

JULIUS T. TOU

Professor of Electrical Engineering
Director of Computer Sciences Laboratory
The Technological Institute
Northwestern University

MODERN CONTROL THEORY

Mc GRAW-HILL BOOK COMPANY, INC
NEW YORK SAN FRANCISCO
Toronto London

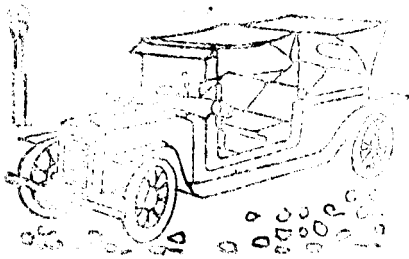
1964

ЮЛИУС ТУ

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

*Перевод с английского
Я. Н. ГИБАДУЛИНА*

Под редакцией
В. В. СОЛОДОВНИКОВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «МАШИНОСТРОЕНИЕ»
Москва 1971

«Современная теория управления». Ю. Ту. Пер. с англ. Я. Н. Гибадулина, под ред. В. В. Солодовникова. М., «Машиностроение», 1971.

Автор настоящей книги Ю. Ту уже известен советскому читателю по переводу его предыдущей книги «Цифровые и импульсные системы автоматического управления», М., Машиностроение, 1964.

Предлагаемая на русском языке книга этого же автора посвящена изложению методов анализа и расчета многомерных систем управления на основе понятия пространства состояний и синтезу оптимальных систем методами вариационного исчисления, принципа максимума Понтрягина и динамического программирования.

Значительное внимание уделено также проблеме использования для автоматического управления цифровых вычислительных машин.

Книга будет полезной для широкого круга научных работников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов высших технических учебных заведений. Илл. 152. Библ. 152 наименования.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая вниманию советского читателя книга Ю. Ту предназначена для специалистов по автоматике, знакомых с теорией автоматического регулирования и желающих изучить теорию автоматического управления в ее современной форме.

Автор постепенно вводит читателя, не являющегося математиком по специальности, в круг математических понятий и представлений (теория множеств, матричное исчисление, конечномерное векторное пространство, квадратичные формы и т. д.), которые сейчас широко используются в теории автоматического управления.

После такого рода математической подготовки, обеспечивающей усвоение последующего содержания книги, автор переходит к систематическому изложению ряда важных разделов современной теории управления, касающихся главным образом методов оптимизации (методы классического вариационного исчисления, принцип максимума, динамическое программирование), и их применению для расчета оптимальных, в основном детерминированных многомерных систем, содержащих один объект управления. В книге рассмотрены также некоторые вопросы теории таких систем с вычислительными машинами в контуре управления.

Ю. Ту уже известен советскому читателю¹. Настоящая книга, так же как и вышедшая ранее, отличается ясностью и методической продуманностью изложения. Она представляет значительный интерес и принесет несомненную пользу инженерам, научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов, изучающим и применяющим теорию управления.

В. В. СОЛОДОВНИКОВ

¹ Ю. Ту. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. М., «Машиностроение», 1964.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В исследованиях по созданию сложных систем управления и обработки информации в настоящее время находят широкое применение новые идеи и современные методы анализа и синтеза систем, развитые в результате активной исследовательской работы в течение последних семи или восьми лет. В связи с этим, в университетских, а также и в промышленных кругах ощущалась острая необходимость в учебнике по современной теории управления, разъясняющем и систематизирующем новые методы проектирования систем. В настоящее время существует огромное количество книг по теории автоматического управления, но в них предмет излагается почти одинаково. С целью восполнить пробел в учебной литературе, автор подготовил вначале записи серии своих лекций, которыми пользовались его студенты в Пардю и позднее в Северо-западном университете. Настоящая книга, написанная в ответ на многочисленные запросы, поступавшие к автору из различных мест, явилась их естественным продолжением и развитием. В ней рассмотрение систем автоматического управления проводится полностью на основе современных методов и в своем новом подходе она отражает тенденции и направления исследований в этой области в настоящее время.

Основные методы анализа и синтеза систем автоматического управления могут быть разбиты на три основные группы. К первой группе относятся операторные методы, использующие преобразование Лапласа или z -преобразование, на основе которых синтез систем осуществляется известным способом проб и ошибок. К второй группе относятся методы, в которых для оценки качества системы используется интегральная квадратичная или среднеквадратичная ошибка. Эти две группы методов лежат в основе так называемой классической теории регулирования, которая явилась базой для разработки систем автоматического управления в период Второй мировой войны и в последующее десятилетие. Эти две группы методов

классической теории управления служили также главной темой рассмотрения почти во всех учебниках по автоматическому управлению, существующих в настоящее время. Хотя опубликовано уже более ста учебников и монографий, в которых подробно излагается классическая теория, до сих пор, пожалуй, не написано ни одного учебника по современной теории управления. Настоящая книга посвящена исключительно методам третьей группы, лежащим в основе современного подхода к построению систем управления и обработки информации.

Появление быстродействующих цифровых вычислительных машин вызвало революцию в методах анализа и синтеза систем управления и привело к исключительным последствиям: выяснилась неприемлемость старых методов и самого подхода к синтезу систем и был дан толчок к разработке новых методов. Оптимальное построение новых сложных систем требует проведения трудоемких вычислений, которые могут быть выполнены по программе или алгоритму на цифровой вычислительной машине. Классические методы не учитывали огромных возможностей вычислительной техники, а проектирование сложных систем с большим числом входов и ограничений на их основе было затруднительным. Параллельно с развитием вычислительной техники шло и развитие теории управления — требовалось разработать более действенные и эффективные способы расчета систем.

Упомянутая третья группа методов анализа и синтеза систем управления была разработана, чтобы удовлетворить этому требованию. Для характеристики системы эта группа методов использует пространство состояний, и расчет системы сводится в основном к отысканию экстремума функционала. Хотя этот подход может рассматриваться как обобщение методов второй группы, он гораздо более совершенен и фактически является совершенно новым. Его основная идея по существу состоит в том, что выбирается или составляется функционал от функции состояния и управления, накладываются физические ограничения на эти функции и с помощью одного из методов вариационного исчисления определяется управляющее воздействие, минимизирующее или максимизирующее исходный функционал.

Эта идея, выражающая существо современного подхода к анализу и расчету систем управления, была впервые предложена для решения задач управления только десять лет назад, однако ее практическая ценность и теоретическое значение были настолько очевидными и ее преимущества настолько существенными, что она сразу получи-

ла признание и в течение нескольких лет завоевала широкую популярность. В последние годы этот современный подход получил очень быстрое распространение и стал основным методом, используемым при синтезе систем управления.

Несмотря на многие очевидные преимущества этого подхода и явную тенденцию к проведению исследований в этом направлении, только несколько из самых последних учебников содержат очень краткое описание одного или двух современных методов расчета систем управления; некоторые содержат не более чем краткое упоминание, большинство же полностью игнорируют их. Научный и технический прогресс в последнем десятилетии выявил круг новых задач и тем самым стимулировал интерес к новым методам анализа и синтеза систем, к новым идеям, отличным от изложенных в стандартных учебниках по теории управления и информации. Однако до настоящего времени не имелось книг, целиком посвященных рассмотрению этих новых идей, несмотря на их многие преимущества, а имевшиеся краткие упоминания, естественно, не могли восполнить существовавший пробел.

Именно это обстоятельство и послужило причиной написания данной книги. Она целиком посвящена рассмотрению современных идей построения систем управления, в ней делается попытка собрать воедино новые идеи и принципы анализа и синтеза, имеющие фундаментальное значение для современной техники управления, систематизировать и обобщить их. Книга включает некоторое количество оригинального материала, но, как видно из перечисленной литературы, большая часть материалов книги заимствована из других источников.

Книга предназначена для использования как в качестве учебного пособия для студентов старших курсов, так и в качестве справочника для научных работников, инженеров, специалистов, работающих в данной области. Материал книги построен таким образом, чтобы соблюдался логический переход от простых к более сложным задачам. Хотя для изложения теории и доказательства ее отдельных положений требуются довольно обширные сведения из высшей математики, все они даются в книге в форме, доступной как для студентов, так и для инженеров. Для студента книга удобна тем, что в ней содержится последовательное изложение теории и описание наиболее важных способов расчета систем. Для специалиста, работающего в данной области, она будет полезной в качестве систематического справочного пособия, из которого он легко может получить ответ на интересующий его вопрос.

Предполагается, что читатель обладает необходимой предварительной подготовкой в объеме вводного курса по теории систем с обратной связью, а также некоторыми познаниями по теории матриц, линейной алгебре и обыкновенным дифференциальным уравнениям.

В гл. 1 содержится краткий обзор основного материала книги. Эта глава вводит читателя в круг задач теории управления, а также знакомит с основными методами их решения. В гл. 2 рассматриваются некоторые понятия высшей математики, которые широко используются в современной теории управления. При чтении лекций автор опускал отдельные параграфы этой главы обычно до тех пор, пока не появилась необходимость в них в ходе изложения курса. Гл. 3 посвящена анализу систем управления на основе метода пространства состояний. Метод распространен как на непрерывные, так и на дискретные системы, причем первые рассматриваются как специальный случай последних. Показано, что этот метод применим к анализу нестандартных дискретных систем, т. е. систем с неидеальным прерыванием сигналов или неравными периодами прерывания. В гл. 4 рассматривается синтез систем управления при использовании метода пространства состояний. Рассмотрено также оптимальное управление в нелинейной дискретной системе, дано решение задач об оптимальном быстродействии для системы с насыщением, сформулированы понятия управляемости и наблюдаемости. В гл. 5 рассматривается применение методов вариационного исчисления к решению задач синтеза оптимального управления. Последние трактуются как известные задачи Лагранжа, Майера, Больца. Принцип максимума изложен в гл. 6. Показано применение принципа максимума к решению задач об оптимальном быстродействии и управлении конечным состоянием, а также оптимизации управления по интегральному критерию качества. Гл. 7 посвящена применению теории динамического программирования к решению задач оптимального управления. Подробно рассматривается решение трех основных типов задач оптимального управления методом динамического программирования, исследуются процессы управления с самоприспособлением и самообучением. В заключительной главе излагается теория управления с применением электронных цифровых вычислительных машин, при этом основное внимание уделяется синтезу оптимального регулятора, а также оптимальной оценке координат состояния, когда некоторые из них не могут быть измерены непосредственно. Поскольку анализ устойчивости систем на основе второго метода Ляпунова

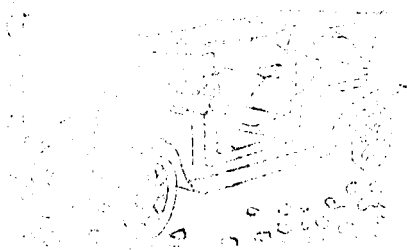
достаточно подробно рассмотрен в нескольких недавно изданных учебниках по теории управления, он не включен в данную книгу.

Каждая глава содержит много примеров, иллюстрирующих теорию и рассмотренные в данной главе методы расчета систем, причем многие из примеров доведены до числовых результатов. Кроме этого, в книгу включено около 140 задач различной степени сложности с целью дать студенту возможность путем приобретения опыта в решении задач уяснить существо отдельных методов, изложенных в книге. Некоторые из этих проблем могут быть взяты в качестве отправных для проведения дальнейших исследований и могут послужить дополнением к теории, развиваемой в книге.

В ходе изложения автор обычно избегал цитирования используемых источников, однако книга содержит указатель литературы, перечисляющий работы многих ученых, работающих в данной области. Приведенный перечень литературы является далеко не полным, так как он не может охватить весь огромный объем литературы, имеющейся по данному предмету. Автор приносит свои извинения тем ученым, чьи работы ввиду указанного обстоятельства оказались не упомянутыми.

Одной приятной особенностью преподавания современной теории управления является новизна предмета и интерес, который вследствие этого обнаруживает к нему большинство студентов. В книгу включено много иллюстративных примеров и задач для домашних заданий, разработанных полностью самими студентами, которые с энтузиазмом трудились над их составлением. Автор выражает глубокую признательность многим лицам, оказавшим помощь при подготовке рукописи к печати. В период написания книги автор получил неоценимую поддержку от проф. Ю. Х. Ку из Пенсильванского университета, Электротехническая школа Моора. Автор выражает также благодарность Научно-исследовательскому Управлению Военно-морских Сил за интерес, проявленный к написанию данной книги, и положительное заключение по завершенной работе. Кроме того, автор хотел бы поблагодарить своего секретаря г-жу Гертю Хустон, которая отпечатала окончательный вариант рукописи и оказала помощь при чтении корректур и издании книги.

Юлиус Т. Ту



ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ В ПРОБЛЕМАТИКУ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Вводная глава содержит общее рассмотрение проблем автоматического управления, при этом подчеркивается важное значение принципа обратной связи. Современные методы расчета систем управления сравниваются с классическими методами. Это сравнение показывает преимущество современного подхода над классическим. В этой книге задача синтеза оптимального управления формулируется как задача вариационного исчисления и описываются способы ее решения.

1.1. ПРОБЛЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В последние годы развитие техники идет по пути создания оптимальных систем управления. Ограниченные ресурсы природного сырья и жесткая конкуренция вынуждают все отрасли промышленности — химическую, сталеплавильную, автомобильную, пищевую, авиационную, станкостроительную, текстильную и т. д. — увеличивать эффективность производства за счет использования оптимальных систем управления технологическими процессами. Владелец акций стремится к получению максимальной прибыли на вложенный капитал. Руководитель предприятия старается обеспечить выпуск максимального количества продукции и снизить ее себестоимость. Инженер — разработчик системы вооружения — стремится создать систему, обладающую максимальной разрушительной силой при заданных физических ограничениях. Проектировщик систем управления космическими объектами хочет обеспечить запуск спутника по оптимальной траектории, позволяющей вывести на орбиту максимальный полезный вес. В течение последних десяти лет потребность в лучшем управлении процессами в промышленности, объектами военного назначения и космическими аппаратами стимулировала огромный интерес к задачам оптимального управления и оптимизации систем.

Среди современных направлений развития науки и техники автоматизация имеет особое значение. В наши дни стало привычным слышать слова о том, что мир переживает вторую промышлен-

ленную революцию и наступила эра автоматизации. Сейчас в развитии человеческого общества главную роль играет мозг человека, а не его мускулы. Автоматизация рассматривается как одно из наиболее важных направлений развития техники в наше время. Вместе с ней во много раз возрастает производительность труда, она способствует осуществлению на практике многих из прекрасных грез прошлых поколений и открывает новые горизонты для различных отраслей промышленности. Одной из важных особенностей развития автоматизации в современных условиях является применение систем с обратной связью. Такие системы, используемые для целей управления обратной связью, стали играть существенную роль в современном производстве, начиная от изготовления простых игрушек до создания сложных автоматизированных производств и промышленного оборудования. Применение систем управления с обратной связью способствует в значительной мере непрерывному росту производительности труда и повышению уровня жизни.

Трудно представить себе процесс управления без обратной связи, имеющий какое-нибудь существенное научное и практическое значение. В качестве примера управления с использованием обратной связи часто приводят регулирование температуры в помещении. Предположим, что регулирование температуры производится по тщательно спроектированной разомкнутой цепи. Определяется средняя температура, которая должна поддерживаться в помещении в течение зимних месяцев, и последовательность включений и выключений отопительной системы во времени. Поскольку перемены в погоде точно непредсказуемы, то, в результате этого, зимой в помещении будет временами или слишком тепло, или слишком холодно, даже если средняя внешняя температура и порядок включения и выключения отопления определены на основании большого числа наблюдений. Этот недостаток свойственен управлению по разомкнутому циклу и не может быть устранен. Когда в квартире слишком тепло, то жильцы, очевидно, откроют окна, чтобы выпустить лишнее тепло; когда в ней слишком холодно, то, поскольку жильцы ничего не могут сделать с отоплением, они оденутся, вероятно, в более теплую одежду. Фактически, они предпринимают действия, основываясь на разности температуры — требуемой и истинной, т. е. образуют новую цепь обратной связи, чтобы изменить температуру.

Существует много причин, которыми можно объяснить, почему управление по разомкнутой цепи является неудовлетворительным. При наладке системы управления приходится допускать некоторую неточность ее работы, например из-за конечной точности изготовления ее компонент. Параметры системы управления могут изменяться со временем из-за старения, усталостных явлений температурных условий и т. д., в результате чего при управлении процессами даже умеренной сложности динамичес-

кие характеристики системы могут быть известны лишь приближенно. Кроме этого, имеют место внешние возмущения, которые не поддаются контролю и заранее не могут быть скомпенсированы. Очевидно, при флуктуациях параметров системы, вызванных этими факторами, управление по разомкнутой цепи вряд ли может быть удовлетворительным. За исключением самых простых случаев, системы управления, не использующие обратную связь, не могут применяться успешно в реальных условиях.

Процессы управления с обратной связью наблюдаются повсюду: в живых организмах; в автоматах, которые создает человек; в человеческом обществе. Когда в живом организме какое-либо внешнее раздражение возбуждает чувствительный орган, то одновременно протекают процессы поглощения и преобразования

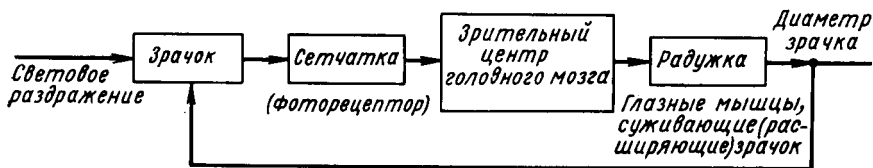


Рис. 1.1—1. Блок-схема, поясняющая принцип адаптации глаза к световому раздражению

энергии. В результате этого возникает сигнал возбуждения, который по нервным волокнам передается в некоторый центр условных рефлексов, где принимается решение и генерируется управляющий сигнал, являющийся реакцией на внешнее раздражение. В системе светового рефлекса глаза радужная оболочка выполняет роль диафрагмы, регулирующей световой поток, падающий на фоторецепторные элементы сетчатки. С увеличением количества падающего света увеличивается сила выходных сигналов фоторецепторов, поступающих в подкорковый зрительный центр головного мозга, где вырабатываются нервные сигналы, которые управляют гладкими круговыми мышцами радужной оболочки, суживающими зрачок. Цепь обратной связи образуется главным образом зрительным нервом и соответствующими преобразователями нервных сигналов сетчатки и радужки. Система светового рефлекса глаза иллюстрируется блок-схемой, показанной на рис. 1.1—1.

Проблема автоматического управления полетом самолета также решается на основе использования принципа обратной связи. Регулируемой величиной обычно является направление полета, которое непрерывно меняется при движении самолета. Управляющие силы и моменты воздействуют на корпус самолета в результате приведения в движение управляющих поверхностей, таких, как руль высоты, руль направления, элероны, или таких вспомогательных поверхностей, как элевоны или тормозные щит-

ки. Для измерения отклонений самолета от заданного направления полета используются соответствующие датчики, а для приведения в движение управляющих поверхностей и достижения желаемых характеристик всей системы применяются различные типы следящих систем.

Управление ориентацией космических аппаратов является другим примером использования принципа обратной связи. Система управления ориентацией осуществляет разворот спутника определенным образом на заданный угол и затем удерживает требуемый курс или положение осей, несмотря на нежелательное действие возмущающих моментов, т. е. выполняет две главные функции: а) изменение ориентации, б) стабилизацию положения. Блок-схема системы управления ориентацией космического аппарата

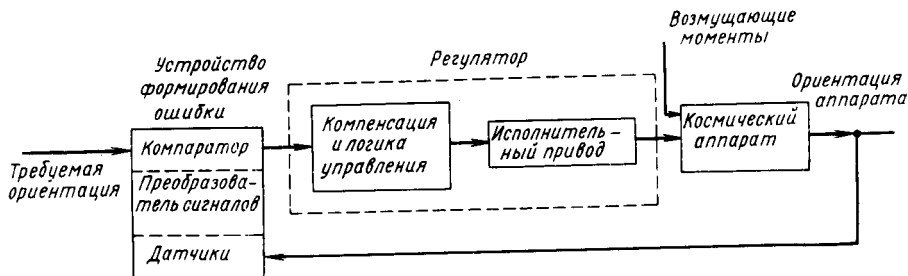


Рис. 1.1—2. Блок-схема системы управления ориентацией космического аппарата

рата показана на рис. 1.1—2. Система управления в качестве своих составных частей включает космический аппарат, регулятор и устройство формирования ошибки. Последнее устройство содержит датчики различных параметров движения, компаратор движения и преобразователь параметров, представляющий сигнал ошибки в форме, удобной для использования в системе. Регулятор получает информацию об ошибке движения, на основании которой формируется закон управления, вырабатывается управляющее воздействие и оптимизируется работа системы ориентации. Датчиком направления может быть солнечный элемент, вырабатывающий напряжение, которое меняется в определенном диапазоне в зависимости от его ориентации относительно солнца.

Еще одним примером использования принципа обратной связи является управление реакторами на ядерном горючем. В ядерном реакторе одним из наиболее важных регулируемых параметров является скорость размножения нейтронов. Эта скорость должна быть достаточно малой, чтобы система регулирования скорости успевала реагировать на ее изменения и могла предотвратить ее увеличение выше критической. Контроль за плотностью потока нейтронов особенно необходим при пуске реактора.

Система регулирования реактора должна обеспечить также нагрев газов до максимальной температуры, при которой в условиях нейтронного облучения еще не нарушается структура материалов реактора. При регулировании реактора возникает также проблема измерения плотности потока нейтронов в широком диапазоне значений для обеспечения безопасной работы. Одна из возможных схем регулирования реактора изображена на рис. 1.1—3. Для формирования сигналов обратной связи используются температура и давление газа на выходе системы теплообмена реактора, плотность потока нейтронов, по которым производится установка вентилей турбины и управляющих стержней. При наличии соответствующего датчика температур эта система уп-

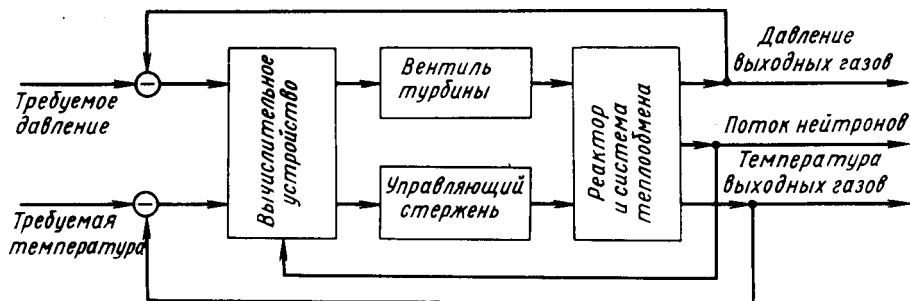


Рис. 1.1—3. Схема регулирования реактора ядерной ракеты для получения максимальной мощности

равления реактором будет удовлетворять большинству предъявляемых требований. По сигналу с датчика плотности потока нейтронов можно вычислить изменения плотности, в частности при пуске реактора. Вычислительное устройство, на основе сведений о динамических свойствах системы, измерений давления, температуры газа, плотности потока нейтронов, принимает решение и выдает команды на установление вентилей турбины и управляющих стержней в положение, при котором обеспечивается получение максимальной мощности.

В последние годы ученые были заняты решением весьма сложных проблем. Трудно переоценить их значение. Успех в решении этих проблем может послужить основой быстрого технического прогресса. Необходимо и в дальнейшем развивать общую теорию оптимальных систем управления, разрабатывать новые принципы построения приборов для оптимального управления, методы построения систем, обладающих способностью к самоприспособлению, самообучению и самоорганизации. Эта книга ставит своей целью познакомить читателя с современными методами решения задач автоматического управления.

1.2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Построению системы автоматического управления обычно предшествует предварительный этап сбора некоторых специфических сведений. Эти сведения касаются математического описания объекта управления, требований, предъявляемых к работе системы в статическом и динамическом режимах, свойств элементов системы и наложенных ограничений, входных воздействий, приложенных к объекту, статистических свойств внешних возмущающих воздействий, выходных переменных, допускающих непосредственное измерение, и выходных переменных, для которых может быть получена только оценка. При этом заранее может оказаться, что необходимо учесть характер заданных управляющих воздействий и структуру системы или предусмотреть квантование сигналов во времени и по уровню, а также использование цифровой вычислительной машины. В некоторых случаях решение задачи может быть единственным, когда наилучшей является только одна система, в других — могут существовать несколько удовлетворительных компромиссных решений и окончательный выбор зависит от исследователя.

Понятиям анализа, проектирования, синтеза в книге придается следующий смысл. Анализ означает, что система управления уже построена и требуется изучить ее работу в заданных условиях. Термин «проектирование» часто используется для обозначения процессов расчета системы управления, удовлетворяющей исходным требованиям. В целом этот процесс не является заранее предопределенным и часто требует инженерной интуиции. Термин «синтез» относится к ситуациям, близким к идеальным, когда требуется найти математическое решение задачи и известна процедура решения, как, например, при синтезе некоторых оптимальных систем, а также линейных цепей и фильтров.

Существует три различных подхода к решению задач проектирования и синтеза систем управления. Первый подход базируется на операторных методах, имеющих дело с преобразованиями в плоскости комплексной переменной s или z , а также на методе корневого годографа. При использовании этого подхода проектирование системы осуществляется последовательными приближениями и поэтому его также называют методом проб и ошибок.

При проектировании системы обычно требуется удовлетворять ряду более или менее жестких требований, предъявляемых к частотным или временным характеристикам системы и, возможно, к ее структуре. Этими характеристиками, используемыми наиболее часто, являются запас по усилению, запас по фазе, показатель колебательности, выходной импеданс, время нарастания и время установления процессов, максимальный выброс или перерегулирование. Для удовлетворения заданных требова-

ний обычно производится регулировка усиления и коррекция частотных и временных характеристик системы.

Второй подход, часто называемый аналитическим, основан на использовании в качестве критериев качества системы интегральной квадратичной и среднеквадратичной ошибки. Эти критерии качества были впервые предложены Винером и Холлом. Проектирование сводится к расчету компенсирующего фильтра при использовании классических вариационных методов для минимизации ошибок. Этот подход может быть применен к линейным системам как в случае детерминированных, так и в случае стохастических входных воздействий, а также и к линейным дискретным системам [136].

В годы второй мировой войны и в последующее десятилетие проектирование систем автоматического управления проводилось

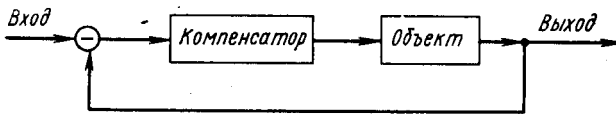


Рис. 1.2—1. Структурная схема системы с обратной связью

главным образом при помощи первых двух подходов. Они глубоко укоренились в инженерной практике и могут быть названы классическими. Структурная схема типичной классической системы с обратной связью, включающей управляемый объект и компенсирующий фильтр, показана на рис. 1.2—1.

Можно спроектировать много систем с различными характеристиками, удовлетворяющих исходным требованиям. Структурная схема системы управления в той или иной степени предопределяется заранее и обычно не является оптимальной. В классической системе регулирования управляющее воздействие обычно вырабатывается при помощи сравнения входа с выходом. В системах даже умеренной сложности одной лишь этой операции недостаточно для получения всей информации, необходимой для осуществления оптимального управления. Проектирование многомерных и нестационарных систем при использовании классических методов наталкивается на серьезные трудности и ограничивается. Применение этих методов обычно ограничивается идеализированными и относительно простыми системами с обратной связью. Ниже перечислены этапы проектирования систем при использовании метода последовательных приближений и аналитического метода соответственно [123].

Краткая характеристика метода последовательных приближений

1. Исходные данные:

а) динамика управляемого процесса;

- б) вход и желаемый выход;
- в) внешние возмущения;
- г) допустимая ошибка и запас устойчивости.

2. Процедура расчета:

- а) определение требуемого усиления по допустимой ошибке;
- б) расчет корректирующего фильтра для обеспечения устойчивости;
- в) проведение анализа с целью проверки соответствия полученных характеристик требуемым;
- г) повторение процедуры расчета и переход к усложненной компенсации, если исходные требования не удовлетворяются.

Краткая характеристика аналитического метода

1. Исходные данные:

- а) динамика управляемого процесса;
- б) вход и желаемый выход;
- в) внешние возмущения;
- г) критерии качества;
- д) допустимый разброс параметров системы.

2. Процедура расчета:

- а) установление класса системы в тех случаях, когда структура системы задана, не задана и может быть выбрана свободно, частично задана;
- б) составление аналитического выражения для критерия качества как функции свободных параметров, если структура системы задана; максимизация или минимизация критерия качества путем соответствующей регулировки этих параметров;
- в) расчет по методу спектральной факторизации корректирующего фильтра для максимизации или минимизации критерия качества, если структура системы не задана и может выбираться свободно или задана частично;
- г) проверка соответствия характеристик полученной системы требуемым; если требования удовлетворены, то теоретическое рассмотрение закончено и может быть начата физическая реализация, если — нет, то исходные требования должны быть изменены.

Третий подход к проектированию систем управления, являющийся обобщением второго, получил в последние годы дальнейшее развитие в различных направлениях. Однако, если ограничиться рассмотрением только линейных систем, то можно достаточно просто охарактеризовать последовательные этапы проектирования. Вначале задается или составляется функционал от переменных управления и состояния процесса, накладываются ограничения на эти переменные и затем с помощью одного из методов вариационного исчисления определяется закон управления или управляющая последовательность, доставляющая функционалу максимум или минимум.

Этот подход был впервые использован для проектирования систем управления всего лишь около десяти лет назад и в последние годы завоевал широкую популярность. Этот метод, часто называемый современным, стал основным подходом, используемым при проектировании систем автоматического управления. Основная идея современного подхода заключается в определении закона или стратегии оптимального управления, минимизирующего или максимизирующего некоторую совокупность критериев качества. Закон управления выражает управляющее воздействие в

виде функции координат состояния объекта, что в результате приводит к системе с обратной связью. В относительно простых системах оптимальный закон управления можно реализовать с помощью корректирующего устройства или активного фильтра. В более сложных случаях для этой цели часто применяют цифровые вычислительные машины, дающие большие преимущества в формировании оптимальных законов управления. Используя информацию о состоянии процесса, цифровая машина производит вычисления по некоторой программе и выдает последовательность чисел, которые выражают стратегию оптимального управления. Для динамической оптимизации системы при использовании современного подхода необходимо передавать по каналу обратной связи всю информацию, характеризующую динамику процесса.

Современный подход к проектированию систем управления обладает многими преимуществами по сравнению с классическим. Он упрощает проектирование нестационарных и многомерных систем и позволяет установить структуру оптимальной системы.

Современные методы синтеза естественным образом учитывают произвольные начальные условия. Современный подход облегчает решение большого класса более реалистических задач управления, которые с большим трудом решаются классическими методами. Трудности заключаются в том, что их решение должно одновременно удовлетворять многим условиям и ограничениям, поэтому проектирование таких систем классическими методами может оказаться исключительно сложным. Современный подход позволяет проектировщику ограничиться аналитическим решением задачи или разработкой вычислительного алгоритма решения и поручить вычислительной машине выполнение всей тяжелой и утомительной работы, связанной с проведением расчетов, которые обычно могут быть систематизированы и выполнены по определенной программе.

Появление электронных цифровых вычислительных машин оказало большое влияние на технику инженерного анализа и проектирования систем управления. Новые аналитические методы проектирования оцениваются в настоящее время не только изяществом математического решения, но и возможностью формализации вычислений. Несмотря на многие преимущества нового подхода и интерес к исследованиям в рассматриваемой области, до настоящего времени практически не было написано ни одного учебника по современной теории управления, хотя имеется уже более сотни учебников и монографий по классической теории регулирования. В связи с этим ощущалась острая потребность в книге, посвященной современной теории управления. Чтобы удовлетворить этой потребности, и была написана настоящая книга

1.3. ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Проблема оптимального управления в настоящее время занимает центральное место в теоретических исследованиях по созданию систем управления. В случае типовой системы управления можно выделить следующие четыре группы переменных.

1. *Независимые переменные*, которые являются управляющими переменными в процессе управления или регулирования; изменение этих переменных осуществляется в соответствии с законом управления, реализуемым в системе.

2. *Зависимые переменные*, которые используются для измерения и описания состояния процесса в любой момент времени.

3. *Вторичные переменные*, которые используются для индикации и измерения качества функционирования системы управления.

4. *Возмущающие воздействия*, которые являются для системы неконтролируемыми внешними переменными.

Общая проблема оптимального управления заключается в отыскании способа сохранения вторичных переменных в окрестности их оптимальных значений, несмотря на наличие флуктуаций, вызываемых возмущающими воздействиями и изменением параметров системы. Вторичные переменные используются для описания критерия качества системы управления. Проблема оптимального управления сводится, таким образом, к минимизации или максимизации критерия качества.

Физическую систему n -го порядка в любой момент времени можно описать с помощью конечного множества величин $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Эти переменные величины называют переменными состояниями системы и при записи в векторной форме они представляют собой координаты вектора $x(t)$ состояния системы. Смысловое содержание этих понятий разъясняется в гл. 3. Чтобы связать последовательные состояния системы во времени, сделаем простое и полезное допущение, заключающееся в том, что производная вектора состояния $\frac{dx}{dt}$ зависит только от текущего состояния системы и не зависит от предыстории состояний. Это простое допущение позволяет описать процесс посредством векторно-матричного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = \frac{d x(t)}{dt} = f[x(t); m(t), t] \quad (1.3-1)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$. В уравнении (1.3-1) $m(t)$ обозначает вектор управления, f — векторную функцию переменных состояния, управляющих воздействий, времени t , возможно, возмущающих воздействий.

В каждый момент времени вектор управления \mathbf{m} должен удовлетворять условию

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}) \leq 0, \quad (1.3-2)$$

описывающему ограничения, наложенные на систему управления. Функция \mathbf{g} есть заданная векторная функция управляющих воздействий.

Задачу проектирования оптимальной системы можно сформулировать следующим образом: задан объект управления или процесс; найти закон управления или управляющую последовательность воздействий, доставляющих максимум или минимум заданной совокупности критериев качества системы. Оптимальный закон управления должен формироваться оптимальным регулятором или цифровой вычислительной машиной, являющейся составной частью системы управления.

В некоторых случаях все координаты состояния системы допускают непосредственное измерение и наблюдение. Для линейных систем, обладающих таким свойством, формирование оптимального закона управления как функции координат состояния может производиться даже при наличии шумов измерения. Однако в инженерной практике очень часто не все координаты состояния системы допускают непосредственное наблюдение и измерение. В этих случаях оптимальный закон управления определяется как функция наилучших оценок координат состояния, определяемых по измерениям выходных сигналов системы. Следовательно, проблема оптимального управления в более общей постановке включает в себя как проблему оптимальной оценки, так и проблему оптимального управления.

Для иллюстрации рассмотрим проблему автоматического управления полетом самолета [54]. Уравнения движения самолета можно получить из рассмотрения аэродинамических сил и моментов, действующих на самолет, основных законов механики. Результирующие уравнения далее линеаризуются в предположении малости отклонений самолета от заданного режима установившегося движения.

Схема действующих на самолет сил и моментов и геометрия углов показаны на рис. 1.3—1.

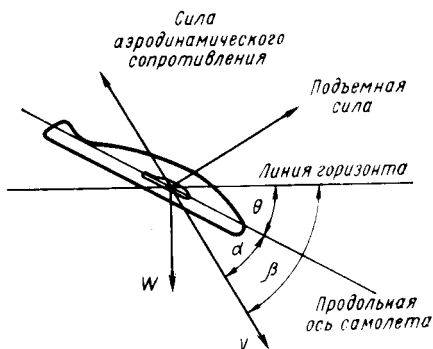


Рис. 1.3—1. Распределение сил и моментов при полете самолета

При рассмотрении системы посадки самолета можно допустить, что угол наклона глissады планирования β является очень малым и продольное движение самолета целиком определяется отклонением руля высоты $\delta(t)$; допустим также, что рукоятка сектора газа в течение всего времени посадки удерживается в положении, обеспечивающем постоянство воздушной скорости V . При этих допущениях линеаризованное уравнение короткопериодических колебаний в продольном движении самолета принимает вид

$$\frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + 2\zeta\omega_0 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{d\theta(t)}{dt} = KT_0\omega_0^2 \frac{d\delta(t)}{dt} + K\omega_0^2\delta(t), \quad (1.3-3)$$

где ζ — коэффициент демпфирования короткопериодических колебаний;

ω_0 — резонансная частота колебаний;

K — коэффициент усиления короткопериодических колебаний;

T_0 — траекторная постоянная времени.

Величины ζ , ω_0 , K и T_0 являются параметрами, зависящими от конструкции самолета. Угол тангажа θ и высота h связаны дифференциальным уравнением

$$T_0 \frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{dh(t)}{dt} = V\theta(t), \quad (1.3-4)$$

где начальные условия предполагаются нулевыми и воздушная скорость самолета V постоянной.

Исключая θ из уравнений (1.3—3) и (1.3—4), получаем

$$\frac{d^4h(t)}{dt^4} + 2\zeta\omega_0 \frac{d^3h(t)}{dt^3} + \omega_0^2 \frac{d^2h(t)}{dt^2} = KV\omega_0^2\delta(t). \quad (1.3-5)$$

Полагая

$$x_1 = h, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \frac{dh}{dt}, \\ x_3 = \dot{x}_2 = \frac{d^2h}{dt^2}, \quad x_4 = \dot{x}_3 = \frac{d^3h}{dt^3}$$

и $m = \delta$,

уравнение (1.3—5) запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ x_4 &= -\omega_0^2 x_3 - 2\zeta\omega_0 x_4 + K_1 m, \end{aligned} \quad (1.3-6)$$

где переменные x_i могут рассматриваться в качестве координат состояния самолета. Как будет показано в гл. 3, если ввести в рассмотрение вектор

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (1.3-7)$$

то система уравнений (1.3—6) может быть записана в виде одного векторно-матричного уравнения типа (1.3—1).

При проектировании системы посадки самолета необходимо оценить возможность наблюдения и измерения координат состояния. Высота h может быть измерена радиовысотомером, скорость снижения dh/dt — с помощью барометрического датчика. Однако величины d^2h/dt^2 и d^3h/dt^3 не поддаются непосредственному измерению. В гл. 3 показано, что эту трудность можно обойти, выбрав в качестве координат состояния другие переменные.

Проектирование системы посадки самолета должно производиться с учетом ряда ограничений, накладываемых конструкцией самолета и требованиями безопасности посадки. Например, угол тангажа самолета θ в желаемый момент $t = T_f$ касания посадочной полосы из практических соображений должен находиться в интервале $0-10^\circ$; в процессе выравнивания отклонение руля высоты $\delta(t)$ не должно превышать предельных значений; при посадке самолета необходимо предоставить максимальные удобства пассажирам.

Для современной теории управления при описании системы характерно использование переменных состояния и применение методов проектирования, оптимизирующих ее движение в пространстве возможных состояний. В общей постановке проектирование оптимальной системы является вариационной задачей [142]. Существует много различных вариационных методов минимизации или максимизации функционала в функциональном пространстве. В их число входят классические методы вариационного исчисления, а также численные методы и различные способы последовательных приближений, использующие эксперимент или моделирование процессов. Наиболее часто при проектировании систем управления используются следующие методы:

1. Вариационное исчисление.
2. Принцип максимума.
3. Динамическое программирование.

Во всех случаях конечной целью проектирования является определение оптимального закона управления или управляющей последовательности воздействий, доставляющих максимум или минимум заданному функционалу, характеризующему качество системы. Интересно отметить, что общим для всех трех методов

является использование вариационных принципов. Каждый из этих методов имеет определенную связь с некоторыми хорошо известными положениями классической механики: первый метод имеет непосредственное отношение к уравнениям Эйлера — Лагранжа, второй — к принципу Гамильтона, третий — к уравнениям Гамильтона — Якоби. Принцип максимума использует в той или иной форме прямые методы вариационного исчисления, в то время как динамическое программирование, также следуя вариационным принципам, использует рекуррентные соотношения или алгоритм дифференциальных уравнений в частных производных. Настоящая книга посвящена анализу и синтезу систем управления методами пространства состояний и проектированию оптимальных систем на основе классических методов вариационного исчисления, принципа максимума и динамического программирования.

1.4. ОБЗОР КЛАССИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрению современных методов проектирования систем управления предпослел краткий обзор классических методов проектирования многомерных систем. В этих системах имеется r управляющих воздействий и n выходных переменных, где $r > 1$ и $n > 1$. Входные и выходные переменные системы могут представлять различные физические величины, например напряжение, ток, скорость, перемещение, температуру, давление. Химические процессы, очистка нефти, прокатка стали, управляемые снаряды, космические корабли — это далеко не полный перечень примеров многомерных процессов и систем, широко используемых в промышленности и технике. Системы управления, применяемые на практике, в большинстве случаев являются фактически многомерными, однако в большинстве учебников системы управления рассматриваются как одномерные, в предположении, что в процессе управления изменяется только одна выходная переменная, а остальные переменные не изменяются.

В нижеследующем рассмотрении предполагается, что управляющие воздействия и выходные переменные связаны линейными соотношениями. Линейный многомерный процесс можно описать с помощью передаточной матрицы (рис. 1.4—1). Изменение одного управляющего воздействия вызывает изменение практически всех выходных переменных. В некоторых случаях, например при регулировании паросиловых установок тепловых электростанций, желательно управлять процессами таким образом, чтобы изменение какой-либо одной задаваемой входной величины приводило к изменениям только одного определенного регулируемого выхода и каждая выходная переменная допускала регулирование

только по соответствующему входу. Многомерные системы, обладающие таким свойством, называют несвязанными [139].

На рис. 1.4—2 показана схема многомерной системы с обратной связью, где используются следующие обозначения: c — n -мерный вектор выходных переменных; m — r -мерный вектор управляющих воздействий; r — q -мерный вектор входных переменных; e — q -мерный вектор ошибок; G — передаточная матрица процесса; D — передаточная матрица регулятора, которая является неизвестной и подлежит определению.

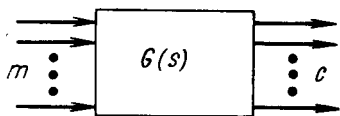


Рис. 1.4—1. Блок-схема многомерного процесса

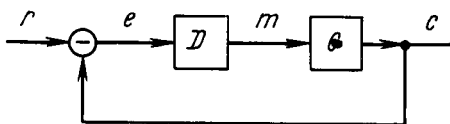


Рис. 1.4—2. Схема многомерной системы с обратной связью

Для упрощения выкладок предположим, что $r = q = n$. Тогда передаточная матрица процесса будет иметь вид

$$G = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1k}(s) & \dots & G_{1n}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2k}(s) & \dots & G_{2n}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{j1}(s) & G_{j2}(s) & \dots & G_{jk}(s) & \dots & G_{jn}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & \dots & G_{nk}(s) & \dots & G_{nn}(s) \end{bmatrix}, \quad (1.4-1)$$

где $G_{jk}(s)$ обозначает передаточную функцию от m_j до c_k , т. е. для j -й компоненты вектора m и k -й компоненты вектора c . Передаточная матрица регулятора имеет вид

$$D = \begin{bmatrix} D_{11}(s) & D_{12}(s) & \dots & D_{1k}(s) & \dots & D_{1n}(s) \\ D_{21}(s) & D_{22}(s) & \dots & D_{2k}(s) & \dots & D_{2n}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{j1}(s) & D_{j2}(s) & \dots & D_{jk}(s) & \dots & D_{jn}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{n1}(s) & D_{n2}(s) & \dots & D_{nk}(s) & \dots & D_{nn}(s) \end{bmatrix}, \quad (1.4-2)$$

где $D_{jk}(s)$ обозначает передаточную функцию от e_j до m_k , т. е. для j -й компоненты вектора e и k -й компоненты вектора m .

Из рассмотрения рис. 1.4—2 можно получить следующие соотношения:

$$C = GDE; \quad (1.4-3)$$

$$C = [I + GD]^{-1} GDR, \quad (1.4-4)$$

где \mathbf{R} , \mathbf{E} , \mathbf{C} — преобразования Лапласа для векторов \mathbf{r} , \mathbf{e} и \mathbf{c} соответственно. Для обеспечения развязки выходов многомерной системы необходимо, чтобы матрица \mathbf{GD} имела диагональную форму, т. е. необходимо сделать равными нулю все элементы этой матрицы, не лежащие на главной диагонали. Это ведет к следующим условиям:

$$\begin{aligned} [P_{kk}(s)] \{D_{jk}(s)\} &= -D_{kk}(s) \{G_{jk}(s)\}, \\ j &\neq k; \quad k = 1, 2, 3, \dots, n; \\ j &= 1, 2, 3, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.4-5)$$

где элемент P_{kk} матрицы $[P_{hk}]$ находится как минор определителя $|\mathbf{G}|$, соответствующий элементу $G_{kk}(s)$, а $\{D_{jk}(s)\}$ и $\{G_{jk}(s)\}$ являются матрицами-столбцами вида

$$\{D_{jk}(s)\} = \begin{bmatrix} D_{1k}(s) \\ D_{2k}(s) \\ D_{3k}(s) \\ \vdots \\ D_{nk}(s) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \{G_{jk}(s)\} = \begin{bmatrix} G_{1k}(s) \\ G_{2k}(s) \\ G_{3k}(s) \\ \vdots \\ G_{nk}(s) \end{bmatrix}.$$

Определим матрицу-столбец $\{F_{jk}(s)\}$ выражением

$$\{F_{jk}(s)\} = -[P_{kk}(s)]^{-1} \{G_{jk}(s)\}, \quad j \neq k, \quad (1.4-6)$$

и уравнение (1.4-5) приведем к виду

$$\{D_{jk}(s)\} = F_{jk}(s) \{D_{kk}(s)\}, \quad j \neq k. \quad (1.4-7)$$

Благодаря диагональной форме матрицы \mathbf{GD} многомерную систему можно представить как состоящую из n одномерных подсистем. В рассматриваемом случае развязанного управления матрицу \mathbf{GD} можно записать в виде

$$\mathbf{GD} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n D_{k1}(s) G_{1k}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^n D_{k2}(s) G_{2k}(s) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=1}^n D_{kn}(s) G_{nk}(s) \end{bmatrix}, \quad (1.4-8)$$

откуда можно видеть, что каждая подсистема имеет в прямой цепи n каналов, как иллюстрируется на рис. 1.4-3. Проектирование многомерной системы сводится, таким образом, к расчету n подсистем, для чего необходимо определить передаточные

функции $D_{jk}(s)$ в n параллельных каналах. Следует заметить, что расчет подсистем значительно упрощается при использовании соотношения (1.4—7). Применение этого соотношения позволяет от схемы рис. 1.4—3 перейти к схеме рис. 1.4—4, в которой передаточные функции $G_{ik}(s)$ являются заданными, а функции

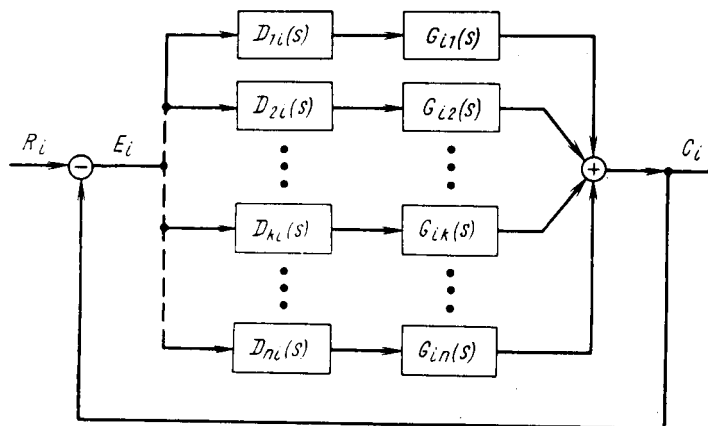


Рис. 1.4—3. Схема подсистемы

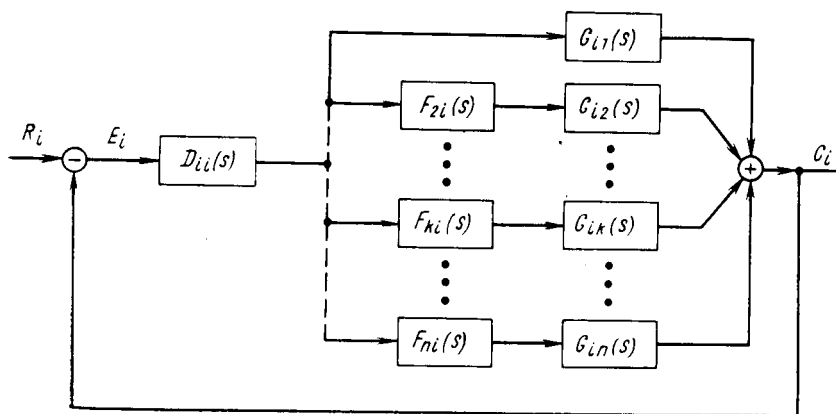


Рис. 1.4—4. Модифицированная схема подсистемы

$F_{ki}(s)$ могут быть легко найдены из соотношения (1.4—6). Поэтому единственной неизвестной передаточной функцией в подсистеме является $D_{ii}(s)$, и она может быть определена классическими методами. Как только все $D_{ii}(s)$ найдены, другие элементы передаточной матрицы регулятора \mathbf{D} могут быть определены из соотношения (1.4—7). Хотя рассмотренная процедура проектирования системы кажется простой, однако на самом деле опреде-

ление передаточной матрицы регулятора является очень трудоемким процессом. Если же нежелательно производить развязку выходов системы, то проектирование многомерной системы может оказаться исключительно сложной задачей. Как будет видно из дальнейшего изложения, современные методы могут значительно облегчить проектирование многомерных систем управления.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

В настоящей главе кратко рассматриваются некоторые важные математические понятия и методы, на которых базируется современная теория управления. Математические методы находят широкое применение в современной практике инженерного анализа и синтеза систем управления. В связи с этим в настоящее время во многих технических учебных заведениях введены для студентов в качестве обязательных курсы по преобразованиям Фурье, Лапласа, z -преобразованию, а также по применениям этих преобразований. Эти курсы безусловно необходимы для того, чтобы студент овладел анализом и синтезом систем управления в обычной классической постановке, но их все же недостаточно, чтобы подготовить студента к решению современных проблем управления. Для этого, а также для дальнейшего развития теории управления желательно и даже необходимо владеть математическим аппаратом, базирующимся на теории множеств, векторных пространствах, проблеме собственных значений и обобщенных координатах. Наше изложение этих вопросов преследует цель уменьшить хотя бы частично разрыв между существующим и требуемым в настоящее время уровнем преподаваемых знаний, возникший в некоторых учебных заведениях в связи с быстрым развитием теории управления и задержкой модернизации учебных программ. Мы надеемся также сообщить инженеру, имеющему дело с вычислительной техникой, управлением и теорией сложных систем, сведения о некоторых математических методах, которые могут оказаться полезными в его практической деятельности. Эта глава служит введением в такие разделы, как теория множеств, конечномерные векторные пространства, векторно-матричные дифференциальные уравнения, матрицы и квадратичные формы, теория движения в обобщенных координатах. Глубокое понимание этих важных разделов математики и механики является необходимым условием эффективного использования излагаемых математических приемов и методов решения. Поэтому при формулировке теорем и окончательных результатов большое внимание уделялось простоте и доступности изложения, геомет-

рической и физической интерпретации, техническим применением. Для более полного изучения затрагиваемых вопросов в классической постановке читатель может воспользоваться соответствующими учебниками математики и механики.

2.1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ

Понятие множеств является одним из тех фундаментальных понятий математики, которому трудно дать четкое определение, используя более элементарные понятия и не прибегая к интуиции. *Множеством* называют совокупность «хорошо» определенных объектов¹. Это понятие, обладающее большой общностью, играет чрезвычайно важную роль в технических приложениях, поскольку все инженерные принципы могут быть развиты исходя из этого представления. Множество X обычно записывают в виде

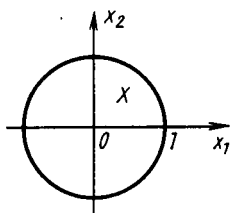


Рис. 2.1—1. Множество точек $X = \{[x_1, x_2] : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

$$X = \{x_k\}, \quad (2.1-1)$$

где x_k представляет элементы множества. Запись

$$x_k \in X \quad (2.1-2)$$

обычно используется для обозначения того, что x_k является элементом X ; запись

$$y_k \notin X \quad (2.1-3)$$

означает, что y_k не является элементом X . Множество X удобно записывать в виде

$$X = \{x : P(x)\}, \quad (2.1-4)$$

показывающем, что X образуется из совокупности точек x , каждая из которых обладает свойством $P(x)$. Например, запись

$$X = \{[x_1, x_2] : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \quad (2.1-5)$$

обозначает множество точек, лежащих внутри и на самой окружности единичного радиуса с центром в начале координат, как показано на рис. 2.1—1. Множества, элементы которых суть точки в конечномерном векторном пространстве, называются *точечными множествами*. Ниже рассматриваются некоторые основные свойства и операции над множествами. Более сложные понятия теории множеств будут рассмотрены позднее.

¹ Это определение множества близко к определению Кантора, заранее исключающему из рассмотрения множества, элементы которых «плохо» определены, т. е. нельзя, например, говорить о множестве идей (в прошлом или будущем). (Прим. ред.).

Основные свойства и операции

Множество, которое состоит из некоторых элементов другого множества, называется *подмножеством*. Например, множество Y является подмножеством множества X , если все элементы Y принадлежат X . Однако не обязательно, чтобы все элементы X принадлежали подмножеству Y . Обозначение

$$Y \subset X \text{ или } X \supset Y \quad (2.1-6)$$

обычно используется для указания того, что Y есть подмножество множества X . Множества X и Y называются *равными*, если они содержат одни и те же элементы, т. е. если каждый элемент X является также элементом Y , и наоборот.

Объединение двух множеств X и Y есть множество

$$Z = X \cup Y, \quad (2.1-7)$$

которое содержит все элементы X , или Y , или обоих множеств.

Пересечение двух множеств X и Y есть множество

$$Z = X \cap Y, \quad (2.1-8)$$

которое содержит все элементы, принадлежащие одновременно множествам X и Y , т. е. $z_k \in X$ и $z_k \in Y$.

Множество точек

$$X = \{x: x = \alpha x_2 + (1 - \alpha)x_1, -\infty < \alpha < \infty\} \quad (2.1-9)$$

называется *линией*, проходящей через точки x_1 и x_2 в евклидовом пространстве E^n , где $x_1 \neq x_2$.

Множество точек

$$X = \{x: x = \alpha x_2 + (1 - \alpha)x_1, 0 \leq \alpha \leq 1\} \quad (2.1-10)$$

называют *отрезком*, соединяющим точки x_1 и x_2 в E^n .

Множество точек

$$X = \{x: a'x = c\}, \quad (2.1-11)$$

где $a \neq 0$ — заданный n -мерный вектор столбец; штрихом обозначена операция транспонирования; c — некоторая скалярная величина, называется *гиперплоскостью* в E^n . Уравнение гиперплоскости имеет вид

$$a'x = c. \quad (2.1-12)$$

Заметим, что вектор a направлен по нормали к гиперплоскости. Из уравнения (2.1-12) можно видеть, что гиперплоскость проходит через начало координат тогда и только тогда, когда $c = 0$. В случае двумерного пространства

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ и } a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2.1-13)$$

и поэтому

$$a'x = a_1x_1 + a_2x_2 = c, \quad (2.1-14)$$

что является уравнением прямой линии. В случае трехмерного пространства.

$$a'x = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c, \quad (2.1-15)$$

что является уравнением плоскости.

Гиперплоскость $a'x = c$ в евклидовом пространстве E^n разделяет все E^n на три взаимно не пересекающиеся и содержащие все точки этого пространства множества:

$$(1) X_1 = \{x: a'x < c\};$$

$$(2) X_2 = \{x: a'x = c\};$$

$$(3) X_3 = \{x: a'x > c\}.$$

Первое и третье множества образуют открытые полупространства. Множества

$$X_4 = \{x: a'x \leq c\} \text{ и } X_5 = \{x: a'x \geq c\}$$

образуют закрытые полупространства. Отметим, что

$$X_2 = X_4 \cap X_5.$$

В евклидовом пространстве E^n необходимо задать n точек, чтобы определить гиперплоскость. Однако не всегда произвольное множество n точек x_1, x_2, \dots, x_n определяет единственную гиперплоскость. Это множество точек определяет единственную гиперплоскость только тогда, когда они могут быть пронумерованы таким образом, что векторы $x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n$ являются линейно независимыми. Любая точка x , принадлежащая гиперплоскости, обладает свойством, состоящим в том, что вектор $x - x_n$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n$.

Обозначим

$$n = \frac{a}{|a|} \text{ и } \delta = \frac{c}{|a|}, \quad (2.1-16)$$

где $|a|$ — модуль вектора a , и уравнение (2.1-12) запишем в виде

$$n'x = \delta, \quad (2.1-17)$$

где $|n| = 1$. Вектор n называется *единичной нормалью* к гиперплоскости. В евклидовом пространстве E^n расстояние гиперплоскости $a'x = c$ от начала координат равно

$$|\delta| = \frac{|c|}{|a|}. \quad (2.1-18)$$

Две гиперплоскости в евклидовом пространстве параллельны, если их нормали совпадают, т. е. гиперплоскости $a_1x = c_1$ и $a_2'x = c_2$ параллельны, если $a_1 = \alpha a_2$, $\alpha \neq 0$.

Множество точек

$$X = \{x : |x - a| = r\} \quad (2.1-19)$$

называется гиперсферой в евклидовом пространстве E^n с центром в точке a и радиусом $r > 0$. Уравнение гиперсферы в E^n имеет вид

$$|x - a| = r, \quad (2.1-20a)$$

или

$$\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 = r^2. \quad (2.1-20б)$$

В пространстве E^2 уравнение (2.1-20) определяет окружность с центром в точке (a_1, a_2) и в E^3 определяет сферу с центром в точке (a_1, a_2, a_3) .

Точку x называют *внутренней точкой* множества X , если любая окрестность x содержит только точки множества X . Если каждая ε -окрестность точки x содержит точки, принадлежащие множеству X , и точки, не принадлежащие этому множеству, то точка x называется *граничной точкой* множества X . Множество X , которое содержит все свои граничные точки, называется *замкнутым множеством*. Гиперплоскости являются замкнутыми множествами. Замкнутое полупространство является также замкнутым множеством. Множество X , которое содержит только внутренние точки, называют *открытым множеством*. Если любые две точки открытого множества X могут быть соединены некоторой линией, все точки которой принадлежат этому множеству, то X называют *связным множеством*.

Множество X называют *ограниченным сверху*, если найдется вектор c с ограниченным числом компонент, такой, что для любого $x \in X$ имеет место $|x| \leq |c|$. Множество X называется *ограниченным снизу*, если для любого $x \in X$ найдется вектор c с ограниченным числом компонент, такой, что $|x| \geq |c|$. Множество X называется *строго ограниченным*, если найдется положительное число c , такое, что $|x| < c$ для всех $x \in X$.

Используя приведенные выше определения, введем теперь понятия выпуклого множества, выпуклой оболочки и выпуклого конуса.

Выпуклые множества

Множество X называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками x_1 и x_2 оно содержит также все точки соединяю-

шего их отрезка. Это означает, что если $x_1, x_2 \in X$, то любая точка множества

$$x = \alpha x_2 + (1 - \alpha)x_1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2.1-21)$$

также принадлежит множеству X . Гиперплоскости и полупространства являются выпуклыми множествами. Пересечение конечного числа гиперплоскостей или полупространств или тех и других является также выпуклым множеством. Пересечение конечного числа гиперплоскостей или замкнутых полупространств или тех и других является замкнутым выпуклым множеством. Множество решений системы m линейных уравнений с n неизвестными является также замкнутым выпуклым множеством. Следует отметить, что выпуклое множество является связным множеством. Например, множество

$$X = \{[x_1, x_2] : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

является связным.

Точка x выпуклого множества X называется *предельной точкой*, если в этом множестве не существует двух таких отдельных точек x_1, x_2 , что

$$x = \alpha x_2 + (1 - \alpha)x_1, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.1-22)$$

Из этого определения следует, что предельная точка не может лежать между какими-нибудь двумя точками множества. Другими словами, она не может принадлежать отрезку, соединяющему две точки множества. Предельная точка является граничной точкой множества, однако граничные точки не обязательно являются предельными точками.

Точка x называется *выпуклой комбинацией* конечного числа точек x_1, x_2, \dots, x_m , если она может быть представлена в виде

$$x = \sum_{k=1}^m \beta_k x_k, \quad \beta_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m \beta_k = 1. \quad (2.1-23)$$

Из условия (2.1-23) следует, что выпуклую комбинацию m точек можно интерпретировать как центр масс этих точек, если каждую из них наделить некоторой массой — частью общей массы. Множество всех выпуклых комбинаций конечного числа точек x_1, x_2, \dots, x_m можно записать в виде

$$X = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^m \beta_k x_k, \text{ все } \beta_k \geq 0, \sum_{k=1}^m \beta_k = 1 \right\}, \quad (2.1-24)$$

представляющем выпуклое множество.

К выпуклым множествам, в частности, относятся выпуклая оболочка, выпуклый многогранник, выпуклый конус, выпуклый

многогранный конус. Эти классы выпуклых множеств находят применение при решении многих инженерных задач.

Выпуклая оболочка множества Y есть наименьшее выпуклое множество X , содержащее Y . Рассмотрим множество точек

$$Y = \{[x_1, x_2] : x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

представляющих собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Тогда, согласно данному выше определению, выпуклой оболочкой множества Y будет выпуклое множество

$$X = \{[x_1, x_2] : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

состоящее из всех точек окружности единичного радиуса и ее внутренней области. Заметим также, что выпуклой оболочкой двух различных точек x_1 и x_2 является множество всех выпуклых комбинаций этих точек, т. е.

$$X = \{x : x = \alpha x_2 + (1 - \alpha)x_1, \text{ все } \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1\}. \quad (2.1-25)$$

Так как пересечение всех выпуклых множеств, содержащих Y , является наименьшим выпуклым множеством, заключающим Y , то выпуклую оболочку множества Y можно определить более строго как пересечение всех выпуклых множеств, которые содержат множество Y . Можно показать, что выпуклая оболочка конечного числа точек x_1, x_2, \dots, x_m есть замкнутое множество всех возможных выпуклых комбинаций точек x_1, x_2, \dots, x_m , определяемое выражением (2.1—24).

Выпуклый многогранник определяется как выпуклая оболочка конечного числа порождающих его точек. Если m — число этих точек, то выпуклый многогранник, как множество всех возможных выпуклых комбинаций m точек, будет иметь не более m предельных точек. Любая точка x выпуклого многогранника может быть представлена в виде выпуклой комбинации этих точек, т. е.

$$x = \sum_{k=1}^m \beta_k x_k^*, \quad \beta_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m \beta_k = 1, \quad (2.1-26)$$

где через x_k^* обозначены предельные точки многогранника. Однако следует заметить, что не всякое выпуклое множество обладает свойством, согласно которому любую его точку можно представить в виде выпуклой комбинации его предельных точек.

Симплексом называют выпуклый многогранник в том специальном случае, когда он порождается любым множеством $n + 1$ точек из E^n , не лежащих на гиперплоскости в E^n . Так как по определению эти точки не лежат на гиперплоскости в E^n , то из них n точек должны быть линейно независимы. Множество точек на-

зывают линейно независимым, если ни одна из точек этого множества не может быть записана в виде линейной комбинации остальных. Это означает, что множество точек x_1, x_2, \dots, x_n из E^n будет линейно независимым, если соотношение

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0 \quad (2.1-27)$$

выполняется только тогда, когда $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Треугольник вместе со своей внутренней областью образует симплекс в случае двумерного пространства.

Если точка x принадлежит множеству X и также βx для всех $\beta \geq 0$, то говорят, что множество $X = \{x\}$ порождает конус C . Это множество точек, образующих конус, записывается в виде

$$C = \{y: y = \beta x, \text{ все } \beta \geq 0 \text{ и все } x \in X\}. \quad (2.1-28)$$

Для иллюстрации на рис. 2.1—2 показан трехмерный конус, порожденный множеством точек:

$$X = \{[x_1, x_2, x_3]: x_3^2 + x_1^2 \leq 1, x_2 = c\}.$$

Очевидно, что конус не является строго ограниченным множеством. Размерность конуса C определяется максимальным числом линейно независимых векторов в конусе C . Конус содержит в качестве элементов точку 0 , которая называется *вершиной конуса*. Негативным конусом C^- по отношению к конусу $C = \{y\}$ называют множество точек

$$C^- = \{-y\}. \quad (2.1-29)$$

Сумма двух конусов $C_1 = \{a\}$ и $C_2 = \{b\}$ обозначается $C_1 + C_2$ и определяется как множество всех точек $a + b$, таких, что

$$a \in C_1 \text{ и } b \in C_2. \quad (2.1-30)$$

Можно показать, что наименьшим подпространством, содержащим выпуклый конус C , является $C + C^-$. *Полярным конусом* C^+ по отношению к конусу $C = \{a\}$ называют множество точек $\{b\}$, таких, что $b'a \geq 0$ для каждого b в этом множестве и для всех $a \in C$. В случае двумерного пространства полярный конус C^+ относительно конуса C формируется с помощью полупрямых, перпендикулярных образующим конуса в начале координат, как показано на рис. 2.1—3.

Конус называют *выпуклым*, если он порождается выпуклым множеством. Уточняя это определение, заметим, что множество X порождает выпуклый конус только тогда, когда: 1) сумма $x_1 + x_2$ принадлежит множеству X , если только $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$; 2) βx принадлежит X для любого $\beta \geq 0$, когда $x \in X$. Сумма двух выпуклых конусов является также выпуклым конусом.

Запись (2.1—28) для конуса позволяет определить *полупрямую* или *луч* как множество

$$L = \{y : y = \beta p, \text{ все } \beta \geq 0\}, \quad (2.1-31)$$

где p — единственная заданная точка, $p \neq 0$. Полярным конусом по отношению к лучу является замкнутое полупространство, содержащее точку 0 на своей ограничивающей гиперплоскости, представляющее собой множество

$$H = \{\mu : p' \mu \geq 0\}. \quad (2.1-32)$$

Таким образом, полярный конус H относительно луча L содержит все точки μ такие, что $\mu' y \geq 0$ для всех $y \in L$.

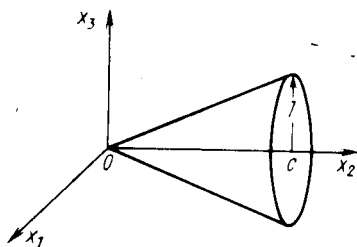


Рис. 2.1—2. Конус, образованный множеством точек $X = \{x_1, x_2, x_3\} : x_3^2 + x_1^2 \leq x_2^2 = c\}$

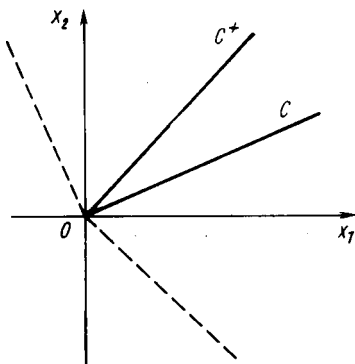


Рис. 2.1—3. Полярный конус

Выпуклым многогранным конусом называется сумма конечного числа полупрямых:

$$C = \sum_{k=1}^n L_k. \quad (2.1-33)$$

Если точка p_k порождает луч L_k , множество точек

$$y = \sum_{k=1}^n \beta_k p_k \quad (\text{все } \beta_k \geq 0)$$

образует выпуклый многогранный конус C . Конус, порожденный выпуклым многогранником, представляет собой выпуклый многогранный конус. Если A — матрица размера $m \times n$,

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

где a_k — m -мерные векторы-столбцы, то множество точек

$$y = Ax = \sum_{k=1}^n x_k a_k \quad (\text{все } x \geq 0)$$

образует выпуклый многогранный конус в E^m . Столбцы a_k матрицы A порождают полупрямые, сумма которых составляет многогранный конус.

Конус называют *ортогональным* к конусу C , если он состоит из всех векторов x из E^n , каждый из которых ортогонален некоторому вектору $y \in C$. Ортогональный конус, который принято обозначать C^\perp , определяется отсюда как множество

$$C^\perp \{x: x'y = 0, \text{ все } y \in C\}. \quad (2.1-34)$$

Конусом, ортогональным к лучу, является гиперплоскость; ее часто обозначают буквой P . Легко показать, что конусом, ортогональным к лучу, порождаемому заданной точкой $p \neq 0$, является гиперплоскость, проходящая через начало координат и представляющая собой множество

$$P = \{x: p'x = 0\}. \quad (2.1-35)$$

2.2. КОНЕЧНОМЕРНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Понятие вектора часто используется во многих отраслях математики, в физике и технических науках. В элементарной физике и технике векторы применяются для описания физических величин, характеризующихся одновременно модулем и направлением. Типичными примерами таких величин являются сила, момент силы, скорость и ускорение. Принято, обычно, обозначать векторы буквами, напечатанными полужирным шрифтом. Заметим, что вместо того, чтобы характеризовать вектор модулем и направлением, понимаемыми в самом обычном смысле, привязываясь к некоторой системе координат, одинаково удовлетворительное описание вектора можно получить, отмечая лишь его конечную точку. Для вектора x трехмерного пространства можно, например, написать

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad (2.2-1)$$

подразумевая под x вектор, выходящий из начала координат с направлением в точку с координатами (x_1, x_2, x_3) в пространстве E^n . Числа x_k ($k = 1, 2, 3$) называются компонентами (координатами) вектора относительно координатных осей.

Это соображение о представлении векторов ведет к определению вектора как упорядоченного набора чисел, который не обязательно должен включать самое большее только три компонента. В общем случае вектор может иметь n компонент, которые можно рассматривать как упорядоченный набор n чисел. Таким образом, n -компонентный вектор x есть упорядоченный набор n чисел, который можно записать в виде матрицы-строки размера $1 \times n$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.2-2)$$

или в виде матрицы-столбца размера $n \times 1$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (2.2-3)$$

Вектор, имеющий n компонент, называют также n -мерным вектором. Величины x_k ($k = 1, 2, \dots, n$), которые предполагаются действительными числами, выступают в качестве компонент вектора. Матрицу-столбец можно также записать в виде

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)', \quad (2.2-4)$$

где штрих обозначает транспонированную матрицу. Записи вектора в виде матрицы-строки или матрицы-столбца не имеют существенного отличия. Эти две формы представления являются геометрически эквивалентными, хотя запись в виде столбца используется более часто, чем запись в виде строки. В этой книге для обозначения матриц используются прописные буквы, которые печатаются полужирным шрифтом. Векторы, являющиеся матрицами размера $n \times 1$, обозначаются строчными буквами и также печатаются полужирным шрифтом.

Подобно тому как записи (x_1, x_2) и (x_1, x_2, x_3) были использованы для представления точек в двумерном и соответственно трехмерном пространстве, запись (x_1, x_2, \dots, x_n) может быть использована для представления точки в n -мерном пространстве, где x_k обозначают координаты точки. Пространство с n измерениями называют евклидовым пространством или евклидовым векторным пространством и обозначают символом E^n *.

Прежде чем начать изучение конечномерных векторных пространств, рассмотрим определения некоторых часто используемых основных векторов, опишем основные операции над векторами и их свойства. *Нулевым вектором* называют вектор, все компоненты которого равны нулю. Нулевой вектор обозначается символом $\mathbf{0}$ и записывается в виде

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2-5)$$

Единичный вектор определяется как вектор, у которого одна из компонент равна единице и все остальные компоненты равны

* Если в нем, помимо операций сложения векторов и умножения вектора на число, определено скалярное произведение. (*Прим. ред.*).

нулю. Единичный вектор с неравной нулю k -й компонентой и равными нулю остальными компонентами обычно обозначают символом e_k . Например,

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2-6)$$

Суммирующим вектором называют вектор-строку, все компоненты которой равны 1, т. е.

$$1 = (1, 1, \dots, 1). \quad (2.2-7)$$

Вектор-строка (2.2—7) называется суммирующим вектором, поскольку произведение векторов 1 и $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$, рассматриваемых как матрицы, дает сумму $\sum_{k=1}^n a_k$.

Основные операции над векторами описываются ниже.

1. **Сложение векторов.** Сложение векторов является простейшей операцией, производимой над двумя векторами. Суммой векторов

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

называют вектор

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}. \quad (2.2-8)$$

2. **Вычитание векторов.** Разностью двух векторов x и y называют вектор

$$x - y = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix}, \quad (2.2-9)$$

компонентами которого являются разности одноименных компонент исходных векторов.

3. **Умножение на скаляр.** Умножение вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ на скаляр c определяется соотношением

$$c\mathbf{x} = \mathbf{xc} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}. \quad (2.2-10)$$

4. **Равенство векторов.** Два n -мерных вектора \mathbf{x} и \mathbf{y} считаются равными, если их одноименные компоненты равны; т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, если $x_k = y_k$ для $k = 1, 2, \dots, n$.

5. **Неравенство векторов.** Пусть имеем два n -мерных вектора \mathbf{x} и \mathbf{y} ; тогда $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ означает, что $x_k \geq y_k$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ означает, что $x_k \leq y_k$, $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ означает, что $x_k > y_k$ и $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ означает, что $x_k < y_k$, где $k = 1, 2, \dots, n$.

6. **Скалярное произведение двух векторов.** Скалярное произведение двух векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} является весьма важной числовой функцией двух векторов. Эта функция записывается символически в виде (\mathbf{x}, \mathbf{y}) или $\mathbf{x}'\mathbf{y}$ и дается соотношением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}'\mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k. \quad (2.2-11)$$

Важность этой функции проистекает из возможности рассматривать скалярное произведение (\mathbf{x}, \mathbf{x}) как квадрат или «длину» действительного вектора \mathbf{x} . Эта возможность открывает путь для оценки нечисловых величин. Следующие свойства вытекают непосредственно из определения скалярного произведения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{y}, \mathbf{x}); \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}); \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}); \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} + \mathbf{w}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{x}, \mathbf{w}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{w}); \\ (c\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= c(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \\ (\mathbf{x}, c\mathbf{y}) &= c(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Основные свойства векторов

1. **Ортогональность.** Два вектора \mathbf{x} и \mathbf{y} называют ортогональными, если скалярное произведение их равно нулю, т. е.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (2.2-12)$$

Единичные векторы являются ортогональными, поскольку $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ для $i \neq j$. Это означает, что система единичных векторов образует в n -мерном пространстве ортогональную систему коор-

динат, подобную ортогональным системам координат двумерного и трехмерного пространства.

2. **Норма.** Норма $\|x\|$ n -мерного вектора x определяется выражением

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2-13)$$

3. **Расстояние.** Расстояние $|x - y|$ от вектора x до вектора y дается выражением

$$|x - y| = (x - y, x - y)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2-14)$$

Расстояние между двумя векторами обладает следующими свойствами:

$$|x - y| \geq 0.$$

(за исключением случая, когда $x - y = 0$);

$$|x - y| = |y - x|;$$

$$|x - y| + |y - z| \geq |x - z|.$$

4. **Длина.** Длиной вектора x называют расстояние от начала координат до вектора x . Ее называют также нормой вектора x .

5. **Неравенство Шварца.** Можно показать, что для любых двух n -мерных векторов x и y справедливо соотношение

$$|(x, y)| < |x| |y|, \quad (2.2-15)$$

где $|(x, y)|$ обозначает абсолютную величину скалярного произведения; $|x|$ и $|y|$ — длины векторов x и y , соответственно. Соотношение (2.2-15) называется неравенством Шварца.

6. **Неравенство треугольника.** Для любых двух n -мерных векторов x и y справедливо соотношение

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad (2.2-16)$$

которое называется неравенством треугольника.

7. **Угол.** Угол θ между двумя n -мерными векторами

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ и } y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

дается формулой

$$\cos \theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}, \quad (2.2-17a)$$

или

$$\cos \theta = \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.2-176)$$

В статистике косинус угла между двумя векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} определяет коэффициент корреляции между совокупностями данных, которые представляют эти два вектора.

8. Линейная комбинация. Для заданных m n -мерных векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$, и любых скаляров c_k ($k = 1, 2, \dots, m$) линейная комбинация из этих m векторов определяется как n -мерный вектор

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{x}_k. \quad (2.2-18)$$

Используя основные операции над векторами, описанные в предыдущих параграфах, можно легко показать, что любой n -мерный вектор может быть записан в виде линейной комбинации из n единичных векторов, т. е.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)' = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k. \quad (2.2-19)$$

Очевидно, этот результат является обобщением двумерного и трехмерного случаев на пространство более высокой размерности. В E^2 двумерный вектор дается выражением

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$$

и в E^3 трехмерный вектор записывается как

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

В операциях с двумерными и трехмерными пространствами единичные векторы используются в качестве координатных осей системы. Такой подход можно использовать и в случае пространства более высокой размерности. Систему координат n -мерного пространства можно представить себе в виде системы координатных осей, каждая из которых проведена вдоль одного из n единичных векторов. Начало координат n -мерной координатной системы представляет нулевой вектор $\mathbf{0}$ и k -я компонента n -мерного вектора \mathbf{x} есть компонента этого вектора вдоль k -й координатной оси. Это представление n -мерного вектора ведет к известному из классической механики понятию *обобщенной системы координат*.

9. **Линейная зависимость.** Вектор x_k , принадлежащий множеству векторов евклидова пространства E^n , называется линейно зависимым от других векторов, если x_k может быть представлен в виде линейной комбинации некоторых других векторов этого множества. Множество векторов в этом случае также называется линейно зависимым. С другой стороны, если в этом множестве не существует ни одного n -мерного вектора, являющегося линейной комбинацией остальных, то множество векторов называется линейно независимым. Условие линейной зависимости множества векторов формулируется следующим образом. Множество n -мерных векторов x_1, x_2, \dots, x_m из евклидова пространства E^n является линейно зависимым, если существуют скаляры c_k , не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{k=1}^m c_k x_k = 0. \quad (2.2-20)$$

Если это уравнение удовлетворяется только в случае, когда все c_k равны нулю, то множество векторов называется линейно независимым.

Из вышеприведенного определения вытекают следующие предложения, касающиеся n -мерных векторов:

а. Если множество n -мерных векторов является линейно независимым, то любое подмножество этих векторов будет также линейно независимым.

б. Если множество n -мерных векторов является линейно зависимым, то любое множество векторов, содержащее это множество векторов, будет также линейно зависимым.

в. Если подмножество r векторов множества m n -мерных векторов x_1, x_2, \dots, x_m из евклидова пространства E^n является линейно независимым, где r — максимальное число линейно независимых векторов в этом множестве и $r < m$, то любой другой вектор в этом множестве может быть представлен в виде линейной комбинации этих r линейно независимых векторов.

г. Нулевой вектор зависит линейно от любых других векторов множества, поэтому никакое множество линейно независимых векторов не может содержать нулевой вектор.

Геометрические построения показывают, что любые два вектора из двумерного пространства являются линейно независимыми, если только не совпадают их направления; для линейной независимости трех векторов из трехмерного пространства необходимо, чтобы векторы не были параллельны плоскости. Критерий линейной зависимости множества векторов с действительными компонентами может быть выражен аналитически в виде детерминанта Грама или *грамиан* множества векторов. Умножая обе части уравнения (2.2—20) на x_1, x_2, \dots, x_m и образуя последовательные

скалярные произведения, можно показать, что коэффициенты c_k должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$c_1(x_k, x_1) + c_2(x_k, x_2) + \dots + c_k(x_k, x_k) + \dots + c_m(x_k, x_m) = 0$$

для $k = 1, 2, \dots, m$. Эти уравнения выражают требование ортогональности левой части уравнения (2.2—20) одновременно к каждому из векторов x_1, x_2, \dots, x_m . Согласно правилу Крамера эта система m уравнений относительно m неизвестных коэффициентов c_k может обладать нетривиальным решением только тогда, когда детерминант

$$G = \begin{vmatrix} x_1^2 & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_m) \\ (x_2, x_1) & x_2^2 & \dots & (x_2, x_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_m, x_1) & (x_m, x_2) & \dots & x_m^2 \end{vmatrix} \quad (2.2—21)$$

равен нулю. Этот детерминант называется детерминантом Грама или грамианом множества векторов x_1, x_2, \dots, x_m . Отсюда заключаем, что множество векторов является линейно зависимым тогда и только тогда, когда его грамиан равен нулю. Можно показать, что эта теорема остается справедливой и в случае векторов с комплексными компонентами, если в выражении грамиана обычные скалярные произведения заменить эрмитовыми скалярными произведениями.

Множество всех векторов x , представляющих собой линейные комбинации вида

$$x = \sum_{k=1}^m c_k x_k, \quad (2.2—22)$$

называется векторным пространством, порождаемым векторами x_k .

Если среди m векторов x_k имеется только r линейно независимых векторов, то говорят, что множество векторов имеет ранг r . Заметим, что если $r < m$, то $m - r$ векторов x_k выражаются линейно через r независимых векторов x_k и поэтому без ущерба могут быть исключены из уравнения (2.2—22); таким образом, любой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации оставшихся r векторов. В пространстве n измерений любой вектор x можно получить как линейную комбинацию любого множества векторов ранга n в виде

$$x = \sum_{k=1}^n c_k x_k, \quad (2.2—23)$$

где n векторов x_k линейно независимы. Понятие векторного пространства развивается также в следующих параграфах.

Векторное пространство и подпространство

Векторное пространство есть множество векторов, замкнутое относительно определенных в нем операций сложения и умножения на скаляры. Это определение означает, что если x и y — два вектора в векторном пространстве V , то их сумма $x + y$ и результат умножения на скаляр c , т. е. векторы cx и cy , принадлежат той же самой совокупности векторов. Векторное пространство V , включающее все n -мерные векторы, называют n -мерным векторным пространством и обозначают символом V_n . Векторное пространство с вещественным скалярным произведением называют евклидовым пространством и обозначают символом E^n ; его комплексный аналог называют унитарным пространством. Гильбертово векторное пространство определяется как векторное пространство бесконечномерных векторов

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_\infty)'$$

с комплексными компонентами, но с конечными значениями их норм. Размерность векторного пространства равна максимально-му числу содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Подпространство S_n n -мерного векторного пространства V_n определяется как подмножество V_n , которое само является векторным пространством. Размерность подпространства S_n определяется как максимальное число линейно независимых векторов, содержащихся в подпространстве. Подмножество есть подпространство, если оно замкнуто относительно сложения и умножения на скаляры. Если V_n -векторное пространство и S -подмножество V_n , то множество W всех векторов, порождаемых векторами из S , есть подпространство V_n . Отметим далее, что $W = V$ тогда и только тогда, когда размерность W равна размерности V .

Рассмотрим множество n -мерных векторов x_k , образующих n -мерное векторное пространство V_n . Линейная комбинация векторов x_k также принадлежит V_n . Пусть имеется некоторая матрица A размера $n \times n$. Тогда новый вектор

$$y = Ax \quad (2.2-24)$$

будет принадлежать той же самой совокупности векторов. Уравнение (2.2—24) описывает линейное преобразование и в этом случае говорят, что векторное пространство V_n инвариантно относительно линейного преобразования, заданного матрицей A . Если A — матрица размера $m \times n$, то каждая точка V_n переводится или отображается в некоторую точку в V_m . Конечно, если $m \neq n$, то x и y не могут быть точками одного и того же пространства. Линейное преобразование сохраняет результат операций сложения и умножения на скаляр. Линейное преобразование T пространства V_n можно определить как процесс, который каждый вектор x из V_n переводит в вектор $T(x)$ в V_m таким образом,

что для всех векторов x_i и x_j из V_n и всех скаляров a_i и a_j имеет место соотношение

$$T(a_i x_i + a_j x_j) = a_i T(x_i) + a_j T(x_j). \quad (2.2-25)$$

Если в уравнении (2.2—24) A — матрица размера $m \times n$, то говорят, что матрица A отображает все векторы из пространства V_n в пространство V_m . Так как любая матрица A размера $m \times n$ может быть записана как строка m -мерных векторов-столбцов,

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (2.2-26)$$

то уравнение (2.2—24) может быть записано в виде

$$y = Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n, \quad (2.2-27)$$

где x_i могут принимать любые возможные значения. Совокупность линейных комбинаций, определяемая как подпространство, порождаемое векторами y , можно рассматривать тогда как подпространство V_m , порождаемое столбцами матрицы A , размерность которого равна максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы A .

Линейные преобразования векторов занимают важное место в теории векторных пространств. Рассмотрим линейную комбинацию векторов $x(k)$ вида

$$\sum_{i=0}^k A_i x(i),$$

где A_i — матрица соответствующего линейного преобразования.

Если A_i — матрица размера $n \times n$, то эта совокупность векторов образует n -мерное векторное пространство V_n . Заметим, что если A_i — матрица размера $m \times n$ и $m < n$, то при $x(i)$, пробегающем все векторное пространство V_n , $A_i x(i)$ пробегает лишь некоторую часть V_n . Эта часть V_n называется подпространством S . Таким образом, подпространство конечномерного векторного пространства V само является векторным пространством с размерностью, меньшей или равной размерности векторного пространства V .

Рассмотрим теперь линейное преобразование

$$y(k) = Mx(k), \quad (2.2-28)$$

где M — матрица измеримых переменных размера $m \times n$, причем $m < n$. Уравнение (2.2—28) будет использовано в гл. 8 при решении задач оптимальной оценки координат состояния системы. Размерность вектора $y(k)$ меньше или равна размерности векто-

ра $\mathbf{x}(k)$. Совокупность n -мерных векторов $\mathbf{x}(i)$ образует векторное пространство

$$V = \sum_{i=0}^K \mathbf{A}_i \mathbf{x}(i), \quad (2.2-29)$$

размерность которого равна n и где \mathbf{A}_i — некоторая матрица размера $n \times n$. Аналогичным образом, совокупность m -мерных векторов $\mathbf{y}(i)$ образует векторное пространство

$$S = \sum_{i=0}^K \mathbf{B}_i \mathbf{y}(i), \quad (2.2-30)$$

размерность которого равна m и где \mathbf{B}_i — некоторая матрица размера $m \times m$. Так как $m < n$, то векторное пространство S является подпространством векторного пространства V .

Понятие базиса

Говорят, что множество векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ из векторного пространства V_n порождает V_n , если каждый вектор в V_n может быть записан в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$. Это множество векторов называют порождающим множеством. Если векторное пространство V_n имеет конечное число n измерений, то любое линейно независимое множество из n векторов является базисом для V_n и любой базис для V_n имеет n векторов. Таким образом, базис пространства V_n определяется как линейно независимое подмножество n векторов из V_n , которое порождает все пространство. Если векторное пространство V_n имеет конечное число n измерений и множество $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ — любое линейно независимое множество в V_n , то при $k < n$ существуют векторы $\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+2}, \dots, \mathbf{x}_n$, такие, что множество $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ является базисом для V_n . Представление любого вектора в виде линейной комбинации базисных векторов является единственным. Однако конечномерное векторное пространство V_n может обладать многими различными базисами. Например, n единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуют базис для векторного пространства V_n .

Пусть дано множество базисных векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ для векторного пространства V_n и любой другой вектор $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ из V_n , который может быть записан в виде линейной комбинации векторов \mathbf{x}_i , т. е.

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i. \quad (2.3-31)$$

Тогда, если из множества $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ исключить любой вектор x_i , для которого $\lambda_i \neq 0$, и вектор y добавить в множество, то можно получить новое множество k векторов, которые также образуют базис для векторного пространства V_n . Множество n взаимно ортогональных векторов единичной длины векторного пространства V_n образует ортогональный базис этого пространства.

Ортогональные проекции

Рассмотрим два не равных нулю вектора x и y . Векторы x и y называют ортогональными, если их скалярное произведение (x, y) равно нулю. Это определение ортогональности можно распространить и на систему векторов. Векторы из n -мерного векторного пространства V_n , не равные нулю, называются ортогональными, если их скалярные произведения равны нулю. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — ортогональная система векторов. Тогда

$$(x_i, x_j) = 0 \text{ для } i \neq j; \quad (2.2-32a)$$

$$(x_i, x_j) = \|x_i\|^2 \text{ для } i = j. \quad (2.2-32b)$$

Систему векторов называют ортогональной, если любые два вектора системы ортогональны друг другу. Векторы ортогональной системы линейно независимы. Пусть имеем систему векторов x_1, x_2, \dots, x_n из векторного пространства V . Эта система векторов будет линейно независимой, если соотношение между векторами вида

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \quad (2.2-33)$$

возможно только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Если x_i — вектор, ортогональный к каждому вектору из V , то

$$(0, x_i) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, x_i) = \lambda_i (x_i, x_i). \quad (2.2-34)$$

Так как $(x_i, x_i) > 0$, то отсюда следует, что $\lambda_i = 0$.

Рассмотрим любое подпространство S векторного пространства V . Множество всех векторов в этом векторном пространстве V , ортогональных к каждому вектору из подпространства S , называют ортогональным дополнением подпространства S . Ортогональным дополнением вектора x в векторном пространстве V называют множество всех векторов этого пространства, ортогональных к вектору x . В пространстве трех измерений ортогональным дополнением вектора является множество всех векторов, перпендикулярных данному вектору.

Пусть x — любой вектор векторного пространства V и пусть S — его подпространство. Тогда говорят, что вектор \hat{x} является ортогональной проекцией вектора x на подпространство S , если

удовлетворены следующие условия: 1) вектор \hat{x} является элементом подпространства S ; 2) вектор $\tilde{x} = x - \hat{x}$ ортогонален каждому вектору из подпространства S . Вектор \hat{x} называют нормальной составляющей вектора x или перпендикуляром, опущенным из точки x на подпространство S . Следует отметить, что вектор x и его нормальная составляющая \hat{x} , в отличие от его ортогональной проекции, не являются элементами подпространства S . Можно показать, что ортогональная проекция вектора x (которую иногда называют просто проекцией x) на подпространство S существует всегда для любого вектора x . Концепция ортогональных проекций будет использована в дальнейшем при изучении проблемы оптимальной оценки координат систем управления.

Ортогональные проекции обладают некоторыми полезными свойствами:

1. Ортогональная проекция \hat{x} есть вектор из подпространства S векторного пространства V .

2. Вектор x равен сумме ортогональной проекции \hat{x} и нормальной составляющей \tilde{x} .

3. Нормальная составляющая является вектором, ортогональным каждому вектору из подпространства S . Обратное утверждение также верно. Так, если $x - a$ есть вектор, ортогональный каждому вектору из подпространства S , и вектор a есть элемент подпространства S , то вектор a является ортогональной проекцией вектора x на подпространство S . Ортогональная проекция вектора на подпространство определяется однозначно.

4. Норма вектора x больше или равна норме его ортогональной проекции \hat{x} . Это легко показать, используя свойство 2. Из определения нормы следует, что

$$\|x\|^2 = (\hat{x} + \tilde{x}, \hat{x} + \tilde{x}) = (\hat{x}, \hat{x}) + 2(\hat{x}, \tilde{x}) + (\tilde{x}, \tilde{x}) = (\hat{x}, \hat{x}) + (\tilde{x}, \tilde{x});$$

отсюда

$$\|x\| \geq \|\hat{x}\|. \quad (2.2-35)$$

Последнее соотношение следует из ортогональности \hat{x} и \tilde{x} .

5. Для любого вектора a из подпространства S имеет место соотношение

$$\|x - \hat{x}\| \leq \|x - a\|, \quad (2.2-36)$$

т. е. норма вектора $x - \hat{x}$ меньше или равна норме вектора $x - a$. Это свойство можно легко доказать, если учесть, что вектор $\hat{x} - a$ при любом a из S принадлежит также S , так как проекция \hat{x} есть элемент подпространства S .

Поэтому

$$\|x - a\|^2 = \|(x - \hat{x}) + (\hat{x} - a)\|^2 = \|\tilde{x} + (\hat{x} - a)\|^2 = (\tilde{x}, \tilde{x} + 2\tilde{x}, \hat{x} - a) + (\hat{x} - a, \hat{x} - a) = (\tilde{x}, \tilde{x}) + (\hat{x} - a, \hat{x} - a) \geq \|x - \hat{x}\|^2;$$

знак равенства имеет место, когда $\hat{x} = a$.

2.3. ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

В практике проектирования современных систем управления довольно часто возникает задача определения тех значений скалярного параметра λ , для которых существуют нетривиальные решения системы однородных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2; \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned} \right\} \quad (2.3-1)$$

В линейной алгебре эта задача известна под названием *проблемы собственных значений*. Значения параметра λ , для которых существуют нетривиальные решения, называются собственными значениями матрицы $A = [a_{ih}]$. Соответствующие им векторные решения называют собственными векторами матрицы A . Столбец, составленный из элементов собственного вектора, часто называют модальным столбцом. Система уравнений (2.3-1) в векторных обозначениях принимает вид

$$Ax = \lambda x, \quad (2.3-2)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.3-3)$$

и

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (2.3-4)$$

Перенеся правую часть уравнения (2.3-2) влево, получим

$$(A - \lambda I)x = 0. \quad (2.3-5)$$

Это уравнение обладает нетривиальным решением только тогда, когда определитель $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$ равен нулю, т. е.

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.3-6)$$

Разложение этого определителя приводит к характеристическому уравнению, из которого могут быть найдены все искомые значения λ . Эти n решений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ данного уравнения и есть собственные значения матрицы \mathbf{A} . Соответствующие каждому из этих значений λ_k векторные решения исходного уравнения есть собственные векторы матрицы \mathbf{A} . Ясно, что выражение (2.3-6) позволяет представить определитель $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$ в виде полинома n -й степени от λ :

$$f(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = (-\lambda)^n + b_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \dots + b_1(-\lambda) + b_0. \quad (2.3-7)$$

Функция $f(\lambda)$ называется характеристической или собственной функцией матрицы \mathbf{A} . Во многих практических случаях \mathbf{A} в выражении (2.3-5) является симметрической матрицей. Матрицу \mathbf{A} называют симметрической, если между ее элементами имеет место соотношение

$$a_{ij} = a_{ji}. \quad (2.3-8)$$

Можно показать, что собственные векторы симметрической матрицы обладают следующими важными свойствами:

1. Собственные векторы действительной симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, попарно ортогональны.
2. Все собственные значения действительной симметрической матрицы суть действительные числа.
3. Собственные векторы симметрической матрицы \mathbf{A} n -го порядка порождают n -мерное векторное пространство.
4. Существует, по крайней мере, одно ортонормальное множество собственных векторов \mathbf{A} , которое порождает n -мерное векторное пространство. Под ортонормальным множеством векторов понимается множество ортогональных векторов, удовлетворяющих условию нормализации $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 1$.
5. Собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_i с кратностью r , порождают подпространство r измерений.
6. В любом множестве из n ортонормальных собственных векторов \mathbf{A} содержится ровно r линейно независимых собственных

векторов, соответствующих собственному значению λ_i с кратностью r .

7. Если одно или несколько собственных значений \mathbf{A} имеют кратность $r \geq 2$, то существует бесконечное число различных множеств ортонормальных векторов \mathbf{A} , которые порождают n -мерное векторное пространство, соответствующих различным способам выбора ортонормальных множеств, порождающих подпространства с размерностью $r \geq 2$.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{c}, \quad (2.3-9)$$

где \mathbf{A} — действительная симметрическая матрица.

Решение уравнения (2.3-9), если оно существует, дается в виде линейной комбинации собственных векторов \mathbf{A} . Пусть собственными векторами \mathbf{A} являются единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Эти векторы нормализованы, так как $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$. Тогда будем иметь

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \lambda_2\mathbf{e}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_n = \lambda_n\mathbf{e}_n. \quad (2.3-10)$$

Решение ищем в форме

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{e}_j, \quad (2.3-11)$$

где a_j — некоторые коэффициенты, которые предстоит определить.

Подставляя выражение (2.3-11) в уравнение (2.3-9) и используя формулу (2.3-10), получаем

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j - \lambda) a_j \mathbf{e}_j = \mathbf{c}. \quad (2.3-12)$$

Из этого уравнения можно найти любой из коэффициентов a_j , умножая скалярно обе части уравнения (2.3-12) на соответствующий вектор \mathbf{e}_i . Так как $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, то коэффициент a_i должен удовлетворять уравнению

$$(\lambda_i - \lambda) a_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{c}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3-13)$$

Отсюда, если $\lambda \neq \lambda_i$,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \frac{(\mathbf{e}_j, \mathbf{c})}{\lambda_j - \lambda} \mathbf{e}_j, \quad (2.3-14)$$

что является единственным решением уравнения (2.3-9).

Квадратичные формы

Квадратичной формой от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется сумма, каждый член которой является или квадратом одной из этих переменных, или произведением двух различных переменных:

$$Q(x_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{1n} x_1 x_n + \\ + a_{21} x_2 a_1 + a_{22} x_2 x_2 + \dots + a_{2n} x_2 x_n + \dots + a_{n1} x_n x_1 + a_{n2} x_n x_2 + \\ + \dots + a_{nn} x_n x_n. \quad (2.3-15)$$

Для любого заданного множества x_k это выражение определяет однозначно некоторое значение $Q(x_k)$. Введя обозначения

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{A} = [a_{ij}],$$

выражение (2.3—15) перепишем в следующей матричной форме:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^n x_i (\mathbf{A}\mathbf{x})_i = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (2.3-16)$$

где \mathbf{A} — матрица, которую называют ассоциированной с квадратичной формой от n переменных или просто матрицей квадратичной формы $Q(\mathbf{x})$.

При выводе формулы (2.3—16) через $(\mathbf{A}\mathbf{x})_i$ мы обозначили i -ю строку $\mathbf{A}\mathbf{x}$. Например, квадратичная форма $Q(\mathbf{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ может быть записана в виде

$$Q(\mathbf{x}) = x_1(a_1x_1 + bx_2) + x_2(bx_1 + cx_2).$$

Если теперь вектор \mathbf{x} и матрица \mathbf{A} определены выражениями

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

то заданная квадратичная форма может быть записана как $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Заметим, что в формуле (2.3—15) a_{ij} и a_{ji} являются двумя различными коэффициентами при $x_i x_j$, когда $i \neq j$. Поэтому суммарным коэффициентом при $x_i x_j$ будет, очевидно, $a_{ij} + a_{ji}$ при $i \neq j$. Если теперь ввести новые коэффициенты

$$b_{ij} = b_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, \quad (2.3-17)$$

то матрицу квадратичной формы можно превратить в симметрическую. Следовательно, матрицу \mathbf{A} , ассоциированную с квадратичной формой $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$, можно всегда считать симметрической.

Квадратичная форма $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ называется положительно определенной, если она положительна для всех \mathbf{x} , исключая $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Например, квадратичная форма

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{I}) = \mathbf{x}'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (2.3-18)$$

является положительно определенной. Это возможно тогда и только тогда, когда все собственные значения \mathbf{A} положительны.

Квадратичная форма $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ называется положительно полуопределенной, если она не отрицательна для всех \mathbf{x} и существуют точки $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, для которых $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$. Квадратичная форма $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ является положительно полуопределенной тогда и только тогда, когда все собственные значения \mathbf{A} неотрицательны и, по крайней мере, одно из собственных значений равно нулю.

Аналогичные утверждения могут быть сделаны и относительно отрицательно определенных и отрицательно полуопределенных квадратичных форм. Квадратичная форма $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ называется отрицательно определенной, если она отрицательна для всех \mathbf{x} , исключая $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Квадратичная форма $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ называется отрицательно полуопределенной, если она не положительна для всех \mathbf{x} и существуют точки $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, для которых $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$.

Квадратичная форма $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ является неопределенной тогда и только тогда, когда матрица \mathbf{A} обладает как положительными, так и отрицательными собственными значениями.

Если собственные значения \mathbf{A} известны, то можно сразу же установить, является ли заданная квадратичная форма положительно определенной, полуопределенной и т. д. Положительно определенная форма остается положительно определенной и в случае, когда произведено преобразование переменных, если только это преобразование является невырожденным. Если $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ и $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ — положительно определенные матрицы, то матрица $\mathbf{C} = [a_{ij}b_{ij}]$ будет также положительно определенной.

Можно показать, что для того, чтобы квадратичная форма $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ или симметрическая матрица \mathbf{A} были положительно определенными, необходимо и достаточно, чтобы расположенные в естественном порядке ее главные миноры были положительны, т. е.

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, |A| > 0. \quad (2.3-19)$$

Чтобы установить, является ли квадратичная форма положительно определенной, достаточно, очевидно, проверить, выполняются ли соотношения (2.3—19). Например, квадратичная форма $4x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2$ является положительно определенной, так как ее можно записать в виде

$$[x_1, x_2] \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

и главные миноры A равны

$$4 > 0 \text{ и } \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

Критерий положительной или отрицательной определенности квадратичных форм, основанный на определении собственных значений матрицы A , в некоторых случаях оказывается неудобным для использования, так как численное определение собственных значений матриц больших размеров часто представляет собой весьма трудную задачу. Прямой способ, основанный на непосредственном разложении определителя $|A - \lambda I|$ на слагаемые, в этих условиях также обречен на неудачу из-за чрезвычайной громоздкости такого разложения. С другой стороны, детерминантный критерий положительной определенности (2.3—19) свободен от этих недостатков и позволяет упростить вычисления.

Диагонализация матриц

1. **Симметрические матрицы с различными собственными значениями.** Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — различные собственные значения симметрической матрицы A , и x_1, x_2, \dots, x_n — соответствующая система нормализованных собственных векторов, удовлетворяющих условию

$$(x_i, x_i) = 1.$$

Рассмотрим матрицу

$$T = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.3-20)$$

столбцами которой служат собственные векторы x_i . Запишем выражение транспонированной матрицы T :

$$T' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}. \quad (2.3-21)$$

Эти матрицы связаны соотношением

$$\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_j = [\delta_{ij}] = \mathbf{I}, \quad (2.3-22)$$

которое легко получить, если учесть ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям симметрической матрицы. Матрица \mathbf{T} является, следовательно, ортогональной матрицей.

Используя далее соотношения

$$\mathbf{AT} = (\mathbf{Ax}_1, \mathbf{Ax}_2, \dots, \mathbf{Ax}_n) \text{ и } \mathbf{Ax}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

получаем

$$\mathbf{AT} = (\lambda_1 \mathbf{x}_1, \lambda_2 \mathbf{x}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{x}_n). \quad (2.3-23)$$

Из уравнений (2.3-21) и (2.3-23) следует, что

$$\mathbf{T}'\mathbf{AT} = [\lambda_i \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_j] = [\lambda_i \delta_{ij}]. \quad (2.3-24)$$

Уравнение (2.3-24) можно переписать в следующей форме:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}'\mathbf{AT}, \quad (2.3-25)$$

где

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.3-26)$$

Матрицы такого типа называются диагональными.

Умножая левую часть уравнения (2.3-25) на \mathbf{T} и правую на \mathbf{T}' , получаем

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}', \quad (2.3-27)$$

т. е. выражение для симметрической матрицы через диагональную.

Заметим, что собственные значения матрицы \mathbf{A} и диагональной матрицы $\mathbf{T}'\mathbf{AT}$ совпадают.

Квадратичная форма

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{Ax} \quad (2.3-28)$$

может быть приведена к каноническому виду. Полагая

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}, \quad (2.3-29)$$

где матрица \mathbf{T} дается выражением (2.3-20), квадратичную форму (2.3-28) представим в виде

$$Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{T}\mathbf{y})'\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}. \quad (2.3-30)$$

Это представление называют каноническим видом квадратичной формы. Развертывая выражение (2.3—30), получаем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2. \quad (2.3—31)$$

Так как \mathbf{T} — ортогональная матрица, то из формулы (2.3—29) следует, что

$$\mathbf{T}'\mathbf{x} = \mathbf{T}'\mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{y}. \quad (2.3—32)$$

Следовательно, каждому значению вектора \mathbf{x} при таком преобразовании можно сопоставить одно единственное значение вектора \mathbf{y} , и наоборот.

2. Общий случай диагонализации симметрических матриц. Диагонализируемая симметрическая матрица не обязательно должна быть матрицей с различными собственными значениями. Любая действительная симметрическая матрица может быть приведена к диагональному виду посредством ортогонального преобразования. Справедливость этого утверждения можно проверить, рассматривая диагонализацию симметрической матрицы второго порядка:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.3—33)$$

где

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}); \quad (2.3—34a)$$

$$\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}). \quad (2.3—34б)$$

Пусть λ_1 и λ_2 — собственные значения, \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 — собственные векторы матрицы \mathbf{A} , которые представим в виде

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.3—35)$$

Тогда

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \quad (2.3—36)$$

и

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}. \quad (2.3—37)$$

Учитывая далее, что

$$\mathbf{T} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.2—38)$$

и

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.3—39)$$

для преобразованной матрицы $\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}$ получаем следующие выражения:

$$\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{bmatrix}; \quad (2.3-40)$$

$$\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_1) \\ \lambda_1 x_{21} & (\mathbf{a}_2, \mathbf{x}_2) \end{bmatrix}. \quad (2.3-41)$$

Отметим, что выражение (2.3—41) получено при использовании соотношений (2.3—34), (2.3—35) и (2.3—37). Произведя указанное в формуле (2.3—41) умножение матриц, получим

$$\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.3-42)$$

где b_{12} и b_{22} — некоторые коэффициенты, которые предстоит определить.

Преобразованная матрица $\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}$ является симметрической, так как \mathbf{A} — симметрическая матрица и

$$(\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T})' = \mathbf{T}'\mathbf{A}'(\mathbf{T}')' = \mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad (2.3-43)$$

поэтому $b_{12} = 0$.

Поскольку собственные значения матриц \mathbf{A} и $\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}$ совпадают, то коэффициент b_{22} должен быть, очевидно, равен собственному значению λ_2 матрицы \mathbf{A} . Следовательно,

$$\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (2.3-44)$$

что убеждает нас в справедливости утверждения. Доказательство этого утверждения для матриц n -го порядка может быть проведено аналогичным образом.

3. Несимметрическая матрица с различными собственными значениями. Можно показать, что если матрица \mathbf{A} имеет различные собственные значения, то она может быть приведена к диагональной форме

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (2.3-45)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы \mathbf{A} , а ее собственные векторы используются для формирования матрицы \mathbf{T} и служат ее столбцами. Заметим, что если \mathbf{A} — симметрическая матрица, то $\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}$ и формула (2.3—45) сводится к выражению

(2.3—25). Существуют, однако, матрицы, которые в результате преобразования с помощью невырожденной матрицы нельзя привести к диагональной форме. Например, не поддаются диагонализации матрицы n -го порядка, которые не имеют n линейно независимых собственных векторов. Произвольная квадратная матрица может быть всегда приведена к жордановой канонической форме

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} L_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & L_{k_r}(\lambda_r) \end{bmatrix}, \quad (2.3-46)$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$; λ_i — собственные значения матрицы A , не обязательно все различные; $L_{k_i}(\lambda_i)$ — матрица размера $k_i \times k_i$, имеющая вид

$$L_{k_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad (2.3-47)$$

причем $L_1(\lambda) = \lambda$.

Преобразование, определяемое выражением

$$\Lambda = T^{-1}AT,$$

называется преобразованием подобия. Матрицы A и Λ , связанные этим соотношением, называются подобными. Собственные значения и характеристические функции подобных матриц совпадают. Можно показать, что преобразованием подобия любую квадратную матрицу можно привести к жордановой канонической форме

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где α_i равно 1 или 0.

Следовательно, каждая квадратная матрица подобна некоторой жордановой канонической матрице. Когда все собственные значения различны или когда A является симметрической матрицей, жорданова каноническая матрица сводится к диагональной матрице.

Теорема Кэли — Гамильтона

Эта теорема касается весьма интересного и полезного свойства характеристического многочлена. Она утверждает, что всякая матрица удовлетворяет своему *характеристическому уравнению*.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы \mathbf{A} . Характеристическое уравнение для этой матрицы можно представить в виде

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0. \quad (2.3-48)$$

Теорема Кэли — Гамильтона утверждает, что

$$f(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \dots (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I}) = \mathbf{0}, \quad (2.3-49)$$

Теорема сохраняет силу и в том случае, когда среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни. Пусть характеристическое уравнение имеет корень λ_i кратности r . Тогда характеристическое уравнение можно записать в виде

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^r p(\lambda). \quad (2.3-50)$$

На основании выражения (2.3-50) можно составить следующее модифицированное характеристическое уравнение:

$$(\lambda - \lambda_i)^r p(\lambda) = 0, \quad (2.3-51)$$

которое часто называют *минимальным уравнением для \mathbf{A}* .

Можно показать, что всякая матрица \mathbf{A} удовлетворяет своему минимальному уравнению, т. е. матрица \mathbf{A} является корнем этого уравнения:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^r p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \quad (2.3-52)$$

Поэтому теорему Кэли — Гамильтона можно сформулировать также следующим образом: характеристический полином матрицы \mathbf{A} делится без остатка на ее минимальный полином. Например, рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Соответствующее этой матрице характеристическое уравнение имеет вид

$$(\lambda - 3)^2(\lambda - 12) = 0.$$

Тогда находим, что значение минимального полинома при $\lambda = \mathbf{A}$

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})(\mathbf{A} - 12\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -4 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

равно нулю. Поэтому

$$f(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2(\mathbf{A} - 12\mathbf{I}) = 0,$$

что следует также из теоремы Кэли — Гамильтона.

Дифференцирование квадратичных форм

При проектировании оптимальных систем с использованием квадратичных критериев качества часто возникает необходимость дифференцирования квадратичных форм. Ниже кратко рассматриваются правила дифференцирования таких форм.

1. Дифференцирование по скалярной переменной. Пусть

$$Q(x_k) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j. \quad (2.3-53)$$

Тогда, дифференцируя $Q(x_k)$ по переменной x_k , получаем

$$\begin{aligned} \frac{dQ(x_k)}{dx_k} &= \frac{d}{dx_k} \left[a_{kk}x_k^2 + x_k \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ki}x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{jk}x_j \right) \right] = \\ &= 2a_{kk}x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ki}x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{jk}x_j = \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i + \sum_{j=1}^n a_{jk}x_j = \\ &= \sum_{i=1}^n (a_{ki} + a_{ik})x_i. \end{aligned}$$

В матричных обозначениях будем иметь

$$\frac{dQ(x_k)}{dx_k} = (\mathbf{A}\mathbf{x})_k + (\mathbf{A}'\mathbf{x})_k. \quad (2.3-54)$$

Следовательно, производная $Q(x_k)$ по x_k равна сумме k -х строк векторов-столбцов $\mathbf{A}\mathbf{x}$ и $\mathbf{A}'\mathbf{x}$. Из выражения (2.3-54) следует, что, когда $\mathbf{A} = \mathbf{I}$,

$$\frac{d(\mathbf{x}'\mathbf{x})}{dx_k} = 2x_k. \quad (2.3-55)$$

2. Дифференцирование по векторной переменной. Пусть имеется вектор

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (2.3-56)$$

по которому требуется продифференцировать квадратичную форму. Через ∇_x обозначим оператор дифференцирования, который определим выражением

$$\nabla_x = \frac{d}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (2.3-57)$$

Так как $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$, то

$$\nabla_x Q(\mathbf{x}) = \frac{dQ(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right). \quad (2.3-58)$$

Учитывая формулу (2.3-54), предыдущее выражение запишем в виде

$$\frac{dQ(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}\mathbf{x})_1 \\ (\mathbf{A}\mathbf{x})_2 \\ \vdots \\ (\mathbf{A}\mathbf{x})_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{A}'\mathbf{x})_1 \\ (\mathbf{A}'\mathbf{x})_2 \\ \vdots \\ (\mathbf{A}'\mathbf{x})_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}'\mathbf{x}. \quad (2.3-59)$$

Мы показали, что производная квадратичной формы по векторной переменной равна сумме двух векторов-столбцов. В частном случае, когда $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, из формулы (2.3-59) следует, что

$$\frac{d(\mathbf{x}'\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = 2\mathbf{x}. \quad (2.3-60)$$

Теорема разложения Сильвестра

Эта теорема находит применение при отыскании функций, представляющих в замкнутой форме степенные ряды матрицы \mathbf{A} . Теорема утверждает, что степенной ряд

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{A}^k, \quad (2.3-61)$$

где \mathbf{A} — квадратная матрица n -го порядка с n различными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, сходится к

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \mathbf{F}(\lambda_i), \quad (2.3-62)$$

где

$$\mathbf{F}(\lambda_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}}{\lambda_i - \lambda_j}. \quad (2.3-63)$$

Следует отметить, что $\mathbf{F}(\lambda_i)$ не зависит от вида функции $f(\mathbf{A})$.

Ниже перечисляются некоторые важные свойства матриц $\mathbf{F}(\lambda_i)$:

$$(1) \mathbf{F}(\lambda_i) \mathbf{F}(\lambda_j) = \mathbf{0} \text{ для } i \neq j.$$

Это свойство следует непосредственно из теоремы Кэли — Гамильтона, так как

$$\mathbf{F}(\lambda_i) \mathbf{F}(\lambda_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}}{\lambda_i - \lambda_k} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n \frac{\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{I}}{\lambda_j - \lambda_m} = \prod_{k=1}^n [\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}] \Phi(\mathbf{A}, \lambda_m);$$

$$(2) [\mathbf{F}(\lambda_i)]^r = \mathbf{F}(\lambda_i);$$

$$(3) \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\lambda_i) = \mathbf{I}.$$

Для иллюстрации рассмотрим функцию

$$f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t},$$

где матрица \mathbf{A} дается выражением

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение \mathbf{A} находим по общей формуле из уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ -\lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

которое может быть приведено к виду

$$\lambda^2 + 2 = 0.$$

Отсюда находим собственные значения \mathbf{A} :

$$\lambda_1 = j\sqrt{2} \text{ и } \lambda_2 = -j\sqrt{2}.$$

Согласно теореме разложения Сильвестра имеем

$$f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^2 f(\lambda_i) \mathbf{F}(\lambda_i).$$

Так как

$$f(\lambda_1) = e^{j\sqrt{2}t} \text{ и } f(\lambda_2) = e^{-j\sqrt{2}t},$$

$$\mathbf{F}(\lambda_1) = \frac{\mathbf{A} + j\sqrt{2}\mathbf{I}}{j2\sqrt{2}} \text{ и } \mathbf{F}(\lambda_2) = \frac{\mathbf{A} - j\sqrt{2}\mathbf{I}}{-j2\sqrt{2}},$$

то

$$f(\mathbf{A}) = \frac{e^{j\sqrt{2}t} [\mathbf{A} + j\sqrt{2}\mathbf{I}] - e^{-j\sqrt{2}t} [\mathbf{A} - j\sqrt{2}\mathbf{I}]}{j2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{j2\sqrt{2}} \{ j\sqrt{2}(e^{j\sqrt{2}t} + e^{-j\sqrt{2}t})\mathbf{I} + (e^{-j\sqrt{2}t} - e^{j\sqrt{2}t})\mathbf{A} \} =$$

$$= (\cos \sqrt{2}t)\mathbf{I} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t \right) \mathbf{A} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t & -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t & \cos \sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t \end{bmatrix}.$$

Этот результат можно легко проверить формальным путем при использовании преобразования Лапласа.

2.4. ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Важным классом систем управления, привлекающим внимание многих исследователей, являются линейные многомерные системы, на которые возмущения действуют аддитивно. Движение такой системы обычно описывается дифференциальным уравнением, которое в векторно-матричных обозначениях имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{m}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (2.4-1)$$

где $\mathbf{A}(t)$ — матрица коэффициентов дифференциального уравнения процесса;

$\mathbf{D}(t)$ — матрица управления;

$\mathbf{x}(t)$ — вектор состояния процесса;

$\mathbf{m}(t)$ — вектор управления;

$\mathbf{n}(t)$ — вектор возмущающих воздействий.

Если рассматривается процесс n -го порядка, то матрица коэффициентов $\mathbf{A}(t)$ процесса является квадратной матрицей n -го порядка. Процесс, описываемый уравнением (2.4-1), называется

линейным и нестационарным. Если значения матрицы коэффициентов процесса и матрицы управления не зависят от времени, то процесс называют линейным и стационарным. Если матрицы A и D являются функциями случайных параметров процесса, то систему называют линейной со случайными параметрами. При анализе и синтезе систем управления обычно возникает необходимость решения уравнения (2.4—1) при некоторых начальных условиях.

Стационарная система

В случае линейных стационарных процессов матрица коэффициентов и матрица управления не зависят от времени, и поэтому уравнение (2.4—1) принимает вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dm(t) + n(t). \quad (2.4—2)$$

Рассмотрим вначале решение этого уравнения, когда управляющее и возмущающее воздействия равны нулю. Общий случай будет рассмотрен позднее.

1. **Свободное движение.** Уравнение свободного движения имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (2.4—3)$$

Предположим, что движение начинается в момент t_0 из состояния x_0 . Решение уравнения (2.4—3) можно получить по аналогии с решением скалярного уравнения в виде

$$x(t) = [\exp A(t-t_0)] x_0, \quad (2.4—4)$$

где

$$\exp At = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{t^k}{k!}. \quad (2.4—5)$$

Можно показать, что этот ряд сходится равномерно и абсолютно в любом конечном интервале времени. Функцию

$$\varphi(t-t_0) = \exp A(t-t_0) \quad (2.4—6)$$

часто называют матрицей перехода процесса. Используя формулу (2.4—6), уравнение (2.4—4) запишем также в виде

$$x(t) = \varphi(t-t_0) x_0. \quad (2.4—7)$$

Заметим, что матрица перехода описывает движение системы за счет ненулевых начальных условий, когда внешние силы равны нулю.

2. **Вынужденное движение.** Движение многомерной системы в результате приложения вынужденного воздействия $m(t)$ и возмущающего аддитивного воздействия $n(t)$ описывается уравне-

нием (2.4—2). Решение этого уравнения будем искать в форме, аналогичной выражению (2.4—7). Положим

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t-t_0)\mathbf{C}_1(t), \quad (2.4-8)$$

где $\mathbf{C}_1(t)$ — вектор, зависящий от времени, заменяющий вектор начального состояния \mathbf{x}_0 в уравнении движения при отсутствии внешних воздействий.

Дифференцируя выражение (2.4—8) по t , получаем

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\varphi}(t-t_0)\dot{\mathbf{C}}_1(t). \quad (2.4-9)$$

Если формула (2.4—8) является решением уравнения (2.4—2), то величины в правых частях уравнений (2.4—2) и (2.4—9) должны быть одинаковы. Отсюда

$$\mathbf{Dm}(t) + \mathbf{n}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t-t_0)\dot{\mathbf{C}}_1(t). \quad (2.4-10)$$

Решая это уравнение относительно $\mathbf{C}_1(t)$, получаем

$$\mathbf{C}_1(t) = \int_{t_0}^t \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\tau-t_0)[\mathbf{Dm}(\tau) + \mathbf{n}(\tau)] d\tau + \mathbf{C}_2. \quad (2.4-11)$$

Учитывая это выражение и определение матрицы перехода, уравнение (2.4—8) приведем к виду

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t-t_0)\mathbf{C}_2 + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\varphi}(t-\tau)[\mathbf{Dm}(\tau) + \mathbf{n}(\tau)] d\tau. \quad (2.4-12)$$

При $t = t_0$, $\boldsymbol{\varphi}(t-t_0) = \mathbf{I}$ и $\mathbf{C}_2 = \mathbf{x}(t_0)$. Отсюда находим

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\varphi}(t-\tau)[\mathbf{Dm}(\tau) + \mathbf{n}(\tau)] d\tau. \quad (2.4-13)$$

Нестационарная система

Движение линейной нестационарной системы характеризуется уравнением (2.4—1). Следует заметить, что в данном случае аналогия со скалярным уравнением может привести к неправильному результату. Решение однородного уравнения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.4-14)$$

по аналогии со скалярным случаем должно иметь вид

$$\mathbf{x}(t) = \left[\exp \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right] \mathbf{C}_1, \quad (2.4-15)$$

что действительно, если только $\mathbf{A}(t)$ и $\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau$ коммутативны для любого t .

Пусть теперь $\Phi(t, t_0)$ — решение однородного матричного уравнения

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \quad (2.4-16)$$

при начальном условии $X(t_0) = I$, где $\Phi(t, t_0)$ — матрица перехода нестационарной системы. При $t = t_0$, $\Phi(t, t_0) = I$. Решение неоднородного уравнения может быть найдено методом вариации параметров Лагранжа. Предположим, что решение уравнения (2.4—1) имеет вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0)C_1(t). \quad (2.4-17)$$

Дифференцируя уравнение (2.4—17), получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t, t_0)C_1(t) + \Phi(t, t_0)\dot{C}_1(t) = A(t)\Phi(t, t_0)C_1(t) + \\ &+ \Phi(t, t_0)\dot{C}_1(t) = A(t)x(t) + \Phi(t, t_0)\dot{C}_1(t). \end{aligned} \quad (2.4-18)$$

Сравнивая формулы (2.4—1) и (2.4—18), находим

$$\Phi(t, t_0)\dot{C}_1(t) = D(t)m(t) + n(t). \quad (2.4-19)$$

Решая это уравнение относительно $C_1(t)$, приходим к следующему выражению:

$$C_1(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)[D(\tau)m(\tau) + n(\tau)] d\tau + C_2. \quad (2.4-20)$$

Следовательно,

$$x(t) = \Phi(t, t_0)C_2 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)[D(\tau)m(\tau) + n(\tau)] d\tau. \quad (2.4-21)$$

Так как при $t = t_0$, $\Phi(t, t_0) = I$, $C_2 = x(t_0)$, то окончательно находим

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)[D(\tau)m(\tau) + n(\tau)] d\tau. \quad (2.4-22)$$

Заметим, что для нестационарных систем матрицу перехода обычно не удается получить в виде простой экспоненциальной функции. В этом случае не существует общей формулы для $\Phi(t, t_0)$, хотя эту матрицу каждый раз можно выразить в виде бесконечного ряда последовательных интегралов.

Каноническая форма и матрица Вандермонда

Анализ и оптимальный синтез систем управления требует в некоторых случаях приведения дифференциального уравнения состояния, характеризующего систему, к канонической форме.

Такое преобразование позволяет значительно упростить анализ и синтез систем. Линейная динамическая система обычно описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}m, \quad (2.4-23)$$

где \mathbf{x} — вектор состояния процесса;

m — управляющее воздействие;

\mathbf{A} — матрица коэффициентов;

\mathbf{d} — матрица управления, определяемая выражением

$$\mathbf{d} = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ d)'. \quad (2.4-24)$$

Рассмотрим процесс n -го порядка. В этом случае \mathbf{d} — матрица-столбец размера $n \times 1$, все элементы которой равны нулю, за исключением последнего элемента. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы \mathbf{A}_n , которые предполагаются все различными. Тогда с помощью линейного преобразования

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{y}. \quad (2.4-25)$$

уравнение (2.4-23) может быть приведено к канонической форме

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{y}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{d}m, \quad (2.4-26)$$

где вектор \mathbf{y} представляет n канонических переменных состояния и называется каноническим вектором состояния;

$\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица с ненулевыми элементами λ_i ;

\mathbf{T} — квадратная матрица n -го порядка, столбцами которой служат собственные векторы матрицы \mathbf{A} .

Можно показать, что

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}; \quad (2.4-27)$$

матрица \mathbf{T} может быть выражена через собственные значения как матрица Вандермонда:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_i & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_i^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.4-28)$$

а также, что матрица перехода для канонической системы является диагональной матрицей вида

$$\Phi_c(t) = e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (2.4-29)$$

Матрица Вандермонда \mathbf{T} , определенная выражением (2.4—28), имеет обратную матрицу, так как собственные значения λ_i предполагаются все различными. Это легко показать, прибегнув к доказательству от противного. Если матрица \mathbf{T} не имеет обратной матрицы, то векторы-строки этой матрицы должны быть линейно зависимы. Следовательно, должна существовать линейная комбинация строк, эквивалентная нулевому вектору, т. е.

$$b_1 \lambda_i^{n-1} + b_2 \lambda_i^{n-2} + \dots + b_{n-1} \lambda_i + b_n = 0, \quad (2.4-30)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$. Так как полином $(n-1)$ -й степени не может иметь n различных корней, то исходное предположение ведет к противоречию, и, следовательно, матрица \mathbf{T} имеет обратную.

