dy} + \frac{dV}{dx} \text{ и т. д.};$$

a_2, b_2, c_2 определяются из α_1, β_1, γ_1 посредством уравнений

$$a_2 = \frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy} \text{ и т. д.};$$

p вычисляется из уравнения

$$\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}+4\pi\rho_1'=0.$$

В самом деле, если мы напишем a_1 в форме

$$\frac{d\beta_0}{dz}-\frac{d\gamma_0}{dy}+\frac{dV}{dx},$$

так же представим b_1 и c_1 и заметим, что все эти функции в бесконечности обращаются в нуль, то получим интегрированием по частям, распространенным на все безграничное пространство:

$$Q=-\iiint\left\{V\left(\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d\beta_1}{dy}+\frac{d\gamma_1}{dz}\right)-\alpha_0\left(\frac{d\beta_1}{dz}-\frac{d\gamma_1}{dy}\right)-\right.$$
$$\left.-\beta_0\left(\frac{d\gamma_1}{dx}-\frac{d\alpha_1}{dz}\right)-\gamma_0\left(\frac{d\alpha_1}{dy}-\frac{d\beta_1}{dx}\right)\right\}dx\,dy\,dz,$$

или

$$Q=\iiint[4\pi V\rho'+(\alpha_0a_2+\beta_0b_2+\gamma_0c_2)]\,dx\,dy\,dz;$$

и так как из теоремы III следует, что

$$\iiint V\rho'\,dx\,dy\,dz=\iiint p\rho\,dx\,dy\,dz,$$

то окончательно [35] (23)

$$Q=\iiint[4\pi p\rho+(\alpha_0a_2+\beta_0b_2+\gamma_0c_2)]\,dx\,dy\,dz.$$

Если a_1, b_1, c_1 обозначают составляющие количества магнетизма, а α_1, β_1, γ_1 — составляющие магнитной напряженности, то ρ представляет реальную магнитную плотность, а p — магнитный потенциал или напряжение; a_2, b_2, c_2 суть составляющие количества электрического тока, а α_0, β_0, γ_0 — три величины, определяемые из a_1, b_1, c_1 и, как мы увидим далее, представляющие собой математическое выражение фарадеевского электротонического состояния.

Рассмотрим теперь связь этих аналитических теорем с теорией магнетизма. Величины, относящиеся к магнетизму, мы будем снабжать индексом 1. Таким образом, a_1, b_1, c_1 суть составляющие количества магнитной индукции, α_1, β_1, γ_1 — составляющие интенсивности намагничения в какой-нибудь точке, или, что то же, составляющие силы, которая действовала бы на южный полюс [36], имеющий массу, равную единице, если бы, не нарушая распределения магнетизма, мы поместили его в той же точке.

Электрические токи найдутся из магнитных напряженностей по следующим уравнениям:

$$a_2 = \frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy} \quad \text{и т. д.}$$

Там, где нет электрических токов, выражение

$$\alpha_1\,dx + \beta_1\,dy + \gamma_1\,dz = dp_1$$

будет полным дифференциалом некоторой функции от x, y и z. По аналогии можно p_1 назвать магнитным напряжением.

Силы, действующие на какую-либо массу южного магнетизма по направлению осей координат, суть:

$$-m\frac{dp_1}{dx}, \quad -m\frac{dp_1}{dy}, \quad -m\frac{dp_1}{dz}.$$

Потому полная работа, совершаемая при каком-либо перемещении магнитной системы, равна уменьшению интеграла

$$Q = \iiint \rho_1 p_1\,dx\,dy\,dz,$$

распространенного на всю систему.

Мы назовем Q *полным потенциалом системы самой на себя*. Прирост или уменьшение величины Q измеряет работу, потерянную или приобретенную при перемещении какой-нибудь части системы, и дает нам, таким образом, возможность вычислить силы, действующие на соответствующую часть системы.

По теореме III Q можно привести к форме

$$Q = \frac{1}{4\pi}\iiint (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1)\,dx\,dy\,dz,$$

где α_1, β_1, γ_1 суть производные от p_1 по x, y и z.

Принимая, что это выражение Q остается справедливым, какие бы значения ни имели величины $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ [если бы даже $\alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz$ не было полным дифференциалом], мы переходим от рассмотрения действий постоянных магнитов к рассмотрению действия электрических токов и получаем по теореме VII

$$Q = \iiint \left[p_1 \rho_1 + \frac{1}{4\pi}(\alpha_0 a_2 + \beta_0 b_2 + \gamma_0 c_2) \right] dx\, dy\, dz.$$

В случае электрических токов их составляющие должны быть помножены соответственно на функции α_0, β_0, γ_0, и суммирование всех этих произведений, распространенное на всю систему, даст нам часть величины Q, обусловленную электрическими токами.

Таким образом, функции α_0, β_0, γ_0 дали нам возможность избежать рассмотрения магнитной индукции, пронизывающей цепь тока. Вместо этого искусственного приема мы используем прием более естественный, а именно — приводим ток в соответствие с величинами, существующими в том же пространстве, где находится и самый ток. Эти величины (α_0, β_0, γ_0) я называю *электротоническими функциями* или *составляющими электротонической напряженности* ([24]).

Рассмотрим теперь условия проводимости электрического тока в данной среде при изменении электротонического состояния. Для этого мы воспользуемся методом, который представляет собой применение метода, данного Гельмгольцем в его трактате о сохранении силы *).

Пусть дан определенный внешний источник электрического тока, способный вызывать в проводящей среде токи, количество которых измеряется величинами a_2, b_2, c_2, а напряженность — величинами α_2, β_2, γ_2.

Работа, потраченная в этой системе на преодоление сопротивления в течение времени dt, представится

*) Русское издание, Гельмгольц, «О сохранении силы», М., 1922 г.

в виде

$$dt \iiint (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2)\, dx\, dy\, dz,$$

а механическая работа, совершенная электромагнитными действиями этих токов, будет:

$$\frac{dt}{4\pi}\frac{d}{dt} \iiint (a_2\alpha_0 + b_2\beta_0 + c_2\gamma_0)\, dx\, dy\, dz.$$

Если нет никаких внешних источников энергии, которые вызывали бы токи, то полная работа должна обратиться в нуль, и мы получаем:

$$dt \iiint (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2)\, dx\, dy\, dz + \\ + \frac{dt}{4\pi}\frac{d}{dt} \iiint (a_2\alpha_0 + b_2\beta_0 + c_2\gamma_0)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

где интегралы могут быть распространены на произвольное пространство.

Отсюда для каждой точки пространства

$$a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}(a_2\alpha_0 + b_2\beta_0 + c_2\gamma_0) = 0.$$

Нужно помнить, что здесь речь идет только о том изменении Q, которое вызывается изменением величин α_0, β_0, γ_0, а не величин a_2, b_2, c_2. Поэтому мы должны рассматривать a_2, b_2, c_2 как постоянные и получаем уравнение

$$a_2\left(\alpha_2 + \frac{1}{4\pi}\frac{d\alpha_0}{dt}\right) + b_2\left(\beta_2 + \frac{1}{4\pi}\frac{d\beta_0}{dt}\right) + \\ + c_2\left(\gamma_2 + \frac{1}{4\pi}\frac{d\gamma_0}{dt}\right) = 0.$$

Чтобы это уравнение удовлетворялось независимо от значения величин a_2, b_2, c_2 [37], три коэффициента этих величин должны быть сами по себе нулями; отсюда мы получаем электродвижущие силы, вызываемые действием магнитов и токов на расстоянии, выраженными через электротонические функции:

$$\alpha_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\alpha_0}{dt}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\beta_0}{dt}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\gamma_0}{dt}.$$

Опыт показывает, что выражение $\frac{d\alpha_0}{dt}$ относится к изменению электротонического состояния *данной материальной частицы проводника*, независимо от того, вызывается ли оно изменением значения самих электротонических функций или движением этой частицы (25).

Если выразим α_0 как функцию от x, y, z и t, причем x, y, z суть координаты движущейся [весомой] материальной частицы, то электродвижущая сила, действующая в направлении оси абсцисс, будет [38]:

$$\alpha_2 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha_0}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d\alpha_0}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{d\alpha_0}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{d\alpha_0}{dt}\right).$$

Аналогичные выражения получаются для составляющих электродвижущей силы в направлении осей y и z. Распределение вызванных этими силами электрических токов зависит от формы и положения проводящих сред и от общего электрического напряжения в какой-нибудь точке.

Рассмотрение этих функций завлекло бы нас в математические формулы, которыми и без того уже полна наша статья. Только благодаря физической важности я изложил здесь математическое выражение одной из идей Фарадея. Подвергнув более старательному разбору их взаимные соотношения и воспользовавшись содействием лиц, занятых физическими исследованиями, как непосредственно примыкающими к этой области, так и другими, на первый взгляд с нею не связанными, я надеюсь представить со временем теорию электротонического состояния в такой форме, в которой все относящиеся сюда соотношения выступали бы с полной ясностью без помощи аналитических выкладок.

Обзор теории электротонического состояния

Мы можем представить себе электротоническое состояние в какой-нибудь точке пространства как некоторый определенный по величине и направлению вектор и можем это электротоническое состояние выразить в данной точке пространства с помощью какого-нибудь механического вектора, например, скорости или силы, направление и величина которых соответствуют направлению и величине определенного нами электротонического состояния. Такое представление не связано ни с какой физической теорией, а является только своего рода искусственной иллюстрацией. В аналитических изысканиях мы пользуемся тремя составляющими электротонического состояния, которые мы назвали электротоническими функциями. Мы можем для каждой точки замкнутой кривой найти составляющую электротонического состояния в ее направлении. Помножая эту составляющую на дифференциал дуги кривой и интегрируя вдоль всей кривой, мы получаем то, что назовем *полной электротонической интенсивностью вдоль замкнутой кривой*.

Предложение I. *Если мы начертим на какой-нибудь поверхности замкнутую кривую и разделим часть поверхности, заключенную внутри этой кривой, на бесконечно малые элементы, то полная интенсивность вдоль замкнутой кривой будет равна сумме интенсивностей, считаемых в том же направлении* [при обходе в ту же сторону], *вдоль всех кривых, ограничивающих элементы поверхности.*

Тогда, если мы будем обходить каждый элемент поверхности в одну и ту же сторону, то каждая пограничная линия двух элементов будет пройдена два раза в направлениях противоположных, и потому интенсивность в одном случае возрастет ровно настолько, насколько в другом уменьшится. Поэтому действия всех линейных элементов, расположенных внутри, взаимно уничтожатся, и останется только действие внешней замкнутой кривой.

З а к о н I. *Полная электротоническая интенсивность вдоль границы элемента поверхности служит мерой количества магнитной индукции, проходящей через этот элемент, или, другими словами, мерой числа магнитных силовых линий, пронизывающих данный элемент.*

Из предложения I ясно, что то, что имеет место для элемента поверхности, должно оставаться справедливым и для поверхностей конечных размеров. Поэтому количества магнитной индукции, пронизывающей две произвольного вида поверхности, должны быть одинаковы, если эти поверхности ограничены одной и той же замкнутой кривой.

З а к о н II. *Магнитная интенсивность в какой-нибудь точке связана с количеством магнитной индукции системой линейных уравнений, называемых уравнениями* [магнитной] *проводимости* [ср. (28)].

З а к о н III. *Полная магнитная интенсивность вдоль линии, ограничивающей какую-нибудь часть поверхности, служит мерой количества электрического тока, протекающего через эту часть поверхности.*

З а к о н IV. *Количество и интенсивность электрического тока связаны между собой также системой уравнений проводимости* [имеющих ту же форму, как и в магнетизме].

При помощи этих четырех законов можно вывести количество и интенсивность магнетизма и электричества по значениям электротонических функций. Я ничего не говорил об единицах меры, так как это удобнее сделать при разборе действительных опытов. Мы переходим теперь к рассмотрению проводников тока и индукции токов в проводниках.

З а к о н V. *Полный электромагнитный потенциал замкнутого тока измеряется произведением количества тока на полную электротоническую интенсивность вдоль цепи, считаемую в направлении тока* [линейный интеграл электротонической интенсивности вдоль цепи].

Всякому перемещению проводника, повышающему этот потенциал, способствует сила, пропорциональная производной от потенциала по координате, определяющей данное перемещение, так что совершаемая при этом перемещении механическая работа пропорциональна приращению потенциала.

Хотя в некоторых случаях изменение в направлении или интенсивности *тока* [в проводнике, не изменяющем своего положения] и могло бы повысить потенциал, однако такое изменение само по себе не произвело бы работы, а потому не будет существовать стремления произвести такое изменение, так как изменения тока вызываются исключительно электродвижущими силами, а не электромагнитными притяжениями [пондеромоторными силами], действующими лишь на проводник [может быть, за исключением явления Холла].

Закон VI. *Электродвижущая сила* [индукции], *действующая на элемент проводника, измеряется производной по времени от электротонической интенсивности, независимо от того, обусловлена ли эта производная изменением величины или направления электротонического состояния.*

Электродвижущая сила в замкнутом проводнике пропорциональна производной по времени от полной электротонической интенсивности вдоль всей проводящей цепи. Она не зависит от природы проводника, между тем как вызванная ею сила тока обратно пропорциональна сопротивлению. Эта электродвижущая сила всегда остается той же, чем бы ни было вызвано изменение электротонической интенсивности — движением ли проводника или изменением внешних условий.

Я сделал попытку дать в этих шести законах математическое выражение той идеи, которая, по моему мнению, лежит в основе хода мыслей Фарадея в его «Экспериментальных исследованиях». Я не предполагаю в них и тени действительной физической теории; напротив того, их главная заслуга как условных орудий для дальнейших исследований заключается в том, что они *свободны* от всякого предвзятого мнения ([26]).

В противоположность этому существует определенно выраженная физическая теория электродинамики. Она получила столь изящную математическую разработку и так резко отличается от всего изложенного в настоящей статье, что я считаю нужным привести здесь и ее основные положения, рискуя повторить то, что всем должно быть известно. Эта теория содержится в «Electrodynamischen Maassbestimmungen» Вебера *). (См. Отчеты Лейбницевского и Саксонского Королевского научных обществ.)

Эти положения следующие:

1) Две электрические частицы, находящиеся в движении, отталкиваются друг от друга не с той же силой, как если бы они пребывали в покое. Эта сила испытывает некоторое изменение, зависящее от относительного движения обеих частиц, так что выражение их взаимной отталкивательной силы на расстоянии r представится так:

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1+a\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+br\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

2) Если электричество течет в проводнике, то скорость положительной электрической жидкости *относительно вещества проводника* равна и направлена противоположно скорости отрицательной жидкости.

3) Полное действие одного элемента проводника на другой представляет результирующую всех взаимодействий обеих заключающихся в них электрических жидкостей.

4) Электродвижущая сила в какой-либо точке представляет собой разность сил, действующих на положительную и отрицательную жидкость.

*) Когда я писал это, мне еще не было известно, что часть работ Вебера переведена в Taylor's Scientific Memoirs, т. V, гл. 14. Экспериментальное и теоретическое значение этих исследований делает их изучение необходимым для каждого, занимающегося электричеством.

Из этих основных положений могут быть выведены как законы Ампера для взаимодействия проводников, так и законы Неймана и других для индукции токов. Они представляют поэтому основные положения действительной физической теории и удовлетворяют предъявляемым ей требованиям, быть может, лучше, чем любая из построенных до сих пор теорий, и к тому же они предложены ученым, экспериментальные работы которого дают широкую основу его математическим теориям.

Какая польза в замене легко понятного закона притяжения идеей электротонического состояния, о котором мы совсем не имеем ясного физического представления? Я отвечаю на это, что всегда важно иметь две точки зрения на один и тот же предмет и допускать, что возможны две различные точки зрения на предмет. Затем, я не думаю, чтобы теперь пришло уже время составить себе окончательное представление о сущности электричества, и вижу главную заслугу временной теории в том, чтобы она руководила экспериментом, не препятствуя в то же время появлению истинной теории. Можно также сомневаться и относительно зависимости основных сил природы от скорости тел, между которыми они действуют. Если силы природы могут быть сведены к силам, действующим между материальными точками, то принцип сохранения энергии требует, чтобы каждая сила была направлена по линии соединения обеих материальных точек, между коими она действует, и чтобы ее величина была функцией только их расстояния [[39]]. Опыты Вебера по обратной полярности диамагнитных веществ, повторенные в новейшее время профессором Тиндалем, не решают вопроса, так как они обнаруживают только факт, одинаково вытекающий как из веберовой теории электричества, так и из теории силовых линий.

Относительно истории предлагаемой теории я укажу, что употребление приведенных выше математических функций для выражения фарадеевского электротонического состояния и для определения электродинамических потенциалов и электродвижущих сил, насколько мне известно, совершенно ново. Убеждение в возможности таких математических выражений я вынес из изучения трактата профессора В. Томсона о механическом представлении электрических, магнитных и гальванических сил [см. сноску на стр. 59] и его математической теории магнетизма [§ 78 и сл., см. сноску на стр. 45]. Чтобы привести пример пособия, которое могло бы быть привлечено из других физических исследований, я упомяну, что после разработки теорем настоящей статьи профессор Стокс указал мне, что он пользовался подобными выражениями в своей динамической теории диффракции (Cambridge Trans., т. IX, отд. 1). Приведет ли применение теории этих функций к учению об электричестве к новым полезным для физических исследований математическим идеям, покажет будущее. В последующем я рассмотрю несколько задач из учения об электричестве и магнетизме, относящихся к сферическим телам. Эти задачи должны служить лишь частными примерами применения методов данной теории. Детальную же разработку случаев, относящихся к специально предпринимаемым опытам, я отложу до тех пор, пока буду иметь в руках средства для постановки таких опытов.

ИЗ ПРИМЕЧАНИЙ Л. БОЛЬЦМАНА К РАБОТЕ МАКСВЕЛЛА «О ФАРАДЕЕВЫХ СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ»

Те замечания о стиле Максвелла, которые я сделал в моей ректорской речи в Граце, замечания, не подающие, конечно, ни малейшего повода сомневаться в признании мною высоких достоинств чисто лингвистической стороны его, пришли мне снова на ум при составлении настоящего перевода. В самом деле, кто мог бы с легким сердцем приступить к переводу языка Максвелла, оригинального и крайне интересного для знатока, но бесконечно трудного для начинающего, языка, восхваляемого, с одной стороны, как недосягаемый образец сжатого и остроумного изложения, и порицаемого—с другой, за трудности его понимания?

Есть три способа перевода: 1) можно переводить дословно; этим устраняется всякое искажение и изменение оригинала, но перевод по необходимости становится чуждым языку перевода; 2) можно прочесть оригинал и постараться как можно вернее передать его мысли своими словами, тогда место оригинала заступает уже нечто совершенно другое и, если переводчик не лишен дарования, даже нечто хорошее; 3) можно придерживаться оригинала настолько, чтобы отступления от него были не существенны и чтобы перевод вполне соответствовал духу языка, на который переводят, и удовлетворил вполне читателя. Этот третий способ только и пригоден для публики, а потому и применен в настоящем случае.

Немалую трудность представил перевод терминологии. Максвелл придерживается в этом труде терминологии Фарадея, которая теперь не употребляется и которая была нередко отвергаема самим Максвеллом в его позднейших сочинениях. Несмотря на это, я постарался по возможности сохранить ее, так как многие идеи этой книги неразрывно с нею связаны, например, параллелизм между электричеством и магнетизмом, выражающийся в обозначениях: количество и интенсивность как для электрического тока, так и для магнетизма.

Хотя в наше время под интенсивностью или силой тока и разумеют нечто совсем иное, однако эти обозначения все же нельзя совершенно устранить, не затруднив понимания идей Максвелла. Я прибавил к ним везде, где это было нужно, употребительные в наше время обозначения, заключив их в скобки, и дал, когда требовалось, дальнейшие разъяснения в примечаниях.

Максвелл определяет вначале (в параграфах 18, 21, 26, 27, 28, 29 и т. д.) величину k как «сопротивление», но часто (параграф 22) как «коэффициент сопротивления», тогда как в параграфе 31 он прилагает это название к совершенно другой величине R. Это пользование одним и тем же словом в различных смыслах едва ли удобно для читателя. Поэтому я уже с самого начала назвал k «коэффициентом сопротивления», а R—«коэффициентом полного сопротивления»...

Цитаты я пополнил и проверил.

Хотя я знал хорошо обо всех этих трудностях, я тем не менее счел себя не вправе уклониться от возложенного на меня поручения перевести именно эту работу Максвелла. Если историческая последовательность указывается часто как важный момент при изучении науки вообще, то то же должно иметь место и при изучении произведения одного какого-нибудь исследователя, тем более Максвелла, который не был бы так часто неверно понят, если бы изучение его не начинали прямо с его «Трактата», тогда как своеобразный метод Максвелла выступает гораздо ярче в его более ранних произведениях. Может быть, благодаря тому, что эти более ранние произведения его не были достаточно поняты, а также и потому, что Максвелл имел в виду преимущественно учащихся, он и решил впоследствии перемешать свои старые представления с новыми, чем и ввел в заблуждение читателей, начинающих прямо с его знаменитого «Трактата».

Эта первая большая работа Максвелла содержит уже в себе изумительно много. Уравнения между магнитными и электрическими величинами и напряжениями остались по существу без изменения; лишь диэлектрическая поляризация и электропроводность, а также индуктивное действие вследствие изменения первой во времени, и большая часть того, что относится к уравнениям для движущихся тел, было введено впоследствии...

---

1. (Стр. 12.) Это введение в первую более обширную работу Максвелла в высшей степени замечательно. Оно показывает, как мало обязан он был случайности в своих позднейших открытиях; более того, оно доказывает, что он работал по хорошо

обдуманному заранее плану. Подобный план грезился, может быть, и другим великим исследователям, но немногие из них сознавали его так ясно и имели достаточно искренности, чтобы заранее разъяснить его так просто. Важность разбираемых Максвеллом проблем была известна и на континенте, но пока она вызывала там одни лишь бесплодные дебаты о различных элементарных законах электродинамики. Максвелл давно уже сделал то единственное правильное, что можно было сделать, а именно — он создал новую теорию.

Введение Максвелла показывает далее, что он был столь же крупным творцом в теории познания, как и в области теоретической физики. Все пути, по которым двигалась первая в последующие 40 лет, ясно намечены в этих немногих страницах и иллюстрированы здесь теми же сравнениями. Позднейшие исследователи теории познания развили все это подробнее, но по большей части и гораздо одностороннее; они установили правила, по которым теория должна развиваться лишь после того, как само развитие ее совершилось; здесь же они даны еще до начала развития.

2. (Стр. 19.) Проходящая в данное время через две точки пространства A и B линия тока S именно и дает господствующее в это время в точках A и B направление течения. Частица жидкости F, которая в это время находится в A, двигается там как раз в направлении, указанном линией тока; однако она достигает гораздо позднее точки B, где линии тока (если движение не стационарно) имеют уже совершенно другой вид. Если бы частица жидкости случайно и дошла до B, чего вообще не бывает, то она ни в каком случае не будет уже больше двигаться по направлению прежней линии тока S, так как теперь через B будет проходить линия тока, вообще совершенно иначе направленная. Если движение не стационарно, то линия тока совпадает с путем частицы жидкости лишь в продолжение бесконечно малого промежутка времени.

3. (Стр. 21.) К совершенно такому же взгляду пришел и Риман, повидимому, вполне независимо от Максвелла (Riemann, Gesamm. Werke, 2-е изд., стр. 529). Необходимо обратить внимание на различие между субъективным методом Римана, прибегающего даже к миру духов, и чисто объективным методом Максвелла. Который из них больше заслуживает наименования философского?

4. (Стр. 23.) До сих пор картина была чисто геометрическая, т. е. воображаемая жидкость служила лишь для олицетворения известных геометрических соотношений. Теперь Максвелл заимствует дальнейшие черты картины из аналитической механики и даже из предельного ее случая. Так как не существует механики для лишенных массы тел, то предварительно надо себе представить, что воображаемая жидкость имеет

очень незначительную плотность, в то время как «среда», необходимая в дальнейшем для Максвелла, действует на нее с очень значительными силами. Тот предельный случай, когда плотность жидкости делается бесконечно малой, а сила—бесконечно большой, и дает картину, созданную Максвеллом. Картина эта, конечно, не может уже более претендовать на геометрическую очевидность, а лишь на очевидность законов механики.

5. (Стр. 23.) «Среду» должно представлять себе покоящейся в пространстве, в то время как «жидкость» просачивается сквозь нее, как вода сквозь губку, причем каждая частица жидкости постоянно испытывает сопротивление, бесконечное по сравнению с произведением ее массы на ускорение.

6. (Стр. 24.) Так как плотность жидкости бесконечно мала, то для изменения скорости этой последней не требуется никакой силы, и равнодействующая всех сил давления, действующих на элемент объема, должна всегда равняться внешним силам, действующим на тот же элемент объема (в данном случае сопротивлению среды). Всякая слагающая скорости жидкости, которая производит сопротивление среды, не компенсированное разностью давлений, тотчас же исчезает вследствие бесконечно малой плотности жидкости.

7. (Стр. 25.) Это сопротивление, не уравновешенное разностью давлений, согласно сказанному в конце предшествовавшего примечания немедленно сводит к нулю слагающую скорости, касательную к поверхнотти одинакового давления.

8. (Стр. 29.) Если u, v, w суть слагающие скорости жидкости, то

$$u = -\frac{1}{k}\,\frac{dp}{dx},$$

$$v = -\frac{1}{k}\,\frac{dp}{dy},$$

$$w = -\frac{1}{k}\,\frac{dp}{dz}.$$

Далее, во всяком элементе объема $dx\,dy\,dz$ имеется источник напряжения

$$S = \rho\,dx\,dy\,dz = dx\,dy\,dz\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = -\frac{dx\,dy\,dz}{k}\nabla^2 p.$$

Согласно (19)

$$p = \sum \frac{kS}{4\pi r} = \frac{k}{4\pi}\iiint \frac{\rho\,dx\,dy\,dz}{r}.$$

Если мы поэтому положим:

$$\iiint \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r} = \frac{4\pi p}{k} = V,$$

то получим:

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho.$$

Так Максвелл доказывает положения Лапласа и Пуассона теории потенциала, не прибегая к дифференциальному и интегральному исчислениям. Естественно, что по методу Максвелла можно также вывести и теоремы о потенциале поверхностей, которые покрыты конечными массами.

9. (Стр. 31.) Проведем ось z перпендикулярно к поверхности раздела, а в касательной к ней плоскости проведем ось x и ось y и обозначим через u, v, w, p слагающие скорости тока и давление на той стороне, где коэффициент сопротивления равен k, а штрихом обозначим числовые значения этих же величин на другой стороне; тогда на поверхности раздела получится:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \frac{dp'}{dx}, \\ \frac{dp}{dy} &= \frac{dp'}{dy}, \\ k'\frac{dp}{dz} &= k\frac{dp'}{dz}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$k'u = ku', \quad k'v = kv', \quad w = w'.$$

Так как $\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'}$, то трубка тока остается в той же самой плоскости, которая определяется осью z (т. е. в нормальной).

Так как далее $\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{w}$ и $\frac{\sqrt{u'^2+v'^2}}{w'}$ суть тангенсы тех углов i и b, которые можно бы назвать углами падения и преломления, если подставить вместо линий тока лучи падающего и соответственно преломленного света, тогда окажется $\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} b} = \frac{k'}{k}$ (ср. Helmholtz, Über die Bewegungsgleich. der Electr. für ruhende leitende Körper, 17, Borch. Journal, 72, стр. 116, Ges. Abhandl., I, стр. 613). Впоследствии $\frac{dp}{dz}$ будет отождествлено с электрической или магнитной силой (на единицу количества электричества или магнетизма). Поэтому, если положить количество жидкости, протекающее через поперечное сечение трубки, прямо пропорциональным силе, а величину его сечения — обратно пропорциональной ей, благодаря чему и получаются силовые трубки, то поперечное сечение трубки должно внезапно измениться при переходе ее из одного вещества в другое; тогда во втором веществе трубки не будут уже заполнять всего пространства, как это имело место для первого вещества. Если же положить сечение трубки обратно пропорциональным магнитной или электрической индукции, т. е. величине $\frac{1}{k}\frac{dp}{dz}=w$ (трубки индукции), то указанное затруднение исчезает. Поэтому теперь пользуются всегда индукционными трубками. Для однородного тела и то и другое совпадает.

10. (Стр. 31.) На каждой стороне пограничной поверхности, где единичная трубка переходит из внутренней среды в наружную, следует добавить на наружной стороне источник $+1$, а на внутренней источник -1. Первый нужно умножить на k, а второй на k' так, чтобы оба вместе дали источник, сила которого равнялась бы $k-k'$. Обратно, в каждом месте, где единичная трубка вступает внутрь, будет источник, сила которого равняется $k'-k$.

11. (Стр. 32.) Из замкнутой поверхности может при этом вытекать жидкость, и так как внутри нее $k'=0$, то можно представлять себе источники безразлично лежащими внутри или на наружной поверхности. К этим источникам присоединяются тогда во втором случае ($k'=k$) только парные источники (т. е. такие, сумма интенсивностей которых равна нулю), которые вполне определены, если первые источники были избраны определенным образом.

12. (Стр. 36.) Новые оси, образующие специальную систему координат, суть оси эллипсоида, который по отношению к первоначальным осям координат имеет следующее уравнение:

$$P_1x^2+P_2y^2+P_3z^2+2S_1\,yz+2S_2\,xz+2S_3\,xy=1.$$

Что это должна быть замкнутая поверхность второго порядка, следует из того, что ни для какого положения осей координат ни один из коэффициентов P не может быть отрицательным. Если это эллипсоид вращения, то таких изменений координат возможно произвести, конечно, бесчисленное множество; если это шар, то мы получаем опять первоначальный случай одинаковых свойств по всем направлениям.

13. (Стр. 36.) Допустим, что давление, как в изотропной среде, одинаково по всем направлениям и что, следовательно, текущая «*жидкость*», на которую действует это давление, остается изотропной после, равно как и до этого действия; «*среда*» же,

которая находится в покое и через которую жидкость просачивается, как сквозь пористую губку, пусть будет анизотропна. Если α, β, γ суть слагающие той силы, с которой жидкость действует на среду, как это позднее предполагает Максвелл, считая $\alpha = ka$, а не $-ka$, то следует:

$$\alpha = -\frac{dp}{dx}, \qquad \beta = -\frac{dp}{dy}, \qquad \gamma = -\frac{dp}{dz}.$$

14. (Стр. 37.) Из уравнения

$$\frac{d^2p}{d\xi^2} + \frac{d^2p}{d\eta^2} + \frac{d^2p}{d\zeta^2} = 0$$

и пограничных условий, на которые T также не влияет, p определяется однозначно.

15. (Стр. 38.) Максвелл полагает следующее: раз единичная трубка выходит из места возникновения (источника), равного единице, где господствует положительное давление p, и оканчивается в месте уничтожения (стоке), равном единице с отрицательным давлением $-p'$, то она имеет до места нулевого давления p и потом еще p', следовательно, в общем $p + p'$ единичных клеток. Таким образом, если место возникновения характеризуется числом $+1$, место уничтожения числом -1, то $\Sigma(Sp) = p + p'$. Если бы на месте уничтожения было положительное давление $+p'$, тогда было бы $\Sigma(Sp) = p - p'$, и это было бы также число единичных клеток. Та же формула справедлива и тогда, когда в месте возникновения господствует отрицательное давление; вообще источники любой интенсивности можно представить как совокупность единичных источников, лежащих непосредственно друг около друга. Для метода Максвелла характерно то обстоятельство, что он всегда представляет себе силы источников, соответствующих свободному электричеству, свободному магнетизму и т. п., выраженными непременно целым числом единиц и никогда числом иррациональным, а потому принимает всегда лишь целое число единичных трубок, единичных клеток и т. п.

16. (Стр. 39.) Так как жидкость не имеет инерции, а потому и живой силы, то эта работа, считаемая в единицу времени, идет на преодоление сопротивления, а потому должна быть равна числу единичных клеток, из которых каждая употребит в единицу времени единицу работы на преодоление сопротивления.

17. (Стр. 43.) Сила, действующая в каком-либо направлении на единицу электричества, равна числу единичных трубок, которые проходят через единицу поверхности нормального к рассматриваемому направлению элемента поверхности. В добавление к предыдущему положению следует заметить, что так называемый самопотенциал (Selbstpotential) электрической системы $\Sigma(dm)$ имеет значение $\frac{kw}{8\pi}$, т. е. равен половине работы, потраченной жидкостью в единицу времени на преодоление сопротивления во всех единичных клетках. Это разделение потенциала системы на две части будет часто встречаться в дальнейших разделах статьи Максвелла.

18. (Стр. 44.) Все это непосредственно следует, если поставить в ранее найденных положениях «свободное электричество» вместо «источник», «линия силы» вместо «линия тока», «потенциал» вместо «отрицательное давление». Так как в диэлектрике, в котором $k'=0$, значение p постоянно, то необходимо, чтобы и вне его, в непосредственной близости, производная от p в направлении, касательном к поверхности диэлектрика, и, следовательно, электрическая сила в этом направлении исчезли бы. Вообще известные условия для поверхности раздела двух диэлектриков непосредственно следуют из уравнения (1) примечания 9.

19. (Стр. 45.) Соленоидальное, или трубчатое, распределение есть, как известно, такое, при котором $\nabla^2\varphi=0$, если φ обозначает ту функцию, частные производные которой по координатам дают слагающие магнитной силы (на единицу положительного магнетизма). Поэтому если распределение внутри какого-либо пространства соленоидально, то оно не содержит в себе вовсе свободного магнетизма, а следовательно, и никаких источников «жидкости».

20. (Стр. 50.) Максвелл не вводит разности потенциалов между различными металлами, находящимися в соприкосновении.

Он рассматривает некоторый элемент, состоящий из цинка, платины и жидкости. Между платиной и жидкостью он не признает никакого скачка потенциала. Вся электродвижущая сила расположена поэтому только в одном сечении тока (а именно в месте соприкосновения цинка с жидкостью). Это сечение исполняет роль гальванического элемента с бесконечно малым сопротивлением, все же остальное есть лишь замыкающая цепь без электродвижущей силы, но с общим сопротивлением K. Поэтому разность потенциалов $p-p'$ на обеих сторонах означенного сечения всегда равна всей электродвижущей силе F; разность же потенциалов двух других поперечных сечений, между которыми находится сопротивление L, есть $\frac{FL}{K}$.

21. (Стр. 51.) Пусть dx есть линейный элемент какой-либо замкнутой или незамкнутой кривой, пусть магнитная сила f, которая действует здесь на единицу магнетизма, имеет в направлении dx слагающую f_x, тогда Максвелл принимает за полную интенсивность (напряженность) вдоль этой кривой интеграл $\int f_x\,dx$. Этот интеграл следует понимать в дальнейшем под F.

В предыдущем же уравнении F, наоборот, обозначает саму величину f или, если намагничивание неравномерно, ее среднее значение в данном сечении, которое берется нормально к силовым линиям; f называется иначе интенсивностью (напряженностью) в данной точке. Под магнитным соленоидом понимается здесь тонкая, прямая или кривая соленоидально намагниченная железная палочка. «Полная магнитная интенсивность» $F=\int f_x\,dx$ вдоль ее средней линии равна $p-p'$, т. е. разности магнитных потенциалов на обоих концах. Этот случай соответствует статической индукции в проволоке, в которой не действуют электродвижущие силы. Рассматриваемый затем Максвеллом случай «соленоидально намагниченного замкнутого на себя круга», который вполне соответствует замкнутому круговому току, представляет собой пример того случая, когда магнитная сила (как, например, сила, вызываемая током, обтекающим магнитный круг) не имеет однозначного потенциала.

22. (Стр. 52.) Будем сначала рассматривать замкнутую круговую цепь, которая может состоять из различных проволок с текущим по ним током.

Под общим количеством (силой) тока I Максвелл разумеет то количество электричества, которое протекает в единицу времени через какое-нибудь поперечное сечение, а под величиной i—плотность тока в данной точке. Следовательно, если какое-нибудь поперечное сечение S равномерно заполняется протекающим током, то

$$I=Si.$$

Интенсивность (напряженность) f в данной точке есть сила, действующая в ней на единицу положительного электричества. Полная интенсивность (напряженность) будет

$$F=\int f\,dx,$$

где dx есть элемент длины, и интеграл распространен на всю цепь. Буквой k Максвелл обозначает удельное сопротивление в данной точке. Следовательно,

$$f=ki=\frac{kI}{S}$$

(вместо чего Максвелл на стр. 51 не совсем последовательно пишет $F=\frac{kI}{S}$). Поэтому

$$F=\int ki\,dx=I\int\frac{k\,dx}{S}=IK$$

(что и совпадает с выражениями на стр. 50 и 51); $\frac{k\,dx}{S}$ есть сопротивление элемента длины dx проволоки, поэтому K есть полное сопротивление цепи.

Эти уравнения остаются без изменения и для того случая, когда кольцо, образованное из тонких сильно парамагнитных палочек (разного рода железа, никеля), намагничивается спирально обтекающим их током, раз только можно пренебречь рассеянием силовых линий из кольца наружу. Тогда f есть интенсивность магнетизма в данной точке (напряженность магнитного поля, сила на единицу магнетизма), F—полная магнитная интенсивность, i—количество магнетизма в данной точке (магнитный момент единицы объема), I—полное количество магнетизма и k—магнитная проницаемость *).

Рассмотрим теперь электрическую аналогию магнитного рассеяния. Одна из проводящих ток проволок проходит сквозь более широкую трубку, наполненную разведенной серной кислотой, или, что еще более общо, приводящая система образует некоторое кольцеобразное двусвязное пространство, где электричество течет по кругу. Электрическое действие тогда соленоидально, т. е. электрическая сила имеет (конечно, не однозначный) потенциал. Другими словами, ни одна линия тока (как A на рис. 1) не должна возвращаться на себя, не обойдя всего кольца, а напротив, всякая должна (подобно B) идти в кольце кругом. Тогда эквипотенциальная поверхность будет состоять из одних лишь поперечных сечений кольца. Количество электричества i и интенсивность f в некоторой точке будут соответственно плотностью тока и действующей на единицу положительного электричества силой. Полная электрическая интенсивность будет:

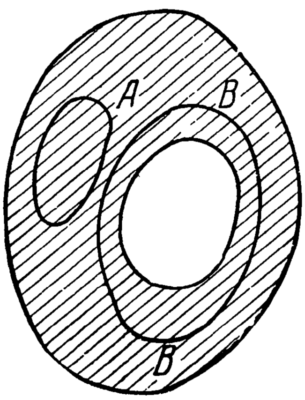


Рис. 1.

$$F=\int f\,dx,$$

причем dx означает теперь элемент длины некоторой линии тока I и интеграл должен быть распространен на всю замкнутую линию тока (Максвелл пишет на стр. 52: $F=\Sigma\,(f\,dx)$). Пусть будет $d\xi$ элемент длины некоторой другой линии тока II, лежащий между теми же эквипотенциальными поверхностями (1) и (2), и φ—интенсивность (сила электрического поля), тогда

$$\varphi : f = dx : d\xi,$$

*) Употребляемая здесь и в других местах Больцманом терминология не совсем соответствует современной. Если f—напряженность поля, i—магнитный момент единицы объема, то k—это не «магнитная проницаемость», а обратная величина «магнитной восприимчивости» $i=\frac{f}{k}=\varkappa f$. (*Прим. перев.*)

так как f есть производная потенциала, взятая по нормали. Но разность потенциалов для двух данных эквипотенциальных поверхностей одинакова всюду, тогда как дифференциалы нормалей тождественны с дифференциалами dx и $d\xi$ линии тока. Поэтому $f\,dx = \varphi\,d\xi$, и $\int f\,dx$ должен быть также одинаков для всякой замкнутой линии тока.

Пусть будет dS—элемент эквипотенциальной поверхности (1), φ—электрическая сила и $d\xi$—расстояние между обеими эквипотенциальными поверхностями в том же месте, тогда как f и dx будут теми же величинами на том месте, принимаемом за исходное, где линия тока I пересекает эквипотенциальную поверхность. Тогда $dS\,d\xi$ будет объем цилиндра, стоящего перпендикулярно к dS и ограниченного эквипотенциальными поверхностями (1) и (2). Пусть k будет удельное сопротивление в этом месте, тогда

$$\frac{k\,d\xi}{dS} = \frac{kf}{\varphi}\,\frac{dx}{dS}$$

будет сопротивление этого цилиндра.

Во всем пространстве, лежащем между эквипотенциальными поверхностями (1) и (2), все подобные цилиндры нужно рассматривать как параллельные; отсюда сопротивление этого пространства будет:

$$dK = \frac{dx}{\int \frac{\varphi\,dS}{fk}} = \frac{f\,dx}{\int \frac{\varphi\,dS}{k}},$$

а полное сопротивление кольца будет:

$$K = \int \frac{f\,dx}{\int \frac{\varphi\,dS}{k}}.$$

Полное количество (полная сила тока) будет:

$$I = \int i\,dS = \int \frac{\varphi\,dS}{k},$$

так как $\varphi = ki$ (Максвелл пишет на стр. 51 $I = \Sigma i\,dy\,dz$).

Так как этот интеграл должен иметь одну и ту же величину для всякого поперечного сечения, то для K это уравнение можно написать так:

$$K = \frac{1}{I}\int f\,dx = \frac{F}{I}.$$

Мы представляем себе теперь все пространство наполненным проводящим веществом и обращенным в двусвязное тем, что любая открытая с обеих сторон поверхность, имеющая форму конечной трубки, должна быть абсолютно непроводящей. Когда в одном или нескольких поперечных сечениях этой трубки возникнут постоянные электродвижущие силы, то получатся электрические токи, которые протекут внутри трубок, а снаружи со всех сторон будут замкнуты. Ничто не мешает нам применить наши уравнения и к этому случаю. Хотя поперечные сечения кольца теперь частью уходят в бесконечность, все интегралы остаются, однако, конечными.

Если мы заменим теперь непроводящую трубкообразную поверхность совпадающей с ней поверхностью, обмотанной проволокой с током, и вместо электрических проводников возьмем парамагнитные тела, то мы получим соответствующую магнитную задачу, и прежние формулы останутся пригодными при соответственном изменении букв.

23. (Стр. 55.) Пусть a_1 будет количество магнетизма в некоторой точке (магнитная индукция, магнитный момент единицы объема, а не (как далее) слагающая этой величины в направлении x), α_1—магнитная интенсивность (магнитная сила, действующая на единицу количества магнетизма), λ—длина, q—поперечное сечение, откуда $q\lambda$—объем одной единичной клетки; тогда $a_1 q\lambda$ будет полное магнитное количество (магнитный момент элемента объема), $\alpha_1 a_1 q\lambda$ будет работа намагничения. Она должна быть одинакова для всех единичных клеток, так как здесь производится в единицу времени единица работы. Но всякая единичная клетка вырезана из единичной трубки, поэтому $a_1 q=1$, а следовательно, $\alpha_1\lambda$ постоянно. Так как, согласно примечанию 26, самопотенциал равен половине работы, производимой в единицу времени во всех единичных клетках, то и здесь работа намагничения $\alpha_1 a_1 q\lambda/2$ в одной единичной клетке равна $1/2$, т. е. $\alpha_1\lambda=1$. Верность следующего непосредственно за этим положения Максвелла подтверждается легко. Так как общее число единичных клеток одной единичной трубки пропорционально только общей силе тока, то общее число всех наличных единичных клеток во всех единичных трубках пропорционально произведению полной силы тока на число имеющихся единичных трубок (ср. также теорему III, стр. 71).

24. (Стр. 55.) Под этим словом разумеются те же линии, которые прежде всегда называли силовыми линиями, но которые было бы вообще целесообразнее называть линиями индукции.

25. (Стр. 55.) При этом следует обращать внимание также на знак и коэффициент пропорциональности. В электростатике число единичных клеток, а вследствие этого и энергия среды (эфира) прибывает тем более, чем более производят работы видимые силы, которые уравновешивают электростатические; когда два взаимно отталкивающихся, электростатически заряженных

тела действительно отдаляются друг от друга, то число клеток и энергия среды убывают, напротив, в электродинамике энергия среды убывает на столько, сколько работы производят видимые силы, уравновешивающие электродинамические; таким образом, энергия среды и число клеток увеличиваются, когда два взаимно отталкивающихся проводника действительно отдаляются или два взаимно притягивающихся сближаются.

26. (Стр. 57.) Эти два рода сил по почину проф. Карла Неймана отличаются как «электродвижущая» и «пондеромоторная». Известно также, что открытое потом явление Холла объясняется обыкновенно предположением, что пондеромоторные силы все же производят в проводнике небольшое смещение линий тока.

27. (Стр. 59.) Достойно внимания, как извиняется Максвелл в том, что он не строит никакой механической картины и переходит к описанию фактов при помощи чисто математических формул. В действительности следующая теперь часть сочинения явилась незаконченной и оставалась таковой до тех пор, пока Максвеллу не удалось найти в сочинении «О физических силовых линиях»*) механической аналогии, которую он искал уже и здесь.

28. (Стр. 64.) Индекс 2 в этом и следующих уравнениях опять опущен, так как те же уравнения годны и для магнетизма, где все величины имеют индекс 1. Впрочем, индекс 2 на том же самом основании следовало бы опустить и в уравнениях (A) и (B).

29. (Стр. 66.) То-есть если в решении задачи о стационарном электрическом токе в материальных проводах заменить термины «электрическая сила, плотность тока, удельное сопротивление» словами «магнитная сила, магнитная индукция (магнитный момент единицы объема), удельная индуктивная способность», то получится решение задачи о магнитной индукции.

30. (Стр. 69.) Это не та система координат, которая теперь употребляется в Англии, а французская, где для глаза, смотрящего с положительной z-стороны, часовая стрелка кратчайшим путем переходит от положительной x-оси к положительной y-оси; где обыкновенный винт, который повертывается по кратчайшему пути от положительной x-оси к положительной y-оси, в неподвижной муфте подвигается вперед в отрицательном z-направлении; где положительная z-ось обращена к голове, положительная x-ось к левой руке и положительная y-ось к передней стороне человеческой фигуры; благодаря этому зрителю, смотря-

*) См. стр. 107 настоящего издания. (*Ред.*)

щему на доску, представляется, что положительная z-ось обращена кверху, положительная x-ось вправо, положительная y-ось к аудитории. При такой системе координат для соленоида,

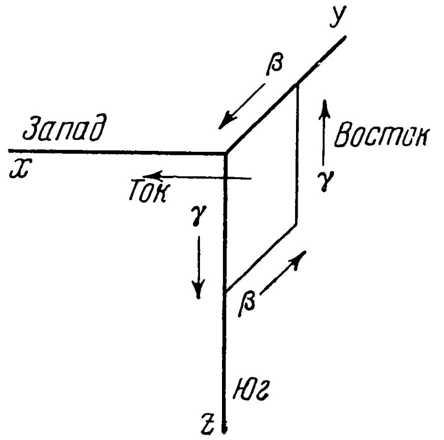


Рис. 2.

среднюю линию которого образует ось z и по которому электрический ток течет так, как нужно для того, чтобы кратчайшим путем перейти от положительной оси x к положительной оси y, конец, соответствующий северному полюсу, обращен к отрицательной оси z. Поэтому, если ток течет в положительном направлении абсциссы через элемент плоскости $dy\,dz$, то им движется северный полюс по периферии элемента плоскости так, как это нужно, чтобы кратчайшим путем перейти от положительного x-направления к положительному y-направлению. Эта система лежит также в основании последующих вычислений Максвелла (рис. 2).

31. (Стр. 69.) Пусть замкнутый ток имеет ту интенсивность, которую мы теперь называем (электро-) магнитной единицей силы тока. Если по кривой, охватывающей ток, обойти ток в том направлении, по которому движется северный полюс, так, чтобы возвратиться на прежнее место, то, как известно, магнитный потенциал тока возрастает на 4π. Этот прирост есть то, что Максвелл называет полной напряженностью магнитной силы, распространенной на замкнутую кривую, охватывающую ток. Если эта интенсивность равна единице, то он считает в этом сочинении, что и ток равен единице. Ток, который в наших электромагнитных единицах имеет интенсивность, равную единице, имеет в этих единицах Максвелла интенсивность 4π. В позднейших своих трудах Максвелл употребляет наши обычные единицы.

32. (Стр. 71.) Потому что, когда U — потенциал первой, V — потенциал второй системы, то $\nabla^2 U$ пропорционально плотности электрического заряда первой системы, $\nabla^2 V$ — второй системы. Поэтому $\iiint V\nabla^2 U\,dx\,dy\,dz$ пропорционален потенциалу второй системы относительно первой, а $\iiint U\nabla^2 V\,dx\,dy\,dz$ — потенциалу первой системы относительно второй. Но перемещение первой системы относительно второй всегда, однако, противоположно перемещению второй системы относительно первой.

33. (Стр. 73.) Пусть источники первоначально находятся в среде с коэффициентом сопротивления, равным единице, а все среды с другими коэффициентами сопротивления находятся на таком большом расстоянии, что источники не могут сколько-нибудь заметно влиять на них. Следует представить себе работу, которая должна быть произведена для того, чтобы без изменения положения и силы источников привести различные среды в любое иное положение вблизи источников.

34. (Стр. 77.) Здесь α_0, β_0, γ_0 играют ту же роль, что и α, β, γ в теореме VI. Следовательно, соответственно первому уравнению теоремы VI

$$\frac{d\alpha_0}{dx}+\frac{d\beta_0}{dy}+\frac{d\gamma_0}{dz}=0.$$

35. (Стр. 78.) У Максвелла второй член в прямых скобках как в этом выражении, так и во всех других, имеющих подобные прямые скобки, имеет при Q обратный знак, что я считаю типографской ошибкой. Уравнения стр. 43 совпадают с этими, даже помимо знака, когда $k=1$, так как теперь p есть функция, отрицательные производные которой по координатам равны α, β, γ, тогда как положительные производные от V равны a, b, c. Вследствие этой разницы в знаках знак первого члена уравнения, к которому относится это примечание, делается сомнительным, равно как и знак предшествующего уравнения. На стр. 65 я заменил на обратные знаки правых сторон обоих последних уравнений.

36. (Стр. 79.) Раньше (см. примечание 30) α, β, γ представляли собой слагающие силы, действующей на единицу северного полюса. Не думал ли здесь Максвелл о винтообразной системе координат (Weinranken coordinatensystem), благодаря чему, конечно, рисунок примечания 30 должен быть обращен, и мы получим:

$$a_2=\frac{d\gamma_1}{dy}-\frac{d\beta_1}{dz} \quad \text{вместо} \quad a_2=\frac{d\beta_1}{dz}-\frac{d\gamma_1}{dy}.$$

В новейшей теории электричества Максвелла аналогичные этим уравнения для электричества, с одной стороны, и для магнетизма — с другой, имеют обратные знаки. Иначе было бы для электрического или магнитного вектора не

$$\frac{d^2u}{dt^2}=a^2\nabla^2u,$$

а

$$\frac{d^2u}{dt^2}=-a^2\nabla^2u.$$

37. (Стр. 82.) Это уравнение содержит основу электродинамики движущихся тел.

38. (Стр. 87.) Это, как известно, оспаривается; если силы содержат даже и вторые производные по времени, принцип сохранения энергии все же может оставаться в силе. Однако здесь не место для обсуждения вопроса о совместимости закона Вебера с принципом сохранения энергии.

О ФИЗИЧЕСКИХ СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ

ЧАСТЬ I (1)

ТЕОРИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ВИХРЕЙ В ПРИМЕНЕНИИ К МАГНИТНЫМ ЯВЛЕНИЯМ *)

Во всех явлениях, где встречаются притяжение или отталкивание или какие-либо зависящие от относительного положения тел силы, мы должны определить *величину* и *направление* силы, которая действует на данное тело, когда оно приведено в данное положение.

В случае, когда сфера действует на данное тело по закону тяготения, эта сила обратно пропорциональна квадрату расстояния и направлена по прямой линии к центру сферы [1]. В случае притяжения двумя сферами или несферическим телом величина и направление силы подчиняются более сложным законам. В электрических и магнитных явлениях величина и направление результирующей силы в каждой точке являются основным предметом исследования. Предположим, что направление силы в каждой точке известно; тогда если мы проведем линию так, что в каждой точке она совпадет по направлению с силой в этой точке, то эта линия может быть названа *силовой линией*, так как она указывает направление силы в каждой точке.

Начертив достаточное число силовых линий, мы можем указать направление силы в любой части пространства, в которой она действует.

---

*) Phil. Mag., т. XXI, стр. 161—175.

Если мы рассыплем железные опилки на бумаге вблизи магнита, то каждая отдельная крупинка намагнитится и противоположные полюса любых двух соседних крупинок соединятся так, что опилки расположатся по кривым, которые укажут в каждой точке направление силовой линии. Прекрасная иллюстрация действия магнитной силы, даваемая этим опытом, естественно заставляет нас думать о силовых линиях, как о чем-то реальном и показывающем нечто большее, чем только результирующую двух сил, непосредственная причина которых находится где-то на расстоянии и которые даже не существуют до тех пор, пока магнит не будет помещен в эту часть поля (2). Мы не удовлетворены объяснением, основанным на гипотезе притягивающей и отталкивающей сил, исходящих от магнитных полюсов, даже в том случае, если мы убеждаемся, что явления находятся в полном согласии с этой гипотезой, и мы не можем отказаться от мысли, что в каждой точке, где мы находим эти силовые линии, должно существовать какое-то физическое состояние или действие, обладающее достаточной энергией, чтобы вызвать указанные явления (3).

Моей целью в настоящей работе является расчистка пути для теоретических исследований в этом направлении путем изучения механических эффектов известных состояний натяжения и движения в среде и сравнения их с наблюдаемыми явлениями магнетизма и электричества. Уточняя механические следствия таких воззрений, я полагаю, что принесу некоторую пользу тем, кто приписывает эти явления действию среды, но сомневается, как с помощью этой гипотезы объяснить установленные экспериментальные законы, которые до сих пор выражались на языке других гипотез [теории дальнодействия].

В своей предыдущей работе *) я попытался дать ясное геометрическое представление о связи силовых

*) См. работу «О фарадеевых силовых линиях», Cambridge Philosophical Transactions, т. X, часть 1; стр. 11 настоящего издания.

линий с пространством, в котором они проходят. Используя представление о токах в жидкости, я показал, как следует изображать силовые линии, чтобы их число давало величину силы, так что каждая отдельная линия могла бы быть названа единичной силовой линией *), и исследовал, далее, ход этих линий там, где они переходят из одной среды в другую.

В той же работе я нашел геометрический смысл «электротонического состояния» и вывел математические связи между электротоническим состоянием, магнетизмом, электрическими токами и электродвижущей силой, используя механические образы для того, чтобы помочь воображению, но отнюдь не относя их к причинам явлений.

Я намереваюсь теперь рассмотреть магнитные явления с механической точки зрения и исследовать, какие напряжения или движения среды способны вызвать наблюдаемые явления. Если при помощи этой же гипотезы мы могли бы связать явления магнитного притяжения с электромагнитными явлениями и с явлениями индуцированных токов, то в этом случае мы нашли бы теорию, может быть даже и неправильную, однако ложность которой могла бы быть доказана только при помощи экспериментов, значительно расширяющих наши познания в этой области физики [2] (4).

Механическое состояние среды, находящейся под действием магнитных сил, понималось то как течение, то как волновое движение, то как состояние смещения или растяжения, давления или напряжения. Токи, исходящие из северного полюса и входящие в южный полюс магнита или циркулирующие около электрического тока, имеют то преимущество, что дают возможность точно представить геометрическое расположение силовых линий, если бы только можно было, исходя из механических принципов, объяснить явления притяжения, расположение самих токов и их устойчивое существование.

*) Faraday, «Exp. Res.» (3122).

Колебания, исходящие из центра, согласно расчетам профессора Челлис *) произвели бы действие, подобное притяжению в направлении центра, но, допуская это, мы вместе с тем знаем, что две серии колебаний, проходящие через то же самое пространство, не складываются в одно результирующее, как это имеет место в случае двух притяжений; эффект зависит от соотношения их фаз, а также их интенсивностей, и если ничто не мешает этим колебательным движениям распространяться, они проходят друг сквозь друга без какого-либо взаимодействия [3]. В действительности математические законы притяжения не похожи ни в каком отношении на законы колебаний, но обнаруживают замечательную аналогию с законами течения жидкости, тепло- и электропроводности и с законами поведения упругих тел.

Профессор В. Томсон дал механическое представление электрических, магнитных и гальванических сил посредством деформаций упругого тела, находящегося под действием упругих сил **). В этом представлении мы должны допустить, что угловое смещение каждого элемента объема твердого тела пропорционально магнитной силе в соответствующей точке магнитного поля, причем направление оси этого вращения соответствует направлению магнитной силы.

Абсолютное смещение какой-либо частицы будет тогда соответствовать по величине и направлению тому, что я отождествил с электротоническим состоянием, а относительное смещение частицы по отношению к частице, находящейся в ее непосредственном соседстве, по величине и направлению будет соответствовать количеству электрического тока [плотности тока] в этой точке поля. Автор этого способа представления не пытается объяснять происхождения наблюдаемых сил действиями, обусловленными напряжениями в упругом

*) Challis, Phil. Mag., 20, стр. 431, 1860; 21, стр. 65 и 92, 1861.

**) Cambr. and Dubl. Math. Journ., январь 1847 г.

твердом теле, а только использует математические аналогии обеих проблем для того, чтобы помочь воображению при их изучении.

Мы хотим теперь, однако, рассмотреть магнитное действие как род некоторого давления или натяжения или, вообще говоря, напряжения в среде.

Напряжение есть действие и противодействие между смежными частями тела и состоит вообще из сил давления или натяжения, которые в одной и той же точке среды могут быть различны в различных направлениях.

Необходимые отношения между этими силами были исследованы математиками; было показано, что наиболее общий тип упругой силы состоит в суперпозиции трех главных сил давлений или натяжений, перпендикулярных друг к другу.

Когда два главных давления равны, то третье становится осью симметрии наибольшего или наименьшего давления, причем давления, направленные под прямыми углами к этой оси, все равны.

Когда все три главных давления равны, то давление одинаково во всех направлениях, так что мы имеем напряжение без определенных главных осей; примером такого давления может служить обычное гидростатическое давление.

Общий тип не подходит для представления магнитной силы, потому что хотя магнитная силовая линия имеет направление и интенсивность, она не имеет третьего качества, которое отличало бы различные к ней перпендикулярные направления, как, например, в поляризованном световом луче, где резко отличаются друг от друга различные перпендикулярные к нему направления *).

Если мы поэтому представляем магнитную силу в какой-либо точке через напряжение, то мы должны предполагать, что в каждой точке имеется единственная ось наибольшего или наименьшего давления и все

*) Faraday, «Exp. Res.» (3252).

давления, перпендикулярные к этой оси, равны между собой. Могут возразить, что непоследовательно изображать силовую линию, которая по существу своему диполярна, главной осью напряжения, которая по необходимости изотропна. Но мы знаем, что *каждое* явление действия и противодействия в *общем результате* изотропно, ибо действия силы на тела, между которыми она действует, равны и противоположны, в то время как природа и происхождение силы могут быть диполярными, как это, например, имеет место в явлении притяжения между северным и южным полюсами.

Рассмотрим теперь механический эффект состояния напряжения, симметричного относительно какой-либо оси. Во всех случаях мы можем разложить его на простое гидростатическое давление и простое давление или натяжение вдоль оси. Когда ось является осью наибольшего давления, то действующая вдоль оси сила также будет давлением. Когда она, напротив, является осью наименьшего давления, то сила, действующая вдоль оси, будет силой натяжения.

Если мы рассмотрим силовые линии между двумя магнитами, как они видимы посредством железных опилок, то заметим, что всякий раз, когда силовые линии идут от одного полюса к другому, имеется *притяжение* между полюсами; наоборот, когда силовые линии обоих полюсов отклоняются и рассеиваются в пространстве, полюсы *отталкивают* друг друга, так что в обоих случаях полюсы движутся в том направлении, которое в конечном счете имеют силовые линии.

Отсюда вытекает, что напряжение вдоль оси магнитной силовой линии есть *натяжение*, подобное натяжению упругого шнура.

Если мы рассчитаем силовые линии вблизи двух тяготеющих тел, мы найдем их такими же по направлению, как и силовые линии между магнитными одноименными полюсами; однако мы знаем, что механическим эффектом в этом случае является притяжение вместо отталкивания. Силовые линии в этом случае не идут от одного тела к другому, но отходят друг от друга и рассеиваются в пространстве. Для того чтобы произвести эффект притяжения, напряжение вдоль силовой линии тяготения должно быть *давлением*.

Предположим теперь, что явление магнетизма связано с существованием натяжения в направлении силовых линий в сочетании с гидростатическим давлением, или, иначе говоря, с давлением, которое имеет бóльшую величину в экваториальном, чем в аксиальном направлении. Тогда следующим вопросом будет вопрос о том, какое механическое объяснение можем мы дать этому неравенству давлений в жидкой или, вообще говоря, подвижной среде? Объяснение, которое прежде всего приходит в голову, заключается в том, что излишек давления в экваториальном направлении возникает от центробежной силы вихрей или водоворотов в среде, оси которых параллельны направлениям силовых линий.

Это объяснение причины неравенства давлений сразу же дает средство для представления диполярного характера силовых линий. Каждый вихрь по существу диполярен, так как оба конца его оси отличаются друг от друга по направлению вращения вихря, когда последний наблюдается с этих точек.

Мы также знаем, что когда электричество циркулирует в кольцеобразном проводнике, оно производит магнитные силовые линии, проходящие через плоскость контура, причем направление линий зависит от направления тока. Мы можем принять, что направление вращения, соответствующего силовой линии вихря, совпадает с тем, в котором «стеклянное» электричество должно протекать вокруг силовых линий, для того чтобы производить силовые линии, направление которых одинаково с направлением данных [4], (5).

Предположим теперь, что все вихри, в какой бы то ни было малой части поля, вращаются в том же направлении около почти параллельных осей, но что при перемещении от одной части поля к другой направление осей, скорость вращения и плотность вещества, составляющего вихри, могут изменяться. Мы исследуем результирующее механическое действие на элемент среды и изучим физический смысл различных членов математических выражений для рассматриваемых случаев ([6]).

Предложение I. Если в двух геометрически подобных жидких системах скорости и плотности в соответствующих точках пропорциональны, тогда обусловленные движением различия давлений в соответствующих точках будут относиться, как квадраты скоростей и первые степени плотностей [[5]].

Пусть l будет отношение линейных размеров, m — отношение скоростей, n — отношение плотностей и p — отношение давлений, обусловленных движением. Тогда отношение масс соответствующих элементов объема будет l^3n, а отношение скоростей этих элементов при прохождении аналогичных путей в обеих системах будет равно m, так что l^3mn есть отношение количеств движения приобретенных аналогичными частями жидкостей при прохождении аналогичных частей их путей.

Отношение подобных поверхностей равно l^2, отношение действующих на них давлений равно l^2p, а отношение времен, в течение которых они действуют, равно $\frac{l}{m}$, так что отношение импульсов сил равно $\frac{l^3p}{m}$. Мы получаем, таким образом,

$$l^3mn = \frac{l^3p}{m},$$

или

$$m^2n = p,$$

т. е. отношение p давлений, обусловленных движением, равно произведению отношения плотностей n и квадрата отношения скоростей m^2 и не зависит от линейных размеров движущихся систем.

Если в круговом вихре, вращающемся с равномерной угловой скоростью, давление на оси есть p_0, тогда на окружности оно будет $p_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$, где ρ есть плотность и v — скорость на окружности. *Среднее давление* параллельно оси будет:

$$p_0 + \frac{1}{4}\rho v^2 = p_2.$$

Если бы такие вихри с параллельными осями плотно прилегли друг к другу, они образовали бы в совокупности среду, в которой имелось бы давление p_2, параллельное осям, и другое давление p_1 в направлении, перпендикулярном к первому. Если вихри круговые и если они повсюду имеют одинаковые угловые скорости и плотности, тогда

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{4}\rho v^2. \qquad [1a]$$

Если вихри не круговые и если угловые скорости и плотности повсюду не одинаковы, но изменяются согласно одному и тому же закону для всех вихрей:

$$p_1 - p_2 = C\rho v^2, \qquad [1b]$$

где ρ есть средняя плотность и C — величина, зависящая от распределения угловой скорости и плотности в вихре [6]. В дальнейшем вместо $C\rho$ мы будем писать $\frac{\mu}{4\pi}$, так что

$$p_1 - p_2 = \frac{\mu v^2}{4\pi}, \qquad (1)$$

где μ — величина, пропорциональная плотности, а v — линейная скорость на окружности каждого вихря.

Среда такого рода, наполненная молекулярными вихрями с параллельными осями, отличается от обычной жидкости тем, что она имеет различные давления в различных направлениях. Если бы она не сдерживалась надлежащим противодавлением, то она стремилась бы растянуться в экваториальном направлении. При этом получилось бы, что диаметр каждого вихря увеличивался, а скорость его уменьшалась бы в той же самой пропорции. Для того чтобы среда, обладающая этими неодинаковыми в различных направлениях давлениями, могла бы быть в равновесии, должны быть выполнены условия, которые мы исследуем.

Предложение II. Даны направляющие косинусы осей вихрей относительно осей x, y, z, обозначаемые через l, m, n; найти нормальное и тангенциальное напряжения, действующие на поверхности, параллельные координатным плоскостям.

Действительное натяжение может быть разложено на простое гидростатическое давление p_1, действующее равномерно во всех направлениях, и натяжение $p_1 - p_2$, или $\frac{1}{4\pi}\mu v^2$, действующее только вдоль оси вихря.

Обозначим через p_{xx}. p_{yy}, p_{zz} нормальные напряжения, параллельные трем координатным осям; будем считать положительными их направления, если напряжение стремится увеличить параллельный соответствующей оси отрезок; через p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} обозначим тангенциальные напряжения, которые действуют на поверхности, параллельные трем плоскостям координат; будем считать их направления положительными, когда они стремятся одновременно увеличивать координаты, соответствующие индексам [7]. Тогда, разлагая напряжения, получим *):

$$p_{xx} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 l^2 - p_1, \quad p_{yz} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 mn,$$

$$p_{yy} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 m^2 - p_1, \quad p_{zx} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 nl,$$

$$p_{zz} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 n^2 - p_1, \quad p_{xy} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 lm \, [8], \, (7).$$

*) Rankine, Applied Mechanics, § 106.

Если положить $\alpha = vl$, $\beta = vm$ и $\gamma = vn$, тогда будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{1}{4\pi}\mu\alpha^2 - p_1, & p_{yz} &= \frac{1}{4\pi}\mu\beta\gamma, \\ p_{yy} &= \frac{1}{4\pi}\mu\beta^2 - p_1, & p_{zx} &= \frac{1}{4\pi}\mu\gamma\alpha, \\ p_{zz} &= \frac{1}{4\pi}\mu\gamma^2 - p_1, & p_{xy} &= \frac{1}{4\pi}\mu\alpha\beta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Предложение III. Найти результирующую силу, действующую на элемент среды, которая обусловлена изменением внутреннего напряжения.

По закону равновесия напряжений *) для компоненты силы, действующей на единицу объема в направлении абсциссы, имеем:

$$X = \frac{d}{dx}p_{xx} + \frac{d}{dy}p_{xy} + \frac{d}{dz}p_{xz}. \tag{3}$$

В нашем случае это выражение может быть написано в форме

$$X = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d(\mu\alpha)}{dx}\alpha + \mu\alpha\frac{d\alpha}{dx} - 4\pi\frac{dp_1}{dx} + \right. \\ \left. + \frac{d(\mu\beta)}{dy}\alpha + \mu\beta\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d(\mu\gamma)}{dz}\alpha + \mu\gamma\frac{d\alpha}{dz}\right\}. \tag{4}$$

Так как $\alpha\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\beta}{dx} + \gamma\frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$, то можно написать:

$$X = \alpha\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d}{dx}(\mu\alpha) + \frac{d}{dy}(\mu\beta) + \frac{d}{dz}(\mu\gamma)\right\} + \\ + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dx}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \mu\beta\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right) + \\ + \mu\gamma\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) - \frac{dp_1}{dx}. \tag{5}$$

Выражения для сил, действующих в направлении осей y и z, могут быть написаны по аналогии ([8]).

Нам теперь следует истолковать значение каждого члена этого выражения. Мы предполагаем, что α, β, γ —

*) Rankine, Applied Mechanics, § 116.

составляющие силы, которая действовала бы на находящийся в данном месте единичный северный магнитный полюс; μ представляет магнитную индуктивную емкость [магнитную проницаемость] среды в данной точке по отношению к воздуху; $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ — величины магнитной индукции через единичные площадки, перпендикулярные к трем осям x, y, z соответственно.

Все количество магнитной индукции через замкнутую поверхность, окружающую полюс магнита, зависит только от силы этого полюса, так что если dx, dy, dz есть элемент объема, то

$$\left(\frac{d}{dx}\mu\alpha+\frac{d}{dy}\mu\beta+\frac{d}{dz}\mu\gamma\right)dx\,dy\,dz=4\pi m\,dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

Написанное соотношение представляет все количество магнитной индукции, направленное вовне через поверхность элемента объема $dx\,dy\,dz$, или количество заключенной в элементе объема «воображаемой магнитной массы», которую можно принять за северный магнетизм [или южный магнетизм, смотря по тому, будет это выражение положительным или отрицательным] [9].

Первый член правой стороны выражения (5)

$$\alpha=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d}{dx}\mu\alpha+\frac{d}{dy}\mu\beta+\frac{d}{dz}\mu\gamma\right) \tag{7}$$

может быть написан в виде

$$\alpha m, \tag{8}$$

где α есть интенсивность магнитной силы, m есть плотность северной магнитной массы в соответствующей точке.

Физический смысл этого члена следующий: сила, двигающая северный полюс в положительном направлении оси x, равна произведению интенсивности компоненты магнитной силы в этом направлении на силу соответствующего северного магнитного полюса [10]. Пусть параллельные линии, направленные слева направо на рис. 1, представляют собой однородное поле магнитной силы, причем sn — направление с юга на север. Согласно нашей теории вихри будут вращаться в направлении маленьких стрелок на рис. 2, т. е. в плоскости, перпендикулярной к силовым линиям, и в направлении часовой стрелки, если их наблюдать, смотря от s к n. Частицы вихрей над плоскостью бумаги будут двигаться по направлению e, а частицы ниже плоскости бумаги — по направлению w.

Мы всегда будем отмечать стрелкой направление, в котором мы должны смотреть, для того чтобы видеть вихри вращающимися по часовой стрелке. Стрелка будет тогда указывать на *северное направление* в маг-

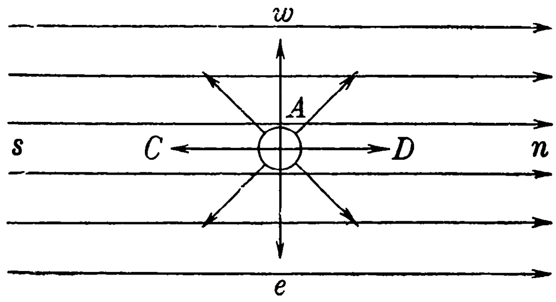


Рис. 1.

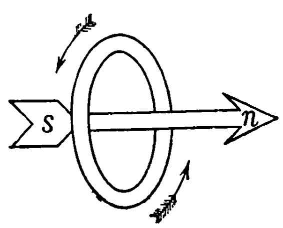


Рис. 2.

нитном поле, т. е. направление, в котором установился бы тот конец магнита, который указывает на север.

Пусть теперь A будет северный полюс магнита. Так как он отталкивает северные концы других магнитов, то силовые линии будут направлены от A по всем направлениям. На северной стороне A силовая линия AD имеет *то же самое* направление, что и линии магнитного поля, так что скорость вихрей на этой стороне будет *увеличиваться*. На южной стороне линия AC будет направлена в обратном направлении, скорости вихрей будут уменьшаться, так что в итоге силовые линии окажутся более мощными на северной стороне A, чем на южной стороне.

Мы видели, что благодаря механическому действию вихрей вдоль их осей возникает натяжение, поэтому результирующее действие на полюс A будет заключаться в том, что он более сильно будет притягиваться по направлению к D, чем по направлению к C, т. е. A будет стремиться двигаться к северу.

Пусть B на рис. 3 представляет собой южный полюс; относящиеся к нему силовые линии направлены к B, при этом мы найдем, что силовые линии поля оказываются более сильными в сторону E, чем в сторону F, так что результирующим эффектом в этом случае будет сила, действующая на B по направлению к югу.

Мы видим, таким образом, что в теории молекулярных вихрей первый член уравнения (5) дает механическое объяснение силы, действующей в магнитном поле на северный или южный полюс.

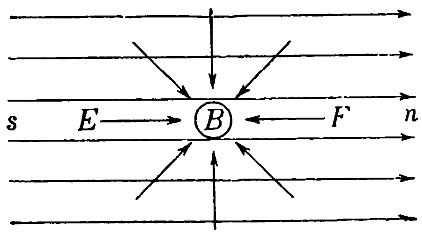


Рис. 3.

Перейдем к рассмотрению второго члена:

$$\frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dx}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2). \quad [8a]$$

Здесь $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ есть квадрат интенсивности [напряженности] в какой-нибудь точке поля и μ есть магнитная индуктивная емкость [магнитная проницаемость] в том же самом месте. Таким образом, всякое тело, внесенное в поле, будет испытывать действие силы, *направленной к местам большей магнитной интенсивности* и пропорциональной произведению его собственной магнитной индуктивной емкости и производной квадрата силы поля в данном направлении.

Если тело окружено жидкостью, то последняя так же, как и тело, будет проталкиваться по направлению к местам большей интенсивности и ее гидростатическое давление [которое выражается последним членом уравнения (5)] будет расти в этом направлении. Результирующим действием на помещенное в жидкость тело будет *разница* действий на тело и на вытесненную им жидкость, так что тело будет стремиться двигаться по направлению к местам или от мест наибольшей силы магнитного поля в зависимости от того, имеет ли оно бо́льшую или меньшую магнитную индуктивную емкость, чем окружающая среда.

На рис. 4 силовые линии представлены сходящимися на правой стороне, так что магнитная напряженность в B сильнее, чем в A, и тело AB будет двигаться направо. Если удельная емкость магнитной индукции больше

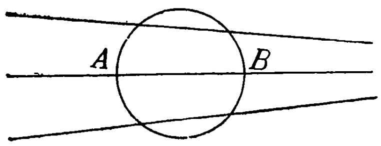


Рис. 4.

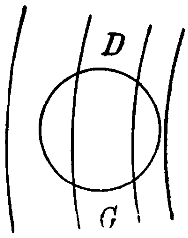


Рис. 5.

в теле, чем в окружающей среде, то оно будет двигаться в правую сторону, а если меньше — то в левую.

Мы можем предположить в этом случае, что силовые линии сходятся на правой стороне к магнитному полюсу, безразлично к северному или к южному [11].

На рис. 5 силовые линии сгущаются к правой стороне. Можно показать, что если сила увеличивается по направлению к правой стороне, то линии сил будут изогнуты в правую сторону [12]. Действие магнитных натяжений будет тогда заключаться в том, что на тело в правую сторону действует сила, пропорциональная излишку его магнитной индуктивной емкости над индуктивной емкостью окружающей среды.

Мы можем представить себе, что на рис. 5 силовые линии возбуждаются электрическим током, перпендикулярным к плоскости бумаги и находящимся направо от CD.

Эти две иллюстрации показывают механическое действие на парамагнитное или диамагнитное тело, помещенное в поле изменяющейся интенсивности вне зависимости от того, имеет ли место увеличение интенсивности вдоль силовых линий или перпендикулярно к ним. Форма второго члена уравнения (5) указывает на общий закон, который совершенно независим от направления силовых линий, а зависит исключительно от того, каким образом сила *изменяется* при переходе от одной части поля к другой.

Обратимся теперь к третьему члену выражения для X:

$$-\mu\beta\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right). \qquad [8b]$$

Здесь $\mu\beta$, как и раньше, является количеством магнитной индукции через единичную площадку, перпендикулярную к оси y, а $\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}$ есть выражение, которое исчезло бы, если бы $\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz$ было полным дифференциалом, т. е. если бы сила, действующая на единичный магнитный полюс, подчинялась тому условию, что работа при передвижении полюса по замкнутому пути равна нулю. Величина $\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}$ представляет работу, выполненную при прохождении полюсом контура единичной площадки, параллельной плоскости xy, в направлении от $+x$ к $+y$. Пусть вдоль оси z проходит электрический ток, сила которого равна r, причем мы будем предполагать, что ось z направлена вертикально вверх; тогда если ось x направлена на восток, а ось y — на север, единица северного полюса будет двигаться вокруг оси z в направлении от x к y, так что выполненная за один оборот работа будет равна $4\pi r$. Отсюда $\frac{1}{4\pi r}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)$ представляет плотность электрического *тока, параллельного оси* z, проходящего через единичную площадку [13]. Если мы напишем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)=p,\\ \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)=q,\quad &\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)=r,\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

то p, q, r выразят количества электрического тока, проходящие через единичные площадки, перпендикулярные соответственно осям x, y, z.

Физическое истолкование рассматриваемого нами третьего члена $\mu\beta r$ таково, что если $\mu\beta$ есть количество магнитной индукции в направлении оси y, а r—количество электричества, текущего в направлении z, то элемент объема будет двигаться в направлении $-x$, перпендикулярно как к направлению тока, так и к силовым линиям, т. е. *идущий вверх* электрический ток в магнитном поле, направленном к *северу*, будет стремиться двигаться на запад.

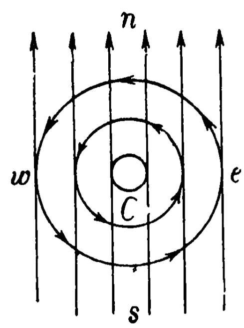


Рис. 6.

Для того чтобы иллюстрировать действие молекулярных вихрей, предположим, что sn есть направление магнитной силы поля, и пусть C — сечение направленного вверх электрического тока, перпендикулярного к плоскости бумаги. Силовые линии, относящиеся к этому току, будут кругами, имеющими направление, противоположное направлению движения часовых стрелок, т. е. направление $nwse$.

В e силовые линии будут представлять сумму линий поля и тока, а в w они будут равны разности этих двух родов линий, так что вихри на восточной стороне тока будут сильнее, чем вихри на западной стороне. Оба рода вихрей поворачивают свои экваториальные части в сторону C и стремятся растянуться по направлению к C; таким образом, вихри, которые находятся на восточной стороне, оказывают большее действие, в результате чего ток смещается по направлению к *западу*.

Четвертый член

$$+\mu\gamma\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right) \quad \text{или} \quad +\mu\gamma q \tag{10}$$

может быть интерпретирован таким же образом и показывает, что ток q, направленный по y, т. е. к северу, и помещенный в магнитное поле, в котором силовые линии направлены вертикально вверх, по направлению z, будет двигаться по направлению к востоку.

Пятый член

$$-\frac{dp_1}{dx} \tag{11}$$

просто указывает, что элемент объема будет двигаться в направлении, в котором гидростатическое давление p_1 уменьшается [14].

Мы теперь можем написать выражения составляющих результирующей силы на элемент объема среды (рассчитанных на единицу объема) в следующей форме:

$$X = \alpha m + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dx}(v^2) - \mu\beta r + \mu\gamma q - \frac{dp_1}{dx}, \tag{12}$$

$$Y = \beta m + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dy}(v^2) - \mu\gamma p + \mu\alpha r - \frac{dp_1}{dy}, \tag{13}$$

$$Z = \gamma m + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dz}(v^2) - \mu\alpha q + \mu\beta p - \frac{dp_1}{dz}. \tag{14}$$

Первый член правой части каждого уравнения выражает силу, действующую на магнитный полюс; второй член — силу, действующую на тела, способные намагничиваться индуктивно; третий и четвертый члены относятся к силе, действующей на электрические токи, и пятый член представляет обычное гидростатическое давление.

Прежде чем углубляться в дальнейшее общее изучение вопроса, мы должны рассмотреть применение уравнений (12), (13), (14) в специальных случаях, соответствующих тем упрощенным условиям исследований, которые мы стараемся получить для того, чтобы опытным путем установить законы явлений природы.

Мы нашли, что величины p, q, r представляют собой составляющие плотности электрического тока в направлениях трех координатных осей. Предположим, прежде всего, что *нет* электрического тока или что p, q, r исчезают.

Тогда согласно уравнению (9) мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}=0,\quad \frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}=0,\\ \frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}=0,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

откуда следует, что

$$\alpha\, dx+\beta\, dy+\gamma\, dz=d\varphi \tag{16}$$

является полным дифференциалом от φ, так что

$$\alpha=\frac{d\varphi}{dx},\quad \beta=\frac{d\varphi}{dy},\quad \gamma=\frac{d\varphi}{dz}. \tag{17}$$

μ пропорционально плотности вихрей и представляет «индуктивную магнитную емкость» среды [магнитная проницаемость]. Она равна единице в воздухе или в какой-нибудь другой стандартной среде, которая выбирается для опытов по определению действия магнитов, силы электрических токов и т. д.

Предположим, что μ постоянно, тогда

$$m=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d}{dx}(\mu\alpha)+\frac{d}{dy}(\mu\beta)+\frac{d}{dz}(\mu\gamma)\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\mu\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) \tag{18}$$

представляет плотность воображаемой магнитной жидкости в единице объема. Для того чтобы на данный элемент объема не действовала сила, соответствующая первому члену уравнения (12), (13) или (14), мы должны иметь $m=0$, или

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0. \tag{19}$$

Может быть показано, что если уравнение (19) выполняется в данной области пространства, то магнитные силы в этом пространстве по своему действию эквивалентны ряду силовых центров, лежащих за пределами этого пространства и производящих притяжение или отталкивание обратно пропорционально квадрату расстояния.

Отсюда следует, что силовые линии в той части пространства, где μ постоянно и где нет электрических токов, должны идти так, как это следует из теории воображаемой магнитной жидкости, действующей на расстоянии по этому закону. Предпосылки этой теории не похожи на наши предпосылки, но результаты одинаковы.

Рассмотрим прежде всего случай одного единственного магнитного полюса, т. е. одного конца магнита, настолько длинного, что его другой конец отстоит слишком далеко, чтобы иметь какое-либо значительное влияние на рассматриваемую нами часть поля. Условия тогда являются такими, что уравнение (18) должно быть выполнено для магнитного полюса, а уравнение (19) во всех других местах. Единственным решением при этих условиях является

$$\varphi = -\frac{m}{\mu}\frac{1}{r}, \tag{20}$$

где r есть расстояние от полюса и m — сила полюса.

Отталкивание единичного полюса в какой-нибудь точке поля равно

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{m}{\mu}\frac{1}{r^2}. \tag{21}$$

В стандартной среде $\mu = 1$, так что отталкивание в этой среде просто равно $\frac{m}{r^2}$, что было показано Кулоном [15].

В среде, имеющей бо́льшую величину μ (как, например, кислород, растворы большинства солей железа и т. д.), притяжение согласно нашей теории должно быть *меньше*, чем в воздухе, а в диамагнитных средах (таких, как вода, расплавленный висмут и т. д.) притяжение между теми же магнитными полюсами должно быть *больше*, чем в воздухе.

Экспериментальное доказательство различия в притяжении двух магнитов сообразно магнитному или диамагнитному характеру среды, в которую они помещены, потребовало бы большой точности, учитывая небольшую величину разности магнитных емкостей известных нам жидких и газовых сред и малость ожидаемой разницы по сравнению со всем притяжением.

Рассмотрим теперь случай электрического тока, количество которого равно C, текущего через цилиндрический проводник радиуса R, длина которого бесконечна по сравнению с размерами рассматриваемого поля сил.

Пусть ось цилиндра будет осью z и направление тока положительное, тогда в проводнике количество тока на единицу площади есть

$$r=\frac{C}{\pi R^2}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right), \tag{22}$$

так что внутри проводника

$$\alpha=-2\frac{C}{R^2}y, \quad \beta=2\frac{C}{R^2}x, \quad \gamma=0. \tag{23}$$

За пределами проводника, в окружающем его пространстве:

$$\varphi=2C\operatorname{arc\,tg}\frac{g}{x} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha=\frac{d\varphi}{dx}=-2C\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \beta=\frac{d\varphi}{dy}=2C\frac{x}{x^2+y^2}, \\ \gamma=\frac{d\varphi}{dz}=0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Если $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ есть расстояние по перпендикуляру какой-нибудь точки от оси проводника, то на единицу северного полюса в этой точке будет действовать сила $\frac{2C}{\rho}$, стремящаяся двигать его вокруг проводника в направлении часовой стрелки, если наблюдатель смотрит в направлении движения тока.

Рассмотрим теперь второй ток, текущий параллельно оси z в плоскости xz на расстоянии ρ от первого.

Пусть количество тока будет c', длина рассматриваемой части l, ее сечение s, так что $\frac{c'}{s}$ есть плотность тока. Подставляя это количество вместо r в уравнения (12), (13), (14), мы находим [16]

$$X = -\mu\beta \frac{c'}{s}$$

на единицу объема; умножая на ls—объем рассматриваемой части проводника, мы находим:

$$Xls = -\mu\beta c' l = -2\mu \frac{Cc'l}{\rho}, \tag{26}$$

откуда следует, что второй проводник будет притягиваться к первому с силой, обратно пропорциональной расстоянию. Мы видим, что и в этом случае сила притяжения зависит от величины μ, однако притяжение прямо пропорционально μ вместо того, чтобы быть обратно пропорциональным, так что притяжение между двумя проводниками с током будет больше в кислороде, чем в воздухе, и больше в воздухе, чем в воде.

В дальнейшем мы рассмотрим природу электрических токов и электродвижущих сил в связи с теорией молекулярных вихрей.

ЧАСТЬ II

ТЕОРИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ВИХРЕЙ В ПРИМЕНЕНИИ К ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКАМ*)

Мы уже показали, что все силы, действующие между магнитами, намагничивающимися путем индукции веществами и электрическими токами, можно механически объяснить, предполагая, что окружающая среда находится в таком состоянии, что в каждой точке давления различны в различных направлениях, причем направление наименьшего давления является направлением наблюдаемых силовых линий, а разность наибольшего и наименьшего давлений пропорциональна квадрату интенсивности силы в этой точке.

Если предположить существование в среде такого состояния напряжения, соответствующего известным законам распределения силовых линий, то среда будет действовать на магниты, токи и т. д. в точности с теми же результирующими силами, что и силы, вычисленные на основании обычной гипотезы непосредственного действия на расстоянии. Это верно независимо от какой-либо частной теории, касающейся *причины* этого состояния напряжения или способа, которым это состояние может быть поддерживаемо в среде. Мы поэтому можем дать положительный ответ на вопрос: «имеется ли какая-нибудь механическая гипотеза,

*) Phil. Mag., т. XXI, стр. 281—291, 338—348.

касающаяся определяемого линиями силы состояния среды, при помощи которой могли бы быть выведены наблюденные результирующие силы?» Ответ таков, что силовые линии указывают направление *минимального давления* в каждой точке среды.

Вторым вопросом должен быть следующий: «какова механическая причина этого различия давления в различных направлениях?» В первой части этого труда мы предположили, что эта разница в давлениях вызывается молекулярными вихрями, оси которых параллельны силовым линиям.

Мы также допустили совершенно произвольно, что направление этих вихрей таково, что, смотря вдоль силовой линии по направлению с юга на север, мы видим вихри вращающимися в направлении часовой стрелки.

Мы нашли, что скорость на окружности каждого вихря должна быть пропорциональной интенсивности магнитной силы и что плотность вещества вихря должна быть пропорциональной индуктивной магнитной емкости среды.

Мы до сего времени не дали ответов на вопросы: «каким образом эти вихри приводятся во вращательное движение?» и «почему их распределение соответствует известным законам распределения силовых линий около магнитов и токов?» Эти последние вопросы, конечно, являются вопросами более высокой степени трудности, чем какой либо из двух первых вопросов. И я хочу отделить те мысли, которые можно предложить в порядке предварительного ответа на последние вопросы, от механических соображений, которые разрешают самый первый из наших вопросов, и гипотезы вихрей, которая дает вероятный ответ на второй вопрос.

Мы, действительно, сейчас должны обратиться к исследованию физической связи этих вихрей с электрическими токами, хотя мы до сего времени находимся в неведении относительно природы электричества: является ли электричество одной субстанцией, двумя субстанциями или, может быть, оно вовсе не является субстанцией, чем оно отличается от материи и как связано с ней?

Мы знаем, что на силовые линии влияют электрические токи, и знаем распределение этих линий около тока, так что, исходя из магнитных сил, мы можем определить величину тока. Если наше объяснение силовых линий при помощи молекулярных вихрей правильно, то спрашивается: почему данное распределение магнитных сил указывает на наличие одного определенного электрического тока? Удовлетворительный ответ на этот вопрос был бы значительным шагом к ответу на другой весьма важный вопрос, а именно, «что такое электрический ток?» ([9]).

Я встретился с большими затруднениями, предполагая существование вихрей в среде, которые располагаются непосредственно друг около друга и вращаются в одном и том же направлении около параллельных осей [[17]]. Соприкасающиеся части смежных вихрей должны двигаться в противоположных направлениях, и трудно представить себе, как могут сосуществовать противоположные движения двух соседних частей среды; как движение одной части среды может даже вызывать прямо противоположное движение другой части, с ней соприкасающейся.

Единственное предположение, которое помогло мне представить такого рода движения, заключается в том, что вихри разделены слоем частиц, вращающихся каждая вокруг своей собственной оси в направлении, противоположном направлению вихрей, так что соприкасающиеся поверхности частиц и вихрей имеют одно и то же направление движения.

Если хотят, чтобы в механизме два колеса вращались в одном и том же направлении, то между ними ставят третье колесо, находящееся в сцеплении с обоими (это колесо называется «холостым»). Указанное выше предположение является гипотезой о существовании слоя частиц, действующих наподобие этих холостых колес, слоя, который находится между соседними вихрями, так что каждый вихрь стремится вращать соседние вихри в том же направлении, в котором он сам вращается (10).

В обычных механизмах холостое колесо, вообще говоря, вращается около *неподвижной* оси. Но в эпициклических дифференциальных зубчатых передачах и других приспособлениях, как, например, в регуляторе Сименса для паровых машин *), мы находим холостые колеса с подвижными центрами [18].

Во всех этих случаях скорость движения центра является средней арифметической скоростей движения окружностей колес, между которыми оно поставлено. Исследуем отношения, которые должны существовать между движениями наших вихрей и движениями слоев частиц, расположенных между ними наподобие холостых колес.

Предложение IV. Определить движение слоя частиц, разделяющего два вихря.

Пусть произведения скорости на окружности вихря на три направляющих косинуса его оси будут соответственно α, β, γ, как в предложении II. Пусть l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к какому-нибудь элементу поверхности этого вихря. Тогда составляющие скорости прилегающего к этому элементу поверхности элемента объема вихря будут:

$$\left.\begin{aligned} &n\beta - m\gamma \quad \text{параллельно } x,\\ &l\gamma - n\alpha \quad \text{параллельно } y,\\ &m\alpha - l\beta \quad \text{параллельно } z\ [19]. \end{aligned}\right\} \qquad [26a]$$

Если этот элемент поверхности находится в контакте с другим вихрем, для которого величины α, β, γ равны α', β', γ', тогда слой очень малых частиц, помещенных между ними, будет иметь скорость, которая представит собой среднюю арифметическую скоростей обоих вихрей; следовательно, компонента u ско-

*) См. Goodeve, Elements of Mechanism, стр. 118.

рости частиц в направлении x [20]

$$u = \frac{1}{2} m (\gamma' - \gamma) - \frac{1}{2} n (\beta' - \beta), \tag{27}$$

так как нормаль к элементу поверхности второго вихря имеет направление, противоположное нормали к соответствующему элементу поверхности первого вихря.

Предложение V. Определить общее количество промежуточных частиц, проходящих через единицу площади в направлении x в единицу времени.

Пусть x_1, y_1, z_1 будут координаты центра первого вихря, x_2, y_2, z_2 — координаты центра второго вихря и т. д. Пусть V_1, V_2 и т. д. будут объемы первого, второго и т. д. вихрей и $\overline{V}$ — сумма этих объемов [21]. Далее, пусть dS будет элемент поверхности, отделяющей первый вихрь от второго, x, y, z — его координаты. Пусть ρ будет количество промежуточных частиц на единицу поверхности [22]. Тогда, если через p обозначить полное количество частиц, проходящих через единицу площади в единицу времени в направлении x, то полное, параллельное оси x количество движения частиц внутри объема $\overline{V}$, будет $\overline{V}p$, и мы получим:

$$\overline{V}p = \sum u\rho\, dS, \tag{28}$$

причем суммирование распространяется на поверхности, разделяющие каждые два вихря в пределах объема $\overline{V}$ [23]. Рассмотрим поверхность, отделяющую первый вихрь от второго. Обозначим элемент площади через dS; пусть направляющие косинусы, относящиеся к первому и второму вихрям, будут соответственно l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2. Известно, что

$$l_1 + l_2 = 0, \quad m_1 + m_2 = 0, \quad n_1 + n_2 = 0. \tag{29}$$

Значения α, β, γ являются функциями положения центра вихря, так что мы можем написать [ограничившись первыми членами разложения в ряд Тейлора]:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{d\alpha}{dx}(x_2 - x_1) + \frac{d\alpha}{dy}(y_2 - y_1) + \frac{d\alpha}{dz}(z_2 - z_1) \qquad (30)$$

и подобные же уравнения для β и γ [24].

Значение u может быть написано так:

$$u = \frac{1}{2}\frac{d\gamma}{dx}[m_1(x - x_1) + m_2(x - x_2)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{d\gamma}{dy}[m_1(y - y_1) + m_2(y - y_2)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{d\gamma}{dz}[m_1(z - z_1) + m_2(z - z_2)] -$$
$$- \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dx}[n_1(x - x_1) + n_2(x - x_2)] -$$
$$- \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dy}[n_1(y - y_1) + n_2(y - y_2)] -$$
$$- \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dz}[n_1(z - z_1) + n_2(z - z_2)]. \qquad (31)$$

Производя суммирование $\sum u\rho\, dS$, мы должны помнить, что взятые по замкнутой поверхности выражения $\sum l\, dS$ и все аналогичные им исчезают; также исчезают члены, имеющие форму $\sum ly\, dS$, где l и y относятся к различным координатным направлениям; только члены формы $\sum lx\, dS$, где l и x относятся к той же самой оси координат, не исчезают, но равны заключенному в поверхности объему. Отсюда следует [25]:

$$\overline{V}p = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right)(V_1 + V_2 + \ldots), \qquad (32)$$

или, деля на $\overline{V} = V_1 + V_2 + \ldots$,

$$p = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right). \qquad (33)$$

Если мы положим [26]

$$\rho = \frac{1}{2\pi}, \qquad (34)$$

тогда уравнение (33) будет идентично с первым из уравнений (9), которое выражает соотношение между количеством электрического тока и интенсивностью окружающих его силовых линий.

Из сказанного ясно, что согласно нашей гипотезе электрический ток может быть представлен как поступательное движение частиц, расположенных между соседними вихрями. Мы можем считать, что эти частички очень малы по сравнению с размером вихря, что их массы в сумме дают ничтожно малую величину по сравнению с массой вихря и что очень большое количество вихрей с окружающими их частицами содержится в одной единственной цельной молекуле [27]. Частицы необходимо предположить вращающимися без трения между вихрями, которые они разделяют, не соприкасающимися друг с другом, так что в течение того времени, пока они остаются внутри одной и той же целой молекулы, нет потерь энергии в результате преодоления каких-либо сил сопротивления; однако, когда имеется постоянное передвижение частиц в определенном направлении, они должны переходить от одной молекулы к другой и при этом испытывать сопротивление, в результате чего теряется электрическая энергия и порождается тепло.

Теперь предположим, что вихри расположены в среде каким-нибудь произвольным образом. Величины $\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}$ и т. д. будут тогда, вообще говоря, иметь какие-то отличные от нуля значения, так что вначале в среде будут иметься электрические токи. При наличии электрического сопротивления среды и отсутствии постоянного источника электродвижущей силы они быстро исчезнут, и тогда мы будем иметь $\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}=0$ и т. д., т. е. $\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz$ будет полным дифференциалом [см. уравнения (15) и (16)]. Таким образом, наша гипотеза объясняет механическое происхождение распределения силовых линий.

На рис. 7 вертикальный круг представляет электрический ток, тѐкущий от меди C к цинку Z через проводник EE', как показано стрелками.

Пусть горизонтальный кружок MM' представляет магнитную силовую линию, охватывающую электрический ток; направления на север и на юг указываются стрелками SN и NS. Пусть вертикальные кружки V и V' представляют молекулярные вихри, осью которых является магнитная силовая линия.

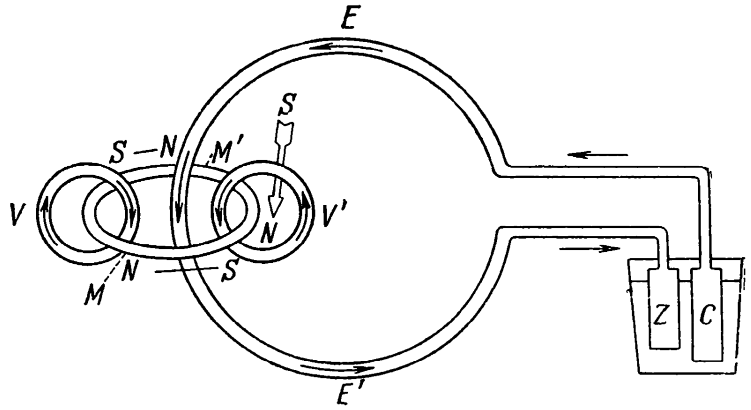


Рис. 7.

V вращается по часовой стрелке, а V' — в противоположном направлении.

Из диаграммы видно, что если V и V' были бы соседними вихрями, то частички, помещенные между ними, должны были бы двигаться вниз и что, наоборот, если бы частички по какой-либо причине вынуждены были двигаться вниз, они заставили бы вихри вращаться так, как указано на рисунке. С изложенной точки зрения мы можем рассматривать отношение электрического тока к его силовым линиям аналогично отношению зубчатого колеса к сцепленным с ним колесам.

В первой части этого труда мы исследовали отношения между статическими силами системы. Во второй части мы до сих пор исследовали связь стационарных движений частей системы, рассматриваемой как некоторый механизм. Нам остается еще исследовать динамику системы и определить силы, необходимые для производства данных изменений в движениях различных частей.

Предложение VI. Определить кинетическую энергию вихревого движения данной части среды.

Пусть α, β, γ будут, как и в предложении II, составляющими скорости на окружности, тогда кинетическая энергия вихрей в единице объема будет пропорциональна плотности и квадрату скорости. Так как мы не знаем распределения плотности и скорости внутри отдельного вихря, мы не можем непосредственно определить численное значение энергии. Поскольку, однако, μ находится в определенном, хотя и неизвестном, отношении к средней плотности, мы можем предположить, что кинетическая энергия в единице объема есть

$$E = C\mu(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

где C — подлежащая определению константа. Чтобы ее определить, достаточно рассмотреть специальный случай, когда

$$\alpha = \frac{d\varphi}{dx}, \quad \beta = \frac{d\varphi}{dy}, \quad \gamma = \frac{d\varphi}{dz}. \tag{35}$$

Пусть

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \tag{36}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dz^2}\right) = m_1, \\ \frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_2}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_2}{dz^2}\right) = m_2. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Тогда φ_1 есть потенциал, обусловленный магнитной системой m_1, а φ_2 — потенциал, обусловленный системой m_2. Кинетическая энергия всех вихрей будет:

$$E = \sum C\mu(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,dV, \tag{38}$$

причем суммирование производится по всему пространству. Путем интегрирования по частям (см. Green, Essay on Electricity, стр. 10) получаем:

$$E = -4\pi C \sum (\varphi_1 m_1 + \varphi_2 m_2 + \varphi_1 m_2 + \varphi_2 m_1)\,dV, \tag{39}$$

а так как [28]

$$\left.\begin{aligned}\sum\varphi_1 m_2 dV &= \sum\varphi_2 m_1 dV,\\ E &= -4\pi C\sum(\varphi_1 m_1+\varphi_2 m_2+2\varphi_1 m_2)\,dV.\end{aligned}\right\}\quad(40)$$

Пусть теперь магнитная система m_1 остается в покое и пусть система m_2 переместится параллельно самой себе в направлении оси x на расстояние δx. Тогда, так как φ_1 зависит только от m_1, оно останется тем же, и величина $\varphi_1 m_1$ будет постоянной; так как, далее, φ_2 зависит только от m_2, распределение φ_2 относительно m_2 останется тем же; следовательно, произведение $\varphi_2 m_2$ останется таким, как и до изменения положения m_2.

Единственным переменным членом в выражении для E будет член, который зависит от $2\varphi_1 m_2$, так как φ_1 переходит в $\varphi_1+\frac{d\varphi_1}{dx}\delta x$ вследствие смещения магнитной массы m_2. Увеличение кинетической энергии, вызванное этим смещением, будет равно:

$$\delta E=-4\pi C\sum\left(2\,\frac{d\varphi_1}{dx}m_2\right)dV\,\delta x.\qquad(41)$$

Но по уравнению (12) работа, произведенная механическими силами, действующими на m_2 во время ее движения, есть:

$$\delta W=\sum\left(\frac{d\varphi_1}{dx}m_2\,dV\right)\delta x.\qquad(42)$$

Так как наша гипотеза является чисто механической, мы должны по закону сохранения силы иметь:

$$\delta E+\delta W=0,\qquad(43)$$

т. е. потеря энергии вихрей должна быть возмещена работой, произведенной в движущихся магнитах, так что

$$-4\pi C\sum\left(2\,\frac{d\varphi_1}{dx}m_2\,dV\right)\delta x+\sum\left(\frac{d\varphi_1}{dx}m_2\,dV\right)\delta x=0,\qquad(44)$$

или

$$C=\frac{1}{8\pi}.$$

Таким образом, энергия вихрей в единице объема есть:

$$\frac{1}{8\pi}\mu(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2), \tag{45}$$

и энергия вихря, имеющего объем V, есть [29]:

$$\frac{1}{8\pi}\mu(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)V. \tag{46}$$

Для того чтобы произвести или уничтожить эту энергию, вихрю должна быть сообщена или отнята у него кинетическая энергия, будь то при помощи тангенциального воздействия прилегающего к поверхности вихря слоя частиц или при помощи изменения формы вихря. Мы прежде всего исследуем тангенциальное взаимодействие между вихрями и слоем частиц, находящимся в соприкосновении с ними.

Предложение VII. Найти энергию, переданную вихрю в единицу времени слоем окружающих его частиц.

Пусть P, Q, R будут силы, действующие на единицу количества частиц в направлениях трех осей координат ([11]), причем очевидно, что эти величины являются функциями от x, y и z [30]. Так как каждая частица касается двух вихрей противоположными концами своего диаметра, то обратное действие частиц на оба вихря будет разделено пополам; единица количества частиц будет действовать на каждый вихрь с силой, компоненты которой равны: $-\frac{1}{2}P$, $-\frac{1}{2}Q$, $-\frac{1}{2}R$. Так как поверхностная плотность частиц равна $\frac{1}{2\pi}$ [см. уравнение (34)], то компоненты силы, действующей на единицу поверхности вихря, будут:

$$-\frac{1}{4\pi}P, \quad -\frac{1}{4\pi}Q, \quad -\frac{1}{4\pi}R.$$

Обозначим через dS элемент поверхности вихря, l, m, n — направляющие косинусы нормали к нему, x, y, z —

координаты элемента, а u, v, w — составляющие скоростей элемента поверхности. Тогда работа, затраченная на этот элемент поверхности, будет:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{4\pi}(Pu + Qv + Rw)\,dS. \tag{47}$$

Начнем с первого члена $Pu\,dS$; P может быть написано в виде

$$P_0 + \frac{dP}{dx}x + \frac{dP}{dy}y + \frac{dP}{dz}z \tag{48}$$

и [31]

$$u = n\beta - m\gamma. \qquad [48a]$$

Так как поверхность вихря является замкнутой, то

$$\sum nx\,dS = \sum mx\,dS = \sum ny\,dS = \sum mz\,dS = 0$$

и

$$\sum my\,dS = \sum nz\,dS = V. \qquad [48b]$$

Мы находим отсюда

$$\sum Pu\,dS = \left(\frac{dP}{dz}\beta - \frac{dP}{dy}\gamma\right)V. \tag{49}$$

Теперь мы можем выразить всю работу, переданную вихрю в единицу времени, так:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\sum(Pu + Qv + Rw)\,dS =$$

$$= \frac{V}{4\pi}\left[\alpha\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + \beta\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + \gamma\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)\right]. \tag{50}$$

Предложение VIII. Найти отношения между изменениями скоростей движения вихрей и силами P, Q, R, с которыми они действуют на слой частиц между ними.

Пусть V — объем вихря, тогда согласно уравнению (46) его энергия будет:

$$E = \frac{1}{8\pi}\mu(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)V, \tag{51}$$

откуда

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi}\mu V\left(\alpha\frac{d\alpha}{dt} + \beta\frac{d\beta}{dt} + \gamma\frac{d\gamma}{dt}\right). \tag{52}$$

Сравнивая это выражение с выражением из уравнения (50), находим:

$$\alpha\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} - \mu\frac{d\alpha}{dt}\right) + \beta\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} - \mu\frac{d\beta}{dt}\right) + \\ + \gamma\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} - \mu\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0. \tag{53}$$

Поскольку это уравнение верно для всех значений α, β и γ [32], то, положив β и γ равными нулю, а затем разделив на α, получим ([12]):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} = \mu\frac{d\alpha}{dt}, \\ \text{аналогично}\quad &\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} = \mu\frac{d\beta}{dt}, \\ \text{и}\quad &\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} = \mu\frac{d\gamma}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Из этих уравнений мы можем определить отношения между изменениями скоростей вращения вихря $\frac{d\alpha}{dt}$ и т. д. и силами, действующими на слои частиц между вихрями, или, говоря на языке нашей гипотезы, отношения между изменениями состояния магнитного поля и электродвижущими силами, ими обусловленными.

В работе «О динамической теории диффракции» (Cambridge Philosophical Transactions, т. IX, часть I, секция 6) профессор Стокс (Stokes) дал метод, при помощи которого мы можем решить уравнения (54) и найти P, Q и R как функции величин, стоящих в правой части этих уравнений.

Я применил этот метод к вопросам электричества и магнетизма в одной своей прежней работе *).

*) Cambr. Phil. Trans., т. X, часть I, гл. 3, «О фарадеевых силовых линиях», см. стр. 11 этой книги.

Мы должны найти три величины F, G, H из уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG}{dz}-\frac{dH}{dy}&=\mu\alpha, \\ \frac{dH}{dx}-\frac{dF}{dz}&=\mu\beta, \\ \frac{dF}{dy}-\frac{dG}{dx}&=\mu\gamma \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

при условии [33]

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d}{dx}\mu\alpha+\frac{d}{dy}\mu\beta+\frac{d}{dz}\mu\gamma\right)=m=0 \tag{56}$$

и

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=0. \tag{57}$$

Дифференцируя (55) по времени t и сравнивая с уравнением (54), находим:

$$P=\frac{dF}{dt}, \quad Q=\frac{dG}{dt}, \quad R=\frac{dH}{dt}. \tag{58}$$

Таким образом, мы определили три величины F, G, H ([13]), из которых мы можем найти P, Q и R простым дифференцированием по времени. В работе, на которую я уже ссылался, я привел соображения в пользу концепции величин F, G, H как составляющих состояния, существование которого предполагал Фарадей и которое он назвал электротоническим состоянием. В этой работе я установил математические отношения между электротоническим состоянием и магнитными силовыми линиями в том виде, как это выражено в уравнениях (55), а также между электротоническим состоянием и электродвижущей силой, как это выражено в уравнениях (58). Мы должны теперь попытаться истолковать эти уравнения с механической точки зрения в связи с нашей гипотезой.

Сначала мы изучим процесс, при помощи которого силовые линии производятся электрическим током.

Пусть AB на рис. 8 представляет электрический ток, текущий в направлении от A к B. Пусть большие шестиугольники выше и ниже AB изображают вихри, а малые окружности, разделяющие их, изображают слои частиц, которые по нашей гипотезе представляют электричество.

Пусть электрический ток течет слева направо в направлении AB. Ряд вихрей gh, находящихся выше AB, будет приведен в движение в направлении, противоположном ходу часов. (Это направление мы будем на-

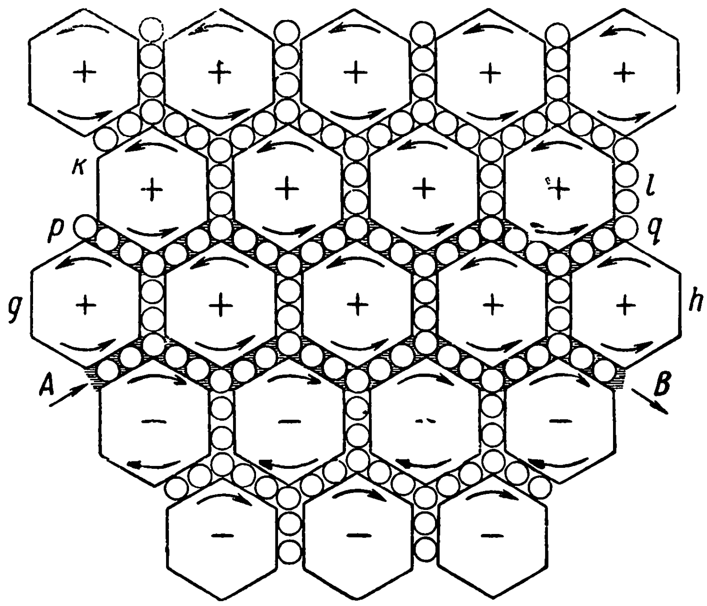


Рис. 8.

зывать положительным (+), а противоположное направление, т. е. по ходу часов,—отрицательным (—).) Предположим, что ряд вихрей kl все еще остается в покое; тогда ряд вихрей gh будет действовать на нижние стороны частиц, расположенных между этим рядом и рядом kl, а верхние стороны останутся в покое. Если частицы могут свободно двигаться, то они будут вращаться в отрицательном направлении и одновременно перемещаться справа налево, именно в том направлении (противоположном току AB), в котором возникает индуктированный электрический ток. Если этот ток прекратится из-за электрического сопротивления среды, тогда вращающиеся частицы слоя pq действуют на ряд вихрей kl и заставляют их вращаться в положительном направлении со скоростью, которая возрастает до тех пор, пока не прекратится перемещение частиц и они будут только вращаться; это соответствует исчезновению индуктированного тока.

Если теперь внезапно прервать первичный ток AB, то вихри ряда gh остановятся, в то время как в ряду kl они все еще будут продолжать свое вращение; вследствие этого частицы слоя pq придут в движение в направлении первичного тока (слева направо). Если среда окажет сопротивление этому движению, то и движение вихрей над pq постепенно прекратится.

Отсюда ясно, что явление индукции токов составляет часть процесса переноса вращательной скорости вихрей от одной части поля к другой.

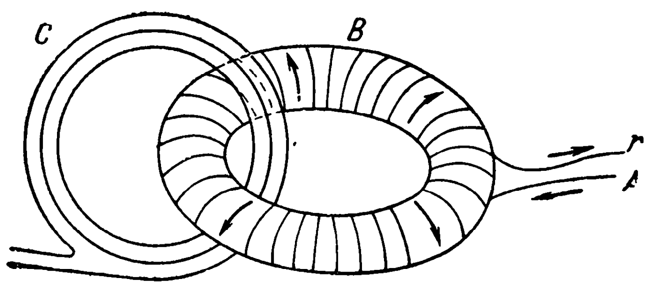


Рис. 9.

В качестве примера образования индуктированных токов действием вихрей возьмем следующий случай: пусть B на рис. 9—круговое кольцо одинакового по всей длине сечения, равномерно обмотанное изолированной проволокой. Можно показать, что при пропускании электрического тока через проволоку помещенный внутри спирали магнит будет испытывать сильное воздействие, в то время как в любой внешней точке никакого магнитного действия не обнаруживается. Спираль действует как магнит, средняя линия которого образует замкнутую кривую, так что его оба полюса соприкасаются.

Если катушка сделана хорошо, то нельзя обнаружить никакого действия на помещенный снаружи магнит, независимо от того, является ли ток постоянным или же меняется по силе; но если кольцо охватывается некоторое число раз проводником C, то в последнем электродвижущая сила будет действовать каждый раз, как только ток в катушке меняется, и если цепь будет *замкнута*, то в проволоке C возникнет ток.

Этот опыт показывает, что, для того чтобы получить электродвижущую силу, вовсе не нужно, чтобы проводник был помещен в магнитное силовое поле или чтобы магнитные силовые линии проходили через вещество проволоки или поблизости от нее. Требуется лишь, чтобы силовые линии проходили через охватываемую проводящей цепью поверхность и чтобы эти силовые линии изменялись по своей интенсивности во время опыта.

В ранее рассмотренных случаях вихри, которые согласно нашей гипотезе представляют магнитные силовые линии, находятся все в пределах сечения кольца, а вне кольца все находится в покое. Если нет охватывающей кольцо замкнутой проводящей цепи, то, если первичный ток возникает или прекращается, никакого действия вне кольца не наблюдается, за исключением мгновенного давления между частицами и прилегающими к ним вихрями. Если же имеется непрерывная проводящая цепь, охватывающая кольцо, тогда при включении первичного тока появляется ток в цепи C противоположного направления; когда же первичный ток прерывается, то появляется ток в C того же самого направления, что и первичный ток.

Мы видим, таким образом, что индуктированные токи возникают благодаря тому, что электричество поддается действию электродвижущей силы, причем эта сила имеет место и в том случае, когда образованию заметного тока препятствует сопротивление цепи. Электродвижущая сила с компонентами P, Q, R возникает при взаимодействии между вихрями и находящимися между ними частицами, когда скорость вращения вихрей изменяется в какой-нибудь части поля. Эта сила соответствует давлению на ось колеса в машине, когда скорость ведущего колеса увеличивается или уменьшается.

Электротоническое состояние, составляющие которого суть F, G, H, является той электродвижущей силой, которая потребовалась бы, если бы токи и другие величины мгновенно возросли до конечных значений. Оно соответствует импульсу, который действовал бы на ось колеса машины, если бы ведущему колесу покоящейся машины была внезапно сообщена его действительная скорость.

Если бы машина была внезапно остановлена путем остановки ведущего колеса, то каждое колесо ее получило бы импульс, равный и противоположный тому, который оно получило бы в момент мгновенного пуска машины в ход. Этот импульс может быть рассчитан для любой части механизма и может быть назван приведенным моментом [количеством движения] машины для данной точки [34]. При изменении движения машины фактическая сила, действующая на каждую часть, вследствие этого изменения может быть найдена путем дифференцирования приведенного момента по времени, совершенно так же, как электродвижущая сила может быть выведена из электротонического состояния при помощи того же самого процесса вычисления.

После того как мы нашли отношение между скоростями вихрей и электродвижущими силами для случая, когда оси вихрей находятся в покое, мы должны теперь распространить нашу теорию на случай жидкой среды, содержащей вихри и подверженной всему разнообразию движения жидкостей. Если мы обратим внимание на какую-нибудь элементарную часть жидкости, мы найдем, что она не только переходит от одного места в другое, но также и изменяет свою форму и ориентацию [35], так что она может удлиняться в некоторых направлениях и сокращаться в других, кроме того, в наиболее общем случае ее перемещение сопровождается вращением.

Эти изменения формы и ориентации элемента объема производят изменение скорости вращения содержащихся в нем молекулярных вихрей, к изучению чего мы должны сейчас приступить.

Изменения формы и ориентации элемента объема могут всегда быть сведены к трем простым удлинениям или сжатиям в направлении трех находящихся под прямыми углами осей и к трем угловым вращениям около любых трех осей, не находящихся в одной плоскости. Мы сначала рассмотрим эффект трех простых растяжений или сжатий.

Предложение IX. Найти изменения α, β и γ в параллелепипеде x, y, z, которые вызываются изменением x до $x+\delta x$, y до $y+\delta y$ и z до $z+\delta z$, причем объем параллелепипеда остается тем же самым.

Согласно предложению II работа, производимая вихрями при преодолении давления, выразится:

$$\delta W = p_1 \delta (xyz) - \frac{\mu}{4\pi} (\alpha^2 yz\, \delta x + \beta^2 zx\, \delta y + \gamma^2 xy\, \delta z), \quad (59)$$

а по предложению VI изменение энергии

$$\delta E = \frac{\mu}{4\pi} (\alpha\, \delta\alpha + \beta\, \delta\beta + \gamma\, \delta\gamma)\, xy. \quad (60)$$

Сумма $\delta W + \delta E$ должна равняться нулю по закону сохранения энергии; также должно быть $\delta (xyz) = 0$, так как объем xyz есть величина постоянная.

Согласно выражениям (59) и (60) получаем:

$$\alpha \left(\delta\alpha - \alpha \frac{\delta x}{x}\right) + \beta \left(\delta\beta - \beta \frac{\delta y}{y}\right) + \gamma \left(\delta\gamma - \gamma \frac{\delta z}{z}\right) = 0. \quad (61)$$

Так как это уравнение должно быть верным при всех отношениях между α, β и γ, мы должны иметь [36]:

$$\delta\alpha = \alpha \frac{\delta x}{x}, \quad \delta\beta = \beta \frac{\delta y}{y}, \quad \delta\gamma = \gamma \frac{\delta z}{z}. \quad (62)$$

Предложение X. Найти изменения α, β, γ, происходящие вследствие поворота на угол θ_1 около оси x по направлению от y к z, поворота на θ_2 около оси y от z к x и поворота на θ_3 около оси z от x к y.

Если ось β будет удалена от оси x на угол θ_3, то составляющая от β в направлении x изменяется от 0 до $-\beta\theta_3$. Ось γ приближается к оси x на угол θ_2, так что [37] величина составляющей вращения γ в направлении x изменяется от 0 до $\gamma\theta_2$. Значение составляющей α в направлении x изменяется на величину, которой можно пренебречь, так как она представляет по порядку вторую степень углов поворота. Таким образом, изменения α, β, γ, вызванные указанной причиной, будут:

$$\delta\alpha = \gamma\theta_2 - \beta\theta_3, \quad \delta\beta = \alpha\theta_3 - \gamma\theta_1, \quad \delta\gamma = \beta\theta_1 - \alpha\theta_2. \tag{63}$$

Наиболее общие выражения для изменения формы и ориентации элемента объема вследствие смещения его различных частей зависят от девяти величин [38]:

$$\frac{d}{dx}\delta x, \quad \frac{d}{dy}\delta x, \quad \frac{d}{dz}\delta x; \quad \frac{d}{dx}\delta y, \quad \frac{d}{dy}\delta y, \quad \frac{d}{dz}\delta y;$$
$$\frac{d}{dx}\delta z, \quad \frac{d}{dy}\delta z, \quad \frac{d}{dz}\delta z.$$

Эти величины всегда могут быть выражены через девять других величин, а именно: через три простых расширения или сжатия:

$$\frac{\delta x'}{x'}, \quad \frac{\delta y'}{y'}, \quad \frac{\delta z'}{z'}$$

вдоль трех соответствующим образом выбранных осей x', y', z', девять направляющих косинусов этих осей, связанных между собой шестью уравнениями и, следовательно, эквивалентных трем независимым переменным, и три вращения: θ_1, θ_2, θ_3 вокруг осей x, y и z.

Пусть направляющие косинусы x' относительно x, y, z будут l_1, m_1, n_1; направляющие косинусы y' — l_2, m_2, n_2; направляющие косинусы z' — l_3, m_3, n_3. Тогда имеют место уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\delta x &= l_1^2\frac{\delta x'}{x'} + l_2^2\frac{\delta y'}{y'} + l_3^2\frac{\delta z'}{z'},\\
\frac{d}{dy}\delta x &= l_1 m_1\frac{\delta x'}{x'} + l_2 m_2\frac{\delta y'}{y'} + l_3 m_3\frac{\delta z'}{z'} - \theta_3,\\
\frac{d}{dz}\delta x &= l_1 n_1\frac{\delta x'}{x'} + l_2 n_2\frac{\delta y'}{y'} + l_3 n_3\frac{\delta z'}{z'} + \theta_2
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

и аналогичные уравнения для производных от δy и δz.

Пусть α', β', γ' будут значения α, β, γ, отнесенные к осям x', y', z'. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma, \\ \beta' &= l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma, \\ \gamma' &= l_3\alpha + m_3\beta + n_3\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Отсюда находим:

$$\delta\alpha = l_1\delta\alpha' + l_2\delta\beta' + l_3\delta\gamma' + \gamma\theta_2 - \beta\theta_3 = \tag{66}$$

$$= l_1\alpha' \frac{\delta x'}{x'} + l_2\beta' \frac{\delta y'}{y'} + l_3\gamma' \frac{\delta z'}{z'} + \gamma\theta_2 - \beta\theta_3. \tag{67}$$

Подставляя значения α', β', γ' из (65) и сравнивая с уравнениями (64), получаем [39]:

$$\delta\alpha = \alpha \frac{d}{dx}\delta x + \beta \frac{d}{dy}\delta x + \gamma \frac{d}{dz}\delta x \tag{68}$$

для изменения α, обусловленного изменением формы и ориентации элемента объема. Изменения для β и γ даются подобными же выражениями.

Предложение XI. Найти электродвижущие силы в движущемся проводнике.

Изменение скорости вихрей в движущемся элементе объема обусловлено двумя причинами: действием электродвижущих сил и изменением формы и ориентации элемента. Полное изменение α поэтому будет:

$$\delta\alpha = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right)\delta t + \alpha\frac{d}{dx}\delta x + \beta\frac{d}{dy}\delta x + \gamma\frac{d}{dz}\delta x. \tag{69}$$

Так как α есть функция x, y, z и t, то изменение α может также быть написано в форме [40]:

$$\delta\alpha = \frac{d\alpha}{dx}\delta x + \frac{d\alpha}{dy}\delta y + \frac{d\alpha}{dz}\delta z + \frac{d\alpha}{dt}\delta t. \tag{70}$$

Приравнивая два значения $\delta\alpha$, деля на δt и принимая во внимание, что для движения несжимаемой среды

$$\frac{d}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{d}{dz}\frac{dz}{dt} = 0, \tag{71}$$

и, кроме того, вследствие отсутствия свободного магнетизма

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0 \tag{72}$$

мы находим:

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)+\gamma\frac{d}{dz}\frac{dx}{dt}-\alpha\frac{d}{dz}\frac{dz}{dt}-\alpha\frac{d}{dy}\frac{dy}{dt}+\beta\frac{d}{dy}\frac{dx}{dt}+$$
$$+\frac{d\gamma}{dz}\frac{dx}{dt}-\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{dt}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{d\beta}{dy}\frac{dx}{dt}-\frac{d\alpha}{dt}=0. \tag{73}$$

Если положить

$$\alpha=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dG}{dz}-\frac{dH}{dy}\right) \tag{74}$$

и

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{d^2G}{dz\,dt}-\frac{d^2H}{dy\,dt}\right), \tag{75}$$

где F, G, H являются значениями электротонических составляющих для неподвижной точки пространства, наше уравнение (73) переходит в [41]

$$\frac{d}{dz}\left(Q+\mu\gamma\frac{dx}{dt}-\mu\alpha\frac{dz}{dt}-\frac{dG}{dt}\right)-$$
$$-\frac{d}{dy}\left(R+\mu\alpha\frac{dy}{dt}-\mu\beta\frac{dx}{dt}-\frac{dH}{dt}\right)=0. \tag{76}$$

Выражения для изменений β и γ дают нам два других уравнения, которые могут быть написаны при помощи циклических перестановок. Полное решение этих трех уравнений будет ([14]):

$$\left.\begin{aligned}
P&=\mu\gamma\frac{dy}{dt}-\mu\beta\frac{dz}{dt}+\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx},\\
Q&=\mu\alpha\frac{dz}{dt}-\mu\gamma\frac{dx}{dt}+\frac{dG}{dt}-\frac{d\Psi}{dy},\\
R&=\mu\beta\frac{dx}{dt}-\mu\alpha\frac{dy}{dt}+\frac{dH}{dt}-\frac{d\Psi}{dz}.
\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Первый и второй члены правой части каждого уравнения выражают эффект движения тела в магнитном поле; третий член указывает на изменения электротонического состояния вследствие изменения положения или интенсивности магнитов или токов, находящихся в поле; Ψ есть функция от x, y, z и t, которую первоначально установленные нами уравнения оставляют неопределенной, но она может быть определена в каждом отдельном случае из условий задачи. Физическая интерпретация Ψ заключается в том, что эта величина определяет электрическое натяжение в каждой точке пространства.

Физическое значение членов, которые выражают электродвижущую силу, зависящую от движения тела, становится более простым в случае однородного магнитного поля. Пусть в поле с интенсивностью α магнитные силы направлены по оси абсцисс. Тогда если l, m, n будут направляющие косинусы какой-нибудь части линейного проводника, а S—его длина, то составляющая электродвижущей силы в направлении проводника будет:

$$e=S(Pl+Qm+Rn), \tag{78}$$

или

$$e=S\mu\alpha\left(m\frac{dz}{dt}-n\frac{dy}{dt}\right), \tag{79}$$

т. е. является произведением $\mu\alpha$ —количества магнитной индукции через единицу поверхности—на величину $S\left(m\frac{dz}{dt}-n\frac{dy}{dt}\right)$, т. е. проекцию [42] вычерчиваемой проводником S в единицу времени площади на плоскость, перпендикулярную к направлению магнитной силы[43].

Электродвижущая сила в какой-нибудь части проводника, образующаяся вследствие его движения, измеряется поэтому *числом* магнитных силовых линий, которую эта часть пересекает в единицу времени, а полная электродвижущая сила в замкнутом проводнике измеряется изменением в единицу времени числа силовых линий, которые проходят через контур, охватываемый проводником; это остается верным независимо от того, производятся ли изменения в результате движения проводника или вследствие какой-либо другой внешней причины.

Для того чтобы понять механизм, благодаря которому движение проводника через магнитные силовые линии порождает электродвижущую силу в этом проводнике, мы должны вспомнить, что в предложении X мы доказали, что изменение формы части среды, содержащей вихри, приводит к изменению скоростей этих вихрей, а именно, растяжение среды в направлении осей вихрей, сочетаемое со сжатием по всем перпендикулярным к ним направлениям, вызывает увеличение скорости вихрей, тогда как укорачивание осей и боковое расширение приводят к уменьшению скорости вихрей.

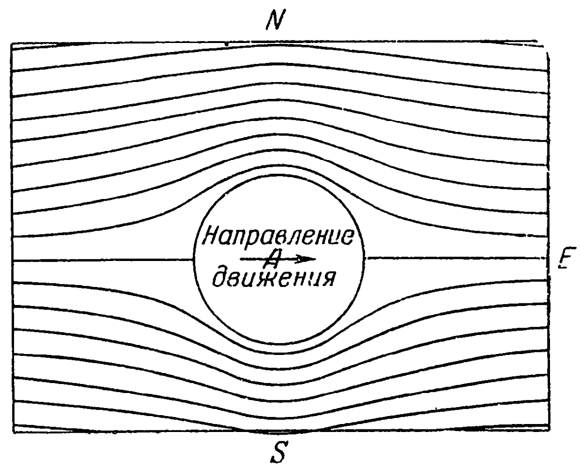


Рис. 10.

Это изменение скорости вихрей возникает благодаря внутренним эффектам изменения формы и не зависит от действия внешних электродвижущих сил. Если, следовательно, изменения скорости тормозятся или внезапно прекращаются, то возникают электродвижущие силы, потому что каждый вихрь будет давить на окружающие частички в том направлении, в котором он стремится изменять свое движение.