Матрицу, обратную матрице Вандермонда, можно легко определить при помощи интерполяционной формулы Лагранжа

$$f(z) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) P_i(z), \quad (2.4-31)$$

где

$$P_i(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{z - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (2.4-32)$$

— полином, для которого $P_i(\lambda_i)$ есть δ -функция Кронекера. Полиномы P_1, P_2, \dots, P_n — линейно независимы и образуют базис n -мерного векторного пространства V . Положим

$$f(z) = z^k, \quad (2.4-33)$$

тогда выражение (2.4—31) может быть записано в виде

$$z^k = \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^k P_i(z), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.4-34)$$

или, в матричных обозначениях,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{T} \mathbf{P}, \quad (2.4-35)$$

где

$$\mathbf{Z} = (1 \quad z^1 \quad z^2 \quad \dots \quad z^i \quad \dots \quad z^{n-1})' \quad (2.4-36)$$

$$\text{и} \quad \mathbf{P} = (P_0 \quad P_1 \quad \dots \quad P_i \quad \dots \quad P_{n-1})'. \quad (2.4-37)$$

Тогда матрица P определяется выражением

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}. \quad (2.4-38)$$

Матрицу \mathbf{T}^{-1} запишем в виде

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.4-39)$$

и тогда, развертывая матричную запись (2.4—38), получим

$$P_i(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} z^{j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4-40)$$

Следовательно, элемент α_{ij} обращенной матрицы Вандермонда можно найти как коэффициент при члене степени $j-1$ многочлена, определенного выражением (2.4—32). Элементы i -й строки матрицы \mathbf{T}^{-1} находятся как коэффициенты полинома, составленного на основании выражения (2.4—32), расположенного по возрастающим степеням z .

Легко показать, что элементы матрицы-столбца $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{d}$ могут быть найдены как вычеты в n полюсах $\frac{d}{\Delta(\lambda)}$, где

$$\Delta(\lambda) = \det [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}]. \quad (2.4-41)$$

Из формул (2.4—24) и (2.4—39) находим, что

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{d} = [d\alpha_{1n} \quad d\alpha_{2n} \quad \dots \quad d\alpha_{in} \quad d\alpha_{nn}]'. \quad (2.4-42)$$

Следовательно, элемент $d\alpha_{in}$ этой матрицы-столбца равен коэффициенту при наивысшей степени λ в полиноме $dP_i(\lambda)$, т. е.

$$d\alpha_{in} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{d}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{d(\lambda - \lambda_i)}{\Delta(\lambda)} \Big|_{\lambda=\lambda_i}, \quad (2.4-43)$$

что эквивалентно определению вычета в i -м полюсе функции $\frac{d}{\Delta(\lambda)}$.

2.5. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ

Уравнения движения Лагранжа

Рассмотрим простую систему, показанную на рис. 2.5—1. Предполагается, что силами трения можно пренебречь. Кинетическая энергия движущегося тела с массой M равна

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2. \quad (2.5-1)$$

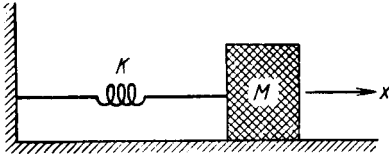


Рис. 2.5—1. Простая механическая система

Потенциальная энергия пружины

$$V = \int_0^x Kx \, dx = \frac{1}{2} Kx^2. \quad (2.5-2)$$

Применяя второй закон Ньютона, запишем уравнение движения тела:

$$M\ddot{x} + Kx = 0. \quad (2.5-3)$$

Дифференцируя равенство (2.5—1) по \dot{x} , получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}. \quad (2.5-4)$$

Дифференцируя выражение (2.5—4) по t , находим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = M\ddot{x}. \quad (2.5-5)$$

Дифференцируя равенство (2.5—2) по x , получим

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kx. \quad (2.5-6)$$

Суммируя левые части равенств (2.5—5) и (2.5—6) и используя уравнение (2.5—3), получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (2.5-7)$$

которое является специальным случаем уравнения движения Лагранжа для систем без потерь:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0. \quad (2.5-8)$$

В уравнении (2.5—8) переменные q_i называются обобщенными координатами, где $i = 1, 2, \dots, n$ для систем с n степенями свободы.

Определим формулой

$$L = L(\dot{q}_i, q_i) = T(\dot{q}_i, q_i) - V(q_i) \quad (2.5-9)$$

лагранжиан системы; тогда уравнение Лагранжа движения консервативной системы в случае отсутствия внешних сил можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.5-10)$$

Заметим, что, рассматривая движение в обобщенных координатах, мы, тем не менее, имеем дело с системами, к которым может быть применен принцип Даламбера. Уравнение движения Лагранжа может быть выведено из вариационного принципа Гамильтона. Этот принцип состоит в том, что любая динамическая система будет двигаться под действием консервативных сил из любого практически возможного начального состояния таким образом, чтобы минимизировать среднюю по времени разность между кинетической и потенциальной энергиями. В математических обозначениях это можно выразить как

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad \text{или} \quad \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0.$$

Применяя вариационный принцип Гамильтона к лагранжиану, определенному выражением (2.5-9), получаем

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \quad (2.5-11)$$

с начальными условиями, что $\delta q_i = 0$ при $t = t_1$ и $t = t_2$;

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt = \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0. \end{aligned} \quad (2.5-12)$$

При выводе этих формул было учтено, что величины $\delta \dot{q}_i$ и δq_i не являются независимыми друг от друга и \dot{q}_i есть производная от q_i по времени. Так как переменных q_i ровно столько, сколько степеней свободы имеет система, и все δq_i не зависят от времени,

то уравнение (2.5—12) может быть удовлетворено только тогда, когда величина, заключенная в квадратные скобки, равна нулю. Это условие приводит к уравнению движения Лагранжа в форме (2.5—10). Заметим, что вид уравнения Лагранжа не зависит от выбора системы координат. При переходе от одной системы обобщенных координат к другой преобразованные уравнения будут оставаться инвариантными по своей форме.

Можно показать, что для систем с потерями в случае отсутствия внешних сил уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (2.5-13)$$

где функцию F называют диссипативной функцией Релея.

При малых перемещениях системы работа по преодолению сил трения равна

$$\sum_i R_i \dot{q}_i \Delta q_i,$$

где R_i обозначают коэффициенты трения и $R_i \dot{q}_i$ — силы трения.

Мощность, рассеиваемая за счет сил трения, равна $\sum_i R_i \dot{q}_i^2$.

Диссипативная функция Релея определяется выражением

$$F = \frac{1}{2} \sum_i R_i \dot{q}_i^2; \quad (2.5-14)$$

отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i R_i \dot{q}_i. \quad (2.5-15)$$

Когда на систему действуют внешние силы, уравнения движения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (2.5-16)$$

где Q_i обозначает обобщенные силы. Если потери отсутствуют, то

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (2.5-17)$$

Потенциальная энергия $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ не зависит от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$. Уравнение Лагранжа можно записать в следующей векторной форме:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}. \quad (2.5-18)$$

Уравнение движения Гамильтона

Пусть p_i обозначает компоненту обобщенного момента системы, соответствующую координате q_i . Тогда

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.5-19)$$

Кинетическая энергия системы часто записывается в виде функции обобщенных скоростей и обобщенных координат:

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2.5-20a)$$

или

$$T_{\dot{q}} = T_{\dot{q}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}); \quad (2.5-20b)$$

эту функцию называют функцией Лагранжа для кинетической энергии.

С другой стороны, кинетическую энергию можно также записать в виде функции обобщенного момента и обобщенных координат:

$$T = T(p_1, p_2, \dots, p_n; q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2.5-21a)$$

или

$$T_p = T_p(\mathbf{p}, \mathbf{q}); \quad (2.5-21b)$$

эту функцию называют функцией Гамильтона для кинетической энергии.

По определению

$$T_{\dot{q}} \approx T_p. \quad (2.5-22)$$

Из формулы (2.5-22), в результате дифференцирования по q_i , получаем

$$\frac{\partial T_p}{\partial q_i} = \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_i} + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_n} \cdot \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial q_i}. \quad (2.5-23)$$

Учитывая равенство (2.5-19), находим

$$\frac{\partial T_p}{\partial q_i} = p_1 \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_i} + p_2 \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_i} + \dots + p_n \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial q_i}. \quad (2.5-24)$$

По теореме Эйлера имеем

$$2T_{\dot{q}} = \dot{q}_1 \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_2} + \dots + \dot{q}_n \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_n}, \quad (2.5-25)$$

что сводится к

$$2T_{\dot{q}} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + \dots + p_n \dot{q}_n = (\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}); \quad (2.5-26)$$

Так как $T_{\dot{q}}$ эквивалентно T_p по определению, то

$$2T_p = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + \dots + p_n \dot{q}_n. \quad (2.5-27)$$

Найдем частную производную по q_i :

$$2 \frac{\partial T_p}{\partial q_i} = p_1 \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_i} + p_2 \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_i} + \dots + p_n \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial q_i}. \quad (2.5-28)$$

Вычитая выражение (2.5-24) из уравнения (2.5-28), получим

$$\frac{\partial T_p}{\partial q_i} = -\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_i}. \quad (2.5-29)$$

Найдем теперь частную производную по p_i для выражения (2.5-22):

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_i} = \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_1} \cdot \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_i} + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_2} \cdot \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_n} \cdot \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial p_i}, \quad (2.5-30)$$

что можно записать как

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_i} = p_1 \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_i} + \dots + p_n \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial p_i}. \quad (2.5-31)$$

Возьмем частную производную по p_i от равенства (2.5-27):

$$2 \frac{\partial T_p}{\partial p_i} = p_1 \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_i} + \dots + \dot{q}_i + \dots + p_n \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial p_i}. \quad (2.5-32)$$

Вычитая равенство (2.5-31) из выражения (2.5-32), получим

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_i} = \dot{q}_i. \quad (2.5-33)$$

Используя равенства (2.5-29) и (2.5-33), уравнения движения Лагранжа приведем к виду

$$\dot{p}_i + \frac{\partial T_p}{\partial q_i} = Q_i; \quad (2.5-34) \quad \dot{q}_i = \frac{\partial T_p}{\partial p_i}, \quad (2.5-35)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$. Эти две системы уравнений называются *уравнениями Гамильтона*.

В случае консервативных систем обобщенные силы определяются выражением

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad (2.5-36)$$

где $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ — потенциальная энергия, не зависящая от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$.

Уравнение Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (2.5-37)$$

Так как лагранжиан определяется формулой

$$L(\dot{q}_i, q_i) = T_{\dot{q}}(\dot{q}_i, q_i) - V(q_i), \quad (2.5-38)$$

то его частные производные равны

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.5-39)$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (2.5-40)$$

При движении консервативной системы ее полная энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, остается неизменной. Функцию, выражающую полную энергию системы через координаты q и импульсы p , называют функцией Гамильтона и обозначают H . Отсюда

$$H = T_p + V = H(p, q). \quad (2.5-41)$$

Дифференцируя выражение (2.5-41), находим, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial T_p}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (2.5-42)$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial T}{\partial p_i}. \quad (2.5-43)$$

Подставляя уравнения (2.5-36), (2.5-42) и (2.5-43) в уравнения (2.5-43) и (2.5-35), получаем

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad (2.5-44) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (2.5-45)$$

Эти две системы уравнений называются *каноническими уравнениями Гамильтона*.

Легко заметить, что H -функция Гамильтона не зависит от времени. Производная от H по времени

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} \right)$$

равна нулю согласно формулам (2.5—44) и (2.5—45), если H не зависит явно от времени. Поэтому любой гамильтониан, удовлетворяющий каноническим уравнениям, является инвариантом движения для системы. Для консервативных систем полное изменение H во времени равно нулю. В некоторых случаях, когда H может зависеть явно от времени, изменение H с t за счет изменений p_i и q_i по-прежнему равно нулю, однако полное изменение dH/dt будет определяться явной частной производной $\partial H/\partial t$, которая равна $-\partial L/\partial t$.

Во многих случаях невозможно найти решение уравнений движения (2.5—44) и (2.5—45). Один из путей упрощения этих уравнений состоит в переходе от системы переменных p_i и q_i к другой системе переменных α_i и β_i , относительно которых преобразованные уравнения имеют более простой вид. Эти преобразования, результатом которых являются новые уравнения движения все в той же канонической форме, называются *каноническими преобразованиями*. Отсюда, если

$$p_i = p_i(\alpha, \beta) \text{ и } q_i = q_i(\alpha, \beta) \quad (2.5-46)$$

есть канонические преобразования, позволяющие от системы переменных p, q перейти к системе переменных α, β , то уравнения движения в системе α, β принимают вид

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_i}; \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i}, \quad (2.5-47)$$

где \bar{H} — гамильтониан, выраженный в системе α, β .

Преобразование

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad (2.5-48)$$

позволяет получить вместо $H(p, q)$ гамильтониан $\bar{H}(\alpha)$, в котором отсутствуют переменные β_i . Функция S в этом преобразовании называется производящей функцией $S(\alpha, q)$. Уравнения движения в этом случае принимают вид

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_i} = 0; \quad (2.5-49)$$

$$\frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i} = \text{const.} \quad (2.5-50)$$

Из первой системы уравнений вытекает, что все α_i суть константы. Вторая система уравнений следует из того факта, что \bar{H} есть функция только α_i и все α_i — константы. Ясно, что система уравнений (2.5—49) и (2.5—50) намного проще, чем (2.5—44) и (2.5—45), и решение ее легко найти, если только определена производящая функция $S(\alpha, q)$. Поэтому задача сводится теперь

к определению функции $S(\alpha, q)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению в частных производных

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i\right) = \bar{H}(\alpha_i). \quad (2.5-51)$$

Выражение в правой части равенства (2.5—51) представляет полную энергию системы. Так как $\beta_i = \partial S / \partial \alpha_i$, то

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right). \quad (2.5-52)$$

Комбинируя равенства (2.5—50) и (2.5—52), получаем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{dx_i}{dt} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right), \quad (2.5-53)$$

откуда

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (2.5-54)$$

Уравнение (2.5—54) известно под названием *уравнения Гамильтона — Якоби*. Рассмотренные выше уравнения движения в обобщенных координатах будут в дальнейшем использованы для проектирования оптимальных систем управления.

2.6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Материал, изложенный в настоящей главе, служит введением в некоторые основные разделы математики и механики, знакомство с которыми необходимо для изучения современной теории управления. Многие важные разделы, такие как теория меры, преобразования Гильберта, Банахово пространство, теория полугрупп, теория вероятности и случайных процессов, не были включены и оказались вне рассмотрения. Основное внимание было уделено изложению математических понятий и методов линейной алгебры, теории векторно-матричных дифференциальных уравнений, теории движения в обобщенных координатах, для того чтобы познакомить инженера с некоторыми мощными математическими средствами решения практических задач. Методы линейной алгебры играют важную роль в современной теории управления, сравнимую с ролью операторных методов в классической теории регулирования.

Литература к гл. 2

Гантмахер [66], Хадли [73], Халмош [74], Хоффман и Кунце [79]; к 2.3: Беллман [21], Пайпс [126]; к 2.4: Коддингтон и Левинсон [45], Пайпс [126]; к 2.5: Гольдштейн [70].

ГЛАВА 3

АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДАМИ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

При исследовании систем управления с научными или инженерными целями в большинстве случаев приходится иметь дело с двумя типами задач. К первому типу можно отнести задачи *анализа*, когда требуется определить характеристики заранее заданной системы; ко второму типу — задачи *синтеза*, когда требуется спроектировать систему, обладающую заданными характеристиками. Существует два основных подхода к анализу и синтезу линейных систем управления. Общепринятый подход сводится по существу к составлению блок-схемы или структурной схемы и определению передаточных функций отдельных элементов и всей системы. Задача конструктора состоит в выборе регулятора, обеспечивающего получение требуемых статических и динамических характеристик системы.

Второй подход основан главным образом на возможности описания поведения системы некоторым количеством дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния с начальными условиями, определяемыми из уравнений переходных состояний. Переменные состояния при таком описании системы аналогичны обобщенным координатам в классической механике. Решение задачи при использовании этого подхода обычно начинают с составления схемы системы в переменных состояния. Методы анализа и синтеза систем управления, использующие этот способ описания поведения системы, принято называть *методами пространства состояний*. Этот подход лежит в основе современной теории управления. В настоящей главе рассматривается анализ и синтез систем управления методами пространства состояний.

3.1. ПОНЯТИЕ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Методы анализа и синтеза систем управления и обработки информации, использующие теоретико-множественный подход к описанию поведения динамических систем, получили быстрое раз-

витие в течение нескольких последних лет. В рассматриваемой области эти методы стали применяться сравнительно недавно, хотя положенные в их основу идеи уже длительное время использовались в классической механике, в теории конечных автоматов, теории дифференциальных уравнений, а также в других областях.

Понятие *состояния*, лежащее в основе современного подхода к описанию поведения динамических систем, было впервые введено Тьюрингом в 1936 г. Позднее это понятие было использовано Шенноном в его основной работе по теории информации. Начало широкому использованию этого подхода для решения задач автоматического управления положили в 40-х годах русские ученые М. А. Айзерман, А. А. Фельдбаум, А. М. Летов, А. И. Лурье и др.

В Соединенных Штатах Америки распространение этих идей и основанных на них методов анализа и синтеза оптимальных линейных и нелинейных систем связано главным образом с работами Беллмана. В последние годы появилось множество других работ по применению этих методов к решению задач анализа и синтеза систем управления и среди них работы Калмана, оказавшие значительное влияние на современное состояние теории и направление исследований в рассматриваемой области.

С точки зрения анализа и синтеза систем представляется целесообразным разделить все переменные, характеризующие систему или имеющие определенное к ней отношение, на три группы: 1) входные переменные или входные воздействия m_i , представляющие сигналы, генерируемые системами, внешними по отношению к исследуемой, и влияющие на поведение системы; 2) выходные переменные или переменные, характеризующие реакцию системы y_i , позволяющие описать некоторые аспекты поведения системы, представляющие интерес для исследователя; 3) переменные (координаты) состояния или промежуточные переменные x_k , характеризующие динамическое поведение исследуемой системы.

Схематически система может быть изображена в виде «черного ящика» с некоторым числом входных и выходных каналов, как показано на рис. 3.1—1. Входные каналы на этом рисунке представляют совокупность входных переменных или входных воздействий m_i ; выходные каналы — совокупность выходных переменных или выходных координат y_i системы. Промежуточные переменные или координаты состояния x_k отнесены к содержимому «черного ящика» и, таким образом, скрыты от наблюдателя. Величины m_i , y_j и x_k предполагаются функциями времени и

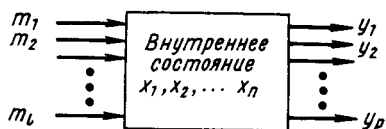


Рис. 3.1—1. К описанию системы переменными состояниями

$m_i(t)$, $y_j(t)$ и $x_k(t)$ обозначают соответственно значения величин m_i , y_j и x_k в момент времени t .

Для удобства оперирования с многомерными величинами совокупность входных переменных представим в виде *вектора входа*

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_l \end{bmatrix}; \quad (3.1-1)$$

совокупность выходных переменных — в виде *вектора выхода*

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \quad (3.1-2)$$

и совокупность переменных состояния — в виде *вектора состояния*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (3.1-3)$$

Согласно понятию векторного пространства, введенного в гл. 2, множество всех значений, которые может принять вектор входа \mathbf{m} в момент t , образует *пространство входа* системы. Аналогично, множество всех значений, которые может принять вектор выхода \mathbf{y} в момент t , образует *пространство выхода* системы, и множество всех значений, которые может принять вектор состояния \mathbf{x} в момент t , образует *пространство состояний* системы.

В любой момент времени t состояние системы является функцией начального состояния $\mathbf{x}(t_0)$ и вектора входа $\mathbf{m}(t_0, t)$, т. е.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{m}(t_0, t)], \quad (3.1-4)$$

где \mathbf{F} — однозначная функция своих аргументов.

Вектор выхода в момент t является также функцией $\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{m}(t_0, t)$ и может быть записан как

$$\mathbf{y}(t) = \Psi[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{m}(t_0, t)]. \quad (3.1-5)$$

Уравнения (3.1-4) и (3.1-5) часто называют уравнениями состояния системы. Для систем, описываемых дифференциальными уравнениями, уравнения (3.1-4) и (3.1-5) могут быть записаны в следующей общей форме:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t); \mathbf{m}(t)]; \quad (3.1-6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \Psi[\mathbf{x}(t); \mathbf{m}(t)]. \quad (3.1-7)$$

Для систем, которые являются конечными автоматами, уравнения состояния принимают вид

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(n-1); \mathbf{m}(n-1)]; \quad (3.1-8)$$

$$\mathbf{y}(n) = \Psi[\mathbf{x}(n); \mathbf{m}(n)]. \quad (3.1-9)$$

Если система описывается линейными дифференциальными уравнениями, то уравнения состояния системы сводятся к следующим:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{m}(t); \quad (3.1-10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{m}(t), \quad (3.1-11)$$

где $\mathbf{A}(t)$ — матрица коэффициентов;

$\mathbf{D}(t)$ — матрица управления;

$\mathbf{B}(t)$ — матрица выхода;

$\mathbf{G}(t)$ — матрица обхода системы.

Для линейной системы со случайными параметрами уравнения состояния могут быть записаны в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(g)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(g)\mathbf{m}(t), \quad (3.1-12)$$

где матрицы \mathbf{A} и \mathbf{D} являются функциями вектора случайных параметров g .

Вывод уравнений состояния, полностью характеризующих систему, является начальным этапом анализа синтеза систем в современной теории управления.

3.2. ОПИСАНИЕ СИСТЕМ ПЕРЕМЕННЫМИ СОСТОЯНИЯ

Линейная стационарная система или процесс могут быть описаны совокупностью линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, которую можно представить в следующей векторно-матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v}(t), \quad (3.2-1)$$

где \mathbf{A} — матрица коэффициентов; $\mathbf{v}(t)$ — вектор-столбец, представляющий собой входные переменные m_i и координаты x_k системы

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}. \quad (3.2-2)$$

Если входные переменные рассматривать совместно с переменными состояния системы, т. е. включить их в число координат системы, то вектор \mathbf{v} можно считать вектором состояния системы увеличенной размерности.

В качестве иллюстрации рассмотрим систему второго порядка, описываемую уравнением

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = m(t). \quad (3.2-3)$$

Чтобы записать это уравнение в векторно-матричной форме, положим

$$x_1 = x \text{ и } x_2 = \dot{x}_1 \quad (3.2-4)$$

и тогда получим

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad (3.2-5a)$$

$$\dot{x}_2 = m - bx_1 - ax_2. \quad (3.2-5b)$$

Рассмотрим вначале случай $m = 0$. Обозначая

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (3.2-6)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}, \quad (3.2-7)$$

уравнения (3.2-5) запишем в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (3.2-8)$$

Пусть теперь входное воздействие m имеет вид ступенчатой функции. Тогда

$$\dot{m} = 0; \quad (3.2-9a)$$

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad (3.2-9b)$$

$$\dot{x}_2 = m - bx_1 - ax_2. \quad (3.2-9в)$$

Обозначим

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad (3.2-10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -b & -a \end{bmatrix} \quad (3.2-11)$$

и уравнения (3.2-9) приведем к виду

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v}, \quad (3.2-12)$$

где \mathbf{A} — матрица коэффициентов системы увеличенной размерности.

В случае входного воздействия произвольной формы систему увеличенной размерности можно по-прежнему описать уравнением (3.2—2), введя в число ее переменных состояния дополнительные переменные, характеризующие входное воздействие. Описание входных воздействий переменными состояниями рассматривается в следующем параграфе.

Пусть теперь заданы начальные условия для уравнения (3.2—1), т. е. задан вектор $\mathbf{v}(0^+)$. Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (3.2—1), находим

$$s\mathbf{V}(s) - \mathbf{v}(0^+) = \mathbf{A}\mathbf{V}(s) \quad (3.2-13)$$

или

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{V}(s) = \mathbf{v}(0^+). \quad (3.2-14)$$

Отсюда находим, что изображение по Лапласу вектора состояния $\mathbf{v}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{V}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{v}(0^+), \quad (3.2-15)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица.

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (3.2—15), получаем

$$\mathbf{v}(t) = L^{-1} \{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{v}(0^+) \}. \quad (3.2-16)$$

Обозначая

$$\Phi(t) = L^{-1} \{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \}, \quad (3.2-17)$$

уравнение (3.2—16) запишем в виде

$$\mathbf{v}(t) = \Phi(t) \mathbf{v}(0^+). \quad (3.2-18)$$

Матрица $\Phi(t)$ называется расширенной матрицей перехода системы.

В параграфе 2.4 было найдено, что решение уравнения (3.2—1) имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}(0^+). \quad (3.2-19)$$

Сравнивая формулы (3.2—18) и (3.2—19), находим

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}; \quad (3.2-20a)$$

$$\Phi(t) = L^{-1} \{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \}, \quad (3.2-20b)$$

что позволяет вычислить $\Phi(t)$ двумя способами. Заметим, что при вычислении $\Phi(t)$ по формуле (3.2—20a) может найти применение рассмотренная в параграфе 2.3 теорема Сильвестра о разложении функции от матрицы.

Обращаясь вновь к описанной выше иллюстративной задаче, находим

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ b & s+a \end{bmatrix}. \quad (3.2-21)$$

Тогда

$$\Phi(s) = [s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{s(s+a)+b} \begin{bmatrix} s+a & 1 \\ -b & s \end{bmatrix}. \quad (3.2-22)$$

Пусть матрица \mathbf{A} имеет действительные и различные собственные значения

$$\lambda_1 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4b}; \quad \lambda_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4b},$$

где $a^2 > 4b$.

Тогда

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b}} \begin{bmatrix} (\lambda_1 - a)e^{-\lambda_1 t} - (\lambda_2 - a)e^{-\lambda_2 t} & e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} \\ b(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) & \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \end{bmatrix}. \quad (3.2-23)$$

Если собственные значения матрицы \mathbf{A} являются комплексными числами, то матрица перехода $\Phi(t)$ принимает вид

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{at}{2}} \left(\cos \omega_0 t + \frac{a}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \right) & \frac{1}{\omega_0} e^{-\frac{at}{2}} \sin \omega_0 t \\ -\frac{b}{\omega_0} e^{-\frac{at}{2}} \sin \omega_0 t & e^{-\frac{at}{2}} \left(\cos \omega_0 t - \frac{a}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \end{bmatrix}, \quad (3.2-24)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}.$$

Определение $\Phi(t)$ при использовании теоремы разложения Сильвестра было рассмотрено в параграфе 2.3. В последующих разделах книги будут рассмотрены также другие методы определения матрицы перехода.

Один из способов определения переменных состояния использует схему системы в переменных состояния. Эта схема составляется из интеграторов, усилителей, суммирующих устройств. Выходы интеграторов могут быть выбраны в качестве координат (переменных) состояния системы. Схема в переменных состояния дает наглядную физическую интерпретацию координат системы и описывает их взаимную связь. Обратимся к предыдущему при-

меру. Схему в переменных состояния можно составить непосредственно по заданному дифференциальному уравнению или по изображению Лапласа. Применяя прямое преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (3.2—3), получим

$$(s^2 + as + b)X(s) = M(s) + (s + a)x(0^+) + ax'(0^+), \quad (3.2-25)$$

откуда

$$X(s) = \frac{s^{-2}M(s)}{1 + as^{-1} + bs^{-2}} + \frac{s^{-1}(1 + as^{-1})x(0^+)}{1 + as^{-1} + bs^{-2}} + \frac{s^{-2}x'(0^+)}{1 + as^{-1} + bs^{-2}}. \quad (3.2-26)$$

Схема системы в переменных состояния, которая непосредственно следует из формулы (3.2—26), изображена на рис. 3.2—1.

Выход $x = x_1$ является суммой трех составляющих, возникающих соответственно за счет $m(t)$, $x_1(0^+)$ и $x_2(0^+)$. Из схемы системы можно видеть, что составляющая за счет $x_1(0^+)$ равна

$$\frac{s^{-1}(1 + as^{-1})x_1(0^+)}{1 + as^{-1} + bs^{-2}}$$

и составляющая за счет $x_2(0^+)$ равна

$$\frac{x_2(0^+)}{1 + as^{-1} + bs^{-2}}.$$

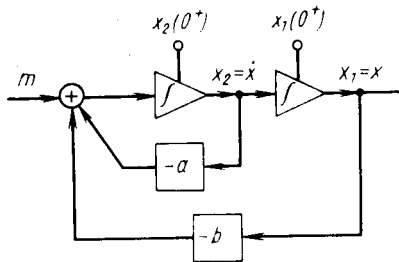


Рис. 3.2—1. Схема в переменных состояния для системы второго порядка

Схемы в переменных состояния для непрерывных систем

Схемы непрерывных систем в переменных состояния совпадают со схемами моделирования этих систем на аналоговых вычислительных машинах. Схема системы в переменных состояния может быть составлена по передаточной функции системы тремя различными способами: 1) прямого программирования, 2) параллельного программирования, 3) последовательного программирования. Для иллюстрации различных методов составления схемы системы в переменных состояния рассмотрим систему с передаточной функцией

$$\frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 7s + 12)}. \quad (3.2-27)$$

1. **Прямое программирование.** Уравнение (3.2—27) можно записать в виде

$$\frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{s^{-1} + 3s^{-2} + 2s^{-3}}{1 + 7s^{-1} + 12s^{-2}}$$

или

$$Y(s) = (s^{-1} + 3s^{-2} + 2s^{-3}) E(s), \quad (3.2-28)$$

где

$$E(s) = \frac{M(s)}{1 + 7s^{-1} + 12s^{-2}},$$

откуда

$$E(s) = M(s) - 7s^{-1}E(s) - 12s^{-2}E(s). \quad (3.2-29)$$

В схеме системы в переменных состояния, показанной на рис. 3.2—2, используются уравнения (3.2—28) и (3.2—29). Переменными состояниями являются x_1, x_2, x_3 .

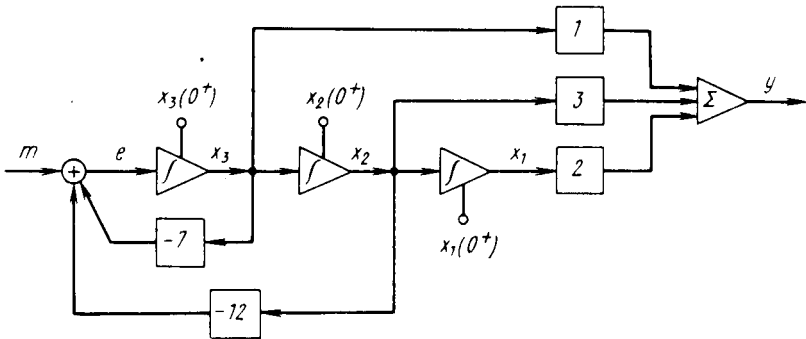


Рис. 3.2—2. Схема в переменных состояния для прямого программирования

Дифференциальные уравнения для переменных состояния могут быть легко найдены из рассмотрения схемы системы. Предполагая, что входное воздействие является ступенчатой функцией, получим

$$\begin{aligned} \dot{m} &= 0; \\ \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= m - 12x_2 - 7x_3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} m \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -12 & -7 \end{bmatrix}.$$

Выход $y(t)$ является линейной комбинацией переменных состояния:

$$y(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) + x_3(t).$$

2. Параллельное программирование. Запишем вначале равенство (3.2—27) в виде суммы дробно-рациональных функций:

$$\frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{1}{6s} - \frac{2}{3(s+3)} + \frac{3}{2(s+4)}. \quad (3.2-30)$$

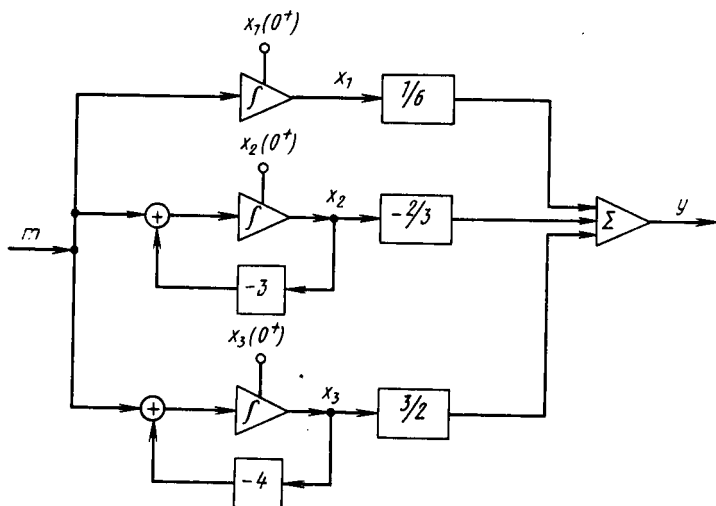


Рис. 3.2—3. Схема в переменных состояния для параллельного программирования

Схема системы в переменных состояния (рис. 3.2—3) следует из этого выражения непосредственно. Система дифференциальных уравнений первого порядка имеет теперь вид

$$\dot{m} = 0;$$

$$\dot{x}_1 = m;$$

$$\dot{x}_2 = m - 3x_2;$$

$$\dot{x}_3 = m - 4x_3,$$

где предполагается, что входное воздействие является ступенчатой функцией. Матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Выход $y(t)$ является так же, как и ранее, линейной комбинацией координат:

$$y(t) = \frac{1}{6} x_1(t) - \frac{2}{3} x_2(t) + \frac{3}{2} x_3(t).$$

3. **Последовательное программирование.** Равенство (3.2—7) записываем вначале в виде произведения дробно-рациональных

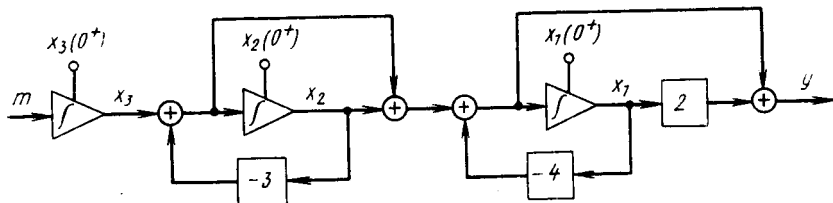


Рис. 3.2—4. Схема в переменных состояния для последовательного программирования

функций, откуда непосредственно следует схема системы в переменных состояния, показанная на рис. 3.2—4. Система дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{m} &= 0; \\ \dot{x}_1 &= -4x_1 + x_2 + x_3; \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 &= m. \end{aligned}$$

Здесь также предполагается, что входное воздействие является ступенчатой функцией. Матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выход $y(t)$ дается линейной комбинацией координат:

$$y(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t).$$

Предыдущее рассмотрение иллюстрирует также описание системы различными системами переменных состояния.

Схемы в переменных состояния для дискретных систем

Для дискретных систем схемы в переменных состояния имеют почти такой же вид, как и схемы моделирования этих систем. Последние могут быть составлены по передаточной функции дискретной системы тремя различными способами: 1) прямого программирования, 2) параллельного программирования, 3) после-

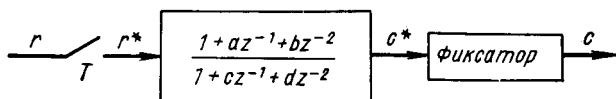


Рис. 3.2—5. Структурная схема простой дискретной системы

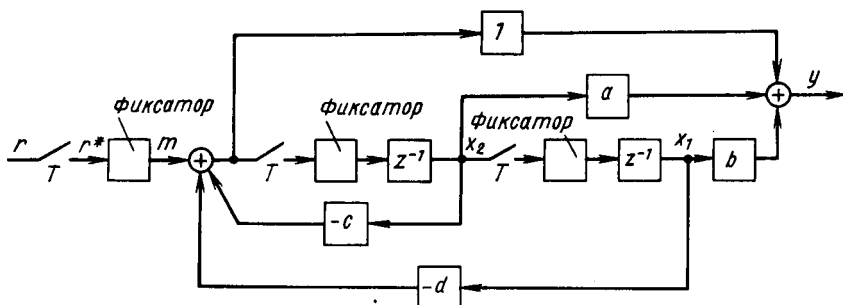


Рис. 3.2—6. Схема в переменных состояния для прямого программирования

довательного программирования. Схема системы в переменных состояния состоит из прерывателей, элементов фиксации и задержки, суммирующих устройств, усилителей или потенциометров. Для иллюстрации различных способов составления схемы системы в переменных состояния рассмотрим дискретную систему, характеризуемую передаточной функцией

$$D(z) = \frac{1 + az^{-1} + bz^{-2}}{1 + cz^{-1} + dz^{-2}}, \quad (3.2-31)$$

структурная схема которой показана на рис. 3.2—5.

1. **Прямое программирование.** Схема системы в переменных состояния, составленная при использовании стандартной процедуры, показана на рис. 3.2—6. Переменные x_1 и x_2 характеризуют состояние объекта и представляют собой выходы соответствующих фиксаторов и элементов задержки. Из рассмотрения схемы

системы в переменных состояния получаем дифференциальные уравнения состояния

$$\dot{x}_1 = 0;$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

и уравнения переходных состояний

$$\begin{aligned} x_1(nT^+) &= x_1(\overline{n+1T}) = x_2(nT); \\ x_2(nT^+) &= -dx_1(nT) - cx_2(nT) + m(nT); \\ m(nT^+) &= r(nT). \end{aligned}$$

Уравнения переходных состояний описывают изменение координат системы в моменты квантования и определяют начальные условия для каждого перехода системы в другое состояние. Выходной сигнал $y(t)$ является линейной комбинацией координат x_1 и x_2 и входного воздействия m :

$$y(t) = (b-d)x_1(t) + (a-c)x_2(t) + m(t).$$

2. Параллельное программирование. Для составления схемы системы в переменных состояния методом параллельного программирования запишем передаточную функцию в виде суммы дробно-рациональных функций

$$D(z) = \frac{1 + \alpha_1 z^{-1}}{1 + \beta_1 z^{-1}} + \frac{1 + \alpha_2 z^{-1}}{1 + \beta_2 z^{-1}}, \quad (3.2-32)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — известные функции от a, b, c, d .

Схема системы в переменных состояния, которая может быть составлена непосредственно по формуле (3.2—32), показана на рис. 3.2—7. Дифференциальные уравнения состояния имеют простой вид:

$$\dot{x}_1 = 0;$$

$$\dot{x}_2 = 0.$$

Уравнения переходных состояний находим в виде

$$\begin{aligned} x_1(nT^+) &= -\beta_1 x_1(nT) + m(nT); \\ x_2(nT^+) &= -\beta_2 x_2(nT) + m(nT); \\ m(nT^+) &= r(nT). \end{aligned}$$

Выход $y(t)$ легко находим из рассмотрения схемы системы в переменных состояния:

$$y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + 2m(t),$$

т. е. в виде линейной комбинации координат и входного воздействия.

3. **Последовательное программирование.** Передаточную функцию (3.2—31) запишем вначале в виде произведения дробно-рациональных функций:

$$D(z) = \frac{(1 + \alpha z^{-1})(1 + \beta z^{-1})}{(1 + \gamma z^{-1})(1 + \delta z^{-1})}. \quad (3.2-33)$$

Схема системы в переменных состояния, составленная при непосредственном использовании формулы (3.2—33), показана на

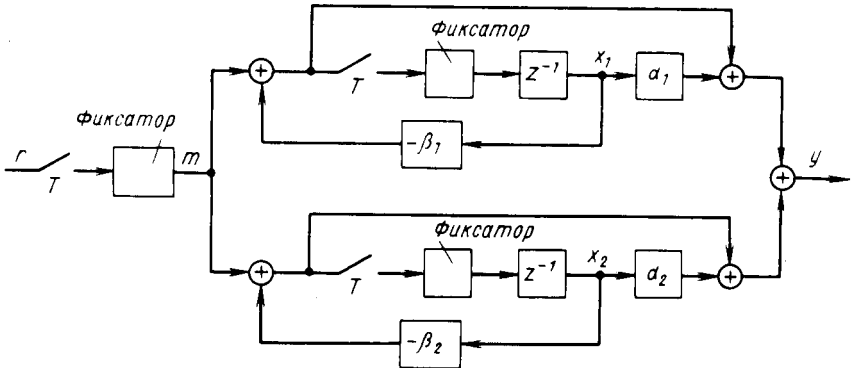


Рис. 3.2—7. Схема в переменных состояния для параллельного программирования

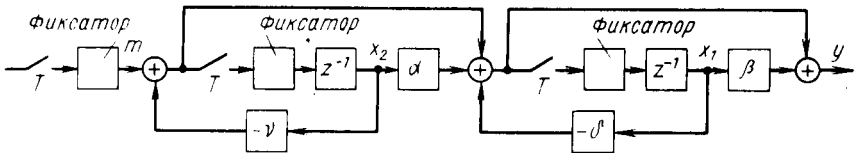


Рис. 3.2—8. Схема в переменных состояния для последовательного программирования

рис. 3.2—8. Из рассмотрения этой схемы находим дифференциальные уравнения состояния

$$\dot{x}_1 = 0;$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

и уравнения переходных состояний

$$x_1(nT^+) = -\delta x_1(nT) + (\alpha - \delta) x_2(nT) + m(nT);$$

$$x_2(nT^+) = -\gamma x_2(nT) + m(nT);$$

$$m(nT^+) = r(nT).$$

Выход $y(t)$, как и ранее, находим в виде линейной комбинации координат и входного воздействия:

$$y(t) = (\beta - \delta) x_1(t) + (\alpha - \gamma) x_2(t) + m(t).$$

Пример 3.2—1. Линейный интерполятор

Рассмотрим линейный интерполятор, показанный на рис. 3.2—9.

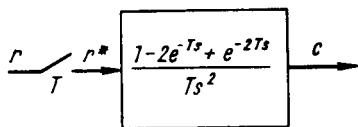


Рис. 3.2—9. Линейный интерполятор

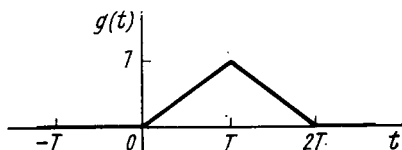


Рис. 3.2—10. Импульсная переходная функция линейного интерполятора

Составим схему системы в переменных состояния, дифференциальные уравнения состояния и уравнения переходных состояния. Применяя обратное преобразование Лапласа к передаточной функции

$$G(s) = \frac{1 - 2e^{-Ts} + e^{-2Ts}}{Ts^2},$$

находим импульсную переходную функцию системы

$$g(t) = \frac{t}{T} u(t) - 2 \left(\frac{t}{T} - 1 \right) u(t - T) + \left(\frac{t}{T} - 2 \right) u(t - 2T),$$

где $u(t)$ — единичная ступенчатая функция.

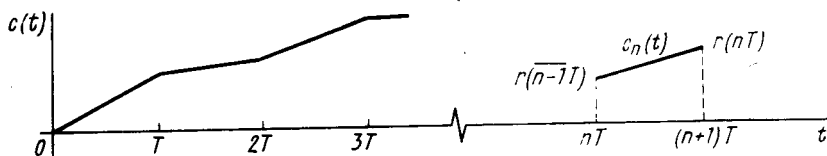


Рис. 3.2—11. Выходной сигнал линейного интерполятора

Импульсная переходная функция системы показана на рис. 3.2—10. Выход интерполятора можно найти путем сложения реакции системы на входные импульсы, поступающие в последовательные моменты квантования. Рис. 3.2—11 иллюстрирует форму сигналов на выходе системы. Выход интерполятора $c_n(t)$ на интервале

$$0 < t - nT \leq nT \text{ или } nT < t \leq (n+1)T$$

определяется из рекуррентного соотношения

$$c_n(t) = r(\overline{n-1}T) + \frac{1}{T} \{ r(nT) - r(\overline{n-1}T) \} (t - nT),$$

которое называют производящей функцией интерполятора. Схема системы в переменных состояния может быть легко составлена по ее производящей функ-

ции, как показано на рис. 3.2—12. Координаты x_1 и x_2 представляют собой выходы интегратора и цепи фиксатора и элемента задержки, соответственно. Уравнения состояния системы имеют вид

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{T}(m - x_2);$$

$$\dot{x}_2 = 0,$$

где m — управляющее воздействие. Уравнения переходных состояний, которые определяют начальные условия при каждом переходе системы в другое состояние, имеют вид

$$x_1(nT^+) = x_1(nT) = r(n-1T);$$

$$x_2(nT^+) = m(nT);$$

$$m(nT^+) = r(nT).$$

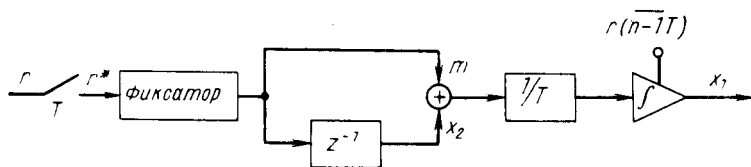


Рис. 3.2—12. Схема в переменных состояния линейного интерполятора

Пример 3.2—2. Уравнения состояния химического реактора с мешалкой

Проиллюстрируем описанный выше подход к представлению динамических систем на реальном объекте — химическом реакторе с мешалкой [71]. На рис. 3.2—13 показана упрощенная схема химического реактора с мешалкой. В реакторе протекают одновременно две реакции: $C_1 \rightarrow C_2$ со скоростью r_1 и $C_2 \rightarrow C_3$ со скоростью r_2 . Предполагается, что:

1) компоненты C_1 , C_2 и C_3 имеют одинаковую удельную теплоемкость и плотность;

2) молекулярный вес компонент не изменяется в ходе реакции;

3) реакция $C_1 \rightarrow C_2$ является экзотермической, реакция $C_2 \rightarrow C_3$ — эндотермической и теплоты реакций равны H_1 и H_2 соответственно.

Скорости реакций равны

$$r_1 = \omega_1 e^{\alpha_1 - \beta_1/x_3}$$

и

$$r_2 = \omega_2 e^{\alpha_2 - \beta_2/x_3},$$

где ω_1 и ω_2 — весовые доли компонент C_1 и C_2 соответственно; x_3 — температура реактора; α_1 , α_2 , β_2 , β_1 — константы.

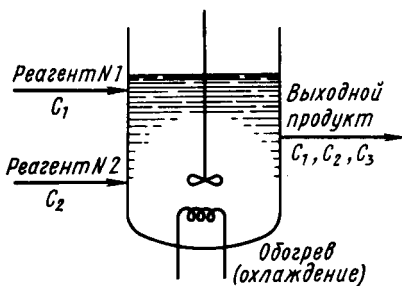


Рис. 3.2—13. Схема химического реактора с мешалкой

Пусть f_1, f_2 — скорости поступления компонент C_1 и C_2 соответственно; T_1 и T_2 — их температуры; m — скорость теплообмена реактора; w_3 — весовая доля компоненты C_3 . Все три весовые доли связаны соотношением $w_1 + w_2 + w_3 = 1$. В задаче предполагается, что f_1, f_2, T_1 и T_2 являются неконтролируемыми и в то же время детерминированными возмущающими воздействиями и регулирование реактора осуществляется путем изменения скорости теплообмена m . Введя переменные состояния равенствами $x_1 = w_1, x_2 = w_3$, обозначив через x_3 температуру реактора и используя условия теплового баланса и баланса масс, находим дифференциальные уравнения состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1 - (f_1 + f_2 - e^{\alpha_1 - \beta_1/x_1}) x_1; \\ \dot{x}_2 &= (1 - x_1 - x_2) e^{\alpha_2 - \beta_2/x_2} - (f_1 + f_2) x_2; \\ \dot{x}_3 &= H_1 x_1 e^{\alpha_1 - \beta_1/x_3} + H_2 (1 - x_1 - x_2) e^{\alpha_2 - \beta_2/x_3} + f_1 (T_1 - x_3) + f_2 (T_2 - x_3) + m, \end{aligned}$$

характеризующие динамику химических процессов в реакторе с мешалкой. Отметим, что полученные уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями и не могут быть представлены в такой компактной форме, как уравнение (3.2—1).

Выбор переменных состояния

Представление системы ее схемой в переменных состояния не является единственным. Для одной и той же системы можно составить несколько таких схем, отличающихся природой переменных, выбранных в качестве переменных состояния. Различный выбор этих переменных обычно приводит к различным конфигурациям схем системы в переменных состояния. Проиллюстрируем это на примере системы посадки самолета, рассмотренной в параграфе 1.3. Посадка самолета включает несколько фаз [54]. В течение первой фазы самолет с помощью директорного радиоборудования, указывающего необходимый курс, приводится к аэропорту. Вторая фаза начинается в нескольких километрах от аэропорта по достижении самолетом зоны, в которой он входит в контакт с лучом наземной глассадной станции. Следуя лучу, пилот ведет самолет вдоль глассады планирования под углом примерно — 3° к посадочной полосе. На высоте порядка 30 м начинается фаза выравнивания. На этой последней фазе пилотирование по радиолучу наземной посадочной системы из-за наличия электромагнитных помех становится малоэффективным. Планирование под углом — 3° к горизонту также не отвечает требованиям безопасности полета и обеспечения комфорта. Поэтому на заключительной стадии посадки пилот вынужден управлять самолетом, основываясь на своих визуальных наблюдениях посадочной полосы. Линеаризованное управление короткопериодических колебаний в продольном движении самолета найдено ранее в виде

$$\frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + 2\zeta\omega_0 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{d\theta(t)}{dt} = KT_0\omega_0^2 \frac{d\delta(t)}{dt} + K\omega_0^2\delta(t). \quad (3.2-34)$$

Угол тангажа θ и высота h связаны дифференциальным уравнением

$$T_0 \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + \frac{dh(t)}{dt} = V\theta(t). \quad (3.2-35)$$

В этих уравнениях используются все прежние обозначения, введенные в параграфе 1.3. Комбинируя уравнения (3.2-34) и (3.2-35) и применяя прямое преобразование Лапласа, находим передаточную функцию, связывающую отклонение руля высоты δ и высоту h :

$$h(s) = \frac{KV}{s^2 \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2 \right)} \delta(s). \quad (3.2-36)$$

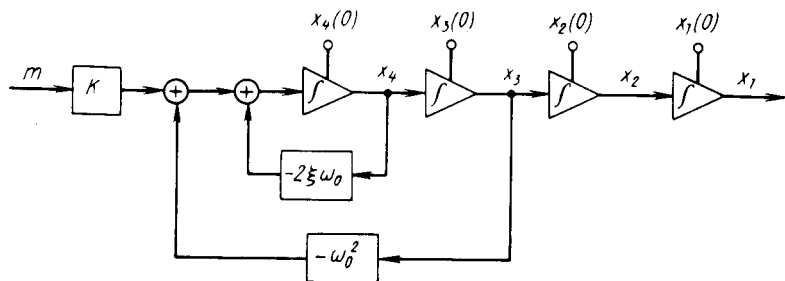


Рис. 3.2—14. Схема в переменных состояния, характеризующая динамику изменения высоты самолета от отклонения руля высоты

Схема системы в переменных состояния, составленная по формуле (3.2-36), показана на рис. 3.2—14. В качестве координат системы в этой схеме выбраны переменные

$$x_1 = h; \quad x_2 = \frac{dh}{dt}; \quad x_3 = \frac{d^2 h}{dt^2}; \quad x_4 = \frac{d^3 h}{dt^3}. \quad (3.2-37)$$

Как было показано в параграфе 1.3, дифференциальные уравнения самолета при соответствующем выборе промежуточных переменных могут быть заменены следующей системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -\omega_0^2 x_3 - 2\zeta\omega_0 x_4 + Km. \end{aligned} \quad (3.2-38)$$

Схема системы в переменных состояния может быть составлена также при использовании этих дифференциальных уравнений. Однако при таком описании самолета в качестве координат системы будут выбраны высота и ее три производные, хотя две из них d^2h/dt^2 и d^3h/dt^3 не могут быть измерены непосредственно.

Возможен еще и другой вариант схемы системы в переменных состояния. Выберем в качестве переменных состояния высоту, скорость изменения высоты, угол тангажа и угловую скорость тангажа. Эти переменные могут быть легко измерены с помощью радиовысотомера и гидродатчиков. Исключая θ из уравнений (3.2—34) и (3.2—35), получаем

$$\frac{d^4h(t)}{dt^4} + 2\zeta\omega_0 \frac{d^3h(t)}{dt^3} + \omega_0^2 \frac{d^2h(t)}{dt^2} = KV\omega_0^2\delta(t). \quad (3.2-39)$$

Из уравнения (3.2—35) следует, что

$$T_0 \frac{d^2h(t)}{dt^2} = V\theta(t) - \frac{dh(t)}{dt}. \quad (3.2-40)$$

Дифференцируя уравнение (3.2—40) по t , получаем

$$T_0 \frac{d^3h(t)}{dt^3} = V \frac{d\theta(t)}{dt} - \frac{d^2h(t)}{dt^2}. \quad (3.2-41)$$

Дифференцируя выражение (3.2—41) по t , находим

$$T_0 \frac{d^4h(t)}{dt^4} = V \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \frac{d^3h(t)}{dt^3}. \quad (3.2-42)$$

Комбинируя уравнения (3.2—39) и (3.2—42), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \frac{1-2\zeta\omega_0T_0}{T_0} \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{1-2\zeta\omega_0T_0 + \omega_0^2T_0^2}{T_0^2} \theta(t) - \\ - \frac{1-2\zeta\omega_0T_0 + \omega_0^2T_0^2}{VT_0^2} \frac{dh(t)}{dt} = K\omega_0^2T_0\delta(t). \end{aligned} \quad (3.2-43)$$

Определим переменные состояния равенствами

$$x_1 = h; \quad x_2 = \frac{dh}{dt}; \quad x_3 = \theta; \quad x_4 = \frac{d\theta}{dt} \quad (3.2-44)$$

и в нижеследующих уравнениях отклонение руля высоты δ заменим на m . Тогда из формулы (3.2—44) имеем

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.2-45a)$$

из формул (3.2—40) и (3.2—44)

$$\dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3; \quad (3.2-45b)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (3.2-45b)$$

и из формул (3.2—43) и (3.2—44)

$$\dot{x}_4 = a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + K_0m, \quad (3.2—45г)$$

где

$$K_0 = K\omega_0^2 T_0;$$

$$a_{22} = -\frac{1}{T_0}; \quad a_{23} = \frac{V}{T_0};$$

$$a_{42} = \frac{1}{VT_0^2} - \frac{2\zeta\omega_0}{VT_0} + \frac{\omega_0^2}{V};$$

$$a_{43} = \frac{1}{T_0^2} - \frac{2\zeta\omega_0}{T_0} - \omega_0^2; \quad a_{44} = \frac{1}{T_0} - 2\zeta\omega_0.$$

Схема в переменных состояния системы, характеризующей самолет (рис. 3.2—15), может быть легко составлена по уравне-

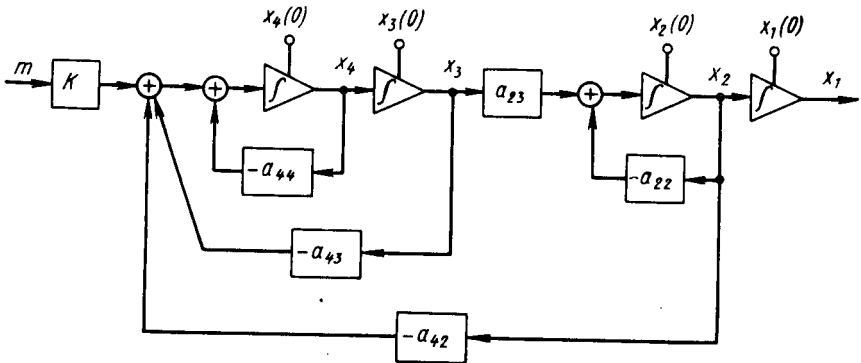


Рис. 3.2—15. Другой вариант схемы в переменных состояния, характеризующей динамику изменения высоты самолета

ниям (3.2—45). Можно видеть, что она существенно отличается от схемы, показанной на рис. 3.2—14. Схема рис. 3.2—15 обладает тем преимуществом, что в ней все переменные состояния допускают непосредственное измерение. При расчете оптимальных систем, как это рассматривается в последующих главах книги, чрезвычайно желательно, чтобы все координаты можно было непосредственно наблюдать и измерять. Поэтому при составлении схемы системы в переменных состояния очень важно выбирать в качестве переменных состояния измеримые переменные.

Цель настоящего параграфа состояла в том, чтобы показать, каким образом могут быть получены дифференциальные уравнения состояния, уравнения переходных состояний и схемы системы в переменных состояния; использование уравнений состояния и

уравнений переходных состояний для анализа дискретных систем рассматривается в параграфе 3.5. Проектирование систем управления на основе методов пространства состояний является предметом рассмотрения следующих глав книги.

3.3. ОПИСАНИЕ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПЕРЕМЕННЫМИ СОСТОЯНИЯ

В предыдущем параграфе было показано, каким образом переменные состояния и схемы в переменных состояниях могут быть использованы для описания процесса или объекта управления. Для того чтобы обобщить этот подход для описания системы, находящейся под влиянием входных воздействий и возмущений, переменные состояния и схемы в переменных состояниях должны применяться и для описания входных воздействий. Входное воздействие можно рассматривать как выход генератора входной функции или системы, формирующей входной сигнал. Эту систему, согласно предыдущему, можно описать переменными состояниями. В настоящем параграфе рассматривается описание переменными состояниями некоторых часто встречающихся входных воздействий [68].

Входное воздействие в виде полиномиальной функции

Полиномиальное входное воздействие можно описать функцией

$$r = r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \dots + r_{n-1} t^{n-1}, \quad (3.3-1)$$

где $t \geq 0$.

Обозначим

$$r = x_1$$

и продифференцируем уравнение (3.3-1) по t . Тогда

$$\dot{x}_1 = r_1 + 2r_2 t + \dots + (n-1)r_{n-1} t^{n-2}$$

и, аналогично,

$$\dot{x}_2 = 2r_2 + 6r_3 + \dots + (n-1)(n-2)r_{n-1} t^{n-3} = x_3,$$

$$\dot{x}_3 = x_4;$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_i = x_{i+1};$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n;$$

$$\dot{x}_n = 0.$$

Величины x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) называются переменными (координатами) состояния входа. Эти дифференциальные уравнения

показывают, что полиномиальное входное воздействие можно получить с помощью цепочки последовательно соединенных интеграторов, как изображено на рис. 3.3—1. Начальные условия на интеграторах

$$\begin{aligned} x_1(0) &= r_0; \\ x_2(0) &= r_1; \\ &\dots \dots \dots \\ x_n(0) &= r_{n-1} (n-1)!, \end{aligned}$$

т. е. равны коэффициентам полиномиальной функции, умноженным на соответствующие константы. Выходом этой системы является заданное входное воздействие.

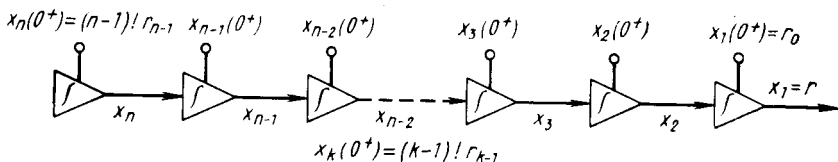


Рис. 3.3—1. Схема в переменных состояния для полиномиального входного воздействия

Входное воздействие вида ступенчатой функции

Пусть входное воздействие описывается функцией

$$r = r_0 u(t), \quad (3.3-2)$$

где $u(t)$ — единичная ступенчатая функция.

Введем переменную состояния x_1 равенством $r = x_1$; тогда получим уравнение $\dot{x}_1 = 0$ с начальным условием $x_1(0) = r$. Схема в переменных состояния системы, формирующей ступенчатое входное воздействие, показана на рис. 3.3—2.

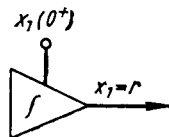


Рис. 3.3—2. Схема в переменных состояния для входного воздействия вида ступенчатой функции

Входное воздействие в виде линейной функции

Линейная функция является частным случаем полиномиальной функции и может быть записана как

$$r = r_0 + r_1 t, \quad (3.3-3)$$

где $t \geq 0$.

Полагая $r = x_1$, дифференциальные уравнения состояния находим в виде

$$\dot{x}_1 = r_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0$$

с начальными условиями $x_1(0) = r_0$ и $x_2(0) = r_1$.

Схема в переменных состояния системы изображена на рис. 3.3—3.

Входное воздействие в виде экспоненциальной функции

Экспоненциальное входное воздействие описывается функцией

$$r = r_0 e^{at} \text{ для } t \geq 0. \quad (3.3-4)$$

Пусть $r = x_1$. Тогда

$$\dot{x}_1 = ar_0 e^{at} = ar = ax_1$$

с начальным условием $x_1(0) = x_2(0) = r_0$. Схема в переменных состояния системы, использующая это последнее уравнение, по-

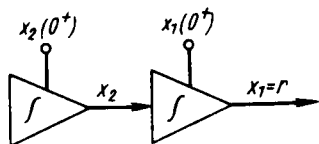


Рис. 3.3—3. Схема в переменных состояния для входного воздействия вида линейной функции

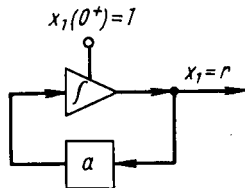


Рис. 3.3—4. Схема в переменных состояния для входного воздействия вида экспоненциальной функции

казана на рис. 3.3—4. Схема в переменных состояния для этой системы может быть получена также другим путем. Применяя прямое преобразование Лапласа к уравнению (3.3—4), находим

$$R(s) = \frac{r_0}{s-a}.$$

После элементарных преобразований получаем

$$R(s) = \frac{r_0}{s} + \frac{a}{s} R(s),$$

откуда также следует схема в переменных состояния системы.

Входное воздействие в виде синусоидальной функции

Решение гармонического уравнения

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.3-5)$$

дает синусоидальный сигнал. Это уравнение может быть записано в виде двух уравнений

$$\dot{x}_1 = \omega x_2; \quad (3.3-6a)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega x_1 \quad (3.3-6б)$$

с начальными условиями $x_1 = x_1(0)$ и $x_2 = x_2(0)$. Уравнения (3.3—6) можно рассматривать как дифференциальные уравнения

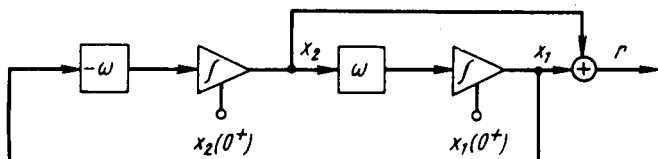


Рис. 3.3—5. Схема в переменных состояния для синусоидального входного воздействия

состояния системы, формирующей синусоидальное входное воздействие. Схема в переменных состояния системы, которая следует из формул (3.3—6), показана на рис. 3.3—5. Можно видеть, что сигнал r определяется выражением

$$r = x_1(0) \cos \omega t + x_2(0) \sin \omega t. \quad (3.3-7)$$

Входное воздействие пилообразной формы

Обращаясь к рис. 3.3—6, на котором показано колебание пилообразной формы, находим, что на интервале

$$nT < t < (n+1)T$$

колебание пилообразной формы описывается линейной функцией

$$r(t) = \frac{t-nT}{T}. \quad (3.3-8)$$

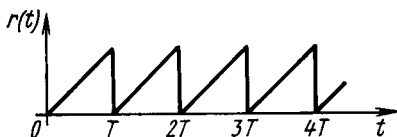


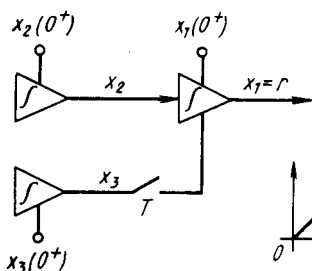
Рис. 3.3—6. Колебание пилообразной формы

Колебание пилообразной формы можно рассматривать как совокупность последовательных, сдвинутых во времени относительно друг друга линейных функций. Поэтому схема в переменных состояния системы, формирующей колебание пилообразной формы, совпадает со схемой системы для линейной функции, с тем лишь отличием, что первая схема содержит дополнительный интегратор и прерыватель для установки начала пилы через каждые T сек. Эта схема показана на рис. 3.3—7. Можно видеть, что в моменты квантования прерыватель замыкает цепь и через дополнительный инте-

гратор устанавливает на нуль выходной интегратор, т. е. $x_1(nT) = x_3(0) = 0$. Начальные условия на интеграторах

$$x_1(0) = 0; \quad x_2(0) = \frac{1}{T}; \quad x_3(0) = 0.$$

Дифференциальные уравнения состояния системы имеют вид



$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= 0; \\ \dot{x}_3 &= 0 \end{aligned}$$

и уравнения переходных состояний находим в виде

$$\begin{aligned} x_1(nT^+) &= x_2(nT); \\ x_2(nT^+) &= x_2(nT); \\ x_3(nT^+) &= x_3(nT). \end{aligned}$$

Рис. 3.3—7. Схема в переменных состояния для входного воздействия пилообразной формы

3.4. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА

Если процесс и входные воздействия характеризуются единой схемой в переменных состояния, то матрица перехода [45] может быть получена из рассмотрения этой схемы. Введя вектор-столбец x , вектор-столбец m и вектор-столбец v соответственно для представления переменных состояния процесса, входа и системы увеличенной размерности, дифференциальное уравнение состояния линейного многомерного стационарного процесса запишем в виде

$$\frac{dv(\lambda)}{d\lambda} = Av(\lambda), \quad (3.4-1)$$

где A — расширенная матрица коэффициентов системы; $v(\lambda)$, $m(\lambda)$ и $x(\lambda)$ — векторы состояния, имеющие, соответственно, вид

$$v(\lambda) = \begin{bmatrix} m(\lambda) \\ x(\lambda) \end{bmatrix}; \quad (3.4-2)$$

$$m(\lambda) = \begin{bmatrix} m_1(\lambda) \\ m_2(\lambda) \\ \vdots \\ m_j(\lambda) \end{bmatrix}; \quad (3.4-3)$$

$$x(\lambda) = \begin{bmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \\ \vdots \\ x_r(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (3.4-4)$$

Предполагается, что процесс имеет порядок r и входное воздействие можно описать j переменными состояниями. Решение уравнения (3.4—1) имеет вид

$$v(\lambda) = \Phi(\lambda) v(0^+), \quad (3.4-5)$$

где

$$v(0^+) = \begin{bmatrix} m(0^+) \\ x(0^+) \end{bmatrix}; \quad (3.4-6)$$

$$m(0^+) = \begin{bmatrix} m_1(0^+) \\ m_2(0^+) \\ \vdots \\ m_j(0^+) \end{bmatrix}; \quad (3.4-7)$$

$$x(0^+) = \begin{bmatrix} x_1(0^+) \\ x_2(0^+) \\ \vdots \\ x_r(0^+) \end{bmatrix}. \quad (3.4-8)$$

Матрица перехода $\Phi(\lambda)$ имеет вид

$$\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1}(\lambda) & a_{j2}(\lambda) & \dots & a_{jn}(\lambda) \\ a_{(j+1)1}(\lambda) & a_{(j+1)2}(\lambda) & \dots & a_{(j+1)n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (3.4-9)$$

где $j + r = n$ и $a_{ij}(\lambda)$ — элементы матрицы, которые предстоит определить.

$\Phi(\lambda)$ называется расширенной матрицей перехода, так как она характеризует одновременно изменение как переменных состояний процесса, так и входа. Если заданы начальные условия, то могут быть легко найдены функции времени, описывающие изменение переменных состояний.

Матрица перехода может быть определена по реакциям системы на воздействия вида ступенчатой функции. Подставляя формулу (3.4—9) в уравнение (3.4—5) и записывая в развернутом виде, находим

$$m_i(\lambda) = a_{i1}(\lambda)m_1(0^+) + a_{i2}(\lambda)m_2(0^+) + \dots + a_{ij}(\lambda)m_j(0^+) + \\ + a_{i(j+1)}(\lambda)x_1(0^+) + a_{i(j+2)}(\lambda)x_2(0^+) + \dots + a_{in}(\lambda)x_r(0^+); \quad (3.4-10)$$

$$x_k(\lambda) = a_{k1}(\lambda)m_1(0^+) + a_{k2}(\lambda)m_2(0^+) + \dots + a_{ki}(\lambda)m_i(0^+) + \\ + a_{k(j+1)}(\lambda)x_1(0^+) + a_{k(j+2)}(\lambda)x_2(0^+) + \dots + a_{kn}(\lambda)x_r(0^+). \quad (3.4-11)$$

Элементы a_{ik} являются либо константами, либо функциями λ , описывающими соответствующие реакции системы на единичные ступенчатые воздействия. Если

$$m_1(0^+) = 1, \\ m_2(0^+) = m_3(0^+) = \dots = m_j(0^+) = x_1(0^+) = x_2(0^+) = \dots = x_r(0^+) = 0,$$

то уравнение (3.4—11) принимает вид

$$a_{k1}(\lambda) = x_k(\lambda).$$

Следовательно, $a_{k1}(\lambda)$ есть реакция системы на входное воздействие $m_1(0^+) = 1$, измеренная в точке формирования координаты x_k схемы системы в переменных состояния при нулевых начальных значениях остальных координат.

Аналогично, $a_{k(j+1)}(\lambda)$ есть реакция системы на единичное ступенчатое воздействие $x_1(0^+) = 1$ при нулевых начальных значениях остальных координат, измеренная в точке формирования координаты x_k схемы системы в переменных состояния. Заметим, что первый индекс в a_{ik} указывает координату, по которой измеряется реакция системы, и второй индекс — координату, по которой производится возбуждение системы. Во многих случаях функции $a_{ik}(\lambda)$ могут быть определены из рассмотрения схемы системы в переменных состояния. Вышеприведенный анализ указывает простой метод определения матрицы перехода.

Предыдущее рассмотрение показало, что элементы квадратной матрицы $\Phi(\lambda)$ представляют собой соответствующие реакции системы на единичные ступенчатые воздействия. Матрица $\Phi(\lambda)$ описывает переходные процессы в системе при возбуждении ее по соответствующим координатам и называется матрицей перехода. Следует отметить, что в $\Phi(\lambda)$ аргумент λ при анализе непрерывных систем равен t , а в случае дискретных систем $\lambda = t - nT$ для $0 < \lambda \leq T$. Ниже для иллюстрации дается несколько примеров определения матрицы перехода по схеме системы в переменных состояния.

Пример 3.4—1. Простая система первого порядка

Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) + ax(t) = am(t)$$

с начальным условием $x(0^+)$. Требуется определить матрицу перехода системы.

Применяя прямое преобразование Лапласа к обеим частям заданного уравнения, получаем:

$$sX(s) - x(0^+) + aX(s) = aM(s).$$

Отсюда, совершая элементарные преобразования, находим

$$X(s) = \frac{a}{s+a} M(s) + \frac{1}{s+a} x(0^+).$$

Схема системы в переменных состояния, составленная при использовании этого выражения для случая, когда входное воздействие $m(t)$ имеет вид единичной ступенчатой функции, показана на рис. 3.4—1. Из рассмотрения этой схемы имеем

$$a_{11}(t) = 1;$$

$$a_{21}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{a}{(s+a)} \right\} = 1 - e^{-at},$$

$$a_{12}(t) = 0;$$

$$a_{22}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{a}{s+a} \right\} = ae^{-at}.$$

Отсюда находим расширенную матрицу перехода системы:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - e^{-at} & ae^{-at} \end{bmatrix}.$$

Из дифференциального уравнения состояния

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t)$$

следует, что

$$m_1(t) = 1;$$

$$x_1(t) = x(t) = (1 - e^{-at})m_1(0^+) + ae^{-at}x_1(0^+) = (1 - e^{-at})u(t) + x(0^+)e^{-at}.$$

Пример 3.4—2. Система второго порядка

Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = m(t)$$

с начальными условиями $x(0^+)$ и $\dot{x}(0^+)$, где $m(t)$ — единичная ступенчатая функция.

Требуется определить матрицу перехода.

Схема системы в переменных состояния показана на рис. 3.4—2, из которой находим, что

$$a_{11}(t) = 1; \quad a_{12}(t) = a_{13}(t) = 0;$$

$$a_{21}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = t - 1 + e^{-t};$$

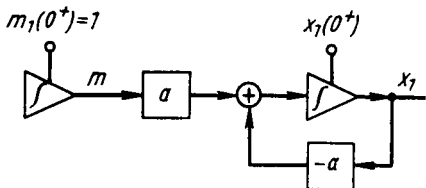


Рис. 3.4—1. Схема в переменных состояния для системы первого порядка с входным воздействием вида единичной ступенчатой функции

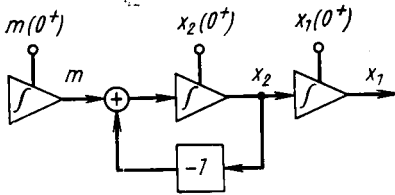


Рис. 3.4—2. Схема в переменных состояния для системы второго порядка с входным воздействием вида единичной ступенчатой функции

$$a_{22}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1;$$

$$a_{23}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = 1 - e^{-t};$$

$$a_{31}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} \right\} = 1 - e^{-t};$$

$$a_{32}(t) = 0;$$

$$a_{33}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s+1} \right\} = e^{-t}.$$

Отсюда находим матрицу перехода:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t-1+e^{-t} & 1 & 1-e^{-t} \\ 1-e^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что вектор состояния

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

и вектор начальных условий

$$\mathbf{v}(0^+) = \begin{bmatrix} m_1(0^+) \\ x_1(0^+) \\ x_2(0^+) \end{bmatrix},$$

реакцию системы на входное воздействие вида ступенчатой функции находим в виде

$$x_1(t) = (t-1+e^{-t})u(t) + x(0^+) + \dot{x}(0^+) (1-e^{-t}).$$

Пример 3.4—3. Простая система с входным воздействием пилообразной формы

Рассмотрим систему с входным воздействием пилообразной формы, описываемую уравнением

$$\dot{x}(t) + ax(t) = am(t)$$

с начальным условием $x(0^+)$. Форма входного воздействия $m(t)$ показана на рис. 3.4—3. Требуется определить расширенную матрицу перехода.

Из рассмотрения схемы системы в переменных состояния, изображенной на рис. 3.4—4, находим, что

$$a_{11}(t) = 1; \quad a_{12}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = t;$$

$$a_{13}(t) = 0; \quad a_{14}(t) = 0;$$

$$a_{21}(t) = 0; \quad a_{22}(t) = 1;$$

$$a_{23}(t) = 0; \quad a_{24}(t) = 0;$$

$$\begin{aligned}
 a_{31}(t) &= 0; & a_{32}(t) &= 0; \\
 a_{33}(t) &= 0; & a_{34}(t) &= 0; \\
 a_{41}(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{a}{s(s+a)} \right\} = 1 - e^{-at}; \\
 a_{42}(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{a}{s^2(s+a)} \right\} = t - \frac{1}{a} (1 - e^{-at}); \\
 a_{43}(t) &= 0; \\
 a_{44}(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{s}{s+a} \right\} = e^{-at}.
 \end{aligned}$$

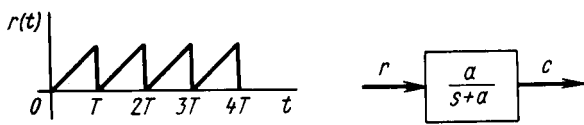


Рис. 3.4—3. Простая система первого порядка с входным воздействием пилообразной формы

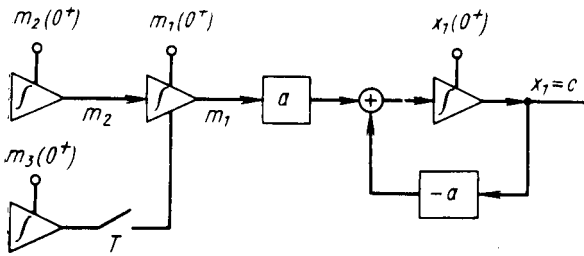


Рис. 3.4—4. Схема в переменных состояния для системы с входным воздействием пилообразной формы

Отсюда находим расширенную матрицу перехода:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 - e^{-at} & t - \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) & 0 & e^{-at} \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что по определению вектор состояния

$$v(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ m_3(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix},$$

реакцию системы находим в виде

$$x_1(t) = (1 - e^{-at})m_1(0^+) + \left[t - \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) \right] m_2(0^+) + \\ + x_1(0^+)e^{-at} = \frac{t}{T} - \frac{1}{aT}(1 - e^{-at}) + x(0^+)e^{-at}.$$

3.5. АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ПЕРЕХОДНЫХ СОСТОЯНИЙ

Линейную стационарную дискретную систему можно описать совокупностью линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, которые могут быть записаны в векторной форме [147]:

$$\frac{d\mathbf{v}(\lambda)}{d\lambda} = \mathbf{A}\mathbf{v}(\lambda), \quad (3.5-1)$$

где $\lambda = t - nT$ и $0 < \lambda \leq T$.

Вектор состояния \mathbf{v} включает в качестве своих компонент вектор состояния входа \mathbf{m} и вектор состояния процесса \mathbf{x} . Уравнение (3.5—1), характеризующее поведение дискретной системы на интервалах прерывания, называется дифференциальным уравнением состояния системы. Начальные условия для дифференциального уравнения состояния могут быть записаны в векторной форме как

$$\mathbf{v}(nT^+) = \mathbf{B}\mathbf{v}(nT). \quad (3.5-2)$$

Это уравнение, описывающее изменение переменных состояния системы в моменты квантования, часто называют уравнением переходных состояний. В этих уравнениях \mathbf{A} и \mathbf{B} обозначают квадратные матрицы, которые могут быть найдены из рассмотренной схемы системы в переменных состояния.

Применяя прямое преобразование Лапласа к уравнению (3.5—1), получаем

$$s\mathbf{V}(s) = \mathbf{A}\mathbf{V}(s) + \mathbf{v}(0^+). \quad (3.5-3)$$

Совершая элементарные преобразования, находим

$$\mathbf{V}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{v}(0^+). \quad (3.5-4)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (3.5—4), получаем решение дифференциального уравнения состояния в виде

$$\mathbf{v}(\lambda) = \Phi(\lambda)\mathbf{v}(0^+), \quad (3.5-5)$$

где расширенная матрица перехода дается выражением

$$\Phi(\lambda) = L^{-1}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}. \quad (3.5-6)$$

В терминах переменной t уравнение (3.5—5) принимает вид

$$v(t) = \Phi(t - hT) v(nT^+). \quad (3.5-7)$$

Это уравнение описывает поведение системы на интервале

$$nT < t \leq (n+1)T. \quad (3.5-8)$$

Следовательно, в момент $t = (n+1)T$

$$v(\overline{(n+1)T}) = \Phi(T) v(nT^+). \quad (3.5-9)$$

Учитывая соотношение (3.5—2), вектор состояния v можно записать в виде

$$v(t) = \Phi(t - nT) B v(nT) \quad (3.5-10)$$

и

$$v(\overline{(n+1)T}) = \Phi(T) B v(nT). \quad (3.5-11)$$

Это уравнение представляет собой рекуррентное соотношение, которое может быть использовано для вычисления последовательных значений переменных состояния системы в моменты квантования. Заметим, что в случае непрерывных систем B — единичная матрица и $\lambda = t$.

Обозначим

$$H(t - nT) = \Phi(t - nT) B, \quad (3.5-12)$$

и уравнение (3.5—10) запишем в виде

$$v(t) = H(t - nT) v(nT). \quad (3.5-13)$$

Это уравнение определяет значения координат системы в любой момент времени на интервале $nT < t \leq (n+1)T$. Отсюда в момент $t = (n+1)T$

$$v(\overline{(n+1)T}) = H(T) v(nT). \quad (3.5-14)$$

Придавая n в формуле (3.5—14) последовательные значения, получаем следующую серию уравнений:

$$\begin{aligned} n=0, \quad v(T) &= H(T) v(0); \\ n=3, \quad v(2T) &= H(T) v(T); \\ n=2, \quad v(3T) &= H(T) v(2T); \\ &\dots \dots \dots \quad (3.5-15) \\ n=k-1, \quad v(kT) &= H(T) v(\overline{(k-1)T}); \\ &\dots \dots \dots \\ n=n-1, \quad v(nT) &= H(T) v(\overline{(n-1)T}). \end{aligned}$$

Комбинируя эти уравнения и произведя упрощения, получаем

$$v(nT) = H^n(T) v(0). \quad (3.5-16)$$

По определению z -преобразования [136] имеем

$$\mathbf{V}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}(nT) z^{-n}. \quad (3.5-17)$$

Комбинируя уравнения (3.5-16) и (3.5-17), получаем z -преобразование в виде

$$\mathbf{V}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{H}(T) z^{-1}]^n \mathbf{v}(0). \quad (3.5-18)$$

Учитывая соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{H}(T) z^{-1}]^n = [\mathbf{I} - z^{-1} \mathbf{H}(T)]^{-1}, \quad (3.5-19)$$

выражение z -преобразования для вектора состояния дискретной системы запишем в виде

$$\mathbf{V}(z) = [\mathbf{I} - z^{-1} \mathbf{H}(T)]^{-1} \mathbf{v}(0). \quad (3.5-20)$$

Применяя обратное z -преобразование к уравнению (3.5-20), для вектора состояния, очевидно, получим

$$\mathbf{v}(nT) = Z^{-1} [\mathbf{I} - z^{-1} \mathbf{H}(T)]^{-1} \mathbf{v}(0), \quad (3.5-21)$$

что является общим решением уравнения состояния, из которого могут быть определены переменные состояния системы в последовательные моменты квантования, если только известны расширенная матрица перехода и матрица \mathbf{B} и заданы начальные условия. Уравнение (3.5-21) позволяет систематизировать и унифицировать анализ динамического поведения дискретных систем управления

Анализ устойчивости

Пусть матрица $\mathbf{H}(T)$ разделена на блоки согласно размерностям векторов \mathbf{m} и \mathbf{x} :

$$\mathbf{H}(T) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}(T) & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\gamma}(T) & \boldsymbol{\beta}(T) \end{bmatrix}, \quad (3.5-22)$$

где $\boldsymbol{\alpha}(T)$ — квадратная матрица.

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - z^{-1} \mathbf{H}(T) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - z^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}(T) & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\gamma}(T) & \boldsymbol{\beta}(T) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} - z^{-1} \boldsymbol{\alpha}(T) & \mathbf{0} \\ -z^{-1} \boldsymbol{\gamma}(T) & \mathbf{I} - z^{-1} \boldsymbol{\beta}(T) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5-23)$$

Так как по определению

$$\mathbf{V}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(z) \\ \mathbf{X}(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}(0) \\ \mathbf{x}(0) \end{bmatrix},$$

то уравнение (3.5—20) можно записать как

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(z) \\ \mathbf{X}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I} - z^{-1}\boldsymbol{\alpha}(T)]^{-1} \\ z^{-1}[\mathbf{I} - z^{-1}\boldsymbol{\beta}(T)]^{-1}\boldsymbol{\gamma}(T)[\mathbf{I} - z^{-1}\boldsymbol{\alpha}(T)]^{-1}[\mathbf{I} - z^{-1}\boldsymbol{\beta}(T)]^{-1} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \mathbf{m}(0) \\ \mathbf{x}(0) \end{bmatrix}. \quad (3.5-24)$$

При выводе этого уравнения было использовано равенство (3.5—23). Отсюда находим z -преобразования для векторов состояния входа и процесса соответственно:

$$\mathbf{M}(z) = [\mathbf{I} - z^{-1}\boldsymbol{\alpha}(T)]^{-1}\mathbf{m}(0) \quad (3.5-25)$$

и

$$\mathbf{X}(z) = z^{-1}[\mathbf{I} - z^{-1}\boldsymbol{\beta}(T)]^{-1}\boldsymbol{\gamma}(T)\mathbf{M}(z) + [\mathbf{I} - z^{-1}\boldsymbol{\beta}(T)]^{-1}\mathbf{x}(0). \quad (3.5-26)$$

Первое слагаемое в правой части z -преобразования (3.5—26) присутствует благодаря вектору \mathbf{M} , а второе слагаемое — благодаря ненулевым начальным условиям. Второе слагаемое равно нулю, если в начальный момент времени система находится в состоянии покоя. Последовательность дискретных значений переменных состояния входа и переменных состояния процесса можно легко получить по формулам (3.5—25) и (3.5—26), применяя к ним обратное z -преобразование.

Если система в начальный момент времени находится в состоянии покоя, то z -преобразование для вектора состояния процесса принимает вид

$$\mathbf{X}(z) = z^{-1}[\mathbf{I} - z^{-1}\boldsymbol{\beta}(T)]^{-1}\boldsymbol{\gamma}(T)\mathbf{M}(z), \quad (3.5-27)$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\det[\mathbf{I} - z^{-1}\boldsymbol{\beta}(T)] = 0. \quad (3.5-28)$$

Для устойчивости системы необходимо, чтобы корни уравнения (3.5—28) находились в пределах единичной окружности на плоскости z [136].

Учитывая равенство (3.5—22), выражение (3.5—13) для вектора состояния $\mathbf{v}(t)$ можно записать как

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}(t-nT) & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\gamma}(t-nT) & \boldsymbol{\beta}(t-nT) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}(nT) \\ \mathbf{x}(nT) \end{bmatrix}. \quad (3.5-29)$$

Следовательно, в интервале $nT < t \leq (n+1)T$ вектор состояния процесса определяется выражением

$$x(t) = \gamma(t-nT) m(nT) + \beta(t-nT) x(nT), \quad (3.5-30)$$

где значения векторов $m(nT)$ и $x(nT)$ могут быть легко найдены при использовании выражений (3.5-25) и (3.5-26). Полагая $n = 0, 1, 2, \dots$ в уравнении (3.5-30), находим функции времени для переменных состояния процесса.

С целью иллюстрации описанного выше метода анализа дискретных систем управления, рассмотрим несколько числовых примеров.

Пример 3.5-1. Разомкнутая система

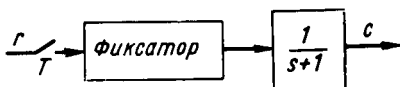


Рис. 3.5-1. Простая импульсная система

Схема простой импульсной системы показана на рис. 3.5-1. Предполагается, что входное воздействие имеет вид единичной ступенчатой функции и период прерывания равен T сек. Требуется определить реакцию на выходе системы.

Из рассмотрения схемы системы в переменных состояния, показанной на рис. 3.5-2, следует, что дифференциальные уравнения состояния системы имеют вид

$$\dot{m}_1 = 0; \quad \dot{m}_2 = 0; \quad \dot{x}_1 = m_2 - x_1.$$

Уравнения переходных состояний системы находим в виде

$$m_1(nT^+) = m_1(nT); \quad m_2(nT^+) = m_1(nT); \quad x_1(nT^+) = x_1(nT).$$

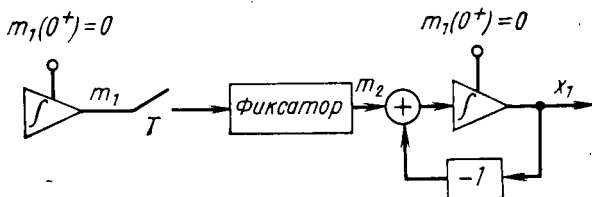


Рис. 3.5-2. Схема в переменных состояния для простой импульсной системы

Матрицы A и B записываются следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу перехода находим в виде

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим матрицу $\mathbf{H}(T)$:

$$\mathbf{H}(T) = \Phi(T)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-T} & 0 & e^{-T} \end{bmatrix}$$

и

$$\alpha(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \beta(T) = e^{-T};$$

$$\gamma(T) = [1 - e^{-T} \ 0];$$

$$1 - z^{-1}\alpha(T) = \begin{bmatrix} 1 - z^{-1} & 0 \\ -z^{-1} & 1 \end{bmatrix};$$

$$1 - z^{-1}\beta(T) = 1 - z^{-1}e^{-T}.$$

Так как

$$\mathbf{X}(z) = z^{-1} [1 - z^{-1}\beta(T)]^{-1} \gamma(T) [1 - z^{-1}\alpha(T)]^{-1} \mathbf{m}(0),$$

то окончательно имеем

$$X(z) = \frac{z(1 - e^{-T})}{(z - 1)(z - e^{-T})}.$$

Конечно, решение этой простой задачи можно легко получить классическим методом. В данном случае применение обобщенного подхода не дает каких-либо преимуществ. Заметим, однако, что данный пример был приведен лишь с целью проиллюстрировать применение рассмотренного в настоящем параграфе метода анализа дискретных систем.

Пример 3.5—2. Замкнутая система

Требуется найти процесс на выходе импульсной системы, структурная схема которой приведена на рис. 3.5—3. Входное воздействие имеет вид единичной ступенчатой функции.

Схема системы в переменных состояниях изображена на рис. 3.5—4. Из рассмотрения этой схемы находим, что дифференциальные уравнения состояния системы имеют вид

$$\dot{m}_1 = 0; \quad \dot{m}_2 = 0; \quad \dot{x}_1 = m_2 - x_1.$$

Уравнения переходных состояний находим в виде

$$m_1(nT^+) = m_1(nT); \quad m_2(nT^+) = m_2(nT) - x_1(nT); \quad x_1(nT^+) = x_1(nT).$$



Рис. 3.5—3. Простая импульсная система с обратной связью

Отсюда находим матрицу **A** и **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим определение расширенной матрицы перехода другим методом. Обращаясь к схеме системы в переменных состояниях, запишем:

$$\begin{aligned} m_1(\lambda) &= 1 = m_1(0^+); \\ m_2(\lambda) &= m_1(\lambda) - x_1(\lambda) = m_2(0^+); \\ \dot{x}_1(\lambda) &= m_2(0^+) - x_1(\lambda). \end{aligned}$$

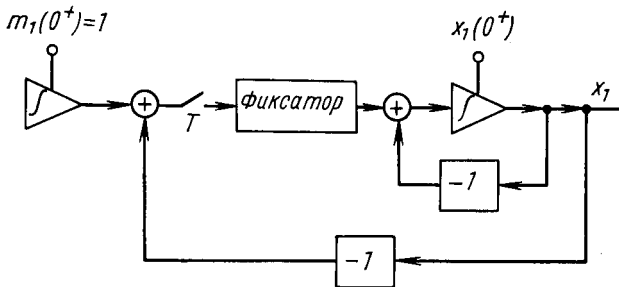


Рис. 3.5—4. Схема в переменных состояниях для импульсной системы с обратной связью

Решение последнего дифференциального уравнения имеет вид

$$x_1(\lambda) = (1 - e^{-\lambda}) m_2(0^+) + e^{-\lambda} x_1(0^+).$$

Отсюда находим расширенную матрицу перехода:

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{bmatrix}.$$

Матрицу **H** (*T*) получаем в виде

$$\mathbf{H}(T) = \mathbf{\Phi}(T)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 - e^{-T} & 0 & -1 + 2e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Матрицу **H** (*T*) разобьем на блоки таким образом, что

$$\boldsymbol{\alpha}(T) = 1, \quad \boldsymbol{\beta}(T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 + 2e^{-T} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} [1 - z^{-1}\boldsymbol{\beta}(T)]^{-1} &= \frac{1}{1 - z^{-1}(2e^{-T} - 1)} \begin{bmatrix} 1 - z^{-1}(2e^{-T} - 1) & 1 + z^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ [1 - z^{-1}\boldsymbol{\alpha}(T)]^{-1} &= \frac{1}{1 - z^{-1}}. \end{aligned}$$

Если $x_1(0^+) = 0$, то из формул (3.5—25) и (3.5—26) следует, что

$$\begin{bmatrix} M_2(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix} = \frac{z}{(z-1)(z-2e^{-T}+1)} \begin{bmatrix} 1-z^{-1}(2e^{-T}-1) + (1+z^{-1})(1-e^{-T}) \\ 1-e^{-T} \end{bmatrix},$$

откуда

$$X_1(z) = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-2e^{-T}+1)}.$$

Используя классический метод, получаем

$$G(z) = Z \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)} \right\} = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}};$$

$$R(z) = \frac{z}{z-1};$$

$$C(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} \quad R(z) = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-2e^{-T}+1)},$$

что совпадает с результатом, полученным выше.

Если начальное условие задано в виде

$$x_1(0^+) = c_0,$$

то при соответствующей подстановке в формулы (3.5—25) и (3.5—26) будем иметь

$$\begin{bmatrix} M_2(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix} = \frac{z}{(z-1)(z-2e^{-T}+1)} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1-z^{-1}(2e^{-T}-1) + (1+z^{-1})(1-e^{-T}) \\ 1-e^{-T} \end{bmatrix} + \frac{z}{z-2e^{-T}+1} \begin{bmatrix} c_0(1+z^{-1}) \\ c_0 \end{bmatrix},$$

откуда

$$X_1(z) = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-2e^{-T}+1)} + \frac{c_0 z}{z-2e^{-T}+1}.$$

Из рассмотрения приведенных выше простых задач может создаваться впечатление, что анализ дискретных систем методом переходных состояний является более сложным, чем при использовании классического метода. Эти примеры были выбраны только для цели иллюстрации метода анализа, рассмотренного в настоящем параграфе. Лучший способ иллюстрации — это показать применение метода на простых примерах. Использование метода переходных состояний для решения более сложных задач рассматривается в следующем параграфе. Из дальнейшего изложения можно увидеть, что по удобству и эффективности рассматриваемый общий подход превосходит классический в анализе сложных систем, а также оптимальном синтезе, рассматриваемом в следующих главах книги.

3.6. НЕСТАНДАРТНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Предыдущий параграф был посвящен анализу обычных дискретных систем с постоянным периодом прерывания методом переходных состояний. Можно видеть, что классический метод z-преобразований позволяет произвести анализ простых систем при меньшем объеме вычислений, чем метод переходных состояний, хотя последний является более общим и действенным методом решения. В этом параграфе метод, развитый в предыдущем параграфе, применяется к анализу более сложных дискретных систем. К ним относятся системы с переменной частотой прерывания, с кратными синхронизованными и несинхронизованными частотами прерывания, системы с модуляцией импульсов по длительности, частоте и системы с конечной длительностью импульсов [136].

Эти системы условимся называть нестандартными дискретными системами.

Предположим, что длительность основного периода прерывания в такой нестандартной системе равна T сек. Разделим этот период на ряд интервалов в соответствии с частотами и фазами работы отдельных прерывателей.

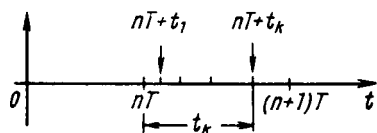


Рис. 3.6—1. Временная шкала квантования для нестандартной дискретной системы

Это разделение позволит установить наличие циклического изменения частоты прерывания, характер синхронизации прерывателей, наличие модуляции импульсов по длительности или частоте, длительность квантования сигналов. Сказанное выше иллюстрируется рис. 3.6—1, на котором основной период прерывания разделен на k интервалов различной продолжительности. Тип нестандартной дискретной системы устанавливается путем изучения соотношения длительностей этих интервалов.

Для интервала длительностью τ дифференциальное уравнение состояния нестандартной дискретной системы имеет вид

$$\frac{dv(\lambda)}{d\lambda} = Av(\lambda), \quad (3.6-1)$$

где λ находится в интервале $0 < \lambda \leq \tau$. Общее решение уравнения (3.6—1) было найдено ранее в виде

$$v(\lambda) = \Phi(\lambda)Bv(0) = H(\lambda)v(0). \quad (3.6-2)$$

Для интервала

$$nT < t \leq nT + t_1,$$

$$0 < t - nT \leq t_1,$$

решение уравнения (3.6—1) имеет вид

$$v(\lambda) = \Phi_0(\lambda)v(0^+). \quad (3.6-3)$$

где $\Phi_0(\lambda)$ — матрица перехода для этого интервала, а начальные условия перехода задаются вектором $v(nT^+)$, определяемым из уравнения переходного состояния

$$v(nT^+) = \mathbf{B}_0 v(nT). \quad (3.6-4)$$

Так как $\lambda = t - nT$, уравнение (3.6—3) можно переписать в виде

$$v(t) = \Phi_0(t - nT) v(nT^+). \quad (3.6-5)$$

Обозначая

$$\mathbf{H}_0(t - nT) = \Phi_0(t - nT) \mathbf{B}_0, \quad (3.6-6)$$

предыдущее выражение запишем в виде

$$v(t) = \mathbf{H}_0(t - nT) v(nT). \quad (3.6-7)$$

Для удобства записи последующих преобразований уравнение (3.6—7) представим в следующей форме:

$$v(t) = \Psi_0(t - nT) v(nT), \quad (3.6-8)$$

где по определению

$$\Psi_0(t - nT) = \mathbf{H}_0(t - nT). \quad (3.6-9)$$

Для интервала

$$\begin{aligned} nT + t_1 < t \leq nT + t_2, \\ t_2 < t - nT \leq t_2 \end{aligned}$$

решение уравнения (3.6—1) имеет вид

$$v(\lambda) = \Phi_1(\lambda) v(0^+), \quad (3.6-10)$$

где $\Phi_1(\lambda)$ — матрица перехода для этого интервала, а начальные условия даются вектором $v(nT + t_1^+)$, определяемым из уравнения переходного состояния

$$v(nT + t_1^+) = \mathbf{B}_1 v(nT + t_1). \quad (3.6-11)$$

Заметим, что в предыдущих выражениях матрицы перехода и матрицы \mathbf{B} могут быть различными для различных интервалов. Так как $\lambda = t - (nT + t_1)$, уравнение (3.6—10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} v(t) &= \Phi_1(t - nT - t_1) v(nT + t_1^+) = \\ &= \mathbf{H}_1(t - nT - t_1) v(nT + t_1), \end{aligned} \quad (3.6-12)$$

где

$$\mathbf{H}_1(t - nT - t_1) = \Phi_1(t - nT - t_1) \mathbf{B}_1. \quad (3.6-13)$$

Из уравнения (3.6—5) находим вектор $v(nT + t_1)$:

$$v(nT + t_1) = \mathbf{H}_0(t_1) v(nT). \quad (3.6-14)$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{H}_1(t-nT-t_1)\mathbf{H}_0(t_1)\mathbf{v}(nT). \quad (3.6-15)$$

Обозначим

$$\boldsymbol{\Psi}_1(t-nT) = \mathbf{H}_1(t-nT-t_1)\mathbf{H}_0(t_1). \quad (3.6-16)$$

и формулу (3.6—15) перепишем в виде

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\Psi}_1(t-nT)\mathbf{v}(nT). \quad (3.6-17)$$

Для интервала

$$\begin{aligned} nT + t_2 < t \leq nT + t_3; \\ t_2 < t - nT \leq t_3 \end{aligned}$$

решение уравнения (3.6—1) имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\Phi}_2(\lambda)\mathbf{v}(0^+), \quad (3.6-18)$$

где $\boldsymbol{\Phi}_2(\lambda)$ — матрица перехода для этого интервала, а начальные условия даются вектором $\mathbf{v}(nT + t_2^+)$, определяемым из уравнения переходного состояния

$$\mathbf{v}(nT + t_2^+) = \mathbf{B}_2\mathbf{v}(nT + t_2). \quad (3.6-19)$$

Так как $\lambda = t - (nT + t_2)$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \boldsymbol{\Phi}_2(t-nT-t_2)\mathbf{v}(nT + t_2^+) = \\ &= \mathbf{H}_2(t-nT-t_2)\mathbf{v}(nT + t_2), \end{aligned} \quad (3.6-20)$$

где

$$\mathbf{H}_2(t-nT-t_2) = \boldsymbol{\Phi}_2(t-nT-t_2)\mathbf{B}_2. \quad (3.6-21)$$

Из формулы (3.6—15) следует, что

$$\mathbf{v}(nT + t_2) = \mathbf{H}_1(t_2-t_1)\mathbf{H}_0(t_1)\mathbf{v}(nT). \quad (3.6-22)$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{H}_2(t-nT-t_2)\mathbf{H}_1(t_2-t_1)\mathbf{H}_0(t_1)\mathbf{v}(nT), \quad (3.6-23)$$

что можно записать в виде

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\Psi}_2(t-nT)\mathbf{v}(nT), \quad (3.6-24)$$

если ввести обозначение

$$\boldsymbol{\Psi}_2(t-nT) = \mathbf{H}_2(t-nT-t_2)\mathbf{H}_1(t_2-t_1)\mathbf{H}_0(t_1). \quad (3.6-25)$$

Для интервала

$$nT + t_3 < t \leq nT + t_4$$

начальные условия перехода задаются вектором $\mathbf{v}(nT + t_3^+)$, и уравнение переходного состояния имеет вид

$$\mathbf{v}(nT + t_3^+) = \mathbf{B}_3\mathbf{v}(nT + t_3). \quad (3.6-26)$$

Решение уравнения (3.6—1) запишем в форме, аналогичной предыдущим:

$$v(t) = \Psi_3(t-nT)v(nT), \quad (3.6-27)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_3(t-nT) = \mathbf{H}_3(t-nT-t_3)\mathbf{H}_2(t_3-t_2)\mathbf{H}_1(t_2-t_1) \times \\ \times \mathbf{H}_0(t_1) \end{aligned} \quad (3.6-28)$$

и

$$\mathbf{H}_3(t-nT-t_3) = \Phi_3(t-nT-t_3)\mathbf{B}_3. \quad (3.6-29)$$

Для интервала

$$nT + t_i < t \leq nT + t_{i+1}$$

решение уравнения (3.6—1) запишем в форме, аналогичной предыдущим:

$$v(t) = \Psi_i(t-nT)v(nT), \quad (3.6-30)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_i(t-nT) = \mathbf{H}_i(t-nT-t_i)\mathbf{H}_{i-1}(t_i-t_{i-1}) \dots \\ \dots \mathbf{H}_1(t_2-t_1)\mathbf{H}_0(t_1). \end{aligned} \quad (3.6-31)$$

В предыдущих выражениях матрицы Ψ_i могут принимать различные значения на различных интервалах основного периода прерывания. Уравнение (3.6—30) позволяет полностью описать поведение системы на всех интервалах основного периода, включая моменты $t_{i+1} = t_1, t_2, \dots, t_k, T$ для $n = 0, 1, 2$.

Эту процедуру анализа легче всего проиллюстрировать на простых примерах. Благодаря особенностям рассматриваемого подхода, окончательное решение найдено в виде рекуррентного соотношения, что является идеальной формой с точки зрения программирования для цифровых вычислительных машин. С появлением цифровых машин требования, предъявляемые к методам математического и инженерного анализа и синтеза автоматических систем, подверглись большому изменению. Удобство численного решения задачи является одним из важных преимуществ нового подхода.

Пример 3.6—1. Дискретная система с многократным синхронным прерыванием

Рассмотрим дискретную систему с двукратным прерыванием сигналов, показанную на рис. 3.6—2. Первое низкочастотное прерывание производится с периодом 1 сек и второе высокочастотное — с периодом $1/3$ сек. В прямой и обратной цепи контура для восстановления непрерывных сигналов используется восстанавливающая цепочка нулевого порядка или фиксатор. Передаточные функции даются выражениями

$$G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{0,5}{s+1}; \quad H(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{3}{s} \frac{1}{s}.$$

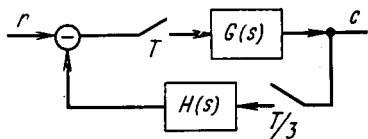


Рис. 3.6—2. Импульсная система с двукратным прерыванием сигналов

Требуется найти реакцию системы на входное воздействие вида единичной ступенчатой функции.

Схема системы в переменных состояния изображена на рис. 3.6—3. Вектор состояния определим выражением

$$v(\lambda) = \begin{bmatrix} m_1(\lambda) \\ x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \\ x_3(\lambda) \\ x_4(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Вектор начального состояния находим в виде

$$v(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

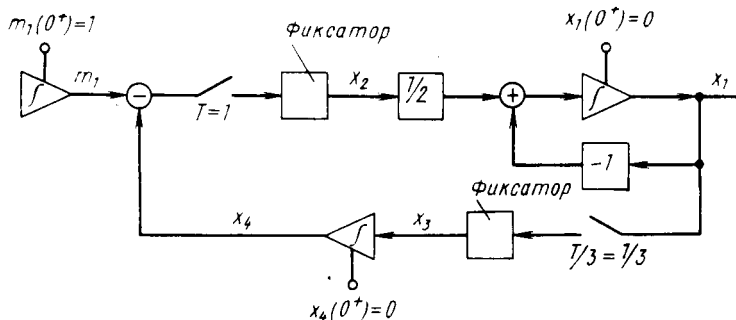


Рис. 3.6—3. Схема в переменных состояния для импульсной системы с двукратным прерыванием сигналов

Из рассмотрения схемы, представленной на рис. 3.6—3, находим, что для первого интервала прерывания

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\Phi_0(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} & 0,5(1-e^{-\lambda}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix};$$

$$H_0(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5(1-e^{-\lambda}) & e^{-\lambda} & 0 & 0 & -0,5(1-e^{-\lambda}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для интервала $nT < t \leq nT + \frac{T}{3}$

$$v(t) = \Psi_0(t-nT)v(nT); \quad \Psi_0(t-nT) = H_0(t-nT).$$

Для второго и третьего интервалов

$$A_1 = A_2 = A_0;$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\Phi_1(\lambda) = \Phi_2(\lambda) = \Phi_0(\lambda);$$

$$H_1(\lambda) = H_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} & 0,5(1-e^{-\lambda}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для интервала $nT + \frac{T}{3} < t \leq nT + \frac{2T}{3}$

$$v(t) = \Psi_1(t-nT)v(nT); \quad \Psi_1(t-nT) = H_1\left(t-nT - \frac{T}{3}\right)H_0\left(\frac{T}{3}\right).$$

Для интервала $nT + \frac{2T}{3} < t \leq (n+1)T$

$$v(t) = \Psi_2(t-nT)v(nT); \quad \Psi_2(t-nT) = H_2\left(t-nT - \frac{2T}{3}\right)H_1\left(\frac{T}{3}\right)H_0\left(\frac{T}{3}\right).$$

Подставляя $T = 1$ сек, находим матрицы:

$$\Psi_0\left(\frac{T}{3}\right) = H_0\left(\frac{T}{3}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,14 & 0,72 & 0 & 0 & -0,14 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\psi_1\left(\frac{T}{3}\right) = H_1\left(\frac{T}{3}\right) H_0\left(\frac{T}{3}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,24 & 0,52 & 0 & 0 & -0,24 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,14 & 0,72 & 0 & 0 & -0,14 \\ 0,046 & 0,57 & 0 & 0 & -0,046 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \psi_2\left(\frac{T}{3}\right) &= H_2\left(\frac{T}{3}\right) H_1\left(\frac{T}{3}\right) H_0\left(\frac{T}{3}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,31 & 0,36 & 0 & 0 & -0,31 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,24 & 0,52 & 0 & 0 & -0,24 \\ 0,13 & 0,74 & 0 & 0 & -0,13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

находим векторы

$$v\left(\frac{1}{3}\right) = \psi_0\left(\frac{1}{3}\right) v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,14 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v\left(\frac{1}{3}\right) = \psi_1\left(\frac{1}{3}\right) v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,24 \\ 1 \\ 0,14 \\ 0,046 \end{bmatrix};$$

$$v(1) = \psi_2\left(\frac{1}{3}\right) v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,31 \\ 1 \\ 0,24 \\ 0,13 \end{bmatrix}; \quad v\left(1\frac{1}{3}\right) = \psi_0\left(\frac{1}{3}\right) v(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,34 \\ 0,87 \\ 0,31 \\ 0,10 \end{bmatrix};$$

$$v\left(1\frac{2}{3}\right) = \psi_1\left(\frac{1}{3}\right) v(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,35 \\ 0,87 \\ 0,34 \\ 0,22 \end{bmatrix}; \quad v(2) = \psi_2\left(\frac{1}{3}\right) v(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,38 \\ 0,87 \\ 0,37 \\ 0,44 \end{bmatrix};$$

$$v\left(2\frac{1}{3}\right) = \psi_0\left(\frac{1}{3}\right) v(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,36 \\ 0,56 \\ 0,38 \\ 0,13 \end{bmatrix}; \quad v\left(2\frac{2}{3}\right) = \psi_1\left(\frac{1}{3}\right) v(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,34 \\ 0,56 \\ 0,36 \\ 0,20 \end{bmatrix};$$

$$v(3) = \psi_2\left(\frac{1}{3}\right) v(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,31 \\ 0,56 \\ 0,33 \\ 0,35 \end{bmatrix}; \quad v\left(3\frac{1}{3}\right) = \psi_0\left(\frac{1}{3}\right) v(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,30 \\ 0,65 \\ 0,31 \\ 0,10 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v} \left(3 \frac{2}{3} \right) = \Psi_1 \left(\frac{1}{3} \right) \mathbf{v}(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,31 \\ 0,65 \\ 0,33 \\ 0,22 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}(4) = \Psi_2 \left(\frac{1}{3} \right) \mathbf{v}(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,31 \\ 0,65 \\ 0,25 \\ 0,30 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем последовательность дискретных значений выходной переменной

$$0; 0,14; 0,24; 0,31; 0,34; 0,35; 0,38; 0,36; 0,34; 0,31, \dots,$$

соответствующих моментам времени $t = \frac{k}{3} \text{ сек}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, характеризующих реакцию системы на воздействие вида единичной ступенчатой функции.

Пример 3.6—2. Импульсная система с переменной частотой прерывания

Рассмотрим импульсную систему с циклически изменяющейся частотой прерывания, показанную на рис. 3.6—4. Квантование сигналов производится в моменты $t = 0, \frac{T}{4}, T, \frac{5T}{4}, \dots, kT, (k + \frac{1}{4})T, \dots$, как показано на

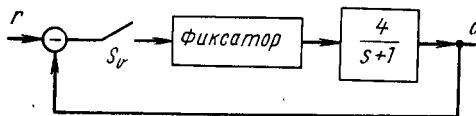


Рис. 3.6—4. Импульсная система с переменной частотой прерывания

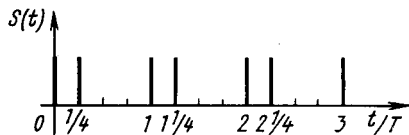


Рис. 3.6—5. Выборочная функция прерывателя с переменной частотой прерывания

рис. 3.6—5. Основной период прерывания равен 1 сек. В качестве сглаживающего устройства используется фиксатор. Передаточная функция объекта дается выражением

$$G(s) = \frac{4}{s+1}.$$

Требуется найти реакцию системы на входное воздействие вида единичной ступенчатой функции.

Схема системы в переменных состоянии показана на рис. 3.6—6. Для описания состояния системы введем вектор

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} m_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Из рассмотрения схемы, представленной на рис. 3.6—6, находим следующие матрицы:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Phi_0(\lambda) = \Phi_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} & 4(1-e^{-\lambda}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$H_0(\lambda) = H_1(\lambda) = \Phi_0(\lambda) B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4(1-e^{-\lambda}) & 5e^{-\lambda} - 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

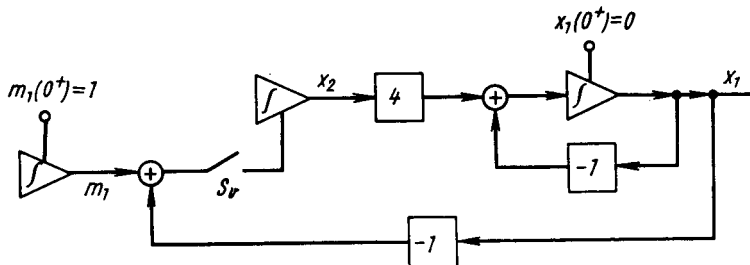


Рис. 3.6—6. Схема в переменных состоянии импульсной системы с переменной частотой прерывания

Переходим к определению $x_1(nT)$. Для интервала $\frac{T}{4} < t - nT \leq T$ находим

$$v(t) = \psi_1(t - nT) v(nT),$$

где

$$\psi_1(t - nT) = H_1\left(t - nT - \frac{T}{4}\right) H_0\left(\frac{T}{4}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -12 + 16e^{-\left(t-n-\frac{1}{4}\right)} - 20e^{-(t-n)} + 16e^{-\frac{1}{4}} & 16 - 20e^{-\left(t-n-\frac{1}{4}\right)} + 25e^{-(t-n)} - 20e^{-\frac{1}{4}} & 0 \\ -3 + 4e^{-\frac{1}{4}} & -5e^{-\frac{1}{4}} + 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$m_1(t) = m_1(n) = 1;$$

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} -12 + 16e^{-\left(t-n-\frac{1}{4}\right)} - 20e^{-(t-n)} + 16e^{-\frac{1}{4}} \\ 16 - 20e^{-\left(t-n-\frac{1}{4}\right)} + 25e^{-(t-n)} - 20e^{-\frac{1}{4}} \end{bmatrix} m_1(n) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 16 - 20e^{-\left(t-n-\frac{1}{4}\right)} + 25e^{-(t-n)} - 20e^{-\frac{1}{4}} \\ -5e^{-\frac{1}{4}} + 4 \end{bmatrix} x_1(n).$$

Отсюда имеем:

$$\text{для } n=0 \quad x_1(1) = -12 + 16e^{-\frac{3}{4}} - 20e^{-1} + 16e^{-\frac{1}{4}} = 0,661;$$

$$n=1 \quad x_1(2) = 0,661 + (16 - 20e^{-\frac{3}{4}} + 25e^{-1} - 20e^{-\frac{1}{4}}) \cdot 0,661 = 0,661 + 0,174 \times \\ \times 0,661 = 0,776;$$

$$\text{для } n=2 \quad x_1(3) = 0,661 + 0,174 \times 0,776 = 0,796;$$

$$\text{для } n=3 \quad x_1(4) = 0,661 + 0,174 \times 0,796 = 0,800;$$

$$\text{для } n=4 \quad x_1(5) = 0,661 + 0,174 \times 0,800 = 0,801;$$

$$\text{для } n=5 \quad x_1(6) = 0,661 + 0,174 \times 0,801 = 0,802.$$

Для интервала

$$0 < t - nT \leq \frac{T}{4}$$

находим

$$v(t) = \Psi_0(t - nT) v(nT),$$

где

$$\Psi_0(t - nT) = H_0(t - nT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 - 4e^{-(t-nT)} & 5e^{-(t-nT)} - 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$x_1(t) = [4 - 4e^{-(t-n)}] m_1(n) + [5e^{-(t-n)} - 4] x_1(n);$$

$$m_1(t) = m_1(n) = 1.$$

Отсюда имеем:

$$\text{для } n=0 \quad x_1\left(\frac{1}{4}\right) = 4 - 4e^{-\frac{1}{4}} = 0,888;$$

$$\text{для } n=1 \quad x_1\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 4\left(1 - e^{-\frac{1}{4}}\right) + \left(5e^{-\frac{1}{4}} - 4\right)0,661 = 0,818;$$

$$\text{для } n=2 \quad x_1\left(2 - \frac{1}{4}\right) = 4\left(1 - e^{-\frac{1}{4}}\right) + \left(5e^{-\frac{1}{4}} - 4\right)0,776 = 0,804.$$

Для $t = nT + \frac{T}{2}$

$$x_1\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(-12 + 32e^{-\frac{1}{4}} - 20e^{-\frac{1}{2}}\right) + \left(16 - 40e^{-\frac{1}{4}} + 25e^{-\frac{1}{2}}\right)x_1(n) = \\ = 0,791 + 0,011x_1(n),$$

откуда получаем

$$x_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0,791;$$

$$x_1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0,791 + 0,011 \times 0,661 = 0,798;$$

$$x_1\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 0,791 + 0,011 \times 0,776 = 0,799;$$

$$x_1\left(3 - \frac{1}{2}\right) = 0,791 + 0,011 \times 0,796 = 0,800.$$

Для $t = nT + \frac{3T}{4}$ находим

$$x_1\left(n + \frac{3}{4}\right) = \left(-12 + 16e^{-\frac{1}{2}} - 20e^{-\frac{3}{4}} + 16e^{-\frac{1}{4}}\right) + \\ + \left(16 - 20e^{-\frac{1}{2}} + 25e^{-\frac{3}{4}} - 20e^{-\frac{1}{4}}\right) x_1(n) = 0,718 + 0,102x_1(n).$$

Следовательно,

$$x_1\left(\frac{3}{4}\right) = 0,718;$$

$$x_1\left(1\frac{3}{4}\right) = 0,718 + 0,102 \times 0,661 = 0,785;$$

$$x_1\left(2\frac{3}{4}\right) = 0,718 + 0,102 \times 0,776 = 0,797;$$

$$x_1\left(3\frac{3}{4}\right) = 0,718 + 0,102 \times 0,796 = 0,799.$$

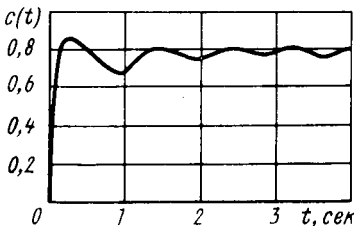


Рис. 3.6—7. Переходная характеристика системы примера 3.6—2

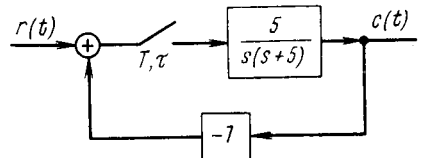


Рис. 3.6—8. Схема импульсной системы с конечной длительностью квантования

Реакция системы на входное воздействие вида единичной ступенчатой функции изображена на рис. 3.6—7. Этот результат совпадает с полученным в работе [136] на основе классического метода z -преобразований.

Пример 3.6—3. Дискретная система с конечной длительностью импульсов

Рассмотрим дискретную систему с конечной длительностью импульсов, показанную на рис. 3.6—8. Передаточная функция объекта дается выражением

$$G(s) = \frac{5}{s(s+5)}.$$

Начальные условия предполагаются нулевыми. Квантование сигналов производится с периодом $T = 1$ сек при длительности импульсов $\tau = 0,2$ сек. Требуется определить реакцию системы на входное воздействие вида единичной ступенчатой функции.

Схема системы в переменных состояния изображена на рис. 3.6—9, из ко-

торой могут быть легко найдены матрицы перехода для различных интервалов времени. Вектор состояния определим выражением

$$v = \begin{bmatrix} r_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

Для интервала $0 < t - nT \leq \tau$ расширенную матрицу перехода находим в виде

$$\Phi_0(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{b}{\sqrt{5}} e^{-a\lambda} - \frac{a}{\sqrt{5}} e^{-b\lambda} & \frac{a}{\sqrt{5}} e^{-a\lambda} - \frac{b}{\sqrt{5}} e^{-b\lambda} & \sqrt{5}(e^{-b\lambda} - e^{-a\lambda}) \\ 1 + \frac{(b-1)e^{-a\lambda}}{\sqrt{5}} - \frac{(a-1)e^{-b\lambda}}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}) & \frac{1}{\sqrt{5}}(ae^{-b\lambda} - be^{-a\lambda}) \end{bmatrix},$$

где $a = 3,618$ и $b = 1,382$ — корни уравнения $s^2 + 5s + 5 = 0$.

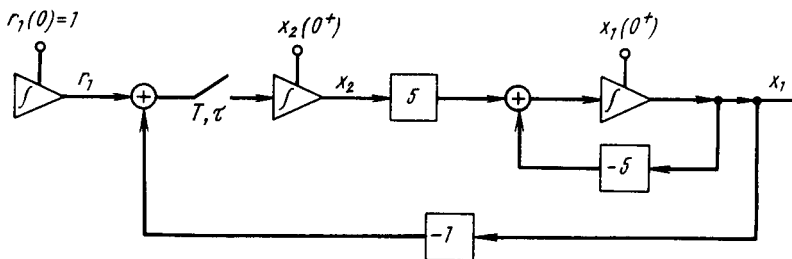


Рис. 3.6—9. Схема в переменных состояния импульсной системы с конечной длительностью квантования

Из рассмотрения схемы, представленной на рис. 3.6—9, находим, что $B_0 = 1$. Тогда $H_0(\lambda) = \Phi_0(\lambda)$ и для интервала $nT < t \leq nT + \tau$ находим

$$v(t) = \Phi_0(t - nT) v(nT).$$

Для интервала $\tau < t - nT \leq T$, обращаясь вновь к схеме системы в переменных состояния, получаем

$$\Phi_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5\lambda} & 1 - e^{-5\lambda} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = 1.$$

Отсюда для интервала $nT + \tau < t \leq (n+1)T$ имеем

$$v(t) = \Phi_1(t - nT - \tau) \Phi_0(\tau) v(nT)$$

и для моментов $t = (n+1)T$ и $t = nT + \tau$ соответственно получаем

$$v(n+1)T = \Phi_1(T - \tau) \Phi_0(\tau) v(nT); \quad v(nT + \tau) = \Phi_0(\tau) v(nT).$$

Полученные рекуррентные соотношения позволяют полностью рассчитать реакцию системы.

Для заданных $\tau = 0,2$ сек и $T = 1$ сек находим следующие значения матриц $\Phi_0(\tau)$ и $\Phi_1(T-\tau)$:

$$\Phi_0(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,0742 & 0,3212 & 0,6093 \\ 0,1963 & -0,1219 & 0,9258 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(T-\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0183 & 0,9817 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Отсюда можно легко найти векторы $v(\tau)$, $v(T)$, $v(T+\tau)$, $v(2T)$, ... полагая в предыдущих выражениях $n = 0, 1, 2, \dots$, соответственно. Для $n = 0$, учитывая, что

$$v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

находим

$$v(\tau) = \Phi_0(\tau) v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,0742 \\ 0,1963 \end{bmatrix};$$

$$v(T) = \Phi_1(T-\tau) \Phi_0(\tau) v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1951 \\ 0,1963 \end{bmatrix}.$$

Для $n = 1$ находим

$$v(T+\tau) = \Phi_0(\tau) v(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2565 \\ 0,3543 \end{bmatrix};$$

$$v(2T) = \Phi_1(T-\tau) \Phi_0(\tau) v(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,3546 \\ 0,3543 \end{bmatrix}.$$

Аналогично имеем

$$v(2T+\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4040 \\ 0,4810 \end{bmatrix}; \quad v(3T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4807 \\ 0,4810 \end{bmatrix};$$

$$v(3T+\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5217 \\ 0,5831 \end{bmatrix}; \quad v(4T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5830 \\ 0,5831 \end{bmatrix};$$

$$v(4T+\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6167 \\ 0,6651 \end{bmatrix}; \quad v(5T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6652 \\ 0,6651 \end{bmatrix};$$

$$v(5T+\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6931 \\ 0,7310 \end{bmatrix}; \quad v(6T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,7320 \\ 0,7310 \end{bmatrix};$$

$$v(6T+\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,7545 \\ 0,7839 \end{bmatrix}; \quad v(7T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,7844 \\ 0,7839 \end{bmatrix}.$$

Реакция системы $c(t) = x_1(t)$ на единичное ступенчатое входное воздействие изображена на рис. 3.6—10. Хорошо известно, что точный анализ переходных процессов в дискретных системах с конечной длительностью импульсов классическими методами требует обычно проведения исключительно сложных и трудоемких расчетов и поэтому часто кажется невыполнимым. Приведенный выше иллюстративный пример показывает, что такой анализ может быть легко выполнен при использовании метода переходных состояний, позволяющего для этого случая разработать процедуру планомерного и систематического решения задачи.

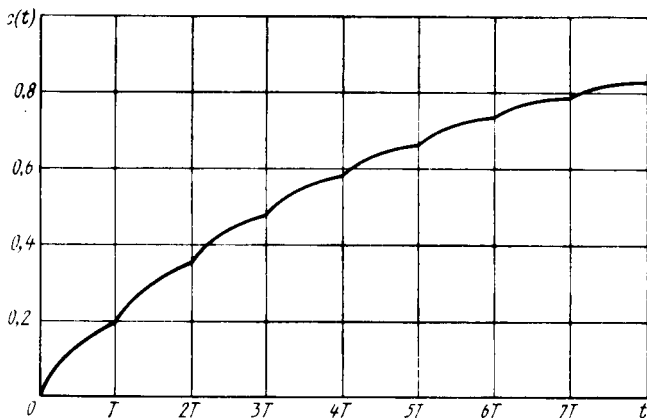


Рис. 3.6—10. Переходная характеристика системы с конечной длительностью квантования

Описанный в этом разделе подход к анализу дискретных систем может быть с успехом применен и в случае дискретных систем с широтно-импульсной модуляцией.

Пример 3.6—4. Дискретная система с широтно-импульсной модуляцией

Рассмотрим электрогидравлический сервомеханизм, работающий на принципе широтно-импульсной модуляции, когда на вход золотникового распределителя поступает в виде колебаний прямоугольной формы последовательность

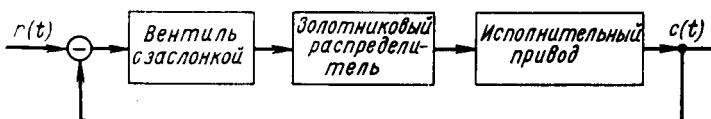


Рис. 3.6—11. Схема электрогидравлического сервомеханизма

модулированных по ширине импульсов. Схема системы показана на рис. 3.6—11. Передаточная функция участка контура, включающего золотниковый распределитель и исполнительное устройство, дается выражением

$$G(s) = \frac{1}{s(s+0,5)}$$

Начальные условия предполагаются нулевыми. Широтно-импульсный модулятор (ШИМ) обладает следующими характеристиками: период прерывания равен 1 сек; амплитуда выходного импульса равна единице; длительность импульса равна амплитуде входного сигнала модулятора в момент выборки. Требуется определить реакцию системы на входное воздействие вида единичной ступенчатой функции.

Схема системы в переменных состояния показана на рис. 3.6—12. Широтно-импульсный модулятор на этой схеме представлен в виде устройства, осуществ-

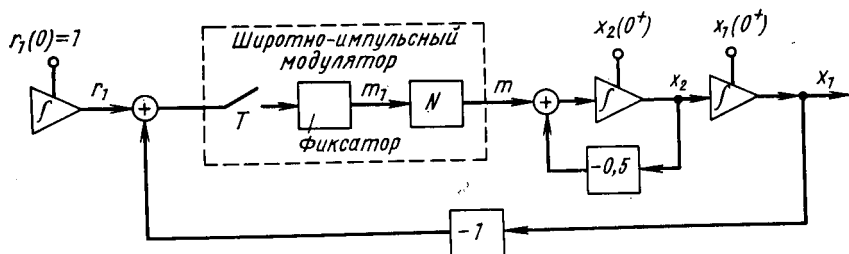


Рис. 3.6—12. Схема в переменных состояния для системы с широтно-импульсной модуляцией

ляющего нелинейное преобразование сигналов, такое, что в n -м периоде прерывания

$$\tau_n = |m_1(nT^+)| \quad \text{для } |m_1(nT^+)| < 1;$$

$$\tau_n = T \quad \text{для } |m_1(nT^+)| \geq 1,$$

где τ_n — длительность импульса управляющего воздействия m в n -м периоде прерывания.

Вектор состояния системы v и вектор начальных условий $v(0)$ даются выражениями

$$v = \begin{bmatrix} r_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ m_1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В интервале $nT < t \leq nT + \tau_n$, где длительность τ_n определена выше, высота импульса равна

$$m = +1 \quad \text{для } m_1(nT^+) > 0;$$

$$m = -1 \quad \text{для } m_1(nT^+) < 0,$$

и вектор состояния определяется выражением

$$v(t) = \Phi_0(t - nT) B_0 v(nT).$$

Полагая $t = nT + \tau_n$, получаем уравнение переходного состояния для этого интервала:

$$v(nT + \tau_n) = \Phi_0(\tau_n) B_0 v(nT).$$

Матрицу перехода Φ_0 и матрицу коэффициентов B_0 находим из рассмотрения схемы системы в переменных состояния:

$$\Phi_0(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}\right) & \frac{2}{|m_1(nT^+)|} \left(\lambda - 2 + 2e^{-\frac{\lambda}{2}}\right) \\ 0 & 0 & e^{-\frac{\lambda}{2}} & \frac{2}{|m_1(nT^+)|} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Для интервала $nT + \tau_n < t \leq (n+1)T$ находим $m = 0$;

$$v(t) = \Phi_1(t - nT - \tau_n) v(nT + \tau_n).$$

Подставляя сюда $t = (n+1)T$, приходим к уравнению

$$v((n+1)T) = \Phi_1(T - \tau_n) v(nT + \tau_n).$$

Матрицу перехода Φ_1 находим из рассмотрения схемы системы в переменных состояниях:

$$\Phi_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{\lambda}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

При $n = 0$, $m_1(0^+) = 1$, $\tau_0 = 1$

$$\Phi_0(\tau_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,787 & 0,426 \\ 0 & 0 & 0,607 & 0,787 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$v(\tau_0) = v(T) = \Phi_0(\tau_0) B_0 v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,426 \\ 0,787 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$v(T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,426 \\ 0,787 \\ 0,574 \end{bmatrix}.$$

Так как $m_1(\tau_0^+) = m_1(T^+) = 0,574$, $\tau_1 = 0,574$. Тогда при $n = 1$

$$\Phi_0(\tau_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0,258 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0,872 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$v(T + \tau_1) = \Phi_0(\tau_1) v(T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,968 \\ 1,091 \\ 0,574 \end{bmatrix};$$

$$\Phi_1(T - \tau_1) = \Phi_1(0,426) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,384 & 0 \\ 0 & 0 & 0,808 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$v(2T) = \Phi_1(T - \tau_1) v(T + \tau_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,386 \\ 0,881 \\ 0,574 \end{bmatrix};$$

$$v(2T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,386 \\ 0,881 \\ -0,386 \end{bmatrix}.$$

Так как $m_1(2T^+) = -0,386$, $\tau_2 = 0,386$. Тогда при $n = 2$

$$\Phi_0(\tau_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,352 & 0,176 \\ 0 & 0 & 0,824 & 0,912 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

откуда получаем

$$v(2T + \tau_2) = \Phi_0(\tau_2) v(2T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,628 \\ 0,373 \\ -0,386 \end{bmatrix};$$

$$\Phi_1(T - \tau_2) = \Phi_1(0,614) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,531 & 0 \\ 0 & 0 & 0,735 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$v(3T) = \Phi_1(T - \tau_2) v(2T + \tau_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,825 \\ 0,274 \\ -0,386 \end{bmatrix};$$

$$v(3T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,825 \\ 0,274 \\ -0,825 \end{bmatrix};$$

Так как $m_1(3T^+) = -0,825$, $\tau_3 = 0,825$. При $n = 3$

$$\Phi_0(\tau_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,678 & 0,356 \\ 0 & 0 & 0,661 & 0,833 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$v(3T + \tau_3) = \Phi_0(\tau_3) v(3T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,716 \\ -0,497 \\ -0,825 \end{bmatrix};$$

$$\Phi_1(T - \tau_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,168 & 0 \\ 0 & 0 & 0,916 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$v(4T) = \Phi_1(T - \tau_3) v(3T + \tau_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,633 \\ -0,455 \\ -0,825 \end{bmatrix};$$

$$v(4T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,633 \\ -0,455 \\ -0,633 \end{bmatrix}.$$

Так как $m_1(4T^+) = -0,633$, $\tau_4 = 0,633$. Произведя вычисления, аналогичные предыдущим, получим векторы состояния для последующих моментов времени:

$$v(4T + \tau_4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,200 \\ -0,875 \\ -0,633 \end{bmatrix}; \quad v(5T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,899 \\ -0,728 \\ -0,633 \end{bmatrix};$$

$$v(5T + \tau_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,829 \\ -0,594 \\ 0,101 \end{bmatrix}; \quad v(6T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,397 \\ -0,379 \\ 0,101 \end{bmatrix} \dots$$

Реакция системы и форма импульсов на выходе модулятора изображены на рис. 3.6—13. Приведенные кривые совпадают с кривыми, полученными после долгих и утомительных расчетов при использовании классического метода анализа.

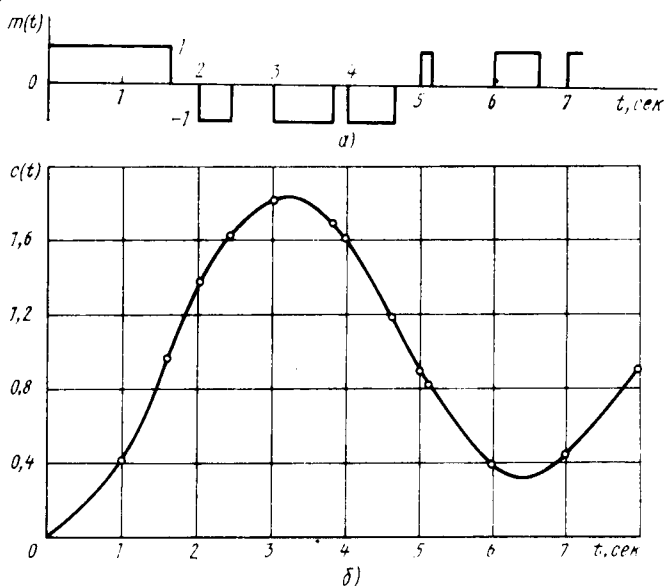


Рис. 3.6—13.

а — форма импульсов управляющего воздействия на выходе модулятора; б — переходная характеристика системы с широтно-импульсной модуляцией

Этот пример наглядно демонстрирует преимущество развитого в настоящем разделе метода анализа над известными из литературы классическими методами.

3.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая глава посвящена анализу систем управления методами пространства состояний. В любой момент t вектор состояния $x(t)$ и вектор выхода $y(t)$ системы являются функциями начальных координат и выходных переменных системы:

$$x(t) = F[x(t_0); m(t_0, t)];$$

$$y(t) = \psi[x(t_0); m(t_0, t)].$$

Эти уравнения называются уравнениями состояния системы. В случае линейной системы эти уравнения могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{m}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{m}(t).\end{aligned}$$

Вывод уравнений состояния является исходным моментом анализа и синтеза систем в современной теории управления.

Уравнения состояния линейной стационарной системы могут быть записаны в следующей матричной форме:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t),$$

где $\mathbf{v}(t)$ — вектор-столбец, представляющий одновременно входные переменные и переменные состояния. Решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \Phi(t)\mathbf{v}(0^+),$$

где $\Phi(t)$ — расширенная матрица перехода, определяемая выражением

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = L^{-1} \{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \}.$$

Матрица перехода может быть определена при использовании теоремы разложения Сильвестра, формулы обратного преобразования Лапласа, а также при помощи схемы системы в переменных состояниях. Можно указать три различных способа составления схемы системы в переменных состояниях по ее передаточной функции:

- 1) прямое программирование;
- 2) параллельное программирование;
- 3) последовательное программирование.

Метод описания системы переменными состояниями распространяется на входные и возмущающие воздействия, которые также характеризуются переменными состояниями. Это позволяет составить для описания системы, включая входные воздействия, единую схему в переменных состояниях, которая в этом случае имеет более высокую размерность.

Метод переходных состояний, пожалуй, не дает каких-нибудь заметных преимуществ над классическим при анализе стандартных дискретных систем. Эти преимущества проявляются при анализе нестандартных дискретных систем со сложными законами прерывания сигналов, когда важно найти путь для систематического и планомерного решения задачи, что связано обычно с огромными трудностями при использовании классических методов.

Решение уравнения состояния для нестандартной дискретной системы имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\Psi}_i(t - nT) \mathbf{v}(nT),$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_i(t - nT) &= \mathbf{H}_i(t - nT - t_i) \mathbf{H}_{i-1}(t_i - t_{i-1}) \dots \mathbf{H}_1(t_2 - t_1) \mathbf{H}_0(t_1), \\ \mathbf{H}_i(t - nT - t_i) &= \boldsymbol{\Phi}_i(t - nT - t_i) \mathbf{B}_i. \end{aligned}$$

Даны примеры, иллюстрирующие анализ дискретных систем с многократным прерыванием, с циклически изменяющейся частотой прерывания, с широтно-импульсной модуляцией при использовании метода переходных состояний. Анализ таких сложных систем производится последовательными шагами при использовании рекуррентных соотношений. Это обстоятельство облегчает программирование для цифровых вычислительных машин, что является важным преимуществом рассматриваемого подхода.

Следует подчеркнуть, что для одной и той же системы можно составить несколько схем в переменных состояния, отличающихся природой промежуточных переменных, выбранных для описания системы. Различный выбор этих переменных ведет к различным конфигурациям схемы системы в переменных состояния, каждая из которых полностью характеризует систему. При описании системы переменными состояния очень важно в качестве переменных состояния выбрать измеримые переменные.

Литература к главе 3

Беллман [22], Коддингтон и Левинсон [45], Гильберт [68], Калман и Бертрам [91], Калман и Кепске [93], Кипиняк [94], Ту [136], [138], [139], [142], Ту и Вадханафати [147].

РАСЧЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ПЕРЕХОДНЫХ СОСТОЯНИЙ

Преыдущая глава была посвящена анализу непрерывных и дискретных систем управления на основе метода переходных состояний. Можно было видеть, что в простых случаях классические операторные методы часто позволяют получить решение быстрее, чем метод переходных состояний. Однако для более сложных задач метод переходных состояний позволяет систематизировать и унифицировать процесс решения, что дает большие преимущества с точки зрения программирования для цифровых вычислительных машин. Однако было бы преждевременным давать окончательную оценку рассматриваемому подходу до изучения возможности применения его для синтеза систем управления. Известно, что синтез оптимальных многомерных систем, линейных систем высокого порядка, систем с насыщением объекта управления при использовании классических методов проводится со многими упрощениями, связан с большими трудностями и поэтому фактически эти методы находят применение лишь в случае простых и идеализированных систем управления с обратной связью. Решение этого большого класса задач с учетом ограничений сравнительно легко можно найти, пользуясь методом переходных состояний. Настоящая глава посвящена расчету систем управления на основе метода переходных состояний.

4.1. ЦИФРОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ, МИНИМИЗИРУЮЩЕЕ ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИЯХ ТИПА СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ

В настоящем параграфе дается решение задачи о максимальном быстродействии линейной системы, возбуждаемой воздействием вида ступенчатой функции при нулевых начальных условиях. Под максимальным быстродействием здесь понимается свойство системы обрабатывать входные воздействия вида ступенчатой функции без перерегулирования за конечное и минимальное время. Реализация таких процессов связана с мгновенным сообще-

нием или отбором энергии у системы, что чрезвычайно трудно осуществить в непрерывной системе. Однако желаемое свойство можно придать непрерывной системе путем включения в нее нелинейного элемента типа реле или цифрового регулятора. В настоящем параграфе проектирование системы, обладающей желаемым свойством, производится вторым способом.

Рассмотрим систему с обратной связью, показанную на рис. 4.1—1, с входным воздействием вида ступенчатой функции.

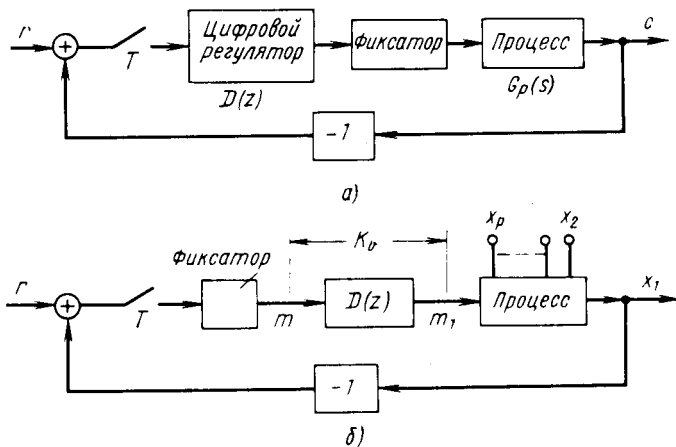


Рис. 4.1—1. Цифровая система управления

Управляемый процесс предполагается линейным и может быть описан p переменными состояния. Процесс характеризуется схемой в переменных состояния, как показано на рис. 4.1—1, б. Вектор состояния системы определим выражением

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \mathbf{x} \\ m \end{bmatrix}, \quad (4.1-1)$$

где r_1 обозначает входное воздействие, \mathbf{x} — вектор состояния процесса:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \quad (4.1-2)$$

и m — входной сигнал цифрового регулятора. Требуется определить входной сигнал m и передаточную функцию $D(z)$ цифрового регулятора, обеспечивающих максимальное быстродействие системы при воздействиях вида ступенчатой функции.

Метод переменного коэффициента усиления [147]

Требуемый цифровой регулятор можно рассматривать как усилитель с переменным коэффициентом усиления K_v , принимающим различные значения на различных интервалах прерывания. Входом этого усилителя с переменным коэффициентом K_v является сигнал m ; выход обозначим через m_1 . В любой момент времени $t = nT^+$ вход и выход этого усилительного элемента связаны линейным соотношением с коэффициентом пропорциональности K_n , т. е.

$$m_1(nT^+) = K_n m(nT^+), \quad (4.1-3)$$

где K_n — постоянный коэффициент усиления усилительного элемента в $(n + 1)$ -периоде прерывания.

Используя этот подход, матрицу перехода системы Φ можно представить в виде функции постоянных усилений K_n усилительного элемента в последовательных интервалах прерывания. В параграфе 3.5 было показано, что уравнения переходных состояний линейной системы имеют вид

$$v(nT^+) = Bv(nT); \quad (4.1-4)$$

$$v(\overline{n+1T}) = \Phi(T)v(nT^+); \quad (4.1-5)$$

$$v(\overline{n+1T}) = \Phi(T)Bv(nT). \quad (4.1-6)$$

Отсюда находим:

$$\text{для } n=0 \quad v(0^+) = Bv(0); \quad (4.1-7)$$

$$\text{для } t=T \quad v(T) = \Phi_0(T)Bv(0), \quad (4.1-8)$$

где $v(0)$ — заданный вектор начального состояния.

Так как матрица перехода $\Phi_0(T)$ является функцией K_0 -усиления усилительного элемента в первом периоде прерывания, то и вектор $v(T)$ состояния системы при $t = T$ является также функцией усиления K_0 . Отсюда, если определить вектор $v(T)$ из уравнения (4.1-8) в виде функции от K_0 , то вектор $v(T^+)$ можно легко найти из рассмотрения схемы системы в переменных состояниях или при использовании уравнения (4.1-4). Из уравнения (4.1-5) следует, что вектор состояния

$$v(2T) = \Phi_1(T)v(T^+), \quad (4.1-9)$$

где матрица перехода $\Phi_1(T)$ есть функция усиления K_1 усилительного элемента во втором периоде прерывания, а вектор состояния $v(T^+)$ есть функция от K_0 .

Следовательно, вектор состояния $v(2T)$ есть функция обоих коэффициентов усиления K_0 и K_1 . Если вектор $v(2T)$ найден, то вектор $v(2T^+)$ можно определить по формуле (4.1-4) или с по-

мощью схемы системы в переменных состояния. Вектор состояния $\mathbf{v}(2T^+)$ есть также функция обоих коэффициентов усиления K_0 и K_1 .

Для момента времени $t = kT$ аналогичным образом находим

$$\mathbf{v}(kT) = \Phi_{k-1}(T) \mathbf{v}(\overline{k-1}T^+), \quad (4.1-10)$$

где матрица перехода $\Phi_{k-1}(T)$ есть функция усиления K_{k-1} усилительного элемента в k -м периоде прерывания, а вектор состояния $\mathbf{v}(\overline{k-1}T^+)$ есть функция коэффициентов усиления $K_0, K_1, K_2, \dots, K_{k-2}$.

Следовательно, вектор состояния $\mathbf{v}(kT)$ есть функция коэффициентов усиления $K_0, K_1, K_2, \dots, K_{k-2}$ и K_{k-1} .

Найдем выражение импульсной передаточной функции $D(z)$ цифрового регулятора через различные коэффициенты усиления K_j усилительного элемента. В начальный момент, очевидно, имеем

$$m(0^+) = r_1(0^+) \quad (4.1-11)$$

и, следовательно,

$$m_1(0^+) = K_0 m(0^+) = K_0 r_1(0^+). \quad (4.1-12)$$

Аналогично,

$$m_1(T^+) = K_1 m(T^+), \quad (4.1-13)$$

где $m(T^+)$, согласно выражению (4.1-1), находится как одна из компонент вектора $\mathbf{v}(T^+)$:

$$\mathbf{v}(T^+) = \mathbf{B}\mathbf{v}(T) = \mathbf{B}\Phi_0(T) \mathbf{v}(0^+). \quad (4.1-14)$$

Аналогично имеем равенство

$$m_1(2T^+) = K_2 m(2T^+), \quad (4.1-15)$$

где $m(2T^+)$ находится как компонента вектора $\mathbf{v}(2T^+)$:

$$\mathbf{v}(2T^+) = \mathbf{B}\Phi_1(T) \mathbf{v}(T^+); \quad (4.1-16a)$$

$$\mathbf{v}(2T^+) = \mathbf{B}\Phi_1(T) \mathbf{B}\Phi_0(T) \mathbf{v}(0^+). \quad (4.1-16b)$$

В общем случае

$$m_1(jT^+) = K_j m(jT^+), \quad (4.1-17)$$

где $m(jT^+)$ определяется как компонента вектора $\mathbf{v}(jT^+)$:

$$\mathbf{v}(jT^+) = \mathbf{B}\Phi_{j-1}(T) \mathbf{v}(\overline{j-1}T^+); \quad (4.1-18a)$$

$$\mathbf{v}(jT^+) = \mathbf{B}\Phi_{j-1}(T) \mathbf{B}\Phi_{j-2}(T) \dots \mathbf{B}\Phi_0(T) \mathbf{v}(0^+). \quad (4.1-18b)$$

Импульсную передаточную функцию $D(z)$ цифрового регулятора находим как отношение z -преобразований для последовательности входных сигналов $m(jT^+)$:

$$M(z) = \sum_{j=0}^n m(jT^+)z^{-j} \quad (4.1-19)$$

и последовательности выходных сигналов $m_1(jT^+)$:

$$M_1(z) = \sum_{j=0}^n K_j m(jT^+)z^{-j} \quad (4.1-20)$$

усилительного элемента в виде

$$D(z) = \frac{M_1(z)}{M(z)} = \frac{\sum_{j=0}^n K_j m(jT^+)z^{-j}}{\sum_{j=0}^n m(jT^+)z^{-j}}. \quad (4.1-21)$$

Следовательно, задача проектирования сводится к определению констант K_j усилительного элемента с переменным усилением для различных интервалов прерывания. Расчет желаемого цифрового регулятора считается законченным, как только становятся известными эти константы усилительного элемента.

Константы K_j находятся с учетом требований, предъявляемых к системе. Для получения системы с максимальным быстродействием при входных воздействиях вида ступенчатой функции и нулевых начальных условиях необходимо, чтобы при $t < pT$, где T — период прерывания, выход оставался меньше входа и ошибка системы при $t \geq pT$ равнялась нулю. Эти условия удовлетворяются, если

$$x_1(pT) = r_1(pT); \quad (4.1-22)$$

$$x_2(pT) = x_3(pT) = \dots = x_p(pT) = 0, \quad (4.1-23)$$

где p — порядок дифференциального уравнения процесса, а переменные состояния $x_2(pT)$, $x_3(pT)$, ..., $x_p(pT)$ являются функциями коэффициентов усиления K_0, K_1, \dots, K_{p-1} , которые находятся из уравнения (4.1-10). Соотношение (4.1-23) означает, что входные сигналы интеграторов равны нулю при $t \geq pT$. Последовательные усиления K_j могут быть найдены путем решения уравнений, вытекающих из соотношений (4.1-22) и (4.1-23).

Для иллюстрации изложенного метода проектирования рассмотрим несколько числовых примеров.

Пример 4.1—1. Управляемый процесс с интегрированием

Рассмотрим систему, схема которой показана на рис. 4.1—2. Управляемый процесс характеризуется передаточной функцией

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+1)}.$$

К системе предъявляются следующие требования: 1) в состоянии установившегося равновесия после приложения входного воздействия вида ступенчатого

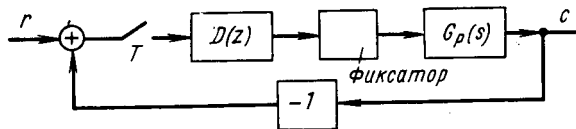


Рис. 4.1—2. Схема иллюстративной системы

той функции не должно быть ошибки пульсации на выходе системы; 2) переходный процесс должен закончиться за минимально возможное время. Требуется произвести расчет цифрового регулятора для получения желаемой реакции системы.

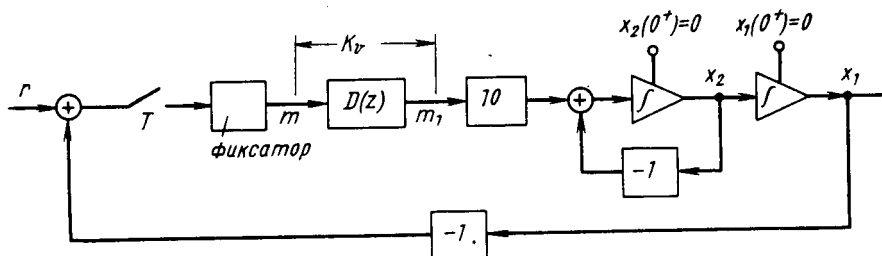


Рис. 4.1—3. Схема в переменных состояния иллюстративной системы

Схема системы в переменных состояния, на которой цифровой регулятор представлен усилительным элементом с переменным коэффициентом усиления K_v , изображена на рис. 4.1—3. Вектор состояния системы запишем в виде

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ m \end{bmatrix},$$

и тогда матрицу перехода $\Phi(T)$ и матрицу \mathbf{B} запишем в следующем виде:

$$\Phi_n(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,632 & 3,68K_n \\ 0 & 0 & 0,368 & 8,32K_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вектор начального состояния

$$v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для $n = 0$ и $t = T$ из формулы (4.1—8) находим

$$v(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3,68K_0 \\ 6,32K_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Из рассмотрения схемы системы в переменных состояния имеем

$$v(T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3,68K_0 \\ 6,32K_0 \\ 1 - 3,68K_0 \end{bmatrix}.$$

Это выражение можно также получить аналитическим путем из уравнения (4.1—4).

Аналогичным образом при $n = 1$ и $t = 2T$ из формулы (4.1—9) находим

$$v(2T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 7,68K_0 + 3,68(1 - 3,68K_0)K_1 \\ 2,32K_0 + 6,32(1 - 3,68K_0)K_1 \\ 1 - 3,68K_0 \end{bmatrix}.$$

Это выражение показывает, что в желаемое конечное состояние равновесия система может быть переведена за два периода прерывания. Для этого необходимо коэффициенты усиления K_0 и K_1 выбрать так, чтобы одновременно удовлетворялись следующие условия:

$$x_1(2T) = 7,68K_0 + 3,68(1 - 3,68K_0)K_1 = 1;$$

$$x_2(2T) = 2,32K_0 + 6,32(1 - 3,68K_0)K_1 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$K_0 = 0,158 \quad \text{и} \quad K_1 = -0,138.$$

Отсюда имеем

$$m(T^+) = 1 - 3,68K_0 = 0,418;$$

$$m_1(0^+) = K_0 m(0^+) = 0,158;$$

$$m_1(T^+) = K_1 m(T^+) = -0,0578.$$

Импульсную передаточную функцию искомого цифрового регулятора находим в виде

$$D(z) = \frac{0,158(-0,368z^{-1})}{1 + 0,418z^{-1}}$$

Пример 4.1—2. Управляемый процесс без интегрирования

Рассмотрим систему, схема которой показана на рис. 4.1—2. Период преобразования равен 1 сек. Управляемый процесс характеризуется передаточной функцией

$$G_p(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

Требуется произвести расчет цифрового регулятора так, чтобы переходные процессы в системе при воздействиях вида единичной ступенчатой функции и

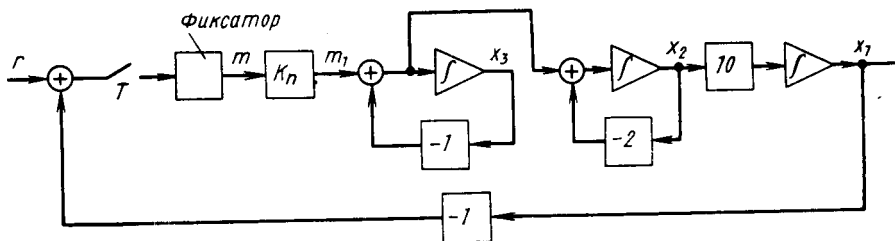


Рис. 4.1—4. Схема в переменных состояния иллюстративной системы

нулевых начальных условиях заканчивались за минимальное время. Так как в заданном процессе интегрирования нет, то регулятор может быть реализован с интегрированием или без него, как это иллюстрируется ниже.

а. *Регулятор с интегрированием.* Передаточная функция процесса может быть записана в виде

$$G_p(s) = \frac{10s}{s(s+1)(s+2)}$$

Схема системы в переменных состояния, соответствующая этой форме записи передаточной функции, показана на рис. 4.1—4, где цифровой регулятор с передаточной функцией $D(z)$ заменен усилительным элементом с переменным усилением K_n . Вектор состояния системы определим выражением

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ m \end{bmatrix}$$

Отсюда находим векторы начального состояния:

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}(0)^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Матрицу перехода системы находим в виде

$$\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5(1-e^{-2\lambda}) & -5+10e^{-\lambda}-5e^{-2\lambda} & (5-10e^{-\lambda}+5e^{-2\lambda})K_n \\ 0 & 0 & e^{-2\lambda} & -e^{-\lambda}+e^{-2\lambda} & (e^{-\lambda}-e^{-2\lambda})K_n \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & (1-e^{-\lambda})K_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как $T = 1$ сек, то

$$\Phi_n(T) = \Phi(K_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4,325 & -1,997 & 1,997 K_n \\ 0 & 0 & 0,135 & -0,233 & 0,233 K_n \\ 0 & 0 & 0 & 0,368 & 0,632 K_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из уравнений переходных состояний

$$\begin{aligned} v(n+1 T) &= \Phi(K_n) v(nT^+); \\ v(nT^+) &= \mathbf{B}\Phi(K_{n-1})\mathbf{B}\Phi(K_{n-2}) \dots \mathbf{B}\Phi(K_0) v(0^+) \end{aligned}$$

находим

для $n = 0$

$$v(T) = \Phi(K_0) v(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,997K_0 \\ 0,233K_0 \\ 0,632K_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и

$$v(T^+) = \mathbf{B}v(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,997K_0 \\ 0,233K_0 \\ 0,632K_0 \\ 1-1,997K_0 \end{bmatrix};$$

для $n = 1$

$$v(2T) = \Phi(K_1) v(T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,747K_0 + 1,997(1-1,997K_0)K_1 \\ -0,1165K_0 + 0,233(1-1,997K_0)K_1 \\ 0,232K_0 + 0,632(1-1,997K_0)K_1 \\ 1-1,997K_0 \end{bmatrix}.$$

Система второго порядка может иметь максимальное быстродействие, равное двум периодам прерывания. Для получения такого быстродействия необходимо коэффициенты усиления K_0 и K_1 выбрать так, чтобы удовлетворялись условия

$$\begin{aligned} x_1(2T) &= 1,747K_0 + 1,997(1-1,997K_0)K_1 = 1; \\ x_2(2T) &= -0,1165K_0 + 0,233(1-1,997K_0)K_1 = 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получаем

$$K_0 = 0,366 \quad \text{и} \quad K_1 = 0,678.$$

Отсюда находим

$$m_1(0^+) = K_0 m(0^+) = 0,366;$$

$$m(T^+) = 1 - 1,997K_0 = 0,267,$$

$$m_1(T^+) = K_1 m(T^+) = 0,181$$

и

$$x_3(2T) = 0,233K_0 + 0,632(1 - 1,997K_0)K_1 = 0,2.$$

Заметим, что для получения желаемого быстродействия системы необходимо, чтобы вход третьего интегратора был равен нулю для всех $t \geq 2T$. Это означает, что выход усилительного элемента после второго периода прерывания должен оставаться равным 0,2. Это условие позволяет написать выражение

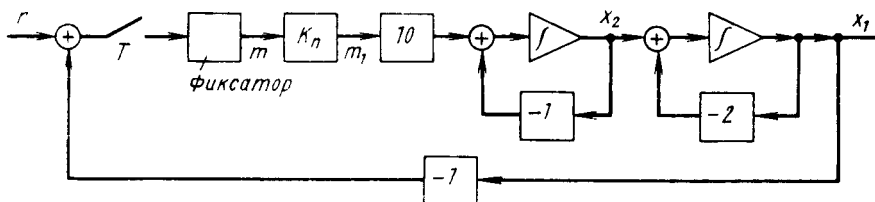


Рис. 4.1—5. Схема в переменных состояния иллюстративной системы

z -преобразования для выхода усилительного элемента в виде полинома по степеням z^{-1} с бесконечным числом членов:

$$M_1(z) = 0,366 + 0,181z^{-1} + 0,2z^{-2} + 0,2z^{-2} + \dots$$

Последнее выражение можно также представить в виде

$$M_1(z) = \frac{0,366 - 0,185z^{-1} + 0,019z^{-2}}{1 - z^{-1}}.$$

Выражение z -преобразования для входного сигнала усилительного элемента имеет вид

$$M(z) = 1 + 0,267z^{-1}.$$

Отсюда находим импульсную передаточную функцию цифрового регулятора

$$D(z) = \frac{0,366 - 0,185z^{-1} + 0,019z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0,267z^{-1})}.$$

б. *Регулятор без интегрирования.* Схема в переменных состояния системы управления процессом с передаточной функцией

$$G_p(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

показана на рис. 4.1—5, где произведена замена $D(z)$ на усилительный элемент K_n .

Вектор состояния \mathbf{v} определим выражением

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r \\ x_1 \\ x_2 \\ m \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим векторы начального состояния

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу перехода находим в виде

$$\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} & e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} & 5(1 - 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda})K_n \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & 10(1 - e^{-\lambda})K_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\Phi_n(T) = \Phi(K_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,135 & 0,233 & 2K_n \\ 0 & 0 & 0,368 & 6,32K_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$\mathbf{v}(\overline{n+1}T) = \Phi(K_n) \mathbf{v}(nT^+),$$

то для $n = 0$

$$\mathbf{v}(T) = \Phi(K_0) \mathbf{v}(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2K_0 \\ 6,32K_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Обращаясь к схеме системы в переменных состояния, находим, что

$$\mathbf{v}(T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2K_0 \\ 6,32K_0 \\ 1 - 2K_0 \end{bmatrix}.$$

Для $n = 1$ получаем

$$\mathbf{v}(2T) = \Phi(K_1) \mathbf{v}(T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,74K_0 + 2(1 - 2K_0)K_1 \\ 0,233K_0 + 6,32(1 - 2K_0)K_1 \\ 1 - 2K_0 \end{bmatrix}$$

Переходные процессы в системе второго порядка могут быть закончены за два периода прерывания. Для получения нулевой ошибки в установившемся состоянии необходимо, чтобы были выполнены следующие условия:

- 1) $x_1(2T) = 1$;
 - 2) входные сигналы всех интеграторов при $t \geq 2T$ равны нулю.
- Из рассмотрения схемы системы в переменных состояния имеем

$$x_1(2T) = 1; \quad x_2(2T) = 2$$

и

$$m_1(nT^+) = m(nT^+) K_n = 0,2 \quad \text{для } n \geq 2.$$

Последнее означает, что после окончания второго периода прерывания выход усилительного элемента K_n равен 0,2. Следовательно,

$$\begin{aligned} 1,74K_0 + 2(1 - 2K_0)K_1 &= 1; \\ 0,223K_0 + 6,32(1 - 2K_0)K_1 &= 2. \end{aligned}$$

Решая эти совместные уравнения относительно K_0 и K_1 , получаем

$$K_0 = 0,366 \quad \text{и} \quad K_1 = 0,678.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} x_1(T) &= 2K_0 = 0,732; \\ m(T^+) &= 1 - 2K_0 = 0,267; \\ m_1(0^+) &= K_0 m(0^+) = 0,366; \\ m_1(T^+) &= K_1 m(T^+) = 0,181. \end{aligned}$$

Входной и выходной сигналы усилительного элемента имеют соответственно z -преобразования

$$M(z) = 1 + 0,267z^{-1},$$

а z -преобразование для выходного сигнала имеет вид

$$\begin{aligned} M_1(z) &= 0,366 + 0,181z^{-1} + 0,2z^{-2} + 0,2z^{-3} + \dots = \\ &= \frac{0,366 - 0,185z^{-1} + 0,019z^{-2}}{1 - z^{-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда находим импульсную передаточную функцию цифрового регулятора

$$D(z) = \frac{0,366 - 0,185z^{-1} + 0,019z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0,267z^{-1})},$$

которая совпадает с передаточной функцией, полученной ранее.

в. *Расчет цифрового регулятора при использовании классического метода*
 Искомую передаточную функцию цифрового регулятора, при которой система имеет максимальное быстродействие при воздействии вида ступенчатой функции и нулевых начальных условиях, можно также рассчитать, используя классический метод. С целью сравнения ниже дается подробный расчет цифрового регулятора классическим методом.

Передаточная функция фиксатора равна

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}.$$

Тогда, учитывая, что $T = 1$ сек, запишем

$$G(s) = G_n(s) G_p(s) = \frac{10(1 - e^{-s})}{s(s+1)(s+2)}.$$

Соответствующее z -преобразование имеет вид

$$G(z) = \frac{2z^{-1}(1 + 0,365z^{-1})}{(1 - 0,368z^{-1})(1 - 0,135z^{-1})}.$$

Следуя процедуре расчета, описанной в работе [136], положим

$$1 - W_e(z) = b_0 z^{-1}(1 + 0,365z^{-1});$$

$$W_e(z) = (1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1});$$

$$1 - W_e(z) = (1 - a_1)z^{-1} + a_1 z^{-2}.$$

Приравнявая соответствующие коэффициенты, находим

$$b_0 = 1 - a_1;$$

$$a_1 = 0,365b_0.$$

откуда $a_1 = 0,267$ и $b_0 = 0,733$.

Следовательно,

$$1 - W_e(z) = 0,733z^{-1}(1 + 0,365z^{-1});$$

$$W_e(z) = (1 - z^{-1})(1 + 0,267z^{-1}).$$

Учитывая, что

$$D(z) = \frac{1 - W_e(z)}{G(z)W_e(z)},$$

и произведя подстановки, получаем

$$D(z) = \frac{0,366 - 0,185z^{-1} + 0,019z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0,267z^{-1})},$$

т. е. получаем результат, совпадающий с предыдущим.

Модифицированное z -преобразование для выхода системы дается формулой

$$C(z, m) = G_e(z)G(z, m)R(z),$$

где

$$G_e(z) = \frac{1 - W_e(z)}{G(z)} = 0,366(1 - 0,368z^{-1})(1 - 0,135z^{-1});$$

$$G(z, m) = 5z^{-1} \left[\frac{(1 - 0,503z^{-1} + 0,049z^{-2}) - 2e^{-m}(1 - 1,135z^{-1} - 0,135z^{-2})}{(1 - 0,368z^{-1})(1 - 0,135z^{-1})} + \frac{e^{-2m}(1 - 1,368z^{-1} + 0,368z^{-2})}{(1 - 0,368z^{-1})(1 - 0,135z^{-1})} \right];$$

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Отсюда

$$C(z, m) = \frac{1,83z^{-1}}{1-z^{-1}} [(1-0,503z^{-1}+0,049z^{-2}) -$$

$$-2e^{-m}(1-1,135z^{-1}+0,135z^{-2}) + e^{-2m}(1-1,368z^{-1}+0,368z^{-2})];$$

$$C(z, 1) = \frac{0,733(1+0,368z^{-1})}{1-z^{-1}} = 0,732z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots;$$

$$C\left(z, \frac{1}{2}\right) = \frac{0,286z^{-1} + 0,682z^{-2} + 0,036z^{-3}}{1-z^{-1}} = 0,286z^{-1} + 0,968z^{-2} +$$

$$+ z^{-3} + z^{-4} + \dots;$$

$$C\left(z, \frac{1}{4}\right) = \frac{0,086z^{-1} + 0,79z^{-2} + 0,114z^{-3}}{1-z^{-1}} =$$

$$= 0,086z^{-1} + 0,876z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$$

Из полученных выражений для выхода системы при входном воздействии вида единичной ступенчатой функции можно видеть, что переходный процесс заканчивается ровно за два периода прерывания, и система переходит в состояние установившегося равновесия без перерегулирования и не имеет ошибки в этом состоянии.

Предыдущий пример показывает, что расчет линейной системы для получения переходных процессов минимальной и конечной длительности при входных воздействиях вида ступенчатой функции может быть легко произведен на основе классического метода z -преобразования. Метод переходных состояний позволяет получить решение в общей форме и систематизировать расчет системы, что ведет к более-глубоким представлениям о переходных процессах и динамике системы. Преимущества метода переходных состояний над классическим раскрываются более полно, когда расчет системы производится с учетом нелинейностей и начальных условий. Классический метод в этих условиях часто оказывается непригодным, в то время как метод переходных состояний по-прежнему остается эффективным методом расчета. В следующем параграфе рассматривается расчет оптимального управления для нелинейных дискретных систем на основе дальнейшего обобщения развитой выше идеи замены цифрового регулятора эквивалентным усилительным элементом.

4.2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ

При расчете оптимальной системы обычно исходят из некоторых критериев оптимальности, по которым судят о поведении системы в заданных условиях. Выбор критерия оптимальности зависит обычно от условий работы системы и специфических тре-

бований, предъявляемых к системе, и часто определяется из субъективных соображений. Например, в одних случаях критерием оптимальности может служить реакция системы на входное воздействие вида ступенчатой функции, в других случаях — величина среднеквадратичной ошибки. Следовательно, оптимальное управление не означает, что система будет функционировать одинаково хорошо в любых условиях. Система управления, удовлетворяющая одному из критериев оптимальности, может оказаться далеко не оптимальной с точки зрения другого критерия.

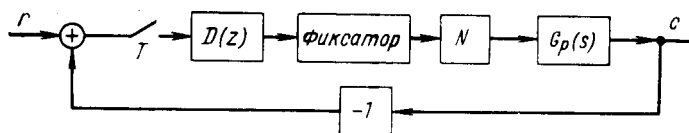


Рис. 4.2—1. Нелинейная дискретная система

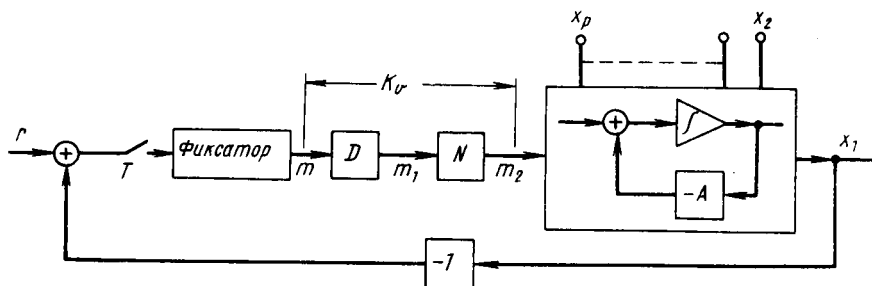


Рис. 4.2—2. К представлению нелинейной дискретной системы в виде системы с переменным усилением

В настоящем параграфе рассматривается проектирование нелинейных дискретных систем, оптимальных с точки зрения реакции на входные воздействия вида ступенчатой функции.

Рассмотрим нелинейную дискретную систему управления, схема которой приведена на рис. 4.2—1, где $G_p(s)$ обозначает передаточную функцию линейной части управляемого процесса, N — характеристику нелинейной части и $D(z)$ — передаточную функцию цифрового регулятора, которая подлежит определению. В качестве сглаживающего устройства на выходе цифрового регулятора используется фиксатор, удерживающий импульс до прихода следующего. Необходимо произвести расчет системы, в которой переходные процессы при производных воздействиях вида ступенчатой функции и нулевых начальных условиях имеют конечную и минимальную длительность.

На рис. 4.2—2 показана схема системы, в которой в отличие от предыдущей сделана перестановка мест включения регулятора D и фиксатора. Процесс характеризуется схемой в переменных

состояния. Пусть m обозначает выходной сигнал фиксатора, который является сигналом ошибки ступенчатой формы. Вектор состояния системы определим выражением

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \mathbf{x} \\ m \end{bmatrix}, \quad (4.2-1)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \quad (4.2-2)$$

— вектор состояния процесса, описываемого по предположению дифференциальным уравнением p -го порядка или p переменными состояниями $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$. Переменная x_1 является одновременно выходной переменной системы. Входное воздействие имеет вид ступенчатой функции.

Метод переменного коэффициента усиления

Цифровой регулятор и нелинейный элемент системы (участок $D-N$ схемы рис. 4.2—2) можно рассматривать как усилительный элемент, обладающий переменным коэффициентом усиления K_v . Коэффициент усиления K_v принимает различные значения на различных интервалах прерывания; он также зависит от характеристик нелинейного элемента N .

Пусть m_1 — входной и m_2 — выходной сигналы для участка $D-N$ схемы системы. В любой момент времени $t = nT^+$ величины m_2 и m_1 связаны соотношением

$$m_2(nT^+) = K_n m_1(nT^+), \quad (4.2-3)$$

где K_n — коэффициент усиления участка $D-N$ в $(n+1)$ -м периоде прерывания.

Матрица перехода Φ в такой системе является функцией переменного коэффициента усиления K_v и имеет различные значения на различных периодах прерывания. Из уравнений (4.1—4) и (4.1—5) для $n=0$ получаем

$$\mathbf{v}(0^+) = \mathbf{B}\mathbf{v}(0); \quad (4.2-4)$$

$$\mathbf{v}(T) = \Phi_0(T)\mathbf{v}(0^+). \quad (4.2-5)$$

Матрица перехода $\Phi_0(T)$ является функцией K_0 , и поэтому формулу (4.2—5) можно записать как

$$\mathbf{v}(T) = \Phi(K_0)\mathbf{v}(0^+). \quad (4.2-6)$$

Гак как матрица \mathbf{B} и вектор $\mathbf{v}(0)$ известны, то известен и вектор $\mathbf{v}(0^+)$, поэтому получаем

$$m(0^+) = r_1(0^+). \quad (4.2-7)$$

Если $m(0^+)$ больше максимального выхода нелинейного элемента, то K_0 следует выбрать равным максимальному возможному значению переменного коэффициента усиления K_v в первом периоде прерывания.

Отсюда

$$K_0 = \frac{m_2(0^+)}{r_1(0^+)}, \quad (4.2-8)$$

где $m_2(0^+)$ выбирается равным максимальному выходу нелинейного элемента.

Для $n = 1$ имеем

$$\mathbf{v}(T^+) = \mathbf{B}\mathbf{v}(T), \quad (4.2-9)$$

откуда находим $m(T^+)$; теперь можно записать

$$\mathbf{v}(2T) = \Phi_1(T)\mathbf{v}(T^+), \quad (4.2-10)$$

где матрица перехода $\Phi_1(T)$ есть функция от K_1 . Уравнение (4.2-10) можно переписать в виде

$$\mathbf{v}(2T) = \Phi(K_1)\mathbf{v}(T^+). \quad (4.2-11)$$

Если $m(T^+)$ больше максимального выхода нелинейного элемента, то K_1 следует выбрать равным максимальному возможному значению переменного коэффициента усиления K_v во втором периоде прерывания.

Заметим, что для получения желаемого максимального быстрого действия сигнал $m_2(T^+)$ следует взять с максимально возможной амплитудой. Выберем $m_2(T^+)$ равным максимальному выходу нелинейного элемента. Тогда K_1 найдем по формуле

$$K_1 = \frac{m_2(T^+)}{m(T^+)}. \quad (4.2-12)$$

Для $n = 2$ имеем

$$\mathbf{v}(2T^+) = \mathbf{B}\mathbf{v}(2T); \quad (4.2-13)$$

$$\mathbf{v}(3T) = \Phi_2(T)\mathbf{v}(2T^+). \quad (4.2-14)$$

Уравнение (4.2-14) можно также представить в виде

$$\mathbf{v}(3T) = \Phi(K_2)\mathbf{v}(2T^+). \quad (4.2-15)$$

Если теперь $m(2T^+)$ по-прежнему больше максимального выхода нелинейного элемента, то K_2 находится так же, как и в

предыдущих случаях. Однако, если $m(2T^+)$ меньше максимального выхода этого элемента, то для определения K_2 следует привлечь другие условия максимального быстродействия системы.

Ошибка системы равна нулю при $t \geq kT$, если

$$x_1(kT) = r_1(kT) \quad (4.2-16)$$

и

$$x_2(kT) = x_3(kT) = \dots = x_p(kT) = 0, \quad (4.2-17)$$

где $x_1(kT), x_2(kT), \dots, x_p(kT)$ — координаты системы, являющиеся функциями последовательных значений переменного коэффициента усиления K_v , которые могут быть получены из уравнения

$$v(kT) = \Phi_{k-1}(T)v(\overline{k-1}T^+) \quad (4.2-18a)$$

или

$$v(kT) = \Phi(K_{k-1})v(\overline{k-1}T^+) \quad (4.2-18b)$$

как компоненты вектора состояния. Поэтому последовательные значения K_v могут быть найдены путем решения уравнений (4.2-16) и (4.2-17).

Определение входной и выходной последовательности сигналов для участка $D-N$ на этом можно считать полностью законченным.

z -преобразования этих сигналов имеют вид

$$M(z) = m(0^+) + m(T^+)z^{-1} + \dots + m(kT^+)z^{-k}; \quad (4.2-19)$$

$$M_2(z) = K_0m(0^+) + K_1m(T^+)z^{-1} + \dots + K_k m(kT^+)z^{-k}. \quad (4.2-20)$$

z -преобразование входного сигнала нелинейного элемента может быть записано в виде

$$M_1(z) = a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_kz^{-k}. \quad (4.2-21)$$

Так как a_j и $K_j m(jT^+)$ представляют соответственно вход и выход нелинейного элемента, то a_j могут быть определены аналитическим или графическим путем по характеристике нелинейности. Искомую передаточную функцию цифрового регулятора находим отсюда в виде

$$D(z) = \frac{\sum_{j=0}^k a_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^k m(jT^+) z^{-j}}. \quad (4.2-22)$$

Приведенное выше рассмотрение показывает, что быстродействие системы зависит как от порядка системы, так и от характеристики нелинейного элемента. Насыщение объекта и ограничение амплитуд сигналов может привести к увеличению длительности переходных процессов. Предположим, что нелинейная система p -го порядка может быть приведена в состояние равновесия без перерегулирования за $p + q$ периодов прерывания. Число q дополнительных периодов определяется характеристикой нелинейного элемента. Эту величину необходимо при расчете оптимальной системы сделать по возможности минимальной. Для решения задачи требуется найти $p + q$ значений коэффициента усиления K_v усилительного элемента в последовательных периодах прерывания. Если в первых q периодах сигнал m превышает максимальный выходной сигнал нелинейного элемента, то константы усиления K_0, K_1, \dots, K_{q-1} должны быть взяты с максимальными возможными значениями, а первые q значений $m_2(kT^+)$ следует приравнять максимальному выходу нелинейного элемента. Если в остальных p периодах сигнал m меньше максимального выходного сигнала нелинейного элемента, то константы от K_q до K_{p+q-1} определяются исходя из условий минимальной длительности переходных процессов.

Входной сигнал нелинейного элемента $m_1(jT^+)$ может превысить или оказаться меньше максимального выходного сигнала, когда сигнал $m(jT^+)$ больше последнего. В первом случае усиление K_j следует выбрать максимальным. Во втором случае, если предположение о том, что $m_1(jT^+)$ меньше максимального выхода не выполняется, вычисленные значения коэффициентов K_j будут мнимыми или комплексными, т. е. физически не реализуемыми.

Заметим, что сигнал $m_1(jT^+)$ может быть больше или меньше максимального выходного сигнала нелинейного элемента и в том случае, когда сигнал $m(jT^+)$ меньше последнего. Во всех случаях при определении коэффициентов K_j следует исходить из предположения, что сигнал $m_1(jT^+)$ не вызывает насыщения нелинейного элемента. Если это предположение не оправдывается, то коэффициенты K_j получаются мнимыми либо комплексными, и тогда их следует выбирать с предельными значениями.

Процедура синтеза

Систематизируем результаты предыдущего рассмотрения. Можно выделить четыре основных этапа синтеза нелинейных дискретных систем с минимальной длительностью переходных процессов при воздействиях вида ступенчатой функции. Ниже перечисляются операции, которые необходимо выполнить на каждом из этапов.

1. Составить схему системы в переменных состояния, представив цифровой регулятор D и нелинейный элемент N в виде усилительного элемента K_v , и из рассмотрения этой схемы определить матрицу перехода и матрицу \mathbf{B} системы.

2. Найти входной сигнал для участка $D - N$ схемы системы из уравнений

$$\mathbf{v}(nT^+) = \mathbf{B}\mathbf{v}(nT);$$

$$\mathbf{v}\sqrt{(n+1)T} = \Phi(K_n)\mathbf{v}(nT^+),$$

используя найденные значения матриц Φ и \mathbf{B} системы.

3. Вычислить константы K_n усилительного элемента и найти выходной сигнал для участка $D - N$ схемы, используя результаты п. 2; аналитическим или графическим путем определить входной сигнал нелинейного элемента.

4. Определить искомую передаточную функцию цифрового регулятора по формуле (4.2—22).

Следует отметить, что описанная выше процедура синтеза цифрового регулятора может быть применена и при расчете систем с многократным прерыванием, переменной частотой прерывания, когда импульсы на выходе имеют конечную длительность и система содержит нелинейные элементы. С целью иллюстрации описанной выше процедуры синтеза рассмотрим несколько числовых примеров.

Пример 4.2—1. Нелинейность с симметричной характеристикой насыщения

Рассмотрим нелинейную систему управления процессом, описываемым передаточной функцией

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)},$$

схема которой показана на рис. 4.2—3. Период прерывания $T = 1$ сек, на вход системы в момент $t = 0$ прикладывается ступенчатое воздействие с ампли-

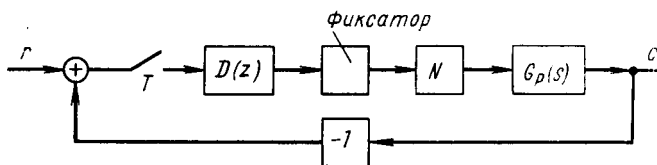


Рис. 4.2—3. Схема иллюстративной системы

тудой, равной двум единицам. Начальные условия предполагаются нулевыми. Характеристика насыщения показана на рис. 4.2—4. Требуется произвести расчет цифрового регулятора для получения максимального быстродействия системы.

Схема системы в переменных состояния показана на рис. 4.2—5. Из рассмотрения этой схемы находим матрицу перехода и матрицу \mathbf{B} системы:

$$\Phi_n(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - e^{-\lambda} & (\lambda - 1 + e^{-\lambda}) K_n \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & (1 - e^{-\lambda}) K_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вектор состояния системы определим выражением

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r \\ x_1 \\ x_2 \\ m \end{bmatrix}.$$

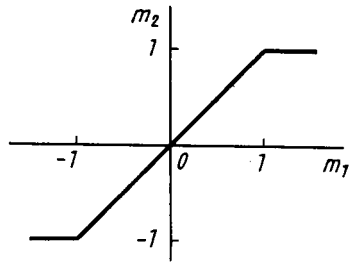


Рис. 4.2—4. Идеализированная характеристика насыщения

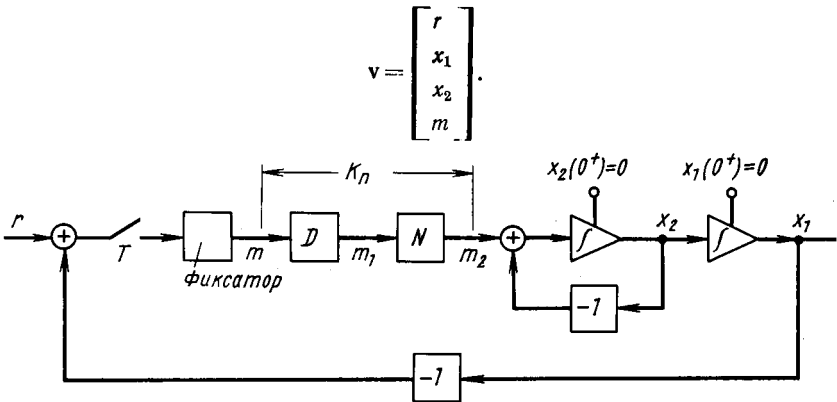


Рис. 4.2—5. Схема в переменных состояния иллюстративной системы

Вектор начального состояния

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Так как $T = 1$ сек, то

$$\Phi_n(T) = \Phi(K_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,632 & 0,368K_n \\ 0 & 0 & 0,368 & 0,632K_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для $n = 0$

$$\mathbf{v}(0^+) = \mathbf{B}\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

откуда находим, что

$$m(0^+) = 2.$$

Поскольку $m(0^+)$ больше максимального выхода нелинейного элемента, который равен 1, то

$$m_2(0^+) = 1 \text{ и } K_0 = 0,5.$$

Матрицу перехода для первого периода прерывания находим отсюда в виде

$$\Phi(K_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,632 & 0,184 \\ 0 & 0 & 0,368 & 0,316 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вектор состояния системы при $t = T$

$$v(T) = \Phi(K_0)v(0^+) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0,368 \\ 0,632 \\ 2 \end{bmatrix};$$

в момент $t = T^+$

$$v(T^+) = Bv(T) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0,368 \\ 0,632 \\ 1,632 \end{bmatrix},$$

поэтому

$$m(T^+) = 1,632.$$

Так как $m(T^+)$ больше максимального выхода нелинейного элемента, то

$$m_2(T^+) = 1 \text{ и } K_1 = 0,612.$$

Отсюда находим матрицу перехода для второго периода прерывания:

$$\Phi(K_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,632 & 0,225 \\ 0 & 0 & 0,368 & 0,387 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для $n = 1$

$$v(2T) = \Phi(K_1)v(T^+) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1,135 \\ 0,864 \\ 1,632 \end{bmatrix};$$

$$v(2T^+) = Bv(2T) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1,136 \\ 0,864 \\ 0,865 \end{bmatrix};$$

$$m(2T^+) = 0,865.$$

Так как амплитуда сигнала $m(2T^+)$ теперь меньше 1, то для определения константы K_2 необходимо привлечь другие условия максимального быстродействия системы. Для $n = 2$

$$v(3T) = \Phi(K_2)v(2T^+) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1,681 + 0,318K_2 \\ 0,318 + 0,547K_2 \\ 0,865 \end{bmatrix};$$

$$v(3T^+) = Bv(3T) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1,681 + 0,318K_2 \\ 0,318 + 0,547K_2 \\ 0,319 - 0,318K_2 \end{bmatrix}.$$

Аналогично, при $n = 3$

$$v(4T) = \Phi(K_3)v(3T^+) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1,882 + 0,664K_2 + 0,117(1 - K_2)K_3 \\ 0,117 + 0,201K_2 + 0,201(1 - K_2)K_3 \\ 0,319 - 0,318K_2 \end{bmatrix}.$$

Условия максимального быстродействия находим отсюда в виде

$$1,882 + 0,664K_2 + 0,117(1 - K_2)K_3 = 2,0;$$

$$0,117 + 0,201K_2 + 0,201(1 - K_2)K_3 = 0.$$

Решая эти уравнения относительно K_2 и K_3 , получаем

$$K_2 = 0,341 \quad \text{и} \quad K_3 = -1,40.$$

Отсюда находим

$$m(3T^+) = 0,319 - 0,319K_2 = 0,210;$$

$$M(z) = 2 + 1,632z^{-1} + 0,865z^{-2} + 0,210z^{-3};$$

$$M_2(z) = 1 + z^{-1} + 0,295z^{-2} - 0,296z^{-3}.$$

Так как характеристика насыщения является линейной в пределах уровня ограничения, то

$$M_1(z) = M_2(z).$$

Следовательно,

$$D(z) = \frac{0,5(1 - z^{-1} + 0,295z^{-2} - 0,296z^{-3})}{1 + 0,816z^{-1} + 0,433z^{-2} + 0,105z^{-3}},$$

и переходный процесс на выходе системы заканчивается за четыре периода прерывания. Заметим, что при отсутствии нелинейности можно было бы в два раза увеличить быстродействие системы, как это видно из рис. 4.2—6. Насыщение нелинейного элемента приводит к более длительным переходным процессам.

Пусть теперь характеристика насыщения не является линейной в области, в которой ограничение отсутствует, но в то же время совпадает с идеализированной характеристикой в области насыщения, как показано на рис. 4.2—7. Эта

характеристика более полно отражает свойства реального нелинейного элемента. В этом случае входной и выходной сигналы участка $D-N$ схемы системы остаются прежними, изменится лишь входной сигнал нелинейного элемента, поскольку уровень ограничения остается неизменным. z -преобразование этого входного сигнала

$$M_1(z) = 1 + z^{-1} + 0,1z^{-2} - 0,1z^{-3}$$

можно найти графическим путем по характеристике насыщения рис. 4.2—7. Передаточную функцию искомого цифрового регулятора находим для этого случая в виде

$$D(z) = \frac{0,5(1 + z^{-1} + 0,1z^{-2} - 0,1z^{-3})}{1 + 0,816z^{-1} + 0,433z^{-2} + 0,105z^{-3}}$$

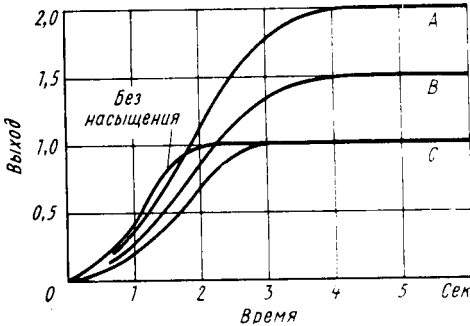


Рис. 4.2—6. Реакция системы примера 4.2—1 на входное воздействие вида ступенчатой функции. Амплитуда воздействия: (А) 2,0; (В) 1,5; (С) 1,0

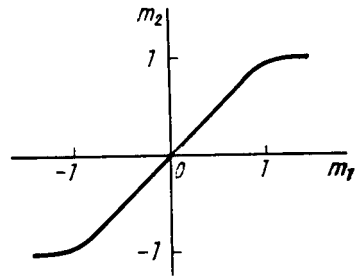


Рис. 4.2—7. Характеристика насыщения

Реакция компенсированной системы на ступенчатое воздействие совпадает с реакцией системы с идеализированной нелинейностью. Можно видеть, что быстродействие системы зависит от амплитуды входного воздействия и уровня ограничения нелинейного элемента. При этом нелинейность характеристики насыщения на начальном участке кривой в пределах уровня ограничения не оказывает какого-нибудь влияния на переходный процесс на выходе компенсированной системы.

Пусть теперь входное воздействие имеет вид единичной ступенчатой функции. Покажем, что в этом случае можно получить систему с максимальным быстродействием, равным трем периодам прерывания. Вектор начального состояния теперь равен

$$v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Следовательно,

$$v(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$v(T) = \Phi(K_0) v(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,368 \\ 0,632 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v(T^+) = Bv(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,368 \\ 0,632 \\ 0,632 \end{bmatrix};$$

$$m(0^+) = 1 \text{ и } m(T^+) = 0,632.$$

Так как сигнал $m(0^+)$ равен максимальному выходному сигналу нелинейного элемента, то

$$m_2(0^+) = 1 \text{ и } K_0 = 1.$$

Соответствующие расчеты показывают, что если пренебречь насыщением, то потребное значение $m_2(0^+) = 1,58$. Это, однако, больше максимально возможного значения $m_2(0^+)$, которое равно 1 и, следовательно, при заданном уровне ограничения не может быть обеспечено. Так как $m(T^+)$ меньше максимального выхода нелинейного элемента, то для определения констант K_1 и K_2 необходимо привлечь другие условия максимального быстродействия системы. Продолжив вычисления в том же порядке, как и ранее, получаем

$$v(2T) = \Phi(K_1) v(T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,767 + 0,233K_1 \\ 0,233 + 0,399K_1 \\ 0,632 \end{bmatrix};$$

$$v(2T^+) = Bv(2T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,767 + 0,233K_1 \\ 0,233 + 0,399K_1 \\ 0,233 - 0,233K_1 \end{bmatrix};$$

$$v(3T) = \Phi(K_2) v(2T^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,914 + 0,485K_1 + 0,0857(1 - K_1)K_2 \\ 0,0857 + 0,147K_1 + 0,147(1 - K_1)K_2 \\ 0,233(1 - K_1) \end{bmatrix}.$$

Условия максимального быстродействия находим в виде

$$0,914 + 0,485K_1 + 0,0857(1 - K_1)K_2 = 1,0;$$

$$0,0857 + 0,147K_1 + 0,147(1 - K_1)K_2 = 0.$$

Решая эти уравнения относительно K_1 и K_2 , получаем

$$K_1 = 0,34 \text{ и } K_2 = -1,401.$$

Отсюда находим, что

$$m(2T^+) = 0,233 - 0,233K_1 = 0,154;$$

$$M(z) = 1 + 0,632z^{-1} + 0,154z^{-2};$$

$$M_2(z) = 1 + 0,215z^{-1} - 0,2157z^{-2}.$$

Следовательно,

$$D(z) = \frac{1 + 0,215z^{-1} - 0,2157z^{-2}}{1 + 0,632z^{-1} + 0,154z^{-2}},$$

и переходный процесс на выходе системы, возбуждаемой единичным ступенчатым воздействием, действительно заканчивается за три периода прерывания.

Из этого примера следует, что длительность переходного процесса зависит от амплитуды воздействия. Можно показать, что, если входное воздействие $r(t) \leq 0,631u(t)$, где $u(t)$ — единичная ступенчатая функция, то эту длительность можно уменьшить до двух периодов прерывания и не учитывать эффект насыщения.

Пусть входное воздействие имеет вид

$$r(t) = Ru(t).$$

Тогда

$$v(0^+) = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix};$$

$$v(T) = \Phi(K_0)v(0^+) = \begin{bmatrix} R \\ 0,368K_0R \\ 0,632K_0R \\ R \end{bmatrix};$$

$$v(T^+) = \begin{bmatrix} R \\ 0,368K_0R \\ 0,632K_0R \\ R(1 - 0,368K_0) \end{bmatrix};$$

$$v(2T) = \Phi(K_1)v(T^+) = \begin{bmatrix} R \\ 0,767K_0R + 0,368(1 - 0,368K_0)K_1R \\ 0,233K_0R + 0,632(1 - 0,368K_0)K_1R \\ (1 - 0,368K_0)R \end{bmatrix}.$$

Если переходный процесс заканчивается за два периода прерывания, то

$$0,767K_0 + 0,368(1 - 0,368K_0)K_1 = 1;$$

$$0,233K_0 + 0,632(1 - 0,368K_0)K_1 = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$K_0 = 1,585 \text{ и } K_1 = -1,40.$$

Так как ограничение имеет место для всех $m_2 \geq 1,0$, то

$$m(0^+)K_0 = 1,585m(0^+) = 1$$

или

$$m(0^+) = 0,631.$$

Так как $m(0^+) = R$, то отсюда заключаем, что для всех $R \leq 0,631$ максимальное быстродействие системы равно двум периодам прерывания. На рис. 4.2—6 для удобства сравнения показана реакция системы на входные ступенчатые воздействия различной амплитуды.

Пример 4.2—2. Нелинейность с асимметричной характеристикой

Обратимся вновь к системе, рассмотренной в предыдущем примере; будем, однако, предполагать, что характеристика нелинейности является асимметричной, как показано на рис. 4.2—8, и входное воздействие имеет вид единичной ступенчатой функции. Требуется найти передаточную функцию цифрового регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие системы.

Вектор начального состояния

$$v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода и матрица B системы были найдены в примере 4.2—1. Для $n = 0$

$$v(0^+) = Bv(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

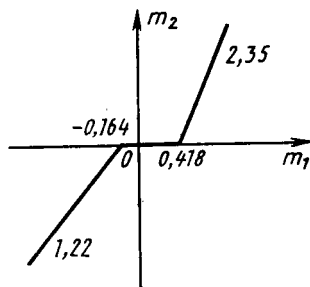


Рис. 4.2—8. Асимметричная характеристика насыщения

откуда, находим, что

$$m(0^+) = 1.$$

Так как

$$\Phi_0(T) = \Phi(K_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,632 & 0,368K_0 \\ 0 & 0 & 0,368 & 0,632K_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то

$$v(T) = \Phi(K_0)v(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,368K_0 \\ 0,632K_0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$v(T^+) = Bv(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,368K_0 \\ 0,632K_0 \\ 1 - 0,368K_0 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом находим, что для $n = 1$

$$v(2T) = \Phi(K_1) v(T^+) = \begin{bmatrix} 0,768K_0 + 0,368(1 - 0,368K_0)K_1 \\ 0,232K_0 + 0,632(1 - 0,368K_0)K_1 \\ 1 - 0,368K_0 \end{bmatrix}.$$

Условия максимального быстродействия имеют вид

$$x_1(2T) = 0,768K_0 + 0,368(1 - 0,368K_0)K_1 = 1;$$

$$x_2(2T) = 0,232K_0 + 0,632(1 - 0,368K_0)K_1 = 0.$$

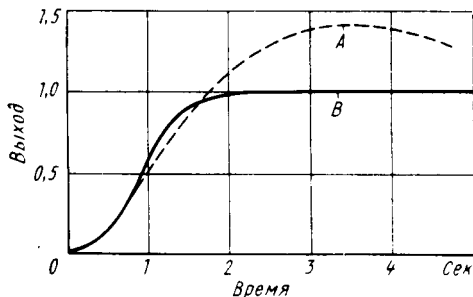


Рис. 4.2—9. Переходная характеристика системы рис. 4.2—2:

А — некомпенсированной; В — компенсированной

зование входного сигнала нелинейного элемента в виде

$$M_1(z) = 1,092 - 0,636z^{-1}.$$

Отсюда можно получить искомую передаточную функцию цифрового регулятора

$$D(z) = \frac{1,092(1 - 0,582z^{-1})}{1 + 0,418z^{-1}}.$$

Реакция компенсированной системы на единичное ступенчатое входное воздействие показана на рис. 4.2—9. Можно видеть, что система переходит в желаемое конечное состояние равновесия без перерегулирования за два периода прерывания.

4.3. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАССМОТРЕНИЕ СВОЙСТВ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДА

В предыдущих двух параграфах было рассмотрено решение задачи об оптимальном по быстродействию управлении линейными и нелинейными системами при входных воздействиях вида ступенчатой функции. Это оптимальное управление обеспечивалось цифровым регулятором, включенным в прямую цепь контура управления. Основное допущение состояло в том, что начальные условия были приняты нулевыми. В следующих па-

Решая эту систему уравнений, находим

$$K_0 = 1,58 \text{ и } K_1 = -1,38.$$

Следовательно,

$$m(T^+) = 1 - 0,368K_0 = 0,418.$$

z -преобразования входного и выходного сигнала участка $D - N$ находим отсюда в виде

$$M(z) = 1 + 0,418z^{-1};$$

$$M_2(z) = 1,58 - 0,577z^{-1}.$$

С помощью характеристики насыщения, представленной на рис. 4.2—8, находим z -преобра-

параграфах рассматривается оптимальное управление линейными и нелинейными системами при произвольных начальных условиях. Расчет таких систем часто начинают с составления векторноматричного дифференциального уравнения, характеризующего движение объекта, в котором вынуждающая функция представлена в явной форме, т. е.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t)m(t),$$

где x — вектор состояния процесса или объекта управления;
 m — вектор управления.

В этом уравнении в случае управления процессом n -го порядка по r входам x — n -мерный вектор-столбец, m — r -мерный вектор-столбец, A — n -мерная квадратная матрица коэффициентов и D — матрица управления размера $n \times r$. Хотя уравнения такого типа уже рассматривались в параграфе 2.4, ниже проводится его дальнейшее исследование с целью разъяснения некоторых важных физических представлений и получения ряда полезных рекуррентных соотношений, используемых при расчете оптимальных систем.

Анализ решения линейного дифференциального уравнения первого порядка

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bm(t), \quad (4.3-1)$$

где a и b — постоянные коэффициенты;
 $m(t)$ — вынуждающая функция.

Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = K_0 e^{at} + e^{at} \int_{t_0}^t e^{-a\tau} bm(\tau) d\tau = K_0 e^{at} + \int_{t_0}^t be^{a(t-\tau)} m(\tau) d\tau. \quad (4.3-2)$$

Обозначим

$$g(t) = e^{at} \quad (4.3-3)$$

и зададимся начальным условием $x(t) = x(t_0^+) = x_0$. Тогда формулу (4.3-2) можно переписать в виде

$$x(t) = g(t-t_0)x(t_0^+) + \int_{t_0}^t g(t-\tau)bm(\tau)d\tau. \quad (4.3-4)$$

Функцию $g(t)$ в последнем выражении принято называть импульсной переходной функцией системы.

Решение $x(t)$ состоит из двух частей:

1) переходной составляющей

$$x_0 g(t-t_0),$$

имеющей вид импульсной переходной функции системы; ее можно получить как реакцию системы на входное воздействие в виде мгновенного импульса с площадью x_0 , возникающего в момент $t = t_0^+$;

2) установившейся составляющей

$$\int_{t_0}^t g(t-\tau) b m(\tau) d\tau,$$

представляющей собой выход системы после окончания переходных процессов, вызванных ненулевыми начальными условиями. Она определяется так же, как выход системы, когда входом является вынуждающая функция, поэтому дается интегралом свертывания импульсной переходной и вынуждающей функции.

Когда вынуждающая функция имеет вид ступенчатой функции

$$m(t) = m(t_0^+) u(t-t_0) = m(t_0^+) \text{ для } t > t_0,$$

решение уравнения (4.3—1) принимает вид

$$x(t) = g(t-t_0) x(t_0^+) + \int_{t_0}^t g(t-\tau) b m(t_0^+) d\tau; \quad (4.3-5a)$$

$$x(t) = i(t-t_0) + h(t-t_0) m(t_0^+), \quad (4.3-5b)$$

где $i(t)$ — составляющая вида импульсной переходной функции системы;

$h(t)$ — реакция системы на единичную ступенчатую функцию или переходная характеристика системы, определяемая выражением

$$h(t) = \int_0^t g(t-\tau) b d\tau. \quad (4.3-6)$$

Если вынуждающая функция $m(t)$ представляет собой выход восстанавливающей цепочки, фиксирующей импульсы на время прерывания T , то в момент $t = T$

$$x(T) = g(T-t_0) x(t_0^+) + \int_{t_0}^T g(t-\tau) b m(\tau) d\tau, \quad (4.3-7)$$

где $0 \leq t_0 \leq T$.

Так как в течение первого периода прерывания

$$m(\tau) = m(t_0^+), \quad (4.3-8)$$

то

$$x(T) = g(T-t_0)x(t_0^+) + \int_{t_0^+}^T g(t-\tau) b m(t_0^+) d\tau. \quad (4.3-9)$$

С учетом формулы (4.3-6) далее получаем

$$x(T) = g(T-t_0)x(t_0^+) + h(T-t_0)m(t_0^+). \quad (4.3-10)$$

При $t_0 = 0$

$$x(T) = g(T)x(0^+) + h(T)m(0^+). \quad (4.3-11)$$

Решение векторно-матричных дифференциальных уравнений

Рассмотрим векторно-матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dm(t), \quad (4.3-12)$$

где A — матрица коэффициентов процесса или объекта управления и D — матрица управления. Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Dm(\tau) d\tau, \quad (4.3-13)$$

где $x(t_0)$ — вектор начального состояния процесса или объекта. Введем обозначение

$$\varphi(t) = e^{At} \quad (4.3-14)$$

для матрицы перехода процесса или объекта управления и решение исходного уравнения запишем в виде

$$x(t) = \varphi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t-\tau) Dm(\tau) d\tau. \quad (4.3-15)$$

В последнем выражении слагаемое

$$\varphi(t-t_0)x(t_0) \quad (4.3-16)$$

характеризует переходную составляющую или изменение состояния системы за счет начальных условий; второе слагаемое

$$\int_{t_0}^t \varphi(t-\tau) Dm(\tau) d\tau \quad (4.3-17)$$

характеризует установившуюся составляющую или реакцию системы. Матрица перехода является аналогом импульсной переходной функции системы первого порядка. Она позволяет полностью описать поведение системы высокого порядка в неустановившемся состоянии. Под реакцией системы высокого порядка обычно понимается выход системы, когда вынуждающая функция является ее входом. Эта реакция определяется векторным интегралом свертывания матрицы перехода и вынуждающей функции.

В случае дискретных систем $\mathbf{m}(t)$ является выходом фиксатора, поэтому

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{m}(nT^+) \text{ для } nT < t \leq (n+1)T. \quad (4.3-18)$$

Тогда для интервала времени $nT < t \leq (n+1)T$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-nT)\mathbf{x}(nT^+) + \int_{nT^+}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{D}\mathbf{m}(nT^+)d\tau \quad (4.3-19)$$

и для интервала $t_0 < t \leq T, t_0 \geq 0$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0^+) + \int_{t_0^+}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{D}\mathbf{m}(t_0^+)d\tau. \quad (4.3-20)$$

Обозначим

$$\mathbf{h}(t) = \int_0^t \Phi(t-u)\mathbf{D}du; \quad (4.3-21)$$

тогда

$$\mathbf{h}(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{D}d\tau; \quad (4.3-22)$$

$$\mathbf{h}(t-t_0) = \int_{t_0^+}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{D}d\tau. \quad (4.3-23)$$

Вектор состояния в интервале $t_0 < t \leq T, t_0 \geq 0$ можно представить в виде

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0^+) + \mathbf{h}(t-t_0)\mathbf{m}(t_0^+). \quad (4.3-24)$$

При $t = T$

$$\mathbf{x}(T) = \Phi(T-t_0)\mathbf{x}(t_0^+) + \mathbf{h}(T-t_0)\mathbf{m}(t_0^+) \quad (4.3-25)$$

и при $t_0 = 0$

$$\mathbf{x}(T) = \Phi(T)\mathbf{x}(0^+) + \mathbf{h}(T)\mathbf{m}(0^+). \quad (4.3-26)$$

Заметим, что уравнения (4.3—24), (4.3—25) и (4.3—26) по форме совпадают с уравнениями (4.3—5), (4.3—10) и (4.3—11) соответственно.

Вектор состояния в интервале $nT < t \leq (n+1)T$ можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-nT)\mathbf{x}(nT) + \mathbf{h}(t-nT)\mathbf{m}(nT). \quad (4.3-27)$$

Отсюда находим уравнение переходных состояний

$$\mathbf{x}(\overline{n+1}T) = \Phi(T)\mathbf{x}(nT) + \mathbf{h}(T)\mathbf{m}(nT), \quad (4.3-28)$$

где

$$\Phi(T) = e^{\mathbf{A}T} \quad (4.3-29)$$

— матрица перехода процесса или объекта и

$$\mathbf{h}(T) = \int_0^T \Phi(\tau)\mathbf{D}d\tau \quad (4.3-30)$$

— матрица, которую по аналогии с предыдущим можно назвать матрицей управляемого перехода.

Если вынуждающую функцию в формуле (4.3—28) приравнять нулю, то получим

$$\mathbf{x}(\overline{n+1}T) = \Phi(T)\mathbf{x}(nT). \quad (4.3-31)$$

Это выражение означает, что в свободном движении каждое следующее дискретное состояние процесса можно найти умножением слева вектора предыдущего состояния на матрицу $\Phi(T)$. Этим можно оправдать данное ранее для $\Phi(T)$ название матрица перехода процесса.

Последовательные значения вектора состояния для управляющей или вынуждающей функции могут быть определены из соотношения, аналогичного предыдущим:

$$\mathbf{m}(\overline{n+1}T) = \mathbf{R}(T)\mathbf{m}(nT). \quad (4.3-32)$$

Матрица $\mathbf{R}(T)$ в этом соотношении, определяющая последовательные значения вектора входа, может быть названа матрицей перехода для входного или управляющего воздействия.

Для того чтобы одновременно охарактеризовать состояние входного воздействия и процесса, образуем составной вектор

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \quad (4.3-33)$$

и формулу (4.3—28) перепишем в виде

$$\mathbf{v}(\overline{n+1}T) = \Phi(T)\mathbf{v}(nT), \quad (4.3-34)$$

где

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(T) & 0 \\ \mathbf{h}(T) & \Phi(T) \end{bmatrix} \quad (4.3-35)$$

— матрица, которую в дальнейшем будем называть расширенной матрицей перехода системы.

Пример 4.3—1

Рассмотрим систему, показанную на рис. 4.3—1. Найдем матрицу перехода процесса $\Phi(T)$ и матрицу управляемого перехода $\mathbf{h}(T)$.

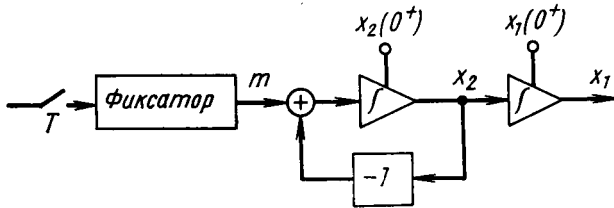


Рис. 4.3—1. Процесс второго порядка

Ниже иллюстрируются два различных способа вычисления матриц $\Phi(T)$ и $\mathbf{h}(T)$.

1. Векторно-матричное уравнение системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}m(t),$$

где матрицы

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

находятся из рассмотрения схемы системы в переменных состояния. Матрица перехода процесса $\Phi(T)$ дается выражением

$$\Phi(T) = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}$$

и может быть также найдена из рассмотрения схемы системы в переменных состояния. Используя формулу (4.3—30), получаем

$$\mathbf{h}(T) = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-\tau} \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 - e^{-\tau} \\ e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} T - 1 + e^{-T} \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}.$$

2. Обе матрицы $\Phi(T)$ и $\mathbf{h}(T)$ могут быть найдены из выражения для $\Phi(T)$ — расширенной матрицы перехода системы. Из рассмотрения схемы системы в переменных состояния эту матрицу перехода находим в виде

$$\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda - 1 + e^{-\lambda} & 1 & 1 - e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \end{bmatrix},$$

где $nT < \lambda \leq (n + 1)T$.

Отсюда имеем

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T-1+e^{-T} & 1 & 1-e^{-T} \\ 1-e^{-T} & 0 & e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Из найденного выражения для $\Phi(T)$ и тождества (4.3—35) следует, что

$$\mathbf{h}(T) = \begin{bmatrix} T-1+e^{-T} \\ 1-e^{-T} \end{bmatrix};$$

$$\varphi(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Некоторые свойства матрицы перехода

Матрица перехода $\varphi(T)$ обладает рядом интересных свойств, которые широко используются при расчете оптимальных систем управления. Эти свойства состоят в следующем:

1. $\varphi(0)$ является единичной матрицей.

2. $\varphi(kT) = [\varphi(T)]^k$.

Действительно, по определению $\varphi(kT) = e^{\mathbf{A}T k} = (e^{\mathbf{A}T})^k$, поэтому $\varphi(kT) = [\varphi(T)]^k$.

3. $\varphi(-kT) = [\varphi(kT)]^{-1}$.

Так как $\varphi(-kT) = e^{-\mathbf{A}T k} = (e^{\mathbf{A}T k})^{-1}$, то $\varphi(-kT) = [\varphi(kT)]^{-1}$.

4. $\varphi(j+kT-\tau) = \varphi(jT)\varphi(kT-\tau) = \varphi(jT-\tau)\varphi(kT)$.

Действительно, так как $\varphi(j+kT-\tau) = e^{\mathbf{A}jT}e^{\mathbf{A}(kT-\tau)}$, то $\varphi(j+kT-\tau) = \varphi(jT)\varphi(kT-\tau)$.

5. $\varphi(kT)\mathbf{h}(-kT) = -\mathbf{h}(kT)$.

Расширенная матрица перехода системы имеет вид

$$\Phi(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{h}(kT) & \varphi(kT) \end{bmatrix}.$$

Заменяя в этом выражении k на $-k$, получим

$$\Phi(-kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{h}(-kT) & \varphi(-kT) \end{bmatrix}.$$

Так как

$$\Phi(kT)\Phi(-kT) = \Phi(0) = \mathbf{I},$$

то

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{h}(kT) + \varphi(kT)\mathbf{h}(-kT) & \varphi(kT)\varphi(-kT) \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Следовательно, $\mathbf{h}(kT) + \varphi(kT)\mathbf{h}(-kT) = 0$, т. е. свойство 5 доказано.

$$6. \varphi(jT)h(kT) + h(jT) = h(\overline{j+kT}).$$

Так как

$$h(\overline{j+kT}) = \int_0^{(j+k)T} \varphi(\overline{j+kT} - \tau) \mathbf{D} \, d\tau = \int_0^{kT} \varphi(\overline{j+kT} - \tau) \mathbf{D} \, d\tau + \\ + \int_{kT}^{(j+k)T} \varphi(\overline{j+kT} - \tau) \mathbf{D} \, d\tau,$$

то, используя свойство 4, получаем

$$h(\overline{j+kT}) = \varphi(jT) \int_0^{kT} \varphi(kT - \tau) \mathbf{D} \, d\tau + \int_{kT}^{(j+k)T} \varphi(\overline{j+kT} - \tau) \mathbf{D} \, d\tau.$$

С учетом формулы (4.3—23) приходим далее к соотношению

$$h(\overline{j+kT}) = \varphi(jT)h(kT) + h(jT),$$

которое и требовалось доказать.

4.4. ПОНЯТИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ

Процесс или объект принято называть полностью управляемым [88], если он может быть переведен из некоторого начального состояния $\mathbf{x}(t_0)$ в желаемое состояние равновесия $\mathbf{x}(t_1)$ за конечный интервал времени $t_1 - t_0$. Другими словами, процесс является полностью управляемым, если существует управляющее воздействие $\mathbf{m}(t)$, определенное на конечном интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$, которое переводит процесс из начального состояния $\mathbf{x}(t_0)$ в желаемое состояние равновесия $\mathbf{x}(t_1)$ за время $t_1 - t_0$. С управляющими воздействиями такого рода мы уже встречались при расчете систем, обладающих максимальным быстродействием при входных воздействиях вида ступенчатой функции и нулевых начальных условиях.

Необходимые и достаточные условия полной управляемости для случая дискретных систем можно сформулировать следующим образом.

Линейный дискретный процесс n -го порядка является полностью управляемым тогда и только тогда, когда векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \varphi(-T)h(T), \\ \mathbf{s}_2 &= \varphi(-2T)h(T), \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{s}_n &= \varphi(-nT)h(T) \end{aligned} \quad (4.4-1)$$

линейно независимы [140].

Эти векторы возникают в связи со следующими преобразованиями. Рассмотрим процесс, описываемый уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}m(t), \quad (4.4-2)$$

в котором $m(t)$ — единственное управляющее воздействие. Случай единственного управляющего воздействия рассматривается ради упрощения интерпретации получаемых выражений. Уравнение переходных состояний процесса имеет вид

$$\mathbf{x}(\overline{k+1}T) = \boldsymbol{\varphi}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{h}(T)m(kT), \quad (4.4-3)$$

где $\boldsymbol{\varphi}(T)$ — матрица перехода процесса и

$$\mathbf{h}(T) = \int_0^T \boldsymbol{\varphi}(\tau) \mathbf{d} \tau. \quad (4.4-4)$$

При $k = 0$ из формулы (4.4-3) находим, что

$$\mathbf{x}(T) = \boldsymbol{\varphi}(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{h}(T)m(0). \quad (4.4-5)$$

Предположим теперь, что $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$. Тогда начальное состояние $\mathbf{x}(0)$, из которого переход в состояние равновесия можно совершить за один период прерывания, найдем в виде

$$\mathbf{x}(0) = -\boldsymbol{\varphi}(-T)\mathbf{h}(T)m(0) = -m(0)\mathbf{s}_1. \quad (4.4-6)$$

Если сигнал $m(0)$ свободен от ограничений, то система из всех своих начальных состояний $\mathbf{x}(0)$, лежащих на направлении вектора \mathbf{s}_1 , может быть переведена в состояние $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$ за один период прерывания. Если на сигнал $m(0)$ наложены ограничения, то область приводимых начальных состояний уже не будет содержать целиком линии, совпадающей с \mathbf{s}_1 .

При $k = 1$ из формулы (4.4-3) находим

$$\mathbf{x}(2T) = \boldsymbol{\varphi}(T)\mathbf{x}(T) + \mathbf{h}(T)m(T). \quad (4.4-7)$$

Используя выражение (4.4-5) и свойства матрицы перехода, получаем

$$\mathbf{x}(2T) = \boldsymbol{\varphi}(2T)\mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\varphi}(T)\mathbf{h}(T)m(0) + \mathbf{h}(T)m(T). \quad (4.4-8)$$

Предположим, что $\mathbf{x}(2T) = \mathbf{0}$. Тогда начальное состояние $\mathbf{x}(0)$, из которого можно достичь состояния равновесия за два периода прерывания, найдем в виде

$$\mathbf{x}(0) = -m(0)\mathbf{s}_1 - m(T)\mathbf{s}_2, \quad (4.4-9)$$

где $\mathbf{s}_1 = \boldsymbol{\varphi}(-T)\mathbf{h}(T)$ и $\mathbf{s}_2 = \boldsymbol{\varphi}(-2T)\mathbf{h}(T)$ — линейно независимые векторы.

Таким образом, находим, что если сигналы $m(0)$ и $m(T)$ свободны от ограничений, то система из своих начальных со-

стояний, принадлежащих плоскости, содержащей векторы s_1 и s_2 , может быть переведена в состояние $x(2T) = 0$ за два периода прерывания. Однако, если на один из сигналов $m(0)$ или $m(T)$ или одновременно на оба наложены ограничения, то область приводимых начальных состояний будет включать лишь часть этой плоскости, содержащей базисные векторы s_1 и s_2 .

По аналогии с предыдущим при $k = n$ получаем

$$x(0) = -m(0)s_1 - m(T)s_2 - \dots - m(i-1T)s_i - \dots - m(n-1T)s_n, \quad (4.4-10)$$

где

$$s_i = \Phi(-iT)h(T), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4-11)$$

— линейно независимые векторы.

Векторы s_i составляют базис в пространстве состояний процесса. Таким образом, заключаем, что если сигналы $m(iT)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) свободны от ограничений, то любое начальное состояние $x(0)$ можно представить в виде линейной комбинации векторов s_i , и поэтому из состояния $x(0)$ в состояние равновесия $x(nT) = 0$ система может быть переведена за самое большее за n периодов прерывания, т. е. за время $t_1 \leq nT$. Однако, если на сигналы $m(iT)$ наложены ограничения, то некоторые начальные состояния $x(0)$ уже нельзя будет представить в виде линейной комбинации базисных векторов без нарушения условий ограничения. Следовательно, в этом случае для перевода системы из начального состояния $x(0)$ в состояние $x(nT) = 0$ потребуется затратить больше времени. Этот случай иллюстрируется в примере 4.2—1 и детально будет рассмотрен в параграфе 4.6.

Аналогичным образом могут быть также получены условия управляемости непрерывных систем. Можно показать, что непрерывный во времени процесс n -го порядка, описываемый уравнением $\dot{x} = Ax + dm$, является полностью управляемым тогда и только тогда, когда векторы $d, Ad, \dots, A^{n-1}d$ линейно независимы [87, 88].

Понятию управляемости можно дать еще и другое толкование, способствующее лучшему его пониманию [69]. Пусть линейный многомерный процесс описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dm(t), \quad (4.4-12)$$

где x — n -мерный вектор состояния;

m — r -мерный вектор, представляющий управляющие воздействия;

A — квадратная матрица коэффициентов n -го порядка;

D — матрица управления размера $n \times r$.

Эти уравнения показывают, что управляющее воздействие m_k не будет оказывать какого-нибудь влияния на движение по координате z_j , если

$$\sum_{k=1}^r \delta_{jk} m_k(t) = 0, \quad (4.4-18)$$

т. е. когда $\delta_{jk} = 0$ для $k = 1, 2, \dots, r$. Запись в форме (4.4—18) означает, что элементы j -й строки матрицы Δ все равны нулю. Отсюда следует вывод, что неуправляемыми координатами системы являются все те канонические координаты, которые соответствуют нулевым строкам матрицы Δ . Равенство нулю всех элементов этих строк матрицы Δ делает невозможным управление по соответствующим им координатам. Это означает



Рис. 4.4—1. Последовательное соединение

также, что изменение координат происходит независимо от управляющих воздействий и, следовательно, целиком определяется начальными условиями и внешними возмущениями. Можно сказать, что эти координаты полностью развязаны от управления.

Приведенное рассмотрение позволяет дать следующее определение управляемости: процесс, описываемый уравнением (4.4—12), является управляемым, если матрица Δ не содержит строк, все элементы которых равны нулю; координаты, соответствующие ненулевым строкам Δ , считаются управляемыми.

На основе описанного выше подхода к определению управляемости в работе [69] получены некоторые общие условия управляемости, касающиеся составных систем. Эти условия можно сформулировать следующим образом.

1. Последовательное соединение двух многомерных процессов. На рис. 4.4—1 показана составная система, в которой за процессом P_a следует процесс P_b . Пусть собственные значения матрицы процесса P_a равны $\lambda_{1a}, \lambda_{2a}, \dots, \lambda_{ra}$, а процесса P_b — $\lambda_{1b}, \lambda_{2b}, \dots, \lambda_{qb}$. Тогда можно показать, что:

- составная система является управляемой, если оба процесса P_a и P_b являются управляемыми;
- если P_a и P_b — управляемые процессы, то каждая из неуправляемых координат составной системы обязана своей неуправляемостью процессу P_b .

2. Параллельное соединение двух многомерных процессов. На рис. 4.4—2 показана составная система, в которой параллельно протекают два процесса P_a и P_b . Можно показать, что для полной управляемости составного процесса необходимо и достаточно, чтобы оба процесса P_a и P_b были управляемыми.

3. Соединение двух многомерных процессов с образованием цепи обратной связи. Рассматриваемый составной процесс показан на рис. 4.4—3, на котором P_a — процесс в прямой и P_b — процесс в обратной цепи контура системы. Составной процесс, в котором за процессом P_a следует процесс P_b , обозначим P_1 ,

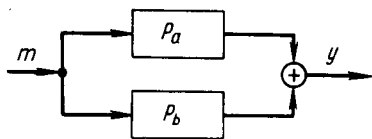


Рис. 4.4—2. Параллельное соединение

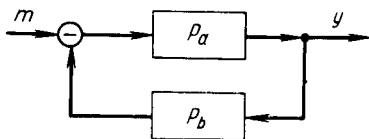


Рис. 4.4—3. Соединение двух процессов с образованием обратной связи

и составной процесс, в котором за процессом P_b следует P_a , обозначим P_2 .

Тогда можно показать, что:

а) для управляемости составной системы необходимо и достаточно, чтобы последовательный процесс P_1 был управляемым;

б) составной процесс является управляемым, если оба процесса P_a и P_b являются управляемыми;

в) если P_a и P_b — управляемые процессы, то любая неуправляемая координата составной системы является также неуправляемой координатой процесса P_1 и обязана своей неуправляемостью процессу P_b .

Региональная управляемость

Процесс принято называть регионально управляемым [146], если он может быть переведен из некоторого начального состояния $x(t_0)$ в окрестность желаемого состояния равновесия $x(t_1)$ за конечный интервал времени $t_1 - t_0$. Заметим, что когда на управляющие воздействия m наложены ограничения, то переход точно в состояние $x(nT) = 0$ за n периодов прерывания возможен только из ограниченного множества начальных состояний $x(0)$, даже если процесс является полностью управляемым.

Понятие региональной управляемости оказывается полезным при синтезе некоторых нелинейных систем, когда ставится задача отыскания управления, переводящего процесс в окрестность состояния равновесия, т. е. рассматривается приближенное решение задачи.

$= 1, 2, \dots, p$ не все равны нулю. Другими словами, x_k является наблюдаемой координатой, если элементы k -го столбца матрицы выхода не все равны нулю. Если это условие не соблюдается, то координату x_k называют ненаблюдаемой. Таким образом, линейный процесс является наблюдаемым, если матрица выхода \mathbf{B} не содержит столбцов, элементы которых равны нулю.

4.5. ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

Ко многим динамическим системам, например системам управления космическими кораблями, ракетами, самолетами, химическими реакторами, предъявляется требование оптимального поведения при различных воздействиях, имеющее целью обеспечить успешную отработку различного рода команд управления. Одним из важных видов оптимального управления является управление, минимизирующее длительность переходных процессов в системе, которое называют также управлением, оптимальным по быстродействию. Система оптимальная по быстродействию, стремится свести ошибку и ее производные к нулю за минимальное возможное время. Можно привести множество примеров, когда такое управление является оптимальным. При осуществлении периодических технологических процессов в химической промышленности наибольшее влияние на стоимость конечного продукта во многих случаях оказывают трудоемкость, издержки производства и размеры плановых инвестиций. Все эти расходы увеличиваются с увеличением времени, затрачиваемого на один цикл, поэтому время цикла является показателем оптимальности процесса. При управлении космическим кораблем ставится задача удержания его на заданной траектории движения. В случае возникновения ошибок движения желательнее вернуть корабль на оптимальную траекторию за минимальное время. В общей постановке задачу построения оптимального по времени управления можно сформулировать как задачу отыскания закона управления или управляющей последовательности, переводящих объект управления из заданного начального состояния $x(0)$ в желаемое состояние x_d за минимальное время.

Введем некоторые определения. *Закон управления* $m(x, t)$ или $m[x(kT), kT]$ есть управляющее воздействие, представленное в виде функции координат системы и, возможно, времени. *Управляющая функция* $m(t)$ есть управляющее воздействие, представленное в виде непрерывной функции времени. *Управляющая последовательность* $m(kT)$ есть управляющее воздействие, представленное в виде функции последовательных дискретных моментов времени.

Динамическую систему с сосредоточенными параметрами можно описать n -мерным вектором состояния, удовлетворяющим дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f[x(t), m(t), t], \quad (4.5-1)$$

где $m(t)$ — управляющая функция, которую будем предполагать r -мерным вектором, и $m \in \Omega$. Решение уравнения (4.5—1) зависит от выбора $m(t)$. Если $x(t)$ — решение уравнения (4.5—1) для некоторой частной управляющей функции $m(t)$ при начальных условиях $x(0) = x^0$ и если $x(t_f) = x_d$ при $t_f > 0$, то говорят, что система переведена из начального состояния x^0 в желаемое состояние x_d за t_f сек. Проблема построения оптимального по времени управления состоит в отыскании допустимого управления, переводящего систему из состояния x^0 в состояние x_d за минимальное время. Для линейных систем или систем, работающих в линейных режимах, уравнение (4.5—1) можно записать в виде

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dm(t), \quad (4.5-2)$$

где A — матрица коэффициентов процесса; D — матрица управления. В случае системы n -го порядка и управления по r входам A — квадратная матрица n -го порядка и D — прямоугольная матрица размера $n \times r$.

В этом параграфе рассматривается определение управляющей последовательности или закона управления, при которых достигается оптимальное по времени управление линейными процессами.

Метод преобразования координат

Как было найдено в параграфе 4.3, уравнение переходных состояний рассматриваемого процесса имеет вид

$$x(k+1T) = \varphi(T)x(kT) + h(T)m(kT). \quad (4.5-3)$$

При описываемой ниже процедуре расчета оптимальной управляющей последовательности многократно используется это уравнение и учитывается тот факт, что если система достигает состояния равновесия за k периодов прерывания, то при $t = kT$ все координаты ее принимают нулевые значения.

В дальнейшем будем предполагать, что в системе имеется одно единственное управляющее воздействие. Это предположение делается исключительно ради удобства описания процедуры расчета. При необходимости эта процедура может быть легко модифицирована на случай нескольких управляющих воздействий. Рассмотрим вначале оптимальное по быстродействию управление процессом второго порядка. Впоследствии процеду-

ра расчета будет обобщена на случай оптимального управления процессом n -го порядка.

1. **Процесс второго порядка.** Процесс второго порядка можно охарактеризовать двумя координатами x_1 и x_2 . Вектор состояния процесса можно представить в виде

$$\mathbf{x}(kT) = x_1(kT) \mathbf{u}_1 + x_2(kT) \mathbf{u}_2, \quad (4.5-4)$$

где \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 — базисные векторы.

Если процесс может быть переведен из начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в состояние равновесия за один период прерывания, то, полагая $\mathbf{x}(T) = 0$, из формулы (4.5-4) находим

$$\Phi(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{h}(T)m(0) = 0. \quad (4.5-5)$$

Решая это уравнение относительно $\mathbf{x}(0)$, получаем

$$\mathbf{x}(0) = -m(0)\Phi(-T)\mathbf{h}(T). \quad (4.5-6)$$

Обозначим

$$\mathbf{s}_1 = \Phi(-T)\mathbf{h}(T) \quad (4.5-7)$$

и предыдущее выражение запишем в виде

$$\mathbf{x}(0) = -m(0)\mathbf{s}_1, \quad (4.5-8)$$

что определяет прямую линию в пространстве состояний. Можно видеть, что все приводимые за один период прерывания начальные состояния $\mathbf{x}(0)$ суть одномерные векторы. Для удобства записи последующих преобразований выражение (4.5-3) представим в виде

$$\mathbf{x}(0) = z_1(0)\mathbf{s}_1, \quad (4.5-9)$$

где

$$z_1(0) = -m(0). \quad (4.5-10)$$

Заметим, что введенные здесь величины z_i не имеют ничего общего с z , использованными в параграфе 4.4.

Если процесс может быть переведен из начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в состояние равновесия за два периода, то из состояния $\mathbf{x}(T)$ в состояние равновесия он может быть, очевидно, переведен за один период прерывания. В этом случае $\mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{x}(T)$ являются соответственно двумерным и одномерным векторами. Тогда по аналогии с выражением (4.5-9) $\mathbf{x}(T)$ можно представить в виде

$$\mathbf{x}(T) = z_1(T)\mathbf{s}_1. \quad (4.5-11)$$

Так как

$$\mathbf{x}(T) = \Phi(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{h}(T)m(0), \quad (4.5-12)$$

то, используя формулу (4.5—11), находим

$$\mathbf{x}(0) = z_1(T) \Phi(-2T) \mathbf{h}(T) - m(0) \Phi(-T) \mathbf{h}(T), \quad (4.5—13)$$

что может быть записано в виде

$$\mathbf{x}(0) = z_1(0) \mathbf{s}_1 + z_2(0) \mathbf{s}_2, \quad (4.5—14)$$

где \mathbf{s}_1 и $z_1(0)$ даются выражениями (4.5—7) и (4.5—10) соответственно и

$$\mathbf{s}_2 = \Phi(-2T) \mathbf{h}(T); \quad (4.5—15)$$

$$z_2(0) = z_1(T). \quad (4.5—16)$$

Выражение (4.5—10) дает значение желаемого управляющего воздействия в момент $t = 0$ в виде

$$m(0) = -z_1(0). \quad (4.5—17)$$

В результате описанных выше преобразований мы перешли от первоначального представления векторов $\mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{x}(T)$ выражениями

$$\mathbf{x}(0) = x_1(0) \mathbf{u}_1 + x_2(0) \mathbf{u}_2, \quad (4.5—18)$$

$$\mathbf{x}(T) = x_1(T) \mathbf{u}_1 + x_2(T) \mathbf{u}_2 \quad (4.5—19)$$

к представлению в форме

$$\mathbf{x}(0) = z_1(0) \mathbf{s}_1 + z_2(0) \mathbf{s}_2, \quad (4.5—20)$$

$$\mathbf{x}(T) = z_1(T) \mathbf{s}_1. \quad (4.5—21)$$

Если $\mathbf{x}(T)$ приводится к нулю за один шаг, то

$$\mathbf{x}(2T) = \Phi(T) \mathbf{x}(T) + \mathbf{h}(T) m(T) = \mathbf{0}. \quad (4.5—22)$$

Учитывая формулу (4.5—21), получаем

$$\mathbf{x}(2T) = z_1(T) \Phi(T) \mathbf{s}_1 + m(T) \mathbf{h}(T). \quad (4.5—23)$$

Используя выражение (4.5—7), находим

$$\mathbf{x}(2T) = [z_1(T) + m(T)] \mathbf{h}(T). \quad (4.5—24)$$

Отсюда следует условие приведения $\mathbf{x}(T)$ к нулю за один шаг:

$$m(T) = -z_1(T), \quad (4.5—25)$$

которое дает значение управляющего воздействия при $t = T$.

Из вышеизложенного видно, что желаемую управляющую последовательность или стратегию управления можно легко найти, если от представления векторов в форме (4.5—18) и (4.5—19) перейти к представлению их в форме (4.5—20) и (4.5—21).

Расчет желаемой управляющей последовательности можно произвести в следующем порядке. Согласно предыдущему рассмотрению имеем

$$\mathbf{s}_1 = \varphi(-T) \mathbf{h}(T);$$

$$\mathbf{s}_2 = \varphi(-2T) \mathbf{h}(T).$$

Пусть базисные векторы \mathbf{s}_1 и \mathbf{s}_2 связаны с базисными векторами \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 соотношениями

$$\mathbf{s}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2; \quad (4.5-26)$$

$$\mathbf{s}_2 = a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2. \quad (4.5-27)$$

В матричных обозначениях будем иметь

$$[\mathbf{s}] = \mathbf{P} [\mathbf{u}], \quad (4.5-28)$$

где

$$[\mathbf{s}] = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix}; \quad (4.5-29)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad (4.5-30)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.5-31)$$

Выражения (4.5—18) и (4.5—19) могут быть также записаны в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1(T) & x_2(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}; \quad (4.5-32)$$

в аналогичной форме могут быть также представлены и выражения (4.5—20) и (4.5—21):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1(T) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.5-33)$$

Приравняв выражения (4.5—32) и (4.5—33) и используя формулу (4.5—28), получаем

$$\begin{bmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1(T) & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{P}|} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1(T) & x_2(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}, \quad (4.5-34)$$

где детерминант $|\mathbf{P}|$ дается выражением

$$|\mathbf{P}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (4.5-35)$$

Записывая выражения (4.5—34) в развернутой форме, получаем

$$z_1(0) = \frac{a_{22}}{|P|} x_1(0) - \frac{a_{21}}{|P|} x_2(0); \quad (4.5-36)$$

$$z_1(T) = \frac{a_{22}}{|P|} x_1(T) - \frac{a_{21}}{|P|} x_2(T); \quad (4.5-37)$$

$$z_2(0) = -\frac{a_{12}}{|P|} x_1(0) + \frac{a_{11}}{|P|} x_2(0). \quad (4.5-38)$$

Отсюда находим искомый закон управления, оптимального по быстродействию:

$$m(0) = \beta_1 x_1(0) + \beta_2 x_2(0); \quad (4.5-39)$$

$$m(T) = \beta_1 x_1(T) + \beta_2 x_2(T), \quad (4.5-40)$$

где

$$\beta_1 = -\frac{a_{22}}{|P|}; \quad (4.5-41)$$

$$\beta_2 = \frac{a_{21}}{|P|}. \quad (4.5-42)$$

Схема в переменных состояния системы, оптимальной по быстродействию, показана на рис. 4.5—1. Отметим, что управляющие воздействия формируются с помощью цепей обратной

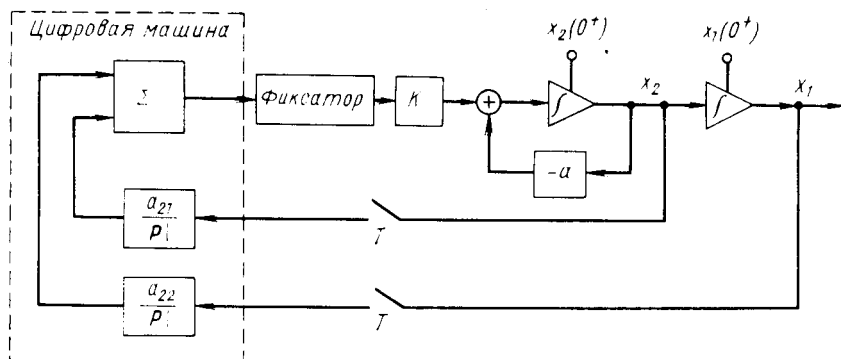


Рис. 4.5—1. Оптимальное управление процессом второго порядка

связи по координатам x_1 и x_2 , которые подаются на вход системы с усилениями β_1 и β_2 соответственно. Таким образом, оптимальная по быстродействию система остается стационарной системой. Описанную процедуру расчета проиллюстрируем примерами.

Пример 4.5—1. Проблема регулятора

Рассмотрим процесс второго порядка с начальными условиями $x_1(0)$ и $x_2(0)$, описываемый схемой в переменных состояния, представленной на рис. 4.5—2. Входное воздействие положим равным нулю. Требуется найти закон управления, при котором процесс из заданного начального состояния $x(0)$ пе-

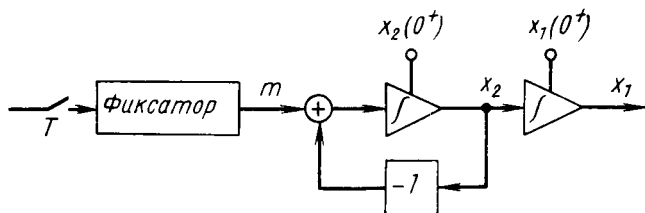


Рис. 4.5—2. Схема в переменных состояния для процесса второго порядка

редовится за минимальное время в нулевое состояние. Матрица перехода системы равна

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемого перехода равна

$$h(T) = \begin{bmatrix} T - 1 + e^{-T} \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Базисные векторы s_1 и s_2 легко находятся по формулам (4.5—7) и (4.5—15) в виде

$$s_1 = \begin{bmatrix} T + 1 - e^T \\ e^T - 1 \end{bmatrix};$$

$$s_2 = \begin{bmatrix} T - e^{2T} + e^T \\ e^{2T} - e^T \end{bmatrix}.$$

Учитывая формулы (4.5—26) и (4.5—27), представим эти векторы в виде

$$s_1 = (T + 1 - e^T) u_1 + (e^T - 1) u_2;$$

$$s_2 = (T - e^{2T} + e^T) u_1 + (e^{2T} - e^T) u_2.$$

Отсюда находим матрицу P :

$$P = \begin{bmatrix} T + 1 - e^T & e^T - 1 \\ T - e^{2T} + e^T & e^{2T} - e^T \end{bmatrix}.$$

Учитывая выражения (4.5—39) и (4.5—40), находим закон оптимального управления:

$$m^o(0) = \beta_1 x_1(0) + \beta_2 x_2(0);$$

$$m^o(T) = \beta_1 x_1(T) + \beta_2 x_2(T),$$

где коэффициенты обратной связи определяются выражениями

$$\beta_1 = \frac{e^T}{T(1-e^T)} \quad \text{и} \quad \beta_2 = \frac{T+e^T-e^{2T}}{T(1-e^T)^2}.$$

Схема в переменных состояния этой системы управления показана на рис. 4.5—3.

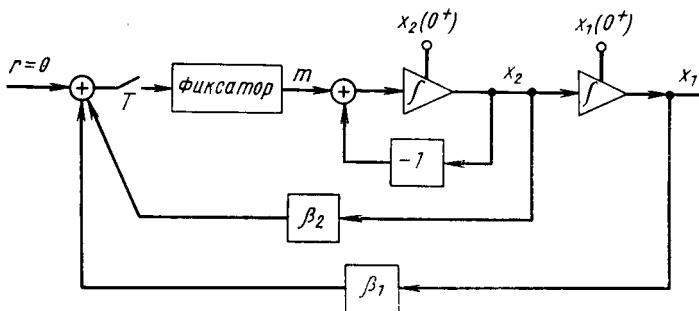


Рис. 4.5—3. Оптимальное управление процессом второго порядка примера 4.5—1

2. Процесс n -го порядка. Процесс n -го порядка можно охарактеризовать n координатами x_1, x_2, \dots, x_n и вектор состояния процесса представить в виде линейной комбинации n базисных векторов, т. е.

$$\mathbf{x}(kT) = x_1(kT)\mathbf{u}_1 + x_2(kT)\mathbf{u}_2 + \dots + x_n(kT)\mathbf{u}_n, \quad (4.5-43)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

В матричных обозначениях будем иметь

$$[\mathbf{x}] = \mathbf{X}[\mathbf{u}], \quad (4.5-44)$$

где

$$[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(T) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(n-1T) \end{bmatrix}; \quad (4.5-45)$$

$$[\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}; \quad (4.5-46)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) & \dots & x_n(0) \\ x_1(T) & x_2(T) & \dots & x_n(T) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(n-1T) & x_2(n-1T) & \dots & x_n(n-1T) \end{bmatrix}. \quad (4.5-47)$$

Если процесс n -го порядка может быть переведен из некоторого начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в состояние равновесия $\mathbf{x}(nT) = \mathbf{0}$ за n периодов прерывания, то вектор этого начального состояния является n -мерным и может быть записан в виде

$$\mathbf{x}(0) = z_1(0)\mathbf{s}_1 + z_2(0)\mathbf{s}_2 + \dots + z_n(0)\mathbf{s}_n, \quad (4.5-48)$$

где $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$ — векторы нового базиса.

Из состояния $\mathbf{x}(T)$ в состояние $\mathbf{x}(nT) = \mathbf{0}$ процесс в этом случае может быть переведен за $n-1$ периодов прерывания. Тогда $\mathbf{x}(T)$ является $(n-1)$ -мерным вектором:

$$\mathbf{x}(T) = z_1(T)\mathbf{s}_1 + z_2(T)\mathbf{s}_2 + \dots + z_{n-1}(T)\mathbf{s}_{n-1}. \quad (4.5-49)$$

Так как из состояния $\mathbf{x}(2T)$ в состояние $\mathbf{x}(nT) = \mathbf{0}$ процесс может быть далее переведен за $n-2$ периода прерывания, то, следовательно, $\mathbf{x}(2T)$ является $(n-2)$ -мерным вектором и может быть записан в виде

$$\mathbf{x}(2T) = z_1(2T)\mathbf{s}_1 + z_2(2T)\mathbf{s}_2 + \dots + z_{n-2}(2T)\mathbf{s}_{n-2}. \quad (4.5-50)$$

Аналогичным образом для некоторого промежуточного состояния $\mathbf{x}(kT)$, приводимого за $n-k$ периодов прерывания, будем иметь

$$\mathbf{x}(kT) = z_1(kT)\mathbf{s}_1 + z_2(kT)\mathbf{s}_2 + \dots + z_{n-k}(kT)\mathbf{s}_{n-k}. \quad (4.5-51)$$

Так как из состояния $\mathbf{x}(\overline{n-1}T)$ в состояние $\mathbf{x}(nT) = \mathbf{0}$ процесс может быть переведен за один период прерывания, то, следовательно, $\mathbf{x}(\overline{n-1}T)$ является одномерным вектором:

$$\mathbf{x}(\overline{n-1}T) = z_1(\overline{n-1}T)\mathbf{s}_1. \quad (4.5-52)$$

Векторы состояния, определенные выражениями (4.5-48) — (4.5-52), могут быть представлены в следующей матричной форме:

$$[\mathbf{x}] = \mathbf{Z}[\mathbf{s}], \quad (4.5-53)$$

где $[\mathbf{x}]$ дается выражением (4.5-45);

$$[\mathbf{s}] = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_n \end{bmatrix} \quad (4.5-54)$$

-- матрица, составленная из векторов нового базиса;

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1(0) & z_2(0) & z_3(0) \dots z_{n-1}(0) & z_n(0) \\ z_1(T) & z_2(T) & z_3(T) \dots z_{n-1}(T) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1(\overline{n-2}T) & z_2(\overline{n-2}T) & 0 \dots 0 & 0 \\ z_1(\overline{n-1}T) & 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5-55)$$

— треугольная матрица.

Элементы $z_1(kT)$ треугольной матрицы \mathbf{Z} и воздействия $m(kT)$ в управляющей последовательности, оптимальной по быстрдействию, связаны соотношением

$$m(kT) = -z_1(kT). \quad (4.5-56)$$

Так как

$$\mathbf{x}(\overline{k+1T}) = \boldsymbol{\varphi}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{h}(T)m(kT). \quad (4.5-57)$$

и для $(k+1)$ -шагового процесса

$$\mathbf{x}(\overline{k+1T}) = 0 \quad (4.5-58)$$

и

$$\mathbf{x}(kT) = z_1(kT)\mathbf{s}_1, \quad (4.5-59)$$

то

$$\boldsymbol{\varphi}(T)z_1(kT)\mathbf{s}_1 + \mathbf{h}(T)m(kT) = 0. \quad (4.5-60)$$

Учитывая формулу (4.5-7), последнее уравнение запишем в виде

$$[z_1(kT) + m(kT)]\mathbf{h}(T) = 0, \quad (4.5-61)$$

откуда следует выражение (4.5-56). Отсюда заключаем, что для определения искомой оптимальной управляющей последовательности достаточно от записи векторов состояния в форме (4.5-44) перейти к записи в форме (4.5-53).

В справедливости формулы (4.5-51) легко убедиться следующим образом. Для одношагового процесса $\mathbf{x}(T) = 0$, откуда следует, что $m(0) = -z_1(0)$. Тогда

$$\mathbf{x}(0) = -m(0)\boldsymbol{\varphi}(-T)\mathbf{h}(T) = z_1(0)\mathbf{s}_1 \quad (4.5-62)$$

и

$$\mathbf{Z} = z_1(0). \quad (4.5-63)$$

Для двухшагового процесса $\mathbf{x}(2T) = 0$, откуда следует, что $m(T) = -z_1(T)$. Тогда

$$\mathbf{x}(T) = \boldsymbol{\varphi}(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{h}(T)m(0) = z_1(T)\mathbf{s}_1; \quad (4.5-64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \boldsymbol{\varphi}(-T)[z_1(T)\mathbf{s}_1 - \mathbf{h}(T)m(0)] = z_1(T)\boldsymbol{\varphi}(-2T)\mathbf{h}(T) - \\ &- m(0)\boldsymbol{\varphi}(-T)\mathbf{h}(T) = z_1(0)\mathbf{s}_1 + z_2(0)\mathbf{s}_2 \end{aligned} \quad (4.5-65)$$

и

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1(T) & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.5-66)$$

Для трехшагового процесса из $\mathbf{x}(3T) = 0$, следует, что $m(2T) = -z_1(2T)$. Тогда

$$\mathbf{x}(2T) = \boldsymbol{\varphi}(T)\mathbf{x}(T) + \mathbf{h}(T)m(T) = z_1(2T)\mathbf{s}_1; \quad (4.5-67)$$

$$\mathbf{x}(T) = \boldsymbol{\varphi}(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{h}(T)m(0) = z_1(T)\mathbf{s}_1 + z_2(T)\mathbf{s}_2. \quad (4.5-68)$$

Из уравнения (4.5—68) с учетом формул (4.5—7) и (4.5—15) получаем

$$\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\Phi}(-T)[z_1(T)\boldsymbol{\Phi}(-T)\mathbf{h}(T) + z_2(T)\boldsymbol{\Phi}(-2T)\mathbf{h}(T) - m(0)\mathbf{h}(T)],$$

или

$$\mathbf{x}(0) = z_1(0)\mathbf{s}_1 + z_2(0)\mathbf{s}_2 + z_3(0)\mathbf{s}_3, \quad (4.5—69)$$

где

$$\begin{aligned} z_1(0) &= -m(0); \\ z_2(0) &= z_1(T); \\ z_3(0) &= z_2(T); \\ \mathbf{s}_3 &= \boldsymbol{\Phi}(-3T)\mathbf{h}(T). \end{aligned}$$

Тогда матрица \mathbf{Z} принимает вид

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1(0) & z_2(0) & z_3(0) \\ z_1(T) & z_2(T) & 0 \\ z_1(2T) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.5—70)$$

Для n -шагового процесса $\mathbf{x}(nT) = \mathbf{0}$, откуда следует, что

$$m(\overline{n-1T}) = -z_1(\overline{n-1T}).$$

Далее можно легко получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\overline{n-1T}) &= z_1(\overline{n-1T})\mathbf{s}_1; \\ \mathbf{x}(\overline{n-2T}) &= z_1(\overline{n-2T})\mathbf{s}_1 + z_2(\overline{n-2T})\mathbf{s}_2; \\ \mathbf{x}(kT) &= z_1(kT)\mathbf{s}_1 + z_2(kT)\mathbf{s}_2 + \dots + z_{n-k}(kT)\mathbf{s}_{n-k}; \\ \mathbf{x}(0) &= z_1(0)\mathbf{s}_1 + z_2(0)\mathbf{s}_2 + \dots + z_{n-1}(0)\mathbf{s}_{n-1} + z_n(0)\mathbf{s}_n, \end{aligned} \quad (4.5—71)$$

где

$$\mathbf{s}_i = \boldsymbol{\Phi}(-iT)\mathbf{h}(T). \quad (4.5—72)$$

Выражение (4.5—55) для треугольной матрицы \mathbf{Z} следует непосредственно из формулы (4.5—71). Можно показать, что элементы в ее главной и вспомогательных диагоналях одинаковы, т. е.

$$z_1(kT) = z_2(\overline{k-1T}) = z_3(\overline{k-2T}) = \dots = z_{k+1}(0). \quad (4.5—73)$$

Векторы базиса $[\mathbf{s}]$ связаны с векторами базиса $[\mathbf{u}]$ соотношением

$$[\mathbf{s}] = \mathbf{P}[\mathbf{u}], \quad (4.5—74)$$

где

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4.5-75)$$

Приравнявая выражения (4.5-44) и (4.5-53), получаем

$$X[u] = Z[s]. \quad (4.5-76)$$

Используя формулу (4.5-74), находим

$$Z[s] = XP^{-1}[s]. \quad (4.5-77)$$

Следовательно,

$$Z = XP^{-1}, \quad (4.5-78)$$

что эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} z_1(0) &= -\sum_{i=1}^n \beta_i x_i(0); \\ z_1(T) &= -\sum_{i=1}^n \beta_i x_i(T); \\ &\dots \dots \dots \\ z_1(kT) &= -\sum_{i=1}^n \beta_i x_i(kT); \\ &\dots \dots \dots \\ z_1(\overline{n-1}T) &= -\sum_{i=1}^n \beta_i x_i(\overline{n-1}T), \end{aligned} \quad (4.5-79)$$

где β_i являются функциями элементов матрицы P . Так как управляющие воздействия связаны с величинами $z_i(kT)$ соотношениями (4.5-56), то закон оптимального управления можно, очевидно, с учетом формулы (4.5-79) представить в виде

$$m(kT) = \beta x(kT), \quad (4.5-80)$$

где матрица-строка β , которую часто называют матрицей обратной связи, имеет вид

$$\beta = [\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n]$$

и

$$x(kT) = \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix}$$

— вектор последовательных состояний процесса.

В результате мы пришли к системе с обратной связью, обладающей всеми преимуществами, присущими системам этого типа.

Расчет методом последовательных итераций

1. Случай единственного управляющего воздействия. Управляющую последовательность, оптимальную по быстродействию, можно найти следующим простым способом. Уравнение переходных состояний процесса n -го порядка имеет вид

$$\mathbf{x}(\overline{k+1}T) = \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{h}(T)m(kT), \quad (4.5-81)$$

где \mathbf{x} — n -мерный вектор.

При $k = 0$ из формулы (4.5—81) находим

$$\mathbf{x}(T) = \Phi(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{h}(T)m(0),$$

что позволяет представить $\mathbf{x}(T)$ в виде

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{f}_1[\mathbf{x}(0); m(0)], \quad (4.5-82)$$

т. е. как функцию вектора начального состояния $\mathbf{x}(0)$ и начального управляющего воздействия $m(0)$.

Аналогично при $k = 1$ имеем

$$\mathbf{x}(2T) = \Phi(T)\mathbf{x}(T) + \mathbf{h}(T)m(T) = \Phi(2T)\mathbf{x}(0) + \Phi(T)\mathbf{h}(T)m(0) + \mathbf{h}(T)m(T),$$

что можно также записать в виде

$$\mathbf{x}(2T) = \mathbf{f}_2[\mathbf{x}(0); m(0), m(T)]. \quad (4.5-83)$$

При $k = n - 1$ имеем

$$\mathbf{x}(nT) = \Phi(T)\mathbf{x}(\overline{n-1}T) + \mathbf{h}(T)m(\overline{n-1}T), \quad (4.5-84)$$

что можно также записать в виде линейной функции вектора начального состояния $\mathbf{x}(0)$ и последовательных воздействий $m(0), m(T), \dots, m(\overline{n-1}T)$, т. е.

$$\mathbf{x}(nT) = \Phi(nT)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(iT)\mathbf{h}(T)m(\overline{n-1-i}T); \quad (4.5-85a)$$

$$\mathbf{x}(nT) = \mathbf{f}_n[\mathbf{x}(0); m(0); m(T), \dots, m(\overline{n-1}T)], \quad (4.5-85b)$$

если последовательно исключить все промежуточные состояния $\mathbf{x}(\overline{n-1}T)$, $\mathbf{x}(\overline{n-2}T)$ и т. д. из формулы (4.5—84).