Пусть A на рис. 10 представляет сечение вертикального провода, движущегося в направлении стрелки с запада на восток через систему магнитных силовых линий, идущих с юга на север (рис. 11).

Изогнутые линии на рис. 10 представляют линии тока жидкой среды около провода, причем провод рассматривается как неподвижный, а жидкость как движущаяся относительно провода. Очевидно, что с помощью этого рисунка мы можем проследить изменение формы элемента жидкости, поскольку форма элемента зависит не от абсолютного движения всей системы, но от относительного движения ее частей.

Впереди провода, т. е. на его восточной стороне, по мере приближения проволоки к каждой части [элементу объема] среды эта часть все более и более сжимается в направлении от востока к западу и растягивается в направлении от севера к югу. Так как оси

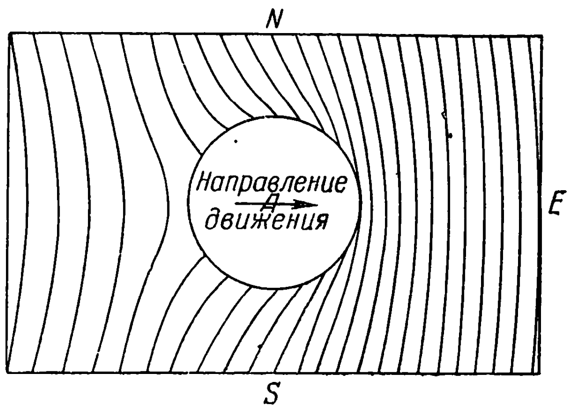


Рис. 11.

вихрей лежат в направлении север—юг, их скорости будут непрестанно расти согласно предложению X, если только этому не помешают электродвижущие силы, действующие на окружность каждого вихря.

Будем считать электродвижущую силу положительной, когда вихри стремятся двигать находящиеся между ними частицы вверх перпендикулярно к плоскости рисунка. Если мы смотрим на вихри с юга на север, то они представляются вращающимися по часовой стрелке, так что каждый вихрь движется вверх по западной стороне и вниз по восточной стороне. Следовательно, впереди провода, где каждый вихрь стремится увеличить свою скорость, электродвижущая сила, направленная вверх, должна быть большей на его западной, чем на его восточной стороне. Там, следовательно, имеет место постоянное увеличение направленной вверх электродвижущей силы от удаленных точек востока, где она равна нулю, до лобовой стороны движущегося провода, где сила, действующая вверх, будет наибольшей.

За проводом имеет место другое явление. Так как провод удаляется от последовательно расположенных частей среды, эти части расширяются по направлению от востока к западу и сжимаются по направлению от севера к югу, что приводит к уменьшению скорости вихрей и к образованию направленной вверх электродвижущей силы, которая больше на восточной, чем на западной стороне каждого вихря. Направленная вверх электродвижущая сила поэтому будет непрерывно увеличиваться от очень удаленных точек запада, где она равна нулю, до задней стороны движущегося провода, где она будет наибольшей. Отсюда вытекает, что на вертикальный провод, движущийся на восток, будет действовать электродвижущая сила, стремящаяся произвести в ней направленный вверх ток. Если провод не является частью замкнутой цепи, то никакого тока произведено не будет и магнитные силы не будут изменены; но если такая цепь существует, там возникнет ток, причем расположение магнитных силовых линий и скорости вихрей будут отличаться от того состояния, в котором они находились до начала движения провода. Изменение силовых линий показано на рис. 11. Вихри, находящиеся впереди провода, увеличивают свою скорость, в то время как вихри, находящиеся за проволокой, имеют уменьшенную скорость, а вихри, находящиеся по бокам, изменяют направление своих осей; таким образом, конечным результатом является сила сопротивления движению провода.

Повторим кратко теперь сделанные нами допущения и полученные результаты.

(1) Магнитно-электрические явления порождаются средой, находящейся в известном состоянии движения

или давления в каждой части магнитного поля, но отнюдь не непосредственным взаимодействием на расстоянии магнитов или электрических токов. Субстанция, производящая эти эффекты, может быть некоторой частью обычного вещества или она может быть эфиром, связанным с веществом. Ее плотность—наибольшая в железе и наименьшая в диамагнитных веществах; но во всех случаях за исключением железа [также никеля, кобальта и др.] она должна быть весьма мала, так как магнитная индуктивная емкость большинства веществ не отличается заметно от магнитной индуктивной емкости того, что мы называем вакуумом.

(2) В каждой части поля, через которое проходят магнитные силовые линии, имеет место состояние не равного в различных направлениях давления, причем направление силовой линии является направлением наименьшего давления, так что силовые линии могут рассматриваться как направления натяжения [налагающегося на давление].

(3) Неравенство давления обусловлено существованием в среде вихрей или водоворотов, оси которых расположены в направлении силовых линий и направления вращения которых определяются направлением силовых линий.

Мы предположили, что это направление является направлением движения по часовой стрелке для наблюдателя, смотрящего с юга на север. Мы могли бы с равным правом избрать обратное направление, поскольку речь идет об известных фактах, считая смоляное электричество положительным, вместо того, чтобы считать положительным стеклянное электричество. Действие этих вихрей зависит от их плотности и от их скорости по окружности и не зависит от их диаметра. Плотность должна быть пропорциональной емкости субстанции в отношении магнитной индукции, принимая плотность вихрей в воздухе равной единице. Скорость должна быть очень значительной для того, чтобы производить столь мощные эффекты в среде ничтожной плотности. Размер вихрей неопределенный, но он, повидимому, весьма мал по сравнению с размерами целой молекулы обычной материи *).

(4) Между вихрями находятся одиночные слои круглых частичек, так что образуется система ячеек, которые отделены друг от друга слоями частиц и вещество каждой ячейки может вращаться, как вихрь.

(5) Частицы, образующие слои, находятся в *соприкосновении качения* (без трения и скольжения) с обоими вихрями, которые они разделяют. Они могут совершенно свободно катиться между вихрями и, таким образом, изменять свое местоположение при условии, что они остаются в пределах *одной целой молекулы* среды. Переходя, однако, из одной молекулы в другую, они испытывают сопротивление и порождают нерегулярные движения, которые проявляют себя в качестве тепла. Эти частицы в нашей теории играют роль электричества. Их поступательное движение составляет электрический ток, их вращение служит для передачи движения вихрей от одной части поля к другой; возникающие при этом тангенциальные давления выражают электродвижущую силу. Представление о частицах, которые, соприкасаясь со сторонами вихрей, катятся без скольжения, не может показаться удовлетворительным. Я не выставляю эту концепцию как истинное отображение связей, существующих в действительности, и даже в качестве гипотезы о сущности электричества. Этот способ связи, однако, механически мыслим, и он легко может быть исследован и приспособлен к выявлению действительных механических отношений между известными электромагнитными явлениями. Я осмеливаюсь поэтому утверждать, что всякий, кто понимает предварительный и временный характер этой гипотезы, найдет, что

*) Вращательный момент системы вихрей зависит от их среднего диаметра, так что если бы диаметр был не столь мал, мы могли ожидать, что магнит вел бы себя так, как если бы он содержал внутри себя вращающееся тело. Существование такого вращения могло бы быть обнаружено опытами по свободному вращению магнита. Я делал опыты с целью исследования этого вопроса, но еще не полностью проверил аппарат ([15]).

она ему скорее помогает, чем мешает в его поисках истинного истолкования явлений [44].

Действие между вихрями и слоями частичек в некоторой части является тангенциальным, так что если бы было какое-нибудь скольжение или относительное движение между соприкасающимися частями, тогда была бы потеря энергии в силовых линиях и постепенное превращение этой энергии в тепло. Мы знаем, однако, что силовые линии около магнита существуют в течение неограниченного времени без какого-либо расхода энергии. Отсюда мы должны заключить, что там, где имеет место тангенциальное действие между различными частями среды, нет скольжения между этими частями. Мы должны, следовательно, допустить, что вихри и частицы катятся без скольжения и что внутренние слои каждого вихря получают присущую им скорость от наружных слоев без скольжения, иначе говоря, что угловая скорость должна быть одной и той же во всем вихре [45].

Единственный процесс, в котором электромагнитная энергия теряется и превращается в тепло, заключается в переходе электричества от одной молекулы к другой. Во всех прочих случаях энергия вихрей может быть уменьшена только в том случае, если магнитным действием производится эквивалентное количество механической работы.

(6) Действие электрического тока на окружающую среду заключается в том, что он приводит вихри, находящиеся в контакте с током, во вращательное движение, так что части, близко расположенные к току, движутся в том же направлении, что и ток, а части, находящиеся дальше от тока, будут вращаться в противоположном направлении. Если среда является проводником электричества, так что промежуточные частицы могут свободно двигаться в любом направлении, то частицы, касающиеся внешней стороны этих вихрей, будут двигаться в направлении, противоположном направлению тока; таким образом, возникает индуктированный ток в направлении, противоположном первичному току.

Если бы не было сопротивления движению частиц, наведенный ток был бы равен и противоположен первичному току и продолжался до тех пор, пока длится первичный ток; таким образом, это исключило бы всякое действие первичного тока на расстоянии. Если имеется сопротивление наведенному току, его частицы действуют на вихри, находящиеся за ними, и передают им вращательное движение до тех пор, пока, наконец, все вихри в среде приводятся в движение с такими скоростями вращения, что частицы между ними не имеют никакого другого движения, кроме вращательного, и не образуют поэтому токов.

При передаче движения от одного вихря к другому возникает сила между частицами и вихрями, которая сдавливает частицы в одном направлении, а вихри в противоположном. Силу, действующую на частицы, мы называем электродвижущей силой. Реакция на вихри равна и противоположна ей, так что электродвижущая сила не может переместить какую-либо часть среды как целое, она может только производить токи. Когда первичный ток прерывается, все электродвижущие силы действуют в обратном направлении.

(7) Когда электрический ток или магнит движется вблизи проводника, то вследствие этого движения скорость вращения вихрей в каждой части поля изменяется. Сила, с которой надлежащее количество вращения передается каждому вихрю, в этом случае представляет собой также электродвижущую силу, и она может возбудить электрический ток в замкнутой цепи.

(8) Если проводник движется в магнитном поле, то возбуждается движение вихрей и внутри них и на периферии, причем происходят изменения их формы. Сила, которая вызывает эти изменения формы, представляет электродвижущую силу, действующую на перемещающийся проводник; вычислениями мы находили, что величина ее соответствует данным эксперимента.

Мы показали, каким образом электромагнитные явления могут быть представлены воображаемой системой молекулярных вихрей. Те, кто склоняется к принятию гипотезы такого рода, найдут здесь условия, которые должны быть выполнены для того, чтобы придать ей математическую последовательность и установить насколько возможно удовлетворительное сравнение между вытекающими из нее следствиями и известными фактами. Но кто ищет объяснения фактов на другом пути, те имеют возможность сравнить эту теорию с теорией токов, свободно циркулирующих в телах, теорией, предполагающей, что электричество действует на расстоянии с силой, зависящей от скорости и, следовательно, не подчиняющейся закону сохранения энергии [46].

Факты электромагнетизма так сложны и разнообразны, что объяснение какого-нибудь числа их несколькими различными гипотезами должно представлять интерес не только для физиков, но и для всех, кто хочет понять, в какой мере подходящее объяснение данных явлений служит признаком истинности теории или в какой мере мы должны рассматривать совпадение математического выражения двух рядов явлений в качестве указания на то, что эти явления—одного и того же рода. Мы знаем, что частичные совпадения такого рода были обнаружены, и тот факт, что эти совпадения только частичны, подтверждается расхождением законов двух рядов явлений в других отношениях. В процессе дальнейшего развития физики мы можем встретиться со случаями более полного совпадения, которые потребуют длительных исследований для вскрытия существенных различий (16).

Примечание. После того как была написана первая часть этой работы, я в Crelle's Journal за 1858 год*) увидел статью профессора Гельмгольца о движении жидкости. В этой статье он устанавливает, что линии тока в жидкости распределяются сообразно тем же самым законам, как магнитные силовые линии, причем линия электрического тока соответствует осевой линии элементов объемов жидкости, которые находятся в состоянии вращения. Это—дополнительный пример *физической аналогии*, исследование которой может служить выяснению одновременно двух рядов явлений—электромагнетизма и гидродинамики (17).

---

*) Crelle's Journal, 55, стр. 25, 1858.

ЧАСТЬ III

ТЕОРИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ВИХРЕЙ В ПРИМЕНЕНИИ К СТАТИЧЕСКОМУ ЭЛЕКТРИЧЕСТВУ *)

В первой части этой работы я показал, как на основе гипотезы о том, что магнитное поле наполнено бесчисленными вихрями вращающейся материи, оси которых совпадают с направлением магнитной силы в каждой точке поля, могут быть объяснены силы, действующие между магнитами, электрическими токами и телами, способными быть индуктивно намагниченными.

Центробежная сила этих вихрей производит давление, распределенное таким образом, что конечным эффектом является сила, совпадающая по направлению и величине с той, которую мы наблюдаем.

Во второй части моей работы я описал механизм, при помощи которого эти вращения могут сосуществовать и быть распределенными сообразно известным законам магнитных силовых линий.

Я предполагал, что вращающаяся материя содержится в ячейках, отделенных одна от другой стенками, состоящими из частиц, весьма малых по сравнению с ячейками. В результате движений этих частиц и их тангенциального воздействия на вещество ячеек вращательное движение передается от одной ячейки к другой.

Я не пытался дать объяснение этому тангенциальному действию. Но чтобы понять передачу вращения

*) Phil. Mag., т. XXIII, стр. 12—24.

от внешней к внутренним частям каждой ячейки, необходимо предположить, что субстанция в ячейках обладает упругостью формы, хотя и различной по степени, но аналогичной упругости, наблюдаемой в твердых телах.

Волновая теория света требует от нас допущения такого рода упругости в светоносной среде для объяснения поперечности световых колебаний. Мы, следовательно, не должны удивляться, если магнитоэлектрическая среда обладает тем же свойством.

Согласно нашей теории частицы, которые отделяют друг от друга ячейки, представляют собой материю электричества. Движение этих частиц образует электрический ток, тангенциальная сила, с которой на эти частицы действует материя ячеек, — это электродвижущая сила, а давление частиц одна на другую соответствует напряжению или потенциалу электричества.

Если мы теперь сумеем объяснитьт состояние тела с учетом окружающей среды, когда оно называется «заряженным» электричеством, и сможем сделать заключение о силах, действующих между наэлектризованными телами, тогда мы установим связь между всеми основными явлениями в учении об электричестве.

По опыту мы знаем, что электрическое напряжение представляет собой явление, не зависящее от того, наблюдается оно в статическом или в динамическом электричестве, так что электродвижущая сила, полученная при помощи магнетизма, может зарядить лейденскую банку, как это делается и при помощи магнитоэлектрической машины.

Когда в различных частях одного и того же тела существует различие напряжений, электричество переходит или стремится переходить от мест с бо́льшим напряжением к местам с меньшим напряжением. Если тело является проводником, то проходит ток, который при условии поддержания разности напряжений течет со скоростью, обратно пропорциональной сопротивлению или прямо пропорциональной проводимости тела.

Электрическое сопротивление имеет очень большой диапазон значений, причем сопротивление металлов наименьшее, а сопротивление, например, стекла настолько велико, что заряд электричества сохраняется (согласно профессору В. Томсону) в стеклянном сосуде в течение ряда лет, не проникая через толщу стекла.

Тела, которые не дают электрическому току проходить через них, называются изоляторами. Но хотя электричество через них не течет, все же электрические действия распространяются по этим телам. Характер этих действий зависит от природы тела, так что одинаково хорошие изоляторы могут в качестве диэлектриков вести себя совершенно различно *).

Таким образом, мы имеем два независимых качества тел: одно, благодаря которому они не допускают прохождения через них электричества, и другое, вследствие которого они позволяют электрическому действию передаваться через них без того, чтобы какой-либо электрический ток проходил через них. Проводящее тело может быть сравнено с пористой мембраной, которая представляет большее или меньшее сопротивление прохождению жидкости, диэлектрик же похож на упругую мембрану, которая непроницаема для жидкости, но передает давление от жидкости, находящейся на одной ее стороне, жидкости, находящейся на другой стороне ([18]).

Поскольку электродвижущая сила действует на проводник, она производит ток; встречая сопротивление, этот ток вызывает непрерывное преобразование электрической энергии в тепло; последнее, однако, не может быть превращено снова в электрическую энергию путем какого-либо обращения этого процесса.

Электродвижущая сила, действующая на диэлектрик, порождает состояние поляризации его частей, аналогичное по своему характеру поляризации частиц железа под влиянием магнита **); подобно магнитной

*) Faraday, «Exp. Res.», серия XI (см. русс. изд.)

**) См. Mossotti, «Discussione Analitica», Memoria della Soc. Italiana (Modena), т. XXIV, часть 2, стр. 49.

поляризации, поляризация диэлектрика может быть описана как состояние, при котором каждая частица имеет два разноименных полюса.

Мы можем полагать, что в диэлектрике, находящемся под действием индукции, электричество в каждой молекуле смещено так, что одна сторона молекулы становится наэлектризованной положительно, а другая отрицательно, но что электричество остается полностью связанным с молекулой и не переходит от одной молекулы к другой.

Результат этого действия на всю массу диэлектрика выражается в образовании общего смещения электричества в определенном направлении. Это смещение не представляет собой настоящего тока, потому что, достигнув определенной величины, оно остается постоянным. Но это есть начало тока, и изменения смещения образуют токи в положительном или отрицательном направлении в зависимости от того, увеличивается ли смещение или уменьшается. Величина смещения зависит от природы тела и от электродвижущей силы, так что если h есть смещение, R — электродвижущая сила, E—коэффициент, зависящий от природы диэлектрика, то $R = -4\pi E^2 h$; и если r есть значение электрического тока, возникающего вследствие смещения, то (19)

$$r = \frac{dh}{dt}.$$

Эти соотношения не зависят от какой-либо теории, касающейся внутреннего механизма диэлектриков. Но когда мы находим, что электродвижущая сила производит электрическое смещение в диэлектрике, и устанавливаем, что диэлектрик возвращается из своего состояния электрического смещения в первоначальное под действием равной электродвижущей силы, тогда естественно приходит на ум аналогия упругого тела, уступающего давлению и затем принимающего первоначальную форму, после того как давление устранено.

Согласно нашей гипотезе магнитная среда разделена на ячейки, отделенные друг от друга слоями частиц, играющих роль электричества. Когда электрические частицы толкаются в каком-либо направлении, они вследствие их тангенциального действия на упругое вещество ячеек деформируют каждую ячейку и вызывают равную и обратную силу, обусловленную упругостью ячеек. Когда сила, действующая на частицы, устраняется, ячейки приобретают прежнюю свою форму и электрические частицы возвращаются к своему прежнему положению.

В нижеприводимом исследовании я рассматриваю соотношение между смещением и производящей его силой в предположении, что ячейки имеют сферическую форму. Повидимому, действительная форма ячеек не отличается от сферической настолько, чтобы это могло обусловить большую разницу в численных результатах.

Из этих результатов я выведу соотношение между статическими и динамическими мерами электричества и путем сравнения электромагнитных опытов Кольрауша и Вебера с найденным Физо значением скорости света покажу, что упругость передающей магнетизм среды в воздухе равна упругости светового эфира, если только эти две сосуществующие, одинаково распространенные и равно упругие среды не представляют в действительности одну и ту же среду ([20]).

В предложении XV также будет показано, что притяжение между двумя наэлектризованными телами пропорционально величине E^2 и что вследствие этого оно должно бы быть меньшим в скипидаре, чем в воздухе, если количество электричества в каждом из тел остается тем же самым. Если же, напротив, *потенциалы* двух тел даны, то притяжение между ними меняется обратно пропорционально E^2 и будет бо́льшим в скипидаре, чем в воздухе.

Предложение XII. Найти условия равновесия упругой сферы, поверхность которой подвержена действию нормальных и тангенциальных сил, если тангенциальные силы пропорциональны синусам углового расстояния от данной точки сферы.

Пусть ось z будет осью сферических координат. Пусть ξ, η, ζ будут составляющие смещения какой-нибудь частицы сферы в направлениях x, y, z. Пусть p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} будут нормальные упругие силы в направлении осей координат и пусть p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} будут напряжения упругой деформации [изгиба, кручения] в плоскостях yz, zx и xy. Пусть μ будет коэффициент объемной упругости [сжатия], так что если

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p,$$

то

$$p = \mu\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right). \tag{80}$$

Пусть, далее, m будет коэффициентом кручения, так что

$$p_{xx} - p_{yy} = m\left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy}\right) \text{ и т. д.} \tag{81}$$

Тогда для изотропной сферы мы имеем следующие уравнения упругости:

$$p_{xx} = \left(\mu - \frac{1}{3}m\right)\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) + m\frac{d\xi}{dx}, \tag{82}$$

$$p_{yz} = \frac{m}{2}\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\xi}{dy}\right) \tag{83}$$

с подобными же уравнениями для y и z [47].

Предположим теперь, что рассматриваемая сфера имеет радиус, равный a, и что

$$\xi = exz, \quad \eta = ezy, \quad \zeta = f(x^2 + y^2) + gz^2 + d. \tag{84}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e+g)z + mez = p_{yy}, \\ p_{zz} &= 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e+g)z + 2mgz, \\ p_{yz} &= \frac{m}{2}(e+2f)y, \\ p_{zx} &= \frac{m}{2}(e+2f)x, \\ p_{xy} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Условием равновесия для сил, действующих в направлении z на внутренний элемент объема, будет уравнение

$$\frac{d}{dx}p_{zx}+\frac{d}{dy}p_{yz}+\frac{d}{dz}p_{zz}=0, \tag{86}$$

которое в нашем случае удовлетворяется, если

$$m(e+2f+2g)+2\left(\mu-\frac{1}{3}m\right)(e+g)=0. \tag{87}$$

Тангенциальная сила на поверхности сферы, радиус которого есть a, на угловом расстоянии θ от оси z, действующая в плоскости xz, будет [48]:

$$T=(p_{xx}-p_{zz})\sin\theta\cos\theta+p_{xz}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)= \tag{88}$$

$$=2m(e+f-g)\,a\sin\vartheta\cos^2\vartheta-\frac{ma}{2}(e+2f)\sin\vartheta. \tag{89}$$

Для того чтобы T могло быть пропорциональным синусу угла θ, первый член должен исчезнуть, и отсюда

$$g=e+f, \tag{90}$$

$$T=-\frac{ma}{2}(e+2f)\sin\theta. \tag{91}$$

Нормальное натяжение на поверхности в какой-нибудь точке есть:

$$N=p_{xx}\sin^2\theta+p_{zz}\cos^2\theta+2p_{xz}\sin\theta\cos\theta=$$

$$=2\left(\mu-\frac{1}{3}m\right)(e+g)\,a\cos\theta+$$

$$+2ma\cos\theta\,[(e+f)\sin^2\theta+g\cos^2\theta] \tag{92}$$

или согласно (87) и (90)

$$N=-ma(e+2f)\cos\theta. \tag{93}$$

Тангенциальное смещение в какой-нибудь точке есть:

$$t=\xi\cos\theta-\zeta\sin\theta=-(a^2f+d)\sin\theta. \tag{94}$$

Нормальное смещение будет:

$$\eta=\xi\sin\theta+\zeta\cos\theta=[a^2(e+f)+d]\cos\theta. \tag{95}$$

Если мы положим:

$$a^2(e+f)+d=0, \tag{96}$$

то смещений по нормали не будет, все смещения будут тангенциальными и мы должны иметь:

$$t=a^2 e \sin\theta. \tag{97}$$

Полная работа, произведенная поверхностными силами, будет:

$$U=\frac{1}{2}\sum (Tt)\,dS,$$

причем суммирование распространяется на всю поверхность сферы. Энергия упругости вещества сферы есть:

$$U=\frac{1}{2}\sum\left[\frac{d\xi}{dx}p_{xx}+\frac{d\eta}{dy}p_{yy}+\frac{d\zeta}{dz}p_{zz}+\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)p_{yz}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)p_{zx}+\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)p_{xy}\right]dV, \quad [97a]$$

причем суммирование распространяется на весь объем сферы.

Как и должно быть, обе эти величины имеют одно и то же значение, именно:

$$U=-\frac{2}{3}\pi a^5 me\,(e+2f). \tag{98}$$

Мы теперь можем предположить, что тангенциальное действие на поверхности возникает от слоя частиц, находящихся в контакте с поверхностью, причем частицы в результате взаимного давления действуют на поверхности тех двух ячеек, с которыми они находятся в соприкосновении.

Мы выбираем в качестве оси z направление максимального изменения давления на частицы и хотим вычислить отношение между электродвижущей силой R, действующей на частицы в этом направлении, и сопровождающим это действие электрическим смещением h.

Предложение XIII. Найти отношение между электродвижущей силой и электрическим смещением, когда постоянная электродвижущая сила R действует параллельно оси z.

Возьмем какой-нибудь элемент поверхности δS, покрытый слоем частиц, плотность которого равна ρ, и пусть нормаль к элементу δS образует угол θ с осью z; тогда тангенциальная сила, действуюшая на слой δS, будет:

$$\rho R \delta S \sin\theta = 2T\delta S, \tag{99}$$

причем T, как и раньше, является тангенциальной силой, действующей на каждой стороне поверхностного слоя [49]. Подставив $\rho = \frac{1}{2\pi}$, как в уравнении (34), мы находим:

$$R = -2\pi m a (e + 2f). \tag{100}$$

Смещение электричества, обусловленное изменением формы сферы, есть:

$$\sum \delta S \frac{1}{2} \rho t \sin\theta, \tag{101}$$

где суммирование должно быть распространено на всю поверхность сферы.

Если h есть электрическое смещение на единицу объема, мы будем иметь:

$$\frac{4}{3} \pi a^3 h = \frac{2}{3} a^4 e \tag{102}$$

или [50]

$$h = \frac{1}{2\pi} a e, \tag{103}$$

так что

$$R = 4\pi^2 m \frac{e+2f}{e} h, \tag{104}$$

что мы можем написать еще так:

$$R = -4\pi E^2 h, \tag{105}$$

полагая

$$E^2 = -\pi m \frac{e+2f}{e} \tag{106}$$

или на основании уравнений (87) и (90)

$$E^2 = \pi m \frac{3}{1+\frac{5m}{3\mu}} . \tag{107}$$

Отношение m к μ различно в различных веществах; но в среде, упругость которой зависит исключительно от сил, действующих между парами частиц, это отношение равно $6:5$ и в этом случае

$$E^2 = \pi m. \tag{108}$$

Когда сопротивление всестороннему сжатию гораздо больше, чем сопротивление упругой деформации [изгиба, кручения], как, например, в жидкости, которая сделана слегка упругой при посредстве добавления клея или желе, тогда

$$E^2 = 3\pi m. \tag{109}$$

Значение E^2 должно лежать между этими крайними пределами [51]. Вероятно, что субстанция наших ячеек принадлежит к первому роду и что мы должны применить первое из значений E^2, присущее гипотетическому «абсолютно» твердому телу *), в котором

$$5m = 6\mu, \tag{110}$$

так что мы должны пользоваться уравнением (108).

Предложение XIV. Видоизменить уравнения (9) электрических токов, учитывая действие, обусловленное упругостью среды.

Мы видели, что электродвижущая сила и электрическое смещение связаны уравнением (105). Дифференцируя это уравнение по t, мы находим:

$$\frac{dR}{dt} = -4\pi E^2 \frac{dh}{dt} . \tag{111}$$

*) См. Rankine, «On Elasticity», Cambr. and Dubl. Math. Journ., 1851.

Это уравнение показывает, что каждое изменение электродвижущей силы связано с изменением электрического смещения. Но изменение смещения эквивалентно току, следовательно, этот ток должен быть принят во внимание в уравнениях (9) и прибавлен к z. Тогда три уравнения (9) принимают следующую форму [52]:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}-\frac{1}{E^2}\frac{dP}{dt}\right), \\ q &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}-\frac{1}{E^2}\frac{dQ}{dt}\right), \\ r &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}-\frac{1}{E^2}\frac{dR}{dt}\right), \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

где p, q, r — составляющие плотности электрического тока в направлениях x, y, z, α, β, γ — составляющие магнитной силы, а P, Q, R — составляющие электродвижущей силы (21). Если e — количество свободного электричества в единице объема, уравнение непрерывности запишется следующим образом:

$$\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}+\frac{de}{dt}=0. \tag{113}$$

Дифференцируя (112) соответственно по x, y и z и подставляя в уравнение (113), мы находим:

$$\frac{de}{dt}=\frac{1}{4\pi E^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}\right), \tag{114}$$

откуда

$$e=\frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}\right); \tag{115}$$

постоянную полагаем равной нулю, так как всегда в отсутствии электрических сил $e=0$ [53] (22).

Предложение XV. Найти силу, действующую между двумя наэлектризованными телами.

Энергия, возникающая в среде вследствие электрических смещений, выражается в виде

$$U = -\sum \frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh)\,\delta V, \tag{116}$$

где P, Q, R суть составляющие силы, а f, g, h — составляющие смещения. Если нет движения тел или изменения сил, из уравнений (77) вытекает, что

$$P = -\frac{d\Psi}{dx}, \quad Q = -\frac{d\Psi}{dy}, \quad R = -\frac{d\Psi}{dz}; \tag{117}$$

но мы знаем (согласно (105)), что

$$P = -4\pi E^2 f, \quad Q = -4\pi E^2 g, \quad R = -4\pi E^2 h, \tag{118}$$

откуда

$$U = \frac{1}{8\pi E^2}\sum\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]\delta V. \tag{119}$$

Интеграцию произведем по всему пространству. Интегрируя по частям и имея в виду, что Ψ исчезает на бесконечности, получим:

$$U = -\frac{1}{8\pi E^2}\sum \Psi\left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2}\right)\delta V, \tag{120}$$

или согласно (115)

$$U = \frac{1}{2}\sum(\Psi e)\,\delta V. \tag{121}$$

Пусть теперь мы имеем два наэлектризованных тела, причем e_1 — плотность электричества в первом теле, а Ψ_1 — электрическое напряжение, обусловленное им, и пусть

$$e_1 = \frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \frac{d^2\Psi_1}{dy^2} + \frac{d^2\Psi_1}{dz^2}\right). \tag{122}$$

Пусть e_2 будет плотность электричества во втором теле, а Ψ_2 — обусловленное им напряжение. Тогда полное напряжение в какой-нибудь точке будет $\Psi_1 + \Psi_2$, а выражение для U:

$$U = \frac{1}{2}\sum(\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \Psi_1 e_2 + \Psi_2 e_1)\,\delta V. \tag{123}$$

Пусть тело, плотность электричества в котором есть e_1, движется каким-нибудь образом, причем его заряд передвигается вместе с ним. Тогда, поскольку распределение напряжения Ψ_1 перемещается вместе с телом, значение произведения $\Psi_1 e_1$ не изменяется.

Произведение $\Psi_2 e_2$ тоже остается неизменным, и Грин показал (Essay on Electricity, стр. 10), что $\Psi_1 e_2 = \Psi_2 e_1$, так что работа, совершенная против электрических сил движущимся телом, будет:

$$W = \delta U = \delta\Sigma\,(\Psi_2 e_1)\,\delta V, \tag{124}$$

и если e_1 относится к малому телу, то

$$W = e_1 \delta \Psi_2 \tag{125}$$

или

$$F\,dr = e_1 \frac{d\Psi_2}{dr}\,dr, \tag{126}$$

где F есть сопротивление, dr — перемещение.

Если тело e_2 мало, тогда (если r есть расстояние от c_2) уравнение (122) дает [54]

$$\Psi_2 = E^2 \frac{e_2}{r},$$

откуда

$$F = -E^2 \frac{e_1 e_2}{r^2}, \tag{127}$$

т. е. сила есть отталкивание, изменяющееся обратно пропорционально квадрату расстояния.

Пусть теперь η_1 и η_2 будут теми же самыми количествами электричества, измеренными статически [55]; тогда по определению электрических количеств или масс

$$F = -\frac{\eta_1 \eta_2}{r^2}. \tag{128}$$

Это соотношение будет удовлетворено при условии

$$\eta_1 = E e_1 \quad \text{и} \quad \eta_2 = E e_2. \tag{129}$$

Таким образом, величина E, ранее определенная в предложении XIII, есть коэффициент, на который должно быть умножено выраженное в магнитных единицах количество электричества, чтобы получить число, выражающее то же самое количество электричества в электростатических единицах.

Электромагнитной единицей силы тока будет сила такого тока, который, циркулируя вдоль кольцевого контура с площадью, равной единице, производит то же самое действие на удаленный от него магнит, какое производил бы магнит единичной силы и длины, помещенный перпендикулярно к плоскости кольца ([23]).

При таком токе E электростатических единиц электричества пересекают сечение цепи в одну секунду, а эти единицы таковы, что, помещенные на единицу расстояния, они отталкивают одна другую с силой, равной единице.

Мы можем предположить, во-первых, что E единиц положительного электричества движется в положительном направлении через проволоку или, во-вторых, что E единиц отрицательного электричества движется в отрицательном направлении, или, наконец, в-третьих, что $\frac{1}{2}E$ единиц положительного электричества движется в положительном направлении, а $\frac{1}{2}E$ единиц отрицательного электричества одновременно движется в отрицательном направлении.

Последнее есть то предположение, исходя из которого Вебер и Кольрауш*) нашли

$$\frac{1}{2}E = 155\,370\,000\,000, \tag{130}$$

где единица длины — миллиметр, а единица времени — секунда. Отсюда

$$E = 310\,740\,000\,000. \tag{131}$$

*) Abhandlungen der König. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., т. III, стр. 260, 1857.

Предложение XVI. Найти скорость распространения поперечных колебаний через упругую среду, из которой состоят ячейки, в предположении, что ее упругость целиком обусловлена силами, действующими между парами материальных точек.

Обычными методами теории упругости находят, что

$$V=\sqrt{\frac{m}{\rho}}, \tag{132}$$

где m есть коэффициент упругости изгиба и ρ — плотность. Сравнивая с формулами первой части, мы видим, что если ρ — плотность материи вихрей, а μ — «коэффициент магнитной индукции», то имеет место равенство [56]

$$\mu=\pi\rho, \tag{133}$$

откуда

$$\pi m=V^2\mu, \tag{134}$$

и согласно (108)

$$E=V\sqrt{\mu}. \tag{135}$$

В воздухе или вакууме $\mu=1$, отсюда

$$V=E=310\,740\,000\,000 \text{ миллиметров в секунду} = 193\,088 \text{ англ. миль в секунду}. \tag{136}$$

Скорость света в воздухе по определению Физо *) равна 70 843 лиги **) в секунду (25 лиг на один градус), что дает

$$V=314\,858\,000\,000 \text{ миллиметров в секунду} = 195\,647 \text{ англ. миль в секунду}. \tag{137}$$

---

*) Comptes rendus, т. XXIX, стр. 90 (1849). По «Manual of Astronomy» Галбрэйта и Хоутона (Galbraith and Haughton) результат Физо установлен в 169 944 географические мили по 1000 фатомов каждая [fathom — шестифутовая мера], что дает 193 118 англ. миль; значение, выведенное из аберрации, равно 192 000 англ. миль.

**) Лига — французская миля. (*Ред.*)

Скорость поперечных волновых колебаний в нашей гипотетической среде, вычисленная из электромагнитных опытов Кольрауша и Вебера [57], столь точно совпадает со скоростью света, вычисленной из оптических опытов Физо, что мы едва ли можем отказаться от вывода, что *свет состоит из поперечных колебаний той же самой среды, которая является причиной электрических и магнитных явлений* (24).

Предложение XVII. Найти электрическую емкость лейденской банки, составленной из какого-нибудь диэлектрика, помещенного между двумя проводящими поверхностями.

Пусть электрические напряжения или потенциалы двух поверхностей будут Ψ_1 и Ψ_2. Пусть S будет площадь каждой поверхности, θ — расстояние между ними и пусть e и $-e$ — количества электричества на каждой поверхности. Тогда емкость будет:

$$C = \frac{e}{\Psi_1 - \Psi_2}. \tag{138}$$

Внутри диэлектрика мы имеем на единицу длины изменение Ψ, перпендикулярное к поверхности, равное $\frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\theta}$. В пределах каждой из поверхностей изменение равно нулю. Отсюда согласно формуле (115) для поверхности [58] количество электричества на единице площади будет:

$$\frac{\Psi_1 - \Psi_2}{4\pi E^2 \theta}, \tag{139}$$

что дает для полной емкости величину

$$C = \frac{S}{4\pi E^2 \theta}. \tag{140}$$

Таким образом, количество электричества, потребное для того, чтобы довести одну из поверхностей до данного потенциала *), прямо пропорционально площади поверхности и обратно пропорционально толщине диэлектрика и квадрату величины E.

---

*) Подразумевается, что вторая поверхность заряжается тем же самым количеством электричества. (*Ред.*)

Теперь коэффициент индукции диэлектриков выводится из емкости составленного из них индукционного аппарата; этот коэффициент D обратно пропорционален E^2 и равен единице для воздуха. Отсюда согласно (135) следует

$$D=\frac{V^2}{V_1^2\mu}, \tag{141}$$

где V и V_1 — скорости света в воздухе и в диэлектрике.

Если теперь i есть показатель преломления, то $\frac{V}{V_1}=i$ и

$$D=\frac{i^2}{\mu}. \tag{142}$$

Таким образом, индуктивная емкость диэлектрика прямо пропорциональна квадрату показателя преломления и обратно пропорциональна магнитной индуктивной емкости [магнитной проницаемости].

В веществе оптические, электрические и магнитные явления могут испытывать различной степени влияния со стороны частичек вещества; их способ расположения может изменять эти явления различно в различных направлениях. Оси оптических и электрических и магнитных свойств, повидимому, совпадают, но, учитывая неизвестную и, повидимому, сложную природу реакций весомых частиц на эфирную среду, едва ли возможно будет открыть какие-либо общие числовые соотношения между величинами, характеризующими оптические, электрические и магнитные свойства этих осей.

Весьма вероятно, что величина E для каждой данной оси зависит от скорости света, колебания которого параллельны этой оси или плоскость поляризации которого перпендикулярна к оси [59]. В одноосных кристаллах аксиальное значение E будет зависеть от скорости необыкновенного луча, а экваториальное значение от скорости обыкновенного луча. В «положительных» кристаллах аксиальное значение E будет наименьшим, а в отрицательных — наибольшим.

Значение D, которое обратно пропорционально величине E^2, будет при прочих равных условиях наибольшим для аксиального направления в положительных кристаллах и для экваториального направления в отрицательных кристаллах, как, например, в исландском шпате. Если шар радиуса d, вырезанный из кристалла, подвесить в электрическом поле, которое будет действовать на единицу электричества с силой, равной единице, если D_1 и D_2 — коэффициенты диэлектрической индукции вдоль двух главных осей, лежащих в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, тогда, если θ — наклон одной из осей *) к направлению электрической силы, то момент, стремящийся поворачивать шар, будет:

$$\frac{3}{2}\frac{D_1-D_2}{(2D_1+1)(2D_2+1)}I^2a^3\sin 2\theta \, [^{60}], \tag{143}$$

и ось наибольшей диэлектрической индукции (D_1) будет стремиться стать параллельно электрическим силовым линиям.

*) Именно, оси, которой соответствует бо́льшая величина D_1. (*Ред.*)

ЧАСТЬ IV

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ВИХРЕЙ К ДЕЙСТВИЮ МАГНЕТИЗМА НА ПОЛЯРИЗОВАННЫЙ СВЕТ*) ([25])

Связь между распределением магнитных силовых линий и распределением электрических токов может быть полностью выражена следующими словами, а именно, что работа, совершенная при переносе единицы воображаемой магнитной материи вдоль какой-нибудь замкнутой кривой, пропорциональна количеству электричества, которое протекает сквозь поверхность, охватываемую этой замкнутой кривой. Математическая форма этого закона может быть выражена уравнениями (9), которые я здесь воспроизвожу, где α, β, γ являются компонентами магнитной интенсивности [силы поля] и p, q, r — составляющими [плотности] постоянных электрических токов:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right), \\ q &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right), \\ r &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Те же самые математические соотношения обнаруживаются в физике между другими рядами явлений.

*) Phil. Mag., т. XXIII, стр. 85—95.

(1) Если α, β, γ представляют смещения, скорости или силы, тогда p, q, r будут угловые повороты, угловые скорости или вращательные моменты пар в элементе объема среды.

(2) Если α, β, γ представляют угловые повороты в однородной и непрерывной субстанции, то p, q, r представляют относительные линейные смещения частицы по отношению к частицам, находящимся в ближайшем соседстве. Смотри работу профессора В. Томсона «О механическом представлении электрических, магнитных и гальванических сил» (Cambr. and Dubl. Math. Journ., январь 1847 г.).

(3) Если α, β, γ представляют скорости вращения вихрей, центры которых неподвижны, то p, q, r представляют скорости, с которыми перемещаются свободные частицы, помещенные между вихрями (см. вторую часть настоящей работы).

Из сказанного вытекает, что соотношение между магнетизмом и электричеством имеет ту же самую математическую форму, что и соотношение между известными парами явлений, из которых одни имеют *линейный*, а другие—*вращательный* характер.

Профессор Челлис *) предполагает, что магнетизм обусловлен токами некоей жидкости, токами, направление которых совпадает с направлением магнитных силовых линий; электрические токи по этой теории сопровождаются вращательным движением жидкости около оси тока или даже зависят от этого вращательного движения. Профессор Гельмгольц **) исследовал движение несжимаемой жидкости и ввел представление о линиях, соответствующих в каждой точке мгновенной оси вращения жидкости в этой точке. Он подчеркнул, что линии тока в жидкости распределяются относительно вихревых линий согласно тем же самым законам, что и законы, по которым магнитные силовые линии распределяются относительно электрических

*) Challis, Phil. Mag., декабрь, 1860 г.; январь и февраль 1861.

**) Helmholtz, Crelle's Journal, т. LV, стр. 25, 1858.

токов. С другой стороны, в этой работе я рассматриваю магнетизм как явление вращения, а электрические токи связанными с действительным перемещением частиц, утверждая таким образом обратное соотношение между этими двумя рядами явлений.

Теперь кажется естественным предположить, что все непосредственные следствия какой-нибудь причины, имеющей линейный характер, должны быть по существу линейными и что вращательные причины должны вызывать вращательные же действия. Поступательное движение вдоль какой-нибудь оси не может само по себе произвести вращения вокруг этой оси, если только нет специального механизма, подобного, например, винту, который связывает поступательное движение в данном направлении с вращением в определенном направлении.

Подобно этому вращение, хотя оно и может вызвать напряжение вдоль оси, не в состоянии само по себе вызвать ток вдоль какого-либо преимущественного направления.

Как известно, электрические токи связаны с эффектами перемещения по направлению тока. Они переносят электрические заряды от одного тела к другому, они перемещают ионы электролитов в противоположных направлениях; но они не могут вызвать вращения плоскости поляризации света, когда свет распространяется вдоль оси тока*). С другой стороны, магнитное состояние не характеризуется каким-либо линейным, в строгом смысле этого слова, явлением. Северный и южный полюсы отличаются только по своим названиям, и эти названия могут быть взаимно переменены без изменения формулировки законов магнитных явлений. Напротив, положительный и отрицательный полюсы батареи существенно отличаются друг от друга, ибо на каждом из полюсов выделяются различные химические элементы воды. Магнитное состояние зато характеризуется совершенно очевидным вращательным явлением, открытым

*) См. Faraday, «Exp. Res.» (951—954) и (2216—2220).

Фарадеем *), именно вращением плоскости поляризации поляризованного света, когда последний распространяется вдоль магнитной силовой линии.

Если через прозрачное диамагнитное вещество пропускается луч плоскополяризованного света и если затем при помощи магнита или электрического тока в веществе возбуждается магнитное поле, то плоскость поляризации прошедшего света изменяется и поворачивается на угол, зависящий от интенсивности магнитной силы в веществе.

Направление вращения в диамагнитных веществах то же самое, что и направление, в котором положительное электричество должно циркулировать около вещества, для того чтобы произвести в нем данную магнитную силу; если мы, например, предположим, что горизонтальная слагающая земного магнетизма есть действующая на вещество магнитная сила, то плоскость поляризации поворачивается в направлении истинного вращения земли, т. е. с запада на восток.

Для парамагнитных веществ Верде **) нашел, что плоскость поляризации поворачивается в противоположном направлении, т. е. в направлении, в котором должно было бы течь отрицательное электричество в спирали, чтобы вызвать одинаково направленное намагничивание охватываемого спиралью вещества.

В обоих случаях абсолютное направление вращения одинаково, независимо от того, проходит ли свет от севера к югу или от юга к северу, факт, который отличает это явление от вращения, производимого кварцем, скипидаром и т. д., в которых абсолютное направление вращения изменяется, когда изменяется направление прохождения света. Вращение в последнем случае при наличии определенной оси, например в кварце, или при отсутствии таковой, например в жидкости, указывает на известную связь между

*) Faraday, «Exp. Res.», серия XIX.

**) См. Verdet, Comptes rendus, т. XLIII, стр. 529; т. XLIV, стр. 1209.

направлением луча и направлением вращения, связь, которая по форме аналогична отношению между поступательным и вращательным движениями правостороннего или левостороннего винта. Это обстоятельство указывает на некоторое свойство вещества, математическое выражение которого требует введения понятия о правовинтовом или левовинтовом вращениях, каковые, как уже известно, проявляются во внешних формах кристаллов, имеющих эти свойства. При магнитном вращении плоскости поляризации такие отношения не обнаруживаются. В данном случае направление вращения непосредственно связано с направлением магнитных силовых линий, и это, повидимому, указывает, что магнетизм действительно представляет собой явление вращения.

Перенос ионов электролитов в определенных направлениях электрическим током и вращение плоскости поляризации света в определенных направлениях под действием магнитной силы являются фактами, которые привели меня к концепции магнетизма как явления вращения и электрического тока как явления перемещения, вместо того чтобы следовать аналогии, высказанной Гельмгольцем, или принятия теории, предложенной профессором Челлис.

Теория, считающая электрические токи линейными, а магнитные силы вращательными явлениями, согласуется в этом смысле с теориями Ампера и Вебера; гипотеза о том, что магнитные вращения существуют везде, где имеется магнитная сила, что от центробежной силы этих вращений зависят магнитные притяжения и что инерция вихрей является причиной наведенных токов, поддерживается авторитетом проф. В. Томсона*). Идея разработанной в этом труде теории молекулярных вихрей возникла у меня, когда я неуклонно следовал тому направлению, в котором

*) Nichol's Cyclopœdia, статья «Magnetism, Dynamical Relations of», изд. 1860 г.; Proc. of Roy. Soc., июнь 1856 г. и июнь 1861 г., а также Phil. Mag. (1857).

исследователи искали объяснение электромагнитных явлений, приписывая их действию материальных сред.

Профессор Томсон подчеркнул, что причиной магнитного действия на свет должно быть реальное вращение, происходящее в магнитном поле. На основании опытов установлено, что правосторонний поляризованный по кругу луч света движется с различной скоростью в зависимости от того, идет ли он от севера к югу или от юга к северу, вдоль магнитной силовой линии. Какую бы теорию мы ни приняли относительно направления колебаний в плоскополяризованном свете, геометрическое расположение частей среды, через которую проходит правосторонний поляризованный по кругу луч, является в точности тем же независимо от того, движется ли луч по направлению к северу или к югу. Единственная разница состоит в том, что частицы описывают свои круги в противоположных направлениях. Так как конфигурация остается той же самой в обоих случаях, то действующие между частицами силы должны быть также одинаковыми в обоих случаях и скорость распространения, обусловленная этими силами, должна быть той же самой, если среда первоначально была в покое. Но если среда находится в состоянии вращения или как целое или в частях, содержащих молекулярные вихри, то скорость распространения поляризованного по кругу светового луча может быть различной в зависимости от того, совпадает или нет направление вращения луча с направлением вращения вихрей.

Мы должны, таким образом, исследовать, приводит ли разработанная в этом труде гипотеза о том, что магнитная сила обусловлена центробежной силой малых вихрей и что эти вихри состоят из той же самой материи, колебания которой представляют собой свет, к каким-либо следствиям относительно действия магнетизма на поляризованный свет. Мы предполагаем, что поперечные колебания передаются через намагниченную среду и спрашиваем, как будет влиять на распространение этих колебаний то обстоятельство, что части этой среды находятся в состоянии вращения [61].

Нижеприводимое исследование приводит к заключению, что единственное действие, которое вращение вихрей оказывает на свет, состоит в том, что плоскость поляризации начинает вращаться в том же направлении, что и вихри, на угол, пропорциональный:

(A) толщине вещества;

(B) составляющей магнитной силы, параллельной лучу,

(C) показателю преломления луча,

(D) обратно пропорциональный квадрату длины волны в воздухе,

(E) *среднему радиусу* вихрей и

(F) емкости магнитной индукции.

(A) и (B) были полностью доказаны Верде*), который установил, что вращение строго пропорционально толщине и намагничивающей силе и что, когда луч наклонен относительно намагничивающей силы, вращение пропорционально косинусу угла наклона. Относительно (D) предполагали, что оно дает истинное отношение между вращениями различных лучей, но, вероятно, при точном описании явлений должно быть принято во внимание также и (C). Вращение меняется не в точности обратно пропорционально квадрату длины волны, но несколько быстрее, так что для лучей с очень значительным преломлением вращение больше, чем то, которое дается этим законом; с лучшим приближением оно пропорционально частному от деления показателя преломления на квадрат длины волны.

Отношение (E) между величиной вращения и размером вихрей показывает, что различные вещества могут различаться по вращающему действию независимо от какой-либо разницы в других свойствах. Мы ничего не знаем относительно абсолютной величины вихрей, и по нашей гипотезе оптические явления, веро-

---

*) Annales de Chimie et de Physique, серия 3, т. XLI, стр. 370; т. XLIII, стр. 37.

ятно, являются единственными данными для определения их относительной величины в различных веществах.

По нашей теории направление вращения плоскости поляризации зависит от среднего момента количества движения или *углового момента* молекулярных вихрей [62], а так как Верде нашел, что магнитные вещества влияют на свет противоположно тому, как влияют на него диамагнитные, то, следовательно, молекулярное вращение должно быть противоположным в этих двух классах веществ.

Таким образом, мы не можем больше рассматривать диамагнитные тела имеющими коэффициент магнитной индукции, меньший коэффициента индукции пространства, свободного от весомой материи. Более того, мы должны допустить, что диамагнитное состояние *противоположно* парамагнитному и что все вихри или, по меньшей мере, подавляющее большинство их вращаются в диамагнитных субстанциях в направлении, в котором положительное электричество протекает по намагничивающей катушке, тогда как в парамагнитных веществах они вращаются в обратном направлении.

Этот результат так же согласуется с той частью теории Вебера*), которая относится к парамагнитному и диамагнитному состояниям. Вебер предполагает, что электричество в парамагнитных телах вращается в том же самом направлении, как и в окружающей их индукционной спирали, в то время как в диамагнитных телах оно вращается в обратном направлении. Если мы теперь будем рассматривать отрицательное или смоляное электричество как субстанцию, отсутствие которой представляет положительное или стеклянное электричество, то приведенный результат будет согласовываться с наблюдаемым на опыте [63]. Это имеет силу независимо от любой другой гипотезы кроме веберовской гипотезы парамагнетизма и диамагнетизма и не

*) Taylor's Scientific Memoirs, т. V, стр. 477.

требует от нас допущения ни теории Вебера о зависимости взаимодействия движущихся электрических частиц от состояния их движения, ни нашей теории ячеек и ячеечных перегородок.

Я склонен думать, что железо отличается от других веществ и по роду своего действия и по интенсивности своего магнетизма и считаю, что поведение железа может быть объяснено нашей гипотезой молекулярных вихрей, если предположить, что молекулы железа сами приводятся во вращение в результате тангенциального действия вихрей в направлении, противоположном собственному движению вихрей.

Эти большие тяжелые частицы стали бы вращаться точно так же, как мы предполагали вращаются значительно меньшие частицы, образующие электричество, только с той разницей, что молекулы железа не могут подобно этим частицам свободно менять свое место и образовывать токи.

Вся *энергия* вращения в магнитном поле таким путем была бы сильно увеличена, что, как мы знаем, и происходит на самом деле в железе, но *вращательный момент* молекул железа противоположен вращательному моменту эфирных ячеек и значительно превосходит его, так что общий вращательный момент среды имеет направление вращения молекул железа и противоположен вращательному моменту вихрей [64]. Хотя вращательный момент зависит при этом от абсолютной величины вращающихся частей среды, он может помимо природы простейших составляющих среду частиц зависеть также от рода их агрегатного и химического расположения. Другие явления природы приводят, повидимому, к заключению, что все вещества состоят из конечного числа ограниченных в своих размерах частей, которые в свою очередь состоят из еще меньших частиц, обладающих способностью к внутреннему движению [движение друг относительно друга внутри заключающих их больших частей].

П р е д л о ж е н и е XVIII. Найти вращательный [угловой] момент вихрей.

Вращательный момент какой-нибудь материальной системы относительно оси есть сумма произведений массы dm каждой частицы, помноженной на удвоенную площадь, которую она описывает вокруг этой оси в единицу времени [65], или если A есть вращательный момент относительно оси x, то

$$A=\sum dm\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right).$$

Так как мы не знаем распределения плотности в вихре, мы можем определить лишь отношение между вращательным моментом и энергией вихря, выражение для которой мы вывели в предложении VI.

Так как время обращения то же самое по всему вихрю, средняя угловая скорость ω будет повсюду одной и той же, равной $\frac{\alpha}{r}$, где α есть скорость по окружности и r — радиус. Тогда

$$A=\sum dmr^2\omega$$

и энергия

$$E=\frac{1}{2}\sum dmr^2\omega^2=\frac{1}{2}A\omega,$$

$E=\frac{1}{8\pi}\mu\alpha^2V$ согласно предложению VI, откуда

$$A=\frac{1}{4\pi}\mu r\alpha V \tag{144}$$

для оси x с аналогичными выражениями для других осей, причем V — объем, а r — радиус вихря.

Предложение XIX. Найти уравнения волнового движения в среде, содержащей вихри, предполагая, что колебания перпендикулярны к направлению распространения.

Будем рассматривать плоские волны, распространяющиеся в направлении z; оси x и y выберем в направлениях наибольшей и наименьшей упругости в плоскости xy. Пусть x и y представляют смещения [частицы среды], параллельные этим осям. Эти смещения будут теми же самыми по всей [плоской] поверхности волны, и поэтому x и y будут функциями только z и t.

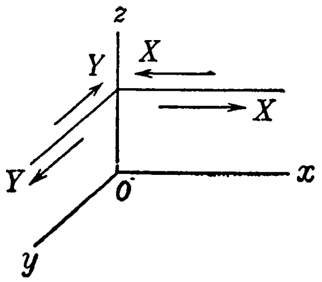


Рис. 12.

Пусть X будет x-компонента упругой силы, действующей на единичную площадку, параллельную плоскости xy; Y — соответствующая ей тангенциальная упругая сила, действующая в направлении y.

Пусть k_1 и k_2 будут коэффициенты упругости по отношению к этим двум родам упругой силы. Тогда, если среда находится в покое*), имеем [66]:

$$X = k_1 \frac{dx}{dz}, \quad Y = k_2 \frac{dy}{dz}.$$

Предположим теперь, что в среде находятся вихри, скорости которых, как обычно, изображаются символами α, β, γ. Пусть $\frac{d\alpha}{dt}$ представляет производную по времени, которая зависит от одного только действия тангенциальных напряжений, поскольку в поле нет электродвижущих сил. Изменение вращательного момента в слое, площадь которого равна единице и толщина dz характеризуется, следовательно, величиной $\frac{1}{4\pi}\mu r \frac{d\alpha}{dt} dz$, и если часть силы Y, которая производит этот эффект, есть Y', тогда момент Y' равен $-Y'dz$, так что

$$Y' = -\frac{1}{4\pi}\mu r \frac{d\alpha}{dt}.$$

---

*) То-есть в среде отсутствуют вихри. (*Ред.*)

Полное значение Y, когда вихри принимают участие в волновом движении [67]:

$$Y = k_2 \frac{dy}{dz} - \frac{1}{4\pi} \mu r \frac{d\alpha}{dt}.$$

Аналогично (145)

$$X = k_1 \frac{dx}{dz} + \frac{1}{4\pi} \mu r \frac{d\beta}{dt}.$$

Полная сила, действующая на слой, толщина которого равна dz, а площадь единице, есть $\frac{dx}{dz} dz$ в направлении x и $\frac{dY}{dz} dz$ в направлении y. Масса слоя есть $\rho\, dz$, так что мы имеем в качестве уравнений движения:

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dX}{dz} = k_1 \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{4\pi} \mu r \frac{d\beta}{dt}\right), \\ \rho \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dY}{dz} = k_2 \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{4\pi} \mu r \frac{d\alpha}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

Теперь выражаемые производными $\frac{d\alpha}{dt}$ и $\frac{d\beta}{dt}$ изменения скорости вихрей вызываются деформацией и скручиванием каждого элемента содержащей вихри среды. Чтобы выразить эти величины через параметры движения среды, мы должны обратиться к предложению X. Обозначенное там через (68) уравнение есть [68]:

$$\delta\alpha = \alpha \frac{d}{dx} \delta x + \beta \frac{d}{dy} \delta x + \gamma \frac{d}{dz} \delta x. \tag{68}$$

Так как δx и δy являются функциями только z и t, мы можем написать это уравнение в форме

$$\frac{d\alpha}{dt} = \gamma \frac{d^2x}{dz\, dt},$$

и подобным же образом (147)

$$\frac{d\beta}{dt} = \gamma \frac{d^2y}{dz\, dt}.$$

Если мы теперь положим: $k_1 = a^2\rho$; $k_2 = b^2\rho$ и $\frac{1}{4\pi}\frac{\mu r}{\rho}\gamma = c^2$, мы можем написать уравнения движения (146) в форме

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= a^2\frac{d^2x}{dz^2} + c^2\frac{d^3y}{dz^2dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= b^2\frac{d^2y}{dz^2} - c^2\frac{d^3x}{dz^2dt}. \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

Этим уравнениям удовлетворяют значения:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos(nt - mz + \alpha), \\ y &= B\sin(nt - mz + \alpha), \end{aligned}\right\} \tag{149}$$

при условии

$$\left.\begin{aligned} &(n^2 - m^2a^2)A = m^2nc^2B \\ \text{и} \quad & \\ &(n^2 - m^2b^2)B = m^2nc^2A. \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

Перемножая оба последних уравнения, мы находим:

$$(n^2 - m^2a^2)(n^2 - m^2b^2) = m^4n^2c^4 \tag{151}$$

— уравнение, квадратное относительно m^2; корни его будут:

$$m^2 = \frac{2n^2}{a^2 + b^2 \mp \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4n^2c^4}}. \tag{152}$$

Эти значения m^2, будучи подставлены в какое-нибудь из уравнений (150), дают отношения A к B:

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2 - b^2 \mp \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4n^2c^4}}{2nc^2}. \qquad [152a]$$

Если подставить одно из значений m в уравнения (149) и взять из уравнения [152a] соответствующую величину $\frac{A}{B}$, то мы получим для x и y значения, удовлетворяющие уравнениям (148) при любых значениях A, n и α. Наиболее общее волновое движение такой среды составлено, следовательно, из двух эллиптических волновых движений с различными эксцентриситетами, распространяющихся с различными скоростями, при которых частицы вращаются в противоположных направлениях. Результаты наиболее наглядны в случае, когда $a = b$. Тогда

$$m^2 = \frac{n^2}{a^2 \mp nc^2} \quad \text{и} \quad A = \mp B. \tag{153}$$

Предположим, что $A = 1$ для обоих колебаний, тогда мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\left(nt - \frac{nz}{\sqrt{a^2 - nc^2}}\right) + \cos\left(nt - \frac{nz}{\sqrt{a^2 + nc^2}}\right), \\ y &= -\sin\left(nt - \frac{nz}{\sqrt{a^2 - nc^2}}\right) + \sin\left(nt - \frac{nz}{\sqrt{a^2 + nc^2}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{154}$$

Первые члены в этих выражениях для x и y представляют круговые колебания в отрицательном направлении, а вторые члены—круговые колебания в положительном направлении; последние имеют большую сравнительно с первыми скорость распространения. Сложив члены в выражениях для x и y, мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos(nt - pz)\cos qz, \\ y &= 2\cos(nt - pz)\sin qz, \end{aligned}\right\} \tag{155}$$

где

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{n}{2\sqrt{a^2 - nc^2}} + \frac{n}{2\sqrt{a^2 + nc^2}} \\ &\text{и} \\ q &= \frac{n}{2\sqrt{a^2 - nc^2}} - \frac{n}{2\sqrt{a^2 + nc^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

Это—уравнение волнового движения, представляющее прямолинейное колебание с периодом $\frac{2\pi}{n}$ и длиной волны $\frac{2\pi}{p} = \lambda$, распространяющееся в направлении z со скоростью $\frac{n}{p} = v$, причем плоскость колебания вращается около оси z в положительном направлении, так что она делает один оборот, когда $z=\frac{2\pi}{q}$.

Теперь предположим, что c^2 мало, тогда мы можем написать:

$$p=\frac{n}{a} \quad \text{и} \quad q=\frac{n^2c^2}{2a^3}, \tag{157}$$

и помня, что $c^2=\frac{1}{4\pi}\frac{r}{\rho}\mu\gamma$, мы находим:

$$q=\frac{\pi}{2}\frac{r}{\rho}\frac{\mu\gamma}{\lambda^2 v}. \tag{158}$$

Здесь r—неизвестный радиус вихрей; ρ—плотность светоносного эфира в теле, которая также неизвестна. Но если мы примем теорию Френеля и обозначим через s плотность светоносного эфира при отсутствии весомой материи, то

$$\rho=si^2, \tag{159}$$

где i—показатель преломления.

По теории Мак Куллоха и Неймана, напротив,

$$\rho=s \tag{160}$$

для всех тел, μ—коэффициент магнитной индукции, который равен единице в вакууме или в воздухе; γ—скорость вихрей на их окружности, измеренная в обычных единицах. Ее величина неизвестна, но она пропорциональна интенсивности поля.

Если Z будет сила магнитного поля, измеренная как и в случае земного магнетизма [в магнитных единицах], то внутренняя энергия единицы объема в воздухе будет:

$$\frac{1}{8\pi}Z^2=\frac{\pi s\gamma^2}{8\pi},$$

где s—плотность магнитной среды в воздухе. Ввиду того что, как мы видели, у нас есть основание считать ее равной плотности светоносного эфира, можно положить:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{\pi s}}Z^{*}), \tag{161}$$

λ есть длина волны в веществе. Если теперь Λ будет длина волны для того же самого луча в воздухе и i—показатель преломления тела для этого луча, то

$$\lambda=\frac{\Lambda}{i}. \tag{162}$$

Точно так же, если v—скорость света в веществе, V—скорость света в воздухе, то

$$v=\frac{V}{i}. \tag{163}$$

Отсюда следует, что при прохождении слоя вещества толщины z плоскость поляризации луча повернется на угол (в градусах)

$$\theta=\frac{180^\circ}{\pi}qz \tag{164}$$

или, подставляя найденные значения q, γ и λ,

$$\theta=90^\circ\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{r}{s^{3/2}}\frac{\mu i Zz}{\Lambda^2 V}. \tag{165}$$

В этом выражении все величины могут быть определены из опыта, за исключением r—радиуса вихрей в теле и s—плотности светоносного эфира в воздухе [69].

Опыты Верде **) дают все, что необходимо для вычислений, исключая определение величины Z в абсолютных единицах; однако и эту величину также можно получить из его экспериментов, если раз навсегда определить значение отклонения гальванометра для полуоборота его пробной катушки в известном магнитном поле, например в поле земного магнетизма в Париже.

*) См. конец примечания Больцмана 15. (*Ред.*)

**) Annales de Chimie et de Physique, серия 3, т. XLI, стр. 370.

ИЗ ПРИМЕЧАНИЙ Л. БОЛЬЦМАНА К РАБОТЕ МАКСВЕЛЛА «О ФИЗИЧЕСКИХ СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ»*)

Приведенный здесь ряд опубликованных в 1861 и 1862 гг. отдельных связанных друг с другом работ содержит все уравнения Максвелла по электромагнетизму, включая уравнения для движущихся тел.

Я мог бы сказать, что последователи Максвелла в этих уравнениях, пожалуй, ничего кроме букв не переменили. Однако это было бы слишком. Конечно, не тому следует удивляться, что к этим уравнениям вообще что-то могло бы быть добавлено, а гораздо более тому, как мало к ним было добавлено. Все же вы найдете (говоря вслед за Герцем), что здесь отсутствуют некоторые из рудиментарных, затрудняющих последовательное построение понятий, которые были введены Максвеллом впервые только в его «Трактате» для того, чтобы увязать свою теорию со старыми представлениями.

Переворот, который вообще сделали эти максвелловы уравнения не только во всем учении об электричестве и оптике, но также и в наших воззрениях на существо и задачи физической теории **), слишком известен для того, чтобы было необходимо о нем специально говорить. Результаты переведенного здесь цикла работ, следовательно, должны быть причислены к важнейшим достижениям физической теории. В удивительном проти-

---

*) «Примечания» Больцмана являются приложением к немецкому изданию перевода труда Максвелла (Лейпциг, 1898, стр. 85—146). Перевод на немецкий язык труда Дж. К. Максвелла «О физических силовых линиях» сделан самим Л. Больцманом, поэтому когда он в примечаниях говорит о «переводчике», то имеет в виду самого себя. (*Ред.*)

**) На теоретико-познавательное значение своего исследования указывает сам Максвелл на стр. 158 и 159.

воречии с этим находится то, что к относительно сложным и самим Максвеллом иногда скорее только намеченным, чем строго проработанным, механическим проблемам, составляющим главное содержание этого цикла работ, отнеслись невнимательно даже самые ярые защитники максвелловской теории (по крайней мере в Германии).

Иначе как мог утверждать даже сам Герц, что Максвелл при обосновании своей теории исходит из концепции непосредственно действующих на расстоянии сил, которая в данной работе так резко отрицается и обсуждается только в «Трактате»? Герц вначале даже проглядел и уравнения, которые Максвелл здесь приводит для электромагнитных действий в движущихся средах...

Никто не усмотрит доказательства правильности максвелловых уравнений в механических представлениях этого цикла исследований, никто в настоящее время не отдаст предпочтения выводу максвелловых уравнений из этих механических представлений перед позднее усвоенным самим Максвеллом выводом последних из более общих механических идей или перед методом Герца, который уравнения вовсе не выводит, а рассматривает их просто как феноменологическое описание фактов. Открытие, однако, произошло при посредстве механических представлений. Максвелл нашел свои уравнения в результате стремления доказать при помощи механических моделей возможность объяснения электромагнитных явлений, исходя из концепций близкодействия, и только эти модели впервые указали путь к тем экспериментам, которые окончательно и решительно установили факт близкодействия и в настоящее время образуют наиболее простой и наиболее достоверный фундамент найденных другими путями уравнений.

Поэтому мне кажется, что этот цикл исследований, в которых Максвелл впервые пришел к своим уравнениям, принадлежит к наиболее интересному, что только знает история физики, и именно как раз по причине своей оригинальности, по причине отличия его метода от всех применявшихся ранее и позднее, а также вследствие той скромной простоты, с которой Максвелл показывает, с каким трудом он постепенно продвигался вперед и достиг наиболее абстрактной и наиболее своеобразной теории, которую только знает физика, пользуясь совершенно специальными и конкретными представлениями, связанными с тривиальными задачами обычной механики.

Трудности при переводе технических терминов были меньшими, чем при переводе первой работы Максвелла об электромагнетизме*), так как здесь Максвелл уже в большей степени переходит к применяемой в настоящее время терминологии. Перевод тех выражений, которые Максвелл переносит из своего первого труда, естественно, оставлен таким же, каким был там. Некоторые

*) См. стр. 11 этого издания. (*Ред.*)

совершенно короткие примечания, которые, как мне казалось, требуются для ясности, я внес прямо в текст, где они выделены путем заключения в прямые скобки.

---

1. (Стр. 107.) В качестве тела, на которое производится действие (Aufpunkt), при построении силовых линий поля тяготения следует мыслить себе материальную точку единичной массы, при построении магнитных силовых линий—точечный северный полюс единичной силы, для электрических силовых линий—концентрированное в одной точке единичное количество электричества.

Действующая на такой полюс магнитная или на такое же количество электричества электрическая сила тогда часто упрощенно называется магнитной или электрической силой (напряженностью поля).

2. (Стр. 109.) Здесь Максвелл уже определенно имеет в виду возможность опытов, которые смогут решить вопрос о выборе между теорией близкодействия и теорией дальнодействия.

3. (Стр. 110.) Последнее имеет силу, пожалуй, только тогда, когда мы пренебрегаем членами, имеющими порядок величин квадрата амплитуды.

4. (Стр. 113.) В английской системе координат или в системе координат виноградных гроздьев *) вихри вращаются в том направлении, в котором, обходя вокруг начала координат, можно по кратчайшему пути перейти от оси x к оси y, если эти вихри соответствуют силовой линии, которая имеет направление z, т. е. представляет магнитную силу, которая движет в этом направлении северный полюс.

В настоящем цикле исследований Максвелл всегда применяет английскую систему координат, которую я сохраняю также в своих примечаниях, в то время как в других работах он применял французскую систему координат **). По этой причине уравнения (9) этой работы имели там вид:

$$a_2 = \frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy} \text{ и т. д.,}$$

что после введения новых обозначений перешло бы в

$$4\pi p = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy},$$

---

*) См. примечание 30 на стр. 101 настоящего издания.

**) См. «О фарадеевых силовых линиях», стр. 11 настоящего издания. (*Ред.*)

так как там через α_1, β_1, γ_1 обозначались величины, которые теперь обозначаются α, β, γ, а величина a_2 соответствовала той, которую сейчас мы должны обозначить через $4\pi p$. Относительно множителя 4π сравни примечание 31 к работе «О фарадеевых силовых линиях».

5. (Стр. 114.) То-есть, чтобы движение происходило так, что жидкие массы, находящиеся в соответствующих частях объема, через соответствующий промежуток времени каждый раз снова находились бы в соответствующих частях объема, необходимо, и при соответствующих начальных скоростях и пограничных условиях достаточно, чтобы разности давлений в соответствующих точках находились в отношении $m^2n : 1$. Это вытекает также непосредственно из того, что гидродинамические уравнения остаются неизменными, когда все длины умножаются на l, все времена — на $\frac{l}{m}$, все плотности — на n и все действующие на единицу площади давления—на m^2n. Внешние силы, действующие на внутренние части жидкости, при этом во внимание не принимаются. Если таковые учитывать, то действующая на единицу жидкой массы внешняя сила должна была бы быть помножена на $\frac{m^2}{l}$.

6. (Стр. 115.) Пусть дана какая-либо жидкость, в которой около параллельных осей вращаются расположенные рядом друг с другом вихри. Средняя плотность и скорость на окружности каждого вихря пусть равны единице. Давление на периферии вихря равно p_1', среднее давление в направлении осей вихрей $p_2' = p_1' + C$. Пусть теперь все линейные размеры увеличены в отношении $1 : l$. Плотности в соответствующих точках будем считать увеличенными в ρ раз, а последовательность состояний во времени так измененной, что скорости при сохранении их направлений будут увеличены в v раз; l, ρ и v—произвольные величины, но каждая из них, само собой разумеется, во всей системе имеет одинаковое значение. В новой системе, следовательно, ρ есть средняя плотность, а v—скорость на окружности вихря. Если тогда в новой системе p_1 есть давление на периферии вихря, p_2—среднее давление на оси, то согласно доказанному в предложении I $p_1 = p_2 + C\rho v^2$, причем Максвелл вместо C пишет $\frac{\mu}{4\pi}$.

Приведем для лучшего усвоения сказанного некоторые примеры. Для простоты будем считать сечение вихрей круговым, жидкость несжимаемой и во всей своей массе имеющей одинаковую плотность. Вообразим себе, прежде всего, вихрь какой-нибудь длины, сечение которого является кругом радиуса a и ось которого перпендикулярна к сечению.

Каждая частица жидкости пусть описывает с постоянной скоростью окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси и центр которой лежит на оси. Скорость на периферии вихря пусть будет v; внутри же вихря пусть она будет для всех точек, которые находятся на равном расстоянии r от оси, одной и той же, равной $vf\left(\frac{r}{a}\right)$, причем f может быть любой функцией, которая исчезает при $r=0$, а для значения $r=a$ имеет величину, равную единице. Можно ввести систему неподвижных координат, ось z которой является осью вихря, и рассчитывать составляющие скорости каждой частицы жидкости в направлениях x и y. Тогда нетрудно убедиться, что гидродинамические уравнения Эйлера для не имеющей трения несжимаемой жидкости для каждой такой функции f выполняются и что давление на расстоянии r от оси равно:

$$p=p_0+\rho v^2\int\limits_0^r\left[f\left(\frac{r}{a}\right)\right]^2\frac{dr}{r}, \tag{1}$$

причем p_0 есть давление на оси, ρ — плотность жидкости.

Давление на периферии вихря будет:

$$p_1=p_0+\rho v^2\int\limits_0^1[f(x)]^2\frac{dx}{x}=p+\rho v^2\int\limits_0^a\left[f\left(\frac{r}{a}\right)\right]^2\frac{dr}{r}. \tag{2}$$

Представим себе теперь цилиндрический объем жидкости V, имеющий сечение q, в котором рядом друг с другом находятся n вихрей, обладающих только что описанными свойствами, оси которых параллельны оси цилиндра V. Жидкость, находящаяся между вихрями, должна находиться в покое, а следовательно, в ней будет господствовать то же самое давление p_1, как и на периферии вихрей. Среднее осевое давление мы находим следующим путем. Не пересекаемая вихрями часть сечения q имеет площадь $q-\pi na^2$ и в ней господствует давление p_1. Каждый вихрь пересекает сечение q по кругу радиуса a, на площади которого давление переменно. Если из каждого такого круга вырезать концентрическое круговое кольцо, которое ограничено окружностями с радиусами r и $r+dr$, то в каждом таком круговом кольце господствует давление p, данное формулой (1), и совокупная площадь всех таких лежащих в сечении q круговых колец есть $2\pi nr\,dr$. Если мы теперь каждый элемент поверхности сечения q помножим на господствующее там давление и все таким образом полученные произведения сложим, то из этого будет следовать:

$$(q-\pi na^2)\,p_1+2\pi n\int\limits_0^a pr\,dr=qp_1-2\pi n\rho v^2\int\limits_0^a r\,dr\int\limits_r^a\left[f\left(\frac{r}{a}\right)\right]^2\frac{dr}{r}.$$

Интегрируя по частям (между нулем и a) последний член получим:

$$qp_1 - \pi n\rho v^2 \int_0^a r\,dr\left[f\left(\frac{r}{a}\right)\right]^2 = qp_1 - n\pi a^2\rho v^2 \int_0^1 [f(x)]^2 x\,dx;$$

разделив на q, найдем для среднего осевого давления величину

$$(3) \qquad p_2 = p_1 - \frac{n\pi a^2}{q}\rho v^2 \int_0^1 [f(x)]^2 x\,dx.$$

Если, следовательно, каждый такой вырезанный из максвелловой среды маленький цилиндр, имеющий ось, параллельную силовым линиям, приблизительно имел бы свойство только что рассмотренного цилиндра, то тогда максвеллова величина была бы равна:

$$\mu = 4\pi\frac{n\pi a^2}{q}\rho \int_0^1 [f(x)]^2 x\,dx.$$

Здесь πa^2 есть сечение вихря, $\frac{q}{n}$ в некотором смысле представляет часть поперечного сечения цилиндра, на которую в среднем приходится один вихрь.

Полная живая сила содержащейся в цилиндре объема V части одного вихря есть:

$$(4) \qquad \pi l\rho v^2 \int_0^a \left[f\left(\frac{r}{a}\right)\right]^2 r\,dr = \pi a^2 l\rho v^2 \int_0^1 [f(x)]^2 x\,dx,$$

если l — длина цилиндра, и поэтому $V = ql$. Вся содержащаяся в цилиндре живая сила вихрей есть, следовательно:

$$(5) \qquad V\frac{n\pi a^2}{q}\rho v^2 \int_0^1 [f(x)]^2 x\,dx = \frac{\mu v^2}{4\pi}V.$$

Если, как выражается Максвелл, каждый вихрь вращается с равномерной угловой скоростью, т. е. без относительных смещений своих частиц так, как если бы вращающаяся масса жидкости была бы твердым телом, тогда скорость пропорциональна r, а следовательно, $f(x) = x$, а отсюда согласно уравнению (4)

$$(6) \qquad \mu = \frac{n\pi^2 a^2\rho}{q}.$$

Если к тому же вихри расположены так, что точки пересечения их осей с плоскостью q образуют вершины квадрата с длиной сторон, равной $2a$, то можно это сечение q разложить на одни квадраты с длиной сторон $2a$, каждый из которых описан вокруг окружности, по которой сечение q пересекается вихрем. Такой квадрат представлял бы часть $\frac{q}{n}$ общего поперечного сечения, которая в среднем выпадает на один вихрь; следовательно, мы имели бы $\frac{q}{n}=4a^2$ и отсюда согласно уравнению (6)

$$\mu=\frac{\pi^2\rho}{4}, \quad p_1-p_2=\frac{\pi}{16}\rho v^2=0,1963\rho v^2.$$

Это было бы, однако, не наиболее плотным распределением вихрей. Наиболее плотное расположение вихрей можно получить, если сечение q разложить на правильные шестиугольники, из которых каждый описан вокруг окружности, по которой вихрь пересекает поперечное сечение q. Площадь каждого такого шестиугольника представляла бы тогда ту часть общего поперечного сечения, которая выпадает на один вихрь, а следовательно, была бы равна $\frac{q}{n}$. Так как сторона каждого из таких шестиугольников имела бы длину $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, то, следовательно, $\frac{q}{n}=2\sqrt{3}a^2$, а отсюда

$$\mu=\frac{\pi^2\rho}{2\sqrt{3}}, \quad p_1-p_2=\frac{\pi}{8\sqrt{3}}\rho v^2=0,2267\rho v^2.$$

Это наибольшее значение, которое может иметь μ, если жидкость однородна и несжимаема и вихри вращаются с равномерной угловой скоростью в виде прямолинейных круговых цилиндров. Величина, даваемая Максвеллом (см. его уравнение [1a]):

$$p_1-p_2=0,25\,\rho v^2,$$

соответствовала бы тому случаю, что между вихрями не находилось бы никаких промежутков, заполненных невращающейся жидкостью. Это представление будет полезно позднее при введении движущихся между вихрями промежуточных частиц. Однако в этом случае вихри не могут иметь круговых сечений. Частицы, находящиеся на их периферии, должны тогда описывать многоугольные пути (например, правильные шестиугольники), а для таких случаев интегрирование гидродинамических уравнений значительно более сложно.

7. (Стр. 116.) Обозначения l, m, n, естественно, сейчас имеют другое значение, чем раньше. На стр. 128 буква l применяется в третьем значении, а буква ρ опять имеет другое значение, которое на стр. 134 еще раз изменяется. Так же часто меняет свое значение и буква p.

Упругие силы определяются так: через точку среды мы проводим три малых плоских элемента поверхности площади ω, нормальных к трем направлениям осей координат. Тогда частицы среды, прилегающие к одной стороне элемента поверхности, например, нормального к оси абсцисс, действуют на частицы, прилегающие к другой стороне этой поверхности с некоторой силой*), которая в направлении осей координат имеет составляющие ωp_{xx}, ωp_{xy}, ωp_{xz}. Эти составляющие действуют в положительных направлениях осей координат, если рассматривать силу, как исходящую от частиц, расположенных на стороне элемента поверхности, обращенной к положительному направлению осей координат, и которая действует на частицы, расположенные на стороне, обращенной к отрицательному направлению осей координат. Таким образом, если p_{xx}, p_{yy} и p_{zz} положительны, то они обозначают силу тяги.

8. (Стр. 116.) Выберем направление силовых линий в данном месте в качестве направления оси абсцисс новой прямоугольной системы координат и обозначим новые направления осей координат греческими буквами. Тогда

$$\left\{\begin{array}{l} p_{\xi\xi}=\dfrac{1}{4\pi}\mu v^2-p_1, \quad p_{\eta\eta}=p_{\zeta\zeta}=-p_1, \\ p_{\xi\eta}=p_{\eta\zeta}=p_{\xi\zeta}=0. \end{array}\right. \tag{1}$$

Сила упругости, действующая на единицу площади, перпендикулярную к старой оси абсцисс, должна в новых координатах иметь составляющие Ξ, H, Z. Тогда будем иметь согласно известным формулам для упругой силы, действующей на наклонную по отношению к осям координат (в данном случае по отношению к новым осям координат) площадь:

$$\Xi=p_{\xi\xi}\cos(x\xi)+p_{\xi\eta}\cos(x\eta)+p_{\xi\zeta}\cos(x\zeta)=$$
$$=\left(\frac{1}{4\pi}\mu v^2-p_1\right)\cos(x\xi),$$
$$\mathrm{H}=p_{\xi\eta}\cos(x\xi)+p_{\eta\eta}\cos(x\eta)+p_{\eta\zeta}\cos(x\zeta)=-p_1\cos(x\eta),$$
$$\mathrm{Z}=p_{\xi\zeta}\cos(x\xi)+p_{\eta\zeta}\cos(x\eta)+p_{\zeta\zeta}\cos(x\zeta)=-p_1\cos(x\zeta).$$

Так как, с другой стороны, p_{xx}, p_{xy} и p_{xz} являются составляю-

*) Эта сила, будучи разделена на ω, должна называться упругой силой на единицу площади, действующей на поверхность, нормальную к оси абсцисс.

щими той же самой силы в направлениях старых осей координат, то мы имеем:

$$p_{xx} = \Xi\cos(x\xi) + \mathrm{H}\cos(x\eta) + \mathrm{Z}\cos(x\zeta) = \frac{1}{4\pi}\mu v^2\cos^2(x\xi) - p_1,$$

$$p_{xy} = \Xi\cos(y\xi) + \mathrm{H}\cos(y\eta) + \mathrm{Z}\cos(y\zeta) = \frac{1}{4\pi}\mu v^2\cos(x\xi)\cos(y\xi),$$

$$p_{xz} = \Xi\cos(z\xi) + \mathrm{H}\cos(z\eta) + \mathrm{Z}\cos(z\zeta) = \frac{1}{4\pi}\mu v^2\cos(x\xi)\cos(z\xi),$$

что сейчас же дает уравнения Максвелла, так как новая ось абсцисс имеет направление силовых линий, а следовательно,

$$\cos(x\xi) = l, \quad \cos(y\xi) = m, \quad \cos(z\xi) = n.$$

Если внутри наполненной вихрями среды построить элемент поверхности, наклоненной по отношению к осям вихрей, то в этом случае нельзя, как это делают для упругого тела, устранить частицы, прилегающие к одной стороне поверхности и заменить их действие на частицы, прилегающие к другой стороне, действием внешних упругих сил. Этим было бы нарушено движение в непосредственной близости элемента поверхности, так как частицы непрерывно перемещаются в результате вращения с одной стороны поверхности на другую. Можно было бы поставить вопрос, не вытекают ли отсюда возражения против применения в неизменном виде уравнений теории упругости к такого рода среде.

9. (Стр. 118.) То, что здесь называется количеством магнитной индукции через поверхность с площадью, равной единице, есть то же самое, что в работе «О фарадеевых силовых линиях» называлось количеством i намагничения в одной точке и что в старой теории называется составляющей магнитного момента на единицу объема, перпендикулярной к этой поверхности *). Общее количество направленной наружу магнитной индукции через замкнутую поверхность есть число линий магнитной индукции, которые возникают внутри последней; оно в 4π раз больше содержащегося в ней количества магнетизма. То, что здесь называется в согласии с обычной терминологией магнитной силой (на единицу магнетизма, напряженность поля) было в работе «О фарадеевых силовых линиях» названо магнитной интенсивностью. Число линий индукции, параллельных осям координат в параллелепипеде с ребрами

*) С точки зрения современной терминологии это истолкование противоречит максвелловской формуле (20), показывающей, что μ—это коэффициент магнитной проницаемости, а не восприимчивости. Однако из дальнейшего текста Больцмана (см., например, стр. 217) видно, что он понятие магнитной индукции употребляет во вполне современном нам смысле. (*Прим. перев.*)

dx, dy, dz, выходящих через обе боковые стороны параллелепипеда, перпендикулярные к направлению оси абсцисс, есть $\mu\alpha\, dy\, dz$ и $\left[\mu\alpha + \frac{d(\mu\alpha)}{dx}\, dx\right] dy\, dz$. Если аналогичное вычисление провести для других боковых сторон, то из этого получится максвеллово уравнение (6).

Ход мыслей Максвелла согласно нижеследующему, повидимому, таков: законы действия магнетизма и электрических токов считаются предварительно известными из опыта; действия сил в среде, которая содержит вихри, расположенные вдоль силовых линий, также находятся путем вычислений. Отсюда прежде всего ставится вопрос, что в такой среде должно соответствовать количеству магнетизма, коэффициенту магнитной проницаемости, электрическому току и так далее, для того чтобы найденные здесь законы совпадали с теми, которые найдены опытным путем. Только во второй части дается ответ на вопрос о том, при помощи какого механизма вихри удерживаются в указанном расположении и каким образом могут быть объяснены наблюдаемые изменения этого расположения во времени.

10. (Стр. 118.) Если мы расположим вихри в среде так, что их оси повсюду будут иметь направление силовых линий магнитного поля и их скорость на периферии будет равна силе поля, если, далее, плотность среды всюду определяется уравнением (4) примечания 6, то выражение Максвелла (6) равно 4π-кратному в каждом элементе объема содержащемуся количеству магнетизма и выражение Максвелла (8) дает магнитную силу, действующую на находящуюся в единице объема магнитную массу.

11. (Стр. 121.) Силовая линия при этом на всем своем протяжении изображает равную силу (единицу силы), так что силовые линии являются тем более плотно расположенными, чем интенсивнее поле. Отсюда, однако, никоим образом не следует, что и количество вихрей, находящихся рядом друг с другом на единице площади сечения, проведенного перпендикулярно к их осям через среду, возрастает в той же мере. Это было бы так только в том случае, если бы при малой и большой напряженности поля скорость на периферии оставалась неизменной.

Тот способ, которым Максвелл пишет уравнения, однако, приводит как раз к противоположному выводу, а именно: он рассматривает зависящую от расположения вихрей величину μ как неизменную для одного и того же тела и считает зависящими от магнитного состояния только величины α, β, γ, так что вихри при слабой и сильной напряженности поля одинаково плотно расположены и лишь их скорости вращения возрастают с возрастанием напряженности поля.

Впрочем, основные результаты Максвелла, повидимому, останутся неизменными даже в том случае, если допустить изменяемость расположения вихрей при различном намагничении (ср. конец примечания 15 и примечание 70).

12. (Стр. 121.) При этом предполагается, что μ есть константа и что не имеется в наличии ни свободного магнетизма, ни электрического тока. Тогда $\frac{d\beta}{dx}=\frac{d\alpha}{dy}$. Если начало координат поместить на одну из силовых линий рис. 5, ось y в их направлении, а ось x в том направлении, в котором приращение магнитной силы является наибольшим, то на оси абсцисс $\alpha=0$, $\frac{d\beta}{dx}$ положительно, а отсюда и $\frac{d\alpha}{dy}$ тоже положительно. Отсюда α на небольшом расстоянии от оси абсцисс на стороне положительных y положительно, на противоположной стороне—отрицательно, а проходящая через начало координат силовая линия так искривлена, что на каждой из этих сторон она отклоняется от оси y в направлении той полуплоскости, в которой абсциссы положительны.

13. (Стр. 122.) Доказательство аналогично доказательству, приведенному в работе «О фарадеевых силовых линиях» (стр. 11 настоящего издания), но только с той разницей, что там применяется французская, а здесь английская система координат. Там $\frac{a_2}{4\pi}$, $\frac{b_2}{4\pi}$ и $\frac{c_2}{4\pi}$ магнитно измеренные составляющие плотности тока, в то время как сейчас p, q и r магнитно измеренные составляющие плотности тока, если составляющие магнитной силы α, β, γ измерены магнитно. Пусть $dx\,dy$ есть элементарный прямоугольник, стороны которого параллельны осям x и y. Северный полюс, сила которого равна единице, пробегающий периферию прямоугольника в положительном направлении, дает на сторонах длины dx этого прямоугольника работу $\alpha\,dx$ и соответственно $-\left(\alpha+\frac{d\alpha}{dy}dy\right)dx$, а на сторонах dy работу $-\beta\,dy$ и соответственно $\left(\beta+\frac{d\beta}{dx}dx\right)dy$. Отсюда полная работа будет $\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)dx\,dy$. С другой стороны, из закона Био-Савара легко доказать, что магнитный полюс, имеющий силу, равную единице, дает работу, равную $4\pi i$, если он в положительном направлении обходит бесконечный прямолинейный ток, и, напротив, работа равна нулю, если общий ток протекает вне описываемой магнитным полюсом замкнутой кривой, i при этом является магнитно измеренной силой тока. Вблизи прямоугольника $dx\,dy$ линии тока могут рассматриваться как бесконечные прямые. Работа будет той же самой, как будто бы имелась составляющая силы тока

только в направлении оси z. Тогда полный ток, проходящий через прямоугольник, будет $r\ dx\ dy$, отсюда работа пробегающего периферию прямоугольника полюса равна $4\pi r\, dx\, dy$. Приравнивание обоих найденных для этой работы выражений дает:

$$r = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right).$$

14. (Стр. **124**.) Если речь идет об электромагнитных явлениях в какой-либо жидкости, то p_1 это обычное гидростатическое давление в весомой массе жидкости. Если тело твердое, то p_1 есть сила упругости, которая в точности по законам гидростатического давления действует равномерно во всех направлениях; p_1 может быть также и отрицательным, т. е. обозначать растяжение. В чистом эфире эта сила p_1 также должна существовать. Повидимому, здесь, как позднее в теории электромагнитных действий в движущихся телах, Максвелл принимает, что в весомых телах эфир неизменным образом связан с весомой материей, так как он принимает, что обусловленные вихрями силы давления в полной мере действуют на ощутимую материю и приводят ее в движение.

Давление p_1 обозначает также то действие, которое испытывает магнитное тело в намагничивающейся жидкости под влиянием магнитных сил и о котором при обсуждении члена [8a] шла речь.

Пусть однородная магнитная или диамагнитная жидкость находится в неоднородном магнитном поле и пусть она со всех сторон окружена неподвижными стенками. Повсюду в жидкости

$$\frac{d(\mu\alpha)}{dx} + \frac{d(\mu\beta)}{dy} + \frac{d(\mu\gamma)}{dz} = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{d\gamma}{dy}, \quad \frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\alpha}{dy}, \quad \frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\beta}{dx}.$$

Пусть, следовательно, внутри жидкости нет ни истинного магнетизма, ни электрических токов. Тогда согласно (5)

$$1)\qquad \frac{dp_1}{dx} = \frac{\mu}{8\pi}\frac{d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{dx} - X$$

с двумя аналогичными равенствами для осей y и z. Если, кроме того, внутри жидкости не действуют никакие внешние силы, т. е. если, например, отвлечься от силы тяготения, тогда $X = Y = Z = 0$, откуда

$$p_1 = \frac{\mu}{8\pi}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + \text{постоянная}.$$

Жидкость, следовательно, находится в состоянии равновесия, но давление в различных местах жидкости различно.

Формула (1) настоящего примечания имела бы место также и в том случае, если бы среда не содержала никаких вихрей, но если бы на каждый элемент объема dV по какой-либо чисто механической причине в трех направлениях координат действовали бы силы (кажущиеся силы дальнодействия)

$$\frac{\mu\,dV}{8\pi}\,\frac{d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{dx}, \quad \frac{\mu\,dV}{8\pi}\,\frac{d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{dz},$$

$$\frac{\mu\,dV}{8\pi}\,\frac{d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{dz}.$$

Как распределение давления, так и действие на погруженное тело были бы тогда такими же, как в намагничивающейся жидкости в неоднородном магнитном поле.

Для ясности рассмотрим в качестве более общего примера в каком-либо магнитном поле жидкость, в которой могут находиться также истинный магнетизм и электрические токи.

Величины X, Y, Z, данные максвелловым уравнением (5) и аналогичными уравнениями для других осей координат, представляют внешние силы, которые должны действовать для того, чтобы каждый элемент объема жидкости находился в равновесии; $X\,dV$, $Y\,dV$, $Z\,dV$ тогда являются силами, которые должны действовать на элемент объема dV для того, чтобы в соединении с силами давления и растяжения, обусловленными вихрями и вообще окружающим эфиром и действующими на эфир, заключенный в этом элементе объема, удерживать последний в состоянии равновесия. Относительно этих сил давления и растяжения Максвелл допускает, что они неизменным образом переносятся на весомую материю элемента объема; p_1 есть общее давление, которое действует в весомой материи и в эфире, который мыслится с нею жестко связанным.

Мы сейчас переходим к тому случаю, когда весомая материя предполагается движущейся; p_1 пусть имеет то же самое значение, как и ранее; $X\,dV$, $Y\,dV$, $Z\,dV$, однако, пусть будут теперь те силы, которые помимо сил, обусловленных окружающим эфиром, еще действуют извне (например, вследствие тяготения) на элемент объема dV жидкости. В рассматриваемом сейчас случае какого-нибудь движения снова имеет силу максвеллово уравнение (5) с аналогичными уравнениями для двух остальных осей координат с той только разницей, что в нем согласно принципу Даламбера вместо трех величин X, Y, Z выступают три величины:

$$X-\rho\frac{du}{dt}, \quad Y-\rho\frac{dv}{dt}, \quad Z-\rho\frac{dw}{dt},$$

в которых u, v, w являются составляющими скорости находящихся в dV частиц жидкости (не в данном месте пространства) и ρ—

плотность весомой жидкости. Отсюда для направления оси абсцисс получаются уравнения движения:

$$X-\rho\frac{du}{dt}=\alpha m+\frac{\mu}{8\pi}\frac{d(v^2)}{dx}+\frac{\mu}{4\pi}(\gamma q-\beta r)-\frac{dp_1}{dx}.$$

Естественно при этом предполагается, что движение происходит так медленно, что можно пренебречь индукционными токами, возникающими в результате индукции, диэлектрическими поляризациями и т. д., для которых были бы действительны уравнения (77).

Движение жидкости происходит именно так, как если бы действия эфира не существовало, но в дополнение к действующим извне на dV силам выступали бы еще на каждую единицу объема рассмотренные Максвеллом силы, представленные выражениями (7), [8a], [8b] и (10) текста Максвелла. Эти силы, следовательно, по праву могут быть обозначены как обусловленные эфиром кажущиеся силы дальнодействия. Если, например, X было бы равно отрицательной сумме четырех выражений (7), [8a], [8b] и (10), если бы аналогичное имело место и для Y и Z и если бы весомая жидкость находилась в покое, то мы получили бы:

$$\frac{dp_1}{dx}=\frac{dp_1}{dy}=\frac{dp_1}{dz}=0,$$

а следовательно, p_1 было бы постоянной. Это были бы, следовательно, внешние силы, которые уравновешивали бы кажущиеся силы дальнодействия, а также устраняли все различия в давлении, которые могли бы быть вызваны ими. Указанные различия в давлении являются допущением наличия так называемой магнитострикции.

15. (Стр. 126.) Так как прочие части (конечно, не влияющие) магнитного стержня расположены, начиная от полюса в определенном направлении, то, безусловно, нельзя считать заранее очевидным, что единственный полюс одинаково сильно действует по всем направлениям пространства. Однако Максвелл здесь явно рассматривает это как опытный факт. Тогда φ может быть только функцией r, и из уравнения (19), как известно, следует:

$$\varphi=-\frac{a}{r}, \tag{1}$$

где a является величиной постоянной; другая же аддитивная постоянная несущественна.

Построим вокруг полюса как центра маленький, но по сравнению с размерами самого полюса значительный шар радиуса r. По формуле (18) текста Максвелла общее количество магнетизма, находящееся внутри шара, а следовательно, сконцентрированное в полюсе количество магнетизма равно:

$$\frac{\mu}{4\pi}\int\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)dV,$$

причем интегрирование может быть произведено по всем элементам объема dV внутри шара, так как там, где нет магнетизма, интеграл все равно исчезает. При помощи интегрирования по частям, которое производится совершенно так же, как при доказательстве теоремы Грина, мы находим, что это выражение равно:

$$\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{d\varphi}{dn}\,dS,$$

где интегрировать следует по всем элементам поверхности dS, причем n является нормалью, проведенной наружу от поверхности шара. Для поверхности шара φ уже дано уравнением (1), поэтому последний интеграл имеет значение μa. Величина m в максвелловом уравнении (20) есть, следовательно, полное сконцентрированное в полюсе количество магнетизма, в то время как та же самая буква в формуле (18) обозначала пространственную плотность магнетизма; μ есть произведение плотности ρ среды (эфира), из которой образованы вихри, на численный коэффициент $4\pi C$ (ср. формулу Максвелла [1b]). Для идеального, рассмотренного Максвеллом случая C равно 0,25, для обоих рассмотренных в примечании 6 случаев распределения вихрей оно равно соответственно 0,1963 и 0,2267. Было бы, разумеется, ошибкой считать, что в стандартной среде, для которой предполагается $\mu=1$, плотность эфира должна быть $\frac{1}{4\pi C}$-кратной плотности воды. Напротив, для стандартной среды именно потому $\mu=1$, что Максвелл считает составляющие силы магнитного поля не пропорциональными, но равными α, β, γ. Уравнение $\mu=1$ имеет, следовательно, следующее значение: если из обеих единиц длины и массы выбрать одну произвольно, а другую, например единицу массы, так, чтобы в стандартной среде плотность эфира была бы равна единице, тогда скорость на периферии вихря будет выражаться тем же самым числом, что и сила магнитного поля. Магнитный полюс 1 при этом опять-таки является тем, который в стандартной среде действует на равный ему полюс с силой 1. Единица силы магнитного поля—это та, при которой на стандартный полюс действует сила, равная 1. Сила же 1 есть та, которая сообщает ускорение 1 не грамму, а принятой единице массы.

Для того чтобы найти уравнение, которое действительно при использовании обычной системы мер, представим себе в стандартной среде два магнитных полюса, обладающих совершенно одинаковыми свойствами, находящимися на расстоянии r. Функция φ, призводные которой по координатам дают значения α, β и γ для каждого полюса, дается выражением (1) этого примечания. В каждом полюсе, следовательно, находится количество магнетизма $m=a\mu$ и сила, с которой они действуют друг на друга, есть $am=\frac{a^2\mu}{r^2}=v^2r^2\mu$, где v есть скорость на периферии вихря, произведенного одним из полюсов, в том месте пространства, где находится другой полюс*). Если интенсивность m обоих полюсов мы измерим в магнитных единицах, то сила, с которой они действуют друг на друга, равна единице силы, помноженной на $\frac{m^2}{r^2}$, т. е. равна

$$\frac{m^2}{r^2}\,\frac{г \cdot см}{сек^2}.$$

Следовательно,

$$v^2\mu=\frac{m^2}{r^4}\,\frac{г}{см \cdot сек^2}.$$

Обозначим через ω периферийную скорость вихрей в поле с измеренной в магнитных единицах напряженностью 1, тогда $v=\frac{\omega m}{r^2}$, откуда

$$\omega^2\mu=4\pi\omega^2C\rho=1\ г \cdot см^{-1} \cdot сек^{-2}. \tag{2}$$

Это—единственное соотношение между абсолютными значениями ω и μ для стандартной среды, которое может быть выведено из всего предыдущего. Однако из всех чисто электромагнитных явлений можно вывести лишь произведение $\omega^2\mu$. Уравнения для последних остаются, следовательно, неизменными, если мы примем для стандартной среды $\mu=1$, а v просто равным измеренной в магнитных единицах напряженности поля. Если бы для стандартной среды была бы дана плотность эфира $\rho=A\ г \cdot см^{-3}$ в обычных единицах и число C, то согласно (2) $\omega=\frac{1\ см}{сек \cdot \sqrt{4\pi CA}}$ при измеренной в магнитных единицах силе поля $1=E=1\ г^{\frac{1}{2}} \times$ $\times\ см^{-\frac{1}{2}} \cdot сек^{-1}$. Поэтому следовало бы v — скорость на периферии вихрей, измеренную в сантиметрах в секунду, помножить на

---

*) Скорость v на периферии вихря численно равна силе поля на расстоянии r, т. е. $v=\frac{a}{r^2}$, откуда $\frac{a^2}{r^2}=v^2r^2$. (*Ред.*)

$\sqrt{4\pi CA}\, г^{\frac{1}{2}} \cdot см^{-\frac{3}{2}}$, для того чтобы получить измеренную в магнитных единицах силу поля F, так как величины ω, E, v и F образуют пропорцию (ср. уравнение Максвелла (161)). Напротив, следовало бы измеренную в грамм-сантиметр-секундах величину

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d(\mu\alpha)}{dx}+\frac{d(\mu\gamma)}{dy}+\frac{d(\mu\gamma)}{dz}\right]=m$$

разделить на $\sqrt{4\pi CA}\, г^{\frac{1}{2}} \cdot см^{-\frac{3}{2}}$, для того чтобы получить объемную плотность истинного магнетизма, так как произведение αm всегда должно давать обычную механическую силу, действующую на единицу объема.

Так как коэффициент C зависит от того, как плотно расположены вихри, то отнюдь не является безусловно необходимым, чтобы, как это всегда принимает Максвелл, в одном и том же веществе μ было бы всегда постоянным и изменялись бы только v и направление осей вихрей (ср. примечания 70 и 11).

16. (Стр. 128.) Представленное уравнениями (22), (23) и (24) распределение магнитной силы внутри и вне цилиндра может быть получено также непосредственно, если рассчитать по закону Био-Савара проходящие через каждый элемент плоскости сечения цилиндра линии тока (ср. примечание 13). Предполагается, что поток равномерно протекает по всему сечению цилиндра и что его интенсивность измеряется в магнитных единицах, если α, β, γ также измеряются в этих же единицах.

В уравнении (12) первый член исчезает, потому что нигде нет в наличии истинного магнетизма. Второй член компенсируется движением окружающего второй проводник воздуха, которое представлено последним членом, причем принимается, что коэффициент μ в воздухе таков же, как и в проводнике. Предпоследний член исчезает, так как в направлении оси y нет тока. Следовательно, остается только член $-\mu\beta r$.

Так как второй проводник не может сам по себе перемещаться, то произведенное им β не влияет на его собственное движение. Выходит, что под β можно понимать значение произведенной первичным током магнитной силы поля в том месте, где находится второй проводник. Сечения обоих проводников предполагаются малыми, так что можно допустить, что линии тока в первом проводнике имеют абсциссу, равную нулю, во втором токе — абсциссу, равную ρ, а все имеют координату y, равную нулю. Вторая из формул (25) дает отсюда $\beta=\frac{2C}{\rho}$, откуда получаем максвеллово уравнение (26).

17. (Стр. 131.) Здесь Максвелл подробно излагает свои соображения, которые привели его к предложенным им образам и понятиям, а при посредстве последних—к его общим уравнениям.

18. (Стр. 132.) Первые называются планетарными колесами, а вторые — роликами качения или соответственно шариками качения. Первые встречаются, например, в счетной машине Зеллинга; вторые — во всех шарикоподшипниках, например в поворотных кранах, велосипедах и т. д.

19. (Стр. 132.) Скорость полностью находящихся на поверхности частиц вихря, о которых идет речь, равна именно $v=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, в то время как направление их движения перпендикулярно как к прямой с направляющими косинусами l, m, n, так и к оси вихря, направляющие косинусы которой $\frac{\alpha}{v}$, $\frac{\beta}{v}$, $\frac{\gamma}{v}$. Косинус угла между этим направлением движения и осью абсцисс согласно известной формуле аналитической геометрии равен:

$$\frac{n\beta-m\gamma}{v}. \tag{1}$$

Когда ось вихря проходит через начало координат, ее положительная сторона совпадает с положительной осью y, а положительная ось z пересекает элемент поверхности перпендикулярно, так что $\frac{\beta}{v}=n=+1$. Тогда прилегающие частицы вихря движутся в положительном направлении x, так как положительная сторона оси вихря относится к направлению вращения вихря, как положительная ось y относится к вращению по кратчайшему пути от положительного направления z к положительному направлению x. Следовательно, знак в (1) правилен.

20. (Стр. 133.) Это предполагает, что боковые поверхности вихрей повсюду непосредственно прилегают друг к другу, что возможно только тогда, когда сечения вихрей являются многоугольниками (квадратами, правильными шестиугольниками и так далее). Последнему случаю соответствует также и приводимый Максвеллом рис. 8.

21. (Стр. 133.) Оси вихрей, следовательно, теперь уже не должны представляться неограниченными, как это допускалось до сих пор, но любая нить вихрей, имеющая произвольную длину, должна быть разделена перпендикулярными к оси поперечными сечениями на ряд отдельных вихрей, имеющих ограниченный объем и определенный центр. Если в этих сечениях вообще находятся промежуточные частицы, то эти последние в лучшем случае движутся круговым движением, но никогда не в определенном направлении. Следовательно, можно представить себе вихри похожими на игральные кости или правильные призмы с шестиугольным сечением, которые заполняют пространство без промежутков и оси которых параллельны осям вращения вихрей. Частицы на периферии должны тогда описывать ломаные под прямыми углами пути. Несмотря на это, Максвелл допускает, что скорость на периферии во всех местах одного и того же вихря повсюду одинакова; это связано с весьма важной для дальнейшего предпосылкой, что расстояние между центрами двух промежуточных частиц всегда неизменно, если только нет деформации тел вихрей, о которых речь будет позднее.

Трудности становятся еще большими, если в том же самом месте вихревого тела вообразить другое магнитное поле, направление которого в какой-то степени наклонено к первоначальному полю. Будет ли теперь все деление на ячейки изменено или содержимое вихря должно вращаться около оси, которая в какой-то мере наклонена к оси геометрической фигуры вихря? Как может быть совмещено с этим последним представлением постоянство скорости на периферии каждого вихря? Как нам кажется, можно утешаться лишь тем, что при точном расчете средние цифры качественно не слишком будут отличаться друг от друга.

22. (Стр. 133.) Под этим следует понимать какую-то величину, пропорциональную числу промежуточных частиц и измеряющую их количество. Под количеством движения (моментом) комплекса промежуточных частиц следует затем понимать произведение их количества на их скорость.

Примененное Максвеллом слово quantity можно было бы вместо «количество» перевести также словом «масса», но это последнее необходимо было бы понимать в том смысле, в каком говорят о магнитных или электрических массах, а не в механическом смысле сопротивления инерции, которое промежуточным частицам не приписывается; можно даже было бы им приписать массу в механическом смысле, однако по сравнению с массой материи, находящейся в вихревом движении, эта масса при всех обстоятельствах рассматривалась бы как исчезающе малая.

23. (Стр. 133.) Здесь $\rho\, dS$ есть количество промежуточных частиц, которое находится на элементе поверхности dS, разделяющем два вихря. Если распространить сумму $\Sigma\rho\, dS$ на все элементы поверхности объема $\overline{V}$, то получим полное количество промежуточных частиц в V. Это полное количество равно $\rho' V$, если ρ' есть количество промежуточных частиц, содержащихся в единице объема.

Среднюю составляющую скорости u' находящихся в $\overline{V}$ промежуточных частиц в направлении оси абсцисс получают следующим образом: находящееся на dS количество $\rho\, dS$ частиц помножают на составляющую скорости u в направлении оси абсцисс и образуют сумму $\Sigma u\rho\, dS$ полученных таким путем произведений для всех находящихся в V элементов поверхности. Сумму $\Sigma u\rho\, dS$ Максвелл обозначает как количество движения (момент) в направлении оси абсцисс промежуточных частиц, содержащихся в $\overline{V}$. Если теперь эту сумму разделить на общее количество $\rho'\overline{V}$ промежуточных частиц, то получают среднюю составляющую скорости u' в направлении оси абсцисс. Следовательно:

$$u' = \frac{\Sigma u\rho\, dS}{\rho' V}. \tag{1}$$

$u'\rho'\overline{V}$ есть произведение полного количества содержащихся в $\overline{V}$ промежуточных частиц на среднюю составляющую скорости в направлении оси абсцис, почему это и было обозначено, как количество движения этих частиц в направлении оси абсцисс. Если представить теперь в пространстве плоский отрезок поверхности, имеющий площадь, равную единице, и построенный перпендикулярно к направлению оси абсцисс, то легко можно видеть, что количество промежуточных частиц, проходящих через указанную единицу площади в течение времени dt, в среднем равно $\rho' u' dt$, так как ρ' есть объемная плотность и u' — их средняя составляющая скорости в направлении оси абсцисс. Следовательно, количество p промежуточных частиц, проходящих в единицу времени через поставленную нормально к направлению абсцисс единицу площади, в среднем также равно $\rho' u'$, и уравнение (1) дает нам

$$p\overline{V} = \Sigma\, u\rho\, dS.$$

24. (Стр. 134.) Значения α_1, β_1, γ_1 относятся к первому вихрю, значения α_2, β_2, γ_2 — ко второму из рассматриваемых вихрей. Величина u в разделяющей их поверхности dS будет, следовательно, также найдена, если в уравнении Максвелла (27) подставить:

$$\beta = \beta_1;\quad \gamma = \gamma_1;\quad \beta' = \beta_2;\quad \gamma' = \gamma_2;$$
$$m = m_1 = -m_2;\quad n = n_1 = -n_2.$$

25. (Стр. 134.) Так как $l\, dS = \pm\, dy\, dz$, причем положительный или отрицательный знак ставится в зависимости от того, на какой стороне ограничивающей поверхности находятся dS, на стороне ли, обращенной к положительному направлению оси абсцисс, или наоборот. В $\int lx\, dS$, $\int ly\, dS$ и $\int lz\, dS$ взаимно

уничтожаются по два члена, которые относятся к dS одной части поверхности и к dS соответствующей тем же y и z другой части. Если обозначить абсциссу первого dS через x_1, а абсциссу последнего dS через x_2, то тогда распространенный на замкнутую поверхность интеграл будет:

$$\int lx\,dS = \int\int (x_1 - x_2)\,dy\,dz = \int\int\int dx\,dy\,dz,$$

следовательно, интеграл равен объему, ограниченному замкнутой поверхностью. Вместо максвеллова знака $\sum$ здесь поставлен более для нас привычный знак $\int$.

Интеграл, обозначенный Максвеллом через $\sum u\rho\,dS$, который мы для краткости назовем I_1, может быть найден и таким способом: его следует распространить на все находящиеся внутри пространства $\overline{V}$ разделяющие поверхности вихрей. Если мы снова устраним в выражении (31) все члены, которые содержат координаты x, y, z без индексов, то I_1 может быть написан так:

$$(1)\qquad I_1 = -\frac{1}{2}\int \rho\,dS\left[\frac{d\gamma}{dx}m_1x_1 + \frac{d\gamma}{dy}m_1y_1 + \frac{d\gamma}{dz}m_1z_1 - \right.$$
$$\left. - \frac{d\beta}{dx}n_1x_1 - \frac{d\beta}{dy}n_1y_1 - \frac{d\beta}{dz}n_1z_1\right].$$

При этом x, y, z — координаты центра какого-либо вихря: l, m, n — направляющие косинусы нормалей, проведенных от какого-либо элемента поверхности этого вихря наружу. Суммирование распространяется на все находящиеся в $\overline{V}$ вихри. Однако при интегрировании должны быть исключены те элементы поверхности, которые не находятся внутри пространства $\overline{V}$, а ограничивают это пространство. Аналогичный интеграл, распространенный на все такие ограничивающие элементы поверхности, назовем I_2. Тогда получают сумму $I_1 + I_2$, а интеграл (1) просто распространяют на все элементы поверхностей всех вихрей. При интегрировании по каждому отдельному вихрю можно поставить перед знаком интеграла ρ и координаты x, y, z его центра, а также производные от β и γ по координатам. Тогда остаются только интегралы формы $\int m_1\,dS$ и т. д., которые все исчезают. Отсюда, следовательно, $I_1 + I_2 = 0$. В интеграле I_2, который должен распространяться на все поверхностные элементы пространства $\overline{V}$, перед знаками интеграла могут быть также поставлены ρ и производные от β и γ. Для x, y, z, однако, могут быть взяты координаты поверхностного элемента dS, расстояние которого от центра соответствующего вихря, очевидно, мало по сравнению с размерами объема $\overline{V}$, так что $\int m_1 y_1 \, dS = \int n_1 z_1 \, dS = \overline{V}$, тогда как остальные поверхностные интегралы снова исчезают. Следовательно, согласно (1)

$$I_2 = -\frac{1}{2} \rho \overline{V} \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right),$$

$$I_1 = -I_2 = \frac{1}{2} \rho \overline{V} \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right),$$

как это находит и Максвелл.

Быть может, еще желательно краткое указание на ход решения. Пусть в специальном случае вихри имеют форму игральных костей с длиной сторон s, ребра которых параллельны осям координат. Они должны просто вращаться вокруг осей, которые параллельны оси z. Скорость на периферии γ должна быть функцией координат. Пусть $\overline{V}$ будет игральной костью со стороной, имеющей длину Ns, ребра которой параллельны ребрам маленьких кубиков. Этот большой куб должен, несмотря на то, что N велико по сравнению с единицей, все же быть столь малым, что γ в нем очень мало изменяется. На боковых поверхностях вихрей, которые перпендикулярны к оси y и прилегают к одной из сторон (а именно к стороне, обращенной в сторону отрицательного y), частицы вихря имеют скорость $-\gamma$; прилегающих к другой стороне — скорость $\gamma + \frac{d\gamma}{dy} s$. Отсюда промежуточные частицы имеют скорость $u' = \frac{s \, d\gamma}{2 \, dy}$, которая является средним арифметическим обеих скоростей в направлении x. Боковые поверхности всех вихрей, перпендикулярных к оси y и находящихся внутри большого куба $\overline{V}$, образуют $N-1$ квадратов с длиной стороны Ns, которые разрезают каждое поперечное сечение, проведенное через $\overline{V}$ вертикально к направлению абсцисс, на $N-1$ прямых, имеющих длину Ns. Через каждую из этих прямых выходят промежуточные частицы со скоростью u'. Следовательно, через каждую из этих прямых в единицу времени выходят те промежуточные частицы, которые находятся на поверхности, имеющей площадь $u'Ns$, и количество которых равно $\rho u' Ns$. Если мы пренебрежем единицей по сравнению с N, то мы можем сказать, что перпендикулярное по отношению к направлению абсцисс сечение куба $\overline{V}$ в целом содержит N таких прямых, так что, следовательно, через него проходит количество $\rho u' N^2 s = \frac{\rho \, d\gamma}{2dy} N^2 s^2$ промежуточных частиц, а через построенную на нем поверхность с площадью единица проходит $\frac{\rho\, d\gamma}{2dy}$ промежуточных частиц. Равным образом находят, что через единицу площади перпендикулярного к направлению y сечения проходит количество $-\frac{\rho\, d\gamma}{2dx}$; напротив, через поверхность, перпендикулярную к оси z, — количество проходящих частиц равно нулю. Если таким же образом рассчитать эффект вращения α вокруг оси x и вращения β вокруг оси y и наложить эти эффекты, то мы получаем максвеллово уравнение (33) с соответствующими уравнениями для направлений y и z.

26. (Стр. 134.) Так как количество или масса промежуточных частиц никогда не играет роли механического сопротивления инерции (следовательно, их единица измерения полностью независима от выбора всех прочих единиц), то можно сказать, что количество находящихся на площади 2π промежуточных частиц выбирается в качестве единицы измерения.

27. (Стр. 135.) Под этим может пониматься молекула в смысле молекулярной теории, или также объемный элемент, т. е. такая маленькая часть пространства, в которой доступные опыту величины (плотность, магнитные или электрические силы и т. д.) только исчезающе мало изменяются.

28. (Стр. 138.) Цитированное положение — это известная теорема Грина. Согласно последней, когда φ_1 и φ_2 исчезают в бесконечности и известные условия непрерывности соблюдены:

$$\int \mu \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d\varphi_2}{dz} \right) dV =$$

$$(1) \qquad = -\int \varphi_1 \left[\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{d\varphi_2}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mu \frac{d\varphi_2}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mu \frac{d\varphi_2}{dz}\right) \right] dV =$$

$$= -\int \varphi_2 \left[\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{d\varphi_1}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mu \frac{d\varphi_1}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mu \frac{d\varphi_1}{dz}\right) \right] dV.$$

Посредством этого уравнения и двух, вытекающих из него, когда один раз вместо φ_2 пишется также φ_1, а другой раз вместо φ_1 также φ_2, получают непосредственно из уравнений Максвелла (35), (36) и (38) его же уравнение (40) без обходного пути через уравнение (39), которое получают через сравнение двух последних выражений (1). При этом совсем не требуется, как делает Максвелл, считать μ константой:

Пусть, например, A_1 и A_2 будут две произвольные, находящиеся друг от друга на расстоянии D точки пространства, r_1 и r_2 — расстояния некоторой другой точки от A_1 и соответственно от A_2. Пусть повсюду $\varphi_1 = -\frac{m_1}{\mu r_1}$ до малого окружающего A_1 пространства, где φ_1 может быть любым, но непрерывным; аналогично пусть $\varphi_2 = -\frac{m_2}{\mu r_2}$. Тогда (ср. примечание 15)

$$\int \mu \left(\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} \right) dV$$

будет повсюду равно нулю, за исключением малого окружающего A_1 пространства, где интеграл равен $4\pi m_1$; аналогичное имеем и в отношении φ_2. Величина μ пусть будет далее всюду постоянной. Пусть α, β и γ являются производными от $\varphi_1 + \varphi_2$, пусть полная энергия вихрей во всем бесконечном пространстве будет на E_{12} больше суммы энергии, которую получают тогда, когда α, β, γ один раз выражены только через производные от φ_1, а в другой раз через производные от φ_2. Тогда

$$(2) \qquad E_{12} = 2C\mu \int \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d\varphi_2}{dz} \right) dV.$$

Посредством интегрирования по частям по методу Максвелла находят:

$$E_{12} = \frac{8\pi C m_1 m_2}{\mu D} = -8\pi C m_2 \varphi_1 \,|_{r_1 = D},$$

что впрочем можно проверить также и без интегрирования по частям при помощи прямой подстановки φ_1 и φ_2 в уравнение (2) и выполнения интегрирования по бесконечному пространству с применением полярных координат. В стандартной среде $\mu = 1$. Если энергия, обнаруживаемая в видимой форме, когда D возрастает на δD в силу кажущегося отталкивания на расстоянии обоих магнитных полюсов, должна равняться убыли невидимой энергии среды, то C должно иметь значение $\frac{1}{8\pi}$.

29. (Стр. 139.) Эта величина составляет ровно половину той, которая найдена в формуле (5) примечания 6 для специального случая путем прямого подсчета. Если этим и не отвергается возможность других специальных случаев, где живая сила обладает данным ей Максвеллом значением, то все же очевидна неправильность заключения Максвелла, которое, если бы оно было правильным, должно было быть справедливым в каждом специальном случае. Принцип сохранения энергии мог бы быть следующим образом сохранен в тех случаях, в которых живая сила вихрей

вдвое больше находимой Максвеллом: при сближении двух вихревых систем, которые представляют собой одноименные магнетизмы, количество последних не осталось бы неизменным, а уменьшалось бы в такой степени, чтобы прирост живой силы среды составил только половину того, который получился бы при таком же сближении, но без изменения этих количеств. Однако формулировка закона для этого уменьшения была бы трудной, так как при этом сближении двух магнитных систем изменился бы также и их собственный потенциал.

Кроме этого в теории Максвелла в той форме, в которой он разработал ее позднее, свободный магнетизм вообще невозможен и магнетизмы постоянных магнитов должны всегда заменяться соленоидами (ср. примечание 33). Естественно, что от коэффициентов выражения для живой силы зависели бы также и числовые коэффициенты выведенных из него уравнений Максвелла (54), (62), (76), (77) и т. д.

30. (Стр. 139.) Действуя на одну промежуточную частицу оба вихря, которые касаются этой частицы, вызывают на обоих концах ее диаметра по тангенциальной силе. Эти обе тангенциальные силы могут по нашему допущению бесконечно мало отличаться друг от друга, так как промежуточная частица не имеет момента инерции, а следовательно, действующий на нее момент сил в отношении каждой проходящей через центр оси должен быть равен нулю. Их результирующую можно представить приложенной к центру промежуточной частицы. Все подобные результирующие, которые действуют на единицу количества промежуточных частиц, имеют все вместе в направлении осей координат составляющие P, Q, R. Так как промежуточные частицы не обладают массой, то эти силы в проводниках уравновешиваются силой сопротивления, которая действует на самую промежуточную частицу, будучи пропорциональной составляющим ее скорости p, q, r; в качестве точки приложения силы опять-таки естественно взять центр соответствующей промежуточной частицы. В абсолютных изоляторах центры промежуточных частиц неподвижны, и силы, которые их удерживают, уравновешивают силы P, Q, R. В картине, которую мы обсуждаем в § 8 примечания 52, силы P, Q, R в проводящих диэлектриках уравновешиваются сопротивлением, которое встречают промежуточные частицы, скользя по стенкам ячеек, и которое в свою очередь обусловлено упругостью стенок ячеек. В абсолютных изоляторах последнего рода упругость находится в непосредственном равновесии с силами P, Q, R.

Те силы, которые, возможно, действуют на промежуточные частицы в направлении диаметра, соединяющего обе точки соприкосновения с соседними вихрями, Максвелл во внимание не принимает, так как они не влияют ни на движение вихрей, ни на промежуточные частицы.

31. (Стр. 140.) Теперь именно u, v, w являются составляющими скорости объемных элементов вихря, которые находятся совсем близко к поверхности вихря, т. е. это величины, представленные в уравнении [26а], а не определенные уравнением (27) составляющие скорости промежуточных частиц. В формуле (48) принимается, что x, y, z невелики и что, следовательно, начало координат находится в центре вихря или же очень близко от последнего. Ведь специально для получения этого решения можно использовать любую систему координат, так как в окончательном результате система координат больше не встречается.

В отношении формул [48а] и [48b] сравни примечания 19 и 25.

Каждый вихрь при этом должен рассматриваться, как и в предложении V, ограниченным в направлении своей оси. Промежуточные частицы, лежащие на одной из этих ограничивающих поверхностей, перпендикулярных к оси, должны двигаться по маленьким замкнутым путям и при этом не испытывать никакого сопротивления, или эти ограничивающие поверхности должны быть малыми по отношению к прочей поверхности вихрей. Однако в последнем случае распределение ячеек для каждого специального направления поля должно быть различным (ср. примечание 52, § 2).

32. (Стр. 141.) При этом кроме всего прочего предполагается, что уравнения для $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$ и $\frac{d\gamma}{dt}$ не содержат недифференцированных величин α, β, γ, так что значения производных α, β, γ по времени зависят не от абсолютных величин последних, а только от распределения P, Q, R*) как аналогично этому, например, в механике часто принимается, что ускорения зависят не от скоростей, а только от конфигурации. Обоснование всей совокупности максвелловых уравнений, свободное от такого попутного допущения, я укажу в примечании 52, § 9.

33. (Стр. 142.) Уже здесь при помощи уравнения (56) высказано условие, что плотность истинного магнетизма повсюду равна нулю (ср. примечание 41 и конец примечания 29).

34. (Стр. 146.) Если направление скорости каждой точки в каждый момент определено и скорость каждой точки является однозначной (линейной) функцией скорости приводной точки,

---

*) Аналогичным образом Максвелл полагает в «Трактате», II, 561, без особого побочного допущения, что он может получить целый ряд уравнений из одного уравнения живой силы, на что уже указал Дж. Дж. Томсон в примечании к цитированному месту в третьем издании.

то любая точка может быть избрана как приводная. Если бы определенная сила действовала только на точку, избранную в качестве приводной точки, и если бы ни на какую другую точку машины не действовала еще какая-нибудь сила, то машина пришла бы определенным образом в движение. Масса, которой должна была бы обладать приводная точка, если бы вся остальная машина массой не обладала, и должна была бы в результате приложения той же силы придти в то же движение, есть ее момент, приведенный к этой точке.

При помощи общих механических рассуждений, подобных тем, которые здесь проводит Максвелл, он пришел к теории, которую он развивает в своем трактате о динамической теории электромагнитного поля.

35. (Стр. 146.) Ориентация (по-английски—position) должна быть здесь уточнена так: рассмотрим частицы, которые лежат на какой-нибудь прямой, параллельной главному направлению расширения. Каждое изменение направления, образованной этими частицами прямой, в пространстве называется изменением ориентации. Это изменение ориентации влияет на вращение вихрей совершенно так же, как поворот подставки или кожуха гироскопа влияет на вращение находящегося внутри него волчка.

36. (Стр. 147.) Здесь можно было бы снова выставить то возражение, могут ли в действительности α, β, γ рассматриваться как независимые (ср. примечание 32). Это возражение касается только доказательства. В этом случае вместо уравнения (62) было бы получено следующее:

$$\delta\alpha = \frac{\alpha\,\delta x}{2x} \text{ и т. д.,} \tag{1}$$

вследствие чего и следующие расчеты Максвелла до формулы (77) включительно не были бы правильными, если применять значение живой силы, указанное в формуле (5) примечания 6, и вместе с Максвеллом считать μ постоянной. Важность этого предмета заставляет нас обратиться еще к двум примерам.

Пример 1. В многочисленных одинаковых вихрях с параллельными осями, имеющих форму прямых круговых цилиндров, пусть вращается жидкость с постоянной угловой скоростью ω. Пусть длина осей вихрей будет x, радиус их поперечного сечения a, так что их скорость на периферии будет равна:

$$\alpha = \omega a, \tag{2}$$

p_0 пусть будет давление на оси вихря, p—давление на расстоянии r от оси, тогда, как известно, $p = p_0 + \dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2}$.

Рассмотрим ту имеющую форму полого цилиндра часть вихря, для которой величина r лежит между r_1 и r_2. На его внутреннюю поверхность действует давление

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho\omega^2 r_1^2}{2},$$

а на его внешнюю поверхность

$$p_2 = p_0 + \frac{\rho\omega^2 r_2^2}{2}.$$

Полное (не рассчитанное на единицу площади) давление на основание или опорную поверхность полого цилиндра есть:

$$P = \int_{r_1}^{r_2} p\, 2\pi r\, dr = \pi p_0 (r_2^2 - r_1^2) + \frac{\pi\rho\omega^2}{4}(r_2^4 - r_1^4).$$

Живая сила находящейся в полом цилиндре жидкости

$$E = \int_{r_4}^{r_2} \pi^2 \rho\omega^2 x r^3\, dr = \frac{\pi\rho x\omega^2}{4}(r_2^4 - r_1^4).$$

Пусть теперь x увеличивается на δx. Вследствие несжимаемости жидкости

(3)
$$\frac{\delta x}{x} = -\frac{2\delta a}{a} = -\frac{2\delta r_1}{r_1} = -\frac{2\delta r_2}{r_2},$$

откуда

$$\delta E = -\frac{\pi\rho\omega^2}{4}(r_2^4 - r_1^4)\,\delta x + \frac{\pi\rho\omega\delta\omega}{2}(r_2^4 - r_1^4).$$

Совершенная против давления работа равна:

$$\delta W = \pi r_2^2 p_2 \delta r_2 - \pi r_1^2 p_1 \delta r_1 + P\,\delta x = -\frac{\pi\rho\omega^2\delta x}{4}(r_2^4 - r_1^4).$$

Уравнение $\delta E + \delta W = 0$, следовательно, дает:

(4)
$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\delta x}{x}.$$

Таким образом, угловая скорость вихря изменяется в точности пропорционально длине оси вихря. Так как это действительно для любого значения r_1 и r_2, то из этого следует, что после деформации вихрь продолжает вращаться как твердое тело с постоянной угловой скоростью, даже и в том случае, если он не обладает никакой твердостью. Скорость на периферии α изменяется, однако, по другому закону, чем угловая скорость ω, а именно, согласно уравнению (2) она будет:

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha}=\frac{\delta\omega}{\omega}+\frac{\delta a}{a}.$$

Отсюда согласно уравнениям (3) и (4)

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha}=\frac{\delta x}{2x},$$

что согласуется с формулой (1) настоящего примечания и находится в противоречии с максвелловым уравнением (62). Жидкость между вихрями, которая предполагается находящейся в покое, не содержит никакой живой силы, но зато не производит никакой работы, так как давление там повсюду одинаково и объем постоянен. Таким образом, наличие этой жидкости никак не влияет на баланс энергии.

Пример 2. Для того чтобы доказать, что и в том случае, когда существует потенциал скоростей, действительно уравнение (1), приведенное в этом примечании, а не максвеллово уравнение (62), рассмотрим вихри, имеющие форму прямых полых цилиндров. Их сечения дают круги — внутренний радиуса b и внешний радиуса a. Пусть внутри вихрей и между ними жидкость находится в покое. Жидкость должна так вращаться в вихрях, чтобы существовал потенциал скорости. Скорость на расстоянии r от оси вихря будет тогда равна $\frac{c}{r}$. Давление в этом месте будет равно $p=p_\infty-\frac{\rho c^2}{2r^2}$, причем p_∞ есть постоянная интегрирования. Поэтому давление, рассчитанное на единицу поверхности, для внутренней и внешней поверхностей оболочки будет:

$$p_b=p_\infty-\frac{\rho c^2}{2b^2} \quad \text{и} \quad p_a=p_\infty-\frac{\rho c^2}{2a^2}.$$

Полное давление на кольцеобразное основание или опорную поверхность (не отнесенное к единице поверхности) равно:

$$P=\int_a^b 2\pi r\,dr\left(p_\infty-\frac{\rho c^2}{2r^2}\right)=\pi(a^2-b^2)\,p_\infty-\pi\rho c^2\ln\frac{a}{b}.$$

Живая сила вихря будет:

$$E=\int_b^a 2\pi x r\,dr\,\frac{\rho c^2}{2r^2}=\pi x r c^2\ln\frac{a}{b}.$$

Если x возрастает на δx, то опять-таки вследствие несжимаемости жидкости как самого полого цилиндра, так и внутри последнего соответствующие δx приращения a и b будут:

$$\delta a = -\frac{a\,\delta x}{2x}, \quad \delta b = -\frac{b\,\delta x}{2x}.$$

Полная работа действующих на полый цилиндр сил давления есть:

$$\delta W = 2\pi a x p_a \delta a - 2\pi b x p_b \delta b + P\,\delta x = -\pi \rho c^2 \delta x \ln\frac{a}{b}.$$

Если δc есть приращение c, то E увеличивается на

$$\delta E = 2\pi a^2 x \rho \frac{c}{a}\,\delta\left(\frac{c}{a}\right) \ln\frac{a}{b} = 2\pi a^2 x \alpha\,\delta\alpha \ln\frac{a}{b}.$$

Следовательно, опять $\delta\alpha = \frac{\alpha\,\delta x}{2x}$. Здесь также не может быть сомнения в том, что и после деформации движение жидкости снова имеет потенциал скоростей.

Пусть q есть поперечное сечение находящейся между вихрями покоящейся жидкости, соответствующей одному вихрю. В жидкости господствует давление

$$p_1 = p_\infty - \frac{\rho c^2}{2a^2} = p_\infty - \frac{\rho\alpha^2}{2}.$$

Полное поперечное сечение одного вихря вместе с относящейся к нему и находящейся в покое жидкостью есть $\pi a^2 + q$. Полное давление на находящийся внутри вихря круг площади πb^2 будет $\pi b^2\left(p_\infty - \frac{\rho c^2}{2b^2}\right)$, давление на кольцеобразное сечение вихря равно P, а давление на площадь q будет $q\left(p_\infty - \frac{\rho c^2}{2b^2}\right)$. Отсюда среднее давление в направлении оси вихря

$$p_2 = p_\infty - \frac{\rho\alpha^2}{2} - \frac{\pi a^2}{\pi a^2 + q}\rho\alpha^2 \ln\frac{a}{b} = p_1 - \frac{\pi a^2}{\pi a^2 + q}\rho\alpha \ln^2\frac{a}{b}.$$

Следовательно,

$$p = \frac{4\pi^2 a^2}{\pi a^2 + q}\ln\frac{a}{b}.$$

37. (Стр. 147.) Здесь Максвелл допускает, что три оси, вокруг которых происходят три вращения α, β, γ и которые вначале были параллельны осям координат, вращаются вместе с объемным элементом xyz. Следовательно, после поворота последнего ось, вокруг которой происходит вращение β, обра-

зует с положительной осью абсцисс угол $90° + \theta_3$, косинус которого равен $-\theta_3$, с положительной осью z, однако, образует угол $90° - \theta_1$, косинус которого есть θ_1. Вращение имеет, следовательно, после поворота объемного элемента xyz в направлении x, составляющую $-\theta_3\beta$, в направлении z — составляющую $\theta_1\beta$. То обстоятельство, что и β здесь бесконечно мало изменилось, дает лишь бесконечно малые высшего порядка. Ту же самую идею, которая лежит в основе максвеллова допущения, что оси вращений α, β, γ вращаются вместе с объемным элементом xyz, Герц выражает, говоря, что силовые линии увлекаются движением весомой материи (см. примечание 39).

38. (Стр. 148.) Здесь x, y, z суть ребра любого объемного элемента, x', y', z' — ребра объемного элемента, который расположен так, что ребра параллельны главным направлениям расширения (см. следующее примечание), $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ — это удлинения трех ребер x', y', z'. Таким же образом δx, δy, δz являются удлинениями ребер, обозначенных буквами x, y, z. Там же, однако, где, как в формуле (68) или в выражениях, к которым относится это примечание, вариации координат появляются еще раз дифференцированными по координатам, значение букв вдруг становится совершенно другим. В этом случае x, y, z являются координатами вершины угла элементарного параллелепипеда, а dx, dy, dz — его ребрами: δx, δy, δz — смещения в направлениях координат, которые испытывает при деформации вершина с координатами x, y, z; $\delta x + \frac{d\,\delta x}{dx}\,dx$, $\delta y + \frac{d\,\delta y}{dx}\,dx$, $\delta z + \frac{d\,\delta z}{dx}\,dx$ — такие же смещения для вершины угла, которая первоначально имела координаты $x + dx$, y, z и т. д., так что теперь величина, которая называлась раньше просто δx, должна была бы быть обозначена через $\frac{d\,\delta x}{dx}\,dx$. Величина, которая в первом случае выражается через $\frac{\delta x}{x}$, во втором есть $\frac{d\,\delta x}{dx}$.

39. (Стр. 149.) Эта формула очень просто истолковывается Герцем в его работе «Основные уравнения электродинамики для движущихся тел» в том смысле, что движущиеся тела увлекают с собой силовые линии, вместо которых в случае, если бы μ было переменным, следовало бы подставить линии индукции. До деформации через боковую поверхность $dy\,dz$ элементарного параллелепипеда $dx\,dy\,dz$ проходят $\alpha\,dy\,dz$ силовых линий. Так как эти последние при деформации увлекаются, они после деформации проходят через элемент поверхности, который получился в результате деформации из $dy\,dz$ и должен иметь площадь $dy'\,dz'$. Следовательно, через единицу

площади сейчас проходят $\frac{\alpha\, dy\, dz}{dy'\, dz'}$ силовых линий и увеличение, которое испытало их число по этой причине, есть:

$$\delta_1\alpha = \alpha \left(\frac{dy\, dz}{dy'\, dz'} - 1 \right).$$

Ребро dx параллелепипеда вследствие деформации получило длину $dx' = \left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\, dx \right)$. Вследствие несжимаемости жидкости $dx'\, dy'\, dz' = dx\, dy\, dz$, а отсюда

$$\frac{dy\, dz}{dy'\, dz'} = \frac{dx'}{dx} = 1 + \frac{d\delta x}{dx}, \quad \delta_1\alpha = \alpha\, \frac{d\delta x}{dx}.$$

Далее при деформации один конец ребра dy параллелепипеда $dx\, dy\, dz$ удаляется на расстояние δx от плоскости, в которой первоначально находился элемент поверхности $dy\, dz$, а другой конец ребра удаляется на расстояние $\delta x + \frac{d\delta x}{dy}\, dy$. Отсюда после деформации ребро dy образует с плоскостью yz угол $\frac{d\delta x}{dy}$. Так как соответствующие магнитной силе β силовые линии проделывают этот поворот вместе с элементом объема, то после деформации $\beta\, \frac{d\delta x}{dy}\, dy\, dz$ силовых линий пройдут через площадку $dy\, dz$, в то время как до деформации через нее не проходило ни одной. Следовательно, вызванное вращением увеличение количества силовых линий, проходящих через единицу площади, будет:

$$\delta_2\alpha = \beta\, \frac{d\delta x}{dy}.$$

Равным образом α испытывает вследствие вращения силовых линий, соответствующих магнитной силе γ, приращение

$$\delta_3\alpha = \gamma\, \frac{d\delta x}{dz}.$$

Сумма всех трех приращений дает максвеллову формулу (68). Эту формулу можно было бы получить также и путем того допущения, что вихри, сами не испытывая деформации, отдаляются друг от друга в результате увеличения $dy\, dz$ и, кроме того, увлекаются при вращении. Это, например, имело бы место, если бы вихревое движение происходило в маленьких шарообразных рассеянных в среде пустых пространствах, форма и величина которых оставались бы неизменными, но которые двигались бы и вращались вместе со средой. Таким путем, быть может, можно было бы устранить трудность, на которую указывалось в примечании 36. Согласно известным исследованиям Гельмгольца, тому же закону изменения следуют составляющие угловых скоростей в вихрях лишенной трения жидкости (ср. «Трактат» Максвелла, II, 822).

40. (Стр. 149.) Здесь $\delta\alpha$ есть изменение α в течение времени δt в точке, которая движется вместе с движущимся телом, $d\alpha$ — приращение α за время dt в неподвижной точке пространства, $\frac{d}{dx}$ и т. д. — производные при неизменном времени, $\frac{dx}{dt}$ и т. д. — составляющие скорости рассматриваемой точки тела, обычно обозначаемые в гидродинамике через u, v, w.

41. (Стр. 150.) Это уравнение в рассматриваемом Максвеллом случае отсутствия свободного магнетизма (ср. примечание 33 и конец примечания 29) идентично с первым из уравнений (1a) в «Основных уравнениях электродинамики движущихся тел» Герца. Максвелловы величины

$$P,\ Q,\ R,\ \mu\alpha,\ \mu\beta,\ \mu\gamma,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{\mu d\alpha}{dt}=\frac{d^2G}{dz\,dt}-\frac{d^2H}{dy\,dt}$$

Герц обозначает соответственно через X, Y, Z, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}$. Герц применяет французскую систему координат. В рассмотренном Максвеллом случае, когда нигде нет истинного магнетизма, Герц должен написать:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}=0.$$

Вместо этого Максвелл пишет:

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0,$$

так как он считает μ постоянной.

Аналогичные уравнения для намагничивающих сил, возникающих в результате движения в электрическом поле, Максвелл не разработал. Это, возможно, было частично обусловлено тем, что применение его метода к электрическим напряжениям не было столь простым, а частично также потому, что Максвелл выводит уравнения (76) и (77) в основном для расчета индукционного влияния на движущиеся в магнитном поле проводники тока. В противоположность этому намагничивающее действие на железо, движущееся в электрическом поле, мало привлекает его внимание. То впечатление, которое мы получаем, видя в первый раз имеющие для всего нашего естественно-научного мировоззрения революционизирующее значение уравнения, увеличивается еще тем, что Максвелл не говорит ни слова об этом их значении, которое он, наверное, предполагал, даже если он не так ясно его видел, как это видим сейчас мы.

42. (Стр. 151.) Согласно формуле, которую мы применяем также и в примечании 19, для косинуса угла между направлением оси абсцисс (направлением поля) и прямой, перпендикулярной к следующим двум прямым: прямой S с направляющими косинусами l, m, n и прямой, направляющие косинусы которой пропорциональны $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ (направлению движения).

43. (Стр. 151.) Так как $\mu\alpha$ есть число силовых линий (лучше сказать, индукционных линий), которые проходят через единицу площади, расположенную перпендикулярно к оси абсцисс, то уравнение (79) даст нам число силовых линий, которые проходят через площадь, образуемую при движении проводником S в единицу времени.

44. (Стр. 157.) К этому мы можем добавить, что наше познание природы было фактически обогащено этими работами Максвелла. Если в других местах Максвелл говорит о своих ячейках, как о чем-то несомненно существующем в природе (например, на стр. 186), то это происходит, повидимому, только потому, что он не хочет повторять слишком часто, что здесь речь идет лишь о механической аналогии.

45. (Стр. 157.) Это, пожалуй, осуществляется со всей строгостью у вихрей с круговым поперечным сечением, но едва ли имеет место у вихрей с шестиугольным или квадратным поперечным сечением (ср. примечания 6, 20 и 21).

46. (Стр. 159.) Вопрос, обсуждавшийся позднее Томсоном и Тэтом, Гельмгольцем, Целльнером и другими о совместимости закона Вебера с принципом сохранения энергии, как видно, уже здесь поднимается Максвеллом. (Сравни «О фарадеевых силовых линиях», «Трактат», гл. XXIII и примечания к нему.—*Ред.*)

47. (Стр. 165.) Это известные уравнения теории упругости. Содержимое ячейки (вихрь) рассматривается теперь как обычное упругое тело, внутри которого силы упругости p_{xx} и т. д. действуют по тем же законам, по которым ранее действовали обозначенные такими же буквами силы во всей среде. Относительно той возможности, что упругое тело может частично вести себя как жидкое тело, сравни примечание 52, § 3.

48. (Стр. 166.) Согласно формулам, цитированным в примечании 8, для сил упругости, действующих на элемент поверхности, наклоненной относительно осей координат. Важно отметить, что действующая извне на шар тангенциальная сила в том случае, когда T положительно, действует так, что ее составляющая, параллельная оси z, имеет отрицательное направление, а перпендикулярная к последней составляющая направлена наружу.

49. (Стр. 168.) Согласно предложению VII $\rho R\delta S$ есть сила, с которой частицы вихря действуют в положительном направлении z на промежуточные частицы, относящиеся к элементу поверхности δS ячейки, причем $\rho R\ \delta S \sin\theta$ есть составляющая, касательная к ячейке. Сила, с которой те же промежуточные частицы действуют на прилегающие к одной стороне элемента поверхности δS частицы вихря в том же самом касательном направлении, должна быть (также согласно предложению VII) вдвое меньшей и направленной в противоположную сторону. Последней же силой является тангенциальная сила, действующая извне на соответствующие частицы вихрей, т. е. произведение δS на обозначенную в уравнениях (88), (89) и (91) буквой T величину.

Так как из сказанного в конце предыдущего примечания вытекает, что эта последняя сила противоположна силе $\rho R\ \delta S \sin\theta$, то, следовательно, $\frac{1}{2}\rho R\ \delta S \sin\theta = T\ \delta S$. Другая половина силы $\rho R\ \delta S \sin\theta$ действует на вихрь, прилегающий к другой стороне элемента поверхности δS. Сверх того, Максвелл утешает себя тем, что он рассматривает как шары те вихри, которые он ранее рассматривал как призмы с шестиугольным сечением, и что эти обе формы настолько похожи, что в крайнем случае только численный коэффициент может оказаться немного отличным при пользовании каждой из них.

50. (Стр. 168.) Сумму произведений количества промежуточных частиц, прилегающих к каждому из элементов, содержащихся в каком-нибудь объеме поверхностей раздела двух вихрей, на составляющие их смещения в направлении z мы будем называть моментом смещения всех промежуточных частиц в направлении z. Величина, которую Максвелл обозначает буквой h, и будет тогда этим моментом смещения всех содержащихся в единице объема промежуточных частиц. С другой стороны, момент смещения промежуточных частиц, расположенных на всех стенках, ограничивающих один вихрь, равен удвоенной сумме (101), т. е. $\sum \delta S\rho t \sin\theta$.

Если последнюю сумму рассчитать для всех находящихся в любом объеме V вихрей, общее количество которых равно N, и сложить все эти суммы, то получим.

(1) $$N\sum \delta S\rho t \sin\theta,$$

пока V так мало, что все содержащиеся в нем вихри ведут себя почти одинаково. Однако при этом каждый элемент поверхности содержащихся в V стенок ячеек мы считали дважды, один раз как границу одного, второй раз как границу другого прилегающего вихря. Полный момент смещения H промежуточных частиц, содержащихся в V, рассчитанный в направлении z, следовательно, равен половине величины, данной в формуле (1). Указанное в этой формуле знаком Σ интегрирование произвести очень легко. Для δS можно выбрать шаровую зону, лежащую между двумя параллельными кругами, соответствующими углам θ и $\theta+d\theta$, поверхность которой равна $\delta S = 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$. Если теперь вместо t подставить значение формулы (97), то

$$\sum \delta S\rho t \sin\theta = 2\pi\rho a^4 e \int\limits_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3} a^4 e,$$

отсюда

(2) $$H = \frac{2}{3} N a^4 e.$$

Если теперь пренебречь пространством, находящимся между шарообразными ячейками, то пространство V будет иметь объем $V = \frac{4\pi}{3} Na^3$, и так как h есть рассчитанный на единицу объема момент смещения, то мы имеем $H = Vh$, что, будучи сравнено с величиной (2), дает рассчитанную Максвеллом величину (103) для h. При выводе этого уравнения Максвелл все время применяет к телам ячеек уравнения равновесия теории упругости, что допустимо, однако, только тогда, когда h изменяется так медленно, что кинетическая энергия, соответствующая движению объемных элементов тел ячеек во время их деформации, исчезающе мала.

51. (Стр. 169.) При этом Максвелл принимает, что отношение $\frac{(3\mu - m)}{(6\mu - m)}$ поперечного сокращения к продольному растяжению не может иметь меньшего значения, чем значение, указанное Навье-Пуассоном $\left(\text{равное } \frac{1}{4}\right)$. Если допустить также возможность и меньших значений, то во всяком случае $m < 3\mu$, а отсюда $\frac{\pi m}{2} < E^2 < 3\pi m$. Впрочем это для последующего существенного значения не имеет.

52. (Стр. 170.) Сложность представлений, которые лежат в основе этих уравнений Максвелла, требует несколько более подробного объяснения.

§ 1. Содержимое каждой ячейки, которое мы будем называть телом ячейки, имеет следующее свойство: оно может свободно вращаться во всех направлениях. Оно окружено твердыми стенками, таким образом, что согласно уравнению (96) оно должно постоянно иметь форму шара неизменного радиуса. Если на него на двух противоположных концах диаметра действуют направленные в противоположные стороны тангенциальные силы, то оно приходит во вращение, которое может происходить без сопротивления. Если, наоборот, на обоих концах того же самого диаметра будут действовать направленные в одну сторону тангенциальные силы, что всегда будет иметь место, когда промежуточные частицы в пространстве, содержащем очень большое количество вихрей, будут тянуться все с примерно одинаковой силой в примерно одинаковом направлении, то его объемные элементы смещаются друг относительно друга, как это имеет место в упругом шаре, однако так, что частицы его поверхности остаются на шаре той же самой поверхности. Этот процесс мы будем называть деформацией тела ячейки, хотя при этом его «форма» не меняется. Обусловленные этим моменты смещения промежуточных частиц, содержащихся в единице объема, суть величины, которые мы обозначаем буквами f, g, h.

§ 2. Описанное свойство тел ячеек объясняет то, что промежуточные частицы не испытывают никакого сопротивления, когда они движутся вдоль стенки ячейки по замкнутым путям (здесь стенки ячейки опять предполагаются плоскими) так, что они не покидают стенки той же самой ячейки. Это, например, могло бы быть в том случае, когда соответствующая стенка ячейки разделяет два вихря, оси которых располагаются вдоль одной и той же прямой, и стенка ячейки перпендикулярна к этой прямой. В равной мере промежуточная частица не испытывает никакого сопротивления, если она передвигается по замкнутым путям по нескольким стенкам одного и того же вихря, ориентированным в любом направлении относительно оси вращения (ср. примечание 21). Это, например, всегда имеет место, когда мы считаем ячейки кубиками, ребра которых параллельны осям координат, когда магнитное поле однородно или когда для него $\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$ есть полный дифференциал, но направление поля составляет угол с осями координат.

§ 3. Все свойства, приведенные в § 1, конечно, не так легко привести к взаимному соответствию. Условию шарообразности тел ячеек противоречит то требование, что промежуточная частица, проходя более или менее длинный путь, одновременно касается двух вихрей (для обеспечения чего поперечные разрезы вихрей раньше предполагались шестиугольными). При расчете давления, производимого центробежной силой, тело ячейки предполагалось жидким, а сейчас оно рассматривается как твердое. Конечно, центробежная сила и в твердом теле (например, вращающемся Земном шаре) может развивать подобные давления, что и в жидком. Более того, мыслимы тела, которые при одних обстоятельствах ведут себя как твердые, а при других как жидкие (например, желатина, студень, лед, даже свинец, в одном случае при очень малых, а в другом — при очень больших давлениях). Однако для объяснения того, почему тела ячеек в одном случае ведут себя так, а в другом случае совершенно противоположным образом, была бы желательна более основательная мотивировка. Сила, которая предотвращает любое отклонение тела ячейки от шаровой формы, также находится в противоречии со свободным распространением центробежных сил по всем направлениям. Впрочем, если допустить радиальное смещение поверхностных элементов вихрей, то получились бы только незначительные изменения в числовых значениях коэффициентов, но не качественно отличные результаты.

§ 4. Прежде всего мы примем точно в том смысле, который ему придает Максвелл, сосуществование всех этих свойств. Тела ячеек не способны ни к какому другому изменению своей формы и положения, кроме как к вращению вокруг любой проходящей через их центры оси и деформации, которая в точности следует изложенным в предложении XII законам. Оба накладываются друг на друга; для последнего свойства направление наибольшего смещения может быть, естественно, любым, тогда как в предложении XII это направление выбрано как направление оси z. Согласно данному в примечании 51 определению момента смещения h содержащихся в единице объема промежуточных частиц, $\frac{dh}{dt}$ есть сумма всех содержащихся в единице объема промежуточных частиц, каждая из которых умножается на составляющую в направлении оси z скорости, обусловленной деформацией тела ячеек. Таким образом, $\frac{dh}{dt}$ есть число промежуточных частиц, которые по этой только причине прошли бы в единицу времени через перпендикулярную к направлению оси z единицу площади, если бы во всем соответствующем пространстве в течение этого времени их движение было бы приблизительно одинаковым (ср. примечание 23).

К этому добавляется еще смещение центров промежуточных частиц вследствие вращения вихрей. Полное количество промежуточных частиц, которые по этой причине прошли бы в единицу времени через единицу площади, перпендикулярную к направлению оси z, будет согласно уравнениям Максвелла (33) и (34)

$$\frac{\rho}{2}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right).$$

Так как оба действия накладываются друг на друга, то в проводящем диэлектрике полное число промежуточных частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади, перпендикулярную к направлению оси z, будет:

$$r=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)+\frac{dh}{dt}. \tag{1}$$

Так как согласно уравнению Максвелла (105)

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{4\pi E^2}\frac{dR}{dt}$$

(ср. максвеллово уравнение (111)), то можно также написать:

$$r=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}-\frac{1}{E^2}\frac{dR}{dt}\right), \tag{2}$$

что совпадает с третьим из максвелловых уравнений (112).

§ 5. В диэлектрически не поляризуемых проводниках выпадает последний член, так как в них E можно считать в известном смысле бесконечно большим. Никаких деформаций тел ячеек не происходит, и перемещение промежуточных частиц происходит только вследствие вращения тел ячеек. В непроводящем диэлектрике, однако, $p=q=r=0$. Согласно максвелловскому воззрению в диэлектрике центры промежуточных частиц абсолютно неподвижны, а вращение вихрей, при котором $\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz$ не является полным дифференциалом, может наступить только в результате одновременной деформации тел ячеек. Здесь p, q, r — составляющие плотности обычных гальванических электрических токов; $-\frac{df}{dt}$, $-\frac{dg}{dt}$, $-\frac{dh}{dt}$ — составляющие плотности токов смещения или диэлектрических поляризационных токов;

$$u=p-\frac{df}{dt},\quad v=q-\frac{dg}{dt},\quad w=r-\frac{dh}{dt} \tag{3}$$

—составляющие плотности полного тока. Из выражения (1) и аналогичных уравнений для других осей координат

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0. \tag{4}$$

Полные токи, следовательно, в силу механизма, связывающего вихри и промежуточные частицы, всегда замкнуты, без того чтобы промежуточные частицы должны были бы касаться друг друга или давить друг на друга. Плотность расположения промежуточных частиц согласно этой точке зрения остается неизменной в абсолютных изоляторах и в диэлектрически не поляризуемых проводниках, но не на их границах или в проводящих диэлектриках, так как в последних только благодаря одному вращению вихрей равна нулю разность между полным и обусловленным деформацией тел ячеек уплотнениями расположения промежуточных частиц.

§ 6. p, q, r в позднейших работах Максвелла снова считаются пропорциональными составляющим P, Q, R силы, действующей на единицу количества промежуточных частиц, а именно:

$$p = CP, \quad q = CQ, \quad r = CR, \tag{5}$$

вследствие чего уравнение (1) настоящего примечания переходит в

$$4\pi CR + \frac{1}{E^2}\frac{dR}{dt} = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}, \tag{6}$$

что является окончательной формой уравнения электрической силы в покоящихся проводящих диэлектриках во всех местах, где не действуют так называемые внешние электродвижущие силы (термоэлектродвижущие, гидроэлектродвижущие).

Уравнения (5), которые в настоящем труде Максвелла отсутствуют, могли бы быть истолкованы примерно следующим образом. Средние составляющие скорости центров промежуточных частиц пропорциональны величинам p, q, r. Уравнения (5) поэтому указывают, что эти составляющие скорости пропорциональны составляющим силы P, Q, R. Вследствие этого можно было бы себе представить, что эти центры испытывают пропорциональное их скорости сопротивление или стенок ячеек или при переходе от одной молекулы к другой. Составляющие сопротивления приходящегося таким образом на единицу количества частиц, именно $\frac{p}{C}$, $\frac{q}{C}$ и $\frac{r}{C}$, соответственно равны и противоположны силам P, Q, R, которые развиваются вихрями, действующими на промежуточные частицы, так как массы, а отсюда и ускорения последних исчезающе малы.

§ 7. Упомянутые в § 3 трудности могут быть частично обойдены при помощи следующего соображения, к которому сам Максвелл как будто склонялся впоследствии и которое было затем уточнено другими, например, Лоджем. Но при этом рациональное истолкование приведенных в § 2 допущений снова встречает большие трудности, и скорость распространения электромагнитных волн также не будет более равна скорости распространения поперечных колебаний в неограниченном твердом теле, субстанцией которого является вещество вихрей (см. примечание 58).

Мы рассмотрим следующую механическую картину. Тело, лежащее на упругой натянутой каучуковой мембране, передвигается по ней под действием силы R. При этом каучуковая мембрана деформируется и, кроме того, оказывает еще сопротивление трения $\frac{r}{C}$, которое, отклоняясь от законов, которым в других случаях следует трение, пропорционально относительной скорости r тела по отношению к тому месту деформационной каучуковой мембраны, по которому оно в данный момент скользит. Скорость тела должна изменяться столь медленно или его масса должна быть столь мала, что произведение его массы на ускорение всегда мало по сравнению с силой R, а следовательно, последняя почти равна сопротивлению трения $\frac{r}{C}$, которое опять-таки равно той силе, с которой тело растягивает мембрану. Мы считаем, что смещение h того места мембраны, на котором тело как раз находится, пропорционально последней силе, а следовательно, полагаем эту сумму примерно равной $4\pi E^2 h$. Полная скорость тела будет тогда

$$w = r + \frac{dh}{dt} = CR + \frac{1}{4\pi E^2}\frac{dR}{dt}\,. \tag{7}$$

§ 8. Теперь пусть отпадут совершенно деформации тел ячеек, а также и их принудительная шаровая форма. Пусть они будут жидкими и вращающимися в имеющих форму кубов (или какую-либо другую) ячейках. Около стенок ячеек должны быть, однако, расположены промежуточные частицы, которые совершенно так же, как и максвелловы, механически соединены с вихрями, так что скорость их центров является средней арифметической скоростей на периферии каждых двух вихрей, с которыми они соприкасаются, в тех именно местах, где происходит это соприкасание. Это взаимное соприкасание тел ячеек и промежуточных частиц происходит так, как если бы промежуточные частицы имели зубья, а периферия тел ячеек представляла бы собой нерастяжимую цепь, цепляющуюся за зубья промежуточных частиц... Из этого механизма взаимного проникновения тел ячеек и промежуточных частиц следуют уравнения Максвелла (33) и (34), а следовательно,

$$r = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right)\,. \tag{8}$$

Из этого и двух аналогичных уравнений для других осей координат получаем:

$$\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0. \tag{9}$$

Плотность промежуточных частиц, следовательно, в силу принятого механизма сцепления с вихрями не может изменяться ни в каком месте пространства без того, чтобы две соседние промежуточные частицы не соприкасались друг с другом и давили одна на другую. Сила, с которой вихри благодаря этому действуют на единицу количества промежуточных частиц и которая должна иметь в направлении осей координат составляющие P, Q, R, соответствует силе R, которая действовала на описанное в предыдущем параграфе тело. Подобно тому как это тело ведет себя по отношению к описанной там каучуковой мембране, здесь центры промежуточных частиц ведут себя по отношению к стенкам ячеек. Они скользят вдоль стенок ячеек и испытывают при этом сопротивление, пропорциональное их скорости относительно стенки ячейки. Так как они не обладают массой, то движутся с такой скоростью, что это сопротивление равно силе, с которой вихри действуют на промежуточные частицы, силе, имеющей составляющими P, Q, R.

Реакция сопротивления скольжению на стенки ячеек имеет составляющие P, Q, R. Благодаря этой реакции затронутые места стенок ячеек смещаются (деформируются) пропорционально действующей силе. Пусть теперь вследствие деформации стенок ячеек через три перпендикулярные к направлениям координат и равные единице площадки проходят числа промежуточных частиц f, g, h; вследствие изменения деформации тогда в единицу времени пройдут $\frac{df}{dt}$, $\frac{dg}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$ частиц. Пусть вследствие скольжения по деформированным стенкам ячеек в единицу времени проходят количества u, v, w, а в силу обеих причин (скольжения и изменения деформации стенок ячеек) проходят количества p, q, r. Так как u, v, w пропорциональны скоростям скольжения, а эти скорости скольжения пропорциональны P, Q, R, можно положить:

$$u = CP, \quad v = CQ, \quad w = CR. \tag{10}$$

Из аналогичных соображений

$$f = \frac{1}{4\pi E^2} P, \quad g = \frac{1}{4\pi E^2} Q, \quad h = \frac{1}{4\pi E^2} R. \tag{11}$$

Наконец, как в предыдущем параграфе, накладываются друг на друга движение скольжения и движение, вызванное деформацией. Следовательно,

$$p = u + \frac{df}{dt} = CP + \frac{1}{4\pi E^2}\frac{dP}{dt} \text{ и т. д.,} \tag{12}$$

что, будучи подставлено в уравнение (8) и другие аналогичные уравнения, снова дает уравнение (6) и другие ему подобные. Теперь, следовательно, u, v, w соответствуют току гальванической проводимости, p, q, r — всему току, в то время как в первоначальном представлении Максвелла p, q, r соответствовали первому, а u, v, w — последнему. Составляющие тока смещения, выраженные через $\frac{df}{dt}$ и т. д., изменили свои знаки. Плотность расположения промежуточных частиц осталась неизменной.

§ 9. Я позволю себе испытать терпение читателей еще одним специальным разъясняющим примером. Проволочный проводник, имеющий повсюду круговое сечение, образует замкнутое кольцо. Пусть в каком-либо месте проводника находится электродвижущая сила, которая вызывает в проволоке длительный электрический ток. Тогда вдоль всех, одинаково со средней линией проволоки направленных «волокон» промежуточные частицы движутся с одинаковой постоянной скоростью. Чтобы это было возможно, вихри, находящиеся поблизости от средней линии, вращаются медленнее, а находящиеся вблизи поверхности — быстрее. Теперь представим себе, что пространство между двумя поперечными сечениями A и B проволоки, расстояние между которыми мало по сравнению с радиусом проволоки, вместо того чтобы быть заполненным веществом проволоки, заполнено непроводящим диэлектрическим веществом, представляющим собой нечто вроде включенного в цепь тока конденсатора. Так как вихри в диэлектрическом слое связаны с вихрями проволоки, то они первоначально вращаются в том же направлении вблизи от средней линии медленно, а дальше от нее — быстрее.

По этой, именно, причине, а не вследствие давления промежуточных частиц проволоки промежуточные частицы в диэлектрическом слое смещаются в том же направлении, что и в проволоке; пусть это направление будет от левого поперечного сечения A к правому поперечному сечению B. При этом они, если мы прежде всего будем следовать точке зрения предыдущего параграфа, смещают в диэлектрике стенки ячеек и испытывают сопротивление, пропорциональное этому смещению, что останавливает вихри в диэлектрике. Поскольку эти вихри связаны с вихрями в проволоке, эти последние, а с ними и движение промежуточных частиц проволоки прекращаются. Промежуточные частицы повсюду остаются на равных расстояниях и не давят друг на друга; стенки ячеек возвращаются в проволоке в прежнее положение, как только прекращается движение промежуточных частиц: в диэлектрическом же слое они остаются длительно смещенными в правую сторону. Следовательно, вещество упругих стенок ячеек около A растянуто, а около B уплотнено. Первое представляет собой положительный заряд A, так как относительно стенок промежуточные частицы уплотнены. В равной мере около B они разрежены.

Несколько иначе все это происходит, если положить в основу первое представление Максвелла. Согласно этому представлению центры промежуточных частиц в диэлектрическом слое находятся в состоянии покоя. Распределение промежуточных частиц, следовательно, испытывает у положительно заряженного сечения A уплотнение, а у отрицательно заряженного разреза B разрежение. Вращение вихрей в проводящей проволоке остается таким же, как и раньше. Теперь те вихри диэлектрика, которые прилегают непосредственно к A, связаны с прилегающими вихрями проводника, их часть, обращенная к A, будет, следовательно, вращаться в том же самом направлении, что и вихри проволоки, именно, это вращение будет медленным вблизи средней линии и более быстрым на периферии. Следовательно, промежуточные частицы будут толкаемы (слева направо), а поскольку их центры в диэлектрике неподвижны, то произойдет деформация вихрей. Для того чтобы при этой деформации различные поверхностные элементы вихря не были бы смещены друг относительно друга иначе, чем это предполагает Максвелл, мы должны заранее допустить, что все промежуточные частицы, которые относятся к одной и той же параллели вихря, перпендикулярной к средней линии проволоки, действуют одинаково. (Возможно, что давят только стенки ячеек как одно целое.) Так как далее на деформацию накладывается вращение, то противоположная сечению A сторона прилегающих к A вихрей движется в том же направлении, как будто это — вихри в проволоке. Таким образом, вращение и деформация передаются следующему слою вихрей, которые несколько более удалены от A. Теперь фактором, в результате которого ток в проволоке прекращается, является сопротивление деформации тел ячеек.

§ 10. Если мы захотим заменить не вполне свободный от недостатков способ вывода Максвеллом уравнений (54) получением их из принципа Гамильтона, при помощи которого получают также уравнения (12) этого примечания, и таким образом сделать то обоснование, которым мы пользовались до сих пор, необязательным, то следует поступать следующим образом. Мы принимаем представления § 8 и вводим кроме уже принятых до сих пор следующие обозначения: А, В, Г пусть будут угловые вращения вихря, l, m, n — составляющие смещения центра промежуточной частицы относительно деформированной стенки ячейки, а штрих пусть выражает дифференцирование по времени, так что $\alpha = A'$, $u = l'$, $p = f' + l'$, и т. д.

Мы принимаем единственно имеющуюся в наличии кинетическую энергию, а именно кинетическую энергию вихрей, равной

$$T = \frac{\mu}{8\pi}(\mathrm{A}'^2 + \mathrm{B}'^2 + \Gamma'^2); \tag{13}$$

потенциальную энергию деформации стенок ячеек будем считать равной

$$V = \frac{1}{8\pi E^2}(f^2 + g^2 + h^2); \tag{14}$$

работу, произведенную скользящим трением, мы положим равной

$$\delta\Omega = C\,(l'\delta l + m'\delta m + n'\delta n). \tag{15}$$

Теперь уравнения Максвелла (33) и (34) могут быть написаны в форме

$$(16)\qquad f+l=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dy}\right)\ \text{и т. д.}$$

Эти уравнения следует рассматривать как механические условия для системы, зависящие от взаимного сцепления вихрей и промежуточных частиц. Принцип Гамильтона дает:

$$(17)\qquad \int\int\int\int dx\,dy\,dz\,dt\,(\delta T-\delta V-d\Omega)=0.$$

Мы не будем подробно выписывать формулы, а только наметим ход решения. Оба члена, содержащие δf и δl, пишем в форме

$$(18)\qquad Cu\,(\delta f+\delta l)+\left(\frac{f}{8\pi E^2}-Cu\right)\delta f.$$

Так как δf совершенно произвольно, то прежде всего из этого вытекает, что

$$\frac{f}{8\pi E^2}=Cu.$$

Мы обозначим эту величину через P, а аналогичные величины для осей y и z через Q и R. Теперь согласно соотношению (16) полагаем:

$$\delta f+\delta l=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\delta B}{dx}-\frac{d\delta A}{dy}\right).$$

Подставляя все это в уравнение (17), интегрируем по частям члены с δA, δB, $\delta \Gamma$ по времени, а члены, содержащие $\frac{d\delta A}{dx}$, по x и т. д.

В полученном таким путем выражении можно коэффициенты при δA, δB и $\delta \Gamma$ в отдельности считать равными нулю, откуда непосредственно получаются уравнения Максвелла (54).

§ 11. Из всех до сих пор полученных уравнений можно правильно рассчитать все электромагнитные возмущения в поле, но с их помощью можно также доказать, что такие возмущения никогда не могут образоваться, если только их нет в наличии с самого начала, поскольку мы не ввели никаких внешних электродвижущих сил. В тех местах пространства, где действуют такие силы (термоэлектрические, гидроэлектрические, а также электризация путем трения шелка об стекло и т. д.), уравнение (6) настоящего примечания требует дополнения. Простейшим образом, достаточным для установления совпадения с опытом, это дополнение получается по методу Герца, именно, к этому уравнению добавляет еще одно слагаемое $\mathfrak{r}$, которое зависит только от свойств внешней электродвижущей силы в данной точке пространства. Подобные же слагаемые $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ должны быть добавлены к уравнениям для направлений x и y. Об этих величинах $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ известно лишь то, что они (во всяком случае их средние значения) пропорциональны величине гидроэлектродвижущих, термоэлектродвижущих сил и т. д. Они получаются из принципа Гамильтона, если мы будем «считать» α, β, γ смещениями и f, g, h — скоростями *).

53. (Стр. 170.) Величина e, которую, впрочем, согласно введенной Герцем терминологии можно было бы обозначить как плотность истинного электричества, является фактически в первой из рассмотренных здесь механических моделей Максвелла излишком промежуточных частиц в единице объема по сравнению с нормальным состоянием. Эта величина должна быть равна нулю в идеальных изоляторах, так как в них центры промежуточных частиц вообще неподвижны, но также и в диэлектрических неполяризуемых проводниках, так как в них тела ячеек не могут быть деформированы. В проводящих диэлектриках или на границе проводника и непроводника **) центры промежуточных частиц могут, напротив, в результате деформации тел ячеек уплотниться. Напряжения этой деформации тогда производят электростатические силы.

Так как p, q, r суть полные числа промежуточных частиц, в единицу времени проходящих через три перпендикулярные к направлениям осей координат плоские поверхности с площадью, равной единице, то согласно гидродинамическому уравнению непрерывности для потока сжимаемой жидкости имеет силу максвеллово уравнение (113). Поскольку вследствие одного только вращения тел ячеек (если бы последние не могли быть деформированы) невозможно уплотнение промежуточных частиц, их общее уплотнение должно быть равно уплотнению, вызванному деформацией, а именно:

$$\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}=\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}\right),$$

что следует также непосредственно из уравнения (1) предыдущего примечания и соответствующих уравнений для других осей

---

*) Ср. Boltzmann, Vorles. über Maxwell Theorie, II, стр. 7, изд. Barth, 1893.

**) В этом случае следует представить себе слой, в котором свойства одного вещества непрерывно переходят в свойства другого, которое, следовательно, должно быть проводящим диэлектриком. Вещества, которые и не проводят и не могут быть диэлектрически поляризуемы, должны быть исключены.

координат. Если поэтому u, v, w суть величины, определенные уравнениями (8), то

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

т. е. полные токи всегда замкнуты.

Согласно концепции, рассмотренной в § 8 предыдущего замечания, это выражается уравнением

$$\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}=0.$$

Согласно этой концепции, следовательно, какое-либо уплотнение в расположении промежуточных частиц исключается. Истинное электричество было бы там, где вследствие скольжения промежуточных частиц по стенкам ячеек, если бы только это скольжение имело место, собралось большое число промежуточных частиц. Однако равное число частиц было бы убрано деформацией стенок ячеек, упругие силы которой вызывают электростатическое напряжение.

54. (Стр. 172.) За пределами второго тела $e_2=0$; полное количество электричества во втором теле, однако, равно интегралу $\int e\,dV$, взятому по объему последнего. В этой формуле и в формуле (127) e_1 и e_2 суть полные количества электричества, в то время как раньше они были плотностями электричества.

Все это аналогично тому, что было в формулах (20) и (21) для магнетизма (ср. примечание 15).

55. (Стр. 172.) Так как плотности тока p, q, r ранее измерялись магнитными единицами, то и e получено как измеренное в магнитных единицах.

56. (Стр. 174.) Фигурирующая здесь величина ρ естественно есть обозначенная той же буквой в максвелловой формуле [1a] объемная плотность вещества вихрей или тел ячеек, но не обозначенная той же самой буквой в формуле (34) поверхностная плотность промежуточных частиц. Равным образом и μ есть теперь та величина, которая этой же буквой обозначена в максвелловой формуле (1), а не μ предложения XII (уравнения (80), (82) и т. д.). В предложении I уравнение (1) было: $\mu=4\pi C\rho$; далее, при тех ограничениях, при которых действительно уравнение [1a], $C=\frac{1}{4}$, а отсюда $\mu=\pi\rho$.

57. (Стр. 175.) Здесь Максвелл ни в коем случае не рассчитывает скорость распространения электромагнитных волн в придуманной им среде, а определяет скорость распространения, обыкновенных поперечных волн в неограниченной твердой среде,

которая имеет те же самые свойства, что и тела ячеек. Очевидно, что он еще не отказывается от идеи, что свет состоит из поперечных колебаний в смысле, придаваемом этому понятию старой волновой теорией. Однако электромагнитные волны в придуманной им среде, очевидно, существенно отличаются от обычных поперечных волн в неограниченных упругих телах.

Рассмотрим для простоты линейно поляризованные стоячие волны.

Пусть ось абсцисс будет направлением колебания, положительное и, соответственно, отрицательное направления z—направлениями распространения обеих волн, интерференцией которых образованы стячие волны; первое будем называть просто направлением распространения стоячих волн. В случае электромагнитных волн промежуточные частицы движутся около пучности электрической силы туда и обратно параллельно оси абсцисс. Однако производная по z их амплитуды равна нулю. Следовательно, движение с обеих сторон тела ячеек одно и то же; они не вращаются, а только деформируются, причем их поверхностные элементы, обращенные в сторону положительных и отрицательных z, всегда движутся одновременно в том же самом, в среднем параллельном оси абсцисс, направлении.

В узлах колебаний электрической силы колебательное движение в поперечном направлении промежуточных частиц исчезающе мало, но зато производная по z максимальна. Следовательно, там промежуточные частицы движутся на сторонах, обращенных к положительным и отрицательным z, одного вихря в противоположных направлениях. Тела ячеек не деформируются, но вращаются туда и обратно около осей, параллельных направлению y. Периодически меняются магнитные поляризации, осями которых является направление y (пучности магнитной силы). При этом тела ячеек всегда остаются заключенными в шаровые оболочки, в то время как при обычных поперечных волнах элементы объема сами перемещаются туда и обратно на конечные расстояния в пучностях волн. Напротив, движение тел ячеек около пучностей волн электрической силы, которые совпадают с узлами колебаний магнитной силы, имеют много общего с относительным движением частиц одного и того же объемного элемента в пучностях колебаний обычных поперечных волн. И там и здесь части упругого тела колеблются под действием тех же упругих сил, перпендикулярных к направлению распространения волн. Также и вращение тел ячеек в пучностях волн магнитной силы аналогично вращению объемных элементов около узлов поперечных волн. Поэтому можно ожидать в обоих случаях приблизительно равной скорости распространения.

Не следует придавать особого значения тому, что Максвелл находит их в точности численно совпадающими; поскольку, во-первых, он это находит только при предварительном условии существования отношения Навье-Пуассона между продольным растяжением и поперечным сжатием, а во-вторых, он при-этом в формулах [1а] и (102) не принимает во внимание лежащее между вихрями пространство. Далее Максвелл при расчете центробежной силы рассматривает вихри как жидкие, а при их деформации как твердые, при определении скорости на периферии—как цилиндры с сечением, имеющим форму круга, а при рассуждении о движении промежуточных частиц — как призмы с шестиугольным сечением, и т. д.

С другой стороны, Максвелл, естественно, нашел бы бесспорно точное совпадение скорости распространения электрических волн с отношением электростатически и электромагнитно измеренной единицы электричества, совершенно независимо от любой механической модели, если бы он вывел скорость распространения электромагнитных волн из своих уравнений для основных электрических и магнитных величин, что легко сделать уже из данных здесь Максвеллом уравнений, а именно, для воздуха $p=q=r=0$, $\mu=1$ и вследствие отсутствия свободного магнетизма $\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0$. Поэтому из уравнений (112) получаем, если мы дифференцируем второе по z и вычитаем из результата дифференцированное по y третье уравнение:

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{d^2\alpha}{dz^2}=\frac{1}{E^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right),$$

в то время как по уравнению (53)

$$\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}=\frac{d\alpha}{dt},$$

откуда немедленно следует известное уравнение для волн, скорость распространения которых равна E.

58. (Стр. 175.) Пусть ось абсцисс перпендикулярна к проводящей пластинке конденсатора. Электричество мы представляем себе сконцентрированным в тонком прилегающем к пластинке конденсатора слое, имеющем толщину δ. Пусть dx будет дифференциал толщины этого слоя. Находящееся на единице площади электричество содержится тогда в цилиндре, имеющем основание, равное единице, и высоту δ и выражается взятым по этому цилиндру интегралом $\int e\,dx$.

В формуле (115) $Q=R=0$; отсюда

$$\int e\,dx=\frac{1}{4\pi E^2}(P_1-P_0).$$

Значение P_0 электрической силы на внутренней стороне слоя толщины δ равно ее значению в металле, т. е. нулю, а значение на внешней стороне P_1 равно $\frac{d\Psi}{dx}=\frac{(\Psi_2-\Psi_1)}{\theta}$, откуда

$$\int e\,dx=\frac{\Psi_2-\Psi_1}{4\pi E^2\theta}.$$

59. (Стр. 176.) Правильность теории Максвелла уже задолго до классических опытов Герца представлялась весьма вероятной, благодаря подтверждению этого вывода при измерениях на кристаллах серы (Wien. Sitz.—Ber., II, т. 70, стр. 342, 1874 г.), а также на основании сделавшейся исторической формулы (142).

60. (Стр. 177.) Для того чтобы найти эту формулу, нужно разложить силу поля на две составляющие в направлениях наибольшей и наименьшей диэлектрической постоянной для плоскости, которая перпендикулярна к оси вращения шара. Диэлектрическую поляризацию шара тогда рассчитывают через каждую из этих составляющих совершенно так, как рассчитывают намагничение шара в однородном магнитном поле. Наконец, определяют силу, с которой действует каждая составляющая на шар в результате обусловленного другой составляющей диэлектрического момента. Здесь, пожалуй, впервые идет речь о пондеромоторном действии наэлектризованных тел на исключительно диэлектрически поляризованные тела (так называемое диэлектрическое дальнодействие), причем в данном случае, конечно, имеется в виду только действие при вращении.

61. (Стр. 184.) Как и при расчете скорости распространения волн, Максвелл здесь опять совершенно оставляет в стороне свою гипотезу, что эфир разделен на ячейки и что ни центры тел ячеек не могут менять своего места, ни их поверхности— своей формы. Он рассматривает обычные поперечные колебания среды, содержащей вихри, которая, однако, во всем остальном ведет себя совершенно подобно светоносному эфиру старой волновой теории.

62. (Стр. 185.) Определение того, что Максвелл называет угловым моментом, есть следующая сумма: массу каждой находящейся в вихревом движении частицы умножают на проекцию поверхности, которую в единицу времени описывает луч, проведенный к ней из фиксированной точки оси вращения, на плоскость, перпендикулярную к оси вращения, и складывают все таким образом полученные произведения.

63. (Стр. 185.) Приведенное, не во всех случаях, правда, верное правило Верде Максвелл объясняет именно тем, что в объемных элементах диамагнитных тел субстанция, обладающая массой и инерцией, вращается в том направлении, в каком течет положительное электричество в намагничивающем ее токе,

в парамагнитных же телах—в обратном направлении, и что свет есть колебательное движение частиц, также обладающих массой и инерцией. Промежуточные частицы должны, однако, перемещаться в молекулярных потоках электромагнита и в намагничивающем его токе в том же самом направлении, в каком вращаются вихри в электромагните.

64. (Стр. 186.) Само собой разумеется, что Максвеллу в то время было неизвестно, что металлическое железо вращает плоскость поляризации в том же направлении, как и большинство диамагнитных веществ.

65. (Стр. 187.) Совершенно точное определение приведено в примечании 62.

66. (Стр. 188.) Необходимо заметить, что x есть текущая координата положения частицы, в то время как z обозначает смещение этой частицы во время колебаний.

67. (Стр. 189.) Так как Максвелл рассматривает световой эфир как обычное твердое упругое тело, то для него имеет силу аналогичное уравнению (3) текста уравнение движения твердого упругого тела, на которое не действуют никакие внешние объемные силы:

$$\rho\frac{d^2n}{dt^2}=\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}. \tag{1}$$

Для изотропного упругого тела силы упругости P_{xx}, P_{xy} и т. д. выражены уравнениями (82) и (83) текста, как функции смещений ξ, η, ζ. Так как для рассматриваемых сейчас поперечных колебаний $\zeta=0$, а ξ и η являются только функциями z и t, то из этого можно немедленно видеть, что $p_{xx}=p_{yy}=$ $=p_{zz}=p_{xy}=0$, $p_{xz}=\frac{m\,d\xi}{2dz}$, $p_{yz}=\frac{m\,d\eta}{2dz}$.

Величины, которые Максвелл там обозначал через ξ, η, p_{xz} и p_{yz}, он обозначает теперь через x, y, X, Y. Следовательно, мы имели бы:

$$X=\frac{m}{2}\frac{dx}{dz},\quad Y=\frac{m}{2}\frac{dy}{dz}. \tag{2}$$

Он рассматривает затем движение света в кристаллах, а отсюда и эфир как анизотропное тело. Для него он принимает опять $p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=p_{xy}=0$ и пишет вместо уравнений (2):

$$X=k_1\frac{dx}{dz},\quad Y=k_2\frac{dy}{dz}, \tag{3}$$

что мы считаем, без сомнения, допустимым только тогда, когда плоскости координат являются плоскостями симметрии. Уравнение (1), следовательно, будет при новом обозначении:

$$\rho \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dp_{yz}}{dz}, \tag{4}$$

где p_{yz} равно величине Y в уравнении (3) настоящего примечания в том случае, когда среда не содержит вихрей. Если же вихри имеются, то по представлению Максвелла вследствие деформации и вращения объемных элементов во время колебаний движение вихрей в среде постоянно изменяется в соответствии с установленными в предложении X законами, благодаря чему на объемные элементы снова начинают действовать силы. Поэтому к силам упругости должны быть присоединены также и силы, вызванные изменением вихрей.

Если мы обозначим через Y' составляющую последней силы, соответствующую составляющей Y силы упругости, тогда, следовательно, будет:

$$\rho \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dY}{dz} + \frac{dY'}{dz}. \tag{5}$$

Величину Y' Максвелл определяет при помощи следующего рассуждения: так как в каждой плоскости, параллельной плоскости xy, все точки и без того ведут себя одинаково, то он рассматривает образованный из светового эфира цилиндр, основание которого параллельно плоскости xy, площадь которого равна единице, а высота dz. Лежащие вне цилиндра частицы эфира, которые непосредственно прилегают к обращенному к отрицательным z основанию цилиндра, производят в отрицательном направлении оси y силу $p_{yz} = Y$, действующую на непосредственно прилегающие частицы цилиндра. Такая же сила Y действует на частицы эфира, прилегающие к противоположному основанию цилиндра, но в положительном направлении оси y. Эти обе силы образуют действующий на цилиндр вращательный момент $M = Y\,dz$ в отрицательном направлении около положительной оси x. Аналогично Y' дает момент $M' = Y'\,dz$ в отрицательном направлении оси x или, иначе говоря, момент $-Y'\,dz$ в положительном направлении. Последний момент должен согласно закону площадей равняться производной по времени «углового момента» вихрей относительно оси x, или, следовательно, по уравнению (144)

$$= \frac{\mu}{4\pi} r\,dz \frac{d\alpha}{dt},$$

откуда следует:

$$Y' = -\frac{\mu}{4\pi} r \frac{d\alpha}{dt}.$$

Подстановка этого значения и значения (3) настоящего примечания вместо Y в уравнение (5) дает второе из уравнений (146) текста.

В какой мере является оправданным предположение, что упругая сила Y, возбужденная при том же колебании, но в среде без вихрей, и необходимая для изменения движения вихрей сила Y' пропорциональны моментам M и M', может быть пояснено еще на одном простом примере. Пусть имеется прямолинейная цепочка из маленьких сферических оболочек, диаметр которых есть δ. Эти оболочки связаны по два натянутым упругим шнуром, который будем считать не имеющим массы. Начальная точка первого и конечная точка последнего шнура закреплены. Массу имеют только сферические оболочки. Пусть эта цепь подобно шнуру известного аппарата Мельда совершает стоячие поперечные колебания, так что центр каждой сферической оболочки описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к первоначальному прямолинейному направлению цепи G. Мы будем называть это круговыми поперечными колебаниями. Тогда шнуры образуют синусоидальную линию. Составляющая напряжения, перпендикулярная к G, является силой Y, которая поддерживает поперечные колебания. Оси сферических оболочек линии, соединяющие точки прикрепления шнуров, устанавливаются в направлении последних. На них, правда, не действует какой-либо вращательный момент, обусловленный общим напряжением шнуров, но одни только составляющие напряжения Y дали бы вращательный момент $M = Y\delta$.

Пусть теперь сферические оболочки содержат вращающиеся волчки, оси вращения которых совпадают с осями оболочек.

Все волчки, за исключением находящихся в пучностях, должны будут при ранее описанных стоячих круговых поперечных колебаниях всей цепи осуществлять прецессионное движение, причем их полюса описывают круги в том же направлении, что и цепь.

Для того чтобы получить эту прецессию, шнуры должны действовать на оболочки с вращательным моментом M'. Этот момент в том случае, если волчки вращаются в том же направлении, что и цепочки (случай A), должен стремиться увеличить наклон оси относительно прямой G, а в другом (случай B)—уменьшить.

В первом случае M' действует в том же направлении, следовательно, имеет одинаковый знак с M, а во втором случае—противоположный. Поэтому оси шаровых оболочек уже не устанавливаются в направлении шнуров; какой-нибудь шнур образует угол ϑ'' с прямой G, который в случае A будет меньше, а в случае B—больше чем угол ϑ, который он раньше при равной амплитуде образовывал с прямой G (т. е. когда круги, описываемые центрами всех сферических оболочек, имели неизменную величину). Составляющая напряжения шнура, перпендикулярная к этой прямой, теперь будет силой, которая поддерживает поперечные колебания; назовем ее Y''. Если $M''=Y''\delta$ есть вращательный момент, с которым составляющая Y'' действует на сферическую оболочку, то мы сейчас же видим, что $Y'' : Y = M'' : M$. С другой стороны, при равной амплитуде $M''=M+M'$, так как в случае B, где M и M' имеют противоположные знаки, ϑ'' есть разность угла ϑ и того угла, который обусловил бы момент M. В этом случае $Y'' < Y$ и колебания цепи происходят медленнее. Изменение времени колебаний может быть рассчитано, когда даны все отношения. Вихри не могут быть математически бесконечно малыми, так как в этом случае они не оказывали бы никакого действия.

В упругой среде, следовательно, облегающие их объемы должны быть малыми, но конечными. Для этих объемов не должно быть $p_{yz}=p_{zy}$. Для расчета вращательного момента вокруг оси, который действует на эти объемы, Максвелл рассматривает только силу p_{yz}. Если бы мы допустили, что и сила p_{zy} также добавляет сюда половину, будучи иной, чем при равной деформации без вихрей, то возможно, что результат был бы несколько изменен.

Моделью для рассматриваемых Максвеллом в четвертой части этой работы механических процессов может служить маятник, свободно вращающийся вокруг точки, подобно маятнику Фуко, в котором установлен быстро вращающийся волчок, ось вращения которого совпадает со средней линией штанги маятника. Описываемая концом маятника кривая может быть сделана видимой при помощи высыпающегося песка или наконечника, пишущего на расположенной под маятником горизонтальной плоскости.

На рис. 12 Максвелла нижние стрелки представляют собой силы, с которыми верхние частицы действуют на нижние, а верхние стрелки, наоборот, силы, с которыми нижние частицы действуют на верхние. В том случае, когда система координат предполагается английской, ось y должна быть направлена назад.

68. (Стр. 189.) Здесь $\delta\alpha$ обозначает приращение, которое получает α в течение времени dt, а δx приращение, которое получает смещение x в течение времени dt. Если разделить все на dt, то тогда можно написать $\frac{d\alpha}{dt}$ и $\frac{dx}{dt}$ вместо $\delta\alpha$ и δx.

69. (Стр. 193.) При этом следует еще вместо μ согласно уравнению (1) Максвелла подставить значения $4\pi C\rho$ или $\pi\rho$, если,

как в максвелловом уравнении [1a], мы полагаем $C = \frac{1}{4}$. Затруднение состоит здесь в том, что μ почти во всех веществах приблизительно одинаково, а ρ должно быть обратно пропорционально i^2. При этом следовало бы все-таки полагать, что для различных веществ количество вихрей, проходящих через единицу поперечного сечения, различно, иначе говоря, неодинакова плотность расположения вихрей, а следовательно, и величина C.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ЧАСТЬ I

ВВЕДЕНИЕ *) (1)

(1) Наиболее очевидным механическим явлением при электрических и магнитных опытах является взаимодействие, благодаря которому тела, находящиеся в определенных состояниях, приводят друг друга в движение, несмотря на наличие между ними довольно значительного расстояния.

Поэтому для научной трактовки этих явлений прежде всего необходимо установить величину и направление действующей между телами силы, и если найдено, что эта сила в какой-то мере зависит от относительного положения тел и от их электрического или магнитного состояния, то с первого взгляда кажется естественным объяснение этих фактов путем допущения существования чего-то другого, находящегося в покое или в движении в каждом теле, образующего его электрическое или магнитное состояние и способного действовать на расстоянии в соответствии с математическими законами.

Таким путем возникли математические теории статического электричества, магнетизма, механического действия между проводниками, несущими токи, и теория индукции токов.

В этих теориях сила, действующая между двумя телами, рассматривается лишь как зависящая от состоя-

*) Royal Society Transactions, т. CLV 1864.

ния тел и их относительного положения, окружающая среда не принимается во внимание.

Эти теории допускают более или менее явным образом существование субстанций, частицы которых обладают способностью действовать друг на друга на расстоянии. Наиболее полная разработка теории этого рода принадлежит В. Веберу *), который включил в нее как электростатические, так и электромагнитные явления.

Сделав это, он, однако, вынужден был допустить, что сила, действующая между двумя электрическими частичками, зависит не только от их взаимного расстояния, но и от их относительной скорости.

Эта теория, так как она была развита Вебером и Нейманом **), чрезвычайно остроумна и удивительно исчерпывающа в ее применении к явлениям статического электричества, электромагнитных притяжений, индукции токов и диамагнитных явлений; эта теория для нас тем более авторитетна, что она была руководящей идеей того, кто сделал столь большие успехи в практической части науки об электричестве как путем введения постоянной системы единиц в электрические измерения, так и путем фактического определения электрических величин с неизвестной до сих пор точностью ([2]).

(2) Однако механические трудности, связанные с допущением существования частиц, действующих на расстоянии с силами, зависящими от их скоростей, таковы, что они не дают мне возможности рассматривать эту теорию как окончательную, хотя возможно, что она и сейчас может быть полезной в отношении установления координации между явлениями.

Поэтому я предпочел искать объяснения фактов в другом направлении, предполагая, что они являются результатом процессов, которые происходят как

---

*) Elektrodynamische Maassbestimmungen, Leipzig. Trans., т. I, 1849, и Taylor's Scientific Memoirs, т. V, глава XIV.

**) «Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarizationis per vires electricas vel magneticas declinetur», Halis Saxonum, 1858.

в окружающей тела среде, так и в самих возбужденных телах, и пытаясь объяснить взаимодействия между удаленными друг от друга телами без допущения существования сил, способных непосредственно действовать на заметных расстояниях.

(3) Та теория, которую я предлагаю, может быть названа теорией *электромагнитного поля*, потому что она имеет дело с пространством, окружающим электрические или магнитные тела, и она может быть названа также *динамической* теорией, поскольку она допускает, что в этом пространстве имеется материя, находящаяся в движении, посредством которой и производятся наблюдаемые электромагнитные явления.

(4) Электромагнитное поле—это та часть пространства, которая содержит в себе и окружает тела, находящиеся в электрическом или магнитном состоянии ([3]).

Это пространство может быть наполнено любым родом материи или мы можем попытаться удалить из нее всю плотную материю, как это имеет место в трубках Гейсслера или в других, так называемых вакуумных ([4]). Однако всегда имеется достаточное количество материи для того, чтобы воспринимать и передавать волновые движения света и тепла. И так как передача излучений не слишком сильно изменяется, если так называемый вакуум заменить прозрачными телами с заметной плотностью, то мы вынуждены допустить, что эти волновые движения относятся к эфирной субстанции, а не к плотной материи, присутствие которой только в какой-то мере изменяет движение эфира.

Мы поэтому имеем некоторое основание предполагать, исходя из явлений света и тепла, что имеется какая-то эфирная среда, заполняющая пространство и пронизывающая все тела, которая обладает способностью быть приводимой в движение, передавать это движение от одной своей части к другой и сообщать это движение плотной материи, нагревая ее и воздействуя на нее разнообразными способами.

(5) Энергия, сообщенная телу нагреванием, должна была ранее существовать в движущейся среде, ибо вол-

новые движения оставили источник тепла за некоторое время до того, как они достигли самого нагреваемого тела, и в течение этого времени энергия должна была существовать наполовину в форме движения среды и наполовину в форме упругого напряжения. Исходя из этих соображений, профессор В. Томсон *) доказывал, что эта среда должна обладать плотностью, сравнимой с плотностью обычной материи, и даже определил нижнюю границу этой плотности.

(6) Поэтому мы можем как данное, выведенное из отрасли науки, независимой от той, с которой мы (в рассматриваемом случае) имеем дело, принять существование проникающей среды, обладающей малой, но реальной плотностью, обладающей способностью быть приводимой в движение и передавать движения от одной части к другой с большой, но не бесконечной скоростью.

Следовательно, части этой среды должны быть так связаны, что движение одной части каким-то способом зависит от движения остальных частей, и в то же самое время эти связи должны быть способны к определенному роду упругого смещения, поскольку сообщение движения не является мгновенным, а требует времени.

Поэтому эта среда обладает способностью получать и сохранять два вида энергии, а именно «актуальную» энергию, зависящую от движения ее частей, и «потенциальную» энергию, представляющую собой работу, которую среда выполнит в силу своей упругости, возвращаясь к первоначальному состоянию, после того смещения, которое она испытала.

Распространение колебаний состоит в непрерывном преобразовании одной из этих форм энергии в другую попеременно, и в любой момент количество энергии во всей среде разделено поровну, так что половина энергии является энергией движения, а другая половина—энергией упругого напряжения.

---

*) W. Thomson, «On the Possible Density of the Luminiferous Medium and on the Mechanical Value of a Cubic Mile of Sunlight», Transactions of the Royal Society of Edinburgh, стр. 57, 1854.

(7) Среда, имеющая такого рода структуру, может быть способна к другим видам движения и смещения, чем те, которые обусловливают явления света и тепла; некоторые из них могут быть таковы, что они воспринимаются нашими чувствами при посредстве тех явлений, которые они производят.

(8) Сейчас мы знаем, что светоносная среда в отдельных случаях испытывает действие магнетизма, так как Фарадей *) открыл, что в тех случаях, когда плоско поляризованный луч проходит через прозрачную диамагнитную среду в направлении магнитных силовых линий, образуемых магнитами или токами, то плоскость поляризации начинает вращаться.

Это вращение всегда происходит в том направлении, в котором положительное электричество должно проходить вокруг диамагнитного тела для того, чтобы образовать действующее магнитное поле ([5]).

Верде **) с тех пор открыл, что если заменить диамагнитное тело парамагнитным, например раствором треххлористого железа в эфире, то вращение происходит в обратном направлении.

Профессор В. Томсон ***) указал, что никакое распределение сил, действующих между частями какой-либо среды, единственным движением которой является движение световых колебаний, недостаточно для объяснения этих явлений, но что мы должны допустить существование в среде движения, зависящего от намагничивания, в дополнение к тому колебательному движению, которое представляет собой свет.

Совершенно правильно, что вращение плоскости поляризации вследствие магнитного воздействия наблюдалось только в средах, обладающих заметной плотностью. Но свойства магнитного поля не так уже сильно изменяются при замене одной среды другой или ваку-

*) «Exp. Res.», серия XIX.

**) Verdet, Comptes rendus, 1856, второе полугодие, стр. 529 и 1857, первое полугодие, стр. 1209.

***) W. Thomson, Proceedings of the Royal Society, июнь 1856 г. и июнь 1861 г.

умом, чтобы позволить нам допустить, что плотная среда делает нечто большее, чем простое изменение движения эфира. Мы поэтому имеем законное основание поставить вопрос: не происходит ли движение эфирной среды везде, где бы ни наблюдались магнитные эффекты? Мы имеем некоторое основание предположить, что это движение является движением вращения, имеющим своей осью направление магнитной силы.

(9) Мы можем теперь обсудить другое явление, наблюдаемое в электромагнитном поле. Когда тело движется, пересекая линии магнитной силы, оно испытывает то, что называют электродвижущей силой; два противоположных конца тела электризуются противоположным образом, и электрический ток стремится пройти через тело. Когда электродвижущая сила достаточно велика и действует на некоторые химически сложные тела, она их разлагает и заставляет одну из компонент направляться к одному концу тела, а другую—в прямо противоположную сторону ([6]).

В данном случае мы имеем очевидное проявление силы, вызывающей электрический ток вопреки сопротивлению и электризующей концы тела противоположным образом; это особое состояние тела поддерживается только воздействием электродвижущей силы, и как только эта сила устраняется, оно стремится с равной и противоположно направленной силой вызывать обратный ток через тело и восстановить его первоначальное электрическое состояние. Наконец, если эта сила достаточно велика, она разлагает химические соединения и перемещает компоненты в двух противоположных направлениях, в то время как их естественной тенденцией является тенденция к взаимному соединению с такой силой, которая может породить электродвижущую силу обратного направления.

Эта сила, следовательно, является силой, воздействующей на тело по причине его движения через электромагнитное поле или вследствие изменений, возникающих в самом этом поле; действие этой силы проявляется или в порождении тока и нагревании тела или в разложении тела, или если она не может сделать ни того, ни другого, то в приведении тела в состояние электрической поляризации—состояние вынужденное, при котором концы тела наэлектризованы противоположным образом и от которого тело стремится освободиться, как только будет удалена возмущающая сила.

(10) Согласно предлагаемой мною теории эта «электродвижущая сила» является силой, возникающей при передаче движения от одной части среды к другой, так что именно благодаря этой силе движение одной части вызывает движение другой. Когда электродвижущая сила действует вдоль проводящего контура, она производит ток, который в том случае, если он встречает сопротивление, вызывает постоянное превращение электрической энергии в тепло; последнее уже нельзя восстановить в форме электрической энергии каким-либо обращением процесса.

(11) Но когда электродвижущая сила действует на диэлектрик, она создает состояние поляризации его частей, которое аналогично поляризации частей массы железа под влиянием магнита и которое подобно магнитной поляризации может быть описано как состояние, в котором каждая частица имеет противоположные концы в противоположных состояниях *).

В диэлектрике, находящемся под действием электродвижущей силы, мы можем представлять, что электричество в каждой молекуле так смещено, что одна сторона молекулы делается положительно наэлектризованной, а другая—отрицательно наэлектризованной, однако электричество остается полностью связанным с молекулой и не переходит от одной молекулы к другой. Эффект этого воздействия на всю массу диэлектрика выражается в общем смещении электричества в определенном направлении. Это смещение не равноценно току, потому что, когда оно достигает определенной степени, оно остается неизмененным, но оно есть начало тока, и его

*) F a r a d a y, «Exp. Res.», серия XI; M o s s o t t i, Mem. della Soc. Italina (Modena), т. XXIV, часть 2, стр. 49.

изменения образуют токи в положительном или отрицательном направлениях сообразно тому, увеличивается или уменьшается смещение ([7]). Внутри диэлектрика нет признаков какой-либо электризации, так как электризация поверхности любой молекулы нейтрализуется противоположной электризацией поверхности молекулы, находящейся в соприкосновении с нею; но на граничной поверхности диэлектрика, где электризация не нейтрализуется, мы обнаруживаем явления, указывающие на положительную или отрицательную электризацию этой поверхности.

Отношение между электродвижущей силой и величиной электрического смещения, которое оно вызывает, зависит от природы диэлектрика, причем та же самая электродвижущая сила обычно производит бо́льшее электрическое смещение в твердых диэлектриках, как, например, в стекле или сере, чем в воздухе.

(12) Здесь, таким образом, мы усматриваем еще один эффект электродвижущей силы, а именно электрическое смещение, которое согласно нашей теории является некоторым родом упругой податливости действию силы, похожей на ту, которая имеет место в сооружениях и машинах по причине несовершенной жесткости связей.

(13) Практическое исследование индуктивной емкости диэлектриков ([8]) делается затруднительным вследствие двух мешающих явлений. Первое заключается в проводимости диэлектрика, которая, будучи во многих случаях исключительно малой, тем не менее не является совершенно неощутимой. Второе—явление, называемое электрической абсорбцией*) и состоящее в том, что когда диэлектрик подвергается воздействию электродвижущей силы, электрическое смещение постепенно увеличивается, а если электродвижущая сила устраняется, диэлектрик не возвращается моментально в свое первоначальное состояние, но разряжает только часть сообщенной ему электризации и, будучи предоставленным самому себе, постепенно приобретает электризацию

*) Faraday, «Exp. Res.» (1233—1250) (см. русск. изд.).

на своей поверхности, тогда как внутренность диэлектрика постепенно деполяризуется. Почти все твердые диэлектрики обнаруживают это явление, которое объясняет остаточный заряд лейденской банки и некоторые явления в электрических кабелях, описанных Ф. Дженкиным *).

(14) Мы встречаемся здесь с двумя другими родами податливости, отличными от упругости идеального диэлектрика, которую мы сравнивали с идеально упругим телом. Податливость, которая относится к проводимостям, можно сравнить с податливостью вязкой жидкости (иначе говоря, жидкости, имеющей большое внутреннее трение) или мягкого тела, в котором малейшая сила производит постоянное изменение формы, увеличивающееся вместе со временем действия силы. Податливость, связанная с явлением электрической абсорбции, может быть сравнена с податливостью упругого тела клеточной структуры, содержащего густую жидкость в своих полостях. Такое тело, будучи подвергнутым давлению, сжимается постепенно, а когда давление устраняется, тело не сразу принимает свою прежнюю форму, потому что упругость материи тела должна постепенно преодолеть вязкость жидкости, прежде чем восстановится полное равновесие. Некоторые твердые тела, хотя и не имеют той структуры, о которой мы говорили выше, обнаруживают механические свойства такого рода **), и вполне возможно, что эти же самые вещества в качестве диэлектриков обладают аналогичными электрическими свойствами, а если они являются магнитными веществами, то обладают соответствующими свойствами, относящимися к приобретению, удержанию и потере магнитной полярности.

---

*) F. Jenkin, Reports of the British Association, 1859, стр. 248, а также Report of Committee of Board of Trade on Submarine Cables, стр. 136 и 464.

**) Как, например, состав из клея, патоки и т. п., из которого делаются небольшие пластические фигурки, которые, будучи деформированы, лишь постепенно приобретают свои первоначальные очертания.

(15) Поэтому кажется, что некоторые явления электричества и магнетизма приводят к тем же заключениям, как и оптические явления, а именно, что имеется эфирная среда, проникающая все тела и изменяемая только в некоторой степени их присутствием; что части этой среды обладают способностью быть приведенными в движение электрическими токами и магнитами; что это движение сообщается от одной части среды к другой при помощи сил, возникающих от связей этих частей; что под действием этих сил возникает определенное смещение, зависящее от упругости этих связей, и что вследствие этого энергия в среде может существовать в двух различных формах, одна из которых является актуальной энергией движения частей среды, а другая — потенциальной энергией, обусловленной связями частей в силу их упругости.

(16) Отсюда мы приходим к концепции сложного механизма, способного к обширному разнообразию движений, но в то же самое время связанного так, что движение одной части зависит согласно определенным отношениям от движения других частей, причем эти движения сообщаются силами, возникающими из относительного смещения связанных между собой частей вследствие упругости связей. Такой механизм должен подчиняться общим законам динамики, и мы должны иметь возможность вывести все следствия этого движения, предполагая, что известна форма отношения между движениями частей ([9]).

(17) Мы знаем, что когда электрический ток течет в проводящей цепи, прилегающая часть поля характеризуется известными магнитными свойствами, и если в поле находятся две цепи, магнитные свойства поля, относящиеся к обоим токам, комбинируются. Таким образом, каждая часть поля находится в связи с обоими токами, а оба тока связываются друг с другом в силу их связи с намагничением поля. Первым результатом этой связи, который я предлагаю изучить, является индукция одного тока другим и индукция вследствие движения проводников в поле.

Другим, вытекающим отсюда результатом является механическое взаимодействие между проводниками, по которым текут токи. Явление индукции токов было выведено из механического взаимодействия проводников Гельмгольцем *) и Томсоном **). Я следовал обратному порядку и вывел механическое взаимодействие из законов индукции. Я затем описал экспериментальные методы определения величин L, M, N, от которых зависят эти явления.

(18) Затем я прилагаю явления индукции и притяжения токов к исследованию электромагнитного поля и к установлению системы магнитных силовых линий, указывающих на их магнитные свойства. Исследуя то же самое поле при помощи магнита, я показываю распределение его эквипотенциальных магнитных поверхностей, пересекающих силовые линии под прямыми углами.

Чтобы ввести эти результаты в сферу символического исчисления, я выражаю их в форме общих уравнений электромагнитного поля.

Эти уравнения выражают:

(A) Соотношение между электрическим смещением, током истинной проводимости и полным током, составленным из обоих.

(B) Соотношение между магнитными силовыми линиями и коэффициентами индукции цепи, как они уже выведены из законов индукции.

(C) Соотношение между силой тока и его магнитными действиями в соответствии с электромагнитной системой единиц.

(D) Значение электродвижущей силы в каком-либо теле, возникающей от движения тела в поле, изменения самого поля и изменения электрического потенциала от одной части поля к другой.

(E) Соотношение между электрическим смещением и электродвижущей силой, которая его производит.

---

*) См. сноску на стр. 80.

**) W. Thomson, Reports of the British Association, 1848; Phil. Mag., декабрь 1851 г.

(F) Соотношение между электрическим током и производящей его электродвижущей силой.

(G) Соотношение между количеством свободного электричества в любой точке и электрическими смещениями в окрестности ее.

(H) Соотношение между увеличением или уменьшением свободного электричества и электрическими токами поблизости.

Всего таких уравнений имеется 20, содержащих 20 переменных величин.

(19) Затем я выражаю через эти величины внутреннюю энергию электромагнитного поля, как зависящую частично от магнитной и частично от электрической поляризации в каждой точке ([10]).

Отсюда я определяю действующую механическую силу, во-первых, на подвижный проводник, по которому течет электрический ток; во-вторых,— на магнитный полюс; в-третьих,—на наэлектризованное тело.

Последний результат, а именно механическая сила, действующая на наэлектризованное тело, дает начало независимому методу электрического измерения, основанному на электростатических действиях. Отношение между единицами, применяемыми в этих двух методах, оказывается зависящим от того, что я назвал «электрической упругостью» среды, и является скоростью, которая была экспериментально определена Вебером и Кольраушем ([11]).

Затем я показываю, как рассчитывать электростатическую емкость конденсатора и удельную индуктивную емкость диэлектрика ([12]).

Случай с конденсатором, состоящим из параллельных слоев веществ, обладающих различными электрическими сопротивлениями и индуктивными емкостями, изучается в дальнейшем и показывается, что именуемое электрической абсорбцией явление, вообще говоря, будет иметь место, т. е. если конденсатор будет внезапно разряжен, то через короткое время он обнаружит наличие *остаточного* заряда.

(20) Общие уравнения в дальнейшем применяются к случаю магнитного возмущения, распространяющегося через непроводящее поле, и показывается, что единственные возмущения, которые могут распространяться таким образом, это возмущения, поперечные к направлению распространения, и что скорость распространения является скоростью v, определенной экспериментальным путем из опытов, подобных опыту Вебера, которая выражает количество электростатических единиц электричества, содержащихся в одной электромагнитной единице.

Эта скорость так близка к скорости света, что, повидимому, мы имеем серьезные основания сделать заключение, что сам по себе свет (включая лучистую теплоту и другие излучения) является электромагнитным возмущением в форме волн, распространяющихся через электромагнитное поле согласно законам электромагнетизма. Если это так, то совпадение между упругостью среды, вычисленной, с одной стороны, из быстрых световых колебаний и, с другой стороны, найденной медленным процессом электрических экспериментов, показывает, как совершенны и правильны должны быть упругие свойства среды, если она не заполнена какой-либо материей, более плотной, чем воздух. Если тот же самый характер упругости сохраняется в плотных прозрачных телах, то оказывается, что квадрат показателя преломления равен произведению удельной диэлектрической емкости и удельной магнитной емкости. Проводящие среды быстро поглощают такие излучения и поэтому обычно являются непрозрачными.

Концепция распространения поперечных магнитных возмущений с исключением продольных определенно проводится профессором Фарадеем*) в его «Мыслях о лучевых вибрациях». Электромагнитная теория света в том виде, в каком она предложена им, является такой же по существу, как и та, которую я развиваю в настоящем докладе, за исключением того, что в 1846 г.

*) Phil. Mag., май 1846 г. или «Exp. Res.», т. III.

не имелось данных для расчета скорости распространения [13].

(21) Общие уравнения затем применяются к расчету коэффициентов взаимной индукции двух круговых токов и коэффициента самоиндукции катушки.

Отсутствие равномерного распределения тока в различных частях сечения провода в момент начала течения тока, как я полагаю, исследуется впервые, и найдена соответствующая поправка для коэффициента самоиндукции.

Эти результаты применяются к расчету самоиндукции катушки, применяемой в опытах Комитета Британской ассоциации по стандартам электрического сопротивления, и полученные величины сравниваются с величинами, определенными опытным путем.

ЧАСТЬ II

ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Электромагнитное количество движения тока

(22) Мы можем начать с рассмотрения состояния поля вблизи электрического тока. Мы знаем, что в поле возбуждаются магнитные силы, направление и величина которых зависят согласно известным законам от формы проводника, несущего ток. Когда сила тока увеличивается, магнитные действия также увеличиваются в том же самом отношении. Если магнитное состояние поля зависит от движения среды, определенная сила должна быть приложена для того, чтобы увеличить или уменьшить эти движения, и если эти движения, будучи возбуждены, продолжаются, то связь между током и окружающим его электромагнитным полем заключается в том, что ток наделен известным количеством движения совершенно таким же образом, как связь между точкой передачи машины и маховиком наделяет точку передачи добавочным количеством движения, которое может быть названо количеством движения маховика, приведенным к точке передачи ([14]). Неуравновешенная в машине сила, действующая на точку передачи, увеличивает это количество движения и может быть измерена степенью увеличения.

В случае электрических токов сопротивление внезапному возрастанию или уменьшению напряжения производит эффекты, совершенно подобные механическим, но величина этого количества движения зависит от формы проводника и от относительного положения его различных частей.

Взаимное действие двух токов

(23) Если в поле имеется два электрических тока, то магнитная сила ([15]) в любой точке складывается из сил, производимых каждым током в отдельности, а так как эти два тока находятся в связи с любой точкой поля, то они будут в связи друг с другом, так что любое увеличение или уменьшение одного тока произведет силу, действующую совместно или противоположно силе, обусловленной другим током.

Динамическая иллюстрация приведенного количества движения

(24) В качестве динамической иллюстрации предположим, что тело C так связано с двумя независимыми точками передачи A и B, что его скорость складывается из скорости, в p раз большей скорости A и в q раз большей скорости B. Пусть u будет скорость A, v — скорость B и w — скорость C и пусть δx, δy, δz обозначают их одновременные смещения. Тогда согласно общему уравнению динамики *):

$$C\frac{dw}{dt}\delta z = X\,\delta x + Y\,\delta y,$$

где X и Y — силы, действующие на A и B. Но

$$\frac{dw}{dt} = p\frac{du}{dt} + q\frac{dv}{dt}$$

и

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y.$$

*) Lagrange, Mec. Anal., II, 2, § 5 (Русский пер., Лагранж, Аналит. механика, т. I. Динамика, т. II, § 5, стр. 325—326, 1950).

Подставляя и имея в виду, что δx и δy независимы, получим:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{d}{dt}(Cp^2u + Cpqv), \\ Y &= \frac{d}{dt}(Cpqu + Cq^2v). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Мы можем назвать $Cp^2u + Cpqv$ количеством движения C, отнесенным к A, а $Cpqu + Cq^2v$ количеством движения C, отнесенным к B; мы можем сказать, что действие силы X состоит в том, чтобы увеличить количество движения C, отнесенное к A, а действие силы Y — в увеличении количества движения, отнесенного к B.

Если имеется несколько тел, связанных с A и B подобным же образом, но с разными значениями величин p и q, то мы можем трактовать вопрос таким же образом, полагая

$$L = \sum (Cp^2), \quad M = \sum (Cpq) \quad \text{и} \quad N = \sum (Cq^2),$$

где суммирование распространяется на все тела с их собственными значениями C, p и q. Тогда количество движения системы, отнесенное к A, равно:

$$Lu + Mv,$$

а отнесенное к B:

$$Mu + Nv,$$

и мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{d}{dt}(Lu + Mv), \\ Y &= \frac{d}{dt}(Mu + Nv), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где X и Y являются внешними силами, действующими на A и B.

(25) Чтобы сделать иллюстрацию более полной, мы должны только предположить, что движение A встречает сопротивление, пропорциональное его скорости, которое мы обозначим через Ru, и что на B дейст-

вует аналогичная сила, которую мы обозначим через Sv, где R и S — коэффициенты сопротивления. Отсюда, если ξ и η являются силами, действующими на A и B ([16]):

$$\left.\begin{aligned} \xi &= X + Ru = Ru + \frac{d}{dt}(Lu + Mv), \\ \eta &= Y + Sv = Sv + \frac{d}{dt}(Mu + Nv). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Если скорость A увеличивается как $\frac{du}{dt}$, то, чтобы предотвратить движение B, должна быть приложена к B сила, равная

$$\eta = \frac{d}{dt}(Mu).$$

Это действие на B, производимое увеличением скорости A, соответствует электродвижущей силе в некоторой цепи, возникающей вследствие увеличения силы тока в соседней цепи.

Эта динамическая иллюстрация должна рассматриваться лишь как вспомогательная с целью помочь читателю понять, что подразумевается в механике под приведенным количеством. Явление индукции токов, как зависящее от вариаций величины, называемой электромагнитным количеством движения или электротоническим состоянием, основывается на опытах Фарадея *), Феличи **) и др.

Коэффициенты индукции для двух цепей

(26) В электромагнитном поле значения L, M, N зависят от распределения магнитных действий, обусловленных двумя контурами токов, и это распределение зависит только от формы и относительного положения контуров. Следовательно, L, M, N являются величинами, зависящими от формы и относительного положения контуров и могут изменяться с движением проводников.

*) Faraday, «Exp. Res.», серия I, IX (см. русск. изд.).

**) Felici, Annales de Chimie, серия 3, XXXIV, стр. 64, 1852.

Сейчас мы покажем, что L, M, N являются геометрическими величинами, имеющими характер линий, т. е. обладающими одним измерением в пространстве; L зависит от формы первого проводника, который мы назовем A, N — от формы второго проводника, который мы будем называть B, и M — от относительного положения A и B.

(27) Пусть ξ является электродвижущей силой, действующей в A, x — сила тока и R — сопротивление. Тогда Rx будет силой сопротивления. В случае постоянных токов электродвижущая сила как раз уравновешивается силой сопротивления, но в переменных токах результирующая сила $\xi - Rx$ расходуется на увеличение «электромагнитного количества движения», употребляя термин «количество движения» просто для того, чтобы выразить то, что порождается силой, действующей в течение некоторого промежутка времени, т. е. скорость, существующую в теле ([17]).

В случае электрических токов действующая сила не является обычной механической силой, по крайней мере, мы еще не в состоянии измерять ее как обычную силу, но мы будем называть ее электродвижущей силой, а движущимся телом является не только электричество в проводнике, но также и что-то за пределами проводника, способное подвергаться влиянию других соседних проводников, обтекаемых токами. В этом отношении оно скорее похоже на приведенное количество движения передаточной точки машины, на которую действуют ее механические связи, чем на количество движения обыкновенного движущегося тела, например пушечного ядра или воды в трубе.

Электромагнитные отношения двух проводящих цепей

(28) В случае двух проводящих цепей A и B мы должны допустить, что электромагнитное количество движения, относящееся к A, будет:

$$Lx + My,$$

а относящееся к B:

$$Mx+Ny,$$

где L, M, N соответствуют таким же величинам в динамической иллюстрации за исключением предположения, что они могут изменяться, когда проводники A или B приводятся в движение.

Тогда уравнение тока x в цепи A будет:

$$\xi = Rx + \frac{d}{dt}(Lx+My), \tag{4}$$

а уравнение тока y в цепи B

$$\eta = Sy + \frac{d}{dt}(Mx+Ny), \tag{5}$$

где ξ и η — электродвижущие силы, x и y — токи, а R и S — соответственно сопротивления A и B.

Индукция одного тока другим

(29) Первый случай. Пусть в цепи B нет электродвижущей силы за исключением той, которая возникает от действия цепи A, и пусть ток в A увеличивается от 0 до величины x, тогда

$$Sy + \frac{d}{dt}(Mx+Ny) = 0,$$

откуда

$$Y = \int_0^t y\,dt = -\frac{M}{S}x, \tag{6}$$

т. е. количество электричества Y, будучи полным наведенным током, будет протекать через B, когда x увеличивается от 0 до x. Это — индукция вследствие изменения тока в первичном проводнике. Если M положительно, то наведенный ток, возникающий вследствие увеличения первичного тока, отрицателен.

Индукция при движении проводника

(30) Второй случай. Пусть x остается постоянным и пусть M изменяется от M до M', тогда

$$Y = -\frac{M'-M}{S}x, \tag{7}$$

так что если M увеличивается, что произойдет в том случае, если первичная и вторичная цепи приблизятся друг к другу, то возникнет отрицательный наведенный ток и все количество электричества, прошедшее через B, окажется равным Y. Это — индукция при относительном движении первичного и вторичного проводников.

Уравнение работы и энергии

(31) Чтобы составить уравнение между затраченной работой и полученной энергией, умножим (4) на x и (5) на y и сложим ([18]):

$$\xi x + \eta y = $$

$$= Rx^2 + Sy^2 + x\frac{d}{dt}(Lx + My) + y\frac{d}{dt}(Mx + Ny). \tag{8}$$

Здесь ξx является работой, совершенной в единицу времени электродвижущей силой ξ, порождающей ток x и поддерживающей его, а ηy является работой, совершенной электродвижущей силой η.

Следовательно, левая сторона уравнения представляет собой работу, совершенную электродвижущими силами в единицу времени.

Тепло, производимое током

(32) В правой части уравнения мы имеем, во-первых,

$$Rx^2 + Sy^2 = H, \tag{9}$$

что представляет собой работу, затраченную для преодоления сопротивления цепей в единицу времени. Она превращается в тепло. Остающиеся члены представляют собой работу, не превращенную в тепло. Они могут быть написаны в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Lx^2+2Mxy+Ny^2)+\frac{1}{2}\frac{dL}{dt}x^2+\frac{dM}{dt}xy+\frac{1}{2}\frac{dN}{dt}y^2.$$

Внутренняя энергия токов

(33) Если L, M, N являются величинами постоянными, то вся работа электродвижущих сил, которая не растрачивается на преодоление сопротивления, будет направлена на развитие токов.

Вся внутренняя энергия токов поэтому равна:

$$\frac{1}{2}Lx^2+Mxy+\frac{1}{2}Ny^2=E. \qquad (10)$$

Эта энергия существует в форме, не воспринимаемой нашими органами чувств, по всей вероятности, как актуальное движение, причем местом нахождения этого движения являются не только проводящие цепи, но и окружающее их пространство ([19]).

Механическое взаимодействие между проводниками

(34) Остающиеся члены

$$\frac{1}{2}\frac{dL}{dt}x^2+\frac{dM}{dt}xy+\frac{1}{2}\frac{dN}{dt}y^2=W \qquad (11)$$

представляют собой произведенную в единицу времени работу, возникающую вследствие изменений L, M и N, или, что то же самое, вследствие изменений формы и положения проводящих цепей A и B.

Если во время движения какого-либо тела совершается работа, она должна быть результатом обычной механической силы, действующей на тело во время его движения. Следовательно, эта часть выражения работы показывает, что имеется налицо механическая сила, вынуждающая каждую часть самих проводников двигаться в том направлении, в котором L, M и N максимально увеличиваются.

Существование электромагнитной силы между проводниками, несущими токи, является прямым следствием совокупного и независимого действия каждого из токов на электромагнитное поле. Если A и B сближаются на расстояние ds, так что M увеличивается от M до M', в то время как токи равны x и y, тогда произведенная работа будет:

$$(M'-M)\,xy,$$

а сила в направлении ds:

$$\frac{dM}{ds}\,xy, \tag{12}$$

и она будет притяжением, если x и y имеют один и тот же знак и если M увеличивается по мере сближения A и B.

Отсюда, следовательно, вытекает, что если допустить, что часть электродвижущей силы, не преодолевающая сопротивления, существует и действует в течение некоторого времени, генерируя особое устойчивое состояние движения, связанное с током, которое мы можем назвать (по механической аналогии) электромагнитным количеством движения тока, зависящим от обстоятельств, являющихся внешними по отношению к проводнику, тогда индукция токов и электромагнитные притяжения могут быть объяснены из механических соображений.

То, что я назвал электромагнитным количеством движения, является той же самой величиной, которую Фарадей *) обозначил, как электротоническое состояние тока, любое изменение которого порождает действие электродвижущей силы, подобно тому как изменение механического количества движения влечет за собой действие механической силы ([20]).

Отсюда следует, что если бы описанные Фарадеем в девятой серии его «Экспериментальных исследований» явления были единственно известными фактами относительно электрических токов, то законы Ампера,

*) Faraday, «Exp. Res.», серия I, 60 (см. русск. изд.).

касающиеся взаимодействия проводников, по которым текут токи, а также и законы Фарадея относительно взаимной индукции токов, могли бы быть выведены из механических соображений.

Для экспериментальной проверки этих выводов я ниже рассмотрю случаи с одним единственным током, с двумя токами и с шестью токами, находящимися в электрическом равновесии, с тем чтобы дать возможность экспериментатору определить значения L, M, N.

Случай одной цепи

(35) Уравнение тока x в цепи, сопротивление которой равно R, коэффициент самоиндукции равен L, и при наличии внешней электродвижущей силы ξ будет:

$$\xi - Rx = \frac{d}{dt} Lx. \qquad (13)$$

Когда ξ постоянно, решение имеет форму

$$x = b + (a - b)\, e^{-\frac{R}{L}t},$$

где a есть начальная величина тока, а b — его конечное значение.

Полное количество электричества, которое в течение времени t проходит через цепь, когда t велико, будет:

$$\int_0^t x\, dt = bt + (a - b)\frac{L}{R}. \qquad (14)$$

Значение временного интеграла от x^2 будет:

$$\int_0^t x^2\, dt = b^2 t + (a - b)\frac{L}{R}\left(\frac{3b + a}{2}\right). \qquad (15)$$

Действительный ток меняется постепенно от начального значения a до конечного b, но значения интегралов от x и x^2 являются такими, как если бы постоянный ток силы $\frac{1}{2}(a + b)$ тек в течение времени $2\frac{L}{R}$ и был бы затем замещен постоянным током величины b. Время

$2\frac{L}{R}$ обычно является столь ничтожной долей секунды, что действия, оказываемые током на гальванометр и динамометр, могут рассчитываться так, как если бы импульс был мгновенным.

Если цепь состоит из батареи и катушки, при замыкании цепи действия являются такими, как если бы ток имел только половину своей конечной силы в течение времени $2\frac{L}{R}$. Это уменьшение силы тока, обусловленное индукцией, иногда называют контратоком.

(36) Если дополнительное сопротивление r внезапно включается в цепь, например, вследствие разрыва контакта, так что ток вынужден проходить через тонкую проволоку с сопротивлением r, то первоначальный ток равен $a=\frac{\xi}{R}$, а конечный $b=\frac{\xi}{R+r}$.

Наведенный ток тогда равен $\frac{1}{2}\xi\frac{2R+r}{R(R+r)}$ и продолжается в течение времени $2\frac{L}{R+r}$. Этот ток больше, чем тот, который батарея может поддерживать в двух проволоках R и r, и может оказаться столь значительной величины, что пережжет тонкую проволочку r.

Когда контакт прекращается вследствие разрыва проводов, дополнительное сопротивление представляет собой слой воздуха, и поскольку наведенная электродвижущая сила, преодолевающая новое сопротивление, очень велика, то через воздух проскакивает искра.

Если электродвижущая сила имеет форму $E\sin pt$, как, например, в случае катушки, вращающейся в магнитном поле, то

$$x=\frac{E}{\rho}\sin(pt-\alpha),$$

где

$$\rho^2=R^2+L^2p^2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{Lp}{R}:$$

Случай двух цепей

(37) Пусть R — первичный контур, а S — вторичный контур, тогда мы имеем случай, аналогичный случаю индукционной катушки.

Уравнения токов будут те, которые выведены выше для случая двух контуров, обозначенных через A и B, и мы можем здесь считать L, M, N постоянными, так как движение проводников отсутствует. Тогда получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} Rx+L\frac{dx}{dt}+M\frac{dy}{dt}&=\xi, \\ Sy+M\frac{dx}{dt}+N\frac{dy}{dt}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{13*}$$

Чтобы определить полное количество проходящего электричества, мы должны только проинтегрировать эти уравнения по времени t. Если x_0, y_0 — силы токов в момент $t=0$, а x_1, y_1 — в момент t и если X, Y — полные количества электричества, прошедшие через обе цепи в течение времени t, то

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{1}{R}\{\xi t+L(x_0-x_1)+M(y_0-y_1)\}, \\ Y&=\frac{1}{S}\{M(x_0-x_1)+N(y_0-y_1)\}. \end{aligned}\right\} \tag{14*}$$

Когда цепь R замыкается, тогда полные токи за достаточно большое время t находятся следующим образом:

$$x_0=0, \quad x_1=\frac{\xi}{R}, \quad y_0=0, \quad y_1=0,$$

поэтому

$$X=x_1\left(t-\frac{L}{R}\right), \quad Y=-\frac{M}{S}x_1. \tag{15*}$$

Величина полного контратока в R поэтому независима от вторичной цепи, а индукционный ток во вторичной цепи зависит только от M — коэффициента взаимной индукции катушек, S — сопротивления вторичной катушки и x_1 — конечной силы тока в R.

Когда электродвижущая сила ξ прекращает свое действие, появляется экстраток в первичной цепи и положительный наведенный ток во вторичной, величины которых равны и противоположны тем, которые получаются при замыкании цепи.

(38) Все вопросы, относящиеся к полному количеству проходящих токов, измеренных по импульсу магнита гальванометра, могут быть разрешены этим способом без необходимости полного решения уравнений. Тепловой эффект тока и импульс, который он дает подвешенной катушке динамометра Вебера, зависят от квадрата силы тока в каждый момент в течение короткого периода времени. Поэтому получив предварительное решение уравнений, мы из этого решения можем найти действия, производимые как на гальванометр, так и на динамометр; тогда мы можем воспользоваться методом Вебера для оценки силы и длительности того постоянного тока, который произвел бы те же самые эффекты ([21]).

(39) Пусть n_1, n_2 будут корнями уравнения

$$(LN-M^2)\,n^2+(RN+LS)\,n+RS=0, \tag{16}$$

и пусть первичная катушка возбуждается постоянной электродвижущей силой Rc, так что c является постоянным током, который она может поддерживать; тогда полное решение уравнений, соответствующих замыканию первичной цепи, будет:

$$x=\frac{c}{S}\,\frac{n_1n_2}{n_1-n_2}\left\{\left(\frac{S}{n_1}+N\right)e^{n_1t}-\left(\frac{S}{n_2}+N\right)e^{n_2t}+S\frac{n_1-n_2}{n_1n_2}\right\}, \tag{17}$$

$$y=\frac{cM}{S}\,\frac{n_1n_2}{n_1-n_2}\left\{e^{n_1t}-e^{n_2t}\right\}. \tag{18}$$

Отсюда мы можем получить для подсчета импульса в динамометре величины:

$$\int x^2\,dt=c^2\left\{t-\frac{3}{2}\frac{L}{R}-\frac{1}{2}\frac{M^2}{RN+LS}\right\}, \tag{19}$$

$$\int y^2\,dt=c^2\,\frac{1}{2}\,\frac{M^2R}{S(RN+LS)}\,. \tag{20}$$

Действия тока вторичной катушки на гальванометр и динамометр такие же, как и действия постоянного тока величины

$$-\frac{1}{2}c\frac{MR}{RN+LS}$$

в течение времени $2\left(\frac{L}{R}+\frac{N}{S}\right)$.

(40) Уравнение между работой и энергией может быть легко проверено. Работа, совершенная электродвижущей силой, равна:

$$\xi\int x\,dt=c^2(Rt-L).$$

Работа, затраченная на преодоление сопротивления и выделение тепла, будет:

$$R\int x^2\,dt+S\int y^2\,dt=c^2\left(Rt-\frac{3}{2}L\right).$$

Энергия, остающаяся в системе, равна:

$$\frac{1}{2}c^2L.$$

(41) Если цепь R внезапно и полностью прерывается в то время, когда по ней проходит ток c, то уравнение тока во вторичной катушке будет:

$$y=c\frac{M}{N}e^{-\frac{S}{N}t}.$$

Этот ток начинается со значения $c\frac{M}{N}$ и постепенно исчезает. Полное количество электричества равно $c\frac{M}{S}$, и значение $\int y^2\,dt$ равно $c^2\frac{M^2}{2SN}$. Эффекты в гальванометре и динамометре равны эффектам постоянного тока силы $\frac{1}{2}c\frac{M}{N}$ в течение времени $2\frac{N}{S}$.

Тепловой эффект поэтому больше, чем эффект тока при замыкании.

(42) Если в цепи R действует электродвижущая сила, имеющая форму $\xi = E\cos pt$, тогда, если цепь S отсутствует, величина x будет равна:

$$x = \frac{E}{A}\sin(pt - \alpha),$$

$$A^2 = R^2 + L^2p^2,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Lp}{R}.$$

Эффект присутствия поблизости цепи S заключается, следовательно, в изменении значений величин A и α до таких, которые бы они имели, если бы R равнялось:

$$R + p^2\frac{MS}{S^2 + p^2N^2},$$

а L равнялось:

$$L - p^2\frac{MN}{S^2 + p^2N^2}.$$

Отсюда эффект присутствия цепи S заключается в увеличении кажущегося сопротивления и в уменьшении кажущейся самоиндукции цепи R.

Об определении коэффициентов индукции при помощи электрических весов

(43) Электрические весы [электрический мост] состоят из шести проводников, попарно соединяющих четыре точки: A, C, D, E.

Одна пара A, C этих точек соединена через батарею B. Противоположная пара D, E соединена через гальванометр G. Отсюда, если сопротивления четырех основных проводников соответственно равны P, Q, R, S и токи в них x, $x - z$, y и $y + z$, то ток, проходящий через G, оказывается равным z.

Пусть потенциалы в четырех точках будут A, C, D, E. Тогда условия для установившихся токов могут быть

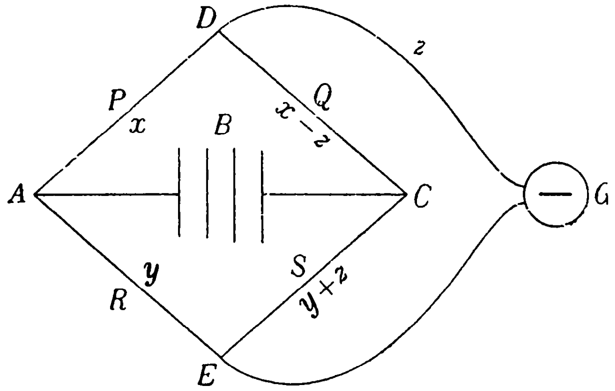


Рис. 1.

найдены из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Px &= A-D, & Q(x-z) &= D-C, \\ Ry &= A-E, & S(y+z) &= E-C, \\ Gz &= D-E, & B(x+y) &= -A+C+F. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Решая эти уравнения для z, мы находим:

$$z\left\{\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}+\frac{1}{S}+B\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{Q}+\frac{1}{S}\right)+\right.$$
$$\left.+G\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{S}\right)+\frac{BG}{PQRS}(P+Q+R+S)\right\}=$$
$$=F\left(\frac{1}{PS}-\frac{1}{QR}\right). \qquad (22)$$

В этом выражении F является электродвижущей силой батареи, z — ток через гальванометр, когда он установится, P, Q, R, S — сопротивления четырех плеч, B — сопротивление батареи и электродов, а G — сопротивление гальванометра.

(44) Если $PS=QR$, то $z=0$, и в этом случае в гальванометре не будет установившегося тока, но преходящий ток может быть получен путем замыкания или размыкания цепи в результате индукции, а показания гальванометра могут быть использованы для определения коэффициентов индукции, если только мы поймем имеющие здесь место явления.

Мы предполагаем $PS = QR$, так что ток z исчезает, если будет дано для этого достаточно времени. Тогда

$$x(P+Q) = y(R+S) = \frac{F(P+Q)(R+S)}{(P+Q)(R+S)+B(P+Q)(R+S)}. \quad (23)$$

Пусть коэффициенты индукции проводников P, Q, R, S даны в нижеследующей таблице, причем коэффициент индукции самого проводника P равен p, взаимной индукции между P и Q равен h и т. д.

	P	Q	R	S
P	p	h	k	l
Q	h	q	m	n
R	k	m	r	o
S	l	n	o	s

Пусть g будет коэффициент индукции гальванометра и пусть гальванометр будет находиться за пределами достижимости индуктивного влияния проводников P, Q, R, S (как это должно быть для того, чтобы избежать непосредственного действия P, Q, R, S на стрелку гальванометра). Пусть X, Y, Z будут интегралы от x, y, z по времени t. В момент замыкания цепи x, y, z равны нулю. По истечении некоторого времени z исчезает, а x и y достигают постоянных значений. Следовательно, уравнения для каждого из проводников будут:

$$\left.\begin{aligned}
&PX + (p+h)x + (k+l)y = \int A\,dt - \int D\,dt,\\
&Q(X-Z) + (h+q)x + (m+n)y = \int D\,dt - \int C\,dt,\\
&RY + (k+m)x + (r+o)y = \int A\,dt - \int E\,dt,\\
&S(Y+Z) + (l+n)x + (o+S)y = \int E\,dt - \int C\,dt,\\
&\qquad GZ = \int D\,dt - \int E\,dt.
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Решая эти уравнения для Z, мы находим:

$$Z\left\{\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}+\frac{1}{S}+B\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{Q}+\frac{1}{S}\right)+\right.$$
$$\left.+G\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{S}\right)+\frac{BG}{PQRS}(P+Q+R+S)\right\}=$$
$$=-F\frac{1}{PS}\left\{\frac{p}{P}-\frac{q}{Q}-\frac{r}{R}+\frac{s}{S}+h\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)+\right.$$
$$+k\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{P}\right)+l\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{Q}\right)-m\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{S}\right)+$$
$$\left.+n\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{S}\right)+o\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{R}\right)\right\}. \tag{25}$$

(45) Пусть теперь отклонение стрелки гальванометра мгновенным током интенсивности $Z^{\cdot}$ будет α. Пусть θ будет постоянное отклонение, получающееся вследствие того, что отношение PS к QR полагается равным ρ вместо 1. Пусть, наконец, время колебания стрелки гальванометра от точки равновесия до точки равновесия будет равно T.

Тогда, обозначая через τ величину

$$\frac{p}{P}-\frac{q}{Q}-\frac{r}{R}+\frac{s}{S}+h\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)+k\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{P}\right)+$$
$$+l\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}\right)-m\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{S}\right)+$$
$$+n\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{S}\right)+o\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{P}\right)=\tau, \tag{26}$$

мы находим:

$$\frac{Z}{z}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tg}\theta}\,\frac{T}{\pi}=\frac{\tau}{1-\rho}. \tag{27}$$

Чтобы определить на опыте τ, лучше всего производить изменение сопротивления одного из плеч при помощи приспособления, описанного Дженкиным (Report of the

British Association, 1863 г.), при котором любое значение ρ от 1 до 1,01 может быть точно измеренным.

Мы наблюдаем α — наибольшее отклонение, обусловленное импульсом индукции, когда гальванометр находится в цепи, когда сделаны соединения и когда сопротивления подогнаны так, что не получается постоянного тока в гальванометре.

Затем мы наблюдаем β — наибольшее отклонение, даваемое постоянным током, когда сопротивление одного из плеч увеличивается в отношении единицы к ρ, а гальванометр включается в цепь спустя короткий промежуток времени после того, как сделано соединение с батареей.

Чтобы исключить эффекты сопротивления воздуха, лучше всего изменять ρ таким образом, чтобы получалось приблизительно $\beta = 2\alpha$. Тогда

$$\tau = T\frac{1}{\pi}(1-\rho)\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}. \tag{28}$$

Если все плечи моста, исключая P, состоят из катушек сопротивления, сделанных из очень тонкой проволоки, не слишком большой длины, сдвоенной при наматывании [бифилярная намотка], то коэффициенты индукции, относящиеся к таким катушкам, будут незначительны и τ будет сведено к величине $\frac{p}{P}$. Электрические весы дают поэтому возможность измерять коэффициент самоиндукции любой цепи, сопротивление которой известно.

(46) Электрические весы могут быть также использованы для определения коэффициента взаимной индукции между двумя цепями, например, между P и S, который мы назвали m; но более удобно находить его путем прямого измерения тока, как это указано в параграфе (37) без применения весов. Мы можем также получить равенство $\frac{p}{P}$ и $\frac{q}{Q}$ путем установления

нулевого тока индукции и отсюда, если мы знаем величину p, можем определить величину q более совершенным методом, чем метод сравнения отклонений.

Исследование электромагнитного поля

(47) Предположим теперь, что форма первичной цепи A не изменяется, и будем исследовать электромагнитное поле при помощи вторичной цепи B, которую мы должны представлять себе изменяемой как по форме, так и по положению.

Предположим сначала, что B состоит из короткого прямого проводника, концы которого скользят по двум параллельным проводящим рельсам, соединенным между собой на некотором расстоянии от места скольжения.

Если передвижение подвижного проводника в данном направлении увеличивает значение M, то в цепи B будет действовать отрицательная электродвижущая сила, стремящаяся производить отрицательный ток в B во время движения скользящей части.

Если в контуре B поддерживать ток, то скользящая часть будет стремиться двигаться сама в том направлении, которое ведет к возрастанию M. Во всякой точке поля всегда, однако, имеется такое определенное направление, что движущийся в этом направлении проводник не испытывает действия какой-либо электродвижущей силы, в какую бы сторону ни были обращены его концы. Проводник, по которому течет ток, не будет испытывать действия какой-либо механической силы, понуждающей его двигаться в этом направлении или противоположном.

Это направление называется направлением линии магнитной силы, проходящей через данную точку.

Движение проводника поперек такой линии приводит к возникновению электродвижущей силы, направление которой перпендикулярно к магнитной силовой линии и к направлению движения; проводник с током продвигается в направлении, перпендикулярном к этой магнитной линии и к направлению тока.

(48) Предположим теперь, что B является очень маленькой плоской цепью, которую можно помещать в любое положение, плоскость которой можно поворачивать в любом направлении. Значение M будет наибольшим, когда плоскость цепи будет перпендикулярна к направлению магнитной силовой линии. Следовательно, если в цепи B поддерживается ток, то он стремится сам установиться в этом положении и указывать подобно магниту направление магнитной силовой линии ([22]).

О магнитных силовых линиях

(49) Пусть вычерчена некоторая поверхность, пересекающая магнитные силовые линии, и на этой поверхности пусть будет некоторая система линий, начерченных с малыми интервалами, так что они прилегают друг к другу, не пересекая друг друга. Затем пусть будет на этой поверхности вычерчена некоторая линия, пересекающая все эти линии, и пусть рядом с ней будет другая линия, причем ее расстояние от первой линии будет таким, что значение M для каждой из маленьких площадок, заключенных между этими двумя линиями и линиями первой системы, будет равно единице.

Таким же способом пусть будут начерчены еще другие линии, образующие вторую систему, так что значение M для каждой ячейки, образованной взаимным пересечением этих двух систем линий, будет равно единице.

Наконец, из каждой точки взаимного пересечения линий этой сетки пусть будет вычерчена линия через все поле, повсюду совпадающая по направлению с направлением магнитной силовой линии.

(50) Таким путем все поле будет заполнено магнитными силовыми линиями с одинаковыми интервалами между ними, и свойства электромагнитного поля будут полностью выражаться ими. Так, во-первых, если в поле провести любую замкнутую кривую, величина M для этой кривой будет выражаться *числом* силовых

линий, которые *проходят через* пространство, охватываемое замкнутой кривой.

Во-вторых, если эта кривая представляет собой проводящий контур и будет двигаться через поле, в ней будет действовать электродвижущая сила, величина которой может быть выражена степенью изменения числа силовых линий, проходящих через пространство, охватываемое кривой.

В-третьих, если в контуре поддерживается ток, то на проводник будут действовать силы, стремящиеся двигать его таким образом, чтобы увеличить число силовых линий, проходящих через пространство, охватываемое контуром, и величина работы, совершенной этими силами, равна силе тока в контуре, умноженной на число этих дополнительных силовых линий.

В-четвертых, если небольшой плоский контур, имеющий возможность свободно поворачиваться, будет помещен в поле, то его плоскость расположится перпендикулярно к силовым линиям. Маленький магнит расположится так, чтобы его ось имела направление магнитных силовых линий.

В-пятых, если поместить в поле длинный равномерно намагниченный стержень, то на каждый полюс будет действовать сила в направлении силовой линии. Число силовых линий, проходящих через единицу площади, равно силе, действующей на единичный полюс, умноженной на коэффициент, зависящий от магнитных свойств среды и называемый коэффициентом магнитной индукции.

В жидкостях и в изотропных твердых телах величина этого коэффициента μ одна и та же, в каком бы направлении ни проходили силовые линии, но в кристаллических, упруго-напряженных и органических телах величина μ может зависеть от направления силовых линий относительно осей кристаллизации, направления натяжения или роста. Во всех телах μ зависит от температуры, а в железе оно, повидимому, уменьшается по мере увеличения интенсивности намагничения ([23]).

О магнитных эквипотенциальных поверхностях

(51) Если мы будем исследовать поле равномерно намагниченным стержнем, имеющим такую длину, что один из его полюсов находится в очень слабой части магнитного поля, то магнитные силы будут совершать работу, когда другой полюс двигается в поле.

Если, исходя от данной точки, мы будем двигать этот полюс до некоторой другой точки, то произведенная работа не будет зависеть от пути полюса между этими двумя точками при условии, что между различными путями следования полюса не проходят токи.

Отсюда, если в поле нет электрических токов, а имеются только магниты, мы можем начертить ряд поверхностей такого рода, что работа, совершенная при переходе от одной поверхности к другой, будет постоянной и не зависящей от того пути, по которому мы следуем. Такие поверхности называются эквипотенциальными поверхностями и в обычных случаях они перпендикулярны к магнитным силовым линиям.

Если эти поверхности начерчены таким образом, что единичный полюс, переходя от любой из них к следующей, производит единицу работы, то работа, производимая при любом движении магнитного полюса, будет измеряться силой полюса, помноженной на число поверхностей, которые он пересек в положительном направлении.

(52) Если в поле имеются контуры, по которым текут электрические токи, тогда все же будут существовать эквипотенциальные поверхности в частях поля, внешних по отношению к проводникам, несущим эти токи, но работа, соответствующая единичному полюсу при его переходе от одной поверхности к другой, будет зависеть от того, сколько раз путь полюса охватывает некоторые из этих токов. Отсюда потенциал каждой поверхности будет обладать целым рядом значений, возрастающих в арифметической прогрессии и различающихся работой, произведенной при полном обходе одного из токов в поле.

Эквипотенциальные поверхности уже не будут непрерывными замкнутыми поверхностями, некоторые из них будут ограниченными листами, причем электрический контур будет их общим краем или границей. Число таких поверхностей будет равно величине работы, соответствующей единичному полюсу при его обходе вокруг тока, и по обычному измерению равно $4\pi\gamma$, где γ—значение силы тока.

Эти поверхности, следовательно, связаны с электрическим током, как мыльные пузыри соединены с кольцом в опытах Плато. Любой ток γ имеет $4\pi\gamma$ поверхностей, связанных с ним. Эти поверхности имеют контур токов в качестве общей границы и связаны с ним под равными углами между собой. Форма эквипотенциальных поверхностей в других частях поля зависит как от присутствия других токов или магнитов, так и от внешней формы контура тока, к которому они относятся.

ЧАСТЬ III

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

(53) Введем три взаимно перпендикулярные направления в пространстве в качестве координатных осей x, y и z и допустим, что все направленные величины выражаются их составляющими по этим трем направлениям.

Электрические токи (p, q, r)

(54) Электрический ток заключается в передаче электричества от одной части тела к другой. Пусть количество электричества, проходящее в единицу времени через единицу площади, перпендикулярную к оси x, будет обозначено через p; тогда p является составляющей тока в данной точке по направлению x.

Мы будем пользоваться обозначениями p, q, r для выражения составляющих тока через единицу площади по направлениям x, y, z.

Электрические смещения (f, g, h)

(55) Электрическое смещение заключается в противоположной электризации сторон молекулы или частицы тела, которая может сопровождаться или не сопровождаться прохождением [электричества] через тело. Пусть количество электричества, которое обнаружится на грани $dy\,dz$ элемента $dx\,dy\,dz$, выделенного в теле,

будет равно $f\,dy\,dz$; тогда f является составляющей электрического смещения, параллельной x. Мы будем пользоваться обозначениями f, g, h для выражения электрических смещений, соответственно параллельных x, y, z.

Изменения электрического смещения должны быть прибавлены к токам p, q, r, чтобы получить общее движение электричества, которое мы будем обозначать через p', q', r', так что ([24])

$$\left.\begin{aligned} p' &= p + \frac{df}{dt}, \\ q' &= q + \frac{dg}{dt}, \\ r' &= r + \frac{dh}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Электродвижущая сила (P, Q, R)

(56) Пусть P, Q, R обозначают составляющие электродвижущей силы в некоторой точке ([25]). Тогда P представляет разность потенциалов на единицу длины проводника, помещенного в направлении x в данной точке. Мы можем представить себе бесконечно короткую проволоку, помещенную праллельно x в данной точке, до которой во время действия электродвижущей силы P дотронулись два маленьких проводника, которые затем изолируются и удаляются за пределы действия электродвижущей силы. Значение P может тогда быть установлено путем измерения величин зарядов этих проводников.

Таким образом, если l—длина проволоки, разность потенциалов на ее концах будет равна Pl, и если C—емкость каждого из маленьких проводников, то заряд на каждом из них будет $^1/_2\,CPl$. Так как емкости умеренной величины проводников, измеренные в электромагнитной системе единиц, весьма малы, то обычные электродвижущие силы, возникающие от электромагнитных действий, едва ли можно было бы измерить указанным способом. На практике подобные измерения всегда выполняются длинными проводниками, образующими замкнутые или почти замкнутые цепи.

Электромагнитное количество движения (F, G, H)

(57) Пусть F, G, H обозначают составляющие электромагнитного количества движения в некоторой точке поля, обусловленного некоторой системой магнитов или токов.

Тогда F является общим импульсом электродвижущей силы в направлении x, которая получилась бы при удалении магнитов или токов из поля, т. е. если P является электродвижущей силой, образующейся в некоторый момент во время удаления системы магнитов или токов, то

$$F = \int P\,dt.$$

Отсюда часть электродвижущей силы, зависящая от движения магнитов или токов в поле или от изменения их интенсивности, дается сотношениями:

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt}. \qquad (29)$$

Электромагнитное количество движения контура (26)

(58) Пусть s будет длина контура, тогда, если мы проинтегрируем

$$\int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds \qquad (30)$$

вдоль контура, то получим полное электромагнитное количество движения контура или число магнитных силовых линий, им охватываемых; изменения этого числа дают полную электродвижущую силу в контуре. Это электромагнитное количество движения является тем же самым понятием, которое профессор Фарадей называл электротоническим состоянием. Если контур ограничивает элементарную площадку $dy\,dz$, то электромагнитное количество движения будет:

$$\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)dy\,dz,$$

а это есть число магнитных силовых линий, проходящих через площадку $dy\,dz$.

Магнитная сила (α, β, γ)

(59) Пусть α, β, γ представляют составляющие по направлениям x, y и z силы, действующей на единицу магнетизма в данной точке [напряженности магнитного поля] ([27]).

Коэффициент магнитной индукции (μ)

(60) Пусть μ будет отношение магнитной индукции в данной среде к магнитной индукции в воздухе при равной намагничивающей силе [магнитная проницаемость]. Тогда число силовых линий, проходящих через единицу площади, перпендикулярной к x, будет равно $\mu\alpha$, где μ—величина, зависящая от природы среды, ее температуры, величины уже произведенного намагничения, а в кристаллических телах изменяющаяся в зависимости от направления.

(61) Выражая в приведенных обозначениях электромагнитное количество движения элементарных контуров, перпендикулярных к трем осям, мы получаем следующие

Уравнения магнитной силы

$$\left.\begin{aligned} \mu\alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ \mu\beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ \mu\gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Уравнения токов

(62) Как известно из опыта, движение магнитного полюса в электромагнитном поле по замкнутому пути не может порождать работы, если только путь, описываемый полюсом, не охватывает электрического тока. Следовательно, всюду, исключая пространство, занимаемое электрическими токами,

$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = d\varphi \qquad (31)$$

есть полный дифференциал φ магнитного потенциала. Величина φ может допускать бесконечное множество различных значений в зависимости от числа обходов электрических токов движущейся точкой на ее пути [многозначная функция], причем разность между последовательными значениями φ, соответствующая однократному охвату линии тока, равна $4\pi c$, где c — сила тока.

Отсюда в том случае, если нет электрических токов:

$$\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}=0.$$

Но если имеется ток p', то

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}=4\pi p', \\
&\text{и аналогично:} \\
&\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}=4\pi q', \\
&\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}=4\pi r'.
\end{aligned}\right\} \tag{C}$$

Мы будем называть эти уравнения *уравнениями токов* (28).

Электродвижущая сила в контуре

(63) Пусть ξ будет электродвижущая сила, действующая в контуре A, тогда

$$\xi=\int\left(P\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}+R\frac{dz}{ds}\right)ds, \tag{32}$$

где ds является элементом длины, а интегрирование производится по контуру тока.

Пусть силы в поле обусловлены контурами A и B. Тогда электромагнитное количество движения контура A будет:

$$\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds=Lu+Mv, \tag{33}$$

где u и v — токи в A и B, и

$$\xi = -\frac{d}{dt}(Lu + Mv). \tag{34}$$

Отсюда, если цепь A неподвижна,

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}, \\ Q &= -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy}, \\ R &= -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz}, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

где ψ является функцией от x, y, z и t, которая остается неопределенной, поскольку это относится к решению вышеуказанных уравнений, так как члены, зависящие от нее, исчезают при интегрировании по всему контуру тока. Однако величина ψ может быть всегда определена в любом частном случае, если мы знаем фактические условия. Физическая интерпретация ψ состоит в том, что эта функция представляет собой *электрический потенциал* в каждой точке пространства.

Электродвижущая сила в движущемся проводнике

(64) Пусть короткий прямой проводник длиной a, параллельный оси x, движется со скоростью, составляющие которой равны $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, и пусть его концы скользят вдоль двух параллельных проводников со скоростью $\frac{ds}{dt}$. Найдем изменение электромагнитного количества движения контура, частью которого является вышеописанное приспособление. В единицу времени движущийся проводник пройдет расстояния

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

вдоль направлений трех координатных осей, и в то же самое время длины параллельных проводников, входящих в цепь, увеличиваются каждая на $\frac{ds}{dt}$.

Следовательно, величина

$$\int \left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds$$

получит следующие приращения:

$$a\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dt}\right)$$

вследствие движения проводника,

$$-a\frac{ds}{dt}\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dx}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dx}\frac{dz}{ds}\right)$$

вследствие удлинения контура. Общий прирост отсюда будет:

$$a\left(\frac{dF}{dy}-\frac{dG}{dx}\right)\frac{dy}{dt}-a\left(\frac{dH}{dx}-\frac{dF}{dz}\right)\frac{dz}{dt},$$

или согласно уравнениям магнитной силы (B)

$$-a\left(\mu\gamma\frac{dy}{dt}-\mu\beta\frac{dz}{dt}\right).$$

Если P — электродвижущая сила в движущемся проводнике, параллельном x, отнесенная к единице длины, то действующая электродвижущая сила будет Pa, и так как она измеряется уменьшением электромагнитного количества движения контура, то электродвижущая сила, обусловленная движением, будет:

$$P=\mu\gamma\frac{dy}{dt}-\mu\beta\frac{dz}{dt}. \tag{36}$$

(65) Полные уравнения электродвижущей силы в движущемся проводнике могут быть теперь написаны следующим образом:

Уравнения электродвижущей силы

$$\left.\begin{aligned}
P&=\mu\left(\gamma\frac{dy}{dt}-\beta\frac{dz}{dt}\right)-\frac{dF}{dt}-\frac{d\psi}{dx},\\
Q&=\mu\left(\alpha\frac{dz}{dt}-\gamma\frac{dx}{dt}\right)-\frac{dG}{dt}-\frac{d\psi}{dy},\\
R&=\mu\left(\beta\frac{dx}{dt}-\alpha\frac{dy}{dt}\right)-\frac{dH}{dt}-\frac{d\psi}{dz}.
\end{aligned}\right\} \tag{D}$$

Первый член в правой стороне каждого уравнения представляет собой электродвижущую силу, возникающую от движения самого проводника. Эта электродвижущая сила перпендикулярна к направлению движения и к магнитным силовым линиям. Если начертить параллелограмм, стороны которого по направлению и величине изображают скорость проводника и магнитную индукцию в этой точке поля, то площадь параллелограмма будет изображать электродвижущую силу, обусловленную движением проводника, и направление этой силы перпендикулярно к плоскости параллелограмма.

Второй член в каждом уравнении указывает действие изменений в положении или в силе магнитов или токов в поле.

Третий член показывает действие электрического потенциала ψ. Последний не вызывает тока, циркулирующего в замкнутой цепи. Он указывает лишь на существование силы, которая проталкивает электричество по направлению к некоторым определенным точкам в поле ([29]).

Электрическая упругость

(66) Когда электродвижущая сила действует на диэлектрик, она приводит каждую часть диэлектрика в поляризованное состояние, при котором его противоположные стороны электризуются противоположным образом. Величина этой электризации зависит от величины электродвижущей силы, от природы вещества и в твердых телах, имеющих структуру, определенную осями, от направления электродвижущей силы по отношению к этим осям. Для изотропных веществ, если через k обозначить отношение электродвижущей силы к диэлектрическому смещению, мы можем написать:

Уравнения электрической упругости ([30])

$$\left.\begin{aligned} P &= kf, \\ Q &= kg, \\ R &= kh. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(E)}$$

Электрическое сопротивление

(67) Когда электродвижущая сила действует на проводник, она производит электрический ток. Этот эффект является дополнительным к уже рассмотренному нами диэлектрическому смещению.

В твердых телах сложной структуры отношение между электродвижущей силой и током зависит от их направления в теле. В изотропных веществах, которые мы здесь только и будем рассматривать, если ρ является удельным сопротивлением, относящимся к единице объема, мы можем написать:

Уравнения электрического сопротивления ([31])

$$\left.\begin{aligned} P &= -\rho p, \\ Q &= -\rho q, \\ R &= -\rho r. \end{aligned}\right\} \tag{F}$$

Количество электричества

(68) Пусть e представляет количество свободного положительного электричества, содержащегося в единице объема в любой части поля, тогда, поскольку оно является результатом электризации различных частей поля, не нейтрализующих друг друга, мы можем написать:

Уравнение свободного электричества ([32])

$$e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0. \tag{G}$$

(69) Если среда проводит электричество, то мы будем иметь другое условие (используя термин гидродинамики):

Уравнение непрерывности

$$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0. \tag{H}$$

(70) В эти уравнения электромагнитного поля входят 20 переменных величин, а именно ([33]):

для электромагнитного количества движения	F, G, H;
для магнитной интенсивности [напряженности]	α, β, γ;
для электродвижущей силы	P, Q, R:
для тока, обусловленного (истинной) проводимостью	p, q, r;
для электрического смещения	f, g, h;
для полного тока (включая изменения смещения)	p', q', r';
для количества свободного электричества	e;
для электрического потенциала	ψ.

Между этими 20 переменными величинами мы нашли 20 уравнений, а именно:

три уравнения магнитной силы	(B);
» » электрических токов	(C);
» » электродвижущей силы . . .	(D);
» » электрической упругости . . .	(E);
» » электрического сопротивления	(F);
» » полных токов	(A);
одно уравнение свободного электричества . .	(G);
» » непрерывности	(H).