Так как при оптимальном по быстродействию управлении процессом n -го порядка $\mathbf{x}(nT)$ есть нулевой вектор, то

$$\mathbf{f}_n[\mathbf{x}(0); m(0), m(T), \dots, m(\overline{n-1}T)] = \mathbf{0}. \quad (4.5-86)$$

Это условие ведет к системе из n линейных уравнений относительно неизвестных $m(kT)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Решая уравнения относительно этих неизвестных, можно получить управляющую последовательность в виде

$$m(kT) = F_k [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]. \quad (4.5-87)$$

Описанная процедура расчета оптимальной управляющей последовательности очень проста и исключительно удобна с точки зрения программирования для цифровых вычислительных машин. Расчет состоит главным образом в решении системы из n линейных алгебраических уравнений. Эта процедура расчета может быть распространена и на дискретные системы с насыщением, как это рассматривается в параграфе 4.6.

Если задана управляющая последовательность, то с помощью уравнения переходных состояний можно предсказать состояние процесса в любой момент в будущем. Однако из-за конечной точности изготовления элементов системы, изменения параметров при старении, недостаточной точности определения матрицы перехода системы, наличия возмущающих воздействий неизвестной природы и других случайных эффектов, это предсказание со временем будет все менее и менее точным. Измеряя каждый раз заново состояние процесса в последовательные дискретные моменты времени, можно скорректировать ошибки предсказания и удерживать все время регулируемые величины в пределах их оптимальных значений. Период прерывания необходимо выбирать при этом достаточно малым, чтобы обеспечить достаточную точность предсказания на один шаг вперед при использовании уравнения переходных состояний. Описанный режим управления может быть реализован в системе с обратной связью.

Выражая величины $x_i(0)$ через $x_i(kT)$ и произведя необходимые подстановки, находим оптимальный закон управления в виде

$$m^0(kT) = \beta x(kT), \quad (4.5-88)$$

где матрица обратной связи β и вектор состояния $x(kT)$ были определены ранее. Описанный метод расчета управляющей последовательности, оптимальной по быстродействию, проиллюстрируем числовым примером.

Пример 4.5—2. Проблема регулятора

Рассмотрим ту же самую задачу, что и в примере 4.5—1. Требуется найти оптимальную по быстродействию управляющую последовательность при использовании описанного выше итерационного метода.

Уравнение переходных состояний процесса имеет вид

$$x(k+1T) = \Phi(T)x(kT) + h(T)m(kT),$$

где матрица перехода процесса дается выражением

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix},$$

а матрица управляемого перехода имеет вид

$$h(T) = \begin{bmatrix} T - 1 + e^{-T} \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Отсюда для $k = 0$ имеем

$$x(T) = \Phi(T) x(0) + h(T) m(0),$$

что эквивалентно системе уравнений

$$x_1(T) = x_1(0) + (1 - e^{-T}) x_2(0) + (T - 1 + e^{-T}) m(0);$$

$$x_2(T) = e^{-T} x_2(0) + (1 - e^{-T}) m(0).$$

При $k = 1$

$$x(2T) = \Phi(T) x(T) + h(T) m(T),$$

откуда получаем

$$x_1(2T) = x_1(T) + (1 - e^{-T}) x_2(T) + (T - 1 + e^{-T}) m(T);$$

$$x_2(2T) = e^{-T} x_2(T) + (1 - e^{-T}) m(T).$$

Подставляя найденные ранее величины $x_1(T)$ и $x_2(T)$ в эти уравнения, получаем

$$x_1(2T) = x_1(0) + (1 - e^{-2T}) x_2(0) + (T - e^{-T} + e^{-2T}) m(0) + (T - 1 + e^{-T}) m(T);$$

$$x_2(2T) = e^{-2T} x_2(0) + (e^{-T} - e^{-2T}) m(0) + (1 - e^{-T}) m(T).$$

Полагая далее $x(2T) = 0$, приходим к следующей системе уравнений:

$$x_1(0) + (1 - e^{-2T}) x_2(0) + (T - e^{-T} + e^{-2T}) m(0) + (T - 1 + e^{-T}) m(T) = 0;$$

$$e^{-2T} x_2(0) + (e^{-T} - e^{-2T}) m(0) + (1 - e^{-T}) m(T) = 0.$$

Решая эти уравнения, находим закон управления

$$m(0) = \beta_1 x_1(0) + \beta_2 x_2(0);$$

$$m(T) = \beta_1 x_1(T) + \beta_2 x_2(T),$$

что можно также записать в виде

$$m(k) = \beta x(kT), \quad k = 0, 1,$$

где β — матрица-строка, элементы которой равны

$$\beta_1 = \frac{e^T}{T(1 - e^T)} \quad \text{и} \quad \beta_2 = \frac{T + e^T - e^{2T}}{T(1 - e^T)^2}.$$

Можно видеть, что этот результат совпадает с результатами, полученными в примере 4.5—1.

2. Случай нескольких управляющих воздействий. Описанный выше для случая единственного управляющего воздействия метод расчета оптимальных по быстродействию систем можно

распространить и на случай управления объектом по нескольким входам. Рассмотрим процесс n -го порядка, управляемый по r входам, уравнение переходных состояний которого имеет вид

$$\mathbf{x}(\overline{k+1}T) = \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{h}(T)\mathbf{m}(kT), \quad (4.5-89)$$

где \mathbf{m} — r -мерный вектор, представляющий управляющие воздействия;

\mathbf{h} — матрица размера $n \times r$.

Пусть $\mathbf{x}(0)$ начальное состояние, из которого процесс может быть переведен в нулевое состояние за p периодов прерывания. Тогда $\mathbf{x}(pT) = \mathbf{0}$, и из формулы (4.5—85а) находим

$$\Phi(pT)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^p \Phi(\overline{p-i}T)\mathbf{h}(T)\mathbf{m}(\overline{i-1}T) = \mathbf{0}. \quad (4.5-90)$$

Переносим второе слагаемое вправо и умножая обе части уравнения слева на матрицу $\Phi^{-1}(pT)$, получаем

$$\mathbf{x}(0) = - \sum_{i=1}^p \mathbf{s}_i \mathbf{m}(\overline{i-1}T), \quad (4.5-91)$$

где

$$\mathbf{s}_i = \Phi(-iT)\mathbf{h}(T) \quad (4.5-92)$$

— матрица размера $n \times r$. Заметим, что в данном случае имеет место соотношение $r \times p = n$ и минимальное число шагов, за которое процесс может быть переведен в состояние равновесия, равно отношению $\frac{n}{r}$.

Выражение (4.5—91) может быть представлено в виде

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{m}(0) \\ \mathbf{m}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{m}(p-1) \end{bmatrix}, \quad (4.5-93)$$

где

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \dots \mathbf{s}_p] \quad (4.5-94)$$

— матрица размера $n \times n$, так как $r \times p = n$ и T ради упрощения записи опущено. Совершая далее матричные преобразования, приведем формулу (4.5—93) к виду

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}(0) \\ \mathbf{m}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{m}(p-1) \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{x}(0), \quad (4.5-95)$$

где

$$\mathbf{B} = -\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_j \\ \vdots \\ \mathbf{B}_p \end{bmatrix} \quad (4.5-96)$$

— матрица размера $n \times n$.

Заметим, что эта матрица \mathbf{B} отличается от матрицы \mathbf{B} , введенной в гл. 3. Элементами \mathbf{B}_j в приведенном выше выражении матрицы \mathbf{B} являются матрицы размера $r \times n$. Векторы управляющих воздействий находим отсюда в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(0) &= \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(0); \\ \mathbf{m}(1) &= \mathbf{B}_2 \mathbf{x}(0); \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{m}(j) &= \mathbf{B}_{j+1} \mathbf{x}(0); \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{m}(p-1) &= \mathbf{B}_p \mathbf{x}(0). \end{aligned} \quad (4.5-97)$$

Матрицы обратной связи \mathbf{B}_j легко находятся по обратной матрице \mathbf{S}^{-1} путем деления ее на блоки. Матрица \mathbf{B}_1 образуется из первых r строк матрицы \mathbf{S}^{-1} ; матрица \mathbf{B}_2 образуется из следующих r строк и матрица \mathbf{B}_j — из j -х r строк матрицы \mathbf{S}^{-1} .

Если $\mathbf{x}(0)$ — начальное состояние процесса, из которого он может быть переведен в состояние равновесия за p периодов прерывания, то, очевидно, из состояния $\mathbf{x}(T)$ он может быть переведен в состояние равновесия за $p-1$ периодов прерывания. Тогда из формулы (4.5-90) следует, что

$$\varphi(\overline{p-1} T) \mathbf{x}(T) + \sum_{i=1}^{p-1} \varphi(\overline{p-i-1} T) \mathbf{h}(T) \mathbf{m}(iT) = \mathbf{0}. \quad (4.5-98)$$

Переносим второе слагаемое вправо и умножая обе части уравнения слева на матрицу $\varphi^{-1}(\overline{p-1} T)$, получаем

$$\mathbf{x}(T) = - \sum_{i=1}^{p-1} \mathbf{s}_i \mathbf{m}(iT), \quad (4.5-99)$$

где \mathbf{s}_i дается выражением (4.5-92). Так как $\mathbf{m}(p) = \mathbf{0}$, то формулу (4.5-99) можно записать в виде

$$\mathbf{x}(T) = -\mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{m}(T) \\ \mathbf{m}(2T) \\ \vdots \\ \mathbf{m}(pT) \end{bmatrix}, \quad (4.5-100)$$

где матрица S дается выражением (4.5—94). Умножая обе части уравнения (4.5—100) слева на матрицу $-S^{-1}$, получаем

$$\begin{bmatrix} m(T) \\ m(2T) \\ \vdots \\ m(pT) \end{bmatrix} = Bx(T), \quad (4.5-101)$$

где B дается выражением (4.5—96). Отсюда следует, что

$$m(T) = B_1 x(T). \quad (4.5-102)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$m(2T) = B_1 x(2T) \quad (4.5-103)$$

и

$$m(kT) = B_1 x(kT). \quad (4.5-104)$$

Выражениями (4.5—102), (4.5—103) или (4.5—104) определяется закон оптимального по быстродействию управления процессом. Матрица B_1 в этих выражениях есть матрица обратной связи при оптимальном расчете проиллюстрируем числовыми примерами.

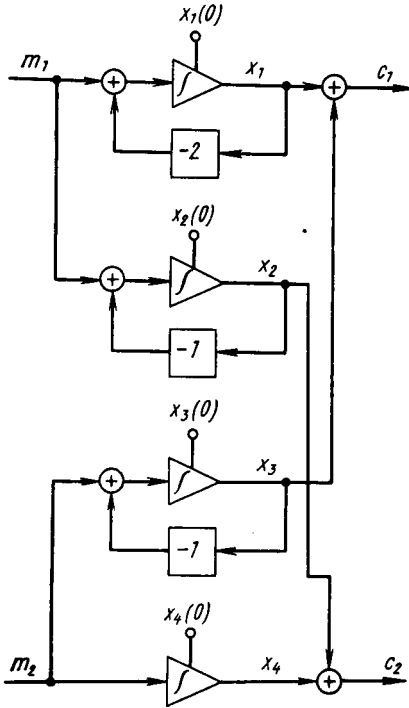


Рис. 4.5—4. Схема в переменных состояния для системы примера 4.5—3

Пример 4.5—3. Управление многомерным процессом

Рассмотрим процесс с многими входами и выходами, описываемый матрицей своих передаточных функций

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}.$$

Требуется найти управление, при котором время перехода из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия минимально.

На рис. 4.5—4 показана схема системы в переменных состояния.

Из ее рассмотрения находим матрицу перехода процесса

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

и матрицу управляемого перехода

$$h(T) = \begin{bmatrix} 1-\alpha^2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \\ 0 & T \end{bmatrix},$$

где $\alpha = e^{-T}$ и T — период прерывания.

Так как имеется четыре координаты и два управляющих воздействия, то из любого начального состояния процесс может быть переведен в нулевое состояние за два периода прерывания; поэтому полагаем $x(2T) = 0$. Тогда матрица S дается выражением

$$S = [s_1 \quad s_2],$$

где

$$s_1 = \varphi(-T)h(T) = \begin{bmatrix} \alpha^{-2} & -1 & 1 \\ \alpha^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}-1 & \\ 0 & T & \end{bmatrix};$$

$$s_2 = \varphi(-2T)h(T) = \begin{bmatrix} \alpha^{-2}(\alpha^{-2}-1) & 0 \\ \alpha^{-1}(\alpha^{-1}-1) & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}(\alpha^{-1}-1) \\ 0 & T \end{bmatrix}.$$

Подставляя найденные значения матриц s_1 и s_2 в выражение для матрицы S , получим

$$S = \begin{bmatrix} \alpha^{-2}-1 & 0 & \alpha^{-2}(\alpha^{-2}-1) & 0 \\ \alpha^{-1}-1 & 0 & \alpha^{-1}(\alpha^{-1}-1) & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}-1 & 0 & \alpha^{-1}(\alpha^{-1}-1) \\ 0 & T & 0 & T \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим

$$B = -S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^3}{(1-\alpha)^2(1-\alpha)} & \frac{-\alpha}{(1-\alpha)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} & \frac{-1}{T(1-\alpha)} \\ -\frac{\alpha^4}{(1-\alpha)^2(1-\alpha)} & \frac{\alpha^3}{(1-\alpha)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} & \frac{\alpha}{T(1-\alpha)} \end{bmatrix}.$$

Положим $T = 1$ сек; тогда

$$B = \begin{bmatrix} 0,091 & -0,92 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,338 & -1,582 \\ -0,0334 & 0,1245 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,338 & 0,582 \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим матрицу обратной связи

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,091 & -0,92 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,338 & -1,58 \end{bmatrix}$$

и закон оптимального управления

$$m_1^0(0) = 0,091x_1(0) - 0,92x_2(0);$$

$$m_2^0(0) = 0,338x_3(0) - 1,58x_4(0);$$

$$m_1^0(1) = 0,091x_1(1) - 0,92x_2(1);$$

$$m_2^0(1) = 0,338x_3(1) - 1,58x_4(1).$$

Полученные уравнения показывают, что управляющее воздействие m_1^0 является линейной функцией координат x_1 и x_2 и управляющее воздействие m_2^0 — линейной функцией координат x_3 и x_4 . Быстродействие системы равно двум периодам прерывания.

Пусть теперь требуется, чтобы переходные процессы по выходным координатам системы заканчивались за минимальное время. Можно показать, что достижимое для этого случая быстродействие системы равно периоду прерывания. Координаты выхода и координаты состояния системы связаны соотношениями

$$c_1 = x_1 + x_3 \quad \text{и} \quad c_2 = x_2 + x_4,$$

которые можно записать в виде матричного соотношения:

$$c = Mx,$$

где

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При $k = 0$ уравнение переходных состояний имеет вид

$$x(T) = \Phi(T)x(0) + h(T)m(0).$$

Отсюда находим вектор выхода

$$c(T) = M[\Phi(T)x(0) + h(T)m(0)].$$

Для окончания переходных процессов по выходным координатам за один период прерывания необходимо, чтобы $c(T) = 0$,

$$M[\Phi(T)x(0) + h(T)m(0)] = 0.$$

Последнее уравнение дает вектор искомого управления в виде

$$m(0) = -[Mh(T)]^{-1}M\Phi(T)x(0)$$

при условии, что матрица $[Mh(T)]^{-1}$ не является вырожденной.

Положим $T = 1$ сек; тогда, произведя необходимые вычисления, получим

$$[Mh(T)]^{-1} = \begin{bmatrix} 2,15 & -1,36 \\ -1,36 & 1,86 \end{bmatrix};$$

$$M\Phi(T) = \begin{bmatrix} 0,135 & 0 & 0,368 & 0 \\ 0 & 0,368 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим закон оптимального управления

$$m_1^0(0) = -0,29x_1(0) + 0,501x_2(0) - 0,7\bar{\omega}1x_3(0) + 1,36x_4(0);$$

$$m_2^0(0) = 0,184x_1(0) - 0,684x_2(0) + 0,501x_3(0) - 1,86x_4(0).$$

Полученные выражения показывают, что оптимальной является система с обратными связями по всем координатам к каждому из входов системы. В такой системе переходные процессы по выходным координатам, вызванные ненулевыми начальными условиями, заканчиваются за один период прерывания.

Пример 4.5—4. Система регулирования турбовинтового двигателя

Произведем расчет цифровой системы управления турбовинтовым двигателем. Режим работы двигателя можно охарактеризовать такими переменными, как скорость вращения, температура входных газов, угол установки лопасти

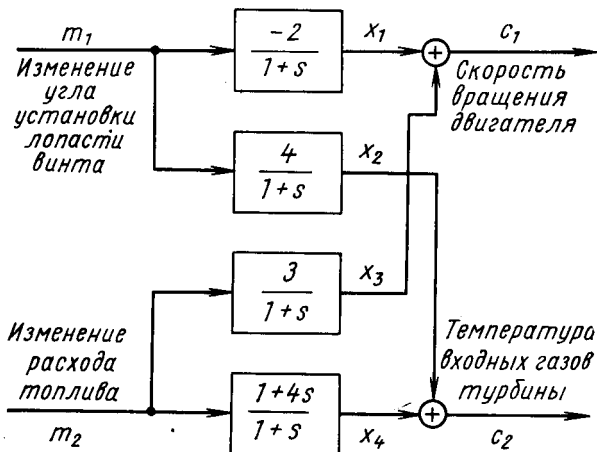


Рис. 4.5—5. Структурная схема упрощенной системы регулирования турбовинтового двигателя

винта, расход топлива. Регулирование двигателя необходимо обеспечить во всех режимах его нормальной эксплуатации. Расчет системы обычно начинают с составления линеаризованных уравнений движения объекта при малых отклонениях от какого-нибудь одного из заданных режимов. Найденные для одного из режимов передаточные функции объекта показаны на рис. 4.5—5. Управление двигателем осуществляется путем изменения угла установки лопасти винта и расхода топлива. Регулируемыми координатами являются скорость вращения двигателя и температура входных газов турбины. Найдем закон оптимального управления, при котором система из заданного начального состояния $x(0)$ переводится за минимальное время в состояние равновесия.

Из рассмотрения схемы системы в переменных состояния находим матрицу перехода объекта

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3\alpha \end{bmatrix}.$$

и матрицу управляемого перехода

$$h(T) = \begin{bmatrix} -2(1-\alpha) & 0 \\ 4(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 3(1-\alpha) \\ 0 & 1+3\alpha \end{bmatrix},$$

где $\alpha = e^{-T}$ и T — период прерывания.

Уравнение переходных состояний системы при $k = 0$ принимает вид

$$x(T) = \Phi(T)x(0) + h(T)m(0).$$

Так как вектор выхода c и вектор состояния x системы связаны соотношением

$$c = Mx,$$

где

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то, умножая слева уравнение переходных состояний на матрицу M , получаем

$$c(T) = M[\Phi(T)x(0) + h(T)m(0)].$$

Полагая $c(T) = 0$, вектор искомого управления находим в виде

$$m(0) = -[Mh(T)]^{-1}M\Phi(T)x(0)$$

при условии, что матрица $[Mh(T)]$ не является вырожденной.

После подстановки соответствующих величин находим обратную матрицу

$$[Mh(T)]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1+3\alpha}{2(1-\alpha)(7-3\alpha)} & \frac{3}{2(7-3\alpha)} \\ \frac{2}{7-3\alpha} & \frac{1}{7-3\alpha} \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим закон оптимального управления:

$$m^0(0) = -\frac{\alpha}{7-3\alpha} \begin{bmatrix} -\frac{1+3\alpha}{2(1-\alpha)} & 1,5 & -\frac{1+3\alpha}{2(1-\alpha)} & -4,5 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} x(0).$$

Из последнего выражения при $T = 1$ сек получаем:

$$m_1^0(0) = 0,104x_1(0) - 0,0948x_2(0) + 0,104x_3(0) + 0,281x_4(0);$$

$$m_2^0(0) = -0,125x_1(0) - 0,0625x_2(0) - 0,125x_3(0) + 0,187x_4(0).$$

Эти уравнения показывают, что оптимальные управляющие воздействия являются линейными функциями координат состояния.

Отсюда заключаем, что оптимальной в рассматриваемом случае является система с обратными связями по всем своим координатам для каждого из ее входов.

4.6. ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЕ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С НАСЫЩЕНИЕМ

В предыдущих параграфах была рассмотрена стратегия оптимального по быстродействию управления для линейных систем. При определении оптимальной стратегии мы часто использовали тот факт, что линейный процесс n -го порядка может быть переведен из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия за n периодов прерывания. Насыщение объекта приводит к ограничению амплитуд и, следовательно, мощности прикладываемых управляющих воздействий. Естественно ожидать, что требуемое минимальное время, за которое объект n -го порядка может быть переведен из заданного начального состояния $x(0)$ в нулевое состояние, в общем случае будет больше, чем nT . Увеличение необходимого минимального времени объясняется тем, что из-за насыщения объекта система не может развить достаточно больших усилий управления, требуемых на некоторых интервалах времени для получения такого же быстродействия, как и в линейной системе. Ограничение амплитуд управляющих воздействий в конечном счете приводит к увеличению длительности переходных процессов. Описанный в параграфе 4.5 метод расчета оптимальных линейных систем может быть распространен и на дискретные системы с насыщением. Для этого рассмотрим вначале некоторые важные геометрические представления ограничений, накладываемых на управляющие воздействия, что облегчит синтез систем с насыщением.

Представим оптимальную по быстродействию управляющую последовательность воздействий для процесса n -го порядка в случае отсутствия насыщения в виде множества

$$M = \{m(kT)\}, \quad (4.6-1)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)T$.

Это множество управляющих воздействий можно рассматривать как систему взаимно ортогональных осей или направлений n -мерного евклидова пространства E^n , которое может быть названо пространством управления системы. Начало координат этого n -мерного пространства представляет нулевую последовательность или состояние равновесия процесса управления. Размерность пространства управления определяется числом шагов, за которое объект переводится в нулевое состояние. Так, например, если переход в нулевое состояние заканчивается за два периода прерывания, то воздействие $m(0)$ и $m(T)$ можно рассматривать в качестве взаимно ортогональных направлений двумерного пространства управления; аналогичным образом в случае трехшагового процесса воздействия $m(0)$, $m(T)$, $m(2T)$ можно рассматривать как ортогональные направления трехмерного пространства управления. Каждая точка этого про-

пространства характеризует некоторую управляющую последовательность. Первым воздействием в оптимальной по быстродействию управляющей последовательности является $m(0)$, определяемое в соответствии с законом оптимального управления по заданному вектору начального состояния $x(0)$. С каждым шагом оптимального управления размерность пространства управления уменьшается на 1, и после n последовательных шагов изображающая точка попадает в начало координат этого пространства. Рис. 4.6—1 иллюстрирует сказанное выше о двумерном и трехмерном пространстве.

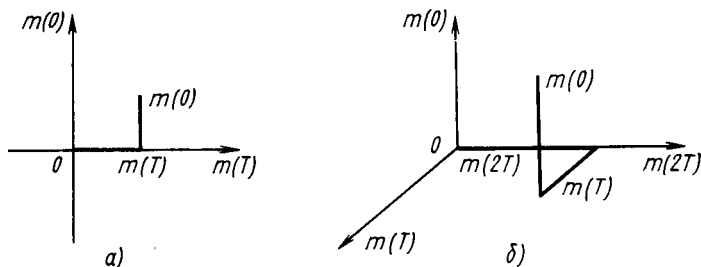


Рис. 4.6—1.

а — двумерное пространство управления; б — трехмерное пространство управления

Если в системе управления имеет место ограничение амплитуд управляющих воздействий, такое, что

$$|m(kT)| \leq 1, \quad (4.6-2)$$

то может случиться, что некоторые воздействия оптимальной последовательности, найденной в предположении отсутствия насыщения, превысят уровень ограничения. Эти предельные воздействия, как можно видеть из геометрических представлений, не смогут уменьшить размерности пространства управления. Для этого потребуются сделать некоторое дополнительное число шагов. Ограничения более общего вида

$$|m_i(kT)| \leq \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.6-3)$$

могут быть нормализованы и приведены к виду (4.6—2) путем замены $m_i(t)$ на $m_i(t)/\alpha_i$ и матрицы управления D на матрицу $D[\alpha_i]$, где

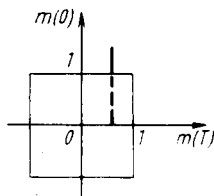
$$[\alpha_i] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r \end{bmatrix} \quad (4.6-4)$$

— диагональная матрица.

Управляющие воздействия, удовлетворяющие условию (4.6—2), можно представить в виде множества

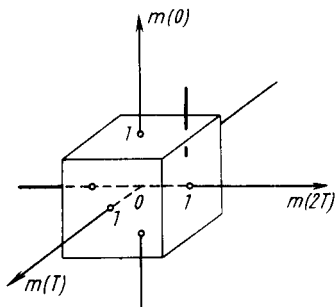
$$M = \{[m(k)] : |m(k)| \leq 1; k = 1, 2, \dots, n-1\}, \quad (4.6-5)$$

включающего все точки пространства управления, которые находятся внутри и на поверхности гиперкуба с центром, расположенным в начале координат этого пространства. Обозначение



$$M = \{[m(0), m(T)] : |m(0)| \leq 1, |m(T)| \leq 1\}$$

Рис. 4.6—2. Квадратная область насыщения в двумерном пространстве управления



$$M = \{[m(0), m(T), m(2T)] : |m(0)| \leq 1, |m(T)| \leq 1, |m(2T)| \leq 1\}$$

Рис. 4.6—3. Куб насыщения в трехмерном пространстве управления

периода прерывания T в формуле (4.6—5) для удобства записи опущено.

Для случая двумерного пространства управления управляющие воздействия, удовлетворяющие ограничительным условиям (4.6—2), можно записать в виде множества

$$M = \{[m(0), m(1)] : |m(0)| \leq 1, |m(1)| \leq 1\}, \quad (4.6-6)$$

которому принадлежат все точки плоскости в пределах единичного квадрата, показанного на рис. 4.6—2. В случае трехмерного пространства управления формула (4.6—5) принимает вид

$$M = \{[m(0), m(1), m(2)] : |m(0)| \leq 1, |m(1)| \leq 1, |m(2)| \leq 1\}, \quad (4.6-7)$$

что соответствует области пространства в пределах единичного куба с центром в начале координат, как показано на рис. 4.6—3. Множество управляющих воздействий, представленное выражением (4.6—5), образует допустимое множество. Если все требуемые воздействия $m(k)$ находятся в пределах гиперкуба, то, очевидно, насыщением можно пренебречь. В этом случае объект может быть переведен в состояние равновесия за n периодов прерывания. Если на каком-либо шаге управления требуемое воздействие превышает уровень ограничения, то этот

шаг необходимо разбить на ряд более мелких шагов, так, чтобы воздействия находились в допустимых пределах. Эти дополнительные шаги приведут, очевидно, к увеличению необходимого минимального времени, как это иллюстрируется на рис. 4.6—2 и 4.6—3 для дву- и трехмерного пространства управления. Так как большой шаг может быть разбит на мелкие бесконечным числом способов, то, следовательно, существует бесконечное число решений рассматриваемой задачи оптимального управления.

Предположим теперь, что $x(0)$ — начальное состояние, из которого объект n -го порядка, подверженный насыщению, может быть переведен в состояние равновесия за $n + q$ периодов прерывания, где $q \geq 0$. Тогда из формулы (4.5—85а) следует, что

$$\varphi(\overline{n+q}T)x(0) + \sum_{i=0}^{n+q-1} \varphi(iT)h(T)m(\overline{n+q-i-1}T) = 0, \quad (4.6-8)$$

откуда, умножая это уравнение слева на матрицу $\varphi(-\overline{n+q}T)$, находим

$$\sum_{i=0}^{p-1} s_{p-i}m(\overline{p-i-1}T) = -x(0), \quad (4.6-9)$$

где

$$s_{p-i} = \varphi(-\overline{p-i}T)h(T). \quad (4.6-10)$$

Уравнение (4.6—9) описывает гиперплоскость в пространстве управления. Если эта гиперплоскость, которую условимся называть плоскостью решений, не пересекает гиперкуб, формируемый в пространстве управления ограничениями, наложенными на управляющие воздействия, то это означает, что за желаемые $n + q$ периодов прерывания объект невозможно перевести из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия и для этого необходимо затратить $n + q + 1$ или большее число шагов. Если плоскость решений пересекает гиперкуб, то это означает, что имеется одно или бесконечное количество решений рассматриваемой задачи.

В качестве иллюстрации рассмотрим процесс второго порядка, характеризуемый схемой в переменных состояния, представленной на рис. 4.6—4. Для этого процесса из предыдущего известно, что

$$\varphi(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}; \quad h(T) = \begin{bmatrix} T-1+e^{-T} \\ 1-e^{-T} \end{bmatrix},$$

и закон оптимального управления в случае отсутствия насыщения имеет вид

$$m(0) = \frac{e^T}{T(1-e^T)} x_1(0) + \frac{T+e^T-e^{2T}}{T(1-e^T)^2} x_2(0); \quad (4.6-11)$$

$$m(T) = \frac{e^T}{T(1-e^T)} x_1(T) + \frac{T+e^T-e^{2T}}{T(1-e^T)^2} x_2(T). \quad (4.6-12)$$

Если $|m(0)| > 1$, как это иллюстрируется на рис. 4.6—5, то найденное выше решение неверно; желаемую последовательность следует в первую очередь искать в трехмерном пространстве. Если исходить из предположения, что желаемый переход

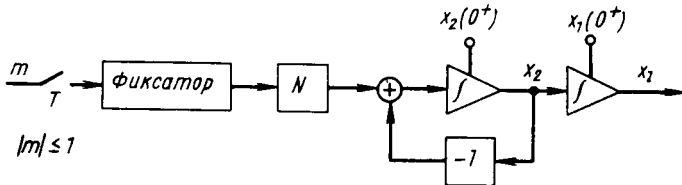


Рис. 4.6—4. Процесс второго порядка с насыщением

может быть осуществлен за три шага, то тогда с учетом формулы (4.6—9) можно записать

$$s_1 m(0) + s_2 m(T) + s_3 m(2T) = -x(0), \quad (4.6-13)$$

где

$$s_i = \varphi(-iT)h(T), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.6-14)$$

Уравнение (4.6—13) можно записать через компоненты векторов s_i в виде

$$s_{11}m(0) + s_{21}m(T) + s_{31}m(2T) = -x_1(0); \quad (4.6-15)$$

$$s_{12}m(0) + s_{22}m(T) + s_{32}m(2T) = -x_2(0). \quad (4.6-16)$$

Эти два уравнения представляют две плоскости в трехмерном пространстве управления; пересечением их является прямая линия, показанная условно на рис. 4.6—6. Эта прямая линия, которую будем называть *линией решений*, может занять положение касательной к ребру гиперкуба, «протыкать» его или же находиться вне куба. Три различных ситуации ведут к трем случаям решений: 1) единственное решение; 2) бесконечное число решений; 3) решение отсутствует. В первом случае амплитуды каких-нибудь двух либо трех воздействий $m(0)$, $m(T)$, $m(2T)$ равны 1. Во втором случае задача не имеет однозначного решения — существует бесконечное число оптимальных решений. Любая точка на отрезке линии, показанной пунктиром внут-

ри куба, представляет собой оптимальное решение. В качестве одного из многих решений в этом случае, как это легко видеть из рис. 4.6—6, можно выбрать последовательность такую, что амплитуда какого-нибудь одного воздействия $m(0)$, $m(T)$, $m(2T)$ в этой последовательности будет равна 1, а амплитуда остальных двух воздействий меньше или равна 1. Третья возможность реализуется, когда в действительности оказывается невозможным осуществить желаемый переход за три шага, т. е. исходное предположение не оправдывается. Если имеет место этот случай, то при последующем решении следует исходить из

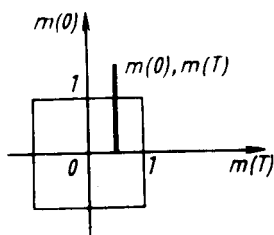


Рис. 4.6—5. Управляющее воздействие, превышающее уровень ограничения

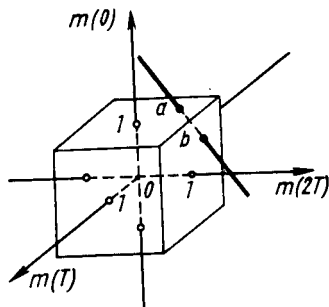


Рис. 4.6—6. Куб насыщения и векторы допустимого управления в трехмерном пространстве управления для системы второго порядка

возможности осуществления желаемого перехода за четыре шага.

Основываясь на этом предположении и используя формулу (4.6—9), получаем

$$s_1 m(0) + s_2 m(T) + s_3 m(2T) + s_4 m(3T) = -x(0), \quad (4.6-17)$$

что можно также представить в виде

$$s_{11} m(0) + s_{21} m(T) + s_{31} m(2T) + s_{41} m(3T) = -x_1(0); \quad (4.6-18)$$

$$s_{12} m(0) + s_{22} m(T) + s_{32} m(2T) + s_{42} m(3T) = -x_2(0). \quad (4.6-19)$$

Эти уравнения описывают две гиперплоскости в четырехмерном пространстве управления; пересечением их является плоскость, которую условимся называть плоскостью решений. Решение задачи зависит от положения этой плоскости относительно гиперкуба, формируемого ограничениями. Можно указать три отличительных случая в положении этой плоскости, которые ведут к трем различным случаям решения, аналогичным

описанным выше. Во втором случае среди множества оптимальных решений всегда существует решение, когда в последовательности $m(0), m(T), m(2T), m(3T)$ амплитуды по крайней мере двух воздействий равны 1, а остальных двух — меньше или равны 1.

Рассмотрим теперь общую процедуру решения. Можно показать [142], что если $(n + q)$ — минимальное число шагов ($q \geq 0$), за которое дискретная система с насыщением может быть переведена из заданного начального состояния в состояние равновесия, то множество оптимальных решений включает подмножество решений, обладающих тем свойством, что, по крайней мере, q из $n + q$ воздействий в последовательности $\{m(kT)\}$ имеют предельную амплитуду, а остальные n воздействий — меньше предельной. Очень часто первые q из $n + q$ воздействий последовательности $\{m(kT)\}$ имеют предельную амплитуду. Существование описанного выше подмножества оптимальных решений значительно облегчает поиск оптимальной стратегии управления. Решение может быть найдено при использовании описанного свойства оптимальных стратегий на основе методов, развитых в параграфе 4.5. Это свойство позволяет свести решение рассматриваемой задачи к определению q предельных воздействий, так как если эти воздействия найдены, то остальные воздействия могут быть определены путем решения системы n алгебраических уравнений, эквивалентных уравнению (4.6—8), которое можно представить в виде

$$f_{n+q}[\mathbf{x}(0), m(0), m(T), \dots, m(n+q-1 T)] = 0. \quad (4.6-20)$$

При отыскании оптимального по быстродействию управления следует также учитывать существование допустимой управляющей последовательности, в которой предельными являются q первых воздействий, а остальные воздействия не превосходят уровень ограничения.

Предположим теперь, что для заданного объекта n -го порядка с насыщением можно указать последовательность воздействий, переводящих объект в состояние равновесия за $n + q$ периодов прерывания, где $q \geq 0$. Тогда $n + q$ воздействий этой последовательности будут удовлетворять системе следующих n линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+q-1} a_{1i} m_i &= \alpha_{10}; \\ \sum_{i=0}^{n+q-1} a_{2i} m_i &= \alpha_{20}; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (4.6-21)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+q-1} a_{ki} m_i &= \alpha_{k0}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \sum_{i=0}^{n+q-1} a_{ni} m_i &= \alpha_{n0}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6-21)$$

где a_{ki} и α_{k0} — известные константы. Эти уравнения следуют из уравнения (4.6—9) после подстановки соответствующих величин и каждое из них описывает $(n+q)$ -мерную гиперплоскость. Результатом пересечения этих плоскостей является $(q+1)$ -мерная плоскость решений, пересекающаяся с $(n+q)$ -мерным гиперкубом ограничений. Если плоскость решений пересекает гиперкуб по направлению m_j , то воздействие $m(j)$ можно положить равным 1.

Предельные воздействия могут быть найдены из рассмотрения взаимного пересечения плоскости решений и гиперкуба, который можно охарактеризовать следующими неравенствами:

$$-1 \leq m_i \leq 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n+q. \quad (4.6-22a)$$

Эти возможные предельные воздействия могут быть, следовательно, определены путем решения уравнений (4.6—21) при ограничениях (4.6—22a). Решение этих уравнений можно облегчить, если ограничения (4.6—22a) представить в следующей форме:

$$0 \leq m'_i \leq 2, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n+q, \quad (4.6-22b)$$

где

$$m_i = m'_i - 1. \quad (4.6-23)$$

Один из способов нахождения возможных предельных воздействий состоит в замене неравенств (4.6—22a) равенствами вида

$$m'_i + m'_{i0} = 2, \quad (4.6-24)$$

где m'_{i0} — переменная величина, играющая роль дополнения, значения которой заключены между 0 и 2. Тогда нахождение возможных предельных воздействий сводится к решению уравнений (4.6—21) совместно с равенством (4.6—24). Путем несложных преобразований найденную последовательность воздействий можно далее превратить в закон управления, как это иллюстрируется в примере 4.6—1.

Достоинством рассмотренного итерационного метода расчета оптимальных по быстродействию дискретных систем с насыщением является его простота и удобство применения. Расчет системы сводится к выполнению последовательных итераций.

В начале этого процесса, полагая $q = 0$ в формуле (4.6—21), проверяем наличие превышения уровня ограничения; если при этом будет обнаружено одно превышение, то, полагая $q = 1$, переходим к следующей итерации и находим это предельное воздействие. Если же по-прежнему одно из найденных при второй итерации воздействий превышает уровень ограничения, то, полагая $q = 2$ в формуле (4.6—21), переходим к следующей итерации и определяем два предельных воздействия. Если теперь найденные из равенства (4.6—21) управляющие воздействия все находятся в требуемых пределах, то итерационный процесс можно считать законченным, т. е. искомую последовательность найденной. Если же по-прежнему имеет место превышение уровня ограничения, то, полагая $q = 3$ в формуле (4.6—21), переходим к следующей итерации, и т. д. Осуществление этого процесса не связано с наложением каких-либо ограничений на порядок объекта, расположение полюсов его передаточной функции, количество входов, если только удовлетворены условия управляемости. Для относительно простых систем обычно не представляет большого труда все необходимые вычисления произвести вручную. Для сложных систем предпочтительно, используя описанный выше метод расчета, составить программу для цифровой вычислительной машины и автоматизировать решение задачи.

Пример 4.6—1. Дискретная система с насыщением

Рассмотрим управление процессом с насыщением, описываемым схемой в переменных состояния рис. 4.6—4. Пусть начальные условия равны $x_1(0) = 10$ и $x_2(0) = -12$; период прерывания равен 1 сек; на управляющие воздействия наложено ограничение $|m| \leq 1$. Требуется найти оптимальную управляющую последовательность $\{m^0\}$, переводящую процесс из начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия за минимальное число периодов прерывания.

Расчет начинается с определения матриц перехода $\Phi(\lambda)$ и $h(\lambda)$. Из рассмотрения схемы, представленной на рис. 4.6—4, находим, что

$$\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-\lambda} \\ 0 & e^{-\lambda} \end{bmatrix}; \quad h(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 + e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} \end{bmatrix}.$$

Так как $T = 1$ сек и

$$x(2T) = \Phi(2T)x(0) + \Phi(T)h(T)m_0 + h(T)m_1,$$

то

$$x(0) = \Phi(2T)x(2T) + \begin{bmatrix} 0,722m_0 + 3,68m_1 \\ -1,72m_0 - 4,68m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -12 \end{bmatrix},$$

где $m_0 = m(0)$ и $m_1 = m(T)$.

Для случая отсутствия насыщения, полагая $x(2T) = 0$, вектор искомого управления находим в виде

$$\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,89 \\ 2,89 \end{bmatrix}.$$

Так как $m_1 > 1$, система не может быть переведена в нулевое состояние за два периода прерывания. Предположим, что это можно сделать за три периода прерывания. Тогда запишем

$$\varphi(3T) x(0) + \varphi(2T) h(T) m_0 + \varphi(T) h(T) m_1 + h(T) m_2 = 0.$$

Подставив соответствующие выражения и проведя упрощения, найдем

$$0,722m_0 + 3,68m_1 + 11,68m_2 = 10;$$

$$1,72m_0 + 4,68m_1 + 12,68m_2 = 12.$$

Применив подстановку $m_i = m'_i - 1$, предыдущие уравнения перепишем в виде

$$0,722m'_0 + 3,68m'_1 + 11,68m'_2 = 26,13;$$

$$1,72m'_0 + 4,68m'_1 + 12,68m'_2 = 31,10.$$

Решая эти два уравнения относительно m'_1 и m'_2 , находим

$$m'_1 = 4,02 - 1,35m'_0;$$

$$m'_2 = 0,962 + 0,36m'_0.$$

Так как $0 \leq (m'_1, m'_2) \leq 2$, то

$$1,49 \leq m'_0 \leq 2,98 \quad \text{или} \quad -2,67 \leq m'_0 \leq 2,88.$$

Так как $0 \leq m'_0 \leq 2$, то из предыдущих неравенств находим

$$1,49 \leq m'_0 \leq 2 \quad \text{или} \quad 0,49 \leq m_0 \leq 1.$$

Это означает, что m_0 можно положить равным 1. Аналогичным образом находим, что

$$0,32 \leq m_1 \leq 1 \quad \text{и} \quad 0,50 \leq m_2 \leq 0,68.$$

Отсюда заключаем, что воздействие m_1 можно также положить равным 1. Этими неравенствами описывается пересечение плоскости решений с единичным кубом. Система может быть переведена в нулевое состояние за три периода прерывания. Выбор $m_0 = 1$ дает оптимальную управляющую последовательность в виде

$$\{m^0\} = \{1; 0,337; 0,683\}.$$

Полагая $m_1 = 1$, находим следующую оптимальную управляющую последовательность:

$$\{m^0\} = \{0,506; 1; 0,504\}.$$

Пусть теперь начальные условия $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

Найдем теперь минимальное число периодов прерывания, необходимое для перемещения объекта из заданного начального в нулевое состояние, и оптимальную управляющую последовательность $\{m^0\}$.

Так как $T = 1$ сек, то

$$x(2T) = \begin{bmatrix} 1,865 + 0,767m_0 + 0,368m_1 \\ 0,135 + 0,233m_0 + 0,632m_1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что если бы можно было пренебречь насыщением, то система могла быть переведена в состояние равновесия за два периода прерывания. Для этого случая, полагая $x(2T) = 0$, находим следующее потребное значение вектора управления:

$$\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,8296 \\ 0,8296 \end{bmatrix}.$$

Но так как $m_0 < -1$, то систему, очевидно, невозможно перевести в желаемое состояние за два периода прерывания.

Предположим теперь, что этот переход может быть совершен за три периода прерывания. Это ведет к уравнению

$$\varphi(3T)x(0) + \varphi(2T)h(T)m_0 + \varphi(T)h(T)m_1 + h(T)m_2 = 0$$

или

$$\begin{aligned} 0,722m_0 + 3,68m_1 + 11,73m_2 &= 1; \\ -1,72m_0 - 4,68m_1 - 12,70m_2 &= 1, \end{aligned}$$

где $m_2 = m(2T)$. Применяв подстановку $m_i = m'_i - 1$, находим

$$\begin{aligned} 0,722m'_0 + 3,68m'_1 + 11,73m'_2 &= 17,13; \\ 1,72m'_0 + 4,68m'_1 + 12,70m'_2 &= 18,10. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} m'_1 &= -0,723 - 1,33m'_0; \\ m'_2 &= 1,66 + 0,36m'_0. \end{aligned}$$

Эти два уравнения показывают, что плоскость решений и гиперкуб не пересекаются. Отсюда заключаем, что система при заданном уровне ограничения не может быть переведена в состояние равновесия за три периода прерывания.

Перейдем к следующей итерации. Предположим, что объект может быть переведен в нулевое состояние за четыре шага, т. е. $q = 2$. Это означает, что

$$\begin{aligned} \varphi(4T)x(0) + \varphi(3T)h(T)m_0 + \varphi(2T)h(T)m_1 + \\ + \varphi(T)h(T)m_2 + h(T)m_3 = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 0,722m_0 + 3,68m_1 + 11,73m_2 + 33,5m_3 &= 1; \\ -1,72m_0 - 4,68m_1 - 12,70m_2 - 34,5m_3 &= 1. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, заключаем, что плоскость решений пересекает гиперкуб по направлениям $-m_0$ и $-m_1$ и, следовательно, воздействия m_0 и m_1 можно выбрать равными -1 . При таком выборе последние два уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} 11,72m_2 + 33,6m_3 - 5,402 &= 0; \\ 12,70m_2 + 34,8m_3 - 5,400 &= 0; \end{aligned}$$

Решая эти два уравнения относительно m_2 и m_3 , получаем

$$m_2 = -0,2439 \quad \text{и} \quad m_3 = 0,2459.$$

Отсюда заключаем, что из заданного начального состояния $x_1(0) = 1$ и $x_2(0) = 1$ в состояние равновесия систему действительно можно перевести за четыре шага. Оптимальная управляющая последовательность имеет вид

$$\{m_0\} = \{-1; -1; -0,2439; 0,2459\}.$$

С целью механизации вычисления найденной последовательности выразим управляющие воздействия через координаты состояния системы. Пусть закон оптимального управления имеет вид

$$m(2T) = \beta_1 x_1(2T) + \beta_2 x_2(2T);$$

$$m(3T) = \beta_1 x_1(3T) + \beta_2 x_2(3T).$$

Подставив значения соответствующих величин, перепишем эти уравнения в следующей матричной форме:

$$\begin{bmatrix} -0,2439 \\ 0,2459 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,730 & -0,730 \\ 0,176 & -0,422 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим $\beta_1 = -1,582$ и $\beta_2 = -1,243$. Закон оптимального управления представим в виде

$$m^0(kT) = \beta x(kT), \quad |m| \leq 1,$$

где β — матрица обратной связи,

$$\beta = [-1,582; -1,243].$$

Схема оптимальной системы изображена на рис. 4.6—7. Было проведено моделирование этой системы на аналоговой вычислительной машине согласно

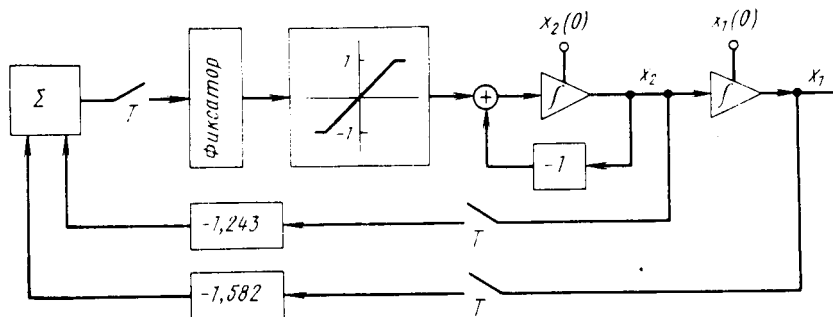


Рис. 4.6—7. Схема нелинейной дискретной системы, оптимальной по быстродействию

рис. 4.6—8. Кривые переходных процессов, приведенные на рис. 4.6—9, свидетельствуют о том, что заданные начальные условия, действительно, обрабатываются за время, равное четырем периодам прерывания, если управляющие воздействия формируются в соответствии с найденным выше законом оптимального управления. Выброс на второй кривой рис. 4.6—9 объясняется несовершенством схемы прерывателя, а также схемы ограничения амплитуды сигнала.

Аналогично предыдущему можно показать, что плоскость решений пересекает гиперкуб по направлениям $-m_1$ и $-m_2$, и, следовательно, воздействия m_1 и m_2 могут быть также выбраны равными -1 . Отсюда, полагая $m_1 = -1$ и $m_2 = -1$, находим

$$1,45m_0 - 2,75m_3 + 2,08 = 0;$$

$$0,50m_0 - 3,75m_3 + 2,60 = 0.$$

Решая эти два уравнения относительно m_0 и m_3 , получаем

$$m_0 = -0,161 \quad \text{и} \quad m_3 = 0,677.$$

Оптимальную управляющую последовательность находим в виде
 $\{m^0\} = \{-0,161; -1; -1; 0,677\}$.

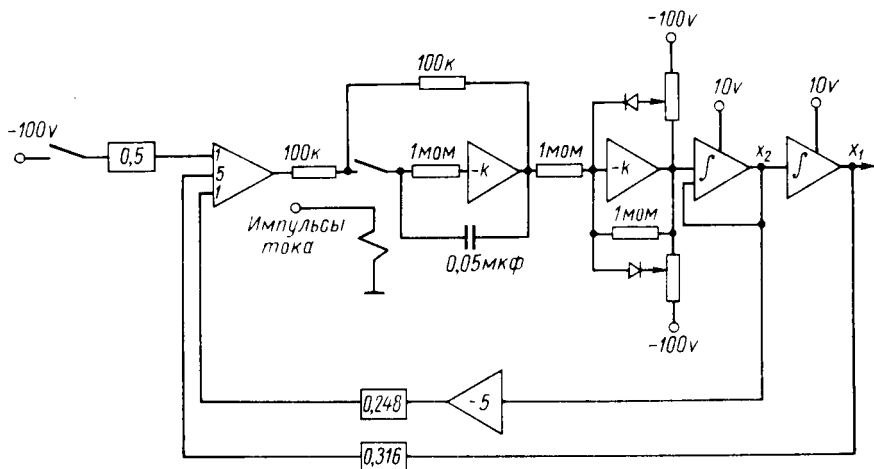


Рис. 4.6—8. Схема для аналогового моделирования

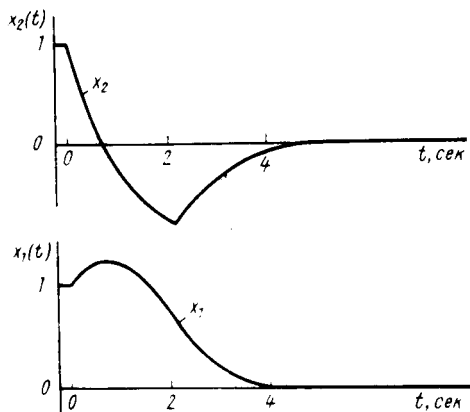


Рис. 4.6—9. Переходные процессы в системе с насыщением при начальных условиях $x_1(0) = 1$ и $x_2(0) = 1$

Для удобства сравнения полученные выше результаты запишем следующим образом

Начальное состояние	Оптимальная управляющая последовательность
$(10, -12)$	$\{1; 0,337; 0,683\} \{0,506; 1; 0,504\}$
$(1, 1)$	$\{-1; -1; -0,244; 0,246\} \{-0,161; -1; -1; 0,677\}$

4.7. ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЕ В НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ

Важной разновидностью оптимальных систем являются системы, оптимальные по быстрдействию. Многие производственные процессы могли бы протекать значительно эффективнее, если бы этапы пуска, выключения, переключение режимов выполнялись по оптимальным программам, позволяющим минимизировать их длительность. Другим примером может служить система регулирования глубины погружения подводной лодки, которая должна обеспечить получение минимальных длительностей перехода лодки от одной глубины к другой с учетом предельных расходов и скоростей отклонений рулей, а также максимального угла подъема.

Проблеме оптимального по времени управления непрерывными процессами было уделено значительное внимание в прошедшем десятилетии. Ее можно сформулировать следующим образом: для заданной системы n -го порядка, описываемой вектором состояния, удовлетворяющим дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{m}(t), t], \quad (4.7-1)$$

где $\mathbf{m}(t)$ — r -мерный вектор управления, принадлежащий замкнутой области пространства управления;

$$\mathbf{m} \in \Omega,$$

определить вектор допустимого управления $\mathbf{m}(t)$, при котором система из заданного начального состояния $\mathbf{x}(0)$ переводится в желаемое состояние $\mathbf{x}^d(t)$ за минимальное время. Под вектором допустимого управления понимается вектор, принадлежащий области Ω , для которого уравнение (4.7-1) имеет решение.

В настоящем параграфе рассматривается оптимальное по времени управление линейными системами, описываемыми векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{m}(t), \quad (4.7-2)$$

в котором на вектор управления $\mathbf{m}(t)$ наложены ограничения вида $|m_i| \leq 1$. В этом уравнении сохранены все прежние обозначения. Требуется определить вектор управления $\mathbf{m}^0(t)$, перемещающего систему из начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в желаемое конечное состояние $\mathbf{x}^d(t_f)$ за минимальное время. Эта проблема длительное время привлекала внимание многих ученых. Впервые эту проблему, исходя из интуитивных представлений, рассмотрел Мак-Дональд в 1950 г.*. Позднее математическую сто-

* В СССР первая работа по этому направлению была Фельдбаума А. А. Простейшие релейные системы автоматического регулирования. «Автоматика и телемеханика», 1949, т. 10, № 4, стр. 249—266. (Прим. ред.).

рону проблемы изучал Бушоу, уделивший особое внимание автономным системам второго порядка. Беллман и др. первыми доказали основную теорему об управлении, оптимальном по времени. Существо этой теоремы сводится к следующим утверждениям.

1. Если существует регулятор для системы управления, описываемой уравнением (4.7—2), оптимальный в смысле критерия

$$\min_{\substack{m \in \mathbf{a} \\ t_f \in (0, \infty)}} \int_0^{t_f} dt, \quad (4.7—3)$$

то последний может быть только регулятором релейного типа.

2. Если в уравнении (4.7—2) матрица \mathbf{A} такова, что все ее элементы суть константы, а собственные значения являются действительными и различными числами, то каждая компонента вектора оптимального управления $\mathbf{m}^0(t)$ изменяет свой знак самое большее $n - 1$ раз в интервале времени $(0, t_f)$.

Решение уравнения (4.7—2) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\varphi}(t, \tau)\mathbf{D}(\tau)\mathbf{m}(\tau)d\tau, \quad (4.7—4)$$

где $\boldsymbol{\varphi}(t, \tau)$ — матрица перехода системы.

В момент окончания перехода $t = t_f$ вектор конечного состояния системы определяется выражением

$$\mathbf{x}_d(t_f) = \mathbf{x}(t_f) = \boldsymbol{\varphi}(t_f)\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_f} \boldsymbol{\varphi}(t_f, \tau)\mathbf{D}(\tau)\mathbf{m}(\tau)d\tau. \quad (4.7—5)$$

Умножая обе части уравнения (4.7—5) на матрицу $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(t_f)$ и совершая элементарные преобразования, получаем

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}(t_f)\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}(0) = \int_0^{t_f} \boldsymbol{\varphi}^{-1}(t_f)\boldsymbol{\varphi}(t_f, \tau)\mathbf{D}(\tau)\mathbf{m}(\tau)d\tau. \quad (4.7—6)$$

Это выражение можно представить также в виде

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\varphi}^{-1}(0) - \mathbf{I}]\mathbf{x}(0) &= \int_0^{t_f} \{ \boldsymbol{\varphi}^{-1}(t_f)\boldsymbol{\varphi}(t_f, \tau)\mathbf{D}(\tau)\mathbf{m}(\tau) - \\ &\quad - \frac{d}{d\tau} [\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\tau)\mathbf{x}(\tau)] \} d\tau, \end{aligned} \quad (4.7—7)$$

так как

$$- \int_0^{t_f} \frac{d}{d\tau} [\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\tau)\mathbf{x}(\tau)] d\tau = \boldsymbol{\varphi}^{-1}(0)\mathbf{x}(0) - \boldsymbol{\varphi}^{-1}(t_f)\mathbf{x}(t_f). \quad (4.7—8)$$

Уравнение (4.7—7) можно рассматривать в качестве ограничения, накладываемого на начальное состояние $x(0)$, которое может быть присоединено к формуле (4.7—3) для осуществления процесса минимизации.

Введя множитель Лагранжа μ , сведем задачу к нахождению

$$\min_{\substack{m \in \Omega \\ t_f \in (0, \infty)}} \int_0^{t_f} (1 - \mu \{ \varphi^{-1}(t_f) \varphi(t_f, \tau) \mathbf{D}(\tau) \mathbf{m}(\tau) - \\ - \frac{d}{d\tau} [\varphi^{-1}(\tau) \mathbf{x}(\tau)] \}) d\tau. \quad (4.7-9)$$

Анализ этого выражения показывает, что для $m \in \Omega$ минимум имеет место, когда величина

$$\mu \varphi^{-1}(t_f) \varphi(t_f, \tau) \mathbf{D}(\tau) \mathbf{m}(\tau) > 0.$$

Отсюда приходим к соотношению

$$\mathbf{m}(\tau) = \text{sgn } \mathbf{S}(\tau), \quad (4.7-10)$$

где sgn означает «взять со знаком ...». Здесь функция переключения $\mathbf{S}(\tau)$ есть матрица размера $r \times 1$, определяемая выражением

$$\mathbf{S}(\tau) = [\varphi^{-1}(t_f) \varphi(t_f, \tau) \mathbf{D}(\tau)]' \mathbf{c}, \quad (4.7-11)$$

или

$$\mathbf{S}(\tau) = \mathbf{D}'(\tau) [\varphi^{-1}(t_f) \varphi(t_f, \tau)]' \mathbf{c}, \quad (4.7-12)$$

где \mathbf{c} — матрица-столбец размера $n \times 1$.

Если k -й элемент матрицы $\mathbf{S}(\tau)$ является положительной величиной, то $m_k(\tau)$ — воздействие положительной полярности; если он равен нулю, то $m_k(\tau) = 0$; если этот элемент — отрицательная величина, то $m_k(\tau)$ — воздействие отрицательной полярности. Полярность воздействий меняется согласно поведению функции переключения $\mathbf{S}(\tau)$.

Можно далее показать, что минимум выражения (4.7—9) при ограничениях вида $|m_i| \leq 1$ достигается, когда $|m_i| = 1$. Вышеприведенный анализ показывает, что для обеспечения оптимального по времени управления системой управляющие воздействия следует выбирать с предельными амплитудами и полярностью, определяемой законом функции переключения $\mathbf{S}(\tau)$. Другими словами, управление, оптимальное по быстродействию, является управлением релейного типа.

Если матрица коэффициентов \mathbf{A} системы не зависит от времени, то

$$\mathbf{S}(\tau) = \mathbf{D}'(\tau) \varphi'(-\tau) \mathbf{c}, \quad (4.7-13)$$

где

$$\varphi'(-\tau) = e^{-\mathbf{A}\tau}. \quad (4.7-14)$$

Если матрица \mathbf{A} имеет действительные и различные собственные значения, то каждую компоненту транспонированной матрицы перехода, определяемой выражением (4.7-14), можно представить в виде суммы экспонент типа $e^{\alpha_i \tau}$. Следовательно, j -ю компоненту функции переключения можно записать в виде

$$s_j(\tau) = \sum_{i=1}^n c_i d_{ij} e^{\alpha_i \tau}, \quad (4.7-15)$$

где c_i и d_{ij} — элементы матриц \mathbf{c} и \mathbf{D} соответственно.

Так как правая часть уравнения (4.7-15), если она не равна тождественно нулю, может иметь самое большее $n - 1$ действительных корней, то отсюда заключаем, что управляющее воздействие $m_j(\tau)$ может изменить свою полярность самое большее $n - 1$ раз.

Ранее отмечалось, что оптимальное по времени управление является управлением релейного типа. Оптимальный регулятор вырабатывает всегда максимальное воздействие одной или противоположной полярности. Расчет такой оптимальной системы состоит главным образом в определении и механизации вычисления поверхности переключения. Систему принято называть нормальной, если ни одна из компонент функции переключения не равна тождественно нулю в каком-либо интервале времени положительной длины. Можно показать, что для нормальной системы существует одно единственное оптимальное управление и оно является релейным.

Произведем теперь расчет оптимального по времени управления для системы второго порядка, описываемой уравнением (4.7-2), в котором матрица коэффициентов и матрица управления имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad (4.7-16)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.7-17)$$

Собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы \mathbf{A} предполагаем действительными и различными. Ограничения, наложенные на вектор управления, имеют вид $|m_i| \leq 1$. Требуется найти управление, при котором система перемещается из заданного начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в состояние равновесия $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ за минимальное время.

Вначале находим матрицу перехода системы

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{-\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{bmatrix}. \quad (4.7-18)$$

Вектор состояния $x(t)$ определяется выражением

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) Dm(\tau) d\tau. \quad (4.7-19)$$

Отсюда находим вектор начального состояния

$$x(0) = \Phi(-t)x(t) - \int_0^t \Phi(-\tau) Dm(\tau) d\tau. \quad (4.7-20)$$

Так как при $t = t_f$ $x(t_f) = 0$, то

$$x(0) = - \int_0^{t_f} \Phi(-\tau) Dm(\tau) d\tau. \quad (4.7-21)$$

Отсюда компоненты вектора начального состояния

$$x_1(0) = \int_0^{t_f} \left[\frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau}}{\lambda_1 - \lambda_2} d_{11} m_1(\tau) + \frac{e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}}{\lambda_1 - \lambda_2} d_{22} m_2(\tau) \right] d\tau; \quad (4.7-22)$$

$$x_2(0) = \int_0^{t_f} \left[\frac{-\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau})}{\lambda_1 - \lambda_2} d_{11} m_1(\tau) - \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau}}{\lambda_1 - \lambda_2} d_{22} m_2(\tau) \right] d\tau, \quad (4.7-23)$$

где m_1 и m_2 — составляющие вектора управления m .

Перейдем теперь к определению функции переключения, минимизирующей время перехода t_f . Чтобы упростить все последующие преобразования, векторы состояния будем в дальнейшем представлять в канонической форме. Пусть векторы состояния системы, заданные в двух различных базисах, связаны соотношением

$$x = Ty. \quad (4.7-24)$$

или

$$y = T^{-1}x. \quad (4.7-25)$$

Как было показано в параграфе 2.3, преобразующая матрица Γ имеет в качестве своих столбцов собственные векторы матрицы A . Отсюда находим

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{bmatrix}; \quad (4.7-26a)$$

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} -\lambda_2 & -1 \\ \lambda_1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.7-26b)$$

Вектор состояния можно теперь записать в следующей канонической форме:

$$y(t) = e^{\Lambda t} y(0) + \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} \Gamma^{-1} D m(\tau) d\tau, \quad (4.7-27)$$

где

$$\Lambda = \Gamma^{-1} A \Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (4.7-28)$$

Таким образом, находим новый вектор начального состояния

$$y(0) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} -\lambda_2 & -1 \\ \lambda_1 & 1 \end{bmatrix} x(0) \quad (4.7-29)$$

и его компоненты

$$y_1(0) = \frac{-[\lambda_2 x_1(0) + x_2(0)]}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad (4.7-30)$$

$$y_2(0) = \frac{\lambda_1 x_1(0) + x_2(0)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (4.7-31)$$

Подставив выражения (4.7-22) и (4.7-23) в уравнения (4.7-30) и (4.7-31) и произведя упрощения, получим

$$y_1(0) = \int_0^{t_f} \frac{e^{-\lambda_1 \tau}}{\lambda_1 - \lambda_2} [d_{22} m_2(\tau) + \lambda_2 d_{11} m_1(\tau)] d\tau; \quad (4.7-32)$$

$$y_2(0) = - \int_0^{t_f} \frac{e^{-\lambda_2 \tau}}{\lambda_1 - \lambda_2} [d_{22} m_2(\tau) + \lambda_1 d_{11} m_1(\tau)] d\tau. \quad (4.7-33)$$

В системе управления второго порядка управляющие воздействия могут изменить свою полярность один раз в интервале $(0, t_j)$. Это утверждение вытекает из сформулированной выше теоремы об оптимальном по быстродействию управлению. Пусть, например, m_1 изменяет свою полярность в момент t_1 и m_2 в момент t_2 .

Тогда уравнения (4.7—32) и (4.7—33) принимают вид

$$y_1(0) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \int_0^{t_1} e^{-\lambda_1 \tau} \lambda_2 d_{11} m_1(\tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_f} e^{-\lambda_1 \tau} \lambda_2 d_{11} m_1(\tau) d\tau + \int_0^{t_2} e^{-\lambda_1 \tau} d_{22} m_2(\tau) d\tau - \int_{t_2}^{t_f} e^{-\lambda_1 \tau} d_{22} m_2(\tau) d\tau \right\}; \quad (4.7-34)$$

$$y_2(0) = \frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \int_0^{t_1} e^{-\lambda_2 \tau} \lambda_1 d_{11} m_1(\tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_f} e^{-\lambda_2 \tau} \lambda_1 d_{11} m_1(\tau) d\tau + \int_0^{t_2} e^{-\lambda_2 \tau} d_{22} m_2(\tau) d\tau - \int_{t_2}^{t_f} e^{-\lambda_2 \tau} d_{22} m_2(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.7-35)$$

Произведя интегрирование в предположении, что полярности воздействий m_1 и m_2 таковы, что $m_1 = 1$ для $0 < t < t_1$ и $m_2 = 1$ для $0 < t < t_2$, получим

$$y_1(0) = \frac{-1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \{ 2\lambda_2 d_{11} e^{-\lambda_1 t_1} + 2d_{22} e^{-\lambda_1 t_2} - (\lambda_2 d_{11} + d_{22})(1 + e^{-\lambda_1 t_f}) \}; \quad (4.7-36)$$

$$y_2(0) = \frac{1}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \{ 2\lambda_1 d_{11} e^{-\lambda_2 t_1} + 2d_{22} \times \times e^{-\lambda_2 t_2} - (\lambda_1 d_{11} + d_{22})(1 + e^{-\lambda_2 t_f}) \}. \quad (4.7-37)$$

Решая эти уравнения относительно t_f , находим

$$t_f = P_1(t_1, t_2) = \ln \left[\frac{2\lambda_2 d_{11} e^{-\lambda_1 t_1} + 2d_{22} e^{-\lambda_1 t_2} + \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) y_1(0)}{d_{22} + \lambda_2 d_{11}} - 1 \right]^{\frac{1}{\lambda_1}}, \quad (4.7-38)$$

где

$$d_{22} + \lambda_2 d_{11} \neq 0$$

и

$$t_f = P_2(t_1, t_2) = \ln \left[\frac{2\lambda_1 d_{11} e^{\lambda_2 t_1} + 2d_{22} e^{-\lambda_2 t_2} - \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) y_2(0)}{d_{22} + \lambda_1 d_{11}} - 1 \right]^{\frac{1}{\lambda_2}}, \quad (4.7-39)$$

где $d_{22} + \lambda_1 d_{11} \neq 0$.

Так как полярность воздействий может измениться один раз в интервале $(0, t_f)$, то, следовательно, $m_1 = -1$ для $t_1 < t < t_f$ и $m_2 = -1$ для $t_2 < t < t_f$.

Наша задача теперь состоит в минимизации $P_1(t_1, t_2)$ или $P_2(t_1, t_2)$ с учетом ограничения

$$Q(t_1, t_2) = P_1(t_1, t_2) - P_2(t_1, t_2) = 0. \quad (4.7-40)$$

Для решения этой задачи применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Следуя этому методу, составим промежуточную функцию

$$F(t_1, t_2, \mu) = P_1(t_1, t_2) + \mu Q(t_1, t_2). \quad (4.7-41)$$

Приравнивая нулю соответствующие частные производные этой функции, приходим к уравнениям

$$\frac{dF}{dt_1} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial t_2} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0, \quad (4.7-42)$$

из которых могут быть найдены время переключения t_1 и t_2 и множитель μ Лагранжа. Можно показать, что моменты времени t_1 и t_2 связаны соотношением

$$\lambda_2 e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t_1} = \lambda_1 e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t_2}. \quad (4.7-43)$$

Уравнения (4.7-40) и (4.7-43) определяют искомые моменты переключения t_1 и t_2 , а подстановка этих значений в формулы (4.7-39) или (4.7-40) позволяет найти полное время перехода t_f . Отсюда находим, что управление является оптимальным, если воздействие m_1 равно $+1$ в интервале $(0, t_1)$ и равно -1 в интервале (t_1, t_f) , и если воздействие m_2 равно $+1$ в интервале $(0, t_2)$ и равно -1 в интервале (t_2, t_f) .

Описанная процедура расчета может быть распространена и на системы n -го порядка. В этом общем случае управляющее воздействие $m_i(t)$ может изменить свою полярность $n - 1$ раз в интервале $(0, t_f)$ и полное время перехода t_f является некоторой функцией моментов переключения. Можно записать, что

$$t_f = P_1(t_1, t_2, \dots, t_N) = P_2(t_1, t_2, \dots, t_N) = \dots = P_r(t_1, t_2, \dots, t_N). \quad (4.7-44)$$

Здесь предполагается, что вектор управления m является r -мерным вектором. Легко видеть, что $N = r(n - 1)$. Уравнения связи $Q_j(t_1, t_2, \dots, t_N) = 0$ можно получить, образовав разности двух различных P -функций. Промежуточную функцию составим в виде

$$F(t_1, t_2, \dots, t_N; \mu_1; \mu_2, \dots, \mu_{r-1}) = \sum_k P_k + \sum_l \mu_l Q_l. \quad (4.7-45)$$

Следуя известным из дифференциального исчисления правилам минимизации, находим частные производные этой функции и приравниваем их нулю. В результате приходим к системе уравнений, из которых могут быть найдены искомые моменты переключения и время перехода.

Описанная процедура расчета позволяет свести решение рассматриваемой задачи к известной из дифференциального исчисления задаче минимизации некоторой функции при помощи неопределенных множителей Лагранжа. В случае систем высокого порядка эта процедура делает необходимым решение сложных трансцендентных уравнений. В том случае, когда управление производится сразу по нескольким входам, могут возникнуть также затруднения с выбором начальных знаков воздействий. Эти затруднения можно отчасти преодолеть, учитывая условия работы системы и характер наложенных ограничений. Следует заметить, что методы расчета оптимальных дискретных систем, описанные в предыдущем параграфе, могут быть применены к непрерывным системам, если рассматриваются дискретные модели этих систем. Выбор величины периода прерывания в этом случае определяется условиями высокой точности дискретной аппроксимации. Оптимальное по времени управление можно также синтезировать при использовании методов вариационного исчисления, принципа максимума, динамического программирования, как это излагается в следующих главах книги.

Пример 4.7—1. Оптимальное по времени управление системой второго порядка

Рассмотрим систему второго порядка, описываемую уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dm(t),$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Управляющие воздействия будем считать ограниченными по амплитуде таким образом, что $|m_i| \leq 1$. Требуется найти управление, перемещающее систему из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия $x(t_f) = 0$ за минимальное время. Предполагаем, что начальное состояние системы $x(0) = [1 \ 1]'$.

Собственные значения матрицы A равны $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -2$. Из уравнений (4.7—22) и (4.7—23) находим

$$x_1(0) = - \int_0^{t_f} \{ (2e^\tau - e^{2\tau}) m_1(\tau) - (e^\tau - e^{2\tau}) m_2(\tau) \} d\tau;$$

$$x_2(0) = - \int_0^{t_f} \{ 2(e^\tau - e^{2\tau}) m_1(\tau) - (e^\tau - 2e^{2\tau}) m_2(\tau) \} d\tau.$$

Из уравнений (4.7—32) и (4.7—33) следует, что

$$y_1(0) = - \int_0^{t_f} [2m_1(\tau) - m_2(\tau)] e^{\tau} d\tau;$$

$$y_2(0) = \int_0^{t_f} [m_1(\tau) - m_2(\tau)] e^{2\tau} d\tau.$$

Выбрав $m_1 = 1$ для $0 < t < t_1$ и $m_2 = -1$ для $0 < t < t_2$, начальные координаты $y_1(0)$ и $y_2(0)$ запишем в виде

$$y_1(0) = -4e^{t_1} - 2e^{t_2} + 3e^{t_f} + 3;$$

$$y_2(0) = e^{2t_1} + e^{2t_2} - e^{2t_f} - 1.$$

Решая эти уравнения относительно t_f , получаем

$$t_f = P_1(t_1, t_2) = \ln \frac{1}{3} [y_1(0) + 4e^{t_1} + 2e^{t_2} - 3]$$

и

$$t_f = P_2(t_1, t_2) = \ln [-y_2(0) + e^{2t_1} + e^{2t_2} - 1]^{\frac{1}{2}}.$$

Промежуточную функцию составляем в виде

$$F(t_1, t_2, \mu) = (1 + \mu) \ln \frac{y_1(0) + 4e^{t_1} + 2e^{t_2} - 3}{3} - \frac{\mu}{2} \ln [-y_2(0) + e^{2t_1} + e^{2t_2} - 1].$$

Из уравнений $\frac{\partial F}{\partial t_1} = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial t_2} = 0$ находим, что величины t_1 и t_2 связаны соотношением

$$e^{t_1} = 2e^{t_2}.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением

$$P_1(t_1, t_2) = P_2(t_1, t_2)$$

для начальных условий $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ или $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, получаем $t_1 = 4,31$ и $t_2 = 3,61$.

Подставляя эти значения t_1 и t_2 в любое выражение для t_f , находим, что $t_f = 4,81$.

Следует заметить, что величину m_2 для интервала $0 < t < t_2$ нельзя сделать равной 1, так как знаменатель $d_{22} + \lambda_1 d_{11}$ становится равным нулю. Следовательно,

$$m_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 < t < 4,31 \\ -1 & \text{для } 4,31 < t < 4,81; \end{cases}$$

$$m_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{для } 0 < t < 3,61 \\ 1 & \text{для } 3,61 < t < 4,81. \end{cases}$$

4.8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая глава посвящена расчету систем управления методом переходных состояний. Описан метод расчета линейных и нелинейных цифровых систем управления, обладающих оптимальной по времени реакцией на воздействия вида ступенчатой функции при нулевых начальных условиях. Метод использует возможность представления цифрового регулятора в виде усилительного элемента с переменным коэффициентом усиления. Расчет системы при использовании этого метода сводится к определению последовательных значений переменного коэффициента усиления в различных периодах прерывания. Последние определяются путем решения системы алгебраических уравнений. Процедура расчета хорошо приспособлена для программирования и применения цифровой вычислительной машины.

Рассмотрены некоторые полезные свойства матрицы перехода. Обсуждены понятия управляемости и наблюдаемости. Процесс называется полностью управляемым, если из некоторого начального состояния он может быть переведен в нулевое состояние за конечный интервал времени. Показано, что для полной управляемости линейной дискретной системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы векторы

$$s_i = \varphi(-iT)h(T), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

были линейно независимы. Аналогичным образом формулируются условия полной управляемости непрерывных систем. Линейная непрерывная система n -го порядка, описываемая уравнением $\dot{x} = Ax + dm$, является полностью управляемой тогда и только тогда, когда векторы $d, Ad, \dots, A^{n-1}d$ линейно независимы. Об управляемости системы можно также судить по виду матрицы управления в каноническом базисе. Линейный процесс называется полностью управляемым, если эта матрица управления Δ не содержит нулевых строк. Аналогичным образом могут быть сформулированы условия наблюдаемости. Линейный процесс называется наблюдаемым, если матрица выхода B не содержит нулевых столбцов.

Подробно рассмотрен расчет оптимальных по быстродействию линейных дискретных систем методом переходных состояний. Предлагается два способа расчета таких систем. Первый способ использует преобразование координат; второй способ основан на последовательном исключении векторов состояния $x(jT)$ из уравнения конечного состояния. Последний способ позволяет разработать простой алгоритм расчета управляющей последовательности. Процедура расчета оптимальных одномерных систем распространена на многомерные системы. При использовании этой процедуры расчет оптимальной по быстродействию многомерной системы получается по своей сложности сравнимым

со случаем одномерной системы. Можно было видеть, что метод пространства состояний облегчает расчет оптимальных многомерных систем. Процедура последовательных итераций весьма удобна для программирования, и применение этого способа кажется более предпочтительным.

Процедура последовательных итераций распространена также на расчет оптимальных по быстродействию дискретных систем с насыщением. В качестве основы расчета используется понятие пространства управления. Пространство управления для системы определяется как n -мерное евклидово пространство, в котором управляющая последовательность образует систему взаимно ортогональных осей. Показано, что если процесс n -го порядка с насыщением может быть переведен из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия за $p = n + q$ периодов прерывания, то гиперплоскость

$$\sum_{i=0}^{p-1} s_{p-i} m(\overline{p-i-1} T) = -x(0)$$

пересекает гиперкуб, который формируется в пространстве управления ограничениями, наложенными на управляющие воздействия. Найдено, что если дискретная система n -го порядка с насыщением может быть переведена из заданного начального состояния в состояние равновесия за минимальное число p периодов прерывания, то q из этих p воздействий в последовательности $\{m(kT)\}$ имеют предельную амплитуду, а остальные n воздействий находятся в пределах уровня ограничения. Рассмотрены методы определения этих q предельных воздействий. После определения предельных воздействий находятся и остальные воздействия оптимальной последовательности путем решения системы из n алгебраических уравнений, так же, как и в случае отсутствия насыщения. В случае простых систем не представляет труда произвести все необходимые вычисления по определению управляющей последовательности вручную. В сложных случаях желательно составить программу решения для цифровой вычислительной машины.

В заключении главы рассматривается расчет оптимальных по быстродействию непрерывных систем управления на основе метода переходных состояний. Показано, что для линейной непрерывной системы n -го порядка с насыщением оптимальным с точки зрения быстродействия системы является регулятор релейного типа. Найдено также, что если элементы матрицы коэффициентов A размера $n \times n$ суть постоянные величины и эта матрица имеет действительные и различные собственные значения, то каждая компонента вектора оптимального управления может изменить знак самое большее $n - 1$ раз. Рассмотрен метод определения функции переключения. Этот метод, использующий

множители Лагранжа, позволяет свести расчет оптимальной системы к элементарной задаче минимизации. Для расчета оптимальных по быстродействию непрерывных систем могут быть также применены методы, разработанные для дискретных систем, если вместо непрерывных систем рассматривать их дискретные аппроксимации. Период прерывания в этом случае необходимо выбрать так, чтобы получить удовлетворительную точность этой аппроксимации.

Литература к гл. 4

Беллман, Гликсберг, Гросс [24], Десоер и Уинг [49], [51], [149], Фаллер [52], Гамкрелидзе [63], [64], [65], Гильберт [69], Хо [78], Калман [88], [89], Калман и Бертрам [90], Красовский [97], [98], [99], Курцвейль [101], Ла Салль [103], [104], Ли Э. [107], [108], Летов [114], Понтрягин [129], Понтрягин, Болтянский, Гамкрелидзе, Мищенко [130], [132], Ту [136], [137], [138], [140], [141], [142], Ту и Левис [146], Ту и Вадханафати [147], Заде и Десоер [152].

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Предшествующая глава была посвящена оптимизации систем управления при непосредственном использовании метода переходных состояний. Основное внимание было уделено задаче управления по минимуму времени и были даны различные способы оптимального управления по времени для дискретных и непрерывных систем. В данной и следующих главах этой книги изучение проблем оптимального управления будет проведено в более широком плане. Более общие проблемы оптимального управления будут исследованы с помощью других методов: метода вариационного исчисления, принципа максимума Понтрягина и метода динамического программирования Беллмана. Эта глава посвящена решению проблем оптимального управления при помощи классических методов вариационного исчисления.

5.1. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Вариационное исчисление представляет собою раздел математического анализа, связанный с проблемами оптимизации при условиях более общего характера, чем те, которые рассматриваются в обычной теории нахождения максимумов и минимумов некоторых функций. Оно имеет дело с максимизацией и минимизацией функционалов, когда требуется определить не отдельные значения функции, а всю функцию в целом [29, 35, 94, 112]. Вариационное исчисление, как самостоятельная математическая дисциплина, было разработано около 150 лет назад Эйлером — известным русским математиком. Вариационное исчисление находит применение во многих областях науки и техники. Среди них — классическая механика, электромагнетизм, гидродинамика, оптика, аэродинамика и теория управления. Эта глава посвящена применению вариационного исчисления для оптимального управления. В вариационном исчислении тремя основными проблемами являются: задача Лагранжа, задача Майера и задача Больца. Прежде чем рассматривать применение вариаци-

онного исчисления к решению проблем оптимального управления, вкратце остановимся на трех указанных выше общих задачах.

Задача Лагранжа с одной независимой переменной связана с определением функции $m(t)$, которая обеспечивает минимум интеграла от данной функции. Сформулируем эту задачу.

Дано: 1) система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x, m, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1-1a)$$

или в более общем виде

$$\varphi_i(x, \dot{x}, m, t) = 0, \quad (5.1-1б)$$

где x — $(n + 1)$ -мерный вектор, а m — $(r + 1)$ -мерный вектор;
2) система начальных условий

$$x_i(t_0) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (5.1-2)$$

3) критерий

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, m, t) dt, \quad (5.1-3)$$

где $F(x, m, t)$ — непрерывная функция своих аргументов.

Требуется найти функцию $m(t)$, которая обеспечивает минимум I среди всех функций $m(t)$, удовлетворяющих условиям, заданным уравнениями (5.1-1) и равенствами (5.1-2).

Задача Майера связана с определением функции $m(t)$, минимизирующей данную функцию, вычисляемую в конечной точке, содержащую некоторые переменные, конечные значения которых заранее не заданы. Сформулируем эту задачу.

Дано: 1) система дифференциальных уравнений вида (5.1-1);

2) система начальных условий вида (5.1-2);

3) система конечных условий

$$x_j(t_f) = b_j, \quad (5.1-4)$$

где j принадлежит некоторому подмножеству целых чисел $1, 2, \dots, n$, а t_f не задано;

4) критерий

$$I = G(x, m, t) \Big|_{t_0}^{t_f}. \quad (5.1-5)$$

Требуется определить функцию $m(t)$, минимизирующую I среди всех функций $m(t)$, удовлетворяющих условиям (5.1-1), (5.1-2) и (5.1-4).

А. *Особый случай.* Когда критерий имеет вид

$$I = G(t) \Big|_{t_0}^{t_f} = t_f - t_0, \quad (5.1-6)$$

задача сводится к преобразованию некоторого начального состояния к желательному конечному состоянию за минимальное время. Это задача управления, оптимального по времени, которая была рассмотрена в предшествующей главе.

Задача Больца связана с определением функции $m(t)$, минимизирующей сумму, состоящую из интеграла от функции и функции, вычисляемой в конечной точке, причем эти функции содержат некоторые переменные, конечные величины которых заранее не заданы. Сформулируем эту задачу.

- Дано: 1) система дифференциальных уравнений (5.1-1);
2) система начальных условий (5.1-2);
3) система конечных условий (5.1-4);
4) критерий

$$I = G(x, m, t) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} F(x, m, t) dt. \quad (5.1-7)$$

Требуется определить функцию $m(t)$, минимизирующую I относительно всех функций $m(t)$, удовлетворяющих условиям (5.1-1), (5.1-2) и (5.1-4).

Если под x иметь в виду вектор состояния процесса, а под m — вектор управления, то управление по минимуму интеграла сводится к задаче Лагранжа. Точно так же управление конечным состоянием и управление по минимуму времени переходного процесса можно назвать задачей Майера. К задаче Больца может быть сведено управление по минимуму интеграла при ограничении конечного состояния или управление по минимуму N времени перехода в конечное состояние при наличии ограничения на величину интеграла. Процедуру получения m часто называют вариационным методом.

Из сказанного следует, что формулировка задачи Больца является наиболее общей. Однако всегда можно ввести некоторые вспомогательные переменные, которые преобразуют задачу Лагранжа в задачу Больца или в задачу Майера и наоборот. Хотя существует много проблем оптимального управления, которые, как это кажется на первый взгляд, не относятся ни к одной из трех перечисленных задач, однако всегда можно прибегнуть к тому или другому математическому приему, позволяющему свести первоначальную задачу к одной из рассмотренных выше. Приводимые ниже примеры, могут служить для иллюстрации такого рода преобразований.

Пример 5.1—1. Задача, связанная с производными высокого порядка

Рассмотрим задачу минимизации критерия

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) dt. \quad (5.1-8)$$

Конечные значения для x и \dot{x} заданы.

Так как в подынтегральное выражение входит вторая производная неизвестной функции, то очевидно, что рассматриваемая задача не принадлежит к тем трем основным задачам, которые были рассмотрены выше. Однако ее можно преобразовать в задачу типа Лагранжа с помощью введения вспомогательной переменной y .

Пусть

$$y = \dot{x}. \quad (5.1-9)$$

Тогда выражение (5.1—8) можно переписать в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, y, \dot{y}, t) dt \quad (5.1-10)$$

и, таким образом, свести эту задачу к задаче Лагранжа.

Пример 5.1—2. Сведение задачи Лагранжа к задаче Майера

Рассмотрим задачу минимизации критерия

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t), \quad (5.1-11)$$

предположив, что заданы конечные значения x .

Выражение (5.1—11) сводится к выражению (5.1—3), если положить, что $x = m$. Эту задачу Лагранжа можно преобразовать в задачу Майера, вводя вспомогательную переменную x_{n+1} при помощи соотношения

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F(x, \dot{x}, t), \quad (5.1-12)$$

где x предполагается n -мерным вектором.

Таким образом, задача сведена к минимизации выражения

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \dot{x}_{n+1}(t) dt = x_{n+1}(t) \Big|_{t_0}^{t_f}, \quad (5.1-13)$$

что является задачей типа Майера.

Пример 5.1—3. Задача, содержащая неравенства

Рассмотрим задачу минимизации критерия

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt \quad (5.1-14)$$

при заданных конечных значениях x в предположении, что \dot{x} должно удовлетворять ограничению в виде неравенства

$$a \leq \dot{x} \leq b. \quad (5.1-15)$$

Задачу минимизации можно преобразовать в задачу Лагранжа, заменив ограничение в виде неравенства на ограничение, имеющее вид равенства

$$\Phi(\dot{x}, y) = (\dot{x} - a)(b - \dot{x}) - y^2 = 0, \quad (5.1-16)$$

где y — вспомогательная вещественная переменная.

Пример 5.1—4. Изопериметрическая задача

Рассмотрим задачу минимизации критерия

$$I(\mathbf{m}) = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) dt, \quad (5.1-17)$$

подчиненного ограничению

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) \quad (5.1-18)$$

при начальных условиях

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{a} \quad (5.1-19)$$

и конечных условиях

$$x_i(t_f) = b_i(t_f), \quad i = 1, 2, \dots, k \leq n, \quad (5.1-20)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_r \end{bmatrix}.$$

Граничные условия при $t = t_f$ можно заменить на систему интегральных ограничений

$$b_i(t_f) - a_i = \int_{t_0}^{t_f} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) dt, \quad (5.1-21)$$

$$i = 1, 2, \dots, k \leq n,$$

где функция f_i есть i -я составляющая функции \mathbf{f} .

При этих условиях применение метода множителей Лагранжа приводит к задаче минимизации новой функции

$$I(\mathbf{m}) = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) + \sum_{i=1}^k \mu_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) \right] dt, \quad (5.1-22)$$

где μ_i — множитель Лагранжа. Это стандартная форма классической изопериметрической задачи вариационного исчисления. В задаче конечная точка закреплена или свободна, в зависимости от того, является ли значение t_f фиксированным или нет.

Пример 5.1—5. Задача управления химическим процессом

Одной из обычных задач управления, встречающихся в химических процессах, является оптимальное управление реактором с мешалкой. Упрощенная принципиальная схема реактора показана на рис. 3.2—13. Эту задачу можно сформулировать как задачу оптимизации в вариационном исчислении [94].

Дифференциальные уравнения состояния выведены в примере 3.2—2. Приведем их здесь:

$$\dot{x}_1 = f_1 - (f_1 + f_2 - e^{\alpha_1 - \beta_1/x_1}) x_1; \quad (5.1-23a)$$

$$\dot{x}_2 = (1 - x_1 - x_2) e^{\alpha_2 - \beta_2/x_2} - (f_1 + f_2) x_2; \quad (5.1-23б)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & H_1 x_1 e^{\alpha_1 - \beta_1/x_1} + H_2 (1 - x_1 - x_2) e^{\alpha_2 - \beta_2/x_2} + f_1 (T_1 - \\ & - x_3) + f_2 (T_2 - x_3) + m, \end{aligned} \quad (5.1-23в)$$

(обозначения такие же, как и в параграфе 3.2). Критерий качества, который определяет производительность реактора на химическом заводе, имеет вид

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \{ [p_{02}(1 - x_1 - x_2) + p_{03}x_2](f_1 + f_2) - p_{11}f_1 - p_{12}f_2 - g(m) \} dt, \quad (5.1-24)$$

где p_{02} и p_{03} обозначают стоимости компонентов C_2 и C_3 на выходе реактора;

p_{11} и p_{12} — стоимости компонентов C_1 и C_2 на входе реактора;

функция $g(m)$ представляет стоимость управления, которое включает стоимость нагревания или охлаждения и ограничения, налагаемые на управляющее воздействие m .

Задача оптимизации заключается в определении скорости теплообмена m , которая обеспечивает максимум показателя качества (5.1—24) при условиях, определяемых уравнениями (5.1—23), и начальных условиях $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$ и $x_3(t_0)$. Ясно, что это задача типа задачи Лагранжа в вариационном исчислении.

5.2. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ

а. Случай закрепленных конечных точек

Рассмотрим задачу минимизации интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt, \quad (5.2-1)$$

где $x = x(t)$ — дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $x(t_0) = x_0$ и $x(t_f) = x_f$;

F — непрерывная функция аргументов x , \dot{x} , t .

Найдем функцию $x(t)$, минимизирующую интеграл в уравнении (5.2—1). Геометрическая интерпретация задачи заключается в определении такой кривой $x(t)$, соединяющей точки (x_0, t_0) и (x_f, t_f) , вдоль которой интеграл от данной функции $F(x, \dot{x}, t)$ был бы минимальным [29, 35].

В терминах теории управления, если x — выход управляемой системы, то интеграл (5.2—1) определяет качество управления системой, причем необходимо стремиться к тому, чтобы этот интеграл имел минимум. Показатель качества в системе управления турбовинтовым двигателем может представлять интеграл от квадрата отклонения скорости, если x — скорость двигателя. Задача оптимального управления заключается в том, чтобы обеспечить минимум отклонения скорости. Показатель качества может характеризовать расход топлива в летательном аппарате при x , обозначающем смещение, а \dot{x} — скорость. В этом случае задача оптимального управления заключается в нахождении оптимальной траектории полета, которой соответствует минимальный расход топлива.

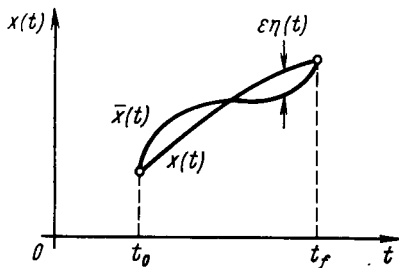


Рис. 5.2—1. Оптимальная траектория с закрепленными крайними точками

Интервал времени, при котором интеграл имеет минимум, должен быть выбран. Имеется в виду любой интервал, в течение которого управляемая система перемещается от одного существенного режима работы к другому. Такой существенный режим работы представляет собой особое условие только для тех переменных, которые должны быть непрерывны. В случае турбовинтового двигателя, переходные процессы которого можно описать дифференциальным уравнением первого порядка, существенные режимы определяются скоростью двигателя.

Пусть $x(t)$ — функция, обеспечивающая минимум, а $\bar{x}(t)$ — функция, близкая к $x(t)$. Тогда $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ связаны отношениями

$$\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon \eta(t); \quad (5.2—2)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{\eta}(t), \quad (5.2—3)$$

где ε — малый параметр, а $\eta(t)$ — произвольная, дифференцируемая функция для которой

$$\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0, \quad (5.2—4)$$

так как конечная точка предполагается закрепленной, как показано на рис. 5.2—1.

Из условия (5.2—4) следует, что

$$\bar{x}(t_0) = x(t_0) = x_0$$

и

$$\bar{x}(t_f) = x(t_f) = x_f,$$

т. е. все функции, близкие к $x(t)$, имеют требуемые конечные значения функций, по отношению к которым производится минимизация. При соответствующем выборе $\eta(t)$ и ε с помощью выражения вида (5.2—2) можно представить любую дифференцируемую функцию, имеющую требуемые конечные значения. Вертикальное отклонение любой кривой $\bar{x}(t)$ от действительной кривой, обеспечивающей минимум, обозначено на рис. 5.2—1 через $\varepsilon\eta(t)$. Вне зависимости от выбора $\eta(t)$ минимизирующая функция $x(t)$ является членом этого семейства, если выбрать величину параметра ε равной нулю.

Заменяя x и \dot{x} в уравнении (5.2—1) соответственно на \bar{x} и $\bar{\dot{x}}$, получаем

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} F(x + \varepsilon\eta, \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta}, t) dt. \quad (5.2-5)$$

Разлагая подынтегральное выражение в формуле (5.2—5) в ряд Тейлора, найдем

$$F(x + \varepsilon\eta, \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta}, t) = F(x, \dot{x}, t) + \varepsilon\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \varepsilon\dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \text{члены,}$$

содержащие $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$ (5.2—6)

Тогда функцию критерия можно переписать в виде

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} [F(x, \dot{x}, t) + \varepsilon\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \varepsilon\dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \text{члены, содержащие } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots] dt. \quad (5.2-7)$$

Необходимым условием для максимума или минимума I является

$$\left. \frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (5.2-8)$$

откуда вытекает, что

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt = 0. \quad (5.2-9)$$

Интегрирование по частям второго члена в этом интеграле дает

$$\int_{t_0}^{t_f} \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} dt = \eta \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt, \quad (5.2-10)$$

Принимая во внимание условие (5.2—4), найдем

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} dt = - \int_{t_0}^{t_f} \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt. \quad (5.2-11)$$

При этом уравнение (5.2—9) сводится к виду

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt = 0. \quad (5.2-12)$$

Так как уравнение (5.2—12) должно быть справедливо для всех η , то необходимое условие для экстремума I принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (5.2-13)$$

Это уравнение второго порядка известно под названием *дифференциального уравнения Эйлера — Лагранжа*. Его решение определяет функцию, доставляющую минимум рассматриваемого интеграла при условии, что этот минимум существует.

Дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа (5.2—13) можно проинтегрировать, если:

1) функция F не зависит от \dot{x} , т. е.

$$F = F(x, t);$$

2) функция F зависит только от x и \dot{x} , т. е.

$$F = F(x, \dot{x});$$

3) функция F не зависит от x , т. е.

$$F = F(\dot{x}) \quad \text{или} \quad F = F(\dot{x}, t);$$

4) функция F линейна относительно \dot{x} , например

$$F = \alpha(x, t) + \beta(x, t) \dot{x}.$$

В случае многомерных функций интегральный критерий (5.2—1) принимает вид

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \quad (5.2-14)$$

где $x = x(t)$ есть n -мерная векторная функция от t ;

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad (5.2-15)$$

компоненты которой являются дважды дифференцируемыми функциями и удовлетворяют условиям на концах.

Следуя рассуждениям, аналогичным одномерному случаю, получим дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа для многомерного случая:

$$\nabla_x F - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{x}} F) = 0, \quad (5.2-16)$$

где

$$\nabla_x F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix}; \quad (5.2-17)$$

$$\nabla_{\dot{x}} F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n} \end{bmatrix}. \quad (5.2-18)$$

6. Случай подвижных конечных точек

В предыдущей задаче минимизации конечная точка интегрального критерия предполагалась закрепленной. Рассмотрим теперь задачу минимизации с конечной точкой траектории, лежащей на кривой. В течение интервала времени управления внешние возмущения предполагаются постоянными. Пусть $x(t)$ будет функцией, которая обеспечивает минимум интегрального критерия (5.2—1). Предполагается, что конечная точка траектории лежит на кривой $x = c(t)$, как показано на рис. 5.2—2.

Пусть $\bar{x}(t)$ функция, мало отличающаяся от $x(t)$. Взаимосвязь между $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ определяется уравнениями (5.2—2) и (5.2—3). Произвольная функция $\eta(t)$ удовлетворяет начальному условию

$$\eta(t_0) = 0, \quad (5.2-19)$$

но конечное условие еще не определено. Это приводит к соответствующим граничным условиям для движения от одного существенного состояния к другому.

Заменяя в уравнении (5.2—1) x и \dot{x} соответственно

через \bar{x} и $\dot{\bar{x}}$ и верхний предел интегрирования на $t_f + \varepsilon \delta t_f$, получаем интеграл

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f + \varepsilon \delta t_f} F(x + \varepsilon \eta, \dot{x} + \varepsilon \dot{\eta}, t) dt. \quad (5.2-20)$$

Вариация δt_f возникает потому, что конечная точка траекторий не закреплена, а лежит на кривой $x = c(t)$. Следуя тем же рассуждениям, что и в случае с закрепленным концом, можно показать, что необходимым условием для экстремума функционала I является

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt + F(t_f) \delta t_f = 0. \quad (5.2-21)$$

Интегрируя по частям второй член подынтегрального выражения, после некоторых преобразований получим

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt + \eta(t_f) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} - \eta(t_0) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} + F(t_f) \delta t_f = 0. \quad (5.2-22)$$

При рассмотрении условий на концах (см. рис. 5.2—2) можно заметить, что $\eta(t_f)$ и δt_f связаны соотношением

$$\dot{x} \delta t_f + \eta(t_f) = \dot{c}(t_f) \delta t_f. \quad (5.2-23)$$

Исключая $\eta(t_f)$ из уравнений (5.2—22) и (5.2—23), получаем

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt + \{ F(t_f) + [\dot{c}(t_f) - \dot{x}(t_f)] \times \times \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} \} \delta t_f - \eta(t_0) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0. \quad (5.2-24)$$

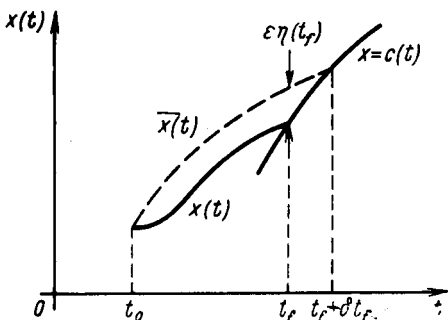


Рис. 5.2—2. Оптимальная траектория с подвижными крайними точками

Так как δt_f — произвольно, то из уравнения (5.2—24) следует, что

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt = 0; \quad (5.2—25)$$

$$\left\{ F(t_f) + [c(t_f) - \dot{x}(t_f)] \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{t_f} \right\} \delta t_f - \eta(t_0) \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{t_0} = 0. \quad (5.2—26)$$

Учитывая, что уравнение (5.2—25) должно быть справедливым для всех η , получим дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа для данной вариационной задачи в виде

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (5.2—27)$$

аналогичном уравнению (5.2—13). Однако в случае незакрепленной конечной точки решение уравнения Эйлера — Лагранжа должно удовлетворять уравнению (5.2—26). Если $\frac{\partial F}{\partial x}$ конечно при $t = t_0$, то уравнение (5.2—26) сводится к

$$F(t_f) = [\dot{x}(t_f) - \dot{c}(t_f)] \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} \quad (5.2—28)$$

и называется *условием трансверсальности*. Отметим, что уравнение (5.2—27) может и не удовлетворяться при $t = t_0$, потому что $\eta(t_0) = 0$. Необходимо лишь, чтобы при $t = t_0$ было непрерывным, а $\frac{\partial F}{\partial x}$ — конечным.

В задачах регулирования, в течение некоторого интервала времени, процесс изменяется и наблюдается переход от одного существенного рабочего режима к другому, т. е. от одного определенного значения x к другому значению. Таким образом, конечная кривая $x = c(t)$ является горизонтальной прямой и

$$\dot{c}(t_f) = 0. \quad (5.2—29)$$

Условие трансверсальности (5.2—28) теперь принимает вид

$$F(t_f) = \dot{x}(t_f) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f}, \quad (5.2—30)$$

а первый интеграл уравнения (5.2—27)

$$\frac{d}{dt} \left(-F + \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (5.2—31)$$

Если подынтегральная функция F не зависит явно от t , то первый интеграл уравнения (5.2—27), удовлетворяющий граничному условию (5.2—30), равен

$$F(x, \dot{x}) = \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \quad (5.2—32)$$

Дифференцируя обе части уравнения (5.2—32) по t и упрощая, получаем

$$\dot{x} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] = 0. \quad (5.2—33)$$

Так как \dot{x} обычно не обращается в нуль в течение времени перехода, то уравнение (5.2—27) удовлетворяется. Следовательно, два условия (5.2—27) и (5.2—30), налагаемые на $x(t)$, теперь заменяются одним условием (5.2—32), которое определяет оптимальную систему, осуществляющую переход от одного рабочего режима к другому в течение интервала времени (t_0, t_f) .

Пример 5.2—1. Задача перехвата

Типичной проблемой оптимизации, в которой конечная точка траектории переменна, является задача перехвата при запуске ракеты (рис. 5.2—3).

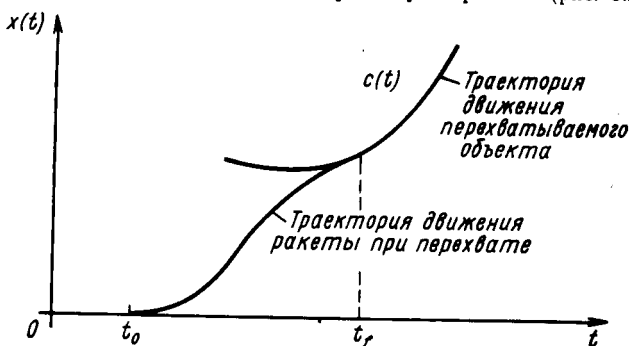


Рис. 5.2—3. Оптимальная траектория для системы примера 5.2—1

Требуется, чтобы после старта ракета встретила летательный аппарат, движущийся по известной траектории $c(t)$, и достигла скорости летательного аппарата при минимальном расходе горючего в процессе полета. Управляющей переменной в этой системе является тяга ракеты $m(t)$, которая связана с расходом горючего $q(t)$ соотношением

$$q(t) = F[m(t)].$$

Функция $F[m(t)]$ является четной функцией $m(t)$, так как расход горючего всегда положителен. Обозначим через $x(t)$ положение ракеты. Упрощенное дифференциальное уравнение, характеризующее движение ракеты в одном направлении, имеет вид

$$M(t)\ddot{x}(t) + \dot{M}(t)\dot{x}(t) = m(t) - G[x(t)] - P[x(t), \dot{x}(t)],$$

где $M(t)$ — масса ракеты;
 $G[x(t)]$ — сила тяжести;

$P[x(t), \dot{x}(t)]$ — аэродинамическое сопротивление.

Масса ракеты рассматривается как независимая функция времени, чтобы учесть частичное ее уменьшение по мере расхода горючего.

Пусть x_1 и x_2 — переменные состояния системы. Тогда дифференциальные уравнения состояния можно записать в следующем виде:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{\dot{M}(t)}{M(t)} x_1(t) - \frac{G[x_1(t)] + P[x_1(t), x_2(t)]}{M(t)} + \frac{1}{M(t)} m(t);$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t).$$

Задача заключается в определении оптимального управляющего воздействия $m(t)$, обеспечивающего минимум показателя качества

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F[m(t)] dt.$$

Конечное время t_f — это время встречи перехватывающей ракеты с летательным аппаратом, т. е. при $t = t_f$ должно удовлетворяться некоторое функциональное равенство

$$\varphi\{[x_1(t_f) - c(t_f)], [x_2(t_f) - \dot{c}(t_f)]\} = 0.$$

Показатель качества I является мерой расхода горючего в интервале (t_0, t_f) .

5.3. УПРАВЛЕНИЕ ПО МИНИМУМУ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ

В этом параграфе рассматривается применение вариационного исчисления к оптимизации процессов управления по отношению к интегральным критериям качества [27, 29, 35, 47, 94, 108, 112].

Рассмотрим процесс управления, характеризуемый уравнением

$$\dot{x}(t) = g(x, m), \quad (5.3-1)$$

где x и m — скалярные функции t , и при $t = t_0$

$$x(t_0) = x_0. \quad (5.3-2)$$

Определим оптимальное управляющее воздействие $m(t)$, которое обеспечивает минимум интегральной оценки

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, m) dt, \quad (5.3-3)$$

где функция $F(x, m)$ может описывать отклонение от желаемого состояния, потребление горючего и стоимость системы управления. В задаче перехвата, рассмотренной в примере 5.2—1, функция $F[m(t)]$ представляет расход топлива в ракете, который является функцией управляющего воздействия $m(t)$. Проблема оптимального управления заключается в таком определении тяги ракеты, при котором полный расход топлива в течение интервала полета (t_0, t_f) был бы минимальным.

Пусть x и m — функции, которые обеспечивают минимум интеграла (5.3—3). Тогда близкие к ним функции \bar{x} и \bar{m} можно представить в виде

$$\bar{x} = x + \varepsilon\eta; \quad (5.3-4)$$

$$\bar{m} = m + \varepsilon\xi, \quad (5.3-5)$$

где η и ξ — произвольные функции t , определенные в интервале $t_0 \leq t \leq t_f$;
 ε — малый параметр.

Заменяя x и m в выражении (5.3—3) соответственно через \bar{x} и \bar{m} , получим

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} F(x + \varepsilon\eta, m + \varepsilon\xi) dt. \quad (5.3-6)$$

Применяя разложение в ряд Тейлора, выражение (5.3—6) можно переписать в виде

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} F(x, m) dt + \varepsilon \int_{t_0}^{t_f} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \xi \frac{\partial F}{\partial m} \right) dt + O(\varepsilon^2), \quad (5.3-7)$$

где $O(\varepsilon^2)$ представляет собой бесконечно малые члены высшего порядка.

Так как минимум интеграла получается, когда

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad (5.3-8)$$

то необходимым условием, чтобы I имело экстремум, является

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \xi \frac{\partial F}{\partial m} \right) dt = 0. \quad (5.3-9)$$

Заменяя x и m в уравнении (5.3—1) соответственно на \bar{x} и \bar{m} , получаем

$$\dot{\bar{x}} + \varepsilon\dot{\eta} = g(x + \varepsilon\eta, m + \varepsilon\xi). \quad (5.3-10)$$

Применение разложения в ряд Тейлора приводит уравнение (5.3—10) к виду

$$\dot{\bar{x}} + \varepsilon\dot{\eta} = g(x, m) + \varepsilon \left(\eta \frac{\partial g}{\partial x} + \xi \frac{\partial g}{\partial m} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (5.3-11)$$

Когда ε стремится к нулю, $O(\varepsilon^2)$ обращается в нуль и

$$\dot{\bar{x}} = g(x, m); \quad (5.3-12)$$

$$\dot{\eta} = \eta \frac{\partial g}{\partial x} + \xi \frac{\partial g}{\partial m}. \quad (5.3-13)$$

Уравнение (5.3—13) подчинено начальному условию

$$\eta(t_0) = 0. \quad (5.3—14)$$

Решая уравнение (5.3—13) относительно ξ , получаем

$$\xi = \frac{\dot{\eta} - \eta \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)}{\frac{\partial g}{\partial m}}. \quad (5.3—15)$$

Подставляя это значение ξ в уравнение (5.3—9), найдем

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\dot{\eta} - \eta \frac{\partial g}{\partial x} \right) \frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial m}} \right] dt = 0. \quad (5.3—16)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial m}} \eta dt &= \eta \frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial m}} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial m}} \right) dt = - \int_{t_0}^{t_f} \eta \times \\ &\times \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial m}} \right) dt. \end{aligned} \quad (5.3—17)$$

Так как значение $x(t_0) = x_0$ фиксировано, то $\eta(t_0) = 0$ и

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial m}} \Big|_{t_f} = 0. \quad (5.3—18)$$

Из выражений (5.3—16) и (5.3—17) следует, что

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial m} - \frac{\partial F}{\partial m} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial m}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial m}} \right) \right] \eta dt = 0. \quad (5.3—19)$$

Так как уравнение (5.3—19) должно удовлетворяться при

всех η , то дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа для этой проблемы оптимального управления принимает вид

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial m} - \frac{\partial F}{\partial m} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial m}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial m}} \right) = 0. \quad (5.3-20)$$

Решение этого дифференциального уравнения при граничных условиях (5.3—2) и (5.3—18), определяет оптимальное управление $m(t)$ процессом. Это классическая задача вариационного исчисления, в которой условия на концах определяются обеими конечными точками траектории.

Особый случай

Если

$$\dot{x} = g(x, m) = m, \quad (5.3-21)$$

то интегральный критерий принимает вид

$$I = \int_t^{t_f} F(x, \dot{x}) dt. \quad (5.3-22)$$

Так как

$$\frac{\partial g}{\partial m} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

уравнение Эйлера — Лагранжа для данного особого случая сводится к виду

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial m} \right) = 0 \quad (5.3-23)$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (5.3-24)$$

при граничных условиях

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0, \quad (5.3-25)$$

которые соответствуют начальной и конечной точкам.

Вообще говоря, аналитическое решение двухточечных краевых задач возможно только в особых случаях. Следовательно, когда нельзя получить решения в замкнутой форме, необходимо пользоваться методом последовательных попыток. Этот метод

состоит в выборе наугад неизвестного начального условия, например значения $x(t_0) = x_0$, и численном интегрировании уравнения Эйлера — Лагранжа и уравнения для ограничения. При интегрировании используется заданное значение $x(t_0) = x_0$ и предполагаемое значение $x(t_f)$. Затем определяется разность между получившимся конечным условием и заданным условием. Так как эта разность обычно не равна нулю, то последовательные попытки надо повторять несколько раз до тех пор, пока значение полученного таким образом конечного условия не будет достаточно близким к заданному.

Многомерный процесс управления

Обобщим теперь вышеприведенные рассуждения на задачу оптимизации многомерного процесса управления для случая интегрального критерия качества. Рассмотрим многомерный процесс управления, характеризуемый уравнением

$$\dot{x} = g(x, m) \quad (5.3-26)$$

при начальных условиях $x(t_0) = x_0$, где x обозначает вектор состояния процесса, а m — вектор управления.

Предполагается, что x есть n -мерный вектор-столбец, а m — r -мерный вектор-столбец. Определим вектор оптимального управления $\bar{m}(t)$, который обеспечивает минимум интегрального критерия

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, m) dt. \quad (5.3-27)$$

Пусть $x(t)$ и $m(t)$ — пара векторных функций, которые обеспечивают минимум выражения (5.3-27). Тогда близкие к ним функции $\bar{x}(t)$ и $\bar{m}(t)$ можно представить в виде

$$\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon \eta(t); \quad (5.3-28)$$

$$\bar{m}(t) = m(t) + \varepsilon \xi(t), \quad (5.3-29)$$

где $\eta(t)$ и $\xi(t)$ — произвольные векторные функции от t , определенные для интервала (t_0, t_f) ; ε — малый параметр; $\eta(t)$ — n -мерный вектор, а $\xi(t)$ — r -мерный вектор.

Составляющие этих функций равны

$$\bar{x}_i = x_i + \varepsilon \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (5.3-30)$$

$$\bar{m}_k = m_k + \varepsilon \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (5.3-31)$$

При замене \mathbf{x} и \mathbf{m} соответственно на $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{m}}$ получим значение интеграла (5.3—27) для близких функций

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x} + \varepsilon\boldsymbol{\eta}, \mathbf{m} + \varepsilon\boldsymbol{\xi}) dt. \quad (5.3-32)$$

Разлагая подинтегральное выражение в ряд Тейлора, найдем

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(\mathbf{x}, \mathbf{m}) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^r \xi_k \frac{\partial F}{\partial m_k} \right) \right] dt + O(\varepsilon^2), \quad (5.3-33)$$

где $O(\varepsilon^2)$ обозначает бесконечно малые члены высшего порядка.

Для того чтобы выражение $I(\boldsymbol{\xi})$ имело минимум, необходимо чтобы

$$\left. \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (5.3-34)$$

Производя минимизацию и упрощая, получаем

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^r \xi_k \frac{\partial F}{\partial m_k} \right) dt = 0. \quad (5.3-35)$$

Это интегральное уравнение можно переписать в векторных обозначениях следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t_f} [(\nabla_{\mathbf{x}} F)' \boldsymbol{\eta} + (\nabla_{\mathbf{m}} F)' \boldsymbol{\xi}] dt = 0, \quad (5.3-36)$$

где штрих обозначает транспонированную матрицу, а векторные операторы дифференцирования $\nabla_{\mathbf{x}}$ и $\nabla_{\mathbf{m}}$ определяются как

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}; \quad (5.3-37) \quad \nabla_{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial m_1} \\ \frac{\partial}{\partial m_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial m_r} \end{bmatrix}. \quad (5.3-38)$$

Заменяя \bar{x} , x и \bar{m} в уравнении (5.3—26) соответственно на \bar{x} , \bar{x} и \bar{m} , получаем дифференциальное уравнение для близких функций

$$\dot{\bar{x}} + \varepsilon \dot{\eta} = g(\bar{x} + \varepsilon \eta, \bar{m} + \varepsilon \xi). \quad (5.3—39)$$

Разлагая правую часть в ряд Тейлора и приравнявая коэффициенты подобных членов, получаем

$$\dot{\eta} = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial g}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^r \xi_k \frac{\partial g}{\partial m_k}. \quad (5.3—40)$$

Пусть

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}. \quad (5.3—41)$$

Уравнение (5.3—40) можно переписать в виде

$$\dot{\eta} = [\nabla_x g']' \eta + [\nabla_m g'] \xi, \quad (5.3—42)$$

где

$$[\nabla_x g']' \eta = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial g}{\partial x_i}; \quad (5.3—43)$$

$$[\nabla_m g'] \xi = \sum_{k=1}^r \xi_k \frac{\partial g}{\partial m_k}; \quad (5.3—44)$$

$[\nabla_x g']'$ — матрица размера $n \times n$;

$[\nabla_m g']$ — матрица размера $n \times r$.

Обозначая через $g^{(r)}$ r -мерный вектор-строку вида

$$g^{(r)} = [g_1, g_2, g_3, \dots, g_r] \quad (5.3—45)$$

и через $\eta^{(r)}$ r -мерный вектор-столбец вида

$$\eta^{(r)} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3—46)$$

где последние $n - r$ элементов равны нулю, из уравнения (5.3—42) можно получить следующее выражение для производной:

$$\dot{\eta}^{(r)} = [\nabla_x \mathbf{g}^{(r)}]' \eta + [\nabla_m \mathbf{g}^{(r)}]' \xi, \quad (5.3—47)$$

где матрица $[\nabla_m \mathbf{g}^{(r)}]'$ не сингулярна.

Решение уравнения (5.3—47) относительно ξ дает формулу

$$\xi = [(\nabla_m \mathbf{g}^{(r)})']^{-1} \dot{\eta}^{(r)} - [(\nabla_m \mathbf{g}^{(r)})']^{-1} (\nabla_x \mathbf{g}^{(r)})' \eta. \quad (5.3—48)$$

Подставив ξ в уравнение (5.3—36), получаем

$$\int_{t_0}^{t_f} \{ (\nabla_x F)' - (\nabla_m F)' [(\nabla_x \mathbf{g}^{(r)}) (\nabla_m \mathbf{g}^{(r)})^{-1}]' \} \times \\ \times \eta dt + \int_{t_0}^{t_f} (\nabla_m F)' [\nabla_m \mathbf{g}^{(r)}]'^{-1} \dot{\eta}^{(r)} dt = 0. \quad (5.3—49)$$

Производя интегрирование второго интеграла по частям и используя граничные условия $\eta(t_0) = 0$ и

$$(\nabla_m F)' [(\nabla_m \mathbf{g}^{(r)})']^{-1} |_{t_f} = 0, \quad (5.3—50)$$

преобразуем уравнение (5.3—49) к виду

$$\int_{t_0}^{t_f} \{ (\nabla_x F)' - (\nabla_m F)' [(\nabla_x \mathbf{g}^{(r)}) (\nabla_m \mathbf{g}^{(r)})^{-1}]' \} \times \\ \times \eta dt - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \{ (\nabla_m F)' [(\nabla_m \mathbf{g}^{(r)})']^{-1} \} \dot{\eta}^{(r)} dt = 0. \quad (5.3—51)$$

Уравнение (5.3—51) можно переписать следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t_f} \dot{\eta}^{(r)} [(\nabla_x F)' - (\nabla_x \mathbf{g}^{(r)}) (\nabla_m \mathbf{g}^{(r)})^{-1} (\nabla_m F)'] dt - \\ - \int_{t_0}^{t_f} [\dot{\eta}^{(r)}]' \frac{d}{dt} [(\nabla_m \mathbf{g}^{(r)})^{-1} (\nabla_m F)] dt = 0. \quad (5.3—52)$$

Для исключения $\dot{\eta}^{(r)}$ вводится матрица размера $n \times r$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (\nabla_m \mathbf{g}^{(r)})^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3—53)$$

где последние $n - r$ строк равны нулю.

Тогда

$$[\eta^{(r)}]'(\nabla_{\mathbf{m}} \mathbf{g}^{(r)})^{-1} = \eta' \mathbf{R}. \quad (5.3-54)$$

Подставляя выражение (5.3—54) в уравнение (5.3—52), получаем

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta' \{(\nabla_{\mathbf{x}} F) - (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}^{(r)}) (\nabla_{\mathbf{m}} \mathbf{g}^{(r)})^{-1} \times \\ \times (\nabla_{\mathbf{m}} F) - \frac{d}{dt} [\mathbf{R}(\nabla_{\mathbf{m}} F)]\} dt = 0. \quad (5.3-55)$$

Так как уравнение (5.3—55) должно удовлетворяться при любых η , то выражение в фигурных скобках должно быть равно нулю. Дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа для данного многомерного процесса управления имеет вид

$$(\nabla_{\mathbf{x}} F) - (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}^{(r)}) (\nabla_{\mathbf{m}} \mathbf{g}^{(r)})^{-1} (\nabla_{\mathbf{m}} F) - \frac{d}{dt} [\mathbf{R}(\nabla_{\mathbf{m}} F)] = 0. \quad (5.3-56)$$

Решение этого дифференциального уравнения при граничных условиях вида (5.3—50) и $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ определяет вектор оптимального управления $\mathbf{m}(t)$ системы.

В особом случае, когда

$$\mathbf{m} = \mathbf{x}, \quad (5.3-57)$$

получаем $\nabla_{\mathbf{m}} \mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{1}'$ и $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Таким образом, уравнение Эйлера — Лагранжа сводится к

$$\nabla_{\mathbf{x}} F - \frac{d}{dt} (\nabla_{\mathbf{x}} F) = 0, \quad (5.3-58)$$

что согласуется с уравнением (5.2—16).

5.4. МНОЖИТЕЛИ ЛАГРАНЖА И УЧЕТ ФИЗИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ

В предыдущем параграфе рассматривалась схема оптимального управления по минимуму интегрального критерия качества в предположении, что как управляющие воздействия, так и переменные состояния свободны от ограничений. Однако на практике на управляющие воздействия и переменные состояния, характеризующие процессы управления, очень часто накладываются некоторые физические ограничения. Для того чтобы получить реальные условия оптимального управления физическими процессами, надо принимать во внимание эти ограничения. В этом параграфе рассматривается учет ограничений при помощи множителей Лагранжа. В математических курсах показано, что ме-

тод множителей Лагранжа дает изящный подход к решению задачи отыскания максимума или минимума функции, подчиненной одному или нескольким ограничениям, когда ограничивающие зависимости настолько сложны, что их трудно использовать для исключения свободных параметров. Метод множителей Лагранжа делает не нужным решение уравнений, определяющих ограничения, с целью исключения свободных параметров.

Пусть $P(\mathbf{m}) = P(m_1, m_2, \dots, m_r)$ — функция, максимумы или минимумы которой надо найти, при наличии ограничения вида

$$\mathbf{Q}(\mathbf{m}) = \mathbf{Q}(m_1, m_2, \dots, m_r) \leq \mathbf{c}, \quad (5.4-1)$$

где \mathbf{Q} — матрица размера $r \times 1$, а \mathbf{c} r -мерный вектор

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}. \quad (5.4-2)$$

Например, ограничение, определяемое выражением (5.4-1), может представлять собой условие $m_i^2 \leq c_i$, т. е. квадраты управляющих воздействий ограничены. Выражение (5.4-1) может также описывать условие $q_i(m_i) \leq c_i$, т. е. ограничены некоторые функции управляющих воздействий. Тогда, согласно методу определенных множителей Лагранжа, искомым вектор \mathbf{m} , который обеспечивает максимум или минимум функции $P(\mathbf{m})$, можно найти, определив условия максимума или минимума промежуточной функции

$$G(\mathbf{m}) = P(\mathbf{m}) + \lambda' \mathbf{Q}(\mathbf{m}), \quad (5.4-3)$$

где λ — r -мерный вектор-столбец, называемый векторным множителем Лагранжа. Отыскав максимум или минимум этой новой функции, получим вектор \mathbf{m} как функцию векторного множителя Лагранжа λ . Подстановка вектора $\mathbf{m}(\lambda) = \mathbf{m}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ в ограничительное соотношение (5.4-1) приводит к r уравнениям, позволяющим определить элементы λ_i векторного множителя Лагранжа [27, 29, 35, 52, 94, 99, 112, 135].

Линейный процесс управления в случае квадратичного критерия

Рассмотрим линейный многомерный процесс, характеризующийся уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{m}(t), \quad (5.4-4)$$

где \mathbf{x} — n -мерный вектор состояния, \mathbf{m} — r -мерный вектор управления, а матрица коэффициентов \mathbf{A} и матрица \mathbf{D} имеют соответственно размеры $n \times n$ и $n \times r$.

Рассмотрим вектор оптимального управления $\mathbf{m}(t)$, который обеспечивает минимум интегрального критерия

$$I(\mathbf{m}) = \int_0^T \mathbf{m}' \mathbf{H} \mathbf{m} dt \quad (5.4-5a)$$

при ограничениях на переменные состояния вида

$$\mathbf{x}(T) = 0. \quad (5.4-5b)$$

В критерии (5.4—5а) подинтегральная функция

$$F(\mathbf{m}) = \mathbf{m}' \mathbf{H} \mathbf{m} \quad (5.4-6)$$

является квадратичной функцией. Матрица \mathbf{H} является симметрической и положительно определенной. Предполагается, что вектор начального состояния данного процесса равен

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (5.4-7)$$

Для применения метода множителей Лагранжа ограничение (5.4—5б) сначала преобразовывается в интегральное ограничение, так как заданный критерий выражается в виде интеграла. Можно показать, что решение уравнения (5.4—4) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{D} \mathbf{m}(\tau) d\tau, \quad (5.4-8)$$

где $\Phi(t)$ — матрица перехода процесса.

На конце траектории $t = T$ вектор состояния равен

$$\mathbf{x}(T) = \Phi(T) \mathbf{x}_0 + \int_0^T \Phi(T-\tau) \mathbf{D} \mathbf{m}(\tau) d\tau. \quad (5.4-9)$$

Принимая во внимание формулу (5.4—5б), получим

$$\Phi(T) \mathbf{x}_0 + \int_0^T \Phi(T-\tau) \mathbf{D} \mathbf{m}(\tau) d\tau = 0. \quad (5.4-10)$$

Решая это уравнение относительно \mathbf{x}_0 и заменяя τ на t , найдем, что

$$\mathbf{x}_0 = - \int_0^T \Phi(-t) \mathbf{D} \mathbf{m}(t) dt. \quad (5.4-11)$$

Задачу оптимизации можно теперь формулировать, как задачу минимизации функции $I(\mathbf{m})$, определяемую выражением

(5.4—5а) по отношению к вектору управления \mathbf{m} , при наличии ограничения (5.4—11). Другими словами, заданное ограничивающее соотношение преобразовано в интегральное ограничение.