Эти уравнения, следовательно, достаточны, чтобы определить все величины, встречающиеся в них, если только мы знаем условия задачи. Во многих вопросах, однако, требуются только некоторые из этих уравнений ([34]).

Внутренняя энергия электромагнитного поля

(71) Мы уже видели (33), что внутренняя энергия любой системы токов находится умножением половины силы тока в каждом контуре на его электромагнитное количество движения. Это эквивалентно нахождению интеграла

$$E=\frac{1}{2}\sum(Fp'+Gq'+Hr')\,dV \qquad (37)$$

по всему пространству, занимаемому токами, где p', q', r' — компоненты токов, а F, G, H — компоненты электромагнитного количества движения. Подставляя значения p', q', r' из уравнений токов (C), получим:

$$\frac{1}{8\pi}\sum\left\{F\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)+G\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)+H\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)\right\}dV.$$

Интегрируя по частям и вспоминая, что α, β, γ исчезают в бесконечности, получаем выражение

$$\frac{1}{8\pi}\sum\left\{\alpha\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)+\beta\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)+\gamma\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)\right\}dV,$$

где интегрирование должно быть распространено на все пространство. Принимая во внимание уравнения магнитной силы (B), будем иметь ([35]):

$$E=\frac{1}{8\pi}\sum\left\{\alpha\mu\alpha+\beta\mu\beta+\gamma\mu\gamma\right\}dV, \tag{38}$$

где α, β, γ являются составляющими магнитной напряженности или силы, действующей на единицу магнитного полюса, а $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ — компоненты величины магнитной индукции или числа силовых линий на единицу площади.

В изотропных средах величина μ одинакова во всех направлениях, и мы можем выразить результат более просто, говоря, что внутренняя энергия любой части магнитного поля, обусловленная его намагничением, равна:

$$\frac{\mu}{8\pi}I^2$$

на единицу объема, где I — величина магнитной напряженности.

(72) Энергия может быть записана в поле различными способами, например действием электродвижущей силы, вызывающей электрическое смещение. Работа, произведенная переменной электродвижущей силой P, дающей переменное смещение f, получается

интегрированием

$$\int P\,df$$

от $P=0$ до данного значения P.

Так как $P=kf$ (см. уравнение (E)), то

$$\int kf\,df=\frac{1}{2}kf^2=\frac{1}{2}Pf.$$

Отсюда внутренняя энергия каждой части поля, существующая в форме электрического смещения, равна:

$$\frac{1}{2}\sum(Pf+Qg+Rh)\,dV.$$

Полная энергия в поле, следовательно, будет:

$$E=\sum\left\{\frac{1}{8\pi}(\alpha\mu\alpha+\beta\mu\beta+\gamma\mu\gamma)+\frac{1}{2}(Pf+Qg+Rh)\right\}dV. \quad \text{(I)}$$

Первый член этого выражения зависит от намагничивания поля и объясняется в нашей теории актуальным движением какого-то рода. Второй член зависит от электрической поляризации и объясняется по нашей теории напряжением какого-то рода в упругой среде.

(73) Я имел уже прежде случай *) попытаться описать особый вид движения и особый вид напряжения, приспособленных для объяснения этих явлений. В настоящем докладе я избегаю какой-либо гипотезы такого рода и, пользуясь такими словами, как электромагнитное количество движения и электрическая упругость в отношении известных явлений индукции токов и поляризации диэлектриков, я хочу только направить мысль читателя на механические явления, которые могут помочь ему понять электрические явления. Все подобные выражения в настоящей статье должны рассматриваться как иллюстративные, а не как объясняющие.

---

*) См. «О физических силовых линиях» (стр. 107 настоящего издания.—*Ред.*).

(74) Однако, говоря об энергии поля, я хочу быть понятым буквально. Всякая энергия есть то же, что механическая энергия, существует ли она в форме обычного движения или в форме упругости, или в какой-нибудь другой форме. Энергия в электромагнитных явлениях—это механическая энергия. Единственный вопрос заключается в том, где она находится?([36])

Согласно старым теориям она находится в наэлектризованных телах, проводящих цепях и магнитах в форме неизвестного качества, называемого потенциальной энергией или способностью производить определенные действия на расстоянии. По нашей теории она находится в электромагнитном поле, в пространстве, окружающем наэлектризованные и намагниченные тела, а также и в самых этих телах и проявляется в двух различных формах, которые могут быть описаны без гипотез как магнитная поляризация и электрическая поляризация, или согласно весьма вероятной гипотезе как движение и напряжение одной и той же среды.

(75) Заключения, к которым мы пришли в настоящем докладе, независимы от этой гипотезы, так как они выведены из экспериментальных фактов троякого рода:

1) индукция электрических токов путем увеличения или уменьшения силы соседних токов сообразно изменениям в силовых линиях, пронизывающих контур,

2) распределение магнитной напряженности сообразно изменениям магнитного потенциала,

3) индукция (или влияние) статического электричества через диэлектрики.

Теперь, исходя из этих принципов, мы можем приступить к доказательству существования и нахождению законов механических сил, действующих на электрические токи, магниты и наэлектризованные тела, помещенные в электромагнитное поле.

ЧАСТЬ IV

МЕХАНИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ В ПОЛЕ

Механическая сила, действующая на подвижной проводник

(76) Мы уже показали (параграфы 34 и 35), что работа электромагнитных сил при движении проводника равна произведению силы тока в проводнике на приращение электромагнитного количества движения, обусловленного движением.

Пусть короткий прямой проводник длины a движется параллельно самому себе в направлении x, а его концы — по двум параллельным проводникам. Тогда приращение электромагнитного количества движения, обусловленное перемещением проводника a, будет ([37]):

$$a\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dx}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dx}\frac{dz}{ds}\right)\delta x.$$

Его же приращение, обусловленное удлинением цепи вследствие увеличения длины параллельных проводников, будет:

$$-a\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds}\right)\delta x.$$

Полное приращение будет:

$$a\,\delta x\left\{\frac{dy}{ds}\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)-\frac{dz}{ds}\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)\right\},$$

что, принимая во внимание уравнения магнитной силы (B), равно:

$$a\,\delta x\left(\frac{dy}{ds}\mu\gamma-\frac{dz}{ds}\mu\beta\right).$$

Пусть X — сила, действующая по направлению x на единицу длины проводника. Тогда совершенная работа будет равна $Xa\,\delta x$. Пусть C — сила тока в проводнике и пусть p', q', r' — его составляющие, тогда

$$Xa\,\delta x=Ca\,\delta x\left(\frac{dy}{ds}\mu\gamma-\frac{dz}{ds}\mu\beta\right),$$

или

$$X=\mu\gamma q'-\mu\beta r';$$

аналогично:

$$\left.\begin{aligned}Y&=\mu\alpha r'-\mu\gamma p',\\ Z&=\mu\beta p'-\mu\alpha q'.\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{J})$$

Это суть уравнения, определяющие механическую силу, действующую на проводник, несущий ток. Эта сила перпендикулярна к току и к силовым линиям, измеряется площадью параллелограмма, образованного линиями, параллельными току и силовым линиям, и пропорциональна их интенсивностям.

Механическая сила, действующая на магнит

(77) В любой части поля, не пересекаемой электрическими токами, распределение магнитной напряженности может быть представлено производными функции, которую можно назвать магнитным потенциалом. Если в поле нет токов, эта функция однозначна в каждой точке. Если же в поле есть токи, то потенциал имеет ряд значений в каждой точке, но его производные имеют только одно значение, а именно:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\alpha,\quad\frac{d\varphi}{dy}=\beta,\quad\frac{d\varphi}{dz}=\gamma.$$

Подставляя эти значения α, β, γ в выражение для внутренней энергии поля (уравнение (38)) и интегрируя по частям, получаем:

$$-\sum\left\{\varphi\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\mu\alpha}{dx}+\frac{d\mu\beta}{dy}+\frac{d\mu\gamma}{dz}\right)\right\}dV.$$

Выражение

$$\sum\left(\frac{d\mu\alpha}{dx}+\frac{d\mu\beta}{dy}+\frac{d\mu\gamma}{dz}\right)dV=\Sigma m\,dV \tag{39}$$

указывает число магнитных силовых линий, имеющих свое начало внутри пространства V. Теперь магнитный полюс определяется как место начала или окончания магнитных силовых линий и единичным полюсом является тот, к которому относится 4π силовых линий, так как он обусловливает единицу магнитной напряженности на единице расстояния на сфере, поверхность которой равна 4π.

Отсюда если m является количеством свободного положительного магнетизма в единице объема, вышеуказанное выражение может быть написано как $4\pi m$, а выражение для энергии поля приобретает вид

$$E=-\sum\left(\frac{1}{2}\varphi m\right)dV. \tag{40}$$

Если имеются два магнитных полюса m_1 и m_2, создающих в поле потенциалы φ_1 и φ_2, то, если m_2 перемещается на расстояние dx под действием силы X, двигающей его в этом направлении, совершенная работа будет $X\,dx$, а уменьшение энергии в поле равно:

$$d\left\{\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)(m_1+m_2)\right\}.$$

Эти выражения должны быть равны друг другу согласно принципу сохранения энергии.

Так как распределение φ_1 определяется m_1, а распределение φ_2 определяется m_2, то сумма $\varphi_1 m_1+\varphi_2 m_2$ должна оставаться постоянной ([38]).

Кроме того, как это доказал Грин (Essay, стр. 10),

$$m_1\varphi_2=m_2\varphi_1.$$

Следовательно:

$$X\,dx = d\,(m_2\varphi_1),$$

или

$$\left.\begin{array}{l} X = m_2 \dfrac{d\varphi_1}{dx} = m_2\alpha_1, \\ \text{где } \alpha_1 \text{ представляет магнитную} \\ \text{напряженность, обусловленную } m_1. \\ \text{Точно так же:} \\ Y = m_2\beta_1, \\ Z = m_2\gamma_1. \end{array}\right\} \qquad \text{(K)}$$

Таким образом, магнитный полюс перемещается в направлении магнитной силовой линии под действием силы, равной произведению силы полюса и магнитной напряженности.

(78) Если имеется один единственный магнитный полюс, т. е. полюс очень длинного магнита, помещенного в поле, то единственное решение есть:

$$\varphi_1 = -\frac{m_1}{\mu}\frac{1}{r}, \tag{41}$$

где m_1 является силой полюса и r — расстояние от него. Отталкивание между двумя полюсами, обладающими силами m_1 и m_2:

$$m_2\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}. \tag{42}$$

В воздухе или любой среде, в которой $\mu = 1$, мы имеем просто $\frac{m_1 m_2}{r^2}$, но в других средах сила, действующая между двумя данными магнитными полюсами, обратно пропорциональна коэффициенту магнитной индукции среды. Это может быть объяснено намагничиванием среды индуктирующим действием полюсов.

Механическая сила, действующая на наэлектризованное тело

(79) Если в поле нет движения или изменения силы токов или магнитов, электродвижущая сила полностью обусловлена изменением электрического потенциала,

и мы должны иметь (параграф 65)

$$P = -\frac{d\psi}{dx}, \quad Q = -\frac{d\psi}{dy}, \quad R = -\frac{d\psi}{dz}.$$

Интегрируя по частям выражение (I) для энергии, обусловленной электрическим смещением, и вспоминая, что P, Q, R исчезают в бесконечности, получаем следующее значение:

$$\frac{1}{2}\sum\left\{\psi\left(\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}\right)\right\}dV,$$

или согласно уравнению свободного электричества (G)

$$-\frac{1}{2}\sum(\psi e)\,dV.$$

Тем же способом доказательства, которое было применено в случае механического действия на магнит, может быть показано, что механическая сила, действующая на небольшое тело, содержащее количество свободного электричества e_2 и помещенное в поле, потенциал которого, возникший от других наэлектризованных тел, равен ψ_1, имеет компоненты:

$$\left.\begin{aligned} X &= e_2\frac{d\psi_1}{dx} = -P_1e_2, \\ Y &= e_2\frac{d\psi_1}{dy} = -Q_1e_2, \\ Z &= e_2\frac{d\psi_1}{dz} = -R_1e_2. \end{aligned}\right\} \tag{D}$$

Таким образом, наэлектризованное тело перемещается в направлении электродвижущей силы под действием силы, равной произведению количества свободного электричества на величину электродвижущей силы. Если электризация поля обусловлена наличием малого наэлектризованного тела, содержащего e_1 единиц свободного электричества, то единственным решением для ψ_1 является

$$\psi_1 = \frac{k}{4\pi}\frac{e_1}{r}, \tag{43}$$

где r — расстояние от наэлектризованного тела. Следовательно, взаимное отталкивание двух наэлектризованных тел e_1 и e_2 будет:

$$e_2 \frac{d\psi_1}{dr} = \frac{k}{4\pi} \frac{e_1 e_2}{r^2}. \qquad (44)$$

Измерение электростатических эффектов

(80)· Величины, с которыми мы до сих пор имели дело, были выражены в терминах электромагнитной системы мер, основанной на механическом взаимодействии токов. Электростатическая система мер, основанная на механическом взаимодействии наэлектризованных тел, является независимой системой, не совпадающей с электромагнитной. Таким образом, единицы различных величин имеют различное значение в зависимости от той системы, которую мы принимаем, и для того чтобы перейти от одной системы к другой, необходимо произвести соответствующий перевод всех величин.

Согласно электростатической системе отталкивание между двумя небольшими телами, заряженными количествами электричества η_1 и η_2, будет $\frac{\eta_1\eta_2}{r^2}$, где r — расстояние между телами.

Пусть отношение двух систем будет таково, что одна электромагнитная единица электричества содержит v электростатических единиц; тогда $\eta_1 = ve_1$ и $\eta_2 = ve_2$, и величина отталкивания приобретает вид

$$v^2 \frac{e_1 e_2}{r^2} = \frac{k}{4\pi} \frac{e_1 e_2}{r^2} \qquad (45)$$

согласно уравнению (44). Отсюда k — коэффициент «электрической упругости» среды, в которой производятся опыты (т. е. в обычном воздухе), — связан с v — числом электростатических единиц в одной электромагнитной единице согласно уравнению

$$k = 4\pi v^2. \qquad (46)$$

Величина v может быть определена экспериментально несколькими способами. Согласно опытам Вебера и Кольрауша ([39])

$$v = 310\,740\,000 \text{ метров в секунду.}$$

(81) Из нашего исследования видно, что если мы допустим, что среда, образующая электромагнитное поле, способна в качестве диэлектрика приобретать в любой своей части электрическую поляризацию—состояние, при котором противоположные стороны любого элемента, на которые мы можем представить себе разделенной среду, электризуются противоположным образом, и если мы также допустим, что эта поляризация или электрическое смещение пропорционально электродвижущей силе, производящей или сохраняющей ее, то мы можем показать, что наэлектризованные тела в диэлектрической среде будут действовать друг на друга с силами, подчиняющимися тем же законам, как и те, которые установлены опытным путем.

Энергию, путем затраты которой производятся электрические притяжения и отталкивания, мы полагаем находящейся в диэлектрической среде, окружающей наэлектризованные тела, а не на поверхностях самих этих тел, которые согласно нашей теории являются лишь пограничными поверхностями воздуха или других диэлектриков, в которых и усматриваются истинные источники действия.

Замечание о действии силы тяготения

(82) После того как мы проследили действие окружающей среды как на магнитные, так и на электрические притяжения и отталкивания и нашли, что они обратно пропорциональны квадрату расстояний, мы, естественно, приходим к вопросу, нельзя ли свести притяжение гравитации, следующее такому же закону, к действию окружающей среды.

Тяготение отличается от магнетизма и электричества тем, что относящиеся к нему тела все одного и того же рода, вместо того чтобы обладать противоположными знаками подобно магнитным полюсам и наэлектризованным телам, и что действующая между этими телами сила является притяжением, а не отталкиванием, как это имеет место в случае одинаковых электрических и магнитных тел.

Линии силы тяготения вблизи двух плотных тел имеют в точности ту же самую форму, что и линии магнитной силы около двух одноименных полюсов; но в то время как полюсы отталкиваются, тела притягиваются. Пусть E будет внутренней энергией поля, окружающего два тяготеющих тела M_1 и M_2, пусть E' будет внутренней энергией поля, окружающего два магнитных полюса m_1 и m_2, равных по численному значению M_1 и M_2, и пусть X будет сила тяготения, действующая во время перемещения δx, а X'—магнитная сила. Имеем:

$$X\,\delta x = \delta E, \quad X'\,\delta x = \delta E'.$$

Так как X и X' равны по численному значению, но противоположны по знаку, то

$$\delta E = -\delta E',$$

или

$$E = C - E' = C - \sum \frac{1}{8\pi}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,dV,$$

где α, β, γ—составляющие магнитной напряженности.

Если R представляет собой результирующую силу тяготения и R'—результирующую магнитную силу в соответствующей части поля, то

$$R = -R' \quad \text{и} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = R^2 = R'^2;$$

отсюда

$$E = C - \sum \frac{1}{8\pi} R^2\,dV. \tag{47}$$

Следовательно, внутренняя энергия поля тяготения должна быть меньше там, где существует результирующая сила тяготения.

Так как всякая энергия по своему существу положительна, то невозможно, чтобы какая-либо часть пространства обладала отрицательной внутренней энергией.

Поэтому те части пространства, в которых нет результирующей силы, как, например, точки равновесия в пространстве между различными телами системы и внутри вещества каждого тела, должны обладать внутренней энергией на единицу объема, большей на

$$\frac{1}{8\pi}R^2,$$

где R—наибольшее возможное значение силы тяготения в любой части вселенной.

Следовательно, предположение, что тяготение возникает от действия окружающей среды указанным выше путем, приводит к заключению, что каждая часть этой среды обладает, будучи невозмущенной, громадной внутренней энергией и что присутствие плотных тел влияет на среду в сторону уменьшения этой энергии, где только имеется результирующее притяжение.

Поскольку я не могу понять, каким образом среда может обладать такими свойствами, я не могу идти дальше в этом направлении в поисках причины тяготения.

ЧАСТЬ V

ТЕОРИЯ КОНДЕНСАТОРОВ

Емкость конденсатора

(83) Простейшей формы конденсатор состоит из равномерного слоя изолирующей материи, ограниченного двумя проводящими поверхностями, и его емкость измеряется количеством электричества на каждой из поверхностей, когда разность потенциалов равна единице.

Пусть S — площадь каждой из обкладок, a — толщина диэлектрика и k — его коэффициент электрической упругости; тогда на одной обкладке конденсатора потенциал будет равен ψ_1, на другой обкладке ψ_1+1, а внутри вещества конденсатора:

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{1}{a}=kf. \tag{48}$$

Поскольку $\frac{d\psi}{dx}$ и, следовательно, f равны нулю за пределами конденсатора, количество электричества на его первой поверхности будет равно $-Sf$, а на второй поверхности $+Sf$. Емкость конденсатора равна поэтому $Sf=\frac{S}{ak}$ в электромагнитных единицах.

Удельная емкость электрической индукции (D)

(84) Если диэлектриком конденсатора является воздух, то его емкость в электростатических единицах будет $\frac{S}{4\pi a}$ (пренебрегая поправкой, учитывающей усло-

вия, которые должны быть выполнены на краях обкладок). Если диэлектрик имеет емкость, отношение которой к емкости воздуха равно D, тогда емкость конденсатора будет равна $\frac{DS}{4\pi a}$.

Отсюда

$$D = \frac{k_0}{k}, \tag{49}$$

где k_0 является значением коэффициента k в воздухе, которое принимается равным единице.

Электрическая абсорбция

(85) Когда диэлектрик конденсатора не является совершенным изолятором, явления проводимости комбинируются с явлениями электрического смещения. Конденсатор, будучи оставлен заряженным, постепенно теряет свой заряд, и в некоторых случаях, после того как он разрядился совершенно, он постепенно приобретает новый заряд того же самого знака, как и первоначальный заряд, и в конце концов и этот заряд также исчезает. Эти явления были описаны профессором Фарадеем (Experimental Researches, серия XI) и Ф. Дженкиным (Report of Committee of Board of Trade on Submarine Cables) и могут быть классифицированы под названием «электрической абсорбции».

(86) Возьмем случай конденсатора, составленного из некоторого числа параллельных слоев различных материалов. Если постоянная разность потенциалов между его обкладками сохраняется в течение достаточного времени до тех пор, пока не устанавливается постоянный и устойчивый ток, тогда каждая ограничивающая поверхность будет иметь заряд электричества, зависящий от природы веществ, находящихся на каждой из ее сторон. Если обкладки будут теперь разряжены, то эти внутренние заряды начнут постепенно рассеиваться, и может вновь появиться неко-

торый заряд на обкладках, если они изолированы, или, если они соединены проводником, известное количество электричества может пройти через проводник во время повторного установления равновесия.

Пусть толщина отдельных слоев конденсатора будет a_1, a_2 и т. д. Пусть значения k для этих слоев соответственно равны k_1, k_2, k_3, ... и пусть

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots = ak, \tag{50}$$

где k — «электрическая упругость» воздуха, a — толщина эквивалентного воздушного конденсатора.

Пусть сопротивления слоев будут соответственно r_1, r_2, ... и пусть $r_1 + r_2 + \ldots = r$ будет сопротивление всего конденсатора постоянному току, протекающему через единицу поверхности.

Пусть электрическое смещение в каждом слое будет f_1, f_2, ..., а электрический ток в каждом слое — p_1, p_2, ... Пусть потенциал на первой поверхности будет равен ψ_1 и электричество на единицу поверхности e_1. Пусть соответствующие количества на границах первой и второй поверхностей будут ψ_2 и e_2 и т. д.

Тогда согласно уравнениям (G) и (H)

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= -f_1, & \frac{de_1}{dt} &= -p_1, \\ e_2 &= f_1 - f_2, & \frac{de_2}{dt} &= p_1 - p_2, \\ &\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Но согласно уравнениям (E) и (F)

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 - \psi_2 &= a_1k_1f_1 = -r_1p_1, \\ \psi_2 - \psi_3 &= a_2k_2f_2 = -r_2p_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

После того как электродвижущая сила поддерживалась достаточное время, ток становится тем же самым в каждом слое и

$$p_1 = p_2 = \ldots = p = \frac{\psi}{r},$$

где ψ является полной разностью потенциалов между крайними слоями. Мы тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\psi}{r}\frac{r_1}{a_1k_1}, & f_2 &= -\frac{\psi}{r}\frac{r_2}{a_2k_2}, \ \ldots \\ e_1 &= \frac{\psi}{r}\frac{r}{a_1k_1}, & e_2 &= \frac{\psi}{r}\left(\frac{r_2}{a_2k_2}-\frac{r_1}{a_1k_1}\right), \ \ldots \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Эти выражения являются количествами электричества на различных поверхностях.

(87) Пусть теперь конденсатор будет разряжен путем соединения обкладок через идеальный проводник так, что их потенциалы моментально становятся равными. Тогда заряды на обкладках изменятся, но заряды на внутренних поверхностях еще не успеют исчезнуть. Полная разность потенциалов теперь равняется:

$$\psi = a_1k_1e_1' + a_2k_2(e_1'+e_2) + a_3k_3(e_1'+e_2+e_3) + \ldots = 0, \quad (54)$$

откуда, если e_1' есть то, во что превращается e_1 в момент разряда:

$$e_1' = \frac{\psi}{r}\frac{r_1}{a_1k_1} - \frac{\psi}{ak} = e_1 - \frac{\psi}{ak}. \quad (55)$$

Моментальный разряд поэтому равен $\frac{\psi}{ak}$ или тому количеству электричества, которое было бы разряжено воздушным конденсатором эквивалентной толщины a; этот разряд не изменяется вследствие отсутствия идеальной изоляции.

(88) Теперь предположим, что соединение между обкладками прервано и конденсатор предоставлен самому себе. Рассмотрим постепенное рассеивание внутренних зарядов.

Пусть ψ' будет разностью потенциалов между обкладками в некоторый момент времени t, тогда

$$\psi' = a_1k_1f_1 + a_2k_2f_2 + \ldots \quad (56)$$

Но

$$a_1k_1f_1 = -r_1\frac{df_1}{dt},$$

$$a_2k_2f_2 = -r_2\frac{df_2}{dt}.$$

Отсюда $f_1 = A_1e^{-\frac{a_1k_1}{r_1}t}$, $f_2 = A_2e^{-\frac{a_2k_2}{r_2}t}$, ...; относя эти выражения к значениям e_1', e_2, ..., получим:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{\psi}{r}\frac{r_1}{a_1k_1} - \frac{\psi}{ak},\\ A_2 &= \frac{\psi}{r}\frac{r_2}{a_2k_2} - \frac{\psi}{ak},\\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Таким образом, для разностей потенциалов обкладок в любой момент времени будем иметь:

$$\psi' = \psi\left\{\left(\frac{r_1}{r} - \frac{a_1k_1}{ak}\right)e^{-\frac{a_1k_1}{r_1}t} + \left(\frac{r_2}{r} - \frac{a_2k_2}{ak}\right)e^{-\frac{a_2k_2}{r_2}t} + \dots\right. \tag{58}$$

(89) Из этого результата вытекает, что если все слои будут сделаны из одного и того же самого вещества, потенциал ψ' будет всегда равен нулю. Если же они сделаны из различных веществ, то порядок, в котором они расположены, безразличен и конечный эффект будет одинаков вне зависимости от того, состоит ли каждая субстанция из одного слоя или она разделена на любое количество тонких слоев и расположена в любом порядке между тонкими слоями других веществ. Любое вещество, части которого не являются математически однородными, хотя они могут с виду быть таковыми, может поэтому обнаруживать явления абсорбции. Поскольку порядок величины коэффициентов тот же самый, что и порядок показателей, значение ψ' никогда не может изменить своего знака, но должно начинаться с нуля, делаться положительным и, наконец, исчезать.

(90) Найдем теперь полное количество электричества, которое могло бы пройти от первой обкладки ко второй, если бы обкладки конденсатора, после того

как он тщательно насыщен током и затем разряжен, были соединены между собой проводником, обладающим сопротивлением R. Пусть p будет током в этом проводнике; тогда во время разряда

$$\psi' = p_1 r_1 + p_2 r_2 + \ldots = pR. \tag{59}$$

Интегрируя по времени и обозначая через q_1, q_2, q количества электричества, протекающие через сопротивления, получаем:

$$q_1 r_1 + q_2 r_2 + \ldots = qR. \tag{60}$$

Количества электричества на отдельных поверхностях будут:

$$\begin{gathered} e_1' - q - q_1, \\ e_2 + q_1 - q_2, \\ \ldots\ldots\ldots; \end{gathered}$$

и так как в конце концов все эти количества исчезают, мы находим:

$$\begin{gathered} q_1 = e_1' - q, \\ q_2 = e_1' + e_2 - q, \end{gathered}$$

откуда

$$qR = \frac{\psi}{r}\left(\frac{r_1^2}{a_1 k_1} + \frac{r_2^2}{a_2 k_2} + \ldots\right) - \frac{\psi r}{ak},$$

или

$$q = \frac{\psi}{akrR}\left\{a_1 k_1 a_2 k_2 \left(\frac{r_1}{a_1 k_1} - \frac{r_2}{a_2 k_2}\right)^2 + \right. \\ \left. + a_2 k_2 a_3 k_3 \left(\frac{r_2}{a_2 k_2} - \frac{r_3}{a_3 k_3}\right)^2 + \ldots\right\}. \tag{61}$$

Величина q по существу положительна, так что, когда первоначальная зарядка производится в каком-нибудь направлении, вторичный разряд происходит всегда в том же направлении, что и первичный разряд *).

---

*) После того как этот доклад был сообщен Королевскому обществу, я ознакомился с докладом Гогена (Gaugain) в Annales de Chimie за 1864 г., в котором он выводил явления электрической абсорбции и вторичного разряда из теории сложных конденсаторов.

ЧАСТЬ VI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА

(91) В начале этого доклада мы пользовались оптической гипотезой упругой среды, через которую распространяются колебания света, чтобы показать, что мы имеем серьезные основания искать в этой же среде причину других явлений в той же мере, как и причину световых явлений. Мы рассмотрели электромагнитные явления, пытаясь их объяснить свойствами поля, окружающего наэлектризованные или намагниченные тела. Таким путем мы пришли к определенным уравнениям, выражающим определенные свойства электромагнитного поля. Мы исследуем теперь, являются ли свойства того, что составляет электромагнитное поле, которые выведены только из электромагнитных явлений, достаточными для объяснения распространения света через ту же самую субстанцию.

(92) Предположим, что плоская волна, направляющие косинусы которой равны l, m, n, распространяется через поле со скоростью V. Тогда все электромагнитные функции будут функциями от

$$w = lx + my + nz - Vt.$$

Уравнения магнитной силы (B) стр. 292 примут вид

$$\mu\alpha = m\frac{dH}{dw} - n\frac{dG}{dw},$$

$$\mu\beta = n\frac{dF}{dw} - l\frac{dH}{dw},$$

$$\mu\gamma = l\frac{dG}{dw} - m\frac{dF}{dw}.$$

Если мы умножим эти уравнения соответственно на l, m, n и сложим, мы найдем:

$$l\mu\alpha + m\mu\beta + n\mu\gamma = 0, \tag{62}$$

что показывает, что направление намагничения должно находиться в плоскости волны.

(93) Если мы скомбинируем уравнения магнитной силы (B) с уравнениями электрических токов (C) и положим для краткости

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = J \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2, \tag{63}$$

то получим:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\mu p' &= \frac{dJ}{dx} - \nabla^2 F, \\ 4\pi\mu q' &= \frac{dJ}{dy} - \nabla^2 G, \\ 4\pi\mu r' &= \frac{dJ}{dz} - \nabla^2 H. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Если среда в поле является идеальным диэлектриком, то там не может быть истинной проводимости, и токи p', q', r' являются только изменениями электрического смещения, или согласно уравнениям полных токов (A)

$$p' = \frac{df}{dt}, \quad q' = \frac{dg}{dt}, \quad r' = \frac{dh}{dt}. \tag{65}$$

Но эти электрические смещения производятся электродвижущими силами, и по уравнениям электрической упругости (E)

$$P = kf, \quad Q = kg, \quad R = kh. \tag{66}$$

Эти электродвижущие силы обусловлены изменениями электромагнитных или электростатических функций, так как в поле нет движущихся проводников. Таким образом, уравнения электродвижущей силы (D) будут:

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}, \\ Q &= -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy}, \\ R &= -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz}. \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

(94) Комбинируя эти уравнения, мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} k\left(\frac{dJ}{dx} - \nabla^2 F\right) + 4\pi\mu\left(\frac{d^2F}{dt^2} + \frac{d^2\psi}{dx\,dt}\right) &= 0, \\ k\left(\frac{dJ}{dy} - \nabla^2 G\right) + 4\pi\mu\left(\frac{d^2G}{dt^2} + \frac{d^2\psi}{dy\,dt}\right) &= 0, \\ k\left(\frac{dJ}{dz} - \nabla^2 H\right) + 4\pi\mu\left(\frac{d^2H}{dt^2} + \frac{d^2\psi}{dz\,dt}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

Если продифференцировать третье из этих уравнений по y, а второе по z и вычесть, J и ψ исчезнут, и, принимая во внимание уравнения (B) магнитной силы, результат можно написать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} k\nabla^2\mu\alpha &= 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\alpha, \\ k\nabla^2\mu\beta &= 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\beta, \\ k\nabla^2\mu\gamma &= 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

(95) Если мы допустим, что α, β, γ являются функциями $lx + my + nz - Vt = w$, первое уравнение примет вид

$$k\mu\frac{d^2\alpha}{dw^2} = 4\pi\mu^2 V^2 \frac{d^2\alpha}{dw^2}, \qquad (70)$$

или

$$V = \pm\sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}}. \qquad (71)$$

Другие уравнения дадут то же самое значение для V, так что волна будет распространяться в любом направлении со скоростью V (40).

Эта волна состоит полностью из магнитных возмущений, причем направление намагничения находится в плоскости волны. Никакое магнитное возмущение, направление намагничения которого не находится в плоскости волны, вообще не может распространяться как плоская волна.

Отсюда магнитные возмущения, распространяющиеся через электромагнитное поле, сходятся со светом в том отношении, что возмущения в любой точке поперечны к направлению распространения, и такие волны могут обладать всеми свойствами поляризованного света.

(96) Единственной средой, в которой производились опыты для определения значения k, был воздух, в котором μ равно единице, откуда по уравнению (46)

$$V = v. \tag{72}$$

Согласно электромагнитным опытам Вебера и Кольрауша *)

$$v = 310\,740\,000 \text{ метров в секунду}$$

является количеством электростатических единиц в одной электромагнитной единице электричества, и это согласно нашему результату должно быть равно скорости света в воздухе или вакууме.

Скорость света в воздухе по опытам Физо **) равна:

$$V = 314\,858\,000,$$

а согласно более точным опытам Фуко ***)

$$V = 298\,000\,000.$$

Скорость света в пространстве, окружающем Землю, выведенная из коэффициента аберрации и из величины

*) Pogg. Ann., стр. 10, август 1856 г. (русск. изд. в сборнике «Из предистории радио», Изд. АН СССР, 1948 г.)

**) Comptes Rendus, т. XXIX, стр. 90, 1849.

***) Там же, т. LV, стр. 501, 792, 1862.

радиуса земной орбиты, равна:

$$V = 308\,000\,000.$$

(97) Следовательно, скорость света, определенная экспериментально, достаточно хорошо совпадает с величиной v, выведенной из единственного ряда экспериментов, которыми мы до сих пор располагаем. Значение v было определено путем измерения электродвижущей силы, при помощи которой заряжается конденсатор известной емкости, разряжая конденсатор через гальванометр, чтобы измерить количество электричества в нем в электромагнитных единицах. Единственным применением света в этих опытах было использование его для того, чтобы видеть инструменты. Значение V, найденное Фуко, было получено путем определения угла, на который поворачивается вращающееся зеркало, пока отраженный им свет прошел туда и обратно вдоль измеренного пути: При этом не пользовались каким-либо образом электричеством и магнетизмом. Совпадение результатов, повидимому, показывает, что свет и магнетизм являются проявлениями свойств одной и той же субстанции и что свет является электромагнитным возмущением, распространяющимся через поле в соответствии с законами электромагнетизма.

(98) Возвратимся теперь к уравнениям, приведенным в параграфе (94), в которых встречаются величины J и ψ, и рассмотрим, может ли распространяться через среду какой-либо другой род возмущений, зависящий от этих величин, которые исчезли из окончательных уравнений.

Если мы определим χ из уравнения

$$\nabla^2\chi = \frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{dy^2} + \frac{d^2\chi}{dz^2} = J \tag{73}$$

и F', G', H' из уравнений

$$F' = F - \frac{d\chi}{dx}, \quad G' = G - \frac{d\chi}{dy}, \quad H' = H - \frac{d\chi}{dz}, \tag{74}$$

то

$$\frac{dF'}{dx} + \frac{dG'}{dy} + \frac{dH'}{dz} = 0, \tag{75}$$

и уравнения, приведенные в параграфе (94), примут вид

$$k\nabla^2 F' = 4\pi\mu \left[\frac{d^2F'}{dt^2} + \frac{d^2}{dx\,dt}\left(\psi + \frac{d\chi}{dt}\right)\right]. \tag{76}$$

Дифференцируя эти три уравнения по x, y, z и складывая, мы находим, что

$$\psi = -\frac{d\chi}{dt} + \varphi(x, y, z) \tag{77}$$

и что

$$\left.\begin{aligned} k\nabla^2 F' &= 4\pi\mu \frac{d^2F'}{dt^2}, \\ k\nabla^2 G' &= 4\pi\mu \frac{d^2G'}{dt^2}, \\ k\nabla^2 H' &= 4\pi\mu \frac{d^2H'}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Отсюда возмущения, выражаемые величинами F', G', H', распространяются со скоростью $V = \sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}}$ через поле, и так как

$$\frac{dF'}{dx} + \frac{dG'}{dy} + \frac{dH'}{dz} = 0,$$

то результирующая этих возмущений находится в плоскости волны.

(99) Остающаяся часть полных возмущений F, G, H является частью, зависящей только от χ, и не подчинена никаким другим условиям кроме условия, выраженного уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{d^2\chi}{dt^2} = 0.$$

Если мы применим операцию ∇^2 к этому уравнению, оно приобретет вид

$$ke = \frac{dJ}{dt} - k\nabla^2\varphi(x, y, z). \tag{79}$$

Так как среда является идеальным изолятором, то e — свободное электричество — не может перемещаться и, следовательно, $\frac{dJ}{dt}$ является функцией лишь x, y, z, а величина J остается или постоянной, или равна нулю, или равномерно изменяется во времени. Таким образом, никакое возмущение, зависящее от J, не может распространяться в виде волны.

(100) Уравнения электромагнитного поля, выведенные из чисто экспериментальных фактов, показывают, что могут распространяться только поперечные колебания. Если выйти за пределы нашего экспериментального знания и предположить определенную плотность субстанции, которую мы могли бы назвать электрической жидкостью, и выбрать стеклянное или смоляное электричество в качестве представителей этой жидкости, тогда мы могли бы иметь продольные колебания, распространяющиеся со скоростью, зависящей от этой плотности. Однако мы не имеем никаких данных, относящихся к плотности электричества, и мы даже не знаем, считать ли нам стеклянное электричество субстанцией или отсутствием субстанции.

Следовательно, наука об электромагнетизме ведет к совершенно таким же заключениям, как и оптика в отношении направления возмущений, которые могут распространяться через поле; обе эти науки утверждают поперечность этих колебаний, и обе дают ту же самую скорость распространения. С другой стороны, обе науки бессильны, когда к ним обращаются с вопросом о подтверждении или отрицании существования продольных колебаний ([41]).

Отношение между показателем преломления и электромагнитной природой материи

(101) Скорость света в некоторой среде согласно волновой теории равна:

$$\frac{1}{i} V_0,$$

где i — показатель преломления, а V_0 — скорость в вакууме. Скорость согласно электромагнитной теории равна:

$$\sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}},$$

где по уравнениям (49) и (71)

$$k=\frac{1}{D}k_0, \quad k_0=4\pi V_0^2.$$

Следовательно,

$$D=\frac{i^2}{\mu}, \tag{80}$$

или удельная индуктивная емкость среды равна квадрату ее показателя преломления, деленному на коэффициент магнитной индукции.

Распространение электромагнитных возмущений в кристаллической среде

(102) Вычислим теперь условия распространения плоской волны в среде, для которой значения k и μ различны в различных направлениях. Так как мы не предполагаем дать полного исследования вопроса в настоящем несовершенном состоянии теории, относящейся к возмущениям коротких периодов, мы можем допустить, что оси магнитной индукции совпадают по направлению с осями электрической упругости.

(103) Пусть значения магнитных коэффициентов для трех осей будут λ, μ, ν, тогда уравнения магнитной силы (B) будут:

$$\left.\begin{aligned}\lambda\alpha&=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz},\\ \mu\beta&=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx},\\ \nu\gamma&=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}.\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Уравнения электрических токов (C) остаются прежними. Уравнения электрической упругости (E) будут:

$$\left.\begin{aligned} P &= 4\pi a^2 f, \\ Q &= 4\pi b^2 g, \\ R &= 4\pi c^2 h, \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

где $4\pi a^2$, $4\pi b^2$ и $4\pi c^2$ являются значениями k для осей x, y, z.

Комбинируя эти уравнения с (A) и (D), мы получим уравнения вида

$$\frac{1}{\mu\nu}\left(\lambda\frac{d^2F}{dx^2}+\mu\frac{d^2F}{dy^2}+\nu\frac{d^2F}{dz^2}\right)-\frac{1}{\mu\nu}\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dF}{dx}+\mu\frac{dG}{dy}+\nu\frac{dH}{dz}\right)=$$
$$=\frac{1}{a^2}\left(\frac{d^2F}{dt^2}+\frac{d^2\psi}{dx\,dt}\right). \qquad (83)$$

(104) Если l, m, n являются направляющими косинусами волны, а V — ее скоростью и если

$$lx+my+nz-Vt=w, \qquad (84)$$

то F, G, H и ψ будут функциями w, и если мы обозначим через F', G', H', ψ' вторые производные этих величин по w, то уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\left[V^2-a^2\left(\frac{m^2}{\nu}+\frac{n^2}{\mu}\right)\right]F'+ \\ &\qquad +\frac{a^2lm}{\nu}G'+\frac{a^2ln}{\mu}H'-lV\psi'=0, \\ &\left[V^2-b^2\left(\frac{n^2}{\lambda}+\frac{l^2}{\nu}\right)\right]G'+ \\ &\qquad +\frac{b^2mn}{\lambda}H'+\frac{b^2ml}{\nu}F-mV\psi'=0, \\ &\left[V^2-c^2\left(\frac{l^2}{\mu}+\frac{m^2}{\lambda}\right)\right]H'+ \\ &\qquad +\frac{c^2nl}{\mu}F'+\frac{c^2nm}{\lambda}G'-nV\psi'=0. \end{aligned}\right\} \qquad (85)$$

Если мы теперь положим:

$$V^4 - V^2 \frac{1}{\lambda\mu\nu}\{l^2\lambda(b^2\mu + c^2\nu) + m^2\mu(c^2\nu + a^2\lambda) + \\ + n^2\nu(a^2\lambda + b^2\mu)\} + \frac{a^2b^2c^2}{\lambda\mu\nu}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right) \times \\ \times (l^2\lambda + m^2\mu + n^2\nu) = U, \quad (86)$$

то найдем:

$$F'V^2U - l\psi'VU = 0 \quad (87)$$

и два аналогичных уравнения для G' и H'. Отсюда или

$$V = 0, \quad (88)$$

$$U = 0, \quad (89)$$

или

$$VF' = l\psi', \quad VG' = m\psi', \quad VH' = n\psi'. \quad (90)$$

Третье предположение указывает, что результирующая F', G', H' находится в направлении, нормальном к плоскости волны, но уравнения не указывают, что такое возмущение, если оно возможно, должно распространяться, так как мы не имеем никаких других отношений между ψ' и F', G', H'.

Решение $V = 0$ относится к случаю, когда нет распространения. Решение $U = 0$ дает два значения для V^2, соответствующих значениям F', G', H', которые даны уравнениями:

$$\frac{l}{a^2}F' + \frac{m}{b^2}G' + \frac{n}{c^2}H' = 0, \quad (91)$$

$$\frac{a^2l\lambda}{F'}(b^2\mu - c^2\nu) + \frac{b^2m\mu}{G'}(c^2\nu - a^2\lambda) + \frac{c^2n\nu}{H'}(a^2\lambda - b^2\mu) = 0. \quad (92)$$

(105) Скорости вдоль осей следующие:

Направление распространения		x	y	z
Направление электрического смещения	x		$\frac{a^2}{\nu}$	$\frac{a^2}{\mu}$
	y	$\frac{b^2}{\nu}$		$\frac{b^2}{\lambda}$
	z	$\frac{c^2}{\mu}$	$\frac{c^2}{\lambda}$	

Теперь мы знаем, что в каждой главной плоскости кристалла луч, поляризованный в этой плоскости, подчиняется обычному закону преломления и, следовательно, его скорость та же самая, в каком бы направлении в этой плоскости он ни распространялся.

Если поляризованный свет состоит из электромагнитных возмущений, в которых электрическое смещение находится в плоскости поляризации, то

$$a^2 = b^2 = c^2. \tag{93}$$

Если же, напротив, электрические смещения перпендикулярны к плоскости поляризации, то

$$\lambda = \mu = \nu. \tag{94}$$

Из магнитных опытов Фарадея, Плюккера и других мы знаем, что во многих кристаллах λ, μ, ν не равны.

Опыты Кноблауха *) по электрической индукции через кристаллы, повидимому, показывают, что a, b и c могут быть различны. Однако неравенство коэффициентов λ, μ, ν столь мало, что слишком большие магнитные силы требуются для обнаружения их различий.

*) Knoblauch, Phil. Mag. (1852).

Эти различия, повидимому, не имеют достаточной величины, чтобы за их счет можно было бы отнести двойное преломление в кристаллах. С другой стороны, эксперименты по электрической индукции подвержены ошибкам из-за наличия мелких недостатков в кристалле.

Необходимы дальнейшие эксперименты, касающиеся магнитных и диэлектрических свойств кристаллов, прежде чем мы могли бы решить, является ли отношение этих тел к магнитным и электрическим силам одним и тем же, когда эти силы постоянны, так и тогда, когда они меняются с частотой световых колебаний.

Отношение между электрическим сопротивлением и прозрачностью

(106) Если среда не идеальный изолятор, а проводник, сопротивление которого на единицу объема равно ρ, то будут иметь место не только электрические смещения, но и действительные токи проводимости, благодаря которым электрическая энергия превращается в тепло, что ведет к затуханию волн. Для определения коэффициента поглощения рассмотрим распространение вдоль оси x поперечного возмущения G. Согласно вышеуказанным уравнениям

$$\frac{d^2G}{dx^2} = -4\pi\mu\,(q') = -4\pi\mu\left(\frac{dg}{dt} + q\right) \text{ на основании (A)},$$

$$\frac{d^2G}{dx^2} = +4\pi\mu\left(\frac{1}{k}\frac{d^2G}{dt^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dG}{dt}\right) \text{ на основании (E) и (F)}. \tag{95}$$

Если G имеет вид

$$G = e^{-px}\cos(qx + nt), \tag{96}$$

то

$$p = \frac{2\pi\mu}{\rho}\frac{n}{q} = \frac{2\pi\mu}{\rho}\frac{V}{i}, \tag{97}$$

где V является скоростью света в воздухе, а i — показателем преломления. Количество падающего света, проходящего через толщину x, пропорционально

$$e^{-2px}. \tag{98}$$

Пусть R будет сопротивление в электромагнитых единицах вещества пластинки, толщина которой равна x, ширина b и длина l, тогда

$$R = \frac{l\rho}{bx},$$

$$2px = 4\pi\mu \frac{V}{i} \frac{l}{bR}. \tag{99}$$

(107) Бóльшая часть прозрачных твердых тел является хорошими изоляторами, в то время как все хорошие проводники весьма непрозрачны.

Электролиты легко пропускают через себя токи и тем не менее часто бывают очень прозрачными. Мы можем, однако, предположить, что в быстро меняющихся колебаниях света электродвижущие силы действуют в течение столь короткого времени, что они не в состоянии вызвать полного отделения частиц, находящихся в соединении, так что, когда сила действует в обратную сторону, частицы колеблются в их прежнем положении без потери энергии.

Золото, серебро и платина являются хорошими проводниками, несмотря на то, что, будучи раскатаны в достаточно тонкие листочки, они пропускают через себя свет.

Если сопротивление золота является таким же для электродвижущих сил с коротким периодом, что и для сил, с которыми мы производим опыты, то количество света, проходящее через кусок золотого листа, сопротивление которого было определено Хоккиным (Hockin), составило бы только 10^{-50} от количества падающего света — величина, совершенно ничтожная. Я нашел, что через такой золотой листок проходит от $^1/_{500}$ до $^1/_{1000}$ зеленого света. Большая часть его проходит через отверстия и трещины. Однако значительное количество его проходит через самое золото, что придает сильную зеленую окраску пропускаемому свету. Этот результат не может быть примирен с электромагнитной теорией света, если только не предположить, что имеется меньшая потеря энергии, когда электродвижущие силы меняются с частотой колебания света, чем когда они изменяются в течение заметных промежутков времени, как это имеет место в наших опытах.

Абсолютные значения электродвижущих и магнитных сил при распространении света

(108) Если уравнение распространения света имеет вид

$$F = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z - Vt),$$

то электродвижущая сила будет:

$$P = -A\frac{2\pi}{\lambda}V\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z - Vt),$$

а энергия на единицу объема равна:

$$\frac{P^2}{8\pi\mu V^2},$$

где P обозначает наибольшее значение электродвижущей силы. Половина энергии является магнитной и половина — электрической.

Энергия, проходящая через единицу площади, равна:

$$W = \frac{P^2}{8\pi\mu V},$$

так что

$$P = \sqrt{8\pi\mu VW},$$

где V — скорость света, а W — энергия, сообщенная светом единице площади в течение одной секунды.

Согласно данным Пулье (Pouillet), по расчетам профессора Томсона *), механическая энергия прямого солнечного света на Земле равна:

83,4 футо-фунта в секунду на кв. фут.

Это дает максимальное значение P в прямом солнечном свете на расстоянии, равном расстоянию Земли от Солнца:

$$P = 60\,000\,000,$$

или около 600 элементов Даниэля на метр.

На поверхности Солнца величина P будет около

13 000 элементов Даниэля на метр.

На Земле максимальная магнитная сила будет 0,193 **). На Солнце она будет равна 4,13. Электродвижущие и магнитные силы могут рассматриваться как меняющиеся дважды при каждом колебании света; это значит более, чем тысяча миллионов миллионов раз в секунду.

*) Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1854 («Mechanical Energies of the Solar System»).

**) Горизонтальная магнитная сила в Кью (Kew) примерно равна 1,76 в метрических единицах.

ЧАСТЬ VII

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Общие методы

(109) Электромагнитные отношения между двумя проводящими цепями A и B зависят от функции M, обусловленной их формой и относительным положением, как было уже показано выше. M может быть вычислено несколькими различными путями, которые, конечно, должны привести к одному и тому же результату.

Первый метод. M — электромагнитное количество движения цепи B, когда по цепи A проходит единица силы тока, или

$$M = \int \left(F \frac{dx}{ds'} + G \frac{dy}{ds'} + H \frac{dz}{ds'} \right) ds',$$

где F, G, H — компоненты электромагнитного количества движения, обусловленного единичным током в A, а ds' — элемент длины B, и интегрирование производится по контуру B. Чтобы определить F, G, H, заметим, что согласно уравнениям (B) и (C) имеем:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2} = -4\pi\mu p',$$

и аналогичные уравнения для G и H, причем p', q', r' являются компонентами тока в A. Теперь, если мы рассмотрим только один элемент ds контура A, мы будем иметь:

$$p' = \frac{dx}{ds}\, ds, \quad q' = \frac{dy}{ds}\, ds, \quad r' = \frac{dz}{ds}\, ds,$$

и решение уравнений даст:

$$F = \frac{\mu}{\rho}\frac{dx}{ds}\, ds, \quad G = \frac{\mu}{\rho}\frac{dy}{ds}\, ds, \quad H = \frac{\mu}{\rho}\frac{dz}{ds}\, ds,$$

где ρ — расстояние некоторой точки от ds.

Отсюда

$$M = \iint \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz}{ds'}\right) ds\, ds' =$$

$$= \iint \frac{\mu}{\rho} \cos\theta\, ds\, ds',$$

где θ — угол между направлениями двух элементов ds, ds', ρ есть расстояние между ними, а интегрирование производится по обоим контурам. В этом методе мы сосредоточиваем наше внимание в процессе интегрирования только на двух линейных контурах.

(110) Второй метод. M есть число магнитных силовых линий, проходящих сквозь контур B, когда в A течет единичный ток, или

$$M = \sum (\mu\alpha l + \mu\beta m + \mu\gamma n)\, dS',$$

где $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ — компоненты магнитной индукции, обусловленной единичным током в A, S' — поверхность, ограниченная током B, и l, m, n — направляющие косинусы нормалей к поверхности, причем интегрирование распространяется по всей поверхности.

Мы можем представить это в виде

$$M = \mu \sum \frac{1}{\rho^2} \sin\theta \sin\theta' \sin\varphi\, dS'\, ds,$$

где dS' — элемент поверхности, ограниченной контуром B, ds — элемент контура A, ρ — расстояние между ними, θ и θ' — углы между ρ и ds и между ρ

и нормалью к dS' соответственно, а φ — угол между плоскостями, в которых измеряются θ и θ'. Интегрирование производится по контуру A и по поверхности, ограниченной B.

Этот метод наиболее подходит в том случае, когда контуры расположены в одной плоскости, т. е. когда $\sin\theta = 1$ и $\sin\varphi = 1$.

(111) Третий метод. M есть та часть внутренней магнитной энергии всего поля, которая зависит от произведения сил токов в обеих цепях при условии, что каждый ток равен единице.

Пусть α, β, γ — компоненты магнитной напряженности, обусловленной первым контуром в некоторой точке; α', β', γ' — те же величины для второй цепи; тогда внутренняя энергия элемента объема dV поля будет:

$$\frac{\mu}{8\pi}\{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2+(\gamma+\gamma')^2\}\,dV.$$

Часть, зависящая от произведения сил токов, будет:

$$\frac{\mu}{4\pi}(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')\,dV.$$

Отсюда, если мы знаем магнитные напряженности I и I', обусловленные единицей тока в каждой цепи, мы можем получить M путем интегрирования

$$\frac{\mu}{4\pi}\sum \mu II'\cos\theta\,dV$$

по всей поверхности, где θ — угол между направлениями I и I'.

Применение к катушке

(112) Определим коэффициент M взаимной индукции между двумя круговыми линейными проводниками в параллельных плоскостях при условии, что расстояние между кругами везде одно и то же и мало по сравнению с радиусами кругов.

Если r — расстояние между контурами и a — радиус каждого круга, то, если r мало по сравнению с a, мы найдем при помощи второго метода в качестве первого приближения

$$M = 4\pi a \left(\ln\frac{8a}{r} - 2\right).$$

Чтобы получить более точное значение M, допустим, что a и a_1 — радиусы кругов, а b — расстояние между их плоскостями; тогда

$$r^2 = (a - a_1)^2 + b^2.$$

Мы найдем M, рассматривая следующие условия.

Во-первых, M должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2M}{da^2} + \frac{d^2M}{db^2} + \frac{1}{a}\frac{dM}{da} = 0.$$

Это уравнение, будучи верным для любого магнитного поля, симметричного относительно общей оси окружностей, не может само по себе привести к определению M как функции a, a_1 и b. Мы воспользуемся поэтому другими условиями.

Во-вторых, значение M должно остаться тем же самым, если a и a_1 взаимно заменятся.

В-третьих, первые два члена M должны быть такими же, как указано выше.

Таким образом, M должно иметь форму следующего ряда:

$$M = 4\pi a \ln\frac{8a}{r}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{a-a_1}{a} + \frac{1}{16}\frac{3b^2+(a_1-a)^2}{a^2} - \frac{1}{32}\frac{(3b^2+(a-a_1)^2)(a-a_1)}{a^3} - \ldots\right\} -$$
$$- 4\pi a\left\{2 + \frac{1}{2}\frac{a-a_1}{a} + \frac{1}{16}\frac{b^2-3(a-a_1^2)}{a^2} - \frac{1}{48}\frac{(6b^2-(a-a_1)^2)(a-a_1)}{a^3} + \ldots\right\}.$$

(113) Мы можем приложить этот результат к нахождению коэффициента самоиндукции L круглой катушки, сечение которой невелико по сравнению с радиусом круга.

Пусть сечение катушки — прямоугольник, ширина которого в плоскости круга равна c, а глубина, перпендикулярная к плоскости круга, равна b.

Пусть средний радиус катушки будет a, а число витков равно n; тогда, интегрируя, мы найдем:

$$L=\frac{n^2}{b^2c^2}\iiiint M(x, y; x', y')\,dx\,dy\,dx'\,dy',$$

где $M(x, y; x', y')$ представляет значение M для двух витков, координаты которых соответственно равны x, y и x', y', а интегрирование производится сначала по x и y по прямоугольному сечению, а затем по x' и y' по той же самой площади.

$$\begin{aligned}L={}&4\pi n^2 a\left\{\ln\frac{8a}{r}+\frac{1}{12}-\frac{4}{3}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}2\theta-\frac{\pi}{3}\cos 2\theta-\right.\\&\left.-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^2\theta\ln\cos\theta-\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\theta\ln\sin\theta\right\}+\\&+\frac{\pi n^2 r^2}{24a}\left\{\ln\frac{8a}{r}(2\sin^2\theta+1)+\right.\\&+3{,}45+27{,}475\cos^2\theta-3{,}2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}+\\&\left.+\frac{1}{5}\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\ln\cos\theta+\frac{13}{3}\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\ln\sin\theta\right\}+\ldots\end{aligned}$$

Здесь a равно среднему радиусу катушки, r — диагонали прямоугольного сечения, равной $\sqrt{b^2+c^2}$, θ — углу между r и плоскостью круга, n — числу витков. Логарифмы неперовы, а углы измерены в радианах. В опытах, проведенных Комитетом Британской ассоциации по определению стандарта электрического сопротивления, применялась двойная катушка, состоящая из двух приблизительно одинаковых катушек прямоугольного сечения, помещенных параллельно друг другу с небольшим промежутком между ними.

Значение L для этой катушки было найдено следующим путем.

Величина L была рассчитана по предыдущей формуле для шести различных случаев, в которых рассматриваемые прямоугольные сечения имели всегда ту же самую ширину, в то время как глубина была A, B, C, $A+B$, $B+C$, $A+B+C$ и $n=1$ в каждом случае.

Зная результаты $L(A)$, $L(B)$, $L(C)$ и т. д., мы вычисляем коэффициент взаимной индукции $M\ (AC)$ обеих катушек следующим образом:

$$2ACM\ (AC) = (A+B+C)^2 L(A+B+C) - \\ -(A+B)^2 L(A+B) - (B+C)^2 L(B+C) + B^2 L(B).$$

Отсюда, если n_1 — число витков в катушке A и n_2 — в катушке B, коэффициент самоиндукции обеих катушек вместе будет:

$$L = n_1^2 L(A) + 2n_1 n_2 M\ (AC) + n_2^2 L(C).$$

(114) Эти значения L рассчитаны в предположении, что витки проволоки равномерно расположены так, что они заполняют в точности все сечение. Однако обычно этого не бывает, поскольку проволока чаще всего имеет круглое сечение и покрыта изолирующим материалом.

Поэтому ток в проволоке более концентрирован, чем это было бы, если бы он был распространен равномерно по сечению, и токи в близлежащих проволоках не действуют на него в точности так, как действовал бы равномерный ток.

Поправки, возникающие из этих соображений, могут быть выражены как цифровые величины, на которые мы должны помножить длину проволоки, причем они будут одинаковыми, какова бы ни была форма катушки.

Пусть расстояние между каждой проволокой и следующей за ней в предположении, что они расположены в квадратном порядке, будет равно D и пусть диаметр проволоки будет d. Тогда поправка на диаметр проволоки будет:

$$+2\left(\ln\frac{D}{d}+\frac{4}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3}-\frac{11}{6}\right).$$

Поправка для восьми ближайших проволок будет $+0{,}0236$, для 16 проволок в следующем ряду $+0{,}00083$. Эти поправки, будучи помножены на длину проволоки и прибавлены к предыдущему результату, дадут истинное значение L, рассматриваемое как мера потенциала катушки на саму себя для единицы тока в проволоке, когда этот ток устанавливается в течение некоторого времени и равномерно распределен по сечению проволоки.

(115) Но в момент возникновения тока и во время его изменения ток не будет равномерным во всем сечении проволоки из-за индуктивного действия между различными частями тока, стремящегося сделать ток в одной части сечения больше, чем в другой. Когда равномерная электродвижущая сила P, возникающая от любой причины, действует на цилиндрическую проволоку с удельным сопротивлением ρ, мы имеем:

$$p\rho=P-\frac{dF}{dt},$$

где F удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}=-4\pi\mu p,$$

причем r — расстояние от оси цилиндра.

Пусть один из членов величины F будет иметь вид Tr^n, где T — функция времени, тогда член p, соответствующий произведению Tr^n, имеет вид

$$-\frac{1}{4\pi\mu}n^2Tr^{n-2}.$$

Отсюда имеем:

$$F=T+\frac{\mu\pi}{\rho}\left(-P+\frac{dT}{dt}\right)r^2+\left(\frac{\mu\pi}{\rho}\right)^2\frac{1}{1^2\cdot 2^2}\frac{d^2T}{dt^2}r^4+\ldots,$$

$$p\rho=\left(P+\frac{dT}{dt}\right)-\frac{\mu\pi}{\rho}\frac{d^2T}{dt^2}r^2-\left(\frac{\mu\pi}{\rho}\right)^2\frac{1}{1^2\cdot 2^2}\frac{d^3T}{dt^3}r^4-\ldots$$

Общий контрток самоиндукции в какой-либо точке будет:

$$\int\left(\frac{P}{\rho}-p\right)dt=\frac{1}{\rho}T+\frac{\mu\pi}{\rho^2}\frac{dT}{dt}r^2+\frac{\mu^2\pi^2}{\rho^3}\frac{1}{1^2\cdot 2^2}\frac{d^2T}{dt^2}r^4+\ldots$$

от $t=0$ до $t=\infty$.

Если $t=0$, $p=0$, то $\left(\frac{dT}{dt}\right)_0=P$, $\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_0=0, \ldots$

Если $t=\infty$, $p=\frac{P}{\rho}$, то $\left(\frac{dT}{dt}\right)_\infty=0$, $\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_\infty=0, \ldots,$

$$\int_0^\infty\int_0^r 2\pi\left(\frac{P}{\rho}-p\right)r\,dr\,dt=\frac{1}{\rho}T\pi r^2+\frac{1}{2}\frac{\mu\pi^2}{\rho^2}\frac{dT}{dt}r^4+$$

$$+\frac{\mu^2\pi^3}{\rho^3}\frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\frac{d^2T}{dt^2}r^6+\ldots$$

от $t=0$ до $t=\infty$.

Если $t=0$, $p=0$ по всему сечению, то

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_0=P,\quad \left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_0=0, \ldots$$

Если $t=\infty$, $p=0$ повсюду, то

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_\infty=0,\quad \left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_\infty=0, \ldots$$

Если l — длина проволоки и R — ее сопротивление, то

$$R=\frac{\rho l}{\pi r^2}.$$

Если C — величина установившегося в проволоке тока:

$$C=\frac{Pl}{R},$$

то полный контрток может быть записан в виде

$$\frac{l}{R}(T_\infty-T_0)-\frac{1}{2}\mu\frac{l}{R}C=-\frac{LC}{R},$$

согласно (35).

Если ток, вместо того чтобы меняться от центра к окружности сечения проволоки, был бы во всем сечении одинаков, то значение F было бы

$$F = T + \mu\gamma\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right),$$

где γ — ток в проволоке в некоторый момент, а весь контрток был бы

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^r \frac{1}{\rho} \frac{dF}{dt} 2\pi r\, dr = \frac{l}{R}(T_\infty - T_0) - \frac{3}{4}\mu \frac{l}{R} C = -\frac{L'C}{R}.$$

Отсюда

$$L = L' - \frac{1}{4}\mu l,$$

т. е. значение L, которое должно быть использовано при вычислении самоиндукции проволоки для переменных токов, меньше, чем то, которое выводится из предположения, что ток одинаков по всему сечению проволоки, на $\frac{1}{4}\mu l$, где l — длина проволоки, а μ — коэффициент магнитной индукции вещества проволоки.

(116) Размеры катушки, примененной Комитетом Британской ассоциации в экспериментах в Королевском колледже в 1864 г., были следующие (в метрах):

Средний радиус	$a = 0{,}158194$.
Глубина каждой катушки	$b = 0{,}01608$.
Ширина каждой катушки	$c = 0{,}01841$.
Расстояние между катушками	0,02010.
Количество витков	$n = 313$.
Диаметр проволоки	0,00126.

Значение L, полученное из первого члена выражения, равно 437 440 метров.

Поправка, зависящая от радиуса, не являющегося бесконечно большим по сравнению с сечением катушки, как оно было найдено из второго члена, оказалась равной —7345 метров.

Поправка, зависящая от диаметра проволоки, на единицу длины	0,44997
Поправка на восемь соседних проволок . . .	0,0236
На 16 соседних проволок	0,0008
Поправка на вариацию тока в различных частях сечения	—0,2500
Общая поправка на единицу длины	0,22437
Длина	311,236 метра
Сумма поправок этого рода	70 »
Окончательное значение L, найденное из вычислений	430 165 »

Это значение L было использовано для внесения изменений в наблюдения согласно методу, объясненному в отчете Комитета *). Поправка, зависящая от L, изменяется как квадрат скорости. Результаты 16 экспериментов, к которым эта поправка была применена и в которых скорость изменялась от 100 оборотов в 17 секунд до 100 оборотов в 77 секунд, были сравнены при помощи метода наименьших квадратов для определения того, какая дальнейшая поправка, зависящая от квадрата скорости, должна быть применена для того, чтобы сделать минимальными возможные ошибки.

Результат этого изучения показал, что вычисленная величина L должна быть помножена на 1,0618, для того чтобы получить величину L, которая дает наиболее правильный результат.

Таким образом, мы имеем L согласно вычислению	430 165 метров
Вероятная величина L методом наименьших квадратов	456 748 »
Результат неточных опытов с электрическими весами (см. параграф 46) .	410 000 »

Величина L, рассчитанная из размеров катушки, повидимому, значительно более точна, чем любая из определенных другим способом.

*) British Association Reports, стр. 169, 1863.

ИЗ «ТРАКТАТА ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ И МАГНЕТИЗМЕ»

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ ([1])

Уже древним был известен тот факт, что некоторые тела, будучи натерты, начинают притягивать другие тела. В течение последнего времени было открыто большое количество других разнообразных явлений, в отношении которых установлена связь с этим явлением притяжения. Эти явления были названы *электрическими*, так как янтарь—по-гречески ἤλεκτρον (электрон)—был первым веществом, на котором они наблюдались.

Другие тела, в частности магнитный железняк и куски железа и стали, подвергнутые определенному воздействию, также с давнего времени известны как вещества, способные к действию на расстоянии. Было установлено, что эти явления, включая и другие, связанные с ними, отличаются от электрических, они получили название *магнитных*—по названию находимого в Фессалийской Магнезии магнитного железняка—μάγνησ (магнес).

С течением времени было установлено, что оба эти класса явлений находятся в связи друг с другом. Зависимости между различными явлениями обоих классов, поскольку их удалось установить, составляют науку об *электромагнетизме*.

В предлагаемом трактате я намерен описать наиболее важные из этих явлений, показать, как их можно измерить, и проследить математические соотношения между измеряемыми величинами. Получив таким образом исходные данные для математической теории электромагнетизма и показав, как эта теория может быть применена к расчету явлений, я постараюсь по возможности ясно осветить связь математической формы этой теории и общей *динамики* с тем, чтобы в известной степени подготовиться к определению тех динамических закономерностей, среди которых нам следовало бы искать иллюстрации или объяснения электромагнитных явлений.

Описывая различные явления, я буду выбирать те из них, которые наиболее ясным образом иллюстрируют основные идеи теории, опуская другие или оставляя их на время, пока читатель не будет более подготовлен к их восприятию.

С математической точки зрения наиболее важной стороной всякого явления является наличие некоторой измеряемой величины. Поэтому я буду рассматривать электрические явления в основном в отношении их измерения, описывая методы измерения и определяя эталоны, от которых они зависят.

Применяя математику к исчислению электрических величин, я в первую очередь буду стараться вывести наиболее общие заключения из имеющихся в нашем распоряжении данных, с тем чтобы после этого применить результаты к избранным простейшим случаям.

Насколько возможно, я буду избегать вопросов, которые, хотя и могут явиться предметом полезных упражнений для математиков, не в состоянии расширить наших научных знаний.

Внутренние взаимосвязи различных отраслей подлежащей нашему изучению науки значительно более многочисленны и сложны, чем любой до сих пор разработанной научной дисциплины. Внешние связи науки об электричестве, с одной стороны, с динамикой, а с другой стороны—с явлениями тепла, света, химического действия и с внутренним строением тел, повидимому, указывают на особую ее важность как науки, помогающей объяснять природу.

Исходя из этого, мне представляется, что изучение электромагнетизма во всех его проявлениях как средства движения науки вперед сейчас приобрело первостепенную важность.

Математические законы различных классов явлений были разработаны в значительной мере удовлетворительно.

Также были исследованы взаимные связи между различными классами явлений, и вероятность строгой точности экспериментальным образом установленных законов была в значительной мере подкреплена подробным знанием их отношений друг к другу.

Наконец, доказательством того, что ни одно электромагнитное явление не противоречит предположению, что оно зависит от чисто динамического действия, был достигнут некоторый прогресс в сведении электромагнетизма к динамике.

Однако все, что было сделано до сих пор, никоим образом не исчерпало области электрических исследований, а скорее открыло эту область, указав нам объекты и снабдив нас средствами исследований.

Едва ли необходимо распространяться относительно ценности результатов исследований по магнетизму для мореходства и важности знания истинного направления стрелки компаса и влияния железа на корабле. Однако работы тех, кто при помощи магнитных наблюдений старался обезопасить мореплавание, в то же самое время сильно продвинули прогресс чистой науки.

Гаусс в качестве члена Германского магнитного союза использовал свой мощный интеллект для того, чтобы разработать теорию магнетизма и методы его наблюдения, и он не только многое добавил к нашему знанию теории притяжений, но и реконструировал всю науку о магнетизме в том, что касается применяемых в ней инструментов, методов наблюдения и расчета результатов, так что его памятные записки по земному магнетизму могут быть взяты в качестве образца физического исследования для тех, кто занят измерением любых сил в природе.

Важные применения электромагнетизма к телеграфии также повлияли на чистую науку, придав коммерческую цену точным электрическим измерениям и дав изучающим электричество возможность использования аппаратов в таких масштабах, которые значительно превосходят возможности обыкновенной лаборатории. Следствия этого спроса на познания в области электричества и экспериментальных возможностей их приобретения уже были весьма большими как в стимулировании энергии передовых работающих в области электричества ученых, так и в распространении среди людей практики такой степени точного знания, которое имеет шансы повести к общему научному прогрессу всей инженерной профессии.

Существует несколько трактатов, в которых электрические и магнитные явления описываются общедоступным образом. Однако эти трактаты не отвечают желаниям людей, сталкивающихся лицом к лицу с подлежащими измерению величинами, чей ум не удовлетворяется экспериментами в масштабе учебной аудитории.

Существует также значительное количество имеющих большое значение в науке об электричестве, но лежащих без движения в объемистых трудах ученых обществ математических работ; они не образуют собой связной системы, обладают очень различными достоинствами и в большинстве случаев понятны только профессиональным математикам.

Поэтому я пришел к выводу, что был бы полезен трактат, имеющий своей основной целью методическое обозрение всего предмета, в котором также было бы показано, как каждая часть исследуемой области приводится к возможности быть проверенной методами фактического измерения.

Общая структура трактата значительно отличается от структуры многих, в большинстве случаев опубликованных в Германии замечательных работ в области электричества, и может показаться, что я не отдал должного воззрениям многих выдающихся ученых электриков и математиков. Одна из причин этого состоит в том, что, прежде чем начать изучение электричества, я решил не читать никаких математических работ по этому предмету до тщательного прочтения мной «Экспериментальных исследований в области электричества» («Experimental Researches in Electricity) Фарадея. Я знал, что между пониманием явлений Фарадеем и концепцией математиков предполагалось наличие такой разницы, что ни тот, ни другие не были удовлетворены языком друг друга. Я был убежден также, что расхождение это возникало не из-за неправоты какой-либо из сторон. Впервые меня убедил в этом сэр Вильям Томсон*), указаниям и помощи которого, так же как и его опубликованным трудам, я обязан своим знанием большей части того, что мне известно по предмету.

Приступив к изучению труда Фарадея, я установил, что его метод понимания явлений был также математическим, хотя и не представленным в форме обычных математических символов. Я также нашел, что этот метод можно выразить в обычной математической форме и таким образом сравнить с методами профессиональных математиков.

Так, например, Фарадей видел силовые линии, пронизывающие все пространство, там, где математики видели центры сил, притягивающих на расстоянии; Фарадей видел среду там, где они не видели ничего кроме расстояния; Фарадей предполагал источник и причину явлений в реальных действиях, протекающих в среде, они же были удовлетворены тем, что нашли их в силе действия на расстоянии, приписанной электрическим флюидам.

Когда я переводил то, что я считал идеями Фарадея, в математическую форму, я нашел, что в большинстве случаев результаты обоих методов совпадали, так что ими объяснялись одни и те же явления и выводились одни и те же законы действия, но что методы Фарадея походили на те, при которых мы начинаем с целого и приходим к частному путем анализа, в то время как обычные математические методы были основаны на принципе движения от частностей и построения целого путем синтеза.

---

*) Я пользуюсь случаем для того, чтобы выразить мою благодарность сэру В. Томсону и профессору Тэту за многие ценные указания, сделанные во время печатания этой работы.

Я также нашел, что многие из открытых математиками плодотворных методов исследования могли быть значительно лучше выражены с помощью идей, вытекающих из работ Фарадея, чем в их оригинальной форме.

Так, например, вся теория потенциала, рассматриваемого в качестве величины, удовлетворяющей определенному дифференциальному уравнению в частных производных, существенным образом принадлежит тому методу, который я назвал методом Фарадея. Согласно другому методу потенциал, если его вообще следует рассматривать, должен быть представлен как результат суммирования величин зарядов наэлектризованных частиц, деленных каждый на его расстояние от данной точки. Благодаря этому многие из математических открытий Лапласа, Пуассона, Грина и Гаусса находят в настоящем трактате свое надлежащее место и соответствующие выражения с помощью концепций Фарадея.

Значительный прогресс в науку об электричестве был внесен, главным образом в Германии, при разработке теории действия на расстоянии. Ценные электрические измерения В. Вебера интерпретируются им в соответствии с этой теорией и электромагнитными теориями, которые берут свое начало от Гаусса, а в дальнейшем развиты Вебером, Риманом, Ф. и К. Нейманами, Лоренцом и другими и которые также основаны на идее действия на расстоянии, но включают или непосредственно относительную скорость частиц или явление постепенного распространения чего-либо, будь то потенциал или сила, от одной частицы к другой. Большой успех, которого достигли эти выдающиеся люди в применении математики к электрическим явлениям, придает, как это впрочем естественно, дополнительный вес их теоретическим соображениям, так что те, кто обращается к ним как к величайшим авторитетам в области математической теории электричества, например, студенты-электрики, вероятно, впитают в себя вместе с их математическими методами также и их физические гипотезы.

Эти физические гипотезы, однако, совершенно чужды принятому мною воззрению на вещи. Одна из задач, которые я себе поставил, состоит в том, чтобы некоторые, изучающие электричество, при чтении этого трактата могли придти к выводу, что имеется и другой способ трактовки того же предмета, который не менее подходит для объяснения явлений и который, хотя может показаться в отдельных разделах менее определенным, по моему мнению, более точно соответствует фактическому состоянию наших знаний как в том, что утверждается, так и в том, что остается еще нерешенным.

С философской точки зрения, кроме того, чрезвычайно важно сравнение двух методов, при помощи которых удалось объяснить основные электромагнитные явления, в частности, объяснить распространение света как электромагнитного явления и фактически вычислить скорость его распространения, в то время как основные концепции фактического существа явлений, а также и большинство вторичных концепций, относящихся к соответствующим величинам, в обоих методах существенно различны.

Я поэтому взял на себя скорее роль адвоката, чем судьи, и скорее представил один метод, чем пытался дать непредвзятое описание обоих. Я не сомневаюсь, что тот метод, который я назвал немецким, также найдет своих приверженцев и будет изложен с умением, достойным его оригинальности.

Я не пытался давать исчерпывающего перечисления электрических явлений, экспериментов и приборов. Читатель, который захотел бы прочесть все, что известно по этим предметам, найдет много полезного в «Трактате об электричестве» профессора А. де ла Рива и в некоторых немецких трактатах, как, например, в «Гальванизме» Видемана, в «Электричестве трения» Рисса, во «Введении в электростатику» Бира и др.

Я сам посвятил себя почти целиком математической трактовке предмета, но я рекомендовал бы интересующемуся, после того как он, по возможности экспериментально, изучит, что собой представляют подлежащие наблюдению явления, тщательно прочесть «Экспериментальные исследования в области электричества»

Фарадея. Там он найдет строго современное историческое изложение многих из величайших открытий и исследований в области электричества в последовательности и порядке, которые едва ли могли быть улучшены, если бы конечные результаты были бы известны с самого начала, и выраженные языком человека, посвятившего большую долю своего внимания методам точного описания научных операций и их результатов *). Для изучающего любой предмет чтение оригинальных трудов представляет собой большое преимущество, так как наука всегда наиболее полно усваивается при своем появлении на свет, а в том, что касается «Исследований» Фарадея, это сравнительно легко, поскольку они изданы по частям и могут читаться в последовательном порядке. Если чем-либо из написанного здесь я окажу любому изучающему содействие в понимании способов мышления и выражений Фарадея, я буду считать, что одна из моих основных целей, а именно, передать другим то восхищение, которое я испытал сам, читая «Исследования» Фарадея, будет выполнена.

Описание явлений и составных частей теории каждого предмета дается в первых главах каждой из четырех частей, на которые разделен этот трактат. В этих главах читатель найдет достаточно для элементарного знакомства со всем предметом науки.

Остальные главы каждой части содержат в себе высшие разделы теории, численные расчеты и описание инструментов и методов экспериментального исследования.

Отношения между электромагнитными явлениями и явлениями излучения, теория молекулярных электрических токов и результаты соображений о природе действия на расстоянии трактуются в последних четырех главах второго тома.

1 февраля 1873 г. *Джемс Клерк Максвелл*

---

*) Life and letters of Faraday, I, стр. 395.

ЧАСТЬ IV

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СИЛА

475.] Различными наблюдателями было замечено, что в некоторых случаях магнетизм вызывается или разрушается в стрелках в результате электрических разрядов, проходящих через стрелки или поблизости от них. В связи с этим делались разного рода предположения, касающиеся отношения между магнетизмом и электричеством, но законы этих явлений и форма этих отношений оставались абсолютно неизвестными до тех пор, пока Ганс Христиан Эрстед *) на частной лекции для немногих успевающих студентов в Копенгагене не отметил, что провод, соединяющий полюсы вольтовой батареи, влияет на находящийся поблизости магнит. Это открытие было опубликовано в трактате, озаглавленном «Experimenta circa effectum Conflictûs Electrici in Acum Magneticam», датированном 21 июля 1820 г.

Опыты, касающиеся отношения магнита к телам, заряженным электричеством, проводились без какого-

*) См. другой отчет об открытии Эрстеда в письме профессора Ганстин (Hansteen) в «Life of Faraday» by Bence Jones, т. II, стр. 395.

либо результата до тех пор, пока Эрстед не догадался выяснить действие провода, *нагретого* электрическим током. Он, однако, открыл, что причиной этого действия был сам по себе ток, а не тепло провода и что «электрический конфликт действует вращательным образом», т. е. что магнит, помещенный около провода, по которому течет электрический ток, стремится расположиться перепендикулярно к проводу и всегда при перемещении магнита вокруг провода направлен одним и тем же концом вперед.

476.] Отсюда вытекает, что в окружающем провод, по которому течет электрический ток, пространстве на магнит действуют силы, зависящие от положения провода и от силы тока. Пространство, в котором действуют эти силы, может поэтому рассматриваться как магнитное поле, и мы можем его изучить таким же путем, как мы уже изучили поле по соседству с обычными магнитами, прослеживая направление линии магнитной силы и измеряя интенсивность силы в каждой точке.

477.] Начнем со случая бесконечно длинного прямого провода, по которому течет электрический ток. Если бы человек мысленно поместил себя на место провода так, чтобы ток тек от головы к его ногам, тогда свободно подвешенный перед ним магнит установился бы таким образом, что тот его конец, который указывает на север, под влиянием действия этого тока стал бы указывать по направлению его правой руки.

Везде линии магнитной силы находятся под прямыми углами к плоскостям, проведенным через провод, и поэтому являются окружностями, каждая из которых находится в плоскости, перепендикулярной к проводу, проходящему через его центр. Если по окружности одного из этих кругов в направлении слева направо передвигать указывающий на север полюс магнита, то этот полюс испытает воздействие силы, всегда направленной в сторону его движения. Другой полюс того же самого магнита испытает действие силы в противоположном направлении.

478.] Для того чтобы сравнить эти силы, предположим, что провод находится в вертикальном положении, а ток имеет направление сверху вниз и пусть магнит будет помещен на приспособление, которое может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, совпадающей с направлением провода (рис. 1). Установлено, что при этих условиях ток не вызывает какого-либо эффекта вращения указанного приспособления как целого около оси. Отсюда делается вывод, что действие вертикального тока на два полюса магнита таково, что статические моменты двух сил относительно тока как оси равны по величине и противоположны по направлению. Пусть m_1 и m_2 будут силы двух полюсов, r_1 и r_2—их расстояния от оси провода, T_1 и T_2—интенсивности магнитной силы, обусловленной током, соответственно около обоих полюсов; тогда сила, действующая на m_1, есть m_1T_1, и так как она направлена под прямым углом к оси, то момент этой силы есть $m_1T_1r_1$. Подобно этому момент силы на другом полюсе будет $m_2T_2r_2$, и так как никакого движения не наблюдается, то

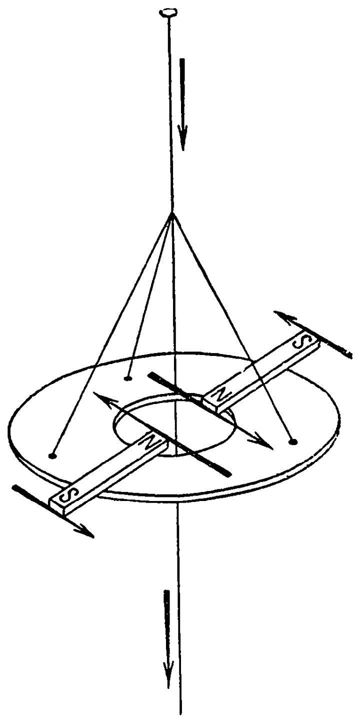


Рис. 1.

$$m_1T_1r_1 + m_2T_2r_2 = 0.$$

Но мы знаем, что во всех магнитах

$$m_1 + m_2 = 0,$$

отсюда

$$T_1r_1 = T_2r_2,$$

или электромагнитная сила, образуемая прямым током бесконечной длины, перпендикулярна к току и ее величина изменяется обратно пропорционально расстоянию.

479.] Так как произведение Tr зависит от силы тока, оно может быть использовано в качестве меры этого тока. Этот метод измерения отличен от другого, основанного на электростатических явлениях, и поскольку он зависит от магнитных явлений, производимых электрическими токами, то может быть назван электромагнитной системой измерения. Если в электромагнитной системе через i обозначается ток, то

$$Tr = 2i.$$

480.] Если принять провод за ось z, тогда прямоугольные компоненты T будут:

$$X = -2i\frac{y}{r^2}, \qquad Y = 2i\frac{x}{r^2}, \qquad Z = 0.$$

Здесь $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ есть полный дифференциал от

$$2i \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C.$$

Таким образом, магнитная сила поля может быть выведена из потенциальной функции, как и в различных прежних случаях, но потенциал в этом случае является функцией, имеющей бесконечный ряд значений, общая разность между которыми равна $4\pi i$ *). Производные потенциала по координатам, однако, имеют определенное и единственное значение в каждой точке.

Существование потенциальной функции в поле, окружающем электрический ток, не является самоочевидным результатом принципа сохранения энергии, так как во всех действительных токах имеется непрерывный расход электрической энергии батареи на преодоление сопротивления проволоки; таким образом, если только величина этого расхода не является совершенно точно известной, можно предполагать, что часть энергии батареи используется на работу, совершаемую при движении магнита по окружности. Действительно, если магнитный полюс m движется по замкнутой кривой, охватывающей провод, то фактически произведенная работа равна $4\pi mi$. Линейный интеграл силы исчезает только для замкнутых, не охватывающих

*) То-есть потенциал магнитного поля токов является многозначной функцией с периодом $4\pi i$. (*Ред.*)

провод, путей. Поэтому мы должны пока что считать закон силы и существование потенциала основанными лишь на опыте, который нами выше описан.

481.] Рассматривая окружающее бесконечную прямую линию пространство, мы видим, что это пространство циклическое, потому что оно при вращении переходит само в себя. Если мы теперь представим себе плоскость или любую другую поверхность, начинающуюся у прямой линии и простирающуюся с одной ее стороны в бесконечность, то эта поверхность может рассматриваться как диафрагма, которая сводит циклическое пространство к ациклическому. Если из какой-нибудь фиксированной точки провести к какой-нибудь другой точке линии, не пересекающие эту диафрагму, и определить потенциал как линейный интеграл силы, взятый вдоль одной из этих линий, то потенциал в любой точке будет иметь одно единственное, определенное значение.

Теперь магнитное поле во всех отношениях идентично с полем магнитного листка силы i, совпадающим с этой поверхностью. Этот магнитный листок ограничен с одной стороны бесконечной прямой линией. Другие ограничивающие его части находятся на бесконечном расстоянии от рассматриваемой части поля.

482.] Во всех действительных опытах ток образует замкнутый контур конечных размеров. Мы поэтому будем сравнивать магнитное действие замкнутой цепи с действием магнитного листка, ограниченного контуром цепи.

Многочисленными опытами было показано (из этих опытов самыми первыми являются опыты Ампера, а наиболее точными опыты Вебера), что магнитное действие малого плоского контура на расстояниях, больших по сравнению с размерами контура, одинаково с действием магнита, ось которого расположена нормально к плоскости контура и магнитный момент которого равен площади контура, помноженной на силу тока*).

*) {Ampère, Théorie des phénomènes électrodynamiques, 1826; Weber, Elektrodynamische Maasbestimmungen (Abhandlungen der königlich Sächs. Gesellschaft zu Leipzig, 1850—1852).}

Если предположить, что контур затянут (filled up) поверхностью, границы которой совпадают с контуром и которая таким образом образует диафрагму, и если магнитным листком силы i, совпадающим с этой поверхностью, заменить данный электрический ток, то магнитное действие листка во всех удаленных точках будет идентичным с действием тока.

483.] До сих пор мы предполагали, что размеры контура малы по сравнению с расстоянием какой-нибудь части его от точек исследуемого поля. Мы теперь должны предположить, что контур может иметь любую форму и размеры и изучить его действие в любой точке P, не находящейся в самом проводнике. Для этой цели Ампер ввел следующий, имеющий важные геометрические применения метод.

Представим себе какую-нибудь поверхность S, ограниченную некоторым током и не проходящую через точку P. На этой поверхности проведем два ряда линий, пересекающих друг друга так, что они делят поверхность на элементарные части, размеры которых малы по сравнению с их расстоянием от P и которые обладают радиусами кривизны поверхности.

Вокруг контура каждого из этих элементов представим себе текущий ток силы i, причем направление его движения одинаково во всех элементах и такое же, как и в первоначальном токе.

Вдоль какой-нибудь линии, отделяющей два соприкасающихся элемента, два одинаковых тока силы i текут в противоположных направлениях.

Эффект двух одинаковых и противоположных токов в том же самом месте равен нулю, с какой бы точки зрения мы ни рассматривали эти токи. Следовательно, их магнитное действие равно нулю. Единственными частями элементарных токов, которые не нейтрализуются таким путем, являются те части, которые совпадают с первоначальным током. Отсюда общий эффект элементарных токов эквивалентен общему эффекту первоначального тока.

484.] Теперь, поскольку каждый из этих элементарных токов может рассматриваться, как маленький плоский ток, расстояние которого от P велико по сравнению с его размерами, мы можем вместо него подставить элементарный магнитный листок силы i, граница которого совпадает с контуром элементарного тока. Магнитное действие этого элементарного листка в P эквивалентно действию, производимому элементарным током. Все элементарные листки вместе составляют магнитный листок силы i, совпадающий с поверхностью S и ограниченный первоначальным током, а магнитная сила всего листка в P эквивалентна магнитной силе контура.

Очевидно, что действие цепи не зависит от формы поверхности S, которая была взята совершенно произвольным образом. Отсюда мы видим, что действие магнитного листка зависит исключительно от формы его контура, а не от формы самого листка. Этот результат мы получили уже раньше в параграфе 410, но весьма поучительно видеть, как этот же результат может быть выведен из рассуждений электромагнитного характера.

Магнитная сила, порождаемая током в какой-нибудь точке, по величине и направлению равна магнитной силе от магнитного листка, ограниченного контуром тока, поверхность которого не проходит через эту точку, причем сила листка численно равна силе тока. Направление тока в цепи связано с направлением намагничивания в листке так, что если человек встанет на ту сторону листка, которую мы называем положительной стороной и которая стремится указывать на север, ток, протекающий перед ним, будет иметь направление справа налево.

485.] Магнитный потенциал цепи, однако, отличается от потенциала магнитного листка для тех точек, которые находятся внутри магнитного листка.

Если ω—телесный угол, образуемый в точке P магнитным листком, который считается положительным, когда положительная или южная сторона листка прилегает к P, то магнитный потенциал в какой-нибудь точке, находящейся вне самого листка, будет равняться $\omega\varphi$, где φ есть сила листка. Для какой-нибудь точки самого листка мы можем предположить, что листок разделен на две части, силы которых равны φ_1 и φ_2, где $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$, так что эта точка находится на положительной стороне φ_1 и на отрицательной стороне φ_2. Потенциал в этой точке будет:

$$\omega(\varphi_1 + \varphi_2) - 4\pi\varphi_2.$$

На отрицательной стороне листка потенциал делается равным $\varphi(\omega - 4\pi)$. Следовательно, в этом случае потенциал является непрерывным и в каждой точке имеет одно единственное, определенное значение. С другой стороны, в случае электрического тока магнитный потенциал в какой-нибудь точке, не находящейся в самой проводящей проволоке, равен $i\omega$, где i есть сила тока, а ω — телесный угол, образуемый цепью в этой точке, считающийся положительным, когда ток, будучи рассматриваем из P, циркулирует в направлении, обратном направлению движения часовых стрелок.

Количество $i\omega$ является функцией, имеющей бесконечный ряд значений, общая разность которых равна $4\pi i$. Производные от $i\omega$ по координатам имеют, однако, единственное и определенное значение для каждой точки пространства.

486.] Если по соседству с электрическим током поместить длинный тонкий гнущийся соленоидальный магнит, то северный и южный концы соленоида будут стремиться двигаться в противоположных направлениях вокруг проволоки, и если бы они могли свободно подчиняться магнитной силе, то магнит в конце концов оказался бы обвитым вокруг проволоки в виде замкнутой катушки. Если бы было возможно получить магнит, имеющий только один полюс или полюсы неравной силы, то такой магнит двигался бы непрерывно вокруг проволоки в одном направлении, но так как полюсы каждого магнита равны и противоположны, этого результата получить никогда нельзя. Фарадей, однако, показал, каким способом можно получить непрерывное вращение полюса магнита около электрического тока, предоставляя одному полюсу возможность свободно обращаться вокруг тока, в то время как другой полюс этой возможности не имеет. Для того чтобы этот процесс мог повторяться беспрестанно, тело магнита должно перемещаться с одной стороны тока на другую один раз за каждый оборот. Для того чтобы достигнуть этого без прерывания потока электричества, ток разделяется на две ветви, так что когда одна ветвь прерывается, для того чтобы пропустить магнит, ток продолжает течь по другой ветви. Для этого Фарадей использовал кругообразное корытце, заполненное ртутью, как это показано на рис. 4 п. 491. Ток входит в корытце через проводник AB, разделяется у B и, пройдя через дуги BQP и BRP, соединяется в P и выходит из корытца через проводник PO, чашу с ртутью O и вертикальный провод ниже O, по которому направляется к полюсу батареи.

Магнит (не показанный на этом рисунке) установлен так, чтобы он мог вращаться около вертикальной оси, проходящей через O, вместе с подвижной проволокой OP. Тело магнита проходит через отверстие корытца, причем один полюс, пусть это будет северный полюс, расположен ниже плоскости корытца, а другой—выше него. Так как магнит и проволока OP вращаются около вертикальной оси, ток постепенно переходит из той ветви установки, которая находится перед магнитом, к той ветви, которая находится за магнитом, так что при каждом полном обороте магнит переходит с одной стороны тока на другую. Северный полюс магнита обращается вокруг текущего вниз тока в направлении север—восток—юг—запад, и если ω, ω' являются телесными углами (вне зависимости от их знака), под которыми видно круговое корытце из двух полюсов, то работа, произведенная электромагнитной силой за время одного полного оборота, равна:

$$mi\,(4\pi - \omega - \omega'),$$

где m есть сила каждого из полюсов, а i — сила тока *).

*) [Эта задача может быть рассмотрена следующим образом: обратимся к рис. 4, возьмем OP в любом положении и введем воображаемые взаимно уравновешивающиеся токи: i вдоль BO, x и y вдоль OB. Когда магнит, прикрепленный к OP, делает полный оборот, то на южном полюсе током не производится никакой работы, так как ток i проходит вдоль $ABOZ$, а полюс описывает замкнутую кривую, которая не охватывает тока.

Северный полюс, однако, описывает замкнутую кривую, которая охватывает ток i, и произведенная работа равна $4\pi mi$. Мы теперь еще должны оценить эффекты токов x в цепи $BPOB$ и y в цепи $BRPOB$. Потенциал северного полюса, находящегося ниже плоскостей этих цепей, будет:

$$-mx\omega_\theta + my(\omega - \omega_\theta),$$

а южного полюса

$$-mx\omega'_\theta - my(-\omega' + \omega'_\theta),$$

где ω_θ и ω'_θ обозначают телесные углы, под которыми контур BOP виден из двух полюсов, а ω, ω' — телесные углы, образуемые круговым корытцем. Результирующий потенциал будет:

$$my(\omega + \omega') - mi\,(\omega_\theta + \omega'_\theta).$$

Поэтому, поскольку OP вращается от OP в направлении север — восток — юг — запад и обратно к OP, потенциал будет изменяться на $-mi(\omega + \omega')$. Отсюда работа, произведенная токами, будет той, которая указана в тексте.]

{Нижеследующее представляет собой несколько отличный путь получения того же результата: токи, проходящие через провода и ртутное корытце, эквивалентны круговому току $i-x$ вдоль корытца, току i вдоль цепи POB и току i через AB, BO и вертикальную проволоку OZ. Круговой ток, очевидно, не создает какой-либо силы, стремящейся двигать каждый из полюсов вдоль окружности, коаксиальной с контуром тока. Северный полюс охватывает цепь AB, BO и OZ один раз за каждый оборот, следовательно, работа, произведенная над ним, равна $4\pi im$. Если Ω и Ω' являются численными значениями телесных углов, образуемых цепью POB у северного и южного полюсов магнита соответственно, тогда потенциальная энергия магнита и цепи будет $-mi(\Omega + \Omega')$. Отсюда, если θ есть угол POB, работа, произведенная на магните при полном обороте, будет:

$$-\int_0^{2\pi} mi\,\frac{d}{d\theta}(\Omega + \Omega')\,d\theta = -mi\,(\omega + \omega').$$

Отсюда вся работа, выполненная на магните, равна

$$mi\,\{4\pi - (\omega + \omega')\}.\}$$

487.] Попробуем теперь составить себе представление о состоянии магнитного поля вблизи линейного электрического контура.

Пусть значение ω телесного угла, образуемого цепью, известно для каждой точки пространства и пусть будут начерчены поверхности, для которых ω является постоянным. Эти поверхности будут эквипотенциальными поверхностями. Каждая из этих поверхностей будет ограничена контуром и любые две поверхности ω_1 и ω_2 встречаются в контуре под углом

$$\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\ ^{*}).$$

Рис. 2 представляет сечение эквипотенциальных поверхностей, образуемых круговым током. Маленький круг представляет сечение проводника, а горизонтальная линия внизу рисунка есть перпендикуляр к плоскости кругового тока, проведенный через его центр. Эквипотенциальные поверхности, из которых 24 изображены соответственно ряду значений ω, отличающихся одно от другого на $\frac{\pi}{6}$, являются поверхностями вращения,

*) {Это может быть получено следующим образом. Рассмотрим точку P на поверхности ω_1 около линии пересечения двух эквипотенциальных поверхностей; пусть O будет точкой на линии пересечения около P; опишем сферу с радиусом, равным единице, и с центром в точке O. Телесный угол, образуемый в P цепью, будет измеряться площадью, отрезанной от единичной сферы плоскостью, касательной к поверхности ω_1 в точке O, и имеющим неправильную форму конусом, определяемым очертаниями цепи на некотором расстоянии от O. Рассмотрим теперь точку Q на второй поверхности ω_2, близкую к O, причем телесный угол, образуемый цепью в этой точке, будет измеряться площадью, отрезаемой от единичной сферы с центром в O плоскостью, касательной к ω_2 в точке O, и имеющим неправильную форму конусом, который, если P и Q расположены весьма близко друг к другу, будет тем же, что и выше упомянутый. Таким образом, разность между телесными углами равна площади луночки между касательными плоскостями, а эта площадь равна удвоенному углу между касательными плоскостями, т. е. удвоенному углу, под которым пересекаются ω_1 и ω_2; следовательно, угол между поверхностями равен $\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$.}

имеющими эту линию в качестве их общей оси. Они, очевидно, представляют собой вытянутые фигуры, бу-

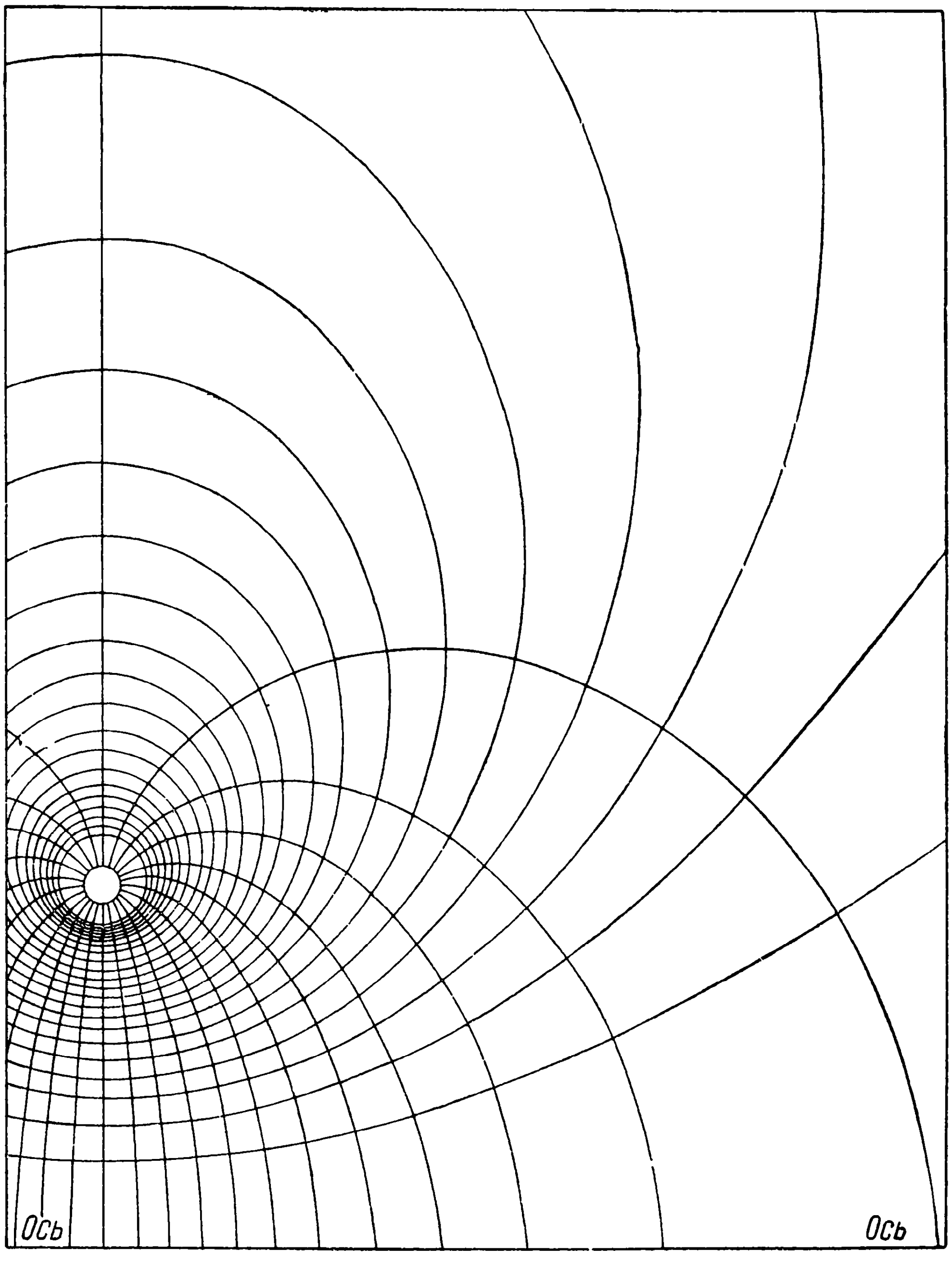


Рис. 2.

дучи более плоскими в направлении оси. Они пересекаются друг с другом на линии контура под углами в 15 градусов.

Сила, действующая на магнитный полюс, помещенный в любой точке эквипотенциальной поверхности, перпендикулярна к этой поверхности и изменяется обратно пропорционально расстоянию между последовательными эквипотенциальными поверхностями. Замкнутые кривые, окружающие сечение проводника на рисунке,—это линии силы. Они взяты из работы сэра Вильяма Томсона «О вихревом движении» *). Смотри также параграф 702.

Действие электрической цепи на магнитную систему

488.] Мы теперь можем вывести из теории магнитных листков действие электрического контура на какую-нибудь магнитную систему, находящуюся вблизи него. Действительно, построим магнитный листок, сила которого численно равна силе тока, контур которого совпадает по своему положению с контуром цепи и который не проходит ни через одну часть магнитной системы. Тогда действие листка на магнитную систему будет тождественно с действием электрического тока.

Реакция магнитной системы на электрическую цепь

489.] Отсюда, применяя тот принцип, что действие и противодействие равны и противоположны, мы заключаем, что механическое действие магнитной системы на электрическую цепь идентично действию этой системы на магнитный листок, имеющий цепь в качестве своего контура.

Потенциальная энергия магнитного листка силы φ, помещенного в поле магнитной силы, потенциал которой равен V, будет согласно параграфу 410 **)

$$M=\varphi \iint \left(l\,\frac{dV}{dx}+m\,\frac{dV}{dy}+n\,\frac{dV}{dz}\right) dS,$$

*) Trans. R. S. Edin., т. XXV., стр. 217, 1869.

**) Эта формула вытекает из выражения потенциальной энергии диполя в поле $\mathbf{H}$, равной—$\mathbf{pH}$, если иметь в виду, что $\mathbf{p}=\int_s \varphi\, d\mathbf{s}$ и $\mathbf{H}=-\operatorname{grad} V$. (*Ред.*)

где l, m, n являются направляющими косинусами нормали, проведенной к положительной стороне элемента dS, причем интегрирование распространено по всей поверхности.

Поверхностный интеграл

$$N = \iint (la + mb + nc)\, dS,$$

где a, b, c являются компонентами магнитной индукции, представляет собой величину магнитной индукции через листок, или, на языке Фарадея, подсчитанное алгебраически число линий магнитной индукции, проходящих через листок от отрицательной к положительной стороне, причем линии, которые проходят через листок в противоположном направлении, считаются отрицательными. Вспоминая, что листок не принадлежит к магнитной системе, к которой относится потенциал V, и что магнитная сила, следовательно, равна магнитной индукции, мы имеем:

$$a = -\frac{dV}{dx}; \quad b = -\frac{dV}{dy}; \quad c = -\frac{dV}{dz},$$

и мы можем написать значение M:

$$M = -\varphi N.$$

Если δx_1 представляет какое-нибудь смещение листка, а X_1 — силу, действующую на листок так, что она способствует этому смещению, тогда по принципу сохранения энергии

$$X_1 \delta x_1 + \delta M = 0,$$

или

$$X_1 = \varphi \frac{dN}{dx_1}.$$

Таким образом, мы определили свойства силы, возникающей при данном смещении листка. Она способствует или противодействует этому смещению в зависимости от того, увеличивает или уменьшает это смещение величину N — число линий индукции, проходящих через листок.

То же самое справедливо и по отношению к эквивалентному электрическому току. Какому-нибудь смещению цепи будет оказано содействие или сопротивление в зависимости от того, увеличивает или уменьшает оно количество линий индукции, проходящих через цепь в положительном направлении.

Мы должны иметь в виду, что положительным направлением линии магнитной индукции является направление, по которому будет двигаться северный полюс магнита, и что линия индукции проходит через цепь в положительном направлении тогда, когда направление линии индукции относится к направлению тока «стеклянного» электричества цепи, как поступательное и вращательное движение правостороннего винта.

490.] Очевидно, что сила, соответствующая какому-нибудь смещению цепи как целого, может быть сразу выведена из теории магнитного листка. Однако это не все. Если часть цепи гибкая, так что она может быть смещена независимо от остатка, мы можем сделать контур листка способным к тому же самому роду смещения путем разрезания поверхности листка на достаточное количество частей, связанных гибкими соединениями. Отсюда мы заключаем, что если путем смещения какой-нибудь части цепи в данном направлении число линий индукции, проходящих через цепь, может быть увеличено, этому смещению будет содействовать электромагнитная сила, действующая на цепь.

Следовательно, всякая часть цепи подвергается воздействию силы, перемещающей ее наперерез линиям магнитной индукции, так, чтобы охватить контуром цепи большее количество этих линий, и работа, произведенная силой во время этого смещения, равна числу дополнительных линий индукции, помноженному на силу тока.

Пусть элемент ds цепи, по которой течет ток силы i, перемещается параллельно самому себе на расстояние δx; он опишет площадь, имеющую форму параллелограмма, стороны которого параллельны и соответственно равны ds и δx.

Если магнитную индукцию обозначить через $\mathfrak{B}$ и если ее направление образует угол ε с нормалью к площади параллелограмма, то значение прироста N, соответствующего смещению, находится путем умножения площади параллелограмма на $\mathfrak{B}\cos\varepsilon$. Результат этой операции представлен геометрическим объемом параллелепипеда, ребра которого по величине и направлению представляют δx, ds и $\mathfrak{B}$; он должен считаться положительным, если наблюдатель, перемещаясь в этих трех направлениях в указанном здесь порядке, будет двигаться вокруг диагонали параллелепипеда в направлении часовых стрелок *). Объем этого параллелепипеда равен $X\,\delta x$.

Если θ есть угол между ds и $\mathfrak{B}$, площадь параллелограмма, стороны которого равны ds и $\mathfrak{B}$, будет равна $ds\,\mathfrak{B}\sin\theta$, и если η есть угол, который образует смещение δx с нормалью к этому параллелограмму, то объем параллелепипеда будет:

$$ds\,\mathfrak{B}\sin\theta\,\delta x\cos\eta=\delta N.$$

Но

$$X\,\delta x=i\,\delta N=i\,ds\,\mathfrak{B}\sin\theta\,\delta x\cos\eta$$

и

$$X=i\,ds\,\mathfrak{B}\sin\theta\cos\eta$$

есть составляющая в направлении δx силы, действующей на ds.

Направление этой силы, следовательно, перпендикулярно к параллелограмму, и ее величина равна

$$i\,ds\,\mathfrak{B}\sin\theta.$$

Это есть площадь параллелограмма, стороны которого равны по величине и направлению $i\,ds$ и $\mathfrak{B}$. Следовательно, сила, действующая на ds, представлена по величине площадью этого параллелограмма и по направлению нормалью к его плоскости, проведенной в направлении продольного движения правостороннего винта,

*) {В этом правиле ds изображается в направлении i и предполагается, что наблюдатель находится в том углу параллелепипеда, из которого проведены dx, ds и $\mathfrak{B}$.}

головка которого поворачивается от направления тока $i\,ds$ к направлению магнитной индукции $\mathfrak{B}$.

Направление и величину этой силы мы можем выразить на языке кватернионов, говоря, что это есть векторная часть результата, полученного при умножении вектора $i\,ds$ — элемента тока на вектор $\mathfrak{B}$ — магнитную индукцию.

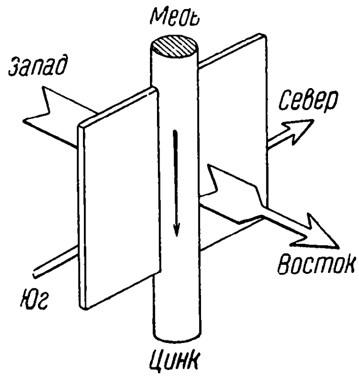


Рис. 3.

491.] Мы, таким образом, полностью определили силу, действующую на любую часть электрической цепи, помещенной в магнитном поле. Если цепь движется каким-нибудь образом так, что, после того как она приняла различные формы и положения, она возвращается к своему первоначальному месту, а сила тока все время постоянна, общее количество работы, выполненной электромагнитными силами, будет равно нулю. Так как это правильно в отношении любого цикла движений цепи, то отсюда следует, что при помощи электромагнитных сил невозможно поддерживать движение непрерывного вращения в какой-нибудь части линейной цепи с постоянной силой тока против сопротивления трению и т. д.

Однако непрерывное вращение можно получить при том условии, что в какой-то части своего пути электрический ток переходит с одного проводника на другой, которые скользят друг относительно друга.

Когда в цепи имеется скользящий контакт проводника по поверхности гладкого твердого или жидкого тела, эта цепь не может более рассматриваться как простой линейный ток постоянной силы, но должна рассматриваться как система двух или большего числа цепей переменной силы, причем ток так распределяется среди них, что в тех, для которых N увеличивается, проходят токи в положительном направлении, в то время как в тех, для которых N уменьшается, проходят токи в отрицательном направлении.

Соответственно этому в аппарате, изображенном на рис. 4, OP есть подвижный проводник, один конец которого погружен в чашу с ртутью O, в то время как другой конец погружен в кругообразное корытце, заполненное ртутью и концентрически расположенное по отношению к O.

Ток i входит вдоль AB и разделяется в круговом корытце на две части, одна из которых x течет вдоль дуги BQP, в то время как другая y течет вдоль дуги BRP. Эти токи, соединяющиеся в P, текут вдоль подвижного проводника PO и электрода OZ к цинковому концу батареи. Сила тока вдоль PO и OZ равна $x+y$, или i.

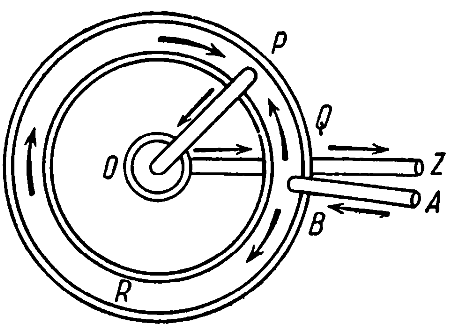


Рис. 4.

Здесь мы имеем две цепи: $ABQPOZ$, сила тока в которой (текущего в положительном направлении) равна x, и $ABRPOZ$, сила тока в которой (текущего в отрицательном направлении) равна y.

Пусть $\mathfrak{B}$ будет магнитная индукция и пусть она направлена кверху, нормально к плоскости круга.

В то время как OP перемещается на угол θ в направлении, обратном движению часовых стрелок, площадь, охватываемая контуром первой цепи, увеличивается на $\frac{1}{2}(OP)^2\theta$, а площадь, охватываемая контуром второй цепи, уменьшается на ту же самую величину. Так как сила тока в первой цепи равна x, работа, произведенная им, равна $\frac{1}{2}\,x\,(OP)^2\,\theta\,\mathfrak{B}$, и так как сила тока во второй цепи равна $-y$, работа, произведенная им, равна $\frac{1}{2}\,y\,(OP)^2\,\theta\,\mathfrak{B}$.

Следовательно, полная работа равна:

$$\frac{1}{2}(x+y)(OP)^2\,\theta\mathfrak{B},\quad \text{или}\quad \frac{1}{2}\,i\,(OP)^2\,\theta\mathfrak{B}.$$

Как мы видим, она зависит только от силы тока в PO. Отсюда, если i поддерживается постоянным, стержень OP будет все время вращаться по кругу под действием постоянной силы, момент которой равен $\frac{1}{2} i (OP)^2 \mathfrak{B}$. Если, как в северных широтах, $\mathfrak{B}$ действует вниз и если ток направлен внутрь круга, вращение будет происходить в отрицательном направлении, т. е. в направлении $PQBR$.

492.] Мы теперь имеем возможность перейти от взаимного действия магнитов и токов к действию одной цепи на другую. Действительно, мы знаем, что магнитные свойства электрического контура C_1 по отношению к любой магнитной системе M_2 тождественны с магнитными свойствами магнитного листка S_1, контур которого совпадает с контуром тока и сила которого численно равна силе электрического тока. Пусть магнитная система M_2 будет магнитным листком S_2. Тогда взаимодействие между S_1 и S_2 будет идентично взаимодействию между S_1 и цепью C_2 с контуром, совпадающим с контуром S_2, и силой тока, равной по величине силе листка S_2. Это последнее действие идентично действию между C_1 и C_2.

Поэтому взаимодействие между двумя цепями C_1 и C_2 идентично с взаимодействием между соответствующими магнитными листками S_1 и S_2.

В параграфе 423 *) мы уже исследовали взаимодействие двух магнитных листков, контуры которых представляют собой замкнутые кривые s_1 и s_2. Если мы положим:

$$M = \int_0^{s_2} \int_0^{s_1} \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 \, ds_2,$$

где ε есть угол между направлениями элементов ds_1 и ds_2, а r—расстояние между ними, причем одно интегрирование распространяется вдоль s_2, а другое—вдоль s_1, и если мы назовем M потенциалом двух замкнутых

*) Этот параграф в данном издании не приводится. (*Ред.*)

кривых s_1 и s_2, тогда потенциальная энергия, связанная со взаимодействием двух магнитных листков, ограниченных двумя контурами токов, силы которых равны i_1 и i_2, будет:

$$-i_1, i_2 M,$$

а сила X, которая содействует какому-нибудь смещению δx, будет:

$$i_1 i_2 \frac{dM}{dx}.$$

Вся теория силы, действующей на какую-нибудь часть электрической цепи и обусловленной другой электрической цепью, может быть выведена из этого результата.

493.] В этой главе мы всюду придерживались метода Фарадея. Вместо того чтобы начать, как мы это делаем, следуя Амперу, в следующей главе, с прямого действия части цепи на часть другой цепи, мы прежде всего показываем, что контур тока производит то же самое действие на магнит, что и магнитный листок, или, другими словами, мы определяем природу магнитного поля, образуемого контуром тока. Во-вторых, мы показываем, что контур тока, будучи помещен в какое-нибудь магнитное поле, испытывает ту же самую силу, что и магнитный листок. Мы, таким образом, определяем силу, действующую на контур тока, помещенный в какое-нибудь магнитное поле. Наконец, предполагая, что магнитное поле произведено второй электрической цепью, мы определяем действие одного контура тока на всю или какую-нибудь часть другого контура.

494.] Применим этот метод к случаю прямолинейного тока бесконечной длины, действующего на отрезок параллельного ему прямолинейного проводника.

Предположим, что ток i в первом проводнике течет вертикально вниз. В этом случае северный конец магнита должен показывать в сторону правой руки человека (ноги которого направлены вниз), который смотрит на этот магнит в направлении от оси тока.

Линии магнитной индукции поэтому представляют собой горизонтальные круги, центры которых расположены вдоль оси тока с положительным направлением вращения: север — восток — юг — запад.

Пусть другой, направленный вниз вертикальный ток находится к западу от первого тока. Линии магнитной индукции, образуемые первым током, здесь направлены к северу. Направление силы, действующей на вторую цепь, может быть определено путем поворачивания головки правостороннего винта от надира, куда направлен ток, к северу—направлению магнитной индукции. Винт тогда будет перемещаться по направлению к востоку, т. е. сила, действующая на второй ток, окажется направленной к первому току. Вообще говоря, поскольку это явление зависит только от относительного положения токов, два параллельных контура, по которым токи текут в одинаковом направлении, притягивают друг друга.

Тем же самым путем мы можем показать, что два параллельных контура, по которым текут токи в противоположных направлениях, отталкиваются.

495.] Интенсивность магнитной индукции на расстоянии r от прямолинейного тока силы i, как мы показали в параграфе 479, равна

$$2\frac{i}{r}.$$

Отсюда отрезок второго проводника, параллельного первому и несущего ток i' в том же самом направлении, будет притягиваться к первому с силой

$$F = 2ii'\frac{a}{r},$$

где a есть длина рассматриваемого отрезка, а r—его расстояние от первого проводника.

Так как отношение a к r есть численная величина, независимая от абсолютной величины любой из этих линий, произведение двух токов, измеренных по электромагнитной системе, должно иметь размерность силы, отсюда размерности единицы тока будут:

$$[i] = [F^{\frac{1}{2}}] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

496.] Другой способ определения направления силы, действующей на контур тока, состоит в рассмотрении отношения между магнитным действием тока и действием других токов и магнитов.

Если с одной стороны провода, по которому течет ток, магнитное действие, имеющее своей причиной этот ток, происходит в том же или почти в том же направлении, как и то, которое происходит по причине других токов, тогда на другой стороне провода эти силы будут направлены в противоположном или почти противоположном направлении, и сила, действующая на провод, будет направлена от той стороны, где силы усиливают друг друга, к той стороне, где они противодействуют друг другу.

Таким образом, если текущий сверху вниз ток помещается в поле магнитной силы, направленном к северу, его магнитное действие будет направлено к северу на западной стороне и к югу на восточной стороне. Силы складываются на западной стороне и противостоят друг другу на восточной стороне, и контур, следовательно, будет испытывать действие силы с запада на восток (см. рис. 3, стр. 369).

На рис. 5 маленький круг представляет собой сечение провода, по которому сверху вниз течет ток и который помещен в равномерное поле магнитной силы, действующей в направлении левой стороны рисунка. Магнитная сила больше внизу провода, чем над проводом. Следовательно, провод будет двигаться по направлению снизу вверх.

497.] Этот принцип мы можем применять, когда два тока расположены в одной и той же плоскости, но не параллельны. Пусть один из проводников представляет собой бесконечную прямую проволоку в плоскости бумаги, которую предполагают горизонтальной.

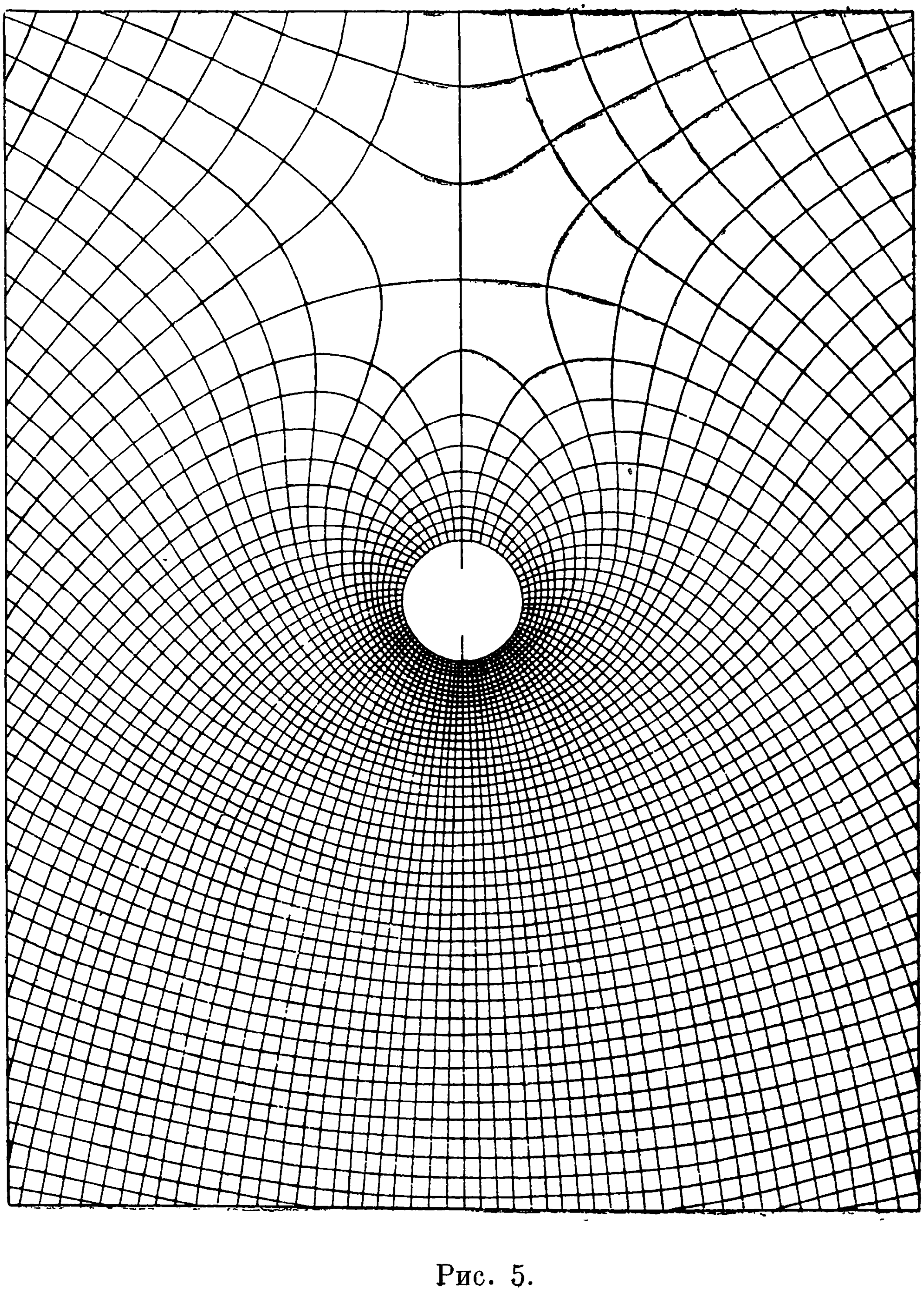


Рис. 5.

На правой стороне тока *) магнитная сила действует вниз, а на левой стороне она действует вверх. То же самое правильно в отношении магнитной силы, относящейся к любому маленькому отрезку второго проводника, находящемуся в той же самой плоскости. Если второй ток находится на правой стороне первого, магнитные силы будут усиливать друг друга на правой стороне и противостоять друг другу на левой стороне. Поэтому цепь, несущая второй ток, будет подвергаться действию силы, двигающей ее по направлению от правой стороны к левой. Величина этой силы зависит исключительно от положения второго тока, а не от его направления. Если второй ток находится на левой стороне первого, он будет испытывать действие силы слева направо.

Отсюда, если второй ток имеет то же самое направление, что и первый, его цепь притягивается; если же направление противоположно—она отталкивается; если второй ток течет перпендикулярно к первому и направлен от него, он притягивается в направлении течения первого тока, а если он течет по направлению к первому току, то он движется в направлении, противоположном тому, в котором течет первый ток.

Рассматривая взаимодействие двух токов, не обязательно иметь в виду связь между электричеством и магнетизмом, которую мы пытались иллюстрировать при помощи правостороннего винта. Если бы мы даже забыли эту связь, мы всегда пришли бы к правильным результатам при том условии, что мы неизменно придерживались бы одной из двух возможных форм связи.

498.] Рассмотрим теперь в их совокупности магнитные свойства электрического контура в той мере, в какой мы их изучили.

Мы можем представить, что электрическая цепь состоит из вольтовой батареи и проволоки, соединяю-

*) {Правой стороной тока является правая сторона наблюдателя, расположенного спиной к бумаге так, что ток поступает в его голову и уходит через ноги.}

щей ее полюсы, или термоэлектрического устройства, или же заряженной лейденской банки с проводом, соединяющим ее положительную и отрицательную обкладки, или из любого другого приспособления для получения электрического тока вдоль определенного пути.

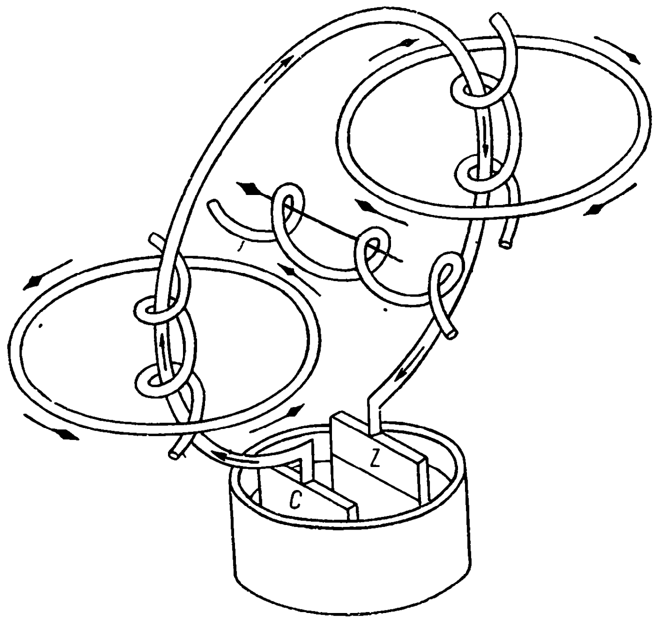


Рис. 6. Связь между электрическим током и линиями магнитной индукции показана с помощью правого винта.

Ток вызывает по соседству с собой магнитные явления.

Если нарисовать замкнутую кривую и линейный интеграл магнитной силы брать вдоль всей замкнутой кривой, тогда, если эта кривая не сцеплена с контуром, линейный интеграл равен нулю, а если она связана с контуром, так что ток i охватывается этой замкнутой кривой, линейный интеграл будет равен $4\pi i$, и он будет положительным, если направление интегрирования вдоль замкнутой кривой будет совпадать с направлением движения часовых стрелок, как они видны наблюдателю, идущему в направлении течения электрического тока. Наблюдателю, двигающемуся вдоль замкнутой кривой в направлении интегрирования и обходящему электрическую цепь, ток представится текущим в направлении движения часовых стрелок. Мы можем выразить это иначе, говоря, что отношение между направлениями двух замкнутых кривых может быть выражено вращением правостороннего винта по направлению электрического контура и такого же винта по направлению замкнутой кривой. Если направление вращения нарезки первого винта, по мере того как мы проходим вдоль нее, совпадает с положительным направлением нарезки второго винта, тогда линейный интеграл будет положительным, в противоположном случае он будет отрицательным.

499.] Примечание. Линейный интеграл $4\pi i$ зависит исключительно от величины тока, а не от чего-либо другого. Он не зависит от природы проводника, через который проходит ток, будет ли он металлическим проводником или электролитом или же несовершенным проводником. Мы имеем основания полагать, что даже когда нет собственно проводимости, а в наличии только изменение электрического смещения, как это, например, имеет место в стекле лейденской банки во время заряжения или разряжения, магнитный эффект электрического движения в точности такой же.

Далее, величина линейного интеграла $4\pi i$ не зависит от природы среды, в которой проходят замкнутые кривые. Она остается той же самой, независимо от того, проходят ли замкнутые кривые целиком через воздух или через магнит, или мягкое железо, или через другое парамагнитное или диамагнитное вещество.

500.] Когда цепь помещается в магнитное поле, взаимодействие между током и другими элементами поля зависит от поверхностного интеграла магнитной индукции на какой-либо поверхности, ограниченной контуром. Если благодаря какому-нибудь движению цепи или части ее этот поверхностный интеграл может быть увеличен, тогда налицо будет механическая сила, стремящаяся двигать проводник или часть проводника данным образом. Движение проводника, которое увеличивает поверхностный интеграл, есть движение, перпендикулярное к направлению тока и пересекающее линии индукции.

Если нарисовать параллелограмм, стороны которого параллельны и пропорциональны силе тока в какой-нибудь точке и магнитной силе в той же самой точке,

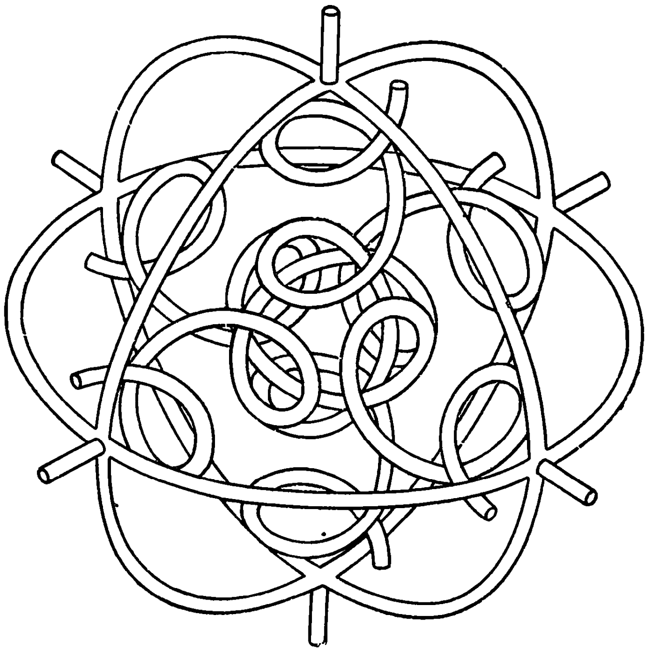


Рис. 7. Связи между положительным направлением движения и вращением показаны с помощью трех правых винтов.

тогда сила, действующая на единицу длины проводника, численно равна площади параллелограмма, перпендикулярна к его плоскости и действует в направлении, в котором перемещается правосторонний винт при вращении его головки от направления тока к направлению магнитной индукции.

Отсюда мы имеем новое электромагнитное определение линии магнитной индукции. Это—та линия, к которой всегда перпендикулярна сила, действующая на проводник.

Она может быть также определена как такая линия, что движущийся вдоль нее проводник с электрическим током не будет испытывать воздействия какой-либо силы.

501.] Необходимо особенно иметь в виду, что механическая сила, которая перемещает проводник с током наперерез линиям магнитной силы, действует не на электрический ток, но на проводник, который его несет. Если проводник представляет собой вращающийся диск или жидкость, он будет перемещаться, повинуясь этой силе, и это движение может сопровождаться или не сопровождаться изменением положения электрического тока, который он несет. [Но если ток сам по себе свободен избрать любой путь через неподвижный плотный проводник или сеть проводов, тогда, если постоянная магнитная сила действует на систему, путь тока через проводники не меняется устойчивым образом. После того как известные преходящие явления, называемые токами индукции, прекратились, распределение тока окажется таким же, как будто бы не было никакой магнитной силы.] *)

Единственная сила, которая действует на электрические токи, это—электродвижущая сила, которую необходимо отличать от механической силы, являющейся предметом настоящей главы.

---

*) {Холл (Hall) открыл (Phil. Mag., т. IX, стр. 225; т. X, стр. 301, 1880), что постоянное магнитное поле слегка изменяет распределение токов в большинстве проводников, так что утверждение, поставленное в тексте в скобках, должно рассматриваться лишь как приблизительно верное.}

ГЛАВА III

ОБ ИНДУКЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ

528.] Открытие Эрстедом магнитного действия электрического тока привело путем непосредственных умозаключений к открытию намагничения при помощи электрических токов и к установлению механического взаимодействия между электрическими токами. Однако только в 1831 г. Фарадей, который в течение длительного времени пытался получить электрические токи при помощи магнитных или электрических воздействий, открыл условия магнитно-электрической индукции. Примененный Фарадеем в его исследованиях метод состоял в постоянном обращении к эксперименту в качестве средства проверки правильности его идей и к постоянному развитию идей под прямым влиянием эксперимента. В опубликованных им исследованиях мы находим, что эти идеи выражены языком, наилучшим образом приспособленным для целей рождающейся науки, так как этот язык весьма отличается от стиля физиков, привыкших к пользованию обычными математическими формами мышления.

Экспериментальные исследования, которыми Ампер установил законы механического взаимодействия между электрическими токами, являются одним из наиболее блестящих достижений науки.

Все в совокупности, и теория и эксперимент, как будто появилось в полной зрелости и в полном вооружении из головы «Ньютона электричества». Эти исследования закончены по форме, идеальны по точности и резюмированы в формуле, из которой могут быть выведены все явления и которая навсегда должна остаться фундаментальной формулой электродинамики.

Метод Ампера, однако, хотя и изложен в индуктивной форме, не позволяет нам проследить процесс образования и развития идей, которыми он руководствовался. Мы с трудом можем поверить, что Ампер в действительности открыл закон взаимодействия при посредстве описываемых им экспериментов. Мы вынуждены подозревать, в чем, впрочем, признается сам Ампер *), что закон открыт им при помощи некоего процесса, который он нам не показывает, и что когда была построена законченная теория, он удалил все следы лесов, при помощи которых здание теории было возведено.

Фарадей, напротив, показывает нам свои как неудачные, так и удачные эксперименты, как свои несозревшие идеи, так и идеи разработанные, и читатель, сколько бы ни был ниже его по своей способности индуктивного мышления, чувствует скорей симпатию, чем восхищение, и приходит к искушению поверить в то, что при случае он также сделал бы эти открытия. Поэтому каждому изучающему следовало бы читать исследования Ампера как блестящий образец научного стиля при изложении открытия, но ему следовало бы также изучать Фарадея для воспитания научного духа на той борьбе противоречий, которая возникает между новыми фактами, излагаемыми Фарадеем, и идеями, рождающимися в его собственном мозгу (2).

Возможно, что для науки было большим преимуществом то обстоятельство, что Фарадей не был профессиональным математиком, хотя и был хорошо знаком с основными идеями пространства, времени и силы. У него не было соблазна входить во многие интересные

---

*) Ampère, Théorie des phénomènes Electrodynamiques, стр. 9.

изыскания в области чистой математики, которых потребовали бы его открытия, если бы они были представлены в математической форме, и он ни при одном из своих открытий не чувствовал потребности втиснуть полученные результаты в приемлемую для математических требований его времени форму или выразить их в такой форме, которую математики могли бы оспаривать. Таким образом, он имел возможность спокойно делать свою собственную работу, координировать свои идеи с полученными им фактами и высказывать их обычным, не техническим, языком.

Я предпринял работу над этим трактатом главным образом в надежде сделать эти идеи основой математической теории.

529.] Мы привыкли рассматривать вселенную как состоящую из частей, и математики обычно начинают с рассмотрения отдельной частицы, затем устанавливают ее отношение к другой частице и т. д. Это по общему мнению считалось наиболее естественным методом. Однако, для того чтобы создать себе представление о частице, требуется процесс абстракции, так как все наши восприятия относятся к более или менее значительным телам, так что идея *целого*, имеющаяся в нашем сознании в какой-нибудь данный момент, возможно, является настолько же первичной, как и представление об индивидуальной вещи. Поэтому может существовать и математический метод, в котором мы переходим от целого к частям, вместо того чтобы идти от частей к целому.

Так, например, в своей первой книге Эвклид рассматривает линию как след точки, поверхность — как образованную линией и объем — как производное поверхности. Но он также определяет поверхность как границу объема, линию — как край поверхности и точку — как конец линии.

Подобным же способом мы можем рассматривать потенциал материальной системы как функцию, найденную известным процессом интегрирования с учетом масс тел, находящихся в поле, или мы можем предположить, что сами эти массы не имеют другого математического значения, чем объемные интегралы от $\frac{1}{4\pi}\nabla^2\Psi$, где Ψ есть потенциал.

В электрических исследованиях мы можем применить формулы, в которых фигурируют такие величины, как расстояния между телами, их заряды, или токи в этих телах, или мы можем использовать формулы, в которые входят другие величины, непрерывные во всем пространстве.

Математические операции, применяемые в первом методе,—интегрирование вдоль линий, по поверхностям и по ограниченным объемам пространства, а используемые во втором методе—дифференциальные уравнения в частных производных и интегрирование по всему пространству.

Метод Фарадея, повидимому, тесно связан со вторым из этих методов. Он никогда не рассматривает тела существующими так, что между ними нет ничего кроме расстояния, и действующими одно на другое лишь в соответствии с некоторой функцией этого расстояния. Он рассматривает все пространство как поле силы, причем линии силы, вообще говоря, искривлены так, что линии, относящиеся к какому-либо телу, исходят из него во все стороны, а их направления изменяются вследствие присутствия других тел. Он даже говорит *) о силовых линиях, относящихся к телу, как в некотором смысле о части самого этого тела, так что нельзя сказать, что в своем действии на отдельные тела тело действует там, где его самого нет.

Это, однако, не является доминирующей идеей у Фарадея. Я думаю, что он скорее хочет сказать, что поле всюду заполнено силовыми линиями, расположение которых зависит от расположения тел в поле, и что механическое или электрическое действие на каждое тело определяется силовыми линиями, которые его окружают.

*) Exp. Res., т. II, стр. 293; т. III, стр. 447 (англ. изд.).

Явления магнитно-электрической индукции *)

530.] 1. *Индукция при изменении первичного тока.* Пусть имеются две проводящие цепи—первичная и вторичная. Первая цепь связана с вольтовой батареей, дающей первичный ток, который может оставаться постоянным, прерываться или идти в обратном направлении. Во вторичную цепь включен гальванометр, который указывает появление любых могущих образоваться в этой цепи токов. Этот гальванометр устанавливается на таком расстоянии от всех частей первичной цепи, что первичный ток не может оказать какого-либо ощутительного прямого влияния на его показания.

Пусть часть первичной цепи состоит из прямого провода, а часть вторичной цепи также из прямого провода, расположенного близко и параллельно к первому, все же остальные части цепей находятся на значительном расстоянии друг от друга

Установлено, что в момент посылки тока через прямой провод первичной цепи гальванометр вторичной цепи указывает на наличие тока во вторичном прямом проводе *обратного* направления. Этот ток называется индуктированным током. Если первичный ток поддерживается постоянным, индуктированный ток быстро исчезает, и, повидимому, первичный ток не производит действия на вторичную цепь. Если теперь прервать вторичный ток, то наблюдается вторичный ток, проходящий *в том же* направлении, что и первичный ток. Каждое изменение первичного тока производит электродвижущую силу во вторичной цепи. Когда первичный ток увеличивается, электродвижущая сила действует в направлении, обратном току. Когда ток уменьшается, электродвижущая сила действует в том же направлении, что и направление первичного тока. Когда первичный ток постоянен, электродвижущей силы нет.

*) См. «Experimental Res.» Фарадея, серии I и II (см. русск. изд.).

Эти эффекты индукции увеличиваются при сближении обоих проводов. Они также усиливаются при образовании из проводов двух круговых или спиральных катушек, расположенных близко друг к другу и еще более усиливаются при помещении железного сердечника или пучка железных проволок внутрь катушек.

2. *Индукция при перемещении первичной цепи.* Мы видели, что в том случае, когда первичный ток остается постоянным и цепь неподвижна, вторичный ток быстро исчезает. Предположим теперь, что первичный ток остается постоянным, но первичный прямой провод приближается к вторичному прямому проводу. При движении первичного провода будет наблюдаться вторичный ток, направленный в *обратном* направлении по сравнению с направлением первичного тока.

Если первичная цепь удаляется от вторичной, то будет наблюдаться вторичный ток *в том же* направлении, что и первичный.

3. *Индукция при движении вторичной цепи.* Если двигать вторичную цепь, то вторичный ток будет иметь направление, обратное первичному, в том случае, когда провод вторичной цепи приближается к проводу первичной цепи, и то же самое направление, когда он удаляется от него.

Во всех случаях направление вторичного тока таково, что механические действия между двумя проводниками противоположны направлению движения, будучи отталкиванием, когда провода сближаются, и притяжением, когда они удаляются друг от друга. Этот весьма важный факт был установлен Ленцем*).

4. *Индукция при относительном движении магнита и вторичной цепи.* Если вместо первичного контура мы возьмем магнит, торцовая сторона которого совпадает с контуром и сила которого численно равна силе тока контура, причем его южная сторона соответст-

*) См. Ленц, Pogg. Ann., XXXI, стр. 483 (1834); Э. Х. Ленц, Избранные труды. Серия «Классики естествознания», стр. 147—157. (*Ред.*)

вует положительной стороне тока, то явления, производимые относительным движением этого магнита и вторичного тока, совершенно одинаковы с теми явлениями, которые наблюдаются в случае наличия первичного тока.

531.] Совокупность этих явлений может быть суммирована в одном законе. Когда число линий магнитной индукции, пронизывающих вторичный контур в положительном направлении, изменяется, то в контуре возникает электродвижущая сила, которая измеряется скоростью убывания потока магнитной индукции, пронизывающего контур.

532.] Так, например, пусть рельсы железной дороги изолированы от земли, но в одном своем конце соединены через гальванометр и пусть ток замыкается колесами и осью железнодорожного вагона на расстоянии x от конца. Если пренебречь высотой оси над уровнем рельсов, то индукция через этот вторичный контур сводится к вертикальной слагающей земной магнитной силы, которая в северных широтах направлена сверху вниз. Отсюда, если b есть ширина колеи железной дороги, горизонтальная площадь контура тока равна bx, и поверхностный интеграл магнитной индукции через нее равен Zbx, где Z — вертикальная слагающая магнитной силы земли. Поскольку Z направлена вниз, нижнюю сторону цепи следует считать положительной, и положительное направление в цепи будет север — восток — юг — запад, т. е. направление кажущегося дневного движения солнца.

Пусть теперь железнодорожный вагон приведен в движение, тогда x будет изменяться, а в цепи возникает электродвижущая сила, величина которой равна $-Zb\frac{dx}{dt}$.

Если x увеличивается, т. е. если вагон удаляется от конечного пункта, то электродвижущая сила возникает в отрицательном направлении или в направлении север — запад — юг — восток. Таким образом, направление этой силы через ось будет справа налево.

Если бы x уменьшался, абсолютное направление силы было бы обратным, но так как направление движения вагона также будет происходить в обратном направлении, то электродвижущая сила на оси все-таки будет направлена справа налево (предполагая, что наблюдатель, находящийся в вагоне, всегда находится лицом по направлению движения). В южных широтах, где южный конец намагниченной стрелки направлен вниз, электродвижущая сила в движущемся теле направлена слева направо.

Отсюда мы получаем следующее правило для определения направления электродвижущей силы в проводе, движущемся в магнитном поле, перпендикулярно к нему.

Вообразите, что ваша голова и ноги совпадают с концами компасной стрелки, которые соответственно направлены на север и на юг, и обратите ваше лицо по направлению движения, тогда электродвижущая сила, возникающая в результате движения, будет направлена слева направо.

533.] Так как знание связи этих направлений весьма важно, то попытаемся использовать еще одну иллюстрацию. Предположим, что вокруг земли по экватору положен металлический пояс и вдоль Гринвичского меридиана проложен металлический провод от экватора к северному полюсу.

Пусть будет построена большая квадрантная металлическая дуга, один конец которой вращается около северного полюса, в то время как другой движется по экватору, скользя по большому металлическому поясу земли и следуя за солнцем в его дневном движении. Тогда вдоль движущегося квадранта возникает электродвижущая сила, действующая от полюса к экватору.

Электродвижущая сила будет той же, если мы предположим, что земля неподвижна и квадрант движется с востока на запад, или если мы предположим, что квадрант находится в покое, а земля вращается с запада на восток. Если мы предположим, что вращается земля, то электродвижущая сила будет той же, какова бы ни была форма части неподвижного в пространстве контура, у которого один конец касается одного из полюсов, а другой — экватора. Ток в этой части цепи будет направлен от полюса к экватору.

Другая часть цепи, которая неподвижно связана с землей, может также иметь любую форму и может быть внутри или вне земли. В этой части направление тока будет от экватора к любому из полюсов ([3]).

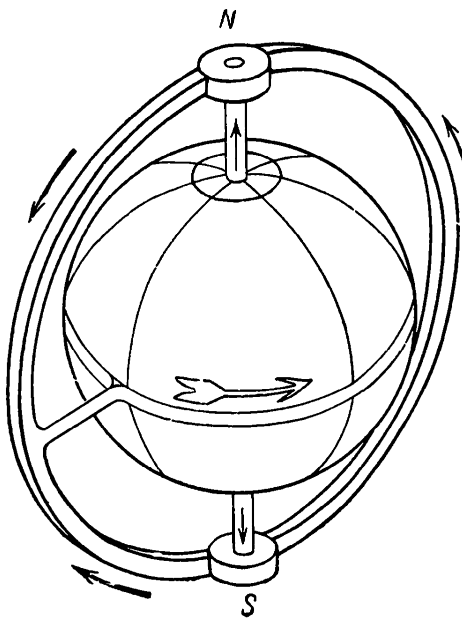


Рис. 8.

534.] Величина электродвижущей силы магнитно-электрической индукции совершенно не зависит от природы вещества проводника, в котором она действует, и также от природы проводника, несущего индуктирующий ток.

Для того чтобы показать это, Фарадей *) сделал проводник из двух проволок различных металлов, изолированных одна от другой шелковой обмоткой, переплетенных вместе и спаянных друг с другом на одном конце. Другие концы проволок были соединены с гальванометром. Таким путем проволоки были расположены одинаковым образом по отношению к первичной цепи, и если бы электродвижущая сила была сильнее в одной из проволок, это произвело бы ток, который был бы указан гальванометром. Однако он установил, что такая комбинация может быть подвержена действию самых мощных индукционных электродвижущих сил, без того чтобы на гальванометр было оказано какое-либо влияние. Он также нашел, что

*) Exp Res., (195) (см. русск изд.).

если обе части сложного проводника состояли из двух металлов или из металла и электролита, гальванометр также не отмечал тока*). Следовательно, электродвижущая сила в любом проводнике зависит только от формы и движения этого проводника, а также от силы, формы и движения электрических токов в поле.

535.] Другая особенность электродвижущей силы состоит в том, что она сама по себе не производит механического движения тела, а только вызывает в нем электрический ток.

Если она в действительности производит ток в теле, то появляется механическое действие, связанное с этим

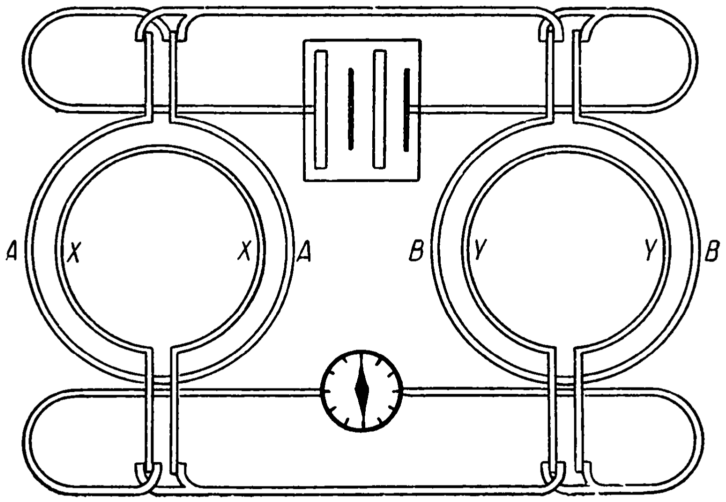


Рис. 9.

током, если же мы воспрепятствуем образованию тока, то не будет механического действия на самое тело. Если тело наэлектризовано, электродвижущая сила будет двигать его, как мы уже описали в разделе «Электростатика».

536.] Экспериментальное исследование законов индукции электрических токов в неподвижных цепях может быть проведено со значительной точностью при помощи методов, в которых электродвижущая

*) Exp. Res. (200) (см. русск. изд.).

сила, а следовательно, ток в цепи гальванометра становится равным нулю.

Так, например, если хотят показать, что индукция катушки A на катушку X равна индукции катушки B на катушку Y, помещают первую пару катушек A и X на достаточном расстоянии от второй пары B и Y. Затем соединяют A и B с вольтовой батареей таким образом, что тот же самый первичный ток идет через A в положительном направлении и затем через B в отрицательном направлении. Далее соединяют X и Y с гальванометром так, что вторичный ток, если он существует, должен течь последовательно в том же самом направлении через X и Y.

При этом, если индукция A на X равна индукции B на Y, гальванометр не укажет тока индукции, когда цепь батареи замыкается или размыкается.

Точность этого метода повышается вместе с силой первичного тока и чувствительностью гальванометра к мгновенным токам, и опыты производятся значительно легче, чем опыты, связанные с электромагнитными притяжениями, при которых сам проводник должен быть очень тонко подвешен.

Профессором Феличи из Пизы *) описан весьма поучительный ряд хорошо разработанных опытов этого рода.

Я только вкратце укажу некоторые из законов, которые могут быть доказаны этим способом.

(1) Электродвижущая сила индукции одной цепи на другую независима от площади сечения проводников и от материала, из которого они сделаны **).

Действительно, мы можем в опыте заменить каждую из цепей другой, отличающейся сечением и материалом, но той же самой формы, без изменения результата.

*) Felici, Annales de Chimie, XXXIV, стр. 64, 1852 и Nuovo Cimento, IX, стр. 345, 1859.

**) {Это утверждение не обязательно будет строго правильным, если одно или большее число взятых веществ магнитны, так как в этом случае распределение магнитных силовых линий нарушается индуктированным в проволоках магнетизмом.}

(2) Индукция цепи A на цепь X равна индукции цепи X на A.

Действительно, если мы поместим A в цепь гальванометра и X в батарейную цепь, равновесие электродвижущей силы не будет нарушено.

(3) Индукция пропорциональна индуктирующему току.

В самом деле, если мы удостоверились, что индукция A на X равна индукции B на Y, а также индукции C на Z, мы можем пропустить батарейный ток сначала через A, а затем распределить его в любом соотношении между B и C. Если мы теперь последовательно присоединим к гальванометру цепь X в обратном направлении, цепи Y и Z в прямом, то электродвижущая сила в X будет уравновешивать сумму электродвижущих сил в Y и Z.

(4) В парах цепей, образующих геометрически подобные системы, индукция пропорциональна их линейным размерам.

В самом деле, если три вышеупомянутые пары цепей подобны по форме, но линейные размеры первой пары равны сумме соответствующих линейных размеров второй и третьей пар, тогда, если A, B и C соединены последовательно с батареей и если X— в обратном направлении, а Y и Z—в прямом последовательно соединены с гальванометром, то будет наблюдаться равновесие.

(5) Электродвижущая сила, производимая в катушке, состоящей из n витков, током в катушке из m витков, пропорциональна произведению mn.

537.] Для рассмотренных выше опытов мы указывали, что гальванометр должен быть как можно более чувствительным и его стрелка как можно более легкой, с тем чтобы давать заметные показания в случае кратковременных токов весьма малой силы. Опыты по индукции, производимой движением, требуют, чтобы стрелка имела несколько больший период колебания, с тем чтобы имелось время произвести несколько движений проводников, пока стрелка недалека от своего положения равновесия. В рассмотренных выше опытах электродвижущие силы в цепи гальванометра были в равновесии в течение всего времени, так что через катушку гальванометра не проходило никакого тока. В опытах, которые мы сейчас опишем, электродвижущие силы сначала действуют в одном направлении, а затем — в другом так, что они порождают в гальванометре один за другим два тока в противоположных направлениях, и мы должны показать, что импульсы, действующие на стрелку гальванометра при прохождении этих следующих друг за другом токов, в известных случаях равны и противоположны.

Теория применения гальванометра к измерению кратковременных токов будет более подробно рассмотрена в параграфе 748 *). Сейчас для наших целей достаточно заметить, что, пока стрелка гальванометра близка к своему положению равновесия, отклоняющая сила тока пропорциональна самому току, и если полное время действия тока невелико по сравнению с периодом колебания стрелки, то конечная скорость магнита будет пропорциональна общему количеству электричества, перенесенному током. Отсюда, если два тока проходят, быстро следуя друг за другом и перенося равные количества электричества в противоположных направлениях, стрелка не приобретает в конечном счете какой-либо скорости.

Таким образом, для того чтобы показать, что индуктируемые токи во вторичной цепи, возникающие вследствие замыкания и размыкания первичной цепи, равны по общему количеству перенесенного электричества, но противоположны по направлению, мы можем так устроить соединение первичной цепи с батареей, чтобы, нажимая на ключ, получать ток в первичной цепи, а снимая палец с контакта, прерывать его по желанию. Если ключ нажимается на некоторое время, гальванометр во вторичной цепи показывает в момент образования контакта мгновенный ток, имеющий направ-

*) Этот параграф не вошел в настоящее издание. (*Ред.*)

ление, обратное первичному току. Если контакт поддерживается, индуктированный ток длится короткое время и быстро исчезает. Если мы теперь прервем контакт, то через вторичную цепь пройдет другой мгновенный ток в противоположном направлении и стрелка гальванометра получит импульс в противоположном направлении.

Но если мы осуществим контакт только на одно мгновение и затем прервем его, два индуктированных тока пройдут через гальванометр в столь быстрой последовательности, что стрелка его, будучи подвергнута воздействию первого тока, не имеет достаточно времени, чтобы передвинуться на заметное расстояние от своего положения равновесия, до того как она останавливается вторым током. Вследствие точного равенства перенесенных этими мгновенными токами количеств электричества стрелка остается неподвижной.

Если тщательно наблюдать за стрелкой, то можно заметить, что она внезапно вздрагивает, переходя от одного положения покоя к другому, очень близко расположенному от первого.

Это доказывает, что количество электричества, перенесенное током, когда контакт прерывается, в точности равно и противоположно количеству электричества индуктированного тока, образующегося при замыкании контакта.

538.] Другим применением этого метода является следующее, указанное Феличи во второй серии его «Исследований».

Всегда можно найти много различных положений вторичной катушки B, таких, что замыкание или размыкание контакта в первичной катушке A не дает индуктированных токов в B. В таких случаях говорят, что положения двух катушек являются *сопряженными*.

Пусть B_1 и B_2 будут двумя из этих положений. Если катушка B внезапно передвигается из положения B_1 в положение B_2, то алгебраическая сумма мгновенных токов в катушке B в точности равна нулю, так что стрелка гальванометра остается в покое, когда движение B закончено. Это остается правильным независимо от того, каким способом катушка B перемещается из B_1 в B_2, и также назависимо от того, остается ли ток в первичной катушке A постоянным или же он во время движения изменяет свою величину.

Далее пусть B' будет какое-либо другое положение B, не сопряженное с A, так что замыкание или размыкание контакта в A дает индуктированный ток, когда B находится в положении B'.

Установим контакт тогда, когда B находится в сопряженном положении B_1, в этом случае ток индукции отсутствует. Передвинем B в положение B', тогда будет наблюдаться ток индукции, производимый движением: Но если B быстро передвинуть в положение B' и затем разомкнуть первичную цепь, то индуктированный ток, возникающий вследствие размыкания контакта, в точности аннулирует эффект тока индукции, обусловленного движением, так что стрелка гальванометра останется в покое. Отсюда ток, возникающий в результате движения от сопряженного положения в любое другое положение, равен и противоположен току, обусловленному размыканием контакта в последнем положении. Так как эффект замыкания контакта равен и противоположен эффекту размыкания, отсюда следует, что эффект замыкания контакта, когда катушка B находится в любом положении B', эквивалентен эффекту перенесения катушки из любого сопряженного положения B_1 в положение B', в то время как ток протекает через A.

Если перемена относительного положения катушек производится при помощи движения первичной цепи вместо движения вторичной, то результат будет тем же самым.

539.] Из этих опытов следует, что полный ток индукции в B_1 при одновременном движении катушки из положения A_1 в положение A_2 и катушки B из положения B_1 в положение B_2 и при изменении тока в A от γ_1 до γ_2 зависит только от первоначального состояния A_1, B_1, γ_1 и конечного состояния A_2, B_2, γ_2, а вовсе не от характера промежуточных состояний, через которые эта система может проходить.

Отсюда величина полного тока индукции должна иметь вид

$$F(A_2,\ B_2,\ \gamma_2)-F(A_1,\ B_1,\ \gamma_1),$$

где F является функцией A, B и γ.

Что касается формы этой функции, то согласно параграфу 536 мы знаем, что в тех случаях, когда нет движения, а следовательно, $A_1=A_2$ и $B_1=B_2$, ток индукции пропорционален первичному току. Поэтому γ входит только как множитель, в то время как другим множителем является функция формы и положения цепей A и B.

Мы также знаем, что величина этой функции зависит от относительных, но не от абсолютных положений A и B, так что можно выразить ее как функцию расстояний различных элементов, из которых составлены цепи, и углов, которые эти элементы образуют между собой.

Пусть M будет этой функцией, тогда полный ток индукции может быть записан как

$$C\{M_1\gamma_1-M_2\gamma_2\},$$

где C есть проводимость вторичной цепи, M_1 и γ_1 являются начальными, а M_2 и γ_2 конечными значениями M и γ.

Эти опыты, следовательно, показывают, что полный ток индукции зависит от изменения некоторого определенного количества $M\gamma$ и что это изменение может произойти или вследствие изменения величины первичного тока γ или вследствие движения первичной или вторичной цепи, которое изменяет величину M.

540.] Концепция существования такой величины, от изменений которой, а не от ее абсолютной величины зависит ток индукции, встречается у Фарадея в первой серии его «Исследований» *).

Он наблюдал, что вторичная цепь, находясь в покое в электромагнитном поле неизменного напряжения,

*) Exp. Res., серия I, (60) (см. русск. изд.).

не показывает наличия какого-нибудь электрического эффекта, в то время как, если то же самое состояние поля было бы достигнуто внезапно, возникает ток. Если же первичная цепь удаляется из поля или устраняются магнитные силы, образуется ток противоположного направления.

По этой причине он приписал вторичной цепи, находящейся в электромагнитном поле, «особое электрическое состояние материи», которому он дал название *электротонического состояния*. Затем он нашел, что он может расстаться с этой идеей при помощи соображений, основанных на линиях магнитной силы *), но даже в его последних исследованиях **) он говорит: «Неоднократно в моем уме настойчиво возникала идея *электротонического* состояния» ***).

Вся история развития этой идеи в уме Фарадея, как она показана в опубликованных им «Исследованиях», заслуживает изучения. В результате целого ряда опытов, которые были основаны на тщательном размышлении, но без помощи математических вычислений, он пришел к идее, что существует нечто, что нам ныне известно как математическая величина и что может быть даже названо основной величиной в теории электромагнетизма. Но так как он пришел к этой концепции чисто экспериментальным путем, он приписал ей физическое существование и предположил, что это особое состояние материи, хотя был готов отбросить эту теорию, как только он смог бы объяснить явления в любой более привычной нам форме.

Другие исследователи значительно позже Фарадея пришли к той же самой идее чисто математическим путем, но, насколько я знаю, ни один из них не узнал в утонченной математической идее потенциала двух контуров фарадееву смелую гипотезу электротонического состояния. Поэтому те, кто изучал этот предмет путем, намеченным выдающимися исследователями, впервые

*) Exp. Res., серия II, (242) (см. русск. изд.).
**) Там же, (3269).
***) Там же, (60, 1114, 1661, 1729, 1733) (см. русск. изд.).

выразившими законы этих явлений в математической форме, иногда затруднялись оценить научную точность той формулировки законов, которую Фарадей в своих двух первых сериях «Исследований» дал со столь удивительной полнотой.

Научное значение фарадеевой концепции электротонического состояния состоит в том, что она направила мысль на признание существования некоторой величины, от изменений которой зависят наблюдаемые явления. Эта концепция недостаточна для объяснения явлений, если ее не развить в значительно большей степени, чем это было сделано Фарадеем. К этому вопросу мы снова вернемся в параграфе 584.

541.] В руках Фарадея значительно более мощным был метод, в котором он использует те линии магнитной силы, которые он всегда представлял себе, когда рассматривал магнитные или электрические токи и изображение которых при помощи железных опилок он справедливо считал *) наиболее ценной помощью экспериментатору.

Фарадей рассматривал эти линии, как выражающие не только своим направлением направление магнитной силы, но также числом и степенью своей концентрации—напряженность этой силы. В своих последних «Исследованиях» **) он показывает, как представлять себе единичные силовые линии. В различных частях этого трактата я объяснил, каково соотношение между свойствами, которые Фарадей приписывал силовым линиям, и математическими условиями электрических и магнитных сил и каким образом представление Фарадея о единичных силовых линиях и о количестве линий может быть в известных пределах математически точным. Смотри параграфы 82, 404, 490.

В первых сериях своих «Исследований» ***) Фарадей ясно показывает, как направление тока в проводящем контуре, часть которого может двигаться, зависит от

*) Exp. Res. (3234).
**) Там же, (3122).
***) Там же, (114) (см. русск. изд.).

того способа, каким движущаяся часть пересекает магнитные силовые линии.

Во второй серии *) он показывает, как явления, производимые изменением силы тока или магнита, могут быть объяснены путем предположения, что система силовых линий расширяется или стягивается по направлению к проволоке или магниту в зависимости от того, увеличивается их сила или уменьшается. Я не знаю, с какой степенью ясности он уже придерживался доктрины, которая в дальнейшем была столь отчетливо изложена им **), именно, что суммарное действие на движущийся проводник, когда он перерезает силовые линии, зависит от площади или сечения этих силовых линий. Это, однако, не является чем-то новым, если принять во внимание исследования, изложенные во второй серии ***).

Концепция, которую Фарадей имел в отношении непрерывности силовых линий, устраняет возможность их внезапного появления в месте, в котором их до этого момента совершенно не было. Если, следовательно, число линий, пронизывающих проводящий контур, изменяется, то это может произойти только вследствие движения контура через силовые линии или в другом случае вследствие движения силовых линий через контур. И в том и в другом случае в цепи образуется ток.

Понятие числа силовых линий, проходящих через контур в любой момент, математически эквивалентно более ранней концепции Фарадея об электротоническом состоянии этого контура; оно представлено величиной $M\gamma$.

Только после того как определение электродвижущей силы (параграфы 69, 274) и способы ее измерения были сделаны более точными, мы можем полностью сформулировать истинный закон магнитно-электрической индукции, который гласит:

*) Exp. Res., (238) (см. русск. изд.).
**) Там же, (3082), (3087), (3113).
***) Там же, (217) и далее (см. русск. изд.).

Полная электродвижущая сила, действующая вдоль контура в какой-нибудь момент, измеряется быстротой уменьшения числа магнитных силовых линий, пронизывающих его.

Будучи интегрировано по времени, это утверждение приобретает следующую форму:

Интеграл по времени от полной электродвижущей силы, действующей вдоль некоторого контура, есть величина постоянная, вместе с числом магнитных силовых линий, пронизывающих контур.

Вместо того чтобы говорить о числе магнитных силовых линий, мы можем говорить о магнитной индукции сквозь контур цепи или о поверхностном интеграле магнитной индукции, распространенным по всей поверхности, ограниченной контуром.

Мы в дальнейшем снова возвратимся к этому методу Фарадея. Тем временем мы должны перечислить теории индукции, основанные на других соображениях.

Закон Ленца

542.] В 1834 г. Ленц*) сформулировал следующее замечательное соотношение между явлениями механического взаимодействия электрических токов, определенными формулой Ампера и индукцией электрических токов вследствие относительного движения проводников. Более ранняя попытка установления такого соотношения была изложена Ричи (Ritchie) в журнале «Philosophical Magazine» за январь того же года, но направление индуктированного тока было во всяком случае им установлено неправильно. Закон Ленца гласит:

Если постоянный ток течет по первичной цепи A и если вследствие движения A или движения вторичной цепи B во вторичной цепи B индуктируется ток, то направление этого индуктированного тока будет таким, что по своему электромагнитному воздействию

---

*) Pogg. Ann., XXXI, стр. 483 (1834). См. сноску на стр. 386. (*Ред.*)

на A он имеет тенденцию противодействовать относительному движению цепей.

На этом законе Ф. Е. Нейман*) основал свою математическую теорию индукции, в которой он установил математические законы индуктированных токов, возникающих в результате движения первичного или вторичного проводника. Он показал, что величина M, которую мы назвали потенциалом одной цепи на другую, является тем же самым, что и электромагнитный потенциал одной цепи по отношению к другой, который мы уже исследовали в связи с формулой Ампера**). Таким образом, Нейман распространил на индукцию токов тот математический метод, который Ампер применил к их механическому взаимодействию.

543.] Вскоре после этого Гельмгольц в его «Мемуаре о сохранении силы»***) и В. Томсон****) в более поздних исследованиях, но независимо от Гельмгольца, сделали шаг, имеющий еще большую научную важность, а именно: они показали, что открытая Фарадеем индукция электрических токов могла быть математически выведена из электромагнитных действий, открытых Эрстедом и Ампером путем применения принципа сохранения энергии.

Гельмгольц берет случай проводящей цепи, обладающей сопротивлением R, в которой действует электродвижущая сила A от вольтовой батареи или термоэлектрической пары. Ток в цепи в какой-нибудь момент равен I. Он предполагает, что магнит, находящийся поблизости от цепи, движется и что его потенциал по отношению к проводнику равен V, так что

---

*) F. E. Neumann, Berlin. Akad., 1845 и 1847.

**) Предыдущая глава, в которой изложен метод Ампера в настоящем издании опущена. (*Ред.*)

***) Зачитано на заседании Берлинского физического общества 23 июля 1847 г.; см. сноску на стр. 80

****) Trans. Brit. Ass., 1848, и Phil. Mag., декабрь 1851 г.; см. также его работу «Transient Electric Currents», Phil. Mag., июнь 1853 г.

в течение некоторого малого интервала времени dt энергия, сообщаемая магниту электромагнитным действием, равна $I\frac{dV}{dt}dt$. По закону Джоуля (параграф 242) работа, затраченная на выделение тепла в цепи, равна $I^2R\,dt$, а работа, выполненная электродвижущей силой A на поддержание тока I в течение времени dt, равна $AI\,dt$.

Отсюда, поскольку вся выполненная работа должна равняться всей израсходованной:

$$AI\,dt = I^2R\,dt + I\frac{dV}{dt}dt,$$

откуда мы находим силу тока

$$I = \frac{A - \frac{dV}{dt}}{R}.$$

Поскольку величина A произвольна, пусть $A = 0$, и тогда

$$I = -\frac{1}{R}\frac{dV}{dt}.$$

Иначе говоря, в цепи будет ток, порождаемый движением магнита, равный току, производимому электродвижущей силой $-\frac{dV}{dt}$.

Полный индуктированный ток за время движения магнита от места, где его потенциал равен V_1, к месту, где его потенциал равен V_2, будет:

$$\int I\,dt = -\frac{1}{R}\int\frac{dV}{dt}dt = \frac{1}{R}(V_1 - V_2),$$

т. е. полный ток не зависит от скорости или от пути магнита, а зависит только от его начального и конечного положений.

В своем первоначальном исследовании Гельмгольц принял систему единиц, основанную на измерении тепла, порождаемого током в проводнике. Рассматривая единицу силы тока в качестве произвольной, получаем для единицы сопротивления сопротивление проводника, в котором эта единица силы тока порождает единицу тепла в единицу времени. Единицей электродвижущей силы в этой системе будет та, которая необходима для получения единицы силы тока в проводнике, обладающем единицей сопротивления.

Принятие этой системы единиц требует введения в уравнения коэффициента a, который является механическим эквивалентом единицы тепла. Так как мы неизменно придерживаемся или электростатической или электромагнитной системы единиц, этот коэффициент не встречается в приводимых здесь уравнениях.

544.] Гельмгольц также выводит ток индукции в том случае, когда проводящая цепь и цепь, по которой течет постоянный ток, движутся одна относительно другой *).

---

*) {Доказательства, данные в параграфах 543 и 544, неудовлетворительны, так как они не считаются с изменениями, которые могут возникнуть в токах, а также с изменениями, которые могут возникнуть в кинетической энергии движущихся цепей. Действительно, вывести уравнения индукции двух токов из одного принципа сохранения энергии столь же невозможно, как невозможно вывести уравнение движения системы с двумя степенями свободы без применения какого-либо иного принципа кроме принципа сохранения энергии.

Если мы применяем принцип сохранения энергии в случае двух токов, мы получаем одно уравнение, которое мы можем вывести следующим образом: пусть L, M, N будут соответственно коэффициент самоиндукции первой цепи, коэффициент взаимной индукции обеих цепей и самоиндукция второй цепи (параграф 578). Пусть T_e будет кинетическая энергия, относящаяся к токам, протекающим по цепям, и пусть остальная часть обозначений будет совпадать с принятой в параграфе 544.

Тогда (параграф 578)

$$T_e=\frac{1}{2}LI_1^2+MI_1I_2+\frac{1}{2}NI_2^2,$$

$$\delta T_e=\frac{dT_e}{dI_1}\delta I_1+\frac{dT_e}{dI_2}\delta I_2+\sum\frac{dT_e}{dx}\delta x, \tag{1}$$

где x есть некоторая обобщенная координата, определяющая положение цепи.

Так как T_e является однородной квадратичной функцией I_1 и I_2, то

$$2T_e=I_1\frac{dT_e}{dI_1}+I_2\frac{dT_e}{dI_2},$$

Пусть R_1, R_2 будут сопротивления, I_1, I_2 — токи, A_1, A_2 — внешние электродвижущие силы и V — потенциал одной цепи по отношению к другой, обусловленный единицей силы тока в каждой цепи. Тогда, как и ранее, мы имеем:

$$A_1I_1 + A_2I_2 = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_1I_2\frac{dV}{dt}.$$

Если мы предположим, что I_1 — первичный ток и что I_2 настолько меньше I_1, что он по индукции не производит какого-либо ощутительного изменения в I_1, то мы можем положить:

$$I_1 = \frac{A_1}{R_1}.$$

Тогда

$$I_2 = \frac{A_2 - I_1\frac{dV}{dt}}{R_2}$$

— результат, который может быть интерпретирован совершенно так же, как и в случае с магнитом.

откуда

$$2\delta T_e = \delta I_1\frac{dT_e}{dI_1} + I_1\delta\frac{dT_e}{dI_1} + \delta I_2\frac{dT_e}{dI_2} + I_2\delta\frac{dT_e}{dI_2}. \tag{2}$$

Вычитая (1) из (2), мы получаем:

$$\delta T_e = I_1\delta\frac{dT_e}{dI_1} + I_2\delta\frac{dT_e}{dI_2} - \sum\frac{dT_e}{dx}\delta x; \tag{3}$$

но $\frac{dT_e}{dx}$ есть сила типа x, действующая на систему. Если мы предположим, что на систему не действует никакая внешняя сила, $\sum\frac{dT_e}{dx}\delta x$ будет представлять приращение кинетической энергии T_m, обусловленное движением системы; поэтому (3) дает:

$$\delta(T_e + T_m) = I_1\delta\frac{dT_e}{dI_1} + I_2\delta\frac{dT_e}{dI_2}. \tag{4}$$

Работа, производимая батареями за время δt, равна:

$$A_1I_1\delta t + A_2I_2\delta t.$$

Тепло, производимое за тот же период времени, согласно за-

Если мы предположим, что I_2 — первичный ток и что I_1 гораздо меньше I_2, мы получим для I_1:

$$I_1 = \frac{A_1 - I_2 \frac{dV}{dt}}{R_1}.$$

Это показывает, что для одинаковых токов электродвижущая сила, наведенная первой цепью во второй, равна электродвижущей силе, наведенной второй цепью в первой, каковы бы ни были формы контуров цепей.

В своей работе Гельмгольц не обсуждает случая индукции, обусловленной усилением или ослаблением первичного тока, ни индукции тока на самого себя. Томсон *) применил тот же самый принцип к определению механического действия тока и указывал, что когда совершаемая работа производится совокупным

кону Джоуля равно:

$$(R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2)\,\delta t.$$

По закону сохранения энергии работа, производимая батареями, должна равняться теплу, выделяющемуся в цепи плюс прирост энергии системы, откуда

$$A_1 I_1 \delta t + A_2 I_2 \delta t = (R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2)\,\delta t + \delta\,(T_e + T_m).$$

Представляя вместо $\delta\,(T_e + T_m)$ выражение из (4), мы получаем:

$$I_1 \left\{ A_1 - R_1 I_1 - \frac{d}{dt}\frac{dT_e}{dI_1} \right\} + I_2 \left\{ A_2 - R_2 I_2 - \frac{d}{dt}\frac{dT_e}{dI_2} \right\} = 0,$$

или

$$I_1 \left\{ A_1 - R_1 I_1 - \frac{d}{dt}(L I_1 + M I_2) \right\} + $$
$$+ I_2 \left\{ A_2 - R_2 I_2 - \frac{d}{dt}(M I_1 + N I_2) \right\} = 0. \quad (5)$$

Уравнения индукции получаются приравниванием нулю обоих выражений в скобках. Принцип сохранения энергии, однако, только показывает, что левая сторона уравнения (5) равна нулю, а не то, что каждое выражение, заключенное в скобки, в отдельности равно нулю. Подробное доказательство уравнений индуктированных токов дается в параграфе 581.}

*) Mechanical Theory of Electrolysis, Phil. Mag., декабрь 1851 г.

действием двух постоянных токов, их механическая сила *увеличивается* в той же степени, так что батарея должна обеспечить *двойную* величину работы в дополнение к той, которая требуется для поддержания токов против сопротивления цепей *).

545.] Введение В. Вебером системы абсолютных единиц для измерения электрических количеств является одним из наиболее важных шагов в прогрессе науки. Поставив вместе с Гауссом измерение магнитных количеств в первый ряд методов точного измерения, Вебер в своих «Электродинамических измерениях» не только излагает рациональные принципы установления подлежащих применению единиц, но и дает определения отдельных электрических величин в значениях этих единиц с ранее небывалой степенью точности. Этим исследованиям как электромагнитная, так и электростатическая системы единиц обязаны своим развитием и практическим применением.

Вебер также создал общую теорию электрического действия, из которой он выводит как электростатическую, так и электромагнитную силу, равно как и индукцию электрических токов. Мы рассмотрим эту теорию с некоторыми новейшими развитиями ее в отдельной главе (см. параграф 846).

---

*) Nichol's Cyclopœdia of Physical Sciences, изд. 1860 г., глава «Magnetism, Dynamical Relations of» и Reprint, § 571.

ГЛАВА IV

ОБ ИНДУКЦИИ ТОКА НА САМОГО СЕБЯ

546.] Свою девятую серию «Исследований» Фарадей посвятил изучению класса явлений, вызываемых током в проволоке, образующей катушку электромагнита.

Дженкин (Jenkin) наблюдал, что хотя и нельзя произвести чувствительный удар путем прямого действия вольтовой системы, состоящей только из одной пары пластинок, но если пропустить ток через катушку электромагнита и если затем прервать контакт между концами двух проводов, которые держат в руках, то все же будет чувствоваться небольшой удар. Такой удар не ощущается при установлении контакта.

Фарадей показал, что эти и другие явления, которые он описывает, относятся к тому же самому индуктивному действию, которое, как он уже наблюдал, оказывает ток на соседние проводники. В этом случае, однако, индуктивное действие оказывается на тот же проводник, который несет ток, и это действие очень сильно, так как сама проволока, несущая ток, ближе к различным элементам тока, чем может быть любая другая проволока.

547.] Однако Фарадей замечает *), что «первая мысль, которая приходит в голову, это та, что электричество обладает чем-то похожим на количество движения или инерцию в проводе». Действительно, если мы будем

*) Exp. Res., (1077) (см. русск. изд.).

рассматривать только один отдельный провод, то явления в точности аналогичны тем явлениям, которые наблюдаются в водопроводной трубе, наполненной текущим непрерывным потоком воды.

Если при наличии потока воды мы внезапно закроем конец трубы, импульс воды произведет внезапное давление, которое значительно больше, чем то, которое производится уровнем воды, и в некоторых случаях может даже разорвать трубу.

Если вода имеет какую-то возможность вытекать через узкое отверстие, в то время как главное отверстие закрыто, она будет выбрасываться из этого отверстия со значительно большей скоростью, чем та скорость, которая определяется уровнем воды, и если она может вытекать через вентиль в камеру, то это произойдет даже в том случае, если давление в камере выше, чем то, которое определяется уровнем воды. На этом принципе построен гидравлический таран, посредством которого малое количество воды может быть поднято на большую высоту с помощью большого количества, стекающего со значительно более низкого уровня.

548.] Эти эффекты инерции жидкости в трубе зависят исключительно от количества протекающей через трубу жидкости, от длины самой трубы и от ее сечений на различных отрезках длины. Они не зависят от чего-либо, находящегося вне этой трубы, а также от формы трубы при условии, что длина ее одинакова.

В случае с проволокой, по которой проходит ток, это не имеет места, так как если длинная проволока дублируется по всей длине, то эффект весьма мал, если две части отделяются одна от другой, эффект становится большим, а если проволока свернута винтообразно в катушку, то эффект становится еще бóльшим. Наибольший эффект получается, если в середину катушки вставляется сердечник из мягкого железа.

Далее, если еще одна проволока наматывается на первую, будучи изолирована от нее, то, если вторая проволока не образует замкнутой цепи, явления остаются такими же, как и прежде; но если вторая проволока образует замкнутую цепь, то в ней возникает ток индукции, и эффекты самоиндукции в первой проволоке тормозятся.

549.] Эти результаты ясно показали, что если явление следует отнести за счет количества движения, то оно безусловно не является количеством движения циркулирующего в проволоке электричества, ибо та же самая проволока, несущая тот же самый ток, дает различные эффекты в зависимости от приданной ей формы, и даже если ее форма не меняется, то присутствие других тел, как, например, куска железа или замкнутой металлической цепи, влияет на результат.

550.] Однако для ума, который однажды усмотрел аналогию между явлениями самоиндукции и явлениями движения материальных тел, трудно совершенно отказаться от помощи этой аналогии или допустить, что эта аналогия имеет совершенно поверхностный характер и ведет нас по неправильному пути. Фундаментальная динамическая идея материи, способной благодаря своему движению становиться резервуаром количества движения и энергии, так переплетена с нашими формами мышления, что когда мы усматриваем намек на нее в любой части природы, мы чувствуем, что перед нами открывается путь, который рано или поздно приведет к полному пониманию существа предмета.

551.] В случае электрического тока мы находим, что когда электродвижущая сила начинает действовать, она не сразу производит полный ток; ток увеличивается постепенно. Что же делает электродвижущая сила в течение того времени, пока противостоящее сопротивление еще не уравновешивает ее? Она увеличивает электрический ток.

Обычная сила, действующая на тело в направлении его движения, увеличивает его количество движения, сообщает ему кинетическую энергию, т. е. способность производить работу за счет своего движения.

Совершенно таким же образом не встречающая сопротивления часть электродвижущей силы идет на увеличение электрического тока. Имеет ли электрический ток, будучи произведен таким способом, количество движения или кинетическую энергию?

Мы уже показали, что электрический ток имеет что-то весьма похожее на количество движения, что он оказывает сопротивление внезапной остановке и что на короткое время он может проявлять очень большую электродвижущую силу.

Но проводящая цепь, в которой течет ток, обладает благодаря этому способностью производить работу, и нельзя говорить, что эта способность является лишь чем-то весьма похожим на энергию, так как она в действительности и является энергией. Если ток предоставить самому себе, он будет продолжать циркулировать до тех пор, пока не будет остановлен сопротивлением цепи; но, до того как он будет остановлен, он породит известное количество тепла, и это количество в динамическом измерении равно энергии, первоначально существовавшей в токе.

Опять-таки, если ток предоставлен самому себе, он может быть использован для производства механической работы путем приведения в движение магнитов, и индуктивный эффект этих движений по закону Ленца прекращает ток скорее, чем это может сделать одно только сопротивление цепи. Таким путем часть энергии тока может быть превращена в механическую работу, вместо того чтобы быть превращенной в тепло.

552.] Отсюда вытекает, что система, содержащая электрический ток, является местом нахождения энергии какого-то рода, и так как мы не можем составить себе никакого представления об электрическом токе кроме как о кинетическом явлении *), его энергия должна быть кинетической энергией, т. е. энергией, которой обладает движущееся тело в силу своего движения.

Мы уже показали, что электричество в проволоке не может рассматриваться как движущееся тело, в котором мы должны найти эту энергию, так как энергия движущегося тела не зависит от чего-либо внешнего

*) Faraday, Exp. Res., (283) (см. русск. изд.).

по отношению к этому телу, в то время как присутствие других тел поблизости от тока меняет его энергию.

Мы, таким образом, приходим к необходимости исследовать, нет ли какого-либо движения, происходящего в пространстве за пределами проволоки, которое не занято электрическим током, но в котором проявляются электромагнитные эффекты тока.

В настоящее время я не хочу входить в рассуждения о том, следует ли такие движения искать скорее в одном месте, чем в другом, или рассматривать эти движения как движения одного рода скорее, чем другого. То, что я предполагаю сейчас сделать, это исследовать следствия допущения, что явления электрического тока представляют собой явления движущейся системы, причем движение передается от одной части системы к другой при помощи сил, природу и законы которых мы пока что даже не будем пытаться определить, так как мы можем исключить эти силы из уравнений движения при помощи данного Лагранжем метода для любой системы со связями.

В следующих пяти главах этого трактата я предполагаю вывести основные положения теории электричества из динамической гипотезы этого рода, вместо того чтобы следовать по пути, который привел Вебера и других исследователей к замечательным открытиям и опытам и к концепциям, многие из которых настолько же прекрасны, как и смелы. Я выбрал этот метод, так как хочу показать, что имеются другие точки зрения на явления, которые кажутся мне более удовлетворительными и в то же время более соответствуют методам, которых мы придерживались в предыдущих частях этой книги, чем точка зрения, основанная на гипотезе прямого действия на расстоянии.

ГЛАВА V

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СО СВЯЗЯМИ (4)

553.] В четвертом разделе второй части своей «Аналитической механики» Лагранж дал метод сведения обычных динамических уравнений движения частей системы со связями к числу, равному числу степеней свободы этой системы.

Уравнение движения системы со связями в другой форме были даны Гамильтоном и привели к значительному развитию чистой динамики *).

Поскольку нам необходимо в наших попытках привести электрические явления к области динамики, выразить динамические идеи в форме, пригодной для прямого применения к физическим вопросам, мы посвятим эту главу изложению этих динамических идей с физической точки зрения.

554.] Целью Лагранжа было привести динамику в подчинение анализу. Он начал с выражения элементарных динамических отношений через соответствующие отношения между чисто алгебраическими величинами и от полученных таким образом уравнений вывел свои окончательные уравнения чисто аналитическим путем. Отдельные величины (выражающие реакции между частями системы, обусловленные их физиче-

---

*) См. Cayley, Report on Theoretical Dynamics, Brit. Ass., 1857 и Thomson и Tait, Natural Philosophy.

скими связями) фигурируют в уравнениях движения частей, образующих систему, и исследования Лагранжа, с математической точки зрения, представляют собой метод исключения этих величин из окончательных уравнений.

Следуя этому процессу исключения, мысль упражняется лишь в вычислениях и поэтому должна оставаться свободной от вмешательства каких-либо динамических идей. С другой стороны, нашей целью является как раз совершенствование наших динамических идей. Обращаясь поэтому к работам математиков, мы переводим их результаты с языка анализа на язык динамики, так, чтобы наши слова могли бы вызвать мысленный образ не алгебраического процесса, но какого-либо свойства движущихся тел.

Язык динамики был значительно расширен теми, кто изложил популярно учение о сохранении энергии, и можно видеть, что бóльшая часть последующих утверждений возникла в результате изучения «Натуральной философии» Томсона и Тэта, в частности, метода, начинающего с теории импульсивных сил.

Я применил этот метод для того, чтобы избежать явного рассмотрения движения каких-либо частей системы за исключением координат или переменных, от которых зависит движение целого. Безусловно важно, чтобы изучающий был способен проследить связь движения каждой части системы с изменением переменных, но совершенно нет необходимости делать это в процессе получения окончательных уравнений, которые не зависят от частной формы этих связей.

Переменные

555.] Число степеней свободы системы есть число величин, которые должны быть известны для того, чтобы полностью определить положение системы. Этим величинам можно придать различные формы, но их число зависит от природы самой системы и не может быть изменено.

Для определенности мы можем рассматривать систему как связанную при помощи соответствующего механизма с некоторым числом движущихся частей, каждая из которых может совершать прямолинейное и только прямолинейное движение. Воображаемый механизм, который соединяет каждую из частей системы, должен предполагаться свободным от трения, не имеющим инерции и не способным быть деформированным в результате действий прилагаемых сил. Впрочем, этот механизм служит главным образом для того, чтобы помогать воображению приписать телу положение, скорость и количество движения, которые в исследовании Лагранжа являются чисто алгебраическими количествами.

Пусть q обозначает положение одной из движущихся частей, определенное как расстояние от фиксированной точки на линии движения.

Мы будем различать значения q, соответствующие различным частям системы, при помощи значков 1, 2 и т. д.; когда мы будем иметь дело с рядом величин, относящимся только к одной части, мы будем опускать эти значки.

Когда даны значения всех переменных (q), положение каждой из движущихся частей известно, и в силу существования воображаемого механизма этим определяется конфигурация всей системы.

Скорости

556.] Во время движения системы ее конфигурация изменяется некоторым определенным образом, и так как конфигурация в любой момент полностью определяется значениями переменных q, скорость каждой части системы, так же как и ее конфигурация, будет полностью определена, если мы знаем значения переменных (q) вместе с их скоростями $\left(\frac{dq}{dt}\right.$, или согласно обозначению Ньютона $\left.\dot{q}\right)$.

Силы

557.] Надлежащим выбором закона изменения переменных может быть произведено любое движение системы, согласное с природой связей. Для того чтобы произвести это движение путем перемещения подвижных частей, к этим частям должны быть приложены силы. Силу, которая должна быть приложена к любой переменной q_r, мы будем обозначать через F_r. Система сил (F) механически эквивалентна (в силу связей системы) реально производящей движение системе сил, какой бы она ни была.

Количества движения

558.] Если тело движется таким образом, что его конфигурация относительно действующей на него силы остается всегда одной и той же (как, например, в случае силы, действующей на одну единственную частицу по направлению линии ее движения), то движущая сила измеряется степенью изменения количества движения в единицу времени. Если F есть движущая сила и p—количество движения, то

$$F=\frac{dp}{dt},$$

откуда

$$p=\int F\,dt.$$

Интеграл по времени от силы называется **импульсом** силы, так что мы можем утверждать, что количество движения есть импульс силы, который мог бы привести тело из состояния покоя в данное состояние движения. В случае движущейся системы со связями конфигурация системы непрерывно меняется с быстротой, зависящей от скоростей $(\dot{q})$, так что мы не можем более предполагать, что количество движения системы является временным интегралом силы, действующей на нее.

Но приращение δq любой переменной не может быть больше, чем $\dot{q}'\,\delta t$, где δt есть время, в течение которого происходит приращение, а $\dot{q}'$ есть наибольшее значение скорости в течение этого времени. В случае системы, движущейся из состояния покоя под действием сил неизменного направления, это, очевидно,— конечная скорость.

Если конечная скорость и конфигурация системы даны, мы можем считать, что скорость сообщается системе в очень малый промежуток времени δt, причем начальная конфигурация отличается от конечной конфигурации на величины δq_1, δq_2 и т. д., которые соответственно меньше чем $\dot{q}_1 \, \delta t$, $\dot{q}_2 \, \delta t$ и т. д.

Чем меньшим мы будем предполагать приращение времени δt, тем большими должны быть приложенные силы, но интеграл по времени или импульс каждой силы останется конечным. Предельное значение импульса, когда время уменьшается и в пределе становится равным нулю, определяется как *мгновенный импульс*, и количество движения p, соответствующее переменной q, определяется как импульс, соответствующий этой переменной, который в состоянии мгновенно перевести систему из состояния покоя в рассматриваемое состояние движения.

Эта концепция, что количества движения могут быть произведены мгновенными импульсами, действующими на систему, находящуюся в покое, вводится только как метод определения значений количеств движения, так как последние зависят только от мгновенного состояния движения системы, а не от процесса, при помощи которого это состояние произведено.

В системе со связями количество движения, соответствующее какой-либо переменной, является вообще линейной функцией скоростей всех переменных, вместо того чтобы быть как, например, в динамике частицы просто пропорциональным скорости.

Импульсы, потребные для внезапного изменения скоростей системы от $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ и т. д. до $\dot{q}'_1$, $\dot{q}'_2$ и т. д., очевидно, равны $p'_1 - p_1$, $p'_2 - p_2$ — изменениям количеств движения различных переменных

Работа малого импульса

559.] Работа, произведенная силой F_1 в течение времени импульса, является пространственным интегралом силы, или

$$W = \int F_1\, dq_1,$$
$$= \int F_1 \dot{q}_1\, dt.$$

Если $\dot{q}_1'$ есть наибольшее, а $\dot{q}_1''$ — наименьшее значение скорости $\dot{q}_1$ во время действия силы, W должно быть меньше чем

$$\dot{q}_1' \int F\, dt, \quad \text{или} \quad \dot{q}_1' (p_1' - p_1),$$

и больше чем

$$\dot{q}_1'' \int F\, dt, \quad \text{или} \quad \dot{q}_1'' (p_1' - p_1).$$

Если мы теперь предположим, что импульс $\int F\, dt$ уменьшается беспредельно, величины $\dot{q}_1'$ и $\dot{q}_1''$ будут сближаться и в конечном счете совпадут с величиной $\dot{q}_1$, и мы сможем написать $p_1' - p_1 = \delta p_1$, так что произведенная работа в конечном счете равна

$$\delta W_1 = \dot{q}_1 \delta p_1.$$

То-есть *работа, произведенная весьма малым импульсом, в конечном счете равна произведению импульса на скорость.*

Приращение кинетической энергии

560.] Когда расходуется работа для приведения консервативной системы в движение, то ей сообщается энергия и система становится способной производить равное количество работы на преодоление сопротивлений, прежде чем она приходит в состояние покоя.

Энергия, которой система обладает в силу своего движения, называется кинетической энергией и сообщается ей в форме работы, произведенной силами, которые приводят систему в движение.

Если T — кинетическая энергия системы и если эта величина становится равной $T+\delta T$ за счет действия бесконечно малого импульса, составляющими которого являются δp_1, δp_2 и т. д., прирост δT должен быть суммой количеств работы, совершенных составляющими импульса, или

$$\delta T = \dot{q}_1 \delta p_1 + \dot{q}_2 \delta p_2 + \ldots = \sum (\dot{q} \delta p). \tag{1}$$

Мгновенное состояние системы полностью определяется, если даны переменные и количества движения. Отсюда кинетическая энергия, которая зависит от мгновенного состояния системы, может быть выражена через переменные (q) и количества движения (p). Это есть способ выражения T, введенный Гамильтоном. Когда T выражается таким образом, мы будем отличать его при помощи значка p, т. е. T_p.

Полная вариация T_p будет:

$$\delta T_p = \sum \left(\frac{dT_p}{dp} \delta p \right) + \sum \left(\frac{dT_p}{dq} \delta q \right). \tag{2}$$

Последний член может быть написан в виде $\sum \left(\frac{dT_p}{dq} \dot{q} \delta t \right)$, он уменьшается с уменьшением δt и в конечном счете исчезает, когда импульс становится мгновенным.

Отсюда, приравнивая между собой коэффициенты при δp в уравнениях (1) и (2), получаем:

$$\dot{q} = \frac{dT_p}{dp}, \tag{3}$$

или *скорость, соответствующая переменной q, есть производная от T_p по соответствующему количеству движения p.*

Мы пришли к этому результату при помощи рассмотрения импульсивных сил. Этим методом мы избежали соображений о перемене конфигурации во время действия сил. Но мгновенное состояние системы во всех отношениях одно и то же, была ли эта система приведена из состояния покоя в данное состояние движения при помощи подходящего применения импульсивных сил или же она пришла в это состояние любым другим путем, хотя бы и постепенным.

Другими словами, переменные и соответствующие скорости и количества движения зависят от фактического состояния движения системы в данный момент, а не от ее предыдущей истории.

Отсюда уравнение (3) одинаково справедливо, считаем ли мы, что состояние движения системы произведено импульсивными силами, или же, что оно обусловлено силами, действующими каким-либо другим способом.

Поэтому мы можем теперь оставить в стороне рассмотрение импульсивных сил вместе со всеми ограничениями, налагаемыми на время их действия и на изменение конфигурации в течение их действия.

Уравнения движения Гамильтона

561.] Мы уже показали, что

$$\frac{dT_p}{dp} = \dot{q}. \tag{4}$$

Пусть система движется каким-нибудь образом, следуя условиям, налагаемым ее связями. Тогда вариации p и q будут:

$$\delta p = \frac{dp}{dt}\,\delta t, \quad \delta q = \dot{q}\,\delta t. \tag{5}$$

Отсюда

$$\frac{dT_p}{dp}\,\delta p = \frac{dp}{dt}\,\dot{q}\,\delta t,$$

$$= \frac{dp}{dt}\,\delta q, \tag{6}$$

и полная вариация T_p будет:

$$\delta T_p = \sum \left(\frac{dT_p}{dp}\,\delta p + \frac{dT_p}{dq}\,\delta q \right),$$

$$= \sum \left\{ \left(\frac{dp}{dt} + \frac{dT_p}{dq} \right) \delta q \right\}. \qquad (7)$$

Но приращение кинетической энергии равно работе, произведенной действующими силами, или

$$\delta T_p = \sum (F\,\delta q). \qquad (8)$$

В двух последних выражениях (7) и (8) вариации δq все независимы одна от другой, так что мы имеем право приравнять коэффициенты при δq. Мы, таким образом, получаем:

$$F_r = \frac{dp_r}{dt} + \frac{dT_p}{dq_r}, \qquad (9)$$

где количество движения p_r и сила F_r относятся к переменной q_r *).

Уравнений такой формы столько, сколько имеется переменных. Эти уравнения были даны Гамильтоном. Они показывают что сила, соответствующая любой переменной, является суммой двух частей. Первая часть есть степень увеличения количества движения этой переменной в единицу времени. Вторая часть есть степень увеличения кинетической энергии на единицу приращения переменной при условии, что все другие переменные и количества движения остаются постоянными.

---

*) {Это доказательство не кажется убедительным, поскольку δq предполагается равным $\dot{q}\,\delta t$, т. е. $\frac{dT_p}{dp}\,\delta t$. Таким образом, все, что мы можем законно вывести из (7) и (8), есть

$$\sum \left\{ \left(\frac{dp_r}{dt} + \frac{dT_p}{dq_r} - P_r \right) \frac{dT_p}{dp_r} \right\} = 0.\} \ (^5)$$

Кинетическая энергия как функция количеств движения и скоростей

562.] Пусть p_1, p_2 и т. д. будут количества движения, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ и т. д. — скорости в данный момент времени и пусть p_1, p_2 и т. д., $\dot{\mathrm{q}}_1$, $\dot{\mathrm{q}}_2$ и т. д. будет другая система количеств движения и скоростей, так что

$$\mathrm{p}_1 = np_1, \quad \dot{\mathrm{q}}_1 = n\dot{q}_1 \text{ и т. д.} \tag{10}$$

Очевидно, что системы p, $\dot{\mathrm{q}}$ будут совместны со связями, если системы p, $\dot{q}$ совместны.

Пусть теперь n изменяется на δn. Работа, совершенная силой F_1, будет:

$$F_1 \delta \mathrm{q}_1 = \dot{\mathrm{q}}_1 \delta \mathrm{p}_1 = \dot{q}_1 p_1 n\, \delta n. \tag{11}$$

Пусть n увеличивается от нуля до единицы, тогда система переводится из состояния покоя в состояние движения $(\dot{q}, p)$, и вся работа, затраченная на производство этого движения, будет:

$$(\dot{q}_1 p + \dot{q}_2 p_2 + \ldots) \int_0^1 n\, dn, \tag{12}$$

но

$$\int_0^1 n\, dn = \frac{1}{2},$$

а работа, затраченная на производство движения, эквивалентна кинетической энергии. Отсюда

$$T_{p\dot{q}} = \frac{1}{2}(p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + \ldots), \tag{13}$$

где $T_{p\dot{q}}$ обозначает кинетическую энергию, выраженную в значениях количеств движения и скоростей. Переменные q_1, q_2 и т. д. не входят в это выражение.

Поэтому кинетическая энергия равна половине суммы произведений количеств движения на соответствующие скорости.

Когда кинетическая энергия выражается таким путем, мы будем обозначать ее символом $T_{p\dot{q}}$. Она является функцией только количеств движения и скоростей и не заключает самих переменных.

563.] Имеется третий метод для выражения кинетической энергии, который обычно считается основным. Путем решения уравнений (3) мы можем выразить количества движения как функции скоростей и затем, вводя эти значения в формулу (13), будем иметь выражение для T, включающее только скорости и переменные; T, выраженное в такой форме, мы будем обозначать символом $T_{\dot{q}}$. В этой форме кинетическая энергия фигурирует в уравнениях Лагранжа.

564.] Очевидно, что поскольку T_p, $T_{\dot{q}}$ и $T_{p\dot{q}}$ являются тремя различными выражениями одной и той же величины, то

$$T_p + T_{\dot{q}} - 2T_{p\dot{q}} = 0,$$

или

$$T_p + T_{\dot{q}} - p_1\dot{q}_1 - p_2\dot{q}_2 - \ldots = 0. \tag{14}$$

Отсюда, если мы будем варьировать величины p, q и $\dot{q}_1$, то получим:

$$\left(\frac{dT_p}{dp_1} - \dot{q}_1\right)\delta p_1 + \left(\frac{dT_p}{dp_2} - \dot{q}_2\right)\delta p_1 + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} - p_1\right)\delta\dot{q}_1 + \left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2} - p_2\right)\delta\dot{q}_2 + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{dT_p}{dq_1} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}\right)\delta q_1 + \left(\frac{dT_p}{dq_2} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_2}\right)\delta q_2 + \ldots = 0. \tag{15}$$

Вариации δp независимы от вариаций δq и $\delta\dot{q}$, так что мы не можем сразу же утверждать, что коэффициент при каждой из этих вариаций в этом уравнении равен нулю.

Но из уравнений (3) мы знаем, что

$$\frac{dT_p}{dp_1} - \dot{q}_1 = 0 \quad \text{и т. д.,} \tag{16}$$

так что члены, содержащие вариации δp, сами тождественно равны нулю.

Остальные вариации $\delta\dot{q}$ и δq теперь все независимы друг от друга, так что мы находим, приравнивая к нулю коэффициент при $\delta\dot{q}_1$ и т. д.,

$$p_1 = \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1}, \quad p_2 = \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2} \quad \text{и т. д.} \tag{17}$$

То-есть *составляющие количества движения равны производным от* $T_{\dot{q}}$ *по соответствующим скоростям.*

Далее, приравнивая нулю коэффициенты при δq_1 и т. д., получаем:

$$\frac{dT_p}{dq_1} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1} = 0, \tag{18}$$

т. е. *производная кинетической энергии, выраженной как функция скорости по какой-либо переменной* q_1, *равна по величине и обратна по знаку производной энергии* T, *выраженной как функция количеств движения.*

В силу уравнения (18) мы можем написать уравнение движения (9):

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt} - \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}, \tag{19}$$

или

$$F_1 = \frac{d}{dt}\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} - \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}; \tag{20}$$

в этой форме уравнения движения были даны Лагранжем.

565.] В предыдущем исследовании мы избегали рассмотрения вида функции скоростей или количеств движения, выражающей кинетическую энергию. Единственная форма, которую мы приняли для нее, есть

$$T_{p\dot{q}}=\frac{1}{2}(p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2+\ldots), \tag{21}$$

в которой кинетическая энергия выражена как половина суммы произведений количеств движения на соответствующие скорости.

Мы можем выразить скорости в виде производных от T по количествам движения как в уравнении (3):

$$T_p=\frac{1}{2}\left(p_1\frac{dT_p}{dp_1}+p_2\frac{dT_p}{dp_2}+\ldots\right). \tag{22}$$

Это выражение показывает, что T_p является однородной функцией второй степени от количеств движения p_1, p_2 и т. д.

Мы можем также выразить количества движения как функцию от $T_{\dot{q}}$. Тогда

$$T_{\dot{q}}=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1}+\dot{q}_2\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2}+\ldots\right), \tag{23}$$

что показывает, что $T_{\dot{q}}$ является однородной функцией второй степени от скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ и т. д.

Если мы напишем:

$$P_{11}=\frac{d^2T_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2^2},\quad P_{12}=\frac{d^2T_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1\,d\dot{q}_2}\ \text{и т. д.}$$

или

$$Q_{11}=\frac{d^2T_p}{dp_1^2},\quad Q_{12}=\frac{d^2T_p}{dp_1dp_2}\ \text{и т. д.,}$$

тогда, поскольку $T_{\dot{q}}$ и T_p являются функциями второй степени соответственно от $\dot{q}$ и p, то P и Q будут функциями только переменных q и будут независимы от скоростей и количеств движения.

Мы, таким образом, получаем выражения для T:

$$2T_{\dot{q}} = P_{11}\dot{q}_1^2 + 2P_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots \tag{24}$$

$$2T'_p = Q_{11}p_1^2 + 2Q_{12}p_1p_2 + \ldots \tag{25}$$

Количества движения выражаются как функции скоростей линейными уравнениями

$$p_1 = P_{11}\dot{q}_1 + P_{12}\dot{q}_2 + \ldots, \tag{26}$$

а скорости выражаются как функции от количеств движения линейными уравнениями

$$\dot{q}_1 = Q_{11}p_1 + Q_{12}p_2 + \ldots \tag{27}$$

В трактатах по динамике твердого тела коэффициенты P_{11}, у которых оба значка одинаковы, называются *моментами инерции*, а коэффициенты P_{12}, у которых значки разные, называются *произведениями инерции*. Эти названия мы можем распространить на более общую проблсму, которая в настоящее время стоит перед нами и в которой эти количества не являются, как в случае твердых тел, абсолютно постоянными, но являются функциями переменных q_1, q_2 и т. д.

Подобным же образом мы можем назвать коэффициенты вида Q_{11} *моментами подвижности* и коэффициенты вида Q_{12} *произведениями подвижности*. Однако мы очень редко будем иметь случай говорить о коэффициентах подвижности.

566.] Кинетическая энергия системы есть величина существенно положительная или равная нулю. Отсюда, будет ли она выражена как функция скоростей или как функция количеств движения, коэффициенты должны быть такими, чтобы никакие действительные значения переменных не могли бы сделать T отрицательным.

Таким образом, имеется целый ряд необходимых условий, которым должны удовлетворять коэффициенты P. Эти условия следующие.

Величины P_{11}, P_{12} и т. д. все должны быть положительны; все $n-1$ детерминантов, образуемые последовательно из детерминанта

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{1n} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} & P_{2n} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & P_{3n} \\ P_{1n} & P_{2n} & P_{3n} & P_{nn} \end{vmatrix}$$

путем устранения членов со значком 1, затем членов со значками 1 или 2 и т. д., должны быть положительны.

Число условий для n переменных, следовательно, равно $2n-1$.

Коэффициенты Q подчиняются условиям того же самого рода.

567.] В этом наброске основных принципов динамики системы со связями мы отвлеклись от механизма, при помощи которого части системы соединены друг с другом. Мы даже не написали уравнений для того, чтобы показать, как движение какой-нибудь части системы зависит от изменений переменных величин. Мы все наше внимание обратили на переменные, их скорости, количества движения и силы, которые действуют на части механизма, соответствующие переменным. Наши единственные допущения состоят в том, что время явно не содержится в уравнениях, определяющих связи, и что принцип сохранения энергии применим к системе. Такое изложение методов чистой динамики не бесполезно, потому что Лагранж и большинство его последователей, которым мы обязаны этими методами, в основном посвятили себя доказательству их и с целью сосредоточить свое внимание на символах, фигурирующих в уравнениях, постарались изгнать все понятия за исключением понятия чистой величины, так что они не только отказались от диаграмм, но даже исключили понятия скорости, количества движения и энергии, после того как эти величины раз навсегда были заменены символами в первоначальных уравнениях. Для того чтобы иметь возможность опираться на результаты этого анализа, употребляя обычный язык динамики, мы постарались снова перевести основные уравнения этого метода на тот язык, который мог бы быть понятным без применения символов.

Именно развитие идей и методов чистой математики сделало возможным разработку математической теории динамики и тем самым способствовало пролитию света на целый ряд истин, которые не могли быть открыты без математического исследования. Поэтому, если перед нами стоит задача разработать динамические теории других областей науки, мы должны пропитать наши мысли этими динамическими истинами в той же мере, как и математическими методами.

Формируя идеи и язык, относящиеся к какой-нибудь науке, которая подобно науке об электричестве имеет дело с силами и их действиями, мы должны постоянно иметь в виду идеи, присущие динамике, с тем чтобы в процессе дальнейшей разработки теории избежать расхождения с тем, что уже установлено. Кроме того, когда наши воззрения сделаются более ясными, усвоенный нами язык должен быть для нас помощью, а не препятствием.

ГЛАВА VI

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

568.] В параграфе 552 мы показали, что электрический ток в проводящей цепи обладает способностью производить определенную механическую работу независимо от какой-либо внешней электродвижущей силы, поддерживающей этот ток. Но способность производить работу есть не что иное, как энергия, а энергия во всех видах одинакова по существу, хотя формы ее могут быть различны. Энергия электрического тока предстает как в той форме, которая определяется действительным движением материи, так и в той, которая заключается в возможности получать движение в результате наличия сил, действующих между телами, определенным образом расположенными относительно друг друга.

Первый вид энергии, энергия движения, называется *кинетической* энергией и представляется в качестве такого фундаментального факта природы, что мы с трудом можем допустить возможность сведения его к чему-либо другому. Второй вид энергии—энергия, зависящая от положения,—называется *потенциальной* энергией и обусловливается действием так называемых сил, иначе говоря, стремлений изменять относительное положение. Что касается этих сил, то хотя мы и можем признать их существование как установленный факт, однако всякое объяснение механизма, при помощи которого тела приводятся в движение, всегда представляет собой реальное увеличение наших знаний.

569.] Электрический ток нельзя рассматривать иначе, как некоторое кинетическое явление. Даже Фарадей, который постоянно старался освободить свою мысль от влияния тех представлений, которые слишком связаны со словами «электрический ток» и «электрический флюид», говорит об электрическом токе как о движении, а не о расположении *).

Такие эффекты тока, как, например, электролиз и передача электричества от одного тела к другому,— все это действия распространения, протекающие во времени и, следовательно, обладающие природой движений.

Что же касается скорости тока, то мы уже показали, что ничего о ней не знаем, она может быть и одной десятой дюйма в час, и сотней тысяч миль в секунду **). Во всяком случае мы находимся столь далеко от знания ее абсолютной величины, что нам даже неизвестно, является ли то, что мы называем положительным направлением,—действительным направлением движения или же наоборот.

Здесь мы утверждаем только то положение, что электрический ток заключает в себе движение какого-то рода. То, что является причиной электрических токов, было названо *электродвижущей силой*. Это наименование в течение долгого времени применялось с большим успехом и никогда не приводило к каким-либо противоречиям в языке науки. Электродвижущая сила всегда понимается, как влияющая только на электричество, а не на тела, в которых находится это электричество. Электродвижущая сила никогда не должна быть смешиваема с обычной механической силой, действующей только на тела, а не на электричество в них. Если мы когда-либо придем к познанию природы отношения между электричеством и обычной материей, мы,

*) Exp. Res., (283) (см. русск. изд.).

**) Exp. Res., (1648) (см. русск. изд.).

повидимому, также узнаем отношение между электродвижущей силой и обыкновенной силой.

570.] Когда обычная сила действует на тело и когда тело уступает действию силы, работа измеряется произведением силы на величину перемещения тела под действием силы. Так, например, в случае воды, проталкиваемой через трубу, работа, произведенная в любом сечении, измеряется давлением жидкости в этом сечении, помноженным на количество воды, проходящей через это сечение.

Аналогично этому работа, произведенная электродвижущей силой, измеряется произведением электродвижущей силы на количество электричества, проходящего через сечение проводника под действием электродвижущей силы.

Работа, произведенная какой-либо электродвижущей силой, будет в точности того же рода, что и работа, произведенная обыкновенной силой, и обе работы измеряются теми же самыми эталонами или единицами.

Часть работы, произведенной электродвижущей силой, действующей на проводящую цепь, растрачивается на преодоление сопротивления цепи, и эта часть работы тем самым превращается в тепло.

Другая часть работы идет на возбуждение электромагнитных явлений, наблюдавшихся Ампером, в которых проводники приводятся в движение электромагнитными силами. Остаток работы затрачивается на увеличение кинетической энергии тока, и эффект этой части действия электродвижущей силы обнаруживается в явлениях индукции токов, наблюдавшихся Фарадеем.

Таким образом, мы достаточно знаем относительно электрических токов для того, чтобы признать в системе материальных проводников, несущих ток, динамическую систему, являющуюся местонахождением энергии, часть которой может быть кинетической энергией, а часть потенциальной.

Природа связей частей этой системы нам неизвестна, но, поскольку мы имеем динамические методы исследования, которые не требуют знания механизма системы, мы будем их применять к этому случаю.

Мы прежде всего изучим следствия допущения, что функция, выражающая кинетическую энергию системы, имеет наиболее общую форму.

571.] Пусть система состоит из некоторого числа проводящих цепей, форма и положение которых определяются значениями системы переменных x_1, x_2 и т. д., число которых равно числу степеней свободы системы.

Если вся кинетическая энергия системы была бы связана с движением этих проводников, она была бы выражена в форме

$$T=\frac{1}{2}(x_1x_1)\dot{x}_1^2+\ldots+(x_1x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2+\ldots,$$

где символы (x_1x_1) и т. д. обозначают величины, которые мы назвали моментами инерции, а символы (x_1x_2) и т. д. обозначают произведения инерции.

Если X' есть приложенная сила, стремящаяся увеличить координату x и необходимая для того, чтобы произвести действительное движение, то согласно уравнению Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}}-\frac{dT}{dx}=X'.$$

В тех случаях, когда T обозначает энергию, относящуюся только к видимому движению, мы будем ее обозначать значком m, т. е. T_m.

Но в системе проводников, по которым проходят электрические токи, часть кинетической энергии связана с существованием этих токов. Пусть движение электричества будет определено другой системой координат y_1, y_2 и т. д. Тогда T будет однородной функцией квадратов и произведений всех скоростей двух систем координат. Мы поэтому можем разделить T на три части, в первой из которых—T_m—встречаются только скорости координат x, во второй—T_e—скорости координат y, а в третьей—T_{me}—каждый член представляет собой произведение скоростей обеих координат x и y.

Отсюда мы имеем:

$$T = T_m + T_e + T_{me},$$

где

$$T_m = \frac{1}{2}(x_1x_1)\dot{x}_1^2 + \ldots + (x_1x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2 + \ldots,$$

$$T_e = \frac{1}{2}(y_1y_1)\dot{y}_1^2 + \ldots + (y_1y_2)\dot{y}_1\dot{y}_2 + \ldots,$$

$$T_{me} = (x_1y_1)\dot{x}_1\dot{y}_1 + \ldots$$

572.] В общей динамической теории коэффициенты всех членов могут быть функциями всех координат x и y. В случае электрических токов легко, однако, видеть, что координаты вида y не входят в коэффициенты.

Действительно, если все электрические токи поддерживаются постоянными, а проводники находятся в состоянии покоя, общее состояние поля останется неизменным. Но в этом случае координаты y являются переменными, хотя скорости $\dot{y}$ постоянны. Поэтому координаты y не могут входить в выражение для T или в другое какое-нибудь выражение, характеризующее фактическое состояние системы.

Помимо этого в силу уравнения непрерывности, если все проводники являются линейными цепями, то требуется только одна переменная величина для выражения силы тока в каждом проводнике. Пусть скорости $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$ и т. д. представляют собой силы токов в различных проводниках.

Все это остается справедливым, если вместо электрических токов мы имели бы токи несжимаемой жидкости, текущей в гибких трубках. В этом случае скорости этих токов вошли бы в выражение для T, но коэффициенты зависели бы только от переменных x, которые определяют форму и положение труб.

В случае с жидкостью движение жидкости в одной трубе не влияет непосредственно на движение любой другой трубы или жидкости в ней. Отсюда в выражении для T_e встречаются только квадраты скоростей $\dot{y}$, а не их произведения, и в выражении для T_{me} какая-нибудь скорость $\dot{y}$ в трубе связана только с такими скоростями формы $\dot{x}$, которые относятся к той же трубе.

В случае электрических токов мы знаем, что это ограничение не имеет места, так как токи в различных проводниках влияют один на другой. Отсюда мы должны допустить существование членов формы $\dot{y}_1\dot{y}_2$, а это указывает на существование чего-то, находящегося в движении, причем это движение зависит от силы обоих электрических токов $\dot{y}_1$ и $\dot{y}_2$. Эта движущая материя, какого бы рода она ни была, не находится внутри проводников, несущих оба тока, но, вероятно, распространена по всему пространству, окружающему их ([6]).

573.] Выясним теперь, какую форму принимают в этом случае уравнения движения Лагранжа.

Пусть X' будет приложенная сила, соответствующая координате x, одной из тех, которые определяют форму и положение проводящих цепей. Эта сила в обычном смысле этого слова, стремящаяся изменить положения частей системы, дана уравнением

$$X' = \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx}.$$

Мы можем рассматривать эту силу как сумму трех частей, соответствующих трем частям, на которые мы разделили кинетическую энергию системы и которые мы обозначим теми же самыми значками. Отсюда

$$X' = X'_m + X'_e + X'_{me}.$$

Часть X'_m определяется обычными динамическими соображениями, так что нет необходимости специально ею заниматься.

Поскольку T_e не содержит $\dot{x}$, то первый член выражения для X'_e равен нулю и его значение сводится к

$$X'_e = -\frac{dT_e}{dx}.$$

Это есть выражение механической силы, которая должна быть приложена к проводнику, чтобы уравновесить электромагнитную силу; она равна отрицательной производной чисто электрокинетической энергии, соответствующей изменению координаты x. Электромагнитная сила X_e, которую уравновешивает эта внешняя механическая сила, равна и противоположна по знаку X'_e. Значение величины X_e, поскольку она зависит от квадратов и произведений силы токов, остается неизменным при перемене направлений всех токов.

Третья часть X' равна:

$$X'_{me} = \frac{d}{dt}\frac{dT_{me}}{d\dot{x}} - \frac{dT_{me}}{dx}.$$

Величина T_{me} содержит только произведения вида $\dot{x}\dot{y}$, так что $\frac{dT_{me}}{d\dot{x}}$ есть линейная функция сил токов $\dot{y}$. Первый член, следовательно, зависит от степени изменения сил токов в единицу времени и дает механическую силу, действующую на проводник; эта сила равна нулю, когда токи постоянны, она положительна или отрицательна в зависимости от того: увеличиваются или уменьшаются силы токов.

Второй член зависит не от изменения токов, а от их величины в данный момент. Так как он является линейной функцией этих токов, он меняет свой знак в тех случаях, когда токи меняют свой знак. Так как оба члена содержат скорость $\dot{x}$, они равны нулю, когда проводники находятся в покое. Эти замечания относятся также и к членам, зависящим от изменений во времени коэффициентов при $\dot{y}$ в выражении $\frac{dT_{me}}{dx}$.

Мы поэтому можем исследовать эти члены порознь. Если проводники находятся в покое, мы имеем дело только с первым членом, если же токи постоянны,— только со вторым членом.

574.] Поскольку важно определить, имеет ли какая-либо часть кинетической энергии форму T_{me}, состоящую из произведений обычных скоростей и сил электрических токов, желательно, чтобы эксперименты в этой области производились с большой тщательностью.

Определение сил, действующих на тела, находящиеся в быстром движении, весьма затруднительно. Поэтому обратимся к первому члену, который зависит только от изменения силы тока.

Если какая-нибудь часть кинетической энергии зависит от произведения обычной скорости и силы тока, она, повидимому, может легче всего наблюдаться тогда, когда скорость и ток направлены в одну и ту же или в противоположные стороны. Поэтому мы возьмем круглую катушку с большим числом витков и подвесим ее на тонкой вертикальной проволоке так, чтобы ее витки были горизонтальны и чтобы она могла вращаться около вертикальной оси или в том же самом направлении, в каком течет ток в катушке, или в противоположном.

Допустим, что ток подводится к катушке при посредстве проволоки, на которой она подвешена. Пройдя по всем виткам, ток идет далее вниз через проволоку в направлении подвеса, и цепь замыкается через сосуд с ртутью, в который опущена проволока.

Так как действие горизонтальной слагающей земного магнетизма будет стремиться поворачивать катушку около горизонтальной оси, мы предположим, что горизонтальная слагающая земного магнетизма в точности нейтрализуется системой неподвижных магнитов или что опыт производится на магнитном полюсе.

К катушке прикреплено вертикальное зеркальце для того, чтобы можно было обнаружить любой ее поворот.

Теперь пропустим через катушку ток в направлении север—восток—юг—запад. Если бы электричество было жидкостью, подобной воде, текущей вдоль проволоки, то при возникновении тока и в течение времени нарастания его скорости потребовалась бы сила для изменения момента количества движения жидкости, протекающей через катушку; поскольку же эта сила должна быть создана за счет упругости проволоки, на которой подвешена система, то катушка повернулась бы в начальный момент в сторону, противоположную току или в направлении запад—юг—восток—север, и это было бы обнаружено при помощи прикрепленного зеркальца. В случае прекращения тока наблюдалось бы другое движение зеркальца, на этот раз в том же направлении, в котором течет ток. Однако до сего времени не наблюдалось явлений такого рода. Такое действие, если бы оно существовало, могло бы быть легко обнаружено из уже известных действий тока в следующих случаях.

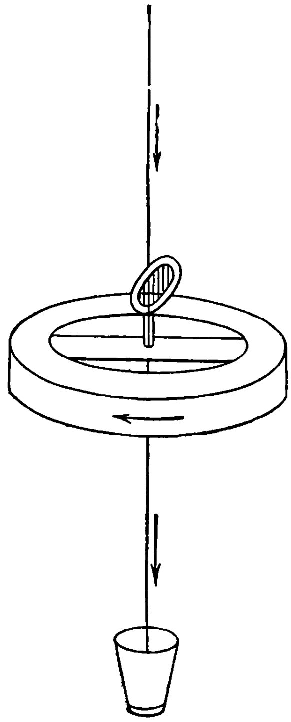


Рис. 10.

(1) Это происходило бы только тогда, когда сила тока изменяется или когда устанавливается или прерывается контакт, но не при постоянном токе.

Все известные *механические* действия тока зависят от силы тока, а не от изменений этой силы. Электродвижущую силу в случае индуктированных токов не следует смешивать с этим электромагнитным действием.

(2) Направление этого действия было бы обратным в том случае, если бы было изменено на обратное направление всех токов в поле.

Все известные механические действия токов остаются неизменными в случае обращения всех токов, так как они зависят от квадратов и произведений этих токов.

Если бы было открыто какое-либо действие такого рода, мы могли бы рассматривать один из так называемых родов электричества, или положительное, или отрицательное, как реальную субстанцию, и мы имели бы возможность описывать электрический ток как истинное движение субстанции в определенном направлении. Действительно, если бы электрические движения в какой-либо мере были бы сравнимы с движениями обыкновенной материи, существовали бы члены формы T_{me}, и их существование обнаружилось бы наличием механической силы X_{me}.

Согласно гипотезе Фехнера (Fechner), что электрический ток состоит из двух одинаковых токов положительного и отрицательного электричества, текущих в противоположных направлениях по одному и тому же проводнику, выражения вида T_{me} исчезли бы, так как каждому члену, относящемуся к положительному току, соответствовал бы член равной величины, но обратного знака, относящийся к отрицательному току, и явления, зависящие от этих членов, не имели бы места.

Однако мне кажется, что хотя мы получаем большую пользу от многих аналогий между электрическим током и током материальной жидкости, мы должны тщательно избегать каких-либо допущений, не подтвержденных экспериментально. До сих пор эксперимент не отвечает на вопрос о том, является ли электрический ток действительно током материальной субстанции или же двойным током, а также насколько велика или мала его скорость, измеренная в футах в секунду.

Познание этих вещей привело бы по меньшей мере к началам полной динамической теории электричества. В такой теории мы могли бы рассматривать электрические действия не как явления неизвестной причины, лишь подчиняющиеся общим законам динамики, что делается в этом трактате, но как результат известных движений известных частей материи, в которых не только общие эффекты и конечные результаты, но и весь промежуточный механизм и детали движения принимаются в качестве объектов изучения (7).

575.] Экспериментальное исследование второй части X_{me}, а именно $\frac{dT_{me}}{dx}$, более трудно, так как оно включает в себя наблюдение действия сил на тело, находящееся в быстром движении.

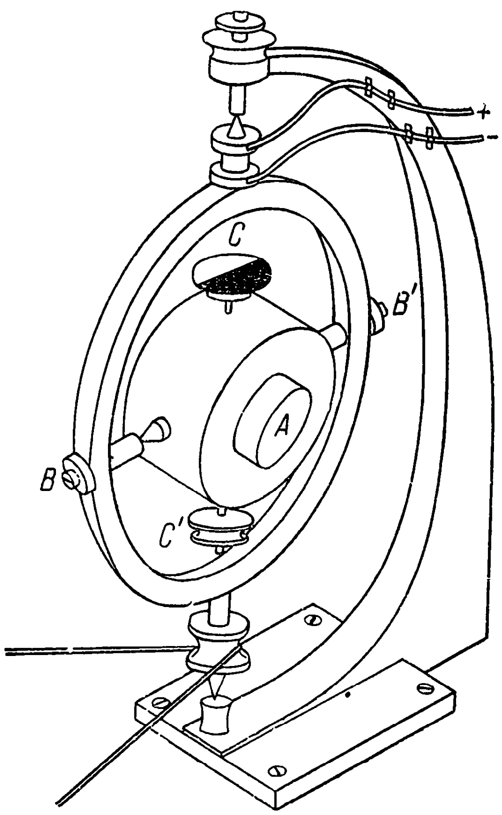


Рис. 11.

На рис. 11 показан аппарат, сконструированный мною в 1861 г. с целью проверить существование силы такого рода.

Электромагнит A может вращаться около горизонтальной оси BB' в кольце, которое само по себе вращается около вертикальной оси.

Пусть A, B, C будут моменты инерции электромагнита относительно оси катушки, горизонтальной оси BB' и третьей оси CC' соответственно.

Пусть θ будет угол, который CC' образует с вертикалью, φ — азимут оси BB', а ψ — переменная, от которой зависит движение электричества в катушке.

Тогда кинетическая энергия T электромагнита может быть написана так:

$$2T = A\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + B\dot{\theta}^2 + C\dot{\varphi}^2\cos^2\theta = E(\dot{\varphi}\sin\theta + \dot{\psi})^2,$$

где E есть величина, которую можно назвать моментом инерции электричества в катушке.

Если Θ есть момент приложенной силы, стремящейся увеличивать θ, мы согласно уравнениям динамики имеем:

$$\Theta = B\frac{d^2\theta}{dt^2} - \left\{(A-C)\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + E\dot{\varphi}\cos\theta\,(\dot{\varphi}\sin\theta + \dot{\psi})\right\}.$$

Приравнивая нулю силу Ψ, стремящуюся увеличивать ψ, получим:

$$\dot{\varphi}\sin\theta + \dot{\psi} = \gamma,$$

где γ — постоянная, которую мы можем рассматривать как представляющую силу тока в катушке.

Если C несколько больше, чем A, Θ будет равно нулю, и равновесие относительно оси BB' будет устойчивым, когда

$$\sin\theta = \frac{E\gamma}{(C-A)\dot{\varphi}}.$$

Это значение θ зависит от γ, т. е. от силы электрического тока и является положительным или отрицательным в зависимости от направления тока.

Ток пропускается в катушку через подшипники B и B', которые соединены с батареей при посредстве пружин, трущихся о металлические кольца, укрепленные на вертикальной оси.

Для того чтобы определить величину θ, в C помещается бумажный диск, разделенный по диаметру, параллельному направлению BB', на две части, одна из которых окрашена в красный, а другая в зеленый цвет.

Когда инструмент находится в движении при положительном θ, в C виден красный круг, радиус которого грубо указывает величину θ. Если θ отрицательно, в точке C виден зеленый круг.

При помощи гаек, передвигающихся на винтах, прикрепленных к электромагниту, ось CC' устанавливается как главная ось, момент инерции относительно которой настолько превышает момент инерции относительно оси A, чтобы сделать инструмент весьма чувствительным к действию силы, если она существует.

Основным затруднением при проведении опытов было возмущающее действие земного магнетизма, которое заставляло электромагнит действовать как магнитную стрелку наклонения. Вследствие этого полученные результаты были весьма грубыми. Но даже когда в катушку вставлялся железный сердечник, что превращало ее в мощный электромагнит, не было указаний на какое-либо изменение θ.

Следовательно, если магнит содержит материю, находящуюся в быстром вращении, момент количества движения должен быть весьма малым по сравнению с любыми величинами, которые мы можем измерить, и мы до сих пор не имеем каких-либо признаков существования членов T_{me}, проявляющихся в механических действиях.

576.] Рассмотрим теперь силы, действующие на токи электричества, т. е. электродвижущие силы.

Пусть Y будет эффективная электродвижущая сила индукционного происхождения; внешняя электродвижущая сила, которая должна действовать на цепь, чтобы уравновесить Y, будет $Y' = -Y$, и по уравнению Лагранжа

$$Y = -Y' = -\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{y}} + \frac{dT}{dy}.$$

Так как в T нет членов, заключающих координаты y, второй член равен нулю, и Y сводится к первому члену. Поэтому электродвижущая сила не может существовать в системе, находящейся в покое и в которой текут постоянные токи.

Далее, если мы разделим Y на три части, Y_m, Y_e, Y_{me}, соответствующие трем частям T, мы найдем, что, поскольку T_m не содержит $\dot{y}$, $Y_m = 0$.

Мы также находим:

$$Y_e = -\frac{d}{dt}\frac{dT_e}{d\dot{y}},$$

Здесь $\frac{dT_e}{d\dot{y}}$ является линейной функцией сил токов. Это — электродвижущая сила индукции, открытая Фарадеем. Более подробно мы ее рассмотрим в дальнейшем.

577.] Из части T, зависящей от скоростей, помноженных на токи, мы находим:

$$Y_{me} = -\frac{d}{dt}\frac{dT_{me}}{d\dot{y}}.$$

Но $\frac{dT_{me}}{d\dot{y}}$ есть линейная функция скоростей проводников. Если, следовательно, члены T_{me} имели бы реальное существование, было бы возможно получать электродвижущую силу независимо от токов простым изменением скоростей проводников. Так, например, в случае подвешенной катушки, описанной в параграфе 574, если мы эту катушку из состояния покоя внезапно приведем во вращение около вертикальной оси, должна была бы возникнуть электродвижущая сила, пропорциональная ускорению этого движения. Она исчезла бы, когда движение сделалось бы равномерным, и имела бы обратное направление, если бы движение замедлялось.

Весьма малое количество научных наблюдений может быть произведено с большей точностью, чем то, которое при помощи гальванометра констатирует существование или отсутствие тока. Точность этого метода намного превышает точность большинства приспособлений для измерения механических сил, действующих на тело. Если, следовательно, какие-нибудь токи могли бы быть произведены указанным способом, они были бы обнаружены, даже будучи очень малыми. Эти токи отличались бы от обычных токов индукции следующими свойствами.

(1) Они вполне зависели бы от движений проводников и ни в какой степени от силы токов или магнитных сил, уже существующих в поле.

(2) Они зависели бы не от абсолютных скоростей проводников, но от их ускорений и от квадратов и произведений скоростей и они изменяли бы знак в тех

случаях, когда ускорение сменялось бы замедлением, а абсолютная величина скорости оставалась бы той же самой.

Однако во всех доныне фактически наблюдавшихся случаях индуктированные токи полностью зависят от силы токов и изменений силы токов в поле и не могут быть возбуждены в поле, в котором отсутствуют магнитные силы и токи. В той мере, в какой они зависят от движения проводников, они зависят от скоростей, а не от изменений скоростей этих движений.

Таким образом, мы имеем три метода обнаружения существования членов формы T_{me}, ни один из которых до сих пор не привел к положительному результату. Я изложил их с большой тщательностью потому, что твердая уверенность касательно пункта, имеющего столь существенное значение для теории электричества, кажется мне весьма важной.

Поскольку до сих пор не было получено никакого очевидного доказательства существования таких членов, я в дальнейшем буду исходить из допущения, что они не существуют или, по меньшей мере, не дают заметного эффекта, что значительно упростит нашу динамическую теорию ([8]). Однако мы будем иметь случай, обсуждая отношение магнетизма к явлениям света, показать, что движение, которое представляет собой свет, может входить как фактор в члены, выражающие движения, составляющие сущность магнетизма.

ГЛАВА VII

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

578.] Обратим теперь наше внимание на ту часть кинетической энергии системы, которая зависит от квадратов и произведений сил электрических токов. Мы будем называть эту часть *электрокинетической* энергией системы. Часть, зависящая от движения проводников, относится к обычной динамике, части же, зависящей от произведений скоростей и токов, как мы это видели, не существует.

Пусть A_1, A_2 и т. д. обозначают различные проводящие цепи. Пусть их форма и относительное положение выражаются в переменных x_1, x_2 и т. д., число которых равно числу степеней свободы механической системы. Эти величины мы будем называть *геометрическими переменными*.

Пусть y_1 обозначает количество электричества, которое прошло через данное сечение проводника A_1, начиная от начального момента времени t. Сила тока будет обозначаться через $\dot{y}_1$, производную этого количества.

Действительный ток мы будем обозначать через $\dot{y}_1$, а через y_1 — интегральный ток. Для каждого тока в системе имеется одна переменная такого рода.

Пусть T обозначает электрокинетическую энергию системы. Она является однородной функцией второй степени от сил токов и имеет форму

$$T = \frac{1}{2} L_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{y}_2^2 + \ldots + M_{12} \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \ldots, \qquad (1)$$

где коэффициенты L, M и т. д. являются функциями геометрических переменных x_1, x_2 и т. д. Электрические переменные y_1, y_2 не входят в это выражение.

Мы можем называть L_1, L_2 и т. д. электрическими моментами инерции цепей A_1, A_2 и т. д. и M_{12} — электрическим произведением инерции двух цепей A_1 и A_2. Желая избежать языка динамической теории, мы будем называть L_1 коэффициентом самоиндукции цепи A_1, а M_{12} — коэффициентом взаимной индукции цепей A_1 и A_2; M_{12} также называется потенциалом цепи A_1 по отношению к A_2. Эти величины зависят только от формы и относительного положения цепей. Мы установим, что в электромагнитной системе измерения они являются величинами, имеющими размерность длины (см. параграф 627).

Дифференцируя T по $\dot{y}$, мы получаем величину p_1, которая в динамической теории может быть названо количеством движения, соответствующим y. В электрической теории мы будем называть p_1 электрокинетическим количеством движения цепи A_1. Его значение есть:

$$p_1 = L_1 \dot{y}_1 + M_{12} \dot{y}_2 + \ldots$$

Электрокинетическое количество движения цепи A_1, следовательно, строится из произведения его собственного тока на коэффициент самоиндукции плюс сумма произведений токов в других цепях, помноженных на коэффициенты взаимной индукции цепи A_1 и других цепей.

Электродвижущая сила

579.] Пусть E будет электродвижущая сила, действующая в цепи A, происходящая от вольтовой или термоэлектрической батареи, дающей электрический ток независимо от электромагнитной индукции.

Пусть R будет сопротивление цепи. Тогда по закону Ома для преодоления сопротивления цепи потребуется электродвижущая сила $R\dot{y}$. Оставшаяся часть электродвижущей силы $E-R\dot{y}$ может быть использована для изменения количества движения цепи. Называя эту силу Y', мы согласно общим уравнениям имеем:

$$Y'=\frac{dp}{dt}-\frac{dT}{dy},$$

но так как T не включает y, последний член исчезает. Отсюда уравнение электродвижущей силы будет:

$$E-R\dot{y}=Y'=\frac{dp}{dt},$$

или

$$E=R\dot{y}+\frac{dp}{dt}.$$

Действующая электродвижущая сила E, следовательно, является суммой двух частей. Первая $R\dot{y}$ требуется для того, чтобы поддерживать ток $\dot{y}$ против сопротивления R. Вторая часть требуется для увеличения электромагнитного количества движения. Это есть электродвижущая сила, которая должна доставляться источниками, независимыми от магнитно-электрической индукции. Электродвижущая сила, возникающая от магнитно-электрической индукции, очевидно, равна $-\frac{dp}{dt}$, или *скорости уменьшения электрокинетического количества движения цепи.*

Электромагнитная сила

580.] Пусть X' будет механическая сила, обусловленная внешними причинами и стремящаяся увеличивать переменную x. Согласно общим уравнениям

$$X'=\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}}-\frac{dT}{dx}.$$

Так как выражение для электрокинетической энергии не содержит скорости ($\dot{x}$), первая часть второго члена исчезает, и мы находим:

$$X' = -\frac{dT}{dx}.$$

Здесь X' есть внешняя сила, необходимая для уравновешивания сил, возникающих от электрических причин. Обычно принято рассматривать эту силу как реакцию против электромагнитной силы, которую мы будем называть X и которая равна и противоположна X'. Отсюда

$$X = \frac{dT}{dx},$$

или *электромагнитная сила, стремящаяся увеличивать какую-нибудь переменную, равна скорости увеличения электрокинетической энергии при возрастании этой переменной при условии, что токи остаются постоянными.*

Если при помощи батареи токи поддерживаются постоянными в течение перемещения, при котором электродвижущей силой производится некоторое количество, W, работы, электрокинетическая энергия системы за это же время увеличивается на W. Поэтому батарея должна доставить двойное количество энергии, или $2W$, в дополнение к той, которая идет на производство тепла в цепи. Это впервые было высказано В. Томсоном *). Сравни этот результат с электростатическим свойством, указанным в параграфе 93 **).

Случай двух цепей

581.] Назовем A_1 первичной цепью, а A_2 — вторичной. Электрокинетическая энергия системы может быть

*) Nichol's Cyclopacedia of the Physical Sciences, изд. 1860 г., глава «Magnetism, Dynamical Relations of».

**) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

написана в виде

$$T=\frac{1}{2}L\dot{y}_1^2+M\dot{y}_1\dot{y}_2+\frac{1}{2}N\dot{y}_2^2,$$

где L и M являются коэффициентами самоиндукции соответственно первичной и вторичной цепей, а M — коэффициент их взаимной индукции.

Предположим, что во вторичной цепи не действует никакой электродвижущей силы, за исключением той, которая индуктируется первичной цепью. Мы тогда имеем:

$$E_2=R_2\dot{y}_2+\frac{d}{dt}(M\dot{y}_1+N\dot{y}_2)=0.$$

Интегрируя это уравнение по t, получим:

$$R_2y_2+M\dot{y}_1+N\dot{y}_2=C,$$

где C — постоянная, а y_2 есть интегральный ток во вторичной цепи.

Метод измерения интегрального тока небольшой продолжительности будет описан в параграфе 748, а в большинстве случаев легко удостовериться в том, что длительность вторичного тока будет весьма короткой.

Обозначим величины переменных в уравнении в конце времени t при помощи штрихов. Тогда, если y_2 есть интегральный ток, т. е. все количество электричества, которое протекает через сечение вторичной цепи в течение времени t,

$$R_2\,y_2=M\dot{y}_1+N\dot{y}_2-(M'\,\dot{y}_1'+N'\,\dot{y}_2').$$

Если вторичный ток возникает целиком от индукции, его начальная величина $\dot{y}_2$ должна быть равна нулю, если первичный ток постоянен и проводники находятся в покое в начале времени t.

Если время t достаточно для того, чтобы вторичный ток мог исчезнуть, $\dot{y}_2'$—его конечное значение—

также равно нулю, так что уравнение принимает вид

$$R_2 y_2 = M\dot{y}_1 - M'\dot{y}_1'.$$

Интегральный ток вторичной цепи зависит в этом случае от начальных и конечных значений $M\dot{y}_1$.

Индуктированные токи

582.] Предположим сначала, что первичная цепь разомкнута, т. е. что $\dot{y}_1 = 0$, и пусть $\dot{y}_1'$ будет ток, возникающий в этой цепи при замыкании контакта.

Уравнение, которое определяет вторичный интегральный ток, есть:

$$R_2 y_2 = -M\dot{y}_1'.$$

Когда цепи помещаются рядом друг с другом и в том же самом направлении, M' является положительной величиной. Отсюда следует, что при замыкании первичной цепи во вторичной цепи индуктируется отрицательный ток.

При размыкании первичной цепи первичный ток прекращается и индуктированный интегральный ток будет y_2, откуда

$$R_2 y_2 = M\dot{y}_1.$$

В этом случае вторичный ток положителен.

Если первичный ток поддерживается постоянным и форма или относительное положение цепей изменяется так, что M становится M', интегральный вторичный ток будет y_2, откуда

$$R_2 y_2 = (M - M')\,\dot{y}_1.$$

В случае двух цепей, помещенных рядом друг с другом и в том же самом направлении, величина M уменьшается по мере того, как увеличивается расстояние между цепями. Поэтому индуктированный ток положителен при увеличении этого расстояния и отрицателен при его уменьшении.

Это—элементарные случаи индуктированных токов, описанные в параграфе 530.

Механическое действие между двумя цепями

583.] Пусть x будет одна из геометрических переменных, от которых зависят форма и относительное положение цепей; электромагнитная сила, стремящаяся увеличить x, будет:

$$X = \frac{1}{2}\dot{y}_1^2\frac{dL}{dx} + \dot{y}_1\dot{y}_2\frac{dM}{dx} + \frac{1}{2}\dot{y}_1^2\frac{dN}{dx}.$$

Если движение системы, соответствующее изменению x, таково, что каждая цепь движется как твердое тело, L и N будут независимы от x и уравнение сводится к

$$X = \dot{y}_1\dot{y}_2\frac{dM}{dx}.$$

Поэтому, если первичный и вторичный токи имеют тот же самый знак, сила X, которая действует между цепями, будет стремиться двигать их так, чтобы увеличивать M.

Если цепи расположены рядом друг с другом и токи текут в одном и том же направлении, M будет увеличиваться при их сближении. Следовательно, в этом случае сила X есть притяжение.

584.] Весь комплекс явлений взаимного действия двух цепей, будь то индукция токов или механическая сила, зависит от величины M, которую мы назвали коэффициентом взаимной индукции. Метод вычисления этой величины из геометрических отношений цепей дан в параграфе 524 *), но в исследованиях, которым посвящена следующая глава, мы не будем исходить из знания математической формы M. Мы будем рассматривать эту величину как полученную из опытов

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

по индукции, например, путем наблюдения интегрального тока при внезапном перемещении вторичной цепи из данного положения на бесконечное расстояние или в любое положение, при котором мы знаем, что $M=0$.

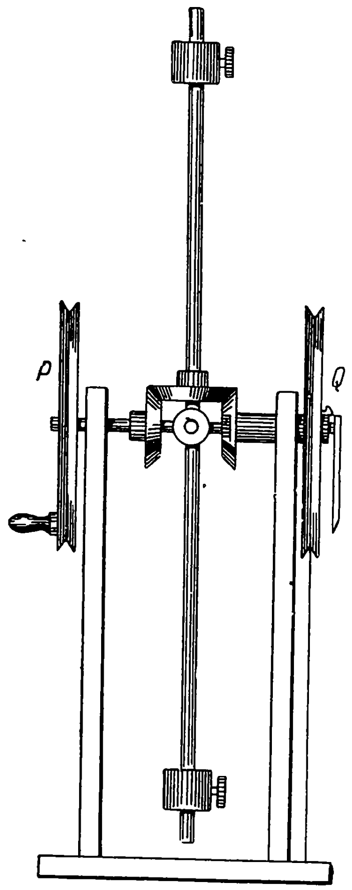


Рис. 12.

Примечание. {В лаборатории Кавендиша (Cavendish) имеется модель, сконструированная Максвеллом, которая весьма ясно иллюстрирует законы индукции токов. Она изображена на рис. 12. P и Q—два диска, вращение P представляет первичный ток, вращение Q—вторичный ток. Эти диски соединены друг с другом дифференциальным приводом. Промежуточная зубчатка вращает маховик, момент инерции которого меняется при изменении положений грузиков, ближе или дальше от центра. Сопротивление вторичной цепи представлено трением канатика, охватывающего диск Q и прижимаемого упругой лентой. При приведении диска P в движение (что изображает начало тока в первичной цепи) диск Q будет вращаться в противоположном направлении (обратный ток при появлении тока в первичной цепи). Когда скорость вращения P становится равномерной, Q остается в покое (во вторичной цепи нет тока, когда первичный ток неизменен): если остановить диск P, то диск Q начинает вращаться в том направлении, в котором до этого вращался P (прямой ток во вторичной цепи при перерыве контакта первичной цепи). Эффект, производимый железным сердечником, в отношении увеличения индукции может иллюстрироваться посредством увеличения момента инерции маховика.}

ГЛАВА VIII

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ ВТОРИЧНОЙ ЦЕПИ

585.] В параграфах 582, 583, 584 мы доказали, что электромагнитные взаимодействия между первичной и вторичной цепями зависят от величины, обозначаемой через M, которая является функцией формы и относительного положения обеих цепей.

Хотя эта величина M в действительности то же самое, что и потенциал двух цепей, математическую форму и свойства которого мы вывели в параграфах 423, 492, 521, 539 из магнитных и электромагнитных явлений, мы здесь не будем ссылаться на эти результаты, но начнем заново от новой предпосылки без каких-либо допущений, за исключением допущений динамической теории в том виде, как она изложена в главе VII.

Электрокинетическое количество движения вторичной цепи состоит из двух частей (параграф 578): одна, Mi_1, зависит от первичного тока i_1, в то время как другая, Ni_2, зависит от вторичного тока i_2. Мы займемся сейчас исследованием первой из этих частей, которую мы обозначим через p:

$$p = Mi_1. \tag{1}$$

Мы также предположим, что первичная цепь неподвижна и что первичный ток имеет постоянную величину. Количество p —электрокинетическое количество движения вторичной цепи—в этом случае зависит только от формы и положения вторичной цепи, так что если какая-либо замкнутая кривая принимается за вторичный контур и если избирается направление вдоль этой кривой, которое считается положительным, то величина p для этой замкнутой кривой будет определена. Если в качестве положительного направления возьмем противоположное, то знак величины p должен быть изменен на обратный.

586.] Так как величина p зависит от формы и положения цепи, мы можем предположить, что каждый участок цепи дает свой вклад в значение p и что вклад какого-либо участка цепи зависит от формы и расположения только этого участка, а не от расположения других участков цепи.

Это допущение законно, потому что мы сейчас не рассматриваем *ток*, части которого могут действовать и в действительности действуют одна на другую, а только *контур*, т. е. замкнутую кривую, по которой *может* течь ток, а это есть чисто геометрическая фигура, отдельные части которой не могут рассматриваться каким-либо образом физически действующими друг на друга.

Мы поэтому допускаем, что вклад элемента ds цепи будет $J\,ds$, где J есть величина, зависящая от положения и направления элемента ds. Поэтому значение p может быть выражено как линейный интеграл

$$p = \int J\,ds, \qquad (2)$$

в котором интегрирование выполнено однократно вдоль всего контура.

587.] Теперь нам надо определить выражение величины J. Прежде всего, если направление ds изменяется на обратное, то J меняет знак. Отсюда, если два контура $ABCE$ и $AECD$ имеют общий отрезок AEC, считаемый в обоих контурах в обратных направлениях, сумма значений p для двух контуров $ABCE$ и $AECD$ будет равна значению p для контура $ABCD$, составленного из двух контуров.

Действительно, части линейного интеграла, зависящие от отрезка AEC, равны, но противоположны по знаку в обеих цепях, так что они взаимно уничтожаются при суммировании, а остаются только те части линейного интеграла, которые зависят от внешней границы $ABCD$.

Таким же путем мы можем показать, что если поверхность, ограниченная замкнутой кривой, разделяется на любое количество частей и если периметр каждой из этих частей рассматривается в качестве контура, положительное направление которого то же, что и вдоль внешней замыкающей кривой, то значение p для замкнутой кривой равно сумме значений p для всех частичных контуров (см. параграф 483).

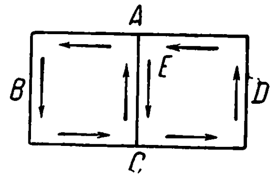


Рис. 13.

588.] Рассмотрим теперь часть поверхности, размеры которой так малы по отношению к главным радиусам кривизны поверхности, что изменение направления нормали в пределах этой части может не приниматься во внимание. Мы также предположим, что если некоторый очень маленький контур перемещается параллельно самому себе от одного участка поверхности к другому, то значение p для малого контура не меняется заметным образом. Это, очевидно, будет иметь место, если размеры участка поверхности достаточно малы по сравнению с ее расстоянием от первичной цепи.

Если на этом участке поверхности будет начерчена некоторая замкнутая кривая, то величина p для этой кривой будет пропорциональна площади, заключенной внутри кривой.

Действительно, площади некоторых двух контуров могут быть разделены на малые элементы одинаковых размеров и имеющих одну и ту же величину p. Площади обоих контуров относятся как числа элементов, которые они содержат, а значения p для этих контуров находятся в том же отношении.

Отсюда значение p для контура, который ограничивает некоторый элемент поверхности dS, имеет вид

$$I\,dS,$$

где I есть величина, зависящая от положения dS и от направления его нормали. Поэтому мы имеем новое выражение для p:

$$p=\iint I\,dS, \tag{3}$$

где двойной интеграл распространен на некоторую поверхность, ограничиваемую контуром.

589.] Пусть $ABCD$ будет контур, в котором AC есть элемент настолько малый, что его можно считать прямолинейным. Пусть APB и CQB будут малые равные площади в той же самой плоскости. Тогда значение p будет одним и тем же для малых контуров APB и CQB, или

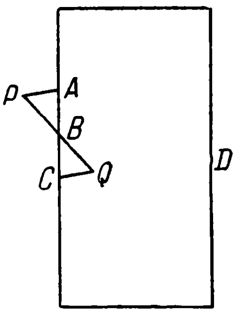


Рис. 14.

$$p\,(APB)=p\,(CQB).$$

Отсюда

$$p\,(APBQCD)=p\,(ABQCD)+p\,(APB)=\\=p\,(ABQCD)+p\,(CQB)=p\,(ABCD),$$

т. е. значение p не меняется вследствие замены ломаной линией $APQC$ прямой линии AC при условии, что площадь контура заметным образом не меняется. Действительно, это есть принцип, установленный вторым опытом Ампера (параграф 506), в котором показывается, что ломаный участок цепи эквивалентен прямолинейному при условии, что ни в одном месте ломаный участок цепи не находится на заметном расстоянии от прямолинейного участка.

Если, следовательно, мы вместо элемента ds представим три малых элемента dx, dy и dz, начерченных последовательно один за другим так, что они образуют непрерывный путь от начала до конца элемента ds, и если $F\,dx$, $G\,dy$ и $H\,dz$ обозначают элементы линейного интеграла, соответственно вдоль dx, dy и dz, то

$$J\,ds = F\,dx + G\,dy + H\,dz. \tag{4}$$

590.] Мы теперь имеем возможность определить, каким образом величина J зависит от направления элемента ds. Согласно (4)

$$J = F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}. \tag{5}$$

Это есть выражение для составляющей в направлении ds вектора, компоненты которого в направлениях осей x, y и z соответственно равны F, G и H.

Если этот вектор мы обозначим через $\mathfrak{A}$ и вектор от начала до некоторой точки контура через ρ, элемент длины будет $d\rho$ и $J\,ds$ в кватернионном выражении будет:

$$-S.\mathfrak{A}\,d\rho\,(^9).$$

Мы теперь можем написать уравнение (2) в форме

$$p = \int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds, \tag{6}$$

или

$$p = -\int S.\mathfrak{A}\,d\rho. \tag{7}$$

Вектор $\mathfrak{A}$ и его составляющие F, G, H зависят от положения в поле, а не от направления, которое имеет ds. Следовательно, они являются функциями координат x, y, z элемента ds, а не направляющих косинусов l, m, n этого элемента.

Вектор $\mathfrak{A}$ по направлению и величине представляет интеграл по времени от силы, действие которой испытывала бы частица, помещенная в точке (x, y, z), если бы первичный ток был внезапно прерван. Мы поэтому будем называть его *электрокинетическим количеством движения в точке* (x, y, z). Он идентичен с величиной, которую мы исследовали в параграфе 405*) под названием векторного потенциала магнитной индукции.

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

Электрокинетическое количество движения некоторой конечной линии или цепи есть линейный интеграл, распространенный вдоль линии контура, от составляющей электрокинетического количества движения в каждой из точек цепи.

591.] Определим теперь величину p для элементарного прямоугольника $ABCD$, стороны которого равны dy и dz, причем положительное направление есть направление от оси y к оси z.

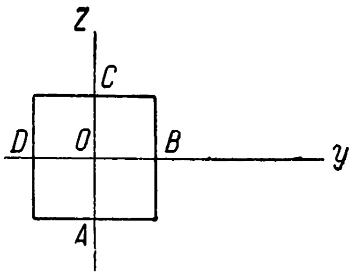


Рис. 15.

Пусть координаты O, центра тяжести элемента, будут x_0, y_0, z_0 и пусть G_0, H_0 будут значения G и H в этой точке.

Координаты A—середины первой стороны прямоугольника—будут y_0 и $z_0 - \frac{1}{2} dz$. Соответствующее значение G будет равно:

$$G = G_0 - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} dz + \ldots, \tag{8}$$

и часть величины p, соответствующая стороне A, будет приблизительно равна:

$$G_0 \, dy - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} dy \, dz. \tag{9}$$

Аналогично этому будем иметь:

$$\text{для } B \qquad H_0 \, dz + \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} dy \, dz,$$

$$\text{для } C \qquad -G_0 \, dy - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} dy \, dz,$$

$$\text{для } D \qquad -H_0 \, dz + \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} dy \, dz.$$

Складывая эти четыре величины, мы находим величину p для указанного прямоугольника:

$$p = \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) dy \, dz. \tag{10}$$

Если мы теперь введем три новые величины a, b, c, так что

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}, \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

и будем рассматривать их как составляющие нового вектора $\mathfrak{B}$, то мы можем выразить линейный интеграл от $\mathfrak{A}$ вдоль некоторого контура через интеграл от $\mathfrak{B}$, взятый по поверхности, ограниченной этим контуром; имеем:

$$p = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds = \iint (la + mb + nc)\, dS, \tag{11}$$

или

$$p = \int T.\mathfrak{A} \cos \varepsilon \, ds = \iint T.\mathfrak{B} \cos \eta \, dS, \tag{12}$$

где ε есть угол между $\mathfrak{A}$ и ds, η—угол между $\mathfrak{B}$ и нормалью к dS, направляющими косинусами которой являются l, m, n, а $T.\mathfrak{A}$, $T.\mathfrak{B}$ обозначают численные значения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ ([10]).

При сравнении этого результата с уравнением (3) очевидно, что величина I в этом уравнении равна $\mathfrak{B} \cos \eta$ или составляющей $\mathfrak{B}$ вдоль нормали к dS.

592.] Мы уже видели (в параграфах 490, 541), что согласно теории Фарадея явления электромагнитной силы и индукции в цепи зависят от изменения числа линий магнитной индукции, которые пронизывают цепь. Но число этих линий определяется математически поверхностным интегралом магнитной индукции через некоторую поверхность, ограниченную цепью. Поэтому мы должны рассматривать вектор $\mathfrak{B}$ и его составляющие a, b, c как представляющие то, что нам уже известно под именем магнитной индукции и ее составляющих. В настоящем исследовании мы предполагаем вывести свойства этого вектора из динамических принципов, установленных в последней главе, по возможности не обращаясь к эксперименту. Отождествляя этот вектор, который появился в результате математического исследования, с магнитной индукцией, свойства которой узнали из опытов с магнитами, мы не выходим за пределы экспериментального метода, потому что мы не вводим новых фактов в теорию, мы только даем наименование математической величине, и правомерность этого действия следует оценивать по согласованности свойств математической величины со свойствами физической величины данного наименования.

Вектор $\mathfrak{B}$, поскольку он фигурирует в поверхностном интеграле, очевидно, принадлежит к категории векторных потоков, описанных в параграфе 12 *). Вектор $\mathfrak{A}$, с другой стороны, принадлежит к категории сил, так как он фигурирует в линейном интеграле (11).

593.] Мы должны здесь напомнить условия, принятые для обозначения положительных и отрицательных величин и направлений, некоторые соображения о которых были приведены в параграфе 23 *). Мы принимаем правостороннюю систему осей, так что если винт с правой нарезкой помещен в направлении оси x и гайка по этому винту поворачивается в положительном направлении вращения, т. е. от направления оси y к направлению оси z, то гайка будет двигаться вдоль винта в положительном направлении x.

Мы также рассматриваем стеклянное электричество и южный магнетизм как положительные. Положительное направление электрического тока или линии электрической индукции есть направление, в котором положительное электричество движется или стремится двигаться, а положительное направление линии магнитной индукции есть направление, в котором указывает компасная стрелка своим северным концом (см. рис. 6, параграф 498 и рис. 7, параграф 501).

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

Изучающему рекомендуется выбрать любой метод, который кажется ему наиболее эффективным, для того чтобы надежно закрепить эти условности в памяти, так как значительно более трудно вспомнить правило, которое определяет, в каком из двух, до этого безразличных, способов следует делать какое-либо утверждение, чем вспомнить правило, которое избирает из многих путей один единственный.

594.] Теперь мы должны вывести из динамических принципов выражение для электромагнитной силы, действующей на проводник, по которому проходит элек-

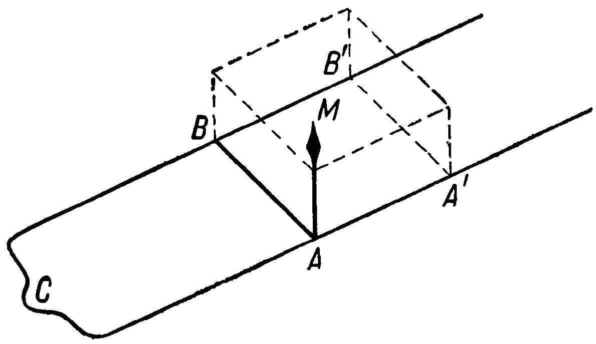


Рис. 16.

трический ток и который движется в магнитном поле, и выражение для электродвижущей силы, действующей на электричество, заключенное в движущемся в магнитном поле теле. Математический метод, который мы употребим для этого, может быть сравнен с экспериментальным методом Фарадея *) при исследовании им поля с помощью проволоки, подробности которого уже приведены нами в параграфе 490. Сейчас мы должны определить изменение значения p, электрокинетического количества движения вторичной цепи, обусловленное изменением формы этой цепи.

Пусть AA', BB' будут два параллельных прямолинейных проводника, соединенных проводящей дугой C, которая может иметь любую форму, и прямоли-

*) Exp. Res., (3082, 3087, 3113).

нейным проводником AB, который может скользить параллельно самому себе вдоль направляющих рельс AA' и BB'.

Пусть таким образом образованная цепь рассматривается как вторичная цепь и пусть направление ABC считается положительным направлением обхода контура.

Пусть подвижная часть перемещается параллельно самой себе из положения AB в положение $A'B'$. Нам следует определить изменение p, электрокинетического количества движения цепи, обусловленное этим перемещением скользящей части. Вторичная цепь ABC становится $A'B'C'$, отсюда согласно параграфу 587

$$p(A'B'C') - p(ABC) = p(AA'B'B). \tag{13}$$

Мы, следовательно, должны определить величину p для параллелограмма $AA'B'B$. Если этот параллелограмм так мал, что мы можем не принимать во внимание изменение направления и величины магнитной индукции в различных точках его плоскости, значение p будет согласно параграфу 591 $\mathfrak{B}\cos\eta \cdot AA'B'B$, где $\mathfrak{B}$ есть магнитная индукция, а η—угол, который она образует с положительным направлением нормали к параллелограмму $AA'B'B$.

Мы можем представить этот результат геометрически в виде объема параллелепипеда, основанием которого является параллелограмм $AA'B'B$ и одно из ребер которого есть линия AM, представляющая по направлению и величине магнитную индукцию $\mathfrak{B}$. Если параллелограмм расположен в плоскости страницы и если AM имеет направление снизу вверх от этой плоскости, объем параллелепипеда должен считаться положительным. Вообще говоря, он должен считаться положительным, если направления цепи AB, магнитной индукции AM и смещения AA', взятые в циклическом порядке, образуют правостороннюю систему координат.