При введении векторного множителя Лагранжа λ проблема оптимизации становится задачей минимизации критерия

$$I_1(\mathbf{m}) = \int_0^T [\mathbf{m}'(t) \mathbf{H} \mathbf{m}(t) + \lambda' \varphi(-t) \mathbf{D} \mathbf{m}(t)] dt. \quad (5.4-12)$$

Применяя уравнение Эйлера — Лагранжа, получаем

$$\nabla_{\mathbf{m}} [\mathbf{m}'(t) \mathbf{H} \mathbf{m}(t) + \lambda' \varphi(-t) \mathbf{D} \mathbf{m}(t)] = (\mathbf{H} + \mathbf{H}') \mathbf{m}(t) + \mathbf{D}' [\varphi(-t)]' \lambda; \quad (5.4-13)$$

$$\nabla_{\mathbf{m}} [\mathbf{m}'(t) \mathbf{H} \mathbf{m}(t) + \lambda' \varphi(-t) \mathbf{D} \mathbf{m}(t)] = 0. \quad (5.4-14)$$

Следовательно, необходимым условием, чтобы $I_1(\mathbf{m})$ имело экстремум, является

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}') \mathbf{m}(t) + \mathbf{D}' [\varphi(-t)]' \lambda = 0. \quad (5.4-15)$$

Так как матрица \mathbf{H} симметрична, то $\mathbf{H} = \mathbf{H}'$. Уравнение (5.4—15) сводится к

$$2\mathbf{H} \mathbf{m}(t) + \mathbf{D}' [\varphi(-t)]' \lambda = 0, \quad (5.4-16)$$

и вектор оптимального управления в интервале $(0, T)$ определяется выражением

$$\mathbf{m}^0(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}' [\varphi(-t)]' \lambda. \quad (5.4-17)$$

Векторный множитель Лагранжа λ можно определить, используя ограничение (5.4—11). Подстановка оптимального вектора управления $\mathbf{m}^0(t)$ в уравнение (5.4—11) дает равенство

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{V}(T) \lambda, \quad (5.4-18)$$

где

$$\mathbf{V}(T) = \frac{1}{2} \int_0^T \varphi(-t) \mathbf{D} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}' [\varphi(-t)]' dt. \quad (5.4-19)$$

Если матрица $\mathbf{V}(T)$ не сингулярна, то векторный множитель Лагранжа определяется выражением

$$\lambda = \mathbf{V}^{-1}(T) \mathbf{x}_0. \quad (5.4-20)$$

Поэтому вектор оптимального управления

$$\mathbf{m}^0(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}' [\varphi(-t)]' \mathbf{V}^{-1}(T) \mathbf{x}_0. \quad (5.4-21)$$

Предыдущие рассуждения поясняют способ применения метода множителей Лагранжа к минимизации интегрального критерия, подчиненного неинтегральной ограничительной зависимости. В следующих параграфах будет изучена задача минимизации неинтегрального критерия, подчиненного интегральному ограничению.

Задача управления конечным состоянием при интегральном ограничении

Рассмотрим многомерный процесс управления, описываемый уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{m}(t), \quad (5.4-22)$$

где вектор состояния \mathbf{x} имеет размерность n ; вектор управления — размерность r ; матрица $\mathbf{D}(t)$ — функция времени; а $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ — дифференцируемая функция.

Определим оптимальный вектор управления \mathbf{m} , который обеспечивает минимум критерия

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1(T) + x_2(T) \quad (5.4-23)$$

и подчиняется ограничению

$$\int_0^T g(\mathbf{m}) dt = K. \quad (5.4-24)$$

В уравнении (5.4-23) $x_1(T)$ и $x_2(T)$ обозначают переменные состояния процесса $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в конце траектории. Вектор начального состояния $\mathbf{x}(0) = 0$. Приведенная формулировка соответствует процессу управления конечным состоянием системы посадки самолета, если x_1 представляет ошибку в высоте, а x_2 — ошибку в скорости снижения. Высота и скорость ее изменения в некоторый момент, соответствующий окончанию посадки, уменьшаются до желаемых значений посредством минимизации ошибок при соблюдении заданных ограничений на управляющие воздействия.

Для непосредственного применения метода множителей Лагранжа критерий (5.4-23) необходимо преобразовать к интегральному виду. Введем в рассмотрение функционал

$$I = \int_0^T F(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) dt, \quad (5.4-25)$$

где

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) = \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t). \quad (5.4-26)$$

Проблема оптимального управления сводится к минимизации интеграла (5.4—25), подчиненного ограничению вида (5.4—24). Введем вектор-столбец

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4-27)$$

состоящий из n элементов.

Подынтегральная функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)$ может быть представлена в виде

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) = \dot{\mathbf{x}}'(t) \mathbf{b} = \mathbf{X}'(\mathbf{x}, t) \mathbf{b} + \mathbf{m}'(t) \mathbf{D}'(t) \mathbf{b}. \quad (5.4-28)$$

Введение множителя Лагранжа λ приводит к рассмотрению нового функционала

$$I_1 = \int_0^T [F(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) + \lambda g(\mathbf{m})] dt, \quad (5.4-29)$$

и задача управления сводится теперь к определению вектора оптимального управления \mathbf{m} , который обеспечивает минимум интеграла (5.4—29).

В параграфе 5.3 было показано, что необходимым условием для минимума I_1 является уравнение Эйлера — Лагранжа

$$(\nabla_{\mathbf{x}} G) - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}^{(r)}] [\nabla_{\mathbf{m}} \mathbf{f}^{(r)}]^{-1} (\nabla_{\mathbf{m}} G) - \frac{d}{dt} [R(\nabla_{\mathbf{m}} G)] = 0, \quad (5.4-30)$$

где $\nabla_{\mathbf{x}}$ и $\nabla_{\mathbf{m}}$ имеют тот же смысл, что и в параграфе 5.3;

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) + \lambda g(\mathbf{m}) \quad (5.4-31)$$

— подынтегральная функция I_1 ;

$$\mathbf{f}^{(r)} = [f_1, f_2, \dots, f_r] \quad (5.4-32)$$

— вектор-строка, состоящая из r элементов; R — матрица размера $n \times r$, в которой $n - r$ последних строк равны нулю:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (\nabla_{\mathbf{m}} \mathbf{f}^{(r)})^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4-33)$$

Дифференцируя уравнение (5.4—31) по x_i , получаем

$$\nabla_x G = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \mathbf{J}'(\mathbf{x}) \mathbf{b}, \quad (5.4-34)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ — якобиан, определяемый выражением

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (5.4-35)$$

Беря частную производную уравнения (5.4—31) по \mathbf{m} , получаем

$$\nabla_m G = \mathbf{D}'(t) \mathbf{b} + \lambda \nabla_m g(\mathbf{m}). \quad (5.4-36)$$

Частные производные уравнения (5.4—32) по \mathbf{x} и \mathbf{m} соответственно имеют вид

$$\nabla_x \mathbf{f}^{(r)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_r}{\partial x_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_r}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_n} & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial X_r}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (5.4-37)$$

$$\nabla_m \mathbf{f}^{(r)} = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{21}(t) & \dots & d_{r1}(t) \\ d_{12}(t) & d_{22}(t) & \dots & d_{r2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{1r}(t) & d_{2r}(t) & \dots & d_{rr}(t) \end{bmatrix}. \quad (5.4-38)$$

Легко показать, что справедливы следующие отношения:

$$[\nabla_m \mathbf{f}^{(r)}]^{-1} (\nabla_m G) = \mathbf{b} + \lambda [\nabla_m \mathbf{f}^{(r)}]^{-1} [\nabla_m g]; \quad (5.4-39)$$

$$\mathbf{R}(\nabla_m G) = \mathbf{b} + \lambda \mathbf{R}[\nabla_m g]; \quad (5.4-40)$$

$$\mathbf{J}'(\mathbf{x}) \mathbf{b} = [\nabla_x \mathbf{f}^{(r)}] \mathbf{b}. \quad (5.4-41)$$

Принимая во внимание выражение (5.4—39), уравнение Эйлера — Лагранжа (5.4—30), можно свести к следующему:

$$[\nabla_x f^{(r)}] [\nabla_m f^{(r)}]^{-1} [\nabla_m g] + \frac{d}{dt} [R(\nabla_m g)] = 0. \quad (5.4—42)$$

Решение этого дифференциального уравнения при граничных условиях

$$x(0) = 0 \quad (5.4—43)$$

и

$$(\nabla_m G)' [(\nabla_m f^{(r)})']^{-1} |_{T} = 0 \quad (5.4—44)$$

дает вектор оптимального управления $m(t)$ для рассматриваемого процесса управления.

Оптимизация систем управления при помощи вариационного исчисления обычно приводит к двухточечной краевой задаче. Так как результирующие дифференциальные уравнения Эйлера — Лагранжа обычно нелинейны, то необходимо применение численных методов последовательных приближений.

Один из возможных способов заключается в применении известных градиентных методов.

5.5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе изложены некоторые основные принципы вариационного исчисления, применимые к решению задач оптимального управления. Вариационное исчисление — это раздел математики, изучающий задачи оптимизации при более общих условиях, чем те, которые рассматриваются в обычной теории максимумов и минимумов. В вариационном исчислении имеются три основные задачи — это задачи Лагранжа, Майера и Больца. Для преобразования задачи одного вида к какому-либо из двух остальных всегда можно ввести некоторые вспомогательные переменные и многие задачи оптимального управления можно свести к одной из трех указанных задач. Задача управления по минимуму интеграла сводится к задаче Лагранжа. Задачи управления, оптимального по быстродействию, и оптимального управления конечным состоянием можно рассматривать как задачу Майера. Системы оптимального управления, подчиненные некоторым ограничениям, сводятся к задаче Больца.

Оптимизация систем управления при помощи вариационного исчисления обычно приводит к двухточечной краевой задаче. Аналитическое решение таких задач возможно только в особых случаях. Ввиду того, что дифференциальные уравнения Эйлера — Лагранжа обычно нелинейны, необходимо пользоваться численными методами последовательных приближений. Этот метод состоит в переборе начальных условий и в численном интегрирова-

нии системы уравнений Эйлера — Лагранжа с учетом ограничения. Подробное изложение метода последовательных приближений читатель может найти в современных курсах по прикладной математике и численным методам анализа. При проектировании систем оптимального управления трудность решения двухточечной краевой задачи делает классическое вариационное исчисление малоприменимым. Более того, применение вариационного исчисления обычно ограничено системами, в которых на управляющие воздействия не накладывается каких-либо ограничений.

Литература к гл. 5

Блисс [29], Больца [35], Гулд, Кипиняк [71], Кипиняк [94],
Лейтман [112].

ВВЕДЕНИЕ В ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В автоматике оптимизация считается одной из важнейшей проблем. Автоматику можно определить как отрасль науки и техники, занимающуюся разработкой приборов, установок и систем, работающих без непосредственного участия человека и выполняющих некоторые функции, связанные с умственной деятельностью человека. Среди многих методов решения проблем оптимизации наиболее эффективными при решении сложных задач обычно считаются два метода: принцип максимума Понтрягина и метод динамического программирования, разработанный Беллманом. Метод динамического программирования излагается в гл. 7; в этой главе рассматривается принцип максимума.

Принцип максимума Понтрягина, как это будет ясно из дальнейшего изложения, тесно связан с классической задачей Майера. Принцип максимума был первоначально получен Понтрягиным при помощи классического вариационного исчисления. Однако в одном отношении он отличается от классической задачи Майера. В задаче Майера управляющие воздействия имеют неограниченные пределы, а в работе Понтрягина управляющие воздействия могут быть элементами замкнутого множества или, другими словами, величины управляющих воздействий могут быть ограничены некоторыми пределами. Кроме того, применяя принцип максимума, можно определить характерные черты и общую структуру системы оптимального управления. Эта глава посвящена изучению принципа максимума в оптимальном управлении.

6.1. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Современная техника управления придает большое значение проблемам оптимизации системы и оптимальному управлению, которые играют в автоматике существенную роль. Ученый, желающий произвести опыты при помощи приборов, установленных на спутнике, стремится получить оптимальную траекторию восхождения, чтобы вывести максимальный полезный груз на орби-

ту. Инженер-химик, проектирующий химические реакторы, стремится достигнуть максимальной производительности химического процесса. Из многих задач оптимального управления три основных типа задач: задача управления для достижения максимального быстродействия, задача управления конечным состоянием и задача управления по минимуму интеграла, имеют особенно существенное значение и поэтому привлекли к себе наибольшее внимание.

Проектирование систем управления, обеспечивающих максимальное быстродействие или минимальное время переходного процесса методом переходных состояний, рассмотрено с некоторыми подробностями в гл. 4. С точки зрения вариационного исчисления задача управления по минимуму времени переходного процесса формулируется как задача типа Майера. В данной главе эта задача решается с помощью принципа максимума Понтрягина. Рассмотрим управление процессом n -го порядка, характеризуемого уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t), \quad (6.1-1)$$

где \mathbf{x} и \mathbf{m} соответственно вектор состояния и вектор управления:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{bmatrix}. \quad (6.1-2)$$

Управление процессом осуществляется r управляющими воздействиями. В каждый момент управляющие воздействия должны удовлетворять ограничению в виде неравенства

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}) \leq 0, \quad (6.1-3)$$

что следует из ограничений, налагаемых на систему управления.

Например, когда управляющие воздействия ограничены насыщением, неравенство (6.1-3) принимает вид

$$a_i > m_i > -b_i, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (6.1-4)$$

Вектор управления, удовлетворяющий ограничивающим условиям, называется вектором допустимого управления. Задачу управления по минимуму времени переходного процесса можно сформулировать как задачу определения вектора допустимого управления \mathbf{m} , переводящего процесс из заданного начального состояния \mathbf{x}_0 в желаемое конечное состояние \mathbf{x}_f за минимальное время.

Проектирование систем управления конечным состоянием основано на том положении, что если даны начальные условия для системы, описываемой дифференциальными уравнениями, то при отсутствии возмущений можно предсказать ее поведение в буду-

шем. Желаемое конечное состояние достигается непрерывным управлением и прогнозом конечных условий. Таким образом, желаемые конечные значения выходных переменных в системе приводятся к требуемым значениям, если даже имеются возмущения. Принцип управления конечным состоянием применяется при проектировании систем посадки самолетов, управляемых ракет и т. д. В системе посадки самолетов прогнозируются и доводятся до желаемых значений скорость снижения и высота в определенный момент времени, соответствующий посадке.

Задачу управления конечным состоянием можно сформулировать как задачу определения такого вектора допустимого управления m , при котором за данный интервал времени T система переходит из начального состояния x_0 в такое состояние, при котором одна или некоторая совокупность переменных состояний (например, x_1) приобретает возможно большие или возможно меньшие значения, а остальные переменные состояния имеют фиксированные значения в физических допустимых пределах. Другими словами, вектор допустимого управления обеспечивает максимум или минимум, например, функционала вида

$$x_1(T) = F_1(x_0, x, m, t)|_T \quad (6.1-5)$$

или

$$\sum_{i=1}^k c_i x_i(T) = F_2(x_0, x, m, t)|_T \quad (6.1-6)$$

или вообще функционала переменных состояний в конечной точке траектории. В уравнении (6.1-6) $k \leq n$, $x_i(T)$ обозначает i -ю переменную состояния, вычисленную в конечной точке траектории. В ряде случаев нет необходимости фиксировать конечные значения всех остальных переменных состояния x_{k+1} , x_{k+2} , ..., x_n в конце траектории. Иначе говоря, система управления конечным состоянием проектируется таким образом, чтобы она имела желаемую реакцию только в один единственный момент времени, а в остальные моменты времени ее реакция может быть произвольной в физически допустимых пределах.

Задача управления по минимуму интеграла связана с оптимизацией системы по отношению к некоторому интегралу. В очень многих встречающихся на практике процессах управления инженеру приходится сталкиваться с положением, когда отклонения выходной переменной от некоторого требуемого значения являются нежелательными. Иногда вычисляется среднее значение этого отклонения, представляющее собой, например, прибыль или убыток; в других случаях эффект усредняется таким образом, чтобы получить представление об ухудшении качества продукции. Короче говоря, очень часто особый интерес представляет среднее отклонение в течение некоторого периода времени. В таких случаях задача системы управления состоит в том, чтобы

обеспечить минимум интеграла этого изменения в течение заданного периода времени. Эту проблему оптимального управления можно сформулировать как определение вектора допустимого управления \mathbf{m} , минимизирующего интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) dt \quad (6.1-7)$$

в течение интервала времени $t_f - t_0$.

Три типовых задачи оптимального управления можно свести к задаче оптимизации по отношению к координатам или переменным состояния, называемой обобщенной задачей оптимального управления. Задачи управления по минимуму времени, конечным состоянием и по минимуму интеграла являются частными случаями задачи минимизации по отношению к одной координате. Преобразование производится с помощью процедуры «инвариантного вложения» или увеличения размерности вектора состояния путем добавления новой координаты. Ниже рассматривается сведение всех трех способов оптимального управления к обобщенному способу управления.

а. Сведение проблемы управления по минимуму времени к обобщенному способу оптимального управления

Рассмотрим управление процессом n -го порядка, характеризуемым уравнением (6.1-1). Вводя в рассмотрение составляющие вектора состояния, уравнение (6.1-1) можно записать в виде

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.1-8)$$

Задача заключается в том, чтобы перевести процесс из начального состояния в желаемое конечное состояние за минимальное время, т. е. получить

$$\min_{\mathbf{m}} \int_{t_0}^t dt. \quad (6.1-9)$$

Введем новую переменную состояния $x_{n+1}(t)$, удовлетворяющую условиям

$$\dot{x}_{n+1}(t) = 1 \quad (6.1-10)$$

и

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t dt. \quad (6.1-11)$$

Тогда проблема оптимального управления сводится к определению вектора допустимого управления \mathbf{m} , минимизирующего новую переменную состояния x_{n+1} . На оптимальный вектор управления накладывается ограничение (6.1—3). Так как $x_{n+1}(t) = t - t_0$, то минимизация по времени означает оптимизацию по отношению к новой координате x_{n+1} .

6. Сведение задачи управления конечным состоянием к обобщенному способу оптимального управления

Рассмотрим управление процессом n -го порядка, характеризуемым уравнением (6.1—8). В общем виде задачу управления конечным состоянием можно сформулировать как задачу определения такого допустимого вектора управления \mathbf{m} , который за данный интервал времени T обеспечивает минимум или максимум функционала от вектора конечного состояния $\mathbf{x}(T)$.

Другими словами, эта задача оптимального управления требует определения допустимого \mathbf{m} , чтобы обратить в минимум или максимум функционал $F[\mathbf{x}(T)]$.

Введем теперь новую переменную состояния

$$x_{n+1}(t) = F[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)], \quad (6.1-12)$$

имеющую начальное значение

$$x_{n+1}(0) = F[x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]. \quad (6.1-13)$$

Векторное обозначение для новой переменной состояния имеет вид

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F[\mathbf{x}(t)] \quad (6.1-14)$$

и

$$x_{n+1}(0) = F[\mathbf{x}(0)]. \quad (6.1-15)$$

Беря производную $x_{n+1}(t)$ по t , получаем

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_n} \dot{x}_n. \quad (6.1-16)$$

Принимая во внимание уравнение (6.1—8) для $x_{n+1}(t)$, можем написать

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t). \quad (6.1-17)$$

Производные других переменных состояния определяются уравнением (6.1—8). Итак, задача управления конечным состоянием сведена теперь к задаче оптимизации по отношению к новой координате x_{n+1} в конечный момент времени.

в. Сведение задачи управления по минимуму интеграла к обобщенному способу оптимального управления

Рассмотрим управление процессом n -го порядка, характеризуемым уравнением (6.1—8). Проблема оптимального управления требует определения минимума интегрального критерия вида (6.1—7) по отношению к вектору управления \mathbf{m} .

Вводим новую переменную состояния $x_{n+1}(t)$, определяемую выражением

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t F(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) dt; \quad (6.1-18)$$

$$x_{n+1}(t_0) = 0 \quad (6.1-19)$$

и

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t). \quad (6.1-20)$$

Тогда задача отыскания минимума интеграла (6.1—7) сводится к задаче отыскания минимума $(n+1)$ -й координаты $x_{n+1}(t_f)$ в конечной точке траектории, т. е. при $t = t_f$. Производные других координат определяются уравнением (6.1—8).

Приведенные задачи оптимального управления можно рассматривать как частные случаи более общей задачи отыскания максимума или минимума функционала

$$\rho = \sum_{i=1}^n b_i x_i(t_f). \quad (6.1-21)$$

Следовательно, в более общем виде обобщенную задачу оптимального управления можно рассматривать как задачу нахождения из всей совокупности допустимых векторов, удовлетворяющих уравнению (6.1—3), такого вектора управления \mathbf{m} , который переводит процесс управления, характеризуемый уравнением (6.1—8), из начального состояния $\mathbf{x}(t_0)$ в некоторую определенную замкнутую область фазового пространства, доставляя максимум или минимум функционалу (6.1—21). Принцип максимума Понтрягина дает изящный способ проектирования таких систем оптимального управления.

Другие задачи оптимального управления, такие как, например, задача оптимизации системы с заданным начальным и конечным состояниями, системы с заданным начальным и переменным конечным состоянием, системы с переменным временем движения, задача встречи, являются вариантами рассмотренных выше задач.

Кроме того, значительный интерес представляют задачи оптимального управления с ограничениями переменных состояния и

оптимизацией функционалов, не зависящих от конечного значения переменных состояния. Так, например, значительный интерес представляет задача минимизации максимального отклонения некоторой переменной состояния от заданного значения.

6.2. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Принцип максимума Понтрягина дает изящный способ получения оптимального решения для широкого класса динамических процессов. Этот принцип позволяет решить проблему оптимизации, требующей отыскания минимума или максимума функционала, подчиненного некоторым ограничениям. Как было показано в предыдущем параграфе, задачи оптимального управления можно свести к задаче оптимизации по отношению к одной из координат или к их совокупности. При управлении по минимуму времени, конечным состоянием и по минимуму интеграла введение новой переменной состояния x_{n+1} сводит задачу оптимального управления к задаче оптимизации этой новой координаты.

Задача оптимального управления может быть сформулирована как задача отыскания минимума или максимума функции Понтрягина

$$\rho = (\mathbf{b}, \mathbf{x}(t_f)) = \mathbf{b}'\mathbf{x}(t_f), \quad (6.2-1)$$

подчиненной некоторым функциональным ограничениям. Стратегия управления, которая обеспечивает минимум или максимум функции Понтрягина, называется стратегией оптимального управления. В выражении (6.2-1) \mathbf{x} — вектор состояния рассматриваемого процесса n -го порядка, а \mathbf{b} — вектор-столбец, зависящий от координат, условия максимума или минимума которых должны быть найдены. Интересно отметить, что этот класс задач содержится в рамках задачи Майера в вариационном исчислении, рассмотренной в предыдущей главе.

Вводя составляющие вектора состояния \mathbf{x} , функцию Понтрягина ρ можно представить в следующем виде:

$$\rho = \sum_{i=1}^n b_i x_i(t_f). \quad (6.2-2)$$

Простая геометрическая интерпретация принципа максимума заключается в таком выборе вектора управления \mathbf{m} , при котором вектор состояния $\mathbf{x}(t_f)$ перемещается «как можно дальше» в направлении — \mathbf{b} , и, таким образом, функция Понтрягина ρ принимает минимальное значение.

В проблемах оптимального управления конечная точка оптимальной траектории может быть свободной или закрепленной. В этом параграфе сначала рассматриваются задачи оптимизации

свободного конечного состояния, а затем результаты обобщаются на задачи оптимального управления с фиксированным конечным состоянием.

Допустим, что рассматриваемый процесс управления описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, m, t). \quad (6.2-3)$$

Требуется определить стратегию управления m так, чтобы функция Понтрягина (6.2—1) имела минимум или максимум, что не всегда легко сделать. Однако решение задачи можно получить более простым путем, если найти некоторую простую функцию, тесно связанную с функцией Понтрягина и с динамикой процесса. Интуитивно ясно, что условия минимума функции Понтрягина можно определить, отыскав условия максимума энергии или мощности в системе. Это интуитивное предположение приводит к выводу о возможности существования такой функции энергии, условия максимума которой эквивалентны условиям минимума функции Понтрягина. В гл. 2 было введено понятие функции Гамильтона. Последняя определяется как сумма кинетической и потенциальной энергий и выражается в виде скалярного произведения вектора количества движения на вектор координат системы. Простота функции Гамильтона и сама ее природа делают очень заманчивой мысль о том, что из условий максимума функции Гамильтона можно получить условия минимума функции Понтрягина и что применение гамильтониана может привести к простому и изящному методу решения проблем оптимизации.

Понтрягин первый открыл это «секретное оружие природы» и назвал свое замечательное открытие принципом максимума. Этот принцип помогает ученым анализировать и синтезировать различные классы физических систем так, чтобы они работали в условиях, достаточно близких к оптимальным.

Принцип максимума (или минимума) гласит, что если вектор управления m оптимален, т. е. если он обеспечивает минимум (или максимум) функции Понтрягина p , то функция Гамильтона $H(x, p, m, t)$ имеет максимум (или минимум) по отношению к m в интервале управления.

Функция Гамильтона определяется выражением

$$H(x, p, m, t) = (p, f) = \sum_{j=1}^n p_j f_j, \quad (6.2-4)$$

где x — вектор состояния; p — вектор количества движения, который будет определен позже, а векторные функции определяются уравнениями, аналогичными уравнениям (6.2—3).

Из сформулированного утверждения вытекает, что если H имеет максимум, то p имеет минимум, и наоборот. Таким образом, необходимым условием, для того чтобы вектор управления

$\mathbf{m}(t)$ обеспечивал минимум функции Понтрягина, является выполнением условия максимума для $\mathbf{m}(t)$.

Первый шаг применения принципа максимума к решению проблем оптимального управления заключается в нахождении условий максимума гамильтониана H по отношению к вектору управления \mathbf{m} . При этом вектор оптимального управления определяется как функция вектора количества движения \mathbf{p} . Затем вектор оптимального управления подставляется в канонические уравнения Гамильтона и получающаяся в результате задача с граничными условиями решается относительно оптимальной траектории.

При проектировании оптимального управления необходимо определить закон оптимального управления $\mathbf{m}^0(\mathbf{x})$ или оптимальную управляющую последовательность $\mathbf{m}^0(t)$. Однако непосредственное применение принципа максимума дает вектор оптимального управления \mathbf{m}^0 как функцию вектора количества движения \mathbf{p} . Для нахождения \mathbf{m}^0 как функции \mathbf{x} или t должны быть получены некоторые уравнения, обеспечивающие связь между \mathbf{m} и \mathbf{p} . Вектор количества движения \mathbf{p} определяется как решение дифференциального уравнения

$$\dot{p}_i = - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.2-5)$$

где

$$p_i(t_f) = -b_i \quad (6.2-6)$$

и b_i — некоторые известные постоянные, входящие в функцию Понтрягина ρ , причем

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t). \quad (6.2-7)$$

Дифференцируя уравнение (6.2—4) по p_i , получаем

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t). \quad (6.2-8)$$

Дифференцирование уравнения (6.2—4) по x_i дает уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2-9)$$

При помощи этих двух уравнений можно привести уравнения (6.2—7) и (6.2—5) к каноническому виду Гамильтона:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad (6.2-10)$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (6.2-11)$$

Эти канонические уравнения подчинены граничным условиям, налагаемым на $x_i(t_0)$ и $p_i(t_f)$, т. е.

$$x_i(t_0) = x_i^0 \quad (6.2-12)$$

и

$$p_i(t_f) = -b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2-13)$$

Физическая интерпретация принципа максимума заключается в следующем: функция Гамильтона H является скалярным произведением \mathbf{p} на $\dot{\mathbf{x}}$ или \mathbf{p} на \mathbf{x} , которое представляет собой мощность, если \mathbf{p} рассматривать как количество движения. Таким образом, для минимума ρ необходима максимальная мощность, а когда ρ минимально, то H — максимально.

Процедура проектирования заключается в отыскании максимума H по отношению к \mathbf{m} , подстановке вектора оптимального управления $\mathbf{m}^0(\mathbf{p})$ в канонические уравнения Гамильтона (6.2-10) и (6.2-11) и в решении этих уравнений относительно оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$ и вектора количества движения $\mathbf{p}(t)$ при граничных условиях (6.2-12) и (6.2-13). Если известна оптимальная траектория $\mathbf{x}(t)$ и известен вектор количества движения $\mathbf{p}(t)$, то можно определить стратегию оптимального управления \mathbf{m}^0 .

Функция Понтрягина ρ , определяемая выражением (6.2-1), и граничное условие (6.2-13) справедливы для процессов управления с произвольным конечным состоянием. Если же на конечное состояние процесса наложено ограничение вида

$$R_k[\mathbf{x}(t_f)] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (6.2-14)$$

то функция Понтрягина принимает вид

$$\rho = \mathbf{b}'\mathbf{x}(t_f) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}[\mathbf{x}(t_f)], \quad (6.2-15)$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — векторный множитель Лагранжа.

Канонические уравнения (6.2-10) и (6.2-11) теперь подчиняются граничным условиям

$$x_i(t_0) = x_i^0 \quad (6.2-16)$$

и

$$p_i(t_f) = - \left[b_i + \sum_{k=1}^r \mu_k \frac{\partial R_k}{\partial x_i(t_f)} \right], \quad (6.2-17)$$

причем конечное состояние $\mathbf{x}(t_f)$ удовлетворяет ограничению (6.2-14).

Главная трудность в применении принципа максимума для расчета оптимальных систем заключается, как будет показано ниже, в нахождении решения двухточечной краевой задачи. Эта

проблема характерна для классического вариационного исчисления и ее нельзя обойти, пользуясь принципом максимума. До сего времени большинство методов решения задачи с граничными условиями в двух точках основывалось на выборе при помощи способа проб и ошибок начального условия $p_i(t_0)$, удовлетворяющего каноническим уравнениям и граничному условию вида (6.2—13) или вида (6.2—17).

В общем случае принцип максимума дает необходимое условие для оптимума, однако, если процесс линейный и подчиняется аддитивной функции управления, т. е. когда динамический процесс описывается уравнением вида

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k(t) + u_i(m_1, m_2, \dots, m_r), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.2-18)$$

или в векторных обозначениях

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(m), \quad (6.2-19)$$

то принцип максимума дает необходимые и достаточные условия для оптимального управления.

Прежде чем излагать доказательство принципа максимума, приведем следующий простой пример для иллюстрации применения этого принципа к проектированию оптимальных систем.

Пример 6.2—1. Оптимальное управление линейным процессом

Рассмотрим простой линейный процесс, характеризуемый уравнением

$$\dot{x} = -ax + \gamma m,$$

где a и γ — положительные постоянные.

Начальное состояние процесса $x(t_0) = x_0$, а управляющее воздействие ограничено: $|m| \leq M$. Определим управляющее воздействие m , которое обеспечивает минимум показателя качества

$$I(m) = \int_{t_0}^{t_f} x^2(m, t) dt.$$

Пусть $x_1 = x$ и пусть новой координатой будет

$$x_2 = \int_{t_0}^{t_f} x_1^2 dt.$$

Тогда дифференциальные уравнения для системы примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + \gamma m; \\ \dot{x}_2 &= x_1^2. \end{aligned}$$

Функция Понтрягина ρ определяется выражением

$$\rho = b_1 x_1 + b_2 x_2 = x_2,$$

где $b_1 = 0$ и $b_2 = 1$.

Задача сводится теперь к определению управляющего воздействия m , минимизирующего функцию Понтрягина. Функция Гамильтона для этой системы имеет вид

$$H = p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 = p_1(-ax_1 + \gamma m) + p_2 x_1^2.$$

Для применения принципа максимума необходимо найти максимум функции Гамильтона по отношению к m . Очевидно, что функция Гамильтона имеет максимум, если знак управляющего воздействия m совпадает со знаком p_1 , а его величина равна максимальному допустимому значению M , т. е.

$$m = M \operatorname{sgn} p_1,$$

где

$$\operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} +1, & \text{если } \alpha > 0; \\ 0, & \text{если } \alpha = 0; \\ -1, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Канонические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}; & \begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + \gamma m; \\ \dot{x}_2 = x_1^2; \end{cases} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}; & \begin{cases} \dot{p}_1 = ap_1 - 2x_1 p_2; \\ \dot{p}_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Начальные условия для x

$$x_1(t_0) = x_0 \text{ и } x_2(t_0) = 0;$$

граничные условия для p

$$p_1(t_f) = 0 \text{ и } p_2(t_f) = -b_2 = -1.$$

Так как

$$\dot{p}_2(t) = 0 \text{ и } p_2(t_f) = -1,$$

то

$$p_2(t) = \operatorname{const} = -1.$$

Подставляя условия максимума функции Гамильтона в канонические уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + \gamma M \operatorname{sgn} p_1; \\ \dot{p}_1 &= ap_1 - 2x_1 p_2 = ap_1 + 2x_1. \end{aligned}$$

Известные граничные условия для этих двух дифференциальных уравнений имеют вид

$$x_1(t_0) = x_0 \text{ и } p_1(t_f) = 0.$$

Это и есть задача с граничными значениями в двух точках, так как граничные условия заданы для обоих концов траектории. Теперь приведенные выше два дифференциальных уравнения требуется решить относительно x_1 и p_1 при этих двух граничных условиях. Процедура решений заключается в выборе наугад значения $p_1(t_0) = p_1$ и в нахождении значений x_1 и p_1 , при которых удовлетворяется другое граничное условие $p_1(t_f) = 0$. После того как определено $p_1(t)$, находится управляющее воздействие $m = M \operatorname{sgn} p_1$, которое переключается

согласно знаку $p_1(t)$. Следовательно, $p_1(t)$ есть требуемая функция переключения. Стратегия оптимального управления $m = M \operatorname{sgn} p_1$ может быть легко реализована при помощи схемы, показанной на рис. 6.2—1.

Иногда легче определить $p_1(t)$ при помощи аналоговой моделирующей установки. Из рис. 6.2—1 следует, что управляющее воздействие m образуется посредством подачи переменной состояния в схему, отмеченную штриховой линией и известную под названием сопряженной системы. Последнее понятие будет рассмотрено в дальнейших разделах. Оптимальное управляющее воздействие является нелинейной функцией переменной состояния. Следует отметить,

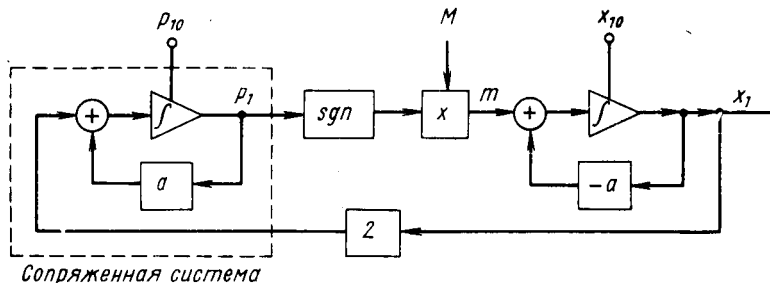


Рис. 6.2—1. К реализации оптимальной системы управления

что закон управления не может быть выражен аналитически как функция переменной состояния. Такую схему оптимального управления иногда называют релейным вариантом оптимального управления.

Дискретный вариант принципа максимума [134]

Принцип максимума может быть применен для расчета оптимальных линейных дискретных систем, которые характеризуются уравнением

$$x_i(k+1) - x_i(k) = T \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}(k) x_j(k) + u_i [m_1(k), m_2(k), \dots, m_r(k)] \right\},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.2-20)$$

где T — период прерывания;

$$x_i(k) = x_i(kT);$$

$$a_{ij}(k) = a_{ij}(kT);$$

$$m_r(k) = m_r(kT).$$

Следует отметить, что уравнение (6.2—20) является дискретным вариантом уравнения (6.2—18).

Разностные уравнения, определяющие вектор количества движения p , имеют вид

$$p_i(k) - p_i(k-1) = -T \sum_{j=1}^n p_j(k) \frac{\partial f_j [x(k), m(k), k]}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(6.2—21)

Так как

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j(t) + u_i(\mathbf{m}), \quad (6.2-22)$$

то, взяв частную производную $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)$ по x_j , получаем

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}(t). \quad (6.2-23)$$

Таким образом, уравнение (6.2—21) можно свести к виду

$$p_i(k) - p_i(k-1) = -T \sum_{j=1}^n p_j(k) a_{ji}(k). \quad (6.2-24)$$

В дискретном случае функция Понтрягина и функция Гамильтона определяются выражениями

$$\rho = \sum_{i=1}^n b_i x_i(N) \quad (6.2-25)$$

и

$$H(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k) f_i(k). \quad (6.2-26)$$

В выражении (6.2—25) функция ρ принимает минимальное (или максимальное) значение при $NT = t_f$. Следовательно, канонические уравнения принимают вид

$$\Delta x_i(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial p_i(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6.2-27)$$

$$\Delta p_i(k-1) = -\frac{\partial H(k)}{\partial x_i(k)}. \quad (6.2-28)$$

Эти уравнения подчиняются граничным условиям (6.2—13).

6.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Принцип максимума можно доказать различными способами; в этом разделе приведено относительно простое доказательство принципа Понтрягина. Доказательство начинается с определения вариации $\delta\rho$ функции Понтрягина, обусловленной вариацией переменных состояния δx_i и вариацией управляющего воздействия $\delta\mathbf{m}$. Допустим, что процесс n -го порядка характеризуется уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t), \quad (6.3-1)$$

где \mathbf{x} — n -мерный вектор состояния, а \mathbf{m} — r -мерный вектор управления. Как обычно, функция Понтрягина записывается в виде

$$\rho = (\mathbf{b}, \mathbf{x}(t_f)) = \sum_{i=1}^n b_i x_i(t_f), \quad (6.3-2)$$

а функция Гамильтона для системы равна

$$H = (\mathbf{p}, \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t). \quad (6.3-3)$$

Сначала найдем вариацию $\delta\rho$ как функцию δx_i и δm . Для этого прежде всего составим сумму

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta x_i. \quad (6.3-4)$$

Беря производную от этой суммы по t , получаем

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n p_i \delta x_i = \sum_{i=1}^n p_i \delta \dot{x}_i + \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta x_i. \quad (6.3-5)$$

Интегрируя обе части уравнения (6.3-5) от t_0 до t_f и упрощая, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_f} &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n p_i [f_i(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, \mathbf{m} + \delta \mathbf{m}, t) - f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)] dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta x_i dt. \end{aligned} \quad (6.3-6)$$

Так как $p_i(t_1) = -b_i$ и $x_i(t_0) = 0$, то

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_f} = - \sum_{i=1}^n b_i \delta x_i(t_f) = -\delta\rho. \quad (6.3-7)$$

Таким образом, вариация функции Понтрягина ρ , вызываемая вариациями x_i и \mathbf{m} , равна

$$\begin{aligned} \delta\rho &= - \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n p_i [f_i(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, \mathbf{m} + \delta \mathbf{m}, t) - f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)] dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta x_i dt. \end{aligned} \quad (6.3-8)$$

Разложение в ряд Тейлора по x дает

$$f_i(x + \delta x, m + \delta m, t) = f_i(x, m + \delta m, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x, m + \delta m, t)}{\partial x_j} \times \\ \times \delta x_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i(x + \theta \delta x, m + \delta m, t)}{\partial x_j \partial x_k} \delta x_j \delta x_k. \quad (6.3-9)$$

Применяя соотношение

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_j p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.3-10)$$

и уравнение (6.3-9), для $\delta\rho$ получим выражение

$$\delta\rho = \int_{t_0}^{t_f} \sum_i \sum_j p_i \frac{\partial f_i(x, m, t)}{\partial x_j} \delta x_j dt - \int_{t_0}^{t_f} \sum_i p_i \left\{ f_i(x, m + \delta m, t) - \right. \\ \left. - f_i(x, m, t) + \sum_j \frac{\partial f_i(x, m + \delta m, t)}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2 f_i(x + \theta \delta x, m + \delta m, t)}{\partial x_j \partial x_k} \delta x_j \delta x_k \right\} dt \quad (6.3-11)$$

или

$$\delta\rho = - \int_{t_0}^{t_f} \sum_i p_i \{ f_i(x, m + \delta m, t) - f_i(x, m, t) \} dt - \int_{t_0}^{t_f} \sum_i \sum_j p_i \times \\ \times \left\{ \frac{\partial [f_i(x, m + \delta m, t) - f_i(x, m, t)]}{\partial x_j} \right\} \delta x_j dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \sum_i \sum_j \sum_k p_i \times \\ \times \frac{\partial^2 f_i(x + \theta \delta x, m + \delta m, t)}{\partial x_j \partial x_k} \delta x_j \delta x_k dt. \quad (6.3-12)$$

Принимая во внимание уравнение (6.3-3) и определяя q при помощи формулы

$$q = \int_{t_0}^{t_f} \sum_i \sum_j p_i \left\{ \frac{\partial [f_j(x, m + \delta m, t) - f_j(x, m, t)]}{\partial x_j} \right\} \delta x_j dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \sum_i \sum_j \sum_k p_i \frac{\partial^2 f_i(x + \theta \delta x, m + \delta m, t)}{\partial x_j \partial x_k} \delta x_j \delta x_k dt, \quad (6.3-13)$$

для $\delta\rho$ получим

$$\delta\rho = - \int_{t_0}^{t_f} [H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{m} + \delta\mathbf{m}, t) - H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{m}, t)] dt - q. \quad (6.3-14)$$

Для доказательства того, что принцип максимума дает необходимое условие минимума функции ρ относительно вектора управления \mathbf{m} , требуется показать, что это условие минимума нарушается, если может быть найден хотя бы один вектор управления \mathbf{m} , при котором функция Гамильтона H не имеет максимума. Заметим, что условием, при котором функция Понтрягина ρ имеет минимум при любом малом изменении $\delta\mathbf{m}$ вектора управления \mathbf{m} , является условие

$$\delta\rho \geq 0. \quad (6.3-15)$$

Теперь допустим, что условие максимума для H не удовлетворяется в течение малого интервала (t_a, t_b) , который заключен внутри интервала (t_0, t_f) . Тогда для любой малой вариации $\delta\mathbf{m}$ вектора управления \mathbf{m}

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{m} + \delta\mathbf{m}, t) - H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{m}, t) > \alpha, \quad (6.3-16)$$

где t находится в интервале (t_a, t_b) , а α — положительная постоянная.

Выберем вектор управления \mathbf{m} , имеющий следующие свойства. В течение интервала (t_a, t_b) вектор \mathbf{m} может изменяться на очень малую величину $\delta\mathbf{m}$, а вне этого интервала \mathbf{m} остается неизменным. При таком векторе управления вариация $\delta\rho$ функции Понтрягина, определяемая выражением (6.3-14), принимает вид

$$\begin{aligned} \delta\rho &= - \int_{t_a}^{t_b} [H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{m} + \delta\mathbf{m}, t) - H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{m}, t)] dt - q = \\ &= - \int_{t_a}^{t_b} \sum_s \frac{\partial H}{\partial m_s} \delta m_s dt - q. \end{aligned} \quad (6.3-17)$$

Так как и $\delta\mathbf{m}$, и $\delta\mathbf{x}$ очень малы, то второй член в правой части выражения (6.3-17) является бесконечно малой высшего порядка, и им можно пренебречь; тогда q приближенно равно

$$q = \int_{t_0}^{t_f} \sum_i \sum_j p_i \left\{ \frac{\partial [f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m} + \delta\mathbf{m}, t) - f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)]}{\partial x_j} \right\} \delta x_j dt. \quad (6.3-18)$$

Разложение в ряд Тейлора функции $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m} + \delta \mathbf{m}, t)$ по \mathbf{m} дает

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m} + \delta \mathbf{m}, t) = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) + \sum_s \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)}{\partial m_s} \delta m_s + \dots \quad (6.3-19)$$

Так как $\delta \mathbf{m}$ очень мало, то из выражения (6.3—19) следует, что

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m} + \delta \mathbf{m}, t) - f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) = \sum_s \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)}{\partial m_s} \delta m_s. \quad (6.3-20)$$

Отсюда

$$q = \int_{t_0}^{t_f} \sum_t \sum_I p_I \sum_s \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)}{\partial x_j \partial m_s} \delta x_j \delta m_s dt. \quad (6.3-21)$$

Принимая во внимание уравнение (6.3—3) и свойство этого вектора управления, получим

$$q = \int_a^b \sum_I \sum_s \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial m_s} \delta x_j \delta m_s dt. \quad (6.3-22)$$

Из формул (6.3—17) и (6.3—22) следует, что

$$\delta \rho = - \int_a^b \sum \left(\frac{\partial H}{\partial m_s} \delta m_s + \sum_I \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial m_s} \delta x_j \delta m_s \right) dt. \quad (6.3-23)$$

Эта величина меньше нуля, так как первый член подынтегральной функции положителен, а величина второго члена меньше первого члена. Это значит, что для данного вектора управления функция Понтрягина ρ не является минимумом при любом малом изменении $\delta \mathbf{m}$ вектора управления \mathbf{m} . Полученный результат указывает на то, что если не удовлетворяется условие максимума для H , то может быть нарушено и условие минимума для ρ . Это доказывает *необходимость условия*.

В параграфе 6.2 было высказано утверждение, что если процесс линейный и подчинен аддитивной функции управления, то принцип максимума обеспечивает необходимые и достаточные условия для оптимального управления. Это может быть доказано следующим образом.

Пусть динамика процесса характеризуется уравнением

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k(t) + u_i(\mathbf{m}). \quad (6.3-24)$$

Тогда функцию Гамильтона системы можно представить в виде

$$H = \sum_i \sum_k a_{ik}(t) p_i(t) x_k(t) + \sum_l p_l(t) u_l(m). \quad (6.3-25)$$

Так как первый член этой функции Гамильтона линейно зависит от x_k и не зависит от m , а второй член не зависит от x , то

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial m_s} = 0 \quad (6.3-26)$$

и уравнение (6.3-14) принимает вид

$$\delta \rho = - \int_{t_0}^{t_f} [H(x, p, m + \delta m, t) - H(x, p, m, t)] dt. \quad (6.3-27)$$

Следовательно, если условие максимума удовлетворяется для функции Гамильтона H , то подинтегральная функция в выражении (6.3-27) не положительна, а $\delta \rho$ не отрицательно, т. е. выполняется условие минимума для функции Понтрягина ρ . Это доказывает *достаточность условия*.

6.4. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПО МИНИМУМУ ВРЕМЕНИ

Задача управления по минимуму времени рассмотрена в параграфе 4.5 с помощью метода переходных состояний. Было показано, что оптимальное по времени управление в случае линейного процесса с ограничением вида насыщения является управлением релейного типа. В этом параграфе принцип максимума применяется к исследованию задач управления по минимуму времени [10, 112, 130, 134, 140].

Рассмотрим управление процессом n -го порядка, характеризуемым уравнением

$$\dot{x}(t) = F(x, t) + D(t)m(t), \quad (6.4-1)$$

где x — n -мерный вектор состояния, а m — r -мерный вектор управления.

Управляющие воздействия подчиняются ограничениям

$$|m_k| \leq M_k. \quad (6.4-2)$$

Определим стратегию управления, которая переводит процесс из данного начального состояния $x(t_0)$ в состояние равновесия

$$x(t_f) = 0 \quad (6.4-3)$$

в кратчайшее время.

Вводя новую координату

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t dt, \quad (6.4-4)$$

сведем проблему оптимального управления к задаче минимизации новой координаты по отношению к вектору управления \mathbf{m} , подчиненному ограничениям (6.4-1) и (6.4-2). Дифференциальные уравнения, характеризующие систему, имеют вид

$$\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^r d_{ij} m_j, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6.4-5)$$

$$\dot{x}_{n+1} = 1 \quad (6.4-6)$$

при начальных условиях

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (6.4-7)$$

В уравнении (6.4-5) функции $d_{ij}(t)$ являются компонентами матрицы $\mathbf{D}(t)$. Так как на конечное состояние оптимальной траектории наложено ограничение в виде условия (6.4-3), то функция Понтрягина принимает вид

$$\rho = (\mathbf{b}, \mathbf{x}(t_f)) + (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{x}(t_f)), \quad (6.4-8)$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — векторный множитель Лагранжа

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}. \quad (6.4-9)$$

Из формулы (6.4-4) следует, что

$$\rho = x_{n+1}(t_f) + (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{x}(t_f)) \quad (6.4-10)$$

и

$$b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6.4-11)$$

$$b_{n+1} = 1. \quad (6.4-12)$$

Функция Гамильтона для этой системы

$$H = (\mathbf{p}, \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^n p_i \left[F_i(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^r d_{ik} m_k \right] + p_{n+1}. \quad (6.4-13)$$

Выражение (6.4-13) показывает, что условия максимума функции Гамильтона H по отношению к \mathbf{m} имеют вид

$$\sum_{i=1}^n p_i \sum_{k=1}^r d_{ik} m_k > 0 \quad (6.4-14)$$

и

$$|m_k| = M_k. \quad (6.4-15)$$

Изменяя порядок суммирования в выражении (6.4—14), получим

$$\sum_{k=1}^r m_k \sum_{i=1}^n p_i d_{ik} > 0. \quad (6.4—16)$$

Следовательно, оптимальные управляющие воздействия, минимизирующие время, требуемое для перевода процесса из определенного начального состояния в состояние равновесия, определяются формулой

$$m_k = M_k \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^n p_i d_{ik}. \quad (6.4—17)$$

Стратегия оптимального управления (6.4—17) указывает, что оптимальные управляющие воздействия m_k равны максимальным допустимым значениям M_k , а их знаки определяются знаком функции

$$S(t) = \sum_{i=1}^n p_i(t) d_{ik}(t). \quad (6.4—18)$$

Другими словами, оптимальная по времени система управления при управляющих воздействиях, ограниченных идеальным насыщением, является системой релейного типа. Этот результат согласуется с результатом, полученным в параграфе 4.5. Оптимальный регулятор включает верхнее или нижнее предельные значения управляющего воздействия в соответствии с функцией переключения, определяемой формулой (6.4—18).

Следующим шагом при расчете оптимальной системы является определение вспомогательных переменных $p_i(t)$ из канонических уравнений

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^r p_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i}; \quad (6.4—19)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = F_i(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^r d_{ij} m_j, \quad (6.4—20)$$

подчиненных граничным условиям

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{p}(t_f) = -\boldsymbol{\mu}. \quad (6.4—21)$$

Так как

$$\dot{p}_{n+1} = 0$$

и

$$p_{n+1}(t_f) = -1,$$

то

$$p_{n+1}(t) = -1.$$

Пример 6.4—1. Управление по минимуму времени в случае системы второго порядка

Задан процесс второго порядка, характеризуемый уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - bx_1 + m\end{aligned}$$

при начальном и конечном условиях

$$\begin{aligned}x_1(t_0) &= x_{10}; & x_2(t_0) &= x_{20}; \\ x_1(t_f) &= 0; & x_2(t_f) &= 0.\end{aligned}$$

Требуется определить управляющее воздействие m , переводящее систему из начального состояния $x(t_0)$ в состояние равновесия $x(t_f) = 0$ в возможно кратчайшее время при ограничении на переменную управления вида

$$|m| \leq M.$$

Вводя новую координату x_3 при помощи соотношения

$$x_3(t) = \int_{t_0}^t dt,$$

получим дифференциальные уравнения преобразованной системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - bx_1 + m; \\ \dot{x}_3 &= 1.\end{aligned}$$

Ясно, что при $t = t_0$ имеет место $x_3(t_0) = 0$. При этом функция Понтрягина ρ принимает вид

$$\rho = x_3(t_f) + \mu_1 x_1(t_f) + \mu_2 x_2(t_f).$$

Теперь задача оптимизации сводится к определению такого управляющего воздействия m , при котором функция Понтрягина имеет минимум. Функция Гамильтона для этой системы

$$H = p_1 x_2 + p_2 (-ax_2 - bx_1 + m) + p_3,$$

где вспомогательные переменные p_1 и p_2 связаны каноническими уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = bp_2; \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = ap_2 - p_1,\end{aligned}$$

которые описывают сопряженную систему, подчиняющуюся граничным условиям $p_1(t_f) = -\mu_1$ и $p_2(t_f) = -\mu_2$. Эти два дифференциальных уравнения называются сопряженными уравнениями. Так как $p_3(t) = 0$ и $p_3(t_f) = -1$, то $p_3(t) = -1$.

Рассмотрение функции Гамильтона показывает, что она имеет максимум, если

$$m = M \operatorname{sgn} p_2(t),$$

где вспомогательная переменная p_2 определяется из вышеприведенных канонических уравнений. Исключение p_1 из этих уравнений дает

$$\ddot{p}_2 - a\dot{p}_2 + bp_2 = 0,$$

откуда находится p_2 :

$$p_2(t) = Ke^{\frac{at}{2}} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{4b - a^2}t + \theta\right),$$

если $a^2 - 4b < 0$, где K и θ являются функциями граничных условий.

Следовательно, оптимальное управляющее воздействие равно

$$m^0 = M \operatorname{sgn} \left[Ke^{\frac{at}{2}} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{4b - a^2}t + \theta\right) \right].$$

Для вычисления постоянных интегрирования K и θ необходимо знать начальные значения $p_1(t_0)$ и $p_2(t_0)$, которые, однако, нелегко определить. Если заданы числовые значения, то для нахождения начальных условий можно при-

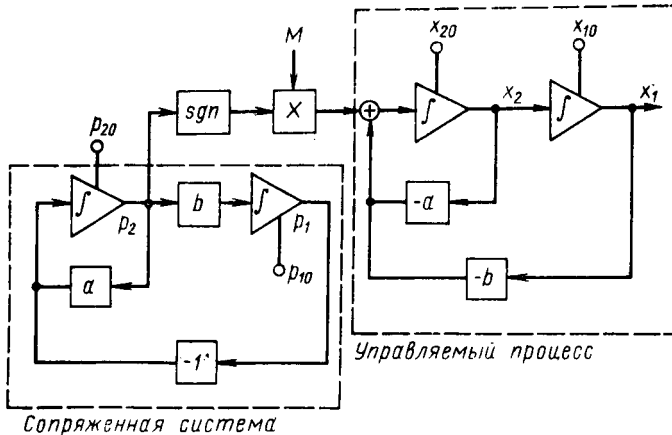


Рис. 6.4—1. К реализации системы управления, оптимальной по быстродействию

менить процедуру проб и ошибок. Система оптимального управления может быть реализована, как показано на рис. 6.4—1. Сопряженная система сформирована так, чтобы на ее выходе получалась вспомогательная переменная $p_2(t)$, от которой зависит знак управляющего воздействия, принимающего значения $+M$ либо $-M$.

Линейный многомерный процесс

Теперь рассмотрим управление по минимуму времени линейным многомерным процессом, описываемым матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t)m(t), \quad (6.4-22)$$

где вектор состояния x имеет размерность n , вектор управления m имеет размерность r , а матрица коэффициентов $A(t)$ и матрица управления $D(t)$ имеют соответственно $n \times n$ и $n \times r$ элементов. Управляющие воздействия подчинены ограничениям

$$|m_k| \leq 1. \quad (6.4-23)$$

Принцип максимума позволяет получить оптимальные управляющие воздействия, которые обеспечивают минимум времени, необходимого для перехода процесса из определенного начального состояния в состояние равновесия. Оптимальные управляющие воздействия определяются формулой

$$m_k(t) = \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^n d_{ik}(t) p_i(t), \quad (6.4-24)$$

где $d_{ik}(t)$ — элементы матрицы $D(t)$.

В векторно-матричных обозначениях вектор оптимального управления

$$m^0(t) = \operatorname{sgn} \{D'(t)p(t)\}. \quad (6.4-25)$$

Вспомогательные переменные можно определить из канонических уравнений

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^n a_{ki}(t) p_k(t), \quad (6.4-26)$$

которые описывают сопряженную систему для данного процесса управления.

В векторно-матричных обозначениях сопряженное уравнение имеет вид

$$\dot{p}(t) = -A'(t)p(t) \quad (6.4-27)$$

и имеет решение

$$p(t) = \Phi_a(-t, t_0)p(t_0), \quad (6.4-28)$$

где $\Phi_a(-t, t_0)$ — матрица перехода сопряженной системы, изменяющейся во времени.

Следовательно, вектор оптимального управления

$$m^0(t) = \operatorname{sgn} s(t), \quad (6.4-29)$$

где функция переключения $s(t)$ определяется выражением

$$s(t) = D'(t) \Phi_a(-t, t_0)p(t_0). \quad (6.4-30)$$

Эти два уравнения показывают, что если известен вектор начального состояния $p(t_0)$ для сопряженной системы, то вектор оптимального управления может быть найден. Однако обычно значения $p(t_0)$ не известны и зависят от начального и конечного состояний процесса.

Проведенный с помощью принципа максимума анализ показывает, что система с минимальным временем перехода схематически может быть представлена при помощи блок-схемы, изображенной на рис. 6.4—2. Эта блок-схема иллюстрирует необходимые этапы проектирования системы управления, оптимальной по быстродействию. Если вектор начального состояния $\mathbf{p}(t_0)$ для сопряженной системы определен надлежащим образом, то сопряженная система позволяет найти вспомогательный вектор состояния $\mathbf{p}(t)$, который, в свою очередь, позволяет найти функцию переключения для оптимального управляющего воздействия. Легко

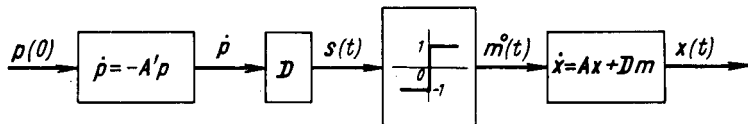


Рис. 6.4—2. Структурная схема системы управления, оптимальной по быстродействию

видеть, что оптимальное управляющее воздействие получается как выходной сигнал идеального релейного элемента.

В случае процессов, инвариантных во времени¹, матрицы коэффициентов \mathbf{A} и \mathbf{D} являются постоянными матрицами, и матрицу перехода можно выразить в виде простой экспоненциальной функции времени. Решение для сопряженной системы при процессах, инвариантных во времени, имеет вид

$$\mathbf{p}(t) = e^{-\mathbf{A}'t} \mathbf{p}(t_0). \quad (6.4-31)$$

Таким образом, функция переключения $s(t)$ для инвариантных во времени процессов управления может быть выражена формулой

$$s(t) = \mathbf{D}' e^{-\mathbf{A}'t} \mathbf{p}(t_0), \quad (6.4-32)$$

а вектор оптимального управления имеет вид

$$\mathbf{m}^0(t) = \text{sgn} [\mathbf{D}' e^{-\mathbf{A}'t} \mathbf{p}(t_0)]. \quad (6.4-33)$$

Это подтверждает результат, полученный в параграфе 4.7.

6.5. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫМ СОСТОЯНИЕМ

В предыдущей главе задача управления конечным состоянием изучалась как задача Майера классического вариационного исчисления. Расчет оптимального управления выполнялся при

¹ Т. е. процессов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. *Прим. ред.*

допущении, что на управляющие воздействия не наложено никаких ограничений. В этом параграфе рассматривается оптимизация управления конечным состоянием с помощью принципа максимума Понтрягина с учетом физических ограничений на управляющие воздействия [130].

Рассмотрим процесс n -го порядка, характеризуемый уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{m}(t) \quad (6.5-1)$$

при начальных условиях вида $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

В уравнении (6.5—1) \mathbf{x} — n -мерный вектор состояния, а \mathbf{m} — r -мерный вектор управления. Управляющие воздействия подчинены ограничениям

$$|m_k| \leq M_k. \quad (6.5-2)$$

Необходимо определить вектор оптимального управления $\mathbf{m}(t)$, минимизирующий функционал

$$I = G[\mathbf{x}(T)] = G[x_1(T), x_2(T), \dots, x_n(T)]. \quad (6.5-3)$$

Функционал $G[\mathbf{x}(T)]$, обладающий свойством дифференцируемости, определяет значения переменных состояния процесса управления на конце траектории.

Расчет начинается с введения новой координаты

$$x_{n+1}(t) = G[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)], \quad (6.5-4)$$

после чего задача управления конечным состоянием сводится к задаче минимизации новой координаты, вычисленной при $t = T$, по отношению к вектору управления \mathbf{m} , подчиненному ограничениям (6.5—1) и (6.5—2). Дифференциальные уравнения, описывающие преобразованную систему, имеют вид

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) = F_i(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^r d_{ij}m_j, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6.5-5)$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) \quad (6.5-6)$$

при начальных условиях

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad (6.5-7)$$

$$x_{n+1}(t_0) = G_0. \quad (6.5-8)$$

В уравнении (6.5—5) $d_{ij}(t)$ — элементы матрицы $\mathbf{D}(t)$. Так как функция Понтрягина ρ имеет вид

$$\rho = x_{n+1}(T), \quad (6.5-9)$$

то коэффициенты b_i равны

$$b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6.5-10)$$

$$b_{n+1} = 1. \quad (6.5-11)$$

Функция Гамильтона для этой системы равна

$$H = (p, f) = \sum_{i=1}^n p_i f_i + p_{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_i} f_i(x, m, t). \quad (6.5-12)$$

Воспользовавшись уравнением (6.5—5), после простых преобразований получаем

$$H = \sum_{i=1}^n \left(p_i + p_{n+1} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) F_i(x, t) + \sum_{i=1}^n \left(p_i + p_{n+1} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) \sum_{j=1}^r d_{ij} m_j. \quad (6.5-13)$$

Из этого выражения вытекает, что условия максимума функции Гамильтона H по отношению к m имеют вид

$$\sum_{i=1}^n \left(p_i + p_{n+1} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) \sum_{j=1}^r d_{ij} m_j > 0 \quad (6.5-14)$$

и

$$|m_j| = M_j. \quad (6.5-15)$$

Изменение порядка действия суммирования в неравенстве (6.5—14) дает следующее неравенство:

$$\sum_{j=1}^r m_j \sum_{i=1}^n \left(p_i + p_{n+1} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) d_{ij} > 0. \quad (6.5-16)$$

Так как

$$\dot{p}_{n+1}(t) = 0 \text{ и } p_{n+1}(T) = -1,$$

то

$$p_{n+1}(t) = -1. \quad (6.5-17)$$

Поэтому оптимальные управляющие воздействия для данной системы управления конечным состоянием определяются выражением

$$m_j(t) = M_j \operatorname{sgn} \{s_j(t)\}, \quad (6.5-18)$$

где $s_j(t)$ — оптимальная функция переключения, определяемая формулой

$$s_j(t) = \sum_{i=1}^n \left[p_i(t) - \frac{\partial G}{\partial x_i} \right] d_{ij}(t). \quad (6.5-19)$$

Следующим шагом при расчете оптимального управления конечным состоянием является определение вспомогательных переменных p_i , которые могут быть вычислены из канонических уравнений

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^n \left[\left(p_k - \frac{\partial G}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f_k}{\partial x_i} - f_k \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_k} \right]; \quad (6.5-20)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = F_i(x, t) + \sum_{j=1}^r d_{ij} m_j, \quad (6.5-21)$$

при начальных условиях для x , определяемых выражениями (6.5-7) и (6.5-8), и граничных условиях, налагаемых на p , вида

$$p_i(T) = 0. \quad (6.5-22)$$

Линейная система

Рассмотрим управление линейным процессом n -го порядка, характеризуемым уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t)m(t), \quad (6.5-23)$$

предполагая, что начальные условия имеют вид $x(t_0) = x_0$. Управляющие воздействия подчиняются ограничениям (6.5-2). Определим вектор управления m , обеспечивающий минимум ошибки системы на конце траектории

$$\varepsilon(T) = x_d - x_1(T), \quad (6.5-24)$$

где x_d — желаемая реакция системы, а $x_1(T)$ — действительная реакция в конечный момент времени T .

Введем новую координату

$$x_{n+1}(t) = x_d - x_1(t). \quad (6.5-25)$$

Теперь задача управления конечным состоянием сводится к минимизации $x_{n+1}(T)$ по отношению к вектору управления m , подчиненному ограничениям (6.5-23) и (6.5-2).

Дифференциальные уравнения, описывающие преобразованную систему, имеют вид

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^r d_{ij} m_j, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6.5-26)$$

$$\dot{x}_{n+1} = -\dot{x}_1 = -\left[\sum_{k=1}^n a_{1k} x_k + \sum_{j=1}^r d_{1j} m_j \right] \quad (6.5-27)$$

при начальных условиях

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad (6.5-28)$$

$$x_{n+1}(t_0) = \varepsilon_0. \quad (6.5-29)$$

В уравнениях (6.5—26) функции $a_{ik}(t)$ и $d_{ij}(t)$ являются компонентами матриц $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ соответственно. Функция Гамильтона для этой системы

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^r d_{ij} m_j \right] - p_{n+1} \left[\sum_{k=1}^n a_{1k} x_k + \sum_{j=1}^r d_{1j} m_j \right]. \quad (6.5-30)$$

После несложных преобразований получаем

$$H = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (p_i a_{ik} - p_{n+1} a_{1k}) x_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (p_i d_{ij} - p_{n+1} d_{1j}) m_j. \quad (6.5-31)$$

Очевидно, что функция Гамильтона имеет максимум по отношению к \mathbf{m} , если

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (p_i d_{ij} - p_{n+1} d_{1j}) m_j > 0 \quad (6.5-32)$$

и $|m_j| = M_j. \quad (6.5-33)$

Неравенство (6.5—32) может быть записано в виде

$$\sum_{j=1}^r m_j \sum_{i=1}^n (p_i d_{ij} - p_{n+1} d_{1j}) > 0. \quad (6.5-34)$$

Следовательно, закон управления конечным состоянием для данного линейного процесса выражается формулой

$$m_j(t) = M_j \operatorname{sgn} \{s_j(t)\}, \quad (6.5-35)$$

где $s_j(t)$ — оптимальная функция переключения,

$$s_j(t) = \sum_{i=1}^n [p_i(t) d_{ij}(t) + d_{1j}(t)]. \quad (6.5-36)$$

В приведенном уравнении использовано равенство $p_{n+1}(t) = -1$. Вспомогательные переменные можно определить из канонических уравнений

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\left(\sum_{k=1}^n a_{ki} p_k + a_{1i} \right); \quad (6.5-37)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^r d_{ij} m_j \quad (6.5-38)$$

при начальных условиях для переменных состояния вида (6.5—28) и граничных условиях налагаемых на вспомогательные переменные p_i , вида

$$p_i(T) = 0. \quad (6.5-39)$$

Подставляя функции $p_i(t)$, определенные из этих уравнений, в формулу (6.5—35), получаем оптимальные управляющие воздействия $m_j(t)$ как функции времени. Решая последние относительно $x(t)$, находим оптимальные управляющие воздействия $m_j(x)$ как функции переменных состояния.

6.6 УПРАВЛЕНИЕ ПО МИНИМУМУ ИНТЕГРАЛА

В этом разделе рассматривается применение принципа максимума к расчету процессов управления, оптимальных в смысле минимума интегральных критериев качества [40, 130, 140]. Рассмотрим процесс n -го порядка, который характеризуется уравнением

$$\dot{x}(t) = F(x, t) + D(t)m(t), \quad (6.6-1)$$

где x — n -мерный вектор состояния, а m — r -мерный вектор управления.

Начальные условия имеют вид

$$x(t_0) = x_0, \quad (6.6-2)$$

а управляющие воздействия подчинены ограничению

$$\int_{t_0}^{t_f} g(m) dt = c, \quad (6.6-3)$$

где c — постоянная.

Определим вектор управления m , минимизирующий функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_f} G(x, m, t) dt, \quad (6.6-4)$$

где $G(x, m, t)$ — дифференцируемая функция.

Введение множителей Лагранжа преобразует эту задачу оптимизации в задачу минимизации нового функционала

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_f} G_1(x, m, t) dt. \quad (6.6-5)$$

где подынтегральная функция определяется равенством

$$G_1(x, m, t) = G(x, m, t) + \lambda g(m). \quad (6.6-6)$$

Пусть новой координатой будет

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t_f} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) dt. \quad (6.6-7)$$

Тогда задача управления по минимуму интеграла становится задачей отыскания минимума новой координаты, вычисленной на конце траектории, по отношению к вектору управления \mathbf{m} , подчиненному ограничению (6.6—1). Дифференциальные уравнения, описывающие преобразованную систему, имеют вид

$$\dot{x}_i(t) = F_i(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^r d_{ij} m_j, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6.6-8)$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = G_1(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) \quad (6.6-9)$$

при начальных условиях (6.6—2), причем

$$x_{n+1}(t_0) = 0. \quad (6.6-10)$$

Функция Понтрягина ρ имеет вид

$$\rho = x_{n+1}(t_f) \quad (6.6-11)$$

с коэффициентами b_i , равными

$$b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6.6-12)$$

$$b_{n+1} = 1. \quad (6.6-13)$$

Функция Гамильтона для этой системы

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \left[F_i(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^r d_{ik} m_k \right] + p_{n+1} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) \quad (6.6-14)$$

Условия максимума функции Гамильтона H по отношению к \mathbf{m} приводят к уравнениям

$$\sum_{i=1}^n p_i d_{ik} - \frac{\partial G_1}{\partial m_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (6.6-15)$$

В уравнении (6.6—15) использовано условие

$$p_{n+1}(t) = -1, \quad (6.6-16)$$

которое непосредственно следует из результата интегрирования выражения

$$\dot{p}_{n+1}(t) = 0, \quad (6.6-17)$$

подчиненного граничному условию

$$p_{n+1}(t_f) = -1.$$

Решение этих совместных m_k уравнений относительно r дает оптимальные управляющие воздействия, обращающие в минимум заданный функционал. Так как управляющие воздействия получаются из уравнений (6.6—15) как функции вспомогательных переменных p_j , то задачу управления нельзя считать решенной полностью до тех пор, пока не будут определены эти переменные. Вспомогательные переменные можно определить из канонических уравнений

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial G_1}{\partial x_i}; \quad (6.6-18)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = F_i(x, t) + \sum_{j=1}^r d_{ij} m_j \quad (6.6-19)$$

при начальных условиях (6.6—2) и (6.6—10) для переменных состояния и граничных условиях для вспомогательных переменных p_i вида

$$p_i(t_f) = 0. \quad (6.6-20)$$

Множитель Лагранжа λ можно вычислить, подставляя вектор оптимального управления m^0 в уравнение (6.6—3).

Пример 6.6—1. Простой процесс управления, подчиненный интегральному ограничению

Рассмотрим процесс первого порядка, характеризуемый уравнением

$$\dot{x} = ax + \gamma m.$$

Управляющее воздействие подчинено ограничению

$$\int_0^{t_1} m^2 dt = c.$$

Определим оптимальное управляющее воздействие, обращающее в минимум функционал

$$I = \int_0^{t_1} x^2 dt.$$

Введение множителя Лагранжа приводит к рассмотрению нового функционала вида

$$I_1 = \int_0^{t_1} (x^2 + Km^2) dt.$$

Пусть

$$\begin{aligned}x_1 &= x; \\x_1 &= ax_1 + \gamma m; \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + Km^2,\end{aligned}$$

где x_2 — новая координата, определяемая формулой

$$x_2(t) = \int_0^t (x_1^2 + Km^2) dt.$$

Функция Понтрягина

$$\rho = x_2(t_1)$$

при

$$b_1 = 0 \text{ и } b_2 = 1.$$

Функция Гамильтона для этой системы

$$H = p_1(ax_1 + \gamma m) + p_2(x_1^2 + Km^2).$$

Беря частную производную от H по m и приравнивая ее нулю, получаем

$$p_1\gamma + 2p_2Km = 0.$$

Следовательно, оптимальное управляющее воздействие

$$m = \frac{\gamma}{2K} p_1,$$

так как $p_2 = -1$. Этот результат следует непосредственно из уравнения (6.6—15).

Вспомогательная переменная p_1 определяется из канонических уравнений

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -ap_1 + 2x_1; \\ \dot{x}_1 &= ax_1 + \frac{\gamma^2}{2K} p_1;\end{aligned}$$

подчиненных граничным условиям

$$x_1(0) = x_0 \text{ и } p_1(t_1) = 0.$$

Решая уравнения относительно $p_1(t)$, получаем

$$p_1(t) = \frac{2x_0(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_1(t-2t_1)})}{\lambda_2(1 + e^{-2\lambda_1 t_1}) + a(1 - e^{-2\lambda_1 t_1})},$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \sqrt{\frac{a^2K + \gamma^2}{K}}; \\ \lambda_2 &= -\sqrt{\frac{a^2K + \gamma^2}{K}}.\end{aligned}$$

Поэтому оптимальное управляющее воздействие

$$m^0(t) = \frac{\gamma x_0}{K} \frac{e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_1(2t_1-t)}}{\lambda_2(1 + e^{-2\lambda_1 t_1}) + a(1 - e^{-2\lambda_1 t_1})}.$$

Множитель Лагранжа K определяется подстановкой приведенного выражения для оптимального управляющего воздействия в ограничивающее условие. Заметим, что в этом случае оптимальное управляющее воздействие изменяется по экспоненциальному закону.

При $t = 0$

$$m^0(0) = \frac{\gamma x_0}{2K} \times \frac{1 - e^{-\lambda_1 t_1}}{\lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_1 t_1 + a \operatorname{sh} \lambda_1 t_1}.$$

В конце траектории $t = t_1$ и $m^0(t_1) = 0$. Определение закона оптимального управления как функции переменной состояния требует вычисления $x_1(t)$ и исключения t из выражений для $x_1(t)$ и $m^0(t)$. Это обычно трудно выполнить. Однако реализация такой системы управления с обратной связью может быть произведена с помощью выведенных выше канонических уравнений. Переменная состояния x_1 подается в сопряженную систему, которая формирует оптимальное управляющее воздействие.

Задача управления по минимуму энергии

Из многих задач управления, имеющих большое практическое значение, задача обеспечения минимума энергии управления представляет особый интерес и заслуживает особого внимания. Так как квадрат управляющего воздействия пропорционален мощности, требуемой для управления, и интеграл по времени от квадрата сигнала управления является мерой энергии, затрачиваемой при оптимальном управлении, то проблему управления по минимуму энергии можно сформулировать как проблему управления по минимуму интеграла [10, 108]. Рассмотрим нестационарный процесс n -го порядка, описываемый матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{m}(t) \quad (6.6-21)$$

при начальных условиях $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, где вектор состояния \mathbf{x} имеет размерность n , вектор управления \mathbf{m} — размерность r , а матрица коэффициентов $\mathbf{A}(t)$ и матрица управления $\mathbf{D}(t)$ соответственно имеют $n \times n$ и $n \times r$ элементов.

Вектор оптимального управления ищется из условий минимума функции энергии

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^r m_k^2(t) dt \quad (6.6-22)$$

при ограничении вида

$$|m_k| \leq M_k, \quad (6.6-23)$$

где M_k — постоянная.

При помощи введения новой координаты

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^r m_k^2(t) dt \quad (6.6-24)$$

задача управления по минимуму энергии сводится к задаче отыскания минимума новой координаты, вычисленной в конце траектории, по отношению к вектору управления \mathbf{m} , подчиненному ограничениям (6.6—21) и (6.6—23). Преобразованная система характеризуется дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{k=1}^r d_{ik}(t) m_k(t), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6.6-25)$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^r m_k^2(t) \quad (6.6-26)$$

при начальных условиях

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad (6.6-27)$$

$$x_{n+1}(t_0) = 0. \quad (6.6-28)$$

В уравнениях (6.6—25) $a_{ij}(t)$ — элементы матрицы $\mathbf{A}(t)$, а $d_{ik}(t)$ — элементы матрицы $\mathbf{D}(t)$.

Функция Понтрягина

$$\rho = x_{n+1}(t_f), \quad (6.6-29)$$

а функция Гамильтона для этой системы

$$H = (\mathbf{p}, \mathbf{f}) = \mathbf{x}'(t) \mathbf{A}'(t) \mathbf{p}(t) + \mathbf{m}'(t) \mathbf{D}'(t) \mathbf{p}(t) + p_{n+1}(t) \sum_{k=1}^r m_k^2(t). \quad (6.6-30)$$

Так как уже было показано, что $p_{n+1}(t) = -1$, то функцию Гамильтона можно записать в следующем виде:

$$H = \mathbf{x}'(t) \mathbf{A}'(t) \mathbf{p}(t) + \mathbf{m}'(t) \mathbf{D}'(t) \mathbf{p}(t) - \sum_{k=1}^r m_k^2(t), \quad (6.6-31)$$

где вспомогательный вектор состояния $\mathbf{p}(t)$ является решением канонического уравнения

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{A}'(t) \mathbf{p}(t), \quad (6.6-32)$$

описывающего процесс, сопряженный относительно рассматриваемого процесса, и определяется формулой

$$\mathbf{p}(t) = \Phi_a(-t, t_0) \mathbf{p}(t_0). \quad (6.6-33)$$

Пусть

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{D}'(t) \Phi_a(-t, t_0) \mathbf{p}(t_0); \quad (6.6-34)$$

тогда функция Гамильтона принимает вид

$$H = \mathbf{x}'(t) \mathbf{A}'(t) \mathbf{p}(t) + \mathbf{m}'(t) \mathbf{s}(t) - \sum_{k=1}^r m_k^2(t). \quad (6.6-35)$$

Векторная функция $\mathbf{s}(t)$ представляет собой вектор-столбец размерности r

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_r(t) \end{bmatrix}, \quad (6.6-36)$$

который, как будет видно далее, описывает оптимальную функцию переключения.

При рассмотрении функции Гамильтона H , определяемой выражением (6.6—35), обнаруживается, что H имеет максимум по отношению к $\mathbf{m}(t)$, если функция

$$\mathbf{m}'(t) \mathbf{s}(t) - \sum_{k=1}^r m_k^2(t) = \sum_{k=1}^r [m_k(t) s_k(t) - m_k^2(t)] \quad (6.6-37)$$

имеет максимум при ограничениях вида (6.6—23). Из правой части равенства (6.6—37) видно, что если $|s_k(t)| \leq 2M_k$, то условие максимума H имеет вид

$$\frac{\partial [m_k(t) s_k(t) - m_k^2(t)]}{\partial m_k(t)} = 0, \quad (6.6-38)$$

откуда вытекает, что оптимальные управляющие воздействия равны

$$m_k^0(t) = \frac{1}{2} s_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (6.6-39)$$

а вектор оптимального управления

$$\mathbf{m}^0(t) = \frac{1}{2} \mathbf{s}(t). \quad (6.6-40)$$

При этом ограничение (6.6—23) выполняется, так как $|s_k(t)| \leq 2M_k$. С другой стороны, если $|s_k(t)| \geq 2M_k$, то оптимальное управляющее воздействие, обращающее в минимум функцию Гамильтона H , равно

$$m_k(t) = M_k \operatorname{sgn} \{s_k(t)\}, \quad (6.6-41)$$

так как максимальное допустимое значение для $m_k(t)$ равно M_k .

Отсюда заключаем, что стратегия оптимального управления, обеспечивающая минимум энергии управления линейным про-

цессом при наличии ограничений на управляющее воздействие типа насыщения, имеет вид

$$m_k(t) = \frac{1}{2} s_k(t), \text{ если } |s_k(t)| \leq 2M_k; \quad (6.6-42a)$$

$$m_k(t) = M_k \operatorname{sgn} \{s_k(t)\}, \text{ если } |s_k(t)| \geq 2M_k, \quad (6.6-42б)$$

где $k = 1, 2, \dots, r$.

В случае инвариантного во времени процесса оптимальная функция переключения $s(t)$ определяется формулой

$$s(t) = D'e^{-A't} p(t_0). \quad (6.6-43)$$

Из полученных результатов следует, что систему управления по минимуму энергии можно описать схематически с помощью

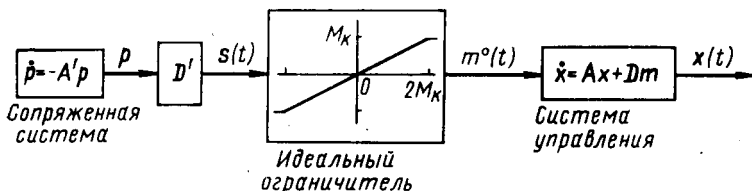


Рис. 6.6—1. Структурная схема системы управления с минимизацией затрат энергии

блок-схемы, изображенной на рис. 6.6—1. Эта блок-схема иллюстрирует основные этапы расчета систем управления по минимуму энергии. Если начальное состояние $p(t_0)$ для сопряженной системы определено надлежащим образом, то последняя формирует вспомогательный вектор состояния $p(t)$, который, в свою очередь, позволяет найти оптимальное управляющее воздействие и оптимальную функцию переключения. Следует заметить, что, как это следует из выражения (6.6—42), процесс управляется сигналом, который является выходом нелинейного элемента типа ограничителя.

В области линейного управления, т. е. когда $|s_k(t)| \leq 2M_k$, оптимальный вектор управления m^0 может быть выражен в виде функции переменных состояния процесса. Решение уравнения (6.6—21) имеет вид

$$x(t) = \varphi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau) D(\tau) m(\tau) d\tau. \quad (6.6-44)$$

Подстановка формул (6.6—40) и (6.6—34) в уравнение (6.6—44) дает

$$x(t) = \varphi(t, t_0)x_0 + Q(t)p(t_0), \quad (6.6-45)$$

где $\mathbf{Q}(t)$ — матрица, имеющая $n \times n$ элементов, определяемая выражением

$$\mathbf{Q}(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t, \tau) \mathbf{D}(\tau) \mathbf{D}'(\tau) \boldsymbol{\Phi}_a(-\tau, t_0) d\tau. \quad (6.6-46)$$

Вектор начального состояния $\mathbf{p}(t_0)$ для сопряженной системы можно найти непосредственно из уравнения

$$\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{Q}^{-1}(t) [\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\Phi}(T, t_0) \mathbf{x}_0], \quad (6.6-47)$$

если матрица $\mathbf{Q}(t)$ не сингулярна. Поэтому закон оптимального управления в линейной области управления имеет вид

$$\mathbf{m}^0(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{D}'(t) \boldsymbol{\Phi}_a(-t, t_0) \mathbf{Q}^{-1}(t) [\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) \mathbf{x}_0]. \quad (6.6-48)$$

В пределах области насыщения оптимальное управляющее воздействие имеет величину, равную максимальному допустимому значению, и переключается в соответствии с формулой (6.6—42б).

6.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе дано краткое изложение метода расчета оптимальных систем управления с помощью принципа максимума. Показывается, что различные виды оптимального управления могут быть преобразованы к обобщенной форме, при которой оптимизация проводится по отношению к переменным состояниям. При преобразовании используется процедура инвариантного увеличения размерности вектора состояния. Принцип максимума дает изящный способ решения обобщенной задачи оптимального управления.

В общем случае принцип максимума дает необходимые условия для оптимума, однако, если процесс управления линейный и подчинен аддитивной функции управления, то он обеспечивает не только необходимые, но и достаточные условия для оптимального управления. Применение принципа максимума не ограничено системами, в которых на управляющие воздействия не наложено ограничений. Однако ему свойственны те же трудности, что и задаче вариационного исчисления с граничными условиями в двух точках.

Рассмотрено применение принципа максимума к решению задачи управления по минимуму времени. Показывается, что система управления, оптимальная по быстродействию при аддитивных управляющих воздействиях с идеальным насыщением является системой релейного типа. Для линейных систем основные этапы расчета системы управления по минимуму времени показаны на

рис. 6.4—2. Они связаны с формированием сопряженных систем. Если вектор начального состояния $\mathbf{p}(t_0)$ сопряженной системы найден, то последняя формирует вспомогательный вектор состояния $\mathbf{p}(t)$, который затем преобразуется в функцию переключения $s(t)$. Оптимальные управляющие воздействия могут быть получены, как выходы идеальных элементов типа реле. Определение вектора начального состояния $\mathbf{p}(t_0)$ не является, однако, тривиальной задачей.

Рассмотрено применение принципа максимума для расчета систем управления конечным состоянием и управления по минимуму интеграла. В случае процесса n -го порядка, характеризуемого уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{m}(t),$$

и при управляющих воздействиях, подчиняющихся ограничениям

$$|m_k| \leq M_k,$$

оптимальные управляющие воздействия, обращающие в минимум функционал

$$I = G[x_1(T), x_2(T), \dots, x_n(T)],$$

принимают значения $+M_k$ и $-M_k$, где $k = 1, 2, \dots, r$.

Функцию переключения можно определить из канонических уравнений. Для решения задач управления с ограничениями, налагаемыми на управляющие воздействия, используется метод множителей Лагранжа.

Анализируется практически важная задача управления по минимуму энергии. В случае линейного процесса с идеальным насыщением оптимальные управляющие воздействия, обеспечивающие минимум энергии управления, пропорциональны функциям переключения $s_k(t)$, когда они имеют значения, меньшие или равные удвоенным значениям пределов насыщения, а когда величины функций переключения превосходят удвоенные значения пределов насыщения, то оптимальные управляющие воздействия принимают одно из предельных значений. Основные этапы расчета систем управления по минимуму энергии показаны на рис. 6.6—1. Управление процессом производится воздействием, которое является выходом нелинейного элемента типа ограничителя. Хотя в этой главе уделяется особое внимание расчету трех основных видов оптимального управления, принцип максимума применим также и к другим видам оптимального управления.

Литература к гл. 6

Этанс [9, 10], Этанс, Фалб и Лакосс [12], Болтянский [30], Болтянский и др. [31, 34], Бутковский [38], Дж. В. Чанг [40], С. С. Л. Чанг [41], Десоер [48], Гаврилович, Петронич и Сильяк [67], Лейтман [112], Понтрягин [127—129], Понтрягин и др. [130], Роксин [133], Розоноер [134] и Ту [140].

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Среди различных разделов современной математики, которые находят применение при проектировании оптимальных систем управления, пожалуй, наиболее многообещающей является теория динамического программирования. Динамическое программирование в том виде, в котором оно разработано Ричардом Беллманом, представляет собой простой и в то же время весьма эффективный метод многошагового решения вариационных задач. Идея этого метода является выражением концепции инвариантного вложения, согласно которой исходная проблема заменяется определенным классом более простых проблем.

В предыдущей главе мы использовали идею увеличения размерности системы и исходную проблему оптимизации заменяли проблемой максимизации или минимизации по отношению к новой координате. Решение исходной проблемы оптимального управления проводилось в результате такой замены путем непосредственного применения принципа максимума. Этот подход также является выражением концепции инвариантного вложения, которая имеет важное значение для динамического программирования. Проблемы оптимального управления, обсуждавшиеся в предыдущих главах, можно рассматривать как многошаговые процессы оптимизации и поэтому естественно использовать для их решения метод динамического программирования.

Настоящая глава посвящена применению теории динамического программирования к проектированию оптимальных систем управления.

7.1. МНОГОШАГОВЫЕ ПРОЦЕССЫ РЕШЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Одной из наиболее важных и плодотворных идей, используемых при проектировании оптимальных систем управления, является идея поиска оптимальной стратегии управления в многомерном пространстве управления. Применение этой идеи позволяет рассматривать проблему проектирования оптимальной

системы как многошаговый процесс решения [16, 18]. Многошаговые процессы решения можно наблюдать в повседневной жизни. Пожалуй, наиболее общими являются ситуации, возникающие в карточных играх, например, связанные с системой заявок при игре в бридж. В качестве примеров многошаговых процессов решения из области экономики можно привести проблему размещения инвестиций и определения политики страхования.

В качестве простой иллюстрации рассмотрим проблему инвестиций в автотранспортном деле. Предположим, что имеется некоторая начальная сумма денег x , которая вкладывается в предприятие, связанное с перевозкой людей и грузов. Эти деньги могут быть использованы для приобретения машин, перевозящих либо людей, либо грузы. Предположим, что на приобретение машин для перевозки людей израсходована сумма денег y , а оставшаяся сумма израсходована на приобретение грузовых машин. Годовой доход от перевозки пассажиров является функцией от вложенной суммы денег y и равен $g(y)$ за первый год. Годовой доход от перевозки грузов является функцией оставшейся части $x - y$ капитала и равен $h(x - y)$ за первый год.

С целью довести до минимума затраты на техническое обслуживание и ремонт машин компания придерживается политики, согласно которой в конце каждого года она продает все машины, находившиеся в эксплуатации. Рыночная стоимость машин, использованных для перевозки пассажиров, составляет часть их первоначальной стоимости и равна ay к концу первого года, где $0 < a < 1$. Стоимость грузовых машин составляет также некоторую часть их первоначальной стоимости и равна $b(x - y)$ к концу первого года, где $0 < b < 1$. Администрация компании должна найти последовательные оптимальные решения относительно того, каким образом следует разместить капитал, чтобы полный доход за период N годов был максимальным.

Чтобы упростить математический анализ этой иллюстративной задачи, предположим, что доход, который компания получает каждый год, она не использует для приобретения новых машин. Многошаговые задачи, требующие принятия последовательных решений, удобнее решать методом функциональных уравнений. Этот подход позволяет свести исходную задачу максимизации к нахождению решения функционального уравнения, которое в рассматриваемом случае может быть получено исходя из следующих рассуждений.

Доход или прибыль за первый год равен

$$Y_1(x, y) = g(y) + h(x - y). \quad (7.1-1)$$

Максимальный доход за первый год равен

$$f_1(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{Y_1(x, y)\} = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x - y)\}. \quad (7.1-2)$$

Следует отметить, что максимальный доход является функцией начальной суммы вложенных денег. Если весовые функции доходов g и h определены или заранее известны, то максимальный доход может быть легко найден путем дифференцирования по y функций, заключенных в скобки, и подстановкой максимизирующего значения y в уравнение, описывающее полный доход. Переменная y удовлетворяет ограничению вида $0 \leq y \leq x$. Оптимальное решение или распределение $y(x)$ максимизирует функцию, заключенную в фигурные скобки в уравнении (7.1—2). Очевидно, что задача одногодного распределения капитала очень проста и носит тривиальный характер.

После одного года работы компания для покупки новых машин расходует сумму денег, полученную в результате продажи находившихся в эксплуатации пассажирских и грузовых машин, так как согласно сделанному выше для упрощения предположению она не использует для этой цели доход за первый год работы. Поэтому сумма денег, вкладываемых в течение второго года работы, равна

$$x_1 = ay + b(x - y), \quad (7.1-3)$$

что можно записать как

$$x_1 = y_1 + (x_1 - y_1), \quad (7.1-4)$$

где y_1 — сумма денег, расходуемая на приобретение машин для перевозки пассажиров, и $(x_1 - y_1)$ — сумма денег, расходуемая на приобретение грузовых машин.

Отсюда, в течение второго года работы прибыль от вложения капитала в пассажирские перевозки равна $g(y_1)$; прибыль от вложения капитала в грузовые перевозки равна $h(x_1 - y_1)$.

В конце второго года

рыночная стоимость машин, использовавшихся для перевозки пассажиров, составляет ay_1 ;

рыночная стоимость машин, использовавшихся для перевозки грузов, составляет $b(x_1 - y_1)$.

Полный доход за двухлетний период равен

$$Y_2(x, y, y_1) = g(y) + h(x - y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1); \quad (7.1-5)$$

максимальный доход за этот же период равен

$$f_2(x) = \max_{\substack{0 \leq y \leq x \\ 0 \leq y_1 \leq x_1}} \{Y_2(x, y, y_1)\} = \max_{\substack{0 \leq y \leq x \\ 0 \leq y_1 \leq x_1}} \{g(y) + h(x - y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1)\}. \quad (7.1-6)$$

Учитывая формулу (7.1—2), это выражение для максимального дохода за два года можно записать в виде

$$f_2(x) = \max_{\substack{0 \leq y \leq x \\ 0 \leq y_1 \leq x_1}} \{g(y) + h(x - y) + f_1(x_1)\}. \quad (7.1-7)$$

Произведя далее подстановку выражения (7.1—3), получаем

$$f_2(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y) + f_1[ay + b(x-y)]\}. \quad (7.1-8)$$

Отсюда заключаем, что максимальный доход за два года может быть определен путем дифференцирования по y функций, заключенных в скобки в формуле (7.1—8), и подстановки максимизирующего значения y в выражение для полного дохода. Переменная y удовлетворяет ограничению вида $0 \leq y \leq x$. Значение $y(x)$, максимизирующее функцию, заключенную в фигурные скобки в формуле (7.1—8), является оптимальным решением, которое следует принять в начале двухлетнего периода работы, располагая начальной суммой денег x .

Сумма денег, оставшаяся после двух лет работы, равна сумме денег, вырученной от продажи находившихся в эксплуатации грузовых машин и машин для перевозки пассажиров, т. е.

$$x_2 = ay_1 + b(x_1 - y_1), \quad (7.1-9)$$

что можно записать в виде

$$x_2 = y_2 + (x_2 - y_2), \quad (7.1-10)$$

где y_2 — сумма денег, израсходованная на покупку машин для перевозки пассажиров, и $(x_2 - y_2)$ — сумма денег, израсходованная на покупку грузовых машин.

В течение третьего года работы

прибыль от вложения капитала в пассажирские перевозки составляет $g(y_2)$;

прибыль от вложения капитала в грузовые перевозки составляет $h(x_2 - y_2)$.

К концу третьего года работы

стоимость машин, использовавшихся для перевозки пассажиров, равна ay_2 ;

стоимость машин, использовавшихся для перевозки грузов, составляет $b(x_2 - y_2)$.

Тогда полный доход за три года работы равен

$$Y_3(x, y, y_1, y_2) = g(y) + h(x-y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1) + g(y_2) + h(x_2 - y_2), \quad (7.1-11)$$

максимальный доход равен

$$f_3(x) = \max_{\substack{0 \leq y \leq x \\ 0 \leq y_1 \leq x_1 \\ 0 \leq y_2 \leq x_2}} \{Y_3(x, y, y_1, y_2)\} = \max_{\substack{0 \leq y \leq x \\ 0 \leq y_1 \leq x_1 \\ 0 \leq y_2 \leq x_2}} \{g(y) + h(x-y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1) + g(y_2) + h(x_2 - y_2)\}. \quad (7.1-12)$$

Используя выражение (7.1—6), $f_3(x)$ приведем к виду

$$f_3(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y) + f_2(x_1)\}. \quad (7.1-13)$$

Учитывая формулу (7.1—3), максимальный доход находим в виде

$$f_3(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y) + f_2[ay + b(x-y)]\}. \quad (7.1-14)$$

Это уравнение представляет собой рекуррентное соотношение, из которого могут быть найдены оптимальные решения для трехшагового процесса.

Аналогичным образом находим максимальный доход для четырехлетнего периода работы:

$$f_4(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y) + f_3[ay + b(x-y)]\}. \quad (7.1-15)$$

Отсюда получаем максимальный доход за N -летний период работы:

$$f_N(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y) + f_{N-1}[ay + b(x-y)]\} \quad (7.1-16)$$

Это — основное функциональное уравнение для N -шагового процесса решения. Начав с вычисления функции $f_1(x)$, определенной выражением (7.1—2), функциональное уравнение можно использовать для вычисления $f_2(x)$ и затем для вычисления $f_3(x)$. Повторяя этот процесс, определяем другие максимальные доходы. На каждом из этапов находим также оптимальное решение $y_j(x)$, которое следует принять в начале j -шагового процесса решения. Значение $y(x)$, максимизирующее функцию в фигурных скобках в уравнении (7.1—16), является оптимальным решением, которое надлежит принять в начале N -летнего периода работы, располагая начальной суммой денег x .

Пример 7.1—1. Проблема максимизации

Рассмотрим проблему максимизации функции

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N; y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{k=1}^N g(x_k, y_k)$$

при ограничениях вида

$$x_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^N x_k = c_1, \quad y_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^N y_k = c_2,$$

где $g(x, y)$ — функция, монотонно возрастающая по x и y .

Требуется найти функциональное уравнение для этой проблемы многошагового решения.

Пусть $f_N(c_1, c_2)$ есть максимум функции $F(x, y)$ относительно ее аргументов x_k и y_k . Тогда для $N = 1$

$$f_1(c_1, c_2) = f_1(x_1, y_1) = \max_{\substack{0 \leq x_1 \leq c_1 \\ 0 \leq y_1 \leq c_2}} \{g(x_1, y_1)\}.$$

Для $N = 2$

$$\begin{aligned} f_2(c_1, c_2) &= \max_{x, y} \{g(x_2, y_2) + g(x_1, y_1)\} = \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq c_1 \\ 0 \leq y_2 \leq c_2}} \{g(x_2, y_2) + g(c_1 - x_2, c_2 - y_2)\} = \\ &= \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq c_1 \\ 0 \leq y_2 \leq c_2}} \{g(x_2, y_2) + f_1(c_1 - x_2, c_2 - y_2)\}. \end{aligned}$$

Для $N = 3$

$$f_3(c_1, c_2) = \max_{x, y} \{g(x_3, y_3) + g(x_2, y_2) + g(x_1, y_1)\}.$$

Так как

$$f_2(c_1 - x_3, c_2 - y_3) = \max_{x, y} \{g(x_2, y_2) + f_1(c_1 - x_2 - x_3, c_2 - y_2 - y_3)\},$$

то $f_3(c_1, c_2)$ можно записать как

$$f_3(c_1, c_2) = \max_{\substack{0 \leq x_3 \leq c_1 \\ 0 \leq y_3 \leq c_2}} \{g(x_3, y_3) + f_2(c_1 - x_3, c_2 - y_3)\}.$$

Аналогичным образом для $N = 4$ получаем

$$f_4(c_1, c_2) = \max_{\substack{0 \leq x_4 \leq c_1 \\ 0 \leq y_4 \leq c_2}} \{g(x_4, y_4) + f_3(c_1 - x_4, c_2 - y_4)\}.$$

Отсюда по аналогии получаем

$$f_N(c_1, c_2) = \max_{\substack{0 \leq x_N \leq c_1 \\ 0 \leq y_N \leq c_2}} \{g(x_N, y_N) + f_{N-1}(c_1 - x_N, c_2 - y_N)\},$$

что является искомым функциональным уравнением для данной проблемы многошагового решения.

7.2. Принцип оптимальности

В предыдущем параграфе метод функциональных уравнений был применен для изучения многошаговых процессов решения. Было показано, каким образом при многократном применении функционального уравнения могут быть найдены оптимальные решения для N -шагового процесса. В качестве иллюстрации была рассмотрена простая проблема инвестиций в автотранспортном предприятии. Однако метод функциональных уравнений является более общим методом, пригодным для решения широкого круга задач. Настоящий параграф посвящен принципу оптимальности [16]. Как будет видно из дальнейшего изложения, функциональное уравнение, описывающее многошаговый процесс решения, можно легко получить при использовании принципа оптимальности.

Вначале рассмотрим одношаговый процесс. Пусть x обозначает вектор состояния системы. Предположим, что x — k -мерный вектор-столбец. Если физическая система преобразованием

$$x^2 = g(x^1, m_1) \quad (7.2-1)$$

переводится из состояния x^1 в состояние x^2 , то выход или выигрыш от этой операции равен

$$R_1 = r(x^1, m_1). \quad (7.2-2)$$

Проблема состоит в том, чтобы найти решение m_1 , максимизирующее выигрыш. Решение m_1 называется также одношаговой стратегией. Очевидно, что решение одношаговой проблемы является совершенно элементарным. Максимальный выигрыш дается формулой

$$f_1(x^1) = \max_{m_1} r(x^1, m_1). \quad (7.2-3)$$

Это решение, которое максимизирует выигрыш, называется оптимальным решением или оптимальной стратегией управления.

Рассмотрим двухшаговый процесс. Пусть физическая система преобразованием

$$x^2 = g(x^1, m_1) \quad (7.2-4)$$

переводится вначале из состояния x^1 в состояние x^2 и затем преобразованием

$$x^3 = g(x^2, m_2) \quad (7.2-5)$$

переводится из состояния x^2 в состояние x^3 . Эта последовательность операций дает полный выигрыш:

$$R_2 = r(x^1, m_1) + r(x^2, m_2). \quad (7.2-6)$$

Задача теперь состоит в том, чтобы выбрать последовательность допустимых решений m_1 и m_2 , максимизирующих полный выигрыш. Это — двухшаговый процесс решения, где $r(x^1, m_1)$ — выигрыш от принятия первого решения и $r(x^2, m_2)$ — выигрыш от второго решения. Эта последовательность решений m_1, m_2 называется двухшаговой стратегией. Максимальный выигрыш дается выражением

$$f_2(x^1) = \max_{m_1, m_2} \{r(x^1, m_1) + r(x^2, m_2)\}; \quad (7.2-7)$$

эта функция полного выигрыша максимизируется по всем стратегиям $\{m_1, m_2\}$.

Стратегия, которая максимизирует R_2 , называется оптимальной. Можно видеть, что эта двухшаговая задача является более трудной для решения, чем рассмотренная ранее одношаговая задача. Трудности и сложность возрастают с увеличением количества шагов в процессе решения.

В общем случае для N -шагового процесса проблема состоит в выборе N -шаговой стратегии

$$\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_N\},$$

максимизирующей полный выигрыш

$$R_N = \sum_{j=1}^N r(x^j, m_j). \quad (7.2-8)$$

В этом случае система преобразованием $x^2 = g(x^1, m_1)$ переводится вначале из состояния x^1 в состояние x^2 , затем преобразованием $x^3 = g(x^2, m_2)$ переводится из состояния x^2 в состояние x^3 и, наконец, преобразованием $x^N = g(x^{N-1}, m_{N-1})$ переводится из состояния x^{N-1} в состояние x^N . Максимальный выигрыш для N -шагового процесса дается формулой

$$f_N(x^1) = \max_{\{m_j\}} \left\{ \sum_{j=1}^N r(x^j, m_j) \right\}. \quad (7.2-9)$$

Стратегия $\{m_j\}$, которая определяет $f_N(x^1)$, есть оптимальная политика или оптимальная стратегия управления. В данном случае $\{m_j\}$ образует N -шаговую стратегию управления.

Максимизация на основе известных элементарных методов приводит к решению системы из N уравнений, которые получаются путем приравнивания нулю частных производных по m_j , где $j = 1, 2, \dots, n$, от функций в фигурных скобках в формуле (7.2-9). Очевидно, что решение проблемы оптимизации в случае большого количества шагов становится необозримым и поэтому необходимо разработать процедуру для систематического решения. Эта процедура может быть разработана на основе применения фундаментального принципа динамического программирования — *принципа оптимальности* [16], который формулируется следующим образом: оптимальная политика или оптимальная стратегия управления обладает свойством, что каким бы ни было начальное состояние или начальное решение, последующее решение должно быть оптимальной стратегией по отношению к состоянию, возникшему в результате первого решения.

Принцип оптимальности, описывающий основные свойства оптимальных стратегий, использует в качестве своей исходной точки концепцию инвариантного вложения. Согласно этой концепции решение исходной сложной проблемы заменяется решением некоторого количества аналогичных более простых проблем. В случае многошаговых процессов этот подход позволяет исходную проблему оптимизации заменить последовательным решением одношаговых процессов оптимизации, что значительно облегчает решение исходной проблемы.

Применяя принцип оптимальности, полный выигрыш для N -шагового процесса запишем в виде

$$R_N = r(x^1, m_1) + f_{N-1} [g(x^1, m_1)]. \quad (7.2-10)$$

Первый член в правой части уравнения (7.2-10) характеризует начальный выигрыш, а второй член представляет максимальный выигрыш от последних $(N-1)$ шагов. Максимальный выигрыш запишется следующим образом:

$$f_N(x^1) = \max_{m_1} \{r(x^1, m_1) + f_{N-1} [g(x^1, m_1)]\}; \quad (7.2-11)$$

это уравнение справедливо для $N \geq 2$.

Для $N = 1$ максимальный выигрыш равен

$$f_1(x^1) = \max_{m_1} \{r^1(x^1, m_1)\}. \quad (7.2-12)$$

Ясно, что применение принципа оптимальности позволяет исходный N -шаговый процесс заменить последовательностью из одношаговых процессов и на каждом шаге использовать одно и то же рекуррентное соотношение. Отметим, что инвариантное вложение является ключевым моментом динамического программирования.

Пример 7.2-1. Задача максимизации произведения

Положительную величину c необходимо разделить на n частей таким образом, чтобы их произведение было максимальным.

Пусть $f_n(c)$ — максимальное значение произведения, x — первая часть и $(c-x)$ характеризуют долю оставшихся $(n-1)$ частей. Тогда, используя принцип оптимальности, можно составить функциональное уравнение

$$f_n(c) = \max_{0 \leq x \leq c} \{x f_{n-1}(c-x)\};$$

это уравнение справедливо для $n \geq 2$.

Совершенно очевидно, что при $n = 1$

$$f_1(c) = c \text{ и } f_1(c-x) = c-x.$$

Тогда, при $n = 2$

$$f_2(c) = \max_{0 \leq x \leq c} \{x f_1(c-x)\} = \max_{0 \leq x \leq c} \{x(c-x)\}.$$

Простые вычисления дают следующее значение для x , максимизирующего произведение:

$$x = \frac{c}{2}.$$

Следовательно, оптимальная политика разделения на две части имеет вид

$$\{m_j\} = \left\{ \frac{c}{2}, \frac{c}{2} \right\},$$

и максимальное значение произведения равно

$$f_2(c) = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Рассмотрим теперь случай $n = 3$. Максимальное достижимое произведение дается выражением

$$f_3(c) = \max_{0 < x < c} \{x f_2(c-x)\} = \max_{0 < x < c} \left\{ \frac{x(c-x)^2}{4} \right\}.$$

После простых вычислений получаем следующее значение для максимизирующего x :

$$x = \frac{c}{3}.$$

Разделение оставшейся доли в $\frac{2}{3}c$ составляет двухшаговый процесс решения. Согласно предыдущему, оптимальным будет разделение на $\frac{c}{3}$ и $\frac{c}{3}$. Отсюда оптимальное разделение на три части находим в виде

$$\{m_j\} = \left\{ \frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3} \right\},$$

и максимальное значение произведения равно

$$f_3(c) = \left(\frac{c}{3}\right)^3.$$

Когда заданная величина c делится на четыре части, максимальное достижимое произведение определяется выражением

$$f_4(c) = \max_{0 < x < c} \{x f_3(c-x)\} = \max_{0 < x < c} \left\{ \frac{x(c-x)^3}{27} \right\}.$$

Простое дифференцирование ведет к следующему максимизирующему значению x :

$$x = \frac{c}{4}.$$

Разделение оставшейся доли в $\frac{3}{4}c$ составляет трехшаговый процесс, который согласно предыдущему дает части $\frac{c}{4}$, $\frac{c}{4}$ и $\frac{c}{4}$. Отсюда находим оптимальное разделение на четыре части:

$$\{m_j\} = \left\{ \frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4} \right\},$$

и максимальное значение произведения

$$f_4(c) = \left(\frac{c}{4}\right)^4.$$

Приведенный выше анализ ведет к заключению, что при $n = k$ оптимальным разделением будет

$$\{m_j\} = \left\{ \frac{c}{k}, \frac{c}{k}, \frac{c}{k}, \dots, \frac{c}{k} \right\},$$

и максимальное значение произведения будет равно

$$f_k(c) = \left(\frac{c}{k}\right)^k.$$

Методом математической индукции легко показать, что эти соотношения остаются справедливыми для любого k . Используя принцип оптимальности, можно записать

$$f_{k+1}(c) = \max_{0 \leq x < c} \{x f_k(c-x)\} = \max_{0 \leq x < c} \left\{ \frac{x(c-x)^k}{k^k} \right\}.$$

Отсюда, производя элементарные вычисления, получаем максимизирующее значение x :

$$x = \frac{c}{k+1}$$

и максимальное значение произведения

$$f_{k+1}(c) = \left(\frac{c}{k+1}\right)^{k+1}.$$

Отсюда находим оптимальную политику деления на n частей

$$\{m_j\} = \left\{ \frac{c}{n}, \frac{c}{n}, \dots, \frac{c}{n} \right\}$$

и максимальное значение произведения

$$f_n(c) = \left(\frac{c}{n}\right)^n.$$

Рассмотренная задача максимизации произведения является исключительно простой и решение ее может быть легко найдено обычными методами. Решение ее в настоящем параграфе имело целью показать, каким образом эта задача может быть сформулирована как многошаговый процесс решения. Такая формулировка является часто ключом решения более сложных задач при использовании метода динамического программирования.

Многошаговые процессы, зависящие от времени

В предыдущем параграфе метод функциональных уравнений был применен к изучению проблемы инвестиций при автотранспортном предприятии, которая рассматривалась при упрощающем предположении, что многошаговый процесс решения не зависит от времени. Предполагалось, что доход с вложенного капитала и рыночная стоимость использованных машин не зависят от времени. Однако очевидно, что в реальных условиях как доход от вложений, так и стоимость использованных машин изменяются из года в год. Такой многошаговый процесс называется процессом, зависящим от времени.

В качестве иллюстрации рассмотрим многошаговый процесс, зависящий от времени, с периодической выборкой. Рассмотрим вновь проблему вложения капитала в автотранспортное пред-

приятие. Пусть начальная сумма денег x разделена в начале N -летнего периода работы на две части y и $x - y$, из которых первая часть расходуется на приобретение машин для перевозки людей, а вторая часть — на приобретение грузовых машин. Предполагается, что в конце первого года работы доход равен

$$Y_1(x, y) = g_1(y) + h_1(x - y) \quad (7.2-13)$$

и стоимость использованных машин

$$x_1 = c_1(x, y) = a_1y + b_1(x - y). \quad (7.2-14)$$

За второй год работы доход

$$Y_2(x, y) = g_2(y_1) + h_2(x_1 - y_1) \quad (7.2-15)$$

и стоимость использованных машин

$$x_2 = c_2(x, y) = a_2y_1 + b_2(x_1 - y_1). \quad (7.2-16)$$

За третий год работы доход

$$Y_3(x, y) = g_3(y_2) + h_3(x_2 - y_2) \quad (7.2-17)$$

и стоимость использованных машин

$$x_3 = c_3(x, y) = a_3y_2 + b_3(x_2 - y_2). \quad (7.2-18)$$

За k -й год работы доход равен

$$Y_k(x, y) = g_k(y_{k-1}) + h_k(x_{k-1} - y_{k-1}). \quad (7.2-19)$$

и стоимость использованных машин равна

$$x_k = c_k(x, y) = a_ky_{k-1} + b_k(x_{k-1} - y_{k-1}); \quad (7.2-20)$$

здесь $Y_k(x, y)$ и $c_k(x, y)$ — непрерывные функции x и y , причем $x \geq 0$ и $0 \leq y \leq x$ и выполняется неравенство

$$0 \leq c_k(x, y) < \alpha x, \quad \alpha < 1; \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (7.2-21)$$

Пусть $f_{N-k}[c_k(x, y)]$ — максимальный доход, полученный за оставшиеся $N - k$ годов N -летнего периода работы с исходной суммой денег $x_k = c_k(x, y)$ в начале $(k + 1)$ -го года и при использовании оптимальной политики. Доход за $(k + 1)$ -й год работы равен $Y_{k+1}(x, y)$. Используя принцип оптимальности, функциональное уравнение для рассматриваемого процесса, зависящего от времени, находим в виде

$$f_{N-k}[c_k(x, y)] = \max_{0 \leq y \leq x} \{Y_{k+1}(x, y) + f_{N-k-1}[c_{k+1}(x, y)]\}, \\ k = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (7.2-22)$$

где $c_0(x, y) = x$.

Стохастические многошаговые процессы решения

Многошаговые процессы решения до сих пор изучались в предположении, что процесс по своей природе является детерминированным. Доход и стоимость использованных машин за N -летний период работы предполагались известными заранее. Однако, обычно на практике в начале N -летнего периода работы такой информации нет. Единственной доступной в этот момент информацией является вероятность получения определенного дохода и вероятность того, что стоимость машин будет находиться в каких-то пределах. Иными словами, рассмотренную выше проблему вложения капитала следует трактовать как стохастический многошаговый процесс решения.

Рассмотрим вначале многошаговый процесс, не зависящий от времени. Пусть, как и ранее, начальная сумма денег x разделена на части y и $x - y$. Пусть p_a — вероятность того, что за один год будет получен доход

$$Y_a(x, y) = g_a(y) + h_a(x - y) \quad (7.2-23)$$

и стоимость машин к концу первого года будет равна

$$x_a = \alpha_a(y) + \beta_a(x - y), \quad (7.2-24)$$

и пусть p_b есть вероятность того, что за один год будет получен доход

$$Y_b(x, y) = g_b(y) + h_b(x, y) \quad (7.2-25)$$

и стоимость машин к концу первого года будет равна

$$x_b = \alpha_b(y) + \beta_b(x - y). \quad (7.2-26)$$

Пусть функция $f_N(x)$ выражает максимальный ожидаемый полный доход за N -летний период работы, полученный при использовании оптимальной политики и соответствующий начальной сумме вложенных денег x . Тогда ожидаемый максимальный доход за один год будет равен

$$f_1(x) = \max_{0 \leq y < x} \{p_a Y_a(x, y) + p_b Y_b(x, y)\}. \quad (7.2-27)$$

Для $N \geq 2$, используя принцип оптимальности, получаем следующее функциональное уравнение:

$$f_N(x) = \max_{0 \leq y < x} \{p_a \{Y_a(x, y) + f_{N-1}[\alpha_a(y) + \beta_a(x - y)]\} + p_b \{Y_b(x, y) + f_{N-1}[\alpha_b(y) + \beta_b(x - y)]\}\}. \quad (7.2-28)$$

Это — основное функциональное уравнение для N -шагового стохастического процесса решения. Многократное применение этого уравнения позволяет найти ожидаемый полный доход за

требуемый период времени. Найденное максимизирующее значение $y(x)$ является оптимальным решением, которое следует принять при распределении начальной суммы денег x в начале N -летнего периода работы.

Рассмотрим теперь многошаговый процесс, зависящий от времени. Обратимся вновь к проблеме вложения капитала в грузо-пассажирские перевозки. Пусть p_{a1} есть вероятность того, что за первый год будет получена прибыль

$$Y_{a1}(x, y) = g_{a1}(y) + h_{a1}(x - y) \quad (7.2-29)$$

и рыночная стоимость использованных машин будет равна

$$x_1 = c_1(x, y) = \alpha_1(y) + \beta_1(x - y), \quad (7.2-30)$$

и p_{b1} есть вероятность того, что за первый год будет получена прибыль

$$Y_{b1}(x, y) = g_{b1}(y) + h_{b1}(x - y) \quad (7.2-31)$$

и рыночная стоимость машин будет равна стоимости, вычисленной согласно формуле (7.2—30).

Аналогично, пусть p_{a2} будет вероятностью того, что за второй год будет получена прибыль

$$Y_{a2}(x, y) = g_{a2}(y_1) + h_{a2}(x_1 - y_1) \quad (7.2-32)$$

и стоимость машин будет равна

$$x_2 = c_2(x, y) = \alpha_2(y_1) + \beta_2(x_1 - y_1), \quad (7.2-33)$$

и p_{b2} будет вероятностью того, что за второй год будет получена прибыль

$$Y_{b2}(x, y) = g_{b2}(y_1) + h_{b2}(x_1 - y_1), \quad (7.2-34)$$

и рыночная стоимость использованных машин будет равна стоимости, вычисленной по формуле (7.2—23).

Вообще, пусть p_{ak} есть вероятность того, что за k -й год будет получена прибыль

$$Y_{ak}(x, y) = g_{ak}(y_{k-1}) + h_{ak}(x_{k-1} - y_{k-1}), \quad (7.2-35)$$

и рыночная стоимость машин будет равна

$$x_k = c_k(x, y) = \alpha_k(y_{k-1}) + \beta_k(x_{k-1} - y_{k-1}), \quad (7.2-36)$$

и p_{bk} есть вероятность того, что за k -й год будет получена прибыль

$$Y_{bk}(x, y) = g_{bk}(y_{k-1}) + h_{bk}(x_{k-1} - y_{k-1}) \quad (7.2-37)$$

и стоимость машин будет равна стоимости, вычисленной по формуле (7.2—36).

В этих уравнениях $Y_{ak}(x, y)$, $Y_{bk}(x, y)$ и $c_k(x, y)$ являются непрерывными функциями x и y , при этом $x \geq 0$ и $0 \leq y \leq x$ и имеет место соотношение $0 \leq c_k(x, y) \leq \lambda x$, $\lambda < 1$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Используя принцип оптимальности, можно записать следующее функциональное уравнение для этого многошагового процесса решения:

$$f_{N-k-1}[c_{k-1}(x, y)] = \max_{0 \leq y < x} \{p_{ak}Y_{ak}(x, y) + p_{bk}Y_{bk}(x, y) + (p_{ak} + p_{bk})f_{N-k}[c_k(x, y)]\}, \quad (7.2-38)$$

где $c_0(x, y) = x$. Многократное использование этого рекуррентного соотношения позволяет найти оптимальное решение $y(x)$, максимизирующее ожидаемый полный доход, которое следует принять в начале N -летнего периода работы.

Пример 7.2—2. Проблема регулирования производства

Некоторая фирма, вкладывая капитал x , производит N различных изделий в различных количествах. Стоимость производства партии из q_j штук j -го изделия равна

$$g_j(q_j) = \begin{cases} (a_j + b_j + c_j)q_j + K_j & \text{для } q_j > 0; \\ 0 & \text{для } q_j = 0, \end{cases}$$

где a_j — стоимость сырьевых материалов, требуемых для производства единицы j -го изделия;

b_j — стоимость машинного производства единицы j -го изделия;

c_j — стоимость рабочей силы, требуемой для производства единицы j -го изделия;

K_j — фиксированные затраты, не зависящие от объема произведенной партии j -го изделия, если $q_j > 0$.

Полная стоимость продукции удовлетворяет соотношению

$$\sum_{j=1}^N g_j(q_j) \leq x,$$

где $q_j \geq 0$ и x — начальный капитал.

Пусть фирма с единицы j -го изделия получает прибыль p_j . Задача состоит в том, чтобы найти оптимальное соотношение между q_j , при котором прибыль

$$P_N = \sum_{j=1}^N p_j q_j,$$

получаемая фирмой от производства N различных изделий, является максимальной. Для простоты предполагается, что фирма обладает неограниченными резервами машинного производства и рабочей силы, позволяющими ей производить любое изделие в любых количествах.

Пусть $f_N(x)$ — максимальная полная прибыль. Тогда

$$f_N(x) = \max_{\{q_j\}} P_N.$$

Если компания производит только одно изделие, то максимальную прибыль можно записать в виде

$$f_1(x) = \max_{q_1} (p_1 q_1).$$

Так как

$$x = (a_1 + b_1 + c_1) q_1 + K_1,$$

то

$$q_1 = \frac{x - K_1}{a_1 + b_1 + c_1}.$$

Следовательно, если начальный капитал превышает связанные с производством фиксированные затраты, то фирма получит максимальную прибыль

$$f_1(x) = \frac{p_1(x - K_1)}{a_1 + b_1 + c_1}.$$

Если фиксированные затраты больше или равны начальному капиталу, то максимальная прибыль

$$f_1(x) = 0.$$

Если компания производит два вида изделий, то получаемая ею максимальная прибыль равна

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \max_{q_1, q_2} \{p_2 q_2 + p_1 q_1\} = \max_{\substack{q_2 \geq 0 \\ g_2(q_2) \leq x}} \left\{ p_2 q_2 + p_1 \left[\frac{x - g_2(q_2) - K_1}{a_1 + b_1 + c_1} \right] \right\} = \\ &= \max_{\substack{q_2 \geq 0 \\ g_2(q_2) \leq x}} \{p_2 q_2 + f_1[x - g_2(q_2)]\}, \end{aligned}$$

так как

$$f_1[x - g_2(q_2)] = p_1 \left[\frac{x - g_2(q_2) - K_1}{a_1 + b_1 + c_1} \right].$$

При $N = 3$ компания получит максимальную прибыль

$$f_3(x) = \max_{\{q_j\}} \{p_3 q_3 + p_2 q_2 + p_1 q_1\}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Принимая во внимание условия задачи, находим, что

$$(a_1 + b_1 + c_1) q_1 + K_1 + g_2(q_2) + g_3(q_3) = x$$

и

$$q_1 = \frac{x - g_2(q_2) - g_3(q_3) - K_1}{a_1 + b_1 + c_1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \max_{q_2, q_3} \left\{ p_3 q_3 + p_2 q_2 + \frac{p_1 [x - g_2(q_2) - g_3(q_3) - K_1]}{a_1 + b_1 + c_1} \right\} = \\ &= \max_{q_2, q_3} \{p_3 q_3 + p_2 q_2 + f_1[x - g_2(q_2) - g_3(q_3)]\}. \end{aligned}$$

Используя рекуррентное соотношение для $N = 2$, приведем $f_3(x)$ к виду

$$f_3(x) = \max_{\substack{q_3 \geq 0 \\ g_3(q_3) \leq x}} \{p_3 q_3 + f_2[x - g_3(q_3)]\}.$$

Отсюда, по аналогии можно написать следующее функциональное уравнение для рассматриваемой проблемы регулирования производства:

$$f_N(x) = \max_{\substack{q_N \geq 0 \\ g_N(q_N) \leq x}} \{p_N q_N + f_{N-1}[x - g_N(q_N)]\},$$

которое может быть использовано для определения оптимальной политики регулирования $\{q_i\}$. Интересно отметить, что это функциональное уравнение можно было написать непосредственно, используя принцип оптимальности.

Вычислительная процедура

Вышеприведенный анализ показал, что при использовании принципа оптимальности N -шаговый процесс решения может быть заменен последовательностью из N одношаговых процессов. Многошаговая проблема затем может быть решена путем многократного использования функционального уравнения, описывающего процесс решения [22]. Решение функционального уравнения может быть легко получено при помощи цифровой вычислительной машины. В качестве иллюстрации ниже рассматривается порядок решения в случае одномерного многошагового процесса. Эта схема вычислений может быть легко распространена на многомерный случай. Рассмотрим функциональное уравнение

$$f_N(x_1) = \max_{m_1} \{r(x_1, m_1) + f_{N-1}[g(x_1, m_1)]\}, \quad (7.2-39)$$

где $N \geq 2$.

Для $N = 1$

$$f_1(x_1) \doteq \max_{m_1} \{r(x_1, m_1)\}. \quad (7.2-40)$$

Для численного решения задачи используем эти рекуррентные соотношения. Полагая вначале $N = 1$, вычисляем значения $r(x_1, m_1)$ и соответствующее значение m_1 для различных значений x_1 . Для каждого x_1 находим максимальное значение $r(x_1, m_1)$, которое равно $f_1(x_1)$. Для $N = 1$ максимизирующее значение m_1 обозначим через m_1^1 и составляем таблицу значений x_1 , m_1^1 и $f_1(x)$.

Таблица 1

x_1	m_1^1	$f_1(x_1)$
⋯	⋯	⋯
⋯	⋯	⋯
⋯	⋯	⋯

Для $N = 2$ и для различных значений x_1 проводим вычисления, аналогичные предыдущим. Для каждого x_1 табулируем m_1 и $r(x_1, m_1) + f_1[g(x_1, m_1)]$; в результате этого табулирования

выбираем максимальное значение $r(x_1, m_1) + f_1[g(x, m_1)]$, которое равно $f_2(x_1)$. Значения $f_1[g(x_1, m_1)]$ заимствуем из табл. 1 непосредственно или вычисляем, прибегая к интерполяции или экстраполяции. Максимизирующее значение m_1 обозначим через m_1^2 и составляем таблицу значений x_1, m_1^2 и $f_2(x_1)$.

Таблица 2

x_1	m_1^2	$f_2(x_1)$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

Далее берем $N = 3$ и для той же совокупности значений x_1 повторяем процедуру вычислений, описанную выше. Для каждого значения x_1 табулируем значения m_1 и $r(x_1, m_1) + f_2[g(x_1, m_1)]$ и в результате этих вычислений выбираем максимальное значение $r(x_1, m_1) + f_2[g(x_1, m_1)]$, которое равно $f_3(x_1)$. Значения $f_2[g(x_1, m_1)]$ заимствуем из табл. 2 непосредственно или находим путем интерполяции или экстраполяции. Обозначая максимизирующее значение m_1 через m_1^3 , составляем таблицу значений x_1, m_1^3 и $f_3(x_1)$.

Таблица 3

x_1	m_1^3	$f_3(x_1)$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

Повторяем описанные вычисления для той же самой совокупности значений x_1 при $N = 4, 5, \dots$. На конечном этапе в случае N -шагового процесса табулируем m_1 и $r(x_1, m_1) + f_{N-1}[g(x_1, m_1)]$ для каждого значения x_1 и в результате выбираем максимальное значение $r(x_1, m_1) + f_{N-1}[g(x_1, m_1)]$. Значения $f_{N-1}[g(x_1, m_1)]$ заимствуем из табл. $N - 1$. Составляем таблицу значений x_1, m_1^N и $f_N(x_1)$, где m_1^N — максимизирующее значение m_1 .

Таблица N

x_1	m_1^N	$f_N(x_1)$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

Оптимальная стратегия управления для N -шагового процесса определяется затем из приведенных выше таблиц результатов вычислений.