Объем этого параллелепипеда представляет приращение значения p для вторичной цепи, соответствующее смещению скользящей части от AB к $A'B'$.

Электродвижущая сила, действующая на скользящую часть

595.] Электродвижущая сила, возникающая во вторичной цепи в результате движения скользящей части, согласно параграфу 579 будет равна:

$$E = -\frac{dp}{dt}. \tag{14}$$

Если мы предположим, что AA' будет смещением в единицу времени, тогда AA' представит скорость, параллелепипед будет представлять $\frac{dp}{dt}$ и, следовательно, по уравнению (14)—электродвижущую силу в отрицательном направлении BA.

Отсюда электродвижущая сила, действующая на скользящую часть AB, вследствие ее движения через магнитное поле будет представлена объемом параллелепипеда, ребра которого по направлению и величине представляют скорость, магнитную индукцию и саму скользящую часть; электродвижущая сила будет положительной, если эти три направления расположены в правостороннем циклическом порядке.

Электромагнитная сила, действующая на скользящую часть

596.] Пусть i_2 обозначает ток во вторичной цепи и положительном направлении ABC, тогда работа, совершенная электромагнитной силой, действующей на AB во время перемещения из положения AB в положение $A'B'$, будет $(M'—M)i_1i_2$, где M и M' будут значениями M_{12} в начальном и конечном положениях AB. Но $(M'—M)i_1$ равно $p'—p$, а эта величина представлена объемом параллелепипеда, построенного на AB, AM и AA'. Отсюда, если мы, чтобы представить величину $AB \cdot i_2$, проведем линию, параллельную AB, тогда параллелепипед, ограниченный этой линией, AM—магнитной индукцией и AA'—перемещением, будет представлять работу, произведённую при этом перемещении.

Для данного перемещения работа будет наибольшей, если AA' перпендикулярно к параллелограмму, стороны которого суть AB и AM. Электромагнитная сила поэтому представляется площадью параллелограмма, построенного на AB и AM и помноженного на i_2, а по направлению совпадает с направлением нормали к этому параллелограмму, проведенной так, что AB, AM и нормаль составляют правосторонний циклический порядок.

Четыре определения линии магнитной индукции

597.] Если направление AA', по которому имеет место движение скользящей части, совпадает с AM — направлением магнитной индукции, движение скользящей части не вызовет появления электродвижущей силы, каково бы ни было направление AB, а если по AB проходит электрический ток, то не будет наблюдаться перемещения вдоль AA'.

Далее, если AB, скользящая часть, совпадает по направлению с AM — направлением магнитной индукции, то при движении AB не будет наведенной электродвижущей силы, как бы AB ни двигалось; на проводник AB не будет также действовать механическая сила при прохождении по нему тока.

Поэтому мы можем определить линию магнитной индукции четырьмя различными способами. Это — такая линия, что:

(1) Если проводник будет двигаться вдоль этой линии параллельно самому себе, он не будет испытывать действия какой-либо электродвижущей силы.

(2) Если проводник, несущий ток, будет иметь возможность свободно двигаться вдоль линии магнитной индукции, он не будет испытывать тенденции к такому движению.

(3) Если линейный проводник совпадает по направлению с линией магнитной индукции и будет двигаться

параллельно самому себе в любом направлении, он не будет испытывать действия какой-либо электродвижущей силы в направлении своей длины.

(4) Если линейный проводник, несущий электрический ток, совпадает по направлению с линией магнитной индукции, он не будет испытывать действия какой-либо механической силы.

Общие уравнения электродвижущей интенсивности *)

598.] Мы видели, что E—электродвижущая сила, возникающая в результате индукции, действующей на вторичную цепь,—равна $-\frac{dp}{dt}$, где

$$p=\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds. \tag{1}$$

Для определения величины E дифференцируем по t выражение, стоящее под знаком интеграла, помня о том, что, если вторичная цепь находится в движении, x, y и z являются функциями времени. Мы получаем:

$$\begin{aligned}E=&-\int\left(\frac{dF}{dt}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dt}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dt}\frac{dz}{ds}\right)ds-\\&-\int\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dx}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dx}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds-\\&-\int\left(\frac{dF}{dy}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dy}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dy}{dt}ds-\\&-\int\left(\frac{dF}{dz}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dz}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dz}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dz}{dt}ds-\\&-\int\left(F\frac{d^2x}{ds\,dt}+G\frac{d^2y}{ds\,dt}+H\frac{d^2z}{ds\,dt}\right)ds.\end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь второй член выражения (2) и подставим в него из уравнений (А) параграфа 591 зна-

*) То-есть напряженности электрического поля. (*Ред.*)

чения $\frac{dG}{dx}$ и $\frac{dH}{dx}$. Тогда этот член примет вид

$$-\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds,$$

что можно написать в виде

$$-\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds.$$

Производя то же самое с третьим и четвертым членами, собирая значения с $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$ и помня, что

$$\int\left(\frac{dF}{ds}\frac{dx}{dt}+F\frac{d^2x}{ds\,dt}\right)ds=F\frac{dx}{dt}, \tag{3}$$

следовательно, что интеграл, будучи взят вдоль замкнутой кривой, исчезает, получим:

$$\begin{aligned}E=&\int\left(c\frac{dy}{dt}-b\frac{dz}{dt}-\frac{dF}{dt}\right)\frac{dx}{ds}ds+\\&+\int\left(a\frac{dz}{dt}-c\frac{dx}{dt}-\frac{dG}{dt}\right)\frac{dy}{ds}ds+\\&+\int\left(b\frac{dx}{dt}-a\frac{dy}{dt}-\frac{dH}{dt}\right)\frac{dz}{ds}ds.\end{aligned} \tag{4}$$

Это выражение мы можем написать в форме

$$E=\int\left(P\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}+R\frac{dz}{ds}\right)ds, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned}P&=c\frac{dy}{dt}-b\frac{dz}{dt}-\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx},\\Q&=a\frac{dz}{dt}-c\frac{dx}{dt}-\frac{dG}{dt}-\frac{d\Psi}{dy},\\R&=b\frac{dx}{dt}-a\frac{dy}{dt}-\frac{dH}{dt}-\frac{d\Psi}{dz}.\end{aligned}\right\} \quad \text{Уравнения электродвижущей интенсивности [напряженности электрического поля.—\textit{Ред.}]} \tag{B}$$

Члены, включающие новую величину Ψ, вводятся с целью обобщения выражений для P, Q, R. Они исчезают из интеграла, если он взят вдоль замкнутой цепи. Величина Ψ поэтому неопределенна, по крайней мере поскольку это относится к стоящей перед нами задаче, в которой должна быть определена электродвижущая сила, действующая в цепи. Мы, однако, увидим, что если мы знаем все условия задачи, мы можем приписать Ψ некоторое определенное значение, которое согласно известному определению представляет собой *электрический потенциал* в точке (x, y, z).

Величина, находящаяся под знаком интеграла в уравнении (5), представляет электродвижущую интенсивность, действующую в элементе ds цепи.

Если мы обозначим через $T.\mathfrak{E}$ числовое значение результирующей от P, Q и R, а через ε — угол между направлением этой результирующей и направлением элемента ds, мы можем написать уравнение (5) в виде

$$E = \int T.\mathfrak{E} \cos \varepsilon \, ds. \tag{6}$$

Вектор $\mathfrak{E}$ есть электродвижущая интенсивность [напряженность электрического поля.—*Ред.*] в движущемся элементе ds. Ее направление и величина зависят от положения и движения ds и от изменения магнитного поля, но не от изменения направления ds. Поэтому мы можем не обращать внимания на то обстоятельство, что ds составляет часть цепи, и рассматривать его просто как часть движущегося тела, на которую действует электродвижущая интенсивность $\mathfrak{E}$. Электродвижущая интенсивность в точке уже была определена в параграфе 68. Ее также называют результирующей электрической силой, так как это — сила, действие которой испытывала бы единица положительного электричества, помещенная в этой точке. Мы теперь получили наиболее общее выражение этой величины в случае тела, движущегося в магнитном поле, образованном изменяющейся электрической системой.

Если тело является проводником, электродвижущая интенсивность вызывает образование тока; если это — диэлектрик, электродвижущая интенсивность произведет только электрическое смещение.

Электродвижущая интенсивность или сила, действующая на частицу, должна быть тщательно отличаема от электродвижущей силы вдоль дуги кривой, последняя величина является линейным интегралом первого.

599.] Электродвижущая интенсивность, составляющие которой определяются уравнениями (B), зависит от трех обстоятельств. Первое из них — это движение частицы через магнитное поле. Часть силы, зависящая от этого движения, выражается двумя первыми членами правой стороны каждого уравнения. Она зависит от скорости частицы, перпендикулярной к линиям магнитной индукции. Если $\mathfrak{G}$ есть вектор, представляющий скорость, а $\mathfrak{B}$ — другой вектор, представляющий магнитную индукцию, то если $\mathfrak{E}_1$ есть часть электродвижущей интенсивности, зависящей от движения:

$$\mathfrak{E}_1 = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B}, \tag{7}$$

или электродвижущая интенсивность $\mathfrak{E}$ есть векторное произведение магнитной индукции на скорость, иначе говоря, величина электродвижущей интенсивности $\mathfrak{E}$ представляется площадью параллелограмма, стороны которого образованы векторами скорости и магнитной индукции, а направление $\mathfrak{E}$ нормально к этому параллелограмму, начерченному так, что скорость, магнитная индукция и электродвижущая интенсивность расположены в правостороннем циклическом порядке.

Третий член в каждом из уравнений (B) зависит от изменения магнитного поля во времени. Оно может происходить или вследствие изменения во времени электрического тока в первичной цепи или от движения первичной цепи. Пусть $\mathfrak{E}_2$ будет часть электродвижущей напряженности, зависящая от этих членов. Ее составляющие суть:

$$-\frac{dF}{dt}, \quad -\frac{dG}{dt} \quad \text{и} \quad -\frac{dH}{dt}.$$

Это — составляющие вектора $-\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$, или $\dot{\mathfrak{A}}$, следовательно,

$$\mathfrak{E}_2 = -\dot{\mathfrak{A}}. \tag{8}$$

Последний член каждого уравнения (B) относится к изменению функции Ψ в различных частях поля. Мы можем написать третью часть электродвижущей интенсивности, которая вызывается этой причиной, в форме:

$$\mathfrak{E}_3 = -\nabla\Psi. \tag{9}$$

Электродвижущая интенсивность в том виде, как она определена уравнениями (B), может быть, следовательно, написана в обозначениях теории кватернионов следующим образом:

$$\mathfrak{E} = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi. \tag{10}$$

Об изменении уравнений электродвижущей интенсивности в случае, когда оси, к которым они относятся, движутся в пространстве

600.] Пусть x', y', z' будут координаты точки, относящиеся к системе прямоугольных осей, движущихся в пространстве, и пусть x, y, z будут координаты этой же самой точки, относящиеся к неподвижным осям.

Пусть составляющие скорости начала движущейся системы координат будут u, v, w; составляющие ее угловой скорости по отношению к неподвижным осям будут ω_1, ω_2, ω_3, и пусть мы так выберем неподвижные оси, чтобы они в данный момент совпадали с подвижными осями. Тогда только те величины будут различными для двух систем осей, которые содержат дифференцирование по времени. Если $\frac{\delta x}{\delta t}$ обозначает составляющую скорости точки, неизменно связанной с движущимися осями, а $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dx'}{dt}$ — составляющие скорости любой движущейся точки, имеющей то же самое мгновенное положение, соответственно относящиеся к неподвижным и подвижным осям, то

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dx'}{dt}, \tag{1}$$

и такие же уравнения для других составляющих.

Согласно теории движения твердого тела неизменной формы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta x}{\delta t}&=u+\omega_2 z-\omega_3 y,\\ \frac{\delta y}{\delta t}&=v+\omega_3 x-\omega_1 z,\\ \frac{\delta z}{\delta t}&=w+\omega_1 y-\omega_2 x.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Поскольку F есть составляющая некоторой векторной величины, параллельная x, если $\frac{dF'}{dt}$ есть значение $\frac{dF}{dt}$ по отношению к движущимся осям, то может быть показано, что

$$\frac{dF'}{dt}=\frac{dF}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dF}{dy}\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{dF}{dz}\frac{\delta z}{\delta t}+G\omega_3-H\omega_2+\frac{dF}{dt}. \tag{3}$$

Подставляя вместо $\frac{dF}{dy}$ и $\frac{dF}{dz}$ их значения в том виде, в каком они даны в уравнении (A) магнитной индукции, и вспоминая, что согласно (2)

$$\frac{d}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}=0,\quad \frac{d}{dx}\frac{\delta y}{\delta t}=\omega_3,\quad \frac{d}{dx}\frac{\delta z}{\delta t}=-\omega_2, \tag{4}$$

мы находим:

$$\frac{dF'}{dt}=\frac{dF}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}+F\frac{d}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dG}{dx}\frac{\delta y}{\delta t}+G\frac{d}{dx}\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{dH}{dx}\frac{\delta z}{\delta t}+$$
$$+H\frac{d}{dx}\frac{\delta z}{\delta t}-c\frac{\delta y}{\delta t}+b\frac{\delta z}{\delta t}+\frac{dF}{dt}. \tag{5}$$

Если мы теперь положим:

$$-\Psi' = F\frac{\delta x}{\delta t} + G\frac{\delta y}{\delta t} + H\frac{\delta z}{\delta t}, \tag{6}$$

$$\frac{dF'}{dt} = -\frac{d\Psi'}{dx} - c\frac{\delta y}{\delta t} + b\frac{\delta z}{\delta t} + \frac{dF}{dt}. \tag{7}$$

Уравнение для P, составляющей электродвижущей интенсивности вдоль x, отнесенное к неподвижным осям, будет согласно (B)

$$P = c\frac{\delta y}{\delta t} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}. \tag{8}$$

Представляя значения величин, отнесенных к подвижным осям, получим:

$$P' = c\frac{\delta y'}{dt} - b\frac{dz'}{dt} - \frac{dF'}{dt} - \frac{d(\Psi + \Psi')}{dx} \tag{9}$$

для значения P', отнесенного к подвижным осям.

601.] Отсюда вытекает, что электродвижущая интенсивность выражается формулой того же самого типа, будут ли движения проводников отнесены к неподвижным осям или к осям, движущимся в пространстве. Единственным различием между этими формулами будет то, что в случае подвижных осей электрический потенциал Ψ должен быть заменен на $\Psi + \Psi'$.

Во всех случаях, в которых ток возникает в проводящей цепи, электродвижущая сила есть взятый вдоль контура цепи линейный интеграл

$$E = \int \left(P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds}\right) ds. \tag{10}$$

Значение Ψ исчезает из этого интеграла, так что введение Ψ' не имеет влияния на это значение. Следовательно, во всех явлениях, относящихся к замкнутым цепям и к токам в них, безразлично, будут ли оси, к которым мы относим систему, в покое или в движении.

Об электромагнитной силе, действующей на движущийся в магнитном поле проводник с током

602.] В общем исследовании (параграф 583) мы видели, что если x_1 есть одна из переменных, которая определяет положение и форму вторичной цепи, и если X_1 есть сила, действующая на вторичную цепь, стремящаяся увеличивать эту переменную, то

$$X_1=\frac{dM}{dx_1}\dot{i}_1\dot{i}_2. \tag{1}$$

Так как $\dot{i}_1$ не зависит от x_1, мы можем написать:

$$M\dot{i}_1=p=\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds, \tag{2}$$

и мы имеем для значения X_1

$$X_1=\dot{i}_2\frac{d}{dx_1}\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds. \tag{3}$$

Теперь предположим, что смещение состоит в движении каждой точки цепи на расстояние δx в направлении x, причем δx есть некоторая непрерывная функция от s, так что различные части цепи движутся независимо одна от другой, в то время как цепь остается непрерывной и замкнутой.

Кроме того, пусть X будет полной силой в направлении x, действующей на часть цепи от $s=0$ до $s=s$; тогда часть, соответствующая элементу ds, будет $\frac{dX}{ds}ds$. Мы тогда получим следующее выражение для работы, совершенной силой в течение смещения:

$$\int\frac{dX}{ds}\delta x\,ds=\dot{i}_2\int\frac{d}{d\delta x}\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)\delta x\,ds, \tag{4}$$

где интегрирование должно быть распространено по замкнутой кривой, имея при этом в виду, что δx есть произвольная функция от s. Мы можем, следовательно, произвести дифференцирование по δx аналогично дифференцированию по t в параграфе 598, помня, что

$$\frac{dx}{d\delta x}=1, \quad \frac{dy}{d\delta x}=0 \quad \text{и} \quad \frac{dz}{d\delta x}=0. \tag{5}$$

Мы, таким образом, находим:

$$\int \frac{dX}{ds}\delta x\, ds = i_2 \int \left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}\right)\delta x\, ds + i_2 \int \frac{d}{ds}(F\delta x)\, ds. \tag{6}$$

Последний член исчезает, когда интегрирование производится вдоль замкнутой кривой, а поскольку уравнение должно быть действительным для всех форм функций δx, мы должны иметь:

$$\frac{dX}{ds}=i_2\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}\right) \tag{7}$$

— уравнение, которое дает составляющую, параллельную оси x, силы, действующей в элементе ds на единицу длины цепи. Составляющие, параллельные осям y и z, будут:

$$\frac{dY}{ds}=i_2\left(a\frac{dz}{ds}-c\frac{dx}{ds}\right), \tag{8}$$

$$\frac{dZ}{ds}=i_2\left(b\frac{dx}{ds}-a\frac{dy}{ds}\right). \tag{9}$$

Результирующая сила на элемент выражена по направлению и величине в кватернионном обозначении через $i_2 V . d\rho\mathfrak{B}$, где i_2 есть числовая мера тока, а $d\rho$ и $\mathfrak{B}$ — векторы, представляющие элемент цепи и магнитную индукцию; умножение должно быть понято в смысле, указанном Гамильтоном.

603.] Если проводник рассматривается не как линия, но как тело, следует выразить силу на элемент длины и ток через полное сечение, через силу на единицу объема и ток на единицу площади.

Пусть X, Y, Z представляют составляющие силы, относящиеся к единице объема, u, v, w — составляющие тока, отнесенные к единице площади, тогда, если S есть сечение проводника, которое мы будем предполагать малым, объем элемента ds будет $S\,ds$ и $u=\frac{i_2}{S}\frac{dx}{ds}$.

Поэтому уравнение (7) будет:

$$\frac{XS\,ds}{ds} = S\,(vc - wb), \tag{10}$$

или

$$\left.\begin{aligned} X &= vc - wb, \\ Y &= wa - uc \\ Z &= ub - va. \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{c}\text{Уравнения} \\ \text{электромагнит-} \\ \text{ной силы.}\end{array} \tag{C}$$

аналогично:

и

Здесь X, Y, Z являются составляющими электромагнитной силы, действующей на элемент проводника, деленными на объем этого элемента; u, v, w являются составляющими электрического тока через элемент, отнесенные к единице площади, и a, b, c — составляющие магнитной индукции в элементе, которые также отнесены к единице площади.

Если вектор $\mathfrak{F}$ представляет по величине и направлению силу, действующую на единицу объема проводника, и если $\mathfrak{C}$ представляет электрический ток, текущий через него, то ([12])

$$\mathfrak{F} = V.\,\mathfrak{C}\mathfrak{B}. \tag{11}$$

[Уравнения (B) параграфа 598 могут быть доказаны следующим методом, изложенным в мемуаре профессора Максвелла: «Динамическая теория электромагнитного поля», Phil. Trans., 1865 *).

Производная по времени от $-p$ может быть разделена на две части, одна из которых зависит, а другая не зависит от движения цепи. Последняя часть, очевидно, будет:

$$-\int\left(\frac{dF}{dt}\,dx + \frac{dG}{dt}\,dy + \frac{dH}{dt}\,dz\right).$$

Для того чтобы найти первую часть, рассмотрим дугу ds, образующую часть цепи, и вообразим, что эта дуга движется вдоль рельсов, которые будем считать параллельными; составляющие скорости этого движения v пусть будут: $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$; остальную часть цепи, кроме дуги δs, будем предполагать неподвижной. Тогда мы можем считать, что движущаяся дуга

---

*) См. стр. 251 настоящего издания.

описывает маленький параллелограмм, направляющие косинусы нормали к которому будут:

$$\lambda,\ \mu,\ \nu = \frac{n\dot{y}-m\dot{z}}{v\sin\theta},\quad \frac{l\dot{z}-n\dot{x}}{v\sin\theta},\quad \frac{m\dot{x}-l\dot{y}}{v\sin\theta},$$

где l, m, n являются направляющими косинусами для δs, а θ есть угол между v и δs.

Для того чтобы проверить знаки λ, μ, ν, мы можем положить $m=-1$, $\dot{x}=v$, тогда λ, μ, ν становятся равными соответственно 0, 0, -1, каковыми они и должны были быть при правосторонней системе осей.

Пусть теперь a, b, c будут составляющие магнитной индукции, обусловленной движением δs в течение времени δt:

$$\delta p = (a\lambda + b\mu + c\nu)\ v\,\delta t\,\delta s \sin\theta.$$

Если мы предположим, что каждая часть цепи движется подобным же образом, то результирующим эффектом будет движение всей цепи как целого и токи в рельсах будут всякий раз компенсироваться в случае двух прилегающих дуг. Производная по времени от $-p$, обусловленная движением цепи, следовательно, будет:

$$-\int \{a(n\dot{y}-m\dot{z}) + \text{два аналогичных члена}\}\,ds,$$

где интеграл берется вдоль всей цепи, или

$$\int (c\dot{y}-b\dot{z})\,dx + \text{два аналогичных интеграла}.$$

Результаты параграфа 602 для составляющих электромагнитной силы могут быть выведены из вышеуказанного выражения для δp. Действительно, пусть дуга δs смещается на расстояние $\delta s'$ в направлении l', m', n', тогда

$$\delta p = \{l'(cm-bn) + \text{два аналогичных члена}\}\,\delta s\,\delta s'.$$

Теперь пусть X будет составляющей по оси x силы, действующей на дугу s. Тогда для единицы тока мы согласно параграфу 596 найдем:

$$\frac{dX}{ds} = \frac{dp}{dx} = cm - bn.]$$

Уравнения электромагнитного поля

{Если предположить, что электрические токи всегда текут вдоль замкнутых цепей, мы без введения векторного потенциала можем вывести уравнения, которые будут определять состояние электромагнитного поля.

Так, пусть i будет сила тока в некоторой цепи, которую мы будем предполагать находящейся в покое. Электрокинетическая энергия T, относящаяся к этому току, будет:

$$i\iint(la+mb+nc)\,dS,$$

где dS есть элемент поверхности, ограниченной током.

Отсюда $-\frac{d}{dt}\frac{dT}{di}$ — полная электродвижущая сила в цепи, стремящаяся увеличивать i, — будет равна:

$$-\iint\left(l\frac{da}{dt}+m\frac{db}{dt}+n\frac{dc}{dt}\right)dS;$$

следовательно, если X, Y, Z являются составляющими электродвижущей интенсивности, то

$$\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=-\iint\left(l\frac{da}{dt}+m\frac{db}{dt}+n\frac{dc}{dt}\right)dS. \quad (1)$$

Но, согласно теореме Стокса, левая часть этого уравнения равна:

$$\iint\left\{l\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)+m\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)+n\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\right\}dS.$$

Сравнивая этот интеграл с правой частью уравнения (1), мы получаем, поскольку поверхность, охватываемая током, является совершенно произвольной:

$$\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}=-\frac{da}{dt},$$
$$\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}=-\frac{db}{dt},$$
$$\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}=-\frac{dc}{dt}:$$

Кроме того, мы имеем еще отношения:

$$4\pi u=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz},$$
$$4\pi v=\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx},$$
$$4\pi w=\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy},$$
$$u=\frac{X}{\varsigma},\qquad v=\frac{Y}{\varsigma},\qquad w=\frac{Z}{\varsigma}$$

для проводника, удельное сопротивление которого равно σ, или

$$u=\frac{K}{4\pi}\frac{dX}{dt}, \qquad v=\frac{K}{4\pi}\frac{dY}{dt}, \qquad w=\frac{K}{4\pi}\frac{dZ}{dt}$$

для изолятора, удельная индуктивная способность которого равна K; приведенные уравнения являются достаточными для определения состояния электромагнитного поля. Граничные условия на какой-нибудь поверхности состоят в том, что магнитная индукция, нормальная к поверхности, должна быть непрерывной и что магнитная сила, параллельная поверхности, должна также быть непрерывной.

Этот метод исследования электромагнитного поля имеет преимущество простоты. Его особенно защищал Хэвисайд. Однако он уступает в общности методу, указанному в тексте, который может быть применен даже в тех случаях, когда токи текут не в замкнутых цепях.}

ГЛАВА IX

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

604.] Наше теоретическое исследование электродинамики мы начали с допущения, что система цепей, несущих электрические токи, является динамической системой, в которой токи могут рассматриваться как скорости и в которой координаты, соответствующие этим скоростям, не входят в уравнения движения. Из этого следует, что кинетическая энергия системы, поскольку она зависит от токов, является однородной квадратичной функцией токов, в которой коэффициенты зависят только от формы и относительного положения контуров. Допуская, что эти коэффициенты известны экспериментальным или каким-либо иным путем, мы вывели с помощью чисто динамического рассуждения законы индукции токов и электромагнитного притяжения. В этом исследовании мы ввели понятие электрокинетической энергии системы токов, электромагнитного количества движения контура и взаимного потенциала двух цепей.

Мы затем занялись изучением поля при помощи различных конфигураций вторичной цепи и, таким образом, мы пришли к концепции вектора $\mathfrak{A}$, имеющего определенную величину и направление в любой данной точке поля. Этот вектор мы назвали электромагнитным количеством движения в данной точке. Эту величину можно рассматривать как интеграл по времени от электродвижущей интенсивности, которая была бы получена в этой точке, если бы из поля были внезапно удалены все токи. Эта величина идентична с величиной, уже исследованной в параграфе 405 *), как вектор-потенциал магнитной индукции. Его составляющие, параллельные x, y и z, суть F, G и H. Электромагнитным количеством движения контура будет линейный интеграл от $\mathfrak{A}$, взятый вдоль контура.

Затем мы преобразовали линейный интеграл $\mathfrak{A}$ в поверхностный интеграл другого вектора $\mathfrak{B}$, составляющими которого являются a, b, c, и нашли, что явления индукции, вызванные движением какого-либо проводника, и явления электромагнитной силы могут быть выражены в зависимости от вектора $\mathfrak{B}$. Вектор $\mathfrak{B}$ мы назвали вектором магнитной индукции, так как его свойства идентичны со свойствами линий магнитной индукции, исследованными Фарадеем.

Мы также установили три системы уравнений: первая система (A) содержит уравнения магнитной индукции, выражающие ее как функцию электромагнитного количества движения. Вторая система (B)—уравнения электродвижущей интенсивности, выражающие ее зависимость от движения проводника через линии магнитной индукции и от скорости изменения электромагнитного количества движения. Третья система (C)—уравнения электромагнитной силы, выражающие ее зависимость от силы тока и магнитной индукции.

Во всех этих случаях ток понимается как действительный ток, который включает не только ток проводимости, но и ток, происходящий вследствие изменения электрического смещения.

Магнитная индукция $\mathfrak{B}$ есть величина, которую мы уже рассматривали в параграфе 400 *). В ненамагниченном теле она идентична с силой, действующей на единицу магнитного полюса; если же тело намагничено как постоянный магнит или вследствие индукции, это есть сила, которая действовала бы на единичный полюс,

---

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

если бы он был помещен в узкую щель в теле, со стенками, перпендикулярными к направлению намагничения. Составляющими вектора $\mathfrak{B}$ являются a, b, c.

Из уравнений (А), которыми определяются a, b, c, следует, что

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0.$$

В параграфе 403 *) было показано, что это является свойством магнитной индукции.

605.] Мы определили магнитную силу в магните в отличие от магнитной индукции как силу, действующую на единичный полюс, помещенный в узкую щель, вырезанную параллельно направлению намагничения. Эта величина обозначается через $\mathfrak{H}$, а ее слагающие — через α, β, γ.

Если $\mathfrak{J}$ есть интенсивность намагничения, а A, B, C — ее составляющие, тогда согласно параграфу 400 *)

$$\left.\begin{aligned} a&=\alpha+4\pi A,\\ b&=\beta+4\pi B,\\ c&=\gamma+4\pi C. \end{aligned}\right\}\ \text{Уравнения намагничения.} \qquad \text{(D)}$$

Мы можем называть эти уравнения уравнениями намагничения, они указывают, что в электромагнитной системе магнитная индукция $\mathfrak{B}$, рассматриваемая как вектор, является суммой (в смысле, придаваемом этому термину Гамильтоном) двух векторов — магнитной силы $\mathfrak{H}$ и намагничения $\mathfrak{J}$, помноженного на 4π, или

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{J}.$$

В некоторых веществах намагничение зависит от магнитной силы, и это выражается системой уравнений индуцированного магнетизма, данных в параграфах 426 и 435 *).

606.] Вплоть до этого момента нашего исследования мы все выводили из чисто динамических соображений без какой-либо ссылки на количественные резуль-

*) В настоящее издание этот параграф не вошел. (*Ред.*)

таты, полученные из опытов в области электричества или магнетизма.

Использование наших экспериментальных знаний до сих пор состояло лишь в том, что мы в абстрактных величинах, полученных чисто теоретическим путем, узнавали конкретные величины, известные из опыта; названия, которые мы давали этим величинам, подчеркивали их физический смысл, а не математические связи.

Этим путем мы установили существование электромагнитного количества движения $\mathfrak{A}$ как вектора, направление и величина которого изменяются от одной части пространства к другой, а отсюда мы вывели математическим путем магнитную индукцию $\mathfrak{B}$ как производный вектор. Однако мы не получили каких-либо данных для определения $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$ из распределения токов в поле. Для этой цели мы должны найти математическую связь между этими величинами и токами.

Мы начинаем с допущения существования постоянных магнитов, взаимное действие которых удовлетворяет принципу сохранения энергии. Мы не делаем никаких допущений в отношении законов магнитной силы за исключением тех, которые вытекают из этого принципа, а именно, что сила, действующая на магнитный полюс, является производной от потенциала.

Наблюдая взаимодействие между токами и магнитами, мы находим, что ток действует на магнит внешне так же, как действовал бы другой магнит, если его сила, форма и положение были бы соответственно подобраны, и что магнит действует на ток таким же образом, как действует другой ток. Эти наблюдения не нуждаются в том, чтобы их сопровождали измерениями сил. Их нельзя поэтому рассматривать как могущие дать числовые данные, но они весьма полезны для выяснения вопросов, подлежащих нашему рассмотрению.

Первый вопрос, который вызывают эти наблюдения, состоит в следующем. Поскольку магнитное поле, образованное электрическими токами, во многих отношениях аналогично магнитному полю постоянных магнитов, то походит ли оно на него также и в том отношении, что имеет потенциал?

Очевидность того, что электрическая цепь производит в окружающем пространстве в точности такие же магнитные действия, что и действия магнитного листка, ограниченного контуром цепи, была установлена в параграфах 482—485. Мы знаем, что в случае магнитного листка существует потенциал, который имеет определенное значение для всех точек, находящихся вне вещества самого листка, но что значения потенциала в двух соседних точках на противоположных сторонах листка отличаются на конечную величину.

Если магнитное поле вблизи электрического тока походит на магнитное поле, находящееся вблизи магнитного листка, то магнитный потенциал, найденный при помощи линейного интегрирования магнитной силы, будет одним и тем же для любых двух контуров интегрирования при условии, что один из этих контуров может быть превращен в другой при помощи непрерывного движения без пересечения цепи электрического тока.

Если же, однако, одна линия интегрирования не может быть преобразована в другую без пересечения тока, линейный интеграл магнитной силы вдоль одной линии будет отличаться от линейного интеграла вдоль другой линии на величину, зависящую от силы тока. Магнитный потенциал, производимый действием электрического тока, является, следовательно, функцией, имеющей бесконечный ряд значений с одной и той же разностью, причем каждое частное значение зависит от формы линии интегрирования. Внутри массы проводника не существует никакого магнитного потенциала.

607.] Допуская, что магнитное действие тока имеет магнитный потенциал такого рода, мы попытаемся выразить этот результат математически.

Прежде всего линейный интеграл магнитной силы вдоль некоторой замкнутой кривой равен нулю, если замкнутая кривая не охватывает электрического тока.

Далее, если ток проходит один и только один раз через поверхность, охватываемую замкнутой кривой в положительном направлении, то линейный интеграл имеет определенное значение, которое может быть принято в качестве меры силы тока, ибо, если замкнутая кривая изменяет свою форму каким-нибудь непрерывным образом, не пересекая тока, линейный интеграл остается неизменным.

В электромагнитных мерах линейный интеграл магнитной силы вдоль замкнутой кривой численно равен току, проходящему через поверхность, охватываемую замкнутой кривой, помноженному на 4π.

Если мы возьмем в качестве замкнутой кривой прямоугольник со сторонами dy и dz, то линейный интеграл магнитной силы вдоль параллелограмма будет:

$$\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right) dy\, dz.$$

Если u, v, w являются составляющими потока электричества *), то сила тока, проходящего через параллелограмм, будет:

$$u\, dy\, dz.$$

Умножая на 4π и приравнивая результат линейному интегралу, мы получаем уравнение

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}$$

и аналогично уравнения

$$\left.\begin{aligned} 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}, \end{aligned}\right\} \text{Уравнения электрических токов.} \qquad \text{(E)}$$

которые определяют величину и направление электрических токов, когда в каждой точке задана магнитная сила.

Если тока нет, эти уравнения эквивалентны условию, что

$$\alpha\, dx+\beta\, dy+\gamma\, dz= -D\Omega$$

*) Плотности тока. (*Ред.*)

или что магнитная сила является производной от магнитного потенциала во всех точках поля, где нет токов.

Дифференцируя уравнения (E) соответственно по x, y и z и складывая результаты, мы получаем уравнение

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

которое указывает, что ток, составляющими которого являются u, v, w, подчиняется условию движения несжимаемой жидкости и что он по необходимости должен протекать по замкнутым контурам.

Это уравнение верно только в том случае, если мы будем рассматривать u, v, w как составляющие электрического потока, который включает также изменения электрического смещения наряду с током проводимости.

Мы не располагаем прямыми экспериментальными доказательствами, относящимися к непосредственному электромагнитному действию токов, обусловленных изменением электрического смещения в диэлектриках, но чрезвычайная трудность согласования законов электромагнетизма с существованием незамкнутых электрических токов является одним из многих оснований, почему мы допускаем наличие мгновенных токов, возникающих в результате изменения смещения. Их важность сделается очевидной, когда мы подойдем к электромагнитной теории света ([13]).

608.] Мы теперь определили связи основных величин, играющих роль в явлениях, открытых Эрстедом, Ампером и Фарадеем. Для того чтобы увязать их с явлениями, описанными в первых частях этого трактата, необходимы некоторые дополнительные отношения.

Когда электродвижущая интенсивность действует на материальное тело, она вызывает в нем два электрических эффекта, которые Фарадей назвал *индукцией* и *проводимостью*, причем первый более обращает на себя внимание в диэлектриках, а второй—в проводниках.

В этом трактате статическая электрическая индукция измеряется тем, что мы назвали электрическим смещением, направленной величиной, или вектором, который мы обозначили через $\mathfrak{D}$, а его составляющие— через f, g, h.

В изотропных веществах смещение происходит в том же направлении, в котором действует вызывающая его электродвижущая интенсивность, и смещение пропорционально этой интенсивности, по меньшей мере для малых ее значений.

Это может быть выражено уравнением

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{4\pi}K\,\mathfrak{E}, \quad \text{Уравнение электрического смещения.} \qquad \text{(F)}$$

где K есть диэлектрическая емкость вещества.

В неизотропных веществах составляющие f, g, h электрического смещения $\mathfrak{D}$ являются линейными функциями составляющих P, Q, R электродвижущей интенсивности $\mathfrak{E}$. Форма уравнений электрического смещения для этого случая дана в параграфе 298.

Мы можем сказать, что в изотропных телах K является скалярной величиной, а в других телах она является линейной векторной функцией, действующей на вектор $\mathfrak{E}$ *).

609.] Другой эффект электродвижущей интенсивности есть проводимость. Законы проводимости как результата электродвижущей интенсивности были установлены Омом и объяснены во второй части этого трактата (параграф 241). Они могут быть резюмированы уравнением

$$\mathfrak{K}=C\mathfrak{E}, \qquad \text{Уравнение проводимости.} \qquad \text{(G)}$$

где $\mathfrak{E}$ есть электродвижущая интенсивность в данной точке, $\mathfrak{K}$ есть плотность тока проводимости, составляющими которого являются p, q, r, а C есть проводимость, которая в случае изотропных субстанций

*) Иначе говоря, величина K представляет собой в этом случае тензор. (*Ред.*)

является простой скалярной величиной, но в других случаях становится линейной векторной функцией. Форма этой функции в декартовых координатах приведена в параграфе 298.

610.] Одна из главных особенностей этого трактата состоит в принятии концепции, согласно которой истинный электрический ток $\mathfrak{C}$, тот, от которого зависят электромагнитные явления, нельзя отождествить с током проводимости, но что должно быть принято во внимание при исчислении общего движения электричества изменение во времени электрического смещения $\mathfrak{D}$, так что мы должны написать:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}, \quad \text{Уравнение истинных токов.} \tag{H}$$

или более подробно

$$\left.\begin{aligned} u &= p + \frac{df}{dt}, \\ v &= q + \frac{dg}{dt}, \\ w &= r + \frac{dh}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{H*}$$

611.] Так как обе величины $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{D}$ зависят от электродвижущей интенсивности $\mathfrak{E}$, мы можем выразить истинный ток $\mathfrak{C}$ как функцию электродвижущей интенсивности, именно:

$$\mathfrak{C} = \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt}\right) \mathfrak{E} \tag{I}$$

или в случае, когда C и K — постоянные:

$$\left.\begin{aligned} u &= CP + \frac{1}{4\pi} K \frac{dP}{dt}, \\ v &= CQ + \frac{1}{4\pi} K \frac{dQ}{dt}, \\ w &= CR + \frac{1}{4\pi} K \frac{dR}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{I*}$$

612.] Объемная плотность свободного электричества в некоторой точке получается из составляющих электрического смещения при посредстве уравнения

$$\rho = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}\,. \tag{J}$$

613.] Поверхностная плотность электричества будет:

$$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h', \tag{K}$$

где l, m, n являются направляющими косинусами нормали, проведенной от поверхности в среду, в которой f, g, h являются составляющими смещения, а l', m', n' являются направляющими косинусами нормали, проведенной от поверхности в среду, в которой составляющие смещения соответственно равны f', g', h'.

614.] Когда намагничение среды полностью обусловлено действием магнитной силы на нее, мы можем написать уравнение индуктированного намагничения:

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} \tag{L}$$

где μ есть коэффициент магнитной проницаемости, который может рассматриваться или как скалярная величина или же как линейная и векторная функция, действующая на вектор $\mathfrak{H}$, в зависимости от того, является среда изотропной или нет.

615.] Вышеприведенные отношения могут считаться основными для тех величин, которые мы рассматривали, они могут быть скомбинированы так, чтобы исключить некоторые из этих величин, но нашей задачей в данный момент не является достижение компактности в математических формулах, так как мы стремимся выразить любое отношение, о котором мы что-либо знаем. В этой стадии нашего исследования устранение величины, выражающей полезную идею, скорее было бы потерей, чем выигрышем.

Однако есть один результат, который мы можем получить путем комбинирования уравнений (A) и (E) и который имеет очень большое значение.

Если предположить, что в поле нет магнитов, за исключением электрических цепей, то различие, которое мы делали до сих пор между магнитной силой и магнитной индукцией, исчезает, так как эти величины отличаются одна от другой только в намагниченном веществе.

Согласно гипотезе Ампера, которая будет объяснена в параграфе 833, свойства того, что мы называем намагниченным веществом, связаны с молекулярными электрическими токами, так что наша теория намагничения применима только тогда, когда мы рассматриваем вещество в больших массах. Если же наши математические методы предположить способными учитывать то, что происходит внутри индивидуальных молекул, они не откроют ничего кроме электрических цепей, и мы найдем, что магнитная сила и магнитная индукция повсюду совпадают ([14]). Однако, для того чтобы мы имели возможность использовать по нашему желанию электростатическую или электромагнитную систему, мы сохраним коэффициент μ, помня, что его значение в электромагнитной системе равно единице.

616.] Согласно уравнениям (A) параграфа 591 составляющие магнитной индукции будут:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}. \end{aligned}\right\}$$

Согласно уравнениям (E) параграфа 607 составляющие электрического тока даны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}. \end{aligned}\right\}$$

Согласно нашей гипотезе a, b, c идентичны с $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ соответственно. Отсюда мы получаем {когда μ

постоянно}

$$4\pi\mu u = \frac{d^2G}{dx\,dy} - \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{d^2H}{dz\,dx}\,. \tag{1}$$

Если положить:

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \tag{2}$$

и *)

$$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right), \tag{3}$$

мы можем написать уравнение (1):

$$4\pi\mu u = \frac{dJ}{dx} + \nabla^2 F$$

и аналогично:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\mu v &= \frac{dJ}{dy} + \nabla^2 G,\\ 4\pi\mu w &= \frac{dJ}{dz} + \nabla^2 H. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если мы положим:

$$\left.\begin{aligned} F' &= \mu \iiint \frac{u}{r}\,dx\,dy\,dz,\\ G' &= \mu \iiint \frac{v}{r}\,dx\,dy\,dz,\\ H' &= \mu \iiint \frac{w}{r}\,dx\,dy\,dz, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{J}{r}\,dx\,dy\,dz, \tag{6}$$

где r есть расстояние данной точки от элемента (x, y, z), и интегрирования распространены по всему

*) Отрицательный знак поставлен здесь для того, чтобы сделать наши уравнения соответствующими тем, в которых применяются кватернионы.

пространству, то

$$\left.\begin{aligned} F &= F' - \frac{d\chi}{dx}, \\ G &= G' - \frac{d\chi}{dy}, \\ H &= H' - \frac{d\chi}{dz}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Величина χ исчезает из уравнений (A) и не соответствует никакому физическому явлению. Если мы предположим, что она повсюду равна нулю, то J тоже везде будет равно нулю, и уравнения (5) (опуская штрихи) дадут истинные значения составляющих вектора $\mathfrak{A}$.

617.] Мы поэтому можем принять в качестве определения вектора $\mathfrak{A}$, что это есть вектор-потенциал электрического тока, находящийся в том же самом отношении к электрическому току, в каком скалярный потенциал находится к материи, потенциалом которой он является, и получающийся подобным же процессом интегрирования, который может быть описан следующим образом.

Пусть от данной точки проведен вектор, представляющий по величине и направлению данный элемент электрического тока, разделенный на численное значение расстояния элемента от данной точки. Пусть это будет сделано по отношению к каждому элементу электрического тока. Результирующая всех таким образом найденных векторов есть потенциал всего тока. Так как ток есть векторная величина, его потенциал также является вектором.

Если распределение электрических токов дано, имеется одно и только одно распределение значений $\mathfrak{A}$, такое, при котором $\mathfrak{A}$ повсюду является конечным и непрерывным и удовлетворяет уравнениям

$$\nabla^2\mathfrak{A} = 4\pi\mu\mathfrak{C},$$
$$S\,.\,\nabla^2\mathfrak{A} = 0$$

и исчезает на бесконечном расстоянии от электрической системы. Величина $\mathfrak{A}$ дается уравнениями (5), которые могут быть написаны в кватернионной форме ([15]):

$$\mathfrak{A} = \mu \iiint \frac{\mathfrak{C}}{r}\, dx\, dy\, dz.$$

Кватернионные выражения электромагнитных уравнений

618.] В этом трактате мы старались избегать операций, требующих от читателя знания исчисления кватернионов. В то же самое время мы не колебались ввести понятие вектора, когда это было необходимо сделать.

При необходимости обозначить вектор при помощи символа мы применяли буквы готического алфавита, так как число различных векторов столь велико, что принятые Гамильтоном символы были бы сразу исчерпаны. Следовательно, в тех случаях, когда используется буква готического алфавита, она обозначает вектор Гамильтона и указывает не только величину вектора, но и его направление. Составляющие вектора обозначаются латинскими или греческими буквами.

Основными векторами, которые мы должны рассмотреть, являются:

	Символ вектора	Составляющие
Радиус-вектор точки	ρ	x, y, z
Электромагнитное количество движения в точке	$\mathfrak{A}$	F, G, H
Магнитная индукция	$\mathfrak{B}$	a, b, c
Полный электрический ток	$\mathfrak{C}$	u, v, w
Электрическое смещение	$\mathfrak{D}$	f, g, h
Электродвижущая интенсивность	$\mathfrak{E}$	P, Q, R
Механическая сила	F	X, Y, Z
Скорость точки	$\mathfrak{G}$ или $\dot{\rho}$	$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$
Магнитная сила	$\mathfrak{H}$	α, β, γ
Интенсивность намагничения . .	$\mathfrak{J}$	A, B, C
Ток проводимости	$\mathfrak{K}$	p, q, r

Мы также имеем следующие скалярные функции:

Электрический потенциал	Ψ
Магнитный потенциал (там где он существует)	Ω
Электрическая плотность	$\mathfrak{e}$
Плотность «магнитного вещества»	$\mathfrak{m}$

Кроме того, мы имеем следующие величины, указывающие на физические свойства среды в каждой точке:

C — проводимость электрических токов,

K — диэлектрическая индуктивная емкость,

μ — магнитная индуктивная емкость.

В изотропных средах эти величины являются просто скалярными функциями от ρ, но, вообще говоря, они являются линейными и векторными операторами векторных функций, к которым применяются; K и μ, повидимому, всегда являются самосопряженными функциями, а C, вероятно, также.

619.] Уравнения (A) магнитной индукции, из которых первое

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz},$$

могут быть теперь написаны в форме

$$\mathfrak{B} = V.\nabla\mathfrak{A},$$

где ∇ есть оператор

$$i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz},$$

а V указывает, что должна быть взята векторная часть результата этой операции. Так как $\mathfrak{A}$ подчиняется условию $S.\nabla\mathfrak{A} = 0$, $\nabla\mathfrak{A}$ является чистым вектором и символ V не нужен.

Уравнения (B) электродвижущей силы, из которых первое

$$P = c\dot{y} - b\dot{z} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx},$$

становятся:

$$\mathfrak{E} = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi.$$

Уравнения (C) механической силы, из которых первое

$$x = cv - bw - eP - m\frac{d\Omega}{dx},$$

будут:

$$\mathfrak{F} = V.\mathfrak{C}\mathfrak{B} + e\mathfrak{E} - m\nabla\Omega.$$

Уравнения (D) намагничения, из которых первое

$$a = \alpha + 4\pi A,$$

становятся:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}.$$

Уравнения (E) электрических токов, из которых первое

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},$$

примут форму:

$$4\pi\mathfrak{C} = V.\nabla\mathfrak{H}.$$

Уравнение тока проводимости согласно закону Ома будет:

$$\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}.$$

Уравнение электрического смещения

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}K\mathfrak{E}.$$

Уравнение полного тока, обусловленного как изменением электрического смещения, так и проводимостью, будет иметь вид

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}.$$

Если намагничение возникает в результате магнитной индукции, то

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}.$$

Мы также имеем для определения электрической объемной плотности соотношение

$$\mathfrak{e} = S.\nabla\mathfrak{D}.$$

Для определения магнитной объемной плотности:

$$\mathfrak{m} = S.\nabla\mathfrak{J}.$$

Когда магнитная сила имеет потенциал

$$\mathfrak{H} = -\nabla\Omega \text{ (}^{16}\text{)}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ IX

{Выражения (5) не всегда являются точными, если электромагнитное поле содержит вещества с различными магнитными проницаемостями, так как в этом случае на поверхности раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями, вообще говоря, будет свободный магнетизм, это добавит некоторые члены к выражению векторного потенциала. Граничные условия на поверхности, разделяющей две среды, обладающие магнитными проницаемостями μ_1, μ_2, где F_1, G_1, H_1 и F_2, G_2, H_2 обозначают составляющие векторного потенциала на двух сторонах поверхности раздела, l, m, n — направляющие косинусы нормали к этой поверхности, суть:

1) вследствие непрерывности нормальной составляющей индукции

$$l\left(\frac{dH_1}{dy}-\frac{dG_1}{dz}\right)+m\left(\frac{dF_1}{dz}-\frac{dH_1}{dx}\right)+n\left(\frac{dG_1}{dx}-\frac{dF_1}{dy}\right)=$$
$$=l\left(\frac{dH_2}{dy}-\frac{dG_2}{dz}\right)+m\left(\frac{dF_2}{dz}-\frac{dH_2}{dx}\right)+n\left(\frac{dG_2}{dx}-\frac{dF_2}{dy}\right);$$

2) вследствие непрерывности составляющей магнитной силы вдоль поверхности раздела

$$\frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{dH_1}{dy}-\frac{dG_1}{dz}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{dH_2}{dy}-\frac{dG_2}{dz}\right)}{l}=$$
$$=\frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{dF_1}{dz}-\frac{dH_1}{dx}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{dF_2}{dz}-\frac{dH_2}{dx}\right)}{m}=$$
$$=\frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{dG_1}{dx}-\frac{dF_1}{dy}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{dG_2}{dx}-\frac{dF_2}{dy}\right)}{n}.$$

Выражения (5), вообще говоря, не удовлетворяют обоим этим условиям на поверхности.

Поэтому лучше рассматривать F, G, H как данные уравнениями

$$\nabla^2 F=4\pi\mu u,$$
$$\nabla^2 G=4\pi\mu v,$$
$$\nabla^2 H=4\pi\mu w$$

и предыдущими предельными условиями}.

Повидимому, не кажется обоснованным допущение того, что Ψ в уравнениях (B) представляет электростатический потенциал, когда проводники движутся, так как, выводя эти уравнения, Максвелл опускает член

$$-\frac{d}{ds}\left(F\frac{dx}{dt}+G\frac{dy}{dt}+H\frac{dz}{dt}\right),$$

исчезающий при интегрировании вдоль замкнутой цепи. Если мы вставим этот член, тогда Ψ более уже не является электростатическим потенциалом, но является суммой этого потенциала и

$$F\frac{dx}{dt}+G\frac{dy}{dt}+H\frac{dz}{dt}.$$

Это имеет важное применение в проблеме, которая привлекла много внимания, а именно к проблеме сферы, вращающейся с угловой скоростью ω около вертикальной оси в равномерном магнитном поле, где магнитная сила вертикальна и равна c. Уравнения (B) в этом случае становятся, предполагая, что сфера находится в установившемся состоянии,

$$P=c\omega x-\frac{d\Psi}{dx},$$

$$Q=c\omega y-\frac{d\Psi}{dy},$$

$$R=\quad -\frac{d\Psi}{dz}.$$

Так как сфера является проводником и находится в установившемся состоянии и так как $\frac{P}{\sigma}$, $\frac{Q}{\sigma}$, $\frac{R}{\sigma}$ являются составляющими тока,

$$\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}=0,$$

откуда

$$2c\omega=\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\frac{d^2\Psi}{dz^2}.$$

Это уравнение обычно интерпретировалось как выражающее, что в сфере существует распределение электричества, объемная плотность которого равна $-c\omega/2\pi$, но это допустимо только в том случае, если считать, что Ψ есть электростатический потенциал.

Если в соответствии с соображениями, при посредстве которых были выведены уравнения (B), мы допустим, что Φ есть электростатический потенциал, то

$$\Psi=\Phi+F\frac{dx}{dt}+G\frac{dy}{dt}+H\frac{dz}{dt},$$

или в рассматриваемом случае

$$\Psi = \Phi + \omega (Gx - Fy).$$

Тогда, поскольку

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)(Gx - Fy) = 2\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right) = 2c$$

и

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} = 2\,c\omega,$$

имеем

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} = 0,$$

т. е. в объеме сферы не существует распределения свободного электричества.

Поэтому в уравнениях электромагнитного поля нет ничего, что могло бы нас привести к предположению, что вращающаяся сфера содержит свободное электричество.

Уравнения электромагнитного поля, выраженные в полярных и цилиндрических координатах

Если F, G, H являются составляющими некоторого потенциала соответственно вдоль радиуса-вектора, меридиана и широтной параллели, a, b, c — составляющие магнитной индукции, α, β, γ — составляющие магнитной силы, u, v, w — составляющие силы тока в этих направлениях, тогда мы можем легко доказать, что

$$a = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left\{\frac{d}{d\theta}(r\sin\theta H) - \frac{d}{d\varphi}(rG)\right\},$$

$$b = \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{dF}{d\varphi} - \frac{d}{dr}(r\sin\theta H)\right\},$$

$$c = \frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}(rG) - \frac{dF}{d\theta}\right\};$$

$$4\pi u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{d}{d\theta}(r\sin\theta\gamma) - \frac{d}{d\varphi}(r\beta)\right\},$$

$$4\pi v = \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{d\alpha}{d\varphi} - \frac{d}{dr}(r\sin\theta\gamma)\right\},$$

$$4\pi w = \frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}(r\beta) - \frac{d\alpha}{d\theta}\right\}.$$

Если P, Q, R являются составляющими электродвижущей напряженности вдоль радиуса-вектора, меридиана и широтной параллели, то

$$\frac{da}{dt}=-\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{d}{d\theta}(r\sin\theta R)\frac{d}{d\varphi}(rQ)\right\},$$

$$\frac{db}{dt}=-\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{dP}{d\varphi}-\frac{d}{r}(r\sin\theta R)\right\},$$

$$\frac{dc}{dt}=-\frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}(rQ)-\frac{dP}{d\theta}\right\}.$$

Если цилиндрические координаты будут ρ, θ, z и если F, G, H являются составляющими вектора-потенциала, a, b, c — составляющие магнитной индукции; α, β, γ — составляющие магнитной силы и u, v, w — составляющие тока в этих направлениях, то

$$a=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{dH}{d\theta}-\frac{d}{dz}(\rho, G)\right\}. \qquad 4\pi u=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{d\gamma}{d\theta}-\frac{d}{dz}(\rho\beta)\right\},$$

$$b=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{d\rho}, \qquad 4\pi v=\frac{da}{dz}-\frac{d\gamma}{d\rho},$$

$$c=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{d}{d\rho}(\rho G)-\frac{dF}{d\theta}\right\}; \qquad 4\pi w=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{d}{d\rho}(\rho\beta)-\frac{da}{d\theta}\right\}.$$

Если P, Q, R — составляющие электродвижущей напряженности, параллельные ρ, θ, z, то

$$\frac{da}{dt}=-\frac{1}{\rho}\left\{\frac{dR}{d\theta}-\frac{d}{dz}(\rho Q)\right\},$$

$$\frac{db}{dt}=-\left\{\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{d\rho}\right\},$$

$$\frac{dc}{dt}=-\frac{1}{\rho}\left\{\frac{d}{d\rho}(\rho Q)-\frac{dP}{d\theta}\right\}. \}$$

ГЛАВА X

РАЗМЕРНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ

620.] Каждая электромагнитная величина может быть определена, исходя из основных единиц *длины*, *массы* и *времени*. Если мы начнем с определения единицы количества электричества, мы можем определить единицы любой другой электромагнитной величины в силу уравнений, в которые они входят вместе с количествами электричества. Полученная таким образом система единиц называется *электростатической системой*.

Если, с другой стороны, мы будем исходить из определения единицы магнитного полюса, мы получим другую систему единиц того же самого ряда величин. Эта система единиц не совпадает с первой системой и называется *электромагнитной системой*.

Мы начнем с установления тех отношений между различными единицами, которые общи обеим системам, и затем разработаем таблицу размерностей единиц соответственно для каждой системы.

621.] Расположим парами основные величины, подлежащие рассмотрению. В трех первых парах произведение двух величин в каждой паре есть количество энергии или работы. В остальных парах произведение элементов каждой пары есть количество энергии, отнесенное к единице объема.

ПЕРВЫЕ ТРИ ПАРЫ

Электростатическая пара	Символ
(1) Количество электричества	e
(2) Электродвижущая сила или электрический потенциал	E
Магнитная пара	
(3) Количество свободного магнетизма или сила полюса	m
(4) Магнитный потенциал	Ω
Электрокинетическая пара	
(5) Электрокинетическое количество движения цепи	p
(6) Электрический ток	C

ВТОРЫЕ ТРИ ПАРЫ

Электростатическая пара	
(7) Электрическое смещение (измеренное по поверхностной плотности) . .	$\mathfrak{D}$
(8) Электродвижущая интенсивность . .	$\mathfrak{E}$
Магнитная пара	
(9) Магнитная индукция	$\mathfrak{B}$
(10) Магнитная сила	$\mathfrak{H}$
Электрокинетическая пара	
(11) Сила электрического тока в некоторой точке	$\mathfrak{C}$
(12) Вектор-потенциал электрических токов	$\mathfrak{A}$

622.] Между этими величинами существуют следующие отношения.

Прежде всего, поскольку размерность энергии равна $\left[\frac{L^2M}{T^2}\right]$, а размерность энергии, отнесенная к единице объема, $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$, мы имеем следующие уравнения размерностей:

$$[eE] = [m\Omega] = [pC] = \left[\frac{L^2M}{T^2}\right], \tag{1}$$

$$[\mathfrak{D}\mathfrak{E}] = [\mathfrak{B}\mathfrak{H}] = [\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \left[\frac{M}{LT^2}\right]. \tag{2}$$

Во-вторых, так как e, p и $\mathfrak{A}$ являются временными интегралами от C, E и $\mathfrak{C}$ соответственно,

$$\left[\frac{e}{C}\right]=\left[\frac{p}{E}\right]=\left[\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\right]=[T]. \tag{3}$$

В-третьих, так как E, Ω и p являются линейными интегралами соответственно от $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{A}$,

$$\left[\frac{E}{\mathfrak{E}}\right]=\left[\frac{\Omega}{\mathfrak{H}}\right]=\left[\frac{p}{\mathfrak{A}}\right]=[L]\ ^{*)}. \tag{4}$$

И, наконец, так как e, C и m являются поверхностными интегралами соответственно от $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{B}$,

$$\left[\frac{e}{\mathfrak{D}}\right]=\left[\frac{C}{\mathfrak{C}}\right]=\left[\frac{m}{\mathfrak{B}}\right]=[L^2]. \tag{5}$$

623.] Эти пятнадцать уравнений не являются независимыми, и для того чтобы вывести размерности заключающихся в них двенадцати единиц, нам требуется еще одно дополнительное уравнение. Если, однако, мы примем e или m как независимые единицы, мы можем вывести размерности остальных как функции каждой из этих единиц.

$$(1)\ [e]=[e]=\left[\frac{L^2M}{mT}\right]. \qquad (2)\ [E]=\left[\frac{L^2M}{eT^2}\right]=\left[\frac{m}{T}\right].$$

$$(3)\ \text{и}\ (5)\ [p]=[m]=\left[\frac{L^2M}{eT}\right]=[m].$$

$$(4)\ \text{и}\ (6)\ [C]=[\Omega]=\left[\frac{e}{T}\right]=\left[\frac{L^2M}{mT^2}\right].$$

$$(7)\ [\mathfrak{D}]=\left[\frac{e}{L^2}\right]=\left[\frac{M}{mT}\right]. \ (8)\ [\mathfrak{E}]=\left[\frac{LM}{eT^2}\right]=\left[\frac{m}{LT}\right].$$

$$(9)\ [\mathfrak{B}]=\left[\frac{M}{eT}\right]=\left[\frac{m}{L^2}\right]. \ (10)\ [\mathfrak{H}]=\left[\frac{e}{LT}\right]=\left[\frac{LM}{mT^2}\right].$$

$$(11)\ [\mathfrak{C}]=\left[\frac{e}{L^2T}\right]=\left[\frac{M}{mT^2}\right]. \ (12)\ [\mathfrak{A}]=\left[\frac{LM}{eT}\right]=\left[\frac{m}{L}\right].$$

---

*) [Мы имеем также $\left[\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\right]=[L]$.]

624.] Отношения первых десяти из этих величин могут быть представлены при помощи следующего распределения:

$$\begin{array}{cccc|cccc} e, & \mathfrak{D}, & \mathfrak{H}, & C \text{ и } \Omega & E, & \mathfrak{E}, & \mathfrak{B}, & m \text{ и } p \\ m \text{ и } p, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{E}, & E & C \text{ и } \Omega, & \mathfrak{H}, & \mathfrak{D}, & e \end{array}$$

Величины, расположенные в первой строке, суть производные от e путем тех же самых операций, при помощи которых соответствующие количества во второй строке получены из m. Следует заметить, что порядок величин в первой строке является в точности обратным порядку второй строки. Первые четыре величины в каждой строке имеют основной символ в числителе, вторые четыре имеют его в знаменателе.

Все приведенные выше отношения остаются справедливыми, какова бы ни была выбрана система единиц.

625.] Единственными системами, имеющими научную ценность, являются электростатическая и электромагнитная системы ([17]). Электростатическая система основывается на определении единицы количества электричества и может быть выведена из уравнения

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{L^2},$$

которое выражает, что результирующая электрической напряженности $\mathfrak{E}$ в любой точке, обусловленная действием количества электричества e на расстоянии L, находится путем деления e на L^2. Подставляя в уравнения размерностей (1) и (8), мы находим:

$$\left[\frac{LM}{eT^2}\right] = \left[\frac{e}{L^2}\right], \quad \left[\frac{m}{LT}\right] = \left[\frac{M}{mT}\right],$$

откуда

$$[e] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}], \quad m = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$$

в электростатической системе.

Электромагнитная система основывается на подобном же определении единицы силы магнитного полюса, которое приводит к уравнению

$$\mathfrak{H} = \frac{m}{L^2},$$

откуда

$$\left[\frac{e}{LT}\right] = \left[\frac{M}{eT}\right], \quad \left[\frac{LM}{mT^2}\right] = \left[\frac{m}{L^2}\right]$$

и

$$[e] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}], \quad [m] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$$

в электромагнитной системе. Из этих результатов мы находим размерности других величин.

626.] *Таблица размерностей*:

	Символ	Размерности в электростатической системе	Размерности в электромагнитной системе
Количество электричества	e	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$
Линейный интеграл электродвижущей напряженности	E	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$
Количество магнетизма Электрокинетическое количество движения цепи	$\left\{\begin{matrix} m \\ p \end{matrix}\right\}$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Электрический ток Магнитный потенциал	$\left\{\begin{matrix} C \\ \Omega \end{matrix}\right\}$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Электрическое смещение Поверхностная плотность	$\mathfrak{D}$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$
Электродвижущая интенсивность	$\mathfrak{E}$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$
Магнитная индукция	$\mathfrak{B}$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Магнитная сила	$\mathfrak{H}$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Сила тока в некоторой точке	$\mathfrak{C}$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Вектор-потенциал	$\mathfrak{A}$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$

627.] Мы уже рассматривали произведения пар этих количеств в том порядке, в котором они представлены. Их отношения в некоторых случаях также имеют научное значение. Так:

	Символ	Размерности в	
		электростатической системе	электромагнитной системе
$\frac{e}{E}$ = Емкость конденсатора	q	$[L]$	$\left[\frac{T^2}{L}\right]$
$\frac{p}{C}$ = Коэффициент самоиндукции цепи или электромагнитная емкость	L	$\left[\frac{T^2}{L}\right]$	$[L]$
$\frac{D}{\mathfrak{E}}$ = Удельная индуктивная емкость диэлектрика	K	$[0]$	$\left[\frac{T^2}{L^2}\right]$
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$ = Магнитная индуктивная емкость	μ	$\left[\frac{T^2}{L^2}\right]$	$[0]$
$\frac{\varepsilon}{C}$ = Сопротивление проводника	R	$\left[\frac{T}{L}\right]$	$\left[\frac{L}{T}\right]$
$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{C}}$ = Удельное сопротивление вещества	r	$[T]$	$\left[\frac{L^2}{T}\right]$

628.] Если единицы длины, массы и времени являются теми же самыми в обеих системах, число электростатических единиц электричества, содержащихся в одной электромагнитной единице, численно равняется некоторой скорости, абсолютная величина которой не зависит от величины примененных основных единиц. Эта скорость является существенной физической величиной, которую мы будем обозначать символом v.

Число электростатических единиц в одной электромагнитной единице

Для e, C, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{C}$ ...... v.

Для m, p, E, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{A}$ ...... $\frac{1}{v}$.

Для электростатической емкости, диэлектрической индуктивной емкости и проводимости... v^2.

Для электромагнитной емкости, магнитной индуктивной емкости и сопротивления... $\frac{1}{v^2}$.

В параграфах 768—780 будут даны несколько методов определения скорости v.

В электростатической системе удельная диэлектрическая индуктивная емкость воздуха принимается равной единице. Следовательно, эта величина в электромагнитной системе представлена величиной $\frac{1}{v^2}$.

В электромагнитной системе удельная магнитная индуктивная емкость воздуха принимается равной единице. Следовательно, в электростатической системе эта величина представлена $\frac{1}{v^2}$.

Практическая система электрических единиц

629.] Из двух систем единиц электромагнитная система имеет большее применение у электриков-практиков, занимающихся электромагнитными телеграфами. Однако, если использовать в качестве единиц длины, времени и массы те единицы, которые обычно применяются в других отраслях науки, например, метр или сантиметр, секунду и грамм, то единицы сопротивления и электродвижущей силы будут так малы, что для выражения величин, встречающихся на практике, должны были бы применяться громадные числа, а единицы количества электричества и емкости, наоборот, будут столь велики, что только исключительно малые дробные части их могли бы когда-нибудь встретиться на практике. Электрики-практики поэтому приняли ряд электрических единиц, выведенных по электромагнитной системе от большой единицы длины и малой единицы массы.

Единица длины, примененная для этой цели, содержит десять миллионов метров, или приблизительно длину четверти земного меридиана.

Единица времени, как и прежде,—одна секунда.

Единица массы — 10^{-11} грамма, или одна стомиллионная часть миллиграмма.

Электрические единицы, выведенные из этих основных единиц, были названы по именам выдающихся исследователей в области электричества. Так, практическая единица сопротивления, называемая *омом*, представлена катушкой сопротивления, изготовленной Британской ассоциацией и описанной в параграфе 340 *). В электромагнитной системе она выражается скоростью в 10 000 000 метров в секунду.

Практическая единица электродвижущей силы называется *вольтом* и мало отличается от электродвижущей силы батареи Даниэля.

Латимер Клерк (Clark) недавно изобрел весьма постоянный элемент, электродвижущая сила которого почти точно равна 1,454 вольта.

Практическая единица емкости называется *фарадой*. Количество электричества, протекающее через один ом при электродвижущей силе в один вольт в течение одной секунды, равно заряду, который получается в конденсаторе с емкостью в одну фараду при электродвижущей силе в один вольт. Применение этих наименований было на практике найдено более удобным, чем непрерывное повторение слов «электромагнитная единица» с дополнительным указанием отдельных основных единиц, на которых они базируются.

При необходимости измерять очень большие величины образуются крупные единицы путем умножения первоначальной единицы на один миллион, для чего перед ее наименованием ставится приставка *мега*.

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

Равным образом путем прибавления приставки *микро* образуется малая единица — одна миллионная часть первоначальной единицы.

Нижеследующая таблица дает значения этих практических единиц в различных системах, которые были приняты в разное время ([18]).

Основные единицы	Применяемые на практике системы	Доклад Британской ассоциации, 1863	Томсон	Вебер
Длина	$^1/_4$ *земного меридиана*	*метр*	*сантиметр*	*миллиметр*
Время	*секунда*	*секунда*	*секунда*	*секунда*
Масса	10^{-11} *грамма*	*грамм*	*грамм*	*миллиграмм*
Сопротивление	ом	10^7	10^9	10^{10}
Электродвижущая сила	вольт	10^5	10^8	10^{11}
Емкость	фарада	10^{-7}	10^{-9}	10^{-10}
Количество электричества	фарада (заряженная до 1 вольта)	10^{-2}	10^{-1}	10

ГЛАВА XI

ОБ ЭНЕРГИИ И НАПРЯЖЕНИЯХ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Электростатическая энергия

630.] Энергия всякой системы может быть разделена на *потенциальную* энергию и *кинетическую* энергию. Потенциальная энергия, имеющая своей причиной электризацию, уже рассматривалась в параграфе 85 *). Ее можно представить соотношением

$$W=\frac{1}{2}\sum (e\Psi), \tag{1}$$

где e есть заряд электричества в том месте, где электрический потенциал равен Ψ, а суммирование должно быть распространено на все точки, в которых находятся электрические заряды.

Если f, g, h являются составляющими электрического смещения, количество электричества в элементе объема $dx\,dy\,dz$ будет:

$$e=\left(\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}\right)dx\,dy\,dz \tag{2}$$

и

$$W=\frac{1}{2}\iiint\left(\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}\right)\Psi\,dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

где интегрирование должно быть распространено на все пространство ([19]).

---

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

631.] Интегрируя это выражение по частям и вспоминая, что когда расстояние r от данной точки конечной электрической системы становится бесконечным, потенциал Ψ становится бесконечно малой величиной порядка r^{-1}, а f, g, h — бесконечно малыми порядка r^{-2}, получим:

$$W=-\frac{1}{2}\iiint\left(f\frac{d\Psi}{dx}+g\frac{d\Psi}{dy}+h\frac{d\Psi}{dz}\right)dx\,dy\,dz, \qquad (4)$$

где интегрирование должно быть распространено на все пространство.

Если мы теперь составляющие электродвижущей напряженности обозначим через P, Q, R вместо $-\frac{d\Psi}{dx}$, $-\frac{d\Psi}{dy}$, $-\frac{d\Psi}{dz}$, то найдем:

$$W=\frac{1}{2}\iiint(Pf+Qg+Rh)\,dx\,dy\,dz\text{ *)}. \qquad (5)$$

Отсюда видно, что электростатическая энергия всего поля не изменится, если мы предположим, что она находится в каждой точке поля, где существуют электрическая сила и электрическое смещение, а не сосредоточена в местах нахождения свободного электричества.

---

*) {Это выражение для электростатической энергии было выведено в первом томе, исходя из допущения, что электростатическая сила имеет потенциал. Это допущение не будет справедливым, если часть электродвижущей интенсивности имеет своей причиной электромагнитную индукцию. Если же, однако, мы примем ту точку зрения, что эта часть энергии возникает из поляризованного состояния диэлектрика и на единицу объема равняется $\frac{1}{8\pi K}(f^2+g^2+h^2)$, потенциальная энергия в этом случае будет зависеть только от поляризации диэлектрика, независимо от того, каким образом эта поляризация получена. Поскольку

$$\frac{f}{4\pi K}=P, \quad \frac{g}{4\pi K}=Q, \quad \frac{h}{4\pi K}=R,$$

энергия, следовательно, равна $\frac{1}{2}(Pf+Qg+Rh)$ на единицу объема.}

Энергия в единице объема равна половине произведения электродвижущей силы и электрического смещения, помноженной на косинус угла, образуемого этими векторами.

На языке кватернионов это будет $-\frac{1}{2}S.\mathfrak{E}\mathfrak{D}$.

Магнитная энергия

632.] *) Мы можем рассматривать энергию, обусловленную намагничением, тем же путем, которым мы шли в случае электризации (параграф 85). Если A, B, C являются составляющими намагничения, а α, β, γ — составляющими магнитной силы, потенциальная энергия системы магнитов согласно параграфу 369 будет:

$$-\frac{1}{2}\iiint(A\alpha+B\beta+C\gamma)\,dx\,dy\,dz, \tag{6}$$

причем интегрирование распространяется на пространство, занятое намагниченной материей. Эта часть энергии, однако, будет включена в кинетическую энергию в той форме, которую мы сейчас ей придадим.

633]. В случае, если нет электрических токов, мы можем преобразовать указанное выражение следующим образом.

Мы знаем, что

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0. \tag{7}$$

Отсюда согласно параграфу 97, если

$$\alpha=-\frac{d\Omega}{dx},\quad \beta=-\frac{d\Omega}{dy},\quad \gamma=-\frac{d\Omega}{dz}, \tag{8}$$

как это всегда имеет место в магнитных явлениях при отсутствии токов, то

$$\iiint(a\alpha+b\beta+c\gamma)\,dx\,dy\,dz=0, \tag{9}$$

*) См. приложение I в конце этой главы.

причем интеграл распространяется на все пространство, или

$$\iiint \{(\alpha + 4\pi A)\,\alpha + (\beta + 4\pi B)\beta + (\gamma + 4\pi C)\gamma\}\, dx\, dy\, dz = 0. \tag{10}$$

Отсюда энергия, относящаяся к магнитной системе, будет:

$$-\frac{1}{2}\iiint (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \frac{1}{8\pi}\iiint (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, dx\, dy\, dz,$$
$$= \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{H}^2\, dx\, dy\, dz. \tag{11}$$

Электрокинетическая энергия

634.] В параграфе 578 мы уже выразили кинетическую энергию системы токов в форме

$$T = \frac{1}{2}\sum (pi), \tag{12}$$

где p есть электромагнитное количество движения цепи, а i есть сила тока, текущего по этой цепи, и суммирование распространено по всей цепи.

Но мы доказали в параграфе 590, что p может быть выражено как линейный интеграл, имеющий форму

$$p = \int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right) ds, \tag{13}$$

где F, G, H являются составляющими электромагнитного количества движения $\mathfrak{A}$ в точке (x, y, z), и интегрирование должно быть распространено вдоль замкнутой цепи s. Мы, следовательно, находим:

$$T = \frac{1}{2}\sum i\int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right) ds. \tag{14}$$

Если u, v, w являются составляющими плотности тока в некоторой точке проводящей цепи и если S

есть поперечное сечение цепи, тогда мы можем написать:

$$i\,\frac{dx}{ds}=uS,\quad i\,\frac{dy}{ds}=vS,\quad i\,\frac{dz}{ds}=wS. \tag{15}$$

Так как объем $S\,ds=dx\,dy\,dz$, то мы находим:

$$T=\frac{1}{2}\iiint(Fu+Gv+Hw)\,dx\,dy\,dz, \tag{16}$$

где интегрирование должно быть распространено на все части пространства, где имеются электрические токи.

635.] Подставим теперь вместо u, v, w их значения, данные уравнениями электрических токов (E) (параграф 607) как функции составляющих α, β, γ магнитной силы. Мы тогда имеем:

$$T=\frac{1}{8\pi}\iiint\left\{F\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)+G\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)+\right.$$
$$\left.+H\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)\right\}dx\,dy\,dz, \tag{17}$$

где интегрирование распространяется на часть пространства, заключающую все токи.

Если мы проинтегрируем это по частям и будем иметь в виду, что на большом расстоянии r от системы α, β, γ будут порядка r^{-3} {и что на поверхности, разделяющей две среды, F, G, H и тангенциальная магнитная сила непрерывны}, мы найдем, что в том случае, когда интегрирование распространено на все пространство, выражение (17) сведется к

$$T=\frac{1}{8\pi}\iiint\left\{\alpha\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)+\beta\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)+\right.$$
$$\left.+\gamma\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)\right\}dx\,dy\,dz. \tag{18}$$

Согласно уравнениям (A) магнитной индукции параграфа 591 мы можем подставить вместо выражений в круглых скобках составляющие магнитной индукции

a, b, c, так что кинетическая энергия может быть написана в виде

$$T = \frac{1}{8\pi}\iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma)\, dx\, dy\, dz, \tag{19}$$

где интегрирование должно быть распространено на все части пространства, в которых магнитная сила и магнитная индукция имеют значения, отличающиеся от нуля.

Выражение в скобках в этом интеграле является произведением магнитной индукции на составляющую магнитной силы в направлении магнитной индукции.

На языке кватернионов это может быть написано более просто $-S.\mathfrak{B}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ есть магнитная индукция, составляющими которой являются a, b, c, а $\mathfrak{H}$ есть магнитная сила, составляющими которой являются α, β, γ.

636.] Электрокинетическая энергия системы может быть выражена или как интеграл, взятый по расположению электрических токов, или же как интеграл, распространенный на все части поля, в которых существует магнитная сила. Первый интеграл, однако, является естественным выражением теории, предполагающей, что токи непосредственно влияют один на другой на расстоянии, в то время как второй относится к теории, которая пытается объяснить действие между токами при помощи какого-то промежуточного действия в пространстве между ними. Так как в этом трактате мы приняли последний метод исследования, мы, естественно, принимаем, что второе выражение кинетической энергии имеет больший смысл.

Согласно нашей гипотезе мы допускаем, что кинетическая энергия существует везде, где есть магнитная сила, т. е., вообще говоря, в любой части поля. Количество этой энергии на единицу объема есть $-\frac{1}{8\pi}S.\mathfrak{B}\mathfrak{H}$, и эта энергия существует в форме какого-то движения материи в любой части пространства.

Когда мы приступим к рассмотрению открытия Фарадея, касающегося действия магнетизма на поляризованный свет, мы приведем соображения, дающие основание предполагать, что там, где имеются магнитные силовые линии, имеется вращательное движение материи около этих линий (см. параграф 821).

Сравнение магнитной и электрокинетической энергий

637.] В параграфе 423 *) мы нашли, что взаимная потенциальная энергия двух магнитных листков, имеющих силы φ и φ' и ограниченных соответственно замкнутыми кривыми s и s', равна:

$$-\varphi\varphi' \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds',$$

где ε есть угол между направлениями ds и ds', а r есть расстояние между ними. Мы также нашли в параграфе 521 *), что взаимная энергия двух цепей s и s', по которым текут токи i и i', равна

$$ii' \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds'.$$

Если i и i' равны, соответственно, φ и φ', механическое действие между магнитными листками равно механическому действию между соответствующими электрическими токами и имеет то же самое направление. В случае магнитных листков сила стремится уменьшить их взаимную потенциальную энергию, в случае токов она стремится увеличить их взаимную энергию, потому что энергия эта—кинетическая.

Ни при каком расположении намагниченной материи нельзя создать систему, соответствующую во всех отношениях электрической цепи, так как потенциал магнитной системы однозначен в любой точке пространства, в то время как потенциал в электрической системе многозначен. Но всегда возможно при помощи соответствующего расположения бесконечно малых электрических цепей создать систему, во всех отношениях соответствующую любой магнитной системе, при условии,

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

что линия интегрирования, которой мы следуем при исчислении потенциала, ни в коем случае не проходит через какую-либо из этих малых цепей. Более подробно это будет изложено в параграфе 833.

Действие магнитов на расстоянии совершенно идентично с действием электрических токов. Мы поэтому попытаемся вывести оба явления от одной и той же причины, и так как мы не можем объяснить электрические токи при помощи магнитов, мы должны принять другую альтернативу и объяснить магниты при помощи молекулярных электрических токов.

638.] В нашем исследовании магнитных явлений в части III *) этого трактата мы не делали попыток объяснять магнитное действие на расстоянии, а рассматривали это действие как фундаментальный факт, установленный опытом. Мы, следовательно, допускали, что энергия магнитной системы является потенциальной энергией и что эта энергия *уменьшается*, когда части системы подвергаются действию магнитных сил.

Если , однако, магнитные свойства тел считать происходящими от электрических токов, циркулирующих в их молекулах, то энергия магнитов будет кинетической, а сила, действующая между ними, будет стремиться двигать их в направлении, в котором кинетическая энергия *увеличивается*, если силы токов поддерживаются постоянными.

Этот способ объяснения магнетизма требует, чтобы мы отбросили также метод, которому следовали в части III, где мы рассматривали магнит как непрерывное и однородное тело, мельчайшие части которого имеют те же магнитные свойства, что и целое.

Мы должны сейчас рассматривать магнит, как содержащий конечное, хотя и весьма большое число электрических токов, так что он имеет существенно молекулярное—отличное от непрерывного—строение.

Если мы предположим, что наш математический аппарат настолько груб, что наша линия интегриро-

*) Эта часть в настоящее издание не вошла. (*Ред.*)

вания не может пронизать молекулярной цепи и что в нашем элементе объема заключено громадное количество магнитных молекул, мы придем к результатам, похожим на результаты части III. Однако, если считать наш аппарат имеющим более тонкое строение и способным исследовать все, что происходит внутри молекул, мы должны отказаться от старой теории магнетизма и принять теорию Ампера, которая не допускает существования других магнитов, кроме тех, которые состоят из электрических токов.

Мы, следовательно, должны рассматривать как магнитную, так и электромагнитную энергии как кинетические энергии и должны приписывать им надлежащие знаки, как это сделано в параграфе 635.

Хотя и в последующем мы можем при случае, как это имеет место в параграфе 639 и других, пытаться развивать старую теорию магнетизма, мы все же находим, что идеально последовательную систему мы получаем, только отказавшись от этой теории и принимая теорию Ампера о молекулярных токах, как в параграфе 644.

Энергия поля, следовательно, состоит только из двух частей: электростатической, или потенциальной, энергии

$$W = \frac{1}{2} \iint (Pf + Qg + Rh)\, dx\, dy\, dz$$

и электромагнитной, или кинетической, энергии

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma)\, dx\, dy\, dz.$$

О силах, действующих на элемент тела, помещенного в электромагнитном поле

Силы, действующие на магнитный элемент

639.] *) Потенциальная энергия элемента $dx\,dy\,dz$ тела, намагниченного с интенсивностью, составляющими которой являются A, B, C, и помещенного в поле

*) См. приложение II в конце этой главы.

магнитной силы, составляющими которой являются α, β, γ, равна:

$$-(A\alpha+B\beta+C\gamma)\,dx\,dy\,dz.$$

Отсюда, если сила, заставляющая элемент двигаться без вращения в направлении x, есть $X_1 dx\,dy\,dz$,

$$X_1 = A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx}, \tag{1}$$

и если момент пары сил, стремящихся вращать элемент около оси x от y по направлению к z, есть $L\,dx\,dy\,dz$,

$$L = B\gamma - C\beta. \tag{2}$$

Силы и моменты, соответствующие осям y и z, могут быть написаны при помощи соответствующих подстановок.

640.] Если через намагниченное тело проходит электрический ток, составляющие которого суть u, v, w, тогда согласно уравнениям (С) параграфа 603 будет действовать дополнительная электромагнитная сила, составляющие которой равны X_2, Y_2, Z_2, причем

$$X_2 = vc - wb. \tag{3}$$

Отсюда полная сила X, обусловленная как магнетизмом молекулы, так и проходящим через нее током, будет:

$$X = A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx}+vc-wb. \tag{4}$$

Величины a, b, c являются составляющими магнитной индукции, связанными с α, β, γ, составляющими магнитной силы, при помощи уравнений, данных в параграфе 400:

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A,\\ b &= \beta + 4\pi B,\\ c &= \gamma + 4\pi C.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Составляющие силы тока u, v, w могут быть выражены через α, β, γ при помощи уравнений параграфа 607:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} X = \frac{1}{4\pi}\Big\{ (a-\alpha)\frac{d\alpha}{dx} + (b-\beta)\frac{d\beta}{dx} + (c-\gamma)\frac{d\gamma}{dx} + \\ b\left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}\right) + c\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right)\Big\} = \\ = \frac{1}{4\pi}\left\{ a\frac{d\alpha}{dx} + b\frac{d\alpha}{dy} + c\frac{d\alpha}{dz} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Согласно параграфу 403

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0. \tag{8}$$

Умножив это уравнение (8) на α, разделив его на 4π и прибавив результат к (7), найдем:

$$X = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d}{dx}\left[a\alpha - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right] + \frac{d}{dy}[b\alpha] + \frac{d}{dz}[c\alpha]\right\}, \tag{9}$$

а также согласно (2)

$$L = \frac{1}{4\pi}((b-\beta)\gamma - (c-\gamma)\beta) = \tag{10}$$

$$= \frac{1}{4\pi}(b\gamma - c\beta), \tag{11}$$

где сила X есть сила, отнесенная к единице объема, в направлении x, а L — момент сил (на единицу объема) относительно этой оси.

Объяснение этих сил гипотезой среды, находящейся в состоянии напряжения

641.] Обозначим напряжение любого рода, относящееся к единице площади, символом, имеющим форму P_{hk}. Первый значок h указывает, что нормаль к поверхности, на которую предполагается действующим напряжение, параллельна оси h. Второй значок k указывает, что направление напряжения, с которым часть тела, находящаяся на положительной стороне поверхности, действует на часть, находящуюся на отрицательной стороне, параллельно оси k.

Направления h и k могут быть одинаковыми, в этом случае напряжение является нормальным напряжением; они могут располагаться под углом друг к другу, в этом случае напряжение является косоугольным; они могут быть перпендикулярны друг к другу, в этом случае напряжение является тангенциальным.

Условие, которое устанавливает, что напряжения не производят вращения элементарных объемов тела, есть:

$$P_{hk} = P_{kh}.$$

В случае намагниченного тела, однако, такая тенденция к вращению имеется, так что это условие, которое осуществляется в обычной теории напряжения, в этом случае не выполняется.

Рассмотрим действие напряжений на шесть сторон элементарного объема тела $dx\,dy\,dz$, считая началом координат его центр тяжести.

На положительной стороне $dy\,dz$, на которой значение x равно $\frac{1}{2}dx$, действующие силы будут:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{параллельно } x, \left(P_{xx} + \frac{1}{2}\frac{dP_{xx}}{dx}dx\right) dy\,dz = X_{+x},\\
&\text{параллельно } y, \left(P_{xy} + \frac{1}{2}\frac{dP_{xy}}{dx}dx\right) dy\,dz = Y_{+x},\\
&\text{параллельно } z, \left(P_{xz} + \frac{1}{2}\frac{dP_{xz}}{dx}dx\right) dy\,dz = Z_{+x}.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Силы, действующие на обратной стороне ($-X_{-x}$, $-Y_{-y}$ и $-Z_{-z}$), могут быть найдены изменением знака dx. Мы можем тем же самым способом выразить системы трех сил, действующих на каждую из других сторон элемента; направление силы в этом случае указывается прописной буквой, а сторона, на которую она действует, значком.

Если $X dx\, dy\, dz$ есть полная сила, параллельная x, действующая на элемент объема, то

$$X dx\, dy\, dz = X_{+x} + X_{+y} + X_{+z} + X_{-x} + X_{-y} + X_{-z},$$
$$= \left(\frac{dP_{xx}}{dx} + \frac{dP_{yx}}{dy} + \frac{dP_{zx}}{dz}\right) dx\, dy\, dz,$$

откуда

$$X = \frac{d}{dx} P_{xx} + \frac{d}{dy} P_{yx} + \frac{d}{dz} P_{zx}. \tag{13}$$

Если $L\, dx\, dy\, dz$ есть момент силы относительно оси x, стремящейся повернуть элемент объема в направлении от y к z,

$$L\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2} dy\, (Z_{+y} - Z_{-y}) - \frac{1}{2} dz\, (Y_{+z} - Y_{-z}) =$$
$$= (P_{yz} - P_{zy})\, dx\, dy\, dz,$$

откуда

$$L = P_{yz} - P_{zy}. \tag{14}$$

Сравним значения X и L, данные уравнениями (9) и (11), с теми, которые даются в (13) и (14). Если мы положим:

$$\left.\begin{aligned}
P_{xx} &= \frac{1}{4\pi}\left\{a\alpha - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\right\},\\
P_{yy} &= \frac{1}{4\pi}\left\{b\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\right\},\\
P_{zz} &= \frac{1}{4\pi}\left\{c\gamma - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\right\},\\
P_{yz} &= \frac{1}{4\pi} b\gamma, \quad P_{zy} = \frac{1}{4\pi} c\beta,\\
P_{zx} &= \frac{1}{4\pi} c\alpha, \quad P_{xz} = \frac{1}{4\pi} a\gamma,\\
P_{xy} &= \frac{1}{4\pi} a\beta, \quad P_{yx} = \frac{1}{4\pi} b\alpha,
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

то найдем, что со статической точки зрения сила, возникающая из системы напряжений, составляющими которой являются вышеуказанные выражения, будет эквивалентна в своих действиях на каждый элемент объема силам, возникающим от намагничения и электрических токов.

642.] Природа напряжения, составляющими которого являются вышеуказанные выражения, может быть легко найдена следующим путем. Возьмем ось x так, чтобы она была биссектрисой угла между направлениями магнитной силы и магнитной индукции, а ось y расположим в плоскости этих векторов, направленной в сторону магнитной силы.

Если мы обозначим численное значение магнитной силы через $\mathfrak{H}$, численную величину магнитной индукции — через $\mathfrak{B}$, а через 2ε — угол между их направлениями, то

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{H}\cos\varepsilon, & \beta &= -\mathfrak{H}\sin\varepsilon, & \gamma &= 0, \\ a &= \mathfrak{B}\cos\varepsilon, & b &= -\mathfrak{B}\sin\varepsilon, & c &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{4\pi}\left(+\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\varepsilon - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), \\ P_{yy} &= \frac{1}{4\pi}\left(-\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\varepsilon - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), \\ P_{zz} &= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), \\ P_{yz} &= P_{zx} = P_{zy} = P_{xz} = 0, \\ P_{xy} &= \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos\varepsilon\sin\varepsilon, \\ P_{yx} &= -\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos\varepsilon\sin\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Поэтому состояние напряжения может быть рассматриваемо как образованное из:

(1) равного во всех направлениях давления $= \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$,

(2) натяжения вдоль линии, делящей пополам угол между направлениями магнитной силы и магнитной индукции,

$$=\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\varepsilon,$$

(3) давления вдоль линии, делящей пополам наружный угол между этими направлениями,

$$=\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\varepsilon,$$

(4) пары сил, стремящихся повернуть каждый элемент объема вещества в плоскости двух направлений — от направления магнитной индукции к направлению магнитной силы,

$$=\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin 2\varepsilon.$$

Когда магнитная индукция имеет то же самое направление, что и магнитная сила, как это всегда бывает в жидкостях и в немагнитных твердых телах, тогда $\varepsilon=0$. При совпадении оси x с направлением магнитной силы будем иметь:

$$P_{xx}=\frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{B}\mathfrak{H}-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), \quad P_{yy}=P_{zz}=-\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2, \quad (18)$$

а тангенциальные напряжения исчезают.

Следовательно, в этом случае напряжение является гидростатическим давлением $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$, сочетающимся с продольным натяжением $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}$ вдоль силовых линий.

643.] В тех случаях, когда намагничения нет, $\mathfrak{B}=\mathfrak{H}$. В этих случаях напряжение еще больше упрощается, становясь натяжением вдоль силовых линий, равным $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$, в сочетании с давлением по всем направлениям под прямыми углами к силовым линиям, численно равным также $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$. Составляющими напряжения в этом важном случае являются:

$$
\left.\begin{aligned}
P_{xx} &= \frac{1}{8\pi}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2),\\
P_{yy} &= \frac{1}{8\pi}(\beta^2-\gamma^2-\alpha^2),\\
P_{zz} &= \frac{1}{8\pi}(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2),\\
P_{yz} &= P_{zy} = \frac{1}{4\pi}\beta\gamma,\\
P_{zx} &= P_{xz} = \frac{1}{4\pi}\gamma\alpha,\\
P_{xy} &= P_{yx} = \frac{1}{4\pi}\alpha\beta.
\end{aligned}\right\} \qquad (19)
$$

Составляющая по оси x силы, обусловленной этими напряжениями и действующей на элемент объема среды, будет на единицу объема:

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{d}{dx}P_{xx}+\frac{d}{dy}P_{yx}+\frac{d}{dz}P_{zx} =\\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\frac{d\alpha}{dx}-\beta\frac{d\beta}{dx}-\gamma\frac{d\gamma}{dx}\right\}+\frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\frac{d\beta}{dy}+\beta\frac{d\alpha}{dy}\right\}+\\
&+\frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\frac{d\gamma}{dz}+\gamma\frac{d\alpha}{dz}\right\}=\frac{1}{4\pi}\alpha\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)+\\
&+\frac{1}{4\pi}\gamma\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)-\frac{1}{4\pi}\beta\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right).
\end{aligned}
$$

Но

$$
\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz} &= 4\pi\mathfrak{m},\\
\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx} &= 4\pi v,\\
\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy} &= 4\pi w,
\end{aligned}
$$

где $\mathfrak{m}$ есть плотность южной магнитной материи в единице среды и где v и w суть составляющие плотности электрических токов относительно осей y и z соответственно. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha\mathfrak{m} + v\gamma - w\beta, \\ Y &= \beta\mathfrak{m} + w\alpha - u\gamma, \\ Z &= \gamma\mathfrak{m} + u\beta - v\alpha. \end{aligned}\right\} \text{Уравнения электромагнитной силы.} \qquad (20)$$

644.] Если мы примем теории Ампера и Вебера, относящиеся к природе магнитных и диамагнитных тел, и будем считать, что магнитная и диамагнитная полярности обусловлены молекулярными электрическими токами, мы освобождаемся от воображаемой магнитной материи и будем иметь повсюду $\mathfrak{m} = 0$,

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0, \qquad (21)$$

так что уравнения электромагнитной силы становятся:

$$\left.\begin{aligned} X &= v\gamma - w\beta, \\ Y &= w\alpha - u\gamma, \\ Z &= u\beta - v\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Таковы составляющие механической силы, отнесенной к единице объема вещества. Составляющие магнитной силы: α, β, γ, а составляющие плотности электрического тока: u, v, w. Эти уравнения идентичны тем, которые уже были выведены (уравнения (С) параграфа 603).

645.] Объясняя электромагнитную силу при помощи состояния напряжения в среде, мы только следуем концепции Фарадея *), что магнитные силовые линии стремятся укорачиваться и отталкивают друг друга, будучи помещены рядом. Мы только выразили на математическом языке величину натяжения вдоль линий и давлений под прямыми углами к ним и доказали, что допущение такого состояния напряжения в среде будет действительно производить силы, обнаруживаемые на проводниках, по которым проходят электрические токи.

*) Exp. Res., (3266. 3267, 3268).

Мы пока ничего не утверждали по поводу того, каким образом это состояние напряжения вызывается и поддерживается в среде. Мы только показали, что можно рассматривать взаимодействие электрических токов, как зависящее от особого рода напряжений в окружающей среде, вместо того чтобы считать его прямым и мгновенным действием на расстоянии.

Всякое дальнейшее объяснение состояния напряжения при помощи движения среды или каким-либо другим образом должно рассматриваться как отдельная независимая часть теории, которая может быть сохранена или отброшена без изменения полученных нами результатов (см. параграф 832).

В первой части этого трактата (параграф 108) мы показали, что наблюдаемые электростатические силы могут рассматриваться как результат действия некоторого напряжения в окружающей среде. Мы сейчас сделали то же самое для электромагнитных сил и нам остается рассмотреть, является ли концепция среды, способной поддерживать эти состояния напряжения, совпадающей с другими известными явлениями или мы должны ее устранить как неплодотворную.

В поле, в котором происходят одновременно электростатическое и электромагнитное действия, мы должны предположить электростатическое напряжение, описанное в части I, наложенным на электромагнитное напряжение, которое мы только что рассмотрели.

646.] Если мы предположим, что полная сила земного магнетизма равна 10 британским единицам (гран, фут, секунда), какова его приблизительная величина в Англии, тогда натяжение вдоль силовой линии будет равно 0,128 грана на кв. фут. Наибольшее магнитное натяжение, полученное Джоулем *) при помощи электромагнитов, равнялось примерно 140 фунтам на кв. дюйм.

*) Sturgeon's «Annals of Electricity», т. V, стр. 187 (1840) или «Philosophical Magazine», декабрь 1851 г.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ XI

Приложение I

[Нижеследующее примечание, заимствованное из письма профессора Клерка Максвелла к профессору Кристал (Chrystal), имеет существенную важность в связи с параграфами 389 и 632.

В параграфе 389 энергия, обусловленная присутствием магнита, составляющие намагничения которого соответственно равны A_1, B_1, C_1, в поле, составляющие магнитной силы которого суть α_2, β_2, γ_2, была равна:

$$-\iiint (A_1\alpha_2 + B_1\beta_2 + C_1\gamma_2)\,dx\,dy\,dz,$$

где интегрирование ограничивается магнитом вследствие того, что A_1, B_1, C_1, равны нулю в любом другом месте.

Но полная энергия имеет форму

$$-\frac{1}{2}\iiint \{(A_1 + A_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + \ldots\}\,dx\,dy\,dz,$$

причем интегрирование распространяется на всякую часть пространства, где есть намагниченные тела, а A_2, B_2, C_2 обозначают составляющие намагничения в точке, внешней по отношению к магниту.

Таким образом, полная энергия состоит из четырех частей:

$$-\frac{1}{2}\iiint (A_1\alpha_1 + \ldots)\,dx\,dy\,dz, \tag{1}$$

часть, которая представляет собой постоянную, если намагничение магнита постоянно;

$$-\frac{1}{2}\iiint (A_2\alpha_1 + \ldots)\,dx\,dy\,dz, \tag{2}$$

что согласно теореме Грина равно:

$$-\frac{1}{2}\iiint (A_1\alpha_2 + \ldots)\,dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

и

$$-\frac{1}{2}\iiint (A_2\alpha_2 + \ldots)\,dx\,dy\,dz, \tag{4}$$

что можно считать обусловленным постоянным намагничением и, следовательно, постоянной величиной.

Отсюда изменяющаяся часть энергии движущегося магнита с постоянным намагничением является суммой выражений

(2) и (3), а именно:

$$-\iiint (A_1\alpha_2 + B_1\beta_2 + C_1\gamma_2)\,dx\,dy\,dz.$$

Помня, что перемещение магнита изменяет величины α_2, β_2, γ_2, но не величины A_1, B_1, C_1, мы находим для составляющей силы, действующей на магнит в некотором направлении φ:

$$\iiint \left(A_1\frac{d\alpha_2}{d\varphi} + B_1\frac{d\beta_2}{d\varphi} + C_1\frac{d\gamma_2}{d\varphi}\right) dx\,dy\,dz.$$

Если вместо постоянного магнита мы имеем тело, намагниченное путем индукции, выражение для силы должно быть тем же самым, и, полагая $A_1 = k\alpha$ и т. д., получаем:

$$\iiint k\left(\alpha\frac{d\alpha_2}{d\varphi} + \beta\frac{d\beta_2}{d\varphi} + \gamma\frac{d\gamma_2}{d\varphi}\right) dx\,dy\,dz.$$

В этом выражении α стоит вместо $\alpha_1 + \alpha_2$ и т. д., но если намагниченное тело невелико или мала величина α_1, мы можем пренебречь α_1 по сравнению с α_2, и выражение для силы, как в параграфе 440, будет иметь вид

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{2}\iiint k(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Таким образом, работа, произведенная магнитными силами, в то время как тело с малой индуктивной емкостью и индуктивно намагниченное удаляется в бесконечность, равняется только половине работы, которая была бы совершена, если бы тело было постоянно намагниченным до той же степени с самого начала, так как по мере удаления индуктированного магнита он теряет свою силу.]

Приложение II

[Содержащееся в параграфе 639 выражение для потенциальной энергии, обусловленной магнитными силами в единице объема среды, встретило возражение по той причине, что при выводе этого выражения в параграфе 389 мы допускали, что составляющие α, β, γ имеют потенциал, в то время как в параграфах 639, 640 это не имеет места. Это возражение распространяется также на выражение для силы X, которое представляет собой пространственную вариацию энергии. Задачей настоящего примечания является приведение некоторых соображений, которые направлены на подтверждение точности текста.]

{Сила, действующая на кусок магнитного вещества, по которому проходит ток, может быть для удобства вычисления разделена на две части: (1) силу, действующую на элемент объема вследствие присутствия тока, и (2) силу, обусловленную магнетизмом элемента. Первая часть будет той же, что и сила, действующая на элемент немагнитной субстанции, составляющие которой соответственно будут:

$$\left.\begin{aligned}&\gamma v-\beta w,\\ &\alpha w-\gamma u,\\ &\beta u-\alpha v.\end{aligned}\right\}$$ u, v, w являются составляющими плотности тока, а α, β, γ — составляющими магнитной силы.

Для того чтобы вычислить вторую силу, представьте длинный узкий цилиндр, вырезанный в магнитном веществе, так, что ось цилиндра параллельна направлению намагничения.

Если I есть интенсивность намагничения, то сила, параллельная x, действующая в магните на единицу объема, есть

$$I\frac{d\alpha}{ds},$$

или, если A, B, C — составляющие I, то

$$A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\alpha}{dy}+C\frac{d\alpha}{dz},$$

или

$$A\frac{d\alpha}{dx}+B\left(\frac{d\beta}{dx}-4\pi w\right)+C\left(\frac{d\gamma}{dx}+4\pi v\right).$$

Полная, параллельная x сила, действующая на элемент, будет, следовательно,

$$\gamma v-\beta w+A\frac{d\alpha}{dx}+B\left(\frac{d\beta}{dx}-4\pi w\right)+C\left(\frac{d\gamma}{dx}+4\pi v\right),$$

или

$$v(\gamma+4\pi C)-w(\beta+4\pi B)+A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx},$$

т. е.

$$vc-wb+A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx},$$

что соответствует выражению, приведенному в тексте книги.]

ГЛАВА XIX

СРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ

Определение числа электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице

768.] Абсолютные величины электрических единиц в обеих системах зависят от принятых нами единиц длины, времени и массы. Так как их зависимость от этих единиц различна в двух системах, то отношение электрических единиц будет выражаться другим числом сообразно другим единицам длины и времени.

Из приведенной в параграфе 628 таблицы размерностей вытекает, что число электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице изменяется обратно пропорционально величине единицы длины и прямо пропорционально величине единицы времени, которые мы приняли.

Если, следовательно, мы определяем скорость, представленную этим числом, то даже в том случае, если мы примем новые единицы длины и времени, число, представляющее эту скорость, все еще будет числом электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице согласно новой системе измерения.

Эта скорость, указывающая отношение между электростатическими и электромагнитными явлениями, представляет собой поэтому величину определенного численного значения, и измерение этого значения является одним из наиболее важных исследований в области электричества. Для того чтобы показать, что искомая нами величина является действительно скоростью, мы можем заметить, что в случае двух параллельных токов притяжение, испытываемое длиной a одного из них, будет согласно параграфу 686 *)

$$F = 2CC' \frac{a}{b},$$

где C, C' являются численными значениями сил токов в электромагнитных единицах, а b—расстояние между ними. Если мы примем $b = 2a$, то

$$F = CC'.$$

Но количество электричества, передаваемого током C за время t, равно Ct в электромагнитных единицах, или nCt в электростатических, если n есть число электростатических единиц в одной электромагнитной единице. Пусть два малых проводника, заряженных количествами электричества, переносимыми двумя токами за время t, помещены на расстоянии r один от другого. Величина отталкивания между ними будет:

$$F' = \frac{CC'n^2t^2}{r^2}.$$

Пусть расстояние r будет выбрано так, что это отталкивание равно притяжению токов. Тогда

$$\frac{CC'n^2t^2}{r^2} = CC'.$$

Отсюда

$$r = nt,$$

или расстояние r должно увеличиваться в n раз быстрее времени t. Отсюда n есть скорость, абсолютная величина которой одинакова, независимо от того, какие единицы мы возьмем.

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

769.] Для того чтобы получить физическое представление об этой скорости, вообразим плоскую поверхность, заряженную электричеством до электростатической поверхностной плотности σ и движущуюся в ее собственной плоскости со скоростью v. Эта движущаяся наэлектризованная поверхность будет эквивалентна листу электрического тока при силе тока, протекающего через единицу ширины поверхности, равной σv в электростатических единицах, или $\frac{1}{n}\sigma v$ в электромагнитных единицах, если n есть число электростатических единиц в одной электромагнитной единице. Если другая плоская поверхность, параллельная первой, наэлектризована до поверхностной плотности σ' и движется в том же самом направлении со скоростью v', то она будет эквивалентна второму листу тока.

Электростатическое отталкивание между этими двумя наэлектризованными поверхностями согласно параграфу 124 равняется $2\pi\sigma\sigma'$ на каждую единицу площади противолежащих поверхностей.

Электромагнитное притяжение между двумя листами токов согласно параграфу 653 равно $2\pi uu'$ на каждую единицу площади, причем u и u' являются поверхностными плотностями токов в электромагнитном измерении.

Но $u = \frac{1}{n}\sigma v$ и $u' = \frac{1}{n}\sigma' v'$, так что притяжение будет:

$$2\pi\sigma\sigma'\frac{vv'}{n^2}\ [20].$$

Отношение притяжения к отталкиванию равно отношению vv' к n^2. Поэтому поскольку притяжение и отталкивание являются величинами одного рода, n должно быть величиной того же рода, что и v, т. е. скоростью. Если мы теперь предположим, что скорость каждой из движущихся плоскостей равна n, притяжение будет равно отталкиванию и между ними не будет наблюдаться механического взаимодействия. Отсюда мы можем определить отношение электрических единиц как такую скорость, что две наэлектризованные поверхности, движущиеся в том же самом направлении с этой скоростью, не производят друг на друга никакого взаимного действия. Так как эта скорость порядка 300 000 километров в секунду, то произвести вышеописанный опыт невозможно.

770.] Если электрическую поверхностную плотность и скорость можно было бы сделать столь большими, что магнитная сила могла быть измерена, мы могли бы, по меньшей мере, подтвердить наше предположение, что движущееся наэлектризованное тело эквивалентно электрическому току ([21]).

Мы можем допустить*), что наэлектризованная поверхность в воздухе начинает разряжаться, испуская искры, когда электрическая сила $2\pi\sigma$ достигает значения 130. Магнитная сила, производимая поверхностным током, есть $2\pi\sigma\frac{v}{n}$. Горизонтальная магнитная сила в Англии приблизительно равна 0,175. Отсюда поверхность, наэлектризованная до высшей возможной степени и движущаяся со скоростью 100 метров в секунду, действовала бы на магнит с силой, равной приблизительно одной четырехтысячной части горизонтальной силы земли, т. е. могущей быть измеренной. Наэлектризованная поверхность может быть поверхностью непроводящего диска, вращающегося в плоскости магнитного меридиана, а магнит может быть помещен поблизости восходящей или нисходящей части диска и быть защищен от его электростатического действия при помощи металлического экрана. Я не знаю, пытались ли до сего времени осуществить такого рода опыт**).

---

*) W. Thomson, R. S. Proceedings или Reprint, гл. XIX, стр. 247—259.

**) {Указанный эффект был открыт в 1876 г. профессором Роуланд (Rowland). О дальнейших опытах этого рода см. Rowland and Hutchinson, Phil. Mag. 27, 445 (1887); Röntgen, Wied. Ann., 40, 93; Himstedt, Wied. Ann., 40, 720.}

I. *Сравнение единиц электричества*

771.] Так как отношение электромагнитных единиц к электростатическим единицам представлено скоростью, мы в дальнейшем будем обозначать его символом v. Первое численное определение этой скорости было сделано Вебером и Кольраушем*).

Их метод основывался на измерении того же самого количества электричества сначала в электростатических, а затем в электромагнитных единицах.

Количеством электричества, которое они измеряли, был заряд лейденской банки. Он измерялся в электростатических единицах как произведение емкости банки на разность потенциалов ее обкладок. Емкость банки определялась путем сравнения с емкостью подвешенной в открытом пространстве и на значительном расстоянии от других тел сферы. Емкость такой сферы выражается в электростатическом измерении ее радиусом. Таким образом, емкость банки могла быть установлена и выражена как некая длина (см. параграф 227).

Разность потенциалов обкладок банки измерялась путем соединения этих обкладок с зажимами электрометра, постоянные которого были тщательно определены, так что разность потенциалов E становилась известной в электростатических единицах. Умножая эту величину на c—емкость банки, получали заряд банки, выраженный в электростатических единицах.

Для того чтобы определить величину заряда в электромагнитном измерении, банку разряжали через катушку гальванометра. Действие мгновенного тока на магнит гальванометра сообщало магниту известную угловую скорость. Магнит получал определенную степень девиации, при которой его скорость полностью нейтрализовалась противодействующим влиянием земного магнетизма.

---

*) «Elektrodynamische Maassbestimmungen» и Pogg Ann., XCIX (авг., стр. 10—25, 1856). Имеется русский перевод статьи Вебера и Кольрауша в сб. «Из предистории радио». (*Ред.*)

Наблюдая максимальную девиацию магнита, можно было определить количество электричества при разряде в электромагнитном измерении, как это указывается в параграфе 748, по формуле

$$Q = \frac{H}{G}\frac{T}{\pi} 2\sin\frac{1}{2}\theta,$$

где Q есть количество электричества в электромагнитных единицах.

Мы, следовательно, должны определить следующие количества: H—интенсивность горизонтальной слагающей земного магнетизма (см. параграф 456); G—основную константу гальванометра (см. параграф 700); T—время одного колебания магнита и θ—девиацию, обусловленную мгновенным током.

Величина v, полученная Вебером и Кольраушем, оказалась равной

$$v = 310\,740\,000 \text{ метров в секунду.}$$

Свойство твердых диэлектриков, которое назвали *электрической абсорбцией*, затрудняет точное определение емкости лейденской банки. Приблизительная емкость изменяется в зависимости от времени, которое проходит от момента заряжения или разряда банки до момента измерения потенциала, и чем больше это время, тем больше величина, получаемая для емкости банки.

Отсюда, поскольку время, потребное для отсчитывания показаний электрометра, велико по сравнению со временем, в течение которого происходит разряд через гальванометр, вероятно, что примерная величина разряда в электростатическом измерении завышена и что, следовательно, величина v, выведенная из нее, повидимому, также завышена.

II. *Величина v, выраженная в форме сопротивления*

772.] Два других метода определения величины v приводят к выражению ее величины как функции от сопротивления некоторого проводника, которое в электромагнитной системе также имеет размерность скорости.

В опыте в том виде, какой был придан ему сэром Вильямом Томсоном, постоянный ток пропускался через проволоку, имеющую большое сопротивление. Электродвижущая сила, которая обусловливает ток в проволоке, измерялась в электростатических единицах путем соединения концов проволоки с зажимами абсолютного электрометра (см. параграфы 217, 218). Сила тока в проволоке измерялась в электромагнитных единицах девиацией подвешенной катушки электродинамометра, через которую проходил этот ток (параграф 725). Сопротивление цепи в электромагнитных единицах получалось путем сравнения со стандартной катушкой в один ом. Помножая силу тока на это сопротивление, мы получаем электродвижущую силу в электромагнитном измерении, а из сравнения этой величины с полученной электростатической величиной получается величина v.

Этот метод требует одновременного определения двух сил при помощи, соответственно, электрометра и электродинамометра, а в результате появляется только отношение этих сил.

773.] Другой метод, которым эти силы, вместо того чтобы быть измеренными отдельно, прямо противополагаются одна другой, применялся автором этих строк. Концы катушки, имеющей большое сопротивление, соединяются с двумя параллельными дисками, один из которых может перемещаться. Та же самая разность потенциалов, которая обусловливает ток в катушке большого сопротивления, вызывает притяжение между дисками. Одновременно другой электрический ток, который в произведенном опыте был отличен от первичного тока, проходит через две катушки, из которых одна приложена к задней стороне неподвижного диска, а другая—к задней стороне подвижного диска. Ток течет в противоположных направлениях в этих катушках, так что они отталкивают одна другую. Путем подбора определенного расстояния между двумя дисками притяжение в точности уравновешивается отталкиванием, при этом другой наблюдатель при помощи дифференциального гальванометра, снабженного шунтами, определяет отношение первичного и вторичного токов.

В этом опыте единственным измерением, которое должно быть отнесено к материальному эталону, является измерение большого сопротивления, которое должно быть определено в абсолютной величине по сравнению с омом. Другие измерения требуются только для определения отношений и поэтому могут быть сделаны как функции любых произвольных единиц.

Так, отношение двух сил является отношением равенства.

Отношение двух токов находится путем сравнения сопротивлений, когда не наблюдается отклонения в дифференциальном гальванометре.

Сила притяжения зависит от квадрата отношения диаметра дисков к их расстоянию.

Сила отталкивания зависит от отношения диаметра катушек к их расстоянию.

Величина v будет, следовательно, выражена непосредственно как функция сопротивления большой катушки, которая сама по себе сравнивается с омом. Величина v, найденная по методу Томсона, равнялась 28,2 ома *), по способу Максвелла—28,8 ома **).

III. *Электростатическая емкость в электромагнитном измерении*

774.] Емкость конденсатора может быть установлена в электромагнитном измерении путем сравнения электродвижущей силы, производящей заряд, и количества электричества в разрядном токе. При помощи вольтовой батареи поддерживается ток, проходящий

*) Report of British Association, стр. 434 (1869).

**) Phil. Trans., стр. 643 (1868) и Report of British Ass., стр. 436 (1869).

через цепь, в которую включена катушка большого сопротивления. Конденсатор заряжается путем приведения его зажимов в контакт с зажимами катушки сопротивления. Ток через катушку измеряется отклонением, которое он производит в гальванометре. Пусть φ будет этим отклонением, тогда, согласно параграфу 742, ток будет:

$$\gamma = \frac{H}{G} \operatorname{tg} \varphi,$$

где H есть горизонтальная слагающая земного магнетизма, а G—основная константа гальванометра.

Если R есть сопротивление катушки, через которую проходит ток, разность потенциалов на концах катушки будет:

$$E = R\gamma,$$

и электрический заряд, полученный в конденсаторе, емкость которого в электромагнитном измерении равна C, будет:

$$Q = EC.$$

Пусть теперь зажимы конденсатора, а затем зажимы гальванометра отъединяются от цепи и пусть магнит гальванометра находится в положении равновесия. Соединим тогда зажимы конденсатора с зажимами гальванометра. Через гальванометр пройдет мгновенный ток, который вызовет отклонение магнита до крайнего положения θ. Тогда согласно параграфу 748, если разряд равен заряду:

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} 2 \sin \frac{1}{2} \theta.$$

Мы, таким образом, получаем в качестве величины емкости конденсатора в электромагнитном измерении

$$C = \frac{T}{\pi} \frac{1}{R} \frac{2 \sin \frac{1}{2} \theta}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Емкость конденсатора, следовательно, определяется значениями следующих величин:

T — времени колебания магнита гальванометра от положения равновесия до положения равновесия,

R — сопротивления катушки,

θ — крайнего предела отклонения, произведенного разрядом,

φ — постоянного отклонения, обусловленного током через катушку.

Этот метод был применен профессором Флемингом Дженкиным (Fleeming Jenkin) для определения емкости конденсаторов в электромагнитном измерении *).

Если c будет емкостью того же самого конденсатора в электростатическом измерении, определенной путем сравнения с конденсатором, емкость которого может быть вычислена из его геометрических данных, то

$$c = v^2 C.$$

Отсюда

$$v^2 = \pi R \frac{c}{T} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2 \sin \frac{1}{2} \theta}.$$

Величина v может, следовательно, быть определена этим путем. Она зависит от определения R в электромагнитном измерении. Но, поскольку в нее входит только корень квадратный из R, ошибка в этом определении не будет оказывать столь большого влияния на величину v, как в методах, описанных в параграфах 772 и 773.

Перемежающийся ток

775.] Если в какой-нибудь точке разъединить провод батарейной цепи и соединить разъединенные концы с зажимами конденсатора, ток будет течь в конденсатор с силой, которая уменьшается по мере увеличения раз-

*) Report of British Association, 1867, стр. 483—488.

ности потенциалов между пластинками конденсатора, так что, когда конденсатор получает полную зарядку, соответствующую электродвижущей силе, течение тока совершенно прекращается.

Если зажимы конденсатора теперь отъединить от концов проволоки и снова соединить с ними в обратном порядке, конденсатор будет сам разряжаться через проволоку, а затем сделается снова заряженным противоположным образом, так что через проволоку будет течь перемежающийся ток, общее количество которого равно двум зарядам конденсатора.

При помощи механизма (обычно называемого *коммутатором* или *качающимся коромыслом*—wippe) операция обращения соединений конденсатора может повторяться через одинаковые промежутки времени, каждый из которых равен T. Если этот промежуток достаточно долог для того, чтобы обеспечить полную разрядку конденсатора, количество электричества, передаваемого проволокой в каждом промежутке, будет равно $2EC$, где E—электродвижущая сила, а C—емкость конденсатора.

Если магнит включенного в цепь гальванометра так намагничен, что он качается достаточно медленно, чтобы большое количество разрядов конденсатора приходилось на время одного свободного колебания, то эти разряды будут действовать на магнит как постоянный ток, сила которого равна $\frac{2EC}{T}$. Если теперь удалить конденсатор и вместо него поставить катушку, сопротивление которой устанавливается так, чтобы постоянный ток, текущий через гальванометр, производил бы то же самое отклонение, как и серия разрядов, и если R—сопротивление всей цепи, то

$$\frac{E}{R} = \frac{2EC}{T}, \tag{1}$$

или

$$R = \frac{T}{2C}. \tag{2}$$

Мы, таким образом, можем сравнивать конденсатор с движущимся коммутатором с проводом определенного электрического сопротивления и можем применить различные методы, описанные в параграфах 345—357 *), с целью определения этого сопротивления.

776.] Для этой цели мы можем подставить вместо какой-нибудь из проволок в методе дифференциального гальванометра (параграф 346) или в методе мостика Уитстона (параграф 347) конденсатор с его коммутатором. Предположим, что и в том и в другом достигнуто нулевое отклонение гальванометра, сначала с конденсатором и коммутатором, а затем с катушкой, имеющей сопротивление R_1, поставленной на их место. Тогда количество $\frac{T}{2C}$ будет измеряться сопротивлением цепи, часть которой образует катушка R_1, а другая часть состоит из батареи и остальных проводников.

Отсюда сопротивление R, которое мы должны вычислить, равно R_1—сопротивлению катушки—плюс R_2—сопротивление остальной части цепи (включая батарею), причем концы катушки сопротивления считаются электродами системы.

В случае применения дифференциального гальванометра и мостика Уитстона нет надобности делать второй опыт подстановки катушки сопротивления вместо конденсатора. Величина эквивалентного сопротивления может быть найдена путем вычисления из других известных сопротивлений системы.

Используя обозначения параграфа 347 *), предположим, что конденсатор и его коммутатор вставлены вместо проводника AC мостика Уитстона и гальванометр, включенный в OA, показывает нулевое отклонение. Мы знаем, что сопротивление катушки, которая, будучи подставленной в AC, даст нулевое отклонение, определяется формулой

$$b = \frac{c\gamma}{\beta} = R_1. \tag{3}$$

---

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

Другая часть сопротивления, R_2,—это сопротивление системы проводников AO, OC, AB, BC и OB, причем точки A и C рассматриваются как электроды. Отсюда

$$R_2=\frac{\beta(c+a)(\gamma+\alpha)+ca(\gamma+a)+\gamma\alpha(c+a)}{(c+\alpha)(\gamma+a)+\beta(c+a+\gamma+\alpha)}\,. \qquad (4)$$

В этом выражении a обозначает внутреннее сопротивление батареи и ее соединений, величину, которая не может быть точно определена, но если сделать эту величину малой по сравнению с другими сопротивлениями, эта неточность лишь слегка повлияет на величину R_2.

Таким образом, величина емкости конденсатора в электромагнитном измерении определяется формулой *)

$$C=\frac{T}{2(R_1+R_2)}\,. \qquad (5)$$

---

*) {Так как этот метод имеет большое значение при измерении емкости конденсатора в электромагнитных единицах, мы присоединяем несколько более полное описание его, приспособленное к тому случаю, когда цилиндр конденсатора имеет предохранительное кольцо.

Используемое при этом измерении приспособление представлено на рисунке. $ABCD$ есть мостик Уитстона, в котором гальванометр помещен в точке G, а батарея между B и C. Ветвь AB разомкнута в точках R и S, которые являются двумя полюсами коммутатора, попеременно вступающими в контакт с пружиной P, соединенной с внутренней пластиной H конденсатора. Пластина без предохранительного кольца присоединена к S. Точки C и B соответственно соединены с L и M двумя полюсами коммутатора, которые попеременно входят в контакт с пружиной, соединенной с предохранительным кольцом конденсатора. Система устроена таким образом, что когда коммутаторы работают, порядок событий является следующим:

I. P на S—конденсатор разряжен, Q на M—предохранительное кольцо разряжено.

II. P на R—конденсатор начинает заряжаться, Q на M.

III. P на R—конденсатор полностью заряжен до потенциала $(A)-(B)$. Q на L—предохранительное кольцо заряжено до потенциала $(C)-(B)$.

IV. P на S—конденсатор начинает разряжаться, Q на L.

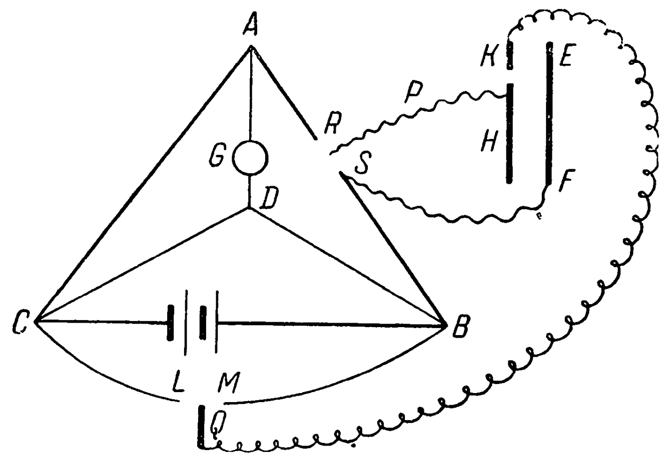
V. P на S—конденсатор разряжен, Q на M—предохранительное кольцо разряжено.

Таким образом, когда коммутаторы работают, поток элек-

777.] Если конденсатор имеет большую емкость и коммутатор очень быстро действует, может оказаться, что конденсатор не полностью разрядится при каждом обращении коммутатора. Уравнение электрического

тричества через конденсатор обусловливается последовательностью мгновенных токов через гальванометр.

Сопротивления подобраны так, что действие этих мгновенных токов, оказываемое на гальванометр, в точности уравновешивает эффект, производимый постоянным током, и в гальванометре не наблюдается какого-либо отклонения.



Для того чтобы исследовать отношения между сопротивлениями в этом случае, предположим, что, в то время как предохранительное кольцо и конденсатор заряжаются,

$$\dot{x} = \text{току через } BC,$$

$$\dot{y} = \text{току через } AR,$$

$$\dot{z} = \text{току через } AD,$$

$$\dot{w} = \text{току через } CL.$$

Таким образом, если a, b, α, β, γ являются сопротивлениями в отрезках BC, AC, AD, BD, CD, соответственно, L — коэффициент самоиндукции гальванометра и E — электродвижущая сила батареи, мы из цепей ADC и BCD, соответственно, получаем:

$$L\ddot{z} + (b+\gamma+\alpha)\dot{z} + (b+\gamma)\dot{y} + \gamma\dot{w} - \gamma\dot{x} = 0, \qquad (1)$$

$$(a+\gamma+\beta)\dot{x} - (\gamma+\beta)\dot{y} - \gamma\dot{z} - (\gamma+\beta)\dot{w} - E = 0. \qquad (2)$$

Теперь очевидно, что токи выражаются уравнениями тока во время разряда

$$Q + R_2 C \frac{dQ}{dt} + EC = 0, \tag{6}$$

где Q — заряд, C — емкость конденсатора, R_2 — сопротивление остальной части системы между зажимами

следующего рода:

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2,$$

$$\dot{z} = \dot{z}_1 + \dot{z}_2,$$

где $\dot{x}_1$ и $\dot{z}_1$ выражают установившиеся токи, когда никакого электричества не течет в конденсатор, а $\dot{x}_2$, $\dot{z}_2$, имеющие форму $Ae^{-\lambda t}$, $Be^{-\lambda t}$, выражают затухающие части токов, обусловленные заряжением конденсатора; $\dot{y}$ и $\dot{w}$ будут иметь форму $Ce^{-\lambda t}$, $De^{-\lambda t}$; t во всех этих выражениях есть время, протекшее от момента начала зарядки конденсатора.

Уравнения (1) и (2) будут таким образом содержать постоянные члены и члены, помноженные на $e^{-\lambda t}$, а последние должны, каждый в отдельности, исчезнуть, отсюда мы имеем:

$$L\ddot{z}_2 + (b + \gamma + \alpha)\,\dot{z}_2 + (b + \gamma)\,\dot{y} + \gamma\dot{w} - \gamma\dot{x}_2 = 0, \tag{3}$$

$$(a + \gamma + \beta)\,\dot{x}_2 - (\gamma + \beta)\,\dot{y} - \gamma\dot{z}_2 - (\gamma + \beta)\,\dot{w} = 0. \tag{4}$$

Пусть Z, X будут количества электричества, которые прошли через гальванометр и батарею соответственно в результате процесса зарядки конденсатора, а Y и W — заряды в конденсаторе и в предохранительном кольце. Тогда, интегрируя уравнения (3) и (4) во времени от момента, когда конденсатор начал заряжаться, до момента, пока он полностью заряжен, и учитывая, что в каждый из этих моментов времени $\dot{z}_2 = 0$, мы получаем:

$$(b + \gamma + \alpha)\,Z + (b + \gamma)\,Y + \gamma W - \gamma X = 0,$$

$$(a + \gamma + \beta)\,X - (\gamma + \beta)\,Y - \gamma Z - (\gamma + \beta)\,W = 0,$$

отсюда, исключая X,

$$Z\left(b + \gamma + \alpha - \frac{\gamma^2}{a + \gamma + \beta}\right) + Y\left(b + \gamma - \frac{\gamma(\gamma + \beta)}{a + \gamma + \beta}\right) + W\gamma\frac{a}{a + \gamma + \beta} = 0.$$

На практике сопротивление батареи очень мало по сравнению с β, b или γ, так что третьим членом можно пренебречь конденсатора и E — электродвижущая сила вследствие соединения с батареей. Отсюда

$$Q = (Q_0 + EC)\, e^{-\frac{t}{R_2 C}} - EC, \tag{7}$$

где Q_0 есть начальное значение Q.

по сравнению со вторым; пренебрегая сопротивлением батареи, мы получаем:

$$Z = -\frac{b}{b+\gamma+\alpha-\frac{\gamma^2}{\gamma+\beta}}\,Y.$$

Если $\{A\}$, $\{B\}$, $\{D\}$ обозначают потенциалы A, B, D, когда конденсатор полностью заряжен, а C — емкость конденсатора, тогда

$$Y = C\,[\{A\} - \{B\}],$$

но

$$\frac{\{A\}-\{B\}}{\alpha+\beta\,\frac{(b+\alpha+\gamma)}{\gamma}} = \frac{\{A\{-\{D\}}{\alpha}\,.$$

Правая сторона этого уравнения, очевидно, является $\dot{z}_1$ — установившимся током через гальванометр, так что

$$Y = C\dot{}_1\left(\alpha+\beta\,\frac{(b+\alpha+\gamma)}{\gamma}\right), \tag{5}$$

$$Z = -\dot{z}_1 bC\,\frac{\left\{\alpha+\beta\frac{(b+\alpha+\gamma)}{\gamma}\right\}}{b+\gamma+\alpha-\frac{\gamma^2}{\gamma+\beta}}\,. \tag{6}$$

Если конденсатор заряжается n раз в секунду, количество электричества, которое в итоге проходит через гальванометр в секунду, есть nZ. Если стрелка гальванометра остается не отклоненной, то количество электричества, которое проходит через гальванометр в единицу времени, должно равняться нулю.