Следует отметить, что динамическое программирование не устраняет затруднений, возникающих при осуществлении вычислительной процедуры, несмотря на то, что этот метод позволяет систематизировать процесс решения. Многошаговые процессы высокой размерности не поддаются решению при использовании описанной выше вычислительной процедуры из-за необходимости хранить чрезвычайно большое число результатов вычислений.

7.3. ОСНОВНАЯ ПРОБЛЕМА ОПТИМИЗАЦИИ

Проблема оптимизации, которая рассматривалась в параграфе 5.2, в настоящем параграфе изучается с точки зрения теории динамического программирования. Необходимо выбрать $x(t)$ таким образом, чтобы интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt \quad (7.3-1)$$

принял минимальное значение. Предполагается, что в этом уравнении $x = x(t)$ есть дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $x(t_0) = x_0$ и $x(t_f) = x_f$, и F — непрерывная функция своих аргументов x, \dot{x}, t . С точки зрения геометрии, задача состоит в выборе кривой или траектории $x(t)$, соединяющей точки (x_0, t_0) и (x_f, t_f) таким образом, чтобы значение интеграла от некоторой заданной функции $F(x, \dot{x}, t)$ вдоль этой кривой было минимальным.

Пусть $f(x, t)$ является минимальным относительно x значением интеграла I , в котором в качестве нижнего предела интегрирования взята независимая переменная t . Тогда

$$f(x, t) = \min_x \int_t^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt, \quad (7.3-2)$$

где минимум берется по всем x , и при $t = t_f$

$$f(x, t_f) = 0. \quad (7.3-3)$$

Уравнение (7.3—2) получается в результате использования принципа инвариантного вложения. Предполагается, что функция $f(x, t)$ обладает непрерывными первой и второй частными производными. Минимизацию можно проводить по отношению к \dot{x} , так как если будет получен минимум по x , то интеграл будет также минимизирован и по \dot{x} . Поэтому функция $f(x, t)$ может быть определена как

$$f(x, t) = \min_{\dot{x}} \int_t^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt, \quad (7.3-4)$$

где минимум берется по всем \dot{x} , и при $t = t_0$ выполняется равенство $f(x, t_0) = f(x_0)$.

Оптимизация может быть выполнена за два этапа: 1) от t до $t + \Delta$ и 2) от $t + \Delta$ до t_f . Интервал времени Δ выбирается очень малым. Каким бы ни был начальный выбор x в интервале $(t, t + \Delta)$, формулировка задачи для оставшегося интервала времени остается неизменной, за исключением начального условия, которое заменяется на $x(t + \Delta)$.

Для первого этапа начальным условием будет $x(t)$ при начальном выборе $x(t)$ в качестве минимизирующей функции. Для второго этапа начальным условием будет $x(t + \Delta)$ при начальном выборе $x(t + \Delta)$ в качестве минимизирующей функции. Тогда для функции $f(x, t)$ справедливо выражение

$$f(x, t) = \min_{\dot{x}} \left\{ \int_t^{t+\Delta} F(x, \dot{x}, t) dt + \int_{t+\Delta}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt \right\}. \quad (7.3-5)$$

Используя принцип оптимальности, получаем следующее функциональное уравнение:

$$f(x, t) = \min_{\dot{x}} \left\{ \int_t^{t+\Delta} F(x, \dot{x}, t) dt + f(x + \dot{x}\Delta, t + \Delta) \right\}, \quad (7.3-6)$$

где

$$f(x + \dot{x}\Delta, t + \Delta) = \min_{\dot{x}} \int_{t+\Delta}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt. \quad (7.3-7)$$

В правой части уравнения (7.3-6) первый член представляет собой значение интеграла на интервале Δ , второй член — минимальное значение интеграла на оставшемся интервале $(t + \Delta, t_f)$.

Так как Δ очень мало, то уравнение (7.3-6) можно представить в виде

$$f(x, t) = \min_{\dot{x}} \{ F(x, \dot{x}, t) \Delta + f(x + \dot{x}\Delta, t + \Delta) \} + \varepsilon(\Delta). \quad (7.3-8)$$

Из этого выражения следует, что значение интеграла от любой точки (x, t) до конечной точки (x_f, t_f) равно интегралу от t до $t + \Delta$ плюс минимальное значение интеграла от новой начальной точки $(x + \dot{x}\Delta, t + \Delta)$ до конечной точки (x_f, t_f) , как показано на рис. 7.3-1. Функция $f(x, t)$ является минимальной суммой этих интегралов по отношению к начальному направлению x . При переходе от уравнения (7.3-6) к уравнению (7.3-8) интеграл от t до $t + \Delta$ мы заменили на $F(x, \dot{x}, t)\Delta$, допустив при этом ошибку порядка $\varepsilon(\Delta)$.

Запишем далее разложение в ряд Тейлора:

$$f(x + \dot{x}\Delta, t + \Delta) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta + \frac{\partial f}{\partial t} \dot{x}\Delta + \dots \quad (7.3-9)$$

Отсюда приходим к следующему выражению для минимального значения I :

$$f(x, t) = \min_{\dot{x}} \left\{ F(x, \dot{x}, t)\Delta + f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} \Delta \right\} + \varepsilon_1(\Delta), \quad (7.3-10)$$

которое сводится к выражению

$$\min_{\dot{x}} \left\{ F(x, \dot{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + \varepsilon_2(\Delta) = 0. \quad (7.3-11)$$

В пределе, когда Δ стремится к нулю, из формулы (7.3-11) находим

$$\min_{\dot{x}} \left\{ F(x, \dot{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} \right\} = 0. \quad (7.3-12)$$

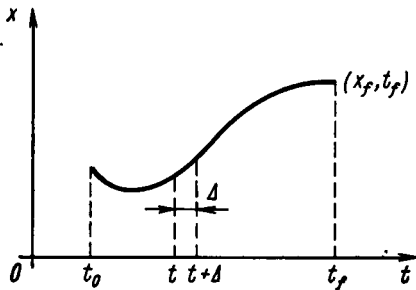


Рис. 7.3—1. Оптимальная траектория

Задачу минимизации теперь можно решить, пользуясь элементарными правилами. Взяв частные производные по \dot{x} от функций, заключенных в скобки в выражении (7.3-12), находим необходимое условие минимума в виде

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (7.3-13)$$

Подстановка минимизирующего значения \dot{x} в формулу (7.3-12) дает

$$F + \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (7.3-14)$$

Дифференцируя выражение (7.3-13) по t , получаем

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{dt} = 0. \quad (7.3-15)$$

Возьмем теперь частную производную от выражения (7.3-14) по x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = 0. \quad (7.3-16)$$

Учитывая формулу (7.3—13), предыдущее уравнение приведем к виду

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{dt} = 0. \quad (7.3—17)$$

Комбинируя выражения (7.3—15) и (7.3—17), получаем условие, необходимое для того, чтобы интеграл I принял минимальное значение

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (7.3—18)$$

Это — дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа, которое было получено в параграфе 5.2 при рассмотрении классической теории вариационного исчисления. Решение этого дифференциального уравнения дает функцию, минимизирующую интеграл I , при условии, что этот минимум существует.

Согласно элементарной теории для получения минимума необходимо, чтобы вторая частная производная по \dot{x} от функций, заключенных в скобки в формуле (7.3—12), была положительной. Это ведет к классическому *условию Лежандра*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0, \quad (7.3—19)$$

выражающему достаточное условие получения минимума для интеграла I .

При управлении процессами умеренной сложности могут существовать несколько минимумов интеграла I , однако условие Лежандра (7.3—19) не устраняет возможности выбора одного из относительных минимумов. Предположим, что функция \dot{x} доставляет интегралу I абсолютный минимум и относительный минимум доставляют все другие минимизирующие функции \dot{x}^m . Тогда имеет место следующее неравенство:

$$F(x, \dot{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} \leq F(x, \dot{x}^m, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x}^m \frac{\partial f}{\partial x} \quad (7.3—20)$$

для всех функций $\dot{x}^m = \dot{x}^m(x, t)$.

Перенеся члены правой части неравенства влево и упрощая, получаем

$$F(x, \dot{x}^m, t) - F(x, \dot{x}, t) + (\dot{x}^m - \dot{x}) \frac{\partial f}{\partial x} \geq 0. \quad (7.3—21)$$

Учитывая формулу (7.3—13), приходим к неравенству

$$F(x, \dot{x}^m, t) - F(x, \dot{x}, t) - (\dot{x}^m - \dot{x}) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \geq 0, \quad (7.3—22)$$

определяющему условие, необходимое для получения абсолютного минимума, известное как *необходимое условие Вейерштрасса*.

Мы рассмотрели решение проблемы оптимизации при допущении, что оптимальная траектория $x(t)$ соединяет две фиксированные точки (x_0, t_0) и (x_f, t_f) . Когда начальное значение $x(t_0)$ при $t = t_0$ определено частично или совсем не определено, то при решении задачи можно воспользоваться свойством оптимальной траектории $x(t)$, которое состоит в том, что изменение минимального значения интеграла I , вызванное изменением положения начальной точки $x(t_0)$, равно нулю. Это свойство ведет к условию

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{t_0} = 0, \quad (7.3-23)$$

которое принято называть *естественным граничным условием*, присоединенным к неопределенному граничному значению. В случае неопределенного начального значения функция $f(x, t)$ должна удовлетворять естественному граничному условию. С помощью выражений (7.3—13) и (7.3—23) находим условие

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{t_0} = 0, \quad (7.3-24)$$

которое можно использовать при отыскании решения дифференциального уравнения Эйлера — Лагранжа. Легко показать, что когда конечное значение $x(t_f)$ определено частично или не определено, естественное граничное условие имеет вид

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{t_f} = 0. \quad (7.3-25)$$

Отсюда, используя формулу (7.3—13), находим граничное условие

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{t_f} = 0. \quad (7.3-26)$$

Этому условию должно удовлетворять решение дифференциального уравнения Эйлера — Лагранжа для задачи с неопределенной конечной точкой.

Проведенный анализ показывает, что функция $x(t)$, минимизирующая интеграл I , является решением дифференциального уравнения Эйлера — Лагранжа (7.3—18) с одним граничным условием, определенным при $t = t_0$, и другим — при $t = t_f$. Поскольку уравнение Эйлера — Лагранжа является дифференциальным уравнением второго порядка вида

$$\ddot{x} = \varphi(x, \dot{x}, t), \quad (7.3-27)$$

то для удобства интегрирования необходимо знать значения \dot{x} и x при $t = t_0$ или при $t = t_f$. Однако в этой ситуации для обоих концов траектории можно записать граничные условия и затем искать решение, удовлетворяющее этим условиям в двух крайних точках.

Рассмотрим теперь случай, когда оптимальная траектория должна исходить из некоторой точки заданной кривой $x = c(t)$. В данном случае начальная точка не определена, и вертикальная линия $t = t_0$, ограничивающая ее положение, также не указывается. В этих условиях изменение $f(x, t)$ на оптимальной траектории при перемещении начальной точки вдоль заданной кривой $x = c(t)$ должно быть равно нулю. Отсюда

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{c} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=c(t)} = 0, \quad (7.3-28)$$

Комбинируя выражения (7.3-14) и (7.3-28), находим

$$F + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} - \dot{c} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=c(t)} = 0. \quad (7.3-29)$$

Отсюда, используя формулу (7.3-13), получаем условие

$$F + (c - \dot{x}) \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (7.3-30)$$

которое выполняется на заданной кривой $x = c(t)$ и которому должна удовлетворять начальная производная \dot{x} . Это условие, связывающее начальную производную с начальной точкой (x, t) и наклоном заданной исходной кривой $c(t)$, носит название *классического условия трансверсальности*.

Аналогичным образом можно показать, что если заданы начальная точка $x(t_0)$ и финальная кривая, в некоторой точке которой заканчивается оптимальная траектория, то условие (7.3-30) выполняется также и на финальной кривой $x = c(t)$.

Многомерная система

Описанный выше подход может быть использован и при изучении проблем оптимизации по многим переменным. Рассмотрим проблему определения вектора $\mathbf{x}(t)$, минимизирующего интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt, \quad (7.3-31)$$

где \mathbf{x} — n -мерный вектор-столбец. Векторная функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ предполагается дважды дифференцируемой функцией, удовлетворяющей условиям $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$, и F — непрерывной функцией своих аргументов $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t$. Задача оптимизации в

данном случае состоит в определении траектории $\mathbf{x}(t)$, соединяющей точки (\mathbf{x}_0, t_0) и (\mathbf{x}_f, t_f) в многомерном пространстве, таким образом, чтобы интеграл (7.3—31) принял минимальное значение.

Пусть функция $f(\mathbf{x}, t)$ является минимумом интеграла I , в котором в качестве нижнего предела интегрирования взята независимая переменная t . Тогда

$$f(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}} \int_t^{t_f} F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt, \quad (7.3-32)$$

где минимум берется по всем \mathbf{x} и при $t = t_f$

$$f(\mathbf{x}_f, t_f) = 0. \quad (7.3-33)$$

Уравнение (7.3—32) является результатом использования принципа инвариантного вложения. Предполагается, что функция $f(\mathbf{x}, t)$ обладает непрерывными первой и второй частными производными. Легко видеть, что, поскольку минимизация по \mathbf{x} дает тот же самый минимум, функция $f(\mathbf{x}, t)$ может быть определена как

$$f(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}} \int_t^{t_f} F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt, \quad (7.3-34)$$

где минимум берется по всем \mathbf{x} .

Используя принцип оптимальности, можно написать функциональное уравнение

$$f(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}} \left\{ \int_t^{t+\Delta} F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt + f(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \Delta, t + \Delta) \right\}, \quad (7.3-35)$$

где

$$f(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \Delta, t + \Delta) = \min_{\mathbf{x}} \int_{t+\Delta}^{t_f} F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt. \quad (7.3-36)$$

Для очень малых интервалов времени Δ интеграл от t до $t + \Delta$ в формуле (7.3—35) можно заменить на $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$, допустив ошибку порядка $\varepsilon(\Delta)$, что приводит к следующему выражению:

$$f(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}} \{ F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \Delta + f(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \Delta, t + \Delta) \} + \varepsilon(\Delta). \quad (7.3-37)$$

Раскладывая функцию $f(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta, t + \Delta)$ в ряд Тейлора, уравнение (7.3—37) приведем к виду

$$f(\mathbf{x}, t) = \min_{\dot{\mathbf{x}}} \left\{ F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \Delta + f(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \Delta \right\} + \varepsilon_1(\Delta), \quad (7.3-38)$$

откуда находим, что

$$\min_{\dot{\mathbf{x}}} \left\{ F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right\} + \varepsilon_2(\Delta) = 0. \quad (7.3-39)$$

Когда Δ стремится к нулю, $\varepsilon_2(\Delta) = 0$ и

$$\min_{\dot{\mathbf{x}}} \left\{ F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right\} = 0. \quad (7.3-40)$$

Чтобы облегчить дифференцирование, запишем выражение (7.3—40) в форме, включающей в явном виде компоненты вектора \mathbf{x} :

$$\min_{\dot{x}_j} \left\{ F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} = 0. \quad (7.3-41)$$

Беря частные производные по \dot{x}_i от функций, заключенных в фигурные скобки в формуле (7.3—41), находим необходимые условия минимума:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \quad (7.3-42)$$

Если $\dot{\mathbf{x}}(t)$ есть искомый минимизирующий вектор, то

$$F + \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0. \quad (7.3-43)$$

Дифференцируя выражение (7.3—42) по t , приходим к следующему:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} + \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.3-44)$$

Беря частные производные от выражения (7.3—43) по x_i , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} + \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (7.3-45)$$

откуда, используя формулу (7.3—42), находим

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} + \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \quad (7.3—46)$$

Комбинируя выражения (7.3—44) и (7.3—46), находим необходимое условие для получения минимума интеграла I :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0. \quad (7.3—47)$$

В векторных обозначениях необходимое условие можно записать как

$$\nabla_{\mathbf{x}} F - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} F) = 0, \quad (7.3—48)$$

что является дифференциальным уравнением Эйлера — Лагранжа для многомерных систем.

В предыдущем рассмотрении предполагалось, что функции F содержат только переменные x_i и их первые производные \dot{x}_i , но не содержат высших производных. Однако, когда функция включает высшие производные, проблема оптимизации может быть приведена к случаю многомерной оптимизации более высокой размерности, для чего достаточно рассматривать высшие производные в качестве дополнительных координат вектора состояния, что позволяет избавиться от высших производных в функции F . Это дает возможность использовать уравнение Эйлера — Лагранжа (7.3—48) для определения оптимальной траектории.

Уравнение Гамильтона — Якоби

Применение принципа оптимальности позволяет свести проблему оптимального управления к решению дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби [22, 52]. В классической механике через $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ обозначают лагранжиан системы, характеризуемой вектором состояния \mathbf{q} , введенным в параграфе 2.5. Согласно принципу Гамильтона система из начального состояния \mathbf{q}_0 при $t = t_0$ перемещается в любое состояние \mathbf{q} за время $t - t_0$ таким образом, чтобы минимизировать интеграл Лагранжа

$$I = \int_{t_0}^t L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt. \quad (7.3—49)$$

Обозначим через $S(q_0, t_0; q, t)$ минимальное значение этого интеграла. Тогда

$$S(q_0, t_0; q, t) = \min_{\dot{q}} \left\{ \int_{t_0}^t L(q, \dot{q}, \tau) d\tau \right\}. \quad (7.3-50)$$

Применяя принцип оптимальности к начальной точке (q_0, t_0) , получаем

$$\begin{aligned} S(q_0, t_0; q, t) = \min_{\dot{q}_0} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta} L(q, \dot{q}, \tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_0+\Delta}^t L(q, \dot{q}, \tau) d\tau \right\} = \min_{\dot{q}_0} \{ L(q_0, \dot{q}_0, t_0) \Delta + \\ + S(q_0, \dot{q}_0 \Delta, t_0 + \Delta; q, t) \} + \varepsilon(\Delta), \end{aligned} \quad (7.3-51)$$

где Δ — очень малый интервал времени, и минимизация выполняется за два шага.

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора, приведем формулу (7.3-51) к виду

$$\min_{\dot{q}_0} \left\{ L(q_0, \dot{q}_0, t_0) + \frac{\partial S}{\partial t_0} + \frac{\partial S}{\partial q_0} \dot{q}_0 \right\} + \varepsilon_1(\Delta) = 0. \quad (7.3-52)$$

В пределе, когда Δ стремится к нулю,

$$\min_{\dot{q}_0} \left\{ L + \frac{\partial S}{\partial t_0} + \frac{\partial S}{\partial q_0} \dot{q}_0 \right\} = 0. \quad (7.3-53)$$

Отсюда находим необходимое условие получения минимума интеграла:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} + \frac{\partial S}{\partial q_0} = 0 \quad (7.3-54)$$

или

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} = - \frac{\partial S}{\partial q_0} \triangleq p_0, \quad (7.3-55)$$

где вектор p_0 определяется как обобщенный момент при $t = t_0$.

Применяя теперь принцип оптимальности к любой точке (q, t) траектории, находим

$$\begin{aligned} S(q_0, t_0; q, t) = \min_{\dot{q}} \left\{ \int_{t_0}^{t-\Delta} L(q, \dot{q}, \tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t-\Delta}^t L(q, \dot{q}, \tau) d\tau \right\} = \min_{\dot{q}} \{ L(q, \dot{q}, t) \Delta + \\ + S(q_0, t_0; q - \dot{q} \Delta, t - \Delta) \} + \varepsilon(\Delta), \end{aligned} \quad (7.3-56)$$

где минимизация проводится за два шага и Δ обозначает малый интервал времени.

Следуя обычной процедуре, уравнение (7.3—56) можно упростить и привести к виду

$$\min_{\dot{\mathbf{q}}} \left\{ L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right\} + \varepsilon_1(\Delta) = 0. \quad (7.3—57)$$

Осуществляя предельный переход $\Delta \rightarrow 0$, находим

$$\min_{\dot{\mathbf{q}}} \left\{ L - \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right\} = 0, \quad (7.3—58)$$

откуда получаются следующие два уравнения:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = 0; \quad (7.3—59)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - L + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (7.3—60)$$

Для получения последних двух уравнений достаточно применить элементарные правила математики. Введя обозначения

$$\mathbf{p} \triangleq \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (7.3—61)$$

для вектора обобщенного момента и

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \triangleq \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L \quad (7.3—62)$$

для функции Гамильтона, уравнение (7.3—60) запишем в виде

$$H \left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (7.3—63)$$

получая известное из классической механики дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби, которое было рассмотрено в параграфе 2.5.

Для решения уравнения Гамильтона — Якоби можно воспользоваться методами, описанными в стандартных учебниках классической механики и курсах прикладной математики. Когда заданы начальные условия $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$, решение сводится к определению функции $S(\mathbf{q}_0, t_0; \mathbf{q}, t)$ из формулы (7.3—63). Затем находится вектор состояния или оптимальная траектория

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t_0; t) \quad (7.3—64)$$

как функция начальных условий и времени из уравнения (7.3—55) и вектор обобщенного момента

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t_0; t) \quad (7.3—65)$$

как функция начальных условий и времени из уравнений (7.3—59) и (7.3—61). Приведенное рассмотрение показывает, что в случае задания интегрального критерия качества, определенного выражением (7.3—49), проблема оптимального управления может быть сведена к решению уравнения Гамильтона — Якоби.

Численное решение

При изучении проблемы оптимизации выше были получены элегантные по форме дифференциальные уравнения в частных производных, которые могут быть также выведены классическими методами. Решения этих дифференциальных уравнений определяют минимизирующие функции. Однако с появлением быстродействующих цифровых вычислительных машин математическое мышление подверглось большому изменению. Аналитические методы в настоящее время оцениваются не только с точки зрения их элегантности, но также по их вычислительным удобствам. Уравнение Эйлера — Лагранжа представляет большую ценность с точки зрения удобств аналитического изучения задачи, однако необходимо также учитывать, что решение дифференциального уравнения в частных производных часто сопряжено со значительными трудностями. Динамическое программирование открывает путь численного решения исходной вариационной задачи, не связанный с решением дифференциального уравнения в частных производных.

Рассмотрим проблему минимизации интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt, \quad (7.3-66)$$

которая была описана в начале этого параграфа.

Пусть

$$f(x, t) = \min_{\dot{x}} \int_t^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt. \quad (7.3-67)$$

Применение принципа оптимальности приводит к функциональному уравнению

$$f(x, t) = \min_{\dot{x}} \left\{ \int_t^{t+\Delta} F(x, \dot{x}, t) dt + f(x + \dot{x}\Delta, t + \Delta) \right\}. \quad (7.3-68)$$

Представим уравнение (7.3—68) в форме, удобной для проведения вычислений:

$$f(x, t) = \min_{\dot{x}} \left\{ F(x, \dot{x}, t) \Delta + f(x + \dot{x}\Delta, t + \Delta) \right\}, \quad (7.3-69)$$

где Δ — некоторый выбранный малый интервал времени. Уравнение (7.3—69) может быть аппроксимировано N -шаговым процессом, описываемым уравнением

$$f_{N-i}(x, t) = \min_{\dot{x}} \left\{ F(x, \dot{x}, t) \Delta + f_{N-i+1}(x + \dot{x} \Delta, t + \Delta) \right\}, \quad (7.3-70)$$

где

$$f_0(x, t_f) = 0, \quad (7.3-71)$$

$$t = t_0 + j\Delta, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N; \quad t_f = t_0 + N\Delta.$$

Процедура вычислений была рассмотрена в параграфе 7.2. Полагая вначале $j = N - 1$ и учитывая формулу (7.3—71), находим

$$f_1(x, t_f - \Delta) = \min_{\dot{x}} \{ F(x, \dot{x}, t_f - \Delta) \Delta \}. \quad (7.3-72)$$

и затем табулируем значения \dot{x} и $f_1(x, t_f - \Delta)$ для последовательных значений x . Для $j = N - 2$ получаем функциональное уравнение

$$f_2(x, t_f - 2\Delta) = \min_{\dot{x}} \{ F(x, \dot{x}, t_f - 2\Delta) \Delta + f_1(x, t_f - \Delta) \}, \quad (7.3-73)$$

которое затем используем для табулирования значений \dot{x} и $f_2(x, t_f - 2\Delta)$ для той же самой совокупности значений x . Значения $f_1(x, t_f - \Delta)$ могут быть взяты из предыдущего расчета непосредственно или после интерполяции или экстраполяции. Продолжая расчет подобным образом, можно протабулировать значения \dot{x} и $f_N(x, t_0)$ для выбранных значений x и определить минимизирующую функцию по этим табулированным значениям.

7.4. ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО МИНИМУМУ ИНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ

Настоящий параграф посвящен синтезу процессов управления по минимуму интегрального критерия качества при использовании метода функциональных уравнений динамического программирования [15, 16, 18]. Рассмотрим процесс, описываемый дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = g(x, m), \quad (7.4-1)$$

где переменная состояния x и управляющее воздействие m являются скалярными функциями t и при $t = t_0$

$$x(t_0) = x_0. \quad (7.4-2)$$

Требуется определить оптимальное управляющее воздействие, минимизирующее интегральный показатель качества

$$I(m) = \int_{t_0}^{t_f} F(x, m) dt, \quad (7.4-3)$$

где $F(x, m)$ предполагается функцией, дифференцируемой по своим аргументам.

Рассматриваемая задача является частным случаем общей проблемы минимизации функционала

$$\int_{t_0}^{t_f} F(x, m) dt, \quad (7.4-4)$$

в котором x удовлетворяет уравнению (7.4-1) и начальному условию (7.4-2), а t изменяется в интервале (t_0, t_f) . Введем для обозначения минимума показателя качества функцию

$$f(x, t) = \min_m \int_t^{t_f} F(x, m) dt, \quad (7.4-5)$$

где $f(x, t_0) = f(x_0)$ при $t = t_0$ и минимум берется по всем m .

Как указывалось в предыдущем параграфе, оптимизация может быть выполнена за два шага по времени: 1) от t до $t + \Delta$ и 2) от $t + \Delta$ до t_f . Для оптимизации на первом шаге исходим из начального условия $x(t)$ и начального управляющего воздействия $m(t)$. На втором шаге исходим из начального условия $x(t + \Delta)$ и управляющего воздействия $m(t + \Delta)$. Тогда для функции $f(x, t)$ получим выражение

$$f(x, t) = \min_m \left\{ \int_t^{t+\Delta} F(x, m) dt + \int_{t+\Delta}^{t_f} F(x, m) dt \right\}. \quad (7.4-6)$$

Применяя принцип оптимальности, приходим к функциональному уравнению

$$f(x, t) = \min_m \left\{ \int_t^{t+\Delta} F(x, m) dt + f(x + \dot{x}\Delta, t + \Delta) \right\}, \quad (7.4-7)$$

которое в результате интегрирования и разложения правой части в ряд Тейлора можно записать как

$$f(x, t) = \min_m \left\{ F(x, m)\Delta + f(x, t) + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} \Delta + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta \right\} + \varepsilon(\Delta). \quad (7.4-8)$$

Отсюда, произведя упрощения и учитывая формулу (7.4—1), получаем

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \min_m \left\{ F(x, m) + g(x, m) \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + \varepsilon_1(\Delta). \quad (7.4-9)$$

Устремляя Δ к нулю, получаем $\varepsilon_1(\Delta) = 0$ и

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \min_m \left\{ F(x, m) + g(x, m) \frac{\partial f}{\partial x} \right\}. \quad (7.4-10)$$

Используя элементарные правила дифференцирования, получаем следующие два уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial m} + \frac{\partial g}{\partial m} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad (7.4-11)$$

$$F(x, m) + g(x, m) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (7.4-12)$$

Решая эти уравнения относительно $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial t}$, находим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial m}} \triangleq P(x, m); \quad (7.4-13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -F(x, m) + g(x, m) \frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial m}} \triangleq Q(x, m). \quad (7.4-14)$$

Дифференцируя выражение (7.4—13) по t , получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial P}{\partial n} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}. \quad (7.4-15)$$

Дифференцируя (7.4—14) по x , получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (7.4-16)$$

Приравняв правые части уравнений (7.4—15) и (7.4—16), получаем дифференциальное уравнение в частных производных относительно m :

$$g(x, m) \frac{\partial P(x, m)}{\partial x} + \frac{\partial P(x, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial Q(x, m)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x}, \quad (7.4-17)$$

где функции P и Q определяются выражениями (7.4—13) и (7.4—14) соответственно. Оптимальное управляющее воздействие m является решением уравнения (7.4—17).

Бесконечный процесс

Предыдущее рассмотрение касалось оптимального управления процессом за конечный интервал времени. Рассмотрим теперь задачу минимизации интегрального показателя качества

$$I(m) = \int_0^{\infty} F(x, m) dt. \quad (7.4—18)$$

Можно видеть, что минимум интеграла $I(m)$ в этом случае будет лишь функцией начального значения x , т. е. $x(0) = x_0$. Тогда минимальное значение интеграла $I(m)$ можно записать как

$$f(x_0) = \min_m I(m), \quad (7.4—19)$$

где минимум берется по всем m . Для обозначения минимума интеграла введем функцию

$$f(x) = \min_m \int_t^{\infty} F(x, m) dt, \quad (7.4—20)$$

где $f(x) = f(x_0)$ при $t = 0$.

Уравнение (7.4—20) является результатом применения принципа инвариантного вложения.

Применяя к формуле (7.4—20) принцип оптимальности, получаем следующее функциональное уравнение:

$$f(x) = \min_m \left\{ \int_0^{t+\Delta} F(x, m) dt + f(x + \dot{x}\Delta) \right\}, \quad (7.4—21)$$

где

$$f(x + \dot{x}\Delta) = \min_m \int_{t+\Delta}^{\infty} F(x, m) dt \quad (7.4—22)$$

представляет собой минимальное значение интеграла в интервале от $t + \Delta$ до бесконечности. Учитывая выражения (7.4—1), предыдущее функциональное уравнение можно записать в виде

$$f(x) = \min_m \left\{ \int_t^{t+\Delta} F(x, m) dt + f[x + g(x, m)\Delta] \right\}. \quad (7.4—23)$$

При очень малых Δ уравнение (7.4—23) сводится к

$$f(x) = \min_m \left\{ F(x, m)\Delta + f(x) + g(x, m) \frac{\partial f}{\partial x} \Delta \right\} + \varepsilon(\Delta) \quad (7.4—24)$$

или

$$\min_m \left\{ F(x, m) + g(x, m) \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + \varepsilon_1(\Delta) = 0. \quad (7.4—25)$$

Когда Δ стремится к нулю, $\varepsilon_1(\Delta) = 0$ и

$$\min_m \left\{ F(x, m) + g(x, m) \frac{\partial f}{\partial x} \right\} = 0. \quad (7.4—26)$$

Пользуясь элементарными правилами для определения минимума, находим следующие два уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial m} + \frac{\partial g}{\partial m} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad (7.4—27)$$

$$F(x, m) + g(x, m) \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (7.4—28)$$

Исключая $\frac{\partial f}{\partial x}$ из формул (7.4—27) и (7.4—28), получаем дифференциальное уравнение в частных производных:

$$g(x, m) \frac{\partial F(x, m)}{\partial m} - F(x, m) \frac{\partial g(x, m)}{\partial m} = 0, \quad (7.4—29)$$

из которого оптимальное управляющее воздействие m находится как функция переменной состояния x .

Процессы, зависящие от времени

До сих пор рассматривались процессы, не зависящие от времени, т. е. процессы, для которых функции g и F не были явными функциями времени. Перейдем теперь к изучению процессов более общего характера, в частности зависящих от времени. Рассмотрим процесс, описываемый линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = g(x, m, t), \quad (7.4—30)$$

где переменные x и m являются скалярными функциями t и при $t = t_0$

$$x(t_0) = x_0. \quad (7.4—31)$$

Требуется определить оптимальное управляющее воздействие m , минимизирующее интегральный показатель качества

$$I(m) = \int_{t_0}^{t_f} F(x, m, t) dt. \quad (7.4—32)$$

Теория инвариантного вложения позволяет рассматривать эту задачу как частный случай более общей задачи минимизации функционала

$$\int_t^{t_f} F(x, m, t) dt, \quad (7.4-33)$$

подчиненного условиям, заданным выражениями (7.4—30) и (7.4—31), где t меняется в интервале (t_0, t_f) .

Введем для обозначения минимума интеграла $I(m)$ функцию

$$f(x, t) = \min_m \int_t^{t_f} F(x, m, t) dt. \quad (7.4-34)$$

Применяя к выражению (7.4—34) принцип оптимальности, получаем функциональное уравнение

$$f(x, t) = \min_m \left\{ \int_t^{t+\Delta} F(x, m, t) dt + f(x + \dot{x}\Delta, t + \Delta) \right\}, \quad (7.4-35)$$

где Δ обозначает очень малый интервал времени. Произведя формальные преобразования и упрощая, находим

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \min_m \left\{ F(x, m, t) + g(x, m, t) \frac{df}{dx} \right\} + \varepsilon_1(\Delta). \quad (7.4-36)$$

В пределе, когда Δ стремится к нулю, уравнение (7.4—36) сводится к следующему:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \min_m \left\{ F(x, m, t) + g(x, m, t) \frac{\partial f}{\partial t} \right\}. \quad (7.4-37)$$

Осуществляя далее обычную процедуру минимизации, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial m} + \frac{\partial g}{\partial n} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad (7.4-38)$$

$$F(x, m, t) + g(x, m, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (7.4-39)$$

Из формул (7.4—38) и (7.4—39) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial n}} \triangleq P(x, m, t); \quad (7.4-40)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -F(x, m, t) + g(x, m, t) \frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial n}} \triangleq Q(x, m, t). \quad (7.4-41)$$

Возьмем теперь частную производную по t от выражения (7.4—40) и по x от выражения (7.4—41):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial n} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}; \quad (7.4-42)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial m} \cdot \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (7.4-43)$$

Комбинируя выражения (7.4—42) и (7.4—43), получаем уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} + g \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (7.4-44)$$

из которого может быть найдено оптимальное управляющее воздействие m .

Многомерные системы

Предыдущий анализ может быть распространен и на многомерные системы. Рассмотрим систему n -го порядка, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}), \quad (7.4-45)$$

где \mathbf{x} — n -мерный вектор состояния процесса;

\mathbf{m} — r -мерный вектор управляющих воздействий;

\mathbf{g} — векторная функция, которая предполагается дифференцируемой по своим аргументам.

Начальные условия для процесса управления даются вектором начального состояния

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (7.4-46)$$

Требуется определить вектор оптимального управления \mathbf{m} , минимизирующий интегральный показатель качества

$$I(\mathbf{m}) = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{m}) dt. \quad (7.4-47)$$

Предполагается, что $F(\mathbf{x}, \mathbf{m})$ является дифференцируемой скалярной функцией от вектора состояния и вектора управления.

Аналогично предыдущему для обозначения минимума интеграла введем функцию

$$f(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{m}} \int_t^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{m}) dt, \quad (7.4-48)$$

где t меняется в интервале (t_0, t_f) при $t = t_0$, $f(\mathbf{x}, t_0) = f(\mathbf{x}_0)$ и минимум берется по всем \mathbf{m} .

Применяя принцип оптимальности к выражению (7.4—48), получаем следующее функциональное уравнение:

$$f(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{m}} \left\{ \int_t^{t+\Delta} F(\mathbf{x}, \mathbf{m}) dt + f(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta, t + \Delta) \right\}. \quad (7.4-49)$$

Совершая предельный переход $\Delta \rightarrow 0$, получаем

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \min_{\mathbf{m}} \left\{ F(\mathbf{x}, \mathbf{m}) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) \right\}, \quad (7.4-50)$$

откуда вытекают следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{m}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{m}} = 0; \quad (7.4-51)$$

$$F + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (7.4-52)$$

Уравнения (7.4—51) и (7.4—52) являются исходными для определения оптимального управляющего воздействия \mathbf{m} .

Можно видеть, что от любой явной зависимости функции F от t можно избавиться, рассматривая t как дополнительную переменную состояния x_{n+1} , т. е. полагая

$$\dot{x}_{n+1}(t) = 1 \quad \text{и} \quad x_{n+1}(t) = t, \quad (7.4-53)$$

где $x_{n+1}(0) = 0$.

Следовательно, нестационарный процесс можно рассматривать как стационарный процесс увеличенной размерности, что позволяет использовать результаты, полученные ранее.

В классической теории управления задача минимизации интегрального показателя качества обычно рассматривается как специальный случай минимизации интеграла от квадрата ошибки системы в бесконечных пределах по времени. Так как в этом случае показатель качества имеет простую квадратичную форму и интегрирование производится в бесконечных пределах, то решение задачи оптимального управления для линейной стационарной системы можно получить в общем виде.

Для представления интеграла от квадрата ошибки в частотной области обычно используют теорему Парсеваля. Для обратного преобразования представления этого интеграла во временную область используется понятие изображающей функции. Однако обычные методы оптимизации не могут быть использованы, когда показатель качества не имеет простой квадратичной формы и если интегрирование проводится на конечном интервале времени.

Современные методы, с другой стороны, могут быть с успехом применены для решения большого класса гораздо более сложных проблем оптимального управления. При этом для опре-

деления оптимального управляющего воздействия необходимо решение дифференциального уравнения в частных производных. Для относительно простых систем может быть найдено аналитическое решение такого уравнения. Однако даже для систем умеренной сложности подобное решение наталкивается на большие трудности, и поэтому приходится прибегать к численным методам решения. В инженерной практике весьма часто возникает необходимость в таком подходе и рассмотрении дискретной модели исходной системы, позволяющей получить численное решение. Этот подход, приводящий к функциональным уравнениям, может быть использован и в том случае, когда на управляющие воздействия наложены ограничения, как это иллюстрируется в следующих параграфах.

Оптимальное управление при ограничениях, наложенных на управляющие воздействия

До сих пор задача оптимального управления процессом по минимуму интегрального показателя качества рассматривалась в предположении, что управляющие воздействия и координаты системы свободны от ограничений. Однако это является идеализацией реальных условий. При проектировании оптимальной системы следует учитывать ограничения, накладываемые на управляющие воздействия или координаты системы, так как физические возможности реальных систем ограничены. Если ограничения не учитываются, то расчет может привести к оптимальной системе с чрезвычайно большими амплитудами управляющих воздействий, не реализуемой практически. Наиболее часто встречаются следующие типы ограничений управляющих воздействий: 1) ограничение по амплитуде

$$a_i \leq m_i(t) \leq b_i, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (7.4-54)$$

и 2) интегральное ограничение

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{H}(\mathbf{m}) dt \leq \mathbf{c}, \quad (7.4-55)$$

где a_i, b_i — константы;

\mathbf{c} — векторная константа;

$\mathbf{H}(\mathbf{m})$ — векторная функция управляющих воздействий.

Ограничения первого типа приходится обычно учитывать, когда амплитуды управляющих воздействий ограничиваются максимальным перемещением, максимальной скоростью или максимальным ускорением управляющих устройств, а также в результате насыщения отдельных компонент системы.

Ограничения второго типа часто вводятся для того, чтобы учесть стоимость управления или ограничение мощности. Вве-

дение ограничения второго типа часто оказывается удобным и в том случае, когда управляющие воздействия ограничены по амплитуде. Для простоты и удобства аналитического решения задачи оптимального управления часто вместо ограничения управляющих воздействий по амплитуде используют интегральное ограничение.

Как указывалось в параграфе 5.4, ограничения второго типа могут быть легко учтены при решении задачи на основе метода неопределенных множителей Лагранжа [14].

Задача оптимизации сводится при этом к минимизации промежуточной функции

$$I_1(\mathbf{m}) = I(\mathbf{m}) + \lambda' \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{H}(\mathbf{m}) dt, \quad (7.4-56)$$

где $I(\mathbf{m})$ обозначает заданный показатель качества, который необходимо минимизировать; λ — векторный множитель Лагранжа.

Вектор оптимального управления \mathbf{m} определяется в результате минимизации промежуточной функции в виде функции от векторного множителя Лагранжа. Подстановка вектора $\mathbf{m}(\lambda)$ в формулу (7.4—55) приводит к r уравнениям, которые могут быть решены относительно элементов λ_i векторного множителя λ . В принципе это не должно составить проблемы, если только возможно аналитическое решение двухточечной краевой задачи.

Однако аналитическое решение дифференциальных уравнений в частных производных, полученных в предыдущих параграфах, и решение уравнения Эйлера — Лагранжа, полученного в параграфе 7.3, с учетом ограничения первого типа представляет собой исключительно трудную проблему, так как решение двухточечной краевой задачи само по себе является сложной задачей, а ограничения, вводимые с целью учесть насыщение системы, делают ситуацию еще более сложной. Эти затруднения можно обойти, если воспользоваться функциональными уравнениями, выведенными в предыдущих параграфах. Рассмотрим, например, управление на конечном интервале времени стационарным процессом, которое уже обсуждалось выше. Запишем еще раз функциональное уравнение (7.4—7):

$$f(x, t) = \min_m \left\{ \int_t^{t+\Delta} F(x, m) dt + f(x + \dot{x}\Delta, t + \Delta) \right\}. \quad (7.4-57)$$

Это уравнение можно представить в виде

$$f(x, t) = \min_m \{ F(x, m) \Delta + f(x + g\Delta; t + \Delta) \}, \quad (7.4-58)$$

где предполагается, что на управляющее воздействие наложено ограничение $|m| \leq M$ и Δ обозначает некоторый выбранный

малый интервал времени. Минимизация может быть выполнена при использовании вычислительной процедуры, описанной в параграфе 7.2. С этой целью представим выражение (7.4—58) в виде N -шагового процесса, описываемого уравнением

$$f_{N-j}(x, t) = \min_m \{F(x, m)\Delta + f_{N-j-1}(x + g\Delta, t + \Delta)\}, \quad (7.4-59)$$

где

$$t = t_0 + j\Delta, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad \text{и} \quad t_f = t_0 + N\Delta.$$

Отсюда для $j = 0$ имеем

$$f_N(x, t_0) = \min_m \{F(x, m)\Delta + f_{N-1}(x + g\Delta, t_0 + \Delta)\} \quad (7.4-60)$$

и для $j = N$

$$f_0(x, t_f) = 0. \quad (7.4-61)$$

Для $j = N - 1$ находим

$$f_1(x, t_f - \Delta) = \min_m \{F(x, m)\Delta + f_0(x, t_f)\} = \min_m \{F(x, m)\Delta\}, \quad (7.4-62)$$

откуда для последовательных значений x табулируем значения $f_1(x, t_f - \Delta)$ и m_1 .

Аналогичным образом из рекуррентного соотношения

$$f_2(x, t_f - 2\Delta) = \min_m \{F(x, m)\Delta + f_1(x, t_f - \Delta)\} \quad (7.4-63)$$

определяются значения $f_2(x, t_f - 2\Delta)$ и соответственно m_2 для последовательных значений x . Значения $f_1(x, t_f - \Delta)$ могут быть заимствованы непосредственно из предыдущего расчета или найдены путем интерполяции или экстраполяции.

Этот метод позволяет находить оптимальное воздействие m , минимизирующее заданный интегральный критерий. Ограничения, наложенные на управляющее воздействие, позволяют при вычислениях рассматривать некоторый конечный интервал возможных значений m , что облегчает вычислительную процедуру.

Динамическое программирование указывает путь, которым можно обойти трудности, возникающие обычно при решении дифференциальных уравнений в частных производных с граничными условиями, заданными в двух точках. Введение ограничений при этом даже помогает численному решению. Численная процедура решения вариационных задач управления была впервые предложена и использована Беллманом и довольно подробно рассмотрена в работе [22 гл. 5]. Применение этой процедуры избавляет от большей части трудностей установления некоторых аналитических свойств заданного критерия, таких как непрерывность, дифференцируемость и выпуклость.

Пример 7.4—1. Простая задача оптимального управления

Рассмотрим управление процессом первого порядка, характеризуемым уравнением

$$\dot{x} = -ax + \gamma m,$$

где a и γ — положительные константы и на управляющее воздействие m наложено ограничение $|m| \leq M$.

Требуется определить оптимальное управляющее воздействие m , минимизирующее интеграл

$$I(m) = \int_0^{t_1} x^2 dt.$$

Введем функцию

$$f(x, t) = \min_m \int_t^{t_1} x^2 dt$$

для обозначения минимального значения интеграла на интервале от t до t_1 . Тогда из формулы (7.4—10) следует, что

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \min_m \left\{ x^2 + (-ax + \gamma m) \frac{\partial f}{\partial x} \right\}.$$

Анализ полученного уравнения показывает, что функция в фигурных скобках достигает минимума при

$$m = -M \operatorname{sgn} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Следовательно, оптимальное управляющее воздействие принимает значение $+M$ либо $-M$ в соответствии со знаком частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению в частных производных

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = x^2 - ax \frac{\partial f}{\partial x} - \gamma M \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|.$$

Таким образом, мы сравнительно легко установили общий характер оптимального управляющего воздействия, однако заметим, что определение функции переключения ни в какой мере не является простой задачей. Аналитическое решение этой задачи обычно трудно получить, и поэтому часто используются численные методы.

Оптимальное управление линейными процессами по минимуму квадратичного показателя качества

Приведенное выше рассмотрение касалось оптимального управления процессами по минимуму интегрального показателя качества, заданному в общем виде. Для решения этой проблемы оптимального управления был применен метод функциональных уравнений динамического программирования. Решение задачи оптимизации приводит к дифференциальным уравнениям в частных производных. Аналитическое решение этих уравнений обыч-

но трудно получить, и поэтому используются численные методы. Однако, когда рассматриваемый процесс является линейным и оптимизация осуществляется по отношению к квадратичному критерию, то для оптимальных управляющих воздействий могут быть получены аналитические выражения. Использование квадратичного показателя качества позволяет довести до конца аналитическое решение задачи.

Рассмотрим линейный процесс n -го порядка, описываемый дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)m(t), \quad (7.4-64)$$

где \mathbf{x} — n -мерный вектор состояния процесса;

m — управляющее воздействие;

\mathbf{A} — матрица коэффициентов;

\mathbf{D} — матрица управления.

В начале траектории $t = 0$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Для простоты предполагается, что имеется одно единственное управляющее воздействие. Задача состоит в том, чтобы найти оптимальное управляющее воздействие $m(t)$, минимизирующее интегральный критерий

$$I(m) = \int_0^T F(\mathbf{x}, m, t) dt \quad (7.4-65)$$

на интервале времени $(0, T)$, в котором поведение системы представляет интерес. Функция F в выражении (7.4-65) является квадратичной функцией вида

$$F(\mathbf{x}, m, t) = \mathbf{x}'\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \lambda m^2, \quad (7.4-66)$$

где \mathbf{Q} — симметрическая матрица квадратичной формы $\mathbf{x}'\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}$ размера $n \times n$; λ — константа.

Член λm^2 здесь введен для того, чтобы при необходимости можно было исключить из рассмотрения насыщение системы.

Поступая так же, как и ранее, введем для обозначения минимума интеграла на интервале (t, T) функцию

$$f(\mathbf{x}, t) = \min_m \int_t^T F(\mathbf{x}, m, i) dt. \quad (7.4-67)$$

Найдем сначала условия существования минимума рассматриваемого показателя качества. Применяя принцип оптимальности к выражению (7.4-67), приходим к функциональному уравнению

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \min_m \left\{ \mathbf{x}'\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \lambda m^2 + \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\}, \quad (7.4-68)$$

где x_j есть j -я компонента вектора состояния \mathbf{x} и

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t) x_k(t) + d_j(t) m(t), \quad (7.4-69)$$

где $a_{jk}(t)$ и $d_j(t)$ — элементы матрицы коэффициентов $\mathbf{A}(t)$ и матрицы управления $\mathbf{D}(t)$ соответственно. Уравнение (7.4—68) выражает условие, при котором показатель качества (7.4—65) имеет минимум.

Минимизирующее управляющее воздействие m^0 может быть найдено путем дифференцирования выражения (7.4—68). Приравняв производную по m от функции в скобках в формуле (7.4—68), находим минимизирующее управляющее воздействие m^0 в виде

$$m^0 = -\frac{1}{2\lambda} \sum_{j=1}^n d_j(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}. \quad (7.4-70)$$

Подстановка уравнений (7.4—69) и (7.4—70) в правую часть уравнения (7.4—68) приводит к следующему условию минимума:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial t} = & \mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} + \frac{1}{4\lambda} \left[\sum_{j=1}^n d_j(t) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right]^2 + \\ & + \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n a_{jk}(t) x_k - \frac{1}{2\lambda} d_j(t) \sum_{k=1}^n d_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k} \right] \frac{\partial f}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (7.4-71)$$

Задача теперь состоит в решении этого уравнения относительно $f(\mathbf{x}, t)$. Так как $F(\mathbf{x}, m, t)$ является квадратичной функцией \mathbf{x} и m , можно показать, что $f(\mathbf{x}, t)$ может быть также выражена через квадратичную функцию \mathbf{x} и записана в виде

$$f(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}' \mathbf{P}(t) \mathbf{x}, \quad (7.4-72)$$

где $\mathbf{P}(t)$ — симметрическая матрица квадратичной формы $\mathbf{x}' \mathbf{P}(t) \mathbf{x}$ размера $n \times n$. Из формулы (7.4—72) находим, что частная производная от $f(\mathbf{x}, t)$ по \mathbf{x} равна

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{P}(t) \mathbf{x}. \quad (7.4-73)$$

Матрицу $\mathbf{P}(t)$ можно найти следующим образом. Комбинируя формулы (7.1—74) и (7.4—73) и записывая результирующее уравнение в векторно-матричной форме, будем иметь

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{x}' [\mathbf{Q}(t) + 2\mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) - \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}(t) \mathbf{D}(t) \mathbf{D}'(t) \mathbf{P}(t)] \mathbf{x}. \quad (7.4-74)$$

Найдем из формулы (7.4—72) частную производную от $f(\mathbf{x}, t)$ по t :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{x}' \frac{\partial \mathbf{P}(t)}{\partial t} \mathbf{x}. \quad (7.4-75)$$

Комбинируя теперь выражения (7.4—74) и (7.4—75), приходим к следующему дифференциальному уравнению для $\mathbf{P}(t)$:

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t)}{\partial t} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}(t) \mathbf{D}(t) \mathbf{D}'(t) \mathbf{P}(t) - 2\mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{Q}(t) \quad (7.4-76)$$

с граничным условием

$$f(\mathbf{x}, T) = \mathbf{x}'(T) \mathbf{P}(T) \mathbf{x}(T) = 0. \quad (7.4-77)$$

Уравнение (7.4—76) можно далее проинтегрировать для определения $\mathbf{P}(t)$ при использовании формул (7.4—70) и (7.4—73).

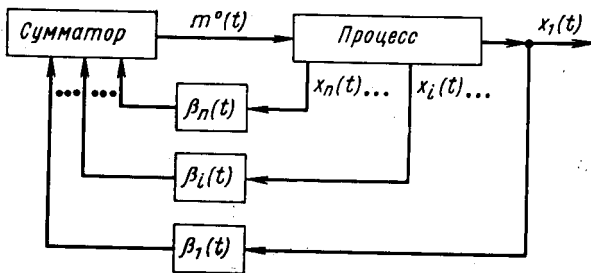


Рис. 7.4—1. Схема оптимальной системы регулирования

Отсюда получаем следующее выражение для оптимального управляющего воздействия в матричной форме:

$$m^0 = -\frac{1}{\lambda} \mathbf{D}'(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t). \quad (7.4-78)$$

Поскольку $\mathbf{D}'(t)$ в этом выражении является матрицей-строкой размера $1 \times n$ и $\mathbf{P}(t)$ — матрица размера $n \times n$, то их произведение $\mathbf{D}'(t) \mathbf{P}(t)$ будет матрицей-строкой размера $1 \times n$. Введем вектор

$$\boldsymbol{\beta}(t) = -\frac{1}{\lambda} \mathbf{D}'(t) \mathbf{P}(t) = [\beta_1(t) \ \beta_2(t) \ \dots \ \beta_n(t)] \quad (7.4-79)$$

и формулу (7.4—78) перепишем в виде

$$m^0(t) = \boldsymbol{\beta}(t) \mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) x_i(t). \quad (7.4-80)$$

Таким образом оптимальное управляющее воздействие мы получили в виде линейной функции координат состояния. Эту

управляющую функцию часто называют *оптимальным законом управления*. Уравнение (7.4—80) определяет структуру оптимальной системы. Блок-схема системы изображена на рис. 7.4—1, из которой можно видеть что:

- 1) количество цепей обратной связи равно порядку системы;
- 2) сигналами обратной связи являются измеримые координаты системы;
- 3) коэффициенты обратной связи в каждой цепи являются функциями времени, не зависящими от координат системы. Последнее свойство является следствием сделанного допущения, что процесс является линейным и оптимизация проводится по отношению к квадратичному показателю качества.

Квадратичный показатель ошибки

Как отмечалось выше, при синтезе оптимальных систем управления важное место занимает этап формулирования критерия качества системы. Одним из наиболее полезных критериев, используемых при проектировании оптимальных систем, является показатель ошибки, характеризующий отклонение координат системы от желаемых значений. Структура результирующей оптимальной системы обычно определяется этим показателем ошибки, который выбирается исходя из требований, предъявляемых к системе. Поэтому инженер, разрабатывающий систему, может влиять на ее характеристики путем выбора соответствующего показателя ошибки. Ниже рассматривается оптимизация управления линейным процессом n -го порядка при использовании интегрального показателя ошибки.

Обычно используемый интегральный показатель ошибки является квадратичной формой, определяемой выражением

$$I(m) = \int_0^T \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) [x_k^d(t) - x_k(t)]^2 + \lambda m^2(t) \right\} dt, \quad (7.4-81)$$

где $x_k^d(t)$ обозначают желаемые значения координат состояния $x_k(t)$ и $\alpha_k(t)$ — весовые коэффициенты, изменяющиеся во времени, которые указывают относительную важность отдельных членов, входящих в выражение ошибки системы [54, 118, 119].

При синтезе оптимальной системы эти весовые коэффициенты необходимо выбирать таким образом, чтобы удовлетворить требованиям, предъявляемым к характеристикам системы, и ограничительным условиям, накладываемым исходя из физических соображений.

Первый член подынтегрального выражения в формуле (7.4—81) представляет собой комбинацию ошибок по различным координатам системы в любой момент времени t , а второй член характеризует стоимость управления. Множитель λ может

быть назван коэффициентом штрафа. Как уже говорилось, второй член здесь вводится для того, чтобы при необходимости иметь возможность ограничить амплитуду управляющего воздействия и тем самым избежать насыщения системы. Задача синтеза оптимальной системы состоит в определении оптимального управляющего воздействия $m(t)$, минимизирующего показатель качества.

Условие, необходимое для существования минимума, может быть получено при использовании принципа оптимальности. Введем для обозначения минимума интеграла на интервале (t, T) функцию

$$f(x, t) = \min_m \int_t^T \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) [x_k^d(t) - x_k(t)]^2 + \lambda m^2(t) \right\} dt. \quad (7.4-82)$$

Следуя описанной выше формальной процедуре составления функционального уравнения, находим условие минимума для выражения (7.4—82) в виде

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \min_m \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) [x_k^d(t) - x_k(t)]^2 + \lambda m^2(t) + \sum_{k=1}^n \dot{x}_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\}, \quad (7.4-83)$$

где $\dot{x}_k(t)$ дается уравнением (7.4—69). Интересно отметить, что первые члены в правой части уравнения (7.4—83) являются теми же самыми членами, которые входят в подынтегральное выражение в формуле (7.4—82). В предыдущем уравнении $x_k(t)$ есть k -я компонента вектора состояния $x(t)$, связанного с управляющим воздействием $m(t)$ соотношением (7.4—69). Минимальное значение величины, заключенной в фигурные скобки в формуле (7.4—83), можно получить, приравнявая нулю частную производную от этой величины по $m(t)$. Осуществление этой операции минимизации приводит к минимизирующему управляющему воздействию (7.4—70).

Подставляя выражения (7.4—69) и (7.4—70) в формулу (7.4—83), находим дифференциальное уравнение в частных производных

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) [x_k^d(t) - x_k(t)]^2 + \frac{1}{2\lambda} \left[\sum_{j=1}^n d_j(t) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right]^2 + \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n a_{jk}(t) x_k(t) - \frac{1}{2\lambda} d_j(t) \sum_{k=1}^n d_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k} \right] \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad (7.4-84)$$

которое определяет минимум интеграла или функцию $f(\mathbf{x}, t)$. Оптимальное управляющее воздействие $m^0(t)$ далее может быть найдено из выражения (7.4—70), как только уравнение (7.4—84) будет решено относительно функции $f(\mathbf{x}, t)$. Поскольку подынтегральное выражение в показателе качества (7.4—81) представляет собой квадратичную форму, то функцию $f(\mathbf{x}, t)$ можно записать в виде

$$f(\mathbf{x}, t) = b(t) + 2 \sum_{j=1}^n b_j(t) x_j(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(t) x_i(t) x_j(t), \quad (7.4-85)$$

где функции $b(t)$, $b_j(t)$ и $b_{ij}(t)$ находятся из формул (7.4—84) — (7.4—85). Заметим, что

$$b_{ij}(t) = b_{ji}(t). \quad (7.4-86)$$

Если эти функции найдены, то оптимальное управляющее воздействие далее можно легко определить, вычисляя частные производные от $f(\mathbf{x}, t)$ по x_j и подставляя их в уравнение (7.4—70). Эти частные производные имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 2b_j(t) + \sum_{i=1}^n b_{ij}(t) x_i(t). \quad (7.4-87)$$

Отсюда, комбинируя формулы (7.4—70) и (7.4—87), получаем следующее выражение для оптимального закона управления:

$$m^0(t) = r(t) + \sum_{i=1}^n \beta_i(t) x_i(t), \quad (7.4-88)$$

где

$$r(t) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n d_j(t) b_j(t); \quad (7.4-89)$$

$$\beta_i(t) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n d_j(t) b_{ij}(t). \quad (7.4-90)$$

Как и следовало ожидать, оптимальный закон управления мы получили в виде линейной функции координат состояния системы.

Разложение, определяемое уравнением (7.4—85), известно под названием параметрического разложения Мерриам, поскольку коэффициенты $b_j(t)$ и $b_{ij}(t)$ выступают здесь в качестве параметров оптимального закона управления. Блок-схема оптимальной системы, определяемая непосредственно выражением (7.4—88), показана на рис. 7.4—2. Эта оптимальная система со-

держит n цепей обратной связи для ее n координат состояния. Коэффициенты обратной связи являются функциями времени $\beta_i(t)$. На вход системы поступает также воздействие $r(t)$, определенное выражением (7.4—89). Это входное воздействие следует приравнять нулю, если в качестве желаемых значений координат состояния системы заданы нулевые значения.

Вычисляя частные производные от функции (7.4—85) по времени t и координатам x_j , подставляя затем эти производные в

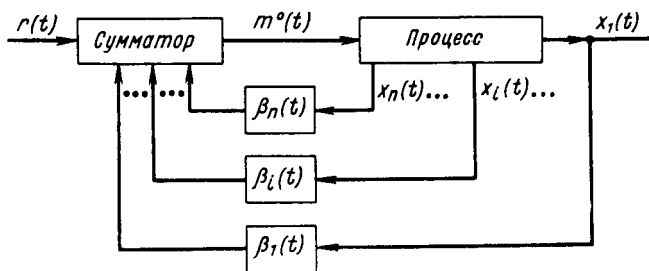


Рис. 7.4—2. Схема оптимальной системы управления

формулу (7.4—84) и производя упрощения, получаем следующее выражение:

$$K_0 + \sum_{i=1}^n K_i x_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i(t) x_j(t) = 0. \quad (7.4—91)$$

где K — коэффициенты, состоящие из членов, содержащих желаемые значения координат $x_k^d(t)$, весовые коэффициенты $a_k(t)$, элементы $a_{jk}(t)$ и $d_j(t)$ матриц A и D , параметры $b(t)$, $b_j(t)$ и $b_{ij}(t)$.

Чтобы соотношение (7.4—91) выполнялось для любых значений координат состояния системы, необходимо каждый коэффициент K приравнять нулю. Это условие ведет к системе из $1 + n + \frac{n}{2}(n + 1)$ независимых дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{aligned} K_{ij} &= 0; \\ K_i &= 0; \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n. \\ K_0 &= 0, \end{aligned} \quad (7.4—92)$$

из которых могут быть найдены параметры $b(t)$, $b_j(t)$ и $b_{ij}(t)$. Эти дифференциальные уравнения первого порядка в математической литературе называются дифференциальными уравнениями Риккати.

В конце оптимальной траектории имеем $t = T$, и поэтому функция $f(x, t)$ становится равной нулю:

$$f(x, T) = 0. \quad (7.4-93)$$

Тогда из выражения (7.4-85) следует, что

$$b(T) + 2 \sum_{j=1}^n b_j(T) x_j(T) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(T) x_i(T) x_j(T) = 0. \quad (7.4-94)$$

Отсюда приходим к следующим $1 + n + \frac{n}{2} (n + 1)$ граничным условиям для дифференциальных уравнений Риккати:

$$\begin{aligned} b_{ij}(T) &= 0; \\ b_i(T) &= 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \\ b(T) &= 0. \end{aligned} \quad (7.4-95)$$

Так как значения этих параметров известны для конечного момента времени $t = T$, то эти уравнения необходимо решать для обращенного времени. Чтобы облегчить решение этих уравнений на цифровой вычислительной машине, их можно подстановкой $\tau = T - t$ преобразовать в систему уравнений, в которых в качестве переменной времени будет фигурировать новая переменная τ . Решение этих новых уравнений можно в этом случае производить от $t = 0$ до $t = T$.

Описанная выше процедура расчета может быть легко модифицирована на случай управления процессом по нескольким входам. Необходимые для этого выкладки представляем сделать заинтересованному читателю в качестве упражнения. Проиллюстрируем расчет оптимальных систем управления изложенными выше методами следующими двумя примерами.

Пример 7.4-2. Простая система управления

Рассмотрим управление простым процессом, описываемым дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = km.$$

При $t = T$ справедливо равенство $x(T) = x_f$.

Требуется определить оптимальное управляющее воздействие, минимизирующее интегральный критерий

$$I(m) = \int_0^T F(x, m, t) dt,$$

где $F(x, m, t) = ax^2 + \lambda m^2$.

Введем для обозначения минимума показателя качества на интервале (t, T) функцию

$$f(x, t) = \min_m \left\{ \int_t^T F(x, m, t) dt \right\}.$$

Следуя формальной процедуре, составляем функциональное уравнение

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \min_m \left\{ ax^2 + \lambda m^2 + km \frac{\partial f}{\partial x} \right\}.$$

Дифференцируя выражение в скобках в этом уравнении по m и приравнявая производную нулю, находим, что минимум достигается при

$$m^0 = -\frac{k}{2\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, находим условие существования минимума для заданного показателя качества:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = ax^2 - \frac{k^2}{4\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2.$$

Предположим, что $f(x, t)$ является квадратичной функцией от x и имеет вид

$$f(x, t) = b_1(t) + 2b_2(t)x + b_3(t)x^2.$$

Найдем частную производную от $f(x, t)$ по t :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dot{b}_1(t) + 2\dot{b}_2(t)x + \dot{b}_3(t)x^2,$$

и частную производную от $f(x, t)$ по x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2b_2(t) + 2b_3(t)x;$$

Подставляя найденные выражения частных производных в условие для минимума, получаем

$$-[\dot{b}_1(t) + 2\dot{b}_2(t)x + \dot{b}_3(t)x^2] = ax^2 - \frac{k^2}{\lambda} [b_2(t) + b_3(t)x]^2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , приходим к дифференциальным уравнениям Риккати:

$$\lambda \dot{b}_1(t) = k^2 b_2^2(t);$$

$$\lambda \dot{b}_2(t) = k^2 b_2(t) b_3(t);$$

$$\lambda \dot{b}_3(t) = k^2 b_3^2(t) - a.$$

Так как при $t = T$ выполняется равенство $f(x, T) = 0$, то

$$b_1(T) + 2b_2(T)x(T) + b_3(T)x^2(T) = 0.$$

Это уравнение позволяет найти граничные условия для дифференциальных уравнений Риккати. Граничные условия имеют вид

$$b_1(T) = b_2(T) = b_3(T) = 0.$$

Подстановкой $t = \tau + T$ дифференциальные уравнения Риккати приведем к виду

$$\begin{aligned}\lambda \dot{b}_1(\tau) &= k^2 b_2^2(\tau); \\ \lambda \dot{b}_2(\tau) &= k^2 b_2(\tau) b_3(\tau); \\ \lambda \dot{b}_3(\tau) &= k^2 b_3^2(\tau) - a.\end{aligned}$$

Начальные условия для преобразованных уравнений находим при $\tau = 0$ в виде

$$b_1(0) = b_2(0) = b_3(0) = 0.$$

Чтобы найти оптимальное управляющее воздействие $m^0(T)$, необходимо предварительно решить эти уравнения относительно параметров b_1 , b_2 и b_3 . Решение этих уравнений можно легко получить с помощью цифровой вычислительной машины.

Пример 7.4—3. Система посадки самолета¹

Рассмотрим проблему посадки самолета, которая уже изучалась в параграфах 1.3 и 3.2. Динамика самолета характеризуется уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= a_{22}x_2 + a_{23}x_3; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ x_4 &= a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + K_0 m,\end{aligned}$$

где переменные x_1 , x_2 , x_3 и x_4 представляют собой соответственно высоту, скорость изменения высоты, угол тангажа и угловую скорость тангажа. Коэффициенты даются выражениями

$$\begin{aligned}K_0 &= K\omega_0^2 T_0; \quad a_{22} = -\frac{1}{T_0}; \quad a_{23} = \frac{V}{T_0}; \\ a_{42} &= \frac{1}{VT_0^2} - \frac{2\xi\omega_0}{VT_0} + \frac{\omega_0^2}{V}; \\ a_{43} &= \frac{1}{T_0^2} + \frac{2\xi\omega_0}{T_0} - \omega_0^2; \\ a_{44} &= \frac{1}{T_0} - 2\xi\omega_0,\end{aligned}$$

где ξ , ω_0 , K и T_0 — параметры самолета, определенные в параграфе 1.3.

В этом иллюстративном примере предполагается, что $\xi = 0,5$; $\omega_0 = 1$ рад/сек; $K = -0,95$ сек⁻¹; $T_0 = 2,5$ сек.

Пример заимствован из статьи Эллерта и Мерриама «Синтез схем с обратной связью при использовании теории оптимизации», (F. I. Ellert, C. W. Merriam, III, Synthesis of Feedback Controls Using Optimization Theory: An Example, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC—8, no. 2, p.p. 89—103, April, 1963.)

Качество рассматриваемой системы будем оценивать интегралом

$$I(m) = \int_0^T \left\{ \sum_{k=1}^4 \alpha_k(t) [x_k^d(t) - x_k(t)]^2 + m^2(t) \right\} dt.$$

Учитывая выражение (7.4—88), оптимальный закон управления найдем в виде

$$m^0(t) = -K_0 b_4(t) - K_0 b_{41}(t) x_1(t) - K_0 b_{42}(t) x_2(t) - K_0 b_{43}(t) x_3(t) - K_0 b_{44}(t) x_4(t).$$

Так как $\lambda = 1$, то $d_j(t) = K_0$ для $j = 4$ и $d_j(t) = 0$, для $j \neq 4$.

Используя формулы (7.4—91) и (7.4—92), запишем следующие пятнадцать дифференциальных уравнений Риккати:

$$\begin{aligned} \dot{b}(t) &= K_0^2 b_4^2(t) - \alpha_4(t) [x_4^d(t)]^2 - \alpha_3(t) [x_3^d(t)]^2 - \\ &\quad - \alpha_2(t) [x_2^d(t)]^2 - \alpha_1(t) [x_1^d(t)]^2; \\ \dot{b}_1(t) &= K_0^2 b_4(t) b_{41}(t) - \alpha_1(t) x_1^d(t); \\ \dot{b}_2(t) &= K_0^2 b_4(t) b_{42}(t) - b_1(t) - a_{22} b_2(t) - \alpha_2(t) x_2^d(t); \\ \dot{b}_3(t) &= K_0^2 b_4(t) b_{43}(t) a_{23} b_2(t) - a_{43} b_4(t) - \alpha_3(t) x_3(t); \\ \dot{b}_4(t) &= K_0^2 b_4(t) b_{44}(t) - b_3(t) - a_{44} b_4(t) - \alpha_4(t) x_4(t); \\ \dot{b}_{11}(t) &= -K_0^2 b_{41}^2(t) - \alpha_1(t); \\ \dot{b}_{21}(t) &= K_0^2 b_{41}(t) b_{42}(t) - b_{11}(t) - a_{42} b_{41}(t) - a_{22} b_{21}(t); \\ \dot{b}_{22}(t) &= K_0^2 b_{42}^2(t) - 2b_{21}(t) - 2a_{42} b_{42}(t) - 2a_{22} b_{22}(t) - \alpha_2(t); \\ \dot{b}_{31}(t) &= K_0^2 b_{41}(t) b_{43}(t) - a_{23} b_{21}(t) - a_{43} b_{41}(t); \\ \dot{b}_{32}(t) &= K_0^2 b_{42}(t) b_{43}(t) - b_{31}(t) - a_{23} b_{22}(t) - \\ &\quad - a_{42} b_{43}(t) - a_{43} b_{42}(t) - a_{22} b_{32}(t); \\ \dot{b}_{33}(t) &= K_0^2 b_{43}^2(t) - 2a_{23} b_{32}(t) - 2a_{43} b_{43}(t) - \alpha_3(t); \\ \dot{b}_{41}(t) &= K_0^2 b_{41}(t) b_{44}(t) - b_{31}(t) - a_{44} b_{41}(t); \\ b_{42}(t) &= K_0^2 b_{42}(t) b_{44}(t) - b_{41}(t) - b_{32}(t) - \\ &\quad - a_{22} b_{42}(t) - a_{42} b_{44}(t) - a_{44} b_{42}(t); \\ \dot{b}_{43}(t) &= K_0^2 b_{43}(t) b_{44}(t) - b_{33}(t) - a_{23} b_{42}(t) - \\ &\quad - a_{43} b_{44}(t) - a_{44} b_{43}(t); \\ \dot{b}_{44}(t) &= K_0^2 b_{44}^2(t) - 2b_{43}(t) - 2a_{44} b_{44}(t) - \alpha_4(t). \end{aligned}$$

Для того чтобы найти оптимальный закон управления, необходимо предварительно решить эту систему дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим теперь конкретный случай с целью проиллюстрировать работу оптимальной системы посадки самолета.

Предположим, что заданы следующие требования и ограничения, которым должна удовлетворять система посадки.

1. Кривая изменения желаемой высоты $h_d(t)$ самолета в процессе посадки имеет экспоненциальную и линейную части, как показано на рис. 7.4—3. При снижении по траектории такого типа обычно удается обеспечить безопасность и удобство посадки. Посадка длится 20 сек, включая 5 сек над посадочной полосой. Это время задается для самолета, летящего со скоростью 280 км/ч и начинающего посадку с высоты 30 м. Уравнения, описывающие траекторию снижения, имеют вид

$$h_d(t) = \begin{cases} 30e^{-t/5}, & 0 \leq t \leq 15 \\ 6 - 0,3t, & 15 \leq t \leq 20. \end{cases}$$

Желаемая скорость снижения $\dot{h}_d(t)$ самолета определяется отсюда уравнением

$$\dot{h}_d(t) = \begin{cases} -6e^{-t/5}, & 0 \leq t \leq 15 \\ -0,3, & 15 \leq t \leq 20. \end{cases}$$

В момент первого касания посадочной полосы $\dot{h}_d(t) = -0,3$ м/сек, что намного меньше максимально допустимого значения для современных самолетов.

2. Угол тангажа $\theta(t)$ самолета в желаемый момент $t = T$ первого касания посадочной полосы должен находиться между 0° и 10° , т. е.

$$0^\circ \leq \theta(T) \leq 10^\circ.$$

3. Во время посадки угол атаки $\alpha(t)$ самолета не должен превышать своего критического значения $+18^\circ$. Самолет начинает посадку с углом атаки, составляющим примерно 80% от критического значения. Поэтому на угол атаки самолета накладываются следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &< 18^\circ \\ \Delta\alpha(t) &< 3,6^\circ \end{aligned}$$

4. Отклонение руля высоты $\delta(t)$ самолета в процессе посадки не должно превышать предельных значений -35° и $+15^\circ$, т. е.

$$-35^\circ \leq \delta(t) \leq +15^\circ.$$

Для иллюстрации рассмотрим простой случай, когда весовые коэффициенты ошибки в высоте снижения и отклонения руля высоты в показателе качества системы выбираются постоянными на всем двадцатисекундном интервале времени, а остальные весовые коэффициенты принимаются равными нулю. Показатель качества в этом случае сводится к виду

$$I(m) = \int_0^{20} \{ \alpha_1 [x_1^d(t) - x_1(t)]^2 + m^2(t) \} dt.$$

При использовании этого показателя ошибки можно упростить уравнение Риккати, так как весовые коэффициенты α_2 , α_3 и α_4 равны нулю. В дальнейшем

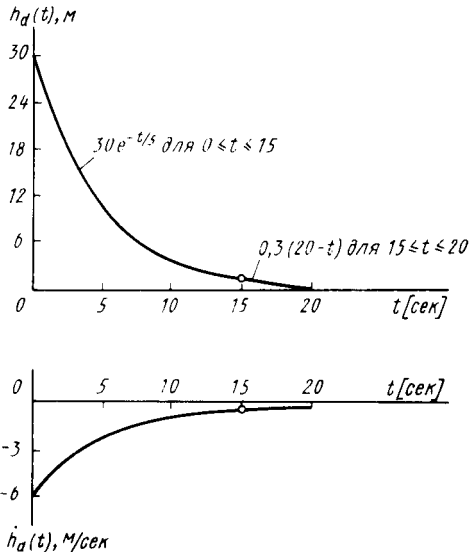


Рис. 7.4—3. Желаемые высоты и скорости снижения самолета при посадке

предполагается, что максимальная ошибка в высоте самолета в момент начала посадки равна ± 6 м. Коррекция этой высотной ошибки требует больших положительных отклонений руля высоты. Наибольшее допустимое отклонение руля высоты в положительном направлении равно 15° или $0,262$ рад. Предположим теперь, что при оценке качества системы посадки придается одинаковый вес ошибкам в высоте самолета и отклонениям руля высоты.

Тогда весовой коэффициент α_1 может быть определен из следующего уравнения:

$$\alpha_1(6)^2 = (0,262)^2.$$

отсюда $\alpha_1 = 0,00194$.

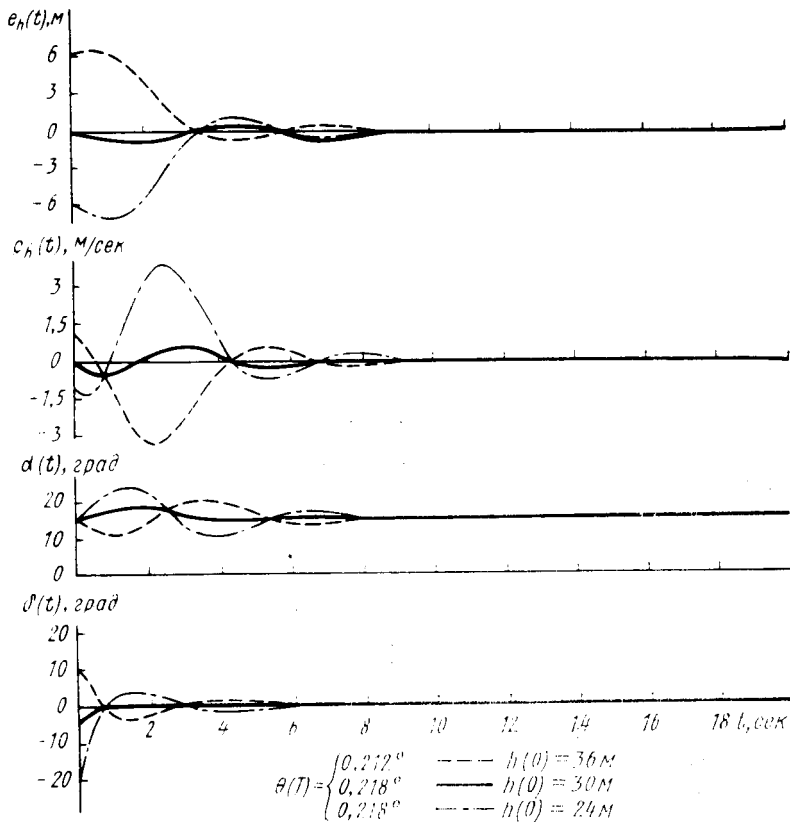


Рис. 7.4—4. Переходные процессы в системе посадки

Возьмем $\alpha_1 = 0,001$ и произведем необходимые вычисления на цифровой машине. Результаты расчетов по определению переходных процессов в системе посадки представлены кривыми на рис. 7.4—4. Эти кривые показывают, как в процессе посадки меняются ошибка в высоте снижения $e_h(t)$, ошибка в скорости снижения $c_h(t)$, угол атаки $\alpha(t)$ и отклонение руля высоты $\delta(t)$. Можно видеть, что система удовлетворяет требованиям, предъявленным к высоте, скорости снижения, отклонению руля высоты. Однако при этом угол атаки и угол

тангажа самолета в момент касания посадочной полосы выходят за пределы допустимых значений.

Чтобы построить систему, удовлетворяющую всем требованиям, необходимо учесть также ряд других факторов, от которых зависит качество системы, т. е. рассмотреть показатель качества в его более полной форме. Это было сделано Эллертом и Мерриамом¹. Полученные ими кривые для параметров $b(t)$, $b_i(t)$ и $b_{ij}(t)$ системы посадки показаны на рис. 7.4—5. Кривая входного воздействия $b_4(t)$ напоминает по своему виду кривую желаемой высоты $h_d(t)$,

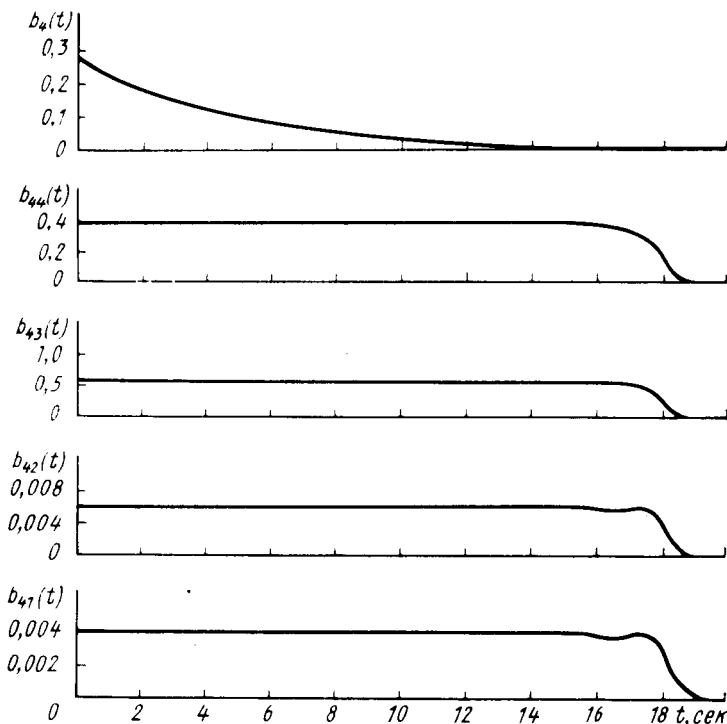


Рис. 7.4—5. Функции времени, характеризующие входное воздействие и коэффициенты обратной связи

однако сильно уменьшенную по амплитуде. Коэффициенты обратной связи $b_{41}(t)$, $b_{42}(t)$, $b_{43}(t)$ и $b_{44}(t)$ остаются по существу постоянными на всем интервале времени, за исключением последних 3 сек посадки, где они постепенно уменьшаются до нулевых значений. Последнее означает, что рассматриваемая система посадки функционирует фактически как разомкнутая система почти до момента касания посадочной полосы.

Траектории посадки самолета для трех различных значений начальной высоты показаны на рис. 7.4—6, иллюстрирующем разброс траекторий из-за начальных условий. Система управления довольно точно выдерживает желаемую траекторию снижения, что происходит в основном благодаря большому весу,

¹ См. сноску на стр. 349.

с которым в показателе качества учитываются ошибки в высоте снижения. Необходимые для решения этой задачи расчеты трудно произвести без использования цифровой вычислительной машины.

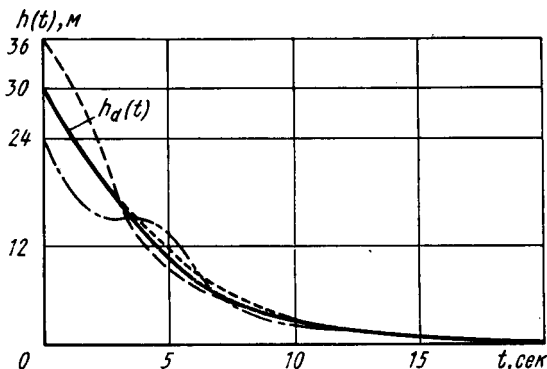


Рис. 7.4—6. Траектории посадки самолета для $h(0) = 24$ м, 30 м, 36 м

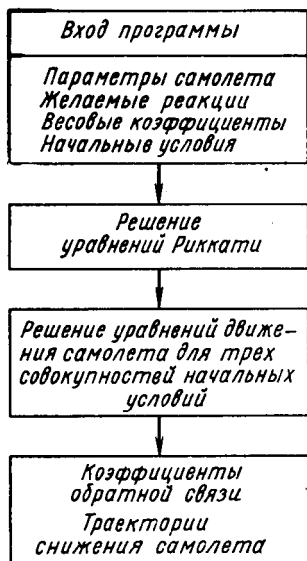


Рис. 7.4—7. Упрощенная схема последовательных этапов расчета оптимальной системы

На рис. 7.4—7 показана упрощенная схема расчета коэффициентов обратной связи и траекторий посадки при различных начальных условиях.

Пример иллюстрирует ряд важных преимуществ, получаемых при использовании современной теории управления. Современные методы синтеза дают возможность учесть произвольные начальные условия и различного рода ограничения, наложенные на координаты системы. Эти методы позволяют в естественной форме установить структуру оптимальной системы и облегчают решение задач управления в более реалистической постановке, что обычно сопряжено с огромными трудностями при использовании классических методов. Этот новый подход упрощает исследование устойчивости системы и позволяет инженеру посвятить все свое время аналитическому решению задачи, предоставив выполнение трудоемких и утомительных расчетов цифровой вычислительной машине.

7.5 ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫМ СОСТОЯНИЕМ

Процессы управления конечным состоянием можно рассматривать как многошаговые процессы решения, и поэтому такого рода задачи удобно решать методами теории динамического программирования [1, 15, 16, 19, 20, 22, 140].

В настоящем параграфе рассматривается синтез процессов управления конечным состоянием методом функциональных уравнений динамического программирования.

Рассмотрим процесс n -го порядка, описываемый дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{m}(t) \quad (7.5-1)$$

с начальными условиями, заданными вектором $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

В уравнении (7.5-1) \mathbf{x} — n -мерный вектор, представляющий состояние процесса; \mathbf{m} — r -мерный вектор, представляющий управляющие воздействия; \mathbf{A} — матрица коэффициентов и \mathbf{D} — матрица управления.

На управляющие воздействия накладываются следующие ограничения на интервале $0 \leq t \leq T$:

$$|m_k| \leq M_k, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (7.5-2)$$

$$\int_0^T H(\mathbf{m}) dt \leq c. \quad (7.5-3)$$

Требуется определить вектор $\mathbf{m}(t)$ оптимального управления, минимизирующий критерий качества

$$I(\mathbf{m}) = G[x_1(T), x_2(T), \dots, x_l(T)] \quad l \leq n, \quad (7.5-4)$$

который является функцией конечного состояния процесса, на интервале управления при заданных ограничениях на управляющие воздействия $m_k(t)$.

Чтобы упростить процедуру минимизации, запишем вначале критерий качества в виде явной функции от управляющих воздействий m_k . Как было показано ранее, решение уравнения (7.5-1) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) + \int_0^t \mathbf{W}(t-\tau) \mathbf{m}(\tau) d\tau, \quad (7.5-5)$$

где

$$\mathbf{z}(t) = \varphi(t) \mathbf{x}(0) \quad (7.4-6)$$

представляет переходную составляющую решения и

$$\mathbf{W}(t-\tau) = \varphi(t-\tau) \mathbf{D}. \quad (7.5-7)$$

Выражая координаты состояния процесса через компоненты соответствующих векторов, будем иметь

$$x_i(t) = z_i(t) + \int_0^t \left[\sum_{k=1}^r \omega_{ik}(t-\tau) m_k(\tau) \right] d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.5-8)$$

где $\omega_{ik}(t-\tau)$ — элементы матрицы $\mathbf{W}(t-\tau)$.

Исходная проблема управления конечным состоянием сводится, таким образом, к определению вектора $\mathbf{m}(t)$ оптимального управления, доставляющего минимум функционалу

$$I(\mathbf{m}) = G \left[z_1(T) + \int_0^T \sum_{k=1}^r \omega_{1k}(t-\tau) m_k(\tau) d\tau, \dots, z_l(T) + \int_0^T \sum_{k=1}^r \omega_{lk}(t-\tau) m_k(\tau) d\tau \right] \quad (7.5-9)$$

при ограничениях, заданных уравнениями (7.5-2) и (7.5-3).

Следуя методу неопределенных множителей Лагранжа, составим промежуточную функцию

$$I_1(\mathbf{m}) = G + \lambda \int_0^T H(\mathbf{m}) d\tau \quad (7.5-10)$$

и будем в дальнейшем рассматривать минимизацию этой функции по отношению к \mathbf{m} с учетом только одного ограничения (7.5-2). Пусть $f(z_1, z_2, \dots, z_l; T)$ обозначает минимальное значение функции I_1 . Тогда

$$f(z_1, z_2, \dots, z_l; T) = \min_{m_k} \left\{ G \left[z_l(T) + \int_0^T \sum_k \omega_{lk}(T-\tau) \times \right. \right. \\ \left. \times m_k(\tau) d\tau, \dots, z_l(T) + \int_0^T \sum_k \omega_{lk}(T-\tau) m_k(\tau) d\tau \right] + \\ \left. + \lambda \int_0^T H(m_1, m_2, \dots, m_r) d\tau \right\}, \quad (7.5-11)$$

что можно переписать в виде

$$f(z_1, z_2, \dots, z_l; T) = \min_{m_k} \left\{ G \left[z_1(T) + \int_0^{\Delta} \sum_k \omega_{1k}(T-\tau) m_k(\tau) dk + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\Delta}^T \sum_k \omega_{1k}(T-\tau) m_k(\tau) d\tau, \dots, z_l(T) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{\Delta} \sum_k \omega_{1k}(T-\tau) m_k(\tau) d\tau + \int_{\Delta}^T \sum_k \omega_{1k}(T-\tau) m_k(\tau) d\tau \Big] + \\
 & + \lambda \int_0^{\Delta} H(m_1, m_2, \dots, m_r) d\tau + \lambda \int_{\Delta}^T H(m_1, m_2, \dots, m_r) d\tau \Big\}, \quad (7.5-12)
 \end{aligned}$$

где Δ обозначает очень малый интервал времени. Изменяя пределы интегрирования, получаем

$$\begin{aligned}
 f(z_1, z_2, \dots, z_l; T) = \min_{m_k} \Big\{ & G \left[z_1(T) + \int_0^{\Delta} \sum_k \omega_{1k}(T-\tau) m_k(\tau) d\tau + \right. \\
 & + \int_0^{T-\Delta} \sum_k \omega_{1k}(T-\tau-\Delta) m_k(\tau+\Delta) d\tau, \dots, z_l(T) + \\
 & \left. + \int_0^{\Delta} \sum_k \omega_{1k}(T-\tau) m_k(\tau) d\tau + \int_0^{T-\Delta} \sum_k \omega_{1k}(T-\tau-\Delta) m_k(\tau+\Delta) d\tau \right] + \\
 & \left. + \lambda \int_0^{\Delta} H(m_1, m_2, \dots, m_r) d\tau + \lambda \int_0^{T-\Delta} H(m_1, m_2, \dots, m_r) d\tau \right\}. \quad (7.5-13)
 \end{aligned}$$

Пользуясь принципом оптимальности, составляем следующее функциональное уравнение для рассматриваемой задачи управления конечным состоянием:

$$\begin{aligned}
 f(z_1, z_2, \dots, z_l; T) = \min_{m_k} \Big\{ & f \left[z_1 + \int_0^{\Delta} \sum_k \omega_{1k}(T-\tau) m_k(\tau) d\tau, \dots, z_l + \right. \\
 & \left. + \int_0^{\Delta} \sum_k \omega_{1k}(T-\tau) m_k(\tau) d\tau; T-\Delta \right] + \\
 & \left. + \lambda \int_0^{\Delta} H(m_1, m_2, \dots, m_r) d\tau \right\}, \quad (7.5-14)
 \end{aligned}$$

где минимум берется по всем m_k , определенным на интервале $(0, \Delta)$ и удовлетворяющим ограничению (7.5-2).

Аналитическое решение рассматриваемой задачи получить не легко. Для вычислительных целей приведенное выше функциональное уравнение может быть аппроксимировано следующим рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned}
 f(z_1, z_2, \dots, z_l; T) = \min_{m_k} \Big\{ & f \left[z_1 + \Delta \sum_k \omega_{1k}(T) m_k, \dots, z_l + \right. \\
 & \left. + \Delta \sum_k \omega_{1k}(T) m_k; T-\Delta \right] + \lambda \Delta H(m_1, m_2, \dots, m_r) \Big\}, \quad (7.5-15)
 \end{aligned}$$

где

$$f(z_1, z_2, \dots, z_l; 0) = G[z_1(0), z_2(0), \dots, z_l(0)] \quad (7.5-16)$$

и управляющие воздействия m_k изменяются в пределах $-M_k$ и $+M_k$.

Линейный критерий качества

Приведенное выше рассмотрение касалось определения оптимального управляющего воздействия для линейных систем, удовлетворяющего обобщенному критерию оптимальности управления конечным состоянием процесса при использовании теории динамического программирования. Синтез оптимальной системы был сведен к определению управляющей последовательности путем многократного использования рекуррентного соотношения. В настоящем разделе рассмотрим, следуя методике предыдущего параграфа, проблему синтеза системы с оптимальным конечным состоянием, удовлетворяющей заданному линейному критерию качества. В качестве объекта управления возьмем точно такой же процесс, с которым мы имели дело в предыдущих параграфах. Управляющие воздействия подчиним тем же самым ограничениям. Найдем вектор \mathbf{m} оптимального управления, минимизирующего линейную функцию качества от конечного состояния процесса:

$$I(\mathbf{m}) = G[\mathbf{x}(T)] = \alpha' \mathbf{x}(T), \quad (7.5-17)$$

где α — заданный вектор-столбец.

Используя уравнение (7.5—5), представим линейный критерий качества (7.5—17) в виде

$$I(\mathbf{m}) = \alpha' \mathbf{z}(T) + \alpha' \int_0^T \mathbf{W}(T-\tau) \mathbf{m}(\tau) d\tau. \quad (7.5-18)$$

Введя множитель Лагранжа, сведем проблему оптимизации к минимизации промежуточной функции

$$I_1(\mathbf{m}) = \alpha' \mathbf{z}(T) + \alpha' \int_0^T \mathbf{W}(T-\tau) \mathbf{m}(\tau) d\tau + \lambda \int_0^T H(\mathbf{m}) d\tau \quad (7.5-19)$$

по отношению к \mathbf{m} , подчиненному ограничению (7.5—2).

Обозначим минимум функции I_1 через

$$f[\mathbf{z}(T), T] = \min_{\mathbf{m}} \left\{ \alpha' \mathbf{z}(T) + \alpha' \int_0^T \mathbf{W}(T-\tau) \mathbf{m}(\tau) d\tau + \lambda \int_0^T H(\mathbf{m}) d\tau \right\}. \quad (7.5-20)$$

Разбивая интервал интегрирования на две части, будем иметь

$$f(z, T) = \min_m \left\{ \alpha' z(T) + \alpha' \int_0^{\Delta} W(T-\tau) m(\tau) d\tau + \alpha' \int_{\Delta}^T W(T-\tau) \times \right. \\ \times m(\tau) d\tau + \lambda \int_0^{\Delta} H(m) d\tau + \lambda \int_{\Delta}^T H(m) d\tau \left. \right\} = \min_m \left\{ \alpha' z(T) + \right. \\ \left. + \alpha' \int_0^{\Delta} W(T-\tau) m(\tau) d\tau + \alpha' \int_0^{T-\Delta} W(T-\tau-\Delta) m(\tau+\Delta) d\tau + \right. \\ \left. + \lambda \int_0^{\Delta} H(m) d\tau + \lambda \int_0^{T-\Delta} H(m) d\tau \right\}, \quad (7.5-21)$$

где Δ обозначает очень малый интервал времени.

Применяя принцип оптимальности к уравнению (7.5-21), приходим к функциональному уравнению

$$f(z, T) = \min_m \left\{ \lambda \int_0^{\Delta} H(m) d\tau + f \left[\alpha' z(T) + \alpha' \int_0^{\Delta} W(T-\tau) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times m(\tau) d\tau; T-\Delta \right] \right\}, \quad (7.5-22)$$

из которого получаем рекуррентное соотношение

$$f(z, T) = \min_m \{ \lambda \Delta H(m) + f[\alpha' z(T) + \alpha' \Delta W(T)m; T-\Delta] \}, \quad (7.5-23)$$

где

$$f(z, 0) = z(0) \quad (7.5-24)$$

и управляющие воздействия m_k ограничены до значения M_k по амплитуде.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу управления конечным состоянием.

Пример 7.5-1. Простая задача управления конечным состоянием

Рассмотрим процесс второго порядка, описываемый уравнением

$$\ddot{x}_1(t) + ax_1(t) = am(t)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10} \text{ и } \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}.$$

Требуется определить оптимальное управляющее воздействие m , минимизирующее абсолютное значение координаты $x_1(t)$ при $t = T$ среди всех $m(t)$, подчиненных ограничениям

$$|m(t)| \leq M, \quad 0 \leq t \leq T$$

и

$$\int_0^T m^2(t) dt \leq c.$$

Используя векторно-матричные обозначения, заданное дифференциальное уравнение запишем в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}m(t),$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Решение приведенного выше дифференциального уравнения имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\varphi}(t-\tau) \mathbf{D}m(\tau) d\tau,$$

где

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & (1 - e^{-at}) \\ 0 & e^{-at} \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$x_1(T) = x_{10} + x_{20}(1 - e^{-aT}) + \int_0^T (1 - e^{-(T-\tau)}) m(\tau) d\tau.$$

Введя множитель Лагранжа, сведем рассматриваемую задачу управления конечным состоянием к минимизации функционала

$$I(m) = |x_1(T)| + \lambda \int_0^T m^2(\tau) d\tau.$$

Произведя подстановку, будем иметь

$$I(m) = \left| x_{10} + x_{20}(1 - e^{-aT}) + \int_0^T (1 - e^{-a(T-\tau)}) m(\tau) d\tau \right| + \lambda \int_0^T m^2(\tau) d\tau.$$

Пусть $f(z_1(T); T) = \min_m I(m)$, где $z_1(T) = x_{10} + x_{20}(1 - e^{-aT})$.

Применяя принцип оптимальности, получаем функциональное уравнение

$$f(z_1, T) = \min_m \left\{ \int_0^\Delta m^2(\tau) d\tau + f \left[z_1(T) + \int_0^\Delta (1 - e^{-(T-\tau)}) m(\tau) d\tau; T - \Delta \right] \right\},$$

которое для вычислительных целей можно записать в виде

$$f(z_1, T) = \min_m \{ \lambda \Delta m^2 + f[z_1(T) + \Delta(1 - e^{-(T-\Delta)})m; T - \Delta] \},$$

где Δ обозначает очень малый интервал времени, $|m| \leq M$ и

$$f(z_1, 0) = |z_1(0)| = |x_{10}|.$$

Таким образом, решение проблемы оптимизации свелось к минимизации последовательности функций от одной переменной.

Положим $T = N\Delta$, где N — положительное целое число. Тогда заданную проблему управления конечным состоянием можно рассматривать как N -шаговый процесс решения, описываемый рекуррентным соотношением

$$f_N(z_1, N\Delta) = \min_m \left\{ \lambda \Delta m^2 + f_{N-1} \left[z_1 + \Delta(1 - e^{-(N-1)\Delta}) m, (N-1)\Delta \right] \right\},$$

где $f_0(z_1, 0) = |z_1(0)|$.

Оптимальное управляющее воздействие может быть теперь найдено при использовании вычислительной процедуры, описанной в предыдущих разделах. Значение множителя λ должно быть выбрано так, чтобы удовлетворялось интегральное ограничение.

Пример 7.5—2. Решение задачи управления по минимуму интеграла как задачи управления конечным состоянием

Рассмотрим систему управления такую же, как в примере 7.4—1. Описанную в этом примере задачу управления по минимуму интеграла можно рассматривать как задачу управления конечным состоянием, для чего достаточно ввести дополнительную координату состояния.

Пусть

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ x_2 &= \int_0^t x_1^2 dt. \end{aligned}$$

Тогда функцию качества можно записать как

$$I(m) = \min_m \{x_2(t_1)\}.$$

Обозначим минимум функции I через $f[x(t_1), t_1]$.

Следуя формальной процедуре оптимизации, получаем:

$$\min_m \left\{ (-ax_1 + \gamma m) \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right\} = 0.$$

Следовательно, минимизирующее m в этом простом примере равно

$$m = -M \operatorname{sgn} \frac{\partial f}{\partial x_1} = -M \operatorname{sgn} \frac{\partial f}{\partial x},$$

что находится в соответствии с результатом, полученным в примере 7.4—1.

7.6. ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО МИНИМУМУ ВРЕМЕНИ

Проблема оптимального по быстродействию управления была рассмотрена ранее в параграфах 4.7, 5.1 и 6.4 при использовании метода переходных состояний, вариационного исчисления и принципа максимума. Было показано, что линейный процесс или процесс с аддитивной управляющей функцией, оптимальный по быстродействию при ограничениях типа насыщения, является процессом релейного типа. В этом параграфе, проблема оптимального по быстродействию управления исследуется с точки зрения динамического программирования [15, 16, 18, 22, 134].

В качестве объекта управления рассмотрим нелинейный процесс, характеризуемый векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t), \quad (7.6-1)$$

где \mathbf{x} — n -мерный вектор состояния;

\mathbf{m} — r -мерный вектор управления.

Требуется определить оптимальную стратегию управления, при которой процесс из заданного начального состояния

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.6-2)$$

переводится в желаемое конечное состояние

$$x_j(t_f) = x_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, k \leq n \quad (7.6-3)$$

за минимальное время, где конечный момент времени t_f заранее неизвестен.

Следуя Дрейфусу [52], введем функцию

$$f(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{m}} \{t_f - t\} \quad (7.6-4)$$

для обозначения минимального времени, требуемого для перемещения процесса из состояния $\mathbf{x}(t)$ в желаемое конечное состояние $\mathbf{x}(t_f)$ при оптимальном выборе вектора управления. Из определения функции $f(\mathbf{x}, t)$ следует, что на конце оптимальной траектории

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=t_f} = 0 \quad (7.6-5)$$

и для x_i , не определенных при $t = t_f$ в формуле (7.6-3),

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{t=t_f} = 0. \quad (7.6-6)$$

Уравнения (7.6-2), (7.6-3) и (7.6-6) представляют собой граничные условия для определения постоянных интегрирования.

Применяя принцип оптимальности, составляем функциональное уравнение

$$f(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{m}} \{ \Delta + f(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta, t + \Delta) \} \quad (7.6-7)$$

для определения минимального времени.

Раскладывая $f(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta, t + \Delta)$ в ряд Тейлора и производя упрощения, получаем

$$\min_{\mathbf{m}} \left\{ \Delta + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) \Delta + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta + \varepsilon(\Delta) \right\} = 0 \quad (7.6-8)$$

В пределе, когда Δ стремится к нулю, уравнение (7.6—8) сводится к следующему:

$$\min_{\mathbf{m}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \right\} = -1. \quad (7.6-9)$$

Осуществляя минимизацию по известным элементарным правилам, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)}{\partial \mathbf{m}} = 0; \quad (7.6-10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + 1 = 0. \quad (7.6-11)$$

Из уравнений (7.6—11) и (7.6—5) можно видеть, что на конце оптимальной траектории

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)|_{t=t_f} + 1 = 0. \quad (7.6-12)$$

Кроме этого, интегрированием можно также показать, что если функция \mathbf{g} не зависит от времени, т. е. $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m})$, то тогда вдоль оптимальной траектории

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) + 1 = 0. \quad (7.6-13)$$

Когда частная производная $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ в точке известна, то уравнения (7.6—10) и (7.6—13) могут быть решены относительно вектора оптимального управления $\mathbf{m}(t)$.

Дифференциальное уравнение для частной производной $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ может быть получено из формул (7.6—10) и (7.6—13) следующим образом. Дифференцируя выражение (7.6—13) по \mathbf{x} , получаем

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}} \right] = 0. \quad (7.6-14)$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}), \quad (7.6-15)$$

то при использовании формулы (7.6—10) уравнение (7.6—14) сводится к уравнению Эйлера — Лагранжа для частной производной $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m})}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (7.6-16)$$

Через компоненты векторов можно записать

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.6-17)$$

Эти n дифференциальных уравнений для частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ совместно с n дифференциальными уравнениями для процесса, записанными в виде одного векторного уравнения (7.6—1), и условиями для минимума, представленными уравнением (7.6—10), образуют систему $2n + r$ уравнений, из которых могут быть найдены частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, вектор оптимального управления $\mathbf{m}(t)$ и оптимальная траектория $\mathbf{x}(t)$.

Так как начальный момент времени t_0 задан, а конечный момент времени t_f неизвестен, то целесообразно задать функцию $f(\mathbf{x}, t)$ минимального времени в виде

$$f(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{m}} \int_{t_0}^t dt. \quad (7.6-18)$$

Заметим, что если исходить из этого определения, то в начале оптимальной траектории $t = t_0$, $f(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$; в конце оптимальной траектории $t = t_f$

$$f(\mathbf{x}, t_f) = \min_{\mathbf{m}} \int_{t_0}^{t_f} dt = \min_{\mathbf{m}} (t_f - t_0) \quad (7.6-19)$$

и для x_i , для которых конечные значения в формуле (7.6—3) не заданы, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$. Разбивая интервал интегрирования в уравнении (7.6—18) на две части, получаем

$$f(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{m}} \left(\int_{t_0}^{t-\Delta} dt + \int_{t-\Delta}^t dt \right) = \min_{\mathbf{m}} \{ \Delta + f(\mathbf{x} - \dot{\mathbf{x}} \Delta, t - \Delta) \}; \quad (7.6-20)$$

это — функциональное уравнение для проблемы управления, оптимальном по быстродействию.

Совершая формальные преобразования, получаем уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)}{\partial \mathbf{m}} = 0; \quad (7.6-21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} - 1 = 0, \quad (7.6-22)$$

из которых, аналогично предыдущему, могут быть получены уравнения Эйлера — Лагранжа (7.6—16) или (7.6—17).

Процесс управления минимальной длительности при аддитивных управляющих воздействиях

Рассмотрим теперь процесс n -го порядка, описываемый матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)] + \mathbf{D}\mathbf{m}(t), \quad (7.6-23)$$

где \mathbf{x} и \mathbf{m} — векторные величины, определенные выше;

\mathbf{D} — матрица управления размера $n \times r$ с элементами d_{ik} .

В уравнение процесса (7.6—23) управляющие воздействия входят аддитивно и удовлетворяют ограничительному условию

$$|m_k| \leq M_k. \quad (7.6-24)$$

Требуется определить стратегию оптимального управления, при которой процесс из заданного начального состояния $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ переводится за минимальное время в состояние равновесия $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$, где t_f — неопределенный конечный момент времени.

Следуя анализу, описанному в предыдущем разделе, получаем функциональное уравнение

$$\min_{\mathbf{m}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}\mathbf{m}(t) \right\} = 1. \quad (7.6-25)$$

Чтобы облегчить процедуру минимизации, выразим векторы и матрицы через их компоненты. Так как

$$\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^r d_{ik}m_k, \quad (7.6-26)$$

где $F_i(\mathbf{x})$ — компоненты вектора $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, то уравнение (7.6—25) может быть записано в виде

$$\min_{m_k} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \left[F_i(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^r d_{ik}m_k \right] \right\} = 1. \quad (7.6-27)$$

Анализ выражения (7.6—27) показывает, что для минимизации функции, заключенной в фигурные скобки, относительно m_k необходимо, чтобы были выполнены условия

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{k=1}^r d_{ik}m_k < 0 \quad (7.6-28)$$

$$|m_k| = M_k. \quad (7.6-29)$$

Изменяя порядок суммирования в формуле (7.6—28), получаем

$$\sum_{k=1}^r m_k \sum_{i=1}^n d_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} < 0. \quad (7.6—30)$$

Отсюда приходим к выражению

$$m_k = -M_k \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^n d_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (7.6—31)$$

для оптимальных управляющих воздействий, минимизирующих время, требуемое для перемещения процесса из заданного начального состояния в состояние равновесия. Это уравнение показывает, что амплитуды оптимальных управляющих воздействий равны максимально допустимым значениям M_k , а их знаки определяются знаком функции

$$s(t) = \sum_{i=1}^n d_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (7.6—32)$$

Оптимальный регулятор работает как реле, включая максимальное воздействие, полярность которого зависит от знака функции переключения (7.6—32). Заключение о том, что оптимальная по быстродействию система управления с идеальной характеристикой насыщения является системой релейного типа, совпадает с выводами, сделанными ранее в параграфах 4.7 и 6.4. Частная производная $\frac{df}{dx_i}$ может быть определена из уравнений Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.6—33)$$

которые следуют из уравнений (7.6—17) при использовании соотношения (7.6—26).

Пример 7.6—1. Оптимальное по быстродействию управление процессом второго порядка

Рассмотрим процесс второго порядка, описываемый дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - bx_1 + m, \end{aligned}$$

где $|m| \leq M$, а начальные и конечные условия имеют вид

$$\begin{aligned}x_1(t_0) &= x_{10}; & x_2(t_0) &= x_{20}; \\x_1(t_f) &= 0; & x_2(t_f) &= 0.\end{aligned}$$

Требуется определить управляющее воздействие m , которое переводит процесс из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в состояние равновесия $x(t_f) = 0$ за минимальное время.

В векторно-матричных обозначениях уравнения системы имеют вид

$$\dot{x} = Ax + Dm,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \text{ и } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Используя уравнение (7.6—31), находим что

$$m = -M \operatorname{sgn} \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Частная производная $\frac{df}{dx_2}$ может быть определена из выражения (7.6—33).

После подстановки соответствующих величин в это выражение, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) - b \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) - a \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 0.\end{aligned}$$

Комбинируя эти два уравнения, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) - a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + b \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,$$

которое может быть решено относительно $\frac{df}{dx_2}$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -Ke^{\frac{at}{2}} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{4b - a^2} t + \theta \right).$$

при условии $a^2 - 4b < 0$, где K и θ определяются из граничных условий.

Следовательно,

$$m = M \operatorname{sgn} \left[Ke^{\frac{at}{2}} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{4b - a^2} t + \theta \right) \right].$$

Это выражение для оптимального управляющего воздействия совпадает с выражением, полученным в примере 6.4—1 при использовании принципа максимума.

7.7. СТОХАСТИЧЕСКИЕ И АДАПТИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

На протяжении четырех предыдущих параграфов мы рассматривали решение различных задач оптимального управления процессами, которые предполагались детерминированными, при использовании теории динамического программирования. Дина-

мика процесса предполагалась полностью известной, т. е. предполагалось возможным описать процесс линейными или нелинейными дифференциальными уравнениями с известными коэффициентами и уравнениями, характеризующими наложенные ограничения. Решение задачи при использовании метода функциональных уравнений сводилось обычно к составлению дифференциальных уравнений в частных производных или рекуррентных соотношений для определения закона оптимального управления, минимизирующего или максимизирующего заданный критерий качества.

Однако во многих случаях на практике приходится иметь дело с неопределенностью процессов и различного рода случайными эффектами. Эти неопределенности и случайные эффекты обычно возникают вследствие неточности изготовления, изменения параметров при старении, неточности сведений о динамике процесса, стохастической природы входных воздействий и наличия случайных внешних воздействий. Когда неопределенности не оказывают существенного влияния на ход процесса и случайные вариации незначительны, то, для того чтобы противостоять случайным эффектам, можно ограничиться построением системы, использующей принцип обратной связи. Однако системы с обычными обратными связями оказываются не эффективными в условиях, когда неопределенности играют заметную роль и вариации параметров становятся значительными. Чтобы обеспечить оптимальное управление процессами, которым свойственны неопределенности и большие флуктуации параметров, часто прибегают к новой идее построения адаптивного и самообучающегося управления.

В настоящем разделе рассматривается синтез оптимального управления стохастическими процессами на основе теории динамического программирования, а затем методы синтеза развиваются применительно к задаче адаптивного и самообучающегося управления. Основное внимание уделено дискретным стохастическим и адаптивным процессам, поскольку они имеют фундаментальное значение и могут быть использованы для представления непрерывных процессов. Синтез управления непрерывными процессами даже умеренной сложности при использовании метода функциональных уравнений динамического программирования может быть осуществлен в действительности только при условии дискретизации процессов.

Стохастические процессы управления [2, 16, 24, 144]

Рассмотрим процесс со случайными параметрами, характеризуемый рекуррентным соотношением

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{r}(k), \mathbf{m}(k)], \quad (7.7-1a)$$

которое кратко запишем как

$$\mathbf{x}_{k+1} = g(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k, \mathbf{m}_k), \quad (7.7-16)$$

где \mathbf{x} — вектор состояния;

\mathbf{r} — вектор, описывающий независимые случайные параметры;

\mathbf{m} — вектор управления.

Начальные условия заданы в виде

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (7.7-2)$$

Распределение вероятностей для случайных параметров предполагается известным. Проблема оптимального управления, представляющая в данном случае особый интерес, может быть сформулирована как проблема определения стратегии управления, минимизирующей математическое ожидание значения функции качества

$$J_N = \sum_{k=1}^N F(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k, \mathbf{m}_{k-1}), \quad (7.7-3)$$

которой измеряется отклонение фактического поведения системы от желаемого.

В данном случае нецелесообразно требовать минимизации функции качества, определенной выражением (7.7-3), как для случая детерминированного процесса, так как следует учитывать неопределенности, присущие процессу. Хотя математическое ожидание значения J_N является менее точной мерой качества системы, тем не менее это удобная мера, которая может служить хорошим компромиссным решением вопроса.

Пусть критерий качества имеет вид

$$I_N = E \left\{ \sum_{k=1}^N F(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k, \mathbf{m}_{k-1}) \right\}, \quad (7.7-4)$$

где E — символ математического ожидания. Для удобства написания в дальнейшем предполагается, что случайные параметры обладают одинаковой функцией распределения $dG(\mathbf{r})$.

Пусть $f_N(\mathbf{x}_0)$ есть минимум функции I_N по отношению к вектору управления \mathbf{m} , т. е.

$$f_N(\mathbf{x}_0) = \min_{\{\mathbf{m}\}} E \left\{ \sum_{k=1}^N F(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k, \mathbf{m}_{k-1}) \right\}. \quad (7.7-5)$$

Для $N = 1$

$$f_1(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{m}_0} E \{ F(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{m}_0) \} = \min_{\mathbf{m}_0} \int F(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{m}_0) dG(\mathbf{r}_1). \quad (7.7-6)$$

Применяя для $N \geq 2$ принцип оптимальности, получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} f_N(\mathbf{x}_0) &= \min_{\mathbf{m}_0} E \{F(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{m}_0) + f_{N-1}(\mathbf{x}_1)\} = \\ &= \min_{\mathbf{m}_0} \int [F(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{m}_0) + f_{N-1}(\mathbf{x}_1)] dG(\mathbf{r}_1). \end{aligned} \quad (7.7-7)$$

Чтобы упростить вычисления, будем считать распределения вероятностей параметров дискретными. Тогда рекуррентное соотношение (7.7-7) может быть представлено в виде

$$f_N(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{m}_0} \left\{ \sum_{i=1}^L p_i F(\mathbf{x}, \gamma_i, \mathbf{m}_0) + f_{N-1}(\mathbf{x}_1) \right\}, \quad (7.7-8)$$

где $\mathbf{r} = \gamma_i$ с вероятностью p_i .

Интересно отметить, что к стохастическим процессам мы применили здесь такую же технику оптимизации, которая ранее была использована для детерминированных процессов, и при этом получили аналогичные уравнения. Метод функциональных уравнений позволяет унифицировать технику оптимизации двух различных процессов и рассматривать эти процессы с единой точки зрения.

Проблема управления стохастическим процессом по конечному состоянию может быть сформулирована как проблема определения вектора управления \mathbf{m} , минимизирующего математическое ожидание значения некоторой функции конечного состояния

$$J_N = F(\mathbf{x}_N). \quad (7.7-9)$$

Определим критерий качества управления конечным состоянием при помощи выражения вида

$$I_N = E \{F(\mathbf{x}_N)\} \quad (7.7-10)$$

и для обозначения минимума функции I_N по отношению к вектору управления введем функцию

$$f_N(\mathbf{x}_0) = \min_{\{\mathbf{m}\}} E \{F(\mathbf{x}_N)\}. \quad (7.7-11)$$

Тогда, для $N = 1$

$$f_1(\mathbf{x}_0) = F(\mathbf{x}_0) \quad (7.7-12)$$

и для $N \geq 2$

$$\begin{aligned} f_N(\mathbf{x}_0) &= \min_{\mathbf{m}_0} E \{f_{N-1}[g(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{m}_0)]\} = \\ &= \min_{\mathbf{m}_0} \int f_{N-1}[g(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{m}_0)] dG(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (7.7-13)$$

Если случайные параметры могут принимать лишь дискретные значения, то выражение (7.7—13) можно представить в виде рекуррентного соотношения

$$f_N(x_0) = \min_{m_0} \sum_{i=1}^L p_i f_{N-1} [g(x_0, \gamma_i, m_0)]. \quad (7.7-14)$$

Рассмотрим линейный процесс со случайными параметрами, описываемый уравнением

$$x_{k+1} = \varphi(k, r_k) x_k + G(k, r_k) m_k \quad (7.7-15)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где $|m| \leq 1$; r — вектор со случайными независимыми компонентами; φ и G — заданные функции. Для простоты рассуждений предположим, что случайный вектор r_k в момент k может принимать значение r_k^+ или r_k^- с вероятностями

$$P \{r = r_k^+\} = p, \quad (7.7-16)$$

$$P \{r = r_k^-\} = 1 - p, \quad (7.7-17)$$

где вероятность p предполагается известной.

Если вероятность p не известна, то возникают осложнения, для разрешения которых приходится прибегать к построению адаптивной системы. Для иллюстрации рассмотрим проблему минимизации ожидаемого значения критерия качества

$$I_N = \sum_{k=1}^N [x'(k) Q x(k) + \lambda m^2(k-1)]. \quad (7.7-18)$$

Обозначим минимум математического ожидания $E I_N$ через

$$f_N(x_0) = \min_{\{m\}} E \sum_{k=1}^N [x'(k) Q x(k) + \lambda m^2(k-1)]. \quad (7.7-19)$$

Для $N = 1$

$$\begin{aligned} f_1(x_0) &= \min_{m(0)} E [x'(1) Q x(1) + \lambda m^2(0)] = \\ &= \min_{m(0)} p [x^{+\prime}(1) Q x^{+}(1)] + (1-p) [x^{-\prime}(1) Q x^{-}(1)] + \lambda m_0^2, \end{aligned} \quad (7.7-20)$$

где

$$x^+(1) = \varphi(0, r_0^+) x_0 + G(0, r_0^+) m_0; \quad (7.7-21a)$$

$$x^-(1) = \varphi(0, r_0^-) x_0 + G(0, r_0^-) m_0. \quad (7.7-21b)$$

Для $N \geq 2$

$$\begin{aligned} f_N(x_0) &= \min_{m(0)} E [x'(1) Qx(1) + \lambda m^2(0) + f_{N-1}(x_1)] = \\ &= \min_{m(0)} \{p [x^{+'}(1) Qx^{+}(1) + f_{N-1}[x^{+}(1)] + \\ &+ (1-p) [x^{-'}(1) Qx^{-}(1) f_{N-1}[x^{-}(1)]] + \lambda m^2(0)\}. \quad (7.7-22) \end{aligned}$$

Искомая функция $f_N(x_0)$ и стратегия оптимального управления могут быть найдены путем прямых вычислений из приведенных выше рекуррентных соотношений.

Управление с адаптацией и самообучением **[2, 22, 25, 26, 100, 143, 144, 148]**

В вышеприведенном рассмотрении стохастических процессов распределение вероятностей для случайных параметров предполагалось заранее известным. Это допущение позволило произвести построение оптимального управления таким же образом, как и в случае детерминированных процессов. Однако при некоторых обстоятельствах мы можем располагать еще меньшей информацией о влиянии случайных параметров на поведение системы, чем это предполагалось в случае стохастического процесса. Чтобы обеспечить в этих условиях оптимальное управление процессом, желательно иметь регулятор, способный к самоприспособлению, т. е. необходимо наделить регулятор способностью познавать природу различных влияний в ходе самого процесса управления. Это позволит улучшить способность регулятора принимать оптимальные решения и таким образом повысить качество системы. Идея адаптации в сложной системе возникла в связи с изучением поведения живых существ, так как среди них эти качества широко распространены и проявляются наиболее ярко.

Адаптация означает способность системы изменять свою структуру и самонастраиваться в соответствии с изменяющейся обстановкой. Это — фундаментальное свойство живых организмов. Безусловно, это свойство является желательным атрибутом для современной системы управления.

Одна из существенных особенностей адаптивного управления процессами состоит в том, что условия работы системы заранее не известны или известны лишь частично. Если уравнения, характеризующие динамику процесса или статистические свойства сигналов и возмущений, меняются некоторым определенным образом во времени, то трудности расчета системы управления увеличиваются, однако не являются непреодолимыми. В этом случае проблема не подпадает под категорию адаптивного управления, если при этом не имеется неопределенности относительно

того, что представляют собой уравнения, которыми можно описать процесс, или относительно статистики сигналов и возмущений. Чтобы представить эту неопределенность в математической форме, в дальнейшем будем предполагать, что уравнения, описывающие процесс, зависят от случайных переменных. Когда распределения вероятностей для случайных переменных известны, то сформулированную выше проблему будем называть проблемой управления стохастическим процессом. Когда распределения вероятностей для случайных переменных не известны или известны частично, то эту проблему будем называть проблемой адаптивного управления. Управление с адаптацией и самообучением отличается от обычного управления стохастическим процессом тем, что в первом случае в ходе процесса управления производится переоценка стратегии управления в свете имеющейся неопределенности и результатов ее изучения.

Рассмотрим процесс со случайными параметрами, описываемый рекуррентным соотношением (7.7—1). Если это соотношение описывает систему полностью, включая все ее неопределенности, то вектор $\mathbf{g}(k)$ случайных параметров можно считать представляющим неопределенности, касающиеся:

1) коэффициентов уравнений, характеризующих динамику исходного процесса; в этом случае мы приходим к проблеме управления с адаптацией по отношению к объекту;

2) статистических свойств входных сигналов, если эти сигналы являются случайными; в этом случае мы имеем дело с проблемой управления с адаптацией по сигналу;

3) статистических свойств возмущений, нарушающих течение исходного процесса; это ведет к постановке проблемы управления с адаптацией по возмущениям.

Случайный параметр \mathbf{g} может принимать конечное множество значений $\{\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(m)}\}$. Однако, чтобы упростить вычисления, выберем только два значения. Предположим, что в момент k случайный параметр \mathbf{g} принимает одно из двух значений \mathbf{g}_k^+ и \mathbf{g}_k^- с вероятностями p и $1-p$ соответственно; предположим также, что значения вероятностей исходов событий заранее не известны. Вероятность p предполагается случайной переменной с априорной функцией плотности вероятности $\omega(\xi)$. Хотя это и не очень удобная ситуация для анализа, однако здесь мы находимся в более выгодном положении по сравнению с той ситуацией, когда неизвестен вид функции распределения случайных переменных или неизвестна даже степень их корреляции. На каждом отдельном этапе процесса управления, когда принимается решение об управляющем воздействии, адаптивный регулятор изменяет не только физическое состояние системы процесса, но находит также оценку функции плотности вероятности для p и оценку самого значения вероятности p .

В качестве начальной оценки значения вероятности p выберем ожидаемое значение p_0 :

$$p_0 = \int_0^1 \xi \omega(\xi) d\xi. \quad (7.7-23)$$

Процесс адаптации и самообучения включает сбор информации о случайных переменных и обработку этой информации в соответствии с некоторым решающим правилом. Решения, принятые в результате этой обработки, используются для улучшения управления, которое вначале выбирается исходя из априорного распределения. Начальные априорные предположения о статистических свойствах случайных переменных могут, естественно, оказаться далекими от истины. Однако, произведя ряд наблюдений случайной переменной, адаптивный регулятор в процессе самообучения может определить точное распределение вероятностей.

Если произведено наблюдение $r = r_k^+$, то новая оценка функции плотности вероятности для p дается апостериорной вероятностью

$$\omega_1(\xi) = P(p = \xi / r = r_k^+). \quad (7.7-24)$$

По теореме Байеса вероятность того, что $p = \xi$, когда произведено наблюдение $r = r_k^+$, записывается в виде

$$P(p = \xi / r = r_k^+) = \frac{P(p = \xi) P(r = r_k^+ / p = \xi)}{\int_0^1 P(p = \xi) P(r = r_k^+ / p = \xi) d\xi}. \quad (7.7-25)$$

Так как $P(p = \xi) = \omega(\xi)$ и $P(r = r_k^+ / p = \xi) = \xi$, то новой оценкой будет

$$\omega_1(\xi) = \frac{\xi \omega(\xi)}{\int_0^1 \xi \omega(\xi) d\xi}. \quad (7.7-26)$$

Если произведено наблюдение $r = r_k^-$, то новая оценка функции плотности вероятности дается апостериорной вероятностью

$$\omega_2(\xi) = P(p = \xi / r = r_k^-). \quad (7.7-27)$$

Применяя теорему Байеса, находим условную вероятность

$$P(p = \xi / r = r_k^-) = \frac{P(p = \xi) P(r = r_k^- / p = \xi)}{\int_0^1 P(p = \xi) P(r = r_k^- / p = \xi) d\xi}. \quad (7.7-28)$$

Так как $P(r = r_k^- / p = \xi) = 1 - \xi$, то новую оценку находим в виде

$$\omega_2(\xi) = \frac{(1-\xi)\omega(\xi)}{\int_0^1 (1-\xi)\omega(\xi) d\xi}. \quad (7.7-29)$$

Отсюда, если произведено наблюдение $r = r_k^+$, то новой оценкой значения самой вероятности p будет

$$p_1 = \frac{\int_0^1 \xi \omega_1(\xi) d\xi}{\int_0^1 \xi \omega(\xi) d\xi} = \frac{\int_0^1 \xi^2 \omega(\xi) d\xi}{\int_0^1 \xi \omega(\xi) d\xi}, \quad (7.7-30)$$

и, если произведено наблюдение $r = r_k^-$, то новой оценкой вероятности p будет

$$p_2 = \frac{\int_0^1 \xi \omega_2(\xi) d\xi}{\int_0^1 (1-\xi)\omega(\xi) d\xi} = \frac{\int_0^1 \xi(1-\xi)\omega(\xi) d\xi}{\int_0^1 (1-\xi)\omega(\xi) d\xi}. \quad (7.7-31)$$

Теорема Байеса позволяет произвести оценку значения вероятности p на базе наблюдений, сделанных в процессе управления, путем модификации априорного распределения. Если произведено $\mu + \nu$ наблюдений и получена информация, указывающая, что случайная переменная μ раз приняла значение r^+ и ν раз значение r^- , то новой оценкой функции плотности вероятности будет

$$\omega_{\mu,\nu}(\xi) = \frac{\xi^\mu (1-\xi)^\nu \omega(\xi)}{\int_0^1 \xi^\mu (1-\xi)^\nu \omega(\xi) d\xi} \quad (7.7-32)$$

и новой оценкой самой вероятности p будет

$$p_{\mu,\nu} = \frac{\int_0^1 \xi^{\mu+1} (1-\xi)^\nu \omega(\xi) d\xi}{\int_0^1 \xi^\mu (1-\xi)^\nu \omega(\xi) d\xi}. \quad (7.7-33)$$

Уравнения (7.7-32) и (7.7-33) описывают *информационную модель* процесса адаптивного управления. Регулятор при этом должен работать так же, как если бы эта оценка была точным значением вероятности p .