Но это количество равно $nZ + \dot{z}_1$, так что

$$nZ + \dot{z}_1 = 0.$$

Если τ есть продолжительность контакта в течение каждого разряда, количество электричества в каждом разряде будет:

$$Q = 2EC\frac{1-e^{-\frac{\tau}{R_2C}}}{1+e^{-\frac{\tau}{R_2C}}}. \tag{8}$$

Если c и γ в уравнении (4) велики по сравнению с β, a или α, время, представленное R_2C, может быть сделано столь малым по сравнению с τ, что, вычисляя величину показательного члена в уравнении (8), мы можем использовать значение C из уравнения (5). Мы, таким образом, находим:

$$\frac{\tau}{R_2C} = 2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}, \tag{9}$$

где R_1 есть сопротивление, которое должно быть подставлено вместо конденсатора, для того чтобы произвести эквивалентный эффект; R_2 есть сопротивление остальной части системы; T — интервал между началами двух последовательных разрядов и τ — продолжительность контакта для каждого разряда. Таким образом, для уточненного значения C в электромагнитном измерении мы получаем:

$$C = \frac{1}{2}\frac{T}{R_1+R_2}\frac{1+e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}}}{1-e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}}}. \tag{10}$$

Подставляя это отношение в уравнение (6), мы получаем,

$$C = \frac{1}{n}\frac{\gamma}{b\beta}\frac{\left\{1-\frac{\gamma^2}{(\gamma+\beta)(b+\alpha+\gamma)}\right\}}{1+\frac{\gamma\alpha}{(b+\alpha+\gamma)\beta}}. \tag{7}$$

Из этого уравнения мы можем вычислить емкость, если мы знаем сопротивления и частоту.

См. J. J. Thomson and Searle, Phil. Trans., 1890, A, стр. 583.}

IV. *Сравнение электростатической емкости конденсатора с электромагнитной емкостью самоиндукции катушки*

778.] Если соединить с зажимами конденсатора емкости C две точки проводящей цепи, между которыми помещено сопротивление R, то в том случае, если электродвижущая сила действует на цепь, часть тока, вместо того чтобы пройти через сопротивление R, будет использована на зарядку конденсатора. Ток через R, следовательно, постепенно увеличивается от нуля до его конечного значения. Из математической теории вытекает, что процесс, в результате которого ток через R увеличивается от нуля до его конечного значения, выражается формулой в точности того же рода, как и формула, показывающая изменение величины тока, обусловленного постоянной электродвижущей силой, действующей на катушку электромагнита. Поэтому мы можем поместить конденсатор и электромагнит в две противоположные ветви мостика Уитстона таким образом, что ток через гальванометр всегда равен нулю, даже в моменты замыкания или размыкания цепи батареи.

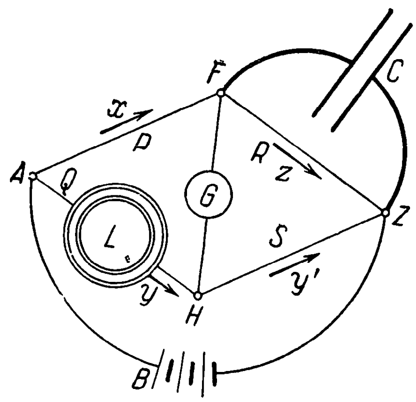


Рис. 17.

На приводимом рисунке пусть P, Q, R, S будут, соответственно, сопротивления четырех ветвей мостика Уитстона. Пусть катушка, имеющая коэффициент самоиндукции L, будет частью ветви AH, сопротивление которой равно Q, и пусть зажимы конденсатора, емкость которого равна C, соединены проводами, имеющими малое сопротивление, с точками F и Z. Для простоты допустим, что в гальванометре G, зажимы которого соединены с F и H, тока нет. Мы, следовательно, должны установить условие, при котором потенциал в точке F равен потенциалу в точке H. И лишь в том случае, если захотим оценить степень точности метода, нам потребуется вычислить ток через гальванометр, когда это условие не выполнено.

Пусть x будет полное количество электричества, которое прошло через AF, и z — то количество электричества, которое прошло через FZ в промежуток времени t. Тогда $x-z$ будет зарядом конденсатора.

Электродвижущая сила, действующая между обкладками конденсатора, будет по закону Ома $R\frac{dz}{dt}$, так что если емкость конденсатора равна C:

$$x-z=RC\frac{dz}{dt}. \tag{1}$$

Пусть y — полное количество электричества, которое прошло через ветвь AH. Электродвижущая сила между A и H должна быть равна электродвижущей силе между A и F, или

$$Q\frac{dy}{dt}+L\frac{d^2y}{dt^2}=P\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Так как через гальванометр не проходит никакого тока, количество, которое прошло через HZ, должно также равняться y, и мы находим:

$$S\frac{dy}{dt}=R\frac{dz}{dt}. \tag{3}$$

Подставляя в уравнение (2) значение x из уравнения (1) и сравнивая с уравнением (3), мы в качестве условия, при котором через гальванометр не проходит никакого тока, находим:

$$RQ\left(1+\frac{L}{Q}\frac{d}{dt}\right)z=SP\left(1+RC\frac{d}{dt}\right)z. \tag{4}$$

Условием отсутствия тока в гальванометре при установившемся режиме будет, как и при обычной форме мостика Уитстона:

$$QR=SP. \tag{5}$$

Дополнительным условием отсутствия тока при замыкании и размыкании соединения с батареей будет:

$$\frac{L}{Q} = RC. \tag{6}$$

Здесь $\frac{L}{Q}$ и RC являются так называемыми временными константами соответственно ветвей Q и R. Если путем изменения Q и R мы можем так подобрать ветви мостика Уитстона, что гальванометр не будет показывать никакого тока, будь то при замыкании или размыкании цепи или при установившемся токе в ветвях, тогда мы знаем, что временная константа катушки равна временной константе конденсатора.

Коэффициент самоиндукции L может быть определен в электромагнитном измерении путем сравнения с коэффициентом взаимной индукции двух цепей, геометрические данные которых известны (параграф 756). Эта величина имеет размерность длины.

Емкость конденсатора может быть определена в электростатическом измерении путем сравнения с конденсатором определенной геометрической структуры (параграф 229). Эта величина также имеет размерность длины c.

Емкость в электромагнитном измерении будет:

$$C = \frac{c}{v^2}. \tag{7}$$

Подставляя это значение в уравнение (6), мы для значения v^2 получаем:

$$v^2 = \frac{c}{L} QR, \tag{8}$$

где c есть емкость конденсатора в электростатическом измерении, L — коэффициент самоиндукции катушки в электромагнитном измерении, Q и R — сопротивления в электромагнитном измерении.

Значение v, определенное этим методом, зависит, как и в случае второго метода, от определения единицы сопротивления (см. параграфы 772, 773).

V. *Сочетание электростатической емкости конденсатора с электромагнитной емкостью самоиндукции катушки*

779.] Пусть C будет емкостью конденсатора, обкладки которого соединены проводом сопротивления R. Пусть в этот провод включены катушки L и L' и пусть L обозначает сумму их емкостей самоиндукции. Катушка L' подвешена на двух нитях и состоит из двух параллельных катушек в вертикальных плоскостях, между которыми проходит вертикальная ось с укрепленным на ней магнитом M, ось которого вращается в горизонтальной плоскости между катушками L, L'. Катушка L имеет большой коэффициент самоиндукции и неподвижна, подвешенная катушка L' защищена от токов воздуха, образующихся вследствие вращения магнита, путем помещения движущихся частей в полый ящик. Движение магнита вызывает образование наведенных токов в катушке, которые взаимодействуют с магнитом, так что плоскость подвешенной катушки отклоняется в направлении вращения магнита. Определим силу наведенных токов и величину отклонения подвешенной катушки.

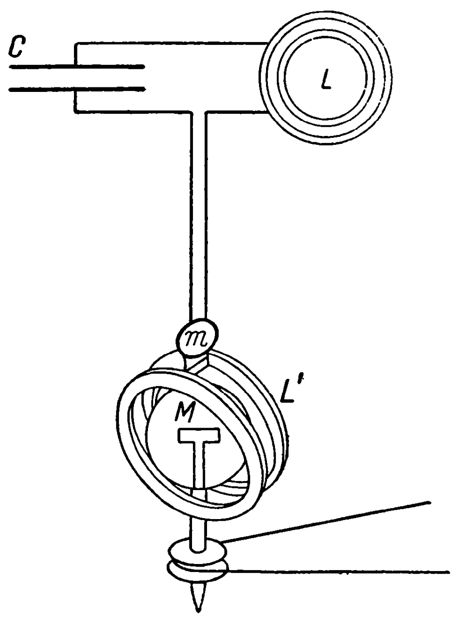


Рис. 18.

Пусть x будет заряд электричества на верхней пластине конденсатора C, тогда, если E есть электродвижущая сила, производящая этот заряд, мы по теории конденсаторов имеем:

$$x = CE. \tag{1}$$

По теории электрических токов мы также имеем:

$$R\dot{x} + \frac{d}{dt}(L\dot{x} + M\cos\theta) + E = 0, \tag{2}$$

где M есть электромагнитное количество движения цепи L', когда ось магнита расположена перпендикулярно к плоскости катушки, и θ есть угол между осью магнита и нормалью к этой плоскости.

Уравнение для определения x, следовательно, будет:

$$CL\frac{d^2x}{dt^2}+CR\frac{dx}{dt}+x=CM\sin\theta\frac{d\theta}{dt}. \tag{3}$$

Если катушка находится в положении равновесия и если вращение магнита равномерно, а угловая скорость равна n, то

$$\theta=nt. \tag{4}$$

Выражение для тока состоит из двух частей, одна из которых независима от правой стороны уравнения и уменьшается как показательная функция времени. Другая часть, которая может быть названа вынужденным током, зависит исключительно от члена с θ и может быть представлена в форме

$$x=A\sin\theta+B\cos\theta. \tag{5}$$

Находя величины A и B путем подстановки в уравнение (3), мы получаем:

$$x=-MCn\frac{RCn\cos\theta-(1-CLn^2)\sin\theta}{R^2C^2n^2+(1-CLn^2)^2}. \tag{6}$$

Момент силы, с которой магнит действует на катушку L', по которой течет ток x, является обратным тому, который действовал бы на магнит, если бы катушка была неподвижна; он дается следующим выражением:

$$\Theta=-\dot{x}\frac{d}{d\theta}(M\cos\theta)=M\sin\theta\frac{dx}{dt}. \tag{7}$$

Интегрируя это выражение по t для одного оборота и деля на время, мы находим для среднего значения Θ:

$$\overline{\Theta}=\frac{1}{2}\frac{M^2RC^2n^3}{R^2C^2n^2+(1-CLn^2)^2}. \tag{8}$$

Если катушка имеет значительный момент инерции, ее вынужденные колебания будут очень малы, а среднее отклонение будет пропорционально $\overline{\Theta}$.

Пусть D_1, D_2, D_3 будут наблюдаемые отклонения, соответствующие угловым скоростям n_1, n_2, n_3 магнита, тогда вообще

$$P\frac{n}{D}=\left(\frac{1}{n}-CLn\right)^2+R^2C^2, \tag{9}$$

где P есть константа.

Исключая P и R из трех уравнений этой формы, мы находим:

$$C^2L^2=\frac{1}{n_1^2n_2^2n_3^2}\,\frac{\frac{n_1^3}{D_1}(n_2^2-n_3^2)+\frac{n_2^3}{D_2}(n_3^2-n_1^2)+\frac{n_3^3}{D_3}(n_1^2-n_2^2)}{\frac{n_1}{D_1}(n_2^2-n_3^2)+\frac{n_2}{D_2}(n_3^2-n_1^2)+\frac{n_3}{D_3}(n_1^2-n_2^2)}\,. \tag{10}$$

Если n_2 таково, что $CLn_2^2=1$, величина $\frac{n}{D}$ будет минимумом для этой величины n. Должны быть взяты другие значения n, одно — большее, а другое — меньшее n_2.

Величина CL, определенная из уравнения (10), имеет размерность квадрата времени. Назовем ее τ^2.

Если C_s будет электростатически измеренной емкостью конденсатора и L_m электромагнитно измеренной самоиндукцией катушки, то C_s и L_m имеют размерности длины, и произведение

$$C_sL_m=v^2C_sL_s=v^2C_mL_m=v^2\tau^2 \tag{11}$$

и

$$v^2=\frac{C_sL_m}{\tau^2}, \tag{12}$$

где τ^2 есть значение C^2L^2, определенное экспериментально.

Предложенный здесь опыт в качестве метода определения имеет тот же характер, что и опыт, описанный сэром У. Р. Гров (W. R. Grove, Phil. Mag., стр. 360—363, март 1868 г.). Смотри также примечание по поводу этого опыта, сделанное автором настоящей работы, в майском номере указанного журнала 1868 г., стр. 360—363.

VI. *Электростатическое измерение сопротивления* (см. параграф 355)

780.]* Пусть конденсатор емкости C будет разряжен через проводник сопротивления R. Тогда, если x есть заряд в некоторый момент,

$$\frac{x}{C} + R\frac{dx}{dt} = 0, \tag{1}$$

откуда

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{2}$$

Если каким-нибудь способом мы можем осуществить кратковременный контакт, промежуток времени которого в точности известен, так что мы позволяем току течь через проводник в течение времени t, то, если E_0 и E_1 являются показаниями электрометра, соединенного с конденсатором, до и после этой операции:

$$RC(\ln E_0 - \ln E_1) = t. \tag{3}$$

Если C известно в электростатическом измерении как линейная величина, R может быть найдено из этого уравнения в электростатическом измерении как обратная величина некоторой скорости.

Если R_s есть численное значение сопротивления, определенное таким образом, и R_m — численное значение сопротивления в электромагнитном измерении, то

$$v^2 = \frac{R_m}{R_s}. \tag{4}$$

Так как для этого опыта необходимо, чтобы R было очень велико, и так как, с другой стороны, R должно быть мало в электромагнитных опытах, описанных в параграфе 763 и дальше, опыты должны быть выполнены на различных проводниках и сопротивления этих проводников сравнены обычными методами.

ГЛАВА XX

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА (22)

781.] В различных частях этого трактата делалась попытка объяснения электромагнитных явлений при помощи механического действия, передаваемого от одного тела к другому при посредстве среды, занимающей пространство между этими телами. Волновая теория света также допускает существование какой-то среды. Мы должны теперь показать, что свойства электромагнитной среды идентичны со свойствами светоносной среды.

Заполнять пространство новой средой всякий раз, когда следует объяснить какое-либо новое явление, никоим образом не является истинно философской процедурой. Однако если изучение двух различных отраслей науки независимо друг от друга выдвинуло идею среды и если свойства, которые должны быть приписаны этой среде, исходя из электромагнитных явлений, имеют тот же самый характер, как и свойства, которые мы приписываем светоносной среде для объяснения явлений света, то очевидность физического существования такой среды серьезно укрепляется.

Но свойства тел могут быть измерены количественно. Мы, таким образом, получаем численное значение некоторых свойств среды, таких, как скорость, с которой возмущение распространяется через нее, которая может быть вычислена из электромагнитных опытов, а также наблюдена непосредственно в случае света.

Если бы было найдено, что скорость распространения электромагнитных возмущений такова же, как и скорость света не только в воздухе, но и других прозрачных средах, мы получили бы серьезное основание для того, чтобы считать свет электромагнитным явлением, и тогда сочетание оптической и электрической очевидности даст такое же доказательство реальности среды, какое мы получаем в случае других форм материи на основании совокупного свидетельства наших органов чувств.

782.] При испускании света известное количество энергии затрачивается святящимся телом; если свет поглощается другим телом, это тело нагревается, а это показывает, что оно получило извне какую-то энергию. В течение промежутка времени, после того, как свет был испущен первым телом, и до того, как он достиг второго тела, энергия должна была существовать в промежуточном пространстве.

Согласно эмиссионной теории передача света от светящегося к освещаемому телу производится посредством световых частиц, которые несут с собой свою кинетическую энергию совместо с любым другим видом энергии, который может быть им присущ.

Согласно волновой теории имеется материальная среда, заполняющая пространство между двумя телами, и энергия передается путем действия прилегающих частей этой среды, так что энергия перемещается от одной части к следующей до тех пор, пока не достигает освещаемого тела.

Светоносная среда, следовательно, во время прохождения света через нее является вместилищем энергии. В волновой теории в том виде, как она разработана Гюйгенсом, Френелем, Юнгом, Грином и др., предполагается, что эта энергия частично потенциальная и частично кинетическая. Происхождение потенциальной энергии обусловлено деформацией элементарных частей среды.

Мы, следовательно, должны рассматривать среду как упругую.

Кинетическая энергия предполагается обусловленной колебательным движением частей среды. Мы, следовательно, должны рассматривать среду, как имеющую конечную плотность.

В теории электричества и магнетизма, принятой в этом трактате, рассматриваются две формы энергии: электростатическая и электрокинетическая (см. параграфы 630 и 636), и эти формы энергии предполагаются находящимися не только в наэлектризованных или намагниченных телах, но в любой части окружающего пространства, где наблюдается действие электрической или магнитной силы. Таким образом, наша теория сходится с волновой теорией в допущении существования среды, которая способна стать вместилищем двух форм энергии *).

783.] Определим теперь условия распространения электромагнитного возмущения через однородную среду, которую мы будем предполагать в состоянии покоя, т. е. не имеющей другого движения за исключением того, которое может иметь место при элекромагнитных возмущениях. Пусть C будет удельная проводимость среды, K—ее удельная емкость по отношению к электростатической индукции и μ—ее магнитная «проницаемость».

Для того чтобы получить общее уравнение электромагнитного возмущения, мы должны выразить истинный ток $\mathfrak{C}$ как функцию вектора потенциала $\mathfrak{A}$ и электрического потенциала Ψ.

Истинный ток $\mathfrak{C}$ состоит из тока проводимости $\mathfrak{K}$ и изменения электрического смещения $\mathfrak{D}$, а так как

---

*) «По моему мнению, рассматривая отношения вакуума к магнитной силе и общий характер магнитных явлений, внешних по отношению к магниту, я более склоняюсь к тому, что в передаче силы существует некоторое действие, внешнее по отношению к магниту и отличное от простого притяжения и отталкивания на расстоянии. Такое действие может быть функцией эфира; так как вовсе не невозможно, что в том случае, если эфир действительно существует, он может иметь и другое применение, кроме как быть только посредником для передачи излучений». Faraday, Exp. Res. (3075).

оба эти элемента зависят от электродвижущей интенсивности $\mathfrak{E}$, мы находим, как в параграфе 611,

$$\mathfrak{C} = \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt}\right) \mathfrak{E}. \tag{1}$$

При отсутствии движения среды мы можем выразить электродвижущую интенсивность, как в параграфе 599, через

$$\mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi, \tag{2}$$

откуда

$$\mathfrak{C} = -\left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt}\right) \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \nabla\Psi\right). \tag{3}$$

Но мы можем и другим путем определить отношение между $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{A}$, как это показано в параграфе 616, уравнения (4) которого могут быть написаны в форме

$$4\pi\mu\mathfrak{C} = \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla J, \tag{4}$$

где

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}. \tag{5}$$

Комбинируя уравнения (3) и (4), мы получаем:

$$\mu\left(4\pi C + K \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \nabla\Psi\right) + \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla J = 0, \tag{6}$$

что можно выразить в форме следующих трёх уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\mu\left(4\pi C + K \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dF}{dt} + \frac{d\Psi}{dx}\right) + \nabla^2 F + \frac{dJ}{dx} = 0,\\
\mu\left(4\pi C + K \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dt} + \frac{d\Psi}{dy}\right) + \nabla^2 G + \frac{dJ}{dy} = 0,\\
\mu\left(4\pi C + K \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dt} + \frac{d\Psi}{dz}\right) + \nabla^2 H + \frac{dJ}{dz} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Это—общие уравнения электромагнитных возмущений. Если мы продифференцируем эти уравнения по

x, y и z соответственно и сложим, то получим:

$$\mu\left(4\pi C + K\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dJ}{dt} - \nabla^2\Psi\right) = 0. \qquad (8)$$

Если среда не является проводником, C равняется нулю, и $\nabla^2\Psi$, которое пропорционально объемной плотности свободного электричества, не зависит от t. Отсюда J должно быть линейной функцией t, постоянной или же нулем. Поэтому при рассмотрении периодических возмущений мы можем не учитывать величин J и Ψ.

Распространение волновых движений в среде, являющейся непроводником

784.] В этом случае $C = 0$, и уравнения принимают форму:

$$\left.\begin{aligned} K\mu\frac{d^2F}{dt^2} + \nabla^2 F &= 0, \\ K\mu\frac{d^2G}{dt^2} + \nabla^2 G &= 0, \\ K\mu\frac{d^2H}{dt^2} + \nabla^2 H &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Уравнения в этой форме похожи на уравнения движения упругого твердого тела, и когда даны начальные условия, решение может быть выражено в форме, данной Пуассоном *) и примененной Стоксом к теории диффракции **).

Напишем:

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}. \qquad (10)$$

Если значения F, G, H и $\frac{dF}{dt}$, $\frac{dG}{dt}$, $\frac{dH}{dt}$ даны в каждой точке пространства в момент $t = 0$, тогда мы можем определить их значения в любой последующий момент t таким образом.

*) Mem. de l'Acad., т. III, стр. 130 и след.

**) Cambridge Transactions, т. IX, стр. 1—62 (1849).

Пусть O будет точка, для которой мы хотим определить значение F во время t. Беря O в качестве центра, опишем сферу радиусом Vt. Найдем начальную величину F в каждой точке сферической поверхности и возьмем *среднее* $\overline{F}$ из всех этих значений. Найдем также начальные значения $\frac{dF}{dt}$ в каждой точке сферической поверхности, и пусть среднее всех этих значений будет $\frac{d\overline{F}}{dt}$.

Тогда значение F в точке O в момент t будет:

Аналогично:

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt}(\overline{F}t) + t\frac{d\overline{F}}{dt}. \\ G &= \frac{d}{dt}(\overline{G}t) + t\frac{d\overline{G}}{dt}, \\ H &= \frac{d}{dt}(\overline{H}t) + t\frac{d\overline{H}}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

785.] Мы видим, таким образом, что состояние в точке O в каждый момент времени зависит от состояний, существовавших на расстоянии Vt во время, предшествовавшее моменту t, т. е. что возмущение распространяется через среду со скоростью V.

Предположим, что когда $t = 0$, количества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ повсюду равны нулю за исключением объема некоторого пространства S. Тогда их значения в точке O в момент t будут равны нулю, если только сферическая поверхность, описанная вокруг O, как центра с радиусом Vt, не лежит целиком или частью в пределах пространства S. Если точка O находится за пределами пространства S, не будет никакого возмущения в точке O до тех пор, пока Vt не сделается равным кратчайшему расстоянию между O и пространством S. Тогда начнется возмущение в точке O, и оно будет продолжаться до тех пор, пока Vt станет равным наибольшему расстоянию от O до некоторой точки пространства S. В этот момент возмущение в точке O прекратится навсегда.

786.] Величина V, выражающая в параграфе 784 скорость распространения электромагнитных возмущений в непроводящей среде, по уравнению (10) будет равна $\frac{1}{\sqrt{K\mu}}$.

Если этой средой является воздух и если мы примем электростатическую систему измерения, в которой $K=1$ и $\mu=\frac{1}{v^2}$, тогда $V=v$, или скорость распространения численно равна количеству электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице. Если мы примем электромагнитную систему, тогда $K=\frac{1}{v^2}$ и $\mu=1$, следовательно, уравнение $V=v$ остается верным.

В теории, признающей, что свет есть электромагнитное возмущение, распространяющееся в той же самой среде, через которую передаются другие электромагнитные действия, V должно быть скоростью света, величиной, значение которой определялось различными методами. С другой стороны, v есть число электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице, и методы определения этой величины были описаны в последней главе. Они совершенно независимы от метода нахождения скорости света. Отсюда совпадение или несовпадение значений V и v является пробным камнем для электромагнитной теории света.

787.] В следующей таблице главные результаты непосредственного наблюдения скорости света при прохождении как через воздух, так и через межпланетное пространство сопоставляются с основными результатами сравнения электрических единиц:

Скорость света (в метрах в секунду)		Отношение электрических единиц (в метрах в секунду)	
Физо	314 000 000	Вебер	310 740 000
Аберрация и т. п., параллакс Солнца	308 000 000	Максвелл	288 000 000
Фуко	298 360 000	Томсон	282 000 000

Очевидно, что скорость света и отношение единиц являются величинами одного и того же порядка. Ни об одном из них нельзя сказать, что она до сих пор определена с такой степенью точности, которая позволила бы нам утверждать, что одна величина больше или меньше другой. Следует надеятся, что в результате дальнейших опытов отношение между размерами этих двух величин будет установлено более точно.

В то же время наша теория, утверждающая, что эти две величины равны, и выдвигающая физические основания этого равенства, безусловно не опровергается сравнением имеющихся результатов *).

788.] В других средах, кроме воздуха, скорость обратно пропорциональна квадратному корню из произведения диэлектрической и магнитной индуктивных емкостей. Согласно волновой теории скорость света в различных средах обратно пропорциональна их показателям преломления.

---

*) {В нижеследующей таблице, взятой из работы Роза (E. B. Rosa), Phil. Mag., 28, стр. 315, 1889, даются определения v, скорректированные на ошибку в единице сопротивления Британской ассоциации:

1856	Вебер и Кольрауш . .	$3{,}107 \times 10^{10}$ (*см* в секунду)
1868	Максвелл	$2{,}842 \times 10^{10}$
1869	В. Томсон и Кинг . . .	$2{,}808 \times 10^{10}$
1872	Маккичан	$2{,}896 \times 10^{10}$
1879	Айртон и Перри . . .	$2{,}960 \times 10^{10}$
1880	Шида	$2{,}955 \times 10^{10}$
1883	Дж. Дж. Томсон . . .	$2{,}963 \times 10^{10}$
1884	Клеменчич	$3{,}019 \times 10^{10}$
1888	Химстедт	$3{,}009 \times 10^{10}$
1889	В. Томсон	$3{,}004 \times 10^{10}$
1889	Е. Б. Роза	$2{,}9993 \times 10^{10}$
1890	Дж. Дж. Томсон и Сирл	$2{,}9955 \times 10^{10}$

Скорость света в воздухе

Корню (1878)	$3{,}003 \times 10^{10}$
Майкельсон (1879)	$2{,}9982 \times 10^{10}$
Майкельсон (1882)	$2{,}9976 \times 10^{10}$
Ньюкомб (1885)	$\left.\begin{cases} 2{,}99615 \\ 2{,}99682 \\ 2{,}99766 \end{cases}\right\} \times 10^{10}$ }

Отсутствие прозрачных тел, для которых магнитная емкость отличалась бы от магнитной емкости воздуха более чем на весьма малую величину, наводит на мысль, что основная разница между этими средами должна быть обусловлена их диэлектрической емкостью. Согласно нашей теории, следовательно, диэлектрическая емкость прозрачной среды должна быть равна квадрату показателя преломления.

Но значение показателя преломления различно для света различного рода, будучи бо́льшим для света большей частоты колебаний. Мы, следовательно, должны избрать показатель преломления, который соответствует волнам наибольших периодов, потому что они являются единственными волнами, движение которых может быть сравнено с медленными процессами, с помощью которых мы определяем емкость диэлектрика.

789.] Единственный диэлектрик, емкость которого до сих пор была определена с достаточной точностью, — это парафин, для которого в его твердой форме Гибсон и Барклай *) нашли

$$K = 1{,}975 \tag{12}$$

Д-р Гладстон нашел следующее значение показателя преломления расплавленного парафина, удельного веса 0,779, для линий A, D и H:

Температура	A	D	H
54° C	1,4306	1,4357	1,4499
57° C	1,4294	1,4343	1,4493

из которых я вывожу, что показатель преломления для волн бесконечной длины был бы приблизительно равен 1,422. Квадратный корень из K равен 1,405.

Разница между этими числами больше, чем ее можно было бы отнести за счет ошибок наблюдения;

*) Phil. Trans., стр. 573, 1871.

она показывает, что наши теории структуры тел должны быть значительно улучшены, прежде чем мы сможем выводить оптические свойства тел из их электрических свойств. В то же самое время я думаю, что совпадение чисел таково, что если не будет найдено бóльших расхождений между числами, выведенными из оптических и электрических свойств значительного количества веществ, мы могли бы обоснованно заключить, что квадратный корень из K, хотя он, может быть, и не является полным выражением показателя преломления, по меньшей мере является наиболее важным членом в нем*).

Плоские волны

790.] Обратим теперь наше внимание на плоские волны, фронт которых мы предположим нормальным по отношению к оси z. Все физические величины, изменения которых приводят к образованию таких волн, являются функциями только z и t и не зависят от x и y. Отсюда уравнения магнитной индукции (A) параграфа 591 сводятся к

$$a = -\frac{dG}{dz}, \quad b = \frac{dF}{dz}, \quad c = 0, \tag{13}$$

или магнитное возмущение находится в плоскости волны. Это соответствует тому, что мы знаем о возмущении, составляющем свет.

Если положить $\mu\alpha$, $\mu\beta$ и $\mu\gamma$ соответственно вместо a, b и c, то уравнения электрических токов (пара-

---

*) [В докладе, читанном 14 июня 1877 г. в Королевском обществе, д-р Дж. Гопкинсон дает результаты опытов, сделанных с целью определения удельной индуктивной емкости различных сортов стекла. Эти результаты не подтверждают теоретических заключений, которые приводятся в настоящей работе, так как значение K в каждом случае превышает значение квадрата показателя преломления. В последующем докладе Королевскому обществу, зачитанном 6 января 1881 г., д-р Гопкинсон находит, что если μ_∞ обозначает показатель

граф 607) становятся такими:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\mu u &= -\frac{db}{dz} = -\frac{d^2F}{dz^2}, \\ 4\pi\mu v &= \frac{da}{dz} = -\frac{d^2G}{dz^2}, \\ 4\pi\mu w &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Таким образом, электрическое возмущение также находится в плоскости волны, и если магнитное возмущение образуется в одном направлении, скажем в направлении x, то электрическое возмущение находится в перпендикулярном к нему направлении, или направлении y.

Но мы можем вычислить электрическое возмущение другим путем, положив, что f, g, h являются составляющими электрического смещения в непроводящей среде:

$$u = \frac{df}{dt}, \quad v = \frac{dg}{dt}, \quad w = \frac{dh}{dt}. \tag{15}$$

Если P, Q, R являются составляющими электродвижущей напряженности

$$f = \frac{K}{4\pi}P, \quad g = \frac{K}{4\pi}Q, \quad h = \frac{K}{4\pi}R \tag{16}$$

и если среда неподвижна, то уравнения (B) параграфа 598 становятся такими:

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt}. \tag{17}$$

преломления для волн бесконечной длины, то $K = \mu_\infty^2$ для углеводородов, но для животных и растительных жиров $K > \mu_\infty^2$.]

{При электрических колебаниях с частотой около 25 млн. в секунду K — удельная индуктивная емкость стекла — согласно опытам Дж. Дж. Томсона (J. J. Thomson, Proc. Roy. Soc., 20 июня 1889 г.) и Блондло (Blondlot, Comptes Rendus, 11 мая 1891 г., стр. 1058) приближается к μ^2. Лехер (Lecher, Wied. Ann., 42, стр. 142) пришел к противоположному заключению, именно, что отклонения при таких обстоятельствах больше, чем для постоянных сил.}

Отсюда

$$u=-\frac{K}{4\pi}\frac{d^2F}{dt^2},\qquad v=-\frac{K}{4\pi}\frac{d^2G}{dt^2},\qquad w=-\frac{K}{4\pi}\frac{d^2H}{dt^2}. \tag{18}$$

Сравнивая эти значения со значениями, данными в уравнении (14), мы находим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2F}{dz^2}&=K\mu\frac{d^2F}{dt^2},\\ \frac{d^2G}{dz^2}&=K\mu\frac{d^2G}{dt^2},\\ 0&=K\mu\frac{d^2H}{dt^2}.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Первое и второе из этих уравнений являются уравнениями распространения плоской волны и их решение имеет хорошо известную форму:

$$\left.\begin{aligned}F&=f_1(z-Vt)+f_2(z+Vt),\\ G&=f_3(z-Vt)+f_4(z+Vt).\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Решение третьего уравнения таково:

$$H=A+Bt, \tag{21}$$

где A и B являются функциями z. Величина H, следовательно, есть или постоянная или же изменяется пропорционально времени; она не участвует в распространении волн.

791.] Из этого вытекает, что направления как магнитного, так и электрического возмущения лежат в плоскости фронта волны. Математическая форма возмущения, следовательно, совпадает с формой возмущения, составляющего собой свет, будучи поперечным к направлению распространения.

Если мы предположим, что $G=0$, то возмущение будет соответствовать плоскополяризованному лучу света.

Магнитная сила в этом случае параллельна оси y и равна $\frac{1}{\mu}\frac{dF}{dt}$, а электродвижущая интенсивность параллельна оси x и равна $-\frac{dF}{dt}$. Магнитная сила, следовательно, находится в плоскости, перпендикулярной к той, которая содержит электрическую интенсивность.

Значения магнитной силы и электродвижущей интенсивности в некоторый момент в различных точках луча представлены на рис. 19 для случая простого гармонического возмущения в одной плоскости. Это соответствует лучу плоскополяризованного света, но соответствует ли плоскость поляризации плоскости магнитного возмущения или плоскости электрического возмущения, этот вопрос должен быть еще рассмотрен (см. параграф 797).

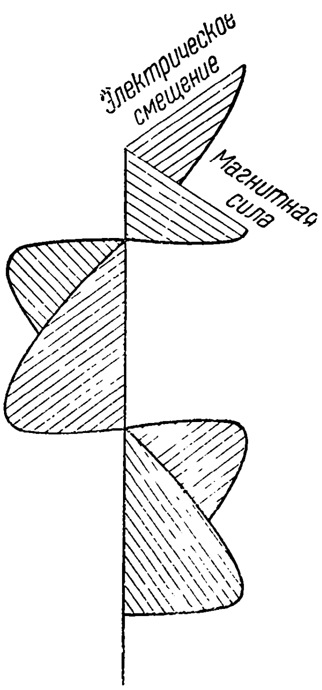


Рис. 19.

Энергия и напряжение излучения

792.] Электростатическая энергия на единицу объема в некоторой точке волны в непроводящей среде равна:

$$\frac{1}{2}fP = \frac{K}{8\pi}P^2 = \frac{K}{8\pi}\left(\frac{dF}{dt}\right)^2. \quad (22)$$

Электрокинетическая энергия в той же самой точке равна:

$$\frac{1}{8\pi}b\beta = \frac{1}{8\pi\mu}b^2 = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{dF}{dz}\right)^2. \quad (23)$$

В силу уравнения (20) эти два выражения равны для единичной волны, так что в любой точке волны внутренняя энергия среды является наполовину электростатической и наполовину электрокинетической.

Пусть p будет значение любой из этих величин, т. е. или электростатической или электрокинетической энергии, на единицу объема.

Тогда в силу электростатического состояния в среде имеется натяжение величины p в направлении, параллельном оси x, соединенное с давлением, также равным p, параллельном осям y и z (см. параграф 107).

В силу электрокинетического состояния в среде имеется натяжение, равное p, в направлении, параллельном оси y, соединенное с давлением, равным p, в направлениях, параллельных осям x и z (см. параграф 643).

Отсюда комбинированный эффект электростатических и электрокинетических напряжений есть *давление*, равное $2p$, в направлении распространения волны. С другой стороны, $2p$ также выражает полную энергию в единице объема ([23]).

Поэтому в среде, в которой распространяются волны, существует давление в направлении, нормальном к волнам, численно равное энергии в единице объема.

793.] Таким образом, если при ярком солнечном свете энергия света, падающего на один квадратный фут, равна 83,4 футо-фунта в секунду, то средняя энергия, заключенная в одном кубическом футе солнечного света, примерно равна 0,0000000882 футо-фунта, а среднее давление на квадратный фут равно 0,0000000882 весового фунта. Плоское тело, подвергающееся действию солнечного света, будет испытывать это давление только на своей освещенной стороне и, следовательно, будет отталкиваться от той стороны, на которую падает свет. Возможно, что значительно бо́льшая энергия излучения могла бы быть получена при помощи концентрированных лучей электрической лампы. Такие лучи, падая на тонкий металлический диск, весьма чувствительным образом подвешенный в вакууме, возможно, произвели бы могущий быть наблюдаемым механический эффект. Если возмущение любого рода состоит из членов, заключающих синусы или косинусы углов, изменяющихся во времени, то максимальная энергия вдвое больше средней энергии. Следовательно, если P есть максимальная электродвижущая напряженность, а β—максимальная магнитная сила, которая участвует в распространении света, то

$$\frac{K}{8\pi}P^2=\frac{\mu}{8\pi}\beta^2=\text{средней энергии в единице объема.} \quad (24)$$

Согласно данным Пуйе (Pouillet) для энергии солнечного света, приведенным Томсоном (Trans. R.S.E., 1854), это дает в электромагнитном измерении:

$P=60\,000\,000$, или около 600 элементов Даниэля на метр *).

$\beta=0{,}193$, или больше чем одна десятая горизонтальной слагающей магнитной силы, наблюдаемой в Англии **).

---

*) {Я не имел возможности проверить эти числа. Если мы примем $v=3\times10^{10}$, среднюю энергию в одном кубическом сантиметре солнечного света, согласно данным Пуйе, приведенным Томсоном, $3{,}92\times10^{-5}$ эрга, то соответствующие значения P и β в том виде, как они даны в уравнении (24), будут в единицах CGS:

$P=9{,}42\times10^8$, или 9,42 вольта на сантиметр,

$\beta=0{,}0314$, или больше чем одна шестая горизонтальной слагающей магнитной силы земли.}

**) {Мы можем рассматривать силы, обусловленные светом, падающим на отражающую поверхность, и с другой точки зрения. Предположим, что отражающая поверхность металлическая. Тогда, если свет падает на поверхность, то изменение магнитной силы наводит токи в металле, и эти токи производят индуктивные действия, противоположные тем, которые вызываются падающим светом, так что индуктивная сила отражается от внутренности металлической пластинки; отсюда токи в пластинке, а следовательно, и интенсивность света быстро уменьшаются по мере удаления от поверхности пластинки. Токи в пластинке сопровождаются магнитными силами, перпендикулярными к ним, соответствующая механическая сила перпендикулярна и к току и к магнитной силе и, следовательно, параллельна направлению распространения света. Если бы свет проходил через непоглощающую среду, эта механическая сила была бы обращена после прохождения половины длины волны, и если бы она была проинтегрирована по конечному времени и расстоянию, то не дала бы никакого результирующего действия. Однако когда токи быстро уменьшаются по мере удаления от поверхности, эффекты, производимые токами, близкими к поверхности, не уравновешиваются эффектами на некотором расстоянии от нее, так что результирующий эффект не исчезает.

Величину этого эффекта мы можем вычислить следующим образом. Рассмотрим случай света, падающего нормально на ме-

Распространение плоской волны в кристаллической среде

794.] Вычисляя на основе данных, доставляемых обычными электромагнитными опытами, электрические эффекты, которые должны быть следствием периодических возмущений, миллионы миллионов которых происходят в течение одной секунды, мы уже подвергли

таллическую пластинку, которую мы будем считать плоскостью xy. Пусть σ будет удельное сопротивление материала. Пусть вектор-потенциал падающего луча будет дан уравнением

$$F = Ae^{i\,(pt-az)};$$

отраженного луча—уравнением

$$F' = A'e^{i\,(pt+az)};$$

преломленного луча—уравнением

$$F'' = A''e^{i\,(pt-a'z)};$$

тогда в воздухе

$$\frac{d^2F}{dz^2} = \frac{1}{V^2}\frac{d^2F}{dt^2},$$

где V есть скорость света в воздухе, откуда

$$a = \frac{p}{V};$$

в металле

$$\frac{d^2F}{dz^2} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{dF}{dt}$$

и, следовательно,

$$a'^2 = -\frac{4\pi\mu i p}{\sigma} = -2in^2,$$

но так как

$$a' = n(1-i),$$

то

$$F'' = A''e^{-nz}\,e^{i(pt-nz)}.$$

Вектор-потенциал на поверхности непрерывен, отсюда

$$A + A' = A''.$$

Магнитная сила, параллельная поверхности, также непренашу теорию очень строгому испытанию, даже при предположении, что средой является воздух или вакуум. Однако если мы попытаемся распространить нашу теорию на случай плотных сред, мы не только наталкиваемся на все обычные затруднения молекулярных

рывна и отсюда

$$a(A-A')=\frac{a'A''}{\mu},$$

или

$$A''=\frac{2A}{1+\frac{a'}{a\mu}},$$

или, так как $\frac{a'}{a}$ очень велико, мы можем написать:

$$A''=2A\frac{a\mu}{a'}=\frac{2A\mu p}{V\sqrt{2n}}e^{i\frac{\pi}{4}},$$

так что в металле действительная часть вектор-потенциала есть:

$$F''=\frac{2A\mu p}{V\sqrt{2n}}e^{-nz}\cos\left(pt-nz+\frac{\pi}{4}\right).$$

Сила тока равна $-\frac{1}{\sigma}\frac{dF''}{dt}$, т. е.

$$\frac{2A\mu p^2}{\sigma V\sqrt{2n}}e^{-nz}\sin\left(pt-nz+\frac{\pi}{4}\right).$$

Магнитная индукция $\frac{dF''}{dz}$ есть:

$$-\frac{2A\mu p}{V\sqrt{2}}e^{-nz}\left\{\cos\left(pt-nz+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(pt-nz+\frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

Механическая сила на единицу объема, параллельная t, является произведением этих двух величин:

$$-\frac{2A^2\mu^2p^3}{\sigma V^2 n}e^{-2nz}\left\{\frac{1}{2}\sin 2\left(pt-nz+\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left[1-\cos 2\left(pt-nz+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}.$$

Среднее значение этого выражения дается непериодичетеорий, но и на еще более глубокую тайну отношений молекул к электромагнитной среде.

Для того чтобы избежать этих затруднений, мы допустим, что в некоторых средах удельная емкость электростатической индукции различна в различных направлениях, или, иными словами, что электрическое смещение, вместо того чтобы иметь то же направление, что и электродвижущая напряженность, и быть про-

---

ским членом и равно:

$$\frac{A^2\mu^2p^3}{\sigma V^2 n}e^{-2nz}.$$

Интегрируя это выражение по z от $z=0$ до $z=\infty$, мы находим, что сила, действующая на единицу площади пластинки, равна:

$$\frac{1}{2}\frac{A^2\mu^2p^3}{\sigma V^2n^2}=\frac{A^2\mu p^2}{4\pi V^2}.$$

Подобное же исследование покажет, что в тех случаях, когда мы имеем поглощаемую среду, то на нее действуют силы от мест с большей интенсивностью света по направлению к местам с меньшей интенсивностью. В случае солнечного света эффект, повидимому, мал, но если поглощение было бы обусловлено очень разреженным газом, то градиент давления мог бы быть настолько большим, что производил бы весьма значительные эффекты. Было высказано предположение, что эта причина является одним из действующих факторов, обусловливающих отталкивание солнцем кометных хвостов. Когда электрические колебания подобны тем, которые имеют место в опытах Герца, магнитные силы значительно больше, чем магнитные силы в солнечном свете, и производимый ими эффект можно было бы обнаружить, если каким-либо способом поддерживать действие вибраторов непрерывным.

Мы также получаем механические силы, среднее значение которых в точке не является равным нулю, когда имеем стационарные колебания. В качестве примера стационарных колебаний мы можем взять отраженные и падающие волны в вышеприведенном примере.

В воздухе вектор-потенциал, помня, что $\frac{a}{a'}$ мало, есть:

$$Ae^{i(pt-az)}+A'e^{i(pt+az)},$$

или взяв действительную часть, так как $A+A'=0$ приблипорциональным ей, связано с ней системой линейных уравнений, подобных тем, которые приведены в параграфе 297*). Может быть показано, как в параграфе 436*), что система коэффициентов должна быть симметричной, так что при надлежащем выборе осей уравнения становятся такими:

$$f=\frac{1}{4\pi}K_1P,\quad g=\frac{1}{4\pi}K_2Q,\quad h=\frac{1}{4\pi}K_3R, \tag{1}$$

где K_1, K_2, K_3 являются главными индуктивными емкостями среды. Уравнения распространения возмущений, следовательно, будут:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2F}{dy^2}+\frac{d^2F}{dz^2}-\frac{d^2G}{dx\,dy}-\frac{d^2H}{dz\,dx}&=K_1\mu\left(\frac{d^2F}{dt^2}+\frac{d^2\Psi}{dx\,dt}\right),\\
\frac{d^2G}{dz^2}+\frac{d^2G}{dx^2}-\frac{d^2H}{dy\,dz}-\frac{d^2F}{dx\,dy}&=K_2\mu\left(\frac{d^2G}{dt^2}+\frac{d^2\Psi}{dy\,dt}\right),\\
\frac{d^2H}{dx^2}+\frac{d^2H}{dy^2}-\frac{d^2F}{dz\,dx}-\frac{d^2G}{dy\,dz}&=K_3\mu\left(\frac{d^2H}{dt^2}+\frac{d^2\Psi}{dz\,dt}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

795.] Если l, m, n являются направляющими косинусами нормали к фронту волны, а V—скорость волны, то

$$lx+my+nz-Vt=w. \tag{3}$$

зительно

$$2A\sin pt\sin az.$$

Ток есть:

$$\frac{1}{4\pi\mu}\frac{d^2F}{dz^2}=\frac{a^2A}{2\pi\mu}\sin pt\cos az;$$

магнитная индукция есть:

$$2Aa\sin pt\cos az;$$

механическая сила, следовательно, равна:

$$\frac{A^2a^3}{2\pi\mu}(1-\cos 2pt)\sin az\cos az,$$

а средняя величина ее есть:

$$\frac{A^2a^3}{2\pi\mu}\sin az\cos az.\}$$

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

Если мы обозначим через F'', G'', H'', Ψ'' вторые производные от коэффициентов F, G, H, Ψ соответственно по w и положим:

$$K_1\mu=\frac{1}{a^2}, \qquad K_2\mu=\frac{1}{b^2}, \qquad K_3\mu=\frac{1}{c^2}, \tag{4}$$

где a, b, c являются тремя главными скоростями распространения, уравнения становятся следующими:

$$\left.\begin{aligned}\left(m^2+n^2-\frac{V^2}{a^2}\right)F''-lmG''-nlH''+V\Psi''\frac{l}{a^2}=0,\\ -lmF''+\left(n^2+l^2-\frac{V^2}{b^2}\right)G''-mnH''+V\Psi''\frac{m}{b^2}=0,\\ -nlF''-mnG''+\left(l^2+m^2-\frac{V^2}{c^2}\right)H^2+V\Psi''\frac{n}{c^2}=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

796.] Если мы положим:

$$\frac{l^2}{V^2-a^2}+\frac{m^2}{V^2-b^2}+\frac{n^2}{V^2-c^2}=U, \tag{6}$$

то из этих уравнений получим:

$$\left.\begin{aligned}VU\,(VF''-l\Psi'')&=0,\\ VU\,(VG''-m\Psi'')&=0,\\ VU\,(VH''-n\Psi'')&=0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отсюда или $V=0$, в таком случае волна вообще не распространяется, или $U=0$, что приводит к уравнению для V, данному Френелем, или величины, находящиеся внутри скобок, исчезают, в таком случае вектор, составляющими которого являются F'', G'', H'', нормален к фронту волны и пропорционален объемной плотности электричества.

Поскольку среда является непроводником, электрическая плотность в любой данной точке постоянна, и поэтому возмущение, выражаемое этими уравнениями, не периодическое и не может образовать волну. Поэтому мы должны при исследовании волны считать $\Psi''=0$.

797.] Скорость распространения волны, следовательно, полностью определяется уравнением $U=0$, или

$$\frac{l^2}{V^2-a^2}+\frac{m^2}{V^2-b^2}+\frac{n^2}{V^2-c^2}=0. \tag{8}$$

Таким образом, имеются два и только два значения V^2 для данного направления фронта волны.

Если λ, μ, ν являются направляющими косинусами электрического тока, составляющие которого суть u, v, w, то

$$\lambda:\mu:\nu=\frac{1}{a^2}F'':\frac{1}{b^2}G'':\frac{1}{c^2}H'', \tag{9}$$

откуда

$$l\lambda+m\mu+n\nu=0, \tag{10}$$

т. е. ток находится в плоскости фронта волны и направление этой плоскости определяется уравнением

$$\frac{l}{\lambda}(b^2-c^2)+\frac{m}{\mu}(c^2-a^2)+\frac{n}{\nu}(a^2-b^2)=0. \tag{11}$$

Эти уравнения идентичны уравнениям Френеля, если определить плоскость поляризации как плоскость, проходящую через луч и перпендикулярную к плоскости электрического возмущения.

Согласно этой электромагнитной теории двойного преломления волн продольного возмущения, которое представляет собой одно из главных затруднений для обычной теории, вообще не существует, и не требуется никакого нового допущения для того, чтобы согласовать теорию с тем фактом, что луч, поляризованный в главной плоскости кристалла, отражается обычным образом *).

---

*) Stokes, «Report on double refraction», Brit. Ass. Report, 1862, стр. 253.

Связь между электрической проводимостью и непрозрачностью

798.] Если среда, вместо того чтобы быть идеальным изолятором, является проводником, проводимость которого на единицу объема равна C, возмущение будет состоять не только из электрических смещений, но и из токов проводимости, в результате которых электрическая энергия преобразуется в тепло, так что волновое движение поглощается средой.

Если возмущение выражается периодической функцией, мы можем написать:

$$F = e^{-pz} \cos(nt - qz), \tag{1}$$

так как это будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2F}{dz^2} = \mu K \frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dF}{dt} \tag{2}$$

при условии, что

$$q^2 - p^2 = \mu K n^2 \tag{3}$$

и

$$2pq = 4\pi\mu C n. \tag{4}$$

Скорость распространения будет:

$$V = \frac{n}{q} \tag{5}$$

и коэффициент поглощения

$$p = 2\pi\mu CV. \tag{6}$$

Пусть R будет в электромагнитном измерении сопротивлением току вдоль длины l пластинки, ширина которой равняется b и толщина z:

$$R = \frac{l}{bzC}. \tag{7}$$

Часть падающего света, переданная этой пластинкой, будет:

$$e^{-2pz} = e^{-4\pi\mu\frac{l}{b}\frac{V}{R}}. \tag{8}$$

799.] Большинство прозрачных твердых тел является хорошими изоляторами, а все хорошие проводники весьма непрозрачны. Однако имеется много исключений из закона, согласно которому чем больше непрозрачность тела, тем больше его проводимость.

Электролиты пропускают электрический ток, а все же многие из них прозрачны. Однако мы можем предположить, что в случае быстро изменяющихся сил, которые имеют место при распространении света, электродвижущая интенсивность действует в одном направлении в течение столь короткого времени, что она не способна вызвать полного разделения соединенных молекул. Когда в течение другой половины колебания электродвижущая интенсивность действует в противоположном направлении, она просто обращает то, что она сделала в течение первой половины. Таким образом, в электролите нет истинной проводимости, нет потери электрической энергии и, следовательно, нет поглощения света.

800.] Золото, серебро и платина являются хорошими проводниками и все же, будучи прокатаны в очень тонкие пластинки, они пропускают через себя свет *). Из опытов, произведенных мною с куском золотого листа, сопротивление которого определил Хоккин (Hockin) вытекает, что его прозрачность значительно больше, чем это согласуется с нашей теорией, если только мы не предположим, что имеется меньше потери энергии, когда электродвижущие силы действуют в обратном направлении в течение каждого полуколебания света, чем когда они действуют в течение больших промежутков времени, как в наших обычных опытах.

*) {Вин (Wien, Wied. Ann., 35, стр. 48) проверил заключение о том, что прозрачность тонких металлических пленок значительно больше той, которая указана в предыдущих теоретических рассуждениях.}

801.] Рассмотрим теперь случай среды, проводимость которой велика сравнительно с индуктивной емкостью. В этом случае мы можем опустить члены, заключающие K, в уравнениях параграфа 783, и тогда они примут вид

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 F + 4\pi\mu C \frac{dF}{dt} = 0, \\ \nabla^2 G + 4\pi\mu C \frac{dG}{dt} = 0, \\ \nabla^2 H + 4\pi\mu C \frac{dH}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Каждое из этих уравнений имеет ту же самую форму, что и уравнение теплопроводности, данное в «Traité de la Chaleur» Фурье.

802.] Если взять в качестве примера первое уравнение, составляющая F вектора-потенциала будет изменяться во времени и по положению совершенно так же, как температура однородного твердого тела изменяется в зависимости от времени и положения, причем начальные и граничные условия таковы, что они соответствуют друг другу в обоих случаях, и количество $4\pi\mu C$ численно равно обратной величине термической проводимости вещества, т. е. *количеству единиц объема вещества, которые были бы нагреты на один градус теплом, проходящим через единицу объема вещества, температуры двух противоположных сторон которого разнятся на один градус, в то время как другие стороны непроницаемы для тепла* *).

Различные задачи термической проводимости, решения которых даны Фурье, могут быть превращены в задачи проводимости электромагнитных величин, учитывая, однако, что F, G, H являются составляющими вектора, в то время как температура в задачах Фурье является скалярной величиной.

---

*) См. Maxwell, «Theory of Heat», стр. 235 первого издания; стр. 255 четвертого издания.

Возьмем один из случаев, которому Фурье дал полное решение *), случай бесконечной среды, начальное состояние которой известно.

Состояние некоторой точки среды в момент времени t получается путем определения среднего значения состояний в каждой части среды, причем значение каждой части при определении средней величины равно $e^{-\frac{\pi\mu C r^2}{t}}$, где r есть расстояние от этой части до рассматриваемой точки. Это среднее в случае векторных величин наиболее удобно вычисляется путем учета каждой составляющей вектора в отдельности.

803.] Мы в первую очередь должны заметить, что в этой проблеме термическая проводимость среды Фурье должна быть взята обратно пропорциональной электрической проводимости нашей среды, так что время, потребное для того, чтобы достигнуть намеченной стадии в процессе диффузии, тем больше, чем выше электрическая проводимость. Это утверждение не покажется парадоксальным, если мы вспомним результаты параграфа 655, согласно которым среда с бесконечной проводимостью образует непреодолимый барьер для процесса распространения магнитной силы.

Далее, промежуток времени для достижения намеченной стадии в процессе диффузии пропорционален квадрату линейных размеров системы.

Нет определенной скорости, которая могла бы быть указана как скорость диффузии. Если мы попытаемся измерить эту скорость путем определения времени, потребного для производства возмущения данной вели-

---

*) Traité de la Chaleur, параграф 384. Уравнение, которое определяет температуру v в точке (x, y, z) по истечении времени t как функцию от $f(\alpha, \beta, \gamma)$—начальной температуры в точке (α, β, γ), есть:

$$v = \iiint \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{2^3\sqrt{k^2\pi^3 t^3}}\, e^{-\left(\frac{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}{4kt}\right)} f(\alpha, \beta, \gamma),$$

где k есть термическая проводимость.

чины на данном расстоянии от начала возмущения, мы найдем, что чем меньше выбранное значение возмущения, тем большей представляется скорость; таким образом, как бы ни было велико расстояние и как бы ни было мало время, величина возмущения будет математически отличаться от нуля.

Эта особенность диффузии отличает ее от распространения при помощи волн, которое происходит с определенной скоростью. Никакое нарушение равновесия не имеет места в данной точке до тех пор, пока волна не достигнет этой точки, но когда волна прошла, тогда возмущение прекращается навсегда.

804.] Исследуем теперь процесс, который имеет место в том случае, когда электрический ток начинается и продолжает течь через линейную цепь, причем среда, окружающая цепь, имеет конечную электрическую проводимость (ср. с параграфом 660).

Когда начинается ток, то первым эффектом является образование тока индукции в частях среды, прилегающих к проводнику. Направление этого тока противоположно направлению первоначального тока, и в первый момент его полная величина равна полной величине первоначального тока, так что электромагнитный эффект в более удаленных частях среды сначала равен нулю; он увеличивается до конечной величины по мере затухания наведенного тока из-за электрического сопротивления среды. Но по мере того как индуктированный ток, близко расположенный к проволоке, затухает, в более удаленных частях среды возникает новый индуктированный ток, так что пространство, занимаемое индуктированным током, все время расширяется, в то время как его сила все время уменьшается.

Эта диффузия и затухание индуктированного тока — явление, в точности аналогичное диффузии тепла от части среды, более горячей или более холодной, чем остальные части среды. Мы, однако, должны помнить, что ток есть векторная величина; он направлен в противоположные стороны в противоположных точках цепи. Поэтому, вычисляя данную составляющую индуктированного тока, мы должны проводить сравнение с задачей, в которой равные количества тепла и холода распространяются из соседних мест, а в этом случае действие на отдаленные точки будет иметь меньший порядок величины.

805.] Если ток в линейной цепи поддерживается постоянным, наведенные токи, зависящие от начального изменения состояния, будут постепенно распространяться и затухать, оставляя среду в ее перманентном состоянии, которое аналогично перманентному состоянию потока тепла. В этом состоянии мы имеем:

$$\nabla^2 F = \nabla^2 G = \nabla^2 H = 0 \qquad (2)$$

во всех точках среды, за исключением тех, которые заняты цепью, для которой {при $\mu = 1$} будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 F &= 4\pi u, \\ \nabla^2 G &= 4\pi v, \\ \nabla^2 H &= 4\pi w. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Эти уравнения достаточны для определения величин F, G, H во всех точках среды. Они указывают, что нет никаких токов, за исключением токов в цепи, и что магнитные силы—просто те силы, которые обусловлены наличием тока в цепи согласно обычной теории. Скорость, с которой это перманентное состояние устанавливается, столь велика, что она не могла бы быть измеренной нашими экспериментальными методами, за исключением, пожалуй, случаев очень большой массы высокопроводящей среды, такой, как, например, медь.

Примечание. В докладе, опубликованном в «Анналах» Поггендорффа (Poggendorff's «Annalen») за июль 1867 г., стр. 243—263, М. Лоренц вывел из уравнений электрических токов Кирхгофа (Pogg. Annal. CII, 1857) путем добавления некоторых членов, которые не влияют на какой-либо экспериментальный результат, новый ряд уравнений, указывающих, что распределение силы в электромагнитном поле может рассматриваться как возникающее от взаимодействия соприкасающихся элементов и что волны, состоящие из поперечных электрических токов, могут распространяться в непроводящих средах со скоростью, сравнимой со скоростью света. Отсюда он рассматривает возмущение, которое представляет собой свет, как идентичное этим электрическим токам и показывает, что проводящие среды должны быть непрозрачны для подобных излучений.

Эти выводы аналогичны выводам этой главы, хотя они получены совершенно отличным методом. Теория, излагаемая в этой главе, была впервые опубликована в Phil. Trans. за 1865 г., стр. 459—512.

ГЛАВА XXI

ДЕЙСТВИЕ МАГНЕТИЗМА НА СВЕТ

806.] Наиболее важным шагом в установлении отношения между электрическими и магнитными явлениями и явлениями света должно быть открытие какого-то примера, когда один ряд явлений воздействует на другой. В поисках таких явлений мы должны руководствоваться результатами, которые мы уже получили в отношении математических или геометрических величин, которые мы хотим сравнивать. Так, если мы будем пытаться намагнитить стрелку при помощи света, как это пыталась сделать госпожа Соммервил, мы должны вспомнить, что различие между магнитным севером и югом есть просто вопрос направления, и если бы мы изменили известные условия в отношении использования математических знаков, они поменялись бы местами. В магнетизме нет ничего, что было бы аналогично явлениям электролиза, которые позволяют нам отличать положительное электричество от отрицательного, наблюдая, например, что кислород появляется на одном полюсе, а водород—на другом.

Поэтому мы не должны ожидать, что при освещении светом одного конца стрелки этот конец сделается полюсом с определенным наименованием, так как два полюса не отличаются друг от друга в той мере, в которой свет отличается от темноты.

Мы могли бы ожидать лучшего результата, если бы заставили поляризованный по кругу свет падать на стрелку так, чтобы правосторонний свет падал на один конец, а левосторонний—на другой конец, ибо в некоторых отношениях эти два рода света могут считаться относящимися друг к другу, как полюсы магнита. Аналогия, однако, порочна даже здесь, так как эти два луча, будучи сложены, не нейтрализуют друг друга, а производят плоскополяризованный луч.

Фарадей, который был знаком с методом изучения напряжений, вызываемых в прозрачных твердых телах поляризованным светом, делал много опытов в надежде открыть какое-то действие поляризованного света во время прохождения его через среду, в которой существует электролитическая проводимость, или диэлектрическая индукция *). Однако он не смог обнаружить какого-либо действия этого рода, хотя опыты были организованы наилучшим возможным образом, приспособленным для установления эффектов напряжения, когда электрическая сила или ток были перпендикулярны к направлению луча и под углом 45 градусов к плоскости поляризации. Фарадей варьировал эти опыты многими путями, но не смог открыть какого-либо действия на свет, которое относится к электролитическому току или статической электрической индукции.

Ему, однако, удалось установить отношение между светом и магнетизмом, и опыты, при помощи которых он это выполнил, описаны в XIX серии его «Экспериментальных исследований». Мы возьмем открытие Фарадея как исходную точку для дальнейшего исследования природы магнетизма и поэтому подробно опишем то явление, которое он наблюдал.

807.] Луч прямолинейно-поляризованного света передается через прозрачную диамагнитную среду, а плоскость его поляризации при его выходе из среды устанавливается путем наблюдения положения анализатора, когда он гасит этот луч. Тогда устанавливают действие магнитной силы таким образом, что направление силы в пределах прозрачной среды сов-

*) Experimental Researches (951—954) и (2216—2220).

падает с направлением луча. Луч тотчас же снова появляется, но если анализатор поворачивают на определенный угол, свет снова гасится. Это показывает, что эффект магнитной силы состоит во вращении плоскости поляризации около направления луча как оси на определенный угол, измеряемый углом, на который анализатор должен быть повернут для того, чтобы погасить свет.

808.] Угол, на который плоскость поляризации поворачивается, пропорционален:

(1) Расстоянию, которое луч проходит в пределах среды; благодаря этому положение плоскости поляризации изменяется непрерывно от ее положения при входе до ее положения при выходе луча из среды.

(2) Интенсивности составляющей магнитной силы в направлении луча.

(3) Величина вращения зависит от природы среды. До сего времени не было наблюдено какого-либо вращения, когда этой средой является воздух или какой-либо другой газ *). Эти три положения включены в одно более общее, а именно, что угловое вращение численно равно величине, на которую увеличивается магнитный потенциал от точки, в которой луч входит в среду, до той точки, в которой он покидает ее, помноженное на коэффициент, который для диамагнитных сред обычно положителен.

809.] Направление, в котором плоскость поляризации вращается в диамагнитных субстанциях, обычно является тем же самым, что и направление, в котором положительный ток должен циркулировать вокруг луча для того, чтобы произвести магнитную силу в том же направлении, в котором она фактически существует в среде.

---

*) {С тех пор, как это было написано, вращение плоскости поляризации в газах было наблюдено и измерено Беккерелем (H. Becquerel, Compt. Rendus, 88, стр. 709; 90, стр. 1407); Кундтом и Рентгеном (Kundt und Röntgen, Wied. Ann., 6, стр. 332; 8, стр. 278); Биша (Bichat, Compt. Rendus, 88, стр. 712; Journal de Physique, 9, стр. 275, 1880).}

Верде (Verdet), однако, открыл, что в определенных ферромагнитных средах, таких, как, например, крепкий раствор перхлорида железа в древесном спирту или эфире, вращение наблюдается в противоположном направлении тому току, который бы произвел соответствующую магнитную силу. Это показывает, что различие между ферромагнитными и диамагнитными веществами заключается не только в «магнитной проницаемости», которая в первом случае больше, а во втором случае меньше, чем в воздухе, но что свойства этих двух классов тел действительно противоположны.

Приобретенная веществом под действием магнитной силы способность вращения плоскости поляризации света не в точности пропорциональна его диамагнитной или ферромагнитной намагничиваемости. Действительно, имеются исключения из того правила, что вращение является положительным для магнитных и отрицательным для ферромагнитных веществ, так как, например, нейтральный хромистый калий является диамагнитным, но производит отрицательное вращение.

810.] Имеются другие вещества, которые и без наличия магнитной силы вращают плоскость поляризации вправо или влево, когда луч проходит через вещество. В некоторых из них эту способность следует отнести за счет существования некоторой оси, как, например, в случае кварца. В других эта способность не зависит от направления луча внутри среды, как, например, в скипидаре, растворе сахара и т. п. Во всех этих веществах, однако, если плоскость поляризации проходящего луча вращается в среде подобно винту с правосторонней нарезкой, она все-таки будет вращаться подобно правостороннему винту, если луч пропускается через среду в противоположном направлении. Направление, в котором наблюдатель должен повернуть свой анализатор для того, чтобы погасить луч после того, как он пропустил его через среду, одно и то же по отношению к наблюдателю вне зависимости от того, приходит ли луч к нему с севера или с юга. Иначе говоря, направление вращения обращается в пространстве, когда обращается направление луча. Но когда вращение производится магнитным действием, его направление в пространстве одно и то же вне зависимости от того, направляется ли луч на север или на юг. Если среда принадлежит к положительному классу, то вращение всегда происходит в одном и том же направлении, именно, в направлении положительного электрического тока, который производит или произвел бы существующее магнитное состояние поля; вращение происходит в противоположном направлении, если среда принадлежит к отрицательному классу.

Из этого следует, что если луч света, пройдя через среду с севера на юг, отражается зеркалом с тем, чтобы вернуться обратно через среду в направлении с юга на север, вращение будет удвоено, если оно обусловлено магнитным действием. Когда вращение зависит от природы только среды, как, например, в скипидаре и других веществах, луч, будучи отражен обратно через среду, выходит поляризованным в той же самой плоскости, в какой он вошел, так как поворот во время первого прохождения через среду в этом случае в точности нейтрализуется обратным поворотом во время второго прохождения.

811.] Физическое объяснение этого явления представляет собой значительные трудности, о которых нельзя сказать, чтобы они до сего времени были побеждены, будь то в отношении магнитного вращения или в отношении того вращения, которое отдельные среды обусловливают сами по себе. Мы, однако, можем подготовить путь для подобного объяснения путем анализа наблюдаемых фактов.

Хорошо известна теорема кинематики, согласно которой два равномерных круговых колебания той же самой амплитуды и того же самого периода, находящихся в той же самой плоскости, но с противоположными направлениями вращения, будучи соединены вместе, эквивалентны прямолинейному колебанию. Период этого колебания равен периоду круговых колебаний, амплитуда же удвоенная и направлена по линии, соединяющей точки, в которых встретились бы две частицы, совершающие круговые колебания в противоположных направлениях на той же самой окружности. Следовательно, если одно из круговых колебаний ускорит свою фазу, направление прямолинейного колебания повернется в направлении, в котором происходит это круговое колебание, на угол, равный половине угла ускорения фазы.

Таким образом, путем прямого оптического опыта может быть доказано, что два луча света, поляризованных по кругу в противоположных направлениях и имеющих ту же самую интенсивность, будучи объединены, превращаются в плоскополяризованный луч, и если каким бы то ни было способом ускоряется фаза одного из циркулярно-поляризованных лучей, то плоскость поляризации результирующего луча поворачивается на половину угла ускорения фазы.

812.] Мы можем, следовательно, выразить явление вращения плоскости поляризации следующим образом.

Прямолинейно-поляризованный луч падает на среду. Это эквивалентно двум поляризованным по кругу лучам: одному правостороннему, а другому левостороннему (относительно наблюдателя). Пройдя через среду, луч остается прямолинейно-поляризованным, но плоскость поляризации поворачивается, скажем направо (как это видит наблюдатель). Отсюда делаем вывод, что из двух поляризованных по кругу лучей правосторонний поляризованный луч должен иметь измененную фазу по сравнению с другим во время прохождения через среду.

Другими словами, правосторонний луч совершил большее число колебаний и, следовательно, имел меньшую длину волны в пределах среды, чем левосторонний луч, который имеет тот же период обращения. Этот способ рассуждений совершенно независим от какой бы то ни было теории света, так как хотя мы и употребляем такие термины, как длина волны, круговая поляризация и т. п., которые могут быть в нашем мышлении ассоциированы со специальной формой волновой теории, наши рассуждения независимы от этой ассоциации и зависят только от доказываемых экспериментом фактов.

813.] Рассмотрим теперь конфигурацию одного из этих лучей в некоторый момент времени. Волна, движение которой в каждой точке является круговым, может быть представлена как спираль или винт. Если винт лишь повернуть вокруг его оси без какого-либо продольного движения, каждая его точка будет описывать круг, и в то же время распространение волнового движения будет представлено кажущимся продольным движением аналогично расположенных частей нарезки винта. Легко видеть, что если винт имеет правостороннюю нарезку и наблюдатель помещен в том конце, по направлению к которому распространяется волна, движение винта будет представляться ему левосторонним, иначе говоря, в направлении, противоположном движению стрелок часов. Отсюда такой луч был назван впервые французскими учеными, а теперь всем научным миром—левосторонним поляризованным по кругу лучом.

Правосторонний поляризованный по кругу луч представлен подобным же образом левосторонним винтом. На рис. 20 правосторонний винт A, на правой стороне рисунка, представляет левосторонний луч, а левосторонний винт B, на левой стороне рисунка, представляет правосторонний луч.

814.] Рассмотрим теперь два таких луча, которые имеют в пределах среды ту же самую длину волны.

Они геометрически подобны во всех отношениях, за исключением того, что один из них является *обращенным* изображением другого подобно изображению в зеркале. Один из них, скажем A, имеет, однако, более короткий период вращения, чем другой. Если движение полностью обусловлено силами, появившимися в результате смещения, то бо́льшие силы вызываются тем же самым смещением, когда конфигурация подобна A, чем тогда, когда она подобна B. Отсюда в этом случае левосторонний луч будет ускорен по сравнению с правосторонним лучом, и это будет иметь место как в том случае, когда лучи имеют направление с севера на юг, так и в том случае, когда они направлены с юга на север.

Эти рассуждения объясняют явление в том виде, как оно производится скипидаром и т. д. В этих средах смещение, обусловленное поляризованным по кругу лучом, вызывает бо́льшие противодействующие силы, когда конфигурация похожа на A, чем когда она похожа на B. Таким образом, эти силы зависят только от одной конфигурации, но не от направления движения.

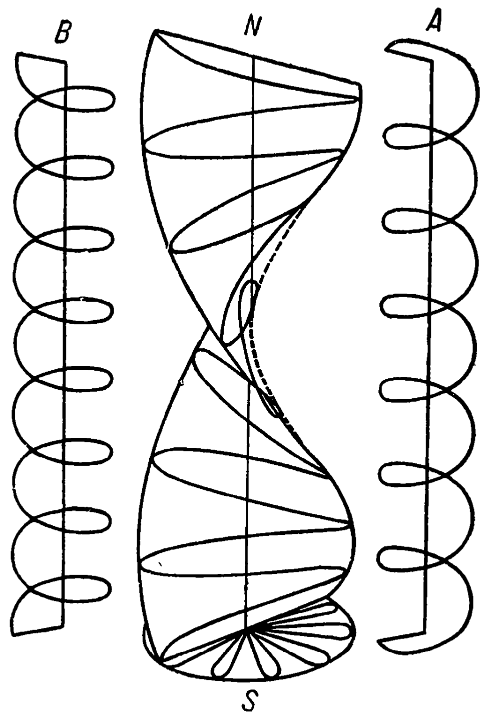


Рис. 20.

Но в диамагнитной среде, на которую действует магнетизм в направлении SN, из двух винтов A и B с большей скоростью всегда вращается тот винт, чье движение, как оно видно наблюдателю, смотрящему по направлению от S на N, одинаково с направлением хода стрелок часов. Отсюда для лучей, идущих от S к N, правосторонний луч B будет проходить быстрее, а для лучей от N к S левосторонний луч A будет двигаться быстрее.

815.] Обратим теперь наше внимание только на один из обоих лучей. Винт B имеет в точности ту же самую конфигурацию, представляет ли он луч, направленный от S к N или от N к S. Но в первом случае луч проходит быстрее и по этой причине винт вращается тоже быстрее. Отсюда вывод, что когда винт вращается в одну сторону, порождаются бо́льшие силы, чем когда он вращается в другую сторону. Силы эти, следовательно, зависят не только от конфигурации луча, но также и от направления движения составляющих его частей.

816.] Возмущение, которое представляет собой свет, каким бы то ни была его физическая природа, имеет свойства вектора, перпендикулярного к направлению луча. Это доказывается фактом интерференции двух лучей света, которая при известных условиях дает темноту, а также фактом невозможности интерференции двух поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях лучей. Поскольку интерференция зависит от углового положения плоскостей поляризации, возмущение должно быть направленной величиной, или вектором, и так как интерференция невозможна, когда плоскости поляризации находятся под прямыми углами, вектор, представляющий это возмущение, должен быть перпендикулярным к линии пересечения этих плоскостей, т. е. к направлению луча.

817.] Это возмущение, будучи вектором, может быть разложено на составляющие, параллельные x и y, причем ось z параллельна направлению луча. Пусть ξ и η будут эти составляющие. Тогда в случае наличия луча однородного поляризованного по кругу света

$$\xi = r\cos\theta, \qquad \eta = r\sin\theta, \tag{1}$$

где

$$\theta = nt - qz + \alpha. \tag{2}$$

В этих выражениях r обозначает величину вектора, а θ — угол, который он образует с направлением оси x.

Период τ возмущения таков, что

$$n\tau = 2\pi. \tag{3}$$

Длина волны λ возмущения такова, что

$$q\lambda = 2\pi. \tag{4}$$

Скорость распространения равна $\frac{n}{q}$. Фаза возмущения равна α, когда t и z оба равны нулю.

Поляризованный по кругу свет является правосторонним или левосторонним в зависимости от того, является ли q отрицательным или положительным.

Колебания его происходят в положительном или в отрицательном направлении вращения в плоскости (x, y), в зависимости от того, является ли n положительным или отрицательным.

Свет распространяется в положительном или отрицательном направлении оси z, в зависимости от того, имеют ли n и q один и тот же или противоположные знаки.

Во всех средах n изменяется тогда, когда изменяется q, и $\frac{dn}{dq}$ имеет всегда тот самый знак, который имеет выражение $\frac{n}{q}$.

Если для данного численного значения n значение $\frac{n}{q}$ больше, когда n положительно, чем когда n отрицательно, то для некоторого значения q, данного по величине и по знаку, положительное значение n будет больше, чем отрицательное значение.

Таким образом, вот что {вообще говоря} наблюдается в диамагнитной среде, на которую действует магнитная сила γ в направлении z. Из двух поляризованных по кругу лучей с данным периодом ускоряется тот, направление вращения которого в плоскости (x, y) положительно. Отсюда из двух поляризованных по кругу левосторонних лучей, длина волны которых в пределах среды одинакова, тот имеет более короткий период, чье направление вращения в плоскости x, y представляется положительным, т. е. тот луч, который распространяется в положительном направлении оси z от юга к северу. Мы, следовательно, должны считаться с тем фактом, что когда в уравнениях системы величины q и r даны, то этим уравнениям будут удовлетворять два значения n: одно положительное и другое отрицательное, причем положительное значение будет численно больше отрицательного.

818.] Мы можем получить уравнения движения из рассмотрения потенциальной и кинетической энергий среды. Потенциальная энергия V системы зависит от ее конфигурации, т. е. от относительного положения ее частей. Поскольку она зависит от возмущения, имеющего своей причиной поляризованный по кругу свет, она должна быть функцией только r—амплитуды и q—коэффициента кручения. Она может быть различной для положительных и отрицательных значений q, равной абсолютной величины, и, вероятно, это именно так и есть в случае сред, которые сами по себе вращают плоскость поляризации.

Кинетическая энергия T системы является однородной функцией второй степени скоростей системы, причем коэффициенты различных членов, являются функциями координат.

819.] Рассмотрим теперь динамическое условие, что луч должен иметь постоянную интенсивность, т. е. что r должно быть постоянным.

Уравнение Лагранжа для силы как функции r становится

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{r}}-\frac{dT}{dr}+\frac{dV}{dr}=0. \tag{5}$$

Так как r постоянно, первое выражение исчезает. Мы, следовательно, получаем уравнение

$$-\frac{dT}{dr}+\frac{dV}{dr}=0, \tag{6}$$

в котором q предполагается данным, и нам нужно определить значение угловой скорости $\dot{\theta}$, которую мы можем обозначить величиной n.

Кинетическая энергия T содержит один член, заключающий n^2; другие члены могут содержать произведения из n и других скоростей; остальные члены независимы от n. Потенциальная энергия V полностью независима от n. Уравнение (6), следовательно, принимает вид

$$An^2+Bn+C=0. \tag{7}$$

Будучи квадратным уравнением, оно дает два значения n. Из опыта вытекает, что оба значения действительны, что одно из них положительно, а другое отрицательно и что положительное значение больше по абсолютной величине.

Отсюда, если A положительно, то B и C отрицательны, так что если n_1 и n_2 являются корнями уравнения, то

$$A(n_1+n_2)+B=0. \tag{8}$$

Коэффициент B, следовательно, не равен нулю, по меньшей мере тогда, когда магнитная сила действует на среду. Поэтому мы должны рассмотреть выражение Bn, которое является той частью кинетической энергии, которая содержит первую степень n— угловой скорости возмущения.

820.] Что касается скорости, то каждый член T имеет два измерения. Отсюда члены, заключающие в себе n, должны заключать какую-то другую скорость. Этой скоростью не может быть $\dot{r}$ или $\dot{q}$, так как в рассматриваемом нами случае r и q являются постоянными.

Следовательно, это есть скорость, которая существует в среде независимо от того движения, которое составляет свет. Эта скорость должна находиться к n в таком отношении, что когда она помножается на n, результат должен быть скаляром. Действительно, члены, составляющие величину T, могут быть только скалярными величинами, так как сама величина T скалярна. Отсюда эта скорость должна иметь то же самое направление, что и n, или противоположное направление, т. е. это должна быть *угловая скорость* относительно оси z.

Эта скорость не может быть также независима от магнитной силы, так как если бы она имела отношение к какому-то определенному направлению в среде, то мы получили бы различные явления при повороте среды на 180°, чего не наблюдается.

Мы, следовательно, приходим к заключению, что эта скорость необходимо связана с магнитной силой в тех средах, которые обнаруживают магнитное вращение плоскости поляризации.

821.] До сего времени мы были вынуждены применять термины, которые, возможно, слишком напоминают обычную гипотезу движения в волновой теории.

Однако легко выразить наш результат в форме, свободной от этой гипотезы.

Чем бы свет ни был, в каждой точке пространства что-то происходит, будь то смещение или вращение, или что-либо другое, чего мы еще до сих пор не можем представить, но что безусловно имеет свойства вектора, направление которого нормально к направлению луча. Это полностью подтверждается явлениями интерференции.

В случае поляризованного по кругу света величина этого вектора всегда остается той же самой, но его направление вращается около направления луча так, чтобы завершить один оборот в течение периода волны. Мы не знаем, находится ли этот вектор в плоскости поляризации или в плоскости, перпендикулярной к ней, но это незнание не распространяется на направления вращения в правостороннем и левостороннем поляризованном по кругу свете. Направления вращения и угловая скорость этого вектора прекрасно известны, хотя физическая природа вектора и его абсолютное направление в данный момент неопределенны.

Когда луч поляризованного по кругу света падает на среду, находящуюся под действием магнитной силы, его распространение в пределах среды обусловлено отношением направления вращения света к направлению магнитной силы. Из этого мы заключаем согласно соображениям, приведенным в параграфе 817, что в среде во время ее нахождения под действием магнитной силы происходит какое-то вращательное движение, причем ось вращения находится в направлении магнитной силы, и что поляризованный по кругу свет не распространяется с той же самой скоростью, когда его вращение одинаково по направлению с магнитным вращением или же ему противоположно.

Единственное сходство, которое мы можем обнаружить между средой, через которую распространяется поляризованный по кругу свет, и средой, через которую проходят магнитные силовые линии, состоит в том, что в обеих имеется движение вращения вокруг некоторой оси. Но здесь сходство прекращается, так как вращение в оптическом явлении является вращением вектора, представляющего собой возмущение. Этот вектор всегда перпендикулярен к направлению луча и обращается около него известное количество раз в одну секунду.

В магнитном же явлении то, что вращается, не имеет свойств, на основании которых могли бы быть различены его стороны, так что мы не можем определить, сколько раз в секунду оно вращается.

Отсюда следует, что в магнитном явлении нет ничего, что соответствовало бы длине волны и распространению волны, наблюдаемому в оптическом явлении. Среда, в которой действует постоянная магнитная сила, вследствие этой силы не заполнена волнами, распространяющимися в одном направлении, как это бывает тогда, когда через нее распространяется свет. Единственное сходство между оптическим и магнитным явлениями заключается в том, что в каждой точке среды существует нечто, имеющее природу угловой скорости относительно некоторой оси, обладающей направлением магнитной силы.

О гипотезе молекулярных вихрей

822.] Рассмотрение действия магнетизма на поляризованный свет, как мы видели, приводит к тому заключению, что в среде, находящейся под действием магнитной силы, одну часть явления составляет нечто, относящееся к тому же самому математическому классу величин, что и угловая скорость, ось которой находится в направлении магнитной силы.

Эта угловая скорость не может быть скоростью какой-либо части среды заметных размеров, вращающейся как целое. Мы должны, следовательно, рассматривать вращение как вращение очень малых частиц среды, причем каждая вращается около своей собственной оси. Это есть гипотеза молекулярных вихрей.

Движение этих вихрей, хотя, как мы уже показали (параграф 575), не затрагивает заметным образом видимых движений больших тел, может быть, однако, таким, что оно влияет на то колебательное движение, от которого зависит распространение света согласно волновой теории.

Смещения в среде во время распространения света производят возмущение в вихрях, которые вследствие этого могут воздействовать на среду и влиять на характер распространения луча.

823.] Вследствие незнания природы вихрей в настоящее время нет возможности сформулировать закон, который связывал бы смещения в среде с изменениями вихрей. Поэтому мы допустим, что изменения вихрей, обусловленные смещениями в среде, подвержены тем же самым условиям, относительно которых Гельмгольц в его большой работе по вихревому движению*) показал, что они управляют изменениями вихрей в идеальной жидкости.

Закон Гельмгольца может быть высказан следующим образом. Пусть P и Q будут две соседние частицы на оси вихря; тогда, если в результате движения жидкости эти частицы попадают в точки P', Q', линия $P'Q'$ будет представлять новое направление оси вихря, и его сила будет изменена в отношении $P'Q'$ к PQ.

Отсюда, если α, β, γ обозначают составляющие силы вихря и если ξ, η, ζ обозначают смещения среды, тогда значения α, β, γ будут:

$$\left.\begin{aligned}\alpha' &= \alpha+\alpha\frac{d\xi}{dx}+\beta\frac{d\xi}{dy}+\gamma\frac{d\xi}{dz}, \\ \beta' &= \beta+\alpha\frac{d\eta}{dx}+\beta\frac{d\eta}{dy}+\gamma\frac{d\eta}{dz}, \\ \gamma' &= \gamma+\alpha\frac{d\zeta}{dx}+\beta\frac{d\zeta}{dy}+\gamma\frac{d\zeta}{dz}.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Мы теперь допускаем, что то же самое условие удовлетворяется во время малых смещений среды, когда α, β, γ представляют не составляющие силы обыкно-

---

*) Crelle's Journal, т. IV (1858), стр. 25—55. В переводе на англ. язык Tait, Phil. Mag., июнь 1867 г., стр. 485—511.

венного вихря, но составляющие магнитной силы.

824.] Составляющие угловой скорости одного элемента среды суть:

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}\right),\\ \omega_2&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dz}-\frac{d\zeta}{dx}\right),\\ \omega_3&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Следующим шагом в нашей гипотезе является допущение, что кинетическая энергия среды содержит член, имеющий форму

$$2C\,(\alpha\omega_1+\beta\omega_2+\gamma\omega_3).\qquad(3)$$

Это эквивалентно предположению о том, что угловая скорость, приобретенная элементом среды во время распространения света, является величиной, способной сочетаться с тем движением, которым объясняются магнитные явления.

Для того чтобы составить уравнения движения среды, мы должны выразить ее кинетическую энергию как функцию скорости ее частей, составляющими которой являются $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$. Далее, интегрируя по частям, находим:

$$\begin{aligned}2C\iiint(\alpha\omega_1+\beta\omega_2+\gamma\omega_3)\,dx\,dy\,dz&=\\ =C\iint(\gamma\dot\eta+\beta\dot\zeta)\,dy\,dz&+C\iint(\alpha\dot\zeta-\gamma\dot\xi)\,dz\,dx+\\ +C\iint(\beta\dot\xi-\alpha\dot\eta)\,dx\,dy&+C\iiint\left\{\dot\xi\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)+\right.\\ &\left.+\dot\eta\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)+\dot\zeta\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)\right\}dx\,dy\,dz.\qquad(4)\end{aligned}$$

Двойные интегралы относятся к ограничивающей поверхности, которую можно предположить расположенной в бесконечности. Поэтому для изучения того, что имеет место внутри среды, достаточно обратить внимание лишь на тройной интеграл.

825.] Часть кинетической энергии единицы объема, выраженная этим тройным интегралом, может быть написана в виде

$$4\pi C\,(\dot{\xi}u+\dot{\eta}v+\dot{\zeta}w)\ , \tag{5}$$

где u, v, w являются составляющими электрического тока в том виде, как они даны в уравнениях (E) параграфа 607.

Из этого вытекает, что наша гипотеза эквивалентна допущению, что скорость частицы среды, составляющие которой суть $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$, есть величина, которую можно складывать с электрическим током, составляющими которого являются u, v, w.

826.] Возвращаясь к выражению, находящемуся под знаком тройного интеграла в (4), подставляя вместо значений α, β, γ значения α' β', γ', как они даны уравнениями (1), и полагая

$$\frac{d}{dh} \quad \text{вместо} \quad \alpha\frac{d}{dx}+\beta\frac{d}{dy}+\gamma\frac{d}{dz}\ , \tag{6}$$

получим для выражения под знаком интеграла:

$$C\left\{\dot{\xi}\frac{d}{dh}\left(\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}\right)+\dot{\eta}\frac{d}{dh}\left(\frac{d\xi}{dz}-\frac{d\zeta}{dx}\right)+\dot{\zeta}\frac{d}{dh}\left(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}\right)\right\}. \tag{7}$$

В случае плоских волн, нормальных к оси z, смещения являются функциями только z и t, так что $\frac{d}{dh}=\gamma\frac{d}{dz}$, и это выражение сводится к

$$C\gamma\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}\dot{\eta}-\frac{d^2\eta}{dz^2}\dot{\xi}\right). \tag{8}$$

Кинетическая энергия на единицу объема, поскольку она зависит от скоростей смещения, может быть теперь написана в виде

$$T=\frac{1}{2}\rho\,(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2)+C\gamma\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}\dot{\eta}-\frac{d^2\eta}{dz^2}\dot{\xi}\right), \tag{9}$$

где ρ есть плотность среды.

827.] Составляющие X и Y приложенной силы, отнесенные к единице объема, могут быть выведены отсюда при помощи уравнений Лагранжа параграфа 564.

Заметим, что двумя последовательными интегрированиями по частям по z и опусканием двойных интегралов на ограничивающей поверхности может быть показано, что

$$\iiint \frac{d^2\xi}{dz^2}\dot{\eta}\,dx\,dy\,dz = \iiint \xi\frac{d^3\eta}{dz^2\,dt}\,dx\,dy\,dz\ ,$$

отсюда

$$\frac{dT}{d\xi} = C\gamma\frac{d^3\eta}{dz^2\,dt}\ .$$

Силы, следовательно, будут:

$$X = \rho\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2C\gamma\frac{d^3\eta}{dz^2\,dt}\ , \tag{10}$$

$$Y = \rho\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2C\gamma\frac{d^3\xi}{dz^2\,dt}\ . \tag{11}$$

Эти силы возникают от действия остальной части среды на рассматриваемый элемент и в случае изотропной среды они должны иметь форму, указанную Коши (Cauchy):

$$X = A_0\frac{d^2\xi}{dz^2} + A_1\frac{d^4\xi}{dz^4} + \ \ldots, \tag{12}$$

$$Y = A_0\frac{d^2\eta}{dz^2} + A_1\frac{d^4\eta}{dz^4} + \ \ldots \tag{13}$$

828.] Если мы теперь берем случай луча круговой поляризации, для которого

$$\xi = r\cos(nt - qz)\ ,\quad \eta = r\sin(nt - qz)\ , \tag{14}$$

мы находим для кинетической энергии в единице объема

$$T = \frac{1}{2}\rho r^2 n^2 - C\gamma r^2 q^2 n \tag{15}$$

и для потенциальной энергии в единице объема

$$V = \frac{1}{2}r^2(A_0 q^2 - A_1 q^4 + \ \ldots) = \frac{1}{2}r^2 Q\ , \tag{16}$$

где Q есть функция от q^2.

Условие свободного распространения луча (см. параграф 819, уравнение (6)), есть

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dV}{dr}\ , \tag{17}$$

что дает

$$\rho n^2 - 2C\gamma q^2 n = Q \,, \tag{18}$$

откуда значение n может быть найдено как функция q.

Но в случае луча данной длины волны, подверженного действию магнитной силы, мы должны определить значение $\frac{dq}{d\gamma}$, где n постоянно, как функцию от $\frac{dq}{dn}$, когда γ постоянно.

Дифференцируя уравнение (18), получаем:

$$(2\rho n - 2C\gamma q^2)\,dn - \left(\frac{dQ}{dq} + 4C\gamma q n\right) dq - 2Cq^2 n\gamma = 0. \tag{19}$$

Мы, таким образом, находим:

$$\frac{dq}{d\gamma} = -\frac{Cq^2 n}{\rho n - C\gamma q^2}\,\frac{dq}{dn}\,. \tag{20}$$

829.] Если λ есть длина волны в воздухе, v — скорость в воздухе, а i — соответствующий показатель преломления среды,

$$q\lambda = 2\pi i, \quad n\lambda = 2\pi v \tag{21}$$

$$\left\{ \text{откуда } \frac{dq}{dn} = \frac{1}{v}\left(i - \lambda\frac{di}{d\lambda}\right) \right\}.$$

Изменения в величине q благодаря магнитному действию во всяком случае являются чрезвычайно малой долей ее величины, так что мы можем написать:

$$q = q_0 + \frac{dq}{d\gamma}\gamma \,, \tag{22}$$

где q_0 есть величина q в том случае, когда магнитная сила равна нулю. Угол θ, на который плоскость поляризации поворачивается, проходя через толщину c среды, равняется полусумме положительного и отрицательного значений qc, причем знак результата изменяется, так как знак q отрицателен в уравнениях (14). Мы, таким образом, получаем:

$$\theta = -c\gamma\frac{dq}{dn} = \tag{23}$$

$$= \frac{4\pi C}{v\rho}c\gamma\frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda\frac{di}{d\lambda}\right)\frac{1}{1 - 2\pi C\gamma\frac{i^2}{v\rho\lambda}}\,. \tag{24}$$

Второй член знаменателя этой дроби приблизительно равен углу вращения плоскости поляризации во время прохождения света через толщину среды, равную {умноженной на $\frac{1}{\pi}$} половине длины волны {в среде}. Поэтому во всех действительных случаях это—величина, которой мы можем пренебречь по сравнению с единицей.

Полагая

$$\frac{4\pi^2 C}{v\rho} = m, \tag{25}$$

можно назвать m коэффициентом магнитного вращения среды, значение которого должно быть определено наблюдением. Найдено, что оно положительно для большинства диамагнитных и отрицательно для некоторых парамагнитных сред. В качестве конечного результата нашей теории мы, следовательно, имеем:

$$\theta = mc\gamma\,\frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda\,\frac{di}{d\lambda}\right), \tag{26}$$

где θ есть угловое вращение плоскости поляризации, m — константа, определяемая экспериментально, γ — составляющая магнитной силы в направлении луча, c — длина пути луча в пределах среды, λ — длина волны света в воздухе и i — показатель преломления среды *).

830.] Единственная проверка, которой до сего времени подвергалась эта теория, является попытка сравнения значений θ для различных родов света, проходящих через ту же среду и подвергающихся воздействию одной и той же магнитной силы.

Это было сделано в отношении значительного количества сред Верде **), который пришел к следующим результатам:

*) {Роуланд (Rowland, Phil. Mag., XI, стр. 254, 1881, показал, что магнитное вращение плоскости поляризации происходило бы, если бы эффект Холла существовал в диэлектриках.}

**) Verdet, Recherches sur les propriétés optiques, developpées dans les corps transparents par l'action du magnétisme, 4^{me} partie, Comptes Rendus, т. LVI, стр. 630 (6 апреля 1863 г.).

(1) Магнитное вращение плоскостей поляризации лучей различных цветов приблизительно следует закону обратных квадратов длин волн.

(2) Точный закон этих явлений всегда таков, что произведение вращения на квадрат длины волны увеличивается от наименее преломляемого до наиболее преломляемого конца спектра.

(3) Вещества, для которых это увеличение наиболее чувствительно, являются также теми, которые обладают наибольшей рассеивающей способностью.

Он также нашел, что в растворе винно-каменной кислоты, которая сама по себе производит вращение плоскости поляризации, магнитное вращение совершенно не пропорционально естественному вращению.

В дополнение к уже указанной работе Верде*) дал результаты весьма тщательных опытов с бисульфидом углерода и с креозотом, двумя веществами, в которых отклонение от закона обратной пропорциональности квадрату длины волны было весьма очевидно. Он также сравнил эти результаты с числами, даваемыми тремя различными формулами:

$$\theta = mc\gamma \frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda}\right); \qquad \text{(I)}$$

$$\theta = mc\gamma \frac{1}{\lambda^2}\left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda}\right); \qquad \text{(II)}$$

$$\theta = mc\gamma \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda}\right). \qquad \text{(III)}$$

Первая из этих формул (I) — та, которую мы уже получили в параграфе 829, именно, уравнение (26).

Вторая формула (II) — та, которая получается от подстановки в уравнения движения (параграф 827, уравнения (10) и (11)) членов, имеющих форму $\frac{d^3\eta}{dt^3}$ и $-\frac{d^3\xi}{dt^3}$ вместо $\frac{d^3\eta}{dz^2\,dt}$ и $-\frac{d^3\xi}{dz^2\,dt}$. Я не уверен, что эта форма уравнения была обоснована какой-либо физи-

*) Comptes Rendus, LVII, стр. 670 (19 октября 1863 г.).

ческой теорией. Третья формула (III) вытекает из физической теории Неймана*), в которой уравнения движения содержат члены формы $\frac{d\eta}{dt}$ и $-\frac{d\xi}{dt}$ **).

Очевидно, что значения θ, даваемые формулой (III), даже приблизительно не пропорциональны обратному квадрату длины волны. Значения, даваемые формулами (I) и (II), удовлетворяют этому условию и достаточно хорошо согласуются с наблюдениями для сред с умеренной рассеивающей способностью. Однако для бисульфида углерода и креозота значения, даваемые формулой (II), весьма отличаются от наблюденных. Величины, даваемые формулой (I), лучше согласуются с данными наблюдений, но хотя это согласование достаточно хорошо в отношении бисульфида углерода, цифры, полученные для креозота, дают различия, которые значительно больше тех, которые можно было бы приписать ошибкам наблюдения.

Мы так мало знакомы с деталями молекулярного строения тел, что в настоящее время нельзя предполагать, что можно построить удовлетворительную теорию, касающуюся такого частного явления, как действие

---

*) M. C. Neumann, «Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarizationis per vires electricas vel magneticas declinetur», Halis Saxonum, 1858.

**) Эти три формы уравнений движения были впервые предложены сэром Дж. Б. Эйри (G. B. Airy, Phil. Mag., июнь 1846 г., стр. 477) как средства для анализа явления, в то время недавно открытого Фарадеем. Мак Куллох (Mac Cullagh) до этого предлагал уравнения, содержащие члены формы $\frac{d^3}{dz^3}$ для того, чтобы математически описать явления в кварце.

Эти уравнения были предложены Мак Куллохом и Эйри «не в качестве таких, которые дают механическое объяснение явлениям, но в качестве показывающих, что явления могут быть объяснены уравнениями такого рода, которые, возможно, могли бы быть выведены из некоторой правдоподобной механической гипотезы, хотя до сего времени такая гипотеза еще не была выдвинута».

Магнитное вращение плоскости поляризации (по Верде)

Линии спектра	C	D	E	F	G
Бисульфид углерода при 24,9° C					
Наблюдаемое вращение	592	768	1000	1234	1704
Вычисленное вращение по (I)	589	760	1000	1234	1713
Вычисленное вращение по (II)	606	772	1000	1216	1640
Вычисленное вращение по (III)	943	967	1000	1034	1091
Вращение линии $E=25°28'$					
Креозот при 24,3° C					
Наблюдаемое вращение	573	758	1000	1241	1723
Вычисленное вращение по (I)	617	780	1000	1210	1603
Вычисленное вращение по (II)	623	789	1000	1200	1565
Вычисленное вращение по (III)	976	993	1000	1017	1041
Вращение линии $E=21°58'$					

магнетизма на свет. Необходимо индуктивно на ряде различных случаев изучить, каким образом наблюдаемые явления зависят от действий, в которых участвуют молекулы, и узнать что-либо более определенное относительно свойств, которые должны быть приписаны молекулам, чтобы удовлетворять условиям, вытекающим из наблюдаемых фактов.

Предложенная на предыдущих страницах теория, очевидно, носит предварительный характер, оставаясь на почве не подтвержденных еще гипотез, относящихся к природе молекулярных вихрей и характера того воздействия, которому они подвергаются благодаря смещениям среды. Следовательно, всякое совпадение с наблюдаемыми фактами мы должны рассматривать, как имеющее значительно меньшее научное значение в теории магнитного вращения плоскости поляризации, чем в электромагнитной теории света, которая, хотя и включает гипотезы относительно электрических свойств среды, отнюдь не основывается на соображениях, касающихся структуры ее молекул.

831.] Примечание. Все содержание этой главы может рассматриваться как развитие следующего чрезвычайно существенного замечания сэра Вильяма Томсона в Proceedings of the Royal Society, июнь 1856 г.:

«Магнитное действие на свет, открытое Фарадеем, зависит от направления движения движущихся частиц. Так, например, в среде, обладающей этой способностью, частицы, первоначально расположенные на прямой линии, параллельно линиям магнитной силы, будучи смещены винтообразно относительно этой линии как оси, и затем отброшены тангенциально с такими скоростями, что они описывают круги, будут иметь различные скорости в зависимости от того, совершается ли их движение по одному направлению (такому, как условное направление гальванического тока в намагничивающей катушке) или в обратном направлении. Но упругая реакция среды должна быть той же самой для тех же самых смещений, каковыми бы ни были скорости и направления движения частиц, т. е. силы, уравновешенные центробежной силой круговых движений, равны, в то время как световые движения не равны. Абсолютные круговые движения вследствие этого или являются равными или такими, что они сообщают равные центробежные силы частицам, о которых речь шла в самом начале. Из этого следует, что световые движения являются только составляющими полного движения и что меньшей величины световая составляющая в каком-нибудь направлении, сложенная с движением, существующем в среде, когда в ней еще не распространяется никакой свет, дает результирующую, равную результирующей большего светового движения в обратном направлении, сложенного с тем же самым несветовым движением в среде.

Я полагаю, что не только нельзя дать какое-либо другое, чем это динамическое объяснение того факта, что поляризованный по кругу свет, проходящий через намагниченное стекло параллельно линиям магнитной силы, свет того же самого качества, всегда или правосторонний или левосторонний, распространяется с различными скоростями в зависимости от того, направлен ли он к северному магнитному полюсу или движется в обратном направлении; но я полагаю также, что может быть доказано, что никакое другое объяснение этого факта невозможно. Отсюда вытекает, что оптическое открытие Фарадея дает доказательство реальности объяснения Ампера первичной природы магнетизма; оно дает определение намагниченного состояния в динамической теории тепла. Введение принципа сохранения момента количества движения («сохранение площадей») в механическое рассмотрение гипотезы Ранкина о «молекулярных вихрях», повидимому, указывает на линию, перпендикулярную к плоскости («неизменяемая плоскость») результирующего вращательного количества движения всех тепловых движений, как на линию магнитной оси намагниченного тела. Отсюда также можно полагать, что результирующий момент этих количеств движения является, собственно говоря, мерой и определением «магнитного момента». Объяснение всех явлений электромагнитного притяжения или отталкивания и электромагнитной индукции необходимо искать просто в инерции и давлении материи, движения которой образуют тепло. Является ли эта материя электричеством или не является; является ли она непрерывной жидкостью, заполняющей пространство между молекулярными ядрами, или она сама по себе состоит из молекул; или же всякая материя по существу непрерывна и молекулярная неоднородность заключается в ограниченных вихревых или других относительных движениях соприкасающихся частей тела,—все это пока что невозможно решить и, повидимому, напрасно ожидать решения при современном состоянии науки», Теория молекулярных вихрей, которую я довольно долго разрабатывал, была опубликована в «Philosophical Magazine» за март, апрель и май 1861 г., январь и февраль 1862 г.

Я думаю, что мы имеем хорошее подтверждение того мнения, что некоторые явления вращения происходят в магнитном поле, что это вращение образуется большим числом весьма малых частиц материи, каждая из которых вращается вокруг своей собственной оси, причем эта ось параллельна направлению магнитной силы, и что вращения этих различных вихрей зависят одно от другого при посредстве некоторого механизма, связывающего их.

Попытка, которую я тогда сделал, чтобы представить действующую модель этого механизма, не должна приниматься за большее, чем она есть на самом деле, а именно, доказательство того, что может быть придуман механизм, способный установить связь, механически эквивалентную фактическому соединению частей электромагнитного поля. Проблема маханизма, необходимого для установления данного рода связи между движениями частей системы, всегда допускает бесконечное число решений. Из этих решений некоторые могут быть более грубы или более тонки, чем другие, но все должны удовлетворять общим условиям механизма как целого.

Во всяком случае следующие результаты теории имеют большое значение:

(1) Магнитная сила является эффектом центробежной силы вихрей.

(2) Электромагнитная индукция токов является результатом действия сил, обусловленных изменением скоростей вихрей.

(3) Электродвижущая сила возникает из напряжений в соединяющем механизме.

(4) Электрическое смещение возникает из упругой деформации соединяющего механизма.

ГЛАВА XXII

ОБЪЯСНЕНИЕ ФЕРРОМАГНЕТИЗМА И ДИАМАГНЕТИЗМА МОЛЕКУЛЯРНЫМИ ТОКАМИ

Об электромагнитных теориях магнетизма

832.] В параграфе 380 мы видели, что взаимодействие магнитов может быть в точности представлено путем притяжений и отталкиваний воображаемой субстанции, называемой «магнитной материей». Мы привели основания того, почему не следует предполагать, что эта магнитная материя перемещается от одной части магнита к другой на заметное расстояние, как это кажется на первый взгляд, когда мы намагничиваем стержень. Мы пришли к гипотезе Пуассона, что магнитная материя сосредоточена в отдельных молекулах намагниченного вещества, так что намагниченная молекула есть такая, в которой противоположные виды магнитной материи более или менее удалены друга от друга в направлении противоположных полюсов молекулы, но так, что ни одна частица магнитной материи не может быть фактически отделена от молекулы (параграф 430).

Эти аргументы полностью устанавливают тот факт, что намагничивание есть явление, по существу относящееся не к большим массам железа, но к молекулам, т. е. к отдельным частям вещества, которые столь малы, что никаким механическим способом мы не в состоянии их разделить пополам так, чтобы северный полюс мог бы быть отделен от южного полюса. Но установление природы магнитной молекулы требует дальнейших исследований. В параграфе 442 мы видели, что имеются серьезные основания полагать, что акт намагничивания железа или стали отнюдь не состоит в придании магнитных свойств молекулам, из которых они составлены, но что эти молекулы уже являются магнитными даже в ненамагниченном железе. В последнем состоянии оси молекул безразлично ориентированы по всем направлениям и акт намагничивания состоит в таком повороте молекул, что их оси или становятся все параллельными одному направлению или, по меньшей мере, отклоняются к этому направлению.

833.] Однако мы до сих пор не пришли еще к объяснению природы магнитной молекулы, т. е. мы не открыли ее сходства с какой-либо другой лучше нам известной вещью. Поэтому мы должны внимательно рассмотреть гипотезу Ампера, а именно, что магнетизм молекулы обусловлен электрическим током, постоянно циркулирующим по некоторому замкнутому пути около молекулы.

Можно точно имитировать действия любого магнита в точках, внешних по отношению к нему, при помощи листа электрических токов, надлежащим образом распределенных по его внешней поверхности. Но действие магнита в точках, находящихся внутри него, совершенно отлично от действия электрических токов на соответствующие точки. Отсюда Ампер заключил, что если магнетизм должен быть объяснен посредством электрических токов, эти токи должны циркулировать в пределах молекулы магнита, а не должны течь от одной молекулы к другой. Так как мы не можем экспериментально измерить магнитное действие в какой-либо точке, находящейся внутри молекулы, эта гипотеза не может быть отвергнута тем же путем, как мы можем отвергнуть гипотезу токов конечных размеров, текущих внутри магнита.

Кроме того, мы знаем, что электрический ток, проходящий от одной части проводника к другой, встречает сопротивление и порождает тепло, так что если бы имелись токи обычного рода вокруг частей магнита заметных размеров, имелся бы налицо постоянный расход энергии, необходимый для их поддержания, и магнит был бы постоянным источником тепла. Относя цепи токов к молекулам, в пределах которых ничего неизвестно относительно существования сопротивления, мы можем утверждать, не боясь впасть в противоречие, что ток, циркулируя в молекулах, не встречает сопротивления.

Таким образом, согласно теории Ампера все явления магнетизма имеют своей основой электрические токи, и если бы мы могли наблюдать магнитную силу внутри магнитной молекулы, мы нашли бы, что она подчиняется в точности тем же самым законам, как и сила в области, окруженной любым другим электрическим током.

834.] Говоря о силе внутри магнитов, мы предположили, что измерения делаются в маленьком углублении, выдолбленном в веществе магнита (параграф 395). Мы, таким образом, были приведены к необходимости рассмотреть две различные величины, магнитную силу и магнитную индукцию, каждая из которых рассматривается в пространстве, из которого изъята магнитная материя. Мы не предполагали, что можем проникнуть внутрь магнитной молекулы и наблюдать силу, действующую внутри нее.

Если мы примем теорию Ампера и будем рассматривать магнит не как непрерывное вещество, намагничение которого изменяется от точки к точке, согласно какому-то легко понимаемому закону, но как собрание молекул, в пределах каждой из которых циркулирует система электрических токов, дающих основу к очень сложному распределению магнитной силы, тогда направление силы внутри молекулы будет обычно обратным направлению средней силы в ее соседстве, и магнитный потенциал, если он существует, будет функцией стольких степеней сложности, сколько имеется молекул в магните.

835.] Но все же, несмотря на видимую сложность, которая в основном обусловлена сосуществованием множества более простых частей, математическая теория магнетизма значительно упрощается принятием теории Ампера и распространением наших математических концепций на внутренность молекулы.

Прежде всего два определения магнитной силы сводятся к одному, именно, к определению магнитной силы для пространства вне магнита. Далее, составляющие магнитной силы повсюду удовлетворяют условию, которому подчиняются составляющие индукции, а именно:

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0. \qquad (1)$$

Другими словами, распределение магнитной силы имеет ту же самую природу, как и распределение скорости несжимаемой жидкости.

Наконец, три векторные функции—электромагнитное количество движения, магнитная сила и электрический ток — связаны более простым образом друг с другом. Все они являются векторными функциями и получаются одна из другой посредством одной и той же операции пространственного дифференцирования, которую Гамильтон обозначил при помощи символа ∇.

836.] Но мы теперь рассматриваем магнетизм с физической точки зрения и должны поэтому исследовать физические свойства молекулярных токов. Мы допускаем, что ток циркулирует в молекуле и что он не встречает сопротивления. Если L есть коэффициент самоиндукции молекулярной цепи и M—коэффициент взаимной индукции между этой цепью и какой-то другой цепью, затем, если γ есть сила тока в молекуле, а γ'—сила тока в другой молекуле, уравнение для силы тока γ будет:

$$\frac{d}{dt}(L\gamma+M\gamma')=-R\gamma. \qquad (2)$$

Так как по гипотезе сопротивление отсутствует, $R=0$, и потому, интегрируя, получаем:

$$L\gamma + M\gamma' = \text{const} = L\gamma_0. \tag{3}$$

Предположим, что площадь проекции молекулярной цепи на плоскость, перпендикулярную к оси молекулы, есть A, причем эта ось определяется как нормаль к плоскости, на которой проекция является наибольшей. Если действие других токов производит магнитную силу X в направлении, наклон которого к оси молекулы есть θ, количество $M\gamma'$ становится $XA\cos\theta$, и мы в качестве уравнения тока имеем:

$$L\gamma + XA\cos\theta = L\gamma_0. \tag{4}$$

где γ_0 есть величина γ, когда $X=0$.

Отсюда вытекает, следовательно, что сила молекулярного тока полностью зависит от его первичного значения γ_0 и от интенсивности магнитной силы, производимой другими токами.

837.] Если мы предположим, что первичного тока нет, но что ток целиком обязан своим происхождением индукции, тогда

$$\gamma = -\frac{XA}{L}\cos\theta. \tag{5}$$

Отрицательный знак показывает, что направление наведенного тока противоположно направлению вызывающего индукцию тока и что его магнитное действие таково, что внутри цепи он действует в направлении, противоположном магнитной силе. Другими словами, молекулярный ток действует подобно малому магниту, полюсы которого ориентированы по направлению одноименных полюсов наводящего магнита.

Но это является действием, обратным действию молекул железа, находящегося под воздействием магнита. Молекулярные токи в железе, следовательно, не возмущаются индукцией. Но в диамагнитных веществах эффекты такого рода наблюдаются, и это является объяснением диамагнитной полярности, которое было впервые дано Вебером.

Теория диамагнетизма Вебера

838.] Согласно теории Вебера в молекулах диамагнитных веществ существуют определенные пути, вдоль которых электрический ток может циркулировать без сопротивления. Очевидно, если предположить, что эти пути пересекают молекулу в любых направлениях, это сводится к тому, чтобы считать молекулу идеальным проводником.

Если начать с допущения линейности цепи в пределах молекулы, сила тока будет дана уравнением (5).

Магнитный момент тока является произведением его силы на площадь цепи, или γA, а составляющая этого момента в направлении намагничивающей силы есть $\gamma A \cos\theta$ или согласно (5)

$$-\frac{XA^2}{L}\cos^2\theta. \tag{6}$$

Если в единице объема имеется n таких молекул и если их оси распределены безразлично по всем направлениям, тогда среднее значение $\cos^2\theta$ будет $\frac{1}{3}$, и интенсивность намагничения вещества будет:

$$-\frac{1}{3}\frac{nXA^2}{L}. \tag{7}$$

Отсюда неймановский коэффициент намагничения будет:

$$\varkappa = -\frac{1}{3}\frac{nA^2}{L}. \tag{8}$$

Намагничение вещества, следовательно, происходит в направлении, противоположном намагничивающей силе, или, другими словами, вещество это диамагнитно. Намагничение также в точности пропорционально намагничивающей силе и не стремится к конечному пределу, как это имеет место в случае обычной магнитной индукции (см. параграф 442 и далее).

839.] Если оси молекулярных путей ориентированы не безразлично в любых направлениях, но так, что в некоторых направлениях они преобладают, тогда сумма

$$\sum \frac{A^2}{L} \cos^2 \theta,$$

распространенная на все молекулы, будет иметь различное значение в зависимости от направления линии, от которой меряется θ, и распределение этих значений в различных направлениях будет аналогично распределению значений моментов инерции по осям, проведенным в различных направлениях через ту же самую точку. Такое распределение может объяснить описанные Плюккером (Plücker) магнитные явления, обусловленные наличием осей в теле, которые Фарадей назвал магнитно-кристаллическими явлениями (см. параграф 435).

840.] Рассмотрим теперь, каков будет эффект, если вместо электрического тока, циркулирующего по определенному пути внутри молекулы, мы предположим, что вся молекула является идеальным проводником.

Начнем с того случая, когда тело имеет форму ациклическую, т. е. если тело не имеет формы кольца или просверленного тела, и предположим, что это тело со всех сторон покрыто тонкой скорлупой из идеально проводящей материи. В параграфе 654 мы доказали, что замкнутый лист идеально проводящей материи любой формы, первоначально свободный от токов, становится под влиянием внешней магнитной силы током-листом, действие которого в любой внутренней точке таково, что оно сводит магнитную силу к нулю.

Чтобы как следует понять этот случай, полезно вспомнить, что распределение магнитной силы по соседству с таким телом аналогично распределению скоростей в несжимаемой жидкости по соседству с непроницаемым телом той же самой формы.

Очевидно, что если другие проводящие слои помещаются внутри первого слоя, то, поскольку они не подвержены действию магнитной силы, никаких токов в них возбуждено не будет. Отсюда в твердом теле из идеально проводящего материала эффект магнитной силы заключается в генерировании системы токов, которые полностью находятся на поверхности.

841.] Если проводящее тело имеет форму сферы радиуса r, можно доказать {при помощи метода, изложенного в параграфе 672}, что ее магнитный момент равен $-\frac{1}{2}r^3X$. Если несколько таких сфер распределены в среде так, что в единице объема заключен объем проводящей материи, равный k', тогда, подставляя $k_1=\infty$, $k_2=1$ и $p=k'$ в уравнение (17) параграфа 314, мы находим коэффициент магнитной проницаемости, беря его равным обратной величине сопротивления в том же параграфе, а именно:

$$\mu=\frac{2-2k'}{2+k'}, \tag{9}$$

откуда получаем для магнитного коэффициента Пуассона

$$k=-\frac{1}{2}k' \tag{10}$$

и для неймановского коэффициента намагничивания при помощи индукции

$$\varkappa=-\frac{3}{4\pi}\frac{k'}{2+k'}. \tag{11}$$

Так как математическая концепция идеально проводящих тел приводит к результатам, отличным от всех явлений, которые мы можем наблюдать в обычных проводниках, придется продолжить наше исследование этого вопроса.

842.] Возвращаясь к случаю проводящего пути в форме замкнутой кривой площади A, как в параграфе 836, мы имеем для момента электромагнитной силы, стремящейся увеличивать угол θ:

$$\gamma\gamma'\frac{dM}{d\theta}=-\gamma XA\sin\theta= \tag{12}$$

$$=\frac{X^2A^2}{L}\sin\theta\cos\theta. \tag{13}$$

Эта сила положительна или отрицательна в зависимости от того, будет ли θ меньше или больше прямого угла. Отсюда магнитная сила, действующая на идеально проводящий путь, стремится повернуть его ось перпендикулярно к магнитным силовым линиям, т. е. так, чтобы плоскость проводящего пути сделалась параллельной силовым линиям. Эффект подобного рода можно наблюдать, помещая мелкую медную монету или медное кольцо между полюсами электромагнита. В тот момент, когда магнит возбуждается, кольцо поворачивается и ориентирует свою плоскость в направлении оси магнита; но эта сила исчезает, как только токи затухают вследствие сопротивления меди *).

843.] Мы до сих пор рассматривали только тот случай, в котором молекулярные токи полностью возбуждаются внешней магнитной силой. Изучим теперь соотношение веберовской теории магнитно-электрической индукции молекулярных токов и амперовой теории обычного магнетизма. Согласно Амперу и Веберу молекулярные токи магнитных веществ не возбуждаются внешней магнитной силой, но уже находятся в них, так что молекула испытывает действие и смещается благодаря электромагнитному действию магнитной силы на проводящую цепь, по которой течет ток. Когда Ампер разрабатывал эту гипотезу, явление индукции электрических токов не было еще известно, и он не делал никаких предположений в отношении существования или определения силы молекулярных токов.

Мы, однако, теперь вынуждены применять к этим токам те же самые законы, которые Вебер применял к своим токам в диамагнитных молекулах. Мы должны только предположить, что первичное значение тока γ, когда нет действия магнитной силы, не является нулем, а равно γ_0. Сила тока, когда магнитная сила X действует на молекулярный ток площади A, ось которой наклонена под углом θ к линии магнитной силы, есть:

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{XA}{L} \cos\theta, \tag{14}$$

*) Faraday, «Exp. Res.» (2310) и далее.

и момент пары сил, стремящихся повернуть молекулу так, чтобы угол θ увеличился, есть:

$$-\gamma_0 XA\sin\theta+\frac{XA^2}{2L}\sin 2\theta. \tag{15}$$

Отсюда, полагая

$$A\gamma_0=m,\quad \frac{A}{L\gamma_0}=B, \tag{16}$$

уравнение равновесия (параграф 443) становится таким:

$$X\sin\theta-BX^2\sin\theta\cos\theta=D\sin(\alpha-\theta). \tag{17}$$

Составляющая магнитного момента тока в направлении X есть:

$$\gamma A\cos\theta=\gamma_0 A\cos\theta-\frac{XA^2}{L}\cos^2\theta= \tag{18}$$

$$=m\cos\theta\,(1-BX\cos\theta). \tag{19}$$

844.] Эти условия отличаются от условий веберовской теории магнитной индукции членами, содержащими коэффициент B. Если BX мало по сравнению с единицей, результаты будут приближаться к результатам веберовской теории магнетизма. Если BX велико по сравнению с единицей, тогда результаты будут приближаться к результатам веберовской теории диамагнетизма.

Но чем больше γ_0 — первичное значение молекулярного тока, тем меньше будет B, и если L также велико, то это также уменьшит B. Если, далее, ток течет по кольцевому пути, значение L зависит от $\ln\frac{R}{r}$, где R есть радиус средней линии кольца и r—радиус его сечения. Следовательно, чем меньше сечение кольца по сравнению с его площадью, тем больше будет L—коэффициент самоиндукции и тем ближе будут результаты приближаться к первоначальной теории Вебера. Здесь, однако, будет та разница, что, по мере того как X—намагничивающая сила—увеличивается, временный магнитный момент не только достигает максимума, но затем уменьшается по мере увеличения X.

Если когда-либо будет экспериментально доказано, что временное намагничение какого-нибудь вещества сначала увеличивается, а затем уменьшается по мере непрерывного увеличения намагничивающей силы, очевидность существования этих молекулярных токов будет, я думаю, доведена почти до степени настоящего доказательства *).

845.] Если молекулярные токи в диамагнитных веществах ограничены определенными путями и если молекулы способны быть отклоненными подобно молекулам магнитной субстанции, тогда по мере увеличения намагничивающей силы диамагнитная полярность будет всегда увеличиваться, однако не в такой степени, как намагничивающая сила, если последняя велика. Малая абсолютная величина диамагнитного коэффициента показывает, что отклоняющая сила, действующая на каждую диамагнитную молекулу, должна быть малой по сравнению с силой, действующей на магнитную молекулу, так что любой результат, имеющий своим основанием это отклонение, не имеет шансов быть замеченным. Если, с другой стороны, молекулярные токи в диамагнитных телах могут свободно течь через все вещество молекул, то диамагнитная полярность должна быть строго пропорциональна намагничивающей силе, и ее величина дает возможность определить объем всего пространства, занятого идеально проводящими массами, а если мы знаем число молекул, то и размер каждой из них.

*) {До сего времени не было найдено никаких указаний на этот эффект, хотя профессор Юинг (Ewing) искал подтверждения в весьма сильных магнитных полях. См. E w i n g and L o w, On the Magnetisation of Iron and other Magnetic Metals in very Strong Fields, Phil. Trans., 1889, A, стр. 221.}

ГЛАВА XXIII

ТЕОРИИ ДЕЙСТВИЯ НА РАССТОЯНИИ

Объяснение формул Ампера, данное Гауссом и Вебером

846.] Притяжение между элементами ds и ds' двух цепей, по которым проходят электрические токи силы i и i', будет согласно формуле Ампера

$$\frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(2\cos\varepsilon+3\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right), \tag{1}$$

или

$$-\frac{ii\,ds\,ds'}{r^2}\left(2r\frac{d^2r}{ds\,ds'}-\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right). \tag{2}$$

Силы токов даны в электромагнитных единицах (см. параграф 526).

Мы должны истолковать смысл следующих величин:

$$\cos\varepsilon,\quad \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\quad \text{и}\quad \frac{d^2r}{ds\,ds'}.$$

Наиболее очевидное явление, основанное на прямом отношении между токами, в котором мы должны искать истолкование, есть относительная скорость электричества в обоих элементах.

847.] Рассмотрим поэтому относительное движение двух частиц, имеющих постоянные скорости v и v', вдоль элементов ds и ds' соответственно. Квадрат относительной скорости этих частиц есть:

$$u^2 = v^2 - 2vv' \cos\varepsilon + v'^2, \tag{3}$$

и если мы через r обозначим расстояние между частицами, то

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v\frac{dr}{ds} + v'\frac{dr}{ds'}, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = v^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + 2vv'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + v'^2\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = v^2\frac{d^2 r}{ds^2} + 2vv'\frac{d^2 r}{ds\,ds'} + v'^2\frac{d^2 r}{ds'^2}, \tag{6}$$

где символ ∂ указывает, что в дифференцируемой величине координаты частиц должны быть выражены как функции времени.

Отсюда вытекает, что члены, заключающие произведение vv' в уравнениях (3), (5) и (6), содержат величины, встречающиеся в (1) и (2), которые мы должны истолковать. Мы, следовательно, попытаемся выразить (1) и (2) через u^2, $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$ и $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$. Но для того чтобы это сделать, мы должны освободиться от первого и третьего членов каждого из этих выражений, так как они содержат величины, которые не входят в формулу Ампера. Поэтому мы не можем объяснить электрический ток, как перенос электричества только в одном направлении, а должны сочетать два противоположных потока в каждом токе, так что комбинированный эффект членов, содержащих v^2 и v'^2, может стать нулем.

848.] Поэтому предположим, что в первом элементе ds мы имеем электрическую частичку e, движущуюся со скоростью v, и другую частичку e_1, движущуюся со скоростью v_1, и аналогично две частички e' и e'_1 в ds' движутся со скоростями v' и v'_1 соответственно.

Член, содержащий v^2 для комбинированного действия этих частиц, есть:

$$\sum (v^2 ee') = (v^2 e + v_1^2 e_1)(e' + e'_1). \tag{7}$$

Аналогично

$$\sum (v'^2 ee') = (v'^2 e' + v_1'^2 e_1')(e + e_1) \tag{8}$$

и

$$\sum (vv' ee') = (ve + v_1 e_1)(v'e' + v_1' e_1'). \tag{9}$$

Для того чтобы $\sum (v^2 ee')$ могло бы быть нулем, мы должны иметь

$$\text{или} \quad e' + e_1' = 0, \quad \text{или} \quad v^2 e + v_1^2 e_1 = 0. \tag{10}$$

Согласно гипотезе Фехнера (Fechner) электрический ток состоит из тока положительного электричества в положительном направлении, сочетающегося с током отрицательного электричества в отрицательном направлении, причем оба тока в точности равны по своей числовой величине как в отношении количества электричества, находящегося в движении, так и скорости, с которой оно движется. Таким образом, гипотеза Фехнера удовлетворяет обоим условиям (10).

Для нашей цели достаточно допустить, что или количество положительного электричества в каждом элементе численно равно количеству отрицательного электричества, или количества обоих родов электричества обратно пропорциональны квадратам их скоростей.

Мы знаем, что, заряжая второй проводник как целое, мы можем сделать $e' + e_1'$ или положительным или отрицательным. Такая заряженная проволока, даже без тока, действовала бы согласно этой формуле на первую проволоку, несущую ток, в которой $v^2 e + v_1^2 e_1$ имеет величину, отличающуюся от нуля. Такое действие никогда не наблюдалось.

Отсюда, так как может быть показано экспериментально, что величина $e' + e_1'$ не всегда является нулем, и так как величина $v^2 e + v_1^2 e_1$ не может быть экспериментально проверена, для нашей теории лучше допустить, что именно последняя величина является такой, которая всегда аннулируется.

849.] Какую бы гипотезу мы ни приняли, не может быть сомнения, что общее количество электричества, переданное вдоль элемента ds первой цепи, будет представлено алгебраически через

$$ve + v_1 e_1 = ci\, ds,$$

где c есть количество единиц статического электричества, которое передается единицей электрического тока в единицу времени; мы можем, следовательно, написать уравнение (9) в форме

$$\sum (vv'ee') = c^2 ii'\, ds\, ds'. \tag{11}$$

Отсюда суммы для значений (3), (5) и (6) становятся такими:

$$\sum (ee'u^2) = -2c^2 ii'\, ds\, ds' \cos\varepsilon, \tag{12}$$

$$\sum \left(ee' \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right) = 2c^2 ii'\, ds\, ds' \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}, \tag{13}$$

$$\sum \left(ee' r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right) = 2c^2 ii'\, ds\, ds' \frac{d^2 r}{ds\, ds'}, \tag{14}$$

и мы можем написать два выражения (1) и (2) для притяжения между ds и ds':

$$-\frac{1}{c^2} \sum \left[\frac{ee'}{r^2}\left(u^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)\right] \tag{15}$$

и

$$-\frac{1}{c^2} \sum \left[\frac{ee'}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)\right]. \tag{16}$$

850.] Обычное выражение в теории статического электричества для отталкивания двух электрических частиц e и e' есть $\frac{ee'}{r}$ и

$$\sum \left(\frac{ee'}{r^2}\right) = \frac{(e+e_1)(e'+e_1')}{r^2}, \tag{17}$$

что дает электрическое отталкивание между двумя элементами, если они заряжены, как целое.

Отсюда, если мы примем для отталкивания двух частиц любое из двух выражений

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(u^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)\right], \tag{18}$$

или

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1+\frac{1}{c^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)\right] *), \tag{19}$$

мы можем вывести из них обе обычные электростатические силы и силы, действующие между токами в той форме, как они определены Ампером.

851.] Первое из этих выражений (18) было открыто Гауссом в июле 1835 г. **) и интерпретировано им как основной закон электрического действия, именно, что «два элемента электричества в состоянии относительного движения притягивают или отталкивают друг друга, но не тем же самым образом, как если бы они были в состоянии относительного покоя». Это открытие, насколько я знаю, не было опубликовано при жизни Гаусса, так что второе выражение, которое было открыто независимо Вебером и опубликовано в первой части его знаменитых «Elektrodynamische Maassbestimmungen» ***), было первым результатом, сделавшимся известным научному миру.

852.] Оба выражения приводят к точно тому же результату, когда они применяются к определению механической силы между двумя электрическими токами, и этот результат идентичен с результатом, полученным Ампером. Но если они рассматриваются как выражение физического закона действия между двумя электрическими частицами, мы приходим к вопросу, совпадают ли они с другими известными фактами природы. Оба эти выражения содержат относительную скорость частиц. Но, устанавливая путем математических рассуждений хорошо известный принцип сохранения энергии, вообще принимают, что сила, действующая между двумя частицами, есть функция только расстояния, и обычно указывается, что если

---

*) {В части других теорий этого же рода см. J. J. Thomson, «Report on Electrical Theories», Br. Ass. Report, 1885, стр. 97—155.}

**) «Werke», т. V, стр. 616 (геттингенское издание, 1867).

***) Abh. Leibnizens Ges., Лейпциг, 1846, стр. 316.

она является функцией чего-либо другого, как, например, времени или скорости частиц, доказательство не имеет силы.

Отсюда иногда предполагают, что закон электрического взаимодействия, содержащий скорость частиц, не согласуется с принципом сохранения энергии.

853.] Формула Гаусса действительно не согласуется с этим принципом и поэтому должна быть отброшена, так как она приводит к заключению, что энергия могла бы бесконечно порождаться физическими средствами в конечной системе. Это возражение неприложимо к формуле Вебера, так как он показал *), что если мы допустим, что потенциальная энергия системы, состоящей из двух электрических частиц, имеет форму

$$\psi=\frac{ee'}{r}\left[1-\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right], \tag{20}$$

то отталкивание между ними, которое мы можем найти, дифференцируя это количество по r и изменяя знак, является той величиной, которая дана в формуле (19). Отсюда произведенная работа вследствие отталкивания движущейся частицы неподвижной есть $\psi_0-\psi_1$, где ψ_0 и ψ_1 являются значениями ψ в начале и в конце пути. Но ψ зависит только от расстояния r и от составляющей скорости в направлении r. Если, следовательно, частица описывает какой-нибудь замкнутый путь, так что ее положение, скорость и направление движения те же самые в конце, как и в начале, ψ будет равно ψ_0 и в целом никакой работы не будет совершено в течение всего цикла операций.

Следовательно, бесконечное количество работы не может порождаться частицей, движущейся периодически под действием силы, допущенной Вебером.

854.] Гельмгольц в его весьма важной работе «Об уравнениях движения электричества в покоящихся проводниках» **) показывает, что если формула

*) Pogg. Ann., LXXIII, стр. 229 (1848).

**) «Equations of Motion of Electricity in Conductors at Rest», Crelle's Journal, 72, стр. 57—129 (1870).

Вебера совместима с принципом сохранения энергии в отношении работы, выполненной в течение полного цикла, она все же приводит к заключению, что две наэлектризованные частицы, движущиеся в соответствии с законом Вебера, имея сначала конечную скорость и даже будучи еще на конечном расстоянии друг от друга, могут приобрести бесконечную кинетическую энергию и производить бесконечное количество работы.

На это Вебер *) отвечает, что начальная и относительная скорость частиц в примере, приводимом Гельмгольцем, хотя и является конечной, но она больше, чем скорость света, и что расстояние, на котором кинетическая энергия становится бесконечной, хотя и является конечным, но оно меньше, чем любая величина, которую мы в состоянии воспринять, так что может оказаться физически невозможным настолько сблизить две молекулы. Приведенный пример не может быть поэтому проверен каким бы то они было экспериментальным методом.

Гельмгольц **) рассмотрел случай, в котором расстояния не являются слишком малыми и скорости не являются слишком большими для экспериментальной проверки. Неподвижная непроводящая сферическая поверхность радиуса a равномерно заряжена электричеством до поверхностной плотности σ. Частица, имеющая массу m и несущая заряд e электричества, движется внутри сферы со скоростью v. Электродинамический потенциал, исчисленный из формулы (20), есть:

$$4\pi a\sigma e\left(1-\frac{v^2}{6c^2}\right), \qquad (21)$$

и он независим от положения частички внутри сферы. Прибавляя к этому V—часть потенциальной энергии, возникающую от действия других сил, и $\frac{1}{2}mv^2$ — ки-

*) См. «Elektr. Maassbestim. inbesondere über d. Prinzip d. Erhaltung d. Energie».

**) Berlin. Monatsbericht, апрель 1872 г., стр. 247—256; Phil. Mag., декабрь 1872 г.; приложение, стр. 530—537.

нетическую энергию частицы, мы находим в качестве уравнения энергии

$$\frac{1}{2}\left(m-\frac{4}{3}\frac{\pi a\sigma e}{c^2}\right)v^2+4\pi a\sigma e+V=\text{const}. \tag{22}$$

Так как второй член коэффициента при v^2 может быть бесконечно увеличен путем увеличения a—радиуса сферы, в то время как поверхностная плотность σ остается постоянной, коэффициент при v^2 может быть сделан отрицательным. Ускорение движения частицы тогда бы соответствовало уменьшению ее живой силы, и тело, движущееся по замкнутому пути, на которое действует сила, подобная трению, всегда противоположная направлению движения, могло бы непрестанно, безгранично увеличивать свою скорость. Этот невозможный результат является необходимым следствием принятия какой-нибудь формулы для потенциала, которая вводит отрицательные члены в коэффициент при v^2.

855.] Рассмотрим, однако, применение теории Вебера к явлениям, которые могут быть осуществлены. Мы видели, как веберовская теория дает выражение Ампера для силы притяжения между двумя элементами электрических токов. Потенциал одного из этих элементов относительно другого находится путем суммирования значений потенциала ψ для четырех комбинаций положительного и отрицательного токов в двух элементах. Результат согласно уравнению (20), если взять сумму четырех значений $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$, есть:

$$-ii'\,ds\,ds'\,\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}, \tag{23}$$

и потенциал замкнутого тока относительно другого есть:

$$-ii'\iint\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds'=ii'M, \tag{24}$$

где $M = \iint \frac{\cos\varepsilon}{r} ds\, ds'$, как в параграфах 423, 524. В случае замкнутых токов это выражение согласуется с тем, которое мы уже получили (в параграфе 524) *).

Теория Вебера индукции электрических токов

856.] Выведя из формулы Ампера взаимодействия между элементами токов свою собственную формулу взаимодействия движущихся электрических частиц, Вебер приступил к приложению своей формулы к объяснению получения электрических токов при помощи магнитно-электрической индукции. В этом он достиг исключительного успеха, и мы охарактеризуем здесь метод, которым законы индуктированных токов могут быть выведены из формулы Вебера. Заметим, однако, что то обстоятельство, что закон, выведенный из явлений, открытых Ампером, может также объяснять явления, открытые позднее Фарадеем, не дает слишком большого дополнительного веса очевидности физической истинности закона, как это можно было бы предположить с первого взгляда.

Действительно, Гельмгольцем и Томсоном было уже показано (см. параграф 543), что если явления Ампера истинны и если допускается принцип сохранения энергии, тогда явления индукции, открытые Фарадеем, становятся необходимыми следствиями. Но закон Вебера с различными входящими в него допущениями, касающимися природы электрических токов, приводит путем ряда математических преобразований к формуле Ампера. Закон Вебера также совместим с принципом сохранения энергии, если существует потенциал, а это все, что требуется Гельмгольцем и Томсоном для при-

*) Во всем этом исследовании Вебер принимает электродинамическую систему единиц. В этом трактате мы всегда пользуемся электромагнитной системой. Электромагнитная единица тока относится к электродинамической единице, как $\sqrt{2}$ относится к единице (параграф 526).

менения принципа. Отсюда мы можем утверждать даже до того, как мы сделаем какие-либо вычисления по этому вопросу, что закон Вебера будет объяснять явление индукции электрических токов. Следовательно, тот факт, что вычислениями показано, что он объясняет индукцию электрических токов, оставляет доказательство физической истины закона в точности на том же месте, где оно было.

С другой стороны, формула Гаусса, хотя она и объясняет явление притяжения токов, не совпадает с принципом сохранения энергии, и следовательно, мы не можем утверждать, что она объяснит все явления индукции. Так оно в действительности и получается, как мы это увидим в параграфе 859.

857.] Мы должны теперь рассмотреть электродвижущую силу, стремящуюся произвести ток в элементе ds', вызываемую током в ds, когда ds находится в движении или когда ток в нем изменяется.

Согласно Веберу действие на материал проводника, одним из элементов которого является ds', есть *сумма* всех действий на электричество, которое проходит по проводнику. С другой стороны, электродвижущая сила, действующая на электричество в ds, есть *разность* электрических сил, действующих на положительное и отрицательное электричество в нем. Так как все эти силы действуют по линии, соединяющей элементы, электродвижущая сила в ds' также находится на этой линии, и для того чтобы получить электродвижущую силу в направлении ds', мы должны найти составляющую в этом направлении. Для того чтобы применить формулу Вебера, мы должны вычислить различные члены, которые в ней встречаются, в предположении, что элемент ds движется относительно ds' и что токи в обоих элементах изменяются со временем. Таким образом, найденные выражения будут заключать члены, содержащие v^2, vv', v'^2, v и v', и члены, не содержащие v или v', которые все умножаются на ee'. Рассматривая, как мы это делали раньше, четыре значения каждого члена и прежде всего механическую силу, которая получается из суммы четырех значений, мы находим, что единственный член, который мы должны принять во внимание, есть член, который содержит произведение $vv'ee'$.

Если мы далее рассмотрим силу, стремящуюся производить ток во втором элементе, возникающую из разницы в действии первого элемента на положительное и отрицательное электричество второго элемента, мы найдем, что единственным членом, который мы должны рассмотреть, является тот, который содержит vee'.

Четыре члена, содержащихся в $\sum(vee')$, мы можем написать следующим образом:

$$e'(ve+v_1e_1) \text{ и } e_1'(ve+v_1e_1).$$

Так как $e'+e_1'=0$, механическая сила, обусловленная этими членами, равна нулю, но электродвижущая сила, действующая на положительное электричество e', есть $(ve+v_1e_1)$, а электродвижущая сила, действующая на отрицательное электричество e_1', равна и противоположна первой.

858.] Предположим теперь, что первый элемент ds двигается относительно ds' со скоростью V в некотором направлении, и обозначим через $\widehat{Vds}$ и $\widehat{Vds'}$ углы между направлением V и направлениями ds и ds' соответственно; тогда квадрат относительной скорости u двух электрических частичек будет:

$$u^2=v^2+v'^2+V^2-2vv'\cos\varepsilon+$$
$$+2Vv\cos\widehat{Vds}-2Vv'\cos\widehat{Vds'}. \qquad (25)$$

Член с vv' тот же самый, как и в уравнении (3). Член с v, от которого зависит электродвижущая сила, есть:

$$2Vv\cos\widehat{Vds}.$$

Мы также имеем в этом случае для значения производной от r по t:

$$\frac{\partial r}{\partial t}=v\frac{dr}{ds}+v'\frac{dr}{ds'}+\frac{dr}{dt}, \qquad (26)$$

где $\frac{\partial r}{\partial t}$ относится к движению электрических частиц и $\frac{dr}{dt}$ — к движению материального проводника. Если мы образуем квадрат этой величины, член, содержащий vv', от которого зависит механическая сила, остается таким же, как указано в уравнении (5), а член, содержащий v, от которого зависит электродвижущая сила, есть:

$$2v\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}.$$

Дифференцируя (26) по t, находим:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}=v^2\frac{d^2r}{ds^2}+2vv'\frac{d^2r}{ds\,ds'}+v'^2\frac{d^2r}{ds'^2}+\frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds}+\frac{dv'}{dt}\frac{dr}{ds'}+$$
$$+v\frac{dv}{ds}\frac{dr}{ds}+v'\frac{dv'}{ds}\frac{dr}{ds'}+2v\frac{d}{ds}\frac{dr}{d}+2v'\frac{d}{ds'}\frac{dr}{dt}+\frac{d^2r}{dt^2}{}^{*)}. \quad (27)$$

Мы находим, что член, содержащий vv', тот же самый, что и в уравнении (6).

Члены, знаки которых меняются с изменением знака v, суть $\frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds}$ и $2v\frac{d}{ds}\frac{dr}{dt}$.

859.] Если мы теперь по формуле Гаусса (уравнение (18)) вычислим результирующую электрическую силу в направлении второго элемента ds', обусловленную действием первого элемента ds, то получим

$$\frac{1}{r^2}\,ds\,ds'\,iV\,(2\cos\widehat{Vds}-3\cos\widehat{Vr}\cos\widehat{rds})\cos\widehat{rds'}. \quad (28)$$

Так как в этом выражении нет члена, содержащего изменение тока i, и так как мы знаем, что изменение первичного тока производит индуктивное действие на вторичную цепь, то мы не можем считать формулу Гаусса истинным выражением взаимодействия между электрическими частицами.

---

*) {В первом и втором изданиях члены $2v\frac{d}{ds}\frac{dr}{dt}+2v'\frac{d}{ds'}\frac{dr}{dt}$ были опущены; так как $\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\left\{v\frac{d}{ds}+v'\frac{d}{ds'}+\frac{d}{dt}\right\}^2$, то, повидимому, они должны быть включены, однако они не влияют на результат, когда цепи замкнуты.}

860.] Если, однако, мы применим формулу Вебера (19), мы получим:

$$\frac{1}{r^2}\,ds\,ds'\left(r\frac{dr}{ds}\frac{di}{dt}+2i\frac{d}{ds}\frac{dr}{dt}-i\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}\right)\frac{dr}{ds'}, \tag{29}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)ds\,ds'+\frac{i}{r}\left(\frac{d^2r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}-\frac{d^2r}{ds'\,dt}\frac{dr}{ds}\right)ds\,ds'. \tag{30}$$

Если мы проинтегрируем это выражение по s и s', то получим для электродвижущей силы во второй цепи

$$\frac{d}{dt}i\iint\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}ds\,ds'+$$
$$+i\iint\frac{1}{r}\left(\frac{d^2r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}-\frac{d^2r}{ds'\,dt}\frac{dr}{ds}\right)ds\,ds'. \tag{31}$$

Когда первая цепь замкнута,

$$\int\frac{d^2r}{ds\,ds'}ds=0,$$

откуда

$$\int\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}ds=$$
$$=\int\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}+\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right)ds=-\int\frac{\cos\varepsilon}{r}ds. \tag{32}$$

Но

$$\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}ds\,ds'=M \tag{33}$$

согласно параграфам 423, 524.

Так как второй член в уравнении (31) исчезает, если обе цепи замкнуты, мы можем написать электродвижущую силу во второй цепи в виде

$$-\frac{d}{dt}(iM), \tag{34}$$

что совпадает с тем, что мы уже установили ранее опытным путем (см. параграф 539).

Формула Вебера, как вытекающая из принципа действия, передаваемого от одной электрической частицы к другой с постоянной скоростью

861.] В очень интересном письме Гаусса к Веберу *) Гаусс ссылается на теоретические электродинамические изыскания, которыми он долго занимался и которые он хотел бы опубликовать, если бы мог твердо установить то, что он рассматривал как подлинный ключ электродинамики, а именно, выведение силы, действующей между движущимися электрическими частицами, рассматривая эту силу не в качестве мгновенного действия на расстоянии, но действия, распространяющегося во времени, таким же образом, как распространяется свет. Ему не удалось сделать этот вывод, когда он оставил свои электродинамические исследования, но он был глубоко убежден, что в первую очередь следовало бы составить надлежащее рациональное представление о том, каким образом это распространение происходит.

Три выдающихся математика занялись тем, чтобы дать этот основной принцип электродинамики.

862.] В представленной Королевскому обществу в Геттингене в 1858 г. записке, но в дальнейшем взятой обратно и опубликованной только в 1867 г. в «Анналах Поггендорффа» (Pogg. Ann., т. CXXXI, стр. 237—263) после смерти автора, Бернгард Риман (Riemann) выводит явление индукции электрических токов из модифицированной формы уравнения Пуассона

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho=\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2V}{dt^2},$$

где V есть электростатический потенциал и α—скорость. Это уравнение имеет ту же форму, как и уравнения, которые изображают распространение волн и других возмущений в упругих средах. Автор, повидимому, избегает явным образом упоминать о среде, через которую происходит распространение.

---

*) Март 19, 1845. См. «Werke», т. V, 629.

Математическое исследование Римана было рассмотрено Клаузиусом (Clausius) *), который отметил неясность математических выкладок Римана и показал, что гипотеза распространяющегося подобно свету потенциала не приводит ни к формуле Вебера, ни к известным законам электродинамики.

863.] Клаузиус также изучил значительно более разработанное исследование К. Неймана (C. Neumann) «О принципах электродинамики» **). Нейман, однако, подчеркнул ***), что его теория передачи потенциала от одной частицы к другой совершенно отлична от теории, предложенной Гауссом, принятой Риманом и обсуждавшейся Клаузиусом, в которой распространение принимается аналогичным распространению света. Согласно Нейману между передачей потенциала и распространением света имеется огромная разница.

Светящееся тело посылает свет во всех направлениях, сила этого света зависит только от светящегося тела, а не от присутствия тела, освещаемого им.

Напротив, электрическая частица испускает потенциал, величина которого $\frac{ee'}{r}$ зависит не только от e—испускающей частицы, но и от e'—воспринимающей частицы и от расстояния между частицами *в момент испускания*.

В случае света сила света уменьшается по мере того, как свет все дальше и дальше распространяется от святящегося тела; испущенный потенциал приходит к телу, на которое он действует, без малейшего изменения своей первоначальной величины.

Свет, полученный освещаемым телом, обычно является только дробной частью того света, которая на него падает; потенциал, полученный притягиваемым телом, тождественен или равен потенциалу, который прибывает к нему.

---

*) Pogg. Ann., т. CXXXI, стр. 612.

**) Tübingen, 1868.

***) Mathematische Annalen, I, 317.

Кроме того, скорость передачи потенциала не является подобно скорости распространения света постоянной относительно эфира или пространства, эта скорость более похожа на скорость снаряда, являясь постоянной относительно скорости испускающей частицы в момент испускания.

Отсюда вытекает, что, для того чтобы понять теорию Неймана, мы должны составить себе представление о процессе передачи потенциала, весьма отличное от того представления, к которому мы привыкли, рассматривая распространение света. Можно ли будет это представление когда-либо принять в качестве «конструктивного представления» процесса передачи, который казался необходимым Гауссу, я сказать не могу; но я сам оказался не в состоянии составить себе рациональное представление о неймановской теории.

864.] Профессор Бетти (Betti) из Пизы *) рассматривал этот вопрос другим путем. Он предполагает, что замкнутые цепи, по которым текут электрические токи, состоят из элементов, каждый из которых периодически, т. е. через равные промежутки времени, поляризуется.

Эти поляризованные элементы действуют один на другой, как если бы они были маленькими магнитами, оси которых имеют направления касательных к цепям. Период поляризации одинаков во всех электрических цепях. Бетти предполагает, что действие одного поляризованного элемента на другой возникает не мгновенно, но через промежуток времени, пропорциональный расстоянию между элементами. Таким путем он получает выражения для взаимодействия токов, которые совпадают с теми, которые нам известны как истинные. Однако и в этом случае Клаузиус критиковал некоторые части математических расчетов Бетти, на чем мы останавливаться не будем.

865.] Повидимому, в умах этих выдающихся людей имеется некоторое *предвзятое* мнение или априорное

---

*) Nuovo Cimento, XXVII (1868).

возражение против гипотезы среды, в которой имеют место явления излучения света и тепла и электрических действий на расстоянии. Верно то, что было время, когда занимавшиеся спекуляциями о причинах физических явлений имели обыкновение объяснять каждый вид действия на расстоянии при помощи специального эфирного флюида, функцией и свойством которого было производство этих действий. Они заполняли все пространство тремя или четырьмя, перекрывавшими друг друга эфирами различных сортов. Свойства этих эфиров изобретались, главным образом, для того, чтобы «спасти благопристойность», так что более разумно настроенные исследователи были скорее согласны принять не только несомненный закон Ньютона о явлении притяжения на расстоянии, но даже догму Котса *), что действие на расстоянии является одним из первичных свойств материи и что никакое объяснение не может быть более понятным, чем сам этот факт. Отсюда волновая теория света встретила большую оппозицию, направленную не против ее неспособности объяснять явления, но против допущения существования среды, в которой свет распространяется.

866.] Мы видели, что математические выражения электродинамического действия привели Гаусса к убеждению, что теория распространения электрического действия во времени могла бы оказаться подлинным основным принципом электродинамики.

Но мы не в состоянии понимать распространение во времени иначе, как только двумя способами: или как полет материальной субстанции через пространство или как распространение состояния движения или напряжения в среде, уже существующей в пространстве. В теории Неймана фигурирует математическая концепция, называемая потенциалом. Потенциал мы не можем рассматривать как материальную субстанцию. Однако предполагается, что он передается от одной частицы к другой. Эта передача происходит способом, который

*) Предисловие к «Principia» Ньютона, 2-е издание.

совершенно независим от среды и который, как Нейман сам подчеркивает, чрезвычайно отличен от способа распространения света. В теориях Римана и Бетти, как будто, предполагается, что действие распространяется каким-то способом, более похожим на распространение света.

Как бы там ни было, но все эти теории естественным образом вызывают вопрос: если нечто передается от одной частицы к другой на расстояние, каково состояние этого нечто после того, как оно покинуло одну частицу и еще не достигло другой? Если это нечто есть потенциальная энергия двух частиц, как в теории Неймана, должны ли мы рассматривать эту энергию, как существующую в какой-то точке пространства, не совпадающей ни с той, ни с другой частицей? Действительно, каким бы способом энергия ни передавалась от одного тела к другому во времени, должна быть среда или субстанция, в которой энергия существует после того, как она оставила одно тело и еще не достигла другого, ибо энергия, как заметил Торричелли *), «есть квинтэссенция такой тонкой природы, что она не может содержаться ни в каком другом сосуде, как только в самой сокровенной субстанции материальных вещей». Таким образом, все эти теории приводят к концепции среды, в которой имеет место распространение. И если мы примем эту среду в качестве гипотезы, я считаю, что она должна занимать выдающееся место в наших исследованиях и что нам следовало бы попытаться сконструировать рациональное представление о всех деталях ее действия, что и было моей постоянной целью в этом трактате.

*) Lezioni Accademiche (Firenze, 1715), стр. 25.

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА И ПЕРЕВОДЧИКА

О ФАРАДЕЕВЫХ СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ

1. (Стр. 11.) *Джемс Клерк Максвелл* происходил из знатной и богатой шотландской семьи. Его отец владел имением Гленлер вблизи Эдинбурга. Здесь 13 июня 1831 г. родился будущий знаменитый ученый.

Уже учеником средней школы в Эдинбурге Максвелл выполнил первую научную работу по геометрии и, обучаясь в Эдинбургском университете, работал самостоятельно над проблемами геометрии и механики.

С 1850 г. Максвелл учится в Кембридже в том самом Тринити-Колледже, где учился и работал когда-то Ньютон. Здесь он изучает механику, физику, геометрию и здесь он начинает свои исследования по теории электричества и эксперименты по теории цветов.

По окончании Кембриджа Максвелл остается в нем в качестве члена Колледжа еще на два года. С 1856 г. он преподает физику в Абердине (Шотландия) и занимается проблемой устойчивости колец Сатурна и исследованиями в области динамики твердого тела. С 1860 г. Максвелл руководит кафедрой физики в Королевском Колледже в Лондоне. В этот период он разрабатывает проблемы кинетической теории газов, теории упругости, продолжает свои исследования по теории электричества, активно участвует в работе по стандартизации электрических единиц.

С 1865 г. Максвелл оставляет службу и живет как частное лицо в своем имении. Здесь он подготавливает свой знаменитый «Трактат об электричестве и магнетизме».

В 1871 г. Максвелл принимает предложение Кембриджского университета взять руководство строительством и организацией лаборатории имени Кавендиша. Максвелл до самой смерти, последовавшей 5 ноября 1879 г., стоял во главе этого известного научного учреждения, которым после его смерти руководили последовательно Релей, Дж. Дж. Томсон, Резерфорд.

Время работы Максвелла совпало с временем наивысшего развития британского домонополистического капитализма. За счет ограбления колоний, и в первую очередь Индии, английская буржуазия могла щедрее, чем где бы то ни было на континенте, финансировать научные учреждения, как, например, ту же кембриджскую лабораторию Кавендиша. Вместе с тем науке была предоставлена относительная свобода и самостоятельность. Самое мышление ученых британских островов отличалось конкретностью, почти, так сказать, грубо механической осязаемостью. Дюгем, характеризуя модельные представления британских ученых, с возмущением отмечал, что думаешь попасть в упорядоченное математическое хозяйство, а попадаешь на какой-то завод. Нельзя не признать, что Дюгем правильно связывает эту черту мышления английских физиков со стремлением английских дельцов капитала к быстрейшему извлечению прибыли из научных знаний, вследствие чего забота о безупречном логическом оформлении теории отходила на второй план. И не случайно, что как сам Максвелл, так и В. Томсон и другие современники и преемники этих ученых, живо интересовались вопросами практических приложений науки. Стоит только вспомнить труды Томсона по прокладке трансатлантического кабеля и работы Максвелла по прикладной механике и в Комитете по электрическим единицам. Конечно, максимальное приближение ученых к практике—положительное явление, но в условиях капиталистической действительности за этим обычно скрываются интересы наживал капитала. Следует отметить, что в творчестве и мировоззрении английских физиков этой эпохи отразились и типично ханжеские черты лицемерной английской буржуазии.

У Максвелла, В. Томсона и др. мы нередко встречаем поповские утверждения, вроде взглядов Максвелла, что к атомам и молекулам неприменима идея эволюции, что неизменные атомы несут на себе отпечаток черт их сотворившего. Тем интереснее и значительнее те элементы стихийного материализма и даже стихийной диалектики, которые мы находим в творчестве Максвелла, свидетельствующие о том, что сама жизнь, правда науки, брала верх и побеждала буржуазную ограниченность ученого.

В целом научное творчество Максвелла было прогрессивным и открыло в истории физики новую и важную страницу.

Научные результаты Максвелла обширны и разнообразны. Он был глубоким теоретиком и блестящим экспериментатором. Он с одинаковым успехом разрабатывал сложные теоретические проблемы и вопросы чисто прикладного значения. Наряду с фундаментальными оригинальными исследованиями его перу принадлежит большое количество образцовых научно-популярных книг и статей. Он с успехом конструировал приборы и модели, разрабатывал измерительные схемы и методы измерений и, наконец, глубоко интересовался проблемами истории науки.

В этой блестящей и многогранной деятельности первое место принадлежит разработанной им теории электромагнитного поля, увенчавшейся созданием электромагнитной теории света—этим замечательным синтезом физики второй половины XIX века.

Историю формирования и развития электромагнитной теории Максвелла читатель может проследить по приведенным его основным работам.

2. (Стр. 11.) Работой «О фарадеевых силовых линиях» Максвелл начал свои классические исследования по электричеству и магнетизму, еще будучи студентом Кембриджа (1855—1856 гг.). (Опубликована она была значительно позже, в 1864 г.) К этому времени макроскопическая электродинамика достигла больших успехов. Исследованиями Ампера были установлены законы пондеромоторных действий токов, Фарадей, Ленц и Нейман установили закон электромагнитной индукции, после работ Шиллинга, Морзе и Якоби началась эпоха технических приложений электричества. На очереди стоял вопрос о создании теории электромагнетизма, охватывающей разнообразные и сложные проявления электромагнитных взаимосвязей.

Успехи небесной механики и математической теории электростатики и магнетостатики (Лаплас, Остроградский, Пуассон, Грин, Гаусс) направили мысль теоретиков (в первую очередь В. Вебера) на поиски элементарного закона взаимодействия электрических зарядов. Замечательно, что, идя этим путем, Вебер пришел к концепции атома электричества, однако в формуле Вебера сила взаимодействия оказалась зависящей не только от мгновенного положения электрических зарядов, но и от их относительных скоростей и ускорений. Серьезные сомнения вызывал вопрос о совместимости закона Вебера с законом сохранения энергии (дискуссия Гельмгольца и Вебера) *). Наконец, роль среды в электрических и магнитных взаимодействиях была уже твердо установлена (Фарадей), и недоверие физиков к закону Вебера возрастало. Уже Гаусс в 1845 г. указывал в письме к Веберу на необходимость допущения концепции конечной скорости распространения электрических сил. С другой стороны, Фарадей с 1821 г. успешно и плодотворно развивал идею определяющей роли среды в электрических и магнитных взаимодействиях и тесной взаимосвязи всех процессов (электрических, магнитных, световых, гравитационных), разыгрывающихся в среде.

Оригинальный метод Фарадея, прибегавшего к построению своеобразных конструкций (трубок) для описания процессов в среде, был чужд физикам-теоретикам и не был понят ими. Максвелл в этой работе, развивая фарадеевскую концепцию, получает, исходя из модели движения некоторой гипотетической жидкости, те результаты, которые были получены Пуассоном, Лапласом, Грином, Гауссом, В. Томсоном и др. математическим путем. Однако результаты Максвелла значительнее. Так, он в этой

*) См. гл. XXIII «Трактата» Максвелла, стр. 621 и далее настоящего издания.

работе дает уже первоначальную формулировку своих знаменитых уравнений (правда, без установления понятия тока смещения и дискуссии следствий о конечной скорости распространения электромагнитного поля). Больцман прав, говоря в своих примечаниях к этой работе (см. стр. 90), что она доказывает, «... что он (т. е. Максвелл) работал по хорошо обдуманному заранее плану».

В настоящем издании использованы некоторые примечания Больцмана, сделанные им для немецкого издания («Оствальдовские классики», № 69). Опущен последний раздел работы, посвященный методу электрических изображений. (*Ред.*)

3. (Стр. 12.) Замечание Максвелла: «необходимо прежде всего упростить выводы прежних исследований и привести их к форме, наиболее доступной восприятию», иногда пытались рассматривать как выражение пресловутого махистского «принципа экономии».

На самом деле метод Максвелла ничего общего не имел с принципом экономии и другими атрибутами махизма. Максвелл разделял стихийное материалистическое убеждение естествоиспытателей в объективном существовании внешнего мира, в его материальном единстве, в познаваемости человеком объективных закономерностей природы.

Указанное замечание Максвелла, равно как и аналогичные высказывания Ньютона («Природа проста и не роскошествует излишними причинами») и Ломоносова («Природа весьма проста, что этому противоречит должно быть отвергнуто»), является отражением *единства* материальной природы при всем бесконечном разнообразии ее проявлений. Именно это единство дает возможность Максвеллу широко использовать метод физических аналогий, установить связь уравнений, описывающих различные классы физических явлений. Сравните, например, у Ломоносова: «Природа крепко держится своих законов и всюду одинакова» или у Столетова: «Не говорят ли они (факты спектрального анализа. — *Ред.*) красноречивее, чем что-либо с тех пор, как открыто всемирное тяготение, не говорят ли они о вещественном единстве и общем происхождении видимой нами вселенной». Максвелл приводит в качестве примера аналогии тот факт, что закон стационарного распределения температур в теле и закон распределения гравитационного потенциала вне тяготеющих масс выражаются одним и тем же уравнением Лапласа.

Ленин, цитируя речь Больцмана на Мюнхенском съезде естествоиспытателей в 1899 г., писал: «Единство природы обнаруживается в „поразительной аналогичности“ дифференциальных уравнений, относящихся к различным областям явлений» («Материализм и эмпириокритицизм», стр. 272, 1948). Разумеется, это единство не означает однообразия, так же как аналогия— тождества. (*Ред.*)

4. (Стр. 14.) Это, конечно, преувеличенная оценка влияния теорий дальнодействия на развитие науки. Теория дальнодействия с самого момента ее возникновения встречала активных и сильных противников (Декарт, Гюйгенс, Ломоносов, Эйлер и др.). Но эта оценка интересна как характеристика тех умонастроений в теоретической физике, которые господствовали в тот период, когда Максвелл вступил в борьбу за внедрение в физику идей Фарадея. (*Ред.*)

5. (Стр. 15.) Здесь в первый раз Максвелл говорит о математическом характере метода Фарадея, не пользовавшегося, как известно, в своих работах даже элементарной алгеброй. Позднее он настоятельно будет говорить об этом в своем известном «Предисловии» к «Трактату» (настоящее издание, стр. 349). Одна из задач работы «О фарадеевых силовых линиях» как раз и заключается в переводе идей Фарадея на язык математики (геометрии и анализа). (*Ред.*)

6. (Стр. 16.) Подчеркивая иллюстративный характер своей аналогии, Максвелл указывает на недопустимость отождествления его воображаемой жидкости как с реальной жидкостью, так и гипотетическими невесомыми жидкостями XVIII века. (*Ред.*)

7. (Стр. 17.) Используя метод аналогий, Максвелл начинает изложение теории электричества и магнетизма (в первую очередь основ *электростатики и магнитостатики*) с помощью гидродинамической модели. Этот прием Максвелла оказался весьма плодотворным. В теории поля до сих пор удержались термины «источники», «дивергенция», «вихрь», обязанные своим происхождением гидродинамической аналогии. Сама эта аналогия в дальнейшем развитии пережила новую ступень: применение электродинамических аналогий в гидродинамике. Вообще метод Максвелла допускал в большом количестве использование аналогий и моделей. Однако Максвелл никогда не рассматривал аналогию как тождество и модель, как *исчерпывающую* изучаемые явления и закономерности. Они служили у него ступенями в процессе познания природы и использовались постольку, поскольку помогали правильно отражать те или иные черты исследуемых процессов. Поэтому Максвелл, например, никогда не заботился о том, чтобы построить единую непротиворечивую механическую модель электромагнитных явлений, а использовал одновременно несколько моделей, иногда даже противоречащих друг другу.

Не настаивая нигде на окончательном характере своих моделей и аналогий, Максвелл мог свободно оперировать с такими образами, как образ жидкости в рассматриваемой работе. Отметим, что идея Максвелла сведения статических взаимодействий к динамическим процессам (хотя бы в виде построения модели движения воображаемой жидкости) имеет очень глубокое принципиальное значение и неоднократно поднималась выдающимися теоретиками (например, Н. Умовым, Герцем, Дж. Дж. Томсоном). (*Ред.*)

8. (Стр. 22.) Больцман в примечании 3 указывает, что аналогичную идею представления силового поля гипотетической жидкостью, обладающей источниками, развивал Риман (см. русское издание его сочинений «Новые математические принципы натурфилософии», стр. 468—469, ГТТИ, 1948). При этом Больцман правильно противопоставляет идеалистическо-мистические предпосылки Римана, обосновывающего идею источников тем, что «в основе всякого акта нашей души лежит „остающееся“, вступающее в нашу душу при этом акте, но в тот же момент окончательно исчезающее из мира явлений», простой математической гипотезе Максвелла о существовании источников движения жидкости, дальнейшее исследование которых не нужно для поставленной автором задачи. (*Ред.*)

9. (Стр. 24.) Так как Максвелл по условию рассматривает установившееся движение жидкости, то инерционные явления в его картине роли не играют. Однако для его теории важно исследование роли среды в электромагнитных явлениях, поэтому он с самого начала вводит идею о силах сопротивления среды, посредством которой он и дает интерпретацию изменения поля в веществе, электрических и магнитных характеристик вещества. (*Ред.*)

10. (Стр. 24.) В уравнении Эйлера

$$\rho\left(f-\frac{dv}{dt}\right)-kv=\operatorname{grad} p.$$

Согласно условию полагаем $\rho=0$. (*Ред.*)

11. (Стр. 27.) Здесь и в дальнейшем речь идет об определении потенциального поля по его источникам. Связь поля (в интерпретации Максвелла—поля скоростей v) с источниками e дается теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\oint v_n\,dS=4\pi e,$$

а поля с давлением (потенциалом)—формулой

$$v=-\frac{1}{k}\operatorname{grad} p.$$

Таким образом, легко все выводы Максвелла перевести на язык современной теории потенциального поля. (*Ред.*)

12. (Стр. 30.) Если интерпретировать давление p как потенциал, скорость—как индукцию, то коэффициент сопротивления

приобретает смысл $\frac{1}{\varepsilon}$, где ε — диэлектрическая постоянная, и высказанное здесь Максвеллом предложение означает, что при заполнении пространства диэлектриком при неизменных потенциалах плотность свободных зарядов возрастает в ε раз. (*Ред.*)

13. (Стр. 31.) Здесь Максвелл впервые в макроскопической электродинамике прибегает к введению так называемых фиктивных зарядов. (*Ред.*)

14. (Стр. 48.) Для утверждения законов стационарного электрического тока чрезвычайно большую роль сыграли исследования *Ленца*. Закон Ома внедрялся в физику с большим трудом, и Ленцу пришлось немало потрудиться, чтобы рассеять ряд заблуждений (вроде гипотезы о «сопротивлении перехода» в жидких проводниках), господствовавших у физиков в отношении закономерностей тока. Ленцу же принадлежит первое решение задачи о распределении тока в системе разветвленных проводников, и в этом отношении он является прямым предшественником *Кирхгофа*. Что касается упоминаемой Максвеллом работы Кирхгофа о проводимости пластинок, то эта задача была рассмотрена Кирхгофом для частного случая плоскости, а *Больцманом* для сферы и круглого цилиндра. В 1875 г. задача для общего случая проводящих поверхностей была решена *Н. А. Умовым* в работе «О стационарном движении электричества на проводящих поверхностях произвольного вида».

Эту работу Умов представил Кирхгофу, который вскоре опубликовал работу с теми же результатами, полученными несколько отличным методом, в которой он, хотя и упоминает об Умове, но не отмечает должным образом его приоритета. (См. Н. А. Умов, Избр. сочин., стр. 21, 447, 1950). (*Ред.*)

15. (Стр. 49.) По Максвеллу не должно существовать абсолютно непереходимой границы между проводниками и изоляторами. Именно эта идея приведет его в конце концов к установлению понятия тока смещения. (*Ред.*)

16. (Стр. 52.) Аналогия, развиваемая здесь Максвеллом, приводит в се дальнейшем развитии к расчетным формулам магнитных цепей (формула Гопкинсона). Конечно, эта аналогия весьма поверхностна, и магнитная проницаемость не аналогична электропроводности. Однако наличие тепловых потерь в ферромагнетиках в переменных полях дало повод проф. В. К. Аркадьеву обобщить второе уравнение Максвелла, введя в него коэффициент магнитной проводимости, характеризующий эти потери. (См. В. К. Аркадьев, «Электромагнитные процессы в металлах», т. II.) (*Ред.*)

17. (Стр. 59.) Характерный пример «обтекания» трудности при помощи формально-математических средств. В современной теоретической физике этот прием очень распространен. (*Ред.*)

18. (Стр. 69.) Это уравнение есть не что иное, как первое уравнение Максвелла в рационализированной системе единиц для стационарных токов, которое в современной векторной форме имеет вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}.$$

Максвелловского обобщения понятия тока, включающего ток смещения, здесь еще нет. (*Ред.*)

19. (Стр. 71.) Это равенство получается из формулы Грина

$$\int \{\psi\Delta\varphi + \nabla\psi\nabla\varphi\}\, dV = \oint_S \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS,$$

если иметь в виду, что в бесконечности

$$\oint_S \psi\, \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = 0. \text{ (\textit{Ред.})}$$

20. (Стр. 71.) Под потенциалом системы самой на себя Максвелл имеет в виду собственную энергию непрерывно распределенных источников,

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi\rho\, dV,$$

которая может быть преобразована в интеграл по объему поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2\, dV$$

с помощью предыдущей формулы Грина и уравнения Пуассона. Множитель $^1/_2$ здесь и в дальнейших выкладках Максвелла отсутствует. (Максвелл исходит из формулы Грина, полагая $\psi = \varphi$, $\Delta\varphi = -4\pi\rho$.) (*Ред.*)

21. (Стр. 73.) В современных обозначениях теорема V формулируется так. Дан соленоидальный вектор $\boldsymbol{B}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0,$$

тогда

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}.$$

Задача решается с точностью до произвольного потенциального вектора $\boldsymbol{A}' = \operatorname{grad}\psi$ (калибровочная инвариантность). Скаляр ψ может быть определен, если известна $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$. Если $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, то $\boldsymbol{A}' = 0$. (*Ред.*)

22. (Стр. 77.) Теорема VI — обобщение предыдущей. Дан вектор $\boldsymbol{B}$ и распределение его источников:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = -4\pi\rho,$$

тогда

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \varphi. \text{ (Ред.)}$$

23. (Стр. 78.) Пусть a, b, c — компоненты некоторого вектора $\boldsymbol{B}$, причем $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = -4\pi\rho$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — компоненты другого вектора $\boldsymbol{H}$, причем $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = -4\pi\rho'$. В теореме VII речь идет о преобразовании объемного интеграла

$$Q = \int \boldsymbol{B}\boldsymbol{H}\, dV.$$

По предыдущему

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \varphi,$$

где $\boldsymbol{A}$ — вектор-потенциал с компонентами $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Кроме того, введем вектор $\boldsymbol{j}\,(a_2, b_2, c_2)$ по уравнению $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}$. Далее,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \Delta\varphi = -4\pi\rho,$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = \Delta p = -4\pi\rho'.$$

Заменив в Q вектор $\boldsymbol{B}$ его выражением, получим:

$$Q = \int (\boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{H} \operatorname{grad} \varphi)\, dV.$$

Используя равенства

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}] = \boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}$$

и

$$\operatorname{div} (\varphi \boldsymbol{H}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H} \operatorname{grad} \varphi,$$

получаем:

$$Q = \int \operatorname{div} [\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}]\, dV + \int \boldsymbol{A} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\, dV + \int \operatorname{div} (\varphi \boldsymbol{H})\, dV - \int \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{H}\, dV.$$

Первый и третий интегралы преобразуются по теореме Остроградского-Гаусса и на бесконечно удаленной границе обращаются в нуль. Следовательно,

$$Q = -\int \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{H}\, dV + \int \boldsymbol{A} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\, dV,$$

что совпадает за исключением начертания формулы и знака во втором интеграле (примечание 35 Больцмана) с выражением Максвелла. Далее,

$$\int \boldsymbol{A} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\, dV = \int \boldsymbol{A}\boldsymbol{j}\, dV,$$

$$-\int \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{H}\, dV = \int \varphi 4\pi\rho'\, dV.$$

По теореме Грина (теорема III)

$$\int \varphi 4\pi\rho'\, dV = -\int \varphi \Delta p\, dV = -\int p \Delta\varphi\, dV = 4\pi \int p\rho\, dV$$

и

$$Q = \int \{4\pi p\rho + \boldsymbol{A}\boldsymbol{j}\}\, dV.$$

Это выражение с точностью до постоянных множителей совпадает с выражением магнитной энергии токов и магнитных масс:

$$W = \frac{1}{2} \int p\rho\, dV + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{A}\boldsymbol{j}\, dV. \quad (\textit{Ред.})$$

24. (Стр. 80.) Максвелл придавал идее Фарадея об «электротоническом» состоянии важнейшее значение. Он связывал ее с представлением о магнитном потоке и его инерционных свойствах. Ряд последующих работ Максвелл посвящает развитию этой идеи, в которой он, с одной стороны, усматривал возможность перебросить мост к механике, а с другой — возможность связать идеи Фарадея с работами математиков-физиков. Для этой цели он и вводит функцию вектора-потенциала, которая должна служить векторной характеристикой электротонического состояния. Идея электротонического состояния у Фарадея возникла в связи с описанием индукционных процессов, в которых проявляются с очевидностью свойства, аналогичные инерционным. Основываясь на аналогии с выражением силы инерции в механике

$$f = -\frac{dp}{dt},$$

Максвелл полагал, что в электродинамике аналогичное соотношение будет:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{A}}{dt},$$

где A — вектор-потенциал, $\boldsymbol{E}$ — напряженность индуцированного электрического поля. Поэтому он и называл вектор-потенциал «электромагнитным количеством движения» (momentum). Впоследствии, однако, он отказался от этой аналогии. Если переносить обобщенные координаты и импульсы Лагранжа в электродинамику, то обобщенными силами оказываются электродвижущие силы, а роль обобщенного импульса играет магнитный поток. (*Ред.*)

25. (Стр. 82.) Уравнения $\alpha_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\alpha_0}{dt}$ и т. д., которые можно представить в векторной форме:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi} \frac{dA}{dt},$$

являются зерном второй группы уравнений Максвелла. Максвелл при формулировке этих уравнений уже намечает и проблемы электродинамики движущихся сред в духе Герца. (*Ред.*)

26. (Стр. 86.) В этих шести законах уже содержится очерк будущей теории Максвелла, причем автор указывает на предварительный характер этой теории и ее стимулирующее значение для будущих исследований в области электричества. Видно из всего обзора, что математическая трактовка электромагнитного поля у Максвелла уже сложилась, однако ему не вполне ясен механический смысл вектора-потенциала, тем не менее Максвелл, подчеркивая предварительный характер своей теории, указывает на ее важное эвристическое значение. Вместе с тем Максвелл не считает законченной и свободной от возражений формальную теорию Вебера. (*Ред.*)

О ФИЗИЧЕСКИХ СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ

1. (Стр. 107.) Работа Максвелла «О физических силовых линиях» — вторая по времени и первая опубликованная работа по теории поля. Она печаталась по частям в журнале Philosophical Magazine за 1861—1862 гг. В ней Максвелл, пользуясь моделью некоего вихревого механизма, впервые приходит к своим знаменитым уравнениям и вводит фундаментальное понятие тока смещения. Перевод выполнен с английского текста (The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, т. I, 1890, стр. 451—513), приведены также примечания Больцмана к немецкому переводу трактата. (*Ред.*)

2. (Стр. 108.) Имеется в виду пробный магнитный полюс. (*Ред.*)

3. (Стр. 108.) Максвелл совершенно определенно становится на позиции Фарадея, связанные с признанием реальности физического состояния среды, представляемого силовыми линиями. Концепция близкодействия сложилась теперь окончательно и задача работы — отразить структуру поля в моделях и уравнениях. (*Ред.*)

4. (Стр. 109.) Как передовой ученый, Максвелл высоко ценит творческую силу научных гипотез для развития науки. Как известно, Энгельс назвал гипотезу «формой развития естествознания, поскольку оно мыслит». Идеалисты считали гипотезу только неким удобным «принципом описания». Передовые ученые материалисты активно боролись против голого эмпиризма и голого формализма. «Один опыт, — писал Ломоносов (Соч., т. 1, стр. 125), — я ставлю выше, чем тысячу мнений, рожденных только воображением. Но считаю необходимым сообразовать опыт с нуждами физики. Те, кто, собираясь извлечь из опыта истины, не берут с собою ничего, кроме собственных чувств, по большой части должны

остаться ни с чем: ибо они или не замечают лучшего и необходимейшего, или не умеют воспользоваться тем, что видят, или постигают при помощи остальных чувств».

На огромное значение гипотезы для задачи «вскрывать законы развития» явлений указывал и Д. И. Менделеев: «Таково свойство гипотез. Они науке и особенно ее изучению необходимы. Они дают стройность и простоту, каких без их допущения достичь трудно. Вся история наук это показывает. А потому можно смело сказать: лучше держаться такой гипотезы, которая может сказаться со временем неверною, чем никакой. Гипотезы облегчают и делают правильною научную работу — отыскания истины, как плуг земледельца облегчает выращивание полезных растений». (Основы химии, т. 1, стр. 151, 1947). (*Ред.*)

5. (Стр. 113.) Это известное «правило буравчика» Максвелла. (*Ред.*)

6. (Стр. 114.) Задача Максвелла — свести дальнодействия к натяжениям и давлениям в поле (тензор максвелловских натяжений). Среда, передающая взаимодействия зарядов, магнитов и токов, с этой точки зрения должна быть аналогичной упругому телу. С целью интерпретации упругих свойств среды Максвелл конструирует воображаемый вихревой механизм, из свойств которого он и выводит в дальнейшем натяжения и давления электромагнитных сил. (*Ред.*)

7. (Стр. 116.) Это — выражения тензора максвелловских натяжений:

$$T_{xx}=\frac{\mu}{4\pi}H_x^2-\frac{\mu}{8\pi}H^2,\quad T_{yy}=\frac{\mu}{4\pi}H_y^2-\frac{\mu}{8\pi}H^2,\quad T_{zz}=\frac{\mu}{4\pi}H_z^2-\frac{\mu}{8\pi}H^2,$$

$$T_{yz}=T_{zy}=\frac{\mu}{4\pi}H_yH_z,\quad T_{zx}=T_{xz}=\frac{\mu}{4\pi}H_zH_x,\quad T_{xy}=T_{yx}=\frac{\mu}{4\pi}H_xH_y.$$

При этом скорость вихря (α, β, γ) представляет напряженность $\boldsymbol{H}$ магнитного поля (и соответственно электрического), коэффициент μ — магнитную проницаемость (и соответственно диэлектрическую постоянную). Давление p интерпретируется как электромагнитное давление $\frac{\mu H^2}{8\pi}$ $\left(\text{и соответственно } \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\right)$. См. примечание 8. (*Ред.*)

8. (Стр. 117.) Если выделить в упругой среде объем V посредством замкнутой поверхности S, то этот объем будет находиться под действием внутренних объемных сил, распределенных с объемной плотностью f, и сил $f^{(s)}$, действующих со

стороны внешней части среды на поверхность. Условие равновесия

$$\int_V f\,dV + \int_S f^{(s)}\,dS = 0.$$

Упругие напряжения, действующие на элемент dS, будут функциями точки и ориентации площадки, определяемой вектором единичной нормали $\boldsymbol{n}$:

$$f_x^{(s)} = T_{xx}n_x + T_{xy}n_y + T_{xz}n_z,$$

$$f_y^{(s)} = T_{yx}n_x + T_{yy}n_y + T_{yz}n_z,$$

$$f_z^{(s)} = T_{zx}n_x + T_{zy}n_y + T_{zz}n_z$$

или

$$f_i^{(s)} = T_{ik}n_k \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3),$$

где T_{ik} — тензор напряжений второго ранга. Таким образом, условие равновесия для компоненты будет:

$$\int_V f_i\,dv + \oint T_{ik}n_k\,dS = 0.$$

$T_{ik}n_k$ — вектор с компонентами $T_{1k}n_k$, $T_{2k}n_k$, $T_{3k}n_k$. Отсюда

$$f_i + \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik} = 0.$$

Это и будет условие Максвелла (3). Преобразование в тексте приводит к выражению силы:

$$f_x = \rho H_x + \frac{\mu}{8\pi}\,\mathrm{grad}_x\, H^2 + [\boldsymbol{jB}]_x - \mathrm{grad}_x\, p.$$

Если предположить, что в гидростатическое давление входит и электромагнитное давление $\frac{\mu H^2}{8\pi}$ $\left(\text{или } \frac{\varepsilon H^2}{8\pi}\right)$, то члены $\frac{\mu}{8\pi}\,\mathrm{grad}_x\, H^2 - \mathrm{grad}_x\, \frac{\mu H^2}{8\pi}$ дадут в сумме член $-\frac{1}{8\pi} H^2\,\mathrm{grad}\,\mu$ $\left(\text{или соответственно } -\frac{1}{8\pi} E^2\,\mathrm{grad}\,\varepsilon\right)$. Максвелл считал, что давление возможно и в чистом эфире (см. примечание 14 Больцмана). В таком случае это выражение силы отличается от современного выражения отсутствием стрикционного члена $\frac{1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\left(H^2\frac{\partial\mu}{\partial c}\,\tau\right)$. Однако это не влияет на правильность окончательного результата, ибо стрикционное давление компенсируется вызванными электрострикцией дополнительными силами (см. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, стр. 168—169, 1946). (*Ред.*)

9. (Стр. 131.) Вопрос о природе электрического тока в фарадеево-максвелловской концепции имел первостепенное значение. Как видно из всего хода максвелловского изложения, основной характеристикой тока является магнитное поле. То же самое имел в виду Фарадей, рассматривая ток как «ось сил». Эта точка зрения и приводит Максвелла в дальнейшем к обобщению понятия тока (введение тока смещения). (*Ред.*)

10. (Стр. 132.) Этой моделью Максвелл обосновывает в дальнейшем свои уравнения. Сами «промежуточные частицы» должны интерпретировать механизм прохождения тока и превращения его энергии в тепло. В этом смысле их можно рассматривать до некоторой степени как прообраз будуших электронов. (*Ред.*)

11. (Стр. 139.) Эта сила—напряженность индуцированного электрического поля. Максвелл подходит в формулировке закона индукции в обобщенной форме к обоснованию своего второго уравнения. (*Ред.*)

12. (Стр. 141.) Это и есть второе уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \qquad (\textit{Ред.})$$

13. (Стр. 142.) Введением вектора-потенциала $A\,(F,\ G,\ H)$ Максвелл сближает новые идеи с разработанными уже методами и хочет сделать более ясной фарадеевскую концепцию электротонического состояния. Поэтому он в дальнейших работах дает второе уравнение не в форме (54), а в форме (55) и (58). В форме (54) второе уравнение было восстановлено позднее Хевисайдом и Герцем и было внесено в 3-е издание «Трактата» Томсоном. (*Ред.*)

14. (Стр. 150.) В современной форме уравнения (77) имеют вид

$$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}] + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \psi.$$

Первый член описывает индукцию в движущихся телах в духе электродинамики Герца (см. примечания 38, 39, 41 Больцмана). Скалярный потенциал ψ Максвелл ниже называет электрическим напряжением. (*Ред.*)

15. (Стр. 156.) Это примечание Максвелла—лишнее доказательство глубокой эвристической ценности даже грубых моделей и гипотез. Гиромагнитные эффекты, как известно, были обнаружены в опытах Эйнштейна и де Гааза и опытах Барнета. (*Ред.*)

16. (Стр. 159.) Эпоха Максвелла была богата различными теориями электромагнетизма (Вебера, К. Неймана, Ганкеля и др.), которые, несмотря на различие исходных предпосылок, в ряде случаев приводили к одинаковым результатам. Максвелл выдвигает гносеологический вопрос о критерии надежности той или иной теории. Марксистская теория познания учит, что критерием истины является практика, а практика решила вопрос в пользу истинности максвелловской теории. (*Ред.*)

17. (Стр. 159.) Мысль Максвелла о важной эвристической ценности гидро-электродинамической аналогии подтвердилась дальнейшим развитием этих наук. Предпринимались попытки и более тесного объединения электродинамики и гидродинамики, которые, однако, не привели к положительным результатам (Бьеркнес, Н. П. Кастерин). (*Ред.*)

18. (Стр. 162.) Максвеллова иллюстрация тока проводимости и тока смещения пористой и упругой мембраной развита в курсе акад. В. Ф. Миткевича «Физические основы электротехники». (*Ред.*)

19. (Стр. 163.) Здесь Максвелл впервые вводит центральную идею своей теории—идею тока смещения. (*Ред.*)

20. (Стр. 164.) Идея тока смещения приводит при ее обработке Максвеллом к электромагнитной теории света. Вывод Максвелла о возможной тождественности светоносного эфира со средой, передающей электромагнитные взаимодействия, поразительно напоминает высказывания Ломоносова по этому поводу. (*Ред.*)

21. (Стр. 170.) Уравнения (112) представляют собой первое уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 4\pi \boldsymbol{j} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

Диэлектрическая проницаемость ε связана с максвелловской константой E соотношением $\varepsilon = \frac{1}{4\pi E^2}$. (*Ред.*)

22. (Стр. 170.) В современных обозначениях можно сказать, что уравнение (115) $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho$ выведено как следствие обобщенного первого уравнения теории Максвелла (уравнение (112)) и уравнения сохранения электрического заряда (уравнение (113)):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (\textit{Ред.})$$

23. (Стр. 173.) Таким образом, в основе определения электромагнитной единицы силы тока Максвеллом лежит теорема Ампера об эквивалентности замкнутых токов и магнитов, причем магнитный момент кругового тока силой I электромагнитных единиц, обтекающего площадь S, равен:

$$M = IS. \quad (\textit{Ред.})$$

24. (Стр. 175.) Этот вывод Максвелла стал краеугольным камнем электромагнитной теории света, и на фундаментальное значение его указал Энгельс (см. примечание 1 к «Динамической теории поля»). Исходя из результатов опыта Вебера и Кольрауша 1856 г., Максвелл еще в 1861 г. в письме от 19 октября писал Фарадею:

«Я предполагаю, что упругость сферы воздействует на электрическую среду, ее окружающую, и оказывает на нее давление. Из определенного Кольраушем и Вебером численного отношения между статическим и магнитным действием электричества я определил упругость среды в воздухе и, считая, что она тождественна с упругостью светового эфира, определил скорость распространения поперечных колебаний. Результат—193088 миль в секунду. Физо определил скорость света в 193118 миль в секунду прямым опытом».

Следует отметить, что на самом деле совпадение не было таким хорошим, как приводит здесь Максвелл: результаты Вебера и Кольрауша, равно как и результат Физо, были далеко не точны. Вместе с тем и теоретическое отождествление поперечных электромагнитных волн со старыми световыми волнами в упругой среде, от которого уже отходил Фарадей, было далеко не таким очевидным, как это показывает Больцман в своем примечании 58. Фундаментальное соотношение

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

к которому сводится уравнение (135), как справедливо отмечает Больцман, может быть получено и без привлечения далеко не безупречных механических соображений, непосредственно из уравнений теории, Но если механические аналогии и модель Максвелла были и не безупречными, важность полученного им результата была сразу оценена современниками. Точные измерения электрических и магнитных констант с целью проверки соотношения $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$, с одной стороны, и отношения единиц—с другой, стали программой работ ряда выдающихся физиков и до опытов Герца и Лебедева служили обоснованием электромагнитной теории света. О фундаментальном вкладе русской физики в обосновании и развитии этой теории смотри примечания к «Динамической теории поля» и «Трактату». (*Ред.*)

25. (Стр. 178) Явление магнитного вращения плоскости поляризации, открытое Фарадеем в 1845 г., было первым экспериментальным указанием на наличие связи между оптическими и магнитными явлениями, и понятно, что Максвелл придавал теоретическому истолкованию этого явления особо важное значение в обосновании электромагнитной теории света. Как видно из последующего изложения этой части труда Максвелла, он связывал вращение плоскости поляризации с вращением вокруг силовых линий, предположенных им в его вихревой теории. Но вращения плоскости поляризации в эфире не наблюдается, и теоретическое объяснение вращения плоскости поляризации удалось только электронной теории на основе связи явления Фарадея с явлением Зеемана. (*Ред.*)

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1. (Стр. 251.) «Динамическая теория поля» является первым трудом Максвелла, в котором полностью изложены основы его теории. С этого по выражению Джинса «наиболее важного и имевшего наибольшее влияние мемуара из всех написанных им (Максвеллом) вообще» датирует электромагнитная теория света. Выводы Максвелла дали возможность Энгельсу, с большим сочувствием следившему за появлением новых «эфирных» теорий электричества, отметить «один бесспорный успех» теории Максвелла: «Клерк Максвелл... вычислил, что удельная диэлектрическая постоянная какого-нибудь тела равна квадрату его показателя преломления света» («Диалектика природы», стр. 90, 1946). Энгельс отмечает и подтверждение этого вывода экспериментами Больцмана 1872—1874 гг.

Можно указать на следующие факты, относящиеся к предистории электромагнитной теории света. Еще Ломоносов был убежден в существовании связи между светом и электричеством. Он предлагал осуществить опыт для определения влияния электризации тела на его показатель преломления. Разбирая вопрос о природе электрических явлений, Ломоносов писал: «Так как эти явления имеют место в пространстве, лишенном воздуха, а свет и огонь происходят в пустоте и зависят от эфира, то кажется правдоподобным, что *эта электрическая материя тождественна с эфиром*» (*курсив мой.—П. К.*). Ломоносов безоговорочно принимал волновую эфирную теорию света, но считал, что для объяснения электрических явлений необходимо ближе изучить природу эфира.

Эйлер вполне определенно высказал эфирную концепцию электрических явлений, одновременно считая свет волнами в эфире. Взгляды Эйлера были известны Фарадею, который прямо указывал, что в своей попытке объединить магнитные и световые явления, исходя из представлений о магнитных силовых линиях, он исходил, в частности, из следующих соображений: «4. Идея Эйлера о магнитных эфирах или циркулирующих флюидах»... «6. Пример борьбы между двумя теориями света и разрешение этого вопроса экспериментальным путем». В параграфе 3301 своих исследований он опять ссылается на эфирную теорию магнетизма Эйлера, изложенную последним в «Письмах к немецкой принцессе», и указывает, что его теория приближается к теории Эйлера. Открытие Фарадеем в 1845 г. связи между магнетизмом и светом укрепило его идею о единстве сил природы и концепцию близкодействия.

В 1846 г. в «Мыслях о лучевых вибрациях» Фарадей высказывает положение об электромагнитных излучениях, распространяющихся посредством некоторых поперечных вибраций линий сил с конечной скоростью, которую он, опираясь на ошибочные опыты Уитстона, полагал близкой к скорости света. Эти мысли Фарадея Максвелл и рассматривает как первичный очерк электромагнитной теории света. В записке, найденной В. Бреггом в библиотеке Королевского общества, Максвелл прямо пишет: «Электромагнитная теория света, предложенная им (Фарадеем) в „Мыслях о лучевых колебаниях“ (Phil. Mag. май 1846 г.) или „Экспериментальных исследованиях“ (Exp. Res., стр. 447),—это по существу то же, что я начал развивать в этой статье („Динамическая теория электромагнитного поля“, Phil. Mag., 1865) за исключением того, что в 1846 г. не было данных для вычисления скорости распространения. Дж. К. М.»*)

Очень существенно отметить, что Фарадея в указанной статье чрезвычайно заботит мысль о необходимости совместить свою гипотезу с *поперечным характером* волн, что он справедливо считал несовместимым с гипотезой о тонком «жидком» эфире. Поэтому он подчеркивает, что его идея «освободит нас от эфира». Он полагает, что его концепция пространства, заполненного силовыми линиями, «находится в подходящих условиях для действия, которое может считаться эквивалентным поперечному колебанию, в то время как однородная среда, подобная эфиру, не кажется для этого подходящей или более подходящей, чем воздух или вода» **).

Действительно, факт поперечности волн, который вынуждены были признать Юнг и Френель, причинил огромные трудности механической теории света. Теория Максвелла, сводя свет к электромагнитным волнам, вывела теорию света из тупика, о котором уже думал Фарадей. Чрезвычайно поучительно привести конец его статьи «О физических линиях магнитной силы», в котором он говорит о физическом состоянии пространства, заполненного магнитным полем.

«Что это за состояние или чем оно обусловлено, еще невозможно сказать. Оно может быть связано с эфиром, как связан

*) В. Брегг, История электромагнетизма, стр. 32, 1947.
**) Сб. «Из предистории радио», Изд. АН СССР, стр. 56, 1948.

с ним луч света, а связь между светом и магнетизмом уже была показана Оно может зависеть от состояния натяжения или состояния колебания или может быть от некоторого другого состояния, аналогичного электрическому току, с которым магнитные линии так тесно связаны. *Ответ на вопрос: требует ли оно обязательно для своего существования наличия материи, будет зависеть от того, что понимается под термином материя.* Если этот термин ограничить весомыми или тяготеющими субстанциями, материя будет для физических линий магнитной силы существенна не в большей мере, чем для лучей света или тепла. Но если, предполагая существование эфира, мы будем считать его видом материи, то линии силы могут зависеть от некоторой его функции. *Экспериментально пустое пространство является магнитом.* Но тогда идея о таком пустом пространстве должна включать представление об эфире, если, говоря о нем, верить в его существование. Или, если даже возникнет какое-либо другое представление о состоянии или свойстве пространства, то оно должно будет учесть то, что в настоящее время в соответствии с опытом называется пустым пространством. С другой стороны, я думаю, является установленным фактом, что весомая материя не является безусловно необходимой для существования линий магнитной силы» *) (*курсив мой.—П. К.*).

А вот высказывания современного автора: «Существование нулевых колебаний электромагнитного поля и поляризационных колебаний (флуктуаций) позитронно-электронного *поля* приводит к заключению, что *поле существует постоянно, и в этом смысле нет никакой пустоты.* Поэтому эту «пустоту» теперь называют более осторожным словом «вакуум». Как мы видим, *«вакуум» обладает физическими свойствами и притом такими,* которые хорошо знакомы нам из явлений в твердых телах: нулевые колебания и поляризация **) (*подчеркнуто автором*).

Максвелл имел и других предшественников. В 1848 г. была опубликована работа *Мак-Куллоха* (написанная в 1839 г.) «Опыт динамической теории отражения и преломления». Мак-Куллох делает предположение, что упругий потенциал среды, в которой распространяются волны, может быть выражен квадратичной функцией *вектора вращения*:

$$V=a^2\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+b\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+c^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.$$

Отсюда Мак-Куллох без дополнительных предположений вывел формулы Френеля, как известно, автоматически получающиеся из уравнений Максвелла. Фитцджеральдом в 1880 г.

*) «Из предистории радио», Изд. АН СССР, 1948, стр. 62.

**) Д. И. Блохинцев, Элементарные частицы и поле, УФН, сентябрь 1950 г.

было показано, что уравнения Мак-Куллоха непосредственно связаны с уравнениями Максвелла. Если обозначить составляющие вектора вращения Мак-Куллоха через ξ, η, ζ:

$$\xi=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \eta=\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \zeta=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}$$

и ввести, далее,

$$u_1=c\int \xi\, dt, \quad v_1=c\int \eta\, dt, \quad w_1=c\int \zeta\, dt,$$

то, применяя принцип Гамильтона, можно притти к уравнениям:

$$\frac{1}{c}(\dot{u}_1,\ \dot{v}_1,\ \dot{w}_1)=-\mathrm{rot}\,(u,\ v,\ w),$$

$$\frac{1}{c}(\dot{u},\ \dot{v},\ \dot{w})=\mathrm{rot}\,(u_1,\ v_1,\ w_1),$$

из которых вместе с дополнительными условиями

$$\mathrm{div}\,(u,\ v,\ w)=0, \quad \mathrm{div}\,(u_1,\ v_1,\ w_1)=0$$

вытекают волновые уравнения:

$$\frac{\ddot{u}}{c^2}=\Delta u, \quad \frac{\ddot{v}}{c^2}=\Delta v, \quad \frac{\ddot{w}}{c^2}=\Delta w.$$

В 1858 г. *Риман* представил Геттингенскому научному обществу мемуар, в котором он «приводит в тесную связь теорию электричества и магнетизма с теорией света и лучистой теплоты». Риман обобщает уравнение Пуассона для электрического потенциала

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-4\pi\rho=0$$

в уравнение типа Даламбера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\alpha^2 4\pi\rho=0,$$

который имеет частный интеграл вида $\dfrac{f\left(t-\dfrac{2}{\alpha}\right)}{2}$. Константа Римана

$$\alpha^2=\frac{c^2}{2},$$

где c^2 — обращенная константа Вебера. Риман приводит данные Вебера и Кольрауша

$$c = 439\,450 \cdot 10^6 \text{ мм/сек},$$

отсюда

$$\alpha = 41\,949 \, \frac{\text{геогр. миля}}{\text{сек}}.$$

«Тогда как, — замечает Риман, — для скорости света из наблюдений Буша и Брадлея над аберрацией было получено число 41 994, а из прямых наблюдений Физо—число 41 882» *).

Эта работа Римана была опубликована уже после его смерти, т. е. после 1866 г., и Максвеллу не была знакома во время его работы над «Динамической теорией поля». Однако чрезвычайно важно подчеркнуть тот факт, что и Максвелл опирался на согласие электрических и оптических измерений константы c. В письме к Фарадею 19 октября 1861 г. Максвелл пишет: «Из определенного Кольраушем и Вебером численного отношения между статическим и магнитным действием электричества я определил упругость среды в воздухе и, считая, что она тождественна с упругостью светового эфира, определил скорость распространения поперечных колебаний. Результат — 193 088 миль в секунду. Физо определил скорость света в 193 118 миль в секунду прямым опытом».

Таковы предпосылки теории Максвелла. Как и во времена открытия Ньютоном закона тяготения, «идея носится в воздухе». (*Ред.*)

2. (Стр. 252.) Кроме В. Вебера теорию электродинамики, базирующуюся на принципе дальнодействия в Ампера, пытались разработать Г. Грассман, Ф. Нейман, Гаусс, Риман, К. Нейман, Клаузиус и др. Краткую характеристику различных теорий дальнодействия см. в примечаниях к последней главе «Трактата». (*Перев.*)

3. (Стр. 253.) Здесь впервые дается определение понятия электромагнитного поля. (*Ред.*)

4. (Стр. 253.) Максвелл, как и многие его предшественники и современники, различает два вида материи: обычную, которую он именует «грубой материей» (gross matter) и «тонкую материю», или эфир, наполняющий как промежутки между частицами обычной материи, так и все мировое пространство. Термин «gross matter» можно было бы перевести как «сгущенная» или «конденсированная материя». (*Ред.*)

---

*) Риман, Сочинения, 1948.

5. (Стр. 255.) Магнитное вращение плоскости поляризации было открыто Фарадеем в 1846 г., им же было установлено правило знаков для направлений вращения на основе известного закона Ленца. Подробную теорию магнитного вращения плоскости поляризации Максвелл дает в томе II «Трактата», гл. XXI; см. стр. 578 настоящего издания. (*Перев.*)

6. (Стр. 256.) Из текста Максвелла видно, что Максвелл придерживается еще старой точки зрения о разложении электролитов электрическим полем, которая была подвергнута критике Клаузиусом в 1857 г. (*Перев.*)

7. (Стр. 258.) В этом месте работы Максвелл вводит фундаментальное понятие тока смещения, которое выкристаллизовалось уже в его предыдущих работах. (*Ред.*)

8. (Стр. 258.) Терминами «specific inductive capacity» и «specific dielectric capacity»—удельная «индуктивная» или «диэлектрическая» емкость—Максвелл обозначает то, что ныне называют *диэлектрической проницаемостью диэлектрика*. Если напряженность поля обозначить через $\boldsymbol{E}$, то индукция будет $\boldsymbol{B}=\varepsilon\boldsymbol{E}$, где ε— диэлектрическая проницаемость. Под диэлектрическим смещением Максвелл разумеет величину $\boldsymbol{D}=k\boldsymbol{E}$, где $k=\frac{\varepsilon}{4\pi}$, т. е. $\boldsymbol{D}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E}$. (*Перев.*)

9. (Стр. 260.) Эта особенность метода Максвелла, на которую мы указывали и раньше (механические модели для уяснения электромагнитных взаимосвязей), нередко вызывала осуждение в первую очередь среди сторонников «чистого описания». Как было уже указано, метод построения моделей вполне законен и широко применялся и применяется в теоретической физике, помогая глубже раскрыть природу изучаемых взаимосвязей. Напомним (это ясно понимал и Максвелл), что модель отнюдь не исчерпывает всех сторон изучаемых соотношений, а только приблизительно верно отражает их и в большинстве случаев носит чисто иллюстративный характер. (*Ред.*)

10. (Стр. 262.) Под магнитной и электрической поляризацией Максвелл разумеет здесь магнитную и электростатическую индукцию, выражаемые соответственно известными формулами

$$\boldsymbol{B}_m=\mu\boldsymbol{H} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B}_e=\varepsilon\boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$—напряженности полей, μ и ε—магнитная и диэлектрическая проницаемости. (*Перев.*)

11. (Стр. 262.) Гораздо более точный метод определения указанного отношения был разработан А. Г. Столетовым. Смотри

Собр. соч., т. I, краткое описание смотри в «Очерках по истории физики в России», статья А. К. Тимирязева, стр. 96. (*Перев.*)

12. (Стр. 262.) См. примечание 8. (*Перев.*)

13. (Стр. 263) Опыты Вебера и Кольрауша датируют 1856 г., более точные определения скорости света Физо и Фуко—1849 и 1862 гг., (*Перев.*)

14. (Стр. 265) Точное определение приведенного количества движения см. в примечании 34 Больцмана к «Физическим силовым линиям», стр. 219 настоящего издания. (*Перев.*)

15. (Стр. 266.) Термином «магнитная сила» (magnetic force) Максвелл обычно обозначает магнитную индукцию ($B_m = \mu H$), именуя напряженность поля (H) «магнитной интенсивностью» (magnetic intensity), а магнитный потенциал—«магнитным напряжением» (magnetic tension) аналогично «электрическому напряжению»—потенциалу (electric tension). (*Перев.*)

16. (Стр. 268.) Уравнение (3)—аналог обобщенных уравнений Кирхгофа для системы квазистационарных токов. (*Ред.*)

17. (Стр. 269.) Подробно приведенное соотношение излагается Максвеллом в «Трактате» (т. II, параграф 579, стр. 444 настоящего издания). (*Перев.*)

18. (Стр. 271.) В тексте Максвелла опечатка: вместо умножения уравнений (4) и (5) говорится об умножении уравнений (1) и (2). (*Перев.*)

19. (Стр. 272.) Таким образом, магнитную энергию токов Максвелл рассматривает как особую форму кинетической энергии внутреннего скрытого движения среды, не воспринимаемого нами; это движение названо им «actual motion», что мы переводим термином «актуальное движение». (*Ред.*)

20. (Стр. 273.) Гипотеза электротонического состояния сыграла значительную роль в развитии взглядов Фарадея и Максвелла. Значение этой гипотезы характеризуется Фарадеем в письме к Филлипсу от 24 ноября 1831 г. (см. М. Фарадей, Избранные работы по электричеству, ГТТИ, стр. 58, 1939). Генезис этой гипотезы следующий: основываясь на явлении статической индукции, Фарадей первоначально предположил, что при протекании тока по проводу в соседнем проводе должен обнаружиться индукционный эффект, аналогичный эффекту статической индукции. Однако попытки обнаружить такого рода эффект не увенчались успехом, но зато привели к открытию эффекта электродинамической индукции. Тем не менее Фарадей и вслед за ним Максвелл

были твердо убеждены, что наличие тока создает в окружающей среде и в помещенных в ней проводниках или диэлектриках особое «электротоническое состояние материи», изменения которого и обусловливают эффект электродинамической индукции. В разделе II работы «О фарадеевых силовых линиях» Максвелл дает предварительную физико-математическую характеристику электротонического состояния, а в исследовании «О физических силовых линиях» он пытается построить механическую модель этого состояния. В настоящей работе, а также в «Трактате» Максвелл ограничивается общей концепцией электромагнитного количества движения среды, которую он характеризует при помощи вектора-потенциала. (*Перев.*)

21. (Стр. 277.) Метод, о котором здесь говорит Максвелл, разъясняется им в следующем параграфе (39), именно, полагая в уравнениях (13) $\xi = RC = \text{const}$, получаем значения x и y, выраженные через корни уравнения (16) n_1 и n_2, которые исключаются при вычислении интегралов $\int x^2\,dt$ и $\int y^2\,dt$ (см. формулы (17), (18), (19) и (20)). (*Перев.*)

22. (Стр. 285.) Это—известный прием исследования электромагнитного поля, приводящий к определению $\boldsymbol{B}$ (вектора магнитной индукции), а не $\boldsymbol{H}$, как то имеет место в случае исследования поля магнитной стрелкой. (*Ред.*)

23. (Стр. 286.) Термином «коэффициент магнитной индукции» Максвелл называет коэффициент магнитной проницаемости. Впервые основательное исследование этого коэффициента было выполнено А. Г. Столетовым в работе 1872 г. «Исследование о функции намагничения мягкого железа». Смотри об этом «Очерки по истории физики в России», 1949, статья А. К. Тимирязева о Столетове. (*Перев.*)

24. (Стр. 290.) В современной форме (А)—не уравнение, а определение вектора плотности полного тока:

$$\boldsymbol{j}_{\text{полн}} = \boldsymbol{j}_{\text{пров}} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \quad (\textit{Ред.})$$

25. (Стр. 290.) Ясно, что под «электродвижущей силой в точке» Максвелл понимает вектор напряженности электрического поля, компоненты которого он обозначает через P, Q, R. В дальнейшем, однако, он пользуется понятием электродвижущей силы контура (стр. 293), совпадающим с обычным. (*Ред.*)

26. (Стр. 291.) В этом параграфе содержится, опирающийся на теорему Стокса, вывод выражения вектора индукции через

вектор-потенциал: $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$. Вместе с тем Максвелл вводит новое понятие электромагнитного количества движения контура, которое есть не что иное, как магнитный поток, пронизывающий контур. (*Ред.*)

27. (Стр. 292) Здесь под магнитной силой (α, β, γ) Максвелл понимает вектор напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$. (*Ред.*)

28. (Стр. 293.) Уравнения (C) представляют так называемое первое уравнение Максвелла, или, как раньше выражались, первый триплет уравнений Максвелла. В современных обозначениях и в электромагнитной системе единиц эти уравнения принимают вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 4\pi \boldsymbol{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \qquad (\textit{Ред.})$$

29. (Стр. 296) В этом параграфе Максвелл касается вопросов электродинамики движущихся сред. Полученное им выражение для электрического поля, обусловленного движением проводника, совпадает с уравнением Герца для движущихся сред, которое, как известно, не является правильным. Теория Герца предполагает полное увлечение эфира движущимися телами.

Вывод Максвелла основан на подсчете изменения потока, обусловленного движением и деформацией контура. Дадим более современный вывод (см. Л. И. Мандельштам, Сочинения, т. V, стр. 128), исходя из второго уравнения Максвелла

$$E = \oint E_l \, dl = -\frac{d\Phi}{dt}$$

и предполагая вместе с Герцем, что контур интегрирования неподвижно связан с движущимся телом. Поток Φ будет меняться как вследствие явной зависимости его от времени, так и вследствие перемещения:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_S B_n \, dS = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_S B_n \, dS + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int\limits_{S_1} B_{N_1} \, dS + \int\limits_{S_2} B_{N_2} \, dS}{\Delta t}.$$

Поверхность S при переходе из S_1 в S_2 образует вместе с боковой поверхностью, прочерченной при перемещении контура L за время Δt, замкнутую поверхность; внешняя нормаль N_2 к поверхности S_2 антипараллельна нормали N_1, сопряженной направлению обхода контура L.

Вычисляем поток через замкнутую поверхность, ограниченную основаниями S_1 и S_2 и боковой поверхностью с образующей $\boldsymbol{u}\, dt$, который для замкнутой поверхности всегда равен нулю:

$$\Phi=\int\limits_{S_1} B_{N_1}\, dS+\int\limits_{S_2} B_{N_2}\, dS+\int\limits_{S_1} B_n\, dS$$

(S — боковая поверхность, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к этой поверхности), но

$$\int\limits_{S'} B_n\, dS'=\int\limits_{S'} (\boldsymbol{B}\,[d\boldsymbol{l}\,\boldsymbol{u}]\,\Delta t=-\Delta t\oint\limits_{L}[\boldsymbol{Bu}]\, d\boldsymbol{l}$$

(так как $\boldsymbol{n}\, dS'=[d\boldsymbol{l}\,\boldsymbol{u}]\,\Delta t$), следовательно,

$$\int\limits_{S_1} B_{N_1}\, dS+\int\limits_{S_2} B_{N_2}\, dS=\Delta t\oint\limits_{L}[\boldsymbol{Bu}]\, d\boldsymbol{l}.$$

Таким образом,

$$\oint\limits_{L} E_l\, dl=-\int\limits_{S}\frac{\partial B_n}{\partial t}\, dS-\int\limits_{L}[\boldsymbol{Bu}]\, d\boldsymbol{l}=-\int\left\{\frac{\partial B_n}{\partial t}+\operatorname{rot}_n[\boldsymbol{Bu}]\right\} dS,$$

$$\oint\limits_{L} E_l\, dl=\int\limits_{S}\operatorname{rot}_n \boldsymbol{E}\, dS,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\left\{\frac{\partial B}{\partial t}+\operatorname{rot}[\boldsymbol{Bu}]\right\}.$$

Для стационарного поля $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=\operatorname{rot}[\boldsymbol{Bu}]$, $\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{Bu}]$ и в обозначениях Максвелла

$$P=\mu\gamma\frac{dy}{dt}-\mu\beta\frac{dz}{dt}.$$

30. (Стр. 296.) Из основного максвелловского соотношения для диэлектрического смещения $D(f, g, h)=\frac{\varepsilon}{4\pi}E(P, Q, R)$ видно, что фигурирующий в «уравнениях электрической упругости» коэффициент $k=\frac{4\pi}{\varepsilon}$, где ε — диэлектрическая проницаемость. (*Перев.*)

31. (Стр. 297.) Уравнения (F) представляют собой закон Ома для тока. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что Максвелл стремится выразить этот закон в форме своеобразной силы вязкости: электрическое поле уравновешивает силу сопротивления, пропорциональную скорости, причем

роль скорости играет вектор полного тока. Отсюда и отрицательный знак в формуле. (*Ред.*)

32. (Стр. 297.) Это известное уравнение Пуассона $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho$, где ρ (у Максвелла обозначенное через e) — объемная плотность электричества. В примечаниях к «Фарадеевым силовым линиям» (стр. 103 настоящего издания) Больцман справедливо отмечает путаницу в начертаниях некоторых формул в работах Максвелла. Так, в английском оригинале «Фарадеевых силовых линий» (Scient. Pap., стр. 192) Максвелл пишет уравнение Пуассона в форме $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho$, но Больцман вынужден был в своем переводе переменить знак правой части на обратный для согласования формулы с остальным текстом. В «Динамической теории электромагнитного поля» уравнение Пуассона фигурирует, как мы видим, в начертании $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = -e$, в первом томе «Трактата», параграфе 77, в начертании $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho$, но во втором томе, параграфе 610, в виде $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho$. Заметим, однако, что, повидимому, в начертании уравнения (G) допущена просто опечатка и вместо e должно быть $(-e)$, что видно из максвелловской записи уравнения непрерывности (H). Это уравнение получается дифференцированием по x, y, z и складыванием уравнений токов (C), принимая во внимание значения величин p', q', r' согласно формулам (A) и значение $e = \operatorname{div} \boldsymbol{D}$ согласно уравнению (G). (*Перев.*)

33. (Стр. 298.) Максвелл не дает отдельно уравнения $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$, так как оно автоматически следует из уравнений (B). Уравнения электромагнитного поля (B)—(H) не совпадают полностью с современной их формой, которая была дана впервые Герцем (1884 г.) и независимо от него Хевисайдом (1885 г.).

34. (Стр. 298.) Таким образом, в современных обозначениях система уравнений, установленная здесь Максвеллом, имеет вид

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \tag{B}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 4\pi \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{C}$$

$$\boldsymbol{E} = -[\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}] - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \psi, \tag{D}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \boldsymbol{D}, \tag{E}$$

$$\sigma \boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}, \tag{F}$$

$$\boldsymbol{j}_{\text{полн}} = \boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{A}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho. \tag{G}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (\textit{Ред.}) \tag{H}$$

35. (Стр. 299.) Поясним вывод Максвелла. Энергия

$$E=\frac{1}{2}\int A j_{\text{полн}}\, dV,$$

$$j_{\text{полн}}=\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}.$$

Далее,

$$A \operatorname{rot}\boldsymbol{H}=-\operatorname{div}[A\boldsymbol{H}]+\boldsymbol{H}\operatorname{rot}A,$$

поэтому

$$E=\frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}[A\boldsymbol{H}]\,dV+\frac{1}{8\pi}\int \boldsymbol{H}\operatorname{rot}A\,dV;$$

первый интеграл преобразуется по теореме Остроградского-Гаусса и на границе исчезает. Следовательно,

$$E=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{HB}\,dV,$$

что и совпадает с уравнением (38). (*Ред*).

36. (Стр. 301.) Максвелл, указывая на вспомогательный, иллюстративный характер механических образов в электродинамике, настаивает, однако, на полной применимости понятия энергии как кинетической, так и потенциальной, к электромагнитному полю, причем эта энергия по Максвеллу в отличие от старых теорий локализована в поле.

Идею локализации энергии в среде и закон ее движения в среде разрабатывал Н. А. Умов в своей диссертации «Уравнения движения энергии в среде» 1873 г. (*Ред.*)

37. (Стр. 302.) Вычисления в этом параграфе аналогичны вычислениям параграфа 64 с различием, относящимся к характеру расположения и движения проводника. Более подробное вычисление значения электромагнитной силы см. «Трактат», параграфы 583, 602 и 603. Результат соответствует известной формуле Ампера. (*Перев.*)

38. (Стр. 304.) В тексте Максвелла опечатка: вместо «сумма количеств $\varphi_1\varphi_1+\varphi_2\varphi_2$ должна оставаться постоянной» сказано: «количества $\varphi_1\varphi_1$ и $\varphi_2\varphi_2$ должны оставаться постоянными». (*Перев.*)

39. (Стр. 308.) Описание метода и результаты опытов Вебера и Кольрауша даны в их статье, переведенной в сборнике «Из предистории радио», Изд. АН СССР, стр. 209—217, 1948. (*Ред.*)

40. (Стр. 320.) Уравнения магнитной силы:

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{B}$$

Уравнения токов:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 4\pi \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{C}$$

Считая μ постоянной, имеем:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = 4\pi\mu \boldsymbol{j}_{\text{полн}},$$

или

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} = 4\pi\mu \boldsymbol{j}_{\text{полн}}.$$

В диэлектрике

$$\boldsymbol{j}_{\text{полн}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = k \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -k \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right).$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} + 4\pi\mu k \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + 4\pi\mu k \operatorname{grad} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.$$

Отсюда, если положить дополнительно

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + 4\pi\mu k \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

получается волновое уравнение

$$\Delta \boldsymbol{A} = 4\pi\mu k \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}.$$

Отсюда волновое уравнение для $\boldsymbol{B}$

$$\Delta \boldsymbol{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2},$$

с выводом

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (c = 1).$$

(Ред.)

41. (Стр. 323.) Электромагнитная теория света Максвелла и вообще максвелловская теория электромагнетизма как ее основа долго не находили себе признания.

Решительную победу этой теории обеспечили открытие Герцем электромагнитных волн и экспериментальное установление

Лебедевым давления света; последнее открытие устранило всякие сомнения в правильности максвелловской теории.

А. К. Тимирязев (см. его «Введение в теоретическую физику», стр. 168) рассказывает, со слов П. Н. Лебедева, следующий интересный эпизод, связанный с электромагнитной теорией света Максвелла.

В 1888 г., т. е. за год до знаменитых опытов Герца, видный теоретик проф. Э. Кон читал в Страсбурге курс теоретической оптики на основе классической теории Юнга-Френеля, причем взгляды Максвелла в этом курсе передавались как курьез на одной из заключительных лекций. В 1889 г. тот же проф. Кон читал курс теоретической оптики уже полностью на основе теории Максвелла. (*Перев.*)

ТРАКТАТ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ И МАГНЕТИЗМЕ

1. (Стр. 345.) Знаменитый «Трактат» Максвелла, вышедший в 1873 г., завершает круг его работ, посвященных теории электромагнитного поля. Максвелл подводит в нем итоги развития учения об электромагнитных явлениях, как в трудах своих предшественников и современников (Остроградского, Гаусса, Ампера, Фарадея, Ленца, Грина, Вебера, Неймана, Кирхгофа, Томсона, Гельмгольца и др.), так и итоги своих собственных исследований.

Понятно, что этот труд стал настольной книгой для всякого, занимающегося электричеством. Однако труд Максвелла, несмотря на все усилия автора выполнить задачу, сформулированную им в его «Предисловии»: перевести идеи Фарадея на язык математики, оставался по выражению Больцмана «книгой за семью печатями» для профессионалов физиков. Причина этого обстоятельства заключалась безусловно в глубине и новизне идей Максвелла, но справедливо также и то, что Максвелл уделил в «Трактате» обоснованию и развитию этих идей значительно меньше места, чем в своих предыдущих работах.

С другой стороны, Максвелл в своем «Трактате» стремился последовательно провести концепцию близкодействия и противопоставить ее господствующим формальным теориям дальнодействия, и эту задачу он безусловно разрешил.

«Трактат» разбит на два тома и четыре части. Первый том состоит из двух частей: «Электростатики» и «Электрокинематики» (т. е. учения о постоянном токе). Второй том содержит также две части: третью часть трактата «Магнетизм», содержащую восемь глав, и последнюю, четвертую, часть, посвященную электромагнетизму и содержащую двадцать три главы.

Всем этим четырем частям предпосланы «Предисловие» и вводная глава, содержащая учение о размерностях, измерениях и основы векторного анализа. В настоящем издании переведены главы, представляющие наиболее существенное принципиальное значение. Это, во-первых, «Предисловие» и затем главы I, III—XI и XIX—XXIII четвертой части «Трактата». Перевод выполнен с третьего английского издания 1904 г.

Дополнения, сделанные ко второму изданию Нивеном, выделены квадратными скобками, дополнения, сделанные к третьему изданию Дж. Дж. Томсоном, выделены фигурными скобками.

2. (Стр. 382.) Это сопоставление Максвеллом метода, которого придерживался Ампер, и метода Фарадея поистине замечательно. Чрезвычайно ценно, что Максвелл показывает стремление профессиональных ученых замазать, скрыть пути, приведшие их к тому или иному результату, и представить развитие идей в логически завершенной форме, как бы сразу вылившейся из головы. Иное дело метод Фарадея, который не скрывает своих неудач и исканий. Передовые деятели науки, такие, как Ломоносов, Фарадей, в дальнейшем Менделеев, по существу боролись за демократизацию науки. Ампер, несмотря на то, что был прогрессивным ученым, не мог отрешиться от формального метода, который у его эпигонов превратился в бронированный щит против фарадеевских идей. (*Ред.*)

3. (Стр. 389.) При применении этих правил следует иметь в виду, что северный конец стрелки компаса показывает на южный магнитный полюс земли. (*Ред.*)

4. (Стр. 412.) Применение этих уравнений Максвеллом к электродинамике рассматривалось как сведение последней к механике или, во всяком случае, как констатация глубокой аналогии между электродинамикой и механикой. (См., например, характеристику теории Максвелла, данную М. Абрагамом во введении к его известному учебнику «Теория электрпчества» (Theorie d Electricität), т. 1.) На самом деле «механического вывода» уравнений Максвелла не удалось достигнуть ни самому Максвеллу ни его последователям, что нашло свое отражение в известных словах Герца: «Теория Максвелла— это уравнения Максвелла». Дело в том, что уравнения Лагранжа (вытекающие из вариационного принципа) выходят за рамки механики и могут быть применены к решению задач физики и химии. (*Ред.*)

5. (Стр. 420.) Дж. Лармор, включив эту главу V «Трактата» в издание книги Максвелла «Материя и движение» 1920 г., дает в этом месте следующее примечание.

«Выше было указано *), что закон сохранения энергии, как это уже давно отметил Лагранж, может доставить только одно из уравнений, требующихся для определения движения динамической системы. Отсюда вытекает, что рассуждение этого отдела,

*) Речь идет о дополнении Лармора к изданию 1920 г.

которое как будто выводит все эти уравнения, должно быть недостаточным. Доказательство начинается там с предположения, что система движется по какому-нибудь произвольному пути, т. е. предполагается, что движение определяется различными возможными типами связей без трения, согласных со структурой системы. Затем уравнения (9) правильно выводятся из уравнений (7) и (8), так как вариации δq совершенно произвольны, но наложенные связи вводят новые и неизвестные силы реакции связей, которые должны быть включены в число приложенных сил F_r, и эти силы сделали бы результат, как он там доказан, неверным.

Тем не менее, уравнения (9) справедливы, хотя этот их вывод и недостаточен. Как объяснено выше, лагранжевы уравнения (20) можно вывести непосредственно из принципа наименьшего действия, установленного независимо, а в таком случае уравнения (9) можно вывести, ведя рассуждение в обратном порядке» *).

Вывод уравнений Лагранжа из принципа наименьшего действия общеизвестен, и мы не сочли нужным его здесь приводить. (*Ред.*)

6. (Стр. 433.) Максвелл обращает внимание на неполноту установившейся аналогии между током и текущей в трубках жидкостью и вводит идею локализации кинетической энергии тока в окружающем пространстве, опираясь на явление взаимоиндукции. (*Ред.*)

7. (Стр. 438.) Высказывания Максвелла относительно следствий из наличия энергии T_{me} очень интересны. Максвелл определенно указывает (стр. 437), что по этим следствиям может быть решен вопрос о «субстанции тока».

8. (Стр. 442.) Если обозначить коэффициенты в выражении этой энергии c_{ik}, то

$$T_{me} = c_{11}\dot{x}_1\dot{y}_1 + c_{12}\dot{x}_2\dot{y}_2 + \ldots,$$

где c_{ik} зависят только от координат x_i, но не от зарядов y_i. Наличие в выражении энергии части T_{me} приводит к появлению механических сил

$$X'_{me} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{me}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T_{me}}{\partial x}$$

и электродвижущих сил

$$\dot{Y}_{me} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{me}}{\partial \dot{y}}\right) \qquad \left(\text{так как } \frac{\partial T_{me}}{\partial y} = 0\right).$$

*) Д. Максвелл, Материя и движение, ГИЗ, Москва, стр. 142—143.

В случае неподвижных проводников

$$\frac{\partial T_{me}}{\partial x}=0 \quad (x=\mathrm{const})$$

и остается первая часть силы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{me}}{\partial x}\right),$$

зависящая от скоростей изменения сил токов. В случае постоянных токов остается сила $\frac{\partial T_{me}}{\partial x}$, меняющая знак с изменением направления токов (или скоростей движения проводников). Таким образом, наличие в выражении энергии члена T_{me} приводит к следующим эффектам:

1) возникновение механических сил в неподвижных проводниках при всяком изменении сил токов в них (при ускорениях зарядов),

2) возникновение механической силы между движущимися проводниками, меняющей знак при изменении направления токов или скоростей движения,

3) возникновение индукционных электродвижущих сил в отсутствии магнитных полей вследствие ускорения проводников.

Опыты Максвелла дали отрицательный результат, на основании чего он сделал заключение о ничтожной роли члена T_{me}. Однако с точки зрения электронной теории такие эффекты должны иметь место. Они были действительно обнаружены в известных опытах Стюарта и Толмана в 1916 г. (*Ред.*)

9. (Стр. 455.) Исчисление кватернионов — та форма векторного анализа, которая была разработана Гамильтоном. Кватернион Гамильтона есть обобщение комплексного числа и представляется выражением вида $t+ix+jy+kz$, где t названа им скалярной, а $ix+jy+kz$ — векторной частью.

Для основных векторов i, j, k Гамильтон принимает:

$$i^2=j^2=k^2=1;\quad jk=i,\ ki=j,\quad ij=k;\quad kj=-i,$$

$$ik=-j,\quad jk=-k,$$

тогда произведение двух векторов (считая применимым распределительный закон) будет:

$$(ia+jb+kc)(ix+jy+kz)=-(ax+by+cz)+$$
$$+i(bz-cy)+j(cx+az)+k(ay-bx);$$

это — кватернион, скалярную часть которого называют внутренним (скалярным) произведением, а векторную — внешним (векторным) произведением. Несмотря на большое увлечение кватернионами вплоть до образования международного общества содействия кватернионам, Максвелл не принял целиком кватернионную форму, а взял только то, что соответствует векторному исчислению.

Для скалярного произведения векторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ Максвелл применяет обозначение $S.\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, для векторного $V.\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Если ρ — радиус-вектор элемента кривой, то элемент этого вектора $d\rho$ и скалярное произведение этого элемента на вектор $\mathfrak{A}$ будут:

$$S.\mathfrak{A}d\rho = -(F\,dx + G\,dy + H\,dz),$$

что и поясняет формулу (7). (*Ред.*)

10. (Стр. 457.) Формула (12) — теорема Стокса:

$$\oint A_l\,dl = \int\limits_S \mathrm{rot}_n\,\boldsymbol{A}\,dS = \int\limits_S B_n\,dS. \quad (\textit{Ред.})$$

11. (Стр. 458.) Максвелл ссылается на данную им классификацию векторных величин (т. I, параграф 12). По этой классификации существует два рода величин: одни, имеющие характер силы и потому придающие криволинейным интегралам вида $\int A_l\,dl$ значение, родственное значению работы в механике. К этого рода величинам относятся векторы напряженности электрического и магнитного полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Другие величины аналогичны вектору смещения частиц тела и придают смысл поверхностному интегралу $\int\limits_S B_n\,dS$, аналогичный потоку частиц жидкости через поверхность. К этого рода величинам относятся вектор электрического смещения $\boldsymbol{D}$ и вектор магнитной индукции $\boldsymbol{B}$. (*Ред.*)

12. (стр. 472.) Формула (11) в современных обозначениях — выражение для плотности сил, действующих на ток в магнитном поле:

$$\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{j}\boldsymbol{B}]. \qquad (\textit{Ред.})$$

13. (Стр. 482.) Принцип замкнутости тока, выражаемый уравнением

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{j} = 0,$$

как неоднократно указывалось, имеет в теории Максвелла фундаментальное значение. Ток смещения объединяет с током проводимости то, что он также создает магнитное поле. Во времена Максвелла это было только гипотезой. Непосредственное опытное доказательство этой гипотезы было дано в классических опытах А. А. Эйхенвальда, описанных в его работе «О магнитном действии тел, движущихся в магнитном поле», опубликованной в 1904 г., т. е. через 30 лет после выхода «Трактата». (*Ред.*)

14. (Стр. 486.) Микроскопическая электродинамика Лоренца знает только один вектор — вектор напряженности микрополя $\boldsymbol{h}$. Усреднение этого поля дает вектор индукции $\boldsymbol{B}$ макрополя, а вектор $\boldsymbol{H}$ вводится только как вспомогательный вектор, вихрями которого являются заданные макроскопические токи в проводниках. Сохранение коэффициента μ (равно как и ε) и для вакуума в современной теоретической электротехнике в тех целях, о которых говорит Максвелл в конце параграфа, стало традиционным, так же как и различные наименования единиц для вектора индукции и напряженности поля (гаусс и эрстед). (*Ред.*)

15. (Стр. 489.) Здесь дается метод решения уравнения

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 4\pi \boldsymbol{j}$$

с помощью вектор-потенциала

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{H},$$

причем дополнительно налагается условие $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, тогда

$$\boldsymbol{A} = \mu \int \frac{\boldsymbol{j}\, dv}{r}. \qquad (\textit{Ред.})$$

16. (Стр. 491.) Имея в виду обозначения Гамильтона (примечание 9), мы можем выразить написанные здесь формулы в современном начертании

$$\mathfrak{B} = [\nabla \mathfrak{A}] = \operatorname{rot}(\mathfrak{A}),$$

где ∇ — оператор Гамильтона.

Вместо $S.\nabla\mathfrak{A} = 0$ напишем $\nabla\mathfrak{A} = \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$. Для напряженности электрического поля

$$b = [\mathfrak{G}\mathfrak{B}] - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi,$$

$$\left(\boldsymbol{E} - [\boldsymbol{vB}] - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\Psi\right).$$

Для плотности силы

$$\mathfrak{F} = [\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}] + e\mathfrak{E} - m\nabla\Omega.$$

Объемная плотность электричества

$$\mathfrak{e} = \nabla\mathfrak{D} = \operatorname{div}\mathfrak{D}.$$

(Максвелл одновременно применяет для нее и латинское e и готическое $\mathfrak{e}$.) Объемная плотность магнетизма

$$\mathfrak{m} = \nabla I = \operatorname{div} I. \qquad (\textit{Ред.})$$

17. (Стр. 499.) С таким категорическим утверждением в наше время трудно согласиться. Например, с системами CGSE и CGSM сейчас успешно конкурирует рационализированная практическая система MKSM. В атомной физике предлагались разные системы. Каждая из этих систем имеет свою научную и практическую ценность. Но во времена Максвелла, когда существовал полный хаос в электрических и магнитных единицах (единицы «даниэль», «кларк» для электродвижущих сил, «якоби», «сименс» для сопротивления и т. п.), системы CGSE и CGSM были единственными системами, имевшими научное обоснование. Для теории Максвелла вопрос о системах единиц имел то принципиальное значение, что в соотношения между обеими системами входит скорость света, что подтверждает идею о связи между электромагнитными и оптическими явлениями. Поэтому А. Г. Столетов в 1881 г. на Первом международном конгрессе электриков в Париже, на котором обсуждался вопрос об единицах, с полным основанием заявил, «что с точки зрения простоты обе системы (электростатическая и электромагнитная) имеют равные права, так как каждая из них оказывается более удобной, пока речь идет о явлениях, соответствующих одной из этих двух групп. Притом обе должны быть сохранены, чтобы напоминать о связи, которая, повидимому, существует между электричеством и светом» (Столетов, Собр. соч., т. 1, стр. 347). (*Ред.*)

18. (Стр. 504.) В 1861 г. Британская ассоциация после доклада Латимера Кларка и Г. Брандта создала по предложению В. Томсона комитет по эталонам электрического сопротивления. Первый эталон сопротивления был предложен еще в 1838 г. петербургским академиком Э. Ленцем. В 1848 г. Якоби изготовил и разослал эталон, представляющий медную проволоку длиной 25 футов (7,62 *м*), весом 345 гран (22,5 грамма) и диаметром около 23 *мм*. Эта единица составляла около 6,3 ома и под названием «якоби» была весьма употребительна. В 1851 г. Вебер предлагает за единицу сопротивления принять сопротивление, в котором единица CGS электродвижущей силы создает единицу CGS силы тока. В 1860 г. Сименс изготовляет эталон сопротивления из ртути длиной 100 *см* и сечением 1 *мм*^{2}.

Комитет в составе Уитстона, В. Томсона, Максвелла и др. остановился на двух системах единиц: CGSE и CGSM, но рекомендовал для практического употребления систему CGSM и в качестве практической единицы сопротивления единицу, равную

10^9 CGSM-единиц сопротивления. Эту единицу решили эталонизировать. В качестве материала для эталона был выбран сплав из двух частей серебра и одной части платины. Работу по установлению эталона проводили в течение 1863—1864 гг. Максвелл, Флеминг Дженкин и Бальфур Стюарт, которые и установили единицу, достаточно близкую к 10^9 CGSM, которую они назвали омом. С этого эталона были приготовлены платиново-серебряные копии.

На Международном конгрессе электриков в 1881 г. возник спор между британской и германской ассоциациями по вопросу об единицах сопротивления. Конгресс принял предложение Столетова, предложившего сохранить обе системы CGSE и CGSM и изготовить ртутный эталон, возможно более близко подходящий к теоретическому ому. (*Ред.*)

19. (Стр. 505.) На основании соотношения

$$\int \Psi \operatorname{div} \boldsymbol{D}\, dV = \int\limits_V \operatorname{div}(\Psi \boldsymbol{D})\, dV - \int\limits_V (\boldsymbol{D} \operatorname{grad} \Psi)\, dV$$

и принимая во внимание формулу Остроградского-Гаусса вместе с граничными условиями, получим уравнение (4). (*Ред.*)

20. (Стр. 528) Таким образом, Максвелл вводит гипотезу, что конвекционный ток производит такое же магнитное действие, как и обычный ток проводимости. Сила магнитного притяжения двух таких элементов тока равна:

$$F = \frac{ee'v^2}{c^2r^2},$$

согласно закону Ампера

$$F = \frac{I_1 I_2}{c^2 r^3} [d\boldsymbol{l}_1 [d\boldsymbol{l}_2 \boldsymbol{r}]],$$

и она равна силе их электрического отталкивания, если $v=c$. (*Ред.*)

21. (Стр. 529.) Магнитное поле конвекционного тока было измерено А. А. Эйхенвальдом, подтвердившим правильность гипотезы Максвелла. (*Ред.*)

22. (Стр. 550.) Создание электромагнитной теории света явилось венцом творчества Максвелла и привело к глубоким следствиям как теоретического, так и прикладного значения. Электромагнитная теория света—научная база радиотехники, берущей свое начало с бессмертного открытия А. С. Попова (1895). Во времена Максвелла единственными доступными экспериментальной проверке следствиями теории были: 1) вывод

о совпадении константы единиц со скоростью света в вакууме, 2) равенство диэлектрической проницаемости квадрату показателя преломления. Оба эти следствия были получены уже в «Динамической теории поля» и привлекли внимание экспериментаторов еще до появления «Трактата». Больцман начал проверку соотношения $n^2=\varepsilon$ еще в 1872 г. Однако имеющиеся в распоряжении Максвелла данные им самим считались еще недостаточными. По поводу первого следствия он выражает надежду (стр. 577), что «в результате дальнейших опытов отношение между размерами этих двух величин будет установлено более точно». Следует отметить замечательные исследования А. Г. Столетова в этом направлении, внесшего, таким образом, важный вклад в дело обоснования новой теории. Что же касается соотношения $n^2=\varepsilon$, то в «Трактате» (стр. 558—559) Максвелл высказывает глубокую мысль о том, что «наши теории структуры тел должны быть значительно улучшены прежде, чем мы сможем выводить оптические свойства тел из их электрических свойств». Здесь же он дает указание, что для проверки соотношения $n^2=\varepsilon$ надо измерить n при волнах «наибольших периодов, движение которых может быть сравнено с медленными процессами, с помощью которых мы определяем емкость диэлектрика».

Следуя этому указанию, русский физик Н. И. Шиллер в 1874 г. впервые применял метод *электрических колебаний* для определения диэлектрической проницаемости с помощью конденсатора и проверял соотношение $n^2=\varepsilon$. В 1875 г. П. А. Зилов в лаборатории Столетова проводил «опытное определение диэлектрической поляризации в жидкостях», причем теоретической основой работы была электромагнитная теория света Максвелла, изложенная Зиловым в отдельной главе его диссертации, опубликованной на русском языке в 1877 г. Таким образом, русская физика сразу и активно включилась в борьбу за обоснование и развитие электромагнитной теории света. После опытов Герца (1887—1889 г.) наступил новый этап этой борьбы, в котором опять-таки русская физика оказалась на передовых позициях. В оттисках работ, принадлежавших П. Н. Лебедеву, имеется оттиск речи А. Г. Столетова «Эфир и электричество», произнесенной 3 января 1890 г. На оттиске имеется надпись, сделанная рукою автора: «Новейшему от древнейшего (в России) пропагатору герцологии». «Герцология», т. е. учение об электромагнитных волнах, глубоко захватила Столетова. В указанной речи он ставит ряд проблем в этом направлении—это, во-первых, проблема единства электромагнитных волн, которую надо решать путем непрерывного уменьшения длины электромагнитных волн. В 1895 г. П. Н. Лебедев получил самые короткие электромагнитные волны—длиной 6 *мм*—и доказал существование двойного лучепреломления для этих лучей. В 1921 г. А. А. Глаголева-Аркадьева перекрыла интервал между электрическими и молекулярными колебаниями.

Далее Столетов ставит вопрос: «нет ли в спектре Солнца лучей с большей длиной волны, вроде герцевых лучей?». Современная физика ответила на этот вопрос положительно, и радиоспектроскопия Солнца, как и вся радиоастрономия, развивается сейчас необычайно интенсивно.

Оставляя в стороне вопрос о давлении света, которому посвящено отдельное примечание (23), отметим здесь, что в интересном вопросе о пондеромоторных действиях света русской науке принадлежит также инициатива. А. И. Садовским было доказано теоретически наличие в световом луче вращательного момента и предсказано существование механического эффекта при прохождении поляризованного по кругу луча через пластинку $\frac{\lambda}{4}$. Такой эффект был экспериментально подтвержден Батом в 1936 г.

В заключение отметим, что в развитие электромагнитной теории света А. А. Эйхенвальд в 1909 г. разработал теорию полного внутреннего отражения, а в развитии электронной теории дисперсии важную роль сыграли классические исследования Д. С. Рождественского (1912 г.). (*Ред.*)

23. (Стр. 563.) Предположение о существовании давления света было высказано еще Кеплером, т. е. задолго до теории Максвелла. Его пытались выводить как из корпускулярной, так и из френелевской теории света. В так называемой «мельнице» Крукса (1874) некоторые усматривали обнаружение давления света. В 1876 г. Бартоли на основании термодинамического анализа пришел к выводу о необходимости существования такого давления, ибо его отсутствие привело бы к нарушению второго закона термодинамики. Занимавшийся этим вопросом Л. Больцман попутно теоретически получил (1884) известный закон излучения Больцмана-Стефана, экспериментально установленный последним в 1879 г.

Давление света было впервые обнаружено П. Н. Лебедевым в 1899 г. Опыты Лебедева сыграли важную роль в утверждении электромагнитной теории света. По собственному признанию В. Томсона он принял теорию Максвелла только в результате опытов Лебедева.

Как показал в 1922 г. С И. Вавилов (УФН, т. 3, стр. 192, 1923), классические опыты Лебедева явились также первым экспериментальным подтверждением соотношения между массой и энергией $E=mc^2$.

Фундаментальной важности применение концепции светового давления было сделано Ф. А. Бредихиным в его исследованиях по теории кометных хвостов. (*Перев.*)

24. (Стр 616.) Дадим краткий очерк развития электродинамических теорий, основанных на принципе дальнодействия.

Теоретическим завершением экспериментальных исследований *Ампера* было знаменитое сочинение «Мемуар о математической теории электродинамических явлений, выведенной исключительно из опыта». Это сочинение было впервые опубликовано в «Мемуарах» Парижской Академии наук за 1822—1823 гг. и отдельно издано в 1826 г.

Основные опыты, из которых исходит Ампер, таковы: а) действие тока остается неизменным по абсолютной величине, но обратным по направлению, если направление тока меняется на обратное, иначе действие двух одинаковых, рядом протекающих по противоположным направлениям, токов равно нулю; б) действие двух одинаковой силы токов, протекающих между двумя точками, является одинаковым, протекают ли эти токи по прямолинейному пути или же по зигзагообразному, мало отличающемуся от прямолинейного; в) действие любого замкнутого тока на элемент тока всегда нормально к последнему; г) взаимодействие двух элементов тока остается тем же самым, если при неизменной силе тока и подобном положении эти элементы увеличиваются в том же отношении, как их расстояния друг от друга.

Из первого опыта Ампер выводит, что взаимодействие двух элементов тока $i_1\,dl_1$ и $i_2\,dl_2$ должно иметь форму

$$Ki_1i_2\,dl_1\,dl_2.$$

Из второго опыта, предполагая ньютонову форму закона взаимодействия, Ампер получает, что взаимодействие двух элементов тока должно иметь форму

$$dF=\frac{Ki_1i_2\,dl_1\,dl_2}{r^n}\left[\cos\varepsilon+(k-1)\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\right],$$

где ε — угол между элементами dl_1 и dl_2, ϑ_1 и ϑ_2 — углы между элементами и радиусом-вектором, соединяющим середину элементов.

Полагая $K=-1$, т. е. принимая определенную единицу для измерения силы тока*), Ампер из третьего и четвертого опытов выводит, что $1-n-2k=0$ и $n=2$, и получает окончательную формулу

$$dF=\frac{-i_1i_2dl_1\,dl_2}{r^2}\left(\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\right). \qquad \text{(I)}$$

Из формулы Ампера вытекает, что действие полюса m_1 на элемент тока $i_2\,dl_2$ определяется соотношением

$$|\,dF\,|=\frac{m_1i_2dl_2\sin(r,\,dl_2)}{\sqrt{2}\,r^2} \qquad \text{(II)}$$

Если предположить, что элемент тока действует с той же силой, но противоположного направления на полюс m_1, то

---

*) Эта единица равна 221,4 a,

приведенная формула является теоретическим выражением закона Био-Савара.

Однако между законом Био-Савара и законом Ампера имеется одно, весьма существенное различие. Именно, при выводе своих формул Ампер исходит из положения, что два элемента тока взаимодействуют вдоль радиуса, их соединяющего, аналогично тому, как это утверждается законом Ньютона для гравитирующих масс, и что действие равно и прямо противоположно противодействию.

Следует отметить, что Ампер, ошибаясь в вопросе о направлении действия силы, тем не менее не мог проверить это на опыте, так как на опыте всегда имеют дело с замкнутыми токами. Легко показать, что для замкнутых токов закон Ампера дает правильный результат.

Следующим этапом развития теории Ампера была теория *Ф. Неймана*, развитая в 1845—1848 гг. в работах: «Математические законы индуктированных электрических токов» (1845) и «Общий принцип математической теории индуктированных электрических токов» (1848). Теория Неймана основывается на трех законах и ряде «опытных» положений. Первый закон—закон индукции, открытый Фарадеем в 1831 г., второй закон—закон Ленца, сформулированный последним в 1834 г., третий закон—закон Ома. Опытные положения Неймана таковы: а) индуктированные токи возникают при измерении (закон Фарадея) «виртуального действия электродинамических сил», т. е. изменении того действия, которое оказал бы индуцирующий ток, если бы по индуцирующему проводнику протекал постоянный ток силы, равной единице; б) при прочих равных условиях наведенная электродвижущая сила и согласно закону Ома наведенный ток пропорциональны скорости относительного перемещения наводимого и наводящего элементов тока и независимы от вещества проводов; в) при прочих равных условиях наведенная сила тока пропорциональна наводящей; г) слагающая электродинамического действия наводящего тока на элемент наводимого, взятая по направлению скорости перемещения, противоположна этой скорости (закон Ленца).

Нейман первоначально рассматривает индуцируемый провод, движущийся параллельно индуцирующему со скоростью v. Если i—сила индуцированного тока, f—электродинамическая сила на единицу длины и единицу тока, то электродинамическое действие на элемент dl будет $fi\,dl$ или $f_v i\,dl$ по направлению скорости v, где $f_v = f\cos(f,\ v)$—слагающая действия по направлению скорости v.

Согласно пункту б) $i = kv$, следовательно, $f_v i\,dl = kf_v v\,dl$, и полное электродинамическое действие F_v будет:

$$F_v = kv\int f_v\,dl.$$

Согласно закону Ленца (пункт г)) знак F_v должен быть обратным знаку v. Нейман полагает поэтому $k=-K\int f_v\,dl$, где K — постоянная. Таким образом, он получает:

$$i=kv=-Kv\int f_v\,dl.$$

Согласно закону Ома $E=\int \mathscr{E}dl=i\omega$, следовательно, $E=\int \mathscr{E}dl=-\varepsilon v\int f_v\,dl$, где $\varepsilon=K\omega$. Поскольку согласно пункту б) индуктированная электродвижущая сила независима от материала провода, $\varepsilon=K\omega$ должна быть универсальной константой, которую Нейман, базируясь на законе сохранения энергии, полагает равной единице. Так Нейман получает:

$$\mathscr{E}=f_v v. \tag{1}$$

Это есть основной закон индукции Неймана: *удельная наведенная электродвижущая сила пропорциональна слагающей удельной электродинамической силы по направлению скорости и величине этой скорости.* Нейман далее получает тот же результат, рассматривая провода любой формы с любыми относительными движениями их частей. Одним из центральных понятий теории Неймана является понятие потенциала замкнутых токов. Для двух таких токов i_1 и i_2 потенциал Неймана имеет форму

$$P_N=-\frac{i_1 i_2}{2}\int\limits_{l_1}\int\limits_{l_2}\frac{dl_1\,dl_2\cos(dl_1,\,dl_2)}{r}.$$

Нейман доказывает, что работа наведенного тока i_2, проявляющаяся в форме тепла, пропорциональна механической работе, затрачиваемой на преодоление действия электродинамических сил, исходящих от наводящего тока. Согласно Нейману эта механическая работа определяется разностью потенциалов $(P_{i_1 i_2})_1-(P_{i_1 i_2})_0$, где $(P_{i_1 i_2})_1$ и $(P_{i_1 i_2})_0$ — конечное и начальное значения неймановского потенциала для пары замкнутых токов: наводящего i_1 и наведенного i_2. В дифференциальной форме, если dW — элемент работы наведенного тока, $dW=i_2 P_{i_1 i_2}$. Так как, с другой стороны, $dW=Ei_2\,dt$, то $E=\frac{dP_{i_1 i_2}}{dt}$, т. е. индуктированная электродвижущая сила равна изменению потенциала в единицу времени.

Пользуясь теорией Ампера, Нейман выводит следующее соотношение для двух бесконечно малых замкнутых токов с площадками s_1 и s_2 и силы 1:

$$P_{i_1 i_2} = -\frac{s_1}{2}\frac{\partial K_2}{\partial n_1} = -\frac{s_2}{2}\frac{\partial K_1}{\partial n_2}.$$

Здесь $K = \frac{s\cos\widehat{(r, n)}}{r^2}$. Так как $s\cos\widehat{(r, n)}$ есть проекция площадки s на плоскость, нормальную к радиусу r, то K_1 не что иное, как кажущаяся величина площадки s_1, рассматриваемая на расстоянии r из площадки s_2, K_2 — кажущаяся величина площадки s_2, рассматриваемой из s_1. Обобщая полученный результат и рассматривая, с одной стороны, систему бесконечно малых плоских контуров тока c, эквивалентных конечному току i_2 с контуром C, охватывающему контуры c, а с другой — систему бесконечно малых плоских контуров с площадью s, образующих бесконечный соленоид с расстоянием между витками, равным a, и током i_1, Нейман получает, что

$$P_{i_1 i_2} = -\frac{i_1 i_2 s}{2a} K_p,$$

где K_p — кажущаяся величина контура C, рассматриваемого из полюса соленоида.

Согласно теории Ампера полюс соленоида эквивалентен полюсу магнита $m = \frac{s i_1}{\sqrt{2} a}$, следовательно: $P_{i_2 m} = -\frac{i_2 m}{\sqrt{2}} K_p$, или для единичного тока $i_2 = 1$

$$P_{1m} = -\frac{m}{\sqrt{2}} K_p.$$

Индуктированная электродвижущая сила

$$E = \int \mathscr{E}\, dl = \frac{dP_{1m}}{dt} = -\frac{m}{\sqrt{2}}\frac{dK_p}{dt},$$

т. е. эта сила пропорциональна изменению отверстия конуса с вершиной в магнитном полюсе, проходящего через контур рассматриваемого индуцируемого тока.

Важную роль в развитии теории имели работы *В. Вебера*, изложенные им в известном сочинении «Электродинамические мероопределения» (1840—1878).

Остановимся прежде всего на выдвинутой Вебером совместно с Гауссом электромагнитной системе мер.

При установлении этой системы Вебер первоначально исходил из выражения потенциала Неймана для плоского замкнутого тока i с площадью контура s и единичного магнитного полюса. Имеем согласно вышеприведенным формулам

$$P = -\frac{Kis\cos(\widehat{r, n})}{r^2},$$

где K — некоторый коэффициент пропорциональности, равный при электродинамической мере силы тока $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Если заменить контур с током i магнитом длиной l и с полюсом m, помещенным в центре контура нормально к поверхности, то по закону Кулона получим для P:

$$P = -\frac{ml}{r^2}\cos(\widehat{r, n}) = \frac{-M\cos(\widehat{r, n})}{r^3}$$

Следовательно:

$$M = Kis.$$

Полагая $K = 1$, Вебер тем самым определяет электромагнитную меру силы тока i, которую он обозначает через I, так что $P = -\frac{Is\cos(\widehat{r, n})}{r^2}$. Так как, с другой стороны, при электродинамической мере тока $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$ получается, что $I = \frac{i}{\sqrt{2}}$, т. е. электромагнитная мера в $\sqrt{2}$ раз меньше электродинамической. При установлении соотношения между электромагнитной и электростатической мерами Вебер исходит из развитой им в 1846 г. теории кинетического потенциала.

Для понимания этой теории необходимо прежде всего иметь в виду дуалистическую концепцию тока, которой придерживался Вебер: всякий электрический ток представляет собой течение по противоположным направлениям положительного и отрицательного электрических флюидов. Исходя из этого представления, Вебер формулирует следующие исходные «опытные» положения: а) два элемента тока, расположенных на одной прямой, взаимно притягиваются или отталкиваются в зависимости от того, движутся ли токи по противоположным или одинаковым направлениям; б) обратное имеет место для двух параллельных элементов тока, нормальных к линии их соединения; в) элемент тока, расположенный с элементом проводника вдоль одной прямой, наводит в последнем токи прямо противоположных направлений — при возрастании и убывании силы наводящего тока.

Если e_1 и e_2 — два электрических заряда на расстоянии r, движущиеся с некоторой относительной скоростью, радиальная составляющая которой $\frac{dr}{dt}$, то потенциал Вебера имеет следующую форму:

$$P_W = \frac{e_1 e_2}{r}(1 - a^2 \dot{r}^2). \tag{I}$$

Соответствующая сила взаимодействия по Веберу будет:

$$F_W = -\frac{e_1 e_2}{r^2}(1 - a^2 \dot{r}^2 - 2a^2 r \ddot{r}). \tag{II}$$

Для определения постоянной a Вебер получает очень важное равенство:

$$\frac{I\,(\text{стат})}{I\,(\text{эл. маг.})} = \frac{1}{a\sqrt{2}}.$$

Согласно измерениям Вебера и Кольрауша в 1855 г. величина $\frac{1}{a}$ оказалась равной $439\,450 \cdot 10^6$ миллиметров в секунду, или 41 949 геогр. милям в секунду, что соответствовало значениям для скорости света, полученным Брадлеем (41 994) и Физо (41 882). Вебер мог поэтому считать свою константу $a^2 = \frac{1}{c^2}$. Он действительно с 1858 г. придал своему потенциалу форму $P_W = \frac{e_1 e_2}{r}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)$, где c — скорость света. Однако более точные измерения скорости света показали, что именно $I\,(\text{стат}) : I\,(\text{эл. маг.}) = 1 : a\sqrt{2} = c$, так что константа Вебера a^2 оказалась равной $\frac{1}{2c^2}$.

Вебер ограничился констатацией указанного соотношения между электростатической и электромагнитной единицами, не желая или не решаясь сделать отсюда важнейшее заключение о физической природе электромагнитных сил.

Боязнь выйти за пределы формализма особенно ярко выступает в признаниях *Гаусса*. Когда в 1845 г. Вебер сообщил Гауссу о своем электродинамическом основном законе, Гаусс ответил, что он уже лет десять думает о том, чтобы построить электродинамическую теорию не на основе понятия дальнодействия, а исходя из представления о постоянно распространяющихся наподобие света взаимодействиях. Гаусс признает, что он не решался опубликовывать результатов своих исследований, так как «ему недоставало конструктивного представления о том способе, каким образом это распространение происходит».

Чтобы получить такого рода представление, необходимо, в самом деле, выдвинуть гипотезу среды, но этого не могли сделать приверженцы формально-эмпирической школы.

Сам Гаусс предложил следующий закон силового действия:

$$F_g=\frac{e_1e_2}{r^2}\left[1+k\left(u^2-\frac{3}{2}\dot{r}^2\right)\right],$$

где u — относительная скорость, $\dot{r}$ — радиальная составляющая. Максвелл показал, что формула Гаусса противоречит законам индукции. Открыто, хотя и формально, представление о конечной скорости распространения электромагнитных действий выдвинул *Риман* в 1858 г. и развил в сочинении «Тяжесть, электричество и магнетизм», изданном в 1876 г. Риман предложил обобщенное уравнение Пуассона:

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=\nabla^2 P+4\pi\rho,$$

где ρ — объемная плотность, α — величина скорости распространения. Решением указанного уравнения является потенциал

$$P=\frac{e_1e_2}{r(t;\ t')},$$

где $r(t;\ t')$ — расстояние e_1 в момент t от e_2 в момент t'. В электронной теории Лоренца принята та же форма для так называемого «запаздывающего потенциала». В первом исследовании (1858 г., опубликованном в 1876 г.) Риман для двух токов получает выражение потенциала Неймана с величиной $\alpha=c$, т. е. скорости света.

В работе 1861 г. (опубликована в 1876 г.) Риман выдвигает понятие так называемого эффективного потенциала *):

$$P_R=\frac{e_1e_2}{r}\left(1-\frac{u^2}{2c^2}\right),$$

где u—относительная скорость зарядов e_1 и e_2, c—скорость света. То обстоятельство, что в потенциале Римана фигурирует не радиальная слагающая скорости, а самая скорость u, имеет глубокий методологический и физический смысл.

*) Эта форма связана с действительной формой потенциала Вебера:

$$P_W=\frac{e_1e_2}{r}(1-a^2\dot{r}^2),\quad \text{где}\quad a^2=\frac{1}{2c^2}.$$

Одним из последних представителей школы Ампера был *Карл Нейман*. Первые исследования Неймана относятся к 1865 г. и опубликованы в ряде изданий. Сводной работой является книга «Общие исследования ньютонова принципа дальнодействия» (1896 г.). Нейман в отличие от Римана стремился исключить из рассмотрения понятия абсолютного пространства (эфира) и абсолютной скорости и оперировать лишь относительными расстояниями r. Будучи, однако, вынужденным ввести понятие о распространении во времени силовых действий, К. Нейман прибегнул к представлениям, которые по характеристике Максвелла рационально понять весьма трудно и даже невозможно. Согласно Нейману «потенциал» распространяется относительно—вдоль переменного радиуса-вектора, а отнюдь не в абсолютном пространстве. В момент t_1 от электрической частицы e_1 исходит «приказ», распространяющийся с большой скоростью вдоль переменного радиуса-вектора и достигающей частицы e_2 в момент $t=t_1+\Delta t$, где $\Delta t=\frac{r}{\beta}$ и r—расстояние между частицами в момент t. Этот «приказ» или «эффективный потенциал» определяется расстоянием $r_1=r-\Delta r$ между частицами в момент t_1. Полагая $P_N=e_1e_2\,\varphi(r_1)=e_1e_2\,\varphi(r-\Delta r)$ и разлагая $\varphi(r_1)$ в ряд по степеням малой величины $\Delta t=\frac{r}{\beta}$, Нейман из условия, что его потенциал должен удовлетворять принципу Гамильтона, получает следующее выражение для потенциала:

$$P_N=\frac{e_1e_2}{r}\left(1+\frac{r^2}{\beta^2}\right),$$

где $\beta=\sqrt{2}\,c$ (c—скорость света).

Нейман подчеркивает отличие его эффективного потенциала, который он также называет ньютоновым запаздывающим потенциалом, от римановского: в основе римановского потенциала лежит представление о реальном распространении со скоростью света электродинамических действий в некоторой абсолютной среде, у Неймана аналогия с распространением света является чисто внешней аналогией, неймановская скорость β отнюдь не равна скорости света, а в $\sqrt{2}$ раз больше. Неймановский потенциал каким-то образом распространяется вдоль переменных радиусов-векторов.

Не останавливаясь на исследованиях Неймана, посвященных выводу дифференциального закона электродвижущей силы, аналогичного пондеромоторному закону Ампера, перейдем к работам Клаузиуса.

Клаузиус прежде всего поставил себе целью заменить дуалистическую концепцию электрического тока унитарной, рассматривая ток как движение лишь положительного электричества. Клаузиус указывает, что законы Вебера и Римана необходимо соответствуют дуалистической гипотезе.

Пользуясь законом сохранения энергии и рядом других допущений, Клаузиус получает для потенциала следующее выражение:

$$P_{Cl}=\frac{e_1e_2}{r}\left[1+kv_1v_2\cos(v_1,\ v_2)\right],$$

где v_1 и v_2—абсолютные скорости частиц e_1 и e_2, отнесенные к абсолютному пространству (эфиру), $k=c^{-2}$.

Для получения выражения силы Клаузиус, вслед за Риманом, пользуется принципом Гамильтона, который дает:

$$F_{x_1}=-e_1e_2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right)\left[1-kv_1v_2\cos(v_1,\ v_2)\right]-ke_1e_2\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_2}{r}\ \text{и т. д.}$$

Выражения для потенциала и силы, в которых фигурируют абсолютные скорости v_1 и v_2, показывают, что в основе теории Клаузиуса лежит представление о промежуточной среде. Вот почему потенциал Клаузиуса по существу совпадает с векторным потенциалом теории электронов Г. А. Лоренца, подобно тому как потенциал Римана тождественен скалярному потенциалу той же теории. Теории Римана и Клаузиуса имеют в своей основе то же самое представление об абсолютной среде (эфире), из которого исходит теория электронов Г. А. Лоренца.

Наглядное выражение различия точек зрения можно дать при помощи следующего сопоставления вторых частей различных потенциалов:

$$V_W=-\frac{e_1e_2}{2c^2r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2;\quad V_R=-\frac{e_1e_2}{2c^2r}u^2;\quad V_{Cl}=\frac{e_1e_2}{c^2r}v_1v_2\cos(v_1,\ v_2).$$

У Вебера фигурирует чисто относительная радиальная скорость, у Римана относительно-абсолютная скорость, у Клаузиуса сами абсолютные скорости зарядов.

Подводя итоги, можно сказать, что заложенные Ампером формально-математические основы теории электрических и магнитных явлений в процессе своего развития вынуждены были отрицать самих себя. Опыт все более и более раскрывал внутреннюю противоречивость этих основ. (*Перев.*)

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ

ИЗ «ТРАКТАТА ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ И МАГНЕТИЗМЕ»

Редактор *В. Т. Хозяинов.*
Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*
Корректор *А. С. Бакулова.*

* * *

Подписано к печати 7/X 1952 г.
Бумага $84 \times 108^{1}/_{32}$. Бум. л. 10,78
Печ. л. 35,36 (1 вклейка). Печ.
знак. в 1 печ. л. 31670. Уч.-изд. л.
28,13. Тираж 4 000 экз. Т-07684.
Цена книги 14 р. 10 к. Переплет 2 р. Заказ 339.
Номинал по прейскуранту 1952 г.

* * *

16-я тип. Главполиграфиздата
при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., д. 9.

ДЖЕМС КЛЕРК
МАКСВЕЛЛ

ИЗБРАННЫЕ СОЧИНЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ДЖЕМС КЛЕРК
МАКСВЕЛЛ