Рассмотрим теперь проблему минимизации показателя качества, определенного уравнением (7.7—4). Пусть $f_N(x_0, \mu, \nu)$ — минимум показателя I_N по отношению к вектору управления \mathbf{m} , если в начальном состоянии x_0 наблюдалось μ раз значение \mathbf{r}^+ и ν раз значение \mathbf{r}^- . Тогда

$$f_N(x_0, \mu, \nu) = \min_{\{\mathbf{m}\}} E \sum_{k=1}^N F(x_k, \mathbf{r}_k, \mathbf{m}_k). \quad (7.7—34)$$

Для $N = 1$

$$f_1(x_0, \mu, \nu) = \min_{\mathbf{m}_0} E \{F(x_1, \mathbf{r}, \mathbf{m}_0)\} = \min_{\mathbf{m}_0} \{p_{\mu, \nu} F(x_1^+, \mathbf{r}_1^+, \mathbf{m}_0) + (1 - p_{\mu, \nu}) F(x_1^-, \mathbf{r}_1^-, \mathbf{m}_0)\}, \quad (7.7—35)$$

где

$$x_1^+ = g(x_0, \mathbf{r}_0^+, \mathbf{m}_0); \quad (7.7—36a)$$

$$x_1^- = g(x_0, \mathbf{r}_0^-, \mathbf{m}_0). \quad (7.7—36b)$$

Используя метод функциональных уравнений, получаем для $N \geq 2$ следующее рекуррентное соотношение:

$$f_N(x_0, \mu, \nu) = \min_{\mathbf{m}_0} \{p_{\mu, \nu} [F(x_1^+, \mathbf{r}_1^+, \mathbf{m}_0) + f_{N-1}(x_1^+, \mu + 1, \nu)] + (1 - p_{\mu, \nu}) [F(x_1^-, \mathbf{r}_1^-, \mathbf{m}_0) + f_{N-1}(x_1^-, \mu, \nu + 1)]\}. \quad (7.7—37)$$

Уравнения (7.7—35) и (7.7—37) представляют вычислительный подход к определению оптимальной стратегии управления, при использовании которой решение сводится к последовательным итерациям.

Пример 7.7—1. Система посадки самолета [71a]

Рассмотрим систему посадки самолета, которую приближенно можно описать дифференциальным уравнением второго порядка со случайными параметрами

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} = r(\rho, V, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5) m(t), \quad (7.7—38)$$

где $h(t)$ — высота;

$m(t)$ — сигнал управления высотой;

r — коэффициент, зависящий от плотности ρ воздушной среды, воздушной скорости V и аэродинамических коэффициентов $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$.

Начальными условиями посадки являются $h(0)$ и $\dot{h}(0)$. Воздушная скорость V предполагается постоянной на протяжении всего интервала времени посадки T . Случайный параметр r распределен равномерно и независимо на любом интервале $\tau = T/N$, где N обозначает количество измерений параметра на интервале T . Для удобства вычислений распределение параметра r предполагается дискретным. Случайный параметр r принимает значение r^+ с вероятностью p и значение r^- с вероятностью $1 - p$. Вероятность p не известна, мы будем считать ее случайной величиной с некоторым априори известным распределением. Она

может принимать два значения p_1 и p_2 с априорными вероятностями ξ и $1 - \xi$ соответственно. Требуется определить оптимальное управляющее воздействие, минимизирующее средний квадрат скорости снижения в момент приземления.

Пусть

$$\frac{dh(t)}{dt} = x(t).$$

Тогда уравнение (7.7—38) можно переписать в виде

$$\dot{x}(t) = r m(t). \quad (7.7-39)$$

Перейдя к дискретной форме записи, получим разностное уравнение

$$x_{k+1} = x_k + r \tau m_k, \quad (7.7-40)$$

где $x_k = x(k\tau)$ и $m_k = m(k\tau)$.

Рассматриваемая задача управления конечным состоянием сводится, таким образом, к определению управляющего воздействия m , минимизирующего показатель качества

$$I = E \{x^2(T)\} = E \{x^2(N\tau)\}. \quad (7.7-41)$$

Расчет начнем с определения апостериорных вероятностей

$$\alpha(\xi) = P \{p = p_1 / r = r^+\}$$

и

$$\beta(\xi) = P \{p = p_1 / r = r^-\}$$

По теореме Байеса находим, что

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= \frac{P(p = p_1) P(r = r^+ / p = p_1)}{P(p = p_1) P(r = r^+ / p = p_1) + P(p = p_2) P(r = r^+ / p = p_2)} = \\ &= \frac{\xi p_1}{\xi p_1 + (1 - \xi) p_2}; \end{aligned} \quad (7.7-42)$$

$$\begin{aligned} \beta(\xi) &= \frac{P(p = p_1) P(r = r^- / p = p_1)}{P(p = p_1) P(r = r^- / p = p_1) + P(p = p_2) P(r = r^- / p = p_2)} = \\ &= \frac{\xi(1 - p_1)}{\xi(1 - p_1) + (1 - \xi)(1 - p_2)}. \end{aligned} \quad (7.7-43)$$

Обозначим минимум показателя I через $f_N(x_0, \xi)$, где $x_0 = \dot{h}(0)$ — начальная скорость снижения самолета при посадке. Этот минимум зависит от начальной скорости x_0 и априорной вероятности ξ и определяется выражением

$$f_N(x_0, \xi) = \min_{\{m_k\}} E \{x^2(T)\} \quad (7.7-44)$$

В любой $(k + 1)$ -й выборке координата x_{k+1} может принять два значения:

$$x_{k+1}^+ = x_k + r^+ \tau m_k \quad (7.7-45a)$$

и

$$x_{k+1}^- = x_k + r^- \tau m_k \quad (7.7-45b)$$

Для $k = 0$ x_1 принимает значения

$$x_1^+ = x_0 + r^+ \tau m_0 \text{ с вероятностью } \rho_0 \quad (7.7-46a)$$

и

$$x_1^- = x_0 + r^- \tau m_0 \text{ с вероятностью } 1 - \rho_0, \quad (7.7-46b)$$

где ρ_0 — ожидаемое значение ρ , определяемое по формуле

$$\rho_0 = \zeta \rho_1 + (1 - \zeta) \rho_2. \quad (7.7-47)$$

Отсюда для $N = 1$

$$f_1(x_0, \zeta) = \min_{m_0} \{ \rho_0 (x_1^+)^2 + (1 - \rho_0) (x_1^-)^2 \}. \quad (7.7-48)$$

Применяя для $N \geq 2$ принцип оптимальности, находим

$$f_N(x_0, \zeta) = \min_{m_0} \{ \rho_0 f_{N-1}[x_1^+, \alpha(\zeta)] + (1 - \rho_0) f_{N-1}[x_1^-, \beta(\zeta)] \}. \quad (7.7-49)$$

где $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$, x_1^+ и x_1^- — определяются уравнениями (7.7-42), (7.7-43), (7.7-46a) и (7.7-46b) соответственно.

В результате принятия первого решения процесс может быть переведен в одно из двух возможных состояний x_1^+ или x_1^- с вероятностями ρ_0 и $1 - \rho_0$ соответственно. Если процесс переводится в состояние x^+ , то вычисляется апостериорная вероятность $\alpha(\zeta)$. Если процесс переводится в состояние x^- , то определяется апостериорная вероятность $\beta(\zeta)$.

Оптимальное решение в случае одношагового процесса находится путем дифференцирования функции (7.7-48) по m_0 и приравнивания частной производной нулю. Это приводит к

$$\rho_0 r^+ \tau (x_0 + r^+ \tau m_0) + (1 - \rho_0) r^- \tau (x_0 + r^- \tau m_0) = 0.$$

Отсюда

$$m = - \frac{D(r)}{D(r^2)} x_0, \quad (7.7-50)$$

где

$$D(r) = \rho_0 r^+ \tau + (1 - \rho_0) r^- \tau \quad (7.7-51)$$

и

$$D(r^2) = \rho_0 (r^+)^2 \tau^2 + (1 - \rho_0) (r^-)^2 \tau^2 \quad (7.7-52)$$

— функции от ζ .

Обозначим

$$D_i(r) = [\rho_i r^+ + (1 - \rho_i) r^-] \tau, \quad i = 1, 2. \quad (7.7-53)$$

Тогда, как легко видеть, $D(r)$ можно представить в виде

$$D(r) = \zeta D_1(r) + (1 - \zeta) D_2(r). \quad (7.7-54)$$

Аналогично, обозначая

$$D_i(r^2) = [\rho_i (r^+)^2 + (1 - \rho_i) (r^-)^2] \tau^2, \quad i = 1, 2 \quad (7.7-55)$$

находим, что $D(r^2)$ можно записать через ζ в виде

$$D(r^2) = \zeta D_1(r^2) + (1 - \zeta) D_2(r^2). \quad (7.7-56)$$

Минимум для одношагового процесса находим в виде

$$f_1(x_0, \zeta) = W_1(\zeta) x_0^2, \quad (7.7-57)$$

где

$$W_1(\zeta) = 1 - \frac{D^2(r)}{D(r)}. \quad (7.7-58)$$

Обозначим

$$g_0(\zeta) = -\frac{D(r)}{D(r^2)} \quad (7.7-59)$$

и оптимальное решение m_0 запишем в виде

$$m_0 = g_0(\zeta) x_0. \quad (7.7-60)$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$f_k(x_0, \zeta) = W_k(\zeta) x_0^2. \quad (7.7-61)$$

Учитывая формулу (7.7-61), получаем

$$f_k[x_1^+, \alpha(\zeta)] = W_k[\alpha(\zeta)](x_0 + r^+ \tau m_0)^2;$$

$$f_k[x_1^-, \beta(\zeta)] = W_k[\beta(\zeta)](x_0 + r^- \tau m_0)^2.$$

Минимум для $(k+1)$ -шагового процесса равен

$$f_{k+1}(x_0, \zeta) = \min_{m_0} \{ D(\zeta) W_k[\alpha(\zeta)](x_0 + r^+ \tau m_0)^2 + [1 - D(\zeta)] W_k[\beta(\zeta)](x_0 + r^- \tau m_0)^2 \}, \quad k=1, 2, \dots, N-1. \quad (7.7-62)$$

Из этого рекуррентного соотношения находим оптимальное решение в виде

$$m_0 = g_k(\zeta) x_0, \quad (7.7-63)$$

где

$$g_k(\zeta) = -\frac{D[rW_k(\zeta)]}{D[r^2W_k(\zeta)]}; \quad (7.7-64)$$

$$D[rW_k(\zeta)] = \zeta D_1[rW_k(\zeta)] + (1-\zeta) D_2[rW_k(\zeta)]; \quad (7.7-65)$$

$$D_i[rW_k(\zeta)] = \{ \rho_i r^+ W_k[\alpha(\zeta)] + (1-\rho_i) r^- W_k[\beta(\zeta)] \} \tau, \quad i=1, 2. \quad (7.7-66)$$

$$D[r^2W_k(\zeta)] = \zeta D_1[r^2W_k(\zeta)] + (1-\zeta) D_2[r^2W_k(\zeta)]; \quad (7.7-67)$$

$$D_i[r^2W_k(\zeta)] = \{ \rho_i (r^+)^2 W_k[\alpha(\zeta)] + (1-\rho_i) (r^-)^2 W_k[\beta(\zeta)] \} \tau^2, \quad i=1, 2. \quad (7.7-68)$$

Из уравнений (7.7-62) и (7.7-63) следует, что

$$f_{k+1}(x_0, \zeta) = W_{k+1}(\zeta) x_0^2, \quad (7.7-69)$$

где

$$W_{k+1}(\zeta) = D[W_k(\zeta)] - \frac{D^2[rW_k(\zeta)]}{D[r^2W_k(\zeta)]}; \quad (7.7-70)$$

$$D[W_k(\zeta)] = \zeta D_1[W_k(\zeta)] + (1-\zeta) D_2[W_k(\zeta)]; \quad (7.7-71)$$

$$D_i[W_k(\zeta)] = \rho_i W_k[\alpha(\zeta)] + (1-\rho_i) W_k[\beta(\zeta)]; \quad i=1, 2. \quad (7.7-72)$$

Уравнения (7.7—57), (7.7—58), (7.7—69) и (7.7—70) представляют собой рекуррентные соотношения, из которых можно найти минимум $f_N(x_0, \zeta)$ для N -шагового процесса.

В начальном состоянии x_0 с начальной информацией ζ первым оптимальным решением будет

$$m_0 = g_{N-1}(\zeta) x_0, \quad (7.7-73)$$

где $g_{N-1}(\zeta)$ определяется из уравнений (7.7—64)—(7.7—68), (7.7—70)—(7.7—72) при $k = N - 1$. Второе оптимальное решение должно быть принято после наблюдения случайной переменной на первом этапе решения. Если в результате наблюдения найдено, что $r = r^+$, то апостериорная вероятность $\zeta_1 = \alpha(\zeta)$ и новое состояние

$$x_1^+ = x_0 + r^+ \tau m_0 \quad (7.7-74)$$

используются в качестве начальной информации и начального состояния для оставшихся $N - 1$ шагов. Второе оптимальное решение может быть найдено аналогичным образом в виде

$$m_1 = g_{N-2}[\alpha(\zeta)] x_1^+, \quad (7.7-75)$$

Если наблюдаемое значение r после первого решения есть r^- , то апостериорная вероятность $\beta(\zeta)$ и новое состояние

$$x_1^- = x_0 + r^- \tau m_0 \quad (7.7-76)$$

используются в качестве начальной информации и начального состояния для оставшихся $N - 1$ шагов. Тогда второе оптимальное решение имеет вид

$$m_1 = g_{N-2}[\beta(\zeta)] x_1^-. \quad (7.7-77)$$

Таким образом, на интервале времени τ после первой выборки вычислительное устройство системы должно определить апостериорную вероятность $\alpha(\zeta)$ или $\beta(\zeta)$, новое состояние x_1 и принять второе оптимальное решение m_1 .

Если наблюдаемое значение переменной r после второго решения есть r^+ , то апостериорная вероятность $\zeta_2 = \alpha(\zeta_1)$ и новое состояние

$$x_2^+ = x_1 + r^+ \tau m_1 \quad (7.7-78)$$

используются в качестве начальной информации и начального состояния для оставшихся $N - 2$ шагов. Если в выражении (7.7—78) $x_1 = x_1^+$, то $\zeta_1 = \alpha(\zeta)$ и m_1 определяется по формуле (7.7—75); если же $x_1 = x_1^-$, то $\zeta_1 = \beta(\zeta)$ и m_1 дается выражением (7.7—77). Третье оптимальное решение может быть найдено аналогичным образом по формуле

$$m_2 = g_{N-3}[\alpha(\zeta_1)] x_2^+. \quad (7.7-79)$$

Если наблюдаемое значение r после второго решения есть r^- , то апостериорная вероятность $\zeta_2 = \beta(\zeta_1)$ и новое состояние

$$x_2^- = x_1 + r^- \tau m_1 \quad (7.7-80)$$

используются для определения третьего оптимального решения, которое в этом случае вычисляется по формуле

$$m_2 = g_{N-3}[\beta(\zeta_1)] x_2^-. \quad (7.7-81)$$

Оптимальная стратегия управления $\{m_0, m_1, \dots, m_{N-1}\}$ для этой системы посадки может быть определена путем многократных наблюдений и расчетов.

описанных выше. Каждое оптимальное решение принимается при использовании новой информации, полученной в результате наблюдения случайной переменной.

Предположим теперь, что $h(0) = 90$ м; $\dot{h}(0) = 3$ м/сек; $T = 100$ сек; $\tau = 5$ сек; $r^+ = 2$ м/сек; $r^- = -2$ м/сек; $N = 20$; $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,4$; $\xi = 0,8$. Распре-

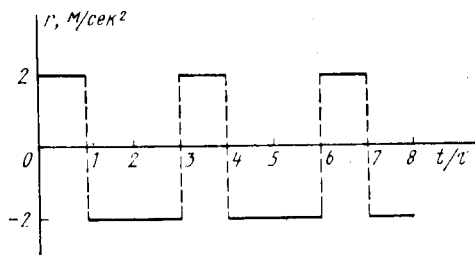


Рис. 7.7—1. Распределение амплитуды случайной переменной

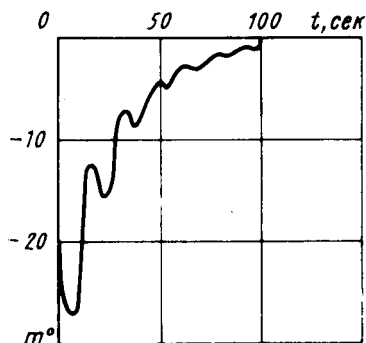


Рис. 7.7—2. Оптимальное управляющее воздействие

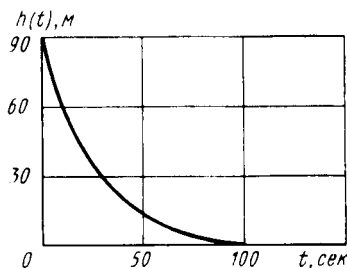


Рис. 7.7—3. Оптимальная траектория

деление амплитуды случайной переменной r показано на рис. 7.7—1. Минимум показателя качества находим равным

$$f_{20}(x_0, \xi) = 0,512 \text{ м/сек.}$$

При использовании описанной процедуры найдены оптимальное управляющее воздействие и соответствующая траектория снижения, изображенные на рис. 7.7—2 и 7.7—3 соответственно.

7.8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей главе была сделана попытка рассмотреть основы теории динамического программирования и показать ее применение к синтезу систем управления. Проведено обсуждение принципа оптимальности и метода функциональных уравнений. При использовании формальной процедуры анализа проблема

оптимального управления может быть сведена к определению решения уравнения Гамильтона — Якоби. Метод функциональных уравнений динамического программирования открывает путь к численному решению проблемы оптимизации, при котором не требуется искать решение дифференциального уравнения в частных производных и, таким образом, удается обойти трудности аналитического решения двухточечной краевой задачи.

Подробно рассмотрено построение процесса управления, минимизирующего интегральный критерий. Принцип оптимальности применен при выводе дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих оптимальные управляющие воздействия. Рассматривается учет ограничений, наложенных на управляющие воздействия при синтезе оптимальной системы. Для процессов даже умеренной сложности решение соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных является обычно трудной задачей и поэтому часто приходится прибегать к численному анализу на основе метода функциональных уравнений. Ограничения, наложенные на управляющие воздействия, определяют некоторую конечную область их возможных значений, что позволяет упростить процедуру вычислений.

Оптимальная система управления обычно содержит несколько цепей обратной связи, число которых равно порядку процесса. Сигналами обратной связи являются переменные состояния, часть из которых измеряется непосредственно, а для другой части находятся оценки. В случае оптимизации линейного процесса по квадратичному критерию

$$I(m) = \int_0^T [\mathbf{x}'(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \lambda m^2(t)] dt$$

оптимальный закон управления имеет вид

$$m^0(t) = \boldsymbol{\beta}(t) \mathbf{x}(t),$$

где $\boldsymbol{\beta}(t)$ — матрица обратной связи, элементами которой являются коэффициенты обратной связи.

Коэффициент обратной связи в каждой цепи зависит от времени, но не зависит от переменных состояния. Для случая оптимизации по критерию

$$I(m) = \int_0^T \left\{ \sum_k \alpha_k(t) [x_k^d(t) - x_k(t)]^2 + \lambda m^2(t) \right\} dt,$$

оптимальное управляющее воздействие для линейного процесса получено в форме

$$m^0(t) = r(t) + \boldsymbol{\beta}(t) \mathbf{x}(t),$$

где вход $r(t)$ и матрица обратной связи $\beta(t)$ определяются путем решения уравнений Риккати. Это решение может быть получено при помощи цифровой машины. Для иллюстрации приведен расчет оптимальной системы посадки самолета.

При использовании методов теории динамического программирования рассмотрено решение задачи управления конечным состоянием и задачи управления, оптимального по быстродействию. Метод функциональных уравнений используется для получения рекуррентных соотношений, которые позволяют вычислить оптимальные управляющие воздействия, минимизирующие функции качества

$$I(m) = G \{x_1(T), x_2(T), \dots, x_l(T)\}$$

и

$$I(m) = \alpha'x(T).$$

Аналитическое решение проблемы управления конечным состоянием обычно связано с большими трудностями, поэтому используются численные методы.

Применение принципа оптимальности к проблемам оптимального быстродействия ведет к дифференциальному уравнению Эйлера — Лагранжа, описывающему оптимальные управляющие воздействия. Когда управляющие воздействия входят в уравнение процесса аддитивно и ограничены по амплитуде сверху и снизу некоторыми предельными значениями, то легко показать, что амплитуды оптимальных управляющих воздействий равны предельным, а их знаки определяются знаком функции переключения.

Глава заканчивается рассмотрением адаптивных и самообучающихся процессов управления. Построение таких процессов осуществляется при использовании теоремы Байеса и метода функциональных уравнений динамического программирования. Процесс адаптации и самообучения включает сбор информации о случайной переменной и обработку этой информации согласно некоторого решающего правила. Решения, которые являются результатом обработки информации, используются для улучшения управления, осуществляемого вначале согласно априорному распределению. На базе наблюдений случайных переменных регулятор вырабатывает информационную модель управления. При использовании этой информационной модели адаптивный регулятор в процессе самообучения может определить точное распределение вероятностей. Процедура адаптации иллюстрируется на примере системы посадки самолета.

Динамическое программирование приводит к вычислительной процедуре, позволяющей систематизировать решение задачи, однако это не означает, что метод может устранить любые вычислительные трудности. Многошаговые процессы оптимизации

высокой размерности не могут быть в любом случае осуществлены при использовании данного метода вследствие неограниченных требований, предъявляемых при этом к объему памяти цифровой машины.

Литература к гл. 7

Аоки [1—5], Арис [6], Беллман [14—20], [22], Беллман и Калаба [25, 26], Десоер [48], Дрейфус [52, 53], Эллерт и Мерриам [54], Фреймер [57], Гришин [71а], Гвигнабодет [72], Джозеф и Ту [82], Кэллей [83, 84], Круг и Лецкий [100], Лейтман [112], Левис и Ту [115], Мерриам [118, 119], Мил и Каппелери [120], Розоноэр [134], Ту [137, 140, 144а] Ту и Фу [143], Ту и Джозеф [144, 145], Ту и Левис [146], Ту и Уилкокс [148].

**ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭЛЕКТРОННЫХ
ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН (ЭЦВМ)**

В период Второй мировой войны и последующее десятилетие техника систем автоматического управления переживала этап быстрого развития. В течение этого периода времени проектирование систем управления имело много общего с техникой проектирования усилителей с обратной связью. Расчет систем управления классическими методами сводился обычно к выбору соответствующих компенсирующих цепей, которые вводились в контур системы с обратной связью для обеспечения удовлетворительного поведения системы в целом. Сталкиваясь с проблемами управления инженер пытался найти выход в применении средств вычислительной техники. Однако на первых порах эти попытки часто оказывались безуспешными, так как классическая теория регулирования не позволяла эффективно использовать гибкость ЭЦВМ для решения сложных проблем. Основанное на методах классической теории управления применение средств цифровой техники не содержало в большинстве случаев ничего другого, помимо реализации классических дифференцирующих или интегрирующих контуров при помощи дискретных логических элементов или ЭЦВМ.

Чтобы полностью использовать возможности цифровой техники и добиться большего успеха в синтезе оптимальных систем, инженеру следует обратиться к современным методам. Эти методы разрабатываются с учетом современной тенденции использования ЭЦВМ для численного решения сложных проблем. С увеличением надежности и уменьшением размеров, веса и стоимости ЭЦВМ становится все более естественным стремление использовать специализированные цифровые машины в качестве составной части системы для обработки большого количества данных и осуществления сложных законов управления. Доступность цифровых машин и регуляторов открывает в настоящее время новые возможности для построения систем управления. Естественно ожидать, что в будущем многие системы управле-

ния будут включать в качестве своих компонент специализированные ЭЦВМ. Настоящая глава посвящена проектированию оптимальных систем управления с применением ЭЦВМ.

8.1. ПРИНЦИПЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЦВМ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ

Цифровые машины могут быть по-разному использованы для управления процессом или объектом. Возможны различные варианты использования ЭЦВМ, начиная от периодических вычислений вне контура и кончая работой в замкнутом контуре системы управления в реальном масштабе времени. Внеконтурное использование ЭЦВМ иллюстрируется рис. 8.1—1. При таком варианте

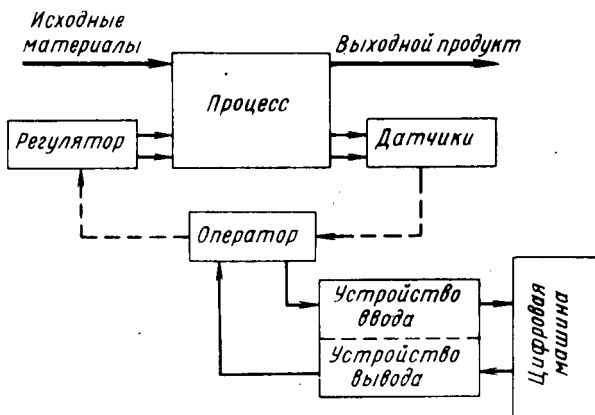


Рис. 8.1—1. Схема использования ЭЦВМ вне контура управления

использования ЭЦВМ отсчеты с соответствующих измерительных приборов и результаты лабораторных анализов поступают к оператору и используются в расчетах по определению необходимых этапов управления. Результаты этих расчетов служат основой регулирования условий протекания процесса. Внеконтурное использование ЭЦВМ может дать удовлетворительные результаты при управлении медленно изменяющимися процессами.

ЭЦВМ может быть использована в качестве программного регулятора, как показано на рис. 8.1—2. В этой схеме ЭЦВМ получает информацию о ходе процесса от оператора, однако в данном случае она может оказывать непосредственное воздействие на процесс. Такой подход приводит к программно регулируемой системе.

На рис. 8.1—3 изображена схема системы, в которой ЭЦВМ используется для логической обработки данных и вычисления показателей для оперативного управления. В таких системах уп-

равления датчики соединены с вычислительной машиной через преобразователи. Назначение последних — представить исходные сигналы в форме, приемлемой для ЭЦВМ. Вычислительная машина по введенным данным определяет обобщенные показатели процесса, такие как количество или скорость образования

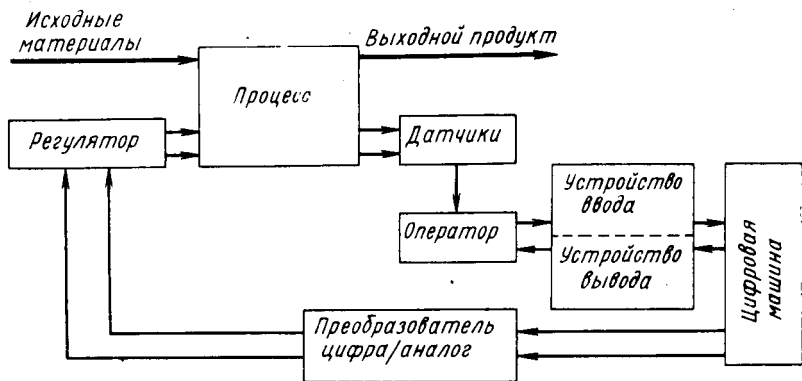


Рис. 8.1—2. Схема применения ЭЦВМ в качестве программного регулятора

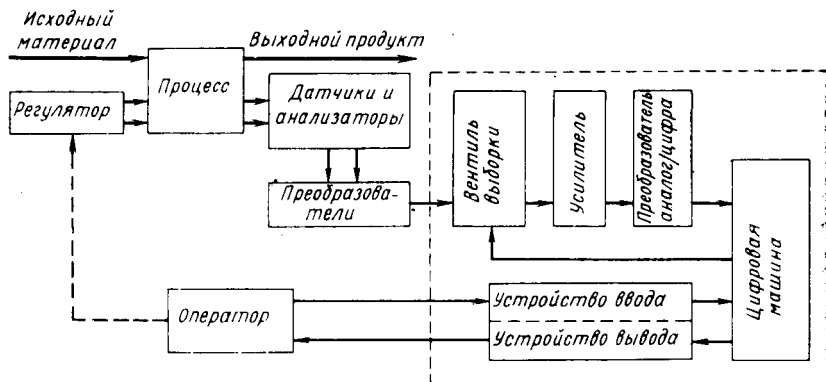


Рис. 8.1—3. Схема применения ЭЦВМ для обработки входной информации и вычисления показателей для оперативного управления

продукта, которые могут помочь оператору в выборе лучшей совокупности начальных условий. Эта схема включения ЭЦВМ полезна, когда установлены соотношения между входом и выходом процесса.

Однако наиболее перспективными являются системы цифрового управления, в которых ЭЦВМ находится в замкнутом контуре управления и производит вычисления в реальном масштабе времени (рис. 8.1—4). Вычислительная машина считывает пока-

зания измерительных приборов, определяет наилучшие условия работы и производит автоматическую установку положения регулирующих органов. В нормальных условиях оператор получает данные о работе такой автоматизированной системы через буквопечатающий аппарат или специальные выходные устройства и может изменить режим работы системы путем ввода новых констант или программ с помощью устройства считывания с перфоленты или других входных устройств. В случаях крайней необходимости оператор может взять управление процессом на себя и управлять таким же образом, как и до введения ЭЦВМ.

Применение систем с ЭЦВМ в замкнутом контуре управления становится особенно эффективным в тех случаях, когда отклонения от режима возникают так часто, а регулировки и принятие

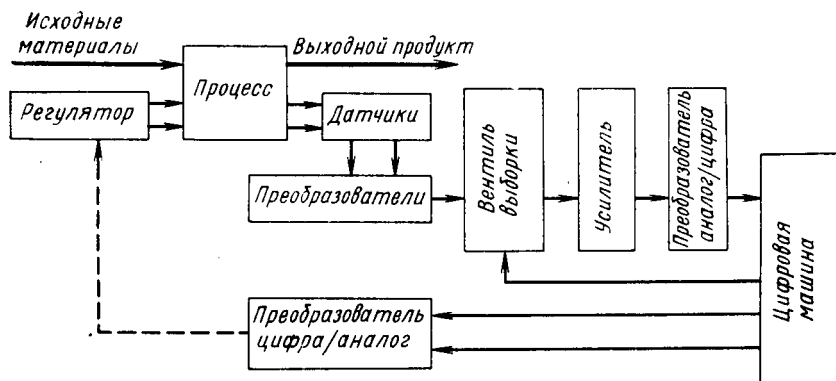


Рис. 8.1—4. Система с ЭЦВМ в замкнутом контуре управления

решения требуют проведения таких сложных вычислений, что человек-оператор не в состоянии правильно реагировать на эти изменения в требуемое время. Быстрое изменение химического состава и физических свойств исходных материалов, случайные возмущения, неполное знание динамики процесса и противоречивость требований делают трудным или даже невозможным для любого человека-оператора непрерывное поддержание оптимального режима работы, который мог быть им случайно реализован однажды.

ЭЦВМ в системе управления обычно выполняет функции контроля, обработки данных и оптимального управления, перечисленные на рис. 8.1—5. При осуществлении функции контроля ЭЦВМ производит сбор данных, обнаружение ошибок и анализ причин их возникновения, общее наблюдение за ходом процесса. На этапе обработки ЭЦВМ производит прием и логический анализ данных, вычисление показателей эффективности процесса и индикацию выходных данных. При осуществлении функции

оптимального управления ЭЦВМ определяет оптимальные законы управления и вырабатывает решения, оптимизирующие поведение системы. Интересно отметить, что выполняемые с помощью ЭЦВМ контроль и обработка данных представляют собой прямую механизацию соответствующих функций оператора; однако на этапе оптимального управления ЭЦВМ решает также некоторые задачи, которые оператор может решить лишь с огромными трудностями. Именно применение ЭЦВМ для оптимального управления открывает возможность получить существенный экономический выигрыш. В настоящей главе рассматривается про-

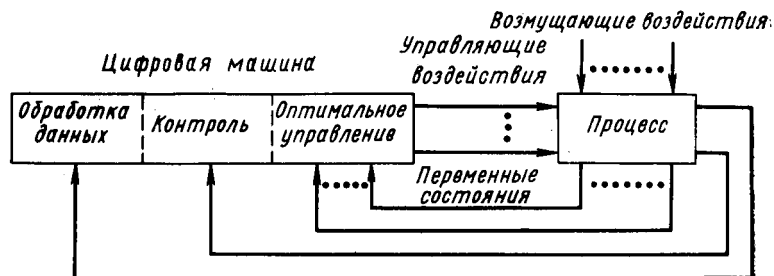


Рис. 8.1—5. Схема цифровой системы управления

блема оптимального управления при использовании ЭЦВМ в контуре управления.

Широкий класс процессов, встречающихся в инженерной практике, характеризуется наличием нескольких входных и выходных переменных. Без тщательного изучения рассматриваемой проблемы для многомерных систем решение проблемы оптимального управления будет оставаться неполным и менее ценным.

Динамика важного класса многомерных процессов может быть описана векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{m}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (8.1-1)$$

где $\mathbf{A}(t)$ — матрица коэффициента процесса;
 $\mathbf{D}(t)$ — матрица управления;
 $\mathbf{x}(t)$ — вектор состояния;
 $\mathbf{m}(t)$ — вектор управляющих воздействий;
 $\mathbf{n}(t)$ — вектор возмущающих воздействий.

В уравнении (8.1—1) в случае процесса n -го порядка $\mathbf{A}(t)$ является квадратной матрицей размера $n \times n$; аддитивные возмущающие воздействия предполагаются независимыми случайными переменными. Уравнение (8.1—1) дает также приближенное описание динамики некоторых нелинейных процессов при

малых отклонениях от состояния равновесия. Решение этого уравнения, как было найдено в параграфе 2.4, имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) [\mathbf{D}(\tau) \mathbf{m}(\tau) + \mathbf{n}(\tau)] d\tau, \quad (8.1-2)$$

где $\Phi(t, t_0)$ — матрица перехода, удовлетворяющая однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \quad (8.1-3)$$

и соотношению

$$\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad (8.1-4)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица.

В системах с цифровым управлением $m(\tau) = m(kT)$ для $kT \leq \tau \leq (k+1)T$ и решение в дискретной форме дается уравнением переходных состояний

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{m}(k) + \mathbf{u}(k), \quad (8.1-5)$$

где

$$\Phi(k) = \Phi(\overline{k+1T}, kT); \quad (8.1-6)$$

$$\mathbf{G}(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(\overline{k+1T}, \tau) \mathbf{D}(\tau) d\tau; \quad (8.1-7)$$

$$\mathbf{u}(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(\overline{k+1T}, \tau) \mathbf{n}(\tau) d\tau. \quad (8.1-8)$$

В этом уравнении обозначение периода прерывания T для удобства записи опущено.

Как обсуждалось в предыдущих разделах, важным шагом в построении оптимальных систем управления является выбор показателя качества, который в значительной степени определяет принцип построения реализуемой оптимальной системы. Последняя может быть линейной, нелинейной, стационарной, нестационарной, в зависимости от вида показателя качества. Следовательно, инженер может повлиять на характеристики оптимальной системы путем выбора соответствующего критерия качества исходя из требований, предъявляемых к системе. В этих требованиях формулируются не только желаемые технические характеристики системы, но указываются также ограничения, при которых должно осуществляться оптимальное управление и при соблюдении которых гарантируется физическая реализуемость. При дальнейшем рассмотрении цифровых систем управления

будем исходить из показателя качества, определяемого квадратичной формой

$$I_N = \sum_{k=1}^N [\mathbf{x}'(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \lambda \mathbf{m}'(k-1) \mathbf{H}(k-1) \mathbf{m}(k-1)] \quad (8.1-9a)$$

или, в более общем виде,

$$I_N = \sum_{k=1}^N \{ [\mathbf{x}^d(k) - \mathbf{x}(k)]' \mathbf{Q}(k) [\mathbf{x}^d(k) - \mathbf{x}(k)] + \lambda \mathbf{m}'(k-1) \mathbf{H}(k-1) \mathbf{m}(k-1) \}, \quad (8.1-9б)$$

где $\mathbf{x}^d(k)$ — вектор желаемого состояния;

\mathbf{Q} , \mathbf{H} — положительно определенные симметрические матрицы;

λ — постоянный множитель.

Выбор положительно определенной матрицы гарантирует единственность и линейность закона управления и асимптотическую устойчивость системы при управляемом объекте. Квадратичный критерий качества имеет также то преимущество, что он позволяет обычно довести до конца аналитическое решение задачи.

Запись уравнения (8.1—9б) в развернутом виде ведет к взвешенной сумме квадратов ошибок $x_j^d - x_j$ и управляющих воздействий m_j с весовыми коэффициентами, определяемыми элементами матриц \mathbf{Q} и \mathbf{H} . Например, если \mathbf{Q} и \mathbf{H} — единичные матрицы, то весовые коэффициенты равны единице. Первое слагаемое суммы в правой части уравнения (8.1—9б) может быть использовано для измерения отклонения процесса от заданного условия в любой момент времени kT , второе слагаемое учитывает ограничение энергии управляющих воздействий. Первое слагаемое представляет непроизводительные экономические затраты или штраф за ошибки, второе слагаемое можно рассматривать как стоимость управления, множитель λ — как весовой коэффициент штрафа. Добавление второго слагаемого является удобным математическим приемом, позволяющим избавить систему от насыщения. Множитель λ может быть определен непосредственно из практических соображений, например он может быть выбран так, чтобы квадрат управляющего воздействия оставался меньше некоторого предела, за которым возникает насыщение.

Представленный выше квадратичный показатель качества является весьма гибким. При соответствующем выборе элементов матрицы \mathbf{Q} любую координату состояния процесса можно сделать более важной и эффективной для оценки качества системы по сравнению с любой другой переменной, описывающей ее по-

ведение. Аналогично, путем соответствующего выбора элементов матрицы \mathbf{H} можно наложить желаемые ограничения на энергию управляющих воздействий. Более того, когда матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{H} являются функциями k , выражения (8.1—9) представляют собой квадратичный показатель качества с весовыми коэффициентами, зависящими от времени. Квадратичный показатель качества может быть использован при синтезе систем управления с оптимизацией конечного состояния. В таких системах достигается минимум функционала от ошибок или переменных состояния системы в конечной точке оптимальной траектории. Выражение (8.1—9а) или (8.1—9б) может быть использовано как показатель качества для системы управления конечным состоянием при условии, что матрица \mathbf{Q} является диагональной и диагональные элементы ее представляют собой импульсные функции или нули.

Задача оптимального управления формулируется тогда следующим образом:

Определить закон или стратегию управления $\{\mathbf{m}(j)\}$, $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, минимизирующего ожидаемое среднее значение показателя качества, заданного выражениями (8.1—9а) и (8.1—9б), с учетом соотношения (8.1—5), характеризующего движение из любого начального состояния $\mathbf{x}(0)$, а также физических ограничений и других требований, предъявляемых к системе.

Из-за неопределенности поведения системы, вызываемой случайными возмущениями, представляется нецелесообразным минимизировать показатель качества I_N . Более удобной, хотя и менее точной, мерой качества системы является в этом случае ожидаемое среднее значение I_N .

В приведенной формулировке задачу оптимального управления можно, очевидно, рассматривать как N -шаговый процесс. Для построения оптимальных систем цифрового управления в этой связи кажется логически целесообразным применение такого мощного математического аппарата, каким является теория динамического программирования. Оптимальное построение заключается по существу в определении последовательности векторов управления

$$\mathbf{m}(0), \mathbf{m}(1), \mathbf{m}(2), \dots, \mathbf{m}(N-1), \quad (8.1-1)$$

минимизирующей ожидаемое среднее значение показателя качества I_N . Эти векторы управления можно рассматривать как последовательные решения, которые принимаются в ходе оптимального управления. Фактически это тот же самый тип N -шагового процесса оптимизации, что рассматривался в параграфе 7.2. Уравнение переходных состояний является здесь аналогом переходящей функции

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{m}^{k-1}) \quad (8.1-11)$$

и показатель качества (8.1—9) может быть уподоблен функции выигрыша

$$R = \sum_{j=1}^N r(x^j, m^j). \quad (8.1-12)$$

Можно видеть, что минимум величины EI_N зависит от начального состояния $x(0)$ и числа шагов N . Здесь E — символ статистического среднего значения. Настоящая глава посвящена проектированию оптимальных цифровых систем управления методами теории динамического программирования.

8.2 УПРАВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Настоящий параграф посвящен управлению стационарными процессами при использовании ЭЦВМ. Предполагается, что все координаты процесса допускают непосредственное наблюдение и измерение. При определении оптимального закона управления для линейной стационарной системы будем исходить из квадратичного показателя качества. Так как проблему оптимального цифрового управления можно рассматривать как многошаговый процесс, то решение задачи удобнее производить методами теории динамического программирования.

Рассмотрим линейный процесс n -го порядка, описываемый векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dm(t). \quad (8.2-1)$$

Предполагается, что процесс является стационарным и внешними случайными возмущениями можно пренебречь. Расчет цифровых систем управления обычно начинают с составления уравнений движения системы в дискретной форме. Уравнение (8.2—1), описывающее динамику заданного непрерывного процесса, можно представить в дискретной форме при помощи соотношения

$$\overline{x_i(k+1T)} = x_i(kT) + Tx_{i+1}(kT), \quad (8.2-2)$$

где x_i — координаты процесса;

$$\dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n;$$

T — выбранный период прерывания.

Линейный процесс можно также охарактеризовать в дискретной форме уравнением переходных состояний

$$x(k+1) = \Phi(1)x(k) + h(1)m(k), \quad (8.2-3)$$

где обозначение периода прерывания T для упрощения записи опущено.

Заметим, что уравнение (8.2—3) может быть сведено к дискретному варианту уравнения (8.2—1), получаемому в результате применения соотношения (8.2—2), если матрицу перехода \mathbf{P} разложить в степенной ряд и учесть его первые два члена.

Задача настоящего параграфа состоит в определении оптимального закона управления, минимизирующего квадратичный показатель качества

$$I_N = \sum_{k=1}^N [\mathbf{x}'(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \lambda m^2(k+1)] \quad (8.2-4)$$

для заданного начального состояния $\mathbf{x}(0)$ с учетом связей, задаваемых уравнением (8.2—3) или дискретной формой уравнения (8.2—1). Расчет системы, оптимальной по критерию (8.1—96), может быть выполнен аналогичным путем и поэтому предоставляется читателю в качестве упражнения.

Введем для обозначения минимума показателя качества I_N функцию

$$f_N[\mathbf{x}(0)] = \min_{\substack{m(0) \\ m(1) \\ \dots \\ m(N-1)}} \sum_{k=1}^N [\mathbf{x}'(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \lambda m^2(k-1)]. \quad (8.2-5)$$

Перейдя к более общей форме записи, получаем следующее выражение для минимального значения показателя качества, для последних $N-j$ шагов N -шагового процесса:

$$f_{N-j}[\mathbf{x}(j)] = \min_{\substack{m(j) \\ m(j+1) \\ \dots \\ m(N-1)}} \sum_{k=j+1}^N [\mathbf{x}'(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \lambda m^2(k-1)] \\ j = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (8.2-6)$$

Когда $j = 0$, уравнение (8.2—6) сводится к формуле (8.2—5) и очевидно, что

$$f_0[\mathbf{x}(0)] = 0. \quad (8.2-7)$$

Предположим, что выигрыш за первые $j-1$ шагов оптимален. Тогда выигрыш за оставшиеся $N-j$ шагов будет равен выигрышу от j -го шага плюс оптимальный выигрыш от оставшихся $N-j+1$ шагов, т. е.

$$\{\mathbf{x}'(j+1) \mathbf{Q} \mathbf{x}(j+1) + \lambda m^2(j)\} + f_{N-j+1}[\mathbf{x}(j+1)]. \quad (8.2-8)$$

Пользуясь принципом оптимальности, приведем формулу (8.2—6) к виду

$$f_{N-j}[\mathbf{x}(j)] = \min_{m(j)} \{\mathbf{x}'(j+1) \mathbf{Q} \mathbf{x}(j+1) + \lambda m^2(j) + f_{N-j+1}[\mathbf{x}(j+1)]\}; \quad (8.2-9)$$

Полагая вначале $f_0[\mathbf{x}(N)] = 0$, последовательно получим

$$f_1[\mathbf{x}(N-1)] = \min_{m(N-1)} \{ \mathbf{x}'(N) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N) + \lambda m^2(N-1) \}; \quad (8.2-10)$$

$$f_2[\mathbf{x}(N-2)] = \min_{m(N-2)} \{ \mathbf{x}'(N-1) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N-1) + \lambda m^2(N-2) + \\ + f_1[\mathbf{x}(N-1)] \}; \quad (8.2-11)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_N[\mathbf{x}(0)] = \min_{m(0)} \{ \mathbf{x}'(1) \mathbf{Q} \mathbf{x}(1) + \lambda m^2(0) + f_{N-1}[\mathbf{x}(1)] \}. \quad (8.2-12)$$

Так как функционал f является квадратичной формой от \mathbf{x} , то методом математической индукции можно показать, что как f_{N-j} , так и $f_{N-\bar{j}+1}$ могут быть представлены в виде квадратичных форм. Предположим, что

$$f_{N-j}[\mathbf{x}(j)] = \mathbf{x}'(j) \mathbf{P}(N-j) \mathbf{x}(j) \quad (8.2-13)$$

и

$$f_{N-\bar{j}+1}[\mathbf{x}(j+1)] = \mathbf{x}'(j+1) \mathbf{P}(N-\bar{j}+1) \mathbf{x}(j+1), \quad (8.2-14)$$

где \mathbf{P} обозначает симметрическую матрицу размера $n \times n$, введенную для того, чтобы представить уравнения (8.2-13) и (8.2-14) в виде квадратичных форм. Подстановка этих выражений в предыдущие уравнения приводит к следующим соотношениям:

$$\mathbf{x}'(j) \mathbf{P}(N-j) \mathbf{x}(j) = \min_{m(j)} \{ \mathbf{x}'(j+1) \mathbf{S}(N-\bar{j}+1) \mathbf{x}(j+1) + \lambda m^2(j) \}, \quad (8.2-15)$$

где

$$\mathbf{S}(N-\bar{j}+1) = \mathbf{Q} + \mathbf{P}(N-\bar{j}+1). \quad (8.2-16)$$

С учетом формул (8.2-3) и (8.2-13) функционал $f_{N-j}[\mathbf{x}(j)]$ можно записать в виде

$$f_{N-j}[\mathbf{x}(j)] = \mathbf{x}'(j) \mathbf{P}(N-j) \mathbf{x}(j) = \min_{m(j)} \{ [\mathbf{q}(1) \mathbf{x}(j) + \mathbf{h}(1) m(j)]' \times \\ \times \mathbf{S}(N-\bar{j}+1) [\mathbf{\varphi}(1) \mathbf{x}(j) + \mathbf{h}(1) m(j)] + \lambda m^2(j) \}. \quad (8.2-17)$$

Так как N -шаговый процесс решения сводится таким образом к последовательности из N одношаговых процессов, то минимизация может быть теперь легко проведена при использовании обычной процедуры дифференцирования. Дифференцируя по $m(j)$ функции внутри фигурных скобок в формуле (8.2-17) и приравнявая производную нулю, приходим к соотношению

$$2 [\mathbf{h}'(1) \mathbf{S}(N-\bar{j}+1) \mathbf{h}(1) + \lambda] m(j) + \mathbf{h}'(1) \mathbf{S}(N-\bar{j}+1) \mathbf{\varphi}(1) \mathbf{x}(j) + \\ + \mathbf{x}'(j) \mathbf{\varphi}(1) \mathbf{S}(N-\bar{j}+1) \mathbf{h}(1) = 0. \quad (8.2-18)$$

Используя симметричность матрицы \mathbf{S} и произведя упрощения, получаем

$$[\mathbf{h}'(1)\mathbf{S}(N-\overline{j+1})\mathbf{h}(1)+\lambda]m(j)=\mathbf{h}'(1)\mathbf{S}(N-\overline{j+1})\boldsymbol{\varphi}(1)\mathbf{x}(j). \quad (8.2-19)$$

Отсюда находим оптимальный закон или стратегию управления в виде

$$m^0(j)=\mathbf{B}(N-j)\mathbf{x}(j), \quad (8.2-20)$$

где

$$\mathbf{B}(N-j)=-\frac{\mathbf{h}'(1)[\mathbf{Q}+\mathbf{P}(N-\overline{j+1})]\boldsymbol{\varphi}(1)}{\mathbf{h}'(1)[\mathbf{Q}+\mathbf{P}(N-\overline{j+1})]\mathbf{h}(1)+\lambda}. \quad (8.2-21)$$

Следует отметить, что найденный оптимальный закон управления является линейной функцией координат процесса, а оптимальная система с обратной связью — нестационарной. Матрица обратной связи \mathbf{B} изменяется во времени. Для $j=N-1$

$$\mathbf{B}(1)=-\frac{\mathbf{h}'(1)\mathbf{Q}\boldsymbol{\varphi}(1)}{\mathbf{h}'(1)\mathbf{Q}\mathbf{h}(1)+\lambda}, \quad (8.2-22)$$

так как $\mathbf{P}(0)=\mathbf{0}$. Аналогично для $j=N-2, N-3, \dots, 0$ имеем

$$\mathbf{B}(2)=-\frac{\mathbf{h}'(1)[\mathbf{Q}+\mathbf{P}(1)]\boldsymbol{\varphi}(1)}{\mathbf{h}'(1)[\mathbf{Q}+\mathbf{P}(1)]\mathbf{h}(1)+\lambda}; \quad (8.2-23)$$

$$\mathbf{B}(3)=-\frac{\mathbf{h}'(1)[\mathbf{Q}+\mathbf{P}(2)]\boldsymbol{\varphi}(1)}{\mathbf{h}'(1)[\mathbf{Q}+\mathbf{P}(2)]\mathbf{h}(1)+\lambda}; \quad (8.2-24)$$

$$\mathbf{B}(j)=-\frac{\mathbf{h}'(1)[\mathbf{Q}+\mathbf{P}(j-1)]\boldsymbol{\varphi}(1)}{\mathbf{h}'(1)[\mathbf{Q}+\mathbf{P}(j-1)]\mathbf{h}(1)+\lambda}; \quad (8.2-25)$$

$$\mathbf{B}(N)=-\frac{\mathbf{h}'(1)[\mathbf{Q}+\mathbf{P}(N-1)]\boldsymbol{\varphi}(1)}{\mathbf{h}'(1)[\mathbf{Q}+\mathbf{P}(N-1)]\mathbf{h}(1)+\lambda}. \quad (8.2-26)$$

Матрицы обратной связи $\mathbf{B}(j)$ легко вычисляются, если найдено рекуррентное соотношение для определения \mathbf{P} -матриц. Подстановка выражения (8.2-20) в правую часть уравнения (8.2-17) приводит к соотношению

$$\mathbf{x}'(j)\mathbf{P}(N-j)\mathbf{x}(j)=\mathbf{x}'(j)[\boldsymbol{\varphi}(1)+\mathbf{h}(1)\mathbf{B}(N-j)]'\mathbf{S}(N-\overline{j+1})[\boldsymbol{\varphi}(1)+\mathbf{h}(1)\mathbf{B}(N-j)]\mathbf{x}(j)+\lambda\mathbf{x}'(j)\mathbf{B}'(N-j)\mathbf{B}(N-j)\mathbf{x}(j), \quad (8.2-27)$$

Сравнивая правую и левую части соотношения (8.2-27), находим

$$\mathbf{P}(N-j)=[\boldsymbol{\varphi}(1)+\mathbf{h}(1)\mathbf{B}(N-j)]'[\mathbf{Q}+\mathbf{P}(N-\overline{j+1})][\boldsymbol{\varphi}(1)+\mathbf{h}(1)\mathbf{B}(N-j)]+\lambda\mathbf{B}'(N-j)\mathbf{B}(N-j), \quad (8.2-28)$$

что является искомым рекуррентным соотношением для определения \mathbf{P} -матриц. Это рекуррентное соотношение совместно с уравнением (8.2—21) позволяет составить вычислительный алгоритм для определения матрицы $\mathbf{V}(N-j)$, которая, в свою очередь, определяет оптимальный закон управления. Начав вычисления по формуле (8.2—21) и (8.2—28) при $\mathbf{P}(0) = \mathbf{0}$ и затем многократно их повторяя, последовательно находим $\mathbf{V}(1)$, $\mathbf{P}(1)$, $\mathbf{V}(2)$, $\mathbf{P}(2)$ и т. д. Например, подстановка выражения (8.2—22) в формулу (8.2—28) при $j = N-1$ дает $\mathbf{P}(1)$, что, в свою очередь, при подстановке в формулу (8.2—23) дает $\mathbf{V}(2)$. Матрица $\mathbf{P}(2)$ находится затем подстановкой выражения (8.2—23) в соотношение (8.2—28) при $j = N-2$. Аналогичным путем могут быть найдены и другие значения матриц \mathbf{V} и \mathbf{P} . В цифровой системе управления описанный вычислительный алгоритм реализуется с помощью ЭЦВМ системы, которая вырабатывает оптимальную последовательность управляющих воздействий.

Обратимся вновь к показателю качества, определенному выражением (8.2—4). При $N \rightarrow \infty$ управление становится бесконечношаговым процессом. Уравнение (8.2—9) сводится к виду

$$f[\mathbf{x}(j)] = \min_{m(j)} \{ \mathbf{x}'(j+1) \mathbf{Q} \mathbf{x}(j+1) + \lambda m^2(j) + f[\mathbf{x}(j+1)] \}. \quad (8.2—29)$$

Положим

$$\mathbf{x}(j) = \mathbf{x}'(j) \mathbf{P} \mathbf{x}(j) \quad (8.2—30)$$

и

$$f[\mathbf{x}(j+1)] = \mathbf{x}'(j+1) \mathbf{P} \mathbf{x}(j+1), \quad (8.2—31)$$

где матрица \mathbf{P} не зависит от j .

Тогда, следуя прежней аргументации, можно показать, что оптимальный закон управления имеет вид

$$m^0(j) = \mathbf{B} \mathbf{x}(j), \quad (8.2—32)$$

где матрица обратной связи находится по формуле

$$\mathbf{B} = - \frac{\mathbf{h}'(1) [\mathbf{Q} + \mathbf{P}] \boldsymbol{\varphi}(1)}{\mathbf{h}'(1) [\mathbf{Q} + \mathbf{P}] \mathbf{h}(1) + \lambda}, \quad (8.2—33)$$

а матрица \mathbf{P} может быть найдена из следующего уравнения:

$$\mathbf{P} - [\boldsymbol{\varphi}(1) + \mathbf{h}(1) \mathbf{B}]' \mathbf{P} [\boldsymbol{\varphi}(1) + \mathbf{h}(1) \mathbf{B}] = [\boldsymbol{\varphi}(1) + \mathbf{h}(1) \mathbf{B}]' \mathbf{Q} [\boldsymbol{\varphi}(1) + \mathbf{h}(1) \mathbf{B}] + \lambda \mathbf{B}' \mathbf{B}; \quad (8.2—34)$$

Так как матрица-строка обратной связи \mathbf{B} остается неизменной для всей последовательности воздействий, то найденная оптимальная система с обратной связью является стационарной.

Вышеприведенное рассмотрение оптимального управления с применением ЭЦВМ было ограничено линейными процессами, управляемыми по одному единственному входу. Однако описанная процедура расчета может быть легко распространена на процессы, управляемые по многим входам. Рассмотрим управление по многим входам линейным процессом, характеризуемым векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{m}(t), \quad (8.2-35)$$

где \mathbf{x} — n -мерный вектор, представляющий переменные состояния;

\mathbf{m} — r -мерный вектор, представляющий управляющие воздействия;

\mathbf{A} — матрица коэффициентов размера $n \times n$;

\mathbf{D} — матрица управления размера $n \times r$.

Уравнение переходных состояний, описывающее этот процесс, имеет вид

$$\mathbf{x}(k+1) = \boldsymbol{\varphi}(1)\mathbf{x}(k) + \mathbf{h}(1)\mathbf{m}(k), \quad (8.2-36)$$

где для упрощения записи обозначение периода прерывания T опущено. Предположим, что показатель качества задан в виде

$$I_N = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}'(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k). \quad (8.2-37)$$

Произведя выкладки, аналогичные предыдущим, получаем следующее выражение для оптимального закона управления:

$$\mathbf{m}^0(j) = \mathbf{B}(N-j)\mathbf{x}(j), \quad (8.2-38)$$

где матрица обратной связи определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(N-j) = & -[\mathbf{h}'(1)\{\mathbf{Q} + \mathbf{P}(N-\overline{j+1})\} \mathbf{h}(1)]^{-1} \times \\ & \times [\mathbf{h}'(1)\{\mathbf{Q} + \mathbf{P}(N-\overline{j+1})\} \boldsymbol{\varphi}(1)]. \end{aligned} \quad (8.2-39)$$

Для определения $\mathbf{P}(N-j)$ находим следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N-j) = & [\boldsymbol{\varphi}(1) + \mathbf{h}(1)\mathbf{B}(N-j)]' [\mathbf{Q} + \mathbf{P}(N-\overline{j+1})] [\boldsymbol{\varphi}(1) + \mathbf{h}(1) \times \\ & \times \mathbf{B}(N-j)]. \end{aligned} \quad (8.2-40)$$

Так же, как и в предыдущем случае, полагая вначале $\mathbf{P}(0) = \mathbf{0}$ и многократно применяя рекуррентные соотношения (8.2-39) и (8.2-40), последовательно находим матрицы $\mathbf{B}(1)$, $\mathbf{P}(1)$, $\mathbf{B}(2)$, $\mathbf{P}(2)$ и т. д., которые определяют оптимальный закон управления заданным процессом по нескольким входам.

Описанная процедура расчета может быть также применена и в том случае, когда на некоторые входы системы поступают за-

дающие воздействия $r(t)$. Для описания последних могут быть введены дополнительные переменные состояния, и процесс вместе с входными воздействиями может рассматриваться как система увеличенной размерности. В том случае, когда оптимизация системы проводится по минимуму квадратичного показателя качества, то, как показано выше, оптимальный закон управления является линейной функцией координат процесса, а также координат входа. При использовании других критериев качества, отличных от квадратичного, оптимальный закон управления является обычно нелинейной функцией координат процесса, входа и, возможно, дискретных моментов времени kT :

$$m^0(kT) = \beta [x(kT), r(kT), kT)]. \quad (8.2-41)$$

Применение рассмотренных методов проектирования проиллюстрируем несколькими примерами.

Пример 8.2—1. Проблема регулятора

Схема в переменных состояния простой цифровой системы показана на рис. 8.2—1. Управляемый процесс характеризуется дифференциальным уравнением

$$\dot{x} + ax = bm.$$

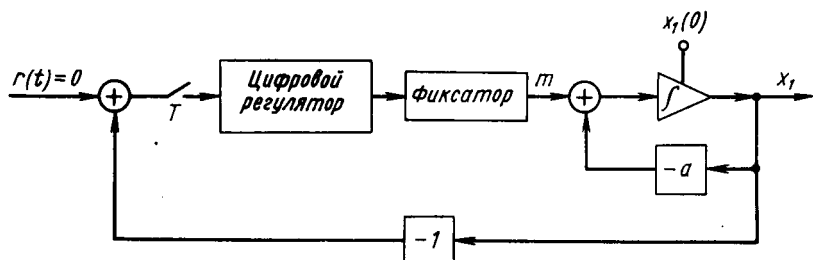


Рис. 8.2—1. Схема в переменных состояния простой цифровой системы управления

Требуется определить оптимальную управляющую последовательность $m^0(k)$, минимизирующую квадратичный показатель качества

$$I_N = \sum_{k=1}^N [x^2(k) + \lambda m^2(k-1)].$$

Задающее воздействие будем считать равным нулю.

Из рассмотрения схемы системы в переменных состояния имеем

$$\varphi(T) = e^{-aT}; \quad h(T) = \frac{b}{a}(1 - e^{-aT}).$$

Уравнение переходных состояний находим в виде

$$x(k+1) = e^{-aT} x(k) + \frac{b}{a} (1 - e^{-aT}) m(k).$$

Так как $Q = 1$ и $P(0) = 0$, то из формулы (8.2—22) следует, что первый коэффициент обратной связи

$$B(1) = \frac{-ab(1 - e^{-aT})e^{-aT}}{b^2(1 - e^{-aT})^2 + a^2\lambda}.$$

Используя формулу (8.2—28), получаем

$$P(1) = \frac{a^2\lambda e^{-2aT}}{a^2\lambda + b^2(1 - e^{-aT})^2}.$$

Подставляя $P(1)$ в формулу (8.2—23), находим второй коэффициент обратной связи:

$$B(2) = \frac{-ae^{-aT}[a^2\lambda(1 + e^{-2aT}) + b^2(1 - e^{-aT})^2]}{b(1 - e^{-aT})[a^2\lambda(1 + e^{-2aT}) + b^2(1 - e^{-aT})^2] + \lambda[a^2\lambda + b^2(1 - e^{-aT})^2]}.$$

Остальные коэффициенты обратной связи $B(3)$, $B(4)$, ..., $B(N)$ могут быть найдены аналогичным путем. Таким образом, оптимальную управляющую последовательность получаем в виде

$$\begin{aligned} m^0(0) &= B(N)x(0); \\ m^0(1) &= B(N-1)x(1); \\ &\dots \dots \dots \\ m^0(N-2) &= B(2)x(N-2); \\ m^0(N-1) &= B(1)x(N-1). \end{aligned}$$

Коэффициенты обратной связи изменяются во времени и система управления является поэтому нестационарной.

Пример 8.2—2. Процесс второго порядка

Рассмотрим процесс второго порядка, характеризуемый дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + ax + bx = m.$$

Задающее воздействие положим равным нулю. Требуется определить оптимальный закон управления, который минимизирует сумму квадратов ошибок системы

$$I_N = \sum_{k=1}^N [e(k)]^2,$$

где $e(k)$ обозначает ошибку системы в момент $t = kT$.

Схема в переменных состояния системы показана на рис. 8.2—2. Пусть x и y — координаты системы; тогда система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y; \\ \dot{y} &= -bx - ay + m, \end{aligned}$$

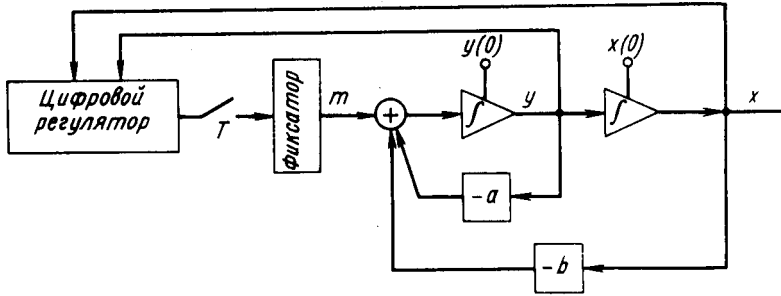


Рис. 8.2—2. Схема в переменных состояния для системы примера 8.2—2

которые эквивалентны векторно-матричному уравнению

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}m,$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ошибка системы e дается уравнением $e = r - x = -x$, так как $r = 0$. Поэтому показатель качества может быть представлен в виде

$$I_N = \sum_{k=1}^N x_k^2,$$

где $x_k = x(kT)$.

Для определения системы часто пользуются дискретным вариантом представления уравнений системы, т. е.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + T y_k; \\ y_{k+1} &= y_k + T(-b x_k - a y_k + m_k). \end{aligned}$$

В данном примере с целью сравнения при определении оптимального закона управления будем пользоваться этими уравнениями дискретной системы вместо уравнений переходных состояний. Пусть $f_N(x_1, y_1)$ обозначает минимум показателя качества I_N . Тогда

$$\begin{aligned} f_N(x_1, y_1) &= \min_{m_k} \sum_{k=1}^N x_k^2; \\ f_1(x_1, y_1) &= \min_{m_1} x_1^2 = x_1^2. \end{aligned}$$

Используя принцип оптимальности, запишем для $N > 1$ соотношение

$$f_N(x_1, y_1) = \min_{m_1} \{x_1^2 + f_{N-1}[x_1 + T y_1, y_1 + T(-b x_1 - a y_1 + m_1)]\}.$$

Предположим, что

$$f_{N-1}(x_1, y_1) = \alpha_{N-1}x_1^2 + \beta_{N-1}x_1y_1 + \gamma_{N-1}y_1^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{N-1}(x_2, y_2) &= \alpha_{N-1}x_2^2 + \beta_{N-1}x_2y_2 + \gamma_{N-1}y_2^2 = \alpha_{N-1}(x_1 + Ty_1)^2 + \\ &+ \beta_{N-1}(x_1 + Ty_1)[y_1 + (-bx_1 - ay_1 + m_1)T] + \gamma_{N-1}[y_1 + \\ &+ (-bx_1 - ay_1 + m_1)T]^2; \\ \frac{\partial [x_1^2 + f_{N-1}]}{\partial m_1} &= \beta_{N-1}(x_1 + Ty_1) + 2\gamma_{N-1}[y_1 + \\ &+ (-bx_1 - ay_1 + m_1)T] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$y_1 + (-bx_1 - ay_1 + m_1)T = -\frac{\beta_{N-1}}{2\gamma_{N-1}}(x_1 + Ty_1).$$

Тогда минимум для I_N получим в виде

$$f_N(x_1, y_1) = x_1^2 + \alpha_{N-1}(x_1 + Ty_1)^2 - \frac{\beta_{N-1}^2}{4\gamma_{N-1}}(x_1 + Ty_1)^2,$$

что можно записать как

$$f_N(x_1, y_1) = \alpha_N x_1^2 + \beta_N x_1 y_1 + \gamma_N y_1^2,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_N &= 1 + \alpha_{N-1} - \frac{\beta_{N-1}^2}{4\gamma_{N-1}}; \\ \beta_N &= 2T\alpha_{N-1} - \frac{T\beta_{N-1}^2}{2\gamma_{N-1}}; \\ \gamma_N &= T^2\alpha_{N-1} - \frac{T^2\beta_{N-1}^2}{4\gamma_{N-1}}. \end{aligned}$$

Так как $f_1(x_1, y_1) = x_1^2$; $\alpha_1 = 1$; $\beta_1 = 0$; $\gamma_1 = 0$, то с помощью приведенных выше рекуррентных соотношений находим, что

$$\alpha_2 = 2, \quad \beta_2 = 2T, \quad \gamma_2 = T^2;$$

$$\alpha_3 = 2, \quad \beta_3 = 2T, \quad \gamma_3 = T^2$$

и вообще

$$\alpha_k = 2, \quad \beta_k = 2T, \quad \gamma_k = T^2.$$

Оптимальный закон управления $m^0(1)$ находим в виде

$$m^0(1) = \frac{2a\gamma_{N-1}T - 2\gamma_{N-1}\beta_{N-1}T}{2\gamma_{N-1}T} y(1) + \frac{2b\gamma_{N-1}T - \beta_{N-1}}{2\gamma_{N-1}T} x(1).$$

Подставляя сюда значения соответствующих величин, приходим к выражению

$$m^0(1) = \left(a - \frac{2}{T}\right) y(1) + \left(b - \frac{1}{T^2}\right) x(1),$$

представляющему оптимальный закон управления в первый дискретный момент времени. Оптимальный закон управления $m^0(j)$ в j -й дискретный момент времени может быть определен аналогичным образом.

Минимум I_N для оставшихся $N - j$ шагов N -шагового процесса исходя из принципа оптимальности можно записать в виде

$$f_{N-j}[x(j+1), y(j+1)] = \min_{\substack{m(j+1) \\ m(j+2) \\ \dots \\ m(N-i)}} \sum_{k=j+1}^N [x(k)]^2 = \\ = \min_{m_{j+1}} \{x_{j+1}^2 + f_{N-j+1}(x_{j+2}, y_{j+2})\}.$$

Используя уравнения дискретной системы, получаем

$$f_{N-j}(x_{j+1}, y_{j+1}) = \min_{m_{j+1}} \{x_{j+1}^2 + f_{N-j+1} \times \\ \times [x_{j+1} + Ty_{j+1}, y_{j+1} + (-bx_{j+1} - ay_{j+1} + m_{j+1})]\}; \\ f_{N-j+1}(x_j, y_j) = \min_{m_j} \{x_j^2 + f_{N-i}[x_j + Ty_j, y_j + (-bx_j - ay_j + m_j)]\}.$$

Пусть теперь

$$f_{N-j}(x_{j+1}, y_{j+1}) = \alpha_{N-j}x_{j+1}^2 + \beta_{N-j}x_{j+1} + \gamma_{N-j}y_{j+1}^2.$$

Используя уравнения дискретной системы, получаем

$$f_{N-j}(x_{j+1}, y_{j+1}) = \alpha_{N-j}(x_j + Ty_j)^2 + \beta_{N-j}(x_j + Ty_j)[y_j + (-bx_j - ay_j + m_j) \times \\ \times T] + \gamma_{N-j}[y_j + (-bx_j - ay_j + m_j)T]^2; \\ \frac{\partial [x_j^2 + f_{N-j}]}{\partial m_j} = \beta_{N-j}(x_j + Ty_j) + 2\gamma_{N-j} \times \\ \times [y_j + (-bx_j - ay_j + m_j)T] = 0.$$

Оптимальный закон управления находим отсюда в виде

$$m_j^0 = \frac{2\gamma_{N-i}(aT-1) - \beta_{N-j}T}{2\gamma_{N-i}T} y_j + \frac{2b\gamma_{N-j}T - \beta_{N-i}}{2\gamma_{N-j}T} x_j.$$

Минимум величины $x_j^2 + f_{N-j}$ равен

$$f_{N-j+1}(x_j, y_j) = x_j^2 + \alpha_{N-j}(x_j + Ty_j)^2 - \frac{\beta_{N-j}^2}{4\gamma_{N-j}}(x_j + Tx_j)^2,$$

причем это выражение можно привести к виду

$$f_{N-j+1}(x_j, y_j) = \alpha_{N-j+1}x_j^2 + \beta_{N-j+1}x_jy_j + \gamma_{N-j+1}y_j^2$$

подстановкой величин

$$\alpha_{N-j+1} = 1 + \alpha_{N-j} - \frac{\beta_{N-j}^2}{4\gamma_{N-j}};$$

$$\beta_{N-j+1} = 2T\alpha_{N-j} - \frac{T\beta_{N-j}^2}{2\gamma_{N-j}};$$

$$\gamma_{N-j+1} = T^2\alpha_{N-j} - \frac{T^2\beta_{N-j}^2}{4\gamma_{N-j}}.$$

Для $j = N - 1$, $N = 1$ находим, что $f_1(x_1, y_1) = x_1^2$ и коэффициенты равны $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$. Используя найденные выше рекуррентные соотношения, получаем

$$\alpha_k = 2; \quad \beta_k = 2T; \quad \gamma_k = T^2.$$

Отсюда приходим к следующему выражению для оптимального закона управления:

$$m^0(j) = \left(a - \frac{2}{T}\right) y(j) + \left(b - \frac{1}{T^2}\right) x(j).$$

Для заданной относительно простой и стационарной системы найденный оптимальный закон управления можно реализовать с помощью регулятора,

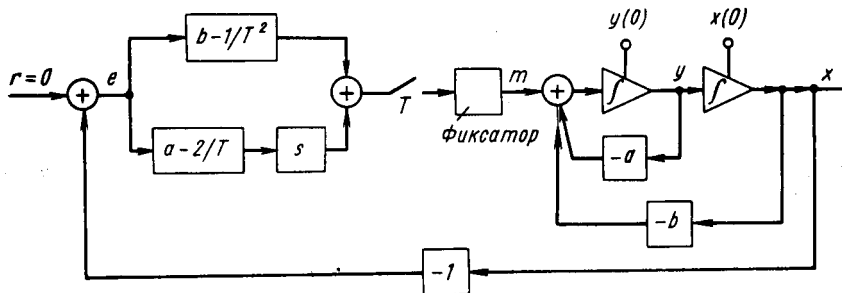


Рис. 8.2—3. К реализации системы управления примера 8.2—2

включенного в прямую цепь контура, как показано на рис. 8.2—3. При этом получаем структуру оптимальной системы, которая может быть получена и при использовании классического подхода.

Для сравнения определим теперь оптимальный закон управления, пользуясь уравнением переходных состояний, которое дает более точное описание динамики дискретных переходов процесса из одного состояния в другое. Показатель качества представим в виде

$$I_N = \sum_{k=1}^N x_k^2 = \sum_{k=1}^N x'(k) Q x(k),$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы Q могут быть определены путем записи этого векторно-матричного выражения в развернутой форме и приравнивания соответству-

ющих коэффициентов, как это было сделано в примере параграфа 2.3. Матрицу перехода и матрицу h находим в виде

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} \frac{\beta e^{-\alpha T} - \alpha e^{-\beta T}}{\beta - \alpha} & \frac{e^{-\alpha T} - e^{-\beta T}}{\beta - \alpha} \\ \frac{\alpha \beta (e^{-\beta T} - e^{-\alpha T})}{\beta - \alpha} & \frac{\beta e^{-\beta T} - \alpha e^{-\alpha T}}{\beta - \alpha} \end{bmatrix};$$

$$h(T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha \beta} \left(1 - \frac{\beta e^{-\alpha T}}{\beta - \alpha} + \frac{\alpha e^{-\beta T}}{\beta - \alpha} \right) \\ \frac{e^{\alpha T} - e^{-\beta T}}{\beta - \alpha} \end{bmatrix},$$

где α и β — корни характеристического уравнения заданного процесса.

Полагая вначале $\mathbf{P}(0) = \mathbf{0}$ и подставляя приведенные выше значения матриц в формулу (8.2—22) при $\lambda = 0$, находим матрицу обратной связи $\mathbf{B}(1)$:

$$\mathbf{B}(1) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha \beta (\alpha e^{-\beta T} - \beta e^{-\alpha T})}{\beta (1 - e^{-\alpha T}) - \alpha (1 - e^{-\beta T})} & \frac{\alpha \beta (e^{-\beta T} - e^{-\alpha T})}{\beta (1 - e^{-\alpha T}) - \alpha (1 - e^{-\beta T})} \end{bmatrix}.$$

Другие матрицы обратной связи, которые в общем случае не равны $\mathbf{B}(1)$, могут быть определены путем многократного использования уравнений (8.2—21) и (8.2—28) при $\lambda = 0$. Интересно отметить, что применение уравнения переходных состояний для дискретного описания процесса ведет к нестационарной оптимальной системе с обратной связью, в то время как использование для этой же цели уравнений дискретных состояний процесса дает стационарную систему.

8.3. УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Процедура расчета оптимальной системы, описанная в предыдущем разделе, была разработана в предположении, что процесс является линейным и стационарным и внешними случайными возмущениями можно пренебречь. Эта процедура в настоящем разделе распространяется на управление линейными и нестационарными процессами при наличии внешних аддитивных случайных воздействий [140, 141а, 144, 145]. При этом предполагается справедливым основное допущение о возможности наблюдения и измерения всех без исключения координат процесса.

Расчет системы начнем с описания процесса векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{m}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (8.3—1)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — n -мерный вектор, представляющий переменные состояния;

$\mathbf{m}(t)$ — r -мерный вектор, представляющий управляющие воздействия;

$\mathbf{p}(t)$ — s -мерный вектор, представляющий внешние случайные воздействия;

$\mathbf{A}(t)$ — матрица размера $n \times n$;

$\mathbf{D}(t)$ — матрица размера $n \times r$.

Обе матрицы \mathbf{A} и \mathbf{D} предполагаются функциями времени, аддитивные воздействия — независимыми случайными процессами с нулевыми средними значениями. Динамика процесса, характеризуемая уравнением (8.3—1), может быть описана с помощью уравнений дискретной системы при использовании основного разностного уравнения

$$x_i(\overline{k+1}T) = x_i(kT) + Tx_{i+1}(kT), \quad (8.3-2)$$

где переменные x_i связаны соотношением $\dot{x}_i = x_{i+1}$, введенным в предыдущем разделе.

Для описания динамики процесса в дискретной форме более часто пользуются уравнением переходных состояний

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{m}(k) + \mathbf{u}(k). \quad (8.3-3)$$

В этом уравнении обозначение периода прерывания T для удобства записи опущено и величины $\Phi(k)$, $\mathbf{G}(k)$ и $\mathbf{u}(k)$ определяются уравнениями (8.1—6), (8.1—7) и (8.1—8) соответственно. В нижеследующем рассмотрении расчет оптимальной системы проводится по критерию качества, определяемому выражением (8.1—9а), которое перепишем здесь еще раз:

$$I_N = \sum_{k=1}^N [\mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \lambda \mathbf{m}'(k-1)\mathbf{H}(k-1)\mathbf{m}(k-1)]. \quad (8.3-4)$$

Расчет системы имеет целью определение оптимального закона управления, минимизирующего статистическое среднее значение показателя качества I_N .

Обозначим минимум ожидаемого среднего значения показателя качества через

$$f_N[\mathbf{x}(0)] = \min_{\mathbf{m}(i)} EI_N = \min_{\substack{\mathbf{m}(0) \\ \mathbf{m}(1) \\ \dots \\ \mathbf{m}(N-1)}} E \left\{ \sum_{k=1}^N [\mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \lambda \mathbf{m}'(k-1) \times \right. \\ \left. \times \mathbf{H}(k-1)\mathbf{m}(k-1)] \right\}, \quad (8.3-5)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где E обозначает оператор усреднения показателя качества по пространству выборок для \mathbf{u} . Это выражение может быть запи-

сано в более общей форме, определяющей минимальное значение показателя качества для последних $N - j$ шагов N -шагового процесса:

$$f_{N-j}[\mathbf{x}(j)] = \min_{\mathbf{m}(i)} EI_{N-j}, \quad i = j, j+1, \dots, N-1;$$

$$f_{N-j}[\mathbf{x}(j)] = \min_{\substack{\mathbf{m}(j) \\ \mathbf{m}(j+1) \\ \dots \\ \mathbf{m}(N-1)}} E \left\{ \sum_{k=j+1}^N [\mathbf{x}'(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \lambda \mathbf{m}'(k-1) \mathbf{H}(k-1) \times \right.$$

$$\left. \times \mathbf{m}(k-1) \right\},$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (8.3-6)$$

Когда $j = 0$, уравнение (8.3-6) сводится к уравнению (8.3-5); так же очевидно, что $f_0[\mathbf{x}(N)] = 0$.

Предположим, теперь, что первые $j - 1$ шагов дают оптимальный выигрыш. Тогда выигрыш от оставшихся $N - j$ шагов равен выигрышу от j -го шага плюс оптимальный выигрыш от оставшихся $N - j + 1$ шагов, т. е.

$$[\mathbf{x}'(j+1) \mathbf{Q}(j+1) \mathbf{x}(j+1) + \lambda \mathbf{m}(j) \mathbf{H}(j) \mathbf{m}(j)] + f_{N-j+1}[\mathbf{x}(j+1)]. \quad (8.3-7)$$

Применяя принцип оптимальности, получаем

$$f_{N-j}[\mathbf{x}(j)] = \min_{\mathbf{m}(j)} E \{ [\mathbf{x}'(j+1) \mathbf{Q}(j+1) \mathbf{x}(j+1) + \lambda \mathbf{m}'(j) \mathbf{H}(j) \times$$

$$\times \mathbf{m}(j)] + f_{N-j+1}[\mathbf{x}(j+1)] \}. \quad (8.3-8)$$

Следуя аргументации, использованной в параграфе 8.2, полагаем, что

$$f_{N-j}[\mathbf{x}(j)] = \mathbf{x}'(j) \mathbf{P}(N-j) \mathbf{x}(j); \quad (8.3-9)$$

$$f_{N-j+1}[\mathbf{x}(j+1)] = \mathbf{x}'(j+1) \mathbf{P}(N-j+1) \mathbf{x}(j+1), \quad (8.3-10)$$

где через \mathbf{P} обозначена положительно определенная симметрическая матрица.

Подставляя выражения (8.3-9) и (8.3-10) в формулу (8.3-8) и обозначая

$$\mathbf{S}(N-j+1) = \mathbf{Q}(j+1) + \mathbf{P}(N-j+1), \quad (8.3-11)$$

получаем

$$\mathbf{x}'(j) \mathbf{P}(N-j) \mathbf{x}(j) = \min_{\mathbf{m}(j)} E \{ (\mathbf{x}'(j+1) [\mathbf{Q}(j+1) + \mathbf{P}(N-j+1)] \times$$

$$\times \mathbf{x}(j+1) + \lambda \mathbf{m}'(j) \mathbf{H}(j) \mathbf{m}(j) \} = \min_{\mathbf{m}(j)} E \{ \mathbf{x}'(j+1) \mathbf{S}(N-j+1) \mathbf{x}(j+1) +$$

$$+ \lambda \mathbf{m}'(j) \mathbf{H}(j) \mathbf{m}(j) \}. \quad (8.3-12)$$

Ожидаемое среднее значение для правой части уравнения (8.3—12) дается выражением

$$J_{N-j} = E \{ \mathbf{x}'(j+1) \mathbf{S}(N-\overline{j+1}) \mathbf{x}(j+1) + \lambda \mathbf{m}'(j) \mathbf{H}(j) \mathbf{m}(j) \}. \quad (8.3-13)$$

Учитывая формулу (8.3—3), предыдущее выражение представим в виде

$$\begin{aligned} J_{N-j} = E \{ & \mathbf{x}'(j) \mathbf{L}_{\varphi\varphi}(N-\overline{j+1}) \mathbf{x}(j) + \mathbf{m}'(j) \mathbf{L}_{G\varphi}(N-\overline{j+1}) \mathbf{x}(j) + \\ & + \mathbf{x}'(j) \mathbf{L}_{\varphi G}(N-\overline{j+1}) \mathbf{m}(j) + \mathbf{m}'(j) [\mathbf{L}_{GG}(N-\overline{j+1}) + \lambda \mathbf{H}(j)] \mathbf{m}(j) + \\ & + [\mathbf{x}'(j) \boldsymbol{\varphi}'(j) + \mathbf{m}'(j) \mathbf{G}'(j)] \mathbf{S}(N-\overline{j+1}) \mathbf{u}(j) + \mathbf{u}'(j) \mathbf{S}(N-\overline{j+1}) [\boldsymbol{\varphi}(j) \times \\ & \times \mathbf{x}(j) + \mathbf{G}(j) \mathbf{m}(j)] + \mathbf{u}'(j) \mathbf{S}(N-\overline{j+1}) \mathbf{u}(j) \}, \quad (8.3-14) \end{aligned}$$

где используются следующие тождества:

$$\mathbf{L}_{\varphi\varphi}(N-\overline{j+1}) \triangleq \boldsymbol{\varphi}'(j) \mathbf{S}(N-\overline{j+1}) \boldsymbol{\varphi}(j); \quad (8.3-15)$$

$$\mathbf{L}_{GG}(N-\overline{j+1}) \triangleq \mathbf{G}'(j) \mathbf{S}(N-\overline{j+1}) \mathbf{G}(j) \quad (8.3-16)$$

$$\mathbf{L}_{G\varphi}(N-\overline{j+1}) \triangleq \mathbf{G}'(j) \mathbf{S}(N-\overline{j+1}) \boldsymbol{\varphi}(j); \quad (8.3-17)$$

$$\mathbf{L}_{\varphi G}(N-\overline{j+1}) \triangleq \boldsymbol{\varphi}'(j) \mathbf{S}(N-\overline{j+1}) \mathbf{G}(j) \quad (8.3-18)$$

Поскольку вектор $\mathbf{u}(j)$ представляет независимые случайные переменные, то уравнение (8.3—14) может быть упрощено:

$$\begin{aligned} J_{N-j} = & \mathbf{x}'(j) \mathbf{L}_{\varphi\varphi}(N-\overline{j+1}) \mathbf{x}(j) + \mathbf{m}'(j) \mathbf{L}_{G\varphi}(N-\overline{j+1}) \mathbf{x}(j) + \mathbf{x}'(j) \times \\ & \times \mathbf{L}_{\varphi G}(N-\overline{j+1}) \mathbf{m}(j) + \mathbf{m}'(j) [\mathbf{L}_{GG}(N-\overline{j+1}) + \lambda \mathbf{H}(j)] \mathbf{m}(j) + \\ & + E \{ \mathbf{u}'(j) \mathbf{S}(N-\overline{j+1}) \mathbf{u}(j) \}. \quad (8.3-19) \end{aligned}$$

Теперь минимизация J_{N-j} может быть легко выполнена при использовании стандартной процедуры дифференцирования, так как N -шаговый процесс решения заменен последовательностью из N одношаговых процессов. Дифференцируя по $\mathbf{m}(j)$ выражение (8.3—19) и используя симметричность матриц, получаем

$$\frac{dJ_{N-j}}{d\mathbf{m}(j)} = 2\mathbf{L}_{G\varphi}(N-\overline{j+1}) \mathbf{x}(j) + 2[\mathbf{L}_{GG}(N-\overline{j+1}) + \lambda \mathbf{H}(j)] \mathbf{m}(j). \quad (8.3-20)$$

Приравняв производную нулю и решая относительно $\mathbf{m}(j)$, находим оптимальный закон управления в виде

$$\mathbf{m}^0(j) = \mathbf{B}(N-j) \mathbf{x}(j), \quad (8.3-21)$$

где

$$\mathbf{B}(N-j) = [\mathbf{L}_{GG}(N-\overline{j+1}) + \lambda \mathbf{H}(j)]^{-1} \mathbf{L}_{G\varphi}(N-\overline{j+1}) \quad (8.3-22)$$

— матрица обратной связи, зависящая от времени. Оптимальный закон управления является линейной функцией координат состояния системы. Так как матрица \mathbf{B} определена в формуле (8.3—22) через матрицу \mathbf{P} , то оптимальный закон управления остается все еще не определенным, пока неизвестна матрица \mathbf{P} .

Из уравнений (8.3—12) и (8.3—21) может быть получено рекуррентное соотношение, связывающее матрицы \mathbf{P} и \mathbf{B} , которое совместно с уравнением (8.3—22) определяет вычислительный алгоритм для нахождения матрицы обратной связи $\mathbf{B}(N-j)$.

Подставляя выражение (8.3—21) в формулу (8.3—12) и используя соотношение (8.3—19), находим искомый минимум в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(j)\mathbf{P}(N-j)\mathbf{x}(j) &= \mathbf{x}'(j)\mathbf{L}_{\Phi\Phi}(N-\overline{j+1})\mathbf{x}(j) + [\mathbf{B}(N-j)\mathbf{x}(j)]' \times \\ &\times \mathbf{L}_{G\Phi}(N-\overline{j+1})\mathbf{x}(j) + \mathbf{x}'(j)\mathbf{L}_{\Phi G}(N-\overline{j+1})[\mathbf{B}(N-j)\mathbf{x}(j)] + [\mathbf{B}(N-j) \times \\ &\times \mathbf{x}(j)]'[\mathbf{L}_{GG}(N-\overline{j+1}) + \lambda\mathbf{H}(j)][\mathbf{B}(N-j)\mathbf{x}(j)] + \min_m E\{\mathbf{u}'(j)\mathbf{S}(N-\overline{j+1}) \times \\ &\times \mathbf{u}(j)\} = \mathbf{x}'(j)\mathbf{L}_{\Phi\Phi}(N-\overline{j+1})\mathbf{x}(j) + \mathbf{x}'(j)\mathbf{B}'(N-j)\mathbf{L}_{G\Phi}(N-\overline{j+1})\mathbf{x}(j) + \\ &+ \mathbf{x}'(j)\mathbf{L}_{\Phi G}(N-\overline{j+1})\mathbf{B}(N-j)\mathbf{x}(j) + \mathbf{x}'(j)\mathbf{B}'(N-j)[\mathbf{L}_{GG}(N-\overline{j+1}) + \\ &+ \lambda\mathbf{H}(j)]\mathbf{B}(N-j)\mathbf{x}(j) + \min_m E\{\mathbf{u}'(j)\mathbf{S}(N-\overline{j+1})\mathbf{u}(j)\}. \quad (8.3-23) \end{aligned}$$

Учитывая соотношение (8.3—22), приведем предыдущее уравнение к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(j)\mathbf{P}(N-j)\mathbf{x}(j) &= \mathbf{x}'(j)[\mathbf{L}_{\Phi\Phi}(N-\overline{j+1}) + \mathbf{L}_{\Phi G}(N-\overline{j+1}) \times \\ &\times \mathbf{B}(N-j)]\mathbf{x}(j) \min_m E\{\mathbf{u}'(j)\mathbf{S}(N-\overline{j+1})\mathbf{u}(j)\} \quad (8.3-24) \end{aligned}$$

Поскольку \mathbf{Q} и \mathbf{P} — положительно определенные матрицы, то согласно выражению (8.3—11) матрица \mathbf{S} является также положительно определенной. Минимум ожидаемого среднего значения $\mathbf{u}'(j)\mathbf{S}(N-\overline{j+1})\mathbf{u}(j)$ в выражении (8.3—24) может быть принят равным нулю. В этом случае формула (8.3—24) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(j)\mathbf{P}(N-j)\mathbf{x}(j) &= \mathbf{x}'(j)[\mathbf{L}_{\Phi\Phi}(N-\overline{j+1}) + \mathbf{L}_{\Phi G}(N-\overline{j+1}) \times \\ &\times \mathbf{B}(N-j)]\mathbf{x}(j) \quad (8.3-25) \end{aligned}$$

Сравнивая обе части предыдущего уравнения, находим

$$\mathbf{P}(N-j) = \mathbf{L}_{\Phi\Phi}(N-\overline{j+1}) + \mathbf{L}_{\Phi G}(N-\overline{j+1})\mathbf{B}(N-j). \quad (8.3-26)$$

Полагая вначале $\mathbf{P}(0) = 0$ для $j = N-1$, из выражения (8.3—22) находим значение матрицы обратной связи в первый дискретный момент времени:

$$\mathbf{B}(1) = -[\mathbf{L}_{GG}(0) + \lambda\mathbf{H}(N-1)]^{-1}\mathbf{L}_{G\Phi}(0) \quad (8.3-27)$$

и из формулы (8.3—26) значение матрицы $\mathbf{P}(1)$:

$$\mathbf{P}(1) = \mathbf{L}_{\varphi\varphi}(0) + \mathbf{L}_{\varphi G}(0)\mathbf{B}(1), \quad (8.3—28)$$

где

$$\mathbf{L}_{\varphi\varphi}(0) = \varphi'(N-1)\mathbf{Q}(N)\varphi(N-1); \quad (8.3—29)$$

$$\mathbf{L}_{\varphi G}(0) = \varphi'(N-1)\mathbf{Q}(N)\mathbf{G}(N-1). \quad (8.3—30)$$

Для $j = N - 2$ уравнение (8.3—22) дает матрицу $\mathbf{B}(2)$ и формула (8.3—26) определяет $\mathbf{P}(2)$. Аналогичным путем могут быть найдены последовательно матрицы $\mathbf{B}(3)$, $\mathbf{P}(3)$, $\mathbf{B}(4)$, $\mathbf{P}(4)$ и т. д.

Рекуррентные соотношения (8.3—22) и (8.3—26) определяют вычислительный алгоритм для нахождения оптимального закона управления. Эти два рекуррентных соотношения показывают, что, хотя управляемый процесс является стационарным, результирующая система с обратной связью оказывается нестационарной, так как матрица обратной связи $\mathbf{B}(N - j)$ изменяется во времени. Когда показатель качества вместо формулы (8.3—4) задается выражением (8.1—9б), оптимальный закон управления может быть определен аналогичным образом. В цифровой системе описанный вычислительный алгоритм реализуется с помощью ЭЦВМ системы, которая в этом случае генерирует управляющую последовательность, оптимальную в смысле заданного критерия качества.

Суммируя изложенное, отметим два важных свойства оптимального закона управления.

1. Вектор оптимального управления $\mathbf{m}^0(j)$ связан с вектором состояния $\mathbf{x}(j)$ процесса линейным соотношением

$$\mathbf{m}^0(j) = \mathbf{B}(N - j)\mathbf{x}(j). \quad (8.3—31)$$

Матрица обратной связи $\mathbf{B}(N - j)$ в общем случае изменяется во времени.

2. Если управление осуществляется при наличии аддитивных независимых случайных возмущений и используется закон оптимального управления, определяемый выражением (8.3—31), то система управления по-прежнему остается оптимальной в смысле критерия минимума статистического среднего значения квадратичного показателя качества.

Пример 8.3—1. Управление процессом при наличии случайных возмущений [145]

Рассмотрим простую систему управления, включающую электродвигатель постоянного тока с нагрузкой. Эта система характеризуется передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Со стороны входа система подвергается возмущающим воздействиям. Спектральная плотность возмущений равна

$$S_1(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 4}.$$

Входное воздействие системы предполагается в виде ступенчатой функции, на которую наложена помеха, представляющая собой независимое возмущение со спектральной плотностью

$$S_2(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 0,25}.$$

Амплитуда ступенчатого воздействия может иметь любое значение в интервале $-\pi$ и $+\pi$. Период прерывания для этой системы равен 0,5 сек. Требуется

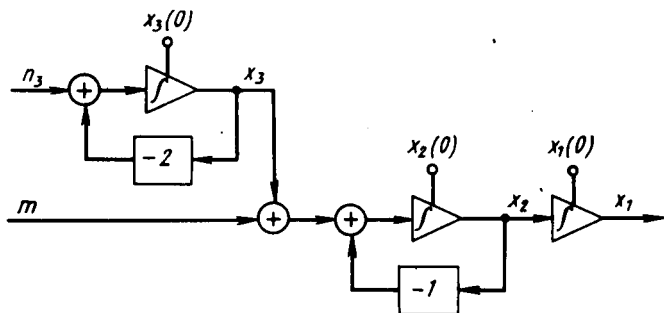


Рис. 8.3—1. Схема в переменных состояния для процесса и возмущающего воздействия

определить закон оптимального управления $m^0(kT)$, минимизирующий показатель качества

$$J_N = E \sum_{k=1}^N [x_1(kT) - x_4(kT)]^2,$$

где x_1 и x_4 являются соответственно выходом и входом системы.

Исходя из хорошо известных положений теории случайных процессов, легко показать, что случайные возмущения на входе системы можно рассматривать как выход линейного фильтра с передаточной функцией

$$G_{n3}(s) = \frac{1}{s + 2},$$

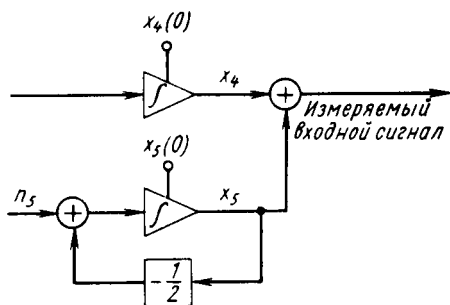
на вход которого поступает помеха типа белого шума со спектральной плотностью, равной единице. Схема системы в переменных состояния показана на рис. 8.3—1, на которой x_3 — координата входа системы и n_3 — белый шум со спектральной плотностью, равной 1.

Схема в переменных состояния входного элемента — формирующего фильтра, показана на рис. 8.3—2. Ступенчатое входное воздействие формируется как выход интегратора. Помеху, наложенную на входное воздействие, можно рассматривать как результат прохождения белого шума через линейный фильтр с передаточной функцией

$$G_{n5}(s) = \frac{1}{s + 0,5}.$$

На рис. 8.3—2 n_5 обозначает белый шум со спектральной плотностью, равной 1.

Обозначим через x_1, x_2, \dots, x_5 -компоненты вектора состояния x и через n_1, n_2, \dots, n_5 -компоненты вектора возмущений p . Тогда система может быть описана векторно-матричным дифференциальным уравнением



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + d m(t) + p(t),$$

в котором матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

Так как имеется одно единственное управляющее воздействие и $x_2 = -x_2 + x_3 + m$, то матрица управления d является матрицей-столбцом:

Рис. 8.3—2. Схема в переменных состояния для входных элементов

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из рассмотрения рис. 8.3—1 и 8.3—2 находим вектор возмущений в виде

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_3 \\ 0 \\ n_5 \end{bmatrix}.$$

Обращаясь к рис. 8.3—1, находим, что для $T = 0,5$ сек матрица перехода равна

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0,3\bar{6}3 & 0,077 & 0 & 0 \\ 0 & 0,607 & 0,239 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,779 \end{bmatrix}.$$

Матрицу $G(kT)$ определяем из уравнения (8.1—7). Так как матрицы A и d не зависят от времени, то и $G(kT)$ также не зависит от времени и остается постоянной:

$$G(kT) = \begin{bmatrix} 0,107 \\ 0,393 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Заданный показатель качества можно записать в виде

$$J_N = E \sum_{k=1}^N x'(kT) Q x(kT),$$

где $x'(kT) Q x(kT) = \{x_1(kT) - x_4(kT)\}^2$ и

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для определения оптимального закона управления воспользуемся уравнениями (8.3—22) и (8.3—26). Из этих уравнений находим, что для $0 \leq k \leq N$ матрица обратной связи B равна

$$B = [-9,346 \quad -3,373 \quad -0,720 \quad 9,346 \quad 0].$$

Отсюда, используя выражение (8.3—21), находим оптимальное управляющее воздействие, минимизирующее заданный показатель качества:

$$m^0(kT) = 9,346 \{x_4(kT) - x_1(kT)\} - 3,673x_2(kT) - 0,720x_3(kT).$$

К сожалению, полученный закон управления физически не реализуем, так как координата x_4 загрязнена шумом и поэтому не поддается измерению; координата x_3 является фиктивной, введенной только для удобства описания возмущения, и также не может быть измерена непосредственно. Полное решение задачи рассматривается в следующих разделах. Заметим, что этот пример иллюстрирует идею введения в рассмотрение координат входа и увеличения размерности системы. С целью унификации для описания входных воздействий и возмущений вводятся дополнительные переменные состояния и вместо исходной системы рассматривается система, описываемая большим числом координат.

8.4. МНОГОМЕРНЫЙ ПРОЦЕСС С КООРДИНАТАМИ, НЕДОСТУПНЫМИ ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЯ И ИЗМЕРЕНИЯ

В предыдущих разделах построение оптимального управления проводилось в предположении, что все координаты процесса доступны для наблюдения и измерения. Было найдено, что оптимальный закон управления является линейной функцией координат процесса. Однако на практике часто встречаются процессы, в которых некоторые координаты недоступны для измерения и наблюдения. В этих случаях только выходные сигналы могут быть измерены непосредственно. Например, не поддаются непосредственному измерению некоторые параметры химического процесса, такие как скорость реакции, характеризующие химический реактор. В задаче управления посадкой самолета, рассмотренной в параграфе 1.3, было указано, что вторая и третья производные высоты h недоступны для прямого измерения. Настоящий параграф посвящен оптимальному управлению много-

мерными процессами с координатами, недоступными для измерения [82, 141, 144, 145].

На практике часто не все координаты состояния управляемого процесса допускают непосредственное измерение. Измеримые координаты часто относят к выходным переменным и обозначают через y_1, y_2, \dots, y_p , считая их компонентами вектора выхода y . В последующем рассмотрении предполагается, что выходные переменные являются линейными функциями координат состояния, т. е. связаны с последними линейным преобразованием

$$y(k) = Mx(k), \quad (8.4-1)$$

где x — n -мерный вектор;

y — p -мерный вектор;

M — матрица размера $p \times n$ с $p \leq n$.

В том случае, когда размерность вектора выхода меньше размерности вектора состояния, матрица M является прямоугольной и не имеет обратной матрицы. Матрицу M условимся называть *матрицей выхода* или *матрицей измеримых переменных*. Согласно рассмотренной выше процедуре синтеза оптимальное управляющее воздействие $m^0(k)$ находится в виде функции координат процесса, которые в конечном счете выступают как сигналы в цепях обратной связи системы управления. Следовательно, если некоторые координаты процесса недоступны для измерения, то оптимальное управляющее воздействие $m^0(k)$ будет оставаться не определенным и физически не реализуемым.

В этой ситуации основная задача построения оптимальной системы состоит в определении физически реализуемого оптимального управляющего воздействия при использовании измеренных значений $y(k), y(k-1), \dots, y(0)$ вектора выхода. Ниже доказывается, что для линейной системы, характеризуемой уравнением переходных состояний (8.3—3), вектор реализуемого управления, минимизирующего ожидаемое среднее значение показателя качества, который определяется выражением (8.3—4), дается формулой

$$\hat{m}^0(k/k) = B(N-k)\hat{x}(k/k), \quad (8.4-2)$$

где $B(N-k)$ — матрица обратной связи, определенная в предыдущих разделах, и $\hat{x}(k/j)$ — оценка вектора состояния $x(k)$, использующая измеренные значения $y(j), y(j-1), \dots, y(0)$ вектора выхода, оптимальная в том смысле, что ожидаемое среднее значение

$$E \{ [x(k) - \hat{x}(k/j)]' [x(k) - \hat{x}(k/j)] \} \quad (8.4-3)$$

минимально. Определение матрицы обратной связи B и нахождение наилучшей оценки \hat{x} может выполняться независимо.

Представим теперь вектор состояния $x(k)$ в виде суммы его ортогональной проекции $\hat{x}(k/k)$ на подпространство $Y(j)$ и его нормальной компоненты $\tilde{x}(k/k)$:

$$x(k) = \hat{x}(k/k) + \tilde{x}(k/k). \quad (8.4-4)$$

$Y(j)$ является подпространством $X(k)$, если $j \leq k$.

В аналогичной форме может быть представлен вектор оптимального управления $m^0(k)$:

$$m^0(k) = \hat{m}^0(k/k) + \tilde{m}^0(k/k), \quad (8.4-5)$$

где $\hat{m}^0(k/k)$ и $\tilde{m}^0(k/k)$ обозначают соответственно ортогональную проекцию вектора $m^0(k)$ на подпространство $Y(j)$ и нормальную компоненту. Уравнения (8.4-4) и (8.4-5) учитывают свойства ортогональной проекции, рассмотренные в параграфе 2.2. Выше было показано, что когда все координаты состояния являются измеримыми, закон управления линейным процессом, оптимальный в смысле квадратичного критерия качества, определяется выражением

$$m^0(k) = B(N-k)x(k). \quad (8.4-6)$$

Комбинируя уравнения (8.4-4), (8.4-5) и (8.4-6), получаем

$$\hat{m}^0(k/k) + \tilde{m}^0(k/k) = B(N-k)\hat{x}(k/k) + B(N-k)\tilde{x}(k/k). \quad (8.4-7)$$

Из уравнения (8.4-7), используя основные свойства ортогональной проекции, находим

$$\hat{m}^0(k/k) = B(N-k)\hat{x}(k/k). \quad (8.4-8)$$

$$\tilde{m}^0(k/k) = B(N-k)\tilde{x}(k/k). \quad (8.4-9)$$

Ортогональная проекция $\hat{m}^0(k/k)$, которая является наилучшей оценкой для $m^0(k)$, связана линейно с наилучшей оценкой для $x(k)$. Нормальная компонента вектора $\hat{m}^0(k)$ представляет собой ошибку оценки. Заметим, что оценка $m^0(k/k)$ физически реализуема, так как является функцией оценки $\hat{x}(k/k)$, которая может быть определена по измерениям выходных сигналов. Попытаемся теперь показать, что когда вместо вектора оптимального управления $m^0(k)$ используется его наилучшая оценка и качество системы определяется по минимуму среднего значения I_N , выражение (8.4-2) описывает оптимальный закон управления. Короче говоря, требуется показать, что оптимальная оценка $\hat{m}^0(k/k)$ минимизирует ошибку, вызванную подстановкой оценок вместо необходимых управляющих воздействий.

Обращаясь к показателю качества, определенному выражением (8.3-4), заметим, что минимум ожидаемого среднего зна-

чения I_N зависит только от числа шагов N и начального состояния $\mathbf{x}(0)$. Обозначим минимум ожидаемого среднего значения I_N через

$$f_N[\mathbf{x}(0)] = \min_{\mathbf{m}(j)} EI_N, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (8.4-10)$$

Используя выражение (8.3-4), получаем

$$f_N[\mathbf{x}(0)] = \min_{\mathbf{m}(j)} E \left\{ \sum_{k=1}^N [\mathbf{x}'(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \lambda \mathbf{m}'(k-1) \mathbf{H}(k-1) \mathbf{m}(k-1)] \right\}. \quad (8.4-11)$$

Очевидно, что когда $\mathbf{m}(j) = \mathbf{m}^0(j)$, то $EI_N = f_N$ и $EI_N - f_N = 0$. Однако, когда $\mathbf{m}(k) \neq \mathbf{m}^0(k)$, то $EI_N - f_N > 0$; т. е. вводится ошибка, так как по определению f_N является минимумом для EI_N . Следовательно, задача состоит в определении оценки для $\mathbf{m}^0(k)$, минимизирующей ошибку $EI_N - f_N$, обусловленную нереализуемостью $\mathbf{m}^0(k)$. Эту оценку назовем наилучшей оценкой. Интересно отметить, что наилучшая оценка дается ортогональной проекцией $\hat{\mathbf{m}}(k/k)$, и поэтому уравнение (8.4-2) определяет оптимальный закон управления для процессов с координатами, недоступными для измерения.

Применяя принцип оптимальности, минимальное значение $f_N[\mathbf{x}(0)]$ для N -шагового процесса управления с $N > 1$ можно записать в виде

$$f_N[\mathbf{x}(0)] = \min_{\mathbf{m}(0)} E \{ \mathbf{x}'(1) \mathbf{Q}(1) \mathbf{x}(1) + \lambda \mathbf{m}'(0) \mathbf{H}(0) \mathbf{m}(0) + f_{N-1}[\mathbf{x}(1)] \}, \quad (8.4-12)$$

где связь между $\mathbf{x}(1)$ и $\mathbf{m}(0)$ дается уравнением (8.3-3).

Для $N = 1$ минимум равен

$$f_1[\mathbf{x}(0)] = \min_{\mathbf{m}(0)} E \{ \mathbf{x}'(1) \mathbf{Q}(1) \mathbf{x}(1) + \lambda \mathbf{m}'(0) \mathbf{H}(0) \mathbf{m}(0) \}. \quad (8.4-13)$$

Утверждение о том, что оценка $\hat{\mathbf{m}}(k/k)$ является оптимальной в том смысле, что она минимизирует $EI_N - f_N$, можно проверить с помощью уравнений (8.4-12) и (8.4-13), подставляя $N = 1, 2, \dots$

Для одношагового процесса показатель качества сводится к выражению

$$I_1 = \mathbf{x}'(1) \mathbf{Q}(1) \mathbf{x}(1) + \lambda \mathbf{m}'(0) \mathbf{H}(0) \mathbf{m}(0). \quad (8.4-14)$$

Так как согласно формуле (8.3-3)

$$\mathbf{x}(1) = \Phi(0) \mathbf{x}(0) + \mathbf{G}(0) \mathbf{m}(0) + \mathbf{u}(0), \quad (8.4-15)$$

то показатель качества I_1 дается выражением

$$I_1 = [\varphi(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}(0)\mathbf{m}(0) + \mathbf{u}(0)]' \mathbf{Q}(1) [\varphi(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}(0)\mathbf{m}(0) + \mathbf{u}(0)] + \lambda \mathbf{m}'(0) \mathbf{H}(0) \mathbf{m}(0). \quad (8.4-16)$$

Преобразуя правую часть уравнения (8.4—16) и опуская аргументы, получаем

$$I_1 = \mathbf{x}\varphi' \mathbf{Q}(1) \varphi \mathbf{x} + \mathbf{m} [\mathbf{G}\mathbf{Q}'(1)\mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}(0)] \mathbf{m} + \mathbf{u}' \mathbf{Q}(1) \mathbf{u} + 2\mathbf{x}'\varphi' \mathbf{Q}(1) \mathbf{G}\mathbf{m} + 2\mathbf{u}' \mathbf{Q}(1) \mathbf{G}\mathbf{m} + 2\mathbf{x}'\varphi' \mathbf{Q}(1) \mathbf{u}. \quad (8.4-17)$$

При выводе уравнения (8.4—17) мы использовали симметричность матриц \mathbf{Q} и \mathbf{H} .

Ожидаемое среднее значение I_1 равно

$$J_1 = EI_1 = \mathbf{x}'\varphi' \mathbf{Q}(1) \varphi \mathbf{x} + \mathbf{m}' [\mathbf{G}' \mathbf{Q}(1) \mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}(0)] \mathbf{m} + 2\mathbf{x}'\varphi' \mathbf{Q}(1) \mathbf{G}\mathbf{m} + E \{\mathbf{u}' \mathbf{Q}(1) \mathbf{u}\}. \quad (8.4-18)$$

Величина J_1 имеет минимальное значение, когда частная производная от J_1 по $\mathbf{m}(0)$ равна нулю. Отсюда

$$\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{m}} = 2 [\lambda \mathbf{H}(0) + \mathbf{G}' \mathbf{Q}(1) \mathbf{G}] \mathbf{m} + 2 [\mathbf{G}' \mathbf{Q}(1) \varphi] \mathbf{x} \quad (8.4-19)$$

и

$$[\lambda \mathbf{H}(0) + \mathbf{G}' \mathbf{Q}(1) \mathbf{G}] \mathbf{m}^0 = -[\mathbf{G}' \mathbf{Q}(1) \varphi] \mathbf{x}, \quad (8.4-20)$$

где \mathbf{m}^0 — минимизирующий вектор управления. Минимальное значение для J_1 находим в виде

$$\begin{aligned} f_2 = \mathbf{x}'\varphi' \mathbf{Q}(1) \varphi \mathbf{x} + \mathbf{m}^0' [\mathbf{G}' \mathbf{Q}(1) \mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}(0)] \mathbf{m}^0 + \\ + 2\mathbf{x}'\varphi' \mathbf{Q}(1) \mathbf{G}\mathbf{m}^0 + E \{\mathbf{u}' \mathbf{Q}(1) \mathbf{u}\}. \end{aligned} \quad (8.4-21)$$

Разность между EI_1 и f_1 равна

$$\begin{aligned} EI_1 - f_1 = \mathbf{m}' [\mathbf{G}\mathbf{Q}'(1)\mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}(0)] \mathbf{m} + \mathbf{m}^0' [\mathbf{G}' \mathbf{Q}(1) \mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}(0)] \mathbf{m}^0 + \\ + 2\mathbf{x}'\varphi' \mathbf{Q}(1) \mathbf{G}(\mathbf{m} - \mathbf{m}^0). \end{aligned} \quad (8.4-22)$$

Третье слагаемое суммы в правой части уравнения (8.4—22), учитывая симметричность матрицы \mathbf{Q} , можно записать как

$$\mathbf{x}'\varphi' \mathbf{Q}(1) \mathbf{G}(\mathbf{m} - \mathbf{m}^0) = (\mathbf{m} - \mathbf{m}^0)' \mathbf{G}' \mathbf{Q}(1) \varphi \mathbf{x}. \quad (8.4-23)$$

Используя формулу (8.4—20) и группируя соответствующим образом члены уравнения (8.4—22), приходим к выражению

$$EI_1 - f_1 = (\mathbf{m} - \mathbf{m}^0)' [\mathbf{G}' \mathbf{Q}(1) \mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}(0)] (\mathbf{m} - \mathbf{m}^0). \quad (8.4-24)$$

Из этого уравнения следует, что $f_1 = EI_1$, когда $\mathbf{m} = \mathbf{m}^0$. Заменяя в формуле (8.4—24) \mathbf{m} на $\hat{\mathbf{m}} + \tilde{\mathbf{m}}$ и \mathbf{m}^0 на $\hat{\mathbf{m}}^0 + \tilde{\mathbf{m}}^0$,

получаем разность в виде

$$EI_1 - f_1 = (\hat{m} - \hat{m}^0)' [G'Q(1)G + \lambda H(0)] (\hat{m} - \hat{m}^0) + (\tilde{m} - \tilde{m}^0)' \times \\ \times [G'Q(1)G + \lambda H(0)] (\tilde{m} - \tilde{m}^0) + 2(\hat{m} - \hat{m}^0) \times \\ \times [G'Q(1)G + \lambda H(0)] (\tilde{m} - \tilde{m}^0). \quad (8.4-25)$$

Таким образом, мы представили разность $EI_1 - f_1$ в виде функции \hat{m} и \tilde{m} . Для определения минимума $EI_1 - f_1$ необходимо продифференцировать эту разность по \hat{m} и \tilde{m} и приравнять частные производные нулю. Это приводит к следующему условию для минимума ошибки:

$$2[G'Q(1)G + \lambda H(0)] [(\hat{m} - \hat{m}^0) + (\tilde{m} - \tilde{m}^0)] = 0, \quad (8.4-26)$$

где $[G'Q(1)G + \lambda H(0)]$ — невырожденная матрица.

Из уравнения (8.4-26) следует, что $EI_1 - f_1$ принимает минимальное значение, если

$$\hat{m} = \hat{m}^0 \text{ и } \tilde{m} = \tilde{m}^0. \quad (8.4-27)$$

Этим завершается доказательство для одношагового процесса.

Рассмотрим теперь двухшаговый процесс. Минимум показателя качества можно записать в виде

$$f_2[x(0)] = \min_{m(0)} E \{x'(1)Q(1)x(1) + \lambda m'(0)H(0)m(0) + f_1[x(1)]\}, \quad (8.4-28)$$

Из уравнения (8.4-20) находим минимизирующий вектор управления в виде

$$m^0 = -[G'Q(1)G + \lambda H(0)]^{-1} [G'Q(1)\varphi] x. \quad (8.4-29)$$

Подставляя m^0 в формулу (8.4-21) и произведя упрощения, получаем

$$f_1[x(0)] = x'(0)R(0)x(0) + E\{u'(0)Q(1)u(0)\}, \quad (8.4-30)$$

где

$$R(0) = \varphi'(0)Q(1)\varphi(0) - [\varphi'(0)Q(1)G(0)] [G'(0)Q(1)G(0) + \\ + \lambda H(0)]^{-1} [G'(0)Q(1)\varphi(0)]. \quad (8.4-31)$$

Используя уравнение (8.4-30), получаем

$$f_2[x(0)] = \min_{m(0)} E \{x'(1)S(1)x(1) + \lambda m'(0)H(0)m(0) + u(1)Q(2)u(1)\}, \quad (8.4-32)$$

где

$$S(1) = Q(1) + R(1). \quad (8.4-33)$$

Пусть

$$I_2 = \mathbf{x}'(1)\mathbf{S}(1)\mathbf{x}(1) + \lambda \mathbf{m}'(0)\mathbf{H}(0)\mathbf{m}(0) + \mathbf{u}'(1)\mathbf{Q}(2)\mathbf{u}(1). \quad (8.4-34)$$

Легко показать, что ожидаемое среднее значение I_2 равно

$$J_2 = EI_2 = \mathbf{x}'\boldsymbol{\varphi}'\mathbf{S}(1)\boldsymbol{\varphi}\mathbf{x} + \mathbf{m}'[\mathbf{G}'\mathbf{S}(1)\mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}(0)]\mathbf{m} + 2\mathbf{x}'\boldsymbol{\varphi}'\mathbf{S}'(1)\mathbf{G}\mathbf{m} + E\{\mathbf{u}'\mathbf{S}(1)\mathbf{u}\} + E\{\mathbf{u}'(1)\mathbf{Q}(2)\mathbf{u}(1)\}. \quad (8.4-35)$$

Используя известные правила минимизации, приходим к следующему условию минимума EI_2 :

$$[\mathbf{G}'\mathbf{S}(1)\mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}(0)]\mathbf{m}^0 = -[\mathbf{G}'\mathbf{S}(1)\boldsymbol{\varphi}]\mathbf{x}. \quad (8.4-36)$$

Минимум для J_2 находим в виде

$$f_2 = \mathbf{x}'\boldsymbol{\varphi}'\mathbf{S}(1)\boldsymbol{\varphi}\mathbf{x} + \mathbf{m}^{0'}[\mathbf{G}'\mathbf{S}(1)\mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}(0)]\mathbf{m}^0 + 2\mathbf{x}'\boldsymbol{\varphi}'\mathbf{S}'(1)\mathbf{G}\mathbf{m}^0 + E\{\mathbf{u}'\mathbf{S}(1)\mathbf{u}\} + E\{\mathbf{u}'(1)\mathbf{Q}(2)\mathbf{u}(1)\} \quad (8.4-37)$$

Вычитая выражение (8.4-37) из соотношения (8.4-35), получаем разность $EI_2 - f_2$ в виде

$$EI_2 - f_2 = \mathbf{m}'[\mathbf{G}'\mathbf{S}(1)\mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}(0)]\mathbf{m} + \mathbf{m}^{0'}[\mathbf{G}'\mathbf{S}(1)\mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}(0)]\mathbf{m}^0 + 2\mathbf{x}'\boldsymbol{\varphi}'\mathbf{S}'(1)\mathbf{G}(\mathbf{m} - \mathbf{m}^0), \quad (8.4-38)$$

что после упрощения можно также записать как

$$EI_2 - f_2 = (\mathbf{m} - \mathbf{m}^0)'[\mathbf{G}\mathbf{S}(1)\mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}(0)](\mathbf{m} - \mathbf{m}^0). \quad (8.4-39)$$

Так как это выражение по своей форме совпадает с выражением (8.4-24), то из предыдущего следует, что при использовании наилучшей оценки $\hat{\mathbf{m}}^0(k/k)$ разность $EI_2 - f_2$ принимает минимальное значение. На этом заканчивается доказательство для двухшагового процесса управления. Более подробно доказательство дано в работе [140].

Из изложенного следует, что оптимальное управление многомерными процессами с координатами состояния, недоступными для прямого измерения, требует определения наилучшей оценки для всех координат по измерениям выходных переменных. Поэтому оптимальная многомерная система цифрового управления содержит алгоритм оптимальной оценки координат и оптимальный регулятор, как показано на рис. 8.4-1.

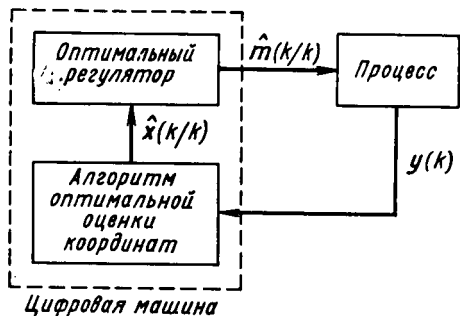


Рис. 8.4-1. Схема цифровой системы управления

В такой системе регулятор используется для формирования оптимального закона управления по результатам полученных оценок координат. Разработка алгоритма оценки координат и проектирование оптимального регулятора могут быть проведены независимо друг от друга. Цифровая машина в системе управления может быть использована одновременно как для вычисления оптимальных оценок координат, так и формирования оптимального закона управления.

Пример 8.4—1. Управление процессом с координатами, недоступными для измерения

Рассмотрим систему примера 8.3—1. Предполагается, что координата x_1 может быть измерена непосредственно, а измерение координаты x_2 сопровождается случайной ошибкой с нулевым средним значением и стандартным отклонением, равным 0,5. Предполагается, что ошибка измерения, которая в дальнейшем обозначается $w_3(kT)$ принимает независимые значения от одного измерения к другому.

Выходные сигналы, которые могут быть фактически измерены, являются компонентами вектора выхода $y(k)$, определяемого выражением

$$y(k) = Mx(k) + w(k),$$

в котором для упрощения записи обозначение периода измерения T опущено, матрица измеряемых переменных

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и вектор ошибок измерения

$$w(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3(k) \end{bmatrix}.$$

Измеряемые выходные сигналы определяются выражениями

$$y_1(k) = x_4(k) + x_5(k);$$

$$y_2(k) = x_1(k);$$

$$y_3(k) = x_2(k) + w_3(k).$$

Из уравнения (8.4—2) находим оптимальный закон управления:

$$\hat{m}^0(k/k) = 9,346 \{ \hat{x}_4(k/k) - \hat{x}_1(k/k) \} - 3,673 \hat{x}_2(k/k) - 0,72 \hat{x}_3(k/k).$$

Для реализации этого оптимального закона управления необходимо найти оценки \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \hat{x}_3 и \hat{x}_4 .

Определению оценок координат состояния по выходным переменным посвящен следующий параграф.

8.5. ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА КООРДИНАТ

В предыдущем параграфе было введено понятие оптимальной оценки координат при рассмотрении синтеза оптимальной системы с координатами состояния, недоступными для измерения. Процедура синтеза системы была разделена на две части.

1. Разработка алгоритма оценки для получения наилучших оценок координат состояния по результатам измерения выходных переменных.

2. Расчет оптимального регулятора, формирующего оптимальный закон управления при использовании полученных оценок координат.

Прежде чем закончить изучение проблемы синтеза оптимального управления, рассмотрим проблему оптимальной оценки координат. Настоящий параграф посвящен определению оптимальной оценки вектора состояния $x(k)$ по измеренным значениям $y(j)$ вектора выхода при $j \leq k$, а также рассмотрению вычислительного алгоритма оптимальной оценки [82, 141, 144, 145].

Оптимальная оценка вектора состояния $x(k)$ определяется по измеренным значениям $y(j)$ вектора выхода для $j \leq k$. Предполагается, что измерения начинаются в момент $t = 0$ и сопровождаются случайными ошибками. Связь между измеренным вектором выхода $y(k)$ и вектором состояния процесса $x(k)$ дается линейной функцией

$$y(k) = Mx(k) + w(k), \quad (8.5-1)$$

где вектор $w(k)$ — случайная ошибка измерения с нулевым средним значением; M — матрица измеримых переменных, которая преобразует вектор состояния в измеримый вектор выхода при отсутствии случайных ошибок.

Проблему оптимальной оценки можно сформулировать как определение наилучшей оценки вектора $x(k)$ для $k \geq j$ при использовании измеренных значений компонент вектора $y(i)$, $0 \leq i \leq j$, при которой обеспечивается минимум выбранного критерия качества. При построении алгоритма оптимальной оценки используется критерий минимума среднеквадратичной ошибки. Оценку для $x(k)$ будем называть оптимальной, если среднеквадратичная ошибка

$$\bar{e}^2 = E [x(k) - a(k/j)]' [x(k) - a(k/j)] \quad (8.5-2)$$

минимальна. В этом выражении вектор $a(k/j)$ представляет собой любую оценку вектора состояния $x(k)$, полученную при использовании измеренных значений вектора $y(i)$, $0 \leq i \leq j$. Оценки будем искать в виде линейной комбинации значений вектора $y(j)$, измеренных в настоящий и прошедшие моменты времени.

Пусть теперь $\mathbf{X}(k)$ — множество всех случайных векторов, описываемых выражением

$$\sum_{i=0}^k \mathbf{A}_i \mathbf{x}(i) \quad (8.5-3)$$

и $\mathbf{Y}(j)$ — множество всех случайных векторов, описываемых выражением

$$\sum_{i=0}^j \mathbf{B}_i \mathbf{y}(i), \quad (8.5-4)$$

где \mathbf{A}_i — матрица размера $n \times n$ и \mathbf{B} — матрица размера $n \times p$. Обе матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} неслучайны; $\mathbf{X}(k)$ определяет конечномерное векторное пространство над полем действительных чисел; $\mathbf{Y}(j)$ является подпространством $\mathbf{X}(k)$, если $j \leq k$. Оценка вектора $\mathbf{x}(k)$, сделанная в момент j , находится как линейная комбинация значений вектора $\mathbf{y}(j)$, измеренных в настоящий и прошедшие моменты времени, и является элементом $\mathbf{Y}(j)$.

Пусть $\hat{\mathbf{x}}(k/j)$ обозначает ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x}(k)$ на подпространство $\mathbf{Y}(j)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(k/j)$ обозначает нормальную компоненту $\mathbf{x}(k)$. Тогда, используя свойства ортогональной проекции, описанные в параграфе 2.2, можно показать, что

$$\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k/j) + \tilde{\mathbf{x}}(k/j), \quad (8.5-5)$$

а также что ортогональная проекция равна наилучшей оценке вектора $\mathbf{x}(k)$, которая может быть получена по измеренным значениям $\mathbf{y}(j)$, $\mathbf{y}(j-1)$, ..., $\mathbf{y}(0)$ вектора выхода, и что нормальная компонента определяет ошибку оценки.

Рассмотрим процесс n -го порядка, описываемый уравнением переходных состояний

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{m}(k) + \mathbf{u}(k). \quad (8.5-6)$$

Компонентами $\mathbf{x}(k)$ являются координаты фактического состояния процесса. Для построения алгоритма оптимальной оценки координат желательно вначале установить связь между оптимальными оценками и матрицей перехода $\Phi(k)$. Пусть $\Psi(k)$ — матрица размера $n \times n$, определяемая выражением

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{B}(N-k). \quad (8.5-7)$$

Вектор $\Psi(k) \hat{\mathbf{x}}(k/k)$ является элементом подпространства $\mathbf{Y}(k)$. Используя свойства ортогональных проекций, можно показать, что вектор

$$\mathbf{x}(k+1) - \Psi(k) \hat{\mathbf{x}}(k/k) \quad (8.5-8)$$

является ортогональным к каждому элементу подпространства $Y(k)$, и это свойство ортогональности приводит к уравнению

$$\hat{x}[(k+1)/k] = \Phi(k)\hat{x}(k/k). \quad (8.5-9)$$

Комбинируя уравнения (8.5-7) и (8.5-9), приходим к следующему соотношению между оптимальными оценками и матрицей перехода:

$$\hat{x}[(k+1)/k] = \Phi(k)\hat{x}(k/k) + G(k)m(k/k). \quad (8.5-10)$$

Принимая во внимание уравнения (8.5-1) и (8.5-5) и учитывая характер ошибок измерения, находим, что связь между оценками вектора выхода и вектора состояния выражается соотношением

$$\hat{y}(k/j) = M\hat{x}(k/j), \quad (8.5-11)$$

и ошибка оценки дается уравнением

$$\tilde{y}(k/j) = M\tilde{x}(k/j) + w(k). \quad (8.5-12)$$

Вектор $M\hat{x}(k/j)$ является элементом подпространства $Y(j)$ и вектор $M\tilde{x}(k/j)$ — ортогонален этому подпространству.

Предположим, что $Z(k+1)$ представляет собой множество всех векторов вида

$$A^0(k+1)\tilde{y}[(k+1)/k], \quad (8.5-13)$$

где A^0 — матрица размера $n \times p$. Тогда любой вектор из подпространства $Z(k+1)$ будет ортогональным к любому вектору из подпространства $Y(k)$. Подпространства $Y(k)$ и $Z(k+1)$ являются ортонормальными по отношению друг к другу и связаны соотношением

$$Y(k+1) = Y(k) + Z(k+1). \quad (8.5-14)$$

Отсюда находим, что ортогональная проекция вектора $x(k+1)$ на три векторных пространства $Y(k+1)$, $Y(k)$ и $Z(k+1)$ удовлетворяет соотношению

$$\hat{x}[(k+1)/(k+1)] = \hat{x}[(k+1)/k] + A^0(k+1)\tilde{y}(k+1)/k]. \quad (8.5-15)$$

Подстановка уравнения (8.5-9) в формулу (8.5-15) и замена $k+1$ на k приводит к выражению

$$\hat{x}(k/k) = \Phi(k-1)\hat{x}[(k-1)/(k-1)] + A^0(k)\tilde{y}[(k)/(k-1)]. \quad (8.5-16)$$

Замена j на $k-1$ в формуле (8.5-11) приводит к соотношению

$$\hat{y}[k/(k-1)] = M\hat{x}[k/(k-1)]. \quad (8.5-17)$$

Уравнения (8.5—16) и (8.5—17) определяют вычислительный алгоритм оптимальной оценки. Эти два уравнения были использованы и при составлении блок-схемы алгоритма оптимальной оценки, изображенной на рис. 8.5—1, входом которой является измеренный вектор выхода $y(k)$ и выходом — оценки координат. Блок-схема модифицированного алгоритма оптимальной оценки изображена на рис. 8.5—2, из которого можно видеть, что для оптимальной оценки координат в данный дискретный момент

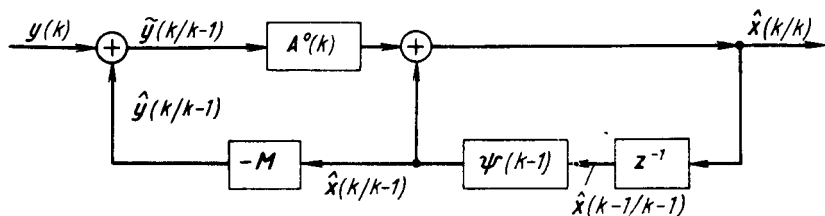


Рис. 8.5—1. Блок-схема алгоритма оптимальной оценки

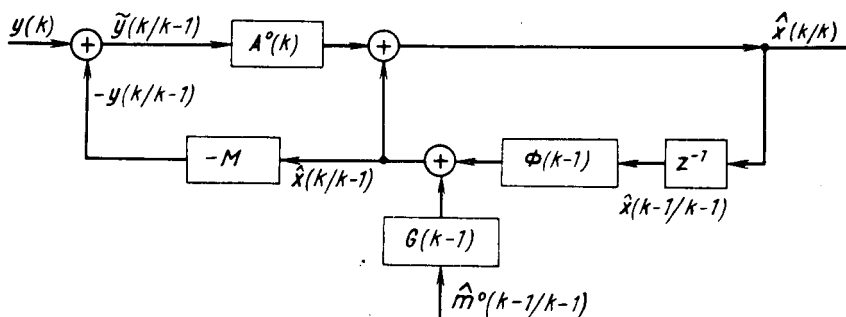


Рис. 8.5—2. Блок-схема модифицированного алгоритма оптимальной оценки

времени необходимо знать оценку вектора управления в предыдущий момент времени. Из уравнения (8.5—16) можно видеть, что матрица конверсии A^0 остается пока еще не определенной. Следующим шагом построения алгоритма оптимальной оценки является составление вычислительного алгоритма для определения матрицы конверсии.

Один подход к определению матрицы конверсии состоит в выводе рекуррентного соотношения между матрицей ковариаций $S(k+1)$ и матрицей конверсии $A^0(k)$. Матрица ковариаций $S(k+1)$ определяется выражением

$$S(k+1) = E \{ \tilde{x} [(k+1)/k] \tilde{x}' [(k+1)/k] \}. \quad (8.5-18)$$

Из уравнения (8.5—5) следует, что ошибка оценки равна

$$\tilde{x} [(k+1)k] = x(k+1) - \hat{x} [(k+1)/k]. \quad (8.5-19)$$

Используя формулы (8.5—6), (8.5—7) и (8.5—9), ошибку оценки можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{x}}[(k+1)/k] = \Psi(k)\mathbf{x}(k) - \Psi(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k) + \mathbf{u}(k). \quad (8.5-20)$$

Принимая во внимание уравнения (8.5—5), (8.5—11) и (8.5—15) и совершая необходимые подстановки и преобразования, для ошибки оценки можно получить следующее выражение:

$$\tilde{\mathbf{x}}[(k+1)/k] = \Psi(k)[\mathbf{I} - \mathbf{A}^0(k)\mathbf{M}] \tilde{\mathbf{x}}[(k)/(k-1)] - \Psi(k)\mathbf{A}^0(k)\mathbf{w}(k) + \mathbf{u}(k). \quad (8.5-21)$$

Отсюда для матрицы ковариаций, определенной соотношением (8.5—18), получаем выражение

$$\mathbf{C}(k+1) = \Psi(k)[\mathbf{I} - \mathbf{A}^0(k)\mathbf{M}]\mathbf{C}(k)[\mathbf{I} - \mathbf{A}^0(k)\mathbf{M}]\Psi'(k) + \Psi(k)\mathbf{A}^0(k)\mathbf{W}(k)\mathbf{A}^{0'}(k)\Psi'(k) + \mathbf{R}(k), \quad (8.5-22)$$

где

$$\mathbf{R}(k) = E\{\mathbf{u}(k)\mathbf{u}'(k)\}; \quad (8.5-23)$$

$$\mathbf{W}(k) = E\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}'(k)\}. \quad (8.5-24)$$

Ортогональная проекция вектора состояния $\mathbf{x}(k+1)$ на подпространство $\mathbf{Z}(k+1)$ равна

$$\hat{\mathbf{z}}[(k+1)/(k+1)] = \mathbf{A}^0(k+1)\tilde{\mathbf{y}}[(k+1)/k], \quad (8.5-25)$$

отсюда находим соответствующую ошибку оценки

$$\tilde{\mathbf{z}}[(k+1)/(k+1)] = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{A}^0(k+1)\tilde{\mathbf{y}}[(k+1)/k], \quad (8.5-26)$$

которая является вектором, представляющим независимые случайные переменные с нулевыми средними значениями. Можно показать, что

$$E\{\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{A}^0(k+1)\tilde{\mathbf{y}}[(k+1)/k]\tilde{\mathbf{y}}'[(k+1)/k]\} = 0. \quad (8.5-27)$$

Последнее выражение сводится к

$$\mathbf{C}(k+1)\mathbf{M}' = \mathbf{A}^0(k+1)[\mathbf{M}\mathbf{C}(k+1)\mathbf{M}' + \mathbf{W}(k+1)], \quad (8.5-28)$$

где матрицы ковариаций $\mathbf{C}(k+1)$ и $\mathbf{W}(k+1)$ определяются выражениями (8.5—18) и (8.5—24) соответственно. Отсюда находим матрицу конверсий $\mathbf{A}^0(k+1)$ в виде

$$\mathbf{A}^0(k+1) = [\mathbf{C}(k+1)\mathbf{M}'][\mathbf{M}\mathbf{C}(k+1)\mathbf{M}' + \mathbf{W}(k+1)]^{-1}. \quad (8.5-29)$$

Матрица $[\mathbf{M}\mathbf{C}(k+1)\mathbf{M}' + \mathbf{W}(k+1)]$ предполагается невырожденной. Уравнения (8.5—22) и (8.5—29) определяют вычислительный алгоритм для определения матрицы конверсии \mathbf{A}^0 .

Начав вычисления с заданного значения $C(0)$ матрицы ковариации, из формулы (8.5—9) находим $A^0(0)$, а из формулы (8.5—22) — матрицу ковариаций $C(1)$. Матрица конверсии $A^0(1)$ находится из выражения (8.5—29) подстановкой вычисленного значения матрицы $C(1)$. Уравнение (8.5—22) используется затем для вычисления матрицы ковариаций $C(2)$, по которой в результате подстановки ее в формулу (8.5—29) определяется матрица конверсии $A^0(2)$. Многократно используя, таким образом, рекуррентное соотношение, определенное уравнениями (8.5—29) и (8.5—22), находим последовательно матрицы конверсии $A^0(0)$, $A^0(1)$, $A^0(2)$, ..., $A^0(k)$. В цифровой системе описанный вычислительный алгоритм реализуется путем программирования ЭЦВМ системы управления.

Пример 8.5—1. Оптимальная оценка координат.

Рассмотрим систему управления примера 8.3—1. Учитывая, что вектор ошибок измерения равен

$$w(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3(k) \end{bmatrix},$$

стандартное отклонение ошибки измерения $w_3(k)$ равно $1/2$ и среднеквадратичное значение ошибки равно $1/4$, матрицу ковариаций $W(k)$ находим в виде

$$W(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Используя выражения (8.1—8) и (8.5—23), матрицу ковариаций $R(k)$ находим в виде

$$\begin{aligned} R(k) &= \int_{kT}^{(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} E \{ \Phi(\overline{k+1}T, \tau) n(\tau) n'(\sigma) \Phi'(\overline{k+1}T, \sigma) \} d\tau d\sigma = \\ &= \int_{kT}^{(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(\overline{k+1}T, \tau) E \{ n(\tau) n'(\sigma) \} \Phi(\overline{k+1}T, \sigma) d\tau d\sigma. \end{aligned}$$

Замечая, что вектор возмущений равен

$$n(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_3(\tau) \\ 0 \\ n_5(\tau) \end{bmatrix},$$

и что обе компоненты n_3 и n_5 являются белым шумом со спектральной плотностью, равной 1, матрицу ковариаций $E\{n(\tau)n'(\tau)\}$ находим в виде

$$E\{n(\tau)n'(\sigma)\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta(\tau-\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta(\tau-\sigma) \end{bmatrix},$$

где $\delta(\tau - \sigma)$ обозначает импульсную функцию, равную 1 при $\tau = \sigma$ и нулю при остальных значениях. Отсюда находим следующее выражение для матрицы ковариаций $R(k)$:

$$R(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \Phi'(\overline{k+1}T, \sigma) d\sigma,$$

где

$$\alpha = 0,5(1 + e^{-2(\overline{k+1}T - \sigma)}) - e^{-(\overline{k+1}T - \sigma)};$$

$$\beta = e^{-(\overline{k+1}T - \sigma)} - e^{-2(\overline{k+1}T - \sigma)};$$

$$\lambda = e^{-2(\overline{k+1}T - \sigma)}; \quad \mu = e^{-0,5(\overline{k+1}T - \sigma)}.$$

Окончательно находим, что

$$R(k) = \begin{bmatrix} 7 \times 10^{-4} & 3 \times 10^{-3} & 6,8 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 3 \times 10^{-4} & 0,014 & 0,043 & 0 & 0 \\ 6,8 \times 10^{-3} & 0,043 & 0,216 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,394 \end{bmatrix}.$$

Для определения матрицы ковариации $C(0)$ заметим, что $x_3(0)$ и $x_5(0)$ являются независимыми случайными переменными с нулевыми средними значениями и среднеквадратичными значениями, вычисленными по их спектральным плотностям, равными $1/4$ и 1 соответственно. Переменные $x_1(0)$ и $x_4(0)$ предполагаются распределенными равномерно в интервале от $-\pi$ до $+\pi$, а $x_2(0)$ — равной тождественно нулю. Отсюда находим, что матрица ковариаций $C(0)$ равна

$$C(0) = E\{x(0)x'(0)\} = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица конверсии $A^0(k)$ может быть теперь определена из уравнений (8.5—22) и (8.5—29). Последовательные значения этой матрицы равны

$$\begin{aligned}
 A^0[0] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,767 & 0 & 0 \\ 0,233 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & A^0[1] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3,38 & 0,010 \\ 0 & 7,14 & 0,041 \\ 0,393 & 0 & 0 \\ 0,607 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 A^0[2] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3,01 & 0,011 \\ 0 & 5,75 & 0,055 \\ 0,363 & 0 & 0 \\ 0,637 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & A^0[3] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2,94 & 0,010 \\ 0 & 5,27 & 0,056 \\ 0,363 & 0 & 0 \\ 0,664 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 A^0[4] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2,93 & 0,010 \\ 0 & 5,30 & 0,056 \\ 0,313 & 0 & 0 \\ 0,687 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

На этом синтез оптимальной системы можно считать законченным. Алгоритм оптимальной оценки и оптимальный закон управления могут быть реализованы путем соответствующего программирования универсальной ЭЦВМ или путем построения специализированной вычислительной машины. В этой системе измеренные значения выходных переменных $y_1(k)$, $y_2(k)$, $y_3(k)$ и управляющее воздействие $m(k-1)$ используются в алгоритме оптимальной оценки для получения желаемых оценок $\hat{x}_1(k/k)$, $\hat{x}_2(k/k)$, $\hat{x}_3(k/k)$ и $\hat{x}_4(k/k)$, которые, в свою очередь, используются в алгоритме оптимального регулятора для формирования оптимального закона управления. Отметим, что хотя заданная система является стационарной, результирующая оптимальная система не стационарна, так как матрица конверсии $A^0(k)$ зависит от времени.

8.6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей главе обсуждаются некоторые вопросы проектирования цифровых систем управления, использующих ЭЦВМ. Цифровая вычислительная машина в системе управления обычно выполняет функции контроля, обработки данных и оптимального управления. Подробно рассмотрена только функция оптимального управления для случая, когда оптимизация системы проводится по минимуму квадратичного показателя качества, определяемого выражением

$$I_N = \sum_{k=1}^N [\mathbf{x}'(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \lambda \mathbf{m}'(k-1) \mathbf{H}(k-1) \mathbf{m}(k-1)].$$

Управляемый процесс предполагается линейным. Решение задачи оптимального управления проводится при использовании метода динамического программирования.

Показано, что вектор оптимального управления $m^0(k)$ для процесса с координатами, допускающими непосредственное наблюдение и измерение, является линейной функцией вектора состояния $x(k)$ вида

$$m^0(k) = \mathbf{B}(N - k)x(k).$$

В общем случае матрица обратной связи $\mathbf{B}(N - k)$ зависит от времени, поэтому оптимальная система управления является нестационарной. Если управление процессом осуществляется при наличии аддитивных независимых случайных воздействий в соответствии с определенным выше оптимальным законом управления, то результирующая система будет оптимальной в смысле минимума статистического среднего значения квадратичного показателя качества.

Для случая, когда некоторые координаты процесса не могут быть измерены непосредственно, оптимальный закон управления получен в виде

$$\hat{m}^0(k/k) = \mathbf{B}(N - k)x(k/k),$$

где $x(k/k)$ обозначает наилучшую оценку вектора состояния $x(k)$, найденную по измеренным значениям $y(j)$, $y(j - 1)$, ..., $y(0)$ вектора выхода, минимизирующую ошибку оценки. Оптимальное управление требует введения обратной связи по всем оценкам координат состояния процесса. Показано, что оптимизация системы по отношению к квадратичному показателю качества может быть осуществлена путем оптимизации управления и оценки независимо друг от друга. Оптимальный регулятор и алгоритм оптимальной оценки могут разрабатываться по отдельности для получения в полном смысле оптимальной системы. Получен вычислительный алгоритм оптимальной оценки и рекуррентное соотношение, определяющее оптимальный закон управления. С целью унификации процедуры расчета для описания входных воздействий и возмущений вводятся дополнительные переменные и первоначальный процесс заменяется процессом увеличенной размерности.

Литература к гл. 8

Аоки [5], Арис [6], Беллман [15—18], Гвигнабодет [72], Джозеф и Ту [82], Калман [86], Калман и Кепске [93], Левис и Ту [115], Ту [137, 140, 141a], Ту и Джозеф [144, 145], Ту и Левис [146].

УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Показать, что пересечение конечного числа выпуклых множеств есть также выпуклое множество.

2.2. Показать, что две гиперплоскости параллельны, если их единичные нормали совпадают.

2.3. Показать, что треугольник и его внутренняя область образуют двумерный симплекс.

2.4. Показать, что если множество n -мерных векторов линейно независимо, то и любое подмножество этих векторов также линейно независимо.

2.5. Даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

и

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

где λ_1 и λ_2 — собственные значения матрицы A .

Показать, что $e^{At} = Te^{At}T^{-1}$ и выразить T через собственные значения.

2.6. Показать, что два собственных вектора действительной симметрической матрицы, соответствующих различным собственным значениям, являются ортогональными.

2.7. Показать, что если собственные значения матрицы A различны, то эта матрица может быть преобразована в диагональную матрицу

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A , собственные вектора которой используются в качестве столбцов матрицы T .

2.8. Дано уравнение

$$\dot{x} = Ax + dm,$$

где компоненты x_i вектора x связаны соотношениями

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = x_3;$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n;$$

$$\dot{x}_n = b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + b_{n-2} x_3 + \dots + b_1 x_n + dm.$$

Пусть матрица A преобразована в диагональную матрицу

$$T'AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A .

Показать, что

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

2.9. Используя теорему разложения Сильвестра (см. параграф 2.3), показать, что

$$(a) [F(\lambda_i)]^r = F(\lambda_i); \quad (b) \sum_{i=1}^n F(\lambda_i) = I.$$

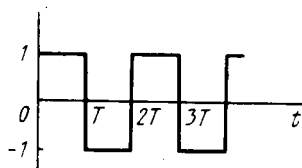
2.10. Пользуясь теоремой Кэли — Гамильтона, получить разложение для A^{-1} в виде полинома от A , при условии, что A — невырожденная матрица.

2.11. Рассмотреть различные способы определения $f(A)$, где A — постоянная матрица размера $n \times n$.

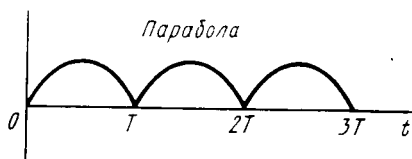
2.12. Применяя вариационный принцип Гамильтона, получить одноименные канонические уравнения.

3.1. Составить схему в переменных состояниях для: (а) восстанавливающего непрерывный сигнал устройства первого порядка; (б) устройства, восстанавливающего непрерывный сигнал с частичным учетом разности амплитуд двух последовательных импульсов.

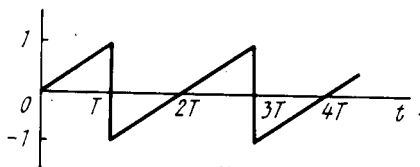
3.2. Составить схему (см. рис. УЗ.2) * в переменных состояниях для: (а) генератора входного сигнала прямоугольной формы; (б) генератора парабо-



а)



б)



в)

* Номера рисунков соответствуют номерам упражнений.

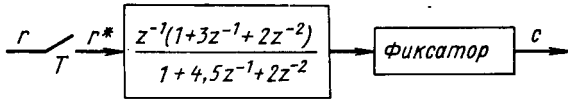
лических входных сигналов; (в) генератора пилообразных входных сигналов; (г) генератора сигнала $r(t) = e^{-at} \sin \omega t$; (д) генератора стохастического входного сигнала со спектральной плотностью $\Phi_{rr}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$.

3.3. Составить схемы в переменных состояния для динамических систем, описываемых уравнениями

$$(a) \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) = ct + dm(t);$$

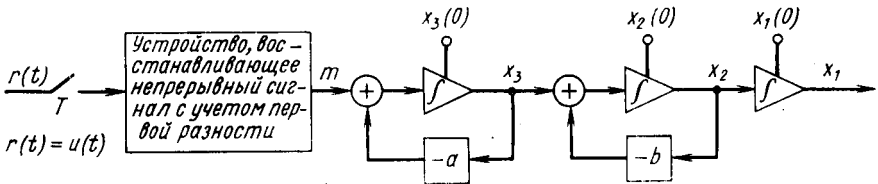
$$(б) \dddot{x}(t) + 4\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 2x(t) = m(t).$$

3.4. Составить схему в переменных состояния для системы, показанной на рис. УЗ.4, пользуясь методом (а) прямого программирования; (б) параллельного программирования; (в) последовательного программирования. Написать дифференциальное уравнение состояния и уравнения переходных состояний для каждого случая.



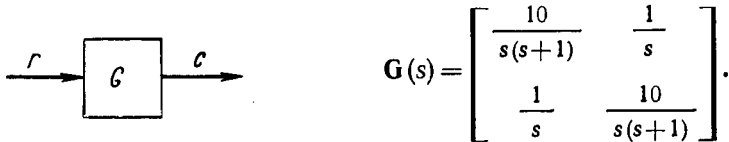
3.5. Составить схему в переменных состояниях для восстанавливающего непрерывный сигнал устройства k -го порядка.

3.6. Найти расширенную матрицу перехода для системы, показанной на рис. УЗ.6.



3.7. Найти расширенные матрицы перехода для динамических систем упражнения 3.3, где в случае (а) $m(t) = t$ и в случае (б) $m(t) = \sin \omega t$.

3.8. Передаточная матрица $G(s)$ системы, показанной на рис. УЗ.8, дается выражением



(а) Написать дифференциальное уравнение состояния, используя векторно-матричные обозначения.

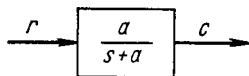
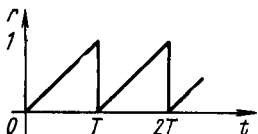
(б) Составить схему в переменных состояния для многомерной системы.

(в) Определить реакцию системы $c(t)$ на ступенчатое входное воздействие вида

$$r(t) = \begin{bmatrix} R_1 u(t) \\ R_2 u(t) \end{bmatrix}.$$

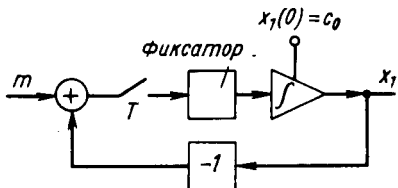
3.9. На рис. УЗ.9 показана простая система, на вход которой подается пилообразный сигнал.

- (а) Найти матрицы A и B , а также расширенную матрицу перехода Φ .
 (б) Определить реакцию системы $c(t)$ методом переходных состояний и методом преобразования Лапласа.



3.10. На рис. У3.10 показана схема в переменных состояниях простой дискретной системы.

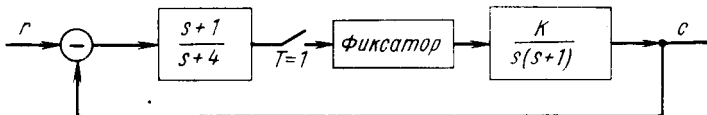
Определить z -преобразование $X_1(z)$ для выхода системы и выходную функцию $x_1(t)$ для случая, когда входное воздействие имеет вид единичной



ступенчатой функции. Для подтверждения решить задачу классическим методом.

3.11. Решить упражнение 3.10 для синусоидального входного воздействия $m(t) = \sin \omega t$.

3.12. На рис. У3.12 показана блок-схема системы с обратной связью. Используя метод переходных состояний, определить z -преобразование $C(z)$ для



выхода системы и выходную функцию $c(t)$ для случая, когда входное воздействие имеет вид единичной ступенчатой функции.

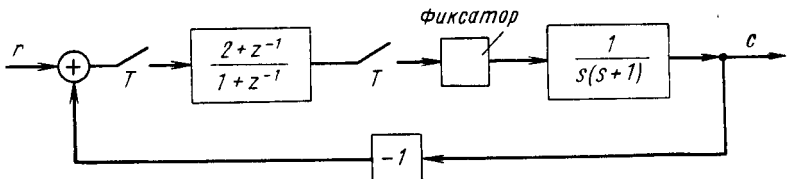
Для подтверждения решить упражнение классическим методом.

3.13. Решить упражнение 3.12 для случая синусоидального входного воздействия $r(t) = \sin \omega t$.

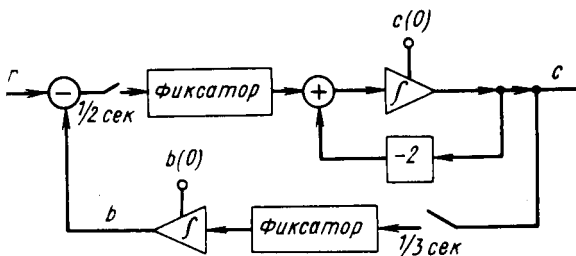
3.14. Для системы упражнения 3.12 определить предельное для устойчивости усиление K методом переходных состояний и классическим методом.

3.15. На рис. У3.15 показана блок-схема дискретной системы с обратной связью. Входное воздействие задано в виде единичной ступенчатой функции, период прерывания $T = 1$ сек, начальные условия $c(0^+) = 1$ и $\dot{c}(0^+) = 1$.

Найти реакцию системы $c(t)$ методом переходных состояний и методом модифицированного z -преобразования.



3.16. На рис. У3.16 показана схема в переменных состояния дискретной системы с двукратным прерыванием сигналов. Прерыватели в прямой и обратной цепях контура управления имеют периоды прерывания 0,5 сек и $1/3$ сек соответственно.



Начальные условия предполагаются нулевыми.

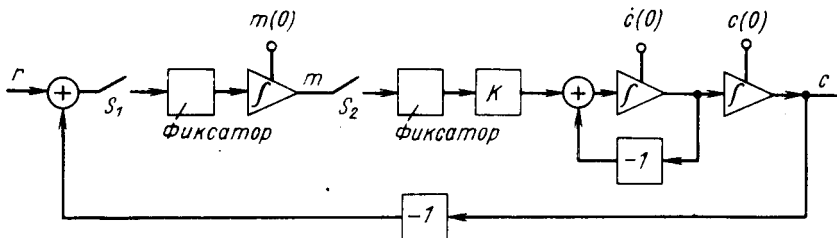
(а) Определить предельно допустимое для устойчивости усиление в системе.

(б) Определить реакцию системы на входное воздействие вида единичной ступенчатой функции при усилении в системе $K = 1$.

в) Повторить (б) для входного воздействия вида $r(t) = (1 + t)u(t)$.

3.17. Решить упражнение 3.16 для случая, когда начальные условия на интеграторах $c(0^+) = 5$ и $b(0^+) = 1$.

3.18. На рис. У3.18 показана схема в переменных состояния дискретной системы с несинхронизированным прерыванием сигналов. Прерыватели S_1 и S_2

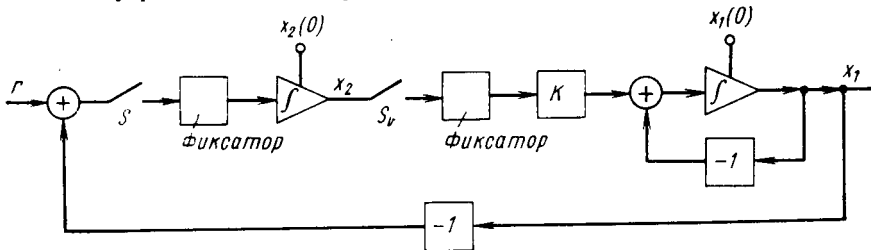


работают с одинаковым периодом прерывания, равным 0,5 сек, но они несинхронизованы.

(а) Определить предельно допустимое для устойчивости усиление в системе для случаев, когда коэффициент несинхронизованности прерывателя S_2 равен 0,25; 0,5; 0,75.

(б) Каково оптимальное значение коэффициента несинхронизованности для устойчивости системы?

3.19. На рис. У3.19 показана схема в переменных состояния дискретной системы управления с многократным циклически переменным прерыванием



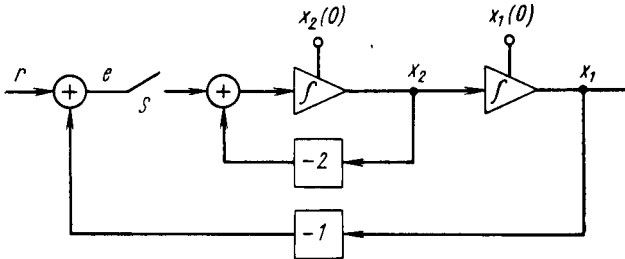
сигналов. Прерыватель S работает с постоянной скоростью и периодом прерывания, равным 1 сек. Прерыватель S_2 осуществляет прерывание с циклически изменяющейся скоростью в моменты времени $t = 0; T/4; T; 5T/4; \dots; \kappa T; (\kappa + 1/4)T; \dots$ с периодом прерывания $T = 1$ сек.

(а) Исследовать устойчивость этой системы.

(б) Для случая, когда коэффициент усиления $K = 1$, определить реакцию системы на входное воздействие вида единичной ступенчатой функции.

(в) Повторить (б) для случая, когда входное воздействие $r(t) = (1 - e^{-t}) u(t)$.

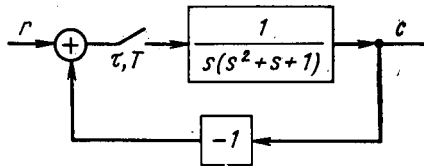
3.20. На рис. У3.20 показана схема в переменных состояния системы управления с конечной длительностью квантования сигналов. Период прерывания



равен 1 сек; длительность квантования равна 0,4 сек; начальные значения координат $x(0^+) = 1$ и $x_2(0^+) = 1$.

Определить реакцию системы $x_1(t)$ на входное воздействие вида единичной ступенчатой функции и построить кривую переходного процесса.

3.21. На рис. У3.21 показана система управления с конечной длительностью квантования, равной 0,6 сек, и периодом прерывания $T = 1$ сек.



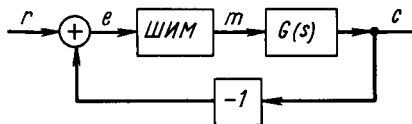
(а) Определить реакцию системы $c(t)$ на входное воздействие: (1) $r(t) = e^t$ и (2) $r(t) = u(t)$.

(б) Исследовать устойчивость системы и эффект ненулевых начальных условий.

3.22. На рис. У3.22. показана блок-схема системы управления с широтно-импульсной модуляцией. Передаточная функция объекта равна

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + 0,1s)}$$

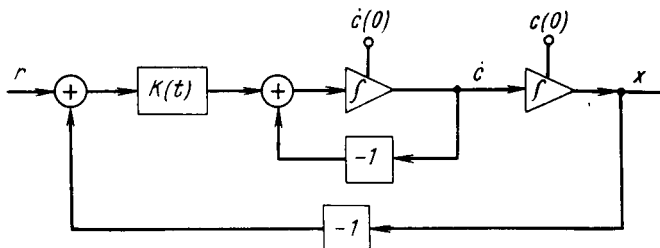
Начальные условия предполагаются нулевыми, т. е. $c(0^+) = 0$ и $\dot{c}(0^+) = 0$. Широтно-импульсный модулятор имеет следующие характеристики: период прерывания равен 1 сек; амплитуда импульса равна единице; ширина импульса равна амплитуде сигнала в момент выборки.



Определить реакцию системы на входное воздействие вида единичной ступенчатой функции для случая $K = 1$. Исследовать устойчивость системы.

3.23. Решить упражнение 3.22 для случая, когда широтно-импульсный модулятор имеет следующие характеристики: период прерывания равен 0,1 сек; амплитуда импульса равна единице; ширина импульса равна логарифму амплитуды сигнала в момент выборки.

3.24. Схема в переменных состояния системы управления с переменным усилением в прямой цепи показана на рис. У3.24. Усилительный элемент харак-



теризуется усилением $K(t) = 1 + e^{-t}$. Начальные условия задаются в виде $c(0^+) = 1$ и $\dot{c}(0^+) = 1$.

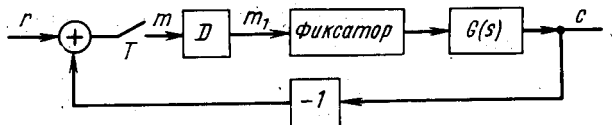
(а) Определить реакцию системы на входное воздействие вида единичной ступенчатой функции.

(б) Определить реакцию системы на входное пилообразное воздействие.

3.25. Показать, что соотношение (3.5—19) действительно выполняется.

4.1. На рис. У4.1 показана блок-схема дискретной системы управления объектом, характеризуемым передаточной функцией

$$G(s) = \frac{10}{s(1+0,1s)(1+0,05s)}$$



Период прерывания $T = 0,2$ сек, начальные условия предполагаются нулевыми. Используя метод переходных состояний, определить передаточную функцию $D(z)$ цифрового регулятора, при которой имеет место максимальное быстродействие системы при ступенчатом входном воздействии. Подтвердить результат классическим методом. Рассмотреть эффект ненулевых начальных условий.

4.2. Для дискретной системы, показанной на рис. У4.1, положить $T = 1$ сек и

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Считая начальные условия нулевыми и пользуясь методом переходных состояний, определить передаточную функцию $D(z)$ цифрового регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие системы при ступенчатом входном воздействии.

4.3. Для дискретной системы, показанной на рис. У4.1, принять $T = 1$ сек и

$$G(s) = \frac{4(s+1)}{s(s+2)}.$$

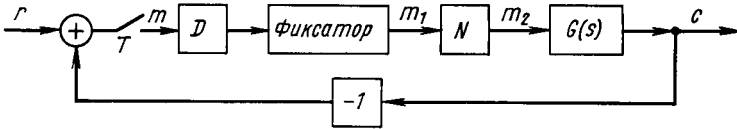
Начальные условия считать нулевыми.

(а) Найти передаточную функцию $D(z)$ цифрового регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие системы при ступенчатом входном воздействии.

(б) Рассмотреть эффект расположения нулей передаточной функции на длительность переходного процесса.

4.4. На рис. У4.4 показана нелинейная дискретная система управления объектом с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{4(s+1)}{s(s+2)}.$$



Период прерывания $T = 1$ сек, вход и выход нелинейного элемента связаны соотношением

$$m_2 = m_1 - m_1^3.$$

Начальные условия предполагаются нулевыми. Найти передаточную функцию $D(z)$ цифрового регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие системы при ступенчатом входном воздействии.

4.5. Для нелинейной дискретной системы, показанной на рис. У4.4, принять

$$G(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}.$$

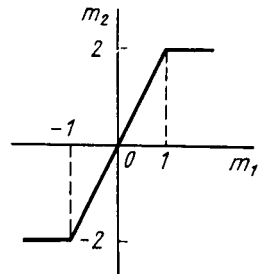
Характеристика нелинейного элемента показана на рис. У4.5. На вход системы подается воздействие вида ступенчатой функции $r(t) = 10u(t)$.

(а) Найти передаточную функцию $D(z)$ цифрового регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие системы.

(б) Определить максимальную амплитуду входного воздействия, при которой переходный процесс в системе заканчивается за три периода прерывания, за четыре периода, за пять периодов прерывания; для каждого из этих случаев найти передаточную функцию $D(z)$ цифрового регулятора, обеспечивающего желаемое быстродействие системы.

4.6. Для нелинейной цифровой системы управления, показанной на У4.1, принять $T = 1$ сек и

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2+s+1)},$$



Характеристика нелинейного элемента показана на рис. У4.5. На вход системы подается воздействие вида единичной ступенчатой функции.

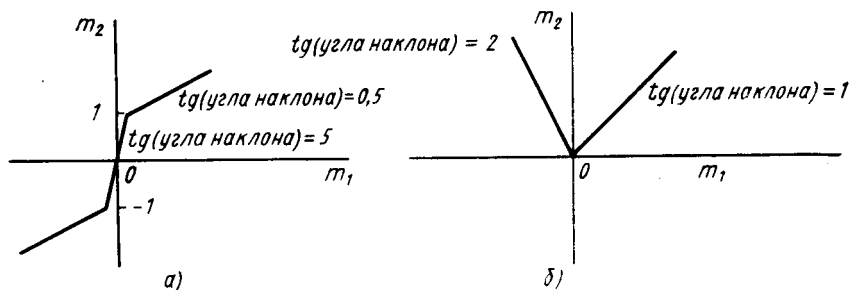
(а) Найти передаточную функцию $D(z)$ цифрового регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие системы.

(б) Определить максимальную амплитуду входного воздействия, при которой переходный процесс заканчивается за три периода прерывания, за четыре периода, за пять периодов прерывания; для каждого из этих случаев найти передаточную функцию $D(z)$ цифрового регулятора, обеспечивающего желаемое быстродействие системы.

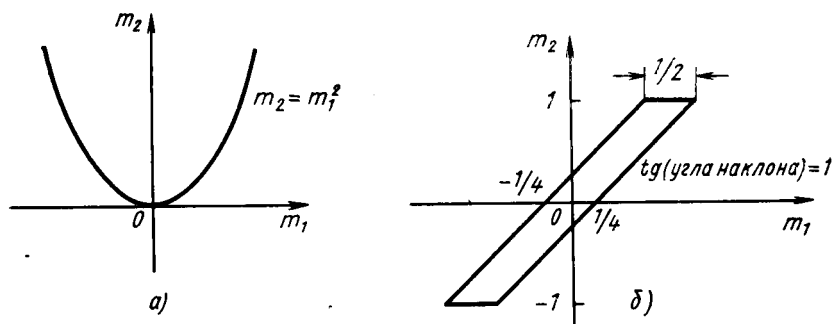
4.7. Решить упражнение 4.5 для случая, когда

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

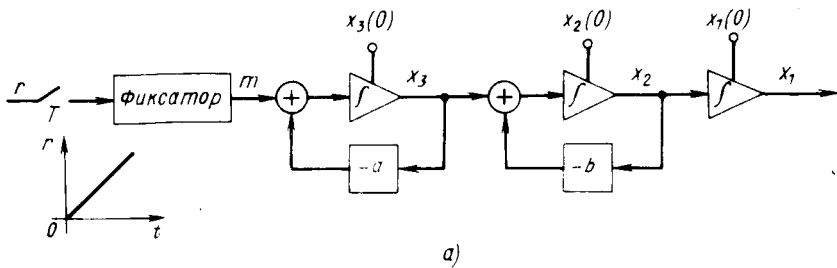
На вход системы подается воздействие вида единичной ступенчатой функции; характеристики нелинейности показаны на рис. У4.7, а и б соответственно.



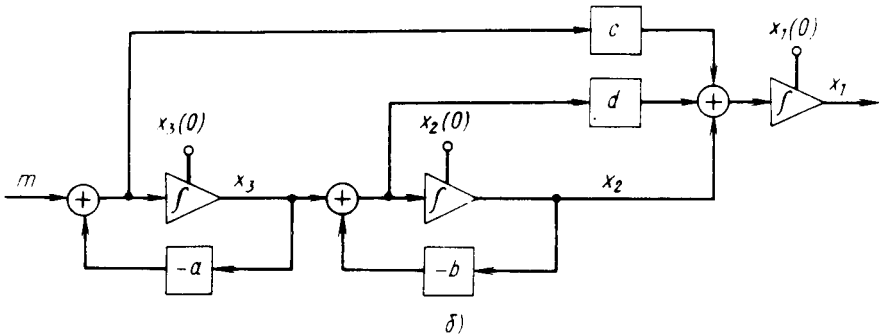
4.8. Решить упражнение 4.7, для случая, когда нелинейность имеет характеристики вход — выход, показанные на рис. У4.8 а и б соответственно.



4.9. Определить матрицы Φ , φ , h и составить уравнение переходных состояний для системы, показанной на рис. У4.9, а и б.



а)



б)

4.10. Динамическая система характеризуется дифференциальным уравнением

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} + \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \frac{dm(t)}{dt} + m(t).$$

Записать это уравнение в векторно-матричной форме и определить матрицу перехода объекта Φ и матрицу управляемого перехода h .

4.11. Для процесса, описываемого системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - bx_1 + m, \end{aligned}$$

определить матрицу перехода процесса Φ и матрицу управляемого перехода h .

4.12. Показать, что матрица перехода линейной нестационарной системы обладает следующими свойствами:

$$(a) \Phi(t; \lambda) \Phi(\lambda; \tau) = \Phi(t; \tau), \quad (b) \Phi^{-1}(t; \tau) = \Phi(\tau; t).$$

4.13. Объект управления характеризуется дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Dm}(t)$$

и уравнением переходных состояний

$$\mathbf{x}(k+1T) = \Phi(T) \mathbf{x}(kT) + \mathbf{h}(T) \mathbf{m}(kT),$$

где используются обозначения, введенные в параграфе 4.3.

Показать, что совокупность матриц

$$s_i = \Phi(-iT)h(T), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

образует базис в пространстве S тогда и только тогда, когда для каждого собственного значения λ матрицы A выполняется условие

$$|Im\lambda|T \neq k\pi,$$

где T — период прерывания; k — положительное целое число; $Im\lambda$ обозначает мнимую часть от λ .

4.14. Показать, что непрерывный процесс n -го порядка, характеризуемый уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + dm(t),$$

является полностью управляемым тогда и только тогда, когда векторы

$$d, Ad, A^2d, \dots, A^{n-1}d$$

линейно независимы.

4.15. Показать, что требование линейной независимости векторов для управляемости сохраняется также для процессов, управляемых по многим входам. Для управляемости, в этом случае необходимо и достаточно, чтобы n столбцов в базисных матрицах s_i , $i = 1, 2, \dots, n$ были линейно независимы.

4.16. Динамика процесса характеризуется дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + (a - 2b \cos 2t)x(t) = m(t).$$

(а) Найти $x(t)$.

(б) Получить уравнение переходных состояний для случая дискретной системы.

4.17. Электронная система характеризуется дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a(t) \frac{dx(t)}{dt} + bx(t) = m(t),$$

где $a(t) = R_0(1 + \alpha \cos \omega_1 t)$; $0 < \alpha \ll 1$; $m(t) = E \cos \omega_2 t$ и b — постоянный коэффициент.

(а) Найти $x(t)$.

(б) Определить уравнение переходных состояний для дискретной системы.

4.18. Процесс характеризуется передаточной функцией

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

и начальными условиями $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ и $x_3(0) = 1$.

Определить стратегию оптимального управления $m^0(\kappa T)$, переводящего процесс из заданного начального состояния в состояние равновесия за минимальное время.

4.19. Решить упражнение 4.18 для случая, когда

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s^2(s+1)}.$$

4.20. Решить упражнение 4.18 для случая, когда

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2+s+1)}.$$

4.21. Многомерный процесс характеризуется передаточной матрицей

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{10}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{10}{s(s+1)} \end{bmatrix}.$$

Вектор управления $m = [m_2 \ m_2]'$, начальные условия на интеграторах схемы в переменных состояния равны 1.

Определить стратегию оптимального управления $m^0(\kappa T)$, переводящего процесс из заданного начального состояния в состояние равновесия за минимальное время.

4.22. Динамика процесса описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2\xi x_2 - x_1 + m, \end{aligned}$$

где x_1 и x_2 — координаты состояния процесса; m — управляющее воздействие и ξ — коэффициент демпфирования. На управляющее воздействие наложено ограничение $|m| \leq 1$.

(а) Определить границу переключения для различных значений ξ : $\xi = 1,5$; $\xi = 0,5$; $\xi = 0$; $\xi = -0,5$; $\xi = -1,5$.

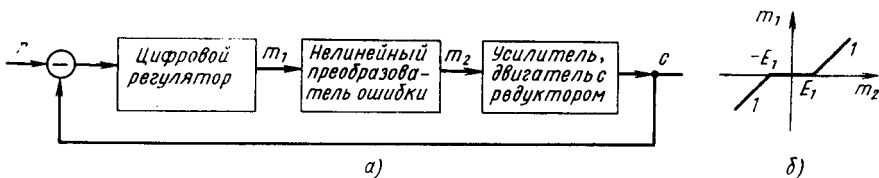
(б) Построить кривые переключения.

(в) Предполагая, что $x_1(0) = 4$ и $x_2(0) = 3$, найти оптимальную траекторию для каждого случая.

4.23. На рис. У4.23, а показана блок-схема электромеханической системы управления. Передаточная функция усилителя совместно с двигателем и редуктором равна

$$G(s) = \frac{10}{s^2(s+1)}.$$

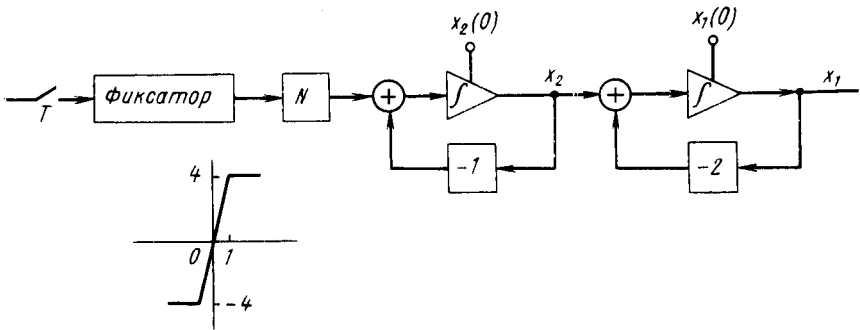
Характеристика вход — выход преобразователя ошибки показана на рис. У4.23, б.



Найти передаточную функцию $D(z)$ цифрового регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие системы при воздействиях вида ступенчатой функции с амплитудой в пределах от 1 до 10.

4.24. На рис. У4.24 показана простая дискретная система управления. На управляющее воздействие m наложено ограничение $|m| \leq 4$.

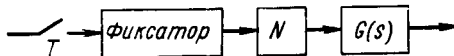
Найти оптимальную управляющую последовательность воздействий $\{m^0\}$ для перемещения процесса из начального состояния (а) $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ и (б) $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = -10$ в состояние равновесия за минимальное время.



4.25. На рис. У4.25 показана дискретная система управления объектом с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + s + 1},$$

обладающей парой комплексных полюсов. Управляющее воздействие может принимать два значения $+1$ и -1 .



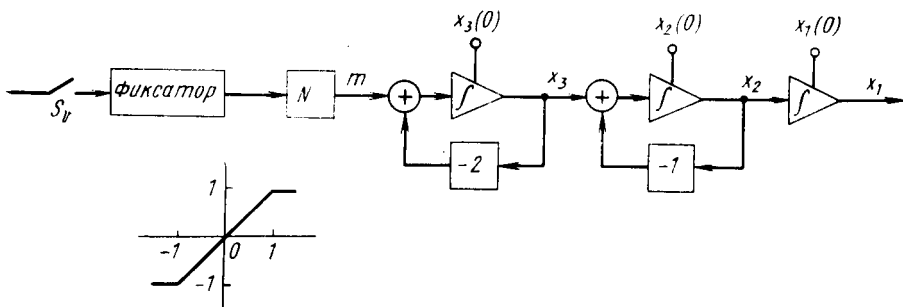
Определить оптимальную управляющую последовательность $\{m^0\}$, переводящую объект из начального состояния $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ в состояние равновесия за минимальное время.

4.26. Решить упражнения 4.25 для случая, когда

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}$$

и начальное состояние $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$.

4.27. Схема в переменных состояния процесса с циклически изменяющейся частотой прерывания входного сигнала показана на рис. У4.27. Прерыватель S_v производит выборку с сигнала в моменты времени $t = 0; T/4; T; 5T/4; \dots; kT; (k + 1/4)T; \dots$



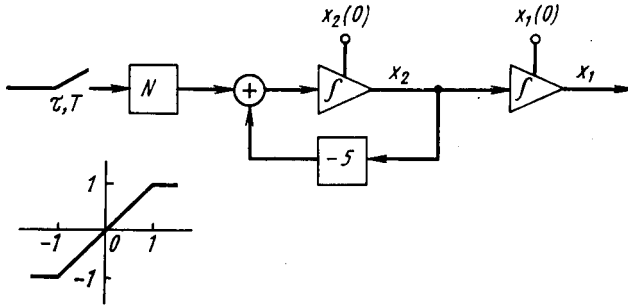
Период прерывания $T = 1$ сек; вектор начального состояния $x(0) = [1 \ 2 \ 1]^T$. На управляющее воздействие наложено ограничение $|m| \leq 1$.

Найти наименьшее число тактов, необходимое для перемещения процесса из заданного начального состояния в состояние равновесия, определить оптимальную управляющую последовательность $\{m^0\}$ и оптимальный закон управления.

4.28. Решить упражнение 4.21 для случая, когда на управляющие воздействия наложены ограничения $|m_1| \leq 1$ и $|m_2| \leq 1$.

Найти оптимальную по быстродействию управляющую последовательность воздействий $\{m^0\}$.

4.29. На рис. У4.29 показана схема в переменных состояния дискретной системы управления с конечной длительностью квантования, в которой управляющие воздействия ограничены по амплитуде. Период прерывания $T = 1$ сек, длительность импульса равна 0,2 сек и $|m| \leq 1$.



Найти управляющую последовательность воздействий, перемещающую систему из начального состояния $x(0) = [1 \ 2]^T$ в состояние равновесия за минимальное время.

4.30. На рис. У4.20 показана простая система управления процессом, характеризуемым передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{s(1 + 0,1s)}$$

с модуляцией импульсов по длительности. Начальные условия $x(0) = 1$ и $\dot{x}(0) = 1$. Период прерывания $T = 1$ сек, широтно-импульсный модулятор гене-



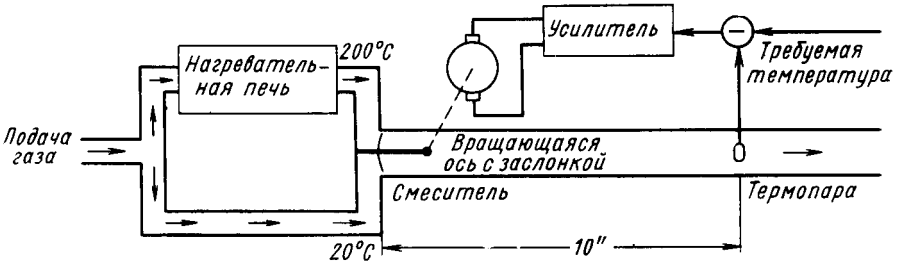
рирует последовательность импульсов с амплитудой, равной 1, и длительностью, равной амплитуде соответствующей выборки.

Найти управляющую последовательность воздействий, переводящую процесс из заданного начального состояния в состояние равновесия за минимальное время.

4.31. Химический процесс требует точного и быстрого управления температурой газа. Управление осуществляется путем нагрева части газа до относительно высокой температуры $+200^\circ\text{C}$ и смещения нагретой части с остальной частью, находящейся при комнатной температуре $+20^\circ\text{C}$, посредством смесителя с заслонкой, приводимой в движение двигателем, как показано на рис. У4.31. Температура газа после смещения измеряется термопарой, помещенной в сечении, где температуру газа можно считать всюду установившейся.

Крутизна характеристики термопары равна $1\text{ мВ}/^\circ\text{C}$, постоянная времени 10 сек. Двигатель нагружен пружиной, устанавливающей заслонку смесителя в центральное положение, когда напряжение на входе усилителя равно нулю. При напряжении $\pm 1\text{ мВ}$ на входе усилителя заслонка начинает перемещаться

из нейтрального положения в положение, при котором прохождение воздуха через один канал полностью прекращается. Зависимость потока воздуха в каждом канале от положения заслонки предполагается линейной. Постоянная времени двигателя равна 1 сек; скорость течения газа 3000 см/сек; площадь поперечного сечения трубопровода 13 см²; термопара находится на расстоянии 25 см от заслонки смесителя.



Произвести расчет оптимального регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие системы при скачкообразном задании требуемой температуры выходящего газа.

4.32. Движение снаряда в горизонтальной плоскости можно описать дифференциальным уравнением, связывающим отклонение руля направления $\theta(t)$ с курсовым углом снаряда $c(t)$:

$$T_m \frac{d^2c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} = K_1 \theta(t),$$

где K_1 — константа снаряда, численно равная приращению c в рад/сек на каждый радиан приращения угла θ ; T_m — постоянная времени снаряда в сек.

Управление рулем направления осуществляется через усилитель и буферное устройство с общим усилением K_2 , численно равным отклонению руля направления в радианах на каждый вольт напряжения на входе усилителя.

Полагая, что

$$T_m = 2 \text{ сек}; \quad K_1 = 2,5; \quad K_2 = 100$$

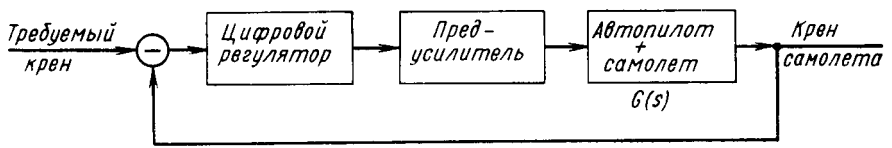
и отклонения руля направления ограничены пределами $\pm 1 \text{ рад}$, произвести расчет оптимального регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие системы.

4.33. На рис. У4.33 показана блок-схема системы управления креном самолета, включающая цифровой регулятор. Соответствующие характеристики автопилота и самолета описываются передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1,5}{s(1 + s/3)(1 + s/25)}.$$

Коэффициент усиления предусилителя равен 10.

Произвести расчет цифрового регулятора, обеспечивающего конечную и минимальную длительность переходных процессов по крену при входных воздействиях вида ступенчатой функции.



4.34. Управление продольным движением самолета усложняется из-за колебательного характера реакции самолета и задержки обнаружения ошибки движения по траектории.

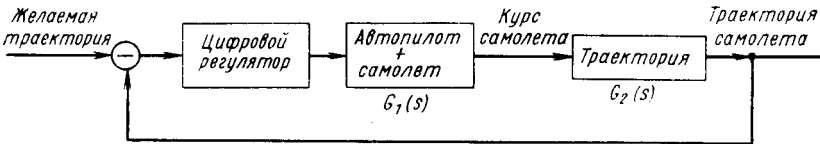
На рис. У4.34 показана блок-схема предлагаемой системы управления продольным движением самолета. Передаточная функция самолета совместно с автопилотом определяется выражением

$$G_1(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+s/10)(1+1,4s/5+s/5^2)}.$$

Кинематическая передаточная функция имеет вид

$$G_2(s) = \frac{1}{1+s}.$$

Произвести расчет цифрового регулятора, обеспечивающего при скачкообразном задании новой траектории плавный переход на желаемую траекторию за минимальное время.



4.35. Разработать процедуру расчета многомерной системы управления, оптимальной по быстродействию при входных воздействиях вида ступенчатой функции, для случая, когда на управляющие воздействия наложены амплитудные ограничения.

4.36. Метод преобразования координат, использованный в параграфе 4.5 для расчета оптимальных по быстродействию дискретных систем, распространить на случай, когда на управляющие воздействия наложены амплитудные ограничения.

5.1. Процесс n -го порядка характеризуется дифференциальным уравнением

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} + \dots + \alpha_1 \frac{dx(t)}{dt} + \alpha_0 x(t) = m(t),$$

где α_k — известные постоянные коэффициента, а на управляющее воздействие наложено ограничение

$$|m| \leq 1.$$

Получить уравнения Эйлера — Лагранжа для оптимального управляющего воздействия, минимизирующего показатель качества

$$I = \int_t^{\infty} [x(\tau) - x^d(\tau)]^2 d\tau.$$

Показать, что если учет наложенного ограничения производится путем минимизации показателя качества

$$I = \int_t^{\infty} \{ [x(\tau) - x^d(\tau)]^2 + [m(\tau)]^k \} d\tau,$$

где k — постоянный весовой коэффициент, то уравнения Эйлера — Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \sum_{k=1}^n \alpha_{n-k} x_k &= m; \\ \dot{x}_k &= x_{k-1} \quad k = 2, 3, \dots, n, \\ \dot{\lambda}_k &= \alpha_{n-k} \lambda_k - \lambda_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{\lambda}_n &= \alpha_0 \lambda_1 + x_n - x^d, \end{aligned}$$

где $m = \operatorname{sgn}(\lambda_1) \left| \frac{2}{r} \lambda_1 \right|^{\frac{1}{r-1}}$ и λ_k обозначает множитель Лагранжа.

При таком способе учета ограничения производные от переменных, входящих в уравнение Эйлера — Лагранжа, являются непрерывными функциями. Это дает значительные преимущества при вычислениях.

5.2. Процесс характеризуется дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + \\ + a_0 x(t) = b_0 m(t) + b_1 \frac{dm(t)}{dt} + \dots + b_r \frac{d^r m(t)}{dt^r}, \end{aligned}$$

где $x(t)$ — выходная переменная; $m(t)$ — управляющее воздействие. Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right|_{t=0} &= x_k(0), \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \\ \left. \frac{d^j m(t)}{dt^j} \right|_{t=0} &= m_j(0) \quad j = 0, 1, \dots, r-1. \end{aligned}$$

Определить оптимальное управляющее воздействие $m(t)$, минимизирующее показатель качества

$$I = \int_0^{\infty} m^2(t) dt$$

при ограничении

$$\int_0^{t_f} m^2(t) dt = K$$

и условии

$$\left. \frac{d^j m(t)}{dt^j} \right|_{t=t_f} = m_j(t_f).$$

5.3. Линейный процесс характеризуется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + \\ + a_0 x(t) = b_0 m(t) + \sum_{i=1}^r b_i \frac{d^i m(t)}{dt^i}. \end{aligned}$$

На управляющее воздействие $m(t)$ наложено ограничение

$$\int_0^{t_f} m^2(t) dt = K$$

и $m(t) = 0$ для $t > t_f$, где t_f обозначает время регулирования.

Произвести расчет оптимального регулятора, минимизирующего функцию затрат энергии на управление

$$I = \int_0^{t_f} |m(t)| dt.$$

5.4. Линейный процесс n -го порядка описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}m(t)$$

с начальными условиями, задаваемыми вектором $\mathbf{x}(0)$.

На управляющее воздействие $m(t)$ наложено ограничение

$$\int_0^{t_f} m^2(t) dt = K.$$

Произвести расчет оптимального регулятора, позволяющего перевести процесс из заданного начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в нулевое состояние за минимальное время.

5.5. Используя вариационное исчисление, рассмотреть проблему синтеза релейной системы управления.

5.6. Получить решение проблемы Майера, сформулированной в параграфе 5.1.

5.7. Простая система второго порядка описывается уравнением

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = m(t).$$

На выходную переменную системы $x(t)$ наложено ограничение

$$x(t) \geq 0.$$

Построить оптимальный регулятор, минимизирующий показатель качества

$$I = \int_t^T \{[x(t) - x^d(t)]^2 + [m(t)]^2\} dt,$$

где $x^d(t)$ обозначает желаемый выход системы.

5.8. Для системы второго порядка, описываемой уравнением

$$\ddot{x}(t) = m(t),$$

найти условие для получения минимума показателя качества

$$I = \int_t^{t_f} \{[x(t) - x^d(t)]^2 + [m(t)]^2\} dt.$$

На координату состояния $x(t)$ наложено ограничение

$$x(t) \geq 0.$$

5.9. Процесс второго порядка описывается уравнением

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = m(t)$$

с граничными условиями $x(0) = x_0$; $x(t_f) = 0$.

На управляющее воздействие наложено ограничение

$$\int_0^{t_f} m^2(t) dt = 1.$$

Определить управляющее воздействие $m(t)$, переводящее процесс из заданного начального состояния в состояние равновесия за минимальное время.

5.10. Для системы второго порядка, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = m(t),$$

где на управляющее воздействие наложено ограничение

$$\int_0^{t_f} m^2(t) dt = 10,$$

определить оптимальное управляющее воздействие $m^0(t)$, перемещающее систему из начального состояния $\dot{x}(0) = 1$, $x(0) = 2$ в состояние равновесия $x(t_f) = \dot{x}(t_f) = 0$ за минимальное время.

5.11. Показать, что для получения экстремума интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F [x_1(t), \dot{x}_1(t), \dots, x_1^{(n)}(t); x_2(t), \dot{x}_2(t), \dots, x_2^{(n)}(t); \dots; x_r(t), \dot{x}_r(t), \dots, x_r^{(n)}(t); t] dt$$

необходимо выполнение основного условия

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(n)}} = 0,$$

где F — дифференцируемая подынтегральная функция, начальная и конечная точки фиксированы и

$$x_i^{(n)}(t) \triangleq \frac{d^n x_i(t)}{dt^n}.$$

5.12. Найти условия трансверсальности в задаче определения экстремума интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F [x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t), t] dt$$

с граничными точками $P_0(x_0, y_0, t_0)$ — фиксированной и $P_1(x_1, y_1, t_f)$ — подвижной для случаев:

- (а) $P_1(x_1, y_1, t_f)$ может перемещаться вдоль некоторой кривой $x_1 = c_1(t_f)$ и $y_1 = c_1(t_f)$;
 (б) $P_1(x_1, y_1, t_f)$ может перемещаться по поверхности $x_1 = \Phi(y_1, t_f)$.

6.1. Динамика линейного процесса описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + d_i m(t),$$

где x_i обозначают координаты состояния системы; a_{ij} и d_i — постоянные коэффициенты.

На управляющее воздействие наложено ограничение

$$|m(t)| \leq 1.$$

Показать, что оптимальное управляющее воздействие, минимизирующее функционал

$$I = \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2(t) + \lambda m^2(t) \right] dt,$$

дается выражением

$$m(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^n d_i p_i & \text{для } \left| \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^n d_i p_i \right| \leq 1; \\ 1 & \text{для } \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^n d_i p_i \geq 1; \\ -1 & \text{для } \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^n d_i p_i \leq -1, \end{cases}$$

и оптимальный закон управления

$$m(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^n \beta_i x_i & \text{для } \left| \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right| \leq 1; \\ 1 & \text{для } \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \geq 1; \\ -1 & \text{для } \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \leq -1, \end{cases}$$

где все p_i определены в параграфе 6.2;

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n d_j \mu_{ij};$$

$$p_i(0) = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j(0).$$

6.2. Линейный процесс характеризуется уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{m}(t),$$

где $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Показать, что существует оптимальная стратегия управления \mathbf{m} , минимизирующая интеграл

$$\int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^d(t)] dt,$$

где $\mathbf{x}^d(t)$ — вектор желаемого состояния, и существует также оптимальное релейное управление, т. е.

$$|m_i| = M_i$$

для всех t в интервале (t_0, t_f) .

6.3. Система второго порядка характеризуется дифференциальным уравнением

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{m}(t),$$

где на управляющее воздействие $\mathbf{m}(t)$ наложено ограничение

$$|\mathbf{m}(t)| \leq M$$

при всех t .

Определить оптимальное управляющее воздействие $m^0(t)$, перемещающее систему из заданного начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в состояние равновесия за минимальное время.

6.4. Для системы упражнения 6.3 определить оптимальное управляющее воздействие $m^0(t)$, перемещающее систему из заданного начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в состояние равновесия с минимальной полной затратой топлива на перемещение. Потребление топлива определяется выражением

$$J = \int_0^{t_f} |m(t)| dt.$$

Момент окончания перехода $t = t_f$ заранее неизвестен.

6.5. Для системы второго порядка задачи 6.3 найти оптимальное управляющее воздействие $m^0(t)$, минимизирующее потребление топлива в процессе перемещения системы из заданного начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в состояние равновесия за время t_f . Потребление топлива дается интегралом

$$I = \int_0^{t_f} |m(t)| dt.$$

На время перехода t_f наложено ограничение

$$t_f \leq \alpha t^0,$$

где α — заданный коэффициент > 1 ; t^0 — минимальное время, требуемое для перемещения из заданного начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в состояние равновесия, найденное в упражнении 6.3.

6.6. Система второго порядка с запаздывающим управляющим воздействием описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -ax_1(t) - bx_2(t) + m(t - \tau),$$

где a и b — заданные константы; τ — время задержки приложения управляющего воздействия, на которое наложено ограничение $|m(t)| \leq 1$ для всех t .

Определить оптимальное управляющее воздействие $m^0(t)$, перемещающее систему из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия за минимальное время.

6.7. Для системы упражнения 6.6 определить оптимальное управляющее воздействие $m^0(t)$, минимизирующее полную энергию, требуемую для перемещения системы из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия. Показатель качества, определяющий полную энергию, имеет вид

$$I = \int_0^{t_f} m^2(t) dt,$$

где t_f обозначает время достижения системой состояния равновесия.

6.8. Система второго порядка с запаздыванием описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -a_1 x_1(t) - b_1 x_1(t - \tau), \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2 x_1(t) - b_2 x_2(t) + m(t) \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10}, \\ x_2(0) &= c(t), \\ x_1(t_f) &= 0, \quad \text{для } -\tau \leq t \leq 0, \\ x_2(t_f) &= 0. \end{aligned}$$

Определить оптимальное управляющее воздействие $m^0(t)$, перемещающее систему из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия за минимальное время. На управляющее воздействие наложено ограничение $|m(t)| \leq 1$ для всех t .

6.9. Для системы задачи 6.8 определить оптимальное управляющее воздействие $m^0(t)$, минимизирующее полную энергию, требуемую для перемещения системы из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия. Показатель качества системы, определяющий затраты энергии, имеет вид

$$I = \int_0^{t_f} m^2(t) dt.$$

Система достигает состояния равновесия в момент $t = t_f$.

6.10. Система n -го порядка описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t); t] + \mathbf{m}(t),$$

где \mathbf{x} , \mathbf{f} , \mathbf{m} — n -мерные векторы.

Показать, что если $\|\mathbf{m}(t)\| \leq 1$ для всех $t \leq 0$ и величина

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)}$$

остается постоянной вдоль траекторий движения однородной системы $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t); t]$, то оптимальный закон управления, минимизирующий время — 29*

хода, которое требуется для перемещения системы из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия, и интеграл

$$I = \int_0^{t_f} \|m(t)\| dt,$$

определяются выражением

$$m^0(t) = -\frac{x(t)}{\|x(t)\|}.$$

6.11. Для системы второго порядка, описываемой уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ x_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) + m(t), \end{aligned}$$

где на управляющее воздействие наложено ограничение $|m(t)| \leq 1$ и начальные условия задаются вектором $x(0)$, определить оптимальное управляющее воздействие $m^0(t)$, минимизирующее ошибку системы в конечной точке траектории:

$$e(T) = x^d(T) - x_1(T),$$

где $x^d(T)$ — желаемое положение и $x_1(T)$ — фактическое положение системы в конечный момент времени $t = T$.

6.12. Для системы посадки самолета, рассмотренной в примере 7.4—3, желательно чтобы ошибка в высоте к моменту касания посадочной полосы была сведена до минимально возможного значения без превышения предельных углов отклонения руля высоты. Желаемое свойство системы можно получить, минимизируя показатель ошибки

$$I(m) = \int_0^{t_f} \{[x_1^d(t_f) - x_1(t_f)]^2 - m^2(t)\} dt,$$

где $t_f = 20$ сек и обозначает время касания посадочной полосы.

Найти оптимальный закон управления для этой системы управления конечным состоянием.

6.13. Процесс характеризуется векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = X(x, t) + D(t)m(t),$$

где на управляющие воздействия наложено ограничение

$$\int_0^T g(m) dt = c$$

и c — заданная константа.

Определить вектор оптимального управления m^0 , минимизирующего показатель качества

$$I = x_1(T) + x_2(T).$$

6.14. Для системы управления второго порядка, описываемой уравнением

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = m(t)$$

с начальными условиями $x(0)$ и $\dot{x}(0)$, где на управляющее воздействие наложено ограничение $|m| \leq 1$, определить оптимальное управляющее воздействие $m^0(t)$ и оптимальный закон управления $m^0(x, \dot{x})$, которые переводят систему из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия за минимальное время. Построить кривую переключения и траекторию движения из точки с начальными координатами $x(0) = 1$ и $\dot{x}(0) = 2$.

6.15. Выполнить в качестве семестрового задания работу по сравнению принципа максимума Понтрягина с проблемой Майера.

6.16. Дано уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

решение которого имеет вид $x(t_0) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$, где $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ с $\Phi(t_0) = 1$, и сопряженное уравнение

$$\dot{y}(t) = -A'(t)y(t),$$

решение которого имеет вид $y(t) = \Psi(t, t_0)y(t_0)$, где $\Psi(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{\Psi}(t) = -A(t)\Psi(t)$ с $\Psi(t_0) = 1$. Показать, что

$$\dot{\Psi}(t) = [\Phi^{-1}(t)]'.$$

6.17. Для системы управления температурой, описанной в примере 4.31, используя принцип максимума, произвести расчет оптимального регулятора, переводящего систему из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия за минимальное время.

6.18. Для той же системы управления температурой, описанной в упражнении 4.31, используя принцип максимума, произвести расчет оптимального регулятора, минимизирующего интеграл от квадрата ошибки на интервале времени перемещения системы из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия.

6.19. Решить задачу 4.32 при использовании принципа максимума.

6.20. Для системы управления креном самолета, рассмотренной в упражнении 4.33, используя принцип максимума, произвести расчет оптимального регулятора, переводящего систему из заданного начального состояния в состояние равновесия за минимальное время.

7.1. Динамика процесса n -го порядка характеризуется уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dm(t)$$

с граничными условиями

$$x_1(0) = x_{10} \quad x_2(0) = x_{20} \dots x_n(0) = x_{n0} \quad m(0) = m_0,$$

$$x_1(\infty) = x_2(\infty) = \dots = x_n(\infty) = m(\infty) = 0.$$

Определить оптимальный закон управления, минимизирующий показатель качества

$$I(m) = \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k^2(t) + \lambda m^2(t) \right] dt$$

при использовании: (а) вариационного исчисления; (б) принципа максимума; (в) метода динамического программирования.

7.2. Решить упражнение 7.1, наложив на управляющее воздействие ограничение

$$|m| \leq M_1 \quad \text{и} \quad |\dot{m}| \leq M_2,$$

где M_1 и M_2 — положительные числа.

7.3. Решить упражнение 7.1, наложив на управляющее воздействие ограничение

$$|m(t)| \leq 1$$

для всех t на интервале управления.

7.4. Процесс описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = m(t),$$

где на управляющее воздействие наложено ограничение

$$|m(t)| \leq M$$

для всех t .

Определить оптимальный закон управления $m^0(x)$, переводящего процесс из заданного начального состояния в состояние равновесия за минимальное время.

7.5. Для процесса упражнения 7.4 определить оптимальный закон управления $m^0(x)$, переводящего процесса из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия при минимальном полном расходе топлива в ходе оптимального управления. Потребление топлива дается выражением

$$I = \int_0^{t_f} |m(t)| dt.$$

Конечный момент времени t_f окончания перехода заранее не известен.

7.6. Процесс характеризуется дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x}(t) + x(t) = m(t)$$

с начальными условиями $x(0) = c_1$ и $\dot{x}(0) = c_2$.

Определить оптимальную политику управления $m^0(k)$, минимизирующего показатель качества

$$I(x) = \int_0^T [x^2(t) + \dot{x}^2(t)] dt.$$

7.7. Решить задачу 5.4. Используя метод динамического программирования, определить оптимальный закон управления m^0 , переводящего процесс из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия за минимальное время.

7.8. Решить упражнение 5.9. Определить оптимальное управляющее воздействие, используя метод динамического программирования.

7.9. Определить оптимальное управляющее воздействие для процесса, описанного в упражнении 6.6, пользуясь методом динамического программирования.

7.10. Упражнение 6.7 повторить с использованием метода динамического программирования.

7.11. Для системы второго порядка упражнения 6.8 определить оптимальное управляющее воздействие $m^0(t)$ по методу динамического программирования.

7.12. Выполнить упражнение 6.9 с использованием динамического программирования.

7.13. Произвести расчет системы управления с минимизацией ошибки в конечном состоянии, описанной в задаче 6.11, используя метод динамического программирования.

7.14. Используя метод динамического программирования, произвести расчет системы управления посадкой самолета, описанной в упражнении 6.12.

7.15. Выполнить в качестве семестрового задания работу по сравнению принципа максимума и динамического программирования.

7.16. Для системы управления температурой упражнения 4.31, пользуясь методом динамического программирования, произвести расчет оптимального регулятора, обеспечивающего перемещение системы из заданного начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия за минимальное время.

7.17. Для системы управления температурой (упражнение 4.31), используя метод динамического программирования, произвести расчет оптимального регулятора, минимизирующего интеграл от квадрата ошибки движения во время перехода из начального состояния $x(0)$ в состояние равновесия.

7.18. Упражнение 4.32 повторить, применив метод динамического программирования.

7.19. Для системы управления креном самолета (упражнение 4.33), используя метод динамического программирования, произвести расчет оптимального регулятора, обеспечивающего перемещение системы из заданного начального состояния в состояние равновесия за минимальное время.

7.20. Линейный процесс n -го порядка с управлением по многим входам характеризуется уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x + D(t)m(t).$$

Определить оптимальный закон управления $m^0(x)$, минимизирующий квадратичный показатель качества

$$I(m) = \int_0^T [x'Q(t)x + m'H(t)m] dt,$$

где $Q(t)$ и $H(t)$ — симметрические матрицы размеров $n \times n$ и $r \times r$ соответственно.

7.21. Динамика сервомеханизма может быть приближенно описана дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) = m(t),$$

где коэффициент r является случайной величиной и на управляющее воздействие m наложено ограничение

$$|m(t)| \leq 1$$

для всех t . Случайная величина r равна 10 с вероятностью p и равна -10 с вероятностью $1-p$. Вероятность p неизвестна; известно только, что p может принимать два значения: $p_1 = 0,2$ и $p_2 = 0,7$ с априорными вероятностями $\zeta = 0,6$ и $1-\zeta = 0,4$ соответственно. Распределение величины r показано на рис. 7.7—1. Период прерывания $\tau = 1$ сек и начальные условия $x(0) = 1$ и $\dot{x}(0) = 1$.

Определить оптимальную стратегию управления, минимизирующего критерий качества

$$J = E \{x^2(10\tau)\}.$$

7.22. Для системы управления посадкой самолета, рассмотренной в примере 7.4—3, определить оптимальную стратегию управления, минимизирующую показатель качества

$$I(m) = \sum_{k=1}^{20} \{0,01 [x_1^d(k) - x_1(k)]^2 - m^2(k-1)\},$$

и построить оптимальную траекторию посадки. Положить, что K — коэффициент усиления для короткопериодического движения является случайной величиной, равной $-0,5 \text{ сек}^{-1}$ с вероятностью p и равной $-1,0 \text{ сек}^{-1}$ с вероятностью $1 - p$. Известно, что p может принимать два значения: $p_1 = 0,6$ и $p_2 = 0,2$ с априорными вероятностями 0,8 и 0,2 соответственно. Период прерывания $T = 1 \text{ сек}$. Рассмотреть также эффект изменения высоты самолета в начальный момент посадки на траекторию снижения.

8.1. Линейный процесс n -го порядка, управляемый по одному входу, характеризуется уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}m(t).$$

Показать, что оптимальный закон управления, минимизирующий квадратичный показатель качества

$$I_n = \sum_{k=1}^N \{[\mathbf{x}^d(k) - \mathbf{x}(k)]' \mathbf{Q} [\mathbf{x}^d(k) - \mathbf{x}(k)]\},$$

дается выражением

$$m^0(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(N - k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}(N - k)\mathbf{x}^d(k).$$

Получить рекуррентные соотношения для вычисления матриц

$$\mathbf{B}(N - k) \text{ и } \mathbf{C}(N - k).$$

8.2. Повторить упражнение 8.1 для процесса n -го порядка, управляемого по многим входам, характеризуемого дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}m(t).$$

Определить оптимальный закон управления $m^0(\mathbf{x})$.

8.3. Линейный процесс в дискретной форме характеризуется уравнением переходных состояний

$$\mathbf{x}(k+1)T = \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{h}(T)m(kT).$$

(а) Показать, что оптимальный закон управления, минимизирующий квадратичный показатель качества

$$I_N = \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{x}(kT)' \mathbf{Q}\mathbf{x}(kT)],$$

дается выражением

$$m^0(kT) = \mathbf{B}\mathbf{x}(kT),$$

где

$$\mathbf{B} = - \frac{\mathbf{h}'(T)[\mathbf{Q} + \mathbf{P}]\Phi(T)}{\mathbf{h}'(T)[\mathbf{Q} + \mathbf{P}]\mathbf{h}(T)}$$

(б) Получить рекуррентное соотношение для вычисления матрицы \mathbf{h} .

8.4. Найти условия, при которых квадратичный показатель качества

$$I_N = \sum_{k=1}^N \{[\mathbf{x}^d(k) - \mathbf{x}(k)]' \mathbf{Q}' [\mathbf{x}^d(k) - \mathbf{x}(k)]\}$$

характеризует (а) управление, оптимальное по быстродействию, (б) управление конечным состоянием.

8.5. Дать более полное доказательство того, что в случае неизмеримых координат состояния оптимальный закон управления, минимизирующий ожидаемое среднее значение показателя качества (8.3—4), дается выражением

$$\hat{m}^0(k/k) = \mathbf{B}(N-k)\hat{\mathbf{x}}(k/k).$$

Оценка $\hat{\mathbf{x}}(k/k)$ вектора состояния находится по измеренным значениям $y(j)$, $y(j-1)$, ..., $y(0)$ вектора выхода, (где $j \leq k$) таким образом, чтобы эта оценка доставляла минимум для математического ожидания

$$E \{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k/j)]' [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k/j)]\}.$$

8.6. Для линейного процесса, характеризуемого уравнением

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 11x + 6x = m,$$

произвести расчет цифрового регулятора, минимизирующего показатель качества

$$I_N = \sum_{k=1}^N [r(k) - x_1(k)]^2,$$

где x_1 обозначает выход процесса; r — входное воздействие в виде единичной ступенчатой функции. Период прерывания равен 1 сек.

8.7. Методом математической индукции показать, что соотношение (8.2—13) справедливо.

8.8. Линейный процесс характеризуется передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)}.$$

Класс входных воздействий, по отношению к которым необходимо оптимизировать систему, определяется условием $d^2r(t)/dt^2 = 0$. Период прерывания равен 1 сек. Произвести расчет цифрового регулятора, минимизирующего показатель качества

$$I_N = \sum_{k=1}^N [r(k) - c(k)]^2,$$

где r — вход и c — выход системы.

8.9. Для линейного процесса упражнения 8.8 произвести расчет оптимального цифрового регулятора, минимизирующего показатель качества

$$I_N = \sum_{k=1}^N \{[r(k) - c(k)]^2 + [\dot{r}(k) - \dot{c}(k)]^2\}.$$

8.10. Линейный дискретный процесс характеризуется уравнением переходных состояний

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(1)\mathbf{x}(k) + \mathbf{h}(1)m(k).$$

Период прерывания равен 1 сек. На управляющее воздействие наложено ограничение

$$|m| \leq 1.$$

Произвести расчет оптимального цифрового регулятора, минимизирующего показатель качества

$$I_N = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}'(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k).$$

8.11. Для дискретного процесса n -го порядка упражнения 8.10, на координаты состояния которого наложены ограничения

$$|x_i| \leq X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

произвести расчет оптимального цифрового регулятора, минимизирующего показатель качества из предыдущего упражнения.

8.12. Повторить упражнение 8.11, наложив на управляющее воздействие ограничение

$$|m| \leq 1.$$

8.13. Динамика процесса второго порядка характеризуется уравнением

$$\ddot{x}(t) + [x(t) - 1] \dot{x}(t) + x(t) = m(t)$$

с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$. На управляющее воздействие наложено ограничение

$$|m(t)| \leq 1$$

для всех t . Период прерывания равен 1 сек.

Произвести расчет передаточных функций оптимальных цифровых регуляторов, минимизирующих показатели качества

$$(a) \quad I_{20} = \sum_{k=1}^{20} \{x^2(k) + [\dot{x}((k) - 10)]^2\};$$

$$(б) \quad I_{20} = \sum_{k=1}^{20} \{x^2(k) + 10m^2(k-1)\};$$

$$(в) \quad I_{20} = x^2(20) + \sum_{k=1}^{20} m^2(k-1).$$

8.14. Для системы управления температурой, описанной в задаче 4.31, найти передаточную функцию оптимального цифрового регулятора, минимизирующего сумму квадратов дискретных значений ошибки

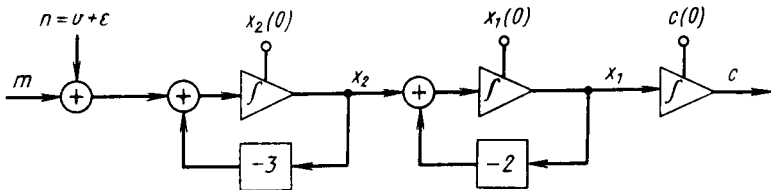
$$I_N = \sum_{k=1}^N [e(k)]^2$$

на интервале времени перехода системы из начального состояния $\mathbf{x}(0) = 1$ в состояние равновесия. Период прерывания равен 1 сек.

8.15. Для системы управления креном самолета, описанной в задаче 4.33, найти передаточную функцию оптимального цифрового регулятора, минимизирующего сумму квадратов дискретных значений ошибки системы

$$I_N = \sum_{k=1}^{\infty} [e(k)]^2.$$

8.16. Стационарный процесс третьего порядка можно описать схемой в переменных состояния, показанной на рис. У8.16. Входное воздействие r задается ступенчатой функцией, принимающей значения в пределах от -10 до $+10$. Кроме этого, на вход системы поступает случайное независимое возмущающее воздействие n , среднее значение амплитуды которого равно ϵ . Возмущающее воздействие n можно представить в виде $n = v + \epsilon$, где v обозначает независимую случайную переменную с нулевым средним значением. Выход системы c



может быть измерен непосредственно. Измерение координаты x_1 вносит некоторый шум, который можно рассматривать как независимую случайную переменную с нулевым средним значением и стандартным отклонением, равным 0,25. Координата x_2 недоступна для измерения. Период прерывания равен 1 сек.

Произвести расчет оптимального цифрового регулятора, минимизирующего показатель ошибки

$$I_N = \sum_{k=1}^N [c(k) - r(k)]^2.$$

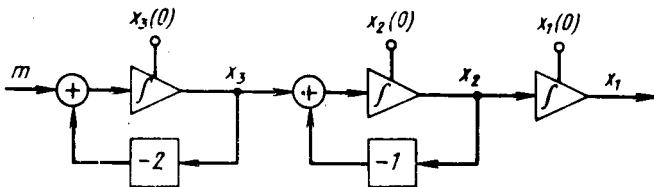
8.17. Линейная система управления характеризуется передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

На вход системы поступает возмущающее воздействие со спектральной плотностью

$$S_1(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 0,36}.$$

Входное задающее воздействие имеет вид ступенчатой функции и может принимать любое значение в пределах от -1 до $+1$. Задающее воздействие



искажено помехой, статистически не зависящей от возмущающего воздействия, спектральная плотность которой

$$S_2(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 2,25}.$$

Схема системы в переменных состояния показана на рис. У8.17. Предполагается, что выход системы — координата x_1 — может быть измерена непосредственно; при изменении координаты x_2 измерительный прибор вносит аддитивную случайную ошибку, имеющую нулевое среднее значение и стандартное отклонение 0,8; координата x_3 недоступна для измерения. Ошибки измерения предполагаются независимыми от времени.

Произвести расчет оптимального цифрового регулятора, минимизирующего ожидаемое среднее значение суммы квадратов дискретных значений ошибки системы

$$J_N = E \left\{ \sum_{k=1}^N [r(k) - x_1(k)]^2 \right\}.$$

Предполагается, что период прерывания $T = 1$ сек и начальные условия $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$.

8.18. Рассмотреть процесс n -го порядка, описываемый уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{m}(t) + \mathbf{n}(t),$$

в котором $\mathbf{m}(t)$ — r -мерный и $\mathbf{n}(t)$ — s -мерный векторы управляющих и возмущающих воздействий соответственно.

На управляющие воздействия наложены ограничения

$$|m_i| \leq M_i, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Некоторые из координат состояния процесса недоступны для измерения. Измеряемые выходные переменные связаны с координатами процесса и управляющими воздействиями соотношением

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{m}.$$

где \mathbf{y} — p -мерный вектор выхода; $p < n$.

Определить оптимальный закон управления, минимизирующий ожидаемое среднее значение квадратичного показателя качества

$$I_N = \sum_{k=1}^N [\mathbf{x}'(k) \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \lambda \mathbf{m}'(k-1) \mathbf{H}\mathbf{m}(k-1)],$$

где \mathbf{Q} и \mathbf{H} — положительно определенные симметрические матрицы.

Предполагается, что период прерывания равен 1 сек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aoki M. On Optimal and Sub-optimal Policies in the Choice of Control Forces for Final-value Systems. IRE Trans. Autom. Control, vol. AC-5, no. 3, pp. 171-178, August, 1960.
2. Dynamic Programming approach to a Final-value Control System with a Random Variable Having an Unknown Distribution Function, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC-5, no. 4, pp. 270-283, September, 1960.
3. On Minimum of Maximum Expected Deviation from an Unstable Equilibrium Position of Randomly Perturbed Control Systems, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC-7, no. 2, pp. 1-12, March, 1962.
4. Integrals of Absolute Deviations in Linear Control Systems, AIEE Trans. Appl. Ind., vol. 81, pp. 125-128, July, 1962.
5. On some Approximation Techniques in Solving Optimization Problems in Control systems, J. Basic Eng., 1963.
6. Aris R. «The Optimal Design of Chemical Reactors: A Study in Dynamic Programming», Academic Press Inc., New York, 1961.
7. Astrom K. J., J. E. Bertram, et al. Current States of Linear Control Theory, SIAM J. Control, 1963.
8. Athans M. Bang-Bang Control for Tracking Systems, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC-7, no. 3, pp. 77-78, April, 1962.
9. Minimum-fuel Feedback Control Systems: Second-order Case, IEEE Trans. Appl. Ind., vol. 82, 1963.
10. Optimal Control for Linear Time-invariant Plants, AIEE Trans. appl. Ind., vol. 82, pp. 321-325, January, 1963.
11. Time-, Fuel - and Energy-optimal Control of Nonlinear Norm-invariant Systems, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-8, no. 3, pp. 196-202, July, 1963.
12. Athans M., P. L. Falb and Lacos R. T. Time-optimal Velocity Control of a Spinning Space Body, AIEE Trans. Appl. Ind., vol. 82, 1963.
13. Athans M., and Smith O. J. M. Theory and Design of High-order Bang-Bang Control Systems, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC-6, no. 2, pp. 125-134, May, 1961.
14. Bellman R. Dynamic Programming and Lagrange Multipliers, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., vol. 42, pp. 767-769, 1956.
15. On the Application of the Theory of Dynamic Programming to the Study of Control Processes, Proc. Symp. Nonlinear Circuit Analysis, April, 1956, pp. 199-213.
16. Беллман Р. Динамическое программирование. Изд. иностр. лит., М., 1960.
17. Notes on Control Processes: On the Minimum of Maximum Deviation, Quart. Appl. Math., vol. 14, pp. 419-423, January, 1957.
18. Dynamic Programming and the Computational Solution of the Feedback Design Control Problems, AIEE Spec. Publ., T-101, pp. 22-25, 1958.
19. Dynamic Programming and Stochastic Control Processes, Inform. Control, vol. 1, pp. 228-239, 1958.
20. Some New Techniques in the Dynamic Programming Solution of Variational Problems, Quart. Appl. Math., vol. 15, pp. 295-305, 1958.

21. «Introduction to Matrix Algebra», McGraw—Hill book Company, New York, 1960.
22. «Adaptive Control Processes», Princeton University Press, Princeton, N. J., 1961. (Имеется русский перевод. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. «Наука», М., 1964)
23. Bellman R., and K. L. Cooke. «Differential—difference Equations», Academic Press Inc., New York, 1963.
24. Bellman R., I. Glicksberg, and O. Gross. On the Bang—Bang Control Problem, Quart. J. Appl. Math., vol. 14, 1956.
25. Bellman R. and R. Kalaba. On Adaptive Control Processes, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC—4, pp. 1—9, November, 1959.
26. Dynamic Programming and Adaptive Processes: Mathematical Foundation, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC—5, pp. 5—10, January, 1960.
27. Berkovitz L. Variational Methods in Problems of Control and Programming, J. Math. Analysis Appl., vol. 3, pp. 145—169, 1961.
28. Bertram J. E. Control by Stochastic Adjustment, AIEE Trans. Appl. Ind., vol. 79, pp. 1—6, January, 1960.
29. Bliss G. A. «Lectures on the Calculus of Variations», Chicago University Press, Chicago, 1946.
30. Болтянский В. Г. Принцип максимума в теории оптимальных процессов. Док. АН СССР, т. 119, 1958, № 6, стр. 1070—1073.
31. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Принцип максимума в теории оптимальных процессов. Труды I Международного конгресса ИФАК. Теория дискретных оптимальных и самонастраивающихся систем. Изд. АН СССР, Москва, 1961.
32. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов. Док. АН СССР, т. 110, 1956, № 1, стр. 7—10).
33. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. Теория оптимальных процессов. I. Изв. АН СССР, серия матем., т. 24, 1960, № 1, стр. 3—42.
34. Болтянский В. Г.¹ Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1966.
35. Bolza O. «Lectures on the Calculus of Variations», Dover Publications, Inc., New York, 1960.
36. Bryson A. E. and W. F. Denham. Multivariable Terminal Control for Minimum Square Deviation from a Nominal Path, J. Aerospace Sci, 1962.
37. Bushaw D. Optimal Discontinuous Forcing, in «Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations», vol. 4, pp. 29—58, 1958, Princeton University Press, Princeton, N. J.
38. Бутковский А. Г. Принцип максимума для оптимальных систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, т. 22, 1961, № 10, стр. 1288—1301.
39. Chandaket P. and C. T. Leondes. Syntheses of Quasi—stationary Optimum Nonlinear Control Systems, I and II, AIEE Trans. Appl. Ind., vol. 81, pp. 313—324, January, 1962.
40. Chang. J. W. A Program in the Synthesis of Optimal Systems Using Maximum Principle. Automation Remote Control, Vol. 22, no. 10, pp. 1170—1176, March, 1962.
41. Chang S. S. L. Digitized Maximum Principle, Proc. IRE, vol. 48, pp. 2030—2031, December, 1960.
42. Чанг Ш. С. Л. Синтез оптимальных систем автоматического управления. М., «Машиностроение», 1964.
43. Chestnut H., R. R. Duersch and W. M. Gaines. Automatic Optimizing of Poorly Defined Processes, I, AIEE Trans Appl. Ind., 1963.
44. Clement P. R. On the Bang—Bang Regulator Problem for Linear Sampler—data Systems, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC—8, pp. 180—182, April, 1963.

¹ Добавлено редактором.

45. Coddington E. A. and N. Levinson. «Theory of Ordinary Differential Equations», McGraw—Hill Book Company, New York, 1955.
46. Cunningham W. J. An Introduction to Lyapunov's Second Method, AIEE Trans. Appl. Ind., vol. 81, pp. 325—332, January, 1962. Desoer, C. A.
47. Desoer C. A. The Bang—Bang Servo Problem Treated by Variational Techniques. Inform. Control, vol. 2, pp. 333—348, December, 1959.
48. Десоер К. А. Принцип максимума Понтрягина и принцип оптимальности. «Механика», 1962, № 5, стр. 15—21.
49. Desoer C. A. and J. Wing. An Optimal Strategy for a Saturating Sampled—data System, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC—6, pp. 5—15, February, 1959.
50. A Minimal Time Discrete System, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC—6, no. 2, 1961.
51. Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled—data (General Theory), J. Franklin Inst., vol. 271, pp. 208—228, September, 1961. Dreyfus, S. E.
52. Dreyfus S. E. Dynamic Programming and the Calculus of Variations, J. Math. Analysis Appl., vol. 1, no. 2, pp. 228—239, September, 1960.
53. Computation Aspects of Variational Problems, J. Math. Analysis Appl., vol. 3, 1961.
54. Ellert F. J. and C. W. Merriam III. Synthesis of Feedback Control Optimization Theory: An Example, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC—8, pp. 89—103, April, 1963.
55. Фельдбаум А. А. Теория дуального управления. Автоматика и телемеханика, т. 21, 1960, № 9, стр. 1240—1249; № 11, стр. 1453—1464; т. 22, 1961, № 1, стр. 3—16; № 2, стр. 129—142.
56. Florentin J. J. Optimal Control of Continuous Time, Markov, Stochastic Systems, J. Electron. Control, vol. 10, pp. 473—488, June, 1961.
57. Friemer M. A Dynamic Programming Approach to Adaptive Control Processes, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC—4, no. 2, pp. 10—15, 1959.
58. Friedland B. A. Mathematical Theory of Adaptive Control Processes. Proc. Natl. Acad. Sci., vol. 45, no. 8, pp. 1288—1290, August, 1960.
59. A Minimum Response—time Controller for Amplitude and Energy Constraints, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC—7, pp. 73—74, January, 1962.
60. Фридлинд. Структура оптимальных систем регулирования. «Техническая механика», серия Д, 1962, № 1, стр. 3—17.
61. Fuller A. T. Optimization of Nonlinear Control Systems with Transient Inputs, J. Electron. Control, vol. 8, pp. 465—479, 1960.
62. Phase Space in the theory of Optimum Control, J. Electron. Control, vol. 8, pp. 381—400, 1960.
63. Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов в линейных системах. Док. АН СССР, т. 116, 1957, № 1, стр. 9—11.
64. Гамкрелидзе Р. В. К общей теории оптимальных процессов. Док. АН СССР, т. 123, 1958, № 2, стр. 223—226.
65. Гамкрелидзе Р. В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах. Изв. АН СССР, серия матем., т. 22, 1958, № 4, стр. 449—474.
66. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, Изд. 2-е, М., «Наука», 1966.
67. Gavrilovic M., R. Petronic and D. Siljak. Adjoint Method in the Sensitivity Analysis of Optimal Systems, J. Franklin Inst., vol. 276, no. 1, pp. 26—38, July, 1963.
68. Gilbert E. G. A Method for the Symbolic Representation and Analysis of Linear Periodic Feedback Systems, AIEE Trans., pt. II, vol. 79, pp. 512—523, January, 1961.
69. Controllability and Observability in Multivariable Control Systems, SIAM J. Control, 1963.
70. Goldstein H. «Classical Mechanics», Addison—Wesley Publishing Company, Inc., Reading Mass., 1951.

71. Gould L. A. and W. Kipiniak. Dynamic Optimization and Control of a Stirred—tank Chemical Reactor, AIEE Trans. Commun. Electron., vol. 80, pp. 734—746, January, 1961.

71а. Гришин В. П. О вычислительном методе, связанном с процессом автоматической адаптации. Автоматика и телемеханика, т. 23, 1962, № 12.

72. Guignabodet J. Dynamic Programming: Cumulative Errors in the Evaluation of an Optimal Control Sequence, J. Basic Eng., 1963.

73. Hadley G. «Linear Algebra», Addison—Wesley Publishing Company, Inc., Reading Mass., 1961.

74. Halmos P. R. «Finite—dimensional Vector Spaces», D. Van Nostrand Company, Nic., Princeton, N. J., 1958.

75. Harvey C. A. and E. B. Lee. On the Uniqueness of Time Optimal Control for Linear Processes, J. Math. Analysis Appl., 1962.

76. Ho Y. C. A Computational Technique for Optimal Control Problems with State Variable Constraint, J. Math. Analysis Appl., 1961.

77. Solution Space Approach to Optimal Control Problem, J. Basic Eng., ser. D. vol. 83, pp. 53—58, March, 1961.

78. Хо Ю-ши. Метод последовательных приближений для оптимальных систем регулирования с ограничением по управляющему сигналу. «Техническая механика», серия Д, 1962, № 1, стр. 44—53.

79. Hoffman K. and R. Kunze. «Linear Algebra», Prentice—Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1961.

80. Hsieh H. C. On the Final Value and Minimum Effort Systems. J. Franklin Inst. vol. 276, no. 2, pp. 154—167, August, 1963.

81. Hsu J. C. and W. E. Meserve. Decision—making in Adaptive Control Systems, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC—7, pp. 24—32, January, 1962.

82. Joseph, P. D. and J. T. Tou. On Linear Control Theory, AIEE trans., vol. 80, pp. 193—196, 1961.

83. Kallay N. Dynamic Programming and Nuclear Reactor Design, Nucl. Sci. Eng., October, 1960.

84. An Example of a Application of Dynamic Programming to the Design of Optimal Control Programs, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC—7, no. 3, pp. 10—21, April, 1962.

85. Kalman R. E. Optimal Nonlinear Control of Saturation Systems by Intermittent Action, IRE WESCON, Conv. Record, 1957, pt. IV, pp. 130—135.

86. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, J. Basic Eng., vol. 82, pp. 35—45, March, 1960.

87. Contributions to the Theory of Optimal Control, Bol. Soc. Mat. Mex., 1960, pp. 102—119.

8. Калман Р. Об общей теории систем управления. Тр. I Международного конгресса ИФАК. Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем. Изд. АН СССР, М., 1961.

89. Mathematical Description of Linear Dynamic Systems, SIAM J. Control, 1963.

90. Kalman R. E. and J. E. Bertram. General Synthesis Procedure for Computer Control of Singleloop and Multi—loop Linear systems, AIEE Trans., pt. II, vol. 77, pp. 602—609, 1958.

91. A Unified Approach to the Theory of Sampling Systems, J. Franklin Inst., vol. 267, p. 408, 1959.

92. Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov, J. Basic Eng., ser D, vol. 82, pp. 371—393, 1960.

93. Kalman R. E. and R. W. Koepcke. Optimal Synthesis of Linear Sampling Control Systems Using Generalized Performance Indices, ASME Trans., vol. 80, pp. 1800—1826, November, 1958.

94. Kipiniak W. «Dynamic Optimization and Control: A Variational Approach», The M. I. T. Press. Cambridge, Mass, and John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.

95. Kishi F. H. The Existence of Optimal Control for a Class of Optimization Problems, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC—8, pp. 173—175, April, 1963.
96. Крэнк Дж., Сарачик П. Применение функционального анализа к задаче оптимального управления. «Техническая механика», 1963, № 2, стр. 10—19.
97. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования «Автоматика и телемеханика», т. 18, 1957, № 11, стр. 960—970.
98. К теории оптимального регулирования. «Автоматика и телемеханика», т. 20, 1959, № 4, стр. 255—294.
99. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования, «Прикладная математика и механика», т. 23, вып. 4, 1959, стр. 625—639.
100. Круг Г. К., Лецкий Э. К. Обучающийся автомат табуляторного типа. «Автоматика и телемеханика», т. 22, 1961, № 10.
101. Kurzweil F. Dynamic Synthesis of Higher—order Optimum Systems, *J. Basic Eng.*, ser. D, vol. 83, pp. 45—52, March, 1961.
102. Kushner H. J. Hill Climbing Methods for the Optimization of Multi—parameter Noise—disturbed Systems, *J. Basic Eng.*, 1963.
103. LaSalle J. P. Time—optimal Control Systems, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, vol. 45, pp. 573—577, 1959.
104. The Time Optimum Control Problem in «Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations», vol. 5, pp. 1—24, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1960.
105. LaSalle J. P. and S. Lefschetz. «Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications», Academic Press Inc., New York, 1961.
106. (Eds.) «International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics», Academic Press Inc., New York, 1963.
107. Lee E. B. Mathematical Aspects of the Synthesis of Linear Minimum Response—time Controllers, *IRE Trans. Autom. Control*, vol. AC—5, no. 4, pp. 283—289, September, 1960.
108. Design of Optimum Multi—variable Control Systems. *J. Basic Eng.*, vol. 83, 1961.
109. On the Time Optimal Control of Plants with Numerator Dynamics, *IRE Trans. Autom. Control*, June, 1961.
110. Time Optimal Control of Nonlinear Processes, *J. Basic Eng.*, ser. D, 1961.
111. On the Domain of Controllability for Linear Systems Subject to Control Amplitude Constraints, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC—8, pp. 172—173, April, 1963.
112. Лейтман Дж. (ред.) Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. «Наука», М., 1965.
113. Lendaris G. G. The Identification of Linear Systems, *AIEE Trans. Appl. Ind.*, vol. 81, pp. 231—242, September, 1962.
114. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. 1—3, *Автоматика и телемеханика*, т. 21, 1960, № 4, стр. 436—441; № 5, стр. 561—568; № 6, стр. 661—665.
115. Lewis J. B. and J. T. Tou. Optimum Sampled—data Systems with Quantized Control Signals, *IEEE Trans. Appl. Ind.*, 1963.
116. Li C. C. A Short Bibliography of Pontryagin's Maximum Principle of the Theory of Optimum Control, vol. AC—7, *IRE Trans. Autom. Control*, pp. 74—75, January, 1962.
117. McDonald D. C. Nonlinear Techniques for Improving Servo Performance, *Proc. Natl. Electron. Conf.*, vol. 6, pp. 400—421, 1950.
118. Merriam C. W., III. Use of a Mathematical Error Criterion in the Design of Adaptive Control Systems, *AIEE Trans.*, vol. 78, pp. 506—512, January, 1959.
119. An Optimization Theory for Feedback Control System Design, *inform. Control*, vol. 3, pp. 32—59, March, 1960.

120. Miele A. and J. O. Cappelleri. Topics in Dynamic Programming for Rockets, Sonderdruck Z. Flugwiss., no. 1, pp. 14—21, 1959.
121. Neustadt L. W. Synthesizing Time—optimal Controls, J. Math. Analysis Appl., December, 1960.
122. Discrete Time Optimal Control Systems, in J. P. LaSalle and S. Lefschetz (eds.), «International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics», Academic Press Inc., New York, 1963.
123. Ньюто́н Дж. К., Кайзе́р Дж. Ф. Теория линейных следящих систем. М., «Физматгиз», 1961.
124. O'Neaгн E. A. and Smyth R. K. Terminal Control System Applications, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC—6, pp. 142—153, May, 1961.
125. Pipes L. A. Solution of Variable Circuits by Matrices, J. Franklin Inst., vol. 224, pp. 767—777, December, 1937.
126. «Matrix Methods for Engineering», Prentice—Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1963.
127. Понтрягин Л. С. Некоторые математические проблемы, возникающие в связи с теорией оптимальных систем регулирования. Док. АН СССР, т. 110, 1956.
128. Бутковский А. Г.¹ Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965.
129. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования. Успехи матем. наук, т. 14, вып. 1, 1959, стр. 3—20.
130. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
131. Proc. Symp. Discrete Adaptive Processes, AIEE Special Publication, 1962.
132. Proc. Workshop State Space Techniques for Control Systems, AIEE Special Publication, 1962.
133. Roxin E. A Geometric Interpretation of Pontryagin's Maximum Principle, in J. P. LaSalle and S. Lefschetz (eds.), «International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics», pp. 303—324, Academic Press Inc., New York, 1963.
134. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. 1, 11, 111, Автоматика и телемеханика, т. 20, 1959, №№ 10—12, стр. 1320—1334, 1441—1458, 1561—1578.
135. Smith F. B., Jr. Time—optimal Control of Higher—order Systems, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC—6, no. 1, pp. 16—21, February, 1961.
136. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления, «Машиностроение», М., 1964.
137. Design of Optimum Digital Control Systems via Dynamic Programming, Proc. Dynamic Programming Workshop, AIEE, Purdue University Press, Lafayette, Ind., 1961.
138. A Simplified Approach to the Design of Minimum—time Control of Discrete—data Systems Subject to Saturation, Automatica, Kiev, U.S.S.R., 1963.
139. «Optimum Design of Digital Control Systems», Academic Press Inc., New York, 1963.
140. Optimum Control of Discrete System Subject to Saturation, IEEE Proc., 1964.
141. Dynamic Programming and Modern Control Theory, in R. H. MacMillan, T. J. Higgins and P. Naslin (eds.), «Progress in Control Engineering», Academic Press Inc., New York, 1964.
142. Synthesis of Discrete Systems Subject to Control Signal Saturation, J. Franklin Inst., May, 1964.
143. Tou J. T. and K. S. Fu. Digital Control Concepts for Nervous System Synthesis and Simulation, Proc. Third Intern. Congr. Cybernetics, 1961.

¹ Добавлено редактором.

144. Tou J. T. and P. D. Joseph. Digital Adaptive Control Systems, 11, Purdue University, Control and Information Systems Laboratory, TR 102, Lafayette, Ind., 1961.
 145. Modern Synthesis of Computer Control Systems, IEEE Trans. Appl. Ind., vol. 82, 1963.
 146. Tou, J. T. and Lewis J. B. Nonlinear Digital Control Systems, Purdue University, Control and Information Systems Laboratory, TR 201, Lafayette, Ind., 1961.
 146. Tou J. T., Y. T. Lin and Meksawan T. A Study of Digital Control Systems. Northwestern University, Computer Science Laboratory, TR 103, Evanston, Ill., 1963.
 147. Tou J. T. and Vadhanaphuti B. Optimum Control of Nonlinear Discrete—data Systems, AIEE Trans., vol. 80, pp. 166—171, 1961.
 148. Tou J. T. and Wilcox R. H. (eds.). «Computer and Information Sciences», Spartan Book Company, Baltimore, Md., 1964.
 149. Wing J. and Desoer C. A. The Multiple—input Minimal—time Regulator Problem (General Theory), IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC—8, pp. 125—136, April, 1963.
 150. Zadeh L. A. On the Identification Problem, IRE Trans. Circuit Theory, vol. CT—3, no. 4, December, 1956.
 151. Optimal Control Problems in Discrete—time Systems, in C. T. Leondes (ed.), «Computer Control Systems Technology», McGraw—Hill Book Company, New York, 1961.
 152. Zadeh L. A. and C. A. Desoer. «Linear System Theory», McGraw—Hill Book Company, New York, 1963.
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоматизация 12
 Автоматы конечные 83
 Адаптация 372—376
 Алгоритм вычислительный 409, 421, 425
 — для матрицы конверсии 423—426
 — оптимального закона управления 409—410
 — оптимальной оценки координат 421—423
 Аппараты космические, управление ориентацией 14
 Базис 48, 176
 — ортогональный 49
 Банахово пространство 79
 Быстродействие системы 139, 152, 181
 — максимальное 140
 (см. также управление, оптимальное по быстродействию)
 Вариационное исчисление 23, 229—258
 Вектор возмущающих воздействий 65
 — входа 82
 — выхода 82, 414
 — единичный 39
 — допустимого управления 216, 260, 261
 — количества движения 266, 271
 — l -мерный 39
 — нулевой 39, 44
 — оптимального управления 363
 — состояния 20, 65—68, 82, 83, 104, 105, 110—114, 118—121, 139—143
 — вспомогательный 293
 — входа 171
 — канонический 69, 177
 — объекта 169
 — оптимальная оценка 413—420
 — процесса 169
 — для управляющей функции 171
 Вектор суммирующий 40
 — управления 65, 167, 260
 Векторы 38—51
 — базисные 48, 176, 183—192
 — бесконечномерные 46
 — вычитание 40
 — длина 42
 — линейная комбинация 43
 — независимость 44
 — норма 42
 — ортогональные 41
 — основные операции 40, 41
 — свойства 41—45
 — расстояние 42
 — сложение 40
 — скалярное произведение 41
 — собственные 51
 — нормализованные 52
 — симметрической матрицы 52
 — — — свойства 52, 53
 — угол 42
 Вероятность апостериорная 374—376
 — априорная 373
 — условная 374
 Вложение инвариантное 262, 298, 305, 316, 322, 331, 333
 Воздействие входное, описание переменными состояниями 100—104
 — в виде линейной функции 101
 — — — полиномиальной функции 100
 Воздействие входное в виде синусоидальной функции 102
 — — — ступенчатой функции 101
 — — — экспоненциальной функции 102
 — пилообразной формы 103
 Гамильтониан 78, 267
 (см. также функция Гамильтона)
 Гильбертово векторное пространство 46
 Гиперкуб 205—211
 Гиперплоскость 31, 208—210
 Граман 45
 Граница переключения 218—224
 Динамическое программирование 23, 298—384
 — принцип оптимальности 303—338
 — управление с адаптацией 367—381
 — — по минимуму интегрального критерия 328—354
 — — — минимуму времени 361—366
 — — — конечным состоянием 355—361
 Евклидово пространство 32, 33, 39, 203
 Жорданова форма каноническая 60
 Задача автоматического управления 11—15
 — анализа 80
 — Больца 21
 — вариационная 23
 — изопериметрическая 233
 — Лагранжа 230
 — Мейера 230, 265
 — оптимизации системы со свободным конечным состоянием 266—268
 Задача перехвата 241, 242
 — проектирования оптимальной системы 20—24
 — синтеза 80
 Закон управления 181
 — оптимальный 21, 343, 356, 400, 413
 Интерполлятор линейный 94
 Квадратичные формы 54—58
 — дифференцирование 62
 — канонический вид 57
 — неопределенные 55
 — отрицательно определенные 55
 — — — полуопределенные 55
 — — — положительно определенные 55
 — — — полуопределенные 55
 Комбинация выпуклая 34, 35
 Конус 36
 — вершина 36
 — выпуклый 36
 — многогранный 37
 — многогранный 37
 — ортогональный 38
 — полярный 36
 Координаты обобщенные 72—79
 — состояния (см. переменные состояния)
 Коэффициент штрафа 344
 Коэффициенты весовые 343, 351
 Краевая задача двухточечная 245, 268, 270, 338
 Критерий качества 21, 152, 343, 392, 394, 406
 — квадратичный 251—254, 339—343, 394—399
 — линейный 358—361
 — интегральный 242—250, 288—296, 328—354
 Кронекера δ -функция 70
 Куб насыщения 205
 Лагранжиан 73, 77, 324
 Линейная алгебра 29
 Линия решений 207
 Матрица выхода 180, 414
 — Вандермонда 68—71
 — обратная 70
 — диагональная 26, 57, 60, 177
 — измеримых переменных 414, 421
 — коэффициентов 65, 83, 167—172, 176
 — конверсии 423—426
 — ковариаций 424—426
 — обхода 83, 180
 — обратной связи 192, 198, 396, 397, 409
 — ортогональная 57
 — передаточная 24, 25
 Матрица перехода 66, 67, 85, 104—110, 118—121, 141, 142, 154—158

- вычисление 85, 104—106, 166—174
- для управляющего воздействия 171
- нестационарной системы 68
- процесса 169, 171, 175
- системы 85, 104—106
- расширенная 85, 104—110
- свойства 166—174
- преобразующая 56—60, 221
- приведение к диагональной 56—60
- с различными собственными значениями 51, 56, 58, 59
- симметрическая 52
- треугольная 189
- управления 65, 83, 167, 169, 182, 282, 389
- управляемого перехода 171
- Матрицы подобные 60
- Метод функциональных уравнений 298—302
- математической индукции 379, 395
- вариации параметров Лагранжа 68
- переменного коэффициента усилителя 141—166
- — — для линейных систем 141—152
- — — для нелинейных систем 152—166
- Методы пространства состояний 9, 24, 80
- Многогранник выпуклый 35, 37
- Множество 30—38
- выпуклое 34—38
- границная точка 33
- замкнутое 33
- ограниченное сверху 33
- — — снизу 33
- основные свойства 31—33
- открытое 33
- представление 30
- связное 33
- строго ограниченное 33
- Множества, объединение 31
- пересечение 31
- теория 29
- точечные 30
- Множитель Лагранжа 218, 233, 255, 288, 337, 358
- векторный 251, 268, 278
- Модель информационная 375
- Момент обобщенный 75—79
- Наблюдаемость 180, 181
- Нелинейность типа насыщения 157, 159, 165, 211, 227
- Неравенство Шварца 42
- треугольника 42
- Оболочка выпуклая 35
- Ограничение, заданное неравенством, 204, 260, 277, 282, 292, 365
- интегральное 254, 288, 355
- Описание переменными состояния 83—87
- — — входных воздействий 100—104
- — — системы 87
- — — методом параллельного программирования 89, 90
- — — последовательного программирования 90
- — — прямого программирования 87—89
- Ошибка измерения 421, 423
- оценки 423, 425
- среднеквадратичная 17
- Оценка координат оптимальная 21, 47, 421—428
- — — построение алгоритма 422—426
- Переменные состояния 81—121
- выбор 96—100
- наилучшая оценка 21, 421—428
- выходные 81, 82
- входные 81, 82
- Плоскость решения 206, 207
- Подмножество 31
- Подпространство 46
- Показатель ошибки квадратичный 343—347, 391—393
- качества с весовыми коэффициентами, зависящими от времени, 343—354
- Полупространство закрытое 32
- открытое 32
- Полупрямая 37
- Последовательность управляющая 181, 182, 193, 194
- определение 181
- Правило Крамера 45
- Преобразование Гильберта 79
- каноническое 78
- Лапласа 85, 102, 110
- линейное 46—48, 69, 220
- подобия 60
- z-преобразование 16, 112, 143, 152
- Принцип Гамильтона 24
- вариационный 73
- Даламбера 73
- максимума 23, 259—277
- — — дискретный вариант 271, 272
- — — доказательство 272—277
- — — геометрическая интерпретация 265
- — — физическая интерпретация 268
- оптимальности 303—306, 394, 407, 416
- Проблема размещения инвестиций 299—302
- собственных значений 51
- регулирования производства 312—314
- Проектирование систем управления 16
- — — классический подход 17, 18
- — — — — ограничения 17
- — — — — основные понятия 16
- — — — — современный подход 18, 19
- — — — — преимущества 19, 354
- Проекция ортогональная 49—51, 414, 415, 422—426
- свойства 50, 51
- Произведение скалярное 41
- Пространство входа 82
- выхода 82
- состояний 82, 176, 183
- унитарное 46
- управление 203—211
- Процесс многомерный 176, 246—250, 321—324, 334—336, 398
- с координатами, недоступными для измерения 413—420
- решения многошагового 298—412
- стационарный 66, 83, 283, 405
- управления стохастический 368—372
- Процессы переходные конечной длительности 139—166, 208—216 (см. также быстродействие максимальное)
- — — в линейных дискретных системах 139—152
- — — в нелинейных дискретных системах 152—166
- — — процедура синтеза 157, 158
- — — расчет регулятора классическим методом 150—152
- — — — — с интегрированием 146—148
- — — — — без интегрирования 148—152
- — — условия 143, 156
- управления стационарные 393—399
- — — нестационарные 405—410
- Разложение параметрическое 345
- Ракета на ядерном горючем 15
- Реактор химический с мешалкой 95, 96, 234
- Решение оптимальное 304
- численное 327, 328
- Счетка 13
- Сила аэродинамического сопротивления 21, 241
- Симплекс 35
- Система уравнений, каноническая форма 177
- координат обобщенная 72—79
- многомерная 321—324, 334—336, 398

- несвязанная 25
- нормальная 219
- посадки самолета 22, 23, 96—100, 349—354, 376—381
- регулирования турбовинтового двигателя 201, 202, 235
- светового рефлекса глаза 13
- сопряженная 280—282, 292—296
- с фиксированной конечной точкой 234—238
- со свободной конечной точкой 238—241
- случайными параметрами 66, 83
- увеличенной размерности 83, 84, 265, 269, 278, 292, 298
- управления цифровая 140, 386—393
- Системы дискретные 91—95, 118—125, 152
 - анализ методом переходных состояний 110—112
 - нелинейные 152—166
 - оптимальное управление 152—158
 - процедура синтеза 157, 158
 - нестандартные 118—136
 - с конечной длительностью импульсов 128—131
 - с многократным прерыванием 121—125
 - с модуляцией импульсов по частоте 118
 - с переменной частотой прерывания 118, 125—128
 - с широтно-импульсной модуляцией 131—136
 - описание переменных состояний 91—94
 - оптимальное проектирование 11—15, 20—24, 385, 386
 - импульсные 114—116
 - управления оптимальные 16—19
 - устойчивость 112—114
- Собственные значения 52—65
- Стратегия управления оптимальная 304, 305, 315
- Схемы в переменных состояниях 86—103
 - для непрерывных систем 87—91
 - дискретных систем 91—94
- Теорема Байеса 383
 - Кэли-Гамильтона 61, 62
 - разложения Сильвестра 63—65
- Теория меры 79
 - подгрупп 79
 - множеств 29, 30
- Траектория снижения самолета при посадке 23, 351—354
- Управление с адаптацией 372—381
 - допустимое 182, 216, 260, 261
 - конечным состоянием 254—257, 283—288, 355—361
 - по линейному критерию 358—361
 - оптимальное, обобщенная формулировка частных задач 262—265
- Управление, оптимальное по быстродействию 139—166, 181—266, 366, 367 (см. также управление по минимуму времени)
 - для дискретных систем с насыщением 152—166, 203—215
 - для линейных дискретных систем 181—202
 - для непрерывных систем 216—226
 - расчет методом последовательных итераций 193—200
- — — — — методом преобразования координат 182—192
- — — — — процессом второго порядка 224—226, 280—281, 366, 367
- — — — — процессом n -го порядка 216—219
- — — — — фундаментальная теорема 217—224
- по минимуму интеграла 242—250, 260—264, 288—292, 320—354
- — — — — процессами бесконечной длительности 331, 332
- — — — — процессами, зависящими от времени, 332—334
- — — — — от квадрата ошибки 343
- — — — — от квадратичной функции 340—343
- — — — — для многомерных систем 334—336
- по минимуму энергии 292—296
- — — — — времени 361—367, 277—283
- по разомкнутой цепи 12
- с самообучением 368, 372—381
- Умножение на скаляр 41
- Управляемость 174
 - дискретных систем 174—176
 - непрерывных систем 176—179
 - определение 178
 - составных систем 178, 179
 - региональная 179
 - условия 176, 178
- Уравнение Гамильтона — Якоби 79, 324—327
 - дифференциальное векторно-матричное 20, 65—67, 69, 83, 137, 169, 251
 - минимальное 61
 - перехода (см. переходных состояний)
- Уравнение переходных состояний 110—112, 118—121, 141—172, 193—197, 390
 - сопряженное 280, 282
 - состояния 82
 - характеристическое 61
 - Эйлера — Лагранжа дифференциальное 237, 244, 250, 257
- Уравнения Гамильтона 75, 76, 267
 - канонические 77
 - Лагранжа 72—74
 - для консервативной системы 73
 - Риккати 347—356
- Условие Вейерштрасса необходимое 320
 - граничное естественное 320
 - Лежандра 319
 - трансверсальности 240, 321
- Фиксатор 91, 93, 95, 114—116, 122, 125, 132, 140, 144, 146, 172, 187
- Фоторецептор 13
- Функция Гамильтона 75, 266, 268, 275, 277, 278
 - для кинетической энергии 75
 - — — — — полной энергии 77
 - импульсная переходная 167
 - переключения 219—224, 282, 294, 295
 - плотности вероятности 373, 374
 - Понтрягина 267, 268, 272, 276, 278
 - Релея диссипативная 74
 - управляющая 181
 - характеристическая 52
- Характеристика насыщения асимметричная 165
 - идеализированная 159
- Элемент солнечный 14
- усилительный 141, 154
- Якобиан 256

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие автора	6
Глава 1. Введение в проблематику систем управления	11
1.1. Проблема автоматического управления	11
1.2. Основные принципы построения систем управления	16
1.3. Задача проектирования оптимальной системы	20
1.4. Обзор классических методов расчета многомерных систем управления	24
Глава 2. Математические основы	29
2.1. Введение в теорию множеств	30
2.2. Конечномерное векторное пространство	38
2.3. Проблема собственных значений и квадратичные формы	51
2.4. Векторно-матричные дифференциальные уравнения	65
2.5. Обобщенные координаты	72
2.6. Заключение	79
Глава 3. Анализ систем управления методами пространства состояний	80
3.1. Понятие пространства состояний	80
3.2. Описание систем переменными состояниями	83
3.3. Описание входных воздействий переменными состояниями	100
3.4. Матрица перехода	104
3.5. Анализ дискретных систем управления методом переходных состояний	110
3.6. Нестандартные дискретные системы	118
3.7. Заключение	136
Глава 4. Расчет систем управления методом переходных состояний	139
4.1. Цифровое управление, минимизирующее длительность переходных процессов в линейных системах при воздействиях типа ступенчатой функции	139
4.2. Оптимальное управление нелинейными дискретными системами	152
4.3. Дальнейшее рассмотрение свойств матрицы перехода	166
4.4. Понятие управляемости и наблюдаемости	174
4.5. Оптимальное по времени управление в линейных дискретных системах	181
4.6. Оптимальное по времени управление в дискретных системах с насыщением	203
4.7. Оптимальное по времени управление в непрерывных системах	216
4.8. Заключение	226
Глава 5. Вариационное исчисление в оптимальном управлении	229
5.1. Формулировка проблемы вариационного исчисления	229
5.2. Основная задача минимизации	234

5.3. Управление по минимуму интегральной оценки	242
5.4. Множители Лагранжа и учет физических ограничений	250
5.5. Заключение	257
Глава 6. Введение в принцип максимума	259
6.1. Задачи оптимального управления	259
6.2. Принцип максимума	265
6.3. Доказательство принципа максимума	272
6.4. Задача управления по минимуму времени	277
6.5. Задача управления конечным состоянием	283
6.6. Управление по минимуму интеграла	288
6.7. Заключение	296
Глава 7. Введение в динамическое программирование	298
7.1. Многошаговые процессы решения и функциональные уравнения	298
7.2. Принцип оптимальности	303
7.3. Основная проблема оптимизации	316
7.4. Процессы управления по минимуму интегрального критерия	328
7.5. Процессы управления конечным состоянием	355
7.6. Процессы управления по минимуму времени	361
7.7. Стохастические и адаптивные процессы управления	367
7.8. Заключение	381
Глава 8. Теория управления с применением электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ)	385
8.1. Принципы использования ЭЦВМ для управления	386
8.2. Управление стационарными процессами	393
8.3. Управление нестационарными процессами	405
8.4. Многомерный процесс с координатами, недоступными для наблюдения и измерения	413
8.5. Оптимальная оценка координат	421
8.6. Заключение	428
Упражнения	430
Литература	461
Предметный указатель	468

Юлиус Т. Ту
Современная теория управления

Редактор издательства *Е. В. Григорин-Рябова* Технический редактор *Н. Ф. Дёмкина*
 Корректор *Е. В. Сабинич* Переплет художника *А. Я. Михайлова*

Сдано в производство 26/VI 1970 г. Подписано к печати 10/XII 1970 г.
 Тираж 10 500 экз. Печ. л. 29,5 Бум. л. 14,75 Уч.-изд. л. 28
 Формат 60 × 90^{1/16} Цена 2 р. 26 к. Заказ № 198

Издательство «МАШИНОСТРОЕНИЕ», Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3

Экспериментальная типография ВНИИ полиграфии
 Комитета по печати при Совете Министров СССР
 Москва К-51, Цветной бульвар, 